欧拉函数

定义

$$\text{定义式：小于}n\text{的正整数与}n\text{互质的数目}$$
$$\varphi(n)=\sum_{d=1}^{d<n}[gcd(d,n)==1]$$
$$\varphi(1)=1$$
$$\text{通式：}n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i},\varphi(n)=n*\sum_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=n*\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{p_i}*(1-p_i)\right]$$

推论

$$\begin{aligned}&\text{当}n=p^k\text{时},\varphi(n)=p^k-p^{k-1}=(p-1)*p^{k-1}\\&\text{当}n=p\text{时},\varphi(n)=n-1\\&\varphi(n)\text{是积性函数},gcd(a,b)=1\Rightarrow\varphi(a*b)=\varphi(a)*\varphi(b)\end{aligned}$$

小结论

$$\begin{aligned}&1:\sum_{d=1}^{d<n}d*[gcd(d,n)==1]=\frac{n*\varphi(n)}{2}\\&2:x\%p=0\Rightarrow\varphi(x*p)=p*\varphi(x)\\&3:ID(n)=n=\sum_{d|n}\varphi(d)\\&4:\text{欧拉定理}:gcd(a,n)=1\Rightarrow a^{\varphi(n)}=1\pmod n,\text{特殊情况(费马小定理)}:a^{\varphi(p)}=x^{p-1}=1\pmod n\\&5:\text{欧拉降幂}:\begin{cases}a^n\equiv a^{n\%\varphi(m)}\pmod m,gcd(a,m)=1\\a^n\equiv a^n\pmod m,gcd(a,m)\neq1,n<\varphi(m)\\a^n\equiv a^{n\%\varphi(m)+\varphi(m)}\pmod m,gcd(a,m)\neq1,n>\varphi(m)\end{cases}\\&6:gcd(x,y)=d\Rightarrow\varphi(x*y)=\frac{\varphi(x)*\varphi(y)}{\varphi(d)}\\&7:n>2\text{时},\varphi(n)\in\text{偶数}\\&8:\frac{\varphi(n)}{n}=\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}\end{aligned}$$