

Билет №1

1. Определение точной верхней грани множества, точной нижней грани множества. Приведите примеры
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + \dots + (2n - 1)}{3n^2}$$

3. Построить график, найти обратную функцию, исследовать свойства четности/нечетности и возрастания/убывания: $y = 3x^2 - 2x$
4. Найти угол между векторами $\vec{a}(4; -2; -4)$ и $\vec{b}(6; -3; 2)$.

Билет №2

1. Определение функции. Определения возрастающей, убывающей, четной, нечетной и периодичной функции. Приведите примеры.
2. Выяснить, ограничены ли последовательности:

- $\frac{4n + 7}{6n - 3}$
- $(-1)^n \cdot n - \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\sqrt{2}}$

3. Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

4. Найти угол между векторами $\vec{a}(8; 1; -3)$ и $\vec{b}(-2; 3; 6)$.

Билет №3

1. Определение последовательности в кванторах. Пример.
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + 5 \cdot 4^{n+1}}{2 \cdot 5^{n-1} + 3^{n+2}}$$

3. Построить график, найти обратную функцию, исследовать свойства четности/нечетности и возрастания/убывания: $y = \frac{2}{x + 4}$
4. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 28 \\ 4x + y + 4z = 27 \\ 4x + 2y + 5z = 34 \end{cases}$$

Билет №4

1. Определения ограниченной, монотонной последовательности. Примеры.
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$$

3. Построить график, найти обратную функцию, исследовать свойства четности/нечетности и возрастания/убывания: $y = 3 \sin(2x)$
4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин:

$$A(2; 1; 1), B(4; 2; 3), C(3; 4; 2), D(3; 4; 2)$$

Билет №5

1. Определения бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей. Сумма бесконечно малых последовательностей. Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей. Приведите примеры.
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{10n-21}}{5n-15}$$

3. Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$$

4. Выполнить действия $A \cdot (B - C)^{-1} \cdot D$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -5 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Билет №6

1. Второй замечательный предел последовательности. Число e
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n - 5}{1 + n + 3n^2}$$

3. Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$$

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин:

$$A(-2; 4; -2), B(-4; -2; -6), C(6; 4; 2), D(-6; -4; -2)$$

Билет №7

1. Частичный предел последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности. Примеры.
2. Найти частичные пределы последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-3)^n + 5 \cdot 4^{n+1}}{2 \cdot (-5)^{n-1} + 3^{n+2}}$$

3. Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - w = -8 \\ 5x + 10y - 16z + w = -39 \\ x + 2y + 2z - 7w = 11 \end{cases}$$

Билет №8

1. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности.
2. Найти частичные пределы последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \cos n$$

3. Найти предел функции:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

4. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 6x + 2y + 7z = 52 \\ 4x + y + 4z = 30 \\ 7x + 2y + 8z = 58 \end{cases}$$

Билет №9

1. Предел функции (определение по Коши)
2. Используя метод математической индукции, доказать следующее утверждение:

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

3. Найти производную функции:

$$y = x \arcsin(\ln x)$$

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин:

$$A(-3; 2; 1), B(-6; -3; -5), C(5; 6; 3), D(-5; -6; -3)$$

Билет №10

1. Предел функции (определение по Гейне). Приведите примеры последовательностей Гейне.
2. Используя метод математической индукции, доказать следующее утверждение:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Найти производную функции:

$$y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + 9)$$

4. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 5x + 3y + 6z = 66 \\ 6x + y + 6z = 59 \\ 6x + 3y + 7z = 75 \end{cases}$$

Билет №11

1. Односторонние пределы функции
2. Используя метод математической индукции, доказать следующее утверждение:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

3. Найти производную функции:

$$y = 6 \cos \frac{2x}{3}$$

4. Выполнить действия $A \cdot (B - C)^{-1} \cdot D$, где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 7 & -1 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -9 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Билет №12

1. Первый замечательный предел (с доказательством)
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \right)$$

3. Найти производную функции:

$$y = \frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+1)^3}$$

4. Найти угол между векторами $\vec{a}(-3; 2; 1)$ и $\vec{b}(-6; -3; -5)$.

