# 约翰逊法-Johnson法则

## 题目

$$有n件物品,每件物品需要现在工厂A加工a_i时间，完再在工厂B加工b_i时间。\tag{1}$$
每个工厂每次只能加工一件物品，问加工完所有物品的总时间的最小值是多少。

## Johnson法则

$$\tag{2}$$
$$记总物品集合S = \{1, 2, \ldots, n\}。\tag{3}$$
$$令N_1 = \{i|i \in S, min(a_i, b_{i+1}) < min(a_{i+1}, b_i)\}, N_2 = \{i|i \in S, i \notin N_1, a_i < a_{i+1}\}\tag{4}$$
$$ans = \to N_1 \to N_2\tag{5}$$

## 证明

采用交换论证法。

假设当前最优解为$S = \{s_1, s_2, \dots, s_x, \dots, s_y, \dots, s_n\}$。

记$A_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$为工厂$A$加工完前$i$件物品所花的时间, $B_j = max(A_j, B_{j-1}) + b_j$为工厂$B$加工完前$i$间物品所花的时间。

假设$x < y$：

先加工$s_x$：$B_x = max(A_k + a_x, B_k) + b_x$; 先加工$s_y$：$B_y = max(A_k + a_y, B_k) + b_y$, 则：

$$\tag{6}$$

$$\begin{cases} B_{x\to y} & = max(A_k + a_x + a_y, max(A_k + a_x, B_k) + b_x) + b_y \\ B_{y\to x} & = max(A_k + a_y + a_x, max(A_k + a_y, B_k) + b_y) + b_x \end{cases} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_{x\to y} & = max(A_k + a_x + a_y + b_y, A_k + a_x + b_x + b_y, B_k + b_x + b_y) \\ B_{y\to x} & = max(A_k + a_y + a_x + b_x, A_k + a_y + b_y + b_x, B_k + b_y + b_x) \end{cases} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_{x\to y} & = max(A_k + a_x + a_y + b_y, A_k + a_x + b_x + b_y, B_k + b_y + b_x) \\ B_{y\to x} & = max(A_k + a_y + a_x + b_x, A_k + a_y + b_y + b_x, B_k + b_y + b_x) \end{cases} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_{x\to y} & = max(A_k + a_x + b_y + max(a_y, b_x), B_k + b_x + b_y) \\ B_{y\to x} & = max(A_k + a_y + b_x + max(a_x, b_y), B_k + b_x + b_y) \end{cases} \tag{10}$$

假设$B_{x\to y} > B_{y\to x}$, 则：

$$B_{x\to y} > B_{y\to x}$$

$$A_k + a_x + b_y + max(a_y, b_x) > A_k + a_y + b_x + max(a_x, b_y)$$

$$a_x + b_y + max(a_y, b_x) > a_y + b_x + max(a_x, b_y)$$

$$a_x + b_y - max(a_x, b_y) > a_y + b_x - max(a_y, b_x)$$

$$min(a_x, b_y) > min(a_y, b_x)$$

(注意)事实上当$B_{x\to y} = B_{y\to x}$时, $min(a_x, b_y) = min(a_y, b_x)$或$B_{x\to y} = B_{y\to x} = B_k + b_x + b_y$。

当时取等是情况2的时候：

因为$B_{y\to x} = max(A_k + a_x + a_y + b_x, A_k + a_y + b_y + b_x, B_k + b_x + b_y)$

所以有$B_k \geq A_k + max(a_y, a_x), b_y \geq a_x, b_x \geq a_y$

故$min(a_y, b_x) = a_y, min(a_x, b_y) = a_x$

此时若不考虑$B_k + b_x + b_y$对$B_{x\to y}, B_{y\to x}$的影响, 则$x, y$的先后序取决于$a_x, a_y$

又因为$B_i = max(A_i, B_{i-1}) + b_i$有传递性, 所以取等时要考虑$a_x, a_y$。

具体来说, 两次贪心, 分别考虑$s_x, s_y, s_k$

若$s_x, s_y$在$a_x < a_y$时不交换, 则第二次贪心是$s_y, s_k$; 若交换了则是$s_x, s_k$

不难知道可以构造一组数据来$hack$掉不交换的情况

故当两者相等时还要按$a_x, a_y$从小到大排序

# 结论

$$\begin{gathered} 若 min(a_x, b_y) < (>) min(a_y, b_x), 则: x \to (\leftarrow) y \\ 取等时, 若 a_x < (>) a_y, 则: x \to (\leftarrow) y \end{gathered} \tag{11}$$