

Рассмотрено на заседании цикловой комиссии
общепрофессиональных и специальных дисциплин

Протокол № _____ от _____ Председатель _____

Протокол № _____ от _____ Председатель _____

Протокол № _____ от _____ Председатель _____

Протокол № _____ от _____ Председатель _____

Протокол № _____ от _____ Председатель _____

Дисциплина

«Теория вероятностей и математическая статистика»

Задания для проведения практической работы №7

НАИМЕНОВАНИЕ РАБОТЫ: Нахождение плотности распределения и функции распределения непрерывных случайных величин. Вычисление числовых характеристик непрерывных случайных величин.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: сформировать умения и навыки по нахождению плотности распределения и функции распределения непрерывных случайных величин, вычислению числовых характеристик непрерывных случайных величин.

МЕСТО ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ: Аудитория.

ДИДАКТИЧЕСКОЕ И МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ: Счетная техника.

ТЕХНИКА БЕЗОПАСНОСТИ И ПОЖАРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ НА РАБОЧЕМ МЕСТЕ: Общая.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Внеурочная подготовка

Подготовиться к практическому занятию, повторив следующие теоретические вопросы:

- 1.1. Понятия и виды случайных величин.
- 1.2. Функции распределения непрерывных случайных величин.
- 1.3. Плотность распределения непрерывной случайной величины.
- 1.4. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

2. Работа в аудитории

2.1. Решение типовых заданий

Задание №1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x^2}{4}, & \text{при } 0 < x \leq 2; \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Требуется:

- 1) найти вероятность того, что в результате испытания СВ примет значение X , заключенное в интервале $(0,2; 5)$;
- 2) найти плотность распределения, вычислить числовые характеристики;
- 3) построить графики функций $p(x)$ и $F(x)$.

Решение:

- 1) Воспользуемся формулой $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

$$P(0,2 < x < 5) = F(5) - F(0,2) = 1 - \frac{(0,2)^2}{4} = 1 - 0,01 = 0,99.$$

- 2) Так как, $p(x) = F'(x)$, то

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x}{2}, & \text{при } 0 < x \leq 2; \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины вычислим по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho(x) dx.$$

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{2^3}{6} - 0 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины определим по формуле:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x) dx - (M(X))^2.$$

$$D(X) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx - \frac{16}{9} = \frac{x^4}{8} \Big|_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{16}{8} - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

Среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} \approx 0,47.$$

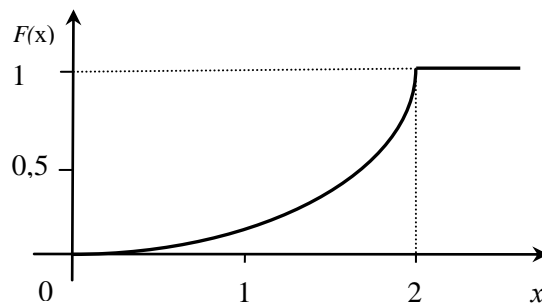


Рисунок – график функции распределения

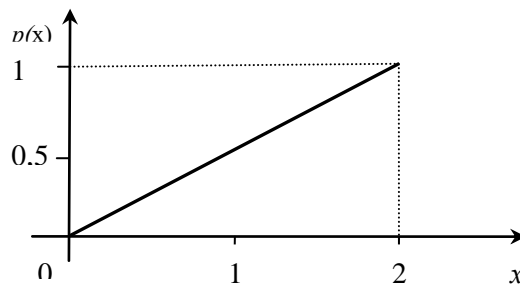


Рисунок – график плотности распределения

Задание №2. Дана плотность распределения $p(x)$ непрерывной случайной величины. Найти параметр c .

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1; \\ c\sqrt{x}, & \text{при } 1 < x \leq 4; \\ 0, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Решение:

Найдем параметр c из условия: $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1$.

$$\int_1^4 c\sqrt{x} dx = \frac{2}{3} cx^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \frac{2}{3} c(4^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{14}{3} c = 1. \text{ Следовательно, } c = \frac{3}{14}.$$

2.2. Выполните задания (при выполнении заданий значение N соответствует номеру варианта).

Уровень I

Задание №1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x}{N+1}, & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания СВ примет значение X , заключенное в интервале:

а) $(0; 0,8)$; б) $(0,1; 0,5)$; в) $(1; \infty)$?

Уровень II

Задание №2. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{x}{N+3}, & \text{при } 0 < x \leq N+3; \\ 1, & \text{при } x > N+3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения, вычислить числовые характеристики.

Построить графики функций $p(x)$ и $F(x)$.

Уровень III

Задание №3. Дана плотность распределения $p(x)$ непрерывной случайной величины. Найти параметр c , функцию распределения $F(x)$, вычислить числовые характеристики.

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a, \text{ } x > b; \\ \varphi(x, c) & \text{при } a \leq x \leq b. \end{cases}$$

№	$\varphi(x, c)$	a	b
1	$c \cdot x$	1	2
2	cx^2	-1	1
3	cx^3	0	2
4	cx^4	0	1
5	$c \sin x$	0	π
6	$c \sin 2x$	0	$\pi/2$
7	$c \sin 3x$	0	$\pi/3$
8	$c \cdot \cos x$	$-\pi/2$	$\pi/2$
9	$c \cdot \cos 2x$	0	$\pi/4$
10	$c e^{-x}$	0	4
11	$c e^{-2x}$	0	∞
12	$c e^x$	0	1
13	$c x^5$	0	1
14	$c x^6$	0	2
15	$c x^7$	0	1

Уровень IV. Составьте и решите задачу, в которой необходимо определить вероятность непрерывной случайной величины.

Контрольные вопросы:

1. Что называют случайной величиной?
2. Какую величину называют непрерывной случайной величиной?
3. Что называют функцией распределения случайной величины?
4. Какими свойствами обладает функция распределения?
5. Какие числовые характеристики случайной величины вы знаете? Дайте им определения, укажите методы их нахождения.

Литература

Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов/В. Е. Гмурман. — 9-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2003. — с.116 – 124.

Преподаватель

В.П. Кошелева