

Математика

Мы

18 сентября 2022 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Логика</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Алгебраические выражения</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Измерения</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Функции</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Числа</b>	<b>12</b>
5.1	Натуральные числа ( $\mathbb{N}$ ) . . . . .	12
5.2	Целые числа ( $\mathbb{Z}$ ) . . . . .	14
5.3	Рациональные числа ( $\mathbb{Q}$ ) . . . . .	14
5.4	Иррациональные числа ( $\mathbb{I}$ ) . . . . .	16
5.5	Действительные числа ( $\mathbb{R}$ ) . . . . .	16
5.6	Комплексные числа ( $\mathbb{C}$ ) . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Матрицы</b>	<b>22</b>

# Глава 1

## Логика

**Из посылки А вытекает вывод В:**

$$A \longrightarrow B$$

А - достаточное условие для В.

В - необходимое условие для А.

**Эквивалентные утверждения А и В** - это утверждения, при которых из посылки А вытекает вывод В и из посылки В вытекает вывод А.

**Обратное утверждение:**

$$B \longrightarrow A$$

$$A \longrightarrow B$$

**Противоположное утверждение:**

$$\overline{A} \longrightarrow \overline{B}$$

$$A \longrightarrow B$$

**Утверждение, противоположное обратному:**

$$\overline{B} \longrightarrow \overline{A}$$

$$A \longrightarrow B$$

Утверждение  $A$  и утверждение, обратное противоположному  $A$ , эквивалентны.

**Доказательство от противного:**

Чтобы доказать  $A \longrightarrow B$ , надо доказать  $A \wedge \overline{\overline{B}}$

**Метод математической индукции для натуральных чисел:**

Чтобы доказать  $f(x) = g(x)$ , надо доказать  $f(1) = g(1) \wedge f(n+1) = g(n+1)$ , приняв  $f(n) = g(n)$ .

## Глава 2

# Алгебраические выражения

**Алгебраическое выражение** - это выражение, состоящее из чисел, буквенных величин и алгебраических операций над ними.

**Область допустимых значений (ОДЗ)** - это множество всех наборов числовых значений букв, входящих в данное алгебраическое выражение.

**Тождественно равные алгебраические выражения** - это алгебраические выражения, имеющие равные ОДЗ и равные числовые значения на этом ОДЗ.

**Одночлен** - это алгебраическое выражение, состоящее из произведения числового коэффициента и буквенных величин.

**Стандартный вид одночлена:**

1. Один числовой коэффициент.
2. Нет повторяющихся буквенных величин.

**Подобные одночлены** - это одночлены, отличающиеся только числовыми коэффициентами.

**Многочлен (полином)** - это алгебраическое выражение, состоящее из суммы одночленов.

**Стандартный вид многочлена:**

1. Все одночлены стандартного вида.
2. Нет подобных одночленов.

**Формулы сокращённого умножения:**

1. Квадрат суммы.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Разность квадратов.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

3. Куб суммы.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

4. Сумма кубов.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

5. Бином Ньютона.

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \frac{a^{n-i} b^i n!}{i!(n-i)!} = \sum_{i=0}^n \frac{a^{n-i} b^i \prod_{k=0}^{i-1} n-k}{i!}$$

**Неполный квадрат разности:**

$$a^2 - ab + b^2$$

Многочлен  $Q(x)$  является частным и многочлен  $R(x)$  является остатком при делении многочлена  $P_n(x)$  на  $S_m(x)$ , если  $P_n(x) = S_m(x)Q(x) + R(x)$  и степень  $R(x)$  меньше степени  $S_m(x)$ .

Если степень  $P_n(x)$  больше степени  $S_m(x)$ , степень частного от деления  $P_n(x)$  на  $S_m(x)$  равна разности степеней  $P_n(x)$  и  $S_m(x)$ , иначе частное равно нулю.

Остаток от деления многочлена  $P_n(x)$  на двучлен вида  $x - \alpha$  равен значению многочлена при  $x = \alpha$ .

**Теорема Безу:**

Многочлен  $P_n(x)$  делится без остатка на двучлен  $x - \alpha$ , только если  $\alpha$  - корень многочлена.

