Математика

Мы

7 июня 2023 г.

Оглавление

1 Примечания **3**

2 Логика **4**

3 Множества **6**
3.1 Аксиомы множеств 6
3.2 Другое 7

4 Бинарные отношения **11**

5 Общая алгебра **18**

6 Алгебраические выражения **25**

7 Измерения **30**

8 Последовательности **31**

9 Функции **38**

10 Графы **53**

11 Беспредельный **57**

12 Числа **60**
12.1 Натуральные числа (N) 60
12.2 Целые числа (Z) 62
12.3 Рациональные числа (Q) 69
12.4 Иррациональные числа (I) 70
12.5 Действительные числа (R) 70
12.6 Комплексные числа (C) 74

13 Матрицы **77**

13.1 Операции над матрицами . . . 81
13.2 Перестановки . . . 83
13.3 Определители . . . 85
13.4 Миноры, алгебраические дополнения и ранги . . . 88
13.5 Форматы матриц . . . 90
13.6 СЛАУ относительно матриц . . . 91

14 Векторы 93

15 Линейная алгебра 98

Глава 1

Примечания

В данном материале очень много опечаток. А также данный материал неконсистентен - он не стандартизирован.

Чтобы понять, что означают ’<’, ’>’, попробуйте их убрать.

Глава 2

Логика

$$\forall A,\ B\ \left(A \longrightarrow B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Из посылки } A \text{ вытекает вывод } B. \\ A - \text{достаточное условие для } B. \\ B - \text{необходимое условие для } A. \end{cases}\right)$$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{cases} A \longrightarrow B \\ B \longrightarrow A \end{cases} \Leftrightarrow A \text{ и } B - \text{логически эквивалентные утверждения.}\right)$$

$$\forall A,\ B\ ((A \longrightarrow B)\ -\ \text{прямое утверждение.} \Leftrightarrow (B \longrightarrow A)\ -\ \text{обратное утверждение.})$$

$$\forall A,\ B\ ((A \longrightarrow B)\ -\ \text{прямое утверждение.} \Leftrightarrow (\overline{A} \longrightarrow \overline{B})\ -\ \text{противоположное утверждение.})$$

$$\forall A,\ B\ ((A \longrightarrow B)\ -\ \text{прямое утверждение.} \Leftrightarrow (\overline{B} \longrightarrow \overline{A})\ -\ \text{противоположное обратному утверждение.})$$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{cases} A - \text{прямое утверждение.} \\ B - \text{противоположное обратному утверждение.} \end{cases} \longrightarrow A \Leftrightarrow B\right)$$

Доказательство от противного:

$$\forall A\ \exists B\ (B \wedge (\overline{A} \longrightarrow \overline{B}) \longrightarrow A)$$

Принцип математической индукции (ПМИ):

$$\forall f\ \left(\forall n\ \begin{cases} f : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ f(0) \\ f(n) \longrightarrow f(n+1) \end{cases} \longrightarrow \forall n\ f(n)\right)$$

$\forall f\ Prog(f)$ – прогрессивность свойства f.

$$\forall f,\ g\ \left(\begin{cases} f : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ g : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ f(g) = \forall n\ \ (\forall m\ \ (m < n \longrightarrow g(m)) \longrightarrow g(n)) \end{cases} \Leftrightarrow f = Prog(g)\right)$$

Принцип сильной индукции (ПСИ):

$$\forall f\ \ (Prog(f) \longrightarrow \forall n\ f(n))$$

Принцип наименьшего числа (ПНЧ):

$$\forall f\ \left(\exists m\ \begin{cases} f : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ f(m) \end{cases} \longrightarrow \exists n\ \forall a\ \begin{cases} f(n) \\ a < n \longrightarrow \overline{f(a)} \end{cases}\right)$$

Глава 3

Множества

3.1 Аксиомы множеств

$\forall a \ a$ – множество.

$$\forall a,\ b \ \left[\begin{array}{l} b \in a \\ b \notin a \end{array}\right.$$

Аксиома основания:

Не бывает бесконечных цепочек вида $\begin{cases} x_1 \in x_2 \\ x_2 \in x_3 \\ \vdots \end{cases}$

Аксиома равенства:

$$\forall a,\ b \ \ (a = b \Leftrightarrow \forall c \ \ (a \in c \Leftrightarrow b \in c))$$

$$\forall a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \ \exists a \ a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

$$\forall a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\ b\ \left(b \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = a_1 \\ b = a_2 \\ \vdots \\ b = a_n \end{array}\right.\right)$$

$$\forall f,\ c\ \ (f : c \longrightarrow Bool \Leftrightarrow \exists b\ b = \{a \in c \mid f(a)\})$$

$$\forall f,\ b,\ c\ \left(c \in \{a \in b \mid f(a)\} \Leftrightarrow \begin{cases} c \in b \\ f(c) \end{cases}\right)$$

3.2 Другое

$$\forall a,\ b\ \ (a \subseteq b \Leftrightarrow \forall c\ \ (c \in a \longrightarrow c \in b))$$

$$\forall a,\ c\ \ (a \subset c \Leftrightarrow c - \text{собственное подмножество } a.)$$

$$\forall a,\ b\ \ (a = b \Leftrightarrow \forall c\ \ (c \in a \Leftrightarrow c \in b))$$

$$\forall a,\ b\ \ (a = b \Leftrightarrow \forall f\ \ (\exists c\ f : c \longrightarrow Bool \longrightarrow (f(a) \Leftrightarrow f(b))))$$

$$\forall a,\ b\ \left(a = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \subseteq b \\ b \subseteq a \end{cases}\right)$$

$$a \subseteq a$$

$$\forall a,\ c\ \left(\exists b\ \begin{cases} a \subseteq b \\ b \subseteq c \end{cases} \longrightarrow a \subseteq c\right)$$

$$\forall a\ a \notin \varnothing$$

$$\forall a\ \varnothing \subseteq a$$

Парадокс Рассела:

$$\overline{\exists a\ \forall b\ \ (b \in a \Leftrightarrow b \notin b)}$$

$$\forall a,\ b\ \ (a \in P(b) \Leftrightarrow a \subseteq b)$$

$$\forall a,\ b,\ c\ \left(c \in a \cup b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c \in a \\ c \in b \end{bmatrix}\right)$$

$$\forall a,\ c\ \left(a \in \cup b \Leftrightarrow \exists c\ \begin{cases} a \in c \\ c \in b \end{cases}\right)$$

$$\forall a,\ b\ a \cap b = \{c \in a \mid c \in b\}$$

$\forall a,\ b\ a \setminus b = \{c \in a \mid c \notin b\}$

$\forall a,\ b\ a \subseteq b \Leftrightarrow a \cap b = a$

$\forall a,\ b\ a \subseteq b \Leftrightarrow a \cup b = b$

$\forall a,\ b\ \ (b - \text{universum.} \Leftrightarrow \overline{a} = b \setminus a)$

$\cup$ – операция, обладающая коммутативным свойством.

$\cup$ – операция, обладающая ассоциативным свойством.

$\cup$ – операция, обладающая дистрибутивным свойством с $\cap$.

$\cap$ – операция, обладающая коммутативным свойством.

$\cap$ – операция, обладающая ассоциативным свойством.

$\cap$ – операция, обладающая дистрибутивным свойством с $\cup$.

$$\forall a,\ b\ (a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$$

$$\forall a,\ b,\ c\ \left(\begin{cases} a \in c \\ b \in c \end{cases} \longrightarrow (a,b) \in P\left(P\left(c\right)\right)\right)$$

$$a \times b = \left\{ z \in P(P(a \cup b)) \mid \exists x,\ y\ \begin{cases} x \in a \\ y \in b \\ z = (x,y) \end{cases} \right\}$$

$$a^0 = \{\varnothing\}$$

$$\forall a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\ \ (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = \left(\left(\left(a_1, a_2\right), a_3\right) \ldots a_n\right)$$

Глава 4

Бинарные отношения

$\forall A,\ B,\ C\ \ (C \subseteq A \times B \Leftrightarrow C -$ множество бинарных отношений между множествами A и B.)

$$\forall A,\ B,\ C\ \ (C \subseteq A \times B \Leftrightarrow dom\ C = \{x \in A \mid \exists y\ (x,y) \in C\})$$

$$\forall A,\ B,\ C\ \ (C \subseteq A \times B \Leftrightarrow rng\ C = \{y \in B \mid \exists x\ (x,y) \in C\})$$

$$\forall A,\ B,\ C\ \ \big(C \subseteq A \times B \Leftrightarrow C^{-1} = \{(y,x) \in B \times A \mid (x,y) \in C\}\big)$$

$$\forall A,\ B,\ C\ \ (C \subseteq A \times B \Leftrightarrow \forall x,\ y\ \ (xCy \Leftrightarrow (x,y) \in C))$$

$$\forall A,\ B,\ C,\ Q,\ Z\ \ \left(\begin{cases} C \subseteq A \times Z \\ Q \subseteq Z \times B \end{cases} \Leftrightarrow Q \circ C = \left\{(x,y) \in dom\ C \times rng\ Q \mid \exists z\ \ \begin{Bmatrix} xCz \\ zQy \end{Bmatrix}\right.\right)$$

$$\forall A,\ B,\ C,\ Q,\ Z\ \ \left(\begin{cases} C \subseteq A \times Z \\ Q \subseteq Z \times B \end{cases} \Leftrightarrow (Q \circ C)^{-1} = C^{-1} \circ Q^{-1}\right)$$

$$\forall A\ id_A = \{z \in A \times A \mid \exists x\ z = (x,x)\}$$

$$\forall A,\ B,\ C\ \ \left(C \subseteq A \times B \longrightarrow \begin{cases} id_B \circ C = C \\ C \circ id_A = C \end{cases}\right)$$

$$\forall A,\ B,\ C\ \left(C \subseteq A \times B \longrightarrow \begin{cases} id_B \circ C = C \\ C \circ id_A = C \end{cases}\right)$$

$\forall C,\ X\ (\exists A,\ B\ C \subseteq A \times B \Leftrightarrow C[X]$ – образ множества X под действием отношения C.)

$$\forall C,\ X\ C[X] = \left\{ b \in rng\ C \mid \exists a\ \begin{cases} a \in X \\ aCb \end{cases} \right\}$$

$\forall C\ C[dom\ C] = rng\ C$

$\forall C,\ X\ \big(C[X]$ – образ множества X под действием отношения C. $\Leftrightarrow C^{-1}[X]$ – пробраз множества X под д

$\forall C\ C^{-1}[rng\ C] = dom\ C$

$\forall C\ C[\varnothing] = \varnothing$

$\forall C,\ X,\ Y\ C[X \cup Y] = C[X] \cup C[Y]$

$\forall C,\ X,\ Y\ C[X \cap Y] \subseteq C[X] \cap C[Y]$

$\forall C,\ X,\ Y\ \ (Q \circ C)\,[X] = Q[C[X]]$

$$\forall R\ \left(\forall x,\ y,\ z\ \left(\begin{cases} xRy \\ xRz \end{cases} \longrightarrow y = z\right) \Leftrightarrow R \text{ – функционально.}\right)$$

$$\forall R\ \left(\forall x,\ y,\ z\ \left(\begin{cases} yRx \\ zRx \end{cases} \longrightarrow y = z\right) \Leftrightarrow R \text{ – инъективно.}\right)$$

$\forall R\ \big(\forall x,\ y,\ z\ \big(R$ – функционально. $\Leftrightarrow R^{-1}$ – инъективно.$\big)\big)$

$\forall R,\ X\ \ (X \subseteq dom\ R \Leftrightarrow R$ – тотально для X.)

$\forall R,\ Y\ \ (Y \subseteq rng\ R \Leftrightarrow R$ – сюрьективно для Y.)

$\forall R,\ X\ \big(R$ – тотально для X. $\Leftrightarrow R^{-1}$ – сюрьективно для X.$\big)$

$$\forall R,\ Q\ \left(\begin{cases} R - \text{функционально.} \\ Q - \text{функционально.} \end{cases} \longrightarrow R \circ Q - \text{функционально.}\right)$$

$$\forall R,\ Q\ \left(\begin{cases} R - \text{инъективно.} \\ Q - \text{инъективно.} \end{cases} \longrightarrow R \circ Q - \text{инъективно.}\right)$$

$$\forall R,\ Q,\ A\ \left(\exists B\ \begin{cases} Q \subseteq A \times B \\ R - \text{тотально для } rng\ Q. \\ Q - \text{тотально для } A. \end{cases} \longrightarrow R \circ Q - \text{тотально для } A.\right)$$

$$\forall R,\ Q,\ C\ \left(\exists B\ \begin{cases} R \subseteq B \times C \\ Q - \text{сюрьективно для } dom\ R. \\ R - \text{сюрьективно для } C. \end{cases} \longrightarrow R \circ Q - \text{сюрьективно для } C.\right)$$

$$\forall A,\ R\ \left(\exists B \begin{cases} R : A \longrightarrow B \\ R - \text{инъекция.} \end{cases} \Leftrightarrow R^{-1} \circ R \subseteq id_A\right)$$

$$\forall B,\ R\ \left(\exists A \begin{cases} R : A \longrightarrow B \\ R - \text{функционально.} \end{cases} \Leftrightarrow R \circ R^{-1} \subseteq id_B\right)$$

$$\forall A,\ R\ \left(\exists B \begin{cases} R : A \longrightarrow B \\ R - \text{тотально для } A. \end{cases} \Leftrightarrow id_A \subseteq R^{-1} \circ R\right)$$

$$\forall B,\ R\ \left(\exists A \begin{cases} R : A \longrightarrow B \\ R - \text{сюрьективна для } B. \end{cases} \Leftrightarrow id_B \subseteq R \circ R^{-1}\right)$$

$\forall x\ xRx \Leftrightarrow R$ – рефлексивное.

$\forall x\ \overline{xRx} \Leftrightarrow R$ – иррефлексивное.

$\forall x, y\ \ (xRy \longrightarrow yRx) \Leftrightarrow R$ – симметричное.

$$\forall x, y\ \left(\begin{cases} xRy \\ yRx \end{cases} \longrightarrow x = y\right) \Leftrightarrow R - \text{антисимметричное.}$$

$$\forall x, y, z \ \left(\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \longrightarrow xRz\right) \Leftrightarrow R - \text{транзитивное.}$$

$id \subseteq R \Leftrightarrow R -$ рефлексивное.

$id \cap R = \varnothing \Leftrightarrow R -$ иррефлексивное.

$R = R^{-1} \Leftrightarrow R -$ симметричность.

$R \cap R^{-1} \subseteq id \Leftrightarrow R -$ антисимметричное.

$R \circ R \subseteq R \Leftrightarrow R -$ транзитивное.

$$\begin{cases} P - \text{транзитивное.} \\ Q - \text{транзитивное.} \end{cases} \longrightarrow P \cap Q - \text{транзитивное.}$$

$$\begin{cases} P \subseteq A^2 \\ P - \text{иррефлексивное.} \\ P - \text{транзитивное.} \end{cases} \Leftrightarrow P - \text{строгий частичный порядок на } A.$$

$\exists A \ P -$ строгий частичный порядок на A. $\longrightarrow P -$ антисимметричное.

$$\begin{cases} P \subseteq A^2 \\ P - \text{рефлексивное.} \\ P - \text{транзитивное.} \\ P - \text{антисимметричное.} \end{cases} \Leftrightarrow P - \text{нестрогий частичный порядок на } A.$$

$\varphi(P) = P \cup id$

$\psi(P) = P \setminus id$

$S(A) -$ множество строгих частичных порядков на A.

$N(A) -$ множество нестрогих частичных порядков на A.

$S\left(A\right) \overset{\mathcal{L}}{\sim} N\left(A\right)$

$S\left(A\right) \overset{\psi}{\sim} N\left(A\right)$

$\begin{cases} < -\text{строгий частичный порядок на } A. \\ \leq -\text{нестрогий частичный порядок на } A. \Leftrightarrow (A, <, \leq) - \text{частично упорядоченное множество.} \\ <= \psi(\leq) \end{cases}$

$(A, <, \leq)$ – частично упорядоченное множество. $\Leftrightarrow A$ – носитель порядка $\left(A, <, \leq\right)$.

$\forall y \in B \ \overline{y < x} \Leftrightarrow x$ – минимальное в B.

$\forall y \in B \ \overline{x < y} \Leftrightarrow x$ – максимальное в B.

$\forall y \in B \ x \leq y \Leftrightarrow x$ – наименьший в B.

$\forall y \in B \ y \leq x \Leftrightarrow x$ – наибольший в B.

x – наименьший в B. $\longrightarrow min_< B = \{x\}$

x – наибольший в B. $\longrightarrow max_< B = \{x\}$

$\exists! x$ – наименьший в B.

$\exists! x$ – наибольший в B.

