Sin law :

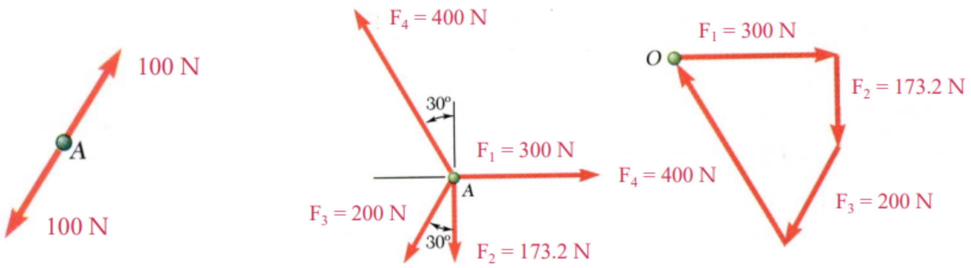
$$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c}$$

Cos law :

$$C^2 = B^2 + A^2 - 2AB\cos C$$

Vectors :

Newton's First Law：如果粒子上的合力為零，則粒子將保持靜止或以勻速直線運動



- Particle acted upon by two forces:
  - equal magnitude
  - same line of action
  - opposite sense

- Particle acted upon by three or more forces:
  - graphical solution yields a closed polygon
  - algebraic solution

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = 0$$

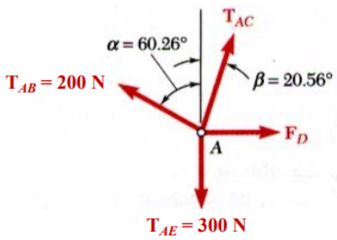
Coeff. of $\hat{j} = 0$

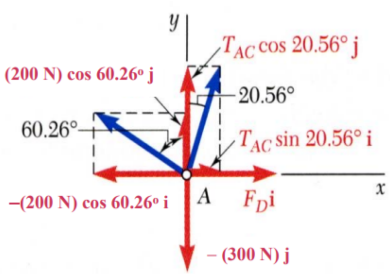
Coeff. of $\hat{\imath} = 0$

$$\boxed{\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0}$$

10

Example

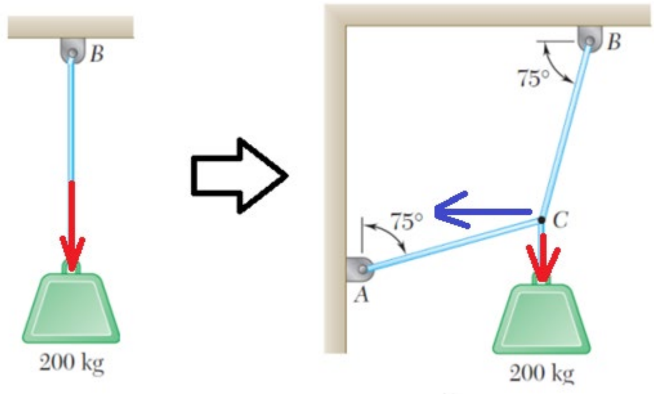




- Resolve the three forces into two component equations.

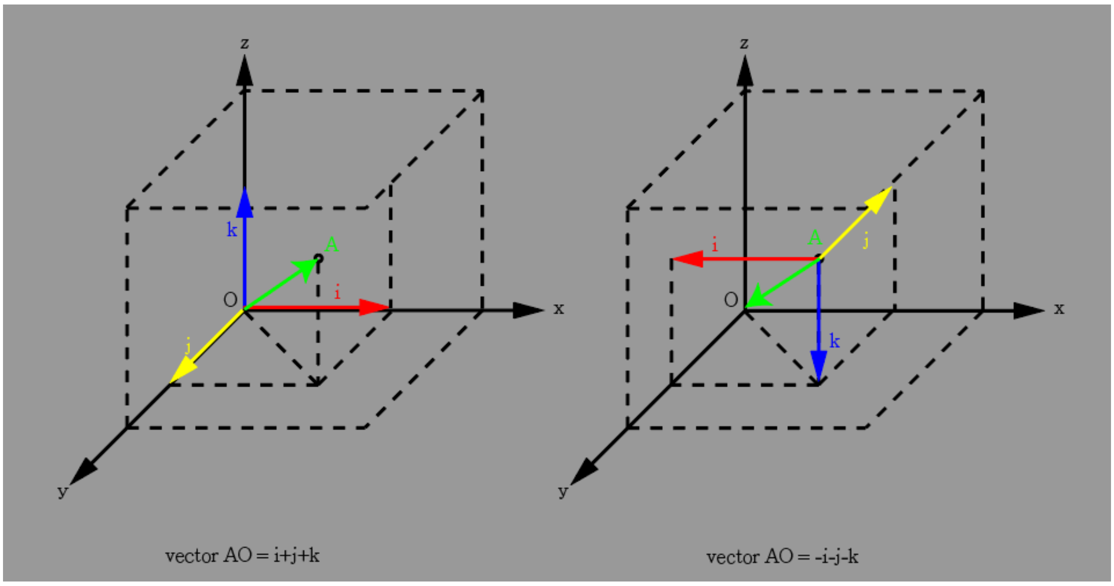
$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{AB} &= -(200\text{ N})\sin 60.26°\,\mathbf{i} + (200\text{ N})\cos 60.26°\,\mathbf{j} \\
&= -(173.66\text{ N})\mathbf{i} + (99.21\text{ N})\mathbf{j} \\
\mathbf{T}_{AC} &= T_{AC}\sin 20.56°\,\mathbf{i} + T_{AC}\cos 20.56°\,\mathbf{j} \\
&= 0.3512T_{AC}\,\mathbf{i} + 0.9363T_{AC}\,\mathbf{j} \\
\mathbf{T}_{AE} &= -(300\text{ N})\mathbf{j} \\
\mathbf{F}_D &= F_D\mathbf{i}
\end{aligned}$$

<<力的想像>>

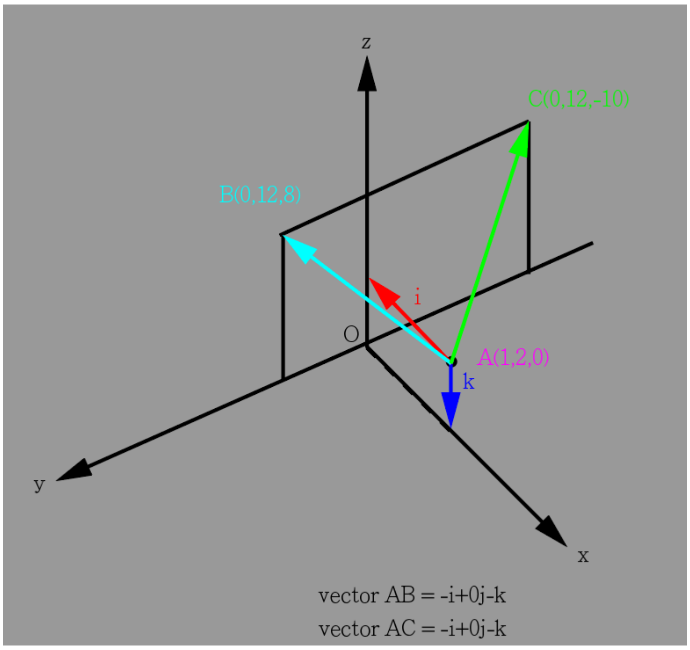


首先可以想像淨重的情況，即只有重力的情況，之後再想像力到底會向邊個方向移動，例如圖中是向左，那麼可以就可以在 C 中心點水平方向找到向左力，而由於明顯地顯示力不只有 x 軸，而是有一條斜線，而這斜線位於 C 中心點下方，因此仲有個力就是向下了。

<<Vector 找方向>>



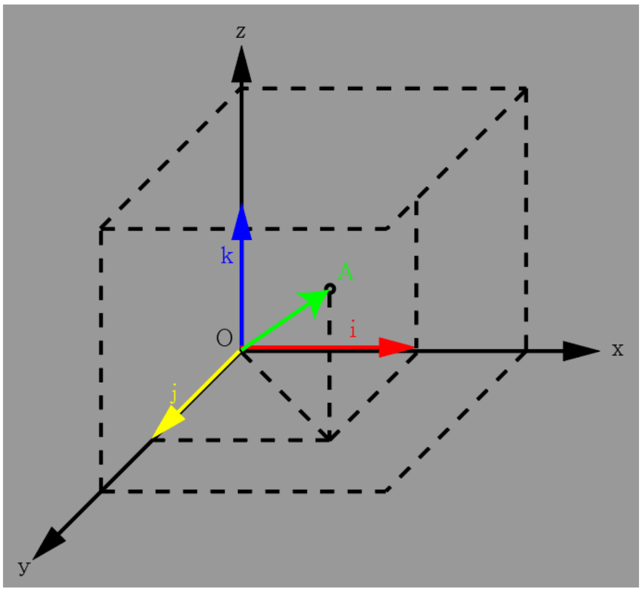
找出 i,j,k 是正值還是負值的原理是首先將 vector AO 拆開他的 i,j,k 方向，以每個 i,j,k 獨立觀看，而且以 O 定義角度上的展開，如果 AO i,j,k 箭嘴方向是遠離 O 的 i,j,k 軸，相應的 i,j,k 就是正值，如果 AO i,j,k 箭嘴方向是指向 O 的 i,j,k 軸，相應的 i,j,k 就是負值。



1.AB 與 AC 也是 0j,因為與 O 的 y 軸同一位置
2.AB 與 AC 也是-1i,因為在 O 的 x 軸上,AO 的朝向中心
3.在 AC 中，雖然他的遠離中心,但是是在 O 的 z 軸負值上,
可以想像放返在 z 正軸上來觀察,這就可以看得出他也是負方向

<<unit vector >>

是以 vector 為 unit 單位的參考系，在這個參考系中，可以找出根據例如 xyz 參考系的數據，來找出相應的 unit vector 值，透過此值可以讓其他參考系(例如力的方向參考系)的數值澄現在 vector 參考系的 vector 向量值。



unit vector 就是在 vector 參考系中的單位，在 vector 參考系中，1 也就是 1 unit vector，這條公式是為了方便理解:

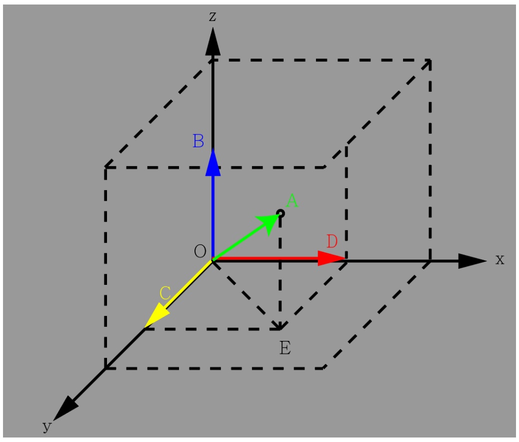
$$|\vec{e}| = \sqrt{(\frac{A_x}{|\vec{AO}|})^2 + (\frac{A_y}{|\vec{AO}|})^2 + (\frac{A_z}{|\vec{AO}|})^2} = 1$$

Unit vector 計算:

i.找出 AO 在 xyz 中的長度，其實也就是 vector 的絕對值

$$|\vec{AO}| = AO = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$$

證明:



$$OE = \sqrt{OC^2 + OD^2}$$
$$OA = \sqrt{OE^2 + OB^2}$$
$$OA = \sqrt{\sqrt{(OC^2 + OD^2)}^2 + OD^2}$$

ii.找出 unit vector，let e = length in unit vector form

在多個軸上斜線得出的 unit vector:

$$\overrightarrow{e_{xyz}} = = \frac{\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AO}|} = \frac{A_x i + A_y j + A_z k}{|\overrightarrow{AO}|} = \frac{A_x i}{|\overrightarrow{AO}|} + \frac{A_y j}{|\overrightarrow{AO}|} + \frac{A_z k}{|\overrightarrow{AO}|}$$

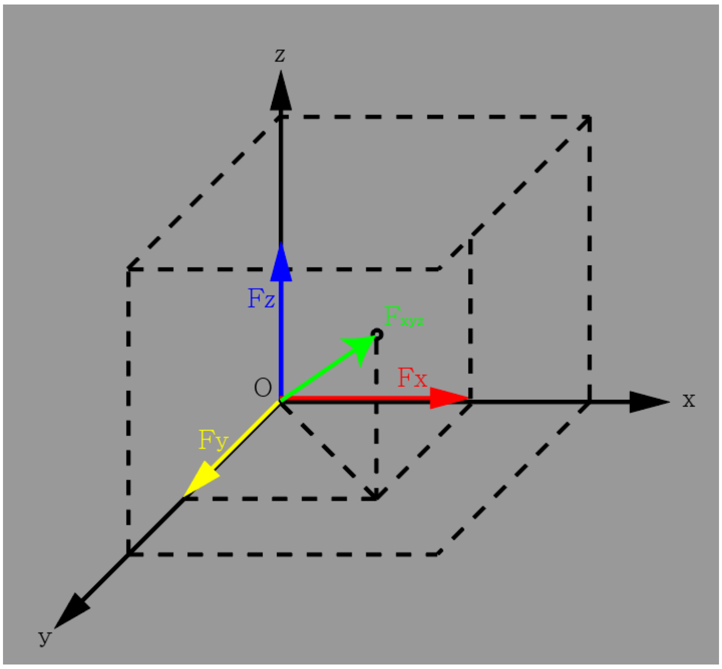
單個軸上的 unit vector:

$$\overrightarrow{e_x} = \frac{\overrightarrow{A_x}}{|\overrightarrow{A_{xyz}}|}$$

iii. force in vector form :

$$\overrightarrow{F_{AO}} = |\overrightarrow{F_{AO}}|\overrightarrow{e_{xyz}} = F_{AO}\left(\frac{A_x i + A_y j + A_z k}{|\overrightarrow{AO}|}\right)$$

iv. 力分拆



剛剛的得出的 AO unit vector 套用在力上其實就是 Fxyz 斜方向的力，因此就是剛剛提到的 F 在 vector 參考系上的 vector force:

$$\overrightarrow{F_{AO}} = |\overrightarrow{F_{AO}}|\vec{e} = F_{AO}\left(\frac{A_x i + A_y j + A_z k}{|\overrightarrow{AO}|}\right)$$