## Глава 3

# Измерения

**Величина** - это объект, который может быть охарактеризован числом в результате измерения.

**Постоянная величина** - это величина, множество значений которой состоит из одного элемента.

**Переменная величина** - это величина, множество значений которой состоит более чем из одного элемента.

**Область изменения** - это множество значений, принимаемых переменной величиной.

## Глава 4

# Функции

**Функция  $y = f(x)$**  - это переменная  $y$ , при которой каждому значению  $x$  из области изменения  $x$  поставлено в соответствие по определённому закону значение  $y$ .

$$y = f(x)$$

$y$  - функция (зависимая переменная).  
 $x$  - аргумент (независимая переменная).  
 $f(x)$  - закон соответствия между  $y$  и  $x$ .

**Область определения функции, задаваемой законом соответствия  $f(x)$  ,  $D(f)$**  - это область изменения независимой переменной функции.

**Область значений функции, задаваемой законом соответствия  $f(x)$  ,  $E(f)$** - это область изменения функции.

**Математический анализ** - это область математики, исследующая функции.

**Равные (совпадающие) функции** - это функции, область определения которых равны и значения которых при любых одинаковых значениях аргумента равны.

**Ноль (корень) функции** - это значение независимой переменной, при котором значение функции равно нулю.



**Чётная функция:**

$$f(-x) = f(x)$$

$$\begin{cases} D(f) = (-a; a) \\ D(f) = [-a; a] \end{cases}$$

**Нечётная функция:**

$$f(-x) = -f(x)$$

$$\begin{cases} D(f) = (-a; a) \\ D(f) = [-a; a] \end{cases}$$

**Функция общего вида** - это функция, которая не является чётной или нечётной.

**Возрастающая функция на некотором промежутке (интервале)** - это функция, для любых двух значений независимой переменной  $x_1$  и  $x_2$  которой на этом промежутке из неравенства  $x_1 < x_2$  следует  $f(x_1) < f(x_2)$  при том, что этот интервал лежит в её области определения. ( невозрастающая функция на некотором промежутке (интервале) )

**Убывающая функция на некотором промежутке (интервале)** - это функция, для любых двух значений независимой переменной  $x_1$  и  $x_2$  которой на этом промежутке из неравенства  $x_1 < x_2$  следует  $f(x_1) > f(x_2)$  при том, что этот интервал лежит в её области определения. ( неубывающая функция на некотором промежутке (интервале) )

**Интервал монотонности** - это интервал, на котором функция возрастает или убывает.

**Точка минимума функции, задаваемой законом соответствия  $f(x)$**  ,- это точка функции  $x_0$  , определённой в самой этой точке и в некоторой окрестности точки  $x_0$  при том, что множество значений этой окрестности равно области изменения  $x'$  , для которой выполняется неравенство  $f(x_0) \leq f(x')$  .

**Точка максимума функции, задаваемой законом соответствия  $f(x)$**  ,- это точка функции  $x_0$  , определённой в самой этой точке и в некоторой окрестности точки  $x_0$  при том, что множество значений этой окрестности равно области изменения  $x'$  , для которой выполняется неравенство  $f(x_0) \geq f(x')$  .

**Экстремум** - это точка минимума или максимума функции.

**Асимптота** - это прямая линия, к которой график функции неограниченно приближается при удалении точки графика в бесконечность.

**Исследование функции:**

1. Область определения функции.
2. Область значений функции.
3. Нули функции.
4. Чётная, или нечётная, или общего вида функция.
5. Интервалы монотонности функции.
6. Экстремумы функции.
7. Асимптоты функции.

**Сложная функция** - это функция, аргумент которой равен другой функции.

**Обратная функция**  $y = f(x)$  функции  $u = g(x)$  :

$$f(g(a)) = a$$

$$a \in D(g)$$

$$g(a) \in D(f)$$

**Алгебраическая функция** - это функция, закон соответствия которой определяется алгебраическим выражением. ( **трансцендентная функция** )

**Элементарные функции** - это основные элементарные функции и сложные функции, образованные из основных элементарных.

**Основные элементарные функции:**

1. Степенные.

$$f(x) = x^k$$

$$k \in R$$

2. Показательные.

$$f(x) = a^x$$

$$a \in R$$

$$a > 0$$

$$a \neq 1$$

## 3. Логарифмические.

$$f(x) = \log_a^x$$

$$a \in R$$

$$a > 0$$

$$a \neq 1$$

## 4. Тригонометрические.

$$f(x) = \sin x$$

или

$$f(x) = \cos x$$

или

$$f(x) = \tan x$$

или

$$f(x) = \cot x$$

## 5. Обратные тригонометрические функции.

$$f(x) = \arcsin x$$

или

$$f(x) = \arccos x$$

или

$$f(x) = \arctan x$$

или

$$f(x) = \operatorname{arccot} x$$

**Целая рациональная функция (многочлен от переменной  $x$ ) (ЦРФ) степени  $n$ :**

$$y = P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$$

$$a_0 \neq 0$$

$y$  прямо пропорционально  $x$  и между  $x$  и  $y$  прямо пропорциональная зависимость, если  $y = ax$ , при  $a \neq 0$ .

