杜教筛

定义

处理数论函数的前缀和

思路

$$求S(n)=\sum_{i=1}^{n}f(i),我们想通过构造S(\frac{n}{d})\rightarrow S(n)的递推式求解$$

引理

$\forall g为数论函数,有\sum_{x=1}^{n}\sum_{d|x}f(d)*g(\frac{x}{d})=\sum_{d=1}^{n}g(d)*S(\frac{n}{d})\Leftrightarrow\sum_{d=1}^{n}\Big[(f*g)(d)\Big]=\sum_{d=1}^{n}g(d)*S(\frac{n}{d})$

结论

$$根据引理，有:\sum_{d=1}^{n}\Big[(f*g)(d)\Big]=\sum_{d=1}^{n}g(d)*S(\frac{n}{d})$$

$$\Rightarrow\sum_{d=1}^{n}\Big[(f*g)(d)\Big]=g(1)*S(n)+\sum_{d=2}^{n}g(d)*S(\frac{n}{d})$$

$$g(1)*S(n)=\sum_{d=1}^{n}\Big[(f*g)(d)\Big]-\sum_{d=2}^{n}g(d)*S(\frac{n}{d})$$

$$S(n)=\frac{\sum_{d=1}^{n}\Big[(f*g)(d)\Big]-\sum_{d=2}^{n}g(d)*S(\frac{n}{d})}{g(1)}$$

$$记h(n)=f(d)*g(\frac{n}{d}),则:S(n)=\frac{\sum_{d=1}^{n}h(d)-\sum_{d=2}^{n}g(d)*S(\frac{n}{d})}{g(1)}$$

合理性分析

若我们能快速的处理$\sum_{d=1}^{n}h(d)$,然后数论分块记忆化处理$\sum_{d=2}^{n}g(d)*S(\frac{n}{d})$,则可在低于线性时间求出$S(n)$