莫比乌斯函数

定义

一个关于非平方数的质因子数目的函数(本质容斥定理) (1)

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ (-1)^k, n = \prod_{i=1}^{k} p_i \\ 0, n = \prod p_i^{\alpha_i}, \exists \alpha_i > 1 \end{cases} = \prod_{i=1}^{k} [p_i \nmid n] * (-1)^{[p_i | n]}$$

性质

$$(2)$$

$$1 : \mu(n) \text{是个积性函数} \qquad (3)$$

$$2 : [n = 1] = \sum_{d|n} \mu(d) \qquad (4)$$

$$3 : \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases} \qquad (5)$$

$$4 : \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(n)}{n} \qquad (6)$$