深入理解 ADMM 算法预测-校正框架收敛性

预备知识（三）可分离结构的线性约束凸优化问题

可分离凸优化问题如下：

$$\min\{\theta_1(x)+\theta_2(y)|Ax+By=b,x\in\mathcal{X},y\in\mathcal{Y}\}. \quad (1.9)$$

其变分不等式形式如下：

$$w^*\in\Omega,\ \theta(u)-\theta(u^*)+(w-w^*)^TF(w^*)\geq 0,\quad \forall w\in\Omega \quad (1.10a)$$

$$w=\begin{pmatrix}x\\y\\\lambda\end{pmatrix},u=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},F(w)=\begin{pmatrix}-A^T\lambda\\-B^T\lambda\\Ax+By-b\end{pmatrix} \quad (1.10b)$$

$$\theta(u)=\theta_1(x)+\theta_2(y),\qquad \Omega=\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\times\Re^m \quad (1.10c)$$

问题(1.9)的增广 Lagrangian 函数如下：

$$\mathcal{L}_\beta(x,y,\lambda)=\theta_1(x)+\theta_2(y)-\lambda^T(Ax+By-b)+\frac{\beta}{2}\|Ax+By-b\|^2 \quad (1.11)$$

用 ADMM 迭代方法来解问题(1.9)，第 k 次迭代开始给定 (y^k,λ^k)，通过以下迭代关系获得新的第 k+1 次解：

$$(\text{ADMM})\begin{cases}x^{k+1}=\operatorname{argmin}\{\mathcal{L}_\beta(x,y^k,\lambda^k)|x\in\mathcal{X}\},\\y^{k+1}=\operatorname{argmin}\{\mathcal{L}_\beta(x^{k+1},y,\lambda^k)|y\in\mathcal{Y}\},\\\lambda^{k+1}=\lambda^k-\beta(Ax^{k+1}+By^{k+1}-b).\end{cases} \quad (1.12a)$$

$$w=\begin{pmatrix}x\\y\\\lambda\end{pmatrix},v=\begin{pmatrix}y\\\lambda\end{pmatrix}\ 和\ \mathcal{V}^*=\{(y^*,\lambda^*)|(x^*,y^*,\lambda^*)\in\Omega^*\} \quad (1.12b)$$

在目标函数中忽略一些常数项，

$$
(\text{ADMM}) \quad \begin{cases} x^{k+1} = \operatorname{argmin}\{\theta_1(x) - x^T A^T p^k + \frac{\beta}{2}||A(x - x^k)||^2 | x \in \mathcal{X}\}, & (1.13a) \\ y^{k+1} = \operatorname{argmin}\{\theta_2(y) - y^T B^T q^k + \frac{\beta}{2}||B(y - y^k)||^2 | y \in \mathcal{Y}\}, & (1.13b) \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k - \beta(Ax^{k+1} + By^{k+1} - b). & (1.13c) \end{cases}
$$

其中，

$$p^k = \lambda^k - \beta(Ax^k + By^k - b),$$

$$q^k = \lambda^k - \beta(Ax^{k+1} + By^k - b).$$