高数概念串联框架图

整理团队：小羽团队

B 站/抖音/小红书：小羽师兄聊考研

公众号：小羽的菜谱

(注意：该文件建议搭配小羽的解题思维导图使用更快乐，思维导图可以到公众号获取)

【小羽的菜谱】系列之高数概念串联框架图

函数与极限

【NO.1】函数相关概念

- 1. 映射的概念【★】
- 2. 函数四大性质的定义【★★】
  - 提醒：到后面我们基本都用微分法来判定性质，但是定义法是必须要掌握的
- 3. 反函数存在性的充要条件【★★】

  反函数存在的充要条件

  正式定义：

  1. **单射（一对一）**：对于函数 $f: X \to Y$，如果对于任意 $x_1, x_2 \in X$，只要 $x_1 \neq x_2$，就有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，那么函数 f 是单射的。这意味着不同的输入在函数 f 下映射到不同的输出。
  2. **满射（到上）**：对于函数 $f: X \to Y$，如果对于每个 $y \in Y$，都存在至少一个 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$，那么函数 f 是满射的。这意味着函数 f 的输出完全覆盖了集合 Y。

  如果一个函数同时满足单射和满射，它就是双射（一一对应），这是反函数存在的充要条件。

  通俗理解

  想象一下你有两个盒子，一个装着苹果（代表输入集合 X），另一个装着橙子（代表输出集合 Y）。现在你要用一根线将每个苹果连接到一个橙子，代表函数 f 的作用。

  1. **一对一（单射）**：每个苹果只能连接到一个特定的橙子，不能有两个苹果连接到同一个橙子。这就像是确保每个输入只产生一个独特的输出。
  2. **到上（满射）**：盒子里的每个橙子都要被至少一个苹果的线连接到。这就像是确保每个可能的输出都有对应的输入。

  如果你能做到这两点，那么你就可以从橙子回溯到苹果，这就像是从输出找到唯一的输入，即存在一个反函数。

【NO.2】数列极限相关概念

- 1. 数列极限的定义【★★】
- 2. 收敛数列四大定理
  - 唯一性：如果某数列收敛，则其极限唯一【★★】
  - 有界性：如果某数列收敛，则其有界【★★】
  - 保号性极其推论：【★★★】
    - **保号性** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 且 $a>0$(或<0)，则$\exists$正整数N，当$n>N$时，都有$x_n>0$(或$x_n<0$).
    - **推论** 若数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n \geqslant 0$（或$\leqslant 0$）且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，那么$a \geqslant 0$（或$<0$）.
  - 数列收敛则子数列也收敛：【★★★】

hi！同学你好，这份导图是为了梳理概念的重难点，并不作为刷题的指南，刷题指南请参考对应导图！

【小羽的菜谱】系列之高数概念串联框架图

函数与极限

【NO.3】函数极限的相关概念

1. 函数极限的定义【★★】

【NO.4】极限的运算

1. 唯一性：如果函数极限存在，则其极限唯一【★★】
2. 局部有界性：【★★★】
   - 设函数 $f(x)$ 在点 a 的某个邻域内定义（除了可能在 a 点本身），并且假设 $\lim_{x\to a} f(x) = L$ 存在。那么，函数极限的局部有界性表明存在一个正数 δ 和一个正数 M，使得对于所有满足 $0 < |x-a| < \delta$ 的 x，有 $|f(x)| < M$。
3. 局部保号性：【★★★★】
   - **保号性** 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 且 $A>0$ (或 <0)，则 $\exists$ 常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>0$ (或 <0)
   - **保号性推论** 如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$（或 $\leqslant 0$）且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $A\geqslant 0$（或 $\leqslant 0$）
4. 数列与函数极限的关系：【★★★】
   - 如果函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处的极限是 L，即 $\lim_{x\to a} f(x) = L$，那么对于任何趋向于 a 的数列 $\{x_n\}$（其中 $x_n \neq a$），相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 的极限都是 L。换句话说，无论如何选择趋向于 a 的数列 $\{x_n\}$，只要 x_n 足够接近 a，$f(x_n)$ 就会足够接近 L。

【NO.5】极限的运算法则与无穷小

无穷小的定义

正式定义：如果一个变量 x 的极限是零，即 $\lim_{n\to\infty} x = 0$，则称 x 为无穷小。换句话说，无穷小是指那些随着某个过程的进行（如 n 趋向于无穷大）而趋向于零的量。

通俗理解：可以将无穷小想象为一个非常非常小的数，它几乎是零，但并不真的等于零。随着我们考察的过程继续进行（比如时间的推移或某个条件的变化），这个数变得越来越小，无限接近于零，但永远不会真正到达零。

无穷大的定义

正式定义：如果一个变量 x 的绝对值随着某个过程的进行而无限增大，即对于任何给定的正数 M，都存在一个阶段 N，使得一旦过了这个阶段（$n > N$），x 的绝对值都大于 M，则称 x 为无穷大。

通俗理解：无穷大可以被理解为一个比任何已知大数都要大的数。随着某个过程的进行（如时间的推移或条件的变化），这个数变得越来越大，以至于无论你想象多大的一个数，无穷大总是比它更大。但与无穷小不同，无穷大并不是一个具体的数值，而是一个表示"无限大"概念的数学符号。

2. 无穷大与无穷小的关系：【★★★】——倒数关系
3. 极限运算法则：包括四则运算、幂运算、复合运算、无穷小运算律【★★★】
4. 两个重要运算律和两个重要极限【★★★★】
   - 夹逼准则：满足不等式和满足极限两个条件存在缺一不可
     - 设有三个函数 $f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$，对于所有在某一点 a 的邻域内（但不包括 a 本身）的 x，它们满足不等式 $f(x) \le g(x) \le h(x)$；如果 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$，那么 $\lim_{x\to a} g(x)$ 也存在，并且等于 L。
   - 单调有界极限必存在
   - 两个重要极限中的变量x可以替换为任意表达式的无穷小
     1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
     2. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
5. 无穷小阶数的比较运算【★★★★】
   - 提醒：
     1. 高阶、低阶、同阶、等价无穷小的定义虽然很简单，但是非常重要，在后续的很多问题的讨论中都需要套这个定义
     2. 无穷小的阶数是可以传递的
   - 1. **高阶无穷小**：
        - 设 α 和 β 是两个无穷小量。如果极限 $\lim_{x\to a} \frac{\beta}{\alpha} = 0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$（$x \to a$ 时）。
     2. **低阶无穷小**：
        - 如果 β 是比 α 高阶的无穷小，那么相应地，α 是比 β 低阶的无穷小。
     3. **同阶无穷小**：
        - 如果 $\lim_{x\to a} \frac{\beta}{\alpha}$ 存在且不等于零，那么称 α 和 β 是同阶无穷小。
     4. **等价无穷小**：
        - 如果 $\lim_{x\to a} \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 α 和 β 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$（$x \to a$ 时）。

【小羽的菜谱】系列之 高数概念串联框架图

函数与极限

【NO.6】函数的连续性与间断点

- 1. 函数连续的定义：【★★★】

  函数在一点处的连续性

  一个函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，如果满足以下所有条件：

  1. **函数在该点定义**：$f(a)$ 是有定义的。
  2. **极限存在**：$\lim_{x\to a} f(x)$ 存在。
  3. **极限值等于函数值**：$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$。

  如果这三个条件中的任何一个不满足，那么函数在该点不连续。

- 2. 四种间断点的类型：【★★★】

  1. **可去间断点**：
     - 在点 $x=a$ 处，如果函数 $f(x)$ 的极限存在，但要么 $f(a)$ 没有定义，要么 $f(a)$ 的值不等于这个极限，那么这个点是可去间断点。通过重新定义或调整函数在该点的值，可以“去除”这种间断。
  2. **跳跃间断点**：
     - 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的左极限和右极限都存在但不相等，那么 $x=a$ 是跳跃间断点。这种间断点的特点是函数的左右极限值之间有一个明显的“跳跃”。
  3. **无穷间断点**：
     - 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处至少有一个单侧极限是无穷大（正无穷或负无穷），那么 $x=a$ 是无穷间断点。这种间断点通常出现在函数的图像在某点附近变得无限高或无限低。
  4. **振荡间断点**：
     - 如果函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的极限不存在，且原因是函数在该点附近无限振荡（例如，正弦函数的倒数在零点附近），那么 $x=a$ 是振荡间断点。

- 3. 连续函数的和、差、积、商的连续性：【★★★★】

  简而言之：都连续(分母不为0)

- 4. 连续函数的反函数和复合函数的连续性：【★★★】

  1. **反函数的连续性**：
     - 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续且单调（无论是单调增加还是单调减少），那么它的反函数 $f^{-1}(y)$ 在 $f(x)$ 的值域上也是连续的。这意味着，连续且单调的函数的反函数也保持连续性。
  2. **复合函数的连续性**：
     - 如果函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，且另一个函数 $g(y)$ 在点 $y=f(a)$ 处连续，那么复合函数 $g(f(x))$ 在 $x=a$ 处也是连续的。简而言之，连续函数的复合仍然是连续的。

