约翰逊法-Johnson法则

题目

有n件物品, 每件物品需要现在工厂A加工a_i时间，完再在工厂B加工b_i时间。
每个工厂每次只能加工一件物品，问加工完所有物品的总时间的最小值是多少。

Johnson法则

记总物品集合$S=\{1,2,...,n\}$。
令$N_1=\{i|i\in S, min(a_i,b_{i+1})<min(a_{i+1},b_i)\}, N_2=\{i|i\in S, i\notin N_1, a_i<a_{i+1}\}$
$ans=\rightarrow N_1\rightarrow N_2$

证明

采用交换论证法。
假设当前最优解为$S=\{s_1,s_2,...,s_x,...,s_y,...,s_n\}$。

记$A_j=\sum_{i=1}^{j}a_i$为工厂A加工完前i件物品所花的时间, $B_j=max(A_j,B_{j-1})+b_j$为工厂B加工完前i间物品所花的时间。

假设$x<y$:
先加工s_x：$B_x=max(A_k+a_x,B_k)+b_x$; 先加工s_y : $B_y=max(A_k+a_y,B_k)+b_y$, 则 :

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} B_{x\to y} &= max(A_k+a_x+a_y, max(A_k+a_x,B_k)+b_x)+b_y \\ B_{y\to x} &= max(A_k+a_y+a_x, max(A_k+a_y,B_k)+b_y)+b_x \end{cases}\\
\Rightarrow&\begin{cases} B_{x\to y} &= max(A_k+a_x+a_y+b_y, A_k+a_x+b_x+b_y, B_k+b_x+b_y) \\ B_{y\to x} &= max(A_k+a_y+a_x+b_x, A_k+a_y+b_y+b_x, B_k+b_y+b_x) \end{cases}\\
\Rightarrow&\begin{cases} B_{x\to y} &= max(A_k+a_x+a_y+b_y, A_k+a_x+b_x+b_y, B_k+b_y+b_x) \\ B_{y\to x} &= max(A_k+a_y+a_x+b_x, A_k+a_y+b_y+b_x, B_k+b_y+b_x) \end{cases}\\
\Rightarrow&\begin{cases} B_{x\to y} &= max(A_k+a_x+b_y+max(a_y,b_x), B_k+b_x+b_y) \\ B_{y\to x} &= max(A_k+a_y+b_x+max(a_x,b_y), B_k+b_x+b_y) \end{cases}
\end{aligned}
$$

假设$B_{x\to y}>B_{y\to x}$, 则 :

$$
\begin{gathered}
B_{x\to y}>B_{y\to x}\\
A_k+a_x+b_y+max(a_y,b_x)>A_k+a_y+b_x+max(a_x,b_y)\\
a_x+b_y+max(a_y,b_x)>a_y+b_x+max(a_x,b_y)\\
a_x+b_y-max(a_x,b_y)>a_y+b_x-max(a_y,b_x)\\
min(a_x,b_y)>min(a_y,b_x)
\end{gathered}
$$

(注意)事实上当$B_{x\to y}=B_{y\to x}$时, $min(a_x,b_y)=min(a_y,b_x)$或$B_{x\to y}=B_{y\to x}=B_k+b_x+b_y$。

当时取等是情况2的时候 :

因为$B_{y\to x}=max(A_k+a_x+a_y+b_x, A_k+a_y+b_y+b_x, B_k+b_x+b_y)$

所以有$B_k\geq A_k+max(a_y,a_x), b_y\geq a_x, b_x\geq a_y$

故$min(a_y,b_x)=a_y, min(a_x,b_y)=a_x$

此时若不考虑$B_k+b_x+b_y$对$B_{x\to y}, B_{y\to x}$的影响, 则x, y的先后序取决于a_x, a_y

又因为$B_i=max(A_i,B_{i-1})+b_i$有传递性, 所以取等时要考虑a_x, a_y。

具体来说, 两次贪心, 分别考虑s_x, s_y, s_k

若s_x, s_y在$a_x<a_y$时不交换, 则第二次贪心是s_y, s_k; 若交换了则是s_x, s_k

不难知道可以构造一组数据来$hack$掉不交换的情况

故当两者相等时还要按a_x, a_y从小到大排序

结论

$$若min(a_x, b_y) < (>) min(a_y, b_x), 则: x \to (\leftarrow) y$$

$$取等时, 若a_x < (>) a_y, 则: x \to (\leftarrow) y$$