**Линейная ЦРФ (линейная функция):**

$$y = ax + b$$

$$a \neq 0$$

**Квадратичная ЦРФ (квадратный (квадратичный) трёхчлен):**

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$a \neq 0$$

у обратно пропорционально х и между х и у обратно пропорциональная зависимость, если  $y = \frac{a}{x}$ , при  $a \neq 0$ .

**Дробно-рациональная функция (ДРФ):**

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$P_n(x)$  - закон соответствия ЦРФ.

$Q_m(x)$  - закон соответствия ЦРФ.

**Дробно-линейная функция:**

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}$$

$c \neq 0$

$ad - bc \neq 0$

**Алгебраическая иррациональная функция** - это функция, закон соответствия которой содержит извлечение корня целой степени из алгебраического выражения, содержащего аргумент.

## Глава 5

# Числа

**Числовое кольцо** - это множество чисел, результат суммы, разности, произведения любых чисел которого принадлежит ему тоже.

**Числовое поле** - это множество чисел, результат выполнения рациональных действий над любыми числами которого принадлежит ему тоже.

### 5.1 Натуральные числа (N)

**Целочисленная переменная** - это величина, принимающая только натуральные значения.

**Свойства сложения и умножения:**

1. Переместительное.

$$a + b = b + a$$

$$ab = ba$$

2. Сочетательное (ассоциативное).

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(ab)c = a(bc)$$

## 3. Распределительное.

$$c(a + b) = ac + cb$$

$q$  является частным и  $r$  является остатком при делении  $a$  на  $b$ , если  $a = bq + r$  и  $r < b$ .

**Делитель  $a$**  - это число, на которое  $a$  делится без остатка.

**Кратное  $a$**  - это всякое число, которое делится на  $a$  без остатка.

**Простое число** - это число, не имеющее никаких других делителей, кроме единицы и себя. ( составное число )

Простых чисел имеется бесконечное множество.

Разложение числа на простые множители взаимно однозначно.

**Взаимно простые числа** - это числа, не имеющие общих делителей.

**Чётное число** - это число, кратное 2. ( нечётное число )

Число 2 - единственное чётное простое число.

**Признаки делимости в 10-й системе счисления:**

1. Признак делимости на 2: последняя цифра в записи числа выражает чётное число.
2. Признак делимости на 3: сумма цифр записи числа делится на 3.
3. Признак делимости на 4: последние две цифры в записи числа выражают число, делящееся на 4.
4. Признак делимости на 5: последняя цифра в записи числа является 0 или 5.
5. Признак делимости на 9: сумма цифр записи числа делится на 9.

**Наибольший общий делитель (НОД)  $a$  и  $b$ :**

$$(a, b)$$

**Наименьшее общее кратное (НОК)  $a$  и  $b$ :**

$$[a, b]$$

$$(a, b)[a, b] = ab$$

## 5.2 Целые числа ( $\mathbb{Z}$ )

$$N \in \mathbb{Z}$$

**Целое алгебраическое выражение** - это алгебраическое выражение, в котором используют только сложение, вычитание, умножение.

**Положительное число** - это число, большее нуля.

**Отрицательное число** - это число, меньшее нуля.

**Противоположные числа** - это числа, отличающиеся знаком.

$$a - b = a + (-b)$$

$$a(-b) = -ab$$

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} |x| = x \\ x \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} |x| = -x \\ x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

## 5.3 Рациональные числа ( $\mathbb{Q}$ )

$$Z \in \mathbb{Q}$$

**Рациональное число** - это число, представимое в виде  $\frac{a}{b}$ , где числитель  $a \in \mathbb{Z}$ , а знаменатель  $b \in \mathbb{N}$ .

Рациональные числа образуют поле.

**Арифметические (рациональные) действия:** сложение, вычитание, умножение, деление.

**Рациональное алгебраическое выражение** - это алгебраическое выражение, в котором используют только рациональные действия.

