

Математика

Мы

10 сентября 2022 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Логика</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Алгебраические выражения</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Измерения</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Числа</b>	<b>7</b>
4.1	Натуральные числа ( $\mathbb{N}$ ) . . . . .	7
4.2	Целые числа ( $\mathbb{Z}$ ) . . . . .	9
4.3	Рациональные числа ( $\mathbb{Q}$ ) . . . . .	9
4.4	Иррациональные числа ( $\mathbb{I}$ ) . . . . .	11
4.5	Действительные числа ( $\mathbb{R}$ ) . . . . .	11
4.6	Комплексные числа ( $\mathbb{C}$ ) . . . . .	13

# Глава 1

## Логика

**Из посылки А вытекает вывод В:**

$$A \longrightarrow B$$

А - достаточное условие для В.

В - необходимое условие для А.

**Эквивалентные утверждения А и В** - это утверждения, при которых из посылки А вытекает вывод В и из посылки В вытекает вывод А.

**Обратное утверждение:**

$$B \longrightarrow A$$

$$A \longrightarrow B$$

**Противоположное утверждение:**

$$\overline{A} \longrightarrow \overline{B}$$

$$A \longrightarrow B$$

**Утверждение, противоположное обратному:**

$$\overline{B} \longrightarrow \overline{A}$$

$$A \longrightarrow B$$

Утверждение  $A$  и утверждение, обратное противоположному  $A$ , эквивалентны.

**Доказательство от противного:**

Чтобы доказать  $A \longrightarrow B$ , надо доказать  $A \wedge \overline{\overline{B}}$

**Метод математической индукции для натуральных чисел:**

Чтобы доказать  $f(x) = g(x)$ , надо доказать  $f(1) = g(1) \wedge f(n+1) = g(n+1)$ , приняв  $f(n) = g(n)$ .

## Глава 2

# Алгебраические выражения

**Область допустимых значений (ОДЗ)** - это множество всех наборов числовых значений букв, входящих в данное алгебраическое выражение.

**Тождественно равные алгебраические выражения** - это алгебраические выражения, имеющие равные ОДЗ и равные числовые значения на этом ОДЗ.

**Формулы сокращённого умножения:**

1. Квадрат суммы.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Разность квадратов.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

3. Куб суммы.

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

4. Сумма кубов.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

5. Бином Ньютона.

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \frac{a^{n-i} b^i n!}{i!(n-i)!} = \sum_{i=0}^n \frac{a^{n-i} b^i \prod_{k=0}^{i-1} n-k}{i!}$$

**Неполный квадрат разности:**

$$a^2 - ab + b^2$$

## Глава 3

# Измерения

**Величина** - это объект, который может быть охарактеризован числом в результате измерения.

**Постоянная величина** - это величина, множество значений которой состоит из одного элемента.

**Переменная величина** - это величина, множество значений которой состоит более чем из одного элемента.

**Область изменения** - это множество значений, принимаемых переменной величиной.

## Глава 4

# Числа

**Числовое кольцо** - это множество чисел, результат суммы, разности, произведения любых чисел которого принадлежит ему тоже.

**Числовое поле** - это множество чисел, результат выполнения рациональных действий над любыми числами которого принадлежит ему тоже.

### 4.1 Натуральные числа (N)

**Целочисленная переменная** - это величина, принимающая только натуральные значения.

**Свойства сложения и умножения:**

1. Переместительное.

$$a + b = b + a$$

$$ab = ba$$

2. Сочетательное (ассоциативное).

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(ab)c = a(bc)$$



3. Распределительное.

$$c(a + b) = ac + cb$$

**Делитель а** - это число, на которое а делится без остатка.

**Кратное а** - это всякое число, которое делится на а без остатка.

**Простое число** - это число, не имеющее никаких других делителей, кроме единицы и себя. ( составное число )

Простых чисел имеется бесконечное множество.

Разложение числа на простые множители взаимно однозначно.

**Взаимно простые числа** - это числа, не имеющие общих делителей.

**Чётное число** - это число, кратное 2. ( нечётное число )

Число 2 - единственное чётное простое число.

**Признаки делимости в 10-й системе счисления:**

1. Признак делимости на 2: последняя цифра в записи числа выражает чётное число.
2. Признак делимости на 3: сумма цифр записи числа делится на 3.
3. Признак делимости на 4: последние две цифры в записи числа выражают число, делящееся на 4.
4. Признак делимости на 5: последняя цифра в записи числа является 0 или 5.
5. Признак делимости на 9: сумма цифр записи числа делится на 9.

**Наибольший общий делитель (НОД) а и b:**

$$(a, b)$$

**Наименьшее общее кратное (НОК)  $a$  и  $b$ :**

$$[a, b]$$

$$(a, b)[a, b] = ab$$

## 4.2 Целые числа ( $\mathbb{Z}$ )

$$N \in \mathbb{Z}$$

**Целое алгебраическое выражение** - это алгебраическое выражение, в котором используют только сложение, вычитание, умножение.

**Положительное число** - это число, большее нуля.

**Отрицательное число** - это число, меньшее нуля.

**Противоположные числа** - это числа, отличающиеся знаком.

$$a - b = a + (-b)$$

$$a(-b) = -ab$$

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} |x| = x \\ x \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} |x| = -x \\ x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

## 4.3 Рациональные числа ( $\mathbb{Q}$ )

$$Z \in \mathbb{Q}$$

**Рациональное число** - это число, представимое в виде  $\frac{a}{b}$ , где числитель  $a \in \mathbb{Z}$ , а знаменатель  $b \in \mathbb{N}$ .

