LGV引理

基本作用

处理有向无环图上不相交路径的计数问题

内容

在一个有向无环图G中,出发点集$A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$,$B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$,同时有向边e的权值为w_e,记a到b的一条路径记作$P:a\to b$

设$e(a,b)=\sum\limits_{P:a\to b}\left(\prod\limits_{e\in P}w_e\right)$,即:$a$到$b$所有路径的边权乘积之和;$M$为$A\to B$所有不相交路径在所有排列上的带符号的和

$$则:M=\begin{vmatrix} e(a_1,b_1) & e(a_1,b_2) & \cdots & e(a_1,b_n) \\ e(a_2,b_1) & e(a_2,b_2) & \cdots & e(a_2,b_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e(a_n,b_1) & e(a_n,b_2) & \cdots & e(a_n,b_n) \end{vmatrix}=\sum_{(P_1,P_2,...,P_n):A\to B} sign(\sigma(P))*\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{e\in P_i}w_e\right)$$

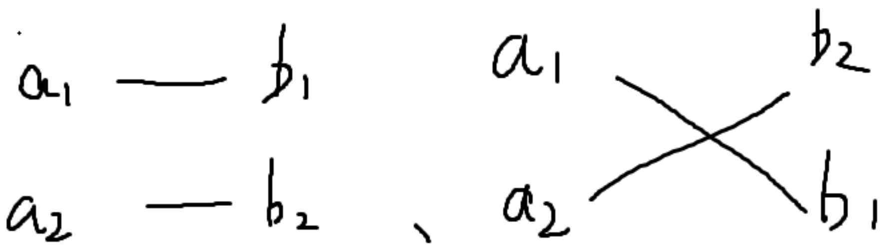
其中排列是指A与B的对应关系(对应路径$P_i:A_i\to B_{\sigma(i)}$),符号$sign(P)$表示$(-1)^{P的逆序对个数}$

简单运用

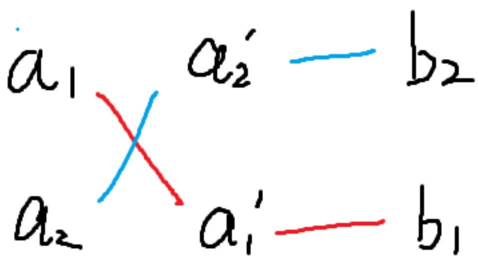
令所有边权w都为1,即$w=1$;且A与B为一一对应关系,则:n条不相交的路径的方案计数$=$上述的行列式$=\det{(M)}$,即为这n个起点与终点间走出n条不相

证明

先考虑简单的情况,$n=2$的时候,$a_1\to b_1,a_2\to b_2$不相交的路径方案数.
那么对于a_1、a_2,b_1、b_2的相对位置只有两种情况.



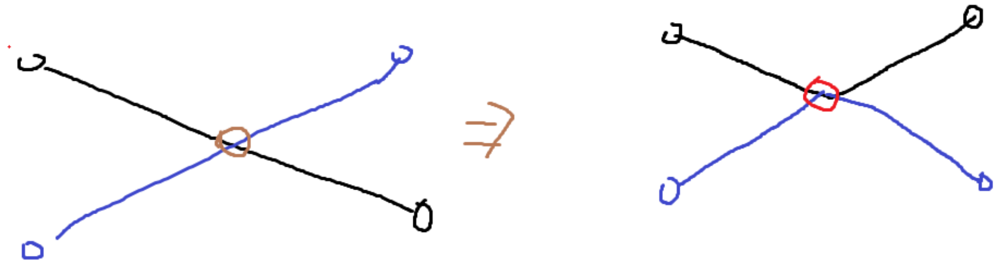
当$(a_1\to b_1)$与$(a_2\to b_2)$平行时,$P_{a_1\to b_1}$的路径与$P_{a_2\to b_2}$的路径交点数为偶数(≥ 0);
当$(a_1\to b_1)$与$(a_2\to b_2)$相交时,$P_{a_1\to b_1}$的路径与$P_{a_2\to b_2}$的路径交点数为奇数(≥ 0);
不难知道,第二种相交的情况可以转换成第一种情况的相交方案数计数,即:
将第一次相交看成a_1与a_2交换位置,则此时$(a_1',b_1),(a_2',b_2)$即是第一种情况,
此时的方案$\leftrightarrow$第一种情况下的当前交点数-1的方案
故:不相交的路径方案数$=$方案数$_{a_1\to b_1}*$方案数$_{a_2\to b_2}-$方案数$_{a_1\to b_2}*$方案数$_{a_2\to b_1}$



