

常用算法模板

Wings

2021 年 11 月 25 日

目录

0 说明	1
0.1 约定	1
0.2 模板头	1
1 数据结构	2
1.1 并查集	2
1.1.1 基本操作	2
1.1.2 带边权	2
1.2 树状数组	3
1.3 线段树	3
1.3.1 区间修改 & 区间查询	3
1.3.2 动态开点 & 合并	4
1.4 ST 表	5
1.5 主席树	6
1.6 FHQTreap	7
1.7 Splay	9
2 动态规划	11
2.1 背包	11
2.1.1 01 背包	11
2.1.2 完全背包	11
2.1.3 分组背包	11
2.1.4 树形背包	11
2.2 最长公共子序列	11
2.3 优化	12
2.3.1 决策单调性	12
2.3.2 斜率优化	12
3 树相关	13
3.1 点分治	13
4 图论	14
4.1 匈牙利	14
4.2 网络流	14
4.2.1 Dinic	14
4.2.2 费用流	15
5 数学	16
5.1 取模函数	16
5.2 快速幂	16
5.3 多项式	16
5.4 拉格朗日插值	16
5.4.1 横坐标连续拉格朗日插值	17
5.4.2 重心拉格朗日插值 (增删点)	17
5.5 FFT	18

5.6	多项式乘法	18
6	计算几何	18
6.1	误差修正	18
6.2	向量和点	19
6.3	直线和线段	19
6.4	多边形	20
6.5	圆	22
6.6	最小圆覆盖	24
6.7	平面最近点对	25
7	字符串	25
7.1	Trie	25
8	杂项	26
8.1	最长单调子序列	26
8.2	莫队	26
8.2.1	普通莫队	26
8.2.2	带修莫队	26
8.2.3	回滚莫队	27
8.3	图论分块	28
9	附录	29
9.1	Vim 配置	29
9.2	Vim 录制宏	29
9.3	GDB 命令	29
9.4	对拍	29
9.4.1	Bash 脚本	29
9.4.2	cmd 批处理脚本	30
9.5	运行时检查	30
9.6	数学公式	30
9.6.1	几何	30
9.6.2	计数	30

0 说明

0.1 约定

- **const int** MAXN 为最大数据长度
- **const int** MAXV 为 (抽象) 图最大点数
- **const int** MAXM 为第二维数据最大长度或 (抽象) 图最大边数
- **const int** MAXQ 为最大询问
- **#ifdef GDB** 表示 GDB 调试, 从文件读取数据等
- **#ifdef NGCS** 表示输出中间变量调试 (NGCS = Nothing Gold Can Stay)
- 若无特殊情况, 数组从下标 1 开始存储数据
- 图论带边权一般以邻接表建图; 否则用向量存邻接点
- 网络流邻接表边从下标 0 开始, 因为要建反边; 否则从 1 开始
- 为节省篇幅, 代码进行部分压行

0.2 模板头

```

1  #include <cstdio>
2  #include <algorithm>
3  #include <iostream>
4  #include <cstring>
5  #include <cmath>
6  #include <vector>
7  #include <queue>
8  #include <set>
9  #include <map>
10 #include <unordered_map>
11 #include <string>
12 #define lowbit(x) (x&(-x))
13 #define LCH(x) (x<<1)
14 #define RCH(x) (x<<1|1)
15 using namespace std;
16
17 typedef long long LL;
18 typedef unsigned long long ULL;
19 typedef long double LD;
20 typedef pair<int, int> PII;
21 typedef vector<int> VI;
22
23 const int INTINF = 0x3f3f3f3f;
24 const LL INF = 0x3f3f3f3f3f3f3f3f;
25
26 const int P = 998244353;
27 const int MAXN = 1e5 + 10;
28
29 int T, n;
30
31 int main() {
32 #ifdef GDB
33     freopen("X.in", "r", stdin);
34     freopen("X.out", "w", stdout);
35 #endif
36     scanf("%d", &T);
37     while (T--) {
38         scanf("%d", &n);
39     }
40     return 0;
41 }
```

1 数据结构

1.1 并查集

1.1.1 基本操作

```

1 // 可以维护其他数据，如集合大小，集合最值。注意仅代表元的值有效
2 int n, fa[MAXN];
3 /* 初始化并查集 */
4 void init(int n) {
5     for (int i = 1; i <= n; i++) fa[i] = i;
6 }
7 /* 查询并返回 x 所在集合的代表元；路径压缩 */
8 int find(int x) {
9     return x == fa[x] ? x : fa[x] = find(fa[x]);
10 }
11 /* 合并 x, y 所在集合 (x→y)；返回合并前是否在不同集合中；无按秩合并 */
12 bool uni(int x, int y) {
13     if (find(x) == find(y))
14         return false;
15     fa[find(x)] = find(y);
16     return true;
17 }
18 /* 查询是否 x, y 是否在同一集合中 */
19 bool query(int x, int y) {
20     return find(x) == find(y);
21 }

```

1.1.2 带边权

```

1 int n, fa[MAXN], d[MAXN]; // d[x] 表示 x 到 fa[x] 的距离
2 /* 初始化并查集 */
3 void init(int n) {
4     for (int i = 1; i <= n; i++) fa[i] = i, d[i] = 0;
5 }
6 int find(int x) {
7     if (x == fa[x])
8         return x;
9     int fx = fa[x]; //先记录一下 x 当前的 fa
10    fa[x] = find(fa[x]);
11    d[x] += d[fx]; //x 到现在的 fa (即代表元) 的路径为两段之和
12    return fa[x];
13 }
14 /* 把 x 所在的集合连接到 y 所在的集合上，且 x 到 y 的距离为 dis */
15 /* 返回合并前是否在不同集合中 */
16 bool uni(int x, int y, int dis) {
17     int fx = find(x), fy = find(y);
18     if (fx == fy)
19         return false;
20     d[fx] = dis + d[y] - d[x];
21     fa[fx] = fy;
22     return true;
23 }
24 /* 查询是否 x, y 是否在同一集合中 */
25 bool query(int x, int y) {
26     return find(x) == find(y);
27 }

```

1.2 树状数组

```

1  int n, t[MAXN];
2  /* 单点修改 (加) */
3  void update(int pos, int x) {
4      for (int i = pos; i <= n; i += lowbit(i))
5          t[i] += x;
6  }
7  /* 查询前缀和 */
8  int presum(int pos) {
9      int res = 0;
10     for (int i = pos; i; i -= lowbit(i))
11         res += t[i];
12     return res;
13 }
14 /* 查询区间 [l, r] 的和 */
15 int query(int l, int r) {
16     return presum(r) - presum(l-1);
17 }

```

1.3 线段树

1.3.1 区间修改 & 区间查询

```

1  struct Node {                // 线段节点
2      int l, r, mid, len;
3      LL val, tag;            // val 为线段和的值, tag 为标记值
4  } t[MAXN << 2]; // 线段节点要开 4 倍数据点的大小
5  int n;
6  /* 更新一条完整的线段 */
7  void updateNode(int u, LL d) {
8      t[u].val += d * t[u].len;
9      t[u].tag += d; // 打上标记, 不再往下
10 }
11 /* 将标记下放 */
12 void pushDown(int u) {
13     updateNode(LCH(u), t[u].tag);
14     updateNode(RCH(u), t[u].tag);
15     t[u].tag = 0; // 取消标记
16 }
17 /* 由左右儿子线段合并更新当前线段 */
18 void pushUp(int u) {
19     t[u].val = t[LCH(u)].val + t[RCH(u)].val;
20 }
21 /* 递归建树 */
22 void build(LL data[], int l, int r, int u) {
23     t[u] = Node{l, r, (l+r)>>1, r-l+1};
24     if (l == r) t[u].val = data[l]; // 该线段只有一个点
25     else {                // 分成左右两边递归求和
26         build(data, l, t[u].mid, LCH(u));
27         build(data, t[u].mid+1, t[u].r, RCH(u));
28         pushUp(u);
29     }
30 }
31 /* 初始化一棵线段树 */
32 void init(int _n, LL data[]) {
33     build(data, 1, _n, 1);
34 }
35 /* 区间修改 */
36 void update(int l, int r, LL d, int u = 1) {
37     if (t[u].l == l && t[u].r == r)

```

```

38     updateNode(u, d); // 找到对应线段更新
39     else {
40         pushDown(u); // 访问 u 的儿子线段, 需要先下放标记更新
41         if (l > t[u].mid)
42             update(l, r, d, RCH(u)); //更新的线段全在该区间右边
43         else if (r <= t[u].mid)
44             update(l, r, d, LCH(u)); // 全在左边
45         else { // 跨越了左右两边
46             update(l, t[u].mid, d, LCH(u));
47             update(t[u].mid+1, r, d, RCH(u));
48         }
49         pushUp(u); // 由儿子线段的更新后的值计算当前线段值
50     }
51 }
52 /* 区间查询 */
53 LL query(int l, int r, int u = 1) {
54     if (t[u].l == l && t[u].r == r) return t[u].val;
55     pushDown(u);
56     if (l > t[u].mid) return query(l, r, RCH(u));
57     if (r <= t[u].mid) return query(l, r, LCH(u));
58     else return query(l, t[u].mid, LCH(u)) +
59             query(t[u].mid+1, r, RCH(u));
60 }