但 Fxyz 力是可以獨立分拆出 Fx ,Fy,Fz，因為 Fxyz 其實是由 3 個不同方向力得出的結果，因此可以得出每個軸的力，但值得注意是找出某方的 vector force 是以 vector force 絕對值乘返該 unit vector 即可而不需再先分拆出 Fx ,Fy,Fz，因為 unit vector 已經可以幫助分拆返單一方向力。
另外因為單個軸的 unit vector 才是有數值，另外 2 個方向是 0，因此單個軸的 unit vector 只有單個 i 或 j 或 k:

$$\boxed{\overrightarrow{F_x} = \left|\overrightarrow{F_{AO}}\right|\vec{e} = \left|\overrightarrow{F_{xyz}}\right|\vec{e} = F_{xyz}\left(\frac{A_x i}{\left|\overrightarrow{AO}\right|}\right)}$$

證明(未完成，無法證明):
以公式代入:

$$\overrightarrow{F_x} = F_{xyz}\left(\frac{A_x i}{\left|\overrightarrow{AO}\right|}\right) = \left(\sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2}\right)\frac{A_x i}{\sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}}$$

$$\overrightarrow{F_x} = F_{xyz}\left(\frac{A_x i}{\left|\overrightarrow{AO}\right|}\right) = \left(\sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{{A_y}^2 + {A_z}^2}}\right)i$$

$$\overrightarrow{F_x} = \left(\sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{{A_y}^2 + {A_z}^2}}\right)i$$

$$\overrightarrow{F_x} = i\sqrt{({F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2)\left(\frac{1}{{A_y}^2 + {A_z}^2}\right)}$$

如果是直接從 Fxyz 分拆出 Fx ,Fy,Fz 後再計:

$$\left|\overrightarrow{F_{xyz}}\right| = F_{xyz} = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2}$$

$$F_x = \sqrt{{F_{xyz}}^2 - {F_y}^2 - {F_z}^2}$$

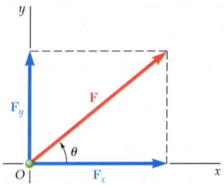
In vector form:

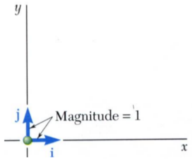
$$\overrightarrow{F_x} = F_x(\vec{e}) = F_x\left(\frac{\overrightarrow{A_x}}{\left|\overrightarrow{A_x}\right|}\right) = \left(\sqrt{{F_{xyz}}^2 - {F_y}^2 - {F_z}^2}\right)\left(\frac{A_x i}{\left|\overrightarrow{A_x}\right|}\right)$$

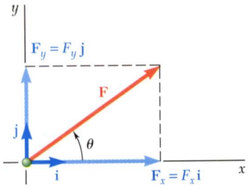
$$\overrightarrow{F_x} = \left(\sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2 - {F_y}^2 - {F_z}^2}\right)\left(\frac{A_x i}{\left|\overrightarrow{A_x}\right|}\right)$$

$$\overrightarrow{F_x} = (F_x)\left(\frac{A_x i}{\left|\overrightarrow{A_x}\right|}\right)$$

$$\overrightarrow{F_x} = (F_x)(i)$$







- It is possible to resolve a force vector into perpendicular components so that the resulting parallelogram is a rectangle. $\mathbf{F}_x$ and $\mathbf{F}_y$ are referred to as ***rectangular vector components*** and

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$$

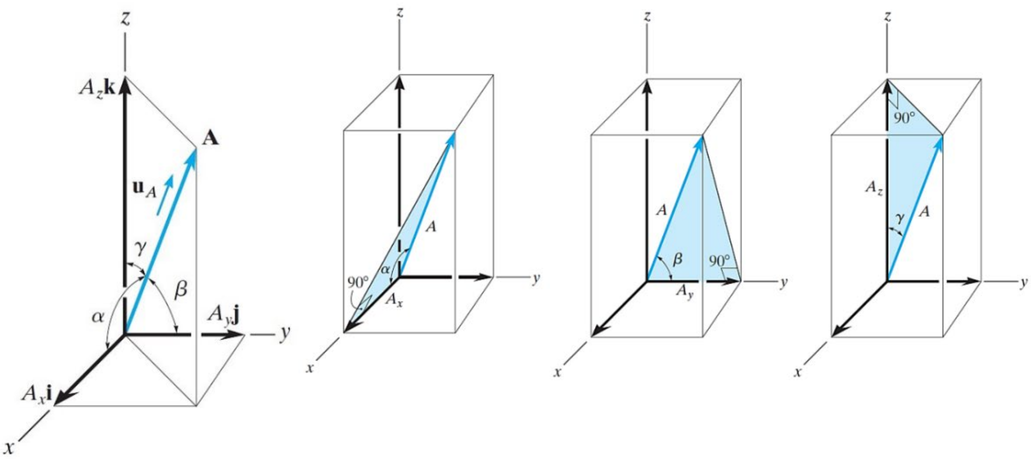
- Define perpendicular ***unit vectors*** **i** and **j** which are parallel to the *x* and *y* axes.

- Vector components may be expressed as products of the unit vectors with the scalar magnitudes of the vector components.

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$$

$\mathbf{F}_x$ and $\mathbf{F}_y$ are referred to as the ***scalar components*** of **F**.

<<unit vector angle>>



$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|}，\cos\beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|}，\cos\gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k = \mu_A$$

μ_A =在多個軸上斜線得出的 unit vector，即 vector A 的 unit vector

α = 3 維斜線對 x 軸的角度，注意不是將 3 維斜線轉 2 維斜線後再對 x 軸的角度

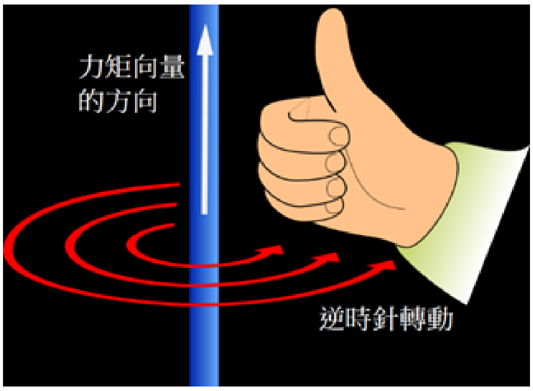
β = 3 維斜線對 y 軸的角度，注意不是將 3 維斜線轉 2 維斜線後再對 y 軸的角度

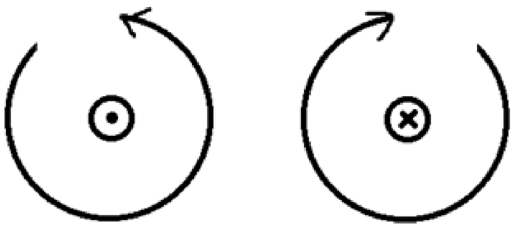
γ = 3 維斜線對 z 軸的角度，注意不是將 3 維斜線轉 2 維斜線後再對 z 軸的角度

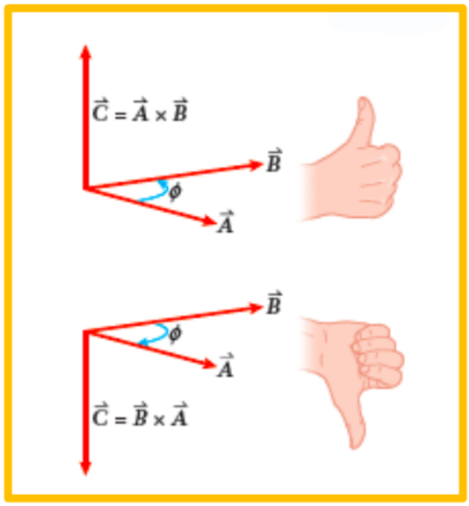
<<扭矩>>

右手定律:

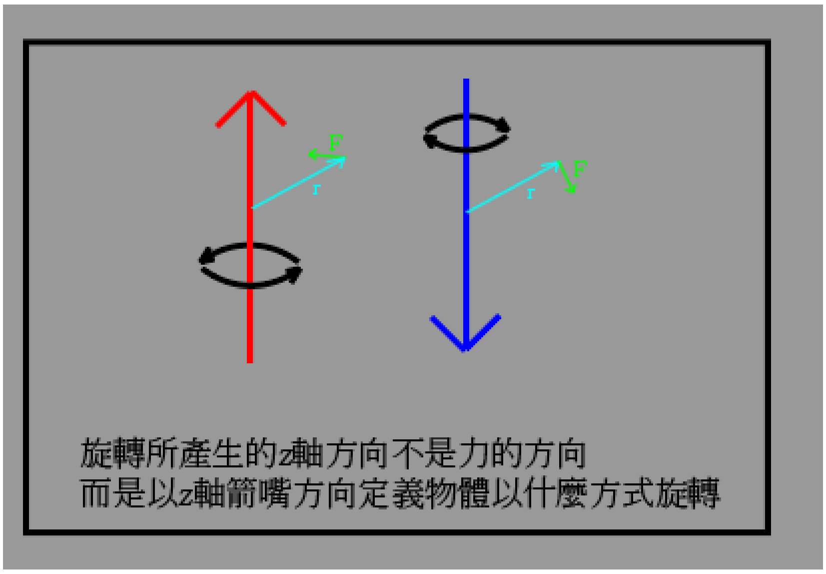
如果結構逆時針旋轉，則力矩向量的方向指出平面，注意這個力矩向量不是指力的方向，而是形容轉動的軸方向，目的只是方便計算，意思就是以力矩向量作為單一方向以表示到他轉動的方向，令到不會出現平面上同時以 x 及 y 軸 2 個方向才能表示。

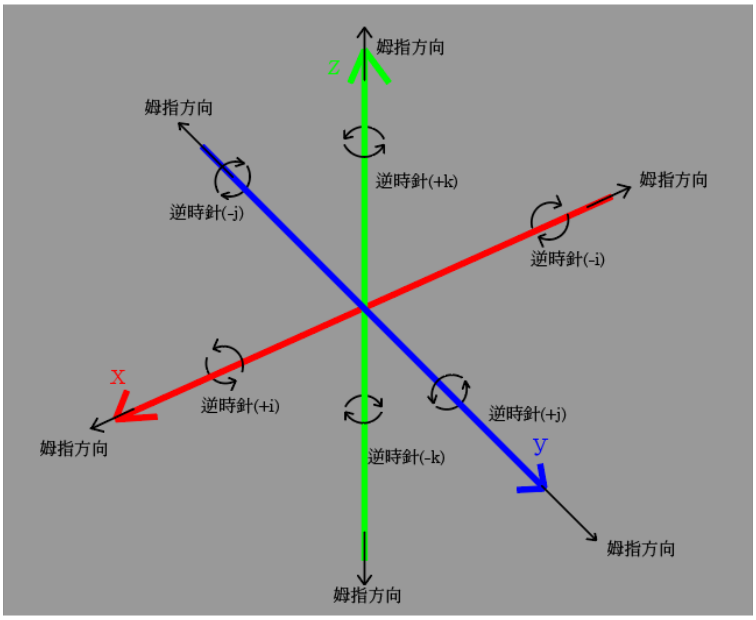




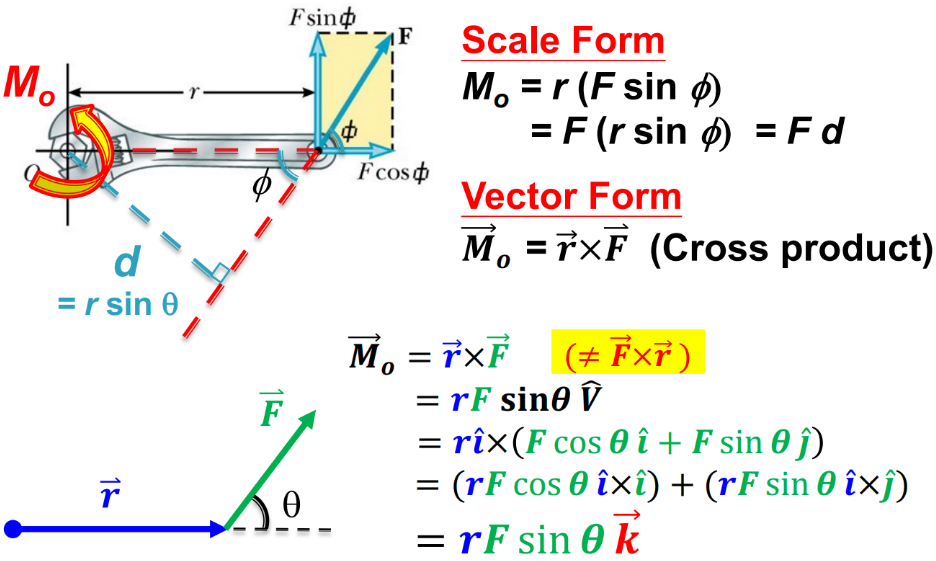


Right hand law





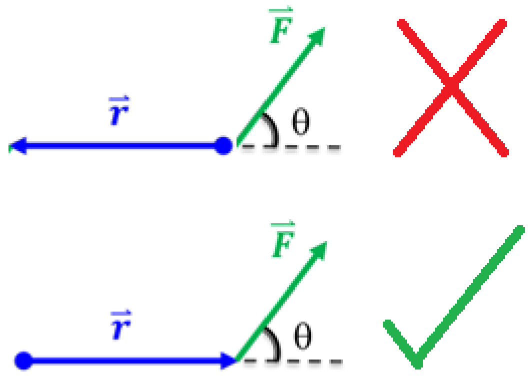
計算(分為 scale form 及 vector form，但 2 者也是得出相同答案結果，因為將 vector form 轉返 scale form 會得出一樣答案，因此 vector form 則可以直接相乘而非先轉返垂 90 度的力與長度):



