深入理解 ADMM 算法预测-校正框架收敛性

预备知识（一） 变分不等式

这部分预备知识主要包括：变分不等式（Variation Inequalities-VI）、Lagrangian 乘子法，以及增广 Lagrangian 乘子法。其中，Lagrangian 乘子法、增广 Lagrangian 乘子法，大多人都比较熟悉。这里，我重点介绍变分不等式（VI），这是何炳生教授的《利用预测-校正统一框架构造凸优化的分裂收缩算法》核心所在！

可微凸优化与变分不等式

设$\Omega \subset R^n$,考虑下面的凸最优化问题：

$$\min \{ f(x) \mid x \in \Omega \} \quad (1.1)$$

其中，$f(x)$是可微凸函数

一阶最优化条件：

$x^* \in \Omega^* \Longleftrightarrow x^* \in \Omega$ 且 任何可行方向都不是下降方向

最优性条件在变分不等式中的形式

1. $S_d(x)=\{s \in R^n \mid s^T \nabla f(x) < 0\}$ = 下降方向集
2. $S_f(x) = \{s \in R^n \mid s = x' - x, x' \in \Omega\}$ = 可行方向集

$$x \in \Omega^* \Longleftrightarrow x \in \Omega \ \ and \ \ S_f \cap S_d = \emptyset$$

最优性条件用变分不等式表示如下：

$$x \in \Omega, (x' - x)^T F(x) \geq 0, \forall x' \in \Omega \quad (1.2)$$

其中 $F(x) = \nabla f(x)$

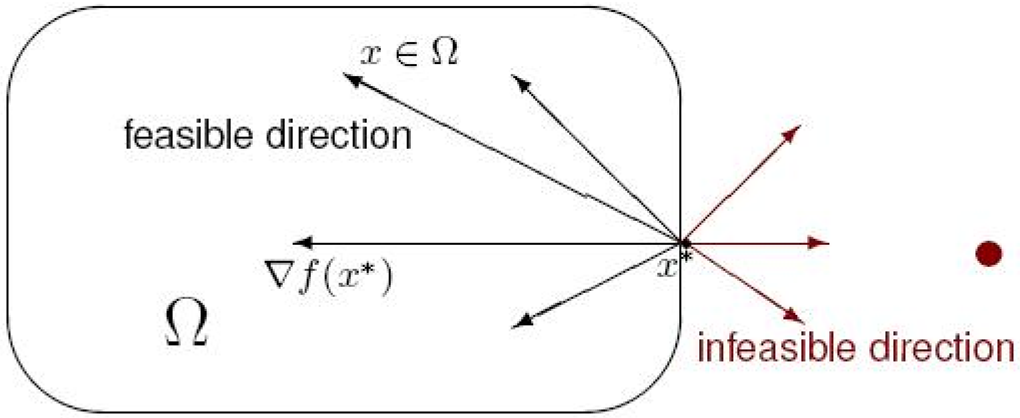

图 1.1 可微凸优化与变分不等式

因为$f(x)$是凸函数，由凸函数性质可得：

$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$ 可得：

$(y - x)^T (\nabla f(y) - \nabla f(x)) \geq 0.$

所以，凸函数f的梯度 ∇f是单调算子。