```

1.3.2 动态开点 & 合并

```

1  struct Node {
2      int l, r, mid, len; // 不再利用完全二叉树的下标性质
3      int lch, rch;      // 而是直接分配下标, 从而动态开点
4      LL val, tag;        // 初始值需要满足可以在开点时赋值, 如全 0
5  } t[MAXM]; // 预先估计一下点的个数
6  int n, idx = 0, root = -1;
7  /* 动态开点, 左右儿子没开, 为 0; 返回新建节点标号 */
8  int newNode(int l, int r) {
9      t[++idx] = Node{l, r, (l+r)>>1, r-l+1};
10     return idx;
11 }
12 /* 初始化线段树, 建立一个 [1, n] 区间的节点 */
13 void init(int _n) {
14     root = newNode(1, _n);
15 }
16 /* 更新一条完整的线段 */
17 void updateNode(int u, LL d) {
18     t[u].val += d * t[u].len;
19     t[u].tag += d; //打上标记, 不再往下
20 }
21 /* 将标记下放 */
22 void pushDown(int u) {
23     if (!t[u].lch) // 第一次访问, 开点
24         t[u].lch = newNode(t[u].l, t[u].mid);
25     updateNode(t[u].lch, t[u].tag);
26     if (!t[u].rch)
27         t[u].rch = newNode(t[u].mid+1, t[u].r);
28     updateNode(t[u].rch, t[u].tag);
29     t[u].tag = 0;
30 }
31 /* 由左右儿子线段合并更新当前线段 */
32 void pushUp(int u) {
33     t[u].val = t[t[u].lch].val + t[t[u].rch].val;
34 }

```

```

35  /* 区间修改 */
36  void update(int l, int r, LL d, int u = -1) {
37      if (u == -1) u = root;
38      if (t[u].l == l && t[u].r == r)
39          updateNode(u, d); // 找到对应线段更新
40      else {
41          pushDown(u); // 访问 u 的儿子线段, 需要先下放标记更新
42          if (l > t[u].mid)
43              update(l, r, d, t[u].rch); // 更新的线段全在该区间右边
44          else if (r <= t[u].mid)
45              update(l, r, d, t[u].lch); // 全在左边
46          else { // 跨越了左右两边
47              update(l, t[u].mid, d, t[u].lch);
48              update(t[u].mid+1, r, d, t[u].rch);
49          }
50          pushUp(u); // 由儿子线段的更新后的值计算当前线段值
51      }
52  }
53  /* 区间查询 */
54  LL query(int l, int r, int u = -1) {
55      if (u == -1) u = root;
56      if (t[u].l == l && t[u].r == r) return t[u].val;
57      pushDown(u);
58      if (l > t[u].mid) return query(l, r, t[u].rch);
59      if (r <= t[u].mid) return query(l, r, t[u].lch);
60      else return query(l, t[u].mid, t[u].lch) +
61                  query(t[u].mid+1, r, t[u].rch);
62  }
63
64  /* 新建一棵线段树为 x, y 两棵线段树的合并, 返回合并后的节点标号 */
65  int merge(int x, int y, int l, int r) {
66      if (!x || !y) return x | y;
67      int rt = newNode(l, r);
68      if (l == r) { // 按需合并
69          t[rt].val = t[x].val + t[y].val, t[rt].tag = t[x].tag + t[y].tag;
70          return rt;
71      }
72      t[rt].lch = merge(t[x].lch, t[y].lch, l, t[rt].mid);
73      t[rt].rch = merge(t[x].rch, t[y].rch, t[rt].mid+1, r);
74      pushUp(rt);
75      return rt;
76  }
77
78  /* 将 y 合并到 x 上, 返回合并后的节点标号 (即 x) */
79  int merge(int x, int y, int l, int r) {
80      if (!x || !y) return x || y;
81      if (l == r) {
82          t[x].val += t[y].val, t[x].tag += t[y].tag;
83          return x;
84      }
85      t[x].lch = merge(t[x].lch, t[y].lch, l, t[x].mid);
86      t[x].rch = merge(t[x].rch, t[y].rch, t[x].mid+1, r);
87      pushUp(x);
88      return x;
89  }

```

1.4 ST 表

```

1  int n, lg[MAXN], pw[MAXN], st[MAXN][30]; // st[i][j] 表示 [i, i+2^j) 的最值
2  /* 预处理出 log2x 和 2k */

```



```

3 void init() {
4     lg[0] = -1, pw[0] = 1;
5     for (int i = 1; i <= n; i++) lg[i] = lg[i>>1] + 1;
6     for (int i = 1; i <= lg[n]; i++) pw[i] = pw[i-1] << 1;
7 }
8 /* 建立 ST 表 */
9 void build(int data[]) {
10     //st[i][0] 存数据 st[i][0] = [i, i + 2^0) = data[i]
11     for (int i = 1; i <= n; i++) st[i][0] = data[i];
12     for (int j = 1; j <= lg[n]; j++) // 注意先枚举 j
13         for (int i = 1; i + pw[j] <= n + 1; i++) // 左闭右开, 到 n+1
14             //把 [i, i + 2^j) 分成 [i, i + 2^{j-1}) 和 [i + 2^{j-1}, i + 2^j) 两段
15             st[i][j] = min(st[i][j-1], st[i+pw[j-1]][j-1]);
16 }
17 /* 查询 [l, r] 中的的最值 */
18 int query(int l, int r) {
19     int k = lg[r - l + 1];
20     // 由于  $2^{\lfloor \log 2x \rfloor} > \frac{x}{2}$ , 故前后两个长度为  $2^{\lfloor \log 2x \rfloor}$  区间就可以取完所有的元素
21     return min(st[l][k], st[r+1-pw[k]][k]); // 设  $r' = r + 1$ , 查询  $[l, r')$ 
22 }

```

1.5 主席树 (静态区间 k 小)

```

1 int nn, b[MAXN]; // nn 为不重复个数, b[] 是离散化用的数组
2 /* 先将数组离散化, 返回的是不重复的数字个数 */
3 int discretize(int _n, int data[]) {
4     for (int i = 1; i <= _n; i++) b[i] = data[i];
5     sort(b + 1, b + 1 + _n);
6     return nn = unique(b + 1, b + 1 + _n) - b - 1;
7 }
8 /* 返回 x 离散化以后的 id 值 */
9 int id(int x) { return lower_bound(b + 1, b + 1 + nn, x) - b; }
10 struct Node { // val 保存的是前缀和, 区间要差分一下
11     int l, r, mid, lch, rch, val;
12 } t[MAXM]; // 点一般开  $4n + m \log n$  稍大一点, 如  $4n + m(\log n + 1)$ 
13 int n, root[MAXN], idx = 0;
14 /* 递归建一棵空树, 返回值为节点编号 */
15 int build(int l, int r) {
16     int u = ++idx;
17     t[u] = Node{l, r, (l+r)>>1, 0, 0, 0};
18     if (l < r) {
19         t[u].lch = build(l, t[u].mid);
20         t[u].rch = build(t[u].mid + 1, r);
21     }
22     return u;
23 }
24 /* 从上一棵树的对应节点拉边过来建树, 返回值为节点编号 */
25 int update(int pre, int pos, int x) {
26     int u = ++idx;
27     t[u] = t[pre]; // 复制上一棵树对应节点的所有信息
28     if (t[u].l == t[u].r) t[u].val += x;
29     else {
30         if (pos <= t[u].mid)
31             t[u].lch = update(t[pre].lch, pos, x);
32         else t[u].rch = update(t[pre].rch, pos, x);
33         t[u].val = t[t[u].lch].val + t[t[u].rch].val;
34     }
35     return u;
36 }
37 /* 递归找 [l, r] 对应区间的值 */

```

```

38 int qry(int lu, int ru, int k) {
39     if (t[lu].l == t[lu].r) return t[lu].l;
40     int x = t[t[ru].lch].val - t[t[lu].lch].val; // 差分
41     if (k <= x) return qry(t[lu].lch, t[ru].lch, k);
42     else return qry(t[lu].rch, t[ru].rch, k - x);
43 }
44 /* 查询 [l, r] 中第 k 小, 注意返回值 x 是离散化以后的, 需要 b[x] 得到原数 */
45 int query(int l, int r, int k) { return qry(root[l-1], root[r], k); }
46 /* 离散化, 并根据权值建树 */
47 void init(int _n, int data[]) {
48     nn = discretize(_n, data);
49     root[0] = build(1, n);
50     for (int i = 1; i <= _n; i++) // 根据权值建立主席树
51         root[i] = update(root[i-1], id(data[i]), 1);
52 }

```

1.6 FHQTreap(带区间翻转标记)

```

1  struct Node { //key 为排序用的随机键, size 为子树大小
2      int val, key, size, lch, rch, tag;
3  } t[MAXN];
4  int idx = 0, root;
5  /* 初始化, 输入种子 */
6  void init(int seed) {
7      idx = root = 0; // 如果多个树, 则删去 idx = 0
8      srand(seed);
9  }
10 /* 向上更新子树大小 */
11 void pushUp(int u) {
12     t[u].size = t[t[u].lch].size + 1 + t[t[u].rch].size;
13 }
14 /* 标记下放; 这里写的是反转标记, 根据题目修改 */
15 void pushDown(int u) {
16     if (t[u].tag) swap(t[u].lch, t[u].rch);
17     t[t[u].lch].tag ^= t[u].tag;
18     t[t[u].rch].tag ^= t[u].tag;
19     t[u].tag = 0;
20 }
21 /* 合并两棵树 l, r */
22 int merge(int l, int r) {
23     if (!l || !r) return l | r; // 有一个为空, 返回另一个
24     int u;
25     if (t[l].key < t[r].key) {
26         pushDown(u = l); t[l].rch = merge(t[l].rch, r);
27     }
28     else { pushDown(u = r); t[r].lch = merge(l, t[r].lch); }
29     pushUp(u);
30     return u;
31 }
32 /* 根据点的值的排名分割树 u, 前 k 小的在 l 里, 其他在 r 里 */
33 void splitByRank(int k, int &l, int &r, int u = -1) {
34     if (u == -1) u = root;
35     if (!u) { l = r = 0; return; }
36     pushDown(u);
37     if (k <= t[t[u].lch].size) {
38         r = u;
39         splitByRank(k, l, t[u].lch, t[u].lch);
40     }
41     else {
42         l = u;