$B^{\triangle}$(множество верхних граней B) $= \{x \in A \mid \forall y \in B \ y \leq x\}$

$B^{\triangledown}$(множество нижних граней B) $= \{x \in A \mid \forall y \in B \ x \leq y\}$

$(B \cup C)^{\triangle} = B^{\triangle} \cap C^{\triangle}$

$(B \cup C)^{\triangledown} = B^{\triangledown} \cap C^{\triangledown}$

$B \subseteq C \longrightarrow B^{\triangle} \subseteq C^{\triangle}$

$B \subseteq C \longrightarrow C^{\triangledown} \subseteq B^{\triangledown}$

$B \subseteq B^{\triangle\triangledown} \cap B^{\triangledown\triangle}$

$B^{\triangledown} = B^{\triangledown\triangle\triangledown}$

$B^{\triangle} = B^{\triangle\triangledown\triangle}$

$sup_{<} B =$ наименьший $B^{\triangle}$

$inf_{<} B =$ наибольший $B^{\triangledown}$

$(A, <)$ – решётка. $\Leftrightarrow \forall a, b \in A \ \exists \begin{cases} \sup\limits_{<} \{a, b\} \\ \inf\limits_{<} \{a, b\} \end{cases}$

$(A, <)$ – линейно упорядоченное множество. $\Leftrightarrow \forall x, y \in A \ \left[\begin{array}{l} x \leq y \\ y \leq x \end{array}\right.$

$(A, <)$ – линейно упорядоченное множество. $\longrightarrow \forall x, y \in A \ (\overline{x < y} \Leftrightarrow y \leq x)$

$(A, <)$ – линейно упорядоченное множество. $\longrightarrow (x$ – наименьший в $B \Leftrightarrow x \in min_{<} B)$

$$\begin{cases} (A, <) - \text{частично упорядоченное множество.} \\ C \subseteq A \\ (C, <) - \text{линейно упорядоченное множество.} \end{cases} \Leftrightarrow C - \text{цепь в } (A, <).$$

$$\forall x, y \in C \ \begin{cases} (A, <) - \text{частично упорядоченное множество.} \\ C \subseteq A \\ \overline{x < y} \\ \overline{y < x} \end{cases} \Leftrightarrow C - \text{антицепь в } (A, <).$$

$$\forall x, y \in A \ \begin{cases} \alpha : A \longrightarrow B \\ A \overset{\alpha}{\sim} B \\ (x <_A y \Leftrightarrow \alpha(x) <_{\beta} \alpha(y)) \end{cases} \Leftrightarrow (A, <_A) \overset{\alpha}{\cong} (\text{изоморфно}) \, (B, <_B)$$

$A \cong A$

$A \overset{\alpha}{\cong} B \longrightarrow B \overset{\alpha^{-1}}{\cong} A$

$\forall B \begin{cases} A \overset{\alpha}{\cong} B \\ B \overset{\beta}{\cong} C \end{cases} \longrightarrow A \overset{\alpha\circ\beta}{\cong} C$

$\begin{cases} P \subseteq A^2 \\ P - \text{рефлексивное.} \\ P - \text{симметричное.} \\ P - \text{транзитивное.} \end{cases} \Leftrightarrow P -$ отношение эквивалентности на A.

$Eq\,(A)$ – множество отношений эквивалентности на A.

$E \in Eq(A)\ id_A \subseteq E \subseteq A^2$

$\begin{cases} E \in Eq\,(A) \\ x \in A \end{cases} \Leftrightarrow [x]_E(\text{класс эквивалентности}) = \{y \in A \mid xEy\}$

$A/E(\text{фактор-множество мн-ва } A \text{ по отн-нию экв-сти } E) = \{\,[x]_E \in P(A) \mid x \in E\}$

$\forall B\ f : A \longrightarrow B\ ker\ f = \big\{\,(x, y) \in A^2 \;\big|\; f(x) = f(y)\big\}$

$f : A \longrightarrow B\ ker\ f \in Eq\,(A)$

$ker\ f = id \Leftrightarrow f -$ инъекция.

$E \in Eq(A)\ P_E : A \longrightarrow A/E\ P_E(x) = [x]_E$

$xEy \Leftrightarrow [x]_E = [y]_E$

$[x]_E = [y]_E \Leftrightarrow [x]_E \cap [y]_E = \varnothing$

$x \in [x]_E$

$\forall x \in A\ \exists \sigma \in \Sigma \begin{cases} \Sigma \subseteq \mathcal{P}\,(A) \\ x \in \sigma \\ \sigma \cap \tau = \varnothing \Leftrightarrow \sigma \neq \tau \\ \sigma \neq \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow \Sigma -$ разбиение A.

$\Pi\,(A)$ – множество разбиений A.

$Eq\,(A) \sim \Pi\,(A)$

Глава 5

Общая алгебра

$$\forall A,\ * \ \left(\begin{cases} * -\text{операция.} \\ * : A \times A \longrightarrow A \end{cases} \Leftrightarrow * - \text{бинарная операция на множестве } A.\right)$$

$$\forall A,\ * \ ((A, *) \Leftrightarrow * - \text{бинарная операция на множестве } A.)$$

$$\forall A,\ * \ ((A, *) \Leftrightarrow A - \text{группоид (магма).})$$

$$\forall A,\ * \ \left(\forall a,\ b,\ c \ \begin{cases} (*, A) \\ a, b \in A \longrightarrow a * b = b * a \end{cases} \Leftrightarrow * - \text{бинарная ассоциативная операция на множестве } A.\right)$$

$$\forall A,\ * \ \left(\forall a,\ b,\ c \ \begin{cases} (*, A) \\ a, b, c \in A \longrightarrow (a * b) * c = a * (b * c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} * -\text{бинарная коммутативная операция на} \\ \text{множестве } A. \end{matrix}\right)$$

$$\forall A,\ * \ \left(\begin{matrix} * -\text{бинарная ассоциативная операция} \\ \text{на множестве } A. \end{matrix} \Leftrightarrow A - \text{полугруппа относительно бинарной операции } * .\right)$$

$$\forall A,\ *,\ e \ \left(\forall a \ \begin{cases} (*, A) \\ e \in A \\ a \in A \longrightarrow e * a = a * e = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} e - \text{нейтральный элемент группоида } A \\ \text{относительно бинарной операции } * . \end{matrix}\right)$$

$$\forall A,\ *\ \left(\forall a\ (*, A) \Leftrightarrow \begin{matrix} e_A - \text{нейтральный элемент группоида } A \\ \text{относительно бинарной операции } *. \end{matrix}\right)$$

$$\forall A,\ *\ \left(\exists e\ \begin{cases} A - \text{полугруппа относительно бинарной операции } *. \\ e - \text{нейтральный элемент группоида } A \\ \text{относительно бинарной операции } *. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A - \text{моноид относительно} \\ \text{бинарной операции } *. \end{matrix}\right)$$

$$\forall A,\ *,\ a,\ b,\ e\ \left(\begin{cases} e - \text{нейтральный элемент группоида } A \\ a, b \in A \longrightarrow a * b = b * a = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - \text{обратимый элемент группоида } A \\ \text{относительно бинарной операции } *. \\ b - \text{обратный элемент группоида } A \\ \text{относительно бинарной операции } * \\ \text{и элемента } a. \end{cases}\right)$$

$$\forall A,\ *\ \left(\forall a\ \begin{cases} A - \text{моноид.} \\ a \in A \longrightarrow a - \text{обратимый элемент группоида } A \\ \text{относительно бинарной операции } *. \end{cases} \Leftrightarrow A - \text{группа.}\right)$$

$$\forall A,\ *\ \left(\begin{cases} (A, *) - \text{группа.} \\ * - \text{коммутативная операция.} \end{cases} \Leftrightarrow (A, *) - \text{абелева группа.}\right)$$

$$\forall *,\ n\ \ (S_n, *) - \text{симметрическая группа.}$$

$$\forall A,\ *\ \left(\forall a\ \exists b,\ n\ \begin{cases} (A, *) - \text{группа.} \\ a \in A \wedge b \in A \wedge n \in \mathbb{N} \longrightarrow a = b^n \end{cases} \Leftrightarrow (A, *) - \text{циклическая группа.}\right)$$

$$\forall A,\ B,\ *,\ \circ,\ f\ \left(\forall a,\ b\ \begin{cases} (A, *) \\ (B, \circ) \\ f : A \longrightarrow B \\ f(a * b) = f(a) \circ f(b) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{гомоморфизм относительно } (A, *) \text{ и } (B, \circ).\right)$$

$$\forall A,\ B,\ *,\ \circ,\ f\ \left(\left(\begin{cases} f - \text{гомоморфизм относительно } (A, *) \text{ и } (B, \circ). \\ (A, *) - \text{группа.} \\ (B, \circ) - \text{группа.} \end{cases} \Leftrightarrow \forall a\ \begin{cases} f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \\ f(e_A) = e_B \end{cases}\right)\right.$$

$$\forall A,\ B,\ *,\ \circ,\ f\ \ (f - \text{гомоморфизм относительно } (A, *) \text{ и } (B, \circ). \Leftrightarrow ker f = \{x \in A \mid f(x) = e_B\})$$

$\forall A,\ B,\ *,\ \circ,\ f\ \ (f -$ гомоморфизм относительно $(A, *)$ и $(B, \circ)$. $\Leftrightarrow ker f -$ ядро гомоморфизма f.)

$$\forall A,\ B,\ *,\ \circ,\ f\ \left(\begin{cases} f - \text{гомоморфизм относительно} \\ (A, *)\ \text{и}\ (B, \circ)\,. \\ f - \text{инъекция.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f - \text{мономорфизм относительно} \\ (A, *)\ \text{и}\ (B, \circ)\,. \end{array}\right)$$

$\forall f\ \ (\exists A\ ker f = \{e_A\} \Leftrightarrow f -$ мономорфизм.)

$$\forall A,\ B,\ *,\ \circ,\ f\ \left(\begin{cases} f - \text{гомоморфизм относительно} \\ (A, *)\ \text{и}\ (B, \circ)\,. \\ f - \text{сюрьекция.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f - \text{эпиморфизм относительно} \\ (A, *)\ \text{и}\ (B, \circ)\,. \end{array}\right)$$

$$\forall A,\ B,\ *,\ \circ,\ f\ \left(\begin{cases} f - \text{мономорфизм относительно} \\ (A, *)\ \text{и}\ (B, \circ)\,. \\ f - \text{эпиморфизм относительно} \\ (A, *)\ \text{и}\ (B, \circ)\,. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} f - \text{изоморфизм относительно} \\ (A, *)\ \text{и}\ (B, \circ)\,. \end{array}\right)$$

$$\forall A,\ B,\ *,\ \circ\ \left(\begin{array}{l} \exists f\ f - \text{изоморфизм относительно} \\ (A, *)\ \text{и}\ (B, \circ)\,. \end{array} \Leftrightarrow A\ \text{и}\ B\ \text{изоморфны.}\right)$$

$$\forall A,\ B,\ *,\ \circ\ \left(\begin{array}{l} \exists f\ f - \text{изоморфизм относительно} \\ (A, *)\ \text{и}\ (B, \circ)\,. \end{array} \Leftrightarrow A \simeq B\right)$$

$\forall A\ \ (A -$ группа. $\Leftrightarrow ord\ A =$ количество элементов A.)

$$\forall A,\ a\ \left(\begin{cases} a \in A \\ a \neq e_A \end{cases} \Leftrightarrow ord\ a = min\,\{n \in \mathbb{N} \mid a^n = e_A\}\right)$$

$\forall a\ ord\ a -$ порядок a.

$$\forall A,\ a\ \left(\begin{cases} A - \text{группа.} \\ a \in A \end{cases} \Leftrightarrow ord\ a \mid ord\ A\right)$$

$$\forall a,\ b,\ k\ \left(b^k \in <a> \longrightarrow ord\ b^k = \frac{ord\ <a>}{\text{НОД}(ord\ <a>, k)}\right)$$

$$\forall a,\ k\ \big(a^k \in <a> \longrightarrow \big(a^k = a \Leftrightarrow \text{НОД}(ord <a>, k) = 1\big)\big)$$

$$\forall A,\ B,\ *\ \left(\forall a,\ b\ \begin{cases}(A,*) - \text{группа.}\\ B \subseteq A\\ e_A \in B\\ a \in B \wedge b \in B \longrightarrow a * b \in B\\ a \in B \longrightarrow a^{-1} \in B\end{cases} \Leftrightarrow (B,*) - \text{подгруппа } A.\right)$$

$$\forall A,\ B,\ *\ \left(\begin{cases}(B,*) - \text{подгруппа } A.\\ B \neq \{e_A\}\\ B \neq A\end{cases} \Leftrightarrow (B,*) - \text{собственная подгруппа.}\right)$$

$$\forall A,\ B,\ *\ \left(\begin{cases}(B,*) - \text{подгруппа } A.\\ B = \{e_A\}\end{cases} \Leftrightarrow (B,*) - \text{тривиальная подгруппа.}\right)$$

$$\forall A\ \left(\forall B\ \begin{cases}A - \text{группа.}\\ B \notin A\\ B - \text{собственная.}\end{cases} \Leftrightarrow A - \text{простая группа.}\right)$$

$$\forall A,\ B,\ *,\ a\ \left(\begin{cases}(B,*) - \text{подгруппа } A.\\ a \in A \longrightarrow aB = \{c \in B \mid c = a * b \wedge b \in B\}\end{cases} \Leftrightarrow aB - \text{левый смежный класс.}\right)$$

$$\forall A,\ B,\ *,\ a\ \left(\begin{cases}(B,*) - \text{подгруппа } A.\\ a \in A \longrightarrow Ba = \{c \in B \mid c = b * a \wedge b \in B\}\end{cases} \Leftrightarrow Ba - \text{правый смежный класс.}\right)$$

$$\forall A,\ B,\ *\ \left(\forall a\ \begin{cases}(B,*) - \text{подгруппа } A.\\ aB = Ba\end{cases} \Leftrightarrow B - \text{нормальная подгруппа.}\right)$$

$$\forall A,\ B\ \ (B - \text{нормальная подгруппа } A. \Leftrightarrow B \lhd A)$$

$$\forall A,\ B,\ *\ \ ((B,*) - \text{подгруппа } A. \Leftrightarrow A : B = \text{количество множеств } \forall a\ aB.)$$

$$\forall A,\ B,\ *\ \ ((B,*) - \text{подгруппа } A. \Leftrightarrow A : B - \text{индекс подгруппы } B \text{ в } A.)$$

Теорема Лагранжа:

$$\forall A,\ B,\ *\ \ ((B,*) - \text{подгруппа } A. \Leftrightarrow |A| = |B|\,(A : B))$$

$$\forall G,\ H\ \left(\exists A,\ f\ \left(\begin{cases} f : G \longrightarrow A \\ f - \text{гомоморфизм.} \\ H = Ker\ f \end{cases}\right) \Leftrightarrow H - \text{нормальная подгруппа } G.\right)$$

$$\forall G,\ H\ \left(G/H \Leftrightarrow H - \text{нормальная подгруппа } G.\right)$$

$$\forall G,\ f\ \left(\exists A\ \begin{cases} f : G \longrightarrow A \\ f - \text{гомоморфизм.} \end{cases} \longrightarrow G/Ker\ f \simeq Im\ f\right)$$

$$\forall f\ \left(\exists A\ \begin{cases} f : A \longrightarrow A \\ f - \text{гомоморфизм.} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{эндоморфизм.}\right)$$

$$\forall f\ \left(\begin{cases} f - \text{изоморфизм.} \\ f - \text{эндоморфизм.} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{автоморфизм.}\right)$$

$Aut(G)$ – множество автоморфизмов G.

$$\forall f\ \left(\exists a\ \begin{cases} f - \text{автоморфизм.} \\ a \in dom\ f \\ f(x) = axa^{-1} \end{cases} \quad f - \text{внутренний автоморфизм.}\right)$$

$Inn(G)$ – множество внутренних автоморфизмов G.

$$\forall G,\ a\ \left(\forall b\ \begin{cases} a \in G \\ b \in G \longrightarrow ab = ba \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{центр } G.\right)$$

$Z(G)$ – множество центров G.

$\forall G\ G/Z(G) \simeq Inn(G)$

$\forall G,\ H\ ord\ G \times H = ord\ G\ ord\ H$

$\forall g,\ h\ ord\ (g,\ h) = \text{НОК}(ord\ g,\ ord\ h)$

$$\forall G,\ H\ \left(\begin{cases} \text{НОД}\,(ord\ G,\ ord\ H) = 1 \\ G - \text{циклическая.} \\ H - \text{циклическая.} \end{cases} \longrightarrow G \times H - \text{циклическая.}\right)$$

$$\forall G,\ H,\ n,\ m\ \left(\begin{cases}\text{НОД}(ord\ G,\ ord\ H) = 1\\ G - \text{циклическая.}\\ H - \text{циклическая.}\\ \text{НОД}(n,\ m) = 1\end{cases} \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})\right)$$

$\forall A\ \ (ord\ A =$ простое число $\longrightarrow A -$ циклическая)

$\forall n\ GL_n(\mathbb{R})$ (общая линейная группа) - множества всех невырожденных матриц размера n с операцией матричного умножения.

$\forall n\ SL_n(\mathbb{R})$ (специальная линейная группа) $= \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid det\ A = 1\}$

$\forall n\ D_n -$ группа диэдра (R_i - поворот, u_j - осевая симметрия).

$V_4 = D_2$

$$\forall K\ \left(\exists +,\ *\ \begin{cases}(K,\ +) - \text{абелева группа.}\\ (K,\ *) - \text{полугруппа.}\\ a,\ b,\ c \in K \longrightarrow \begin{cases}c(a+b) = ca + cb\\ (a+b)c = ac + bc\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow K - \text{кольцо.}\right)$$

$$\forall K\ \left(\forall k\ \begin{cases}\text{Корректность } + .\\ \text{Корректность } * .\\ 0 \in K\\ k \in K \longrightarrow k - \text{обратимый.}\end{cases} \Leftrightarrow K - \text{кольцо.}\right)$$

Во всех кольцах, кроме кольца с одним элементом, не существует обратного к нулю.

