狄利克雷卷积

定义

$$设f(n), g(n)为数论函数, 则其狄利克雷卷积函数h(n) = (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) * g(\frac{n}{d}) = \sum_{a*b=n} f(a) * g(b) \quad (1)$$

性质

$$1：结合律 : f, g, h为数论函数 \Rightarrow (f * g) * h = f * (g * h) \quad (2)$$
$$2：交换律 : f, g为数论函数 \Rightarrow f * g = g * f \quad (3)$$
$$3 : \epsilon(n)为狄利克雷卷积的单位元, 任何数论函数卷\epsilon都为其本身, 即 : f * \epsilon = f \quad (4)$$
$$4 : f, g为积性函数, 则 : h = (f * g)也是积性函数 \quad (5)$$
$$5 : g, h = f * g为积性函数, 则 : f为积性函数, 特别的：当h = f * \mu为积性函数, 则f为积性函数 \quad (6)$$
$$6 : g为完全积性函数, h = f * g, 则 : f = h * \mu * g, 即：h(n) = \sum_{d|n} f(d) * g(\frac{n}{d}) \Rightarrow f(n) = \sum_{d|n} hd * \mu(\frac{n}{d}) * g(\frac{n}{d}) \quad (7)$$
$$7 : 逆元 : 若积性函数f，f(1) \neq 0, 则 : 由f * g = \epsilon得f^{-1}(n) = g(n) = \frac{[n = 1] - \sum_{d|n, d\neq 1} f(d) * g(\frac{n}{d})}{f(1)} \quad (8)$$

常见的卷积

$$(9)$$
$$\epsilon = \mu * 1 \Leftrightarrow \epsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \quad (10)$$
$$d = 1 * 1 \Leftrightarrow d(n) = \sum_{d|n} 1 \quad (11)$$
$$\sigma = d * 1 \Leftrightarrow \sigma(n) = \sum_{d|n} d \quad (12)$$
$$\varphi = \mu * d \Leftrightarrow \varphi(n) = \sum_{d|n} d * \mu(\frac{n}{d}), 特别的 : [gcd(i, j) = 1] \Leftrightarrow \sum_{d|gcd(i,j)} \mu(d) \quad (13)$$
$$ID = \varphi * 1, (ID : f(n) = n) \quad (14)$$