```

```

43         splitByRank(k-t[t[u].lch].size-1, t[u].rch, r, t[u].rch);
44     }
45     pushUp(u);
46 }
47 /* 根据点的值分割树 u, 小于 k 的在 l 里, 其他的在 r 里 */
48 void splitByValue(int k, int &l, int &r, int u = -1) {
49     if (u == -1) u = root;
50     if (!u) { l = r = 0; return; }
51     pushDown(u);
52     if (t[u].val <= k) {
53         l = u;
54         splitByValue(k, t[u].rch, r, t[u].rch);
55     }
56     else {
57         r = u;
58         splitByValue(k, l, t[u].lch, t[u].lch);
59     }
60     pushUp(u);
61 }
62 /* 插入一个点 */
63 void insert(int x) {
64     int u, l, r;
65     t[u = ++idx] = Node{x, rand(), 1, 0, 0, 0};
66     splitByValue(x, l, r);
67     root = merge(merge(l, u), r);
68 }
69 /* 删除值为 x 的一个点 */
70 int erase(int x) {
71     int l, r, ll, rr;
72     splitByValue(x-1, l, r);
73     splitByRank(1, ll, rr, r);
74     t[ll] = Node{0, 0, 0, 0, 0};
75     root = merge(l, rr);
76     return x;
77 }
78 /* 找树 u 中值为 x 的排名 */
79 int getRankByValue(int x, int &u) {
80     int l, r, rk;
81     splitByValue(x-1, l, r, u);
82     rk = t[l].size + 1;
83     u = merge(l, r);
84     return rk;
85 }
86 /* 找树 u 中排名为 k 的值 */
87 int getValueByRank(int k, int &u) {
88     int l, r, v, ll, rr;
89     splitByRank(k-1, l, r, u);
90     splitByRank(1, ll, rr, r);
91     v = t[ll].val;
92     u = merge(l, merge(ll, rr));
93     return v;
94 }
95 /* 找到子树 u 中 x 的前驱 */
96 int getPre(int x, int &u) {
97     int l, r, pre;
98     splitByValue(x-1, l, r, u);
99     pre = getValueByRank(t[l].size, l);
100    u = merge(l, r);
101    return pre;
102 }

```

```

103 /* 找到子树 u 中 x 的后继 */
104 int getSuc(int x, int &u) {
105     int l, r, suc;
106     splitByValue(x, l, r, u);
107     suc = getValueByRank(1, r);
108     u = merge(l, r);
109     return suc;
110 }
111 /* 遍历 u */
112 void iterate(int u) {
113     if (u) {
114         pushDown(u);
115         iterate(t[u].lch);
116         printf("%d ", t[u].val);
117         iterate(t[u].rch);
118     }
119 }

```

1.7 Splay (蒋叶桢指针版)

```

1  int data[MAXN];
2  struct node *NIL;
3  struct node {
4      int key, siz;
5      bool rev;
6      node *ch[2], *fa;
7      int dir() { return fa -> ch[1] == this; }
8      void setchild(node *x, int d) {
9          ch[d] = x;
10         x->fa = (x == NIL) ? NIL : this;
11     }
12     void PushUp() { siz = ch[0] -> siz + ch[1] -> siz + 1; }
13     void PushDown() {
14         if (!rev) return ;
15         swap(ch[0], ch[1]);
16         ch[0] -> rev ^= 1; ch[1] -> rev ^= 1;
17         rev=0;
18     }
19 } tree[MAXN], *ncnt, *root;
20 bool ok=0;
21 void Init() {
22     ok = 0;
23     root = NIL = ncnt = &tree[0];
24     NIL -> key = -INF;
25     NIL -> siz = NIL -> rev = 0;
26     NIL -> fa = NIL -> ch[0] = NIL -> ch[1] = NIL;
27 }
28 node *Newnode(int val) {
29     node *p = ++ncnt;
30     p -> key = val, p -> siz = 1, p -> rev = 0;
31     p -> fa = p -> ch[0] = p -> ch[1] = NIL;
32     return p;
33 }
34 void Rotate(node *x) {
35     node *y = x -> fa;
36     int d = x -> dir();
37     if (y == root) root = x;
38     else y -> fa -> setchild(x, y -> dir());
39     x -> fa = y -> fa;
40     y -> setchild(x -> ch[!d], d);

```

```

41     x -> setchild(y, !d);
42     y -> PushUp();
43 }
44 void Splay(node *x, node *rt) {
45     node *y, *z;
46     x -> PushDown();
47     while (x -> fa != rt) {
48         y = x->fa; z = y -> fa;
49         if (z == rt) Rotate(x);
50         else {
51             if (x -> dir() == y->dir()) Rotate(y);
52             else Rotate(x);
53             Rotate(x);
54         }
55     }
56     x -> PushUp();
57 }
58 void Insert(node*rt, int val) {
59     if (rt == NIL) { rt = Newnode(val); return; }
60     node *x = rt;
61     int d = 0;
62     while (1) {
63         d = (val > x -> key);
64         if (x -> ch[d] == NIL) break;
65         x = x -> ch[d];
66     }
67     node *y = Newnode(val);
68     x -> setchild(y, d);
69     x -> PushUp();
70     Splay(y, NIL);
71 }
72 node *Select(int k, node *f) {
73     node *p = root;
74     int lsz;
75     while (1) {
76         p -> PushDown();
77         lsz = p -> ch[0] -> siz;
78         if (k == lsz + 1) break;
79         if (k <= lsz) p = p -> ch[0];
80         else p = p -> ch[1], k = k - lsz - 1;
81     }
82     Splay(p, f);
83     return p;
84 }
85 node *Maketree(node *fa, int l, int r) {
86     if (l > r) return NIL;
87     int mid = (l + r) >> 1;
88     node *p = Newnode(data[mid]);
89     p -> ch[0] = Maketree(p, l, mid - 1);
90     p -> ch[1] = Maketree(p, mid + 1, r);
91     p -> fa = fa;
92     p -> PushUp();
93     return p;
94 }
95 void dfs(node *rt) {
96     if (rt == NIL) return;
97     rt -> PushDown();
98     dfs(rt -> ch[0]);
99     if (rt -> key != INF && rt -> key != -INF) {
100         if(ok) printf(" ");

```

```

101         ok = 1;
102         printf("%d",rt -> key);
103     }
104     dfs(rt -> ch[1]);
105 }

```

2 动态规划

2.1 背包

2.1.1 01 背包 滚动数组 & 输出方案

```

1  for (int i = 1; i <= n; i++) for (int j = v; j >= c[i]; j--)
2      if (dp[j] < dp[j-c[i]] + w[i]) {
3          dp[j] = dp[j-c[i]] + w[i];
4          paht[i][j] = true;
5      }
6  int i = n, j = v;
7  while (i && j) {
8      if (path[i][j]) {
9          items.push(i);    // 方案
10         j -= c[i];
11     }
12     i--;
13 }

```

2.1.2 完全背包

```

1  for (int i = 1; i <= n; i++) for (int j = c[i]; j <= v; j++)
2      dp[j] = max(dp[j], dp[j-c[i]] + w[i]);

```

2.1.3 分组背包

```

1  for (int i = 0; i < n; i++) {
2      vector<int> &g = group[i];
3      for (int j = v; j > 0; j--) for (int k = 0; k < g.size(); k++)
4          if (j-c[g[k]] >= 0) dp[j] = max(dp[j], dp[j-c[g[k]]] + w[g[k]]);
5  }

```

2.1.4 树形背包 以 01 树形背包为例

```

1  void dfs(int u, int f) {
2      sz[u] = 1;
3      dp[u][1] = a[u], dp[u][0] = 0;    // 初值
4      for (int v : G[u]) if (v != f){
5          dfs(v, u);
6          for (int i = 0; i <= sz[u] + sz[v]; i++) tmp[i] = 0;
7          for (int i = sz[u]; i >= 0; i--)    // 是否必选一个决定枚举到 1 还是 0
8              for (int j = 0; j <= sz[v]; j++)// 同上
9                  tmp[i+j] = max(tmp[i+j], dp[u][i] + dp[v][j]);
10         sz[u] += sz[v];    // 合并
11         for (int i = 0; i <= sz[u]; i++) dp[u][i] = tmp[i];
12     }
13 }

```

2.2 最长公共子序列

```

1  for (int i = 1; i <= n; i++) for (int j = 1; j <= m; j++) {
2      int ans = 0;
3      if (a[i] == b[j]) ans = dp[i-1][j-1] + 1;
4      else ans = max(dp[i-1][j], dp[i][j-1]);