【NO.7】闭区间上连续函数的性质

- 1. 最值定理：【★★】
- 2. 介值定理：【★★★】
- 3. 零点定理：【★★★】

【小羽的菜谱】系列之高数概念串联框架图

一元函数微分学

【NO.1】导数的概念

1. 导数的两种定义式：【★★★★】
   1. **极限定义（微分商的极限）**：
      - 导数可以定义为函数在某一点的切线斜率，即函数在该点的瞬时变化率。如果函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，其导数 $f'(a)$ 定义为：
        $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
        这个定义描述了当 h 趋近于零时，函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的平均变化率的极限。
   2. **差商的极限**：
      - 另一种定义导数的方式是使用差商的极限。如果函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，其导数 $f'(a)$ 也可以定义为：
        $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
        这个定义考虑的是当 x 趋近于 a 时，函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的平均变化率的极限。
2. 函数有定义、极限存在、连续与可导的关系：【★★★★】
   - 可导必连续，反之未必；连续极限必存在，反之未必；极限存在未必有定义，有定义极限也未必存在；

【NO.2】导数运算法则

1. 四则运算：【★★★】
2. 复合函数：【★★★】
3. 反函数的一阶、二阶以及更高阶导数：【★★★】
   1. **反函数的一阶求导法则**：
      如果 $y=f(x)$ 且 $x=g(y)$ 是其反函数，那么：
      $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$
      或者写作：
      $g'(y)=\frac{1}{f'(g(y))}$
   2. **反函数的二阶求导法则**：
      如果 $y=f(x)$ 是二次可导的，并且 $x=g(y)$ 是其反函数，那么：
      $g''(y)=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$
      或者写作：
      $g''(y)=-\frac{f''(g(y))}{[f'(g(y))]^3}$
4. 莱布尼兹公式：【★★★】
   - 莱布尼兹公式是微积分中用于计算两个函数乘积的高阶导数的一个重要公式。对于两个函数 $u(x)$ 和 $v(x)$，它们乘积的第 n 阶导数可以用莱布尼兹公式计算：

     $\frac{d^n}{dx^n}(u(x)v(x))=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$

     其中，$u^{(n-k)}(x)$ 和 $v^{(k)}(x)$ 分别表示函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的 $(n-k)$ 阶和 k 阶导数，而 $\binom{n}{k}$ 是组合数，表示从 n 个不同元素中取出 k 个元素的组合数，计算公式为：

     $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$
5. 隐函数和参数方程求导法则：【★★★】

【小羽的菜谱】系列之
高数概念串联框架图

一元函数微分学

【NO.3】微分的定义

1. 微分的定义和与导数的关系：【⭐⭐⭐】

微分的定义

假设有一个函数 $f(x)$，在 x 的一个增量 Δx 下，函数的增量 Δf 定义为 $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$。如果存在一个常数 A 和一个当 $\Delta x \to 0$ 时趋向于零的量 $\epsilon(\Delta x)$，使得

$\Delta f = A\Delta x + \epsilon(\Delta x)\Delta x$

那么称 $A\Delta x$ 为函数 f 在点 x 处的微分，记作 df 或 dy。其中，A 通常是函数 f 在 x 处的导数 $f'(x)$。

因此，微分可以表示为：

$df = f'(x)\Delta x$

或者

$dy = f'(x)dx$

其中，dx 是自变量的微小增量，dy 或 df 是函数值的微小增量。

2. 线性主部的概念：【⭐⭐⭐】

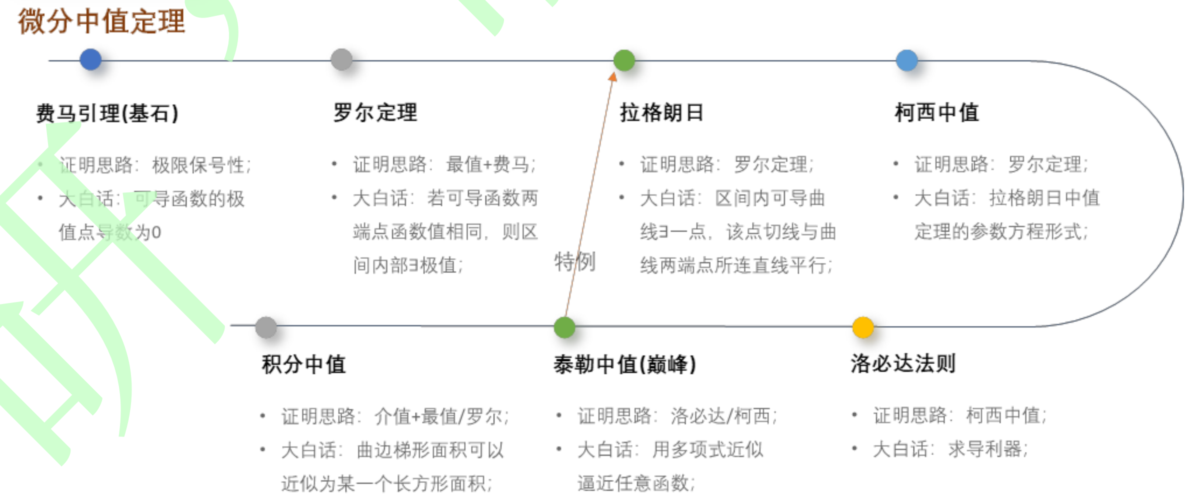
【NO.4】中值定理

1. 中值定理地图：【⭐⭐⭐⭐】

连续函数三大定理：$f(x)$在$[a,b]$上连续

零点定理	如果$f(a)$和$f(b)$异号，则在(a,b)内至少∃一点ε使得$f(\varepsilon)=0$；
介值定理	对于任意的A满足$min\{f(x)\} \le A \le max\{f(x)\}$，则在$[a,b]$内至少∃一点$\varepsilon$使得$f(\varepsilon)=A$；
最值定理	在$[a,b]$内必存在$f(x)$的最大值和最小值；

微分中值定理



2. 洛必达法则：【⭐⭐⭐⭐】

如果：

(1)当$x \to a$时，函数$f(x)$及$F(x)$都趋于零；

(2)在点a的某去心邻域内，$f'(x)$及$F'(x)$都存在且$F'(x) \neq 0$；

(3)$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在(或为无穷大)，

则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$。这就是说，当$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$存在时，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{F(x)}$也存在且等于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$；

当$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$为无穷大时，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$也是无穷大

提醒：

1. 三大条件缺一不可；
2. 洛必达不能反向使用；

3. 泰勒展开：【⭐⭐⭐】

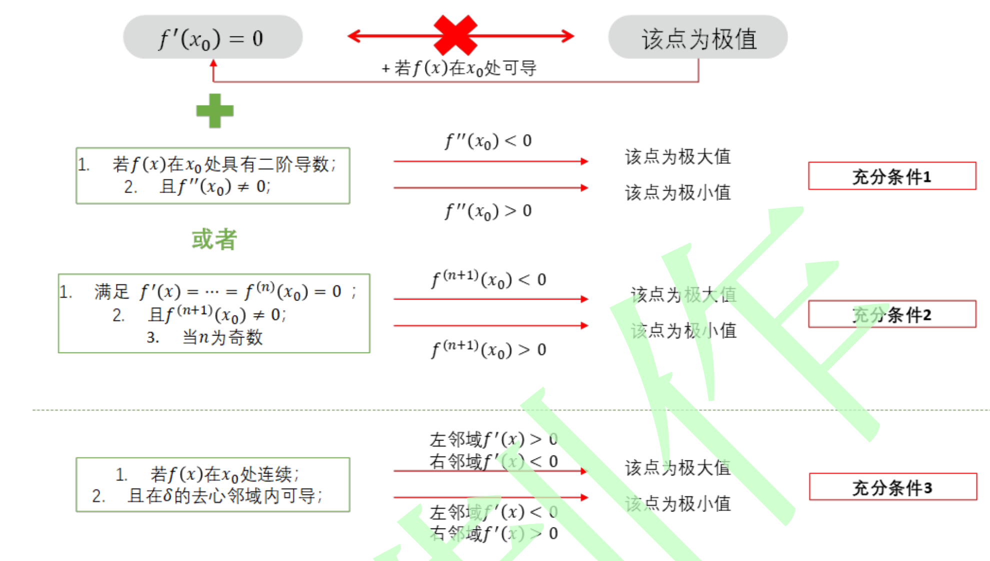
两个展开式都得背住

常见函数在x=0处的泰勒展开式

1. **指数函数** e^x：
   $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$
2. **正弦函数** $\sin(x)$：
   $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
3. **余弦函数** $\cos(x)$：
   $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
4. **自然对数** $\ln(1+x)$：
   $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$
5. **二项式** $(1+x)^n$（对于任意实数 n）：
   $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$