Scale Form:

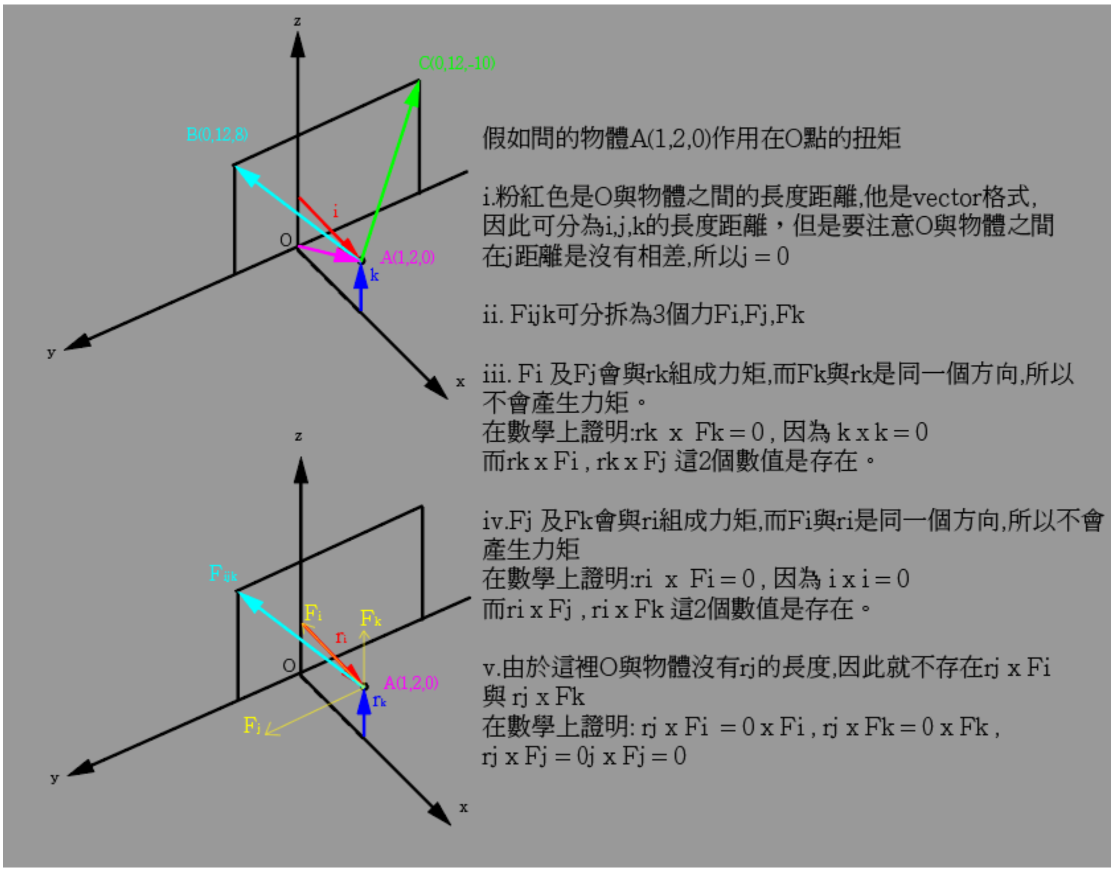
$$M_0 = rF \times \sin\theta = F \times d$$

Vector Form:

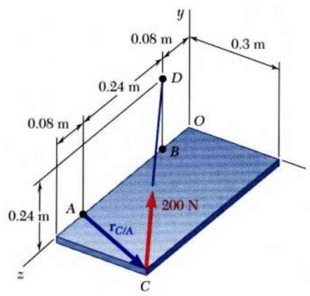


在 vector 角度中，在計算力矩 vector 時，需要是長度箭頭指向施力的方向的箭尾。

$$\overrightarrow{M_0} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \times \sin\theta \vec{k}$$



例子說明:

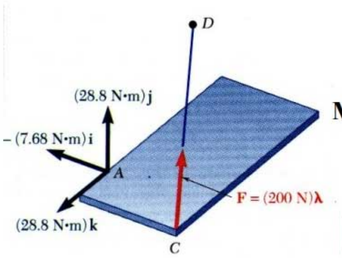


SOLUTION:

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}$$

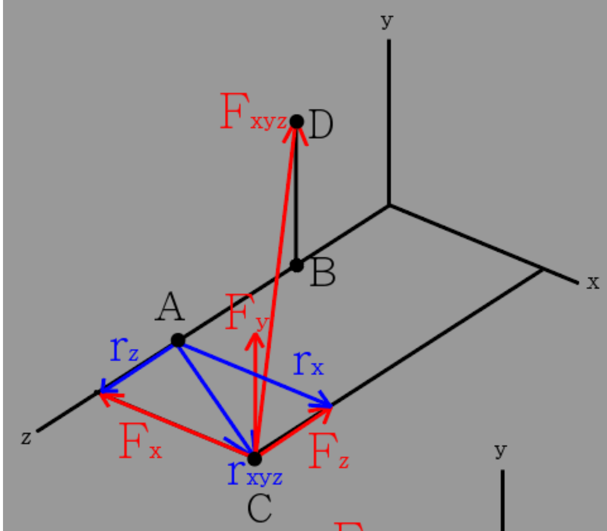
$$\mathbf{r}_{C/A} = \overrightarrow{AC} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A = (0.3\text{ m})\mathbf{i} + (0.08\text{ m})\mathbf{k}$$

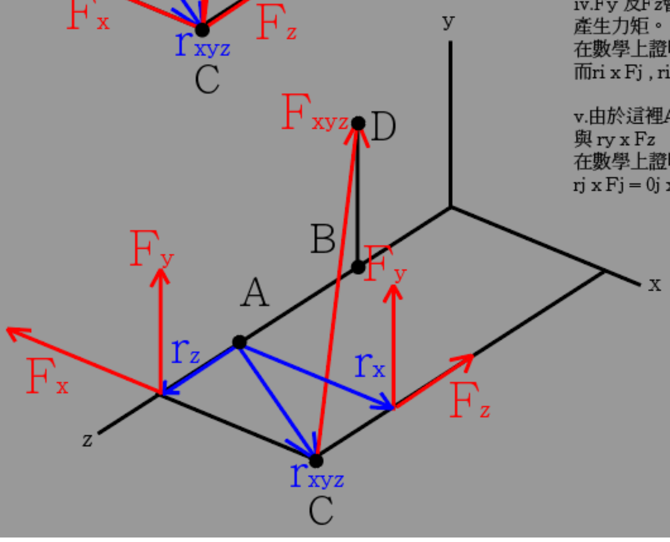
$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = (200\text{ N})\frac{\overrightarrow{CD}}{CD}$$
$$= (200\text{ N})\frac{-(0.3\text{ m})\mathbf{i} + (0.24\text{ m})\mathbf{j} - (0.32\text{ m})\mathbf{k}}{0.5\text{ m}}$$
$$= -(120\text{ N})\mathbf{i} + (96\text{ N})\mathbf{j} - (128\text{ N})\mathbf{k}$$



$$\mathbf{M}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= [(0)(-128) - (96)(0.08)]\hat{\imath} \\ &- [(0.3)(-128) - (-120)(0.08)]\hat{\jmath} \\ &+ [(0.3)(96) - (-120)(0)]\hat{k} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{M}_A = -(7.68\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{i} + (28.8\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{j} + (28.8\text{ N}\cdot\text{m})\mathbf{k}}$$





i.A與C之間的長度距離是rxyz 是vector格式,因此可分為
i,j,k(或稱xyz)的長度距離，但是要注意A與C之間
在y距離是沒有相差,所以y = 0 , 即 j part = 0

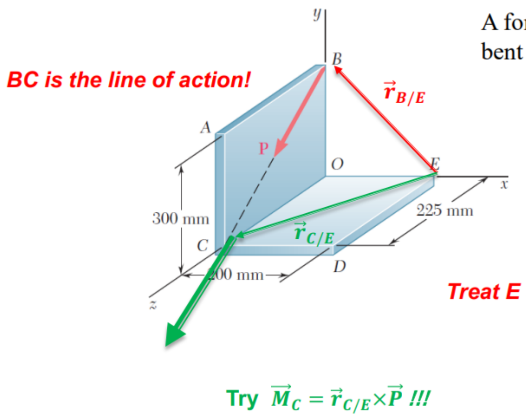
ii. Fxyz同相可分拆為3個力Fi,Fj,Fk或稱Fx,Fy,Fz

iii. Fx 及Fy會與rz組成力矩,而Fz與rz是同一個軸,所以
不會產生力矩。
在數學上證明:rk x Fk = 0 , 因為 k x k = 0
而rk x Fi , rk x Fj 這2個數值是存在。

iv.Fy 及Fz會與rx組成力矩,而Fx與rx是同一個軸,所以不會
產生力矩。
在數學上證明:ri x Fi = 0 , 因為 i x i = 0
而ri x Fj , ri x Fk 這2個數值是存在。

v.由於這裡A與C沒有ry的長度,因此就不存在ry x Fx
與 ry x Fz
在數學上證明: rj x Fi = 0 x Fi , rj x Fk = 0 x Fk ,
rj x Fj = 0j x Fj = 0

例子 2:



A force **P** of magnitude 200 N acts along the diagonal *BC* of the bent plate shown. Determine the moment of **P** about point *E*.

$$\overrightarrow{BC} = -300\vec{j} + 225\vec{k}$$

$$BC = \sqrt{225^2 + 300^2} = 375 \text{ mm}$$

$$\vec{P} = -200\left(\frac{300}{375}\right)\vec{j} + 200\left(\frac{225}{375}\right)\vec{k}$$

$$= -160\vec{j} + 120\vec{k} \quad \text{(N)}$$

Treat E as origin!

$$\vec{r}_{B/E} = -0.2\vec{i} + 0.3\vec{j} \qquad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0.2 & 0.3 & 0 \\ 0 & -160 & 120 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_C = \vec{r}_{B/E} \times \vec{P}$$

$$= (-0.2\vec{i} + 0.3\vec{j}) \times (-160\vec{j} + 120\vec{k})$$

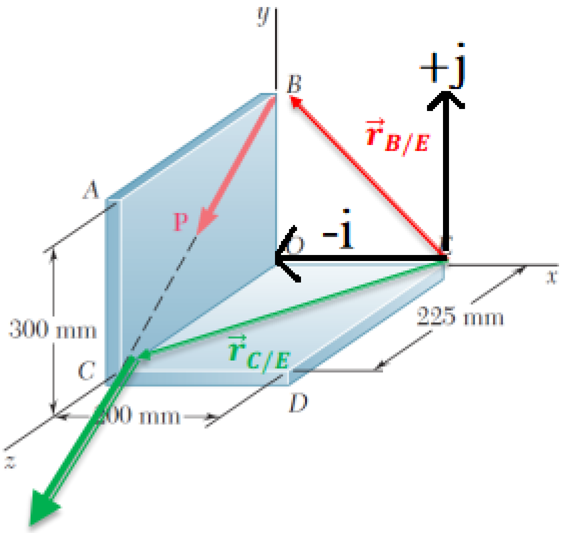
$$= 32\vec{k} + 24\vec{j} + 36\vec{i}$$

$$= 36\vec{i} + 24\vec{j} + 32\vec{k} \quad \text{(Nm)}$$

41

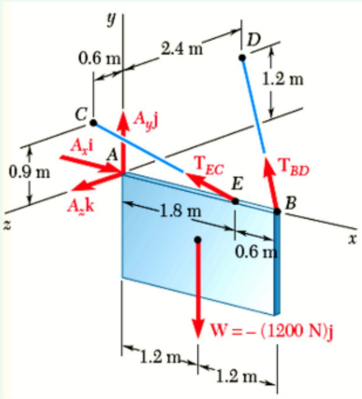
**值得注意：

1. 建議使用 vector 計算，記得是 r x F
2. r 與 F 的 vector 方向所定義的 ijk 是正或負數是根據以作為 O 中心的參考系而定，如上圖的 r 的 x 是朝向 O，因此就是負值，而 r 的 y 軸是遠離 O，因此為正值。



3.
4.

