

Билет №1

1. Сформулировать критерий Дарбу об интегрируемости функции

2. Найти неопределенный интеграл: $\int x\sqrt{1+3x}dx$

3. Найти определенный интеграл: $\int_0^{\ln 2} xe^x dx$

4. Эллипс задан параметрически следующим видом:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \\ a > b \end{cases}$$

Найти длину эллипса в общем виде.

Билет №2

1. Докажите, что $\int f^{-1}(x)dx = x \cdot f(x) - F(f^{-1}(x)) + C$. где $f^{-1}(x)$ - обратная к $f(x)$ функция

2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{tg(x)}}$

3. Найти определенный интеграл: $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \cos x}$

4. Найти объем фигуры, полученной вращением $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ вокруг оси OX . $x \in [1, +\infty]$

Билет №3

1. Определение интеграла по Риману

2. Найти неопределенный интеграл: $\int \operatorname{arctg}(x)dx$

3. Найти определенный интеграл: $\int_0^e \ln x^2 dx$

4. Найти значения α , при которых интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ имеет конечное значение (сходится).

Подсказка: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a))$

Билет №4

1. Длина дуги в полярных координатах
2. Найти неопределенный интеграл: $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx$
3. Найти определенный интеграл: $\int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx ; \quad a > b$
4. Найти длину дуги: $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] ; \quad r(\varphi) = \sqrt{2}e^\varphi$

Билет №5

1. Определение первообразной. Определение неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.
2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{2^x + 1}$
3. Найти определенный интеграл: $\int_0^{\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})} \operatorname{arccotg}(x) dx$
4. Найти объем тела, полученного вращением $f(x) = e^x$ вокруг оси OY . $y \in [\ln 2, \ln 32]$

Билет №6

1. Теорема о замене переменной в неопределенном интеграле.
2. Найти неопределенный интеграл: $\int e^{\arccos x} dx$
3. Найти определенный интеграл: $\int_{-e}^e \operatorname{sh} x dx ; \quad \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \operatorname{sh} x$
4. Найти площадь фигуры в полярных координатах: $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] ; r(\varphi) = 2^\varphi$

Билет №7

1. Теорема об интегрировании по частям
2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{x^2 - 6x}$
3. Найти определенный интеграл: $\int_{-e}^e \operatorname{ch} x dx ; \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$
4. Найти объем тела, полученного вращением $f(x) = \arcsin(x)$ вокруг оси OX . $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Билет №8

1. Интегрирование тригонометрических функций, подстановки.

2. Найти неопределенный интеграл: $\int 6 \cdot 3^{x^6+2} \cdot x^5 dx$

3. Найти определенный интеграл: $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^4 x dx$

4. кривая задана в параметрическом виде следующим образом:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Найти длину дуги кривой при $t \in \left[0, \frac{17\pi}{9}\right]$

Билет №9

1. Задача, приводящая к понятию определенного интеграла.

2. Найти неопределенный интеграл: $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

3. Найти определенный интеграл: $\int_1^3 \frac{x+8}{x^2+x+7} dx$

4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX функции $f(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$; $x \in [10, 100]$

Билет №10

1. Определение разбиения отрезка. Определение интегральной суммы.

2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}} dx$

3. Найти определенный интеграл: $\int dx$

4. Найти площадь функции $r(\varphi) = 2(1 + \cos(\varphi))$; $\varphi \in [0, \pi]$

Билет №11

1. Геометрический смысл определенного интеграла.

2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{2x^2-1}{x^3-5x^2+6x} dx$

3. Найти определенный интеграл: $\int dx$

4. Найти длину следующей кривой: $r(\varphi) = 4(1 + \cos \varphi)$; $\varphi \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$

Билет №12

1. Необходимое условие интегрируемости.
2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx$
3. Найти определенный интеграл: $\int dx$
4. Найти объем тела, полученного вращением $f(x) = \log_7 e^x$ вокруг оси ОХ. $x \in [0, 1]$

Билет №13

1. Верхняя и нижняя суммы Дарбу.
2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{(1 + \cos(2x))^3}{\cos(2x)} dx$
3. Найти определенный интеграл: $\int dx$
4. Найти длину следующей кривой: $r(\varphi) = \sqrt{3}(1 + \sin \varphi)$; $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{e}\right]$

Билет №14

1. Интегралы Дарбу.
2. Найти неопределенный интеграл: $\int \sin(10x) \sin(15x) dx$
3. Найти определенный интеграл: $\int dx$
4. Найти объем конуса, радиус основания которого равен R , используя определенный интеграл. Высоту конуса считать за h . $R > 0, h > 0$

Билет №15

1. Критерий Дарбу интегрируемости функции.
2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$
3. Найти определенный интеграл: $\int dx$
4. Найти объем шара радиуса $R, R > 0$, используя определенный интеграл.

Билет №16

1. Интегрирование по частям в определенном интеграле.

2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{4 \sin(2x + 3)}{\sqrt{4 - 4 \cos^2(2x + 3)}} dx$
3. Найти определенный интеграл: $\int dx$
4. Вывести формулу длины окружности, используя определенный интеграл. Считать, что радиус окружности равен $R, R > 0$

Билет №17

1. Интеграл от четных функций по симметричному промежутку. Интеграл от нечетных функций по симметричному промежутку. Интеграл от периодических функций на отрезке, кратном периоду.
2. Найти неопределенный интеграл: $\int (x^2 - 2x + 3) \cdot \cos x dx$
3. Вывести формулу площади эллипса, используя определенный интеграл. Эллипс задается следующим образом: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0, a > b$

Билет №18

1. Определение гладкой кривой. Длина гладкой кривой.
2. Найти неопределенный интеграл: $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - 4 \ln x}}$
3. Найти определенный интеграл: $\int dx$
4. Найти объем тела, полученного вращением функции $f(x) = \sin(x^3)$ вокруг оси OX .
 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$