1. 单调性和凹凸性的判定：【★★★】——定义法和导数法都需要掌握

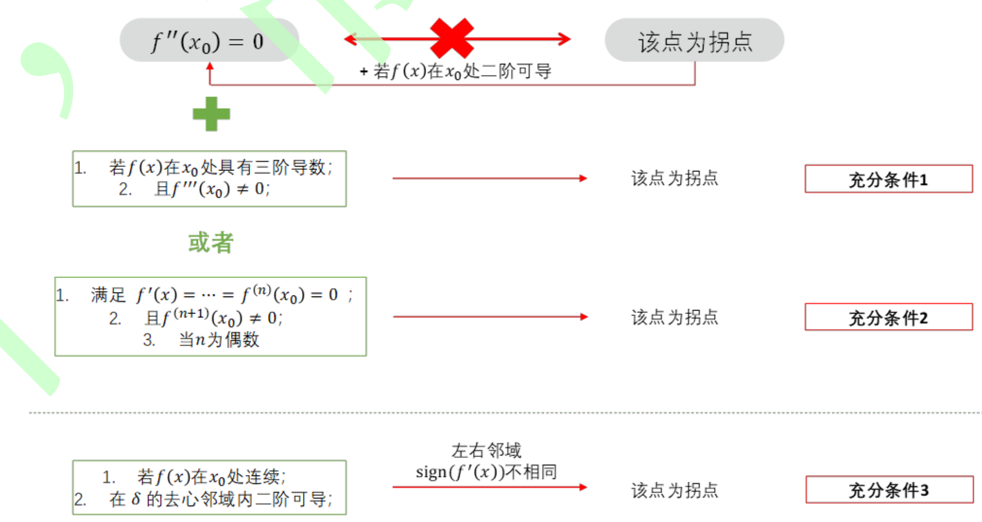
知识点总结：极值点判别方法



2. 极值点判定的充分条件：【★★★★】

【NO.5】函数的性态

知识点总结：拐点判别方法



3. 拐点判定的充分条件：【★★★★】

2. 切线与法线：【★★★】

【NO.6】导数的几何应用

曲率 K 的公式

对于平面曲线 $y=f(x)$，其在点 $(x,f(x))$ 处的曲率 K 可以用以下公式计算：
$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}$
其中，y' 是函数 $f(x)$ 的一阶导数，y'' 是二阶导数。

如果曲线以参数形式给出，即 $x=g(t)$ 和 $y=h(t)$，则曲率公式为：
$K=\frac{|x'y''-y'x''|}{[(x')^2+(y')^2]^{3/2}}$
其中，x' 和 y' 分别是 $g(t)$ 和 $h(t)$ 对 t 的一阶导数，x'' 和 y'' 是对应的二阶导数。

3. 曲率、曲率半径、曲率圆：【★★★】

曲率半径 R 的公式

曲率半径是曲率的倒数：
$R=\frac{1}{K}$

曲率圆心坐标的公式

对于平面曲线 $y=f(x)$，曲率圆心 (x_0,y_0) 的坐标可以用以下公式计算：
$x_0=x-\frac{y'(1+(y')^2)}{y''}$
$y_0=y+\frac{1+(y')^2}{y''}$
这里，x 和 y 是曲线上的点，y' 和 y'' 分别是该点处的一阶和二阶导数。

一元函数微分学

【小羽的菜谱】系列之
高数概念串联框架图

【小羽的菜谱】系列之高数概念串联框架图

一元函数积分学

【NO.1】积分的基本概念

1. 原函数和不定积分的定义：【★★★★】

定义一定要指定区间

原函数定义 如果在区间I上，可导函数$F(x)$的导函数为$f(x)$，即对任一$x\in I$，都有

$$F'(x)=f(x)\text{或}dF(x)=f(x)dx$$

那么函数$F(x)$就称为$f(x)$(或$f(x)dx$)在区间I上的一个原函数.

不定积分定义 在区间I上，函数$f(x)$的带有任意常数项的原函数称为$f(x)$(或$f(x)dx$)在区间I上的不定积分，记作

$$\int f(x)dx.$$

其中记号$\int$称为积分号，$f(x)$称为被积函数，$f(x)dx$称为被积表达式，x称为积分变量.

2. 定积分的定义：【★★★】

定积分定义 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有界，在$[a,b]$中任意插入若干个分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

把区间$[a,b]$分成n个小区间：$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$,

各个小区间的长度依次为：$\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$.

在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点$\xi_i(x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$，作函数值$f(\xi_i)$与小区间长度$\Delta x_i$的乘积$f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$，并作出和

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (1-1)$$

记$\lambda=max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_a\}$，如果当$\lambda\to0$时，这和的极限总存在，且与闭区间$[a,b]$的分法及点$\xi_i$的取法无关，那么称这个极限$I$为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分（简称积分），记作$\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx=I=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中$f(x)$叫做被积函数，$f(x)dx$叫做被积表达式，x叫做积分变量，a叫做积分下限，b叫做积分上限，$[a,b]$叫做积分区间.

3. 定积分和不定积分的联系——微积分基本定理：【★★★★】

微积分基本定理 如果函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，那么$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

4. 原函数存在、可积变限积分之间关系：【★★★★】

知识点回顾：原函数、不定积分、定积分与变限积分的重要结论

01 原函数：在区间$[a,b]$内讨论

- 如果函数$f(x)$连续：则$f(x)$一定有原函数；
- 如果函数$f(x)$有间断点：若间断点为第二类震荡间断点$f(x)$有可能有原函数；若间断点为其他类型则必定没有原函数；
- 如果函数$f(x)$有一个原函数：则它必定有无数个原函数，且不同原函数之间只差常数；

02 不定积分：与原函数类似

- 函数$f(x)$的全体原函数称为$f(x)$的不定积分，写做$\int f(x)dx$；

03 定积分：在区间$[a,b]$内讨论

- 如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续：则在区间上一定可积；
- 如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有界且只有有限个间断点：则在区间上一定可积；
- 如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上单调：则在区间上一定可积；
- 如果函数$f(x)$可积：则其在区间$[a,b]$上必有界；

04 变限积分

- 如果函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则函数$\int_a^x f(x)dx$是函数$f(x)$在区间上的一个原函数；但没有连续的条件，$\int_a^x f(x)dx$未必是原函数；
- 如果函数$f(x)$仅可积但连续性未知，则只能推知$\int_a^x f(x)dx$连续；
- 如果函数$f(x)$不仅可积还连续，则能推知$\int_a^x f(x)dx$可导；

【小羽的菜谱】系列之高数概念串联框架图

一元函数积分学

【NO.2】积分的计算性质

1. 不定积分的计算性质：【★★】

性质 1 $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx.$

性质 2 k为非零常数，$\int k f(x)dx=k\int f(x)dx.$

2. 定积分的计算性质：【★★★】

性质 1 设α与β均为常数，则$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$

性质 2 设$a<c<b$，则$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

性质 3 如果在区间$[a,b]$上$f(x)\equiv1$，则$\int_a^b 1\,dx=\int_a^b dx=b-a$

性质 4 如果在区间$[a,b]$上$f(x)\geqslant0$，则$\int_a^b f(x)dx\geqslant0$

推论 1 如果在区间$[a,b]$上$f(x)\leqslant g(x)$，则$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$

推论 2 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$

性质 5 设M及m分别是函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值及最小值，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$$

【NO.3】反常积分

1. 反常积分收敛的定义：【★★★】

注意：对于上下限都为无穷限或者都为瑕点的反常积分，需要拆成多个只包含一个瑕点的积分，并且均收敛才能得到原反常积分收敛

2. 反常积分基本审敛定理：【★★★】

	基础	基准	比较审敛法	极限审敛法
无穷限反常积分	比较审敛原理	P积分：$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\ (a>0)$ 1) 如果$p>1$：收敛到$\frac{a^{1-p}}{p-1}$； 2) 如果$p\le1$：则积分发散；	$f(x)$在$[a,+\infty]$上连续且大于0: 1) 如果$\exists\ M>0$及$p>1$使得$f(x)\le\frac{M}{x^p}$：则积分收敛； 2) 如果$\exists\ N>0$使得$\frac{N}{x}\le f(x)$：则积分发散；	$f(x)$在$[a,+\infty]$上连续且大于0: 1) 如果$\exists\ p>1$使得$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=l<+\infty$：则积分收敛； 2) 如果$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=d>0$：则积分发散；
无界函数反常积分	绝对收敛定理	Q积分：$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^q}dx\ (a>0)$ 1) 如果$q\in(0,1)$：收敛到$\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$； 2) 如果$q\ge1$：则积分发散	$f(x)$在$(a,b]$上连续且大于0: 1) 如果$\exists\ M>0$及$q<1$使得$f(x)\le\frac{M}{(x-a)^q}$：则积分收敛； 2) 如果$\exists\ N>0$使得$f(x)\ge\frac{N}{x-a}$：则积分发散；	$f(x)$在$(a,b]$上连续且大于0: 1) 如果$\exists\ q\in(0,1)$使得$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)=l<+\infty$：则积分收敛； 2) 如果$\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)f(x)=d>0$(包括$+\infty$)：则积分发散；

注意：一般做题不会去套这些定理，参考其他刷题导图即可

3. gamma积分：【★★★】

Γ函数：$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

1) 结论$\Gamma(n+1)=n!$；

2) 结论$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$；

3) 结论$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$；

【小羽的菜谱】系列之高数概念串联框架图

多元函数微分学

【NO.1】向量

1. 向量的线性运算：【⭐⭐】

加法

- 交换律$a+b=b+a$
- 结合律$(a+b)+c=a+(b+c)$
- $|a+b|\leqslant|a|+|b|$及$|a-b|\leqslant|a|+|b|$，其中等号在a与b同向或反向时成立.

数乘

- 结合律$\lambda(\mu a)=\mu(\lambda a)=(\lambda\mu)a$.
- 分配率

$$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a,$$
$$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b.$$

投影

性质 1 $Prj_u a=|a|\cos\varphi$（即$(a)_u=|a|\cos\varphi$），其中φ为向量a与u轴的夹角；

性质 2 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\,\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\,\boldsymbol{b}$ 即$(a+b)_u=(a)_u+(b)_u$；

性质 3 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\,\mathrm{Prj}_u\,\boldsymbol{a}$ 即$(\lambda a)_u=\lambda(a)_u$.

