

# 杜教筛

---

## 定义

---

处理数论函数的前缀和

## 思路

---

求  $S(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$ , 我们想通过构造  $S(\frac{n}{d}) \rightarrow S(n)$  的递推式求解 (1)

## 引理

---

$\forall g$  为数论函数, 有  $\sum_{x=1}^n \sum_{d|x} f(d) * g(\frac{x}{d}) = \sum_{d=1}^n g(d) * S(\frac{n}{d}) \Leftrightarrow \sum_{d=1}^n [(f * g)(d)] = \sum_{d=1}^n g(d) * S(\frac{n}{d})$  (2)

## 结论

---

$$\text{根据引理, 有: } \sum_{d=1}^n \left[ (f * g)(d) \right] = \sum_{d=1}^n g(d) * S\left(\frac{n}{d}\right) \quad (3)$$

$$\Rightarrow \sum_{d=1}^n \left[ (f * g)(d) \right] = g(1) * S(n) + \sum_{d=2}^n g(d) * S\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$g(1) * S(n) = \sum_{d=1}^n \left[ (f * g)(d) \right] - \sum_{d=2}^n g(d) * S\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$S(n) = \frac{\sum_{d=1}^n \left[ (f * g)(d) \right] - \sum_{d=2}^n g(d) * S\left(\frac{n}{d}\right)}{g(1)}$$

$$\text{记 } h(n) = f(d) * g\left(\frac{n}{d}\right), \text{ 则: } S(n) = \frac{\sum_{d=1}^n h(d) - \sum_{d=2}^n g(d) * S\left(\frac{n}{d}\right)}{g(1)}$$

## 合理性分析

---

若我们能快速的处理  $\sum_{d=1}^n h(d)$ , 然后数论分块记忆化处理  $\sum_{d=2}^n g(d) * S\left(\frac{n}{d}\right)$ , 则可在低于线性时间求出  $S(n)$  (4)