例子 3:



$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD}\frac{\overrightarrow{BD}}{BD} = T_{BD}\left(-\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{1}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}\right)$$

$$\mathbf{T}_{EC} = T_{EC}\frac{\overrightarrow{EC}}{EC} = T_{EC}\left(-\tfrac{6}{7}\mathbf{i} + \tfrac{3}{7}\mathbf{j} + \tfrac{2}{7}\mathbf{k}\right)$$

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{A} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{EC} - (1200\text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$\mathbf{i}:\quad A_x - \tfrac{2}{3}T_{BD} - \tfrac{6}{7}T_{EC} = 0$$

$$\mathbf{j}:\quad A_y + \tfrac{1}{3}T_{BD} + \tfrac{3}{7}T_{EC} - 1200\text{ N} = 0$$

$$\mathbf{k}:\quad A_z - \tfrac{2}{3}T_{BD} + \tfrac{2}{7}T_{EC} = 0$$

$$\sum \mathbf{M}_A = \mathbf{r}_B \times \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{r}_E \times \mathbf{T}_{EC} + (1.2\text{ m})\mathbf{i} \times (-1200\text{ N})\mathbf{j} = 0$$

$$\mathbf{j}:\quad 1.6T_{BD} - 0.514T_{EC} = 0$$

$$\mathbf{k}:\quad 0.8T_{BD} + 0.771T_{EC} - 1440\text{ N.m} = 0$$

Solve the 5 equations for the 5 unknowns,

$$\boxed{\begin{array}{l} T_{BD} = 450\text{ N} \quad T_{EC} = 1400.8\text{ N} \\ \mathbf{A} = (1500.7\text{ N})\mathbf{i} + (449.7\text{ N})\mathbf{j} - (100.2\text{ N})\mathbf{k} \end{array}}$$

1. 力可以分拆為 xyz 方向，而由於是靜態，即就是單考慮 xyz 其中一個軸上的力將他們加總會等於零，而且由於只考慮單個軸方向的力，因此在 x 軸中只需把圖中所有帶 i 值的力加總，在 y 軸中只需把圖中所有帶 j 值的力加總，在 z 軸中只需把圖中所有帶 k 值的力加總

<<斜的 moment>>

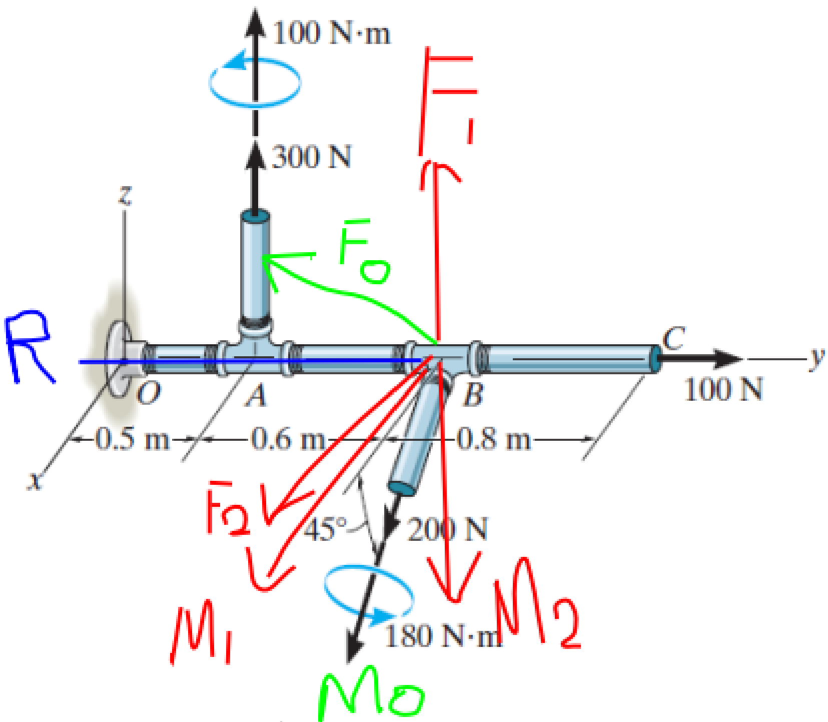


Figure Q3

i.F0 與 M0 是 90 度,所以 F2 與 F0 之間=90-45

ii.F2 與 M1 是同方向 x 軸

iii.證明:

r(j) x F0(i+k) = M0(i-k) = r(j) x F2 (i) + r(j) x F1(k)

M1(i) + M2(-k) = [r(j) x F1(k)] + [r(j) x F2 (i)]

|M0| x cos(45)(i) + |M0| x sin(45)(-k) = r x F1(i) + r x F2 (-k)

|M0| x cos(45)(i) + |M0| x sin(45)(-k) = r x |F0|(sin45)(i) + r x |F0|(cos45) (-k)

所以:

M1 = |M0| x cos(45)(i) = r x |F0|(sin45)(i)

M2 = |M0| x sin(45)(-k) = r x |F0|(cos45) (-k)

since : sin 45 = cos 45

M1 = |M0| x cos(45)(i) = r x |F0|(cos45)(i)

M2 = |M0| x sin(45)(-k) = r x |F0|(sin45) (-k)

***(額外)因為剛好 45 度會擾亂思維,所以可以假設為 35 去思考,F0 與 M0 一定要 90 度,所以 F0 = 90 - 35 = 55 度

$|M0| \times \cos(35)(i) + |M0| \times \sin(35)(-k) = r \times |F0|(\sin 55)(i) + r \times |F0|(\cos 55)(-k)$

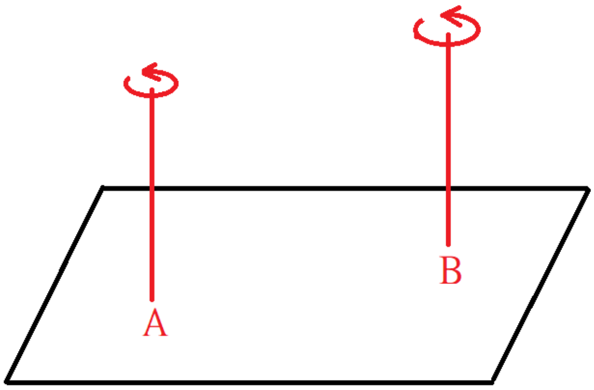
$M1 = |M0| \times \cos(35)(i) = r \times |F0|(\sin 35)(i)$

因為 $\cos 35 = \sin 55$, $\sin 35 = \cos 55$, 所以

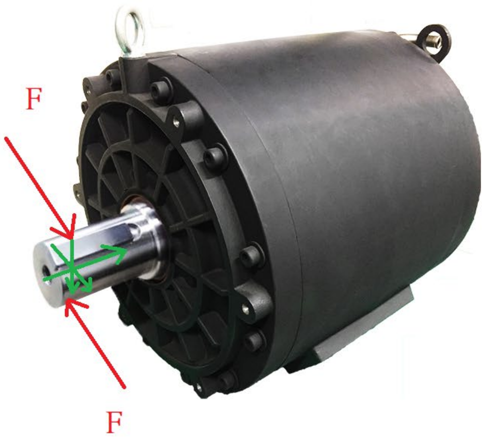
$M1 = |M0| \times \cos(35)(i) = r \times |F0|(\cos 35)(i)$

$M2 = |M0| \times \sin(35)(-k) = r \times |F0|(\sin 35)(-k)$

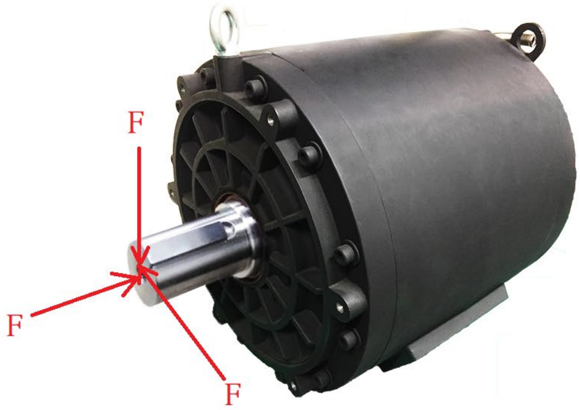
<<force-couple system>>



在物體的任何位置上，他的力矩也是相同的，只是他的旋轉軸心變而已，因此在物體中，扭矩是可以被轉移到物體的任何位置作計算。



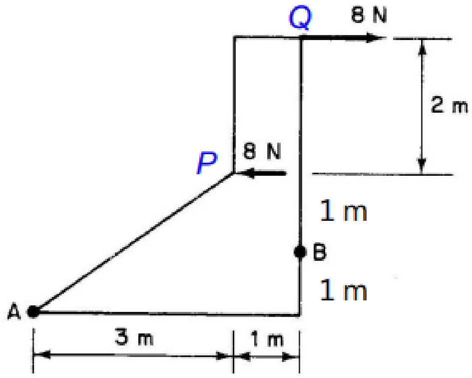
軸心外圍



指向軸心

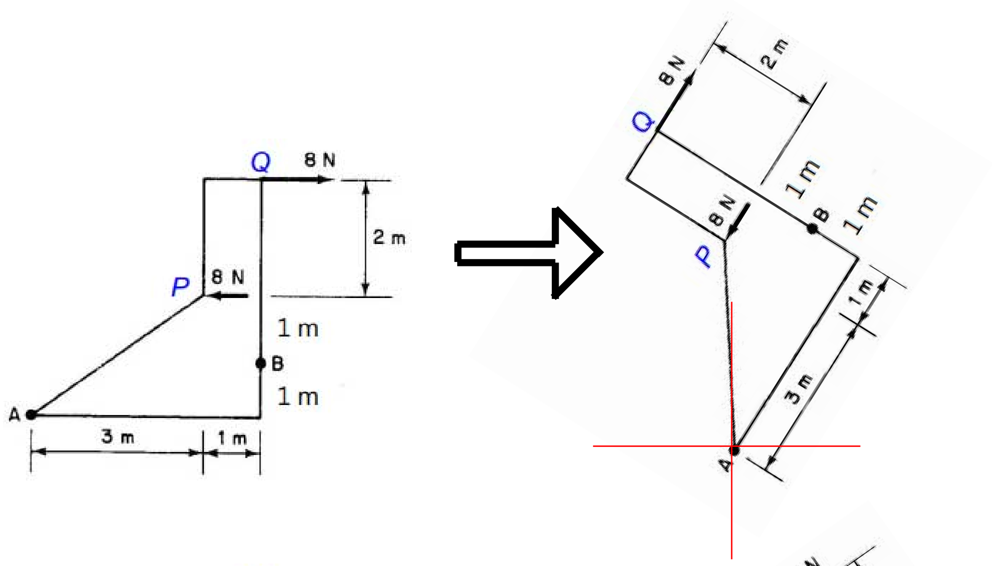
扭矩是在軸心的外圍施加力才會出現轉動，而如果是力是指向軸心則只會推郁物體本身，而非旋轉。

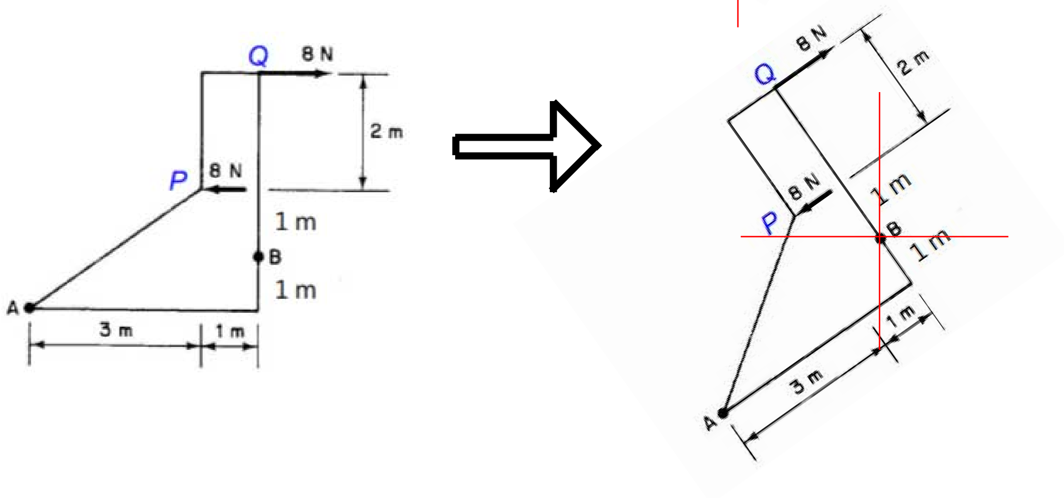
Find the moments about points A and B.