$\forall a\ \ (\exists n\ a^n = 0 \Leftrightarrow a -$ нильпотент.)

$$\forall a\ \left(\exists b\ \begin{cases}a \neq 0\\ b \neq 0\\ ab = 0\end{cases} \Leftrightarrow a - \text{делитель } 0.\right)$$

$$\forall b\ \left(\exists a\ \begin{cases}a \neq 0\\ b \neq 0\\ ab = 0\end{cases} \Leftrightarrow b - \text{делитель } 0.\right)$$

$$\forall R,\ I\ \left(\forall r,\ i\ \begin{cases} R - \text{кольцо.} \\ I - \text{подгруппа } R. \\ \begin{cases} i \in I \\ r \in R \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} ir \in I \\ ri \in I \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow I - \text{идеал } R.\right)$$

$$\forall I,\ R\ (I - \text{идеал } R. \Leftrightarrow I \lhd R)$$

$$\forall R,\ a\ \left(\begin{cases} R - \text{коммутативное кольцо с единицей.} \\ a \in R \end{cases} \Leftrightarrow <a> = aR - \text{главный идеал.}\right)$$

$$\forall I\ (I \lhd \mathbb{Z} \longrightarrow I - \text{главный.})$$

$$\forall K\ \left(\forall a,\ b\ \begin{cases} K - \text{кольцо.} \\ k \neq 0 \longrightarrow k - \text{обратимый.} \\ a,\ b \in K \longrightarrow ab = ba \end{cases} \Leftrightarrow K - \text{поле.}\right)$$

$$\forall k\ \left(\exists K\ \begin{cases} K - \text{поле.} \\ k \in K \end{cases} \Leftrightarrow k - \text{скаляр.}\right)$$

$$\forall K\ (K - \text{поле} \Leftrightarrow char\ K = \text{количество 1, которые нужно сложить, чтобы получился 0.})$$

$$\forall K\ \left[\begin{array}{l} char\ K - \text{простое.} \\ char\ K = 0 \end{array}\right.$$

$$\forall k\ \left(\exists K\ \begin{cases} K - \text{поле.} \\ k \in K \end{cases} \longrightarrow \overline{k - \text{делитель } 0.}\right)$$

$$\forall K\ \left(K - \text{конечное поле.} \longrightarrow \exists t\ |K| = (char\ K)^t\right)$$

$$\forall K\ \left(K - \text{конечное поле.} \longrightarrow \exists t\ |K| = (char\ K)^t\right)$$

Глава 6

Алгебраические выражения

Алгебраическое выражение - это выражение, состоящее из чисел, буквенных величин и алгебраических операций над ними.

Область допустимых значений (ОДЗ) - это множество всех наборов числовых значений букв, входящих в данное алгебраическое выражение.

Тождественно равные алгебраические выражения - это алгебраические выражения, имеющие равные ОДЗ и равные числовые значения на этом ОДЗ.

Одночлен - это алгебраическое выражение, состоящее из произведения числового коэффициента и буквенных величин.

Стандартный вид одночлена:

1. Один числовой коэффициент.
2. Нет повторяющихся буквенных величин.

Подобные одночлены - это одночлены, отличающиеся только числовыми коэффициентами.

Многочлен (полином) - это алгебраическое выражение, состоящее из суммы одночленов.

Стандартный вид многочлена:

1. Все одночлены стандартного вида.

2. Нет подобных одночленов.

Формулы сокращённого умножения:

1. Квадрат суммы.
   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Разность квадратов.
   $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

3. Куб суммы.
   $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

4. Сумма кубов.
   $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Неполный квадрат разности:

$a^2 - ab + b^2$

$$\forall n,\ k\ \left(\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{N} \\ k \leq n \end{cases} \longrightarrow C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$$

$$\forall n,\ k\ \left(\begin{cases} n \in \mathbb{C} \\ k \in \mathbb{N} \\ k \leq n \end{cases} \longrightarrow C_n^k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!}\right)$$

$$\forall n\ C_n^0 = 1$$

$$\forall n\ C_n^n = 1$$

$$\forall n,\ k\ C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

$$\forall x,\ n\ (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Бином Ньютона:

$$\forall a,\ b,\ n\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$\forall A,\ B,\ Q,\ R\ \left(\begin{cases} 0 \le deg\ R < deg\ Q \\ A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) - \text{частное при делении } A(x) \text{ на } B(x). \\ R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } B(x). \end{cases}\right)$$

$$\forall A,\ B,\ Q,\ R\ \left(\begin{cases} Q(x) - \text{частное при делении } A(x) \text{ на } B(x). \\ R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } B(x). \\ deg\ B < deg\ A \end{cases} \longrightarrow deg\ Q = deg\ A - deg\ B\right)$$

$$\forall A,\ B,\ Q,\ R\ \left(\begin{cases} Q(x) - \text{частное при делении } A(x) \text{ на } B(x). \\ R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } B(x). \\ deg\ A \le deg\ B \end{cases} \longrightarrow deg\ Q = 0\right)$$

$$\forall R,\ A,\ \alpha\ \left(R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } (x-\alpha). \longrightarrow R(x) = A(\alpha)\right)$$

Теорема Безу:

$$\forall R\ \left(\exists A,\ x,\ \alpha\ \begin{cases} R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } (x-\alpha). \\ \alpha - \text{корень } A. \end{cases} \longrightarrow R(x) = 0\right)$$

Основная теорема алгебры:

$$\forall A\ \exists z\ \left(\begin{cases} A(x) - \text{многочлен.} \\ z \in \mathbb{C} \end{cases} \longrightarrow z - \text{корень } A.\right)$$

$$\forall \{a_n\},\ \{x_n\}$$

$$\left(\begin{matrix} \exists P \\ \forall i \end{matrix}\ \begin{cases} P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \\ x_i - \text{корень } P(x). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}\right)$$

$$\forall A\ \ (0 < deg\ A \Leftrightarrow A - \text{нетривиальный.})$$

$$\forall A\ \left(\exists B,\ C\ \begin{cases} A(x) = B(x)C(x) \\ B - \text{нетривиальный.} \\ C - \text{нетривиальный.} \end{cases} \Leftrightarrow A(x) - \text{приводимый.}\right)$$

$$\forall A\ \ (deg\ A = 1 \longrightarrow A - \text{неприводимый над } \mathbb{C}.)$$

$$(1 < deg\ A \longrightarrow A - \text{приводимый над } \mathbb{C}.)$$

$$\forall A\ \exists \{z_n\},\ \{\alpha_n\},\ a,\ k\ \left(A(z) - \text{многочлен.} \longrightarrow \begin{cases} deg\ A = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \\ a - \text{старший коэффициент } A. \\ A(z) = a(z-z_1)^{\alpha_1}(z-z_2)^{\alpha_2}\ldots(z-z_k)^{\alpha_k} \end{cases}\right)$$

$$\forall A\,(deg\ A = 1 \longrightarrow A - \text{неприводимый над } \mathbb{R}.)$$

$$\forall A \ \left(\begin{cases} deg\ A = 2 \\ D(A) < 0 \end{cases} \longrightarrow A - \text{неприводимый над } \mathbb{R}. \right)$$

$$\forall A \left(\left[\begin{array}{l} 2 < deg\ A \\ D(A) < 0 \end{array} \right. \longrightarrow A - \text{приводимый над } \mathbb{R}. \right)$$

Глава 7

Измерения

Величина - это объект, который может быть охарактеризован числом в результате измерения.

Постоянная величина - это величина, множество значений которой состоит из одного элемента.

Переменная величина - это величина, множество значений которой состоит более чем из одного элемента.

Область изменения - это множество значений, принимаемых переменной величиной.

Глава 8

Последовательности

$\forall f\ \ (\exists A\ f : \mathbb{N} \longrightarrow A \Leftrightarrow f -$ последовательность.)

$$\forall{<}n{>}, {<}x_n{>},\ f\ \ \left(\begin{cases} f - \text{последовательность.} \\ f(n) = x_n \end{cases} \Leftrightarrow \{x_n\}\right)$$

$\forall{<}x_n{>}\ \ \{x_n\} -$ последовательность.

$\forall \{x_n\}\,(\forall k,\ l\ (k < l \longrightarrow x_k < x_l) \Leftrightarrow \{x_n\} -$ возрастающая последовательность.)

$\forall \{x_n\}\,(\forall k,\ l\ (k < l \longrightarrow x_k \geq x_l) \Leftrightarrow \{x_n\} -$ невозрастающая последовательность.)

$\forall \{x_n\}\,(\forall k,\ l\ (k < l \longrightarrow x_k > x_l) \Leftrightarrow \{x_n\} -$ убывающая последовательность.)

$$\forall \{x_n\} (\forall k,\ l\ (k < l \longrightarrow x_k \leq x_l) \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{неубывающая последовательность.})$$

$$\forall \{x_n\},\ M\ (\forall k\ \ |x_k| \leq M \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{ограниченная последовательность значением } M.)$$

$$\forall \{x_n\},\ M\ (\forall k\ x_k \leq M \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{ограниченная сверху последовательность значением } M.)$$

$$\forall \{x_n\},\ M\ (\forall k\ x_k \geq M \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{ограниченная снизу последовательность значением } M.)$$

$$\forall \{x_n\},\ a\ \ (\{x_n\} \rightrightarrows a \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{последовательность, стабилизирующаяся к } a.)$$

$$\forall \{x_n\},\ a\ \left(\exists k\ \forall m,\ l\ \begin{cases} x_m \in \mathbb{Z} \\ l > k \\ x_l = a \end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \rightrightarrows a\right)$$

$$\forall \{x_n\},\ M\ \left(\forall m\ \begin{cases} x_m \in \mathbb{Z} \\ \{x_n\} - \text{неубывающая последовательность.} \\ \{x_n\} - \text{ограниченная сверху последовательность значением } M. \end{cases} \longrightarrow \exists a\ \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \leq M \\ \{x_n\} \rightrightarrows a \end{cases}\right)$$

$$\forall \{x_n\},\ M,\ a\ \left(\forall m\ \begin{cases} x_m \in \mathbb{R} \\ \{x_n\} - \text{ограниченная сверху последовательность значением } M. \\ \text{каждая соответствующая цифра } \{x_n\} \\ \rightrightarrows \\ \text{каждая соответствующая цифра } a \end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \rightrightarrows a\right)$$

$$\forall {<}n{>}, {<}x_n{>},\ a\ \left(\begin{cases}\{x_n\}\\ x_n = a^{(n)}\end{cases} \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{последовательность десятичных приближений } a.\right)$$

$$\forall \{x_n\},\ a,\ b\ \left(\begin{cases}a \in \mathbb{R}\\ b \in \mathbb{R}\\ \{x_n\} = \left\{a^{(n)} + b^{(n)}\right\}\end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \rightrightarrows a + b\right)$$

$$\forall \{x_n\},\ a,\ b\ \left(\begin{cases}a \in \mathbb{R}\\ b \in \mathbb{R}\\ a > b > 0\\ \{x_n\} = \left\{a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n})\right\}\end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \rightrightarrows a - b\right)$$

$$\forall \{x_n\},\ a,\ b\ \left(\begin{cases}a \in \mathbb{R}\\ b \in \mathbb{R}\\ \{x_n\} = \left\{a^{(n)}b^{(n)}{}^{(n)}\right\}\end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \rightrightarrows ab\right)$$

$$\forall a,\ b\ \left(\begin{cases}a \in \mathbb{R}\\ b \in \mathbb{R}\\ \{x_n\} = \left\{\left(\dfrac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}}\right)^{(n)}\right\}\end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \rightrightarrows \frac{a}{b}\right)$$

$$\forall \{x_n\},\ a\ \left(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ стремится к } a \text{ как к своему пределу.}\right)$$

$$\forall \{x_n\},\ a\ \left(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall e\ \exists l\ \forall k\ \begin{cases}|a - x_k| < e\\ k > l\end{cases}\right)$$

$$\forall \{x_n\}, \ M \ \left(\forall m \ \begin{cases} x_m \in \mathbb{R} \\ x_m > 0 \\ \{x_n\} - \text{неубывающая последовательность.} \\ \{x_n\} - \text{ограниченная сверху} \\ \text{последовательность значением } M. \end{cases} \longrightarrow \exists a \ \begin{cases} a \leq M \\ \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \end{cases} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \ a \ \left(\forall m \ \begin{cases} x_m \in \mathbb{R} \\ \{x_n\} = \left\{ a^{(n)} \right\} \end{cases} \longrightarrow \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \right)$$

$$\forall \{x_n\} \left(\exists a \ \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{сходящаяся последовательность.} \right)$$

$$\forall \{x_n\} \left(\exists a \ \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \longrightarrow \{x_n\} - \text{ограниченная последовательность.} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \ a \ \left(\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \longrightarrow \exists l \ \forall k \ \left[\begin{array}{l} k > l \\ \begin{cases} a > 0 \\ x_k > \dfrac{a}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ x_k < \dfrac{a}{2} \end{cases} \end{array} \right) \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \ \{y_n\}, \ a, \ b \ \left(\forall k \ \begin{cases} \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} y_n = b \\ x_k \leq y_k \end{cases} \longrightarrow a \leq b \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \ \{y_n\}, \ \{z_n\}, \ a \ \left(\forall k \ \begin{cases} \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} z_n = a \\ x_k \leq y_k \leq z_k \end{cases} \longrightarrow \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} y_n = a \right)$$

$$\forall \{x_n\},\ a\ \left(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = a \longrightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} |x_n| = |a|\right)$$

$$\forall a,\ b\ \left(\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow |a+b| \le |a| + |b|\right)$$

$$\forall a,\ b\ \left(\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow |a-b| \ge ||a| - |b||\right)$$

$$\forall A,\ M\ \ (M = \sup A \Leftrightarrow M - \text{точная верхняя граница } A.)$$

$$\forall A,\ M\ \ (M = \inf A \Leftrightarrow M - \text{точная нижняя граница } A.)$$

$$\forall A,\ M\ \left(\forall x,\ M'\ \exists y\ \begin{cases} x \in A \\ x \le M \\ y \in A \\ M' < y \le M \end{cases} \Leftrightarrow M = \sup A\right)$$

$$\forall A,\ M\ \left(\forall x,\ M'\ \exists y\ \begin{cases} x \in A \\ x \ge M \\ y \in A \\ M' > y \ge M \end{cases} \Leftrightarrow M = \inf A\right)$$

$$\forall A\ \left(\forall B,\ C\ \begin{cases} B \in A \\ C \in A \\ \left[\begin{array}{l} B \subset C \\ C \subset B \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow A - \text{система вложенных отрезков.}\right)$$

$$\forall \{A_n\} \left(\forall i,\ j \begin{cases} i < j \\ A_j \subset A_i \end{cases} \Leftrightarrow \{A_n\} - \text{последовательность вложенных отрезков.} \right)$$

$$\forall \{A_n\} \left(\forall e\ \exists i \begin{cases} e \in \mathbb{R} \\ e > 0 \\ \{A_n\} - \text{последовательность} \\ \text{вложенных отрезков.} \\ |A_i| < e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \{A_n\} - \text{стягивающаяся последовательность} \\ \text{вложенных отрезков.} \end{matrix} \right)$$

$$\forall A \left(A - \text{система вложенных отрезков.} \longrightarrow \exists x\ \forall B \begin{cases} B \in A \\ x \in B \end{cases} \right)$$

Принцип полноты Кантора:

$$\forall \{A_n\} \left(\{A_n\} - \text{стягивающаяся последовательность вложенных отрезков.} \longrightarrow \exists x\ \forall i \begin{cases} x \in A_i \\ x \text{ единственен.} \end{cases} \right)$$

$$\forall \{x_n\},\ \{y_n\} \left(\begin{cases} \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = 0 \\ \{y_n\} - \text{ограниченная.} \end{cases} \longrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n y_n = 0 \right)$$

$$\forall \{x_n\},\ \{y_n\}\ \lim_{n \longrightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n + \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n$$

$$\forall \{x_n\},\ \{y_n\}\ \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n$$

$$\forall \{x_n\},\ \{y_n\}\ \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \longrightarrow \infty} y_n}$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\forall A,\ a\ \left(\exists \{x_n\}\ \forall n\ \begin{cases} x_n \in A \\ x_n \neq a \\ \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{предельная точка } A. \right)$$

Глава 9

Функции

$$\forall A,\ B,\ f\ \left(\begin{cases} f \subseteq A \times B \\ f - \text{функционально.} \\ f - \text{тотально для } A. \end{cases} \Leftrightarrow f : A \longrightarrow B\right)$$

$$\forall f\ \ (\exists A,\ B\ f : A \longrightarrow B \Leftrightarrow f - \text{функция.})$$

$$\forall f,\ x,\ y\ \left(\begin{cases} f : A \longrightarrow B \\ x \in A \\ xfy \end{cases} \Leftrightarrow y = f(x)\right)$$

$$\forall f,\ g\ \left(\begin{cases} f - \text{функция.} \\ g - \text{функция.} \end{cases} \longrightarrow \left(\forall x\ \begin{cases} dom\ f = dom\ g \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f = g\right)\right)$$

$$\forall A,\ B\ B^A = \{f \in P(A \times B) \mid f : A \longrightarrow B\}$$

$$\forall A,\ B,\ R\ \left(\begin{cases} R : A \longrightarrow B \\ R - \text{биекция.} \end{cases} \Leftrightarrow A \overset{R}{\sim} B\right)$$

$$\forall A,\ B\ \left(\exists R\ A \overset{R}{\sim} B \Leftrightarrow A \sim B\right)$$

$\forall A,\ B\ \ (A \sim B \Leftrightarrow A$ и B – равномощные.)

$$\forall A,\ B,\ R\ \ \left(\begin{cases} id_A \subseteq R^{-1} \circ R \\ id_B \subseteq R \circ R^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow A \overset{R}{\sim} B\right)$$

$\forall A\ \overline{A \sim P(A)}$

$$\forall A,\ f\ \overline{\begin{cases} f : A \longrightarrow P(A) \\ f - \text{сюрьекция.} \end{cases}}$$

$\forall n\ \underline{n} = \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$

$\forall A\ P(A) \sim \underline{2}^A$

$\forall A,\ n\ \ (n \in A \longrightarrow 1_A(n) = 1)$

$\forall A,\ n\ \ (n \notin A \longrightarrow 1_A(n) = 0)$

$\forall A\ 1_A$ – индикаторная функция.

