

整除分块

$$\forall n \in N^*, \exists \{x | x \in [1, n], x_{i+1} = x_i + 1\}, \forall x_i, x_j \in \{x\}, \lfloor \frac{n}{x_i} \rfloor = \lfloor \frac{n}{x_j} \rfloor \quad (1)$$

证明：

令 $n = q * x + r, (r \in [1, x - 1], q \leq r)$, 则：

$$\lfloor \frac{n}{x} \rfloor = \lfloor \frac{q * x + r}{x} \rfloor = q$$

$$\lfloor \frac{n}{x+m} \rfloor = \lfloor \frac{q * x + r}{x+m} \rfloor = \lfloor \frac{q * (x+m) + (r - q * m)}{x+m} \rfloor = q + \lfloor \frac{r - q * m}{x+m} \rfloor = q, \text{ 当 } m \leq \lfloor \frac{r}{q} \rfloor \text{ 时成立}$$

此时 $x, x+m$ 在同一个块 $\{q\}$ 中, 不难知道 $\forall v \in [x, x+m], v \in \{q\}$

进一步的, 假设 $x+m$ 是 $\{q\}$ 的边缘, 那么对于 $x+m+1$ 来说：

$$\begin{aligned} \lfloor \frac{n}{x+m+1} \rfloor &= \lfloor \frac{q * x + r}{x+m+1} \rfloor = \lfloor \frac{(q-1) * (x+m+1) + [r+x-(q-1) * (m+1)]}{x+m+1} \rfloor \\ &= q-1 + \lfloor \frac{r+x-(q-1) * (m+1)}{x+m+1} \rfloor = q-1 + \lfloor \frac{(r-q * m) \geq 0 + (x+m+1-q) \geq 0}{x+m+1} \rfloor \\ &= q-1 \end{aligned}$$

故：块也是连续的

下面来确定一下每个块边界 $[l, r]$ 的方法：

根据上面论证的对于 x 为起点所在的最大块为 $[x, x+m]$, 此时 $m = \lfloor \frac{r}{q} \rfloor, (n = q * x + r)$, 即：

$$\begin{aligned} l &= x, r = x + \lfloor \frac{r}{q} \rfloor = x + \lfloor \frac{n \% x}{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor} \rfloor \\ \because \lfloor \frac{a}{b} \rfloor &= \frac{a - a \% b}{b} \\ \therefore \text{上式} &= x + \frac{n \% x - n \% x \% \lfloor \frac{n}{x} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor} \\ &= \frac{x * \lfloor \frac{n}{x} \rfloor + n \% x - (\lfloor \frac{n}{x} \rfloor * x + n \% x) \% \lfloor \frac{n}{x} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor} \\ &= \frac{x * \frac{n - n \% x}{x} + n \% x - n \% \lfloor \frac{n}{x} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor} \\ &= \frac{n - n \% \lfloor \frac{n}{x} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor} \\ &= \lfloor \frac{n}{\lfloor \frac{n}{x} \rfloor} \rfloor \end{aligned}$$

故：对于每个块 $[l, r] = [l, \lfloor \frac{n}{\lfloor \frac{n}{l} \rfloor} \rfloor]$

结论

$$\sum_{i=1}^n f(i) * g(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor) = \sum_{l=1, r=\lfloor \frac{n}{l} \rfloor}^{r \leq n} [\frac{r-l+1}{2} * g(\lfloor \frac{n}{l} \rfloor) * \sum_{i=l}^{i \leq r} f(i)] \quad (2)$$