回文质数关于偶数位回文数非质数(除11)的证明

WinnieVenice

2020 年 4 月 3 日

因为一个n位数的数都可以表示成:$\sum_{i=1}^{n} a_i * 10^{i-1}$,所以一个偶数位回文数可以表示为:$\sum_{i=1}^{2k} a_i * 10^{i-1}$
根据回文性质又可以表示为$N = \sum_{i=1}^{k} a_i * (10^{2k-i} + 10^{i-1})$
要证明:N不是质数,只需要证明N是合数,根据合数的性质也就只需要证明:$N \equiv 0 \bmod \alpha, \alpha \in$常数。
由于N的任意性,即a_i的任意性，所以有个显然的想法是证明:$\forall (10^{2k-i} + 10^{i-1}) \equiv 0 \bmod \alpha$
下证:
$\because 1 \leq i \leq k$
$\therefore 2k - i \geq k > k - 1 \geq i - 1 \geq 0$
$\therefore 10^{2k-i} + 10^{i-1} \leftrightarrow 10^{i-1} * (10^{2*(k-i)+1} + 1)$
$\because i = 1, 10^{i-1} \equiv 1$
$\therefore$我们去证明:$\forall 10^{2*(k-i)+1} + 1 \equiv 0 \bmod \alpha$
因为$11 \leq 10^{2*(k-i)+1} + 1$(取等$\leftrightarrow i = 1$),且11是个质数,所以我们大胆的认为:$\alpha = 11$
下证:$10^{2*(k-i)+1} + 1 \equiv 0 \bmod 11$

$$\begin{aligned} 10^{2*(k-i)+1} + 1 &= 1 + (11-1)^{2*(k-i)+1} \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{T} C_T^j * 11^j * (-1)^{T-j} \qquad , T = 2*(k-i)+1 \\ &= 1 + C_T^0 * 11^0 * (-1)^T + \sum_{j=1}^{T} C_T^j * 11^j * (-1)^{T-j} \\ &= 1 + (-1)^T + \sum_{j=1}^{T} C_T^j * 11^j * (-1)^{T-j} \end{aligned}$$

$\because T = 2*(k-i)+1 \in$奇数$\therefore (-1)^T = -1$
$\Rightarrow 1 - 1 + \sum_{j=1}^{T} C_T^j * 11^j * (-1)^{T-j}$
$\Rightarrow \sum_{j=1}^{T} C_T^j * 11^j * (-1)^{T-j}$
显然$\sum_{j=1}^{T} C_T^j * 11^j * (-1)^{T-j} \equiv 0 \bmod 11$.
综上:对于除了非11外的偶数位回文数都不是质数
证毕.