$\forall A\ A \sim A$

$\forall A,\ B\ \ (A \sim B \longrightarrow \forall C\ A \times C \sim B \times C)$

$\forall A,\ B,\ C\ \ (A \sim B \Leftrightarrow B \sim A)$

$\forall A,\ B,\ C\ \ (A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$

$\forall A,\ B,\ C\ \ (A \times B)^C \sim A^C \times B^C$

$\forall A,\ B,\ C\ \ \left(C^B\right)^A \sim C^{B \times A}$

$$\forall A,\ B\ \ \left(\begin{cases} A \sim B \\ B \sim C \end{cases} \longrightarrow A \sim C\right)$$

$$\forall A,\ B,\ f\ \left(\begin{cases} f : A \longrightarrow B \\ f - \text{инъекция.} \end{cases} \Leftrightarrow A \overset{f}{\leq} B\right)$$

$$\forall A,\ B\ \left(\exists f\ A \overset{f}{\leq} B \Leftrightarrow A \leq B\right)$$

$$\forall A,\ B\ (A \leq B \Leftrightarrow A \text{ вложено в } B.)$$

Теорема Кантора-Бернштейна-Шрёдера:

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{cases} A \leq B \\ B \leq A \end{cases} \Leftrightarrow A \sim B\right)$$

$$\forall A\ A \leq A$$

$$\forall A,\ C\ \left(\exists B\ \begin{cases} A \leq B \\ B \leq C \end{cases} \longrightarrow A \leq C\right)$$

$$\forall A,\ B\ \left(A \leq B \Leftrightarrow \exists C\ \begin{cases} C \subseteq B \\ C \sim A \end{cases}\right)$$

$$\forall A,\ B\ (A \subseteq B \longrightarrow A \leq B)$$

$$\forall A,\ n\ (n \in \mathbb{N} \longrightarrow A^{\underline{n}} \sim A^n)$$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$$

$$\forall A\ (A - \text{счётно.} \Leftrightarrow A \sim \mathbb{N})$$

$$\forall N\ \overline{P(\mathbb{N}) - \text{счётно.}}$$

$$\underline{2}^{\mathbb{N}} \sim P(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

Принцип Дрихле:

$$\overline{\exists n\ \underline{n+1} \leq \underline{n}}$$

$$\forall m,\ n\ \left(m > n \longrightarrow \overline{\underline{m} \leq \underline{n}}\right)$$

$$\forall m,\ n\ \left(m \neq n \longrightarrow \overline{\underline{m} \sim \underline{n}}\right)$$

$$\forall A\ \exists! n\ \left(A \sim \underline{n} \longrightarrow A \sim \underline{n}\right)$$

$$\forall A\ \left(\exists n\ A \sim \underline{n} \Leftrightarrow A - \text{конечно.}\right)$$

$$\forall A\ \left(\overline{A - \text{конечно.}} \Leftrightarrow A - \text{бесконечно.}\right)$$

$$\forall A\ \left(\exists n\ A \sim \underline{n} \Leftrightarrow |A| = n\right)$$

$$\forall A\ \left(A - \text{счётно.} \Leftrightarrow |A| - \text{мощность множества.}\right)$$

$$\forall m,\ n\ \left(m < n \longrightarrow \overline{\exists f\ \begin{cases} f : \underline{m} \longrightarrow \underline{n} \\ f - \text{сюръекция.} \end{cases}}\right)$$

$$\forall A,\ B,\ f\ \left(\begin{cases} A \sim B \\ f : A \longrightarrow B \end{cases} \longrightarrow (f - \text{инъекция.} \Leftrightarrow f - \text{сюръекция.})\right)$$

$$\forall m,\ n\ \underline{m} \sim \underline{n} \longrightarrow m = n$$

$$\forall A\ \left(A \subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \left[\begin{matrix} A - \text{конечно.} \\ A - \text{счётно.} \end{matrix}\right.\right)$$

$$\forall B\ \left(\exists A\ \begin{cases} A - \text{счётно.} \\ A \lesssim B \end{cases} \Leftrightarrow B - \text{бесконечно.}\right)$$

$$\forall B\ \left(\exists A\ \begin{cases} A - \text{счётно.} \\ B \lesssim A \end{cases} \longrightarrow \left[\begin{matrix} B - \text{конечно.} \\ B - \text{счётно.} \end{matrix}\right.\right)$$

$$\forall B\ \left(\exists A\ \begin{cases} A - \text{конечно.} \\ B \lesssim A \end{cases} \longrightarrow B - \text{конечно.}\right)$$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{cases} A - \text{конечно.} \\ B \lesssim A \end{cases} \longrightarrow |B| \leq |A|\right)$$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{matrix} A - \text{счётно.} \\ \left[\begin{matrix} B - \text{счётно.} \\ B - \text{конечно.}\end{matrix}\right. \end{matrix} \longrightarrow A \cup B - \text{счётно.}\right)$$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{matrix} A - \text{бесконечно.} \\ \left[\begin{matrix} B - \text{счётно.} \\ B - \text{конечно.}\end{matrix}\right. \end{matrix} \longrightarrow A \cup B \sim A\right)$$

$$\forall A,\ f\ \left(\exists B\ \begin{cases} \left[\begin{matrix} A - \text{конечно.} \\ A - \text{счётно.}\end{matrix}\right. \\ f : A \longrightarrow B \end{cases} \longrightarrow f[A] \leq A\right)$$

$$\forall A\ \ (A - \text{конечно.} \longrightarrow \forall B\ A \cap B - \text{конечно.})$$

$$\forall A\ \ (A - \text{конечно.} \longrightarrow \forall B\ A \backslash B - \text{конечно.})$$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{cases} A - \text{конечно.} \\ B - \text{конечно.}\end{cases} \longrightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|\right)$$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{cases} A - \text{конечно.} \\ B - \text{конечно.}\end{cases} \longrightarrow max\,(|A|, |B|) \leq |A \cup B|\right)$$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{cases} A - \text{конечно.} \\ B - \text{конечно.}\end{cases} \longrightarrow |A \times B| = |A||B|\right)$$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{cases} A - \text{конечно.} \\ B - \text{конечно.}\end{cases} \longrightarrow |B^A| = |B|^{|A|}\right)$$

$$\forall A\ \left(A - \text{конечно.} \longrightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}\right)$$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{cases} A - \text{бесконечно.} \\ B - \text{конечно.}\end{cases} \longrightarrow A \backslash B - \text{бесконечно.}\right)$$

$$Inj\ (A, B) = \left\{ f : A \longrightarrow B \mid A \overset{f}{\lesssim} B \right\}$$

$$\forall A,\ B,\ A',\ B'\ \left(\begin{cases}A\sim A'\\ B\sim B'\end{cases}\longrightarrow Inj\ (A,B)\sim Inj\ (A',B')\right)$$

$$\forall n,\ m\ n^{(m)}=\frac{n!}{(n-m)!},m\le n$$

$\forall n,\ m\ A_n^m$ – количество размещений длины m n элементов.

$$\forall A,\ B,\ n,\ m\ |Inj\ (\underline{m},\underline{n})|=\begin{cases}0,m>n\\ n^{(m)},m\le n\end{cases}=A_n^m$$

$$Bij(A,B)=\left\{f:A\longrightarrow B\mid A\overset{f}{\sim}B\right\}$$

$$\forall A,\ B\ Bij\ (A,B)\sim Bij\ (A,A)$$

$\forall n\ P_n$ – количество перестановок из n.

$$\forall n\ |Bij\ (\underline{n},\underline{n})|=n!=P_n$$

$$\forall n,\ k\ C_n^k=\mathcal{P}_k(\underline{n})=\{x\in\mathcal{P}(\underline{n})\mid |x|=k\}$$

$\forall n,\ k\ C_n^k$ – количество сочетаний из n по k.

$$C_{n+1}^{k+1}=C_n^{k+1}+C_n^k$$

$$\forall n,\ k\ \left(k\le n\longrightarrow C_n^k=C_n^{n-k}\right)$$

$$\forall\{A_n\}\ |A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_n\le n}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

$$\forall m,\ n\ |Sur(\underline{m},\underline{n})|=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s C_n^s(n-s)^m$$

$$\forall A,\ f,\ n\ \left(f-\text{беспорядок на }\underline{n}\Leftrightarrow\forall x\ \begin{cases}x\in A\longrightarrow f(x)\ne x\\ f:A\longrightarrow A\end{cases}\right)$$

$Der(\underline{n}) = \{f : \underline{n} \longrightarrow \underline{n} \mid f$ – беспорядок на $\underline{n}\}$

$$|Der(\underline{n})| = n! \sum_{s=0}^{n} \frac{(-1)^s}{s!}$$

$$\forall f \ \left(\forall a,\ b\ f(a,b) = f(b,a) \longrightarrow \begin{array}{l} f - \text{фунция, обладающая коммутативным} \\ \text{(переместительным) свойством.} \end{array}\right)$$

$$\forall f \ \left(\forall a,\ b,\ c\ f(f(a,b),c) = f(a,f(b,c)) \longrightarrow \begin{array}{l} f - \text{фунция, обладающая ассоциативным} \\ \text{(сочетательным) свойством.} \end{array}\right)$$

$$\forall f,\ g \ \left(\forall a,\ b,\ c\ f(a,g(b,c)) = g(f(a,b),g(a,c)) \longrightarrow \begin{array}{l} f - \text{фунция, обладающая дистрибутивным} \\ \text{(распределительным) свойством с } g. \end{array}\right)$$

$\forall A \ (A \sim \mathbb{N} \Leftrightarrow A$ – счётное множество.)

$$\forall A,\ B \ \left(\forall a,\ b \ \begin{cases} a \in A \\ b \in B \\ a \le b \end{cases} \Leftrightarrow A \text{ лежит левее } B.\right)$$

$$\forall A,\ B,\ c \ \left(\forall a,\ b \ \begin{cases} a \in A \\ b \in B \\ c \ge a \\ c \le b \end{cases} \Leftrightarrow c \text{ разделяет } A \text{ и } B.\right)$$

$$\forall A \ \left(\forall B,\ C\ \exists a \ \begin{cases} B \subset A \\ C \subset A \\ a \in A \\ a \text{ разделяет } B \text{ и } C. \end{cases} \Leftrightarrow A - \text{полное.}\right)$$

Если разделяющих элементов в полном множестве больше одного, то их бесконечно много.

$$\forall f,\ g\ \left(\forall x\ \begin{cases} D(f)=D(g) \\ f(x)=g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f \text{ и } g - \text{совпадающие функции.}\right)$$

$$\forall f,\ x\ (f(x)=0 \Leftrightarrow x - \text{нуль (корень) функции f.})$$

$$\forall f\ \left(\forall x\ \begin{cases} f(-x)=f(x) \\ \exists a\ \left[\begin{array}{l} D(f)=(-a;a) \\ D(f)=[-a;a] \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{чётная функция.}\right)$$

$$\forall f\ \left(\forall x\ \begin{cases} f(-x)=-f(x) \\ \exists a\ \left[\begin{array}{l} D(f)=(-a;a) \\ D(f)=[-a;a] \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{нечётная функция.}\right)$$

$$\forall f\ \left(\begin{cases} \overline{f - \text{чётная функция.}} \\ \overline{f - \text{нечётная функция.}} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{общего вида функция.}\right)$$

$$\forall f,\ A\ \left(\forall x_1,\ x_2\ \begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{возрастающая функция на } A.\right)$$

$$\forall f,\ A\ \left(\forall x_1,\ x_2\ \begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{невозрастающая функция на } A.\right)$$

$$\forall f,\ A\ \left(\forall x_1,\ x_2\ \begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{убывающая функция на } A.\right)$$

$$\forall f,\ A\ \left(\forall x_1,\ x_2\ \begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{неубывающая функция на } A.\right)$$

$$\forall f,\ A\ \left(\left[\begin{array}{l} f - \text{функция убывающая на } A. \\ f - \text{функция возрастающая на } A. \end{array}\right. \Leftrightarrow A - \text{интервал монотонности } f.\right)$$

$$\forall f,\ x_0\ \left(\exists A\ \forall x\ \begin{cases} x \in A \\ x_0 \in A \\ f(x_0) \leq f(x) \end{cases} \Leftrightarrow x_0 - \text{точка минимума } f.\right)$$

$$\forall f,\ x_0\ \left(\exists A\ \forall x\ \begin{cases} x \in A \\ x_0 \in A \\ f(x_0) \geq f(x) \end{cases} \Leftrightarrow x_0 - \text{точка максимума } f.\right)$$

$$\forall f,\ x\ \left(\left[\begin{array}{l} x - \text{точка минимума } f. \\ x - \text{точка минимума } f. \end{array}\right. \Leftrightarrow x - \text{экстремум } f.\right)$$

Асимптота - это прямая линия, к которой график функции неограниченно приближается при удалении точки графика в бесконечность.

Исследование функции:

1. Область определения функции.

2. Область значений функции.

3. Нули функции.

4. Чётная, или нечётная, или общего вида функция.

5. Интервалы монотонности функции.

6. Экстремумы функции.

7. Асимптоты функции.

$$\forall {<}y{>},\ f,\ g\ (\forall x\ y = f(g(x)) \Leftrightarrow {<}y{>} - \text{сложная функция.})$$

$$\forall f,\ g\ (\forall x\ f(g(x)) = x \Leftrightarrow f - \text{обратная } g \text{ функция.})$$

Алгебраическая функция - это функция, закон соответствия которой определяется алгебраическим выражением. ($\overline{\textbf{трансцендентная функция}}$)

Элементарные функции - это основные элементарные функции и сложные функции, образованные из основных элементарных.

Основные элементарные функции:

1.
$$\forall {<}x{>},\ f,\ a\ \left(\begin{cases} f(x) = x^a \\ a \in R \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{степенная функция.}\right)$$

2.
$$\forall {<}x{>},\ f,\ a\ \left(\begin{cases} f(x) = a^x \\ a \in R \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{показательная функция.}\right)$$

3.

$$\forall <x>,\ f,\ a\ \left(\begin{cases} f(x) = \log_a^x \\ a \in R \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{логарифмическая функция.}\right)$$

4.

$$\forall <x>,\ f\ \left(\left[\begin{array}{l} f(x) = \sin x \\ f(x) = \cos x \\ f(x) = \tan x \\ f(x) = \cot x \end{array}\right. \Leftrightarrow f - \text{тригонометрическая функция.}\right)$$

5.

$$\forall <x>,\ f\ \left(\left[\begin{array}{l} f(x) = \arcsin x \\ f(x) = \arccos x \\ f(x) = \arctan x \\ f(x) = \operatorname{arccot} x \end{array}\right. \Leftrightarrow f - \text{обратная тригонометрическая функция.}\right)$$

$$\begin{array}{l}\forall <y>,\ <x>,\ P_i,\ n, \\ a_0,\ a_1,\ \dots\ ,\ a_n\end{array}\ \left(\begin{cases} y = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \\ a_0 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} <y> - \text{целая рациональная функция} \\ \text{(многочлен от переменной } <x>\text{) (ЦРФ) степени } n. \end{array}\right)$$

$$\forall <y>,\ <x>,\ f,\ a\ \left(\begin{cases} y = f(x) = ax \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} <y> \text{ прямо пропорционально } <x>. \\ \text{между } <y> \text{ и } <x> \text{ прямо пропорциональная зависимость.} \end{cases}\right)$$

$$\forall <y>,\ <x>,\ f,\ a,\ b\ \left(\begin{cases} y = f(x) = ax + b \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow <y> - \text{линейная ЦРФ (линейная функция).}\right)$$

$$\forall <y>,\ <x>,\ f,\ a,\ b\ \left(\begin{cases} y = f(x) = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} <y> - \text{квадратичная ЦРФ} \\ \text{(квадратный (квадратичный) трёхчлен).} \end{array}\right)$$

$$\forall\langle y\rangle,\ \langle x\rangle,\ f,\ a\ \left(\begin{cases} y=f(x)=\dfrac{a}{x} \\ a\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\langle y\rangle \text{ обратно пропорционально } \langle x\rangle. \\ \text{между } \langle y\rangle \text{ и } \langle x\rangle \text{ обратно пропорциональная зависимость.}\end{cases}\right)$$

$$\forall\langle y\rangle,\ x\ \left(y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\Leftrightarrow\langle y\rangle - \text{дробно-рациональная функция (ДРФ).}\right)$$

$$\forall\langle y\rangle,\ \langle x\rangle,\ a,\ b,\ c,\ d\ \left(\begin{cases} y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} \\ c\neq 0 \\ ad-bc\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\langle y\rangle - \text{дробно-линейная функция.}\right)$$

Алгебраическая иррациональная функция - это функция, закон соответствия которой содержит извлечение корня целой степени из алгебраического выражения, содержащего аргумент.

