Another Coin Weighing Puzzle-莫比乌斯反演

题目

每个背包里面分别有k个相同的硬币。
已知只有一个背包里的是假币，其他的都是真币，且假币重量 $>$ 真币重量。
你有一个天平秤，每次左右两边可以放入相同数量的任意硬币，可以通过中间的读数知道哪边大(小)多少，你可以称量最多m次。
问你最多能从多少个背包里分别出假币包。

分析

$$\text{定义背包}j\text{的安排为}A_j=\{a_{j1},a_{j2},\dots,a_{jm}\},\text{其中}a_{ji}\text{表示在第}i\text{次称量中背包}j\text{放入了多少个硬币。}$$
$$\text{考虑所有背包的安排：}$$
$$\text{显然当}a_{j1}=a_{j2}=\cdots=a_{jn}=0\text{时，背包}j\text{为假背包}$$
$$\text{考虑当}a_{ji}\text{不全为0时：}$$
$$\text{假设真硬币重量为}w,\text{假硬币重量为}c*w,\text{则：}$$
$$\text{在第}i\text{轮比较中，假设背包}p\text{是假硬币，则：第}i\text{轮的差值}s_i=a_{pi}*c*w-a_{pi}*w=a_{pi}*(c*w-w)$$
$$\text{我们得到一个差值序列}S,\text{其含义是：每轮假硬币和真硬币的差值(即天秤读数)}$$
$$\text{因为}s_i=\lambda*a_{pi},\text{即：}s_i\text{与假币包}p\text{一一对应}$$
$$\text{也就是只有假币包才满足：}\forall 1\le i\le j\le m,\frac{a_{pi}}{a_{pj}}=\frac{s_i}{s_j}$$
$$\text{因此，如果出现有}A_i,A_j\text{满足上述对应关系，则无法分辨}$$
$$\text{显然有}\frac{s_i}{s_j}=\frac{a_{pi}}{a_{pj}}=\frac{\lambda*a_{pi}}{\lambda*a_{pj}}$$
$$\text{故我们要保证}\lambda=1,\text{即}gcd(a_{pi},a_{pj})=1$$
$$\text{因此答案}=|A=\{a_i|a_i\in[1,k],gcd(a_i,a_j)=1\}|$$
$$\text{经典莫比乌斯反演技巧：}i\text{的倍数的个数}=\text{最小公倍数是}i\text{的个数}$$
$$\text{记：}f(n)=|A=\{a_i|a_i\in[1,k],gcd(a_i,a_j)=n\}|,F(n)=|B=\{b_i|b_i\in[1,k],b_i\%n=0\}|=(2*\frac{k}{n}+[b_i=0])^m$$
$$\sum_{n|d}f(d)=F(n)$$
$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)*F(\frac{n}{d})$$
$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)*(2*\frac{k}{d}+1)^m$$
$$\text{答案}=f(1)=\sum_{d|1}\mu(d)*(2*\frac{k}{d}+1)^m$$
$$=\sum_{d=1}^{k}\mu(d)*(2*\frac{k}{d}+1)^m$$