

Рассмотрено на заседании цикловой комиссии
общепрофессиональных и специальных дисциплин

Протокол № _____ от _____ Председатель _____
Протокол № _____ от _____ Председатель _____
Протокол № _____ от _____ Председатель _____
Протокол № _____ от _____ Председатель _____
Протокол № _____ от _____ Председатель _____

Дисциплина

«Теория вероятностей и математическая статистика»

Задания для проведения практической работы №13

НАИМЕНОВАНИЕ РАБОТЫ: Построение доверительных интервалов для оценки генеральной средней и дисперсии нормального распределения.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: сформировать умения и навыки по построению доверительных интервалов для оценки генеральной средней и дисперсии нормального распределения.

МЕСТО ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ: Аудитория.

ДИДАКТИЧЕСКОЕ И МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ: Счетная техника.

ТЕХНИКА БЕЗОПАСНОСТИ И ПОЖАРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ НА РАБОЧЕМ МЕСТЕ: Общая.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Внеурочная подготовка

Подготовиться к практическому занятию, повторив следующие теоретические вопросы:

- 1.1. Статистические оценки параметров распределения.
- 1.2. Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки.
- 1.3. Точность оценки, доверительная вероятность (надежность). Доверительный интервал.

2. Работа в аудитории

2.1. Решение типовых заданий

Задание №1. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочным средним \bar{x} , если объем выборки $n = 36$ и задана надежность оценки $\gamma = 0,95$.

Решение.

Найдем t . Из соотношения $2\Phi(t) = 0,95$ получим $\Phi(t) = 0,475$. По таблице Лапласа находим $t = 1,96$.
Найдем точность оценки:

$$\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 3}{\sqrt{36}} = 0,98.$$

Доверительный интервал таков: $(\bar{x} - 0,98; \bar{x} + 0,98)$. Например, если $\bar{x} = 4,1$, то доверительный интервал имеет следующие доверительные границы:

$$\bar{x} - 0,98 = 4,1 - 0,98 = 3,12; \quad \bar{x} + 0,98 = 4,1 + 0,98 = 5,08.$$

Таким образом, значения неизвестного параметра a , согласующиеся с данными выборки, удовлетворяют неравенству $3,12 < a < 5,08$.

Задание №2. Произведено 500 испытаний, в каждом из которых неизвестная вероятность p появления события A постоянна. Событие A появилось в 100 испытаниях. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность p с надежностью 0,95.

Решение:

Найдем относительную частоту появления выигрыша:

$$\omega = \frac{100}{500} = \frac{1}{5}.$$

Найдем t из соотношения $2\Phi(t) = 0,95$. Получим $\Phi(t) = 0,475$. По таблице Лапласа находим $t = 1,96$.

Найдем точность оценки:

$$\delta = t \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{1/5(1-1/5)}{500}} = 0,0351.$$

Доверительный интервал таков: $(0,2 - 0,0351; 0,2 + 0,0351)$, или $(0,1649; 0,2351)$.

Ответ: $(0,1649; 0,2351)$.

2.2. Выполните задания.

Уровень I

Задание №1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью γ неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение равно σ , выборочная средняя \bar{x} и объем выборки n .

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
γ	0,95	0,99	0,99	0,95	0,99	0,95	0,95	0,99	0,95	0,95	0,99	0,95	0,99	0,95	0,99
n	25	225	49	16	100	400	196	100	25	64	121	144	100	625	400
\bar{x}	14,9	10,2	16,8	12,4	32,5	12,5	40,2	21,6	52,4	61,3	27,8	61,5	43,1	25,3	42,5
σ	2,1	1,2	0,8	0,4	3,1	1,4	2,5	1,6	4,3	4,8	2,6	5,2	2,1	1,9	3,4

Задание №2. Изготовлен экспериментальный игровой автомат, который должен обеспечить появление выигрыша в одном случае из 100 бросаний монеты в автомат. Для проверки пригодности автомата произведено n испытаний, причем выигрыш появился m раз. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность появления выигрыша с надежностью γ .

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
γ	0,999	0,925	0,99	0,95	0,975	0,925	0,99	0,999	0,975	0,925	0,99	0,999	0,975	0,925	0,99
n	400	100	200	500	100	300	250	500	200	400	300	200	500	500	400
m	5	2	3	6	4	4	3	6	3	5	5	4	6	6	6

Уровень II

Задание №3. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью γ точность оценки математического ожидания a генеральной совокупности по выборочной средней равна 0,3, если известно среднее квадратическое отклонение 1,2 нормально распределенной генеральной совокупности.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
γ	0,975	0,925	0,99	0,95	0,975	0,925	0,99	0,95	0,975	0,925	0,99	0,95	0,925	0,99	0,95
δ	0,3	0,2	0,5	0,1	0,3	0,6	0,7	0,4	0,5	0,6	0,3	0,2	0,5	0,4	0,3
σ	1,2	1,4	0,8	0,4	1,1	1,4	1,5	0,8	1,2	1,4	0,9	0,5	0,4	1,4	1,1

Уровень III (при выполнении задания значение N соответствует номеру варианта)

Задание №4. Из генеральной совокупности извлечена выборка:

x_i	N	N+1	N+3	N+4	N+5	N+7	N+8	N+9	N+10	N+12
n_i	2	1	2	4	2	2	1	3	1	2

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание a нормально распределенного признака генеральной совокупности с помощью доверительного интервала.

Уровень IV

Задание №5. Что происходит с длиной доверительного интервала при увеличении: а) объема выборки n , б) доверительной вероятности γ ? Ответ обоснуйте.

Контрольные вопросы:

1. Как вы понимаете «найти статистическую оценку неизвестного параметра»?
2. Какие оценки называют несмещенными, эффективными?
3. Что представляет собой надежность оценки?
4. Что представляет собой доверительный интервал? Как его найти?

Литература

Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов/В. Е. Гмурман. — 9-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2003. — с.211 – 219.