

积性函数

定义

$$gcd(x, y) = 1, f(x * y) = f(x) * f(y) \Leftrightarrow f(n) \text{ 为积性函数}$$

性质

$$f(x), g(x) \text{ 为积性函数, 则: } f(x^p), f^p(x), f(x) * g(x), \sum_{d|n} f(d) * g(\frac{n}{d}) \text{ 都是积性函数}$$

常见的积性函数

约数个数函数	$d(n) = \sum_{d=1}^n [d n] = \sum_{d n} 1$
约数和函数	$\sigma(n) = \sum_{d=1}^n d * [d n] = \sum_{d n} d$
约数 k 次幂函数	$\sigma_k(n) = \sum_{d=1}^n d^k * [d n] = \sum_{d n} d^k$
欧拉函数	$\varphi(n) = \sum_{i=1}^n [gcd(i, n) = 1]$
莫比乌斯函数	$\mu(n) = \prod_{i=1}^k [p_i \nmid n] * (-1)^{[p_i n]}$
单位元函数	$\epsilon(n) = [n = 1]$
单位函数	$ID(n) = n$
幂函数	$IDK(n) = n^k$