2. 向量的三大积运算：【⭐⭐⭐】

知识点回顾：向量三大“积运算”

	实际意义	运算律	应用
数量积	力在某一方向上所作功	1) 计算式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 2) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$； 3) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$； 4) 常数可提：$(\gamma\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\gamma(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$；	1) 计算两向量夹角：$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$； 2) 计算向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上投影：$Proj_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|\cos\theta$； 3) 两向量垂直的充要条件：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；
向量积	平行四边形的面积	1) 计算式：$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 2) 交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$； 3) 分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$； 4) 常数可提：$(\gamma\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\gamma(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$；	1) 用坐标计算向量积：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$； 2) 两向量平行的充要条件：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；
混合积	平行六面体体积	1) 计算式：$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$； 2) 轮换：$[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}]$； 3) 对换：$[\boldsymbol{abc}]=-[\boldsymbol{bac}]=-[\boldsymbol{cba}]$；	1) 用坐标计算混合积：$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$； 2) 三向量共面的充要条件：$[\boldsymbol{abc}]=\boldsymbol{0}$；

【NO.2】线面方程

1. 空间直线和平面方程：【⭐⭐⭐】

知识点回顾：平面方程与直线方程的表示方法

平面方程表示法

- 01 一般式
  1) 方程：$Ax+By+Cz=D$；
  2) 可以知道是否通过原点、法向量；
- 02 点斜式
  1) 方程：$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0$；
  2) 可以知道通过某一点(a,b,c)、法向量；
- 03 截距式
  1) 方程：$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1$；
  2) 可以知道与坐标轴的截距；

空间直线方程表示法

- 01 一般式
  1) 方程：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$
  2) 直线的方向向量同时垂直于两个平面的法向量；
- 02 对称式
  1) 方程：$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$；
  2) 直线的方向向量为(a,b,c)；
- 03 参数式
  1) 方程：$\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$；

2. 空间曲线和曲面方程：【⭐⭐⭐】

知识点回顾：空间曲线方程与空间曲面方程

空间曲面方程求法

- 01 二维直线绕坐标轴旋转
  1) 求法：把二维函数中未被绕轴的坐标字母的平方替换成自己和第三个坐标字母的平方和；
  2) 比如：$f(x,y)$绕x轴旋转，则把y^2替换为y^2+z^2；
- 02 空间曲线绕坐标轴旋转
  求法：如果所绕轴为x轴，则把空间曲线表示成$\begin{cases}y=y(x)\\z=z(x)\end{cases}$，然后$y^2+z^2=y^2(x)+z^2(x)$即为所求；
- 03 柱面方程
  求法：得到了准线方程和母线的方向向量后，在准线上的任意一点(a,b,c)既在母线上也在准线上，带入母线和准线方程，联立后消除a,b,c后即是柱面方程；

空间曲线方程表示法

- 01 一般式
  1) 方程：$\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}$
  2) 直线的方向向量同时垂直于两个平面的法向量；
- 02 参数式
  1) 方程：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$；

【小羽的菜谱】系列之高数概念串联框架图

多元函数微分学

【NO.3】多元函数的性质

1. 多元映射的概念：【⭐⭐】

2. 多元函数极限的定义：【⭐⭐⭐】

   注意多元函数的极限存在要求的是任意方向趋近于目标点这个过程的极限都存在

3. 多元函数连续的定义：【⭐⭐⭐】

   假设有一个多元函数 $f(x,y)$ 和一个点 (a,b)。函数 f 在点 (a,b) 连续的定义是：

   - 首先，函数 f 在点 (a,b) 的极限必须存在。这意味着对于任意给定的正数 ε，存在一个正数 δ，使得当所有满足 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ 的点 (x,y)（即在点 (a,b) 周围的 δ-邻域内的所有点）都有 $|f(x,y)-L|<\varepsilon$，其中 L 是极限值。
   - 然后，这个极限值 L 必须等于函数在点 (a,b) 的值，即 $L=f(a,b)$。

4. 最值定理和介值定理：【⭐⭐⭐】

   多元函数的最值定理

   定理陈述：如果函数 $f(x,y,\ldots)$ 是在一个闭且有界的区域 D 上的连续函数，那么 f 在 D 上必定有最大值和最小值。

   这意味着在这个区域 D 内，存在点 $(x_1,y_1,\ldots)$ 和 $(x_2,y_2,\ldots)$ 使得对于 D 内的所有点 $(x,y,\ldots)$，都有 $f(x_1,y_1,\ldots)\le f(x,y,\ldots)\le f(x_2,y_2,\ldots)$。这个定理保证了在闭且有界的区域上的连续多元函数总是有最大和最小值。

   多元函数的介值定理

   定理陈述：如果函数 $f(x,y,\ldots)$ 是在一个连通区域 D 上的连续函数，并且在两点 $(a_1,b_1,\ldots)$ 和 $(a_2,b_2,\ldots)$ 上取得不同的值 $f(a_1,b_1,\ldots)$ 和 $f(a_2,b_2,\ldots)$，那么对于这两个值之间的任何数 c，总存在 D 内的某点 $(x,y,\ldots)$，使得 $f(x,y,\ldots)=c$。

【NO.4】多元函数的微分

1. 偏导数的定义：【⭐⭐⭐⭐】

   偏导数的极限定义是数学分析中的一个基本概念，用于描述函数在某一点沿特定方向的变化率。对于二元函数 $f(x,y)$，其在点 (a,b) 处对 x 的偏导数可以定义如下：

   $f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$

   这里，$f_x(a,b)$ 表示函数 f 在点 (a,b) 处沿 x 方向的偏导数。直观上，这个极限表示当 x 在 a 点附近变化很小（即 h 趋近于 0）时，函数 f 相对于 x 的变化率。

   同样地，函数在点 (a,b) 处对 y 的偏导数定义为：

   $f_y(a,b)=\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$

   其中，$f_y(a,b)$ 是函数 f 在点 (a,b) 沿 y 方向的偏导数。这个极限表示当 y 在 b 点附近变化很小时，函数 f 相对于 y 的变化率。

2. 二元偏导数连续的性质：【⭐⭐⭐】

   定理 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等。

3. 二元函数全微分的定义：【⭐⭐⭐⭐】

   定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内有定义，如果函数在点 (x,y) 的全增量

   $$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

   可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$.

   其中 A 和 B 不依赖于 Δx 和 Δy 而仅与 x 和 y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，那么称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分，记作 dz，即

   $$dz=A\Delta x+B\Delta y$$

   要通俗易懂地理解二元函数的可微性，我们可以把它想象成对现实世界中平滑表面或曲面的数学描述。让我们通过几个关键点来理解这个概念：

   1. 平滑的曲面

   想象一个平滑的山丘或者滑板场的坡道。当你在这个曲面上的任何一点微小移动时，你可以感受到地面的倾斜度或者变化率。在数学上，这种倾斜度或变化率可以通过偏导数来描述。如果一个函数在某点的偏导数存在，这意味着在这一点附近，无论你沿着哪个方向移动，你都能感知到一个明确的倾斜度或变化率。

   2. 线性近似

   现在想象你站在山丘的某一点，看着你脚下非常小的一块区域。即使山丘的总体形状是弯曲的，这小块区域看起来几乎像一个平面。这就是线性近似的概念。在数学中，如果一个函数在某点可微，那么意味着在这一点附近，我们可以用一个平面（二元函数的情况）来近似这个函数的行为。这个平面就是由函数在这一点的偏导数定义的。

   3. 无穷小的变化

   全微分涉及到的 dx 和 dy 是无穷小的变化。在现实世界中，这可以想象成你在曲面上移动的距离非常非常小，几乎接近于零。全微分告诉我们，如果你在这个曲面上微小地移动，函数值的变化（即你的高度变化）可以通过这个曲面在你当前位置的倾斜度来预测。

   4. 可微性的直观含义

   如果一个函数在某点可微，这就像是说，在这一点附近，无论你沿哪个方向微小移动，函数的行为都可以用一个平滑的平面来近似。这个平面由函数在该点的偏导数决定。如果函数在某点不可微，那就像是你在一个尖锐的边缘或者断层上，那里函数的行为不能被一个简单的平面所近似。

【小羽的菜谱】系列之
高数概念串联框架图

多元函数微分学

【NO.4】多元函数的微分

4. 方向导数的定义：【★★★】

方向导数的定义

设 $f(x,y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 中的一个函数，$\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ 是一个单位向量，表示特定的方向。函数 f 在点 (x_0,y_0) 沿着方向 $\mathbf{u}$ 的方向导数定义为：

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hu_1,y_0+hu_2)-f(x_0,y_0)}{h}$$