**Дробное алгебраическое выражение** - это рациональное алгебраическое выражение, в записи которого используют деление на буквенные выражения.

**Алгебраическая дробь** - это это алгебраическое выражение, имеющее вид частного от деления двух целых алгебраических выражений.

**Дробное число** - это рациональное число, числитель которого не делится на знаменатель нацело.

**Целая часть числа** - это наибольшее целое число, не превосходящее данного ( $[x]$ ).

**Дробная часть числа** - это разность между данным числом и его целой частью ( $(x)$ ).

$$x - [x] \geq 0$$

$$x - [x] < 1$$

Разложение рационального числа на сумму целой и дробной частей взаимно однозначно.

**Десятичная дробь** - это дробь, у которой знаменатель представляет собой натуральную степень числа 10.

Всякое рациональное число может быть представлено бесконечной десятичной периодической дробью взаимно однозначно.



## 5.4 Иррациональные числа (I)

Всякое иррациональное число может быть представлено бесконечной десятичной непериодической дробью взаимно однозначно.

**Иррациональные алгебраические выражения** - это алгебраическое выражение, в записи которого используются знаки радикала из буквенного выражения.

**Корень находится в простейшей форме, если:**

1. Он не содержит иррациональности в знаменателе.
2. Нельзя сократить его показатель с показателем подкоренного выражения.
3. Все возможные множители вынесены из-под корня.

**Подобные корни** - это корни, отличающиеся только коэффициентами.

## 5.5 Действительные числа (R)

$$Q \in R$$

$$I \in R$$

Действительные числа образуют поле.

Множество действительных чисел упорядочено.

Множество действительных чисел непрерывно.

Всякое десятичное число определяет действительное число взаимно однозначно.

Многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение линейных двучленов вида  $x - a$  и квадратных трёхчленов вида  $x^2 + px + q$ .

**n-ая степень числа a** - это произведение n сомножителей, равных a. ( $a^n$ )

a - основание степени.

n - показатель степени.

Возведение отрицательного числа в иррациональную степень не определено.

Возведение нуля в не положительную степень не определено.

$$a^x = a^y \longrightarrow x = y$$

**Корень n-ой степени из числа а** - это число, n-ая степень которого равна а. (  $\sqrt[n]{a}$  )

**Извлечение корня степени из а** - это отыскание корня из а.

**Арифметический корень (арифметическое значение корня)** - это положительный корень чётной степени из положительного числа.

Корень чётной степени по умолчанию арифметический.

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{a^n} = a \\ n - \text{нечётное.} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{a^n} = |a| \\ n - \text{чётное.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

**Квадратный корень:**

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$$

**Кубический корень:**

$$\sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$$

**Логарифм числа N по основанию а** - это показатель степени, в которую нужно возвести а, чтобы получить N.

$$\begin{cases} a^{\log_a N} = N \\ N > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

Если число и основание логарифма лежат по одну сторону от единицы, то этот логарифм положителен, и наоборот.

**Потенцирование** - это возведение числа, от которого взят логарифм, в этот логарифм.

Если основание больше единицы, то большее число имеет больший логарифм.

Если основание меньше единицы, то большее число имеет меньший логарифм.

**Десятичный логарифм** - это логарифм по основанию 10.

$$\log_{10} N = \lg N$$

**Характеристика** - это целая часть десятичного логарифма.

**Мантиса** - это дробная часть десятичного логарифма.

**Открытый интервал (a; b)** - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a < x \leq b$ .

**Окрестность точки  $x_0$  ( $x_0 - h; x_0 + h$ )** - это интервал длины  $2h$  серединой  $x_0$ .

**Замкнутый интервал [a; b]** - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a \leq x \leq b$ .

**Полуоткрытый интервал [a; b) или (a; b]** - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a \leq x < b$  или  $a < x \leq b$  соответственно.

**Бесконечный интервал (a;  $\infty$ ), или [a;  $\infty$ ), или ( $\infty$ ; b), или ( $\infty$ ; b], или ( $\infty$ ;  $\infty$ )** - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих  $a < x$ , или  $a \leq x$ , или  $x < b$ , или  $x \leq b$ , или  $x \in R$  соответственно.

## 5.6 Комплексные числа (C)

$$R \in C$$

Комплексные числа образуют поле.

