斐波那契

$$\text{递推式：}f(0)=0,f(1)=1,f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

$$\text{通项公式：}f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right]$$

$$\text{矩阵快速幂求斐波那契：}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}f(i-1) & 0\\ f(i-2) & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(i) & 0\\ f(i-1) & 0\end{bmatrix}$$

$$\text{广义斐波那契：}f(n)=af(n-1)+bf(n-2)$$

性质1：模除周期性

数列的数模除某个数的结果会呈现一定周期性

因为数列中的某个数取决与前两个数，一旦有连着的两个数的模除结果分别等于第0第一项的模除结果

那麽代表着一个新的周期的的开始，如果模除n，则每个周期中的元素不会超过$n\times n$;

$$\text{性质2：黄金分割比 }lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}=0.618$$

$$\text{性质3：}n>1,f(2n)=f(2n-1)f(2n+1)-1,f(2n+1)=f(2n)f(2n+2)+1$$

$$\text{性质4：}f(n+2)=\text{代表了集合}\{1,2,\ldots n\}\text{中所有不包含相邻正整数的子集的个数}$$

性质5：尾数循环

最后个位数循环：60步

最后两位数循环：300步

最后三位数循环：1500步

最后四位数循环：15000步

最后五位数循环：150000步

$$\ldots$$

$$\text{恒等式1：}f(n+2)-1=\sum_{i=1}^{n}f(i)$$

$$\text{恒等式2：}f(n)f(n+1)=\sum_{i=1}^{n}f^2(i)$$

$$\text{恒等式3：}f(2n)=\sum_{i=1}^{n}f(2i-1)$$

$$\text{恒等式4：}f(2n+1)-1=\sum_{i=1}^{n}f(2i)$$

$$\text{恒等式5：}f(n)=f(m)f(n-m+1)+f(m-1)f(n-m)$$

$$\text{恒等式6：}f(n-1)f(n+1)=f^2(n)+(-1)^n$$

$$\text{数论相关1：}gcd(f(n),f(m))=f(gcd(n,m)),\text{特别的：}gcd(f(n),f(n+1))=1$$

$$\text{数论相关2：}n|m\Leftrightarrow f(n)|f(m)$$