典型相容区间最大化贪心正确性证明

题目

有n个区间$[l,r]$,对任意$1 \le i < j \le n, r_i <= l_j$或$r_j <= l_i$即称区间$i,j$相容，问最多能有多少个区间相容。

分析

有个显然的直觉，对于一个固定的边界我们贪心的选择当前与它相容的最小右边界的区间，这样总选择的区间最小。

证明

设集合$S=\{s|s\in[1,n],\forall s_i<s_j,r_{s_i}\le r_{s_j}\}$,最优解为$A=\{s|s\in[1,n],\forall s_i<s_j,r_{s_i}\le l_{s_j}$或$r_{s_j}\le l_{s_i}\}$

总命题：

$$A_k=\{S\text{中前}k\text{个相容的区间}\}\text{为贪心了}k\text{次后的解，则}A=A_n$$

归纳基础:k=1

任取$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$,假设$r_{a_1}=min\{r_{a_i}\}$,不难知$r_{s_1}\le r_{a_1}$,故$A_1'=(A_1-\{a_1\})\cup\{s_1\}$也是最优解

归纳假设: $k=\lambda$时命题成立

$$\text{现证}k=\lambda+1\text{时也成立：}$$

根据归纳假设得：$A=A_\lambda\cup B$,假设A_λ从S中最后选择的区间为y,则$:B\subseteq S'=\{s_{y+1},\ldots,s_n\}$
由于A中的区间相容，所以不妨假设S'中的区间与A_λ的区间都相容，否则从S'删去该区间。
假设$r_{b_1}=min\{r_{b_i}\}$,则$:r_{s_1'}\le r_{b_1}$,又因为s_i'与A_λ中的区间相容，所以$A'=(A-\{b_1\})\cup\{s_1'\}$也是最优解。
显然$s_1'=s_{y+1}$(若s_{y+1}与s_y不相容，则为s_{y+2}),故$:A_\lambda\cup\{s_1'\}=A_{\lambda+1}$
证毕