$n=2$的情况其实是一个简单的容斥,那么推广到n的情况,应该也是容斥.
考虑和上面一样的做法,交换某两个起点和终点,那么这两个交点的路径一定会相交,由上面知道,我们应在该项系数上$*(-1)$
交换两个点产生一个逆序对,枚举所有排列,再乘上$*(-1)^{P的逆序对个数}$,就能算出所有不相交的路径数

$$
\begin{aligned}
det(M) &= \sum_{\sigma \in S} sign(\sigma) * \sum_{P} w(P), P:(a_1,a_2,\ldots,a_n) \to (b_{\sigma(1)}, b_{\sigma(2),\ldots,b_{\sigma(n)}}) \\
&= \sum_{P:A \to B} sign(\sigma(P)) * w(P) \\
&= \Big[\sum_{P^u:A \to B} sign(\sigma(P^u)) * w(P^u)\Big] + \Big[\sum_{P^c:A \to B} sign(\sigma(P^c)) * w(P^c)\Big] \\
&\text{若引理成立, 则必有：} \sum_{P^c:A \to B} sign(\sigma(P^c)) * w(P^c) = 0 \\
&\text{设} C = \{P^c\}, \text{若能构造一个双射} f: C \to C, \text{满足} \forall P^c \in C, w(f(P^c)) = w(P^c), sign(\sigma(f(P^c))) = -sign(\sigma(P^c)). \\
&\text{那么根据重排列定理, 则有：} \sum_{P^c} sign(\sigma(P^c)) * w(P^c) = \sum_{P^c} sign(\sigma(f(P^c))) * w(f(P^c))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{则有：} \sum_{P^c} sign(\sigma(P^c)) * w(P^c) &= \frac{1}{2} * \Big\{\Big[\sum_{P^c} sign(\sigma(P^c)) * w(P^c)\Big] + \Big[\sum_{P^c} sign(\sigma(f(P^c))) * w(f(P^c))\Big]\Big\} \\
&= \frac{1}{2} * \Big\{\Big[\sum_{P^c} sign(\sigma(P^c)) * w(P^c)\Big] + \Big[\sum_{P^c} -sign(\sigma(P^c)) * w(P^c)\Big]\Big\} \\
&= 0 \\
&\text{确实可以构造：} \\
&\text{考虑} P^c \in C, \text{从中找到最小的二元组} (i,j) \text{满足} P_i \text{和} P_j \text{相交, 将相交后的路径终点交换一下, 交换后的得到} P_i', P_j', \text{则显然有} P_i', P_j' \in C, \text{且} i
\end{aligned}
$$



简单来说：设 $P_i: a_i \to b_{\sigma(i)}, P_j = a_j \to b_{\sigma(j)}$

$$
\begin{cases} P_i = e(a_i, v_k) + e(v_k, b_{\sigma(i)}) \\ P_j = e(a_j, v_k) + e(v_k, b_{\sigma(j)}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_i' = e(a_i, v_k) + e(v_k, b_{\sigma(j)}) \\ P_j' = e(a_j, v_k) + e(v_k, b_{\sigma(i)}) \end{cases}
$$

由于边还是那些边, 所以边权 $w(P)$ 不变; 由于交换了终点，所以逆序对数的奇偶改变, 故：$sign(\sigma(P')) = -sign(\sigma(P))$

即：$sign(\sigma(f(P))) = -sign(\sigma(P))$

事实上, 对于 P', (i,j) 还是最小的二元组, 故 $f(p') = P$, 因此 f 是双射

做法

通用的：利用高斯消元 (n^3), 可以做到 O(求解 n 对点对之间的路径信息 $+ n^3$)

某些题求解 n 对点对之间的路径信息可以用分治做到 $O(n * log(n))$, 则总的 $O(n * log(n) + n^3)$

或者通过化简矩阵来减少复杂度