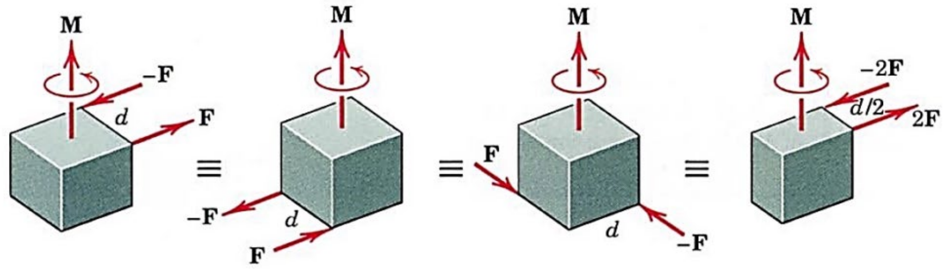
$$M_A = -(8\text{ N})(4\text{ m}) + (8\text{ N})(2\text{ m})$$
$$= -32\text{ N·m} + 16\text{ N·m}$$
$$= -16\text{ N·m} \circlearrowleft = 16\text{ N·m} \circlearrowright$$

$$M_B = -(8\text{ N})(3\text{ m}) + (8\text{ N})(1\text{ m})$$
$$= -24\text{ N·m} + 8\text{ N·m}$$
$$= -16\text{ N·m} \circlearrowleft = 16\text{ N·m} \circlearrowright$$

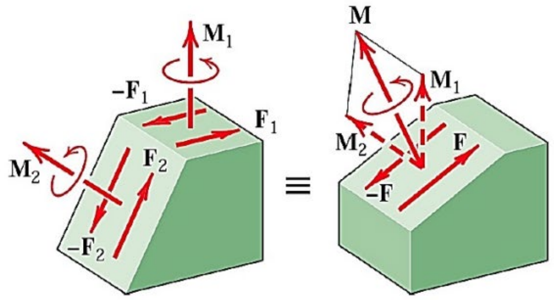




可以看到計算上也是僅使用了與施力垂 90 度的軸長度進行計算。



$\Sigma F = 0$!!!

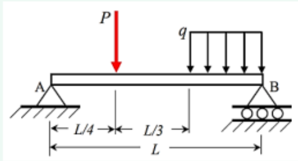


Sum of two couples is also a couple that is equal to their vector sum.

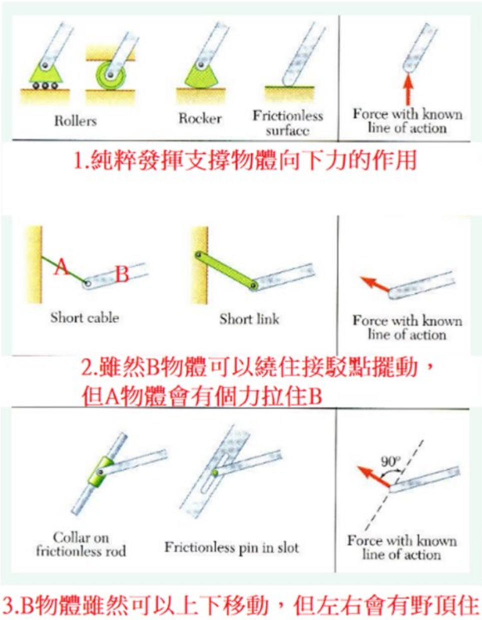
<<Equilibrium 平衡>>

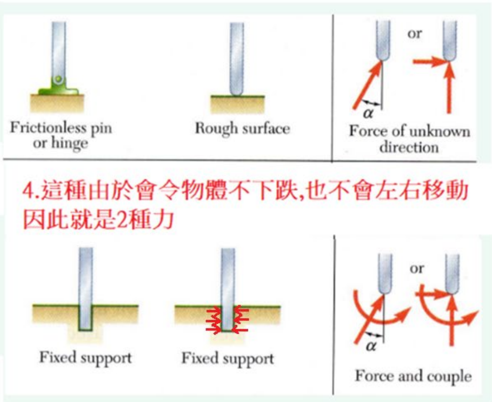
2 維:

$$\boxed{\begin{matrix}\sum F_x = 0 & \sum F_y = 0 & \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 & \sum M_y = 0 & \sum M_z = 0\end{matrix}}$$

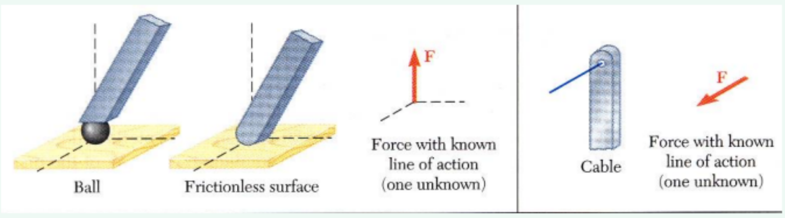


即係沒有任何力，因為沒有任何加速率，他是靜止的。

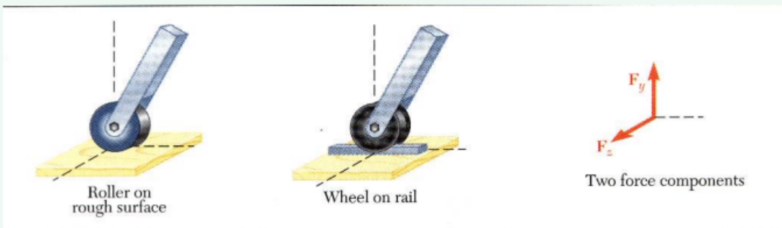




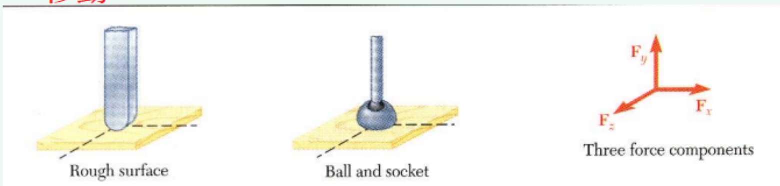
5.這種情況的力不是作用在物體端點表面摩擦反作用力，而是存在多個力在物體表面，而這些力為令物體不左右移動，為方便計算，可以用扭距進行計算



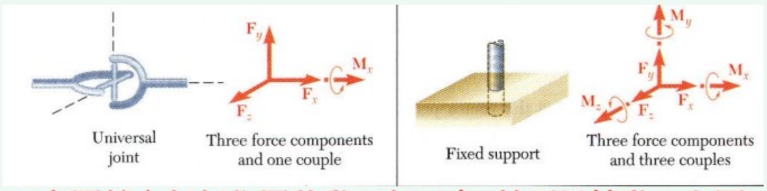
1.只有支撐物體以令不下跌(z軸)，但物體仍可以自由前後左右移動



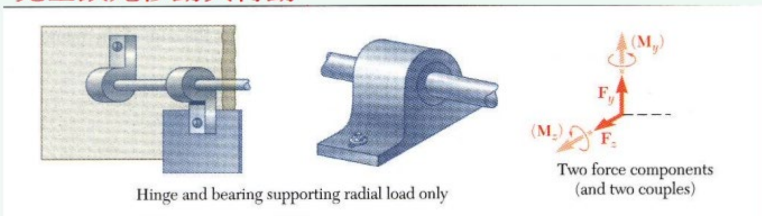
2.除了支撐物體不跌(z軸)，也鎖定物體只能以x軸移動



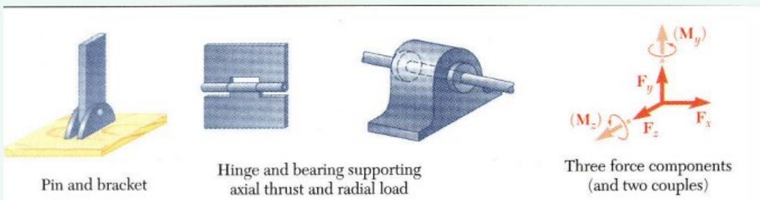
3.這個結構是在任何xyz都鎖定不移動，但可以自轉



1.右圖鎖定任何位置移動，但只有x軸可以轉動。左圖完全鎖死移動與轉動



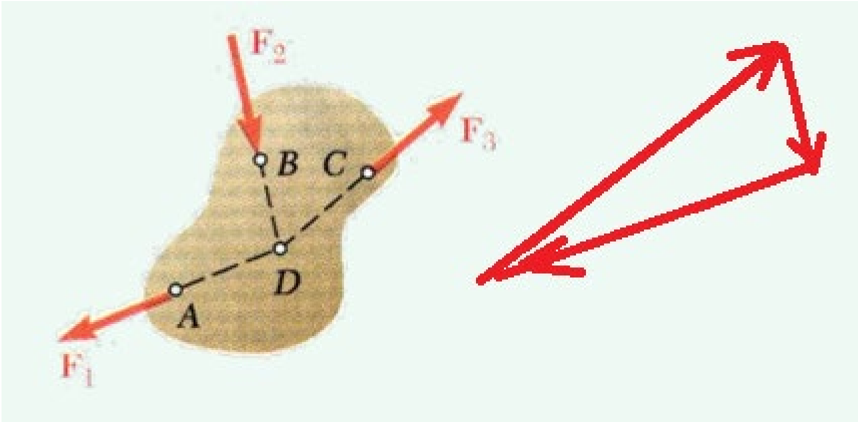
2.只允許物體沿x軸移動與轉動(鐵板，軸棒)