Определение предела функции по Гейне:

$$\forall f,\ a,\ b\ \left(\forall\{x_n\}\ \left(\forall i\ \begin{cases} x_i\in D(f) \\ x_i\neq a \\ \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} x_k=a\end{cases}\longrightarrow \lim_{k\longrightarrow\infty} f(x_k)=b\right)\Leftrightarrow\lim_{x\longrightarrow a} f(x)=b\right)$$

$$\forall f,\ a,\ b\ \left(\forall\{x_n\}\ \left(\forall i\ \begin{cases} x_i\in D(f) \\ x_i< a \\ \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} x_k=a\end{cases}\longrightarrow \lim_{k\longrightarrow\infty} f(x_k)=b\right)\Leftrightarrow\lim_{x\longrightarrow a-} f(x)=b\right)$$

$$\forall f,\ a,\ b\ \left(\forall\{x_n\}\ \left(\forall i\ \begin{cases} x_i\in D(f) \\ a< x_i \\ \lim\limits_{k\longrightarrow\infty} x_k=a\end{cases}\longrightarrow \lim_{k\longrightarrow\infty} f(x_k)=b\right)\Leftrightarrow\lim_{x\longrightarrow a+} f(x)=b\right)$$

$$\forall f,\ g,\ a\ \lim_{x\longrightarrow a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\longrightarrow a} f(x)+\lim_{x\longrightarrow a} g(x)$$

$$\forall f,\ g,\ a\ \lim_{x\longrightarrow a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\longrightarrow a} f(x) \lim_{x\longrightarrow a} g(x)$$

$$\forall f,\ g,\ a\ \lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\longrightarrow a} f(x)}{\lim_{x\longrightarrow a} g(x)}$$

$$\forall g,\ a,\ b\ \left(\exists f,\ h\ \forall i\ \begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow a} h(x) = b\\ f(i) \le g(i) \le h(i)\end{cases} \longrightarrow \lim_{x\longrightarrow a} g(x) = b\right)$$

$$\forall a\ \left(\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\longrightarrow a}\frac{1}{f(x)} = \infty\right)$$

$$\forall f,\ g,\ a,\ c\ \left(\exists b\ \begin{cases}\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = b\\ \lim\limits_{x\longrightarrow b} g(x) = c\end{cases} \longrightarrow \lim_{x\longrightarrow a} g(f(x)) = c\right)$$

$$\forall f,\ a\ \left(\left[\frac{\lim\limits_{x\longrightarrow a} f(x) = f(a)}{a - \text{предельная } D(f).}\right. \Leftrightarrow f - \text{непрерывна в точке } a.\right)$$

$$\forall f\ \exists\delta\ \forall x\ \left(\exists a\ \begin{cases}f - \text{непрерывная в } a.\\ \delta > 0\\ x \in O_\delta(a)\end{cases} \longrightarrow \exists b\ \ |f(x)| \le b\right)$$

$$\forall f\ \exists\delta\ \forall x\ \left(\exists a\ \begin{cases}f - \text{непрерывна в } a.\\ f(a) \ne 0\\ x \in O_\delta(a)\end{cases} \longrightarrow f(x) \ne 0\right)$$

$$\forall f,\ g,\ h,\ a\ \left(\begin{cases} f - \text{непрерывная в } a. \\ g - \text{непрерываня в } a. \\ h(x) = f(x) + g(x) \end{cases} \longrightarrow h(x) - \text{непрерывная в } a.\right)$$

$$\forall f,\ g,\ h,\ a\ \left(\begin{cases} f - \text{непрерывная в } a. \\ g - \text{непрерываня в } a. \\ h(x) = f(x)g(x) \end{cases} \longrightarrow h(x) - \text{непрерывная в } a.\right)$$

$$\forall f,\ g,\ h,\ a\ \left(\begin{cases} f - \text{непрерывная в } a. \\ g - \text{непрерываня в } a. \\ g(a) \neq 0 \\ h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{cases} \longrightarrow h(x) - \text{непрерывная в } a.\right)$$

$$\forall h,\ a\ \left(\exists f,\ g\ \begin{cases} f - \text{непрерывная в } a. \\ g - \text{непрерывная в } f(a). \\ h(x) = g(f(x)) \end{cases} \longrightarrow h - \text{непрерывная в } a.\right)$$

$$\forall f,\ d\ \exists c\ \left(\exists a,\ b\ \begin{cases} f \text{ непрерывна на } [a, b] \\ c \in (a, b) \\ d \text{ между } f(a) \text{ и } f(b) \end{cases} \longrightarrow d = f(c)\right)$$

$$\forall f,\ a\ \left(\exists b,\ c\ \begin{cases} f - \text{разрывная в } a. \\ \lim\limits_{x \longrightarrow a-} f(x) \neq \infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow a-} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \longrightarrow a+} f(x) \neq \infty \\ \lim\limits_{x \longrightarrow a+} f(x) = c \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{точка разрыва первого рода } f.\right)$$

$$\left(\exists b\ \begin{cases} a - \text{точка разрыва первого рода.} \\ \lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = b \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{точка устранимого разрыв.}\right)$$

$$\forall f,\ a\ \left(\begin{cases} f - \text{разрывная в } a. \\ \overline{a - \text{точка разрыва первого рода.}} \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{точка разрыва второго рода } f.\right)$$

Глава 10

Графы

$$\begin{cases} V \neq \varnothing \\ E \subseteq V^2 \\ E - \text{иррефлексивное} \\ E - \text{симметричное} \end{cases} \iff \begin{cases} (V, E) - \text{граф} \\ V - \text{множество вершин} \\ E - \text{отношение смежности} \end{cases}$$

$$\{x, y\} \in \mathcal{P}_2(V) - \text{ребро графа} \iff xEy$$

$$\mathcal{E} = \{\{x, y\} \in \mathcal{P}_2(V) \mid xEy\}$$

$$|\mathcal{E}| = \frac{|E|}{2} - \text{размер графа}$$

$$|V| - \text{порядок графа}$$

$$(n, m) \text{ граф} \iff \begin{cases} |V| = n \\ |\mathcal{E}| = m \end{cases}$$

$$\exists (n, m) \text{ граф} \iff \begin{cases} 0 \leq m \leq C_n^2 \\ 0 < n \end{cases}$$

$$K_n = (\overline{n}, n^2 \backslash id) - \text{полный граф}$$

$$N(x) = \{y \in V \mid xEy\} - \text{окрестность } x$$

$$d(x) = |N(x)| - \text{степень } x$$

$$|V| = n \implies d(x) \leq n - 1$$

Полный граф - это (n, C_n^2) граф.

Лемма о рукопожатиях:

$$\sum_{x\in V} d(x) = |E|$$

$$d(v_i) \geq d(v_{i+1}) \iff \{v_j\} - \text{степенная последовательность}$$

$$\begin{cases} \varphi : V_G \to V_H \\ V_G \sim V_H \\ xE_Gy \iff \varphi(x)E_H\varphi(y) \end{cases} \iff \varphi - \text{изоморфизм графов } G \text{ и } H$$

$$O_n = (\underline{n}, \varnothing) - \text{пустой граф}$$

$$P_n =$$

$$(\underline{n}, \{(0,1),(1,0),(1,2),(2,1),\ldots,(n-2,n-1),(n-1,n-2)\}) - \text{граф-путь (цепь)}$$

$$C_n = (\underline{n}, \{(0,1),(1,0),(1,2),(2,1),\ldots,(n-2,n-1),(n-1,0)\}) - \text{граф-цикл}$$

$$\begin{cases} V' \subseteq V \\ E' \subseteq E \end{cases} \iff (V', E') - \text{подграф } (V, E)$$

$$\begin{cases} V' \subseteq V \\ E' \subseteq E \cap V'^2 \end{cases} \iff (V', E') - \text{индуцированный подграф } (V, E)$$

$$\overline{G} = (V, (V^2 \setminus id_V) \setminus E) - \text{дополнение графа } G$$

$$G = (n, m) \text{ граф } \iff \overline{G} = (n, C_n^2 - m) \text{ граф}$$

$$V_1, \ldots, V_n - \text{путь} \iff \forall i \ V_iEV_{i+1}$$

Длина пути - это число рёбер.
Путь из x и y.
x соединён с x путём длины 0.

$$x \sim y \iff x, y \text{ соединены}$$

$$v_1, \ldots, v_n - \text{простой} \iff \forall i, j \ i \neq j \implies v_i \neq v_j$$

$$x \sim y \implies \exists v_1, \ldots, v_n \text{ простой путь между } x \text{ и } y$$

Простой путь - кратчайший путь.

$$\sim \in Eq(V)$$

$$[x]_\sim - \text{компонента связности}$$

$$|G/\sim| = 1 \iff G \text{ связен}$$

$$\begin{cases} v_1 = v_{n+1} \\ i \neq j \implies \{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\} \end{cases} \iff v_1, \ldots, v_n - \text{цикл}$$

В простом цикле только первая и последняя вершины совпадают.
Удалить ребро цикла в связенном графе $\implies$ количество компонент связности останется тем же.
Удалить ребро цикла в связенном графе $\implies$ количество компонент связности равно 2.

$$(n, m) - \text{связный граф} \implies n - 1 \leq m$$

Сумма степенной последовательности всегда чётная.
Граф минимально связен $\iff$ граф связен и удаление любого ребра даёт несвязный граф.
Удаление ребра в минимально связном графе даёт ровно два минимально связных графа.

(n, m) – минимально связный граф $\implies m = n - 1$

G – дерево $\iff \begin{cases} G \text{ связен} \\ G \text{ ацикличен} \end{cases}$

G – дерево

$\iff$

G – минимально связный граф

$\iff$

$\begin{cases} G \text{ связен} \\ m = n - 1 \end{cases}$

$\iff$

любые две вершины соединены ровно 1 простым путём

(V, E') – остовное дерево графа $(V, E) \iff E' \subseteq E$

В любом связном графе имеется остовное дерево.

$$(V,E) \text{ -- двудольный граф} \iff \exists V_1, V_2 \begin{cases} V = V_1 \cup V_2 \\ V_1 \cap V_2 = \varnothing \\ V_1 \neq \varnothing \neq V_2 \\ \forall i\ x, y \in V_i\ \overline{xEy} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c : V \to \underline{k} \\ \forall x, y\ xEy \implies c(x) \neq c(y) \end{cases} \iff c \text{ -- раскраска } (V,E) \text{ в } k \text{ цветов}$$

$$G \text{ -- } k\text{-дольный граф} \implies \begin{cases} \exists \text{раскраска } G \text{ в } k \text{ цветов} \\ \exists \text{раскраска } G \text{ в } k+1 \text{ цвет} \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} G = (V,E) \\ |V| \geq 2 \end{cases} \implies \begin{pmatrix} G \text{ -- двудольный граф} \\ \iff \\ \text{в } G \text{ нет цикла нечётной длины} \\ \iff \\ \text{в } G \text{ нет простого цикла нечётной длины} \end{pmatrix}$$

$$(n,m) \text{ -- двудольный граф} \implies m = \sum_{x \in V_1} d(x) = \sum_{x \in V_2} d(x)$$

$$A \subseteq V^2 \iff (V,A) \text{ -- ориентированный граф}$$

$$\begin{cases} (V,A) \text{ -- ориентированный граф} \\ \overline{xAx} \\ \forall x, y \in V\ x \neq y \implies \big(xAy \iff \overline{yAx}\big) \end{cases} \iff (V,A) \text{ -- турнир}$$

Глава 11

Беспредельный

$Seq = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Δ – разностный оператор

$\Delta : Seq \to Seq$

$(\Delta a)_n = a_{n+1} - a_n$

$\Delta^0 a = a$

$\Delta^{t+1} a = \Delta(\Delta^t a)$

$(\Delta^t a)_n = \sum\limits_{k=0}^{t} (-1)^k C_t^k a_{n+t-k}$

Seq образует векторное пространство над полем $\mathbb{R}$

$(a+b)_n = a_n + b_n$

$(\alpha a)_n = \alpha a_n$

Δ – линейный оператор

S – оператор сдвига

$(Sa)_n = a_{n+1}$

1 – тождественный оператор

$1a = a$

0 – константный оператор

$0a = 0$

$\sum$ –оператор суммы

Lim – множестве линейных операторов $Seq \to Seq$

$\left(\sum a\right)_0 = 0$

$\left(\sum a\right)_{n+1} = \left(\sum a\right)_n + a_n$

$(P+Q)(a) = Pa + Qa$

$(\alpha P)(a) = \alpha(Pa)$

$PQ = P \circ Q$

$(Lim, +, *)$ – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$

$\Delta = S - 1$

$\Delta^t = \sum\limits_{k=0}^{t} C_t^k (-1)^k S^{t-k}$

$a_{k+n} = \sum\limits_{t=0}^{n} \frac{(\Delta^t a)_k}{t!} n^{(t)}$

$n^{(0)} = 1$

a удовлетворяет рекуррентному соотношению φ порядка $k \geq 1$

$\iff$

$\begin{cases} \varphi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ a_{n+k} = \varphi(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \ldots, a_n, n) \end{cases}$

φ – стационарное $\iff$ φ не зависит от n

Если есть рекуррентное соотношение и начальные условия, то последовательность однозначно задана.

$$a_n = p(n) - \text{многочлен степени } m > 0 \implies a_{n+m+1} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_{n+1}^{k+1} a_{n+m-k}$$

$$\Delta(a_n b_n) = a_n \Delta b_n + b_{n+1} \Delta a_n$$

$$\sum (a_n \Delta b_n) = (a_n b_n - a_0 b_0) - \sum (b_{n+1} \Delta a_n)$$

Глава 12

Числа

Числовое кольцо - это множество чисел, результат суммы, разности, произведения любых чисел которого принадлежит ему тоже.

Числовое поле - это множество чисел, результат выполнения рациональных действий над любыми числами которого принадлежит ему тоже.

12.1 Натуральные числа (N)

$+$ – операция на числах, обладающая коммутативным свойством.

$+$ – операция на числах, обладающая ассоциативным свойством.

$*$ – операция на числах, обладающая коммутативным свойством.

$*$ – операция на числах, обладающая ассоциативным свойством.

$*$ – операция на числах, обладающая дистрибутивным свойством с $+$.

Делитель a - это число, на которое a делится без остатка.

Кратное a - это всякое число, которое делится на a без остатка.

$$\forall a \ \left(\forall b \ \begin{cases} a > 1 \\ b|a \longrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \pm 1 \\ b = \pm a \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{простое.} \right)$$

$$\forall a \ \left(\overline{a - \text{простое.}} \Leftrightarrow a - \text{составное.}\right)$$

Простых чисел имеется бесконечное множество.

$$\forall n,\ \{p_n\} \ \left(\exists \{\alpha_n\} \ \forall i \ \left(\begin{cases} i \in \mathbb{N} \\ \alpha_i \in \mathbb{N} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \{p_n\} - \text{все попарно различные простые числа.} \\ n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0 \\ n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots \end{cases} \right) \Leftrightarrow \right.$$
$$\left. p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots - \text{разложениена простые множители } n. \right)$$

Основная теорема арифметики:

$\exists ! {<}n{>} \ {<}n{>} -$ разложение на простые множители n.

$$\forall a,\ b \ (\text{НОД}(a, b) = 1 \Leftrightarrow a, b - \text{взаимно однозначные.})$$

$$\forall a \ (a|2 \Leftrightarrow a - \text{чётное.})$$

Признаки делимости в 10-й системе счисления:

1. Признак делимости на 2: последняя цифра в записи числа выражает чётное число.
2. Признак делимости на 3: сумма цифр записи числа делится на 3.
3. Признак делимости на 4: последние две цифры в записи числа выражают число, делящееся на 4.
4. Признак делимости на 5: последняя цифра в записи числа является 0 или 5.
5. Признак делимости на 9: сумма цифр записи числа делится на 9.

$\forall a,\ b$ НОД(a, b) НОК$(a, b) = ab$

12.2 Целые числа (Z)

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Целое алгебраическое выражение - это алгебраическое выражение, в котором используют только сложение, вычитание, умножение.

Положительное число - это число, большее нуля.

Отрицательное число - это число, меньшее нуля.

Противоположные числа - это числа, отличающиеся знаком.