```

```

5     dp[i][j] = ans;
6 }

```

2.3 优化

2.3.1 决策单调性

```

1 struct Node { int l, r, p; } que[MAXN];
2 int dp[MAXN];
3 int w(int l, int r) {}; //dp[r] = dp[l] + w(l, r);
4 void DP() {
5     int tail = 0;
6     que[tail++] = Node{1, n, 0};
7     for (int i = 1; i <= n; i++) {
8         int cur = -1, L = 0, R = tail-1;
9         while (L <= R) {
10             int mid = (L+R)>>1;
11             if (que[mid].l <= i) cur = mid, L = mid + 1;
12             else R = mid - 1;
13         }
14         int p = que[cur].p, cur = -1;
15         dp[i] = dp[p] + w(p, i);
16         while (tail && dp[i] + w(i, que[tail-1].l) <= dp[que[tail-1].p] +
17             ↪ w(que[tail-1].p, que[tail-1].l))
18             cur = que[--tail].l;
19         L = que[tail-1].l, R = que[tail-1].r;
20         while (L <= R) {
21             int mid = (L+R) >> 1;
22             if (dp[i] + w(i, mid) <= dp[que[tail-1].p] + w(que[tail-1].p,
23                 ↪ mid))
24                 que[tail-1].r = mid - 1, R = mid - 1, cur = mid;
25             else L = mid + 1;
26         }
27         if (cur != -1) que[tail++] = Node{cur, n, i};
28     }
29 }

```

2.3.2 斜率优化

斜率单调, 横坐标单调

```

1 LL x(int i) {}
2 LL y(int i) {}
3 LL k(int i) {}
4 LD slope(int i, int j) {
5     return 1. * (y(i) - y(j)) / (x(i) - x(j));
6 }
7 void solve() {
8     deque<int> q; q.push_back(0);
9     for (int i = 1; i <= n; i++) {
10         while (q.size() > 1) {
11             int j = q.front(); q.pop_front();
12             int jj = q.front(); q.push_front(j);
13             // 斜率递增
14             if (k(i) > slope(j, jj)) q.pop_front();
15             else break;
16         }
17         int j = q.front();
18         dp[i] = dp[j] + W; // dp 方程
19         while (q.size() > 1) {
20             int j = q.back(); q.pop_back();

```

```

21         int jj = q.back(); q.push_back(j);
22         // 维护下凸包
23         if (slope(i, jj) > slope(i, j)) q.pop_back();
24         else break;
25     }
26     q.push_back(i);
27 }
28 }

```

3 树相关

3.1 点分治

```

1  int sz[MAXN], vis[MAXN]; // sz[u] 为每次 dfs 计算以 u 为根的子树的大小
2  // descendant 保存第一次调用 dfs 的点 u 到包含 u 的树中的所有的点 v 及他们之间的距离
3  vector<PII> descendant;
4  /* 遍历, 同时计算 sz 和 descendant
5  /* 如果第一次调用 dis 参数为 0, dis 表示根 (第一次调用 dfs 的点) 到当前点 u 的距离
6  /* 不为 0 的话会在所有距离上加上这个第一次调用传入的参数 dist_0) */
7  void dfs(int u, int f, int dis) {
8      sz[u] = 1;
9      descendant.emplace_back(u, dis);
10     for (int i = head[u]; i; i = edges[i].next) {
11         Edge &e = edges[i];
12         if (e.to != f && !vis[e.to]) {
13             dfs(e.to, u, dis + e.w);
14             sz[u] += sz[e.to];
15         }
16     }
17 }
18 /* 求包含 u 的树的重心 */
19 int center(int u) {
20     // 每一次调用 dfs 前都要清空 descendant
21     descendant.clear(); dfs(u, 0, 0);
22     int tot_sz = descendant.size();
23     for (auto des : descendant) {
24         int is_center = 1;
25         int x = des.first;
26         for (int i = head[x]; i; i = edges[i].next) {
27             Edge &e = edges[i];
28             if (vis[e.to]) continue; // e.to 已删除, 不考虑
29             // sz[x] > sz[v] ⇒ v 是 x 的儿子, sz[v] >  $\frac{n}{2}$ , v 不是重心
30             if (sz[x] > sz[e.to] && (sz[e.to] << 1) > tot_sz) {
31                 is_center = 0; break;
32             }
33             // sz[x] < sz[v] ⇒ v 是 x 的父亲, tot_sz - sz[x] 是 v 向上的大小
34             if (sz[x] < sz[e.to] && ((tot_sz - sz[x]) << 1) > tot_sz) {
35                 is_center = 0; break;
36             }
37         }
38         if (is_center) {
39             // 找到重心, 需要以重心为根, 求一下树中所有点到重心的距离
40             // 这样调用完 center 后就可以保存所有点到重心的距离了
41             descendant.clear(); dfs(x, 0, 0); return x;
42         }
43     }
44     return -1;
45 }
46
47 void divide(int u) {

```



```

48     int c = center(u); vis[c] = 1;    // 标记重心, 删去
49     work(); // 已经在 center 函数中处理了 " 经过重心的 '半路径'"
50         // 在 work 函数中考虑如何把两条半路径组合成一条路径
51         // 并考虑如何处理数据, 回答问题
52     for (int i = head[c]; i; i = edges[i].next) {
53         Edge &e = edges[i];
54         if (vis[e.to]) continue; // e.to 已经删除, 不考虑
55         iework();    // 考虑把 " 假的路径 " 容斥掉. 如果是路径, 那么求一次
56                     // dfs(e.to, c, e.w) 得到的 descentant 就是所有
57                     // " 假的路径 ", 这时候虽然第一次调用 dfs 的是 e.to,
58                     // 但由于加上的 e.w, 也可以认为是点到 c 的距离
59         divide(e.to);    // 找到剩余的点 (所在的子树), 继续处理
60     }
61 }

```

4 图论

4.1 匈牙利二分图匹配

```

1  /* 寻找左边点 u 的匹配, 存图只需要左边点连向右边点的有向边即可 */
2  bool match(int u) {
3      for (int v : G[u]) if (!vis[v]) {
4          vis[v] = 1;    // 右边点 v 访问标记
5          // 如果右边点没有被左边点匹配到, 让 u 和 v 匹配
6          // 或者被匹配的左边点 my[v] 可以找到其他右边点的匹配
7          // 那么让 my[v] 和其他右边点匹配, 让 u 和 v 匹配
8          if (!my[v] || match(my[v])) {
9              mx[u] = v, my[v] = u;    // 记录匹配点
10             return true;
11         }
12     }
13     return false;
14 }
15 /* 匈牙利算法, 左边点个数 nx, 右边点个数 ny */
16 int hungarian(int nx, int ny) {
17     int cnt = 0;
18     for (int u = 1; u <= nx; u++) {    // 每个左边点都尝试匹配
19         for (int v = 1; v <= ny; v++) vis[v] = 0;
20         if (match(u)) cnt++;
21     }
22     return cnt;
23 }

```

4.2 网络流

4.2.1 Dinic

```

1  int d[MAXV], cur[MAXV];
2  //bfs 找可前进边, 即 d[v] = d[u] + 1 且可以流的 (u, v)
3  bool bfs(int s, int t) {
4      memset(d, INTINF, sizeof(d));
5      queue<int> Q;
6      Q.push(s); d[s] = 0;
7      while (!Q.empty()) {
8          int u = Q.front(); Q.pop();
9          for (int i = head[u]; ~i; i = edges[i].next) {
10             Edge &e = edges[i];
11             //找还可以流的边
12             if (d[e.to] >= INTINF && e.cap > e.flow) {
13                 d[e.to] = d[u] + 1; Q.push(e.to);

```

```

14         }
15     }
16 }
17 return d[t] < INTINF;
18 }
19 //当前点 u, flow 已经流过的流量, a 还可以继续流的流量
20 //dfs 找多条增广路
21 int dfs(int u, int a, int t) {
22     //流到终点或者流不下去了
23     //流到终点返回可流量, 在下面的 a -= f 时 a=0, 然后结束这个点的搜索
24     if (u == t || a == 0)
25         return a;
26     int f = 0, flow = 0;
27     //当前弧优化 &i = cur 搜完了这条路, 就不会再搜这条路了, 所以从后面开始搜
28     for (int &i = cur[u]; ~i; i = edges[i].next) {
29         Edge &e = edges[i];
30         if (d[e.to] == d[u] + 1) {
31             f = dfs(e.to, min(a, e.cap - e.flow));
32             if (f > 0) {
33                 e.flow += f; flow += f;
34                 edges[i^1].flow -= f; a -= f;
35                 if (!a) break; //没有可以供其他路流的流量 (或者流完了)
36             }
37         }
38     }
39     if (a) //GAP 优化 如果后面的都流完了, 这个点还有流量剩余, 那么不用再搜这个点了
40         d[u] = -1;
41     return flow;
42 }
43 int dinic(int s, int t) {
44     int flow = 0;
45     while (bfs(s, t)) {
46         for (int i = 1; i <= v; i++) cur[i] = head[i];
47         flow += dfs(s, INTINF);
48     }
49     return flow;
50 }