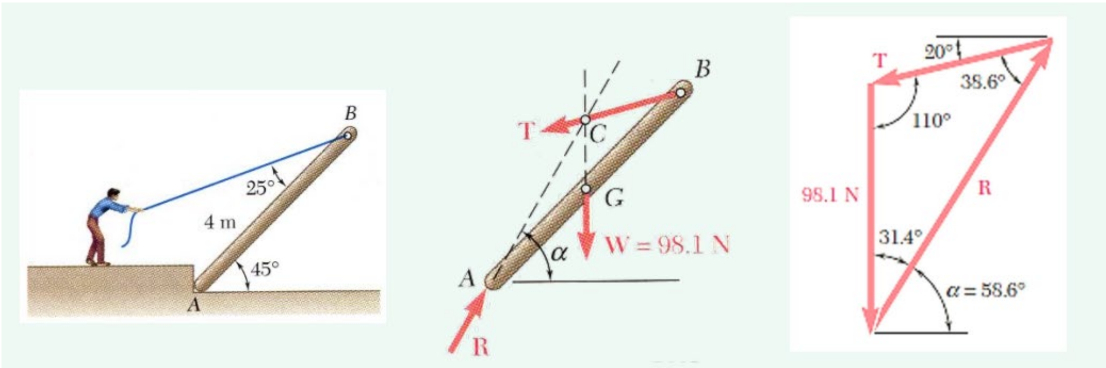


3.在3個方向也是鎖定不可移動，但可以沿x軸轉動

<<Equilibrium of a Three-Force Body 三力體的平衡>>

如果 3 個力需要平衡的話，他們會有相交的中心點，而且他們會組成一個 loop 以令 vector 相加後等於零。





<<3 類工程結構計算>>

簡介:工程結構有 3 種模式既支架分別為 Trusses 桁架，Frames 框架，Machines 機械。

Trusses 桁架 ： 由 two-force members 組成，只會受到 2 個力，而且力只作用在端點。

Frames 框架:最少一個 member 是 multi-force，即係會受到 3 個或以上力。

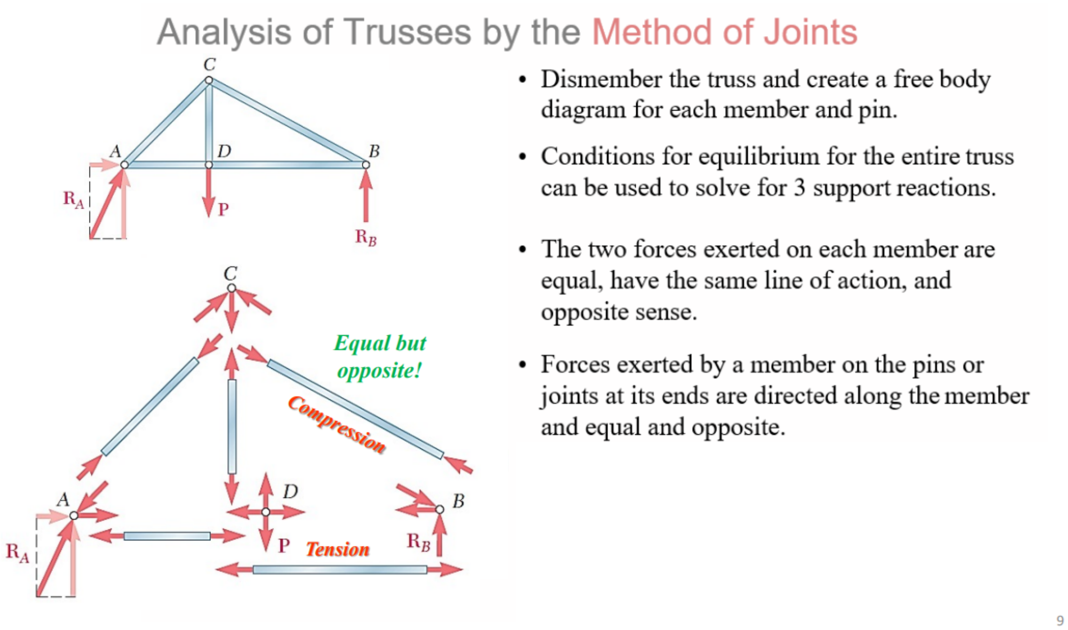
Machines 機械: 包含旨在傳遞和改變力的運動部件的結構

而他們的計算方式可以使用 Joints 或 Sections 方法來進行計算。

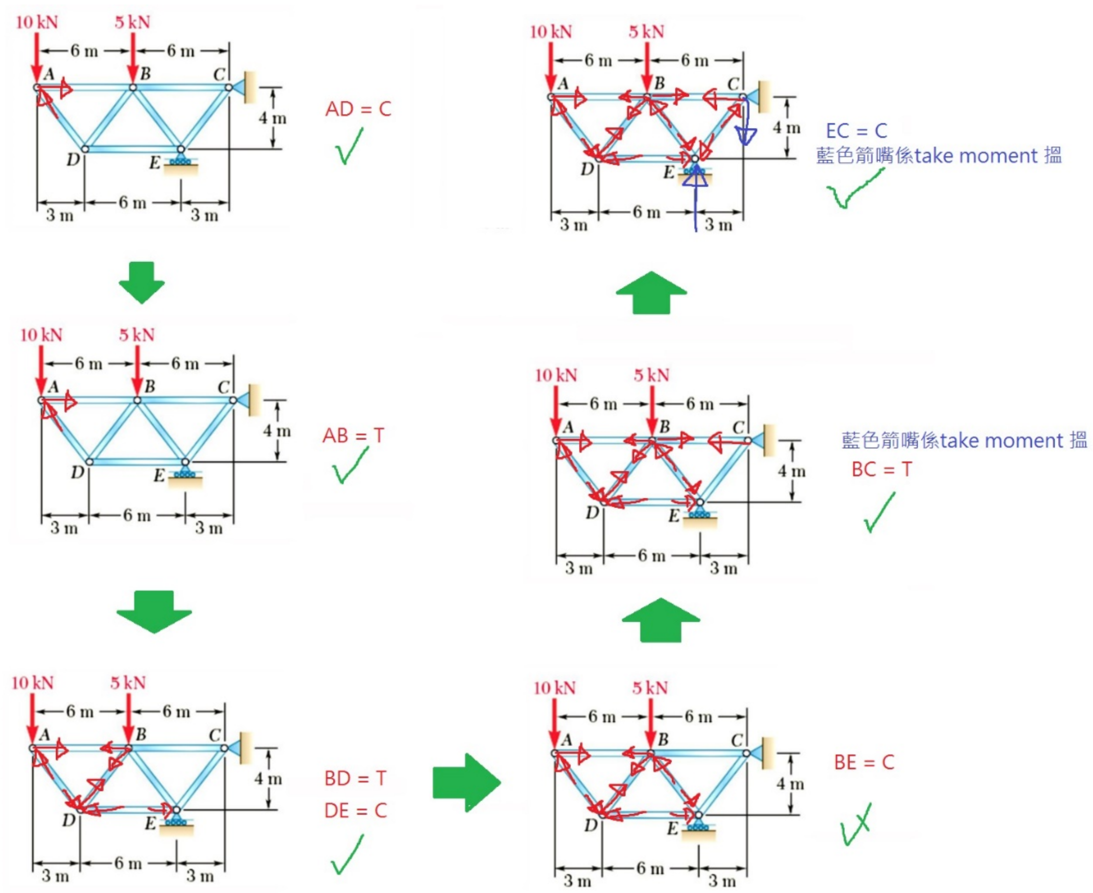
1.計算 Method of Joints

方法一 – 力抵銷法

重點:無視 Member 既力(因為 Member 自身只有 two-force，而且力也是相等)，所有既 joint 都係力平衡，但要看清楚 Member 傳遞到 joint 既力既方向。



例子 1:



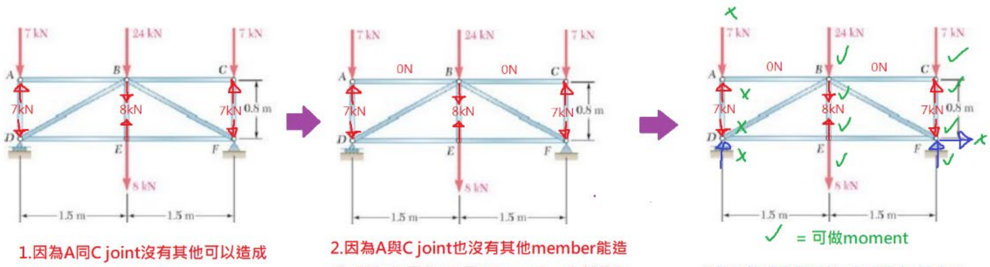
1.第一步用 moment 搵哂支撐點既上下左右力

2.重點：所有既 joint 都係力平衡

3.第二步從題目 given 左既力或剛剛用 moment 計完既支撐點個邊嘗試計起，不應從沒有 given 既 joint 點計起，所以由 given 左既位置開始找出力既方向。（如上圖步驟）

4.一般使用第 3 點既步驟可以搵到哂所有力既方向，但也先假設 joint 既力方向，再用數學計出正負來判斷。

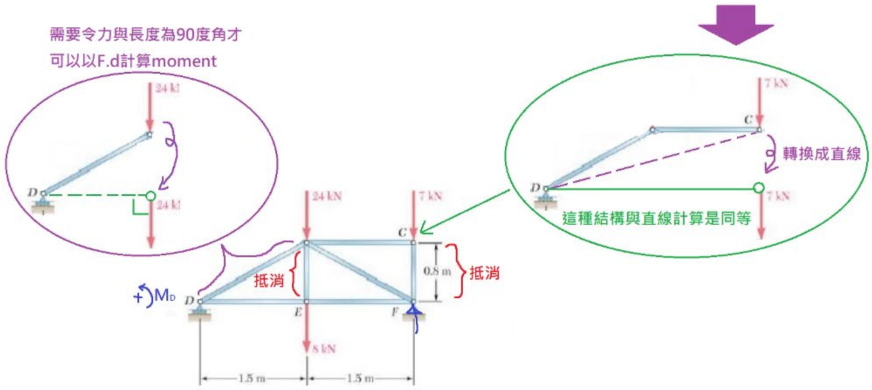
例子 2:



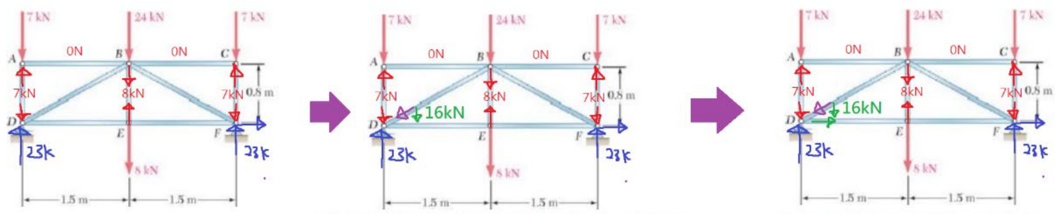
1.因為A同C joint沒有其他可以造成y軸的力,因此就是相等
E joint 也沒有其他member可以做到y軸力,因此BE也是與E力相等

2.因為A與C joint也沒有其他member能造成x軸有力,因此AB 及ACmember力就是0

3.藍色箭嘴是假設的"應該要有"既力方向，之後以D為固定點來計算moment。
i.之後得出既力數值如果是正數，就代表假設的力方向就是佔啱左。
ii.相反如果是負數，得出的就是與假設的力方向相反



4.在計算moment時有些力已被抵消，而有些力要移返到90度

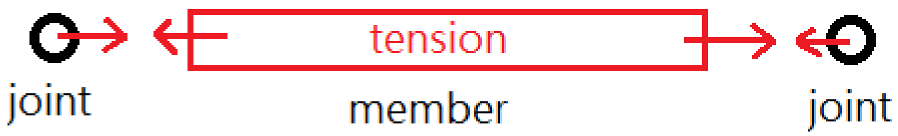


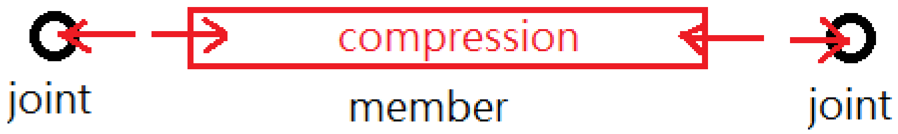
5.之後用y軸的力加總後reaction force，就可以搵埋D joint的力是多少及他的方向。

6.我地在計算完後得出藍色的力是向上23k，但是AD只有7 kN，因此我們就可以判斷到他欠向下16kN力才能在y軸達到平衡
當計算到向下的力是16k後，就可以知道有一股力從member的角度出發(斜線)，而且也需要是指向下，因此就判斷到是斜向下。

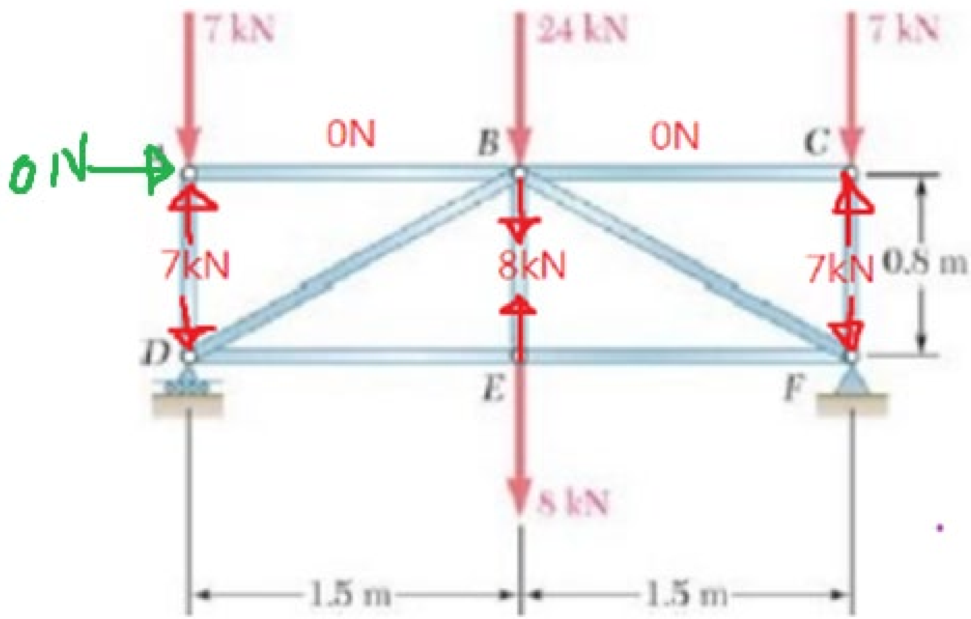
7.我們知道了有個斜向下力，也代表出現了x軸的力，而且會是向左，要使D joint達到平衡就需要x軸抵消，但是A與D點只是提供y軸的力，因此就可以知道餘下的DE給予D joint一個向右的力。

最後要注意，這些力的方向只是以 joint 角隻出發，而非 member，而 member 就是與 joint 相反，因此就能夠找出是 compression 還是 tension.



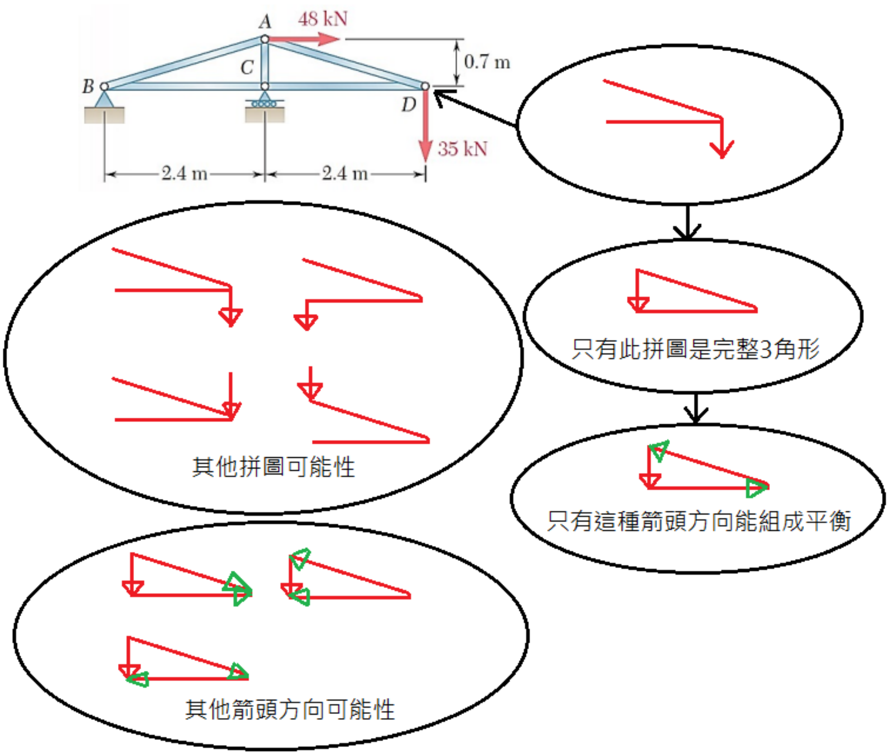


另外，力抵銷法可以因例如 ΣFx 為 0 而 ΣFy 上下力方向相對就可以判斷出 X 軸 member 是 zero force member.