Рациональные числа образуют поле.

**Арифметические (рациональные) действия:** сложение, вычитание, умножение, деление.

**Рациональное алгебраическое выражение** - это алгебраическое выражение, в котором используют только рациональные действия.

**Дробное алгебраическое выражение** - это рациональное алгебраическое выражение, в записи которого используют деление на буквенные выражения.

**Алгебраическая дробь** - это это алгебраическое выражение, имеющее вид частного от деления двух целых алгебраических выражений.

**Дробное число** - это рациональное число, числитель которого не делится на знаменатель нацело.

**Целая часть числа** - это наибольшее целое число, не превосходящее данного ( $[x]$ ).

**Дробная часть числа** - это разность между данным числом и его целой частью ( $(x)$ ).

$$x - [x] \geq 0$$

$$x - [x] < 1$$

Разложение рационального числа на сумму целой и дробной частей взаимно однозначно.

**Десятичная дробь** - это дробь, у которой знаменатель представляет собой натуральную степень числа 10.

Всякое рациональное число может быть представлено бесконечной десятичной периодической дробью взаимно однозначно.

## 4.4 Иррациональные числа (I)

Всякое иррациональное число может быть представлено бесконечной десятичной непериодической дробью взаимно однозначно.

**Иррациональные алгебраические выражения** - это алгебраическое выражение, в записи которого используются знаки радикала из буквенного выражения.

**Корень находится в простейшей форме, если:**

1. Он не содержит иррациональности в знаменателе.
2. Нельзя сократить его показатель с показателем подкоренного выражения.
3. Все возможные множители вынесены из-под корня.

**Подобные корни** - это корни, отличающиеся только коэффициентами.

## 4.5 Действительные числа (R)

$$Q \in R$$

$$I \in R$$

Действительные числа образуют поле.

Множество действительных чисел упорядочено.

Множество действительных чисел непрерывно.

Всякое десятичное число определяет действительное число взаимно однозначно.

**n-ая степень числа a** - это произведение n сомножителей, равных a. ( $a^n$ )

a - основание степени.

n - показатель степени.

Возведение отрицательного числа в иррациональную степень не определено.

Возведение нуля в не положительную степень не определено.

$$a^x = a^y \longrightarrow x = y$$

**Корень n-ой степени из числа а** - это число, n-ая степень которого равна а. (  $\sqrt[n]{a}$  )

**Извлечение корня степени из а** - это отыскание корня из а.

**Арифметический корень (арифметическое значение корня)** - это положительный корень чётной степени из положительного числа.

Корень чётной степени по умолчанию арифметический.

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{a^n} = a \\ n - \text{нечётное.} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[n]{a^n} = |a| \\ n - \text{чётное.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

**Квадратный корень:**

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$$

**Кубический корень:**

$$\sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$$

**Логарифм числа N по основанию а** - это показатель степени, в которую нужно возвести а, чтобы получить N.

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{\log_a N} = N \\ N > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{array} \right.$$

Если число и основание логарифма лежат по одну сторону от единицы, то этот логарифм положителен, и наоборот.

**Потенцирование** - это возведение числа, от которого взят логарифм, в этот логарифм.

Если основание больше единицы, то большее число имеет больший логарифм.

Если основание меньше единицы, то большее число имеет меньший логарифм.

**Десятичный логарифм** - это логарифм по основанию 10.

$$\log_{10} N = \lg N$$

**Характеристика** - это целая часть десятичного логарифма.

**Мантиса** - это дробная часть десятичного логарифма.

**Открытый интервал  $(a; b)$**  - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a < x \leq b$ .

**Окрестность точки  $x_0$   $(x_0 - h; x_0 + h)$**  - это интервал длины  $2h$  серединой  $x_0$ .

**Замкнутый интервал  $[a; b]$**  - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a \leq x \leq b$ .

**Полуоткрытый интервал  $[a; b)$  или  $(a; b]$**  - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a \leq x < b$  или  $a < x \leq b$  соответственно.

**Бесконечный интервал  $(a; \infty)$ , или  $[a; \infty)$ , или  $(-\infty; b)$ , или  $(-\infty; b]$ , или  $(-\infty; \infty)$**  - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих  $a < x$ , или  $a \leq x$ , или  $x < b$ , или  $x \leq b$ , или  $x \in R$  соответственно.

## 4.6 Комплексные числа ( $C$ )

$$R \in C$$

Комплексные числа образуют поле.

**Комплексное число:**

$$z = a + bi$$

a - действительная часть

b - мнимая часть или коэффициент при мнимой единице.

$$i^2 = -1$$

$$z_1 = z_2, \text{ если } a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2.$$

$$a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2, \text{ если } z_1 = z_2.$$

**Чисто мнимое число** - это комплексное число, у которого действительная часть равна нулю.

**Комплексно сопряжённые числа  $z$  и  $\bar{z}$**  - это два комплексных числа, действительные части которых равны, а мнимые противоположны.

$$z = \bar{\bar{z}}$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

**Абсолютная величина (модуль)  $z$ :**

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

$$\bar{z_1} + \bar{z_2} = \overline{(z_1 + z_2)}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(z_1 z_2)}$$

**Алгебраическая форма комплексного числа:**

$$z = a + bi$$

**Тригонометрическая форма комплексного числа:**

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

$r$  - модуль.

$\phi$  - аргумент.

**Главное значение аргумента:**

$$\operatorname{arg} z$$

$$\begin{cases} \operatorname{arg} z \geq 0 \\ \operatorname{arg} z < 2\pi \end{cases}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$$

**Формула Муавра:**

$$z^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$