Билет №13

1. Определение производной функции. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Примеры
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} + 2 \cdot 4^n}{4^{n+1} - 5}$$

3. Найти производную функции:

$$y = \sqrt[2x]{\frac{x+2}{x-2}}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - w = -11 \\ 6x + 12y - 19z + w = -65 \\ x + 2y + 2z - 8w = 12 \end{cases}$$

Билет №14

1. Производная сложной функции. Производная функции, заданной параметрически. Примеры
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}$$

3. Найти производную функции:

$$y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$$

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин:

$$A(-3; 1; 2), B(-5; -2; -3), C(3; 5; 2), D(-3; -5; -2)$$

Билет №15

1. Производные неявной функции
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt{n^2 - 2n + 5})$$

3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба:

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин:

$$A(-3; 4; -1), B(-5; -2; -6), C(6; 5; 2), D(-6; -5; -2)$$

Билет №16

1. Определение точки экстремума
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n - 5}{n + 1}$$

3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба:

$$y = \frac{(x - 1)^2}{x - 2}$$

4. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 6x + 2y + 7z = 59 \\ 5x + y + 5z = 41 \\ 7x + 2y + 8z = 66 \end{cases}$$

Билет №17

1. Теорема Лагранжа
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^3 + 15n^2 + 9n + 1}{5n^4 + 6n^2 - 3n - 4}$$

3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба:

$$y = e^{-x^2}$$

4. Найти угол между векторами $\vec{a}(-5; -2; -6)$ и $\vec{b}(-6; -3; -5)$.

Билет №18

1. Правило Лопиталя. Пример использования
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{3n^2 + 4n - 5}$$

3. Даны параметрические уравнения. Найти $\frac{dy}{dx}$.

$$x = t^2 + 1, \quad y = t^3 - t$$

4. Найти угол между векторами $\vec{a}(-5; -2; -6)$ и $\vec{b}(-3; -5; -2)$.

Билет №19

1. Формула Тейлора
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)^2 - (n+1)^2}{n^2 + n + 1}$$

3. Найти асимптоты:

$$y = \frac{5x^2 + 2x - 1}{1 - x}$$

4. Выполнить действия $A \cdot (B - C)^{-1} \cdot D$, где

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 9 & -2 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -6 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Билет №20

1. Линейно зависимая система векторов. Линейно независимая система векторов
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

3. Найти асимптоты

$$y = x + \ln x$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y - 4z - w = -11 \\ 5x + 10y - 21z + w = -54 \\ x + 2y + 3z - 7w = 18 \end{cases}$$

Билет №21

1. Точка перегиба функции. Выпуклость графика функции
2. Найти частичные пределы последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot (1 - (-1)^n)$$

3. Найти асимптоты

$$y = \frac{(x+1)^2}{x-3}$$

4. Найти объем пирамиды, если известны координаты ее вершин:

$$A(1; 3; -4), B(-2; -3; -6), C(6; 2; 3), D(-6; -2; -3)$$

Билет №22

1. Наклонная, горизонтальная, вертикальная асимптота
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(n^2 + 5)(n^4 + 2)} - \sqrt{n^6 - 3n^3 + 5}}{n}$$

3. Дана неявная функция. Найти её производную.

$$e^x \sin(y) = x + y$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y - 4z - w = -15 \\ 6x + 12y - 25z + w = -89 \\ x + 2y + 3z - 8w = 20 \end{cases}$$

Билет №23

1. Правило Крамера. Пример использования
2. Найти предел последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}$$

3. Дана неявная функция. Найти её производную.

$$x^2 + y^2 = 25$$

4. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 6x + 3y + 7z = 50 \\ 2x + y + 2z = 16 \\ 7x + 3y + 8z = 55 \end{cases}$$