深入理解 ADMM 算法预测-校正框架收敛性

预备知识（二）线性约束凸优化问题的变分不等式

考虑一般的线性约束凸优化问题：

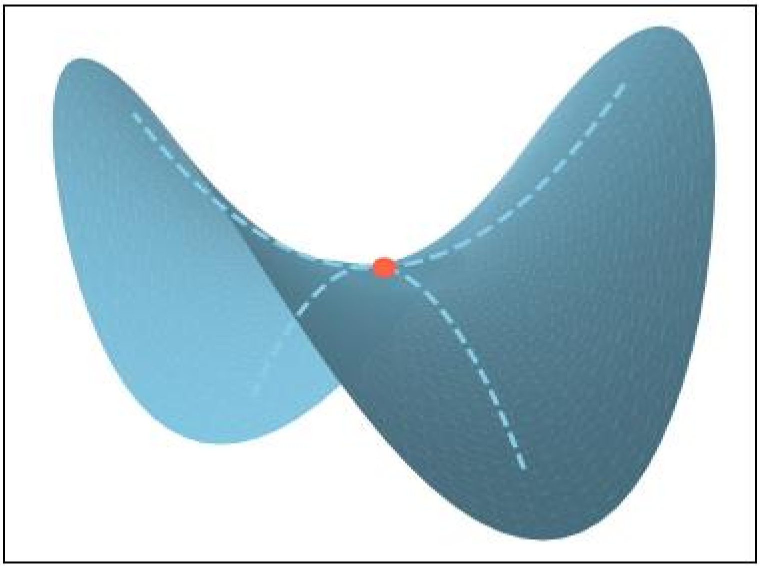
$\min\{\theta(u) \mid \mathcal{A}u = b, u \in \mathcal{U}\}$ (1.3)

其中， $\theta: R^n \to R$ 是凸函数，$\mathcal{U} \subset R^n$是闭凸集， $\mathcal{A} \in R^{m\times n}, b \in R^m$。 λ是 Lagrange 乘子，问题(1.3)的 Lagrange 函数如下：

$L(u,\lambda) = \theta(u) - \lambda^T(\mathcal{A}u - b), \quad (u,\lambda) \in \mathcal{U} \times \Re^m$ (1.4)

定义在$\mathcal{U} \times R^m$上的 Lagrange 函数的鞍点$(u^*,\lambda^*) \in \mathcal{U} \times R^m$满足：

$L_{\lambda\in\Re^m}(u^*,\lambda) \leq L(u^*,\lambda^*) \leq L_{u\in\mathcal{U}}(u,\lambda^*)$(1.5)



上面的不等式可写成下面的形式：

$$\begin{cases} u^* \in \mathcal{X}, & L(u,\lambda^*) - L(u^*,\lambda^*) \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}, \\ \lambda^* \in \Re^m, & L(u^*,\lambda^*) - L(u^*,\lambda) \geq 0, \quad \forall \lambda \in \Re^m. \end{cases}$$

假设$\theta(x)$是可微的，$\nabla\theta(x) = f(x)$,鞍点问题等价于：

$$\begin{cases} u^* \in \mathcal{U}, & \theta(u)-\theta(u^*)+(u-u^*)^T(-A^T\lambda^*) \geq 0, \forall u \in \mathcal{U}, \\ \lambda^* \in \Re^m, & (\lambda-\lambda^*)^T(Au^*-b) \geq 0, \forall \lambda \in \Re^m. \end{cases} \quad (1.6)$$

采用如下标记：

$$w = \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad F(w) = \begin{pmatrix} -A^T\lambda \\ Au-b \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \Omega = \mathcal{U} \times \Re^{\mathrm{m}}$$

最优性条件可以表示成如下单调变分不等式形式

$$\mathrm{w}^* \in \Omega, \quad \theta(\mathrm{u})-\theta(\mathrm{u}^*)+(\mathrm{w}-\mathrm{w}^*)^{\mathrm{T}}\mathrm{F}(\mathrm{w}^*) \geq 0, \quad \forall \mathrm{w} \in \Omega. \quad (1.7)$$

F 是仿射算子，

$$F(w) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{A}^T \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{b} \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

其中，矩阵$\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{A}^T \\ \mathrm{A} & 0 \end{pmatrix}$是斜对称的，

算子 F 是单调的, 因为

$(\mathrm{w}-\tilde{\mathrm{w}})^{\mathrm{T}}(\mathrm{F}(\mathrm{w})-\mathrm{F}(\tilde{\mathrm{w}})) \geq 0,$ 这里 $(\mathrm{w}-\tilde{\mathrm{w}})^{\mathrm{T}}(\mathrm{F}(\mathrm{w})-\mathrm{F}(\tilde{\mathrm{w}})) = 0.$