

莫比乌斯函数

定义

一个关于非平方数的质因子数目的函数(本质容斥定理)

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ (-1)^k, n = \prod_{i=1}^k p_i \\ 0, n = \prod p_i^{\alpha_i}, \exists \alpha_i > 1 \end{cases} = \prod_{i=1}^k [p_i \nmid n] * (-1)^{[p_i|n]}$$

性质

1 : $\mu(n)$ 是个积性函数

$$2 : [n = 1] = \sum_{d|n} \mu(d)$$

$$3 : \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases}$$

$$4 : \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n}$$