$a - b = a + (-b)$

$a(-b) = -ab$

Неравенство Бернули:

$$\forall x,\ n \ \left(\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \geq -1 \\ n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0 \end{cases} \longrightarrow (1+x)^n \geq 1 + nx \right)$$

$\forall a,\ b\ (a|b \Leftrightarrow a$ делит $b.)$

$$\forall a,\ b\ \left(a|b \Leftrightarrow \exists c\ \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z} \\ c \in \mathbb{Z} \\ b = ac \end{cases}\right)$$

$$\forall a,\ b\ \left(a|b \Leftrightarrow \exists \{\alpha_n\},\ \{\beta_n\}\ \left(\exists \{p_n\} \begin{cases} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots - \text{разложение на простые множители } a \\ p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots - \text{разложение на простые множители } b \end{cases} \longrightarrow \forall i\ \alpha_i \leq \beta_i\right)\right)$$

$$\forall a\ a|a$$

$$\forall a,\ b\ \left(\begin{cases} a|b \\ b|a \end{cases} \longrightarrow a = \pm b\right)$$

$$\forall a,\ b,\ c\ \left(\begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases} \longrightarrow a|c\right)$$

$$\forall a,\ b,\ c\ \left(\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \longrightarrow a|(b \pm c)\right)$$

$$\forall a,\ b\ \left(\begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N} \\ b \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \exists! c,\ d\ \begin{cases} d \in \mathbb{N} \\ c \in \mathbb{N} \\ a = bd + c \\ 0 \leq c < |b| \end{cases}\right)$$

$$\forall a,\ b,\ c\ \ (a \equiv b\ (mod\ c) \Leftrightarrow c|(a-b))$$

$$\forall a,\ b,\ c\ \ (a \equiv b\ (mod\ c) \Leftrightarrow a\%c = b\%c)$$

$$\forall a,\ b,\ c,\ d,\ i\ \ \left(\begin{cases} a \equiv b\ (mod\ i) \\ c \equiv d\ (mod\ i) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d\ (mod\ i) \\ ac \equiv bd\ (mod\ i) \end{cases}\right)$$

$$\forall a,\ b,\ c,\ d\ \ \big(a \equiv b\ (mod\ c) \longrightarrow a^d \equiv b^d\ (mod\ c)\big)$$

$$\forall a,\ b,\ d\ \ \left(\begin{cases} d|a \\ d|b \\ \forall d'\ \ \begin{cases} d'|a \\ d'|b \end{cases} \longrightarrow d'|d \end{cases} \Leftrightarrow d - \text{НОД}(a,b).\right)$$

$$\begin{matrix}\forall \{p_n\},\ \{\alpha_n\}, \\ \{\beta_n\},\ a,\ b\end{matrix}\ \ \left(\begin{cases} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots - \text{разложение на простые} \\ \text{множители } a \\ p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots - \text{разложение на простые} \\ \text{множители } b \end{cases} \longrightarrow \text{НОД}(a,b) = p_1^{min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{min(\alpha_2,\beta_2)} \ldots\right)$$

$$\forall a,\ b,\ d\ \ \left(\begin{cases} a|d \\ b|d \\ \forall d'\ \ \begin{cases} a|d' \\ b|d' \end{cases} \longrightarrow d|d' \end{cases} \Leftrightarrow d - \text{НОК}(a,b).\right)$$

$$\text{НОД}(0,0) = 0$$

$$\forall a\ \text{НОД}(a, 0) = a$$

$$\forall a,\ b,\ q\ q \in \mathbb{Z} \longrightarrow \text{НОД}(a + bq, b) = \text{НОД}(a, b)$$

$$\forall a,\ b\ \text{НОД}(a\%b, b) = \text{НОД}(a, b)$$

$$\forall a,\ b\ \text{НОД}\left(\frac{a}{\text{НОД}(a, b)}, \frac{b}{\text{НОД}(a, b)}\right) = 1$$

$$\forall a,\ c\ \left(\exists b\ \begin{cases} a|bc \\ \text{НОД}(a, b) = 1 \end{cases} \longrightarrow a|c\right)$$

$$\forall x,\ y,\ m\ \left(\exists a\ \begin{cases} \text{НОД}(a, m) = 1 \\ ax \equiv ay\ (mod\ m) \end{cases} \longrightarrow x \equiv y\ (mod\ m)\right)$$

$$\forall x,\ y,\ m\ (\exists a\ ax \equiv ay\ (mod\ am) \Leftrightarrow x \equiv y\ (mod\ m))$$

Тождество Безу:

$$\forall a,\ b\ (\text{НОД}(a, b) = 1 \longrightarrow \exists x,\ y\ ax + by = 1)$$

$$\forall a,\ b\ \left(\exists x,\ y\ \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \longrightarrow ax + by = \text{НОД}(a, b)\right)$$

$$\forall a,\ m\ \ (\exists x\ ax \equiv 1\ (mod\ m) \Leftrightarrow \text{НОД}(a, m) = 1)$$

$$\forall {<}x{>}\ \varphi(x) - \text{функция Эйлера.}$$

$$\forall {<}x{>}\ \varphi(x) = \text{количество чисел взаимно простых с } x\ \ 1, 2, \ldots, x - 1.$$

$$\forall x\ \ (x - \text{простое.} \longrightarrow \varphi(x) = x - 1)$$

$$\forall a,\ b\ \ (\text{НОД}(a, b) = 1 \longrightarrow \varphi(a, b) = \varphi(a)\varphi(b))$$

Теорема Эйлера:

$$\forall a,\ x\ \ \left(\begin{cases}\text{НОД}(a, x) = 1\\ x > 1\end{cases} \longrightarrow a^{\varphi(x)} \equiv 1\ (mod\ x)\right)$$

$$\forall x,\ y,\ a\ \ \left(\begin{cases}a \in \mathbb{Z}\\ x \geq 0\\ y \geq 0\\ \text{НОД}(a, m) = 1\\ x \equiv y\ (mod\ \varphi(m))\end{cases} \longrightarrow a^x \equiv a^y\ (mod\ m)\right)$$

Малая теорема Ферма:

$$\forall a,\ p\ \ \left(\begin{cases}p - \text{простое.}\\ \text{НОД}(a, p) = 1\end{cases} \longrightarrow a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)\right)$$

$$\forall p,\ a\ \ (p - \text{простое.} \longrightarrow a^p \equiv a\ (mod\ p))$$

$$\begin{matrix}\forall \left\{p_n\right\},\ \left\{\alpha_n\right\}, \\ \left\{\beta_n\right\},\ a,\ b\end{matrix} \quad \left(\begin{cases} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots - \text{разложение на простые} \\ \text{множители } a \\ p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots - \text{разложение на простые} \\ \text{множители } b \end{cases} \longrightarrow \text{НОК}(a,b) = p_1^{max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{max(\alpha_2,\beta_2)} \ldots \right)$$

Алгоритм Евклида:

$$\text{НОД}(a,b) = \text{НОД}(a\ \%\ b, b) = \text{НОД}(a\ \%\ b, b\ \%\ (a\ \%\ b)) = \ldots = \text{НОД}(\ldots, 0)$$

Расширенный алгоритм Евклида:

$$\begin{cases} r_t = au_t + bv_t \\ r_t = r_{t-2} - r_{t-1}q_{t-1} \\ r_0 = a \\ r_1 = b \\ u_t = u_{t-2} - u_{t-1}q_{t-1} \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ v_t = v_{t-2} - v_{t-1}q_{t-1} \\ v_0 = 0 \\ v_1 = 1 \end{cases}$$

$$\forall {<}x{>},\ {<}y{>},\ b,\ c \quad \left(\exists a \begin{cases} ax + by = c \\ a = 0 \\ b \mid c \end{cases} \longrightarrow \forall t \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{c}{b} \end{cases} \right)$$

$$\forall \langle x\rangle,\ \langle y\rangle,\ a,\ b,\ c\ \left(\begin{cases} ax+by=c \\ a\neq 0 \\ b\neq 0 \\ \text{НОД}(a,b)\mid c \end{cases} \longrightarrow \exists a',\ b',\ c',\ u,\ v\ \forall t\ \begin{cases} a'=\dfrac{a}{\text{НОД}(a,b)} \\ b'=\dfrac{b}{\text{НОД}(a,b)} \\ c'=\dfrac{c}{\text{НОД}(a,b)} \\ a'u+b'v=1 \\ x=uc'-b't \\ y=vc'+a't \\ t\in\mathbb{Z} \end{cases}\right)$$

$$\forall a,\ b,\ c\ \left(\exists \langle x\rangle,\ \langle y\rangle\ \begin{cases} ax+by=c \\ \overline{\text{НОД}(a,b)\mid c} \end{cases} \longrightarrow \forall t,\ k\ \left(\begin{cases} t\in\mathbb{Z} \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \longrightarrow \overline{at+bk=c}\right)\right)$$

$$\forall A,\ m,\ x'\ \left(\begin{cases} A(x)\equiv 0\ (mod\ m) \\ 0\leq x'<m \end{cases} \Leftrightarrow x' - \text{решение сравнения } A(x)\equiv 0\ (mod\ m).\right)$$

$$\forall a,\ c,\ m\ (\exists x'\ x' - \text{решение } ax\equiv c\ (mod\ m) \Leftrightarrow \text{НОД}(a,m)\mid C)$$

$$\begin{matrix}\forall \langle x\rangle, \\ a,\ c,\ m\end{matrix}\ \left(\begin{cases} ax\equiv c\ (mod\ m) \\ \text{НОД}(a,m)\mid c \end{cases} \longrightarrow \exists a',\ c',\ m'\ \forall t\ \left(\begin{cases} t\in\mathbb{Z} \\ 0\leq t<\text{НОД}(a,m) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a'=\dfrac{a}{\text{НОД}(a,m)} \\ c'=\dfrac{c}{\text{НОД}(a,m)} \\ m'=\dfrac{m}{\text{НОД}(a,m)} \\ x=a^{-1}c'\ \%\ m'+m't \end{cases}\right)\right)$$

$$\begin{matrix}\forall \langle x\rangle, \\ \{c_n\}, \\ \{m_n\}\end{matrix}\ \left(\begin{cases} x\equiv c_1\ (mod\ m_1) \\ x\equiv c_2\ (mod\ m_2) \\ \vdots \\ x\equiv c_n\ (mod\ m_n) \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix}\exists\{M_n\}, \\ \{x_n\}, \\ \{b_n\} \\ \forall i\end{matrix}\ \begin{cases} M_i=m_1m_2\dots m_{i-1}m_{i+1}\dots m_n \\ x_i - \text{решение } M_ib_i\equiv c_i \\ x=(x_1M_1+x_2M_2+\dots+x_nM_n)\ \%\ m_1m_2\dots m_n \end{cases}\right)$$

12.3 Рациональные числа (Q)

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Рациональное число - это число, представимое в виде $\frac{a}{b}$, где числитель $a \in Z$, а знаменатель $b \in N$.

Рациональные числа образуют поле.

$\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Арифметические (рациональные) действия: сложение, вычитание, умножение, деление.

Рациональное алгебраическое выражение - это алгебраическое выражение, в котором используют только рациональные действия.

Дробное алгебраическое выражение - это рациональное алгебраическое выражение, в записи которого используют деление на буквенные выражения.

Алгебраическая дробь - это это алгебраическое выражение, имеющее вид частного от деления двух целых алгебраических выражений.

Дробное число - это рациональное число, числитель которого не делится на знаменатель нацело.

Целая часть числа - это наибольшее целое число, не превосходящее данного ($[x]$) .

Дробная часть числа - это разность между данным числом и его целой частью ((x)) .

$x - [x] \geq 0$

$x - [x] < 1$

Разложение рационального числа на сумму целой и дробной частей взаимно однозначно.

Десятичная дробь - это дробь, у которой знаменатель представляет собой натуральную степень числа 10.

Всякое рациональное число может быть представлено бесконечной десятичной периодической дробью взаимно однозначно.

12.4 Иррациональные числа (I)

Всякое иррациональное число может быть представлено бесконечной десятичной непериодической дробью взаимно однозначно.

Иррациональные алгебраические выражения - это алгебраическое выражение, в записи которого используются знаки радикала из буквенного выражения.

Корень находится в простейшей форме, если:

1. Он не содержит иррациональности в знаменателе.
2. Нельзя сократить его показатель с показателем подкоренного выражения.
3. Все возможные множители вынесены из-под корня.

Подобные корни - это корни, отличающиеся только коэффициентами.

12.5 Действительные числа (R)

$Q \subset R$

$I \subset R$

Действительные числа образуют поле.

Множество действительных чисел упорядочено.

Множество действительных чисел непрерывно.

$\mathbb{R}$ – полное.

Аксиома Архимеда:

$$\forall a \exists n \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N} \\ na \geq 1 \end{cases}$$

$$\forall x,\ y\ \left(\begin{cases} x < y \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \exists z,\ w\ \begin{cases} z \in \mathbb{Q} \\ w \in \mathbb{I} \\ x < z < y \\ x < w < y \end{cases} \right)$$

Всякое десятичное число определяет действительное число взаимно однозначно.

$$\forall a\ \left(\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ a \geq 0 \end{cases} \longrightarrow |a| = a \right)$$

$$\forall a\ \left(\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ a < 0 \end{cases} \longrightarrow |a| = -a \right)$$

Многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение линейных двучленов вида $x - a$ и квадратных трёхчленов вида $x^2 + px + q$.

n-ая степень числа a - это произведение n сомножителей, равных a. (a^n)
a - основание степени.
n - показатель степени.

Возведение отрицательного числа в иррациональную степень не определено.

Возведение нуля в не положительную степень не определено.

$$a^x = a^y \longrightarrow x = y$$

Корень n-ой степени из числа a - это число, n-ая степень которого равна a. ($\sqrt[n]{a}$)

Извлечение корня степени из a - это отыскание корня из a.

Арифметический корень (арифметическое значение корня) - это положительный корень чётной степени из положительного числа.

Корень чётной степени по умолчанию арифметический.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[n]{a^n} = a \\ n \text{ - нечётное.}\end{cases} \\ \begin{cases}\sqrt[n]{a^n} = |a| \\ n \text{ - чётное.}\end{cases}\end{array}\right.$$

Квадратный корень:

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$$

Кубический корень:

$$\sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$$

Логарифм числа N по основанию a - это показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить N.

$$\begin{cases}a^{\log_a N} = N \\ N > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1\end{cases}$$

Если число и основание логарифма лежат по одну сторону от единицы, то этот логарифм положителен, и наоборот.

Потенцирование - это возведение числа, от которого взят логарифм, в этот логарифм.

Если основание больше единицы, то большее число имеет больший логарифм.

Если основание меньше единицы, то большее число имеет меньший логарифм.

Десятичный логарифм - это логарифм по основанию 10.

$$\log_{10} N = \lg N$$

Характеристика - это целая часть десятичного логарифма.

Мантисса - это дробная часть десятичного логарифма.

Открытый интервал (интервал) (a; b) - это множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x \leq b$.

Окрестность точки $\mathbf{x_0}$ $(\mathbf{x_0 - h; x_0 + h})$ - это интервал длины 2h серединой x_0 .

$$\forall a,\ e\ (a - e; a) \cup (a; a + e) - \text{проколотая } e\text{-окрестность точки } a.$$

Замкнутый интервал (отрезок) [a; b] - это множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$.

Полуоткрытый интервал [a; b) или (a; b] - это множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$ соответственно.

Бесконечный интервал $(\mathbf{a}; \infty)$, или $[\mathbf{a}; \infty)$, или $(\infty; \mathbf{b})$, или $(\infty; \mathbf{b}]$, или $(\infty; \infty)$ - это множество действительных чисел x, удовлетворяющих $a < x$, или $a \leq x$, или $x < b$, или $x \leq b$, или $x \in R$ соответственно. ($\overline{\textbf{конечный интервал}}$)

$$\forall a,\ b\ \ |[a; b]| - \text{длина отрезка } [a; b].$$

$$\forall a,\ b\ \ |[a;b]| = b - a$$

$$\forall A,\ a,\ b\ \ \big(A = [a;b] \longrightarrow \overline{A - \text{счётное множество.}}\big)$$

Мощность $[0;1]$ – мощность континуума.

$$\forall C,\ B\ \left(\left(\forall A,\ a\ \begin{cases} A - \text{интервал.} \\ A \subset B \\ a \in A \end{cases} \longrightarrow a \in C\right) \Leftrightarrow C \text{ всюду плотно в } B.\right)$$

12.6 Комплексные числа (C)

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Комплексные числа образуют поле.

Комплексное число:

$$z = a + bi$$

a - действительная часть
b - мнимая часть или коэффициент при мнимой единице.
$i^2 = -1$

Алгебраические действия: рациональные действия и извлечение корня.

$z_1 = z_1$, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

$a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, если $z_1 = z_2$.

Чисто мнимое число - это комплексное число, у которого действительная часть равна нулю.

Комплексно сопряжённые числа z и $\overline{\mathbf{z}}$ - это два комплексных числа, действительные части которых равны, а мнимые противоположны.

$$z = \overline{\overline{z}}$$

$$z\overline{z} = a^2 + b^2$$

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{(z_1 + z_2)}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(z_1 z_2)}$$

Значения многочлена при комплексного сопряжённых значениях комплексно сопряжены между собой.

Если многочлен имеет комплексный корень, то и сопряжённое число является его корнем.

Если $P_n(z) = (z-\alpha)^k P_{n-k}(z)$, P_{n-k} не делится на $z-\alpha$ нацело, то k - кратность корня α .

Сумма кратности корней равна степени многочлена.

Если $P_n(z) = (z-\alpha)^k P_{n-k}(z)$, P_{n-k} не делится на $z-\alpha$ нацело и $k = 1$, то корень α однократный (простой).

Если $P_n(z) = (z-\alpha)^k P_{n-k}(z)$, P_{n-k} не делится на $z-\alpha$ нацело и $k > 1$, то корень α кратный.

Абсолютная величина (модуль) z:

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

Алгебраическая форма комплексного числа:

$$z = a + bi$$

Тригонометрическая форма комплексного числа:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

r - модуль.
ϕ - аргумент.

Главное значение аргумента:

$$arg z$$

$$\begin{cases} arg z \geq 0 \\ arg z < 2\pi \end{cases}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2))$$

Формула Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$$

$$\forall z,\ r,\ n,\ \varphi\ \left(z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \longrightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

$$\forall\varphi\ \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

Глава 13

Матрицы

$$\forall m,\ n\ \left(\begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow M_{m \times n} - \text{множество матриц размера (порядка) } m \text{ на } n.\right)$$

$$\forall A,\ m,\ n\ \left(\begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \\ A - \text{множество.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} M_{m \times n}(A) - \text{множество матриц размера (порядка) } m \text{ на } n, \\ \text{элементы которых принадлежат } A. \end{array}\right)$$

$\forall n\ M_n = M_n$

$\forall n\ M_n$ – множество квадратных матриц размера (порядка) n.