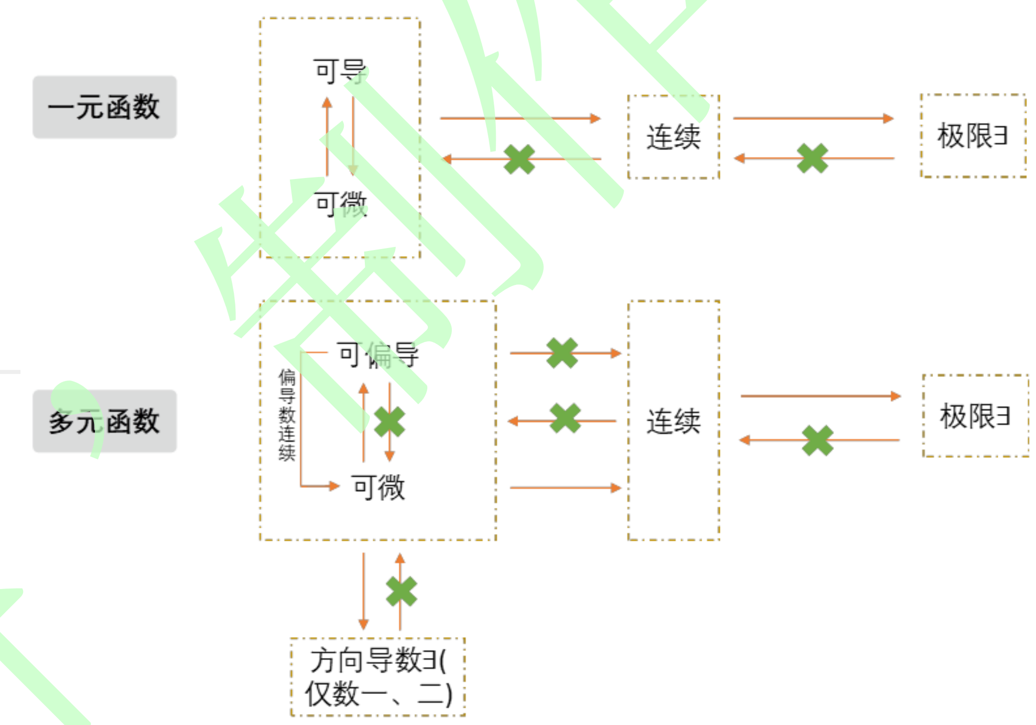
这个极限（如果存在的话）给出了函数 f 在点 (x_0,y_0) 沿着方向 $\mathbf{u}$ 的瞬时变化率。

通俗易懂的理解

想象一下，你站在山丘的某一点，面对不同的方向，山坡的倾斜程度可能会有所不同。方向导数就是用来度量这种倾斜程度的。

- **方向**：方向由向量 $\mathbf{u}$ 指定。在二维空间中，这个向量可以是任意方向，如东北、西南等。在三维空间中，它也可以指向上或下。
- **变化率**：方向导数描述了函数值在该方向上的变化快慢。正值表示函数值在该方向上增加，负值表示函数值在该方向上减少。
- **特殊情况**：当方向向量与坐标轴平行时，方向导数就变成了传统的偏导数。

5. 微分性质的联系图：【★★★★】



6. 二元全微分形式不变性：【★★★】

全微分形式不变性　设函数 $z=f(u,v)$ 具有连续偏导数，则有全微分

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

如果 u 和 v 又是中间变量，即 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$，且这两个函数也具有连续偏导数，那么复合函数

$$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$$

的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

其中 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 分别由公式(4—3)及(4—4)给出.把公式(4—3)及(4—4)中的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入上式，得

$$\begin{aligned}dz&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\\&=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.\end{aligned}$$

全微分形式不变性（也称为微分形式的不变性）是微积分和微分几何中的一个重要概念。它描述了一个数学对象（通常是一个函数或微分方程）的全微分在不同坐标系统之间保持一致性的性质。这个概念在坐标变换和多变量函数分析中尤为重要。

为了更通俗易懂地解释这个概念，让我们从基本的全微分说起：

全微分的基础

考虑一个二元函数 $f(x,y)$。它的全微分 df 定义为：

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

这个表达式告诉我们，当 x 和 y 发生微小变化时，函数 f 的值如何变化。

全微分形式不变性的含义

当我们改变坐标系统时（例如，从直角坐标系转换到极坐标系），全微分形式不变性确保了全微分 df 的结构保持不变。这意味着，即使我们改变了描述问题的“语言”（即坐标系统），描述函数变化的方式（即全微分的形式）仍然是相同的。

举例说明

设 u 和 v 是新的坐标变量，它们是 x 和 y 的函数。如果我们知道了 f 关于 u 和 v 的偏导数，那么我们可以用这些偏导数来表达 f 的全微分：

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv$$

这里，du 和 dv 是 u 和 v 的微小变化。

重要性

全微分形式不变性的一个重要意义是，它允许我们在不同的坐标系统中自由地进行数学操作和物理解释，而不用担心结论会因坐标系统的改变而改变。在物理学和工程学中，这是一个极其重要的性质，因为它意味着自然法则的数学表述不依赖于我们选择的坐标系统。

总之，全微分形式不变性是一种保证当坐标系统变化时，数学表述仍然保持一致的性质。它在多变量微积分、微分几何以及物理科学中起着核心作用。

【小羽的菜谱】系列之 高数概念串联框架图

多元函数微分学

【NO.4】多元函数的微分

7. 隐函数存在定理：【★★★★】

隐函数存在定理1：

要求：

(1) 如果$F(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内具有偏导数连续；

(2) 满足$F(x_0,y_0)=0$和$F_y(x_0,y_0)\neq 0$；

结论：

(1) 有$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$；

(2) 其他情况类似

隐函数存在定理2：

要求：

(1) 如果$F(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)的某邻域内具有偏导数连续；

(2) 满足$F(x_0,y_0,z_0)=0$和$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$；

结论：

(1) 有$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$和$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$；

(2) 其他情况类似；

隐函数存在定理3：

- N维方程对其中任意一维自变量(假设是x)的偏导数如果等于0，则不能确定由其他自变量表示出x的隐函数，因为这时代表$N-1$维超平面平行于x轴，不满足函数的条件。

要求：

(1) 如果$F(x,y,u,v)$和$G(x,y,u,v)$在点(x_0,y_0,u_0,v_0)的某邻域内具有偏导数连续；

(2) 满足$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$和$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$且$\begin{vmatrix}\partial F/\partial u & \partial F/\partial v\\ \partial G/\partial u & \partial G/\partial v\end{vmatrix}$在点$(x_0,y_0,u_0,v_0)$处不为0；

结论：

(1) 有$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$，$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}$，

(2) 其他情况类似；

【NO.5】多元函数的极值与最值

1. 多元函数极值点的定义：【★★★】

极值点的定义

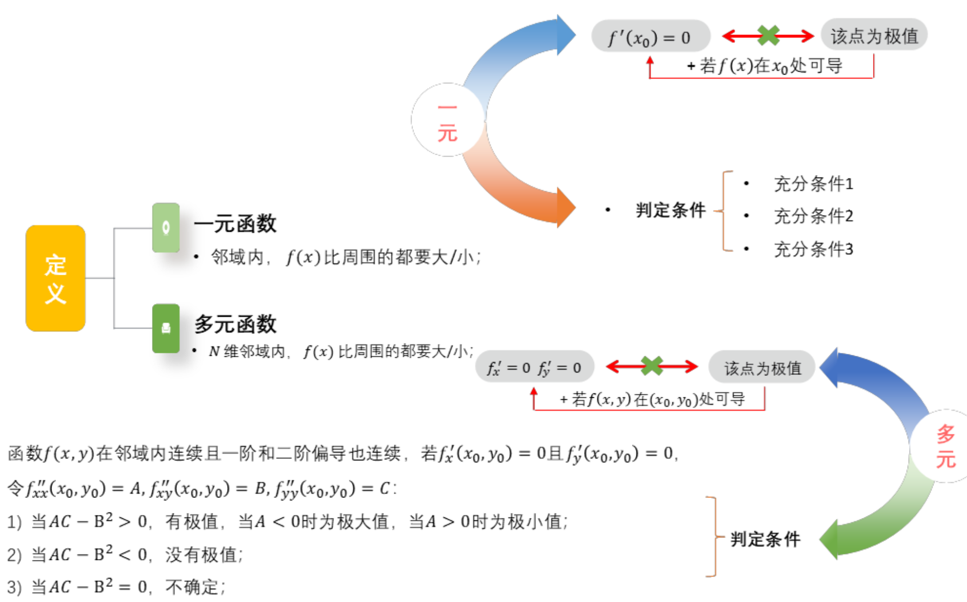
假设 $f(x,y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数。点 (a,b) 被称为 f 的一个极值点，如果满足以下条件之一：

- **局部极大值点**：如果存在一个 (a,b) 的邻域，使得对于该邻域内的所有点 (x,y)，都有 $f(x,y)\le f(a,b)$。这意味着在 (a,b) 点，函数 f 达到了局部的最大值。
- **局部极小值点**：如果存在一个 (a,b) 的邻域，使得对于该邻域内的所有点 (x,y)，都有 $f(x,y)\ge f(a,b)$。这表示在 (a,b) 点，函数 f 达到了局部的最小值。

直观理解

想象一下你在一座小山上。如果你站在山顶，那么不管你朝哪个方向走，初始时你都会下降。这个点就是局部极大值点。相反，如果你站在一个山谷，那么无论你朝哪个方向走，初始时你都会上升。这个点就是局部极小值点。

