最大公约数之和V3

WinnieVenice

2020 年 4 月 17 日

题源:51nod1237,4.07GzhuWeekPratice

题目:

给定$n \in N^+, n \in [1, 10^{10}]$,求$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} gcd(i,j)\%(7+10^9)$的值。

题解:

显然不能暴力,因为$n \in [1, 10^{10}]$。

显然要化简式子,减少复杂度。

我们看到$\sum_{i=1}^{n} gcd(i,j)$**类似的式子就自然联想到欧拉函数**$\psi(x) = \sum_{i=1}^{x} = \sum_{i=1}^{x}[gcd(i,n) == 1]$

$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} gcd(i,j) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} d * [gcd(i,j) == d]$,[bool]=0/1

$\Rightarrow \sum\limits_{d=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} d * [gcd(i,j) == d]$

$\Rightarrow \sum\limits_{d=1}^{n} d * \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}[gcd(i,j) == d]$

$\Rightarrow \sum\limits_{d=1}^{n} d * \sum\limits_{\lfloor\frac{i}{d}\rfloor=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum\limits_{\lfloor\frac{j}{d}\rfloor=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[gcd(\lfloor\frac{i}{d}\rfloor, \lfloor\frac{j}{d}\rfloor) == 1]$

$\Rightarrow \sum\limits_{d=1}^{n} d * \sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum\limits_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[gcd(i,j) == 1]$

$\because$ **对于具有"对称性"的函数,即:**$f(x,y) : D(f) \to R(f), \forall i,j \in D(f), f(i,j) == f(j,i)$。

例如:gcd(i,j)=gcd(j,i)

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} f(i,j) \Leftrightarrow 2 * \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i} f(i,j) - \sum_{i=1}^{n} f(i,i)$

又$\because \forall i \in N^+ \&\& i > 1, [gcd(i,i) == 1] \equiv 0$。$i = 1, [gcd(i,i) == 1] \equiv 1$

$\Rightarrow \sum\limits_{d=1}^{n} d * (2 * \sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum\limits_{j=1}^{i}[gcd(i,j) == 1] - 1)$

$\because \sum_{j=1}^{i}[gcd(i,j) == 1] = \psi(i)$

$\therefore \sum\limits_{d=1}^{n} d * (2 * \sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\psi(i) - 1)$

$\Rightarrow 2 * \sum\limits_{d=1}^{n} d * \sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\psi(i) - \sum\limits_{d=1}^{n} d$

$\Rightarrow 2 * \sum\limits_{d=1}^{n} d * \sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\psi(i) - \frac{n*(n+1)}{2}$

由已知知识,我们可以用欧拉筛在$\Theta(\mathbf{n})$**时间复杂度下筛出**$[\mathbf{1},\mathbf{n}]$**的**ψ**,并求出前缀和,但是因为n**$\in$

$[1,10^{10}]$**我们最多预处理一部分**

下面考虑如何更快的求$S(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\psi(i)$,**杜教筛(莫比乌斯反演也可以)经典例题:**

根据欧拉函数的性质:$n=\sum\limits_{d|n}\psi(d)$

$\Leftrightarrow f(x)=x=\sum\limits_{d|x}\psi(d)$

$\sum\limits_{i=1}^{n}f(i)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{d|i}\psi(d)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{d|i}\psi(i)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 0 &= \sum_{i=1}^{n}f(i)-\sum_{i=2}^{n}\sum_{d|i}\psi(i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}f(i)-\sum_{i=2}^{n}\sum_{d=1}^{n}[d|i]*\psi(i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}f(i)-\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}[d|i]*\psi(i)\\
&\because \forall x\in[1,n], x=d*\lambda \Leftrightarrow [d|x]\equiv 1\\
&\therefore \sum_{i=1}^{n}[d|i] \Leftrightarrow \sum_{\frac{i}{d}}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}[1|\tfrac{i}{d}] \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow 0=\sum_{i=1}^{n}f(i)-\sum\limits_{d=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\psi(i)$

$\Rightarrow S(n)=\frac{n*(n+1)}{2}-\sum\limits_{d=2}^{n}S(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)$

化简到这一步，我们得到了一个递归方程,显然我们可以用**整除分块**在$\Theta(n^{\frac{2}{3}}+\sqrt{n})$的时间复杂度完成。

最终我们得到的解决方法:

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}gcd(i,j)$

$\Leftrightarrow 2*\sum\limits_{1\le l\le r\le n,\frac{n}{l}=\frac{n}{r}\ne\frac{n}{r+1}}\frac{(r-l+1)*(r+l)}{2}*S(\lfloor\frac{n}{l}\rfloor)-\frac{n*(n+1)}{2}\ \&\&\ S(n)=\sum\limits_{2\le l\le r\le n,\frac{n}{l}=\frac{n}{r}\ne\frac{n}{r+1}}(r-l+1)*S(\lfloor\frac{n}{l}\rfloor)$

总时间复杂度:$\Theta(n^{\frac{2}{3}}+\sqrt{n}+\theta(\text{预处理一部分}))$