$\forall A,\ n\ M_n(A) = M_n(A)$

$\forall A,\ n\ M_n(A)$ – множество квадратных матриц размера (порядка) n, элементы которых принадлежат A.

$$\forall A,\ m,\ n\ \ (A \in M_{m\times n} \Leftrightarrow A = A_{m\times n}.)$$

$$\forall A\ \ (A \in M_n \Leftrightarrow A_n = A_n)$$

$$\forall A,\ m,\ n\ \left(A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \in M_{m\times n} \right)$$

$$\forall A,\ i,\ j\ \left(\exists m,\ n\ \begin{cases} A \in M_{m\times n} \\ i \in \mathbb{N} \\ i \le m \\ j \in \mathbb{N} \\ j \le n \end{cases} \Leftrightarrow [A]_{ij} - \text{элемент матрицы с индексами i и j.} \right)$$

$$\forall A,\ n\ \left[\begin{array}{l} A_n - \text{столбец } n \text{ матрицы } A. \\ A_n - \text{строка } n \text{ матрицы } A. \end{array} \right.$$

$$\forall A\ \ (\exists m\ A \in M_{m\times 1} \Leftrightarrow A - \text{матрица-строка (вектор-строка).})$$

$$\forall A\ \ (\exists n\ A \in M_{1\times n} \Leftrightarrow A - \text{матрица-столбец (вектор-столбец).})$$

$$\forall A\ \ (A = 0 \Leftrightarrow A - \text{нулевая.})$$

$\forall A\ (\forall i,\ j\ [A]_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = 0)$

$\forall B\ (\forall A\ AB = BA = A \Leftrightarrow B$ – единичная.)

E – единичная матрица.

$\forall i,\ j\ \ (i \neq j \Leftrightarrow [E]_{ij} = 0)$

$\forall i,\ j\ \ (i = j \Leftrightarrow [E]_{ij} = 1)$

$\forall i,\ j\ E_{ij}$ – матричная единичка.

$$\forall i,\ j,\ k,\ l\ \left(\begin{cases} k \neq i \\ l \neq j \end{cases} \Leftrightarrow [E_{ij}]_{kl} = 0\right)$$

$$\forall i,\ j,\ k,\ l\ \left(\begin{cases} k = i \\ l = j \end{cases} \Leftrightarrow [E_{ij}]_{kl} = 1\right)$$

$\forall A\ (\exists \lambda\ A = \lambda E \Leftrightarrow A$ – скалярная (диагональная).)

$\forall A\ (\exists n\ A^n = 0 \Leftrightarrow A$ – нильпотентная.)

$$\forall A,\ B,\ m,\ n\ \left(\forall i,\ j\ \begin{cases} A_{m\times n} \\ B_{m\times n} \\ [A]_{ij} = [B]_{ij} \end{cases} \Leftrightarrow A = B\right)$$

$\forall A\ A^T$ – транспонированная.

$$\forall A,\ B\ \left(\forall i,\ j\ [A]_{ij} = [B]_{ji} \Leftrightarrow B = A^T\right)$$

$$\forall A,\ n\ \left(A = A_n \longrightarrow \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T\right)$$

$\forall A,\ B\ \left(B = \widetilde{A} \Leftrightarrow B\right.$ – союзная к $\left.A.\right)$

$\forall A\ (AB = E \Leftrightarrow B$ – обратная к $A.)$

$\forall A,\ B\ \left(B = A^{-1} \Leftrightarrow B\right.$ – обратная к $\left.A.\right)$

$\forall A\ (A$ – обратная. $\longrightarrow \exists n\ A \in M_n)$

$$\forall A\ A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{detA}$$

13.1 Операции над матрицами

$$\forall A,\ B,\ m,\ n,\ i,\ j\ \left(\begin{cases} A \in M_{m\times n} \\ B \in M_{m\times n}\end{cases} \longrightarrow [A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}\right)$$

$+$ – операция на матрицах, обладающая коммутативным свойством.

$+$ – операция на матрицах, обладающая ассоциативным свойством.

$$\forall A,\ \lambda,\ i,\ j\ \ (\lambda \in \mathbb{F} \longrightarrow [\lambda A]_{ij} = \lambda [A]_{ij})$$

$*$ – операция на матрице и числе, обладающая ассоциативным свойством.

$*$ –операция на матрице и числе, обладающая дистрибутивным свойством с $+$ относительно матриц и относительно чисел.

$$\forall \{\lambda_n\}\ A,\ B,\ i,\ j\ \ (B = \lambda_i A_i + \ldots + \lambda_j A_j \longrightarrow B - \text{линейная комбинация } A_i, \ldots, A_j.)$$

$$\forall \{\lambda_n\},\ A,\ B,\ i,\ j\ \left(\exists k\ \begin{cases} B = \lambda_i A_i + \ldots + \lambda_j A_j \\ \lambda_k \neq 0 \end{cases} \longrightarrow B - \text{нетривиальная.}\right)$$

$$\forall A,\ i,\ j\ \left(\exists B\ \begin{cases} B - \text{линейная комбинация } A_i, \ldots, A_j. \\ B - \text{нетривиальная.} \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A_i, \ldots, A_j - \text{линейно зависимые.}\right)$$

$$\forall A,\ i,\ j\ \left(\overline{A_i, \ldots, A_j - \text{линейно зависимые.}} \Leftrightarrow A_i, \ldots, A_j - \text{линейно независимые.}\right)$$

$$\forall A,\ B,\ m,\ r,\ n,\ i,\ j\ \left(\begin{cases} A \in M_{m\times r} \\ B \in M_{r\times n} \end{cases} \longrightarrow [AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{r} [A]_{ik}[B]_{kj}\right)$$

$*$ – операция на матрицах, обладающая ассоциативным свойством.

$*$ – операция на матрицах, обладающая дистрибутивным свойством с $+$.

$$\forall A,\ B\ (AB)^T = B^T A^T$$

$$\forall A,\ B\ (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Элементарные преобразования матриц:

1. Перестановка местами любых двух строк или столбцов матрицы.

   (a) Переставить местами i и j строки - это единичную матрицу, где переставили местами i и j строки или столбцы, умножить на матрицу.

   (b) Переставить местами i и j столбцы - это умножить матрицу на единичную матрицу, где переставили местами i и j строки или столбцы.

2. Умножение любой строки или столбца матрицы на константу, отличную от нуля.

   (a) Умножить строку i на константу, отличную от нуля, - это единичную матрицу, где i строку или столбец умножили на эту константу, умножить на матрицу.

(b) Умножить столбец i на константу, отличную от нуля, - это умножить матрицу на единичную матрицу, где i строку или столбец умножили на эту константу.

3. Прибавление к любой строке или столбцу матрицы этой матрицы другой строки или столбца, умноженной на некоторую константу.

   (a) Прибавить к строке i строку j, умноженную на константу, - это единичную матрицу, где прибавили к i строке строку j, умноженную на константу, умножить на матрицу.

   (b) Прибавить к столбцу i столбец j, умноженный на константу, - это умножить матрицу на единичную матрицу, где прибавили к i столбцу столбец j, умноженный на константу.

13.2 Перестановки

$$\forall \{a_r\},\ a,\ n\ \left(\forall k,\ l\ \begin{cases} a_k \in \mathbb{N} \\ a_k \neq n \\ k \neq l \longrightarrow a_k \neq a_l \\ a = a_1, a_2, \dots, a_n \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{перестановка.}\right)$$

$$\forall f,\ n\ \left(\begin{cases} (f(1), f(2), \dots, f(n)) - \text{перестановка.} \\ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{подстановка.}\right)$$

$$\forall n\ \ (n \in \mathbb{N} \longrightarrow S_n - \text{множество подстановок длины } n.)$$

$$\forall f\ \left(\forall i\ \exists n\ \begin{cases} f \in S_n \\ f(f(\dots f(i)\dots)) = i \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{цикл (циклическая подстановка).}\right)$$

$$\forall f\ \left(\begin{cases} f \in S_2 \\ f - \text{цикл.} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{транспозиция.}\right)$$

$$\forall f,\ n\ \left(n - \text{сумма инверсий первой и второй строки подстановки } f. \longrightarrow sgn f = (-1)^n\right)$$

$$\forall f\ \left(\begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ \text{Сумма инверсий первой и второй строки } f \text{ чётна.} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{чётная.}\right)$$

$$\forall f,\ g\ \left(\begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ g - \text{подстановка.} \end{cases} \longrightarrow fg - \text{умножение (композиция) подстановок.}\right)$$

$$\forall f,\ g\ \left(\begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ g - \text{подстановка.} \end{cases} \longrightarrow fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(g(1)) & f(g(2)) & \dots & f(g(n)) \end{pmatrix}\right)$$

$$\forall f,\ g\ \left(\begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ g - \text{подстановка.} \end{cases} \longrightarrow sgn(fg) = sgn f * sgn g\right)$$

$$\forall f\ \left(f - \text{подстановка.} \longrightarrow \begin{cases} d(f) - \text{декремент.} \\ d(f) = \text{длина } f - \\ \text{(число независимых циклов } f + \\ \text{количество символов, оставляемых на месте).} \\ d(f) = \text{количество действительно перемещаемых символов} - \\ \text{количество независимых циклов.} \\ d(f) = \text{сумма длин циклов} - \text{количество циклов.} \end{cases}\right)$$

$$\forall f\ \left(f - \text{подстановка.} \longrightarrow sgn f = (-1)^{d(f)}\right)$$

id – подстановка.

id – тождественная.

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\forall f \; f^{-1} = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \dots & f(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\forall n, \; k \; \big(k \in \mathbb{N} \longrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)^{nk} = id\big)$$

При возведении подстановки в степень, кратную НОКу длин всех её циклов, будет получаться тождественная подстановка.

13.3 Определители

$\forall A \; detA$ – определитель A.

$$\forall A, \; n \; \left(A \in M_n \longrightarrow detA = \sum_{f \in S_n} sgnf * [A]_{1f(1)} * [A]_{2f(2)} * \dots * [A]_{nf(n)}\right)$$

$\forall A \; \; (detA = 0 \Leftrightarrow A$ – вырожденная.)

$\forall A \; \; (detA \neq 0 \Leftrightarrow A$ – невырожденная.)

$\forall A \; detA^T = detA$

$$\forall A,\ A',\ i\ det(A_1,\ldots,A'_i+A''_i,\ldots,A_n)=det(A_1,\ldots,A'_i,\ldots,A_n)+det(A_1,\ldots,A''_i,\ldots,A_n)$$

$$\forall A,\ A',\ i,\ \lambda\ det(A_1,\ldots,\lambda A'_i,\ldots,A_n)=\lambda det(A_1,\ldots,A'_i,\ldots,A_n)$$

$$\forall A,\ i,\ j\ det(A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_j,\ldots,A_n)=-det(A_1,\ldots,A_j,\ldots,A_i,\ldots,A_n)$$

$$\forall A\ \ (\exists i\ A_i=0\longrightarrow detA=0)$$

$$\forall A\ \ (\exists k,\ l\ A_k=A_l\longrightarrow detA=0)$$

$\forall A\ \ (\exists i\ A_i -$ линейная комбинация остальных. $\longrightarrow detA=0)$

$$\forall\left\{\lambda_n\right\},\ A\ det(A_1,A_2,\ldots,A_i,\ldots,A_n)=$$
$$det(A_1,A_2,\ldots,A_i+(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\ldots+\lambda_{i-1}A_{i-1}+\lambda_{i+1}A_{i+1}+\ldots+\lambda_nA_n),\ldots,A_n)$$

$$detE=1$$

Разложение по строке:

$$\forall A,\ j,\ n\ \left(A=A_n\longrightarrow detA=\sum_{i=1}^{n}[A]_{ij}A_{ij}\right)$$

Разложение по столбцу:

$$\forall A,\ i,\ n\ \left(A = A_n \longrightarrow detA = \sum_{j=1}^{n}[A]_{ij}A_{ij}\right)$$

Фальшивое разложение:

$$\forall A,\ n,\ k,\ i\ \left(\begin{cases}A \in M_n\\ k \neq i\end{cases} \longrightarrow \sum_{j=0}^{n}[A]_{ij}A_{kj} = 0\right)$$

$$\forall A,\ n,\ k,\ i\ \left(\begin{cases}A \in M_n\\ k \neq j\end{cases} \longrightarrow \sum_{i=0}^{n}[A]_{ij}A_{ik} = 0\right)$$

$$\forall A,\ n\ \left(\begin{cases}A = A_n\\ \text{Под главной диагональю } A \text{ только нули.}\end{cases} \longrightarrow detA = \prod_{i=1}^{n}[A]_{ii}\right)$$

10) Если A и B – квадратные матрицы, то для блочной матрицы: $\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B\end{array}\right) = \det A \cdot \det B$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{cases}A \in M_n\\ B \in M_n\end{cases} \longrightarrow det(AB) = detA\ detB\right)$$

$$det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1}\end{vmatrix} \text{– определитель Вандермонда.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

$$\forall A \ \left(\exists B \ B = A^{-1} \Leftrightarrow detA \neq 0\right)$$

13.4 Миноры, алгебраические дополнения и ранги

$$\forall B,\ M,\ k \ \left(\exists A \begin{cases} A - \text{матрица из элементов матрицы } B, \\ \text{стоящих на пересечении } k \text{ строк и } k \text{ столбцов.} \\ M = detA \end{cases} \Leftrightarrow M - \text{минор } k \text{ порядка матрицы } B.\right)$$

$$\forall B,\ M \ \left(\exists A \begin{cases} A - \text{матрица, на главной диагонали которой стоят} \\ \text{только все или не все элементы} \\ \text{главной диагонали } B. \\ M = detA \end{cases} \Leftrightarrow M - \text{главный минор матрицы } B.\right)$$

$\forall A \ RgA$ – ранг A.

$\forall A \ RgA =$ наибольший порядок отличного от 0 минора матрицы A.

$\forall A \ RgA =$
максимальное число линейно независимых строк =
максимальное число линейно независимых столбцов.

$\forall A,\ A'$ (A' – матрица, полученная из A элементарными преобразованиями. $\longrightarrow RgA = RgA'$)

$$\forall A \ \left(\exists n \ \begin{cases} A \in M_n \\ RgA = n \end{cases} \Leftrightarrow detA \neq 0\right)$$

$$\forall A \ \left(\exists n \ \begin{cases} A \in M_n \\ A_1, A_2, \ldots, A_n - \text{линейно независимые.} \end{cases} \Leftrightarrow detA \neq 0\right)$$

$$\forall A, \ M \ \left(\begin{cases} M - \text{минор порядка } RgA \text{ матрицы } A. \\ M \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow M - \text{базисный минор матрицы } A.\right)$$

$$\forall A, \ i \ (A_i - \text{то, из чего составлен базисный минор матрицы } A. \longrightarrow A_i - \text{базисный.})$$

$$\forall A, \ i \ \left(\overline{A_i - \text{базисный.}} \longrightarrow A_i - \text{линейная комбинация базисных матрицы } A.\right)$$

$$\forall M, \ M' \ \left(\exists A \ \begin{cases} M - \text{минор матрицы } A. \\ M' - \text{минор, составленный} \\ \text{из тех же строк и столбцов, что и } M, \\ \text{и добавленных одной строки и одного столбца} \\ \text{матрицы } A. \end{cases} \Leftrightarrow M' - \text{окаймляющий минор } M.\right)$$

$$\forall A, \ M, \ k \ \left(\begin{cases} M - \text{минор } k \text{ порядка матрицы } A. \\ \text{Все окаймляющие миноры минора } M = 0 \end{cases} \longrightarrow RgA = k\right)$$

$$\forall A, \ B, \ M \ \left(\begin{cases} A - \text{матрица из элементов матрицы } B, \\ \text{кроме строк и столбцов } B, \\ \text{из которых составлен минор } M. \\ M' = detA \end{cases} \Leftrightarrow M' - \text{дополнительный минор к минору } M.\right)$$

$$\forall M,\ M^* \left(\exists A,\ \alpha,\ n \begin{cases} A = A_n \\ \alpha = \text{сумма номеров строк и столбцов } A, \\ \text{из которых составлен минор } M. \\ M' - \text{дополнительный минор к минору } M. \\ M^* = (-1)^{\alpha} M' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} M^* - \text{алгебраическое дополнение} \\ \text{к минору } M. \end{matrix} \right)$$

$\forall A,\ i,\ j\ M_{ij}$ – минор элемента $[A]_{ij}$ матрицы A.

$$\forall A,\ n,\ i,\ j\ \left(\begin{cases} A = A_n \\ A - \text{матрица из элементов матрицы } B, \\ \text{кроме строки } i \text{ и столбца } j. \end{cases} \Leftrightarrow det A = M_{ij} \right)$$

$\forall A,\ i,\ j\ A_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента $[A]_{ij}$.

$$\forall A,\ i,\ j\ A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

13.5 Форматы матриц

Ведущий элемент - это первый ненулевой элемент строки.

Ступенчатый вид матрицы - это матрица, номера столбцов ведущих элементов которой возрастают, а нулевые строки, если они есть, расположены внизу.