知识点回顾：多元函数极值点的判定



函数$f(x,y)$在邻域内连续且一阶和二阶偏导也连续，若$f_x'(x_0,y_0)=0$且$f_y'(x_0,y_0)=0$，

令$f_{xx}''(x_0,y_0)=A, f_{xy}''(x_0,y_0)=B, f_{yy}''(x_0,y_0)=C$：

1) 当$AC-B^2>0$，有极值，当$A<0$时为极大值，当$A>0$时为极小值；

2) 当$AC-B^2<0$，没有极值；

3) 当$AC-B^2=0$，不确定；

【小羽的菜谱】系列之高数概念串联框架图

多元函数积分学

【NO.1】二重积分

1. 二重积分的定义：【★★★】

1. **直角坐标系下的二重积分极限定义**：
   设函数 $f(x,y)$ 定义在平面区域 D 上。我们可以将区域 D 划分为 n 个小区域，每个小区域表示为 ΔS_i，并在每个小区域内任取一点 (x_i,y_i)。那么，二重积分 $\iint_D f(x,y)\,dA$ 的极限定义为：
   $$\iint_D f(x,y)\,dA=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i$$
   其中，ΔS_i 表示第 i 个小区域的面积，且随着 n 的增大，每个小区域的最大直径趋于零。
2. **极坐标系下的二重积分极限定义**：
   当我们使用极坐标系时，平面区域 D 会根据极坐标 (r,θ) 进行划分。在极坐标系下，小区域 ΔS_i 可以近似为扇形，其面积可以表示为 $r_i\Delta r_i\Delta\theta_i$，其中 r_i 是该小区域内一点的极径，Δr_i 和 $\Delta\theta_i$ 分别是极径和极角的微小变化。因此，二重积分的极限定义变为：
   $$\iint_D f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(r_i,\theta_i)r_i\Delta r_i\Delta\theta_i$$
   在这里，$f(r,\theta)$ 是将原函数 $f(x,y)$ 转换为极坐标形式的函数，且当 n 趋向无穷大时，每个小区域的最大直径同样趋于零。

2. 二重积分的计算性质：【★★★】

1. **线性性质**：
   $$\iint_D [cf(x,y)+dg(x,y)]\,dA=c\iint_D f(x,y)\,dA+d\iint_D g(x,y)\,dA$$
2. **区域可加性**：
   $$\iint_D f(x,y)\,dA=\iint_{D_1} f(x,y)\,dA+\iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$
3. **比较性质**：
   $$\iint_D f(x,y)\,dA\le\iint_D g(x,y)\,dA$$
4. **绝对值不等式**：
   $$\left|\iint_D f(x,y)\,dA\right|\le\iint_D |f(x,y)|\,dA$$
5. **Fubini定理**：
   $$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$
6. **最值定理**：
   如果函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，并且有最大值 M 和最小值 m，则
   $$m\cdot A(D)\le\iint_D f(x,y)\,dA\le M\cdot A(D)$$
7. **中值定理**：
   如果函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，则存在一点 (c,d) 在 D 内，使得
   $$\iint_D f(x,y)\,dA=f(c,d)\cdot A(D)$$

3. 二重积分基本计算法：【★★★】

知识点回顾：二重积分计算法则

	适用类型	计算法
直角坐标	X型区域：区域有平行于Y轴的边界	切面包：先对y积分，再对x积分 Step 1：沿着x轴把面包切成面包片 Step 2：求面包片体积，沿着y轴积分 Step 3：把所有面包体积加起来，沿着x轴积分
直角坐标	Y型区域：区域有平行于X轴的边界	切面包：先对x积分，再对y积分 Step 1：沿着y轴把面包切成面包片 Step 2：求面包片体积，沿着x轴积分 Step 3：把所有面包片体积加起来，沿着y轴积分
极坐标	类扇形区域	切蛋糕：先对ρ积分，再对θ积分 Step 1：从中间沿着逆时针对蛋糕切分 Step 2：求蛋糕快体积，沿着ρ轴积分 Step 3：把所有蛋糕块体积加起来，沿着θ轴积分

【小羽的菜谱】系列之高数概念串联框架图

多元函数积分学

【NO.2】三重积分

1. 三重积分的定义：【 】

1. **直角坐标系下的三重积分极限定义**：
   在直角坐标系中，假设函数 $f(x,y,z)$ 定义在空间区域 V 上。将区域 V 划分为 n 个小立体 ΔV_i，并在每个小立体内任取一点 (x_i,y_i,z_i)。那么，三重积分 $\iiint_V f(x,y,z)\,dV$ 的极限定义为：
   $$\iiint_V f(x,y,z)\,dV=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$
   其中，ΔV_i 是第 i 个小立体的体积。
2. **柱面坐标系下的三重积分极限定义**：
   在柱面坐标系中，空间点由 (r,θ,z) 表示，其中 r 和 θ 描述底面上的点，z 表示高度。对应的三重积分 $\iiint_V f(r,\theta,z)\,dV$ 可以表示为：
   $$\iiint_V f(r,\theta,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$
   这里，$f(r,\theta,z)$ 是函数 $f(x,y,z)$ 在柱面坐标下的形式，ΔV_i 近似为 $\Delta r\Delta\theta\Delta z$。
3. **球面坐标系下的三重积分极限定义**：
   在球面坐标系中，空间点由 (ρ,θ,ϕ) 表示，其中 ρ 是到原点的距离，θ 是方位角，ϕ 是极角。三重积分 $\iiint_V f(\rho,\theta,\phi)\,dV$ 可以表示为：
   $$\iiint_V f(\rho,\theta,\phi)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$
   其中，$f(\rho,\theta,\phi)$ 是函数 $f(x,y,z)$ 在球面坐标下的形式，ΔV_i 近似为 $\rho^2\sin\phi\,\Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi$。

2. 三重积分的计算性质：【 】

1. **线性性质**：
   $$\iiint_V[cf(x,y,z)+dg(x,y,z)]\,dV=c\iiint_V f(x,y,z)\,dV+d\iiint_V g(x,y,z$$
2. **区域可加性**：
   $$\iiint_V f(x,y,z)\,dV=\iiint_{V_1}f(x,y,z)\,dV+\iiint_{V_2}f(x,y,z)\,dV$$
3. **比较性质**：
   $$\iiint_V f(x,y,z)\,dV\le\iiint_V g(x,y,z)\,dV$$
4. **绝对值不等式**：
   $$\left|\iiint_V f(x,y,z)\,dV\right|\le\iiint_V|f(x,y,z)|\,dV$$
5. **Fubini定理**：
   $$\iiint_V f(x,y,z)\,dV=\int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_e^f f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$
6. **最值定理**：
   如果函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 V 上连续，并且有最大值 M 和最小值 m，则
   $$m\cdot\mathrm{Vol}(V)\le\iiint_V f(x,y,z)\,dV\le M\cdot\mathrm{Vol}(V)$$
7. **中值定理**：
   如果函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 V 上连续，则存在一点 (c,d,e) 在 V 内，使得
   $$\iiint_V f(x,y,z)\,dV=f(c,d,e)\cdot\mathrm{Vol}(V)$$

3. 三重积分的基本计算法：【 】

知识点回顾：三重积分计算法则

	适用类型	计算法
直角坐标	XY型(YZ和XZ型类似)区域：平行于z轴的直线与曲面交点个数≤ 2；	切薯条：先对z积分，再做xy的二重积分，$\iint_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$ 切薯片：先做xy的二重积分，再对z积分，$\int_{z_1}^{z_2}dz\iint_D f(x,y,z)dxdy$ (二重积分的顺序选择可以参考对应部分)
柱面坐标	XY型(YZ和XZ型类似)区域：柱面的母线平行于z轴，XoY面上的投影为圆域	切薯条：先对z积分，再做xy的二重积分$x=r\cos\theta$，$y=r\sin x\theta$ $\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{r_1}^{r_2}rdr\int_{z_1(r\cos\theta,r\sin\theta)}^{z_2(r\cos\theta,r\sin\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,dz$ 切薯片：先做xy的二重积分，再对z积分，$\int_{z_1}^{z_2}dz\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta\int_{r_1}^{r_2}rf(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dr$
球面坐标	积分区域是类球体，或被积函数含有类似$x^2+y^2+z^2$	一般先对半径r积分，再对θ和φ积分 $\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\y=r\sin\varphi\sin\theta\\z=r\cos\varphi\end{cases}$ $dv=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$ $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\cos\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

**【小羽的菜谱】系列之
高数概念串联框架图**

多元函数积分学

【NO.3】曲线积分

1. 曲线积分的定义：【★★★】

第一类曲线积分（对标量场的曲线积分）

第一类曲线积分涉及沿着空间中的一条曲线对一个标量场进行积分。给定一个定义在曲线 C 上的连续函数 $f(x,y,z)$，第一类曲线积分的极限定义是：

$$\int_C f(x,y,z)\,ds=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i$$

这里，C 是一条光滑曲线，Δs_i 是曲线上第 i 个小段的长度，(x_i,y_i,z_i) 是这个小段上的某个点。随着分割点的数量 n 趋于无穷大，每个小段的长度 Δs_i 趋于零。

第二类曲线积分（对向量场的曲线积分）

第二类曲线积分涉及沿着空间中的一条曲线对一个向量场进行积分。给定一个定义在曲线 C 上的向量场 $\mathbf{F}(x,y,z)$，第二类曲线积分的极限定义是：

$$\int_C \mathbf{F}(x,y,z)\cdot d\mathbf{r}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta\mathbf{r}_i$$

这里，$\mathbf{F}(x,y,z)$ 是一个向量场，C 是一条光滑曲线，$\Delta\mathbf{r}_i$ 是第 i 个小段的向量，(x_i,y_i,z_i) 是这个小段上的某个点。向量点乘 $\cdot$ 表示取 $\mathbf{F}$ 在 $\Delta\mathbf{r}_i$ 方向上的分量。随着分割点的数量 n 趋于无穷大，每个小段的长度 $\Delta\mathbf{r}_i$ 的大小趋于零。

2. 曲线积分的计算性质：【★★★】

性质 1 设α,β为常数，则

$$\int_L[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}s=\alpha\int_L f(x,y)\mathrm{d}s+\beta\int_L g(x,y)\mathrm{d}s.$$

性质 2 若积分弧段L可分成两段光滑曲线弧L_1和L_2，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_{L_1}f(x,y)ds+\int_{L_2}f(x,y)ds.$$

性质 3 设在L上$f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)ds\leqslant\int_L g(x,y)ds.$$

特别地，有

$$\left|\int_L f(x,y)ds\right|\leqslant\int_L|f(x,y)|ds.$$

第一类曲线积分

定理 2 设区域G是一个单连通域，若函数$P(x,y)$与$Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数，则曲线积分$\int_L P\ dx+Qdy$在G内与路径无关(或沿G内任意闭曲线的曲线积分为零)的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在G内恒成立.