```

4.2.2 费用流 EK 算法

```

1 int d[MAXV], a[MAXV], inq[MAXV], p[MAXV];
2 bool spfa(int s, int t, int &flow, int &cost) {
3     memset(d, INTINF, sizeof(d)); memset(a, 0, sizeof(a));
4     queue<int> Q;
5     Q.push(s), inq[s] = 1;
6     d[s] = 0, a[s] = INTINF, p[s] = -1;
7     while (!Q.empty()) {
8         int u = Q.front();
9         Q.pop(), inq[u] = 0;
10        for (int i = head[u]; ~i; i = edges[i].next) {
11            Edge &e = edges[i];
12            if (d[e.to] > d[u] + e.cost && e.cap > e.flow) {
13                d[e.to] = d[u] + e.cost;
14                a[e.to] = min(a[u], e.cap - e.flow);
15                p[e.to] = i;
16                if (!inq[e.to]) Q.push(e.to), inq[e.to] = 1;
17            }
18        }
19    }
20    if (d[t] >= INTINF) return false;

```

```

21     flow += a[t];
22     cost += d[t] * a[t];
23     for (int i = p[t]; ~i; i = p[edges[i^1].to])
24         edges[i].flow += a[t], edges[i^1].flow -= a[t];
25     return true;
26 }
27 void mcmf(int s, int t, int &flow, int &cost) {
28     while (spfa(s, t, flow, cost));
29 }

```

5 数学

5.1 取模函数

```

1  int pls(LL a, LL b) {
2      a += a < 0 ? P : 0, b += b < 0 ? P : 0;
3      return a + b >= P ? a + b - P : a + b;
4  }
5  int mult(LL a, LL b) {
6      a += a < 0 ? P : 0, b += b < 0 ? P : 0;
7      return a * b >= P ? a * b % P : a * b;
8  }

```

5.2 快速幂

```

1  /* power(x) 为 x 在模 P 意义下的逆元, P 必须为质数 */
2  int power(int a, int b = P-2) {
3      int res = 1;
4      while (b) {
5          if (b&1) res = mult(res, a);
6          a = mult(a, a);
7          b >>= 1;
8      }
9      return res;
10 }

```

5.3 多项式

5.4 拉格朗日插值

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \ell_i(x)$$

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n-1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_{n-1})}$$

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

```

1  /* 求 n 个点值确定的 n 次数多项式拉格朗日插值在 m 处的函数值 */
2  /* 点 (x, y) 从下标 0 开始 */
3  int Lagrange(int *x, int *y, int n, int m) {
4      int L = 0;
5      for (int i = 0; i < n; i++) {
6          int p = 1, q = 1;
7          for (int j = 0; j < n; j++) if (j != i)
8              p = mult(p, m - x[j]), q = mult(q, x[i] - x[j]);
9          L = pls(L, mult(y[i], mult(p, power(q))));

```

```

10     }
11     return L;
12 }

```

5.4.1 横坐标连续拉格朗日插值

$$pre_i(\xi) = \prod_{j=0}^i (\xi - x_j), suf_i(\xi) = \prod_{j=i}^{n-1} (\xi - x_j)$$

$$\ell_i(x) = \frac{pre_{i-1}(x) \cdot suf_{i+1}(x)}{(-1)^{n-1-i} (x_i - x_0)! (x_{n-1} - x_i)!}$$

```

1 // finv[x] 表示 (x!)^{-1}, inv_neg_1 表示 (-1)^{-1}
2 // l[i] 是第 i 项拉格朗日基本多项式
3 int pre[MAXA], suf[MAXA], finv[MAXN], inv_neg_1, l[MAXN];
4 /* 预处理阶乘逆元, 注意要处理到最高次数界 */
5 void init(int n) {
6     int facn = 1;
7     for (int i = 2; i <= n; i++) facn = mult(facn, i);
8     finv[n] = power(facn);
9     for (int i = n-1; ~i; i--) finv[i] = mult(i+1, finv[i+1]);
10    inv_neg_1 = power(-1);
11 }
12 /* 求 n 个点值确定的 n 次数多项式拉格朗日插值在 x 处的函数值 */
13 /* 其中点的横坐标为 s, s+1, s+2..., s+n-1, (i, y) 从下标 s 开始 */
14 int Lagrange(int s, int *y, int n, int x) {
15     pre[0] = x - s;
16     for (int i = 1; i < n; i++) pre[i] = mult(pre[i-1], x - i - s);
17     suf[n] = 1;
18     for (int i = n-1; ~i; i--) suf[i] = mult(suf[i+1], x - i - s);
19     l[0] = mult(suf[1], finv[n-1]);
20     if ((n-1)&1) l[0] = mult(l[0], inv_neg_1);
21     for (int i = 1; i < n; i++) {
22         l[i] = mult(mult(pre[i-1], suf[i+1]), mult(finv[i], finv[n-1-i]));
23         if ((n-1-i)&1) l[i] = mult(l[i], inv_neg_1);
24     }
25     int L = 0;
26     for (int i = 0; i < n; i++) L = pls(L, mult(y[i], l[i]));
27     return L;
28 }

```

5.4.2 重心拉格朗日插值 (增删点)

$$w_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

$$L(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{w_i}{x - x_i} y_i}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{w_i}{x - x_i}}$$

```

1 /* 向点集 S(X, Y) 中加入点 (x, y), W 为重心权 */
2 void add(int x, int y, VI &X, VI &Y, VI &W) {
3     int n = X.size();
4     X.push_back(x), Y.push_back(y), W.push_back(1);
5     for (int i = 0; i < n; i++) W[i] = mult(W[i], power(X[i] - x));
6     for (int i = 0; i < n; i++) W[n] = mult(W[n], x - X[i]);
7     W[n] = power(W[n]); // 维护重心权
8 }
9 /* 计算点集 S(X, Y) 表示的多项式在 x 处的函数值, W 为重心权 */
10 int Lagrange(VI &X, VI &Y, VI &W, int x) {

```

```

11     int L = 0, g = 0, n = X.size();
12     for (int i = 0; i < n; i++) {
13         // 如果是已知点, 则直接求, 否则  $\frac{1}{x-x_i}$  没有意义
14         if (x == X[i]) return Y[i];
15         int p = mult(W[i], power(x - X[i]));
16         L = pls(L, mult(p, Y[i])), g = pls(g, p);
17     }
18     return mult(L, power(g));
19 }

```

5.5 FFT

```

1  const double PI = 2 * acos(0);
2  typedef complex<double> cpx;
3  /*  $a_i$  的实部为系数, 虚部为 0,  $n (= 2^k)$  为界次数, 返回值为复数  $a_i = A(\omega_n^i)$  */
4  void FFT(cpx *a, int n, int flag_inv = 1) {
5      for (int i = 1, j = 0; i < n - 1; i++) {
6          for (int k = n; j ^= k >>= 1, (~j) & k;);
7          if (i < j) swap(a[i], a[j]);
8      }
9      for (int len = 2; len <= n; len <= 1) {
10         cpx wn(cos(2 * PI / len), flag_inv * sin(2 * PI / len));
11         for (int start = 0; start < n; start += len) {
12             cpx w(1, 0);
13             for (int i = start; i < start + len / 2; i++, w *= wn) {
14                 cpx l = a[i], r = w * a[i + len / 2];
15                 a[i] = l + r, a[i + len / 2] = l - r;
16             }
17         }
18     }
19     if (flag_inv == -1) for (int i = 0; i < n; i++) a[i] /= n;
20 }
21 /*  $a_i$  为复数  $A(\omega_n^i)$ ,  $n (= 2^k)$  为点个数, 返回值  $a_i$  的实部为系数, 虚部为 0 */
22 void IFFT(cpx *a, int n) { DFT(a, n, -1); }

```

5.6 多项式乘法

```

1  cpx a[MAXN << 2], b[MAXN << 2], ab[MAXN << 2];
2  /* 输入多项式系数和其界次数, 返回乘积系数和其界次数 */
3  int polymult(double *A, int n_A, double *B, int n_B, double *AB) {
4      for (int i = 0; i < n_A; i++) a[i] = cpx(A[i], 0);
5      for (int i = 0; i < n_B; i++) b[i] = cpx(B[i], 0);
6      int n = n_A + n_B - 1, expand = 1; // AB 的界次数, 即需要计算的点值个数
7      while (expand < n) expand <= 1; // FFT 需要界次数为  $2^k$ 
8      FFT(a, expand), FFT(b, expand); // 转换为点值并计算
9      for (int i = 0; i < expand; i++) ab[i] = a[i] * b[i];
10     IFFT(ab, expand); // 再转换为系数
11     for (int i = 0; i < n; i++) AB[i] = a[i].real();
12     return n;
13 }

```

6 计算几何

6.1 误差修正 (eps 和 sgn 函数)

```

1  const double eps = 1e-8;
2  int sgn(double x) {
3      if (fabs(x) < eps) return 0;
4      return x > 0 ? 1 : -1;
5  }

