狄利克雷卷积

定义

设$f(n),g(n)$为数论函数,则其狄利克雷卷积函数$h(n)=(f*g)(n)=\sum_{d|n}f(d)*g(\frac{n}{d})=\sum_{a*b=n}f(a)*g(b)$

性质

1：结合律：f,g,h为数论函数 $\Rightarrow (f*g)*h=f*(g*h)$
2：交换律：f,g为数论函数 $\Rightarrow f*g=g*f$
$3:\epsilon(n)$为狄利克雷卷积的单位元,任何数论函数卷ϵ都为其本身,即：$f*\epsilon=f$
$4:f,g$为积性函数,则：$h=(f*g)$也是积性函数
$5:g,h=f*g$为积性函数,则：f为积性函数,特别的：当$h=f*\mu$为积性函数,则f为积性函数
$6:g$为完全积性函数,$h=f*g$,则：$f=h*\mu*g$,即：$h(n)=\sum_{d|n}f(d)*g(\frac{n}{d})\Rightarrow f(n)=\sum_{d|n}hd*\mu(\frac{n}{d})*g(\frac{n}{d})$
$7:$逆元：若积性函数f，$f(1)\neq 0$,则：由$f*g=\epsilon$得$f^{-1}(n)=g(n)=\frac{[n=1]-\sum_{d|n,d\neq 1}f(d)*g(\frac{n}{d})}{f(1)}$

常见的卷积

$$\epsilon=\mu*1\Leftrightarrow\epsilon(n)=\sum_{d|n}\mu(d)$$
$$d=1*1\Leftrightarrow d(n)=\sum_{d|n}1$$
$$\sigma=d*1\Leftrightarrow\sigma(n)=\sum_{d|n}d$$
$$\varphi=\mu*d\Leftrightarrow\varphi(n)=\sum_{d|n}d*\mu(\frac{n}{d}),\text{特别的}:[gcd(i,j)=1]\Leftrightarrow\sum_{d|gcd(i,j)}\mu(d)$$
$$ID=\varphi*1,(ID:f(n)=n)$$