积分与路径无关

【小羽的菜谱】系列之高数概念串联框架图

多元函数积分学

【NO.3】曲线积分

3. 曲线积分的计算法：【★★★】

知识点回顾：两类曲线积分计算法(以二维为例，三维同理)

	计算法	曲线积分存在的要求
第一类 不指定曲线方向	第一步，根据方程的形式转化为定积分计算(对于三维曲线类似)，有$a<b$： 1. 对于直角坐标显函数：$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2(x)}dx$ 2. 对于参数方程$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$：$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$ 3. 对于极坐标$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$：$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[r\cos\theta,r\sin\theta]\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$	1. 满足$x(t)$和$y(t)$在$[\alpha,\beta]$上一阶导数连续； 2. 满足$x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$；
第二类 指定曲线方向	第一步，根据方程的形式转化为定积分计算(对于三维曲线类似)，有$a<b$： 1. 对于直角坐标显函数：$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(x)\}dx$ 2. 对于参数方程$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$：$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\{P[x(t),y(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t)]y'(t)\}dt$	1. 满足参数t单调地由α增加到β，但并不意味着α一定要小于β； 2. 满足$x(t)$和$y(t)$在$[\alpha,\beta]$上一阶导数连续； 3. 满足$x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$；

两类的联系

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\,ds \qquad \cos\alpha=\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} \qquad \cos\beta=\frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}$$

两者之间的联系

1. **物理意义**：
   - 第一类曲线积分关注于沿曲线的标量量累积，如路径长度、曲线上某物理量的总和。
   - 第二类曲线积分关注于向量场沿曲线的作用，如力在物体沿路径移动时所做的功。
2. **计算方法**：
   两者的计算都涉及对曲线上的点进行积分，但第一类积分是对标量函数积分，而第二类积分是对向量场与切线方向的点积进行积分。

通俗解释

可以将这两类积分比作不同类型的旅行：

- 第一类曲线积分就像是沿着山路行走，记录沿途的景色之美或温度变化。你关注的是这条路径上的特定属性（如景色或温度），而这些属性与路径的具体方向无关。
- 第二类曲线积分则像是推着一个购物车沿着山路前行，向量场（比如风力）会对购物车产生推动或阻碍的作用。这时你关注的是风力在不同方向上对购物车的推动力，即向量场如何沿着路径与你的行进方向交互作用。

4. 格林公式：【★★★★】

格林公式

设 C 是一个简单的（即不自交的）、闭合的、逆时针方向的平面曲线，且 D 是 C 所围成的区域。如果向量场 $\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$ 的分量 P 和 Q 在区域 D 上具有连续偏导数，则格林公式表述为：

$$\oint_C (P\,dx+Q\,dy)=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

其中，积分符号 $\oint$ 表示沿着闭合曲线 C 的积分，而 $\iint$ 表示对区域 D 内的双重积分。

解释

- **左侧**：左侧是对向量场 $\mathbf{F}$ 沿闭合曲线 C 的线积分，表示向量场沿曲线的环流。
- **右侧**：右侧是在区域 D 上关于向量场旋度的双重积分，表示向量场在区域 D 内的旋涡强度。

【小羽的菜谱】系列之高数概念串联框架图

多元函数积分学

【NO.4】曲面积分

1. 曲面积分的定义：【⭐⭐⭐】

第一类曲面积分（对标量场的曲面积分）

第一类曲面积分涉及对定义在曲面上的标量函数进行积分。给定一个定义在曲面 S 上的连续函数 $f(x,y,z)$，第一类曲面积分的极限定义是：

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i$$

这里，S 是空间中的一条光滑曲面，ΔS_i 是曲面上第 i 个小区域的面积，(x_i,y_i,z_i) 是这个小区域上的某个点。随着分割区域的数量 n 趋于无穷大，每个小区域的面积 ΔS_i 趋于零。

第二类曲面积分（对向量场的曲面积分）

第二类曲面积分涉及对定义在曲面上的向量场进行积分。给定一个定义在曲面 S 上的向量场 $\mathbf{F}(x,y,z)$，第二类曲面积分的极限定义是：

$$\iint_S \mathbf{F}(x,y,z)\cdot d\mathbf{S}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta\mathbf{S}_i$$

这里，$\mathbf{F}(x,y,z)$ 是一个向量场，S 是一条光滑曲面，$\Delta\mathbf{S}_i$ 是第 i 个小区域的面积向量，(x_i,y_i,z_i) 是这个小区域上的某个点。向量点乘 · 表示取 $\mathbf{F}$ 在 $\Delta\mathbf{S}_i$ 方向上的分量。随着分割区域的数量 n 趋于无穷大，每个小区域的面积 $\Delta\mathbf{S}_i$ 的大小趋于零。

2. 曲面积分计算法：【⭐⭐⭐】

知识点回顾：两类曲面积分计算法(以二维为例，三维同理)

	计算法	曲线积分存在的要求
第一类 不指定曲面方向	根据曲面方程的形式选择合适的投影面，得到投影区域，然后转化为二重积分： 如果曲面方程形式为 $z=z(x,y)$，投影到 XOY 面：$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=$ $\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$（投影到其他做表面类似）	1. $f(x,y,z)$连续； 2. $f(x,y,z)$有界；
第二类 指定曲面方向	根据曲面方程的形式选择合适的投影面，得到投影区域，然后转化为二重积分： 如果曲面方程形式为 $z=z(x,y)$，投影到 XOY 面：$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+$ $R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_D(P,Q,R)\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right)dxdy$（投影到其他做表面类似）	1. 曲面光滑； 2. P,Q,R有界；

两类的联系

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy=\iint_\Sigma (P,Q,R)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\,dS$$

其中：$\cos\alpha=\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$，$\cos\beta=\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$，$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$

3. 高斯公式和斯托克斯公式：【⭐⭐⭐】

4. 通量与散度、环流量与旋度：【⭐⭐⭐】

通量

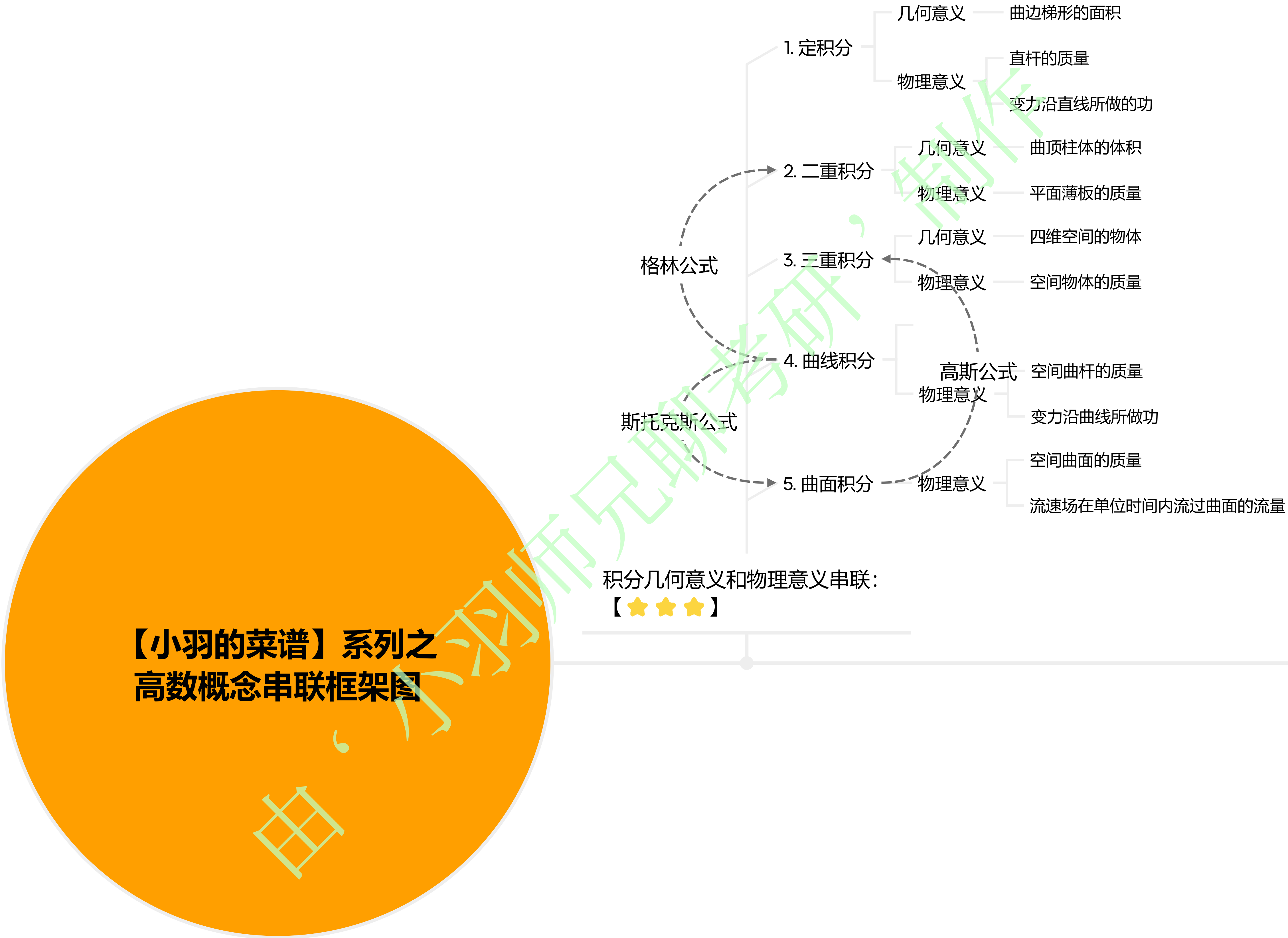
通量描述的是多少"东西"流过了一个表面。想象一下，你在河边放了一个网。通量就是在一定时间内通过这个网的水量。在数学和物理中，这个"东西"可以是流体的流速、电场线等。