```

6.2 向量和点

```

1 struct Vec {
2     double x, y;
3     Vec operator + (const Vec &B) const { return Vec{x + B.x, y + B.y}; }
4     Vec operator - (const Vec &B) const { return Vec{x - B.x, y - B.y}; }
5     Vec operator * (const double k) const { return Vec{x * k, y * k}; }
6     Vec operator / (const double k) const { return Vec{x / k, y / k}; }
7     double operator * (const Vec &B) const { return x * B.x + y * B.y; }
8     double operator ^ (const Vec &B) const { return x * B.y - y * B.x; }
9     bool operator == (const Vec &B) const {
10         return !sgn(x - B.x) && !sgn(y - B.y);
11     }
12     bool operator < (const Vec &V) const {
13         return x == V.x ? y < V.y : x < V.x;
14     }
15     double length() {
16         Vec A = *this;
17         return sqrt(A * A);
18     }
19     /* 化为长度为 r 的向量 */
20     Vec trunc(double r){
21         double l = length();
22         if(!sgn(l)) return (*this);
23         r /= l;
24         return Vec{x * r, y * r};
25     }
26     /* 逆时针旋转 90 度 */
27     Vec rotleft(){ return Vec{-y, x}; }
28     /* 顺时针旋转 90 度 */
29     Vec rotright(){ return Vec{y, -x}; }
30     /* 绕着点 P 逆时针旋转 angle */
31     Vec rotate(Vec p, double angle) {
32         Vec v = (*this) - p;
33         double c = cos(angle), s = sin(angle);
34         return Vec{p.x + v.x * c - v.y * s, p.y + v.x * s + v.y * c};
35     }
36 };
37 typedef Vec Point; // 点的记录方式和向量相同
38 /* 求两向量的夹角 (无向, 且夹角在 [0, PI] 之间, 弧度制) */
39 double angle(Vec A, Vec B) {
40     return acos((A * B) / A.length() / B.length());
41 }
42 /* 两点距离 */
43 double pointDistance(Point A, Point B) { return (A-B).length(); }
44 /* 三角形面积 */
45 double triangle_area(Point A, Point B, Point C) {
46     Vec v = B - A, u = C - A;
47     return fabs(v ^ u) / 2;
48 }

```

6.3 直线和线段

```

1 struct Line {
2     Point P; Vec v; // 点向式, 注意两点需要转化再存储
3     /* 获取直线上某一点 (线段起点) */
4     Point point(double t = 0) { return P + (v * t); }
5     /* 获取线段终点 */
6     Point endpoint() { return point(1); }
7     /* 点相对直线的位置, 1 为右边, -1 为左边, 0 在直线上 */

```

```

8     int pointRelative(Point Q) { return sgn((Q - P) ^ v); }
9     /* 点到直线的有向距离, 正为右边, 负为左边, 0 在直线上 */
10    double pointDistance(Point Q) { return ((Q - P) ^ v) / v.length(); }
11    /* 点在直线上的投影 */
12    Point pointProjection(Point Q) {
13        return point(((Q - P) * v) / v.length() / v.length());
14    }
15    /* 点是否在线段上 (不包括端点) 如需包括端点, 改 < 为 <= */
16    bool isContainPoint(Point Q) {
17        return !pointRelative(Q) && sgn((Q-point()) * (Q-endpoint())) < 0;
18    }
19    /* 线段长度 */
20    double length() { return v.length(); }
21    /* 求点 P 关于直线的对称点 */
22    Point pointSymmetry(Point P){
23        Point Q = pointProjection(P);
24        return Point{2 * Q.x - P.x, 2 * Q.y - P.y};
25    }
26 };
27 typedef Line Segment; // 线段也用点向式存, 注意两点转化
28 /* 直线是否相交 */
29 bool isLineIntersection(Line l1, Line l2) { return sgn(l1.v ^ l2.v); }
30 /* 直线是否平行 */
31 bool isLineParallel(Line l1, Line l2) {
32     return !isLineIntersection(l1, l2);
33 }
34 /* 直线是否重合 */
35 bool isLineCoincident(Line l1, Line l2) {
36     return isLineParallel(l1, l2) && !l1.pointRelative(l2.point()) &&
37         ↪ !l1.pointRelative(l2.endpoint());
38 }
39 /* 求两直线的交点, 调用前需保证相交 */
40 Point getLineIntersection(Line l1, Line l2) {
41     Vec u = l1.point() - l2.point();
42     double t = (l2.v ^ u) / (l1.v ^ l2.v);
43     return l1.point(t);
44 }
45 /* 线段是否与直线相交 (不包括端点) 包括端点该 < 为 <= */
46 bool isSegmentIntersectLine(Segment s, Line l) {
47     return l.pointRelative(s.point()) * l.pointRelative(s.endpoint()) < 0;
48 }
49 /* 线段是否相交 (是否包括端点取决于上一个函数) */
50 bool isSegmentIntersecting(Segment s1, Segment s2) {
51     return isSegmentIntersectLine(s1, s2) && isSegmentIntersectLine(s2,
52         ↪ s1);
53 }

```

6.4 多边形

```

1 struct Polygon {
2     int n; // 数据大可能需要不使用结构体
3     Point points[MAXN]; // 逆时针排序
4     Line lines[MAXN]; // 边
5     void init(int _n, Point _ps[]) {
6         n = _n;
7         for (int i = 1; i <= n; i++)
8             points[i] = _ps[i];
9         points[0] = _ps[n];
10    }
11    /* 获取边 */

```

```

12 void getLines() {
13     for (int i = 0; i < n; i++)
14         lines[i+1] = Line{points[i], points[i+1] - points[i]};
15 }
16 /* 以点 p0 为基点, 进行极角排序的比较函数 */
17 struct cmp{
18     Point p;
19     cmp(const Point &p0) { p = p0; }
20     bool operator() (const Point &aa, const Point &bb) {
21         Point a = aa, b = bb;
22         int d = sgn((a - p) ^ (b - p));
23         if (d == 0)
24             return sgn(pointDistance(p, a) - pointDistance(p, b)) < 0;
25         return d > 0;
26     }
27 };
28 /* 极角排序 */
29 void norm() {
30     Point mi = points[1];
31     for (int i = 2; i <= n; i++) mi = min(mi, points[i]);
32     sort(points + 1, points + 1 + n, cmp(mi));
33 }
34 /* 求多边形有向面积 */
35 double area() {
36     double res = 0;
37     for (int i = 0; i < n; i++)
38         res += points[i] ^ points[i + 1];
39     return res / 2.0;
40 }
41 /* 求多边形周长 */
42 double circumference() {
43     double sum = 0;
44     for(int i = 0; i < n; i++)
45         sum += pointDistance(points[i], points[i + 1]);
46     return sum;
47 }
48 /* Graham 求凸包; 注意如果有影响, 要特判下所有点共点, 或者共线的特殊情况 */
49 void graham(Polygon &convex, bool is_norm) {
50     if (!is_norm) norm();
51     int &top = convex.n;
52     top = 0;
53     if (n == 1) {
54         top = 1, convex.points[1] = points[1];
55     }
56     else if (n == 2) {
57         top = 2, convex.points[1] = points[1], convex.points[2] =
            ↪ points[2];
58         if (convex.points[1] == convex.points[2]) top--;
59     }
60     else {
61         top = 2, convex.points[1] = points[1], convex.points[2] =
            ↪ points[2];
62         for (int i = 3; i <= n; i++){
63             while (top > 1 && sgn((convex.points[top] - convex.points[top
            ↪ - 1]) ^ (points[i] - convex.points[top - 1])) <= 0)
64                 top--;
65             convex.points[++top] = points[i];
66         }
67         if(convex.n == 2 && (convex.points[1] == convex.points[2]))
            ↪ convex.n--; //特判

```



```

68     }
69     convex.points[0] = convex.points[convex.n];
70 }
71 /* 判断多边形是不是凸的 */
72 bool isConvex(){
73     bool s[2] = {0, 0};
74     for (int i = 0; i < n; i++) {
75         int j = (i + 1) % n;
76         int k = (j + 1) % n;
77         s[sgn((points[j] - points[i]) ^ (points[k] - points[i])) + 1]
            ↪ = true;
78         if(s[0] && s[2]) return false;
79     }
80     return true;
81 }
82 /* 点与多边形位置; 3 点上, 2 边上, 1 内部, 0 外部 */
83 int pointRelation(Point q){
84     for(int i = 1; i <= n; i++) if(points[i] == q) return 3;
85     getLines();
86     for(int i = 1; i <= n; i++)
87         if(lines[i].isContainPoint(q)) return 2;
88     int cnt = 0;
89     for(int i = 0; i < n; i++){
90         int j = i + 1;
91         int k = sgn((q - points[j]) ^ (points[i] - points[j]));
92         int u = sgn(points[i].y - q.y), v = sgn(points[j].y - q.y);
93         if (k > 0 && u < 0 && v >= 0) cnt++;
94         if (k < 0 && v < 0 && u >= 0) cnt--;
95     }
96     return cnt != 0;
97 }
98 };

```

6.5 圆

```

1  const double PI = 3.14159265358;
2  struct Circle {
3      Point O; double r; //圆心和半径
4      /* 面积 */
5      double area() { return PI * r * r; }
6      /* 周长 */
7      double circumFERENCE() { return 2 * PI * r; }
8      /* 点和圆的关系; 0 圆上, -1 圆内, 1 圆外 */
9      int pointRelation(Point P){
10         return sgn(pointDistance(O, P) - r);
11     }
12     /* 直线和圆的关系; 返回交点个数 */
13     int lineRelation(Line l){
14         double dst = fabs(l.pointDistance(O));
15         if (sgn(dst - r) < 0) return 2;
16         else if (!sgn(dst - r)) return 1;
17         return 0;
18     }
19     /* 两圆的关系; 5 相离, 4 外切, 3 相交, 2 内切, 1 内含 */
20     int circleRelation(Circle v) {
21         double d = pointDistance(O, v.O);
22         if (sgn(d - r - v.r) > 0) return 5;
23         if (sgn(d - r - v.r) == 0) return 4;
24         double l = fabs(r - v.r);
25         if (sgn(d - r - v.r) < 0 && sgn(d - l) > 0) return 3;