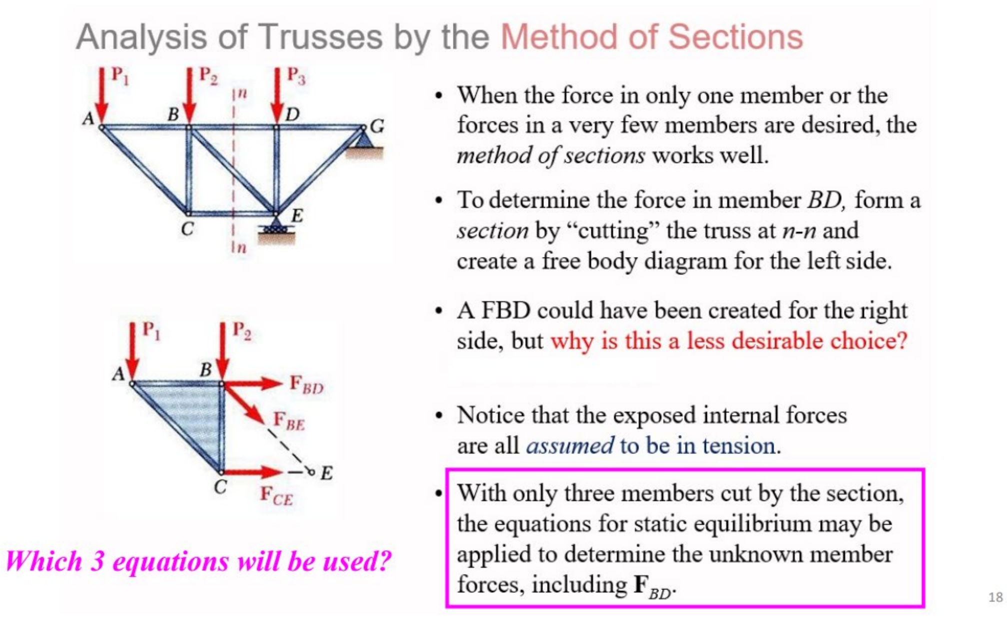


方法二 - 無限窮舉法:

重點:只有受到 3 個力的 joint 可以用此方法，目的也是令 joint 達致平衡，只可以用在只有三角形的力才能組成力平衡 loop，而原理就是想像 3 組力如何砌成一個平衡 3 角形，而且需要列舉哂所有可能性。



2.Sections 方式是把物體切開到得返需要計算的那部份，而在方向上，切割位置的所有端點將假設為受拉力，力的角度沿著原有組件的方向。



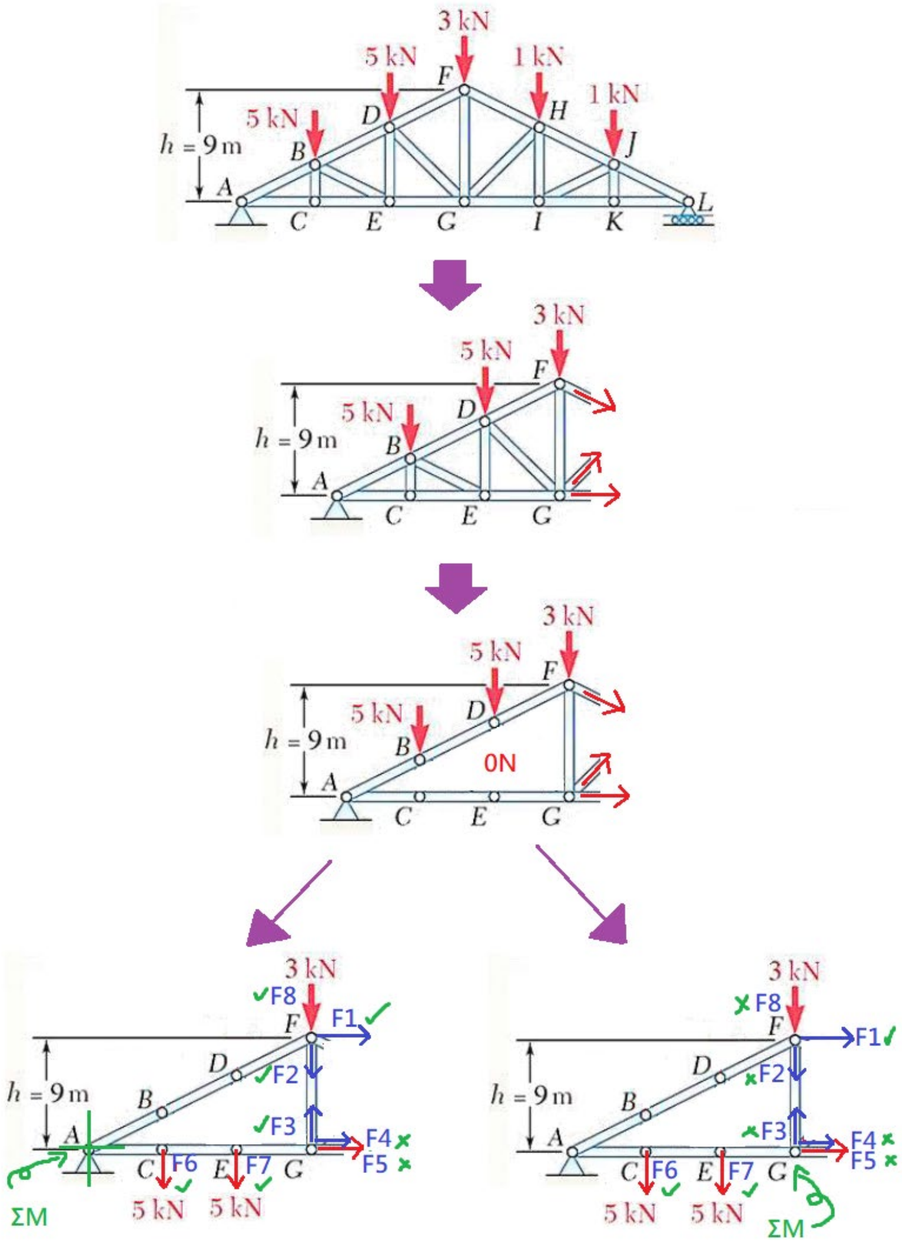
i. 切割位置的力只是假設性方向(建議先全部假設為指向出面)，再以 moment 轉矩方式計算，只有在計算完後，得出的答案如果是正，也就是假設的方向正確，如果為負數則是與假設的力相反方向。

ii. 結構內的 member 全部會為 0N，抵銷哂。

iii.之後找一點作為 moment 計算，這裡有個技巧，就是這點會是與更多的力的方向相交，就樣就可以把更多 unknow force 計算在這點 moment 為 0Nm。

iv.注意，計算 moment 時需要力與長度乘 90 度夾角，因此需要把斜的長度或斜的力轉為 y 與 x 軸垂直方向計算。

例子:



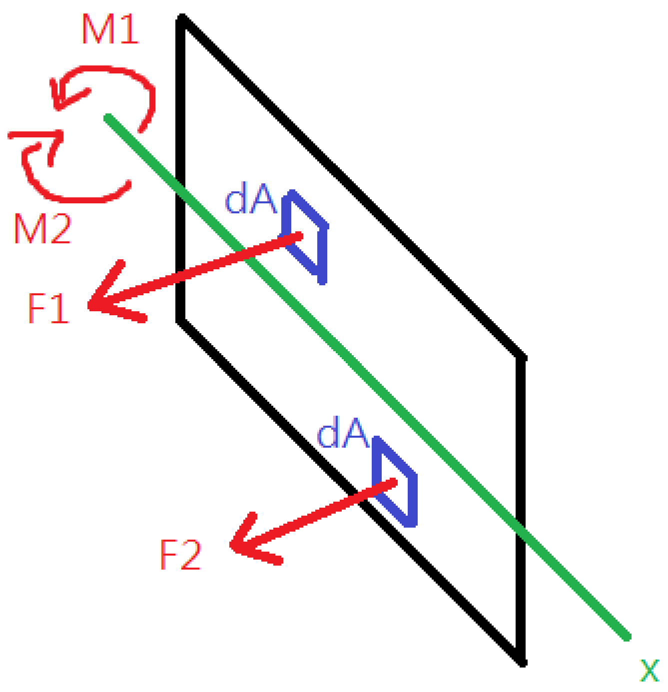
3 kN
5 kN
5 kN
1 kN
1 kN
h = 9 m
A B C D E F G H I J K L
0N
F1
F2
F3
F4
F5
F6
F7
F8
ΣM

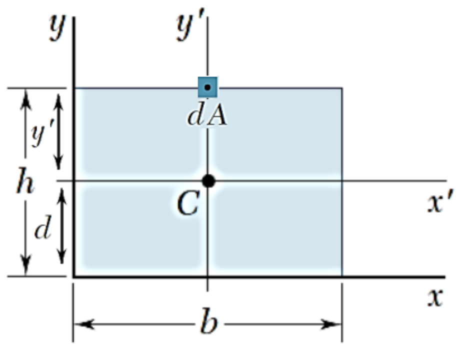
<<Moment of Inertia 轉動慣量>>

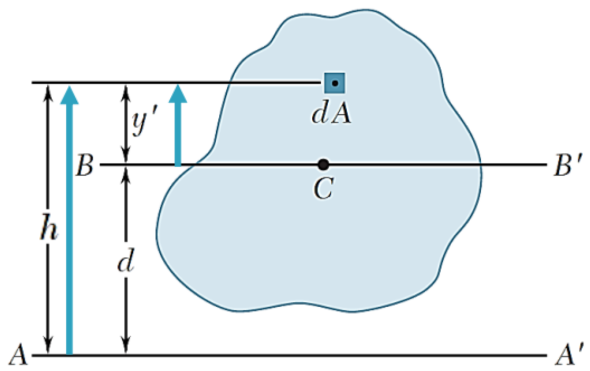
<<First moment >>

<<Second Moment>>

簡介: Moments of Inertia 就是指以某個軸作為 moment 既固定軸令面積進行旋轉，但是這裡沒有把 force 加入參與到其中。以下圖來說，X 軸為 Moment 的固定點，也就是面積沿 X 軸作扭距運動，可以想像成無限個小面積也造一個扭距運動，如果剛好 X 軸是中心(centroidal axis 質心軸)，上扭距會抵銷下扭距。

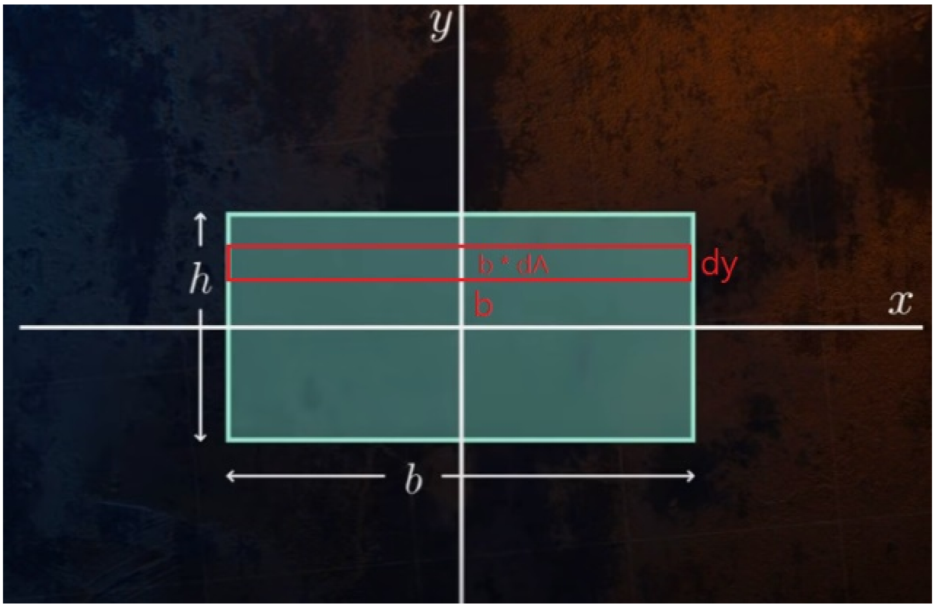






以上 2 張圖形分別顯示了 centroidal axis 質心軸(x')與 neutral axis 中性軸(x)

i.質心軸與中性軸的扭矩計算:



$$\bar{I}_{x'} = \int y^2 dA$$

$$\bar{I}_{x'} = \int b y^2 dy$$

$$\bar{I}_{x'} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} b y^2 dy$$

$$\bar{I}_{x'} = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$\bar{I}_{x'} = b\frac{\left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(-\frac{h}{2}\right)^3}{3}$$

$$\bar{I}_{x'} = b\frac{(h)^3}{24} - \frac{(-h)^3}{24}$$

$$\bar{I}_{x'} = \frac{bh^3}{12}$$

$$\bar{I}_{x'} = \int (y')^2 dA$$

$$I_x = \int h^2 dA$$

ii.centroidal axis 質心軸與 neutral axis 中性軸的變換:

$$I_x = \int h^2 dA$$

$$I_x = \int (y' + d)^2 dA$$

$$I_x = \int ({y'}^2 + 2dy' + d^2) dA$$

$$I_x = \int {y'}^2 dA + \int 2dy' dA + \int d^2 dA$$

$$I_x = \bar{I}_{x'} + \int 2dy' dA + \int d^2 dA$$

$$I_x = \bar{I}_{x'} + \int 2dy' dA + Ad^2$$

$$\therefore \int 2dy' dA = 0$$

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad^2$$

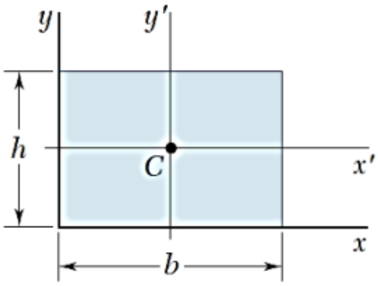
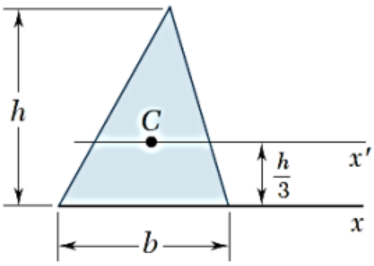
$I_x = I_{AA'}$ = neutral axis 中性軸