**Комплексное число:**

$$z = a + bi$$

a - действительная часть

b - мнимая часть или коэффициент при мнимой единице.

$$i^2 = -1$$

**Алгебраические действия:** рациональные действия и извлечение корня.

$$z_1 = z_2, \text{ если } a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2.$$

$$a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2, \text{ если } z_1 = z_2.$$

**Чисто мнимое число** - это комплексное число, у которого действительная часть равна нулю.

**Комплексно сопряжённые числа  $z$  и  $\bar{z}$**  - это два комплексных числа, действительные части которых равны, а мнимые противоположны.

$$z = \bar{\bar{z}}$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

Значения многочлена при комплексно сопряжённых значениях комплексно сопряжены между собой.

Если многочлен имеет комплексный корень, то и сопряжённое число является его корнем.

Если  $P_n(z) = (z - \alpha)^k P_{n-k}(z)$ ,  $P_{n-k}$  не делится на  $z - \alpha$  нацело, то  $k$  - кратность корня  $\alpha$ .

Сумма кратности корней равна степени многочлена.

Если  $P_n(z) = (z - \alpha)^k P_{n-k}(z)$ ,  $P_{n-k}$  не делится на  $z - \alpha$  нацело и  $k = 1$ , то корень  $\alpha$  однократный (простой).

Если  $P_n(z) = (z - \alpha)^k P_{n-k}(z)$ ,  $P_{n-k}$  не делится на  $z - \alpha$  нацело и  $k > 1$ , то корень  $\alpha$  кратный.

**Абсолютная величина (модуль)  $z$ :**

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

**Алгебраическая форма комплексного числа:**

$$z = a + bi$$

**Тригонометрическая форма комплексного числа:**

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

$r$  - модуль.

$\phi$  - аргумент.

**Главное значение аргумента:**

$$\arg z$$

$$\begin{cases} \arg z \geq 0 \\ \arg z < 2\pi \end{cases}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$$

**Формула Муавра:**

$$z^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

## Глава 6

# Матрицы

**Матрица  $A_{m \times n}$  :**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$[A]_{ij}$  - это элемент матрицы с индексами  $i$  и  $j$ .

**Матрица строка** - это матрица  $A_{1 \times n}$ .

**Матрица столбец** - это матрица  $A_{m \times 1}$ .

**Квадратная матрица** - это матрица  $A_{n \times n}$ .

**Нулевая матрица** - это матрица  $A_{m \times n}$ , в которой  $\forall i \wedge i \in N \wedge i \leq m \wedge \forall j \wedge j \in N \wedge j \leq n [A]_{ij} = 0$ .

$$\begin{cases} A_{m \times n} \\ B_{m \times n} \\ \forall i \wedge i \in N \wedge i \leq m \wedge \forall j \wedge j \in N \wedge j \leq n [A]_{ij} = [B]_{ij} \end{cases} \longrightarrow A = B$$

**Транспонированная матрица  $A^t$  :**

$$\forall i \wedge i \in N \wedge i \leq m \wedge \forall j \wedge j \in N \wedge j \leq n [A^t]_{ij} = [A]_{ji}$$

$$(AB)^t = B^t A^t$$

$$\forall i \wedge i \in N \wedge i \leq m \wedge \forall j \wedge j \in N \wedge j \leq n [A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$$

**Свойства сложения матриц:**

1. Переместительное.

$$A + B = B + A$$

2. Сочетательное (ассоциативное).

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$\forall i \wedge i \in N \wedge i \leq m \wedge \forall j \wedge j \in N \wedge j \leq n [\lambda A]_{ij} = \lambda[A]_{ij}$$

**Свойства умножения матрицы на число:**

1. Сочетательное (ассоциативное).

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

2. Распределительное относительно чисел.

$$(\lambda + \mu)A = A(\lambda + \mu)$$

3. Распределительное относительно матриц.

$$(A + B)\lambda = \lambda(A + B)$$



$$\forall i \wedge i \in N \wedge i \leq m \wedge \forall j \wedge j \in N \wedge j \leq n \quad [AB]_{ij} = \sum_{k=1}^r [A]_{ik} [B]_{kj}$$

**Свойства умножения матриц:**

1. Переместительное.

$$(AB)C = A(BC)$$

**Единичная матрица (E):**

$$AE = EA = A$$

У единичной матрицы элементы главной диагонали - единицы, а остальные - нули.

**Матричная единица  $E_{ij}$**  - это матрица, у которой на  $i$   $j$  месте расположена единица, а всё остальное - нули.