```

```

26         if (sgn(d - l) == 0) return 2;
27         return 1;
28     }
29     /* 求两个圆的交点; 返回交点个数 */
30     int getCircleIntersection(Circle v, Point &p1, Point &p2) {
31         int rel = circleRelation(v);
32         if (rel == 1 || rel == 5) return 0;
33         double d = pointDistance(O, v.O);
34         double l = (d * d + r * r - v.r * v.r) / (2 * d);
35         double h = sqrt(r * r - l * l);
36         Point tmp = O + (v.O - O).trunc(l);
37         p1 = tmp + ((v.O - O).rotleft().trunc(h));
38         p2 = tmp + ((v.O - O).rotright().trunc(h));
39         if (rel == 2 || rel == 4) return 1;
40         return 2;
41     }
42     /* 求直线和圆的交点; 返回交点个数 */
43     int getLineIntersection(Line l, Point &p1, Point &p2) {
44         if (!(*this).lineRelation(l)) return 0;
45         Point A = l.pointProjection(O);
46         double d = l.pointDistance(O);
47         d = sqrt(r * r - d * d);
48         if (!sgn(d)) {
49             p1 = p2 = A;
50             return 1;
51         }
52         p1 = A + l.v.trunc(d), p2 = A - l.v.trunc(d);
53         return 2;
54     }
55     /* 求过某点的切线; 返回切线条数 */
56     int getTangentLine(Point q, Line &u, Line &v) {
57         int x = pointRelation(q);
58         if (x == 2) return 0;
59         if (x == 1) {
60             v = u = Line{q, q - O.rotleft()};
61             return 1;
62         }
63         double d = pointDistance(O, q), l = r * r / d, h = sqrt(r * r - l *
        ↪ l);
64         u = Line{q, O + ((q-O).trunc(l) + (q-O).rotleft().trunc(h)) - q};
65         v = Line{q, O + ((q-O).trunc(l) + (q-O).rotright().trunc(h)) - q};
66         return 2;
67     }
68     /* 求三角形 OAB 与圆相交的面积 */
69     double triangIntersectingArea(Point A, Point B) {
70         if (!sgn((O - A) ^ (O - B))) return 0.0;
71         Point q[5];
72         int len = 0;
73         q[len++] = A;
74         Line l = {A, B - A};
75         Point p1, p2;
76         if (getLineIntersection(l, q[1], q[2]) == 2) {
77             if (sgn((A - q[1]) * (B - q[1])) < 0) q[len++] = q[1];
78             if (sgn((A - q[2]) * (B - q[2])) < 0) q[len++] = q[2];
79         }
80         q[len++] = B;
81         if (len == 4 && sgn((q[0] - q[1]) * (q[2] - q[1])) > 0)
82             swap(q[1], q[2]);
83         double res = 0;
84         for (int i = 0; i < len - 1; i++) {

```

```

85         if (!pointRelation(q[i]) || !pointRelation(q[i + 1])) {
86             double arg = angle(q[i] - 0, q[i + 1] - 0);
87             res += r * r * arg / 2.0;
88         }
89         else res += fabs((q[i] - 0) ^ (q[i + 1] - 0)) / 2.0;
90     }
91     return res;
92 }
93 };
94 /* 三角形外接圆 */
95 Circle getOuterCircle(Point A, Point B, Point C) {
96     Line u = {(A + B) / 2, (B - A).rotleft()};
97     Line v = {(B + C) / 2, (C - B).rotleft()};
98     Point O = getLineIntersection(u, v);
99     double r = pointDistance(A, O);
100    return Circle{O, r};
101 }
102 /* 三角形内切圆 */
103 Circle getInnerCircle(Point A, Point B, Point C) {
104     double m = atan2(B.y - A.y, B.x - A.x);
105     double n = atan2(C.y - A.y, C.x - A.x);
106     Line u = {A, Point{cos((n + m) / 2), sin((n + m) / 2)}};
107     m = atan2(A.y - B.y, A.x - B.x), n = atan2(C.y - B.y, C.x - B.x);
108     Line v = {B, Point{cos((n+m)/2), sin((n+m)/2)}};
109     Point O = getLineIntersection(u, v);
110     Line AB = {A, B - A};
111     double r = fabs(AB.pointDistance(O));
112     return Circle{O, r};
113 }
114 /* 两圆相交面积 */
115 double circleIntersectingArea(Circle c1, Circle c2){
116     int rel = c1.circleRelation(c2);
117     if(rel >= 4) return 0.0;
118     if(rel <= 2) return min(c1.area(), c2.area());
119     double d = pointDistance(c1.O, c2.O);
120     double hf = (c1.r + c2.r + d) / 2.0;
121     double ss = 2 * sqrt(hf * (hf - c1.r) * (hf - c2.r) * (hf - d));
122     double a1 = acos((c1.r*c1.r + d*d - c2.r*c2.r) / (2.0 * c1.r * d));
123     a1 *= c1.r * c1.r;
124     double a2 = acos((c2.r*c2.r + d*d - c1.r*c1.r) / (2.0 * c2.r * d));
125     a2 *= c2.r * c2.r;
126     return a1 + a2 - ss;
127 }

```

6.6 最小圆覆盖

```

1  Circle minCircleCover(Point p[], int n) {
2      random_shuffle(p + 1, p + n + 1);    // 打乱保证随机
3      Circle C = {p[1], 0};    // 初始随便一点
4      for (int i = 2; i <= n; i++)
5          if (C.pointRelation(p[i]) == 1) {    // 点 pi 在圆外
6              C = {p[i], 0};
7              for (int j = 1; j < i; j++)
8                  if (C.pointRelation(p[j]) == 1) {    // 点 pj 在圆外
9                      C = {(p[i] + p[j]) / 2, pointDistance(p[i], p[j]) / 2};
10                     for (int k = 1; k < j; k++)
11                         if (C.pointRelation(p[k]) == 1)    // 点 pk 在圆外
12                             C = getOuterCircle(p[i], p[j], p[k]);
13                 }
14         }

```

```

15     return C;
16 }

```

6.7 平面最近点对

```

1  struct Point { double x, y; } points[MAXN];
2  bool cmpx(const Point &P1, const Point &P2) { return P1.x < P2.x; }
3  bool cmpy(const Point &P1, const Point &P2) { return P1.y < P2.y; }
4  double dist(const Point &P1, const Point &P2) {
5      return hypot(P1.x - P2.x, P1.y - P2.y);
6  }
7  double divide(int l, int r) {
8      if (l >= r) return DINF; // 边界
9      if (l + 1 == r) return dist(points[l], points[r]);
10     int mid = (l + r) / 2;
11     double p = points[mid].x;
12     double d = min(divide(l, mid), divide(mid+1, r)); // 分治
13     vector<Point> v; // 把离中线距离小于 d 的丢入 v
14     for (int i = l; i <= r; i++)
15         if (sgn(fabs(points[i].x - p) - d) < 0)
16             v.push_back(points[i]);
17     sort(v.begin(), v.end(), cmpy); // 按 y 排序
18     for (int i = 0; i < (int)v.size(); i++)
19         for (int j = i-1; ~j; j--) { // 可能是最近点对的点数很少
20             if (sgn(v[i].y - v[j].y - d) > 0) break;
21             d = min(d, dist(v[i], v[j]));
22         }
23     return d;
24 }
25 double nearestPoints() {
26     sort(points+1, points+n+1, cmpx); // 按 x 排序以分治
27     return divide(1, n);
28 }

```

7 字符串

7.1 Trie

```

1  int trie[MAXM][30], tot = 1, ed[MAXM]; // MAXM = MAXN log MAXN
2  void insert(char str[], int id) {
3      int cur = 1; // 当前点，一步步向下走
4      for (int k = 0; str[k]; k++) {
5          int ch = str[k] - 'a';
6          if (trie[cur][ch] == 0) // 没有点则新建
7              trie[cur][ch] = ++tot;
8          cur = trie[cur][ch];
9      }
10     ed[cur] = id; // 字符串终点，记录
11 }
12 int search(char str[]) {
13     int cur = 1; // 当前点，一步步向下走
14     for (int k = 0; str[k]; k++) {
15         cur = trie[cur][str[k] - 'a'];
16         if (!cur) return -1; // 没有点则找不到
17     }
18     return ed[cur]; // 找到并返回
19 }

```

8 杂项

8.1 最长单调子序列

```

1  int len = 1;
2  b[0] = a[0];
3  for (int i = 1; i < n; i++) {
4      if (a[i] >= b[len-1]) b[len++] = a[i];
5      else {
6          int p = lower_bound(b, b + len, a[i]);
7          b[p] = a[i];
8      }
9  }

```

8.2 莫队

8.2.1 普通莫队

```

1  int n, q, id[MAXN], block_size, a[MAXN];
2  struct Query {
3      int idx, l, r;
4      bool operator < (const Query &Q) const {
5          // 排序规则: l 在同一块, 按 r 递增排序; 不在同一块按块编号递增排序
6          return id[l] == id[Q.l] ? r < Q.r : l < Q.l;
7      }
8  } query[MAXN];
9  /* 增加值, 更新维护信息 */
10 void add(int c) {}
11 /* 删除值, 更新维护信息 */
12 void del(int c) {}
13 /* 通过当前维护的信息计算当前询问的答案 */
14 void getAns(int idx) {}
15 /* 初始化, 计算块大小和块编号, 并离线询问排序 */
16 void init() {
17     block_size = sqrt(n);
18     for (int i = 1; i <= n; i++)
19         id[i] = (i-1) / block_size + 1;
20     sort(query + 1, query + q + 1);
21 }
22 void solve() {
23     init();
24     int l = query[1].l, r = l-1;
25     for (int i = 1; i <= q; i++) {
26         while (l > query[i].l) add(a[--l]);
27         while (r < query[i].r) add(a[++r]);
28         while (l < query[i].l) del(a[l++]);
29         while (r > query[i].r) del(a[r--]);
30         getAns(query[i].idx);
31     }
32 }