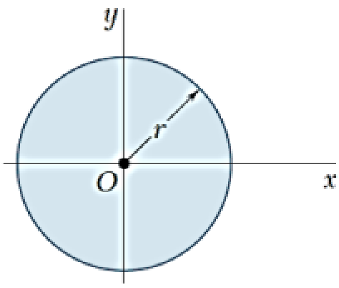
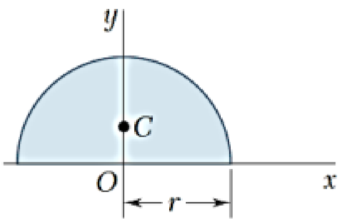
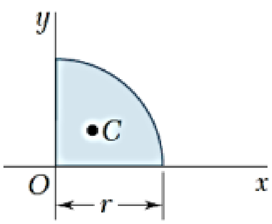
$\bar{I}_{x'} = I_{BB'}$ = centroidal axis 質心軸

d = 中性軸與質心軸之間距離(mm)，因此只需大減細

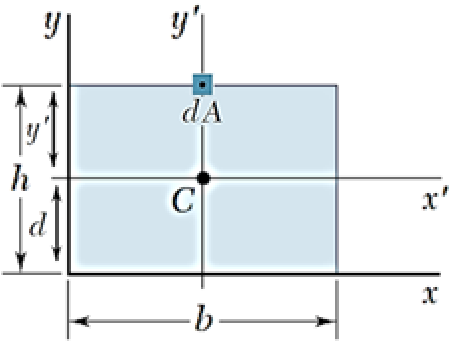
A = 物體面積(mm^2)

得出的各圖形參照表:

Rectangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$

Circle		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicircle		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Quarter circle		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$

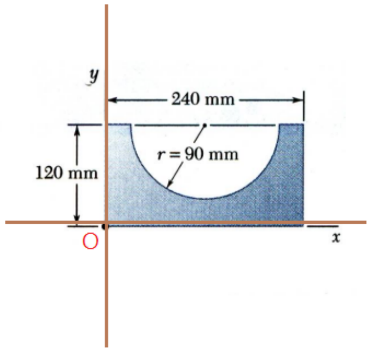
證明:

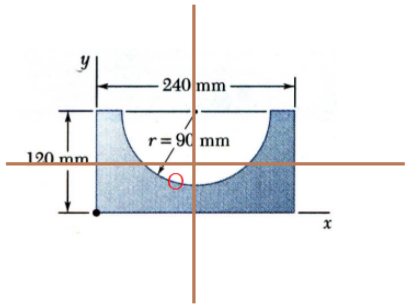


$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad^2$$

$$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{3}bh^3 - (bh)(\frac{h}{2})^2$$

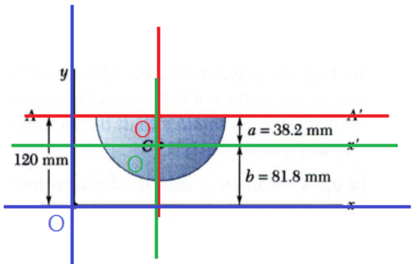
$$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$$



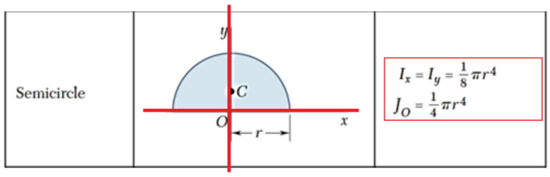


題目:找出Ix ,意思就是以
neutral axis中性軸作為O起點

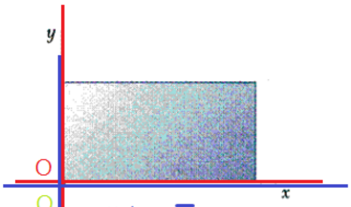
如果題目是:找出Ix巴,就是指以
centroidal axis質心軸作為O起點



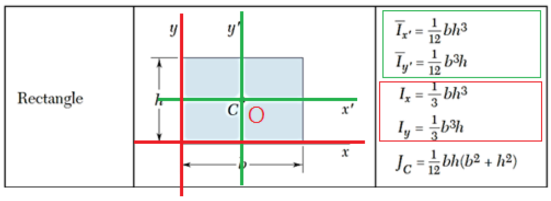
藍色 = I_{x2} = 答案要求的基準點
紅色 = I_{x1} = 公式given的基準點
綠色 = $\bar{I}_{x'}$ = 以圓重心作基準點



意思是指半圓的重心的x軸不與O的x軸相同
時，但重心的y軸與O的y軸相同時，這時的x與
y造成的抗扭矩也就是Ix與Iy



藍色 = I_{x2} = 答案要求的基準點
紅色 = I_{x1} = 公式given的基準點



紅色意思是正方形重心的y及x不與O的y及x軸相同
綠色意思是正方形重心的y及x與O的y及x軸相同,重疊

在半圓中，因為以下原因而需要以 3 條軸進行計算:

$$\because I_{x1} \neq I_{x2} + A(a+b)^2$$

我們只有:

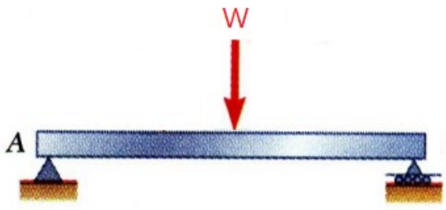
$$I_{x1} = \bar{I}_{x\prime} + Ad^2$$

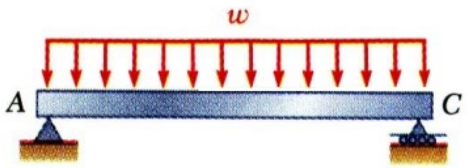
這條公式，因此可以先利用這些公式找出重心 y 軸與 O 的 y 軸重疊的 Ix bar。

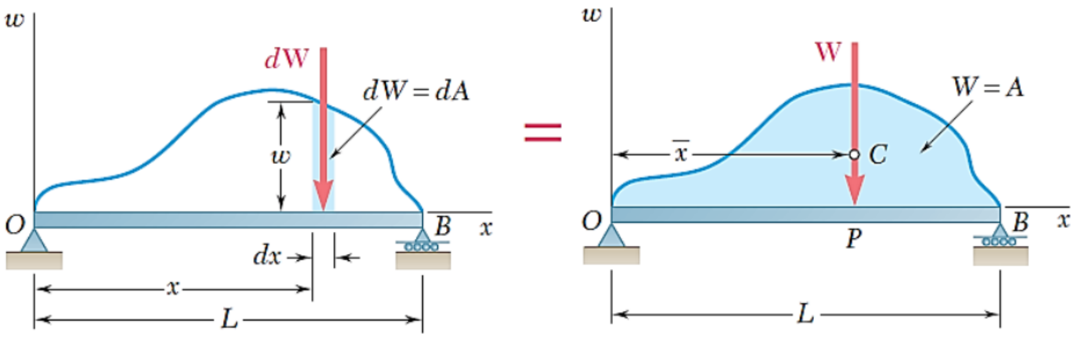
$$I_{x2} = \bar{I}_{x\prime} + Ad^2$$

再透過 Ix bar 來計算出 Ix2。

<< Distributed Force 分散式力>>







簡介: 其實我地一直以來計算的力(力箭嘴)是指施加力在某一點上，但現實上力是分佈在表面上:

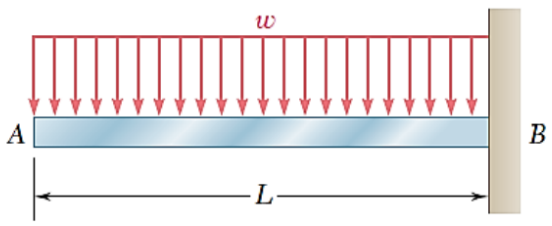
$$W = \int_0^L \omega dx = \int_0^L d\omega dx$$

W = 施加在不規則表面的力

ω = dw =是指施加在面積之中的一維上的力

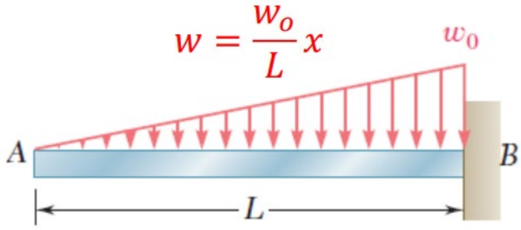
dx = limit 無限少的長度

平均施加在面積之中的一維力例子:



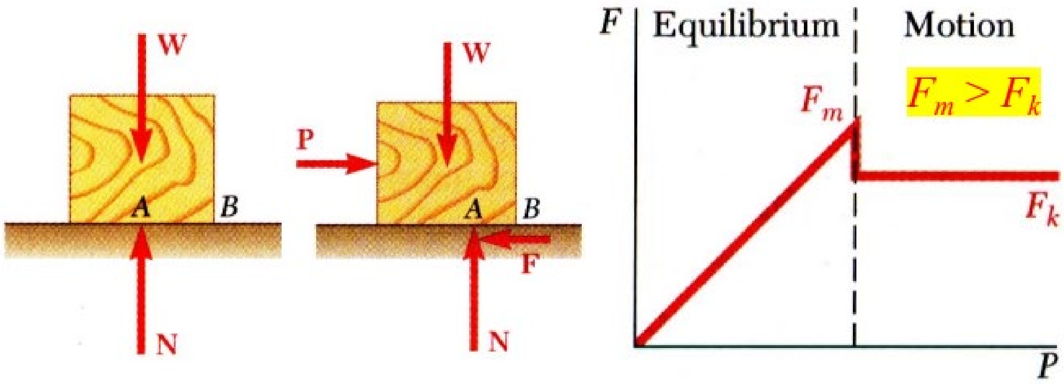
$$W = \int_0^L \omega dx = \omega L$$

三角形式(線性增加力)施加在面積之中的一維力例子:

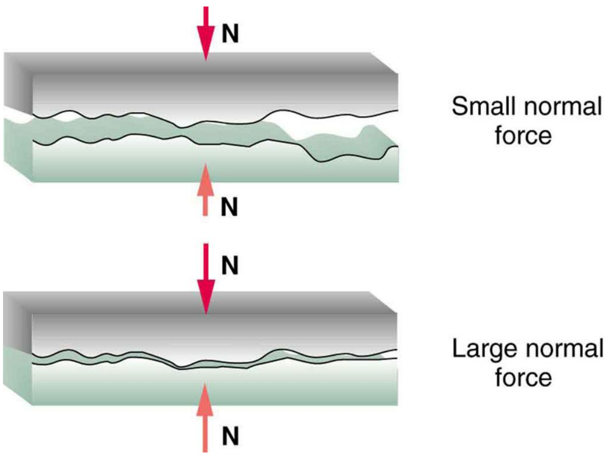


$$W = \int_0^L \omega dx = \int_0^L (\frac{w_0}{L}x)dx = \frac{w_0 L}{2}$$

<<摩擦力>>



簡介: 摩擦力分為 static-friction force 與 kinetic-friction force 2 種，static-friction force 是指施力後物體仍然保持靜止的狀態的摩擦力(F_m)，kinetic-friction force 則是指施力物體會進行運動 motion(F_k)，這時物體仍然是存在摩擦力，但會比 static-friction force 少，原因是因為物體移動時會有慣性力，這個慣性力會幫助抵銷一些摩擦力，因此可以認為摩擦力會減少一些，另外當物體移動時物體有部份位置也因凌空而減少了摩擦力。



另外，摩擦力也會受壓力讓粗糙表面之間更接近，從而更加摩擦力。

靜止物體的壓力摩擦力系數:

$$F_m = \mu_s N$$

動態物體的壓力摩擦力系數:

$$F_k = \mu_k N$$

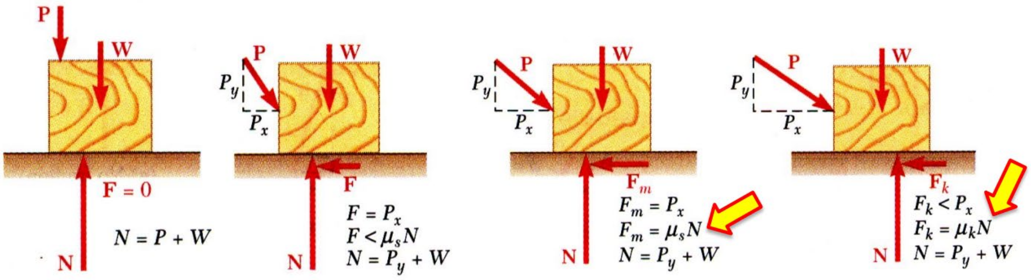
F_m = 靜態物體摩擦力

F_k = 動態物體摩擦力

U_s = 靜止物體的壓力摩擦力系數

U_k =動態物體的壓力摩擦力系數

N = 物體重力



- No friction, ($P_x = 0$)
- No motion, ($P_x < F_m$)
- Motion impending, ($P_x = F_m$)
- Motion, ($P_x > F_m$)