Улучшенный (приведённый, канонический) ступенчатый вид матрицы - это ступенчатый вид матрицы, в котором все ведущие элементы - единицы, над которыми в столбце все элементы - нули.

Любую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

$$\forall A,\ B,\ C\ \left(\exists m,\ r,\ n\ \begin{cases} B \in M_{m\times r} \\ C \in M_{r\times n} \\ r = RgB = RgC \\ A = BC \end{cases} \Leftrightarrow BC - \text{скелетное разложение } A.\right)$$

$$\forall A,\ B,\ C\ \left(\exists m,\ r,\ n\ \begin{cases} B - \text{нижняя треугольная матрица матрицы.} \\ C - \text{верхняя треугольная матрица матрицы.} \\ A = BC \end{cases} \Leftrightarrow BC - \text{LU разложение } A.\right)$$

$$\forall A\ (A - \text{строго регулярная.} \Leftrightarrow A - \text{имеет LU разложение.})$$

13.6 СЛАУ относительно матриц

$$\forall a\ \left(\begin{cases} a - \text{СЛАУ.} \\ a - \text{имеет решение.} \end{cases} \longrightarrow a - \text{совместная.}\right)$$

$$\forall a\ \left(\begin{cases} a - \text{СЛАУ.} \\ a - \text{не имеет решений.} \end{cases} \longrightarrow a - \text{несовместная.}\right)$$

$$\forall A,\ x,\ b\ \left(Ax = b - \text{СЛАУ.} \longrightarrow \forall i\ \begin{cases} \Delta_i = det(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, B, Ai+1, \ldots, A_n) \\ \Delta = detA \\ x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} \end{cases}\right)$$

$$\forall A,\ x,\ b\ \left(\exists i\ \begin{cases} Ax = b - \text{СЛАУ.} \\ \Delta = 0 \\ \Delta_i \neq 0 \end{cases} \longrightarrow Ax = b - \text{несовместная.}\right)$$

$$\forall A,\ x,\ b\ \left(\begin{cases} Ax = b - \text{СЛАУ.} \\ \Delta \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} Ax = b - \text{совместная.} \\ Ax = b - \text{имеет единственное решение.} \end{cases}\right)$$

Теорема Кронекера-Капелли:

$$\forall A,\ b\ \left(RgA = Rg(A|b) \Leftrightarrow \exists x\ Ax = b - \text{совместная.}\right)$$

$$\forall A,\ l,\ n\ \left(\begin{cases} A_l, A_{l+1}, \ldots, A_{l+n-RgA-1} - \text{л.н.з. столбцы.} \\ A_l, A_{l+1}, \ldots, A_{l+n-RgA-1} - \text{решения } Ax = 0. \\ n - \text{число неизвестных.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} A_l, A_{l+1}, \ldots, A_{l+n-RgA-1} - \\ \text{фундаментальная система} \\ \text{решений (ФСР) } Ax = 0. \end{matrix}\right)$$

$$\forall A,\ x\ \left(Ax = 0 \longrightarrow \exists C\ C - \text{ФСР } Ax = 0.\right)$$

$$\forall C,\ x\ \exists n\ \left(\exists m\ C_{m\times n} - \text{ФСР } Ax = 0. \longrightarrow x = \alpha_1 C_1 + \ldots + \alpha_n C_n.\right)$$

$$\forall C,\ x\ \exists \left\{\alpha_n\right\},\ n\ \left(\exists m\ \begin{cases} C_{m\times n} - \text{ФСР } Ax = 0. \\ Ax' = b \end{cases} \longrightarrow x' + \alpha_1 C_1 + \ldots + \alpha_n C_n - \text{все решения } Ax = b.\right)$$

Глава 14

Векторы

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\ \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - \text{лежат на одной прямой или на параллельных.} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - \text{коллинеарны.}\right)$$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\ \left(\begin{matrix}\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} - \text{лежат на прямых,} \\ \text{параллельных некоторой плоскости.}\end{matrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} - \text{компланарны.}\right)$$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\ \left(\begin{cases}\overrightarrow{a} \upuparrows \overrightarrow{b} \\ |\overrightarrow{a}| = \left|\overrightarrow{b}\right|\end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}\right)$$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\ \left(\begin{cases}\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \\ \text{Начало } \overrightarrow{a},\ \text{начало } \overrightarrow{b} \text{ лежат на одной прямой.}\end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - \text{скользящие.}\right)$$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\ \left(\begin{cases}\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \\ \text{Начало } \overrightarrow{a} = \text{начало } \overrightarrow{b}\end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} - \text{связанные.}\right)$$

$+$ – операция на векторах, обладающая коммутативным свойством.

$+$ – операция на векторах, обладающая ассоциативным свойством.

$*$ – операция на векторе и числе, обладающая коммутативным свойством.

$*$ – операция на векторе и числе, обладающая ассоциативным свойством.

$*$ –операция на векторе и числе, обладающая дистрибутивным свойством с $+$ относительно векторов и относительно чисел.

$\forall \overrightarrow{b} \ \left(\overrightarrow{b} \neq 0 \Leftrightarrow \exists \overrightarrow{a} \ \ |a| * \cos\angle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)\right.$ – ортогональная проекция $\overrightarrow{a}$ на направление $\left.\overrightarrow{b}.\right)$

Ортогональная проекция уважает сложение векторов.

Ортогональная проекция уважает умножение вектора на число.

$\forall \overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{b} \ \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi$

$\forall \overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{b} \ \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right)$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\ \left(\alpha \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \alpha \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\ \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) + \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$$

$$\forall \overrightarrow{a}\ \ (\overrightarrow{a} \neq 0 \Leftrightarrow 0 < (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}))$$

$$\forall \overrightarrow{a}\ \ (\overrightarrow{a} = 0 \Leftrightarrow 0 = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}))$$

$$\forall \overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{a_k}\ \left(\forall \overrightarrow{b}\ \begin{cases} \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k} - \text{л.н.з.} \\ \overrightarrow{b} - \text{линейная комбинация } \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k}. \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k} - \text{базис.}\right)$$

$$\forall \overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \ldots,\ \overrightarrow{a_k}\ \left(\forall \overrightarrow{b}\ \begin{cases} \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k} - \text{базис} \\ i = j \longrightarrow (a_i, a_j) = 1 \\ i \neq j \longrightarrow (a_i, a_j) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_k} - \text{ортонормированный базис (ОНБ).}\right)$$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\ \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + \ldots \ \text{ в ОНБ.}$$

Γ – матрица Грама.

$$\forall \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3}\ \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} - \text{базис.} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}) \\ (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) \\ (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}) & (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}) & (\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3}) \end{pmatrix} = \Gamma\right)$$

$$\forall \ldots \left(\begin{cases} \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} - \text{базис.} \\ \overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3} \end{cases} \longrightarrow \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\forall \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\ \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} - \text{ортогональный базис.} \Leftrightarrow \forall \overrightarrow{a}\ \begin{matrix} cos\angle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{i}\right), cos\angle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{j}\right), cos\angle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{j}\right) - \\ \text{направляющие косинусы } \overline{a}. \end{matrix} \right)$$

$$\forall \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\ \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} - \text{ортогональный базис.} \Leftrightarrow \forall \overrightarrow{a}\ cos^2\angle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{i}\right) + cos^2\angle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{j}\right) + cos^2\angle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{k}\right) = 1 \right)$$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\ \left(\text{Со стороны } \overrightarrow{c} \text{ кратчайший поворот от } \overrightarrow{a} \text{ к } \overrightarrow{b} \text{против часовой.} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} - \text{правая.}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right| \left|\overrightarrow{b}\right| \sin\angle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\ \left(\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} - \text{правая.}\right)$$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\ \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}\right)$$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a}$$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$$

$$(\alpha \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \alpha \left(\overrightarrow{a} \times \overleftrightarrow{b} \right)$$

$\times$ −операция на векторах, обладающая дистрибутивным свойством с $+$ относительно векторов.

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\ \left(0 < \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) \longrightarrow \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} - \text{правая.}\right)$$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\ \left(\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) < 0 \longrightarrow \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} - \text{левая.}\right)$$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\ \left(\left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} - \text{компланарны.}\right)$$

$$\forall \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}\ \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{в ОНБ.}$$

$$\forall \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\ \left(\exists a,\ b,\ c \begin{cases} \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} - \text{ОНБ.} \\ O = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (O \times \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) - \text{прямоугольная} \\ \text{декартова система координат (ПДСК).} \end{array} \right)$$

Глава 15

Линейная алгебра

$$\forall \lambda, \mu \in F\ x, y \in V\ \begin{cases} (V, +) - \text{абелева группа.} \\ F - \text{поле.} \\ * : V \times F \longrightarrow V \\ 1x = x \\ (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \\ (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} V - \text{векторное пространство над} \\ \text{полем } F. \end{array}$$

$$\exists F\ \forall \lambda \in F\ x, y \in U\ \begin{cases} x + y \in U \\ \lambda x \in U \end{cases} \Leftrightarrow U \subseteq V\ (U \text{ подпространство } V)$$

$$\begin{cases} \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F \\ v_1, \ldots, v_k \in V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k - \text{линейная комбинация} \\ \text{векторов } v_1, \ldots, v_k \text{ с коэффициентами } \lambda_1, \ldots, \lambda_k. \end{array}$$

$$<v_1, \ldots, v_k> = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \mid \forall i\ \lambda_i \in F\} - \text{линейная оболочка.}$$

$$\exists \{\lambda\}, i\ \begin{cases} \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k = 0 \\ \lambda_i \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_1, \ldots, v_k \text{ линейно зависимы (л.з.).}$$

$$\forall x\ \exists \{\alpha\}\ \ x = \alpha_1 e_1 + \ldots \alpha_n e_n \Leftrightarrow e_1, \ldots, e_n - \text{полная система векторов.}$$

Выяснить по набору векторов, являются ли они л.з.
Алгоритм:

1. Записать координаты данных векторов по столбцам в матрицу.

2. Найти ступенчатый вид.

3. Есть свободные переменные $\Leftrightarrow$ л.з.

$e_1, \ldots, e_n \in V$:
$e_1, \ldots, e_n$ - базис $\Leftrightarrow$ любые 2 из 3 достаточно в обратную сторону:

1. $e_1, \ldots, e_n$ л.н.з.

2. $e_1, \ldots, e_n$ - полная система векторов.

3. $dim\ V = n$

$$e_1, \ldots, e_n - \text{базис в } V. \Leftrightarrow dim\ V = n\ (n - \text{размерность } V)$$

$$dim\ \mathbb{R}^n = n$$

$$\begin{cases} e_1, \ldots, e_n - \text{базис в } V. \\ x \in V \end{cases} \longrightarrow \exists! \{\alpha\}\ \ x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$$

$$\begin{cases} e_1, \ldots, e_n - \text{базис в } V. \\ x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n \end{cases} \longrightarrow \forall i\ \alpha_i - \text{координата } x \text{ относительно базиса } e_1, \ldots, e_n.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \text{стандартный базис.}$$

$$C_{e \to e'} = ((e'_1)_e\ \ldots\ (e'_n)_e)$$

$$x_e = C_{e \to e'} x_{e'}$$

$$C^{-1}_{e \to e'} = C_{e' \to e}$$

Цепное правило:

$$C_{e \to e'} = C_{e \to \text{ст.}} C_{\text{ст.} \to e'}$$

$$L_1 + L_2 = \left\{ x_1 + x_2 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 \in L_1 \\ x_2 \in L_2 \end{cases} \right\}$$

$$dim\ L_1 \cap L_2 + dim\ L_1 + L_2 = dim\ L_1 + dim\ L_2$$

Найти $L_1 \cap L_2$.
Алгоритм:

1. Задать через L_1 СЛАУ.

2. Задать через L_2 СЛАУ.

3. Склеить СЛАУ.

4. Решить полученную СЛАУ.

$$U \oplus W = V \Leftrightarrow \begin{cases} U + W = V \\ U \cap W = \{0\} \end{cases}$$

$$U \oplus W = V \Leftrightarrow \begin{cases} \forall v \in V\ \ \exists! u \in U\ \ w \in W\ \ v = u + w \\ u = proj_u v \\ w = proj_w v \end{cases}$$

$$Sym_n\left(\mathbb{R}\right) = \left\{ A \in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right) \;\middle|\; A = A^T \right\}$$

$$Skew_n\left(\mathbb{R}\right) = \left\{ A \in M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right) \;\middle|\; A = -A^T \right\}$$

$$Sym_n\left(\mathbb{R}\right) \oplus Skew_n\left(\mathbb{R}\right) = M_{n\times m}\left(\mathbb{R}\right)\ :\ \frac{C + C^T}{2} + \frac{C - C^T}{2} = C$$

Дополнить набор векторов до базиса.
Алгоритм:

1. Записать по столбцам исходный набор векторов.

2. Приписать справа по столбцам стандартный базис.

3. Найти ступенчатый вид.

$$\begin{matrix}\forall x, y, x_1, x_2, x_2, y_1, y_2 \in V \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\end{matrix} \begin{cases}\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \\ \beta\left(\lambda x_1 + \mu x_2, y\right) = \lambda\beta\left(x_1, y\right) + \mu\beta\left(x_2, y\right) \\ \beta\left(x, \lambda y_1 + \mu y_2\right) = \lambda\beta\left(x, y_1\right) + \mu\beta\left(x, y_2\right)\end{cases} \Leftrightarrow \beta - \text{билинейная форма.}$$

$$\sum_{i\ j} b_{ij}x_iy_j = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \text{билинейная форма.}$$

f – билинейная форма матрицы A. $\longrightarrow A' = C^T_{e\to e'}AC_{e\to e'}$

Если не знаешь, какой базис, можно брать стандартный базис (*правило с оговоркой*).

$$\exists f \begin{cases} f - \text{билинейная форма.} \\ q(x) = f(x, x) \end{cases} \Leftrightarrow q - \text{квадратичная форма.}$$

Симметричная билинейная форма - это билинейная форма из квадратичной, в которой симметричная и которая позволяет сделать биекцию из квадратичной в билинейную.
Каноническая квадратичная форма - это форма, в которой только квадраты.
Симметрический метод Гаусса
Если нет квадратов, то нужно использовать матрицу перехода, равную $E-2E_{jj}+E_{ij}+E_{ji}$ в зависимости от выбранного x_ix_j $(i < j)$ в квадратичной форме.
Нормальная квадратичная форма - это каноническая форма, в которой коэффициенты только 1, -1, 0.
Положительный индекс инерции $(i_+(q))$ - это количество 1 в нормальной форме.
Отрицательный индекс инерции $(i_-(q))$ - это количество -1 в нормальной форме.
Правило Якоба и критерий Сильвестра:

$$\begin{cases} \Delta_0 = 1 \\ \Delta_1 = |a_{11}| \neq 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \\ \vdots \\ \Delta_n = det\ A \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\Delta_1}{\Delta_0}x_1'^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}x_2'^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}x_n'^2 - \text{каноническая форма.}$$

$\forall x \neq 0\ q(x) > 0 \Leftrightarrow q(x)$ – положительно определённая квадратичная форма

$q(x)$ – положительно определённая квадратичная форма $\Leftrightarrow i_+ = n$

$q(x) \geq 0 \Leftrightarrow q(x)$ – положительно полуопределённая квадратичная форма

$q(x)$ – положительно полуопределённая квадратичная форма $\Leftrightarrow i_- = 0$

$\forall k \ \{i_n\} \ detA^{i_1,\dots,i_k}_{i_1,\dots i_k} \leq 0 \longrightarrow q(x)$ – положительно полуопределённая квадратичная форма.

$\varphi : V \longrightarrow V \Leftrightarrow \varphi$ – оператор.

$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \Leftrightarrow \varphi$ – линейный.

φ – линейный. $\Leftrightarrow \varphi(x) = Ax$

$A = \begin{pmatrix} (\varphi(e_1))_e & (\varphi(e_2))_e & \dots & (\varphi(e_n))_e \end{pmatrix}$

$A' = C^{-1}_{e\longrightarrow e'} A C_{e\longrightarrow e'}$

$Ker \ \varphi \subseteq V$

$Im \ \varphi \subseteq V$

$A, C^{-1}AC$ – подобные матрицы

$\begin{cases} \varphi(f_i) = \lambda_i f_i \\ f_i \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f_i \text{ – собственный вектор оператора} \\ \lambda_i \text{ – собственное число (значение) оператора} \end{cases}$

$Spec \ \varphi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ – множество собственных чисел оператора

$det \ (A - \lambda E) = 0$ – характеристическое уравнение

$x_A(\lambda) = det \ (A - \lambda E)$

$V_a(A) = \{\overline{x} \mid A\overline{x} = 1\overline{x}\}$ – собственное подпространство–

множество собственных векторов, отвечающих числу a и ещё нулевой вектор

$1 \leq g.m.(\lambda_i) \leq a.m.(\lambda_i)$

$A^n = CD^nC^{-1}$

$\begin{cases} i = j \implies (e_i, e_j) = 1 \\ i \neq j \implies (e_i, e_j) = 0 \end{cases} \iff e_1, \dots, e_n$ – ОНБ

A диагонализуема $\iff \forall i \ a.m.(\lambda_i) = g.m.(\lambda_i)$

$L^\perp = \{y \mid \forall x \in L : (x, y) = 0\}$

$A^* = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$

$Ker \ A^* = (Im \ A)^\perp$

$Im \ A^* = (Ker \ A)^\perp$

$A = A^* \implies A = A^T$ в ОНБ

У симметричной матрицы есть собственный ОНБ.
Собственные числа симметричной матрицы всегда вещественные. n + m - k