```

8.2.2 带修莫队

```

1  // q 是询问个数, T 是修改总时间 (个数), qc 是询问和修改的总数 (读入)
2  int T = 0, n, q = 0, qc, block_size, id[MAXN], a[MAXN];
3  struct Query {
4      int idx, t, l, r;
5      bool operator < (const Query &Q) const {
6          // 排序规则: l 在同一块, r 在同一块, 按 t 递增排序;
7          // r 不在同一块按 r 所在块编号递增排序;
8          // l 不在同一块按 l 所在块编号递增排序

```

```

9         return id[l] == id[Q.l] ? id[r] == id[Q.r] ? t < Q.t :
10            id[r] < id[Q.r] : id[l] < id[Q.l];
11     }
12 } query[MAXQ];
13 struct Modify { int pos, a; } modify[MAXQ];
14 /* 增加值, 更新维护信息 */
15 void add(int c) {}
16 /* 删除值, 更新维护信息 */
17 void del(int c) {}
18 /* 通过当前维护的信息计算当前询问的答案 */
19 void getAns(int idx) {}
20 /* 应用时间为 t 的修改, 如果修改的点在当前维护的区间, 则需要统计维护 */
21 void change(int l, int r, int t) {
22     int &pos = modify[t].pos, &c = modify[t].a;
23     if (l <= pos && pos <= r)
24         del(a[pos]), add(c);
25     swap(c, a[pos]);
26 }
27 /* 初始化, 计算块大小和块编号, 并离线询问排序 */
28 void init() {
29     block_size = pow(n, 2./3.);
30     for (int i = 1; i <= n; i++)
31         id[i] = (i-1) / block_size + 1;
32     sort(query+1, query+q+1);
33 }
34 void solve() {
35     init();
36     int l = query[1].l, r = l-1, t = 0;
37     for (int i = 1; i <= q; i++) {
38         while (l > query[i].l) add(a[--l]);
39         while (r < query[i].r) add(a[++r]);
40         while (l < query[i].l) del(a[l++]);
41         while (r > query[i].r) del(a[r--]);
42         while (t < query[i].t) change(l, r, ++t);
43         while (t > query[i].t) change(l, r, t--);
44         getAns(query[i].idx);
45     }
46 }

```

8.2.3 回滚莫队

```

1 // 求区间重要度, 重要度: 某数出现的次数乘以他本身, 这个值的最大值
2 int n, q, block_size, id[MAXN], ID = 0, a[MAXN], cnt[MAXN], tmpcnt[MAXN];
3 LL num[MAXN], ans[MAXN];
4 unordered_map<int, int> mp; // 原题数据需要离散化
5 /* 获得块左端点 */
6 int getBlockR(int block_id) { return min(block_id * block_size, n); }
7 /* 获得块右端点 */
8 int getBlockL(int block_id) { return getBlockR(block_id-1) + 1; }
9 struct Query {
10     int idx, l, r;
11     bool operator < (const Query &Q) const {
12         // 排序规则: l 在同一块, 按 r 递增排序; 不在同一块按块编号递增排序
13         return id[l] == id[Q.l] ? r < Q.r : id[l] < id[Q.l];
14     }
15 } query[MAXN];
16 /* 初始化, 计算块大小和块编号, 并离线询问排序 */
17 void init() {
18     block_size = sqrt(n);
19     for (int i = 1; i <= n; i++)

```

```

20         id[i] = (i-1) / block_size + 1;
21         sort(query+1, query+1+q);
22     }
23     void solve() {
24         init();
25         int l = 1, r = l-1; LL mx = -1;
26         for (int i = 1; i <= q; i++) {
27             // l 和上一个不在同一块中, 回滚永久信息
28             if (id[query[i].l] != id[query[i-1].l]) {
29                 mx = -1;
30                 while (r >= l) --cnt[a[r--]];
31                 l = getBlockL(id[query[i].l]+1);
32                 r = l-1;
33             }
34             // 维护永久信息
35             while (r < query[i].r) {
36                 cnt[a[++r]]++;
37                 mx = max(mx, cnt[a[r]] * num[a[r]]);
38             }
39             // 暴力维护临时信息
40             LL tmpmx = -1;
41             for (int j = query[i].l; j <= min(query[i].r,
42                 ↳ getBlockR(id[query[i].l])); j++)
43                 // 注意统计临时信息要合并永久信息的部分
44                 tmpmx = max(tmpmx, (++tmpcnt[a[j]] + cnt[a[j]]) * num[a[j]]);
45             // 回滚临时信息
46             for (int j = query[i].l; j <= min(query[i].r,
47                 ↳ getBlockR(id[query[i].l])); j++)
48                 tmpcnt[a[j]]--;
49             ans[query[i].idx] = max(tmpmx, mx);    // 更新答案
50         }
51     }
52 }

```

8.3 图论分块

```

1  // n 个点 m 条边的简单图, 修改点权, 询问邻居点权和
2  int n, m, deg[MAXN], S, a[MAXN], sum[MAXN];
3  VI G[MAXN], E[MAXN];    // G 是原图, E 是指向重点的有向边
4  /* 根据度数确定轻重点, 向重点连的边存在 E 里 */
5  void build() {
6      S = sqrt(2 * m);    // 度数大于 /sqrtm 的为重点
7      for (int i = 1; i <= n; i++)
8          for (int v : G[i]) if (deg[v] > S)
9              E[i].push_back(v);
10 }
11 /* 询问点 u 的邻居的点权和 */
12 int query(int u) {
13     if (deg[u] > S) return sum[u]; // 如果是重点, 返回维护的邻居和
14     int res = 0;
15     for (int v : G[u]) res += a[v]; // 如果是轻点, 直接暴力
16     return res;
17 }
18 /* 修改点 u 的权值 */
19 void update(int u, int d) {
20     a[u] += d;
21     for (int v : E[u]) sum[v] += d; // 维护重点的邻居和
22 }

```

9 附录

9.1 Vim 配置

新建文件 ~/.vimrc

```

1  set nu                " 显示行号
2  set ai                " 自动缩进
3  set cindent           "C 语言自动缩进
4  set ts=4              "tab 宽度为 4
5  set sw=4              " 缩进宽度为 4
6
7  imap {}<CR> {}<CR><SPACE><CR>}<UP><END><BACKSPACE>    " 映射，方便写（个人习惯）
8
9  " 设置编译运行的命令快捷键
10 map <F5> :call Compile()<CR>
11 map <F6> :call Run()<CR>
12 map <F7> :call CompileRun()<CR>
13
14 func! Compile()
15     silent w
16     silent !clear
17     exe "!g++ % -o %< -std=c++11 -Wall -DNGCS -g"
18 endfunc
19
20 func! Run()
21     silent !clear
22     exe "!time ./%<"
23 endfunc
24
25 func! CompileRun()
26     exe Compile()
27     exe Run()
28 endfunc

```

9.2 Vim 录制宏

录制：在 normal 模式下按 q, 然后再按 a-z 中的某个字符 (小写, 代表覆盖. 大写代表追加). 在 normal 模式下按 q 结束录制.

输入：在 normal 模式下按下 @, 再按下 a-z 中的某个字符, 输入对应字符保存的宏.

9.3 GDB 命令

功能	命令
设置断点	b 行号/函数名
当条件满足时断点	b 行号/函数名 if 条件
打印变量/表达式的值	p 变量名/表达式
持续显示变量/表达式值	disp 变量名/表达式
单步运行	n
单步进入	s
继续 (下一个断点)	c
退出	q
(重新) 运行	r

9.4 对拍

9.4.1 Bash 脚本

数据生成器传入种子

```

1  #!/bin/bash
2  let i=1

```



```

3 while true; do
4     echo $i | ./X-data > X.in
5     ./X < X.in > X.out
6     ./X-bf < X.in > X-bf.out
7     if diff X.out X-bf.out; then
8         echo $i AC
9     else
10        echo $i WA
11        cat X.in
12        exit 0
13    fi
14    let i=i+1
15 done

```

9.4.2 cmd 批处理脚本

```

1 @echo off
2 :loop
3     X-data.exe > X.in
4     X.exe < X.in > X.out
5     X-bf.exe < X.in > X-bf.out
6     fc X.out X-bf.out
7     if not errorlevel 1 goto loop
8     pause
9 goto loop

```

9.5 运行时检查

运行时检查需要数据. 先生成极限数据, 再运行开了相应编译选项的程序, 输入极限数据.

检查未定义行为 (数组越界, 爆 int)	-fsanitize=undefined
检查 (复杂) 越界	-fsanitize=address

9.6 数学公式

9.6.1 几何

缺球体积	$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right)$
两圆相交弓型高度/	$h_1 = r_1 - \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}$
两球相交缺球高度	$h_2 = r_2 - \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2d}$

9.6.2 计数

第二类斯特林数	$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k), S(n, 0) = [n=0]$
---------	---