典型最小延迟调度贪心正确性证明

题目

有n个任务，每个任务有截止时间d_i, 执行时间t_i, 我们称每个任务的延迟为其真实结束时间超过截止时间的时间，如果每次只能执行一个任务，问如何分配使得

分析

因为我们要使得最大的延迟最小，所以有个显然的想法是对于每个任务我们都尽可能早于它的d_i开始, 且任务与任务之间没有空闲时间。

接下来考虑如何分配哪个任务优先执行，不难想象对于任务$i, j, d_i < d_j$，i的优先级应该比j的优先级高。

故，考虑贪心策略，每次都选择先执行当前d_i最小的任务，贪心n次可得到答案。

证明

这是一道交换论证的经典题目。
记f_x为任务x的延迟，s_x为任务x的开始时间。
假设$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$为一种最优分配, 且记每个任务的开始时间为$s_{a_i}$，则：
显然A中存在$d_{a_i} > d_{a_{i+1}}$, (否则此时的A符合我们的贪心)，则：
$f_{a_i} = s + t_{a_i} - d_{a_i}, f_{a_{i+1}} = s + t_{a_i} + t_{a_{i+1}} - d_{a_{i+1}}$
考虑交换a_i与a_{i+1}，则：
$f'_{a_i} = s + t_{a_i} + t_{a_{i+1}} - d_{a_i}, f'_{a_{i+1}} = s + t_{a_{i+1}} - d_{a_{i+1}}$
因为$d_{a_i} > d_{a_{i+1}}$所以$max_f\{a_i, a_{i+1}\} = a_{i+1}$
因为$f'_{a_{i+1}} < f_{a_{i+1}}, f'_{a_i} < f_{a_{i+1}}$, 故交换后的$f'_{max_f\{a_i, a_{i+1}\}} < f_{max_f\{a_i, a_{i+1}\}}$
此时$A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{i+1}, a_i, \ldots, a_n\}$为更优解，经过$C_n^2$次交换后可得到最优解为答案
证毕