- **特点**：通量不仅取决于流过的"东西"的数量，还取决于它流过的方向和表面的朝向。例如，如果水完全垂直流过网，通量就最大；如果水平行流过，即使水的量很多，通量也是零，因为水没有穿过网。

散度

散度描述的是向量场在某一点的"发散程度"，它可以告诉我们那一点是"源"（像喷泉喷水）还是"汇"（像排水口吸水）。想象一下，你在一个泳池中放了一滴墨水。如果墨水在某一点迅速扩散开，那么这个点的散度就很高，说明这里是一个"源"。

- **特点**：如果一个区域的散度为正，那么它就像一个"源头"，在那里会产生新的流体或场。如果散度为负，那么它就像一个"汇"，在那里流体或场被吸走。如果散度为零，那么这个区域既不产生也不消耗流体或场。


【小羽的菜谱】系列之
高数概念串联框架图
积分几何意义和物理意义串联：
【★★★】
1. 定积分
几何意义
曲边梯形的面积
物理意义
直杆的质量
变力沿直线所做的功
2. 二重积分
几何意义
曲顶柱体的体积
物理意义
平面薄板的质量
3. 三重积分
几何意义
四维空间的物体
物理意义
空间物体的质量
4. 曲线积分
物理意义
空间曲杆的质量
变力沿曲线所做功
5. 曲面积分
物理意义
空间曲面的质量
流速场在单位时间内流过曲面的流量
格林公式
高斯公式
斯托克斯公式

【小羽的菜谱】系列之高数概念串联框架图

级数

【NO.1】级数的判敛

- **1 三大常见级数的敛散性**
  - 这是我们判定敛散性的基石；
    - 调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散；交错调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n}$收敛；
    - 正项等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$在$0<r<1$时收敛，在$r\geq 1$时发散；
    - P级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$在$0<p\leq 1$时发散，在$p>1$时收敛；

- **2. 正项级数审敛法：【★★★】**
  - **2 正项级数审敛法**
    - 当级数除有限项外所有的项符号都为正或者为负时称为正项级数；
      - **比较审敛法：** 应用的核心是找到比较的基准，一般通过放缩把目标级数转化为常见级数；
      - **比较审敛法的极限形式：** 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$为一非零常数，那么$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$敛散性相同；若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$，那么若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=+\infty$，那么若$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散
      - **比值审敛法：** 若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=r$，则$r<1$时级数收敛，$r>1$(或$+\infty$)时发散，$r=1$时敛散性不确定；（注：仅给出$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$不能认为级数收敛，并且就算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$不存在，级数也未必发散；）
      - **根值审敛法：** 若$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=r$，则$r<1$时级数收敛，$r>1$(或$+\infty$)时级数发散，$r=1$时敛散性不确定；
      - **极限审敛法：** 若$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=l>0$(或$+\infty$)，则级数发散；若$\lim\limits_{n\to\infty}n^{p}u_n=l$且$p>1$，则级数收敛；
      - ***积分审敛法：** 对于恒大于0的连续单调递减的函数$f(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$的敛散性与反常积分$\int_{1}^{+\infty}f(x)dx$相同；
      - ***对数审敛法：** 若$\exists\ \alpha>0$，使得当$n\geq N$时，$\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}\geq 1+\alpha$，则收敛；若$\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}\leq 1$，发散；

- **3. 交错级数的敛散性：【★★★】**
  - **3 交错级数的敛散性**
    - 莱布尼兹交错条件是交错级数收敛的充分条件而非必要条件，比如$a_n=\frac{1}{n}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$；
      - 如果交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足：1. $u_n\geqslant u_{n+1}$；2. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$；则级数收敛。

- **4. 收敛数列基本性质：【★★★★】**
  - **1 收敛数列基本性质**
    - 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$；
    - 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于s，则$k\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于ks；
    - 对一个级数加上、去掉或者改变有限项，不影响敛散性；
    - 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于s，则加括号后的级数$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_1})+\cdots$仍收敛于$s$，但是逆命题不成立；

- **5. 两个正项级数的基本运算：【★★★★】**
  - **2 两个正项级数的基本运算**
    - **两个正项级数的和：**
      1. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于s_1，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛于s_2，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm v_n$收敛于$s_1\pm s_2$；
      2. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$任一级数发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n+v_n$发散；

      (若去掉正项级数的前提第1条仍然成立，第2条则不成立)；
    - **两个正项级数的积：**
      1. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛；(若去掉正项级数的前提则不成立)；
      2. 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n v_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n v_n}$收敛；

- **6. 绝对与条件收敛性质：【★★★★】**
  - **3 绝对与条件收敛性质**
    - 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$也发散；
    - 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，改变该级数项的位置(不管有限项位置还是无限项位置)后也收敛于同一个值；(条件收敛没有此结论)
    - 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛的充要条件之一是其正部和负部都收敛；如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛，则其正部和负部都发散；
  - **4 两个级数绝对条件收敛运算**
    - **两个绝对收敛级数的运算：** 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都绝对收敛
      1. 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm v_n$绝对收敛；
      2. 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n v_n$绝对收敛；
    - **两个条件收敛级数的运算：** 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$都条件收敛
      1. 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm v_n$可能条件收敛也可能绝对收敛，但是一定收敛；
      2. 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n v_n$敛散性不确定；
    - **一个条收级数和一个绝收级数的运算：** 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝收，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$条收
      1. 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm v_n$条件收敛；
      2. 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n v_n$绝对收敛；

【小羽的菜谱】系列之高数概念串联框架图

级数

【NO.2】幂级数

1. 阿贝尔定理：【★★★★】

2. 幂级数的运算性质：【★★★】

1. **加法和减法**：

$$\sum a_n(x-a)^n \pm \sum b_n(x-a)^n = \sum (a_n \pm b_n)(x-a)^n$$

2. **乘法**：

$$\left(\sum a_n(x-a)^n\right)\left(\sum b_n(x-a)^n\right) = \sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)(x-a)^n$$

3. **除法**（$b_0 \neq 0$）：

$$\frac{\sum a_n(x-a)^n}{\sum b_n(x-a)^n} = \sum c_n(x-a)^n$$

适用长除法或逐项除法确定 c_n。

4. **求导**：

$$\frac{d}{dx}\sum a_n(x-a)^n = \sum n a_n (x-a)^{n-1}$$

5. **积分**：

$$\int \sum a_n(x-a)^n\,dx = C + \sum \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

C 是积分常数。

6. **重新排列**：

若幂级数在某点绝对收敛，可在该点重新排列而不改变和。

【小羽的菜谱】系列之高数概念串联框架图

级数

【NO.2】幂级数

3. 常见函数展开成幂级数：【★★★】

1. 指数函数 e^x：

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

2. 正弦函数 $\sin x$：

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

3. 余弦函数 $\cos x$：

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

4. 自然对数 $\ln(1+x)$：

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \quad （对于 |x|<1）$$

5. 二项式展开（对于实数 α）：

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

6. 双曲正弦 $\sinh x$：

$$\sinh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

7. 双曲余弦 $\cosh x$：

$$\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

【NO.3】傅里叶级数

1. 三角函数系的正交性：【★★】

- **计算基础1：三角函数系的正交性**

三角函数系包括：$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx$；

三角函数系内积是指：f_1和f_2的内积$(f_1,f_2)=\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)f_2(x)dx$，其中$f_1$和$f_2$取自三角函数系；

所谓正交性是指如下结论：

- 对于任意不相等的f_1和f_2，有 $\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)f_2(x)dx=0$；
- 对于三角函数系中任意不等于1的f，有 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)f(x)\,dx=\pi$；

2. 傅里叶级数中系数的求解公式：【★★★】

- **计算基础2：傅里叶级数中系数的求解公式**

1. 对于周期为2π的周期函数，傅里叶级数的形式为：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，三个系数求法为：

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\,dx \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx$$

2. 对于周期为$2l$的周期函数，傅里叶级数的形式为：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l})$，三个系数求法为：

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx \quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$