

Математика

Мы

14 апреля 2023 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Примечания</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Логика</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Множества</b>	<b>6</b>
3.1	Аксиомы множеств . . . . .	6
3.2	Другое . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Бинарные отношения</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Общая алгебра</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Алгебраические выражения</b>	<b>21</b>
<b>7</b>	<b>Измерения</b>	<b>26</b>
<b>8</b>	<b>Последовательности</b>	<b>27</b>
<b>9</b>	<b>Функции</b>	<b>34</b>
<b>10</b>	<b>Числа</b>	<b>49</b>
10.1	Натуральные числа (N) . . . . .	49
10.2	Целые числа (Z) . . . . .	51
10.3	Рациональные числа (Q) . . . . .	58
10.4	Иррациональные числа (I) . . . . .	59
10.5	Действительные числа (R) . . . . .	59
10.6	Комплексные числа (C) . . . . .	63
<b>11</b>	<b>Матрицы</b>	<b>66</b>
11.1	Операции над матрицами . . . . .	70
11.2	Перестановки . . . . .	72
11.3	Определители . . . . .	74
11.4	Миноры, алгебраические дополнения и ранги . . . . .	77

<i>ОГЛАВЛЕНИЕ</i>	2
11.5 Форматы матриц . . . . .	79
11.6 СЛАУ относительно матриц . . . . .	80
<b>12 Векторы</b>	<b>82</b>
<b>13 Линейная алгебра</b>	<b>87</b>

# Глава 1

## Примечания

В данном материале очень много опечаток. А также данный материал неконсистентен - он не стандартизирован.

Чтобы понять, что означают ' $<$ ', ' $>$ ', попробуйте их убрать.

## Глава 2

# Логика

$$\forall A, B \left( A \longrightarrow B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Из посылки } A \text{ вытекает вывод } B. \\ A - \text{достаточное условие для } B. \\ B - \text{необходимое условие для } A. \end{cases} \right)$$

$$\forall A, B \left( \begin{cases} A \longrightarrow B \\ B \longrightarrow A \end{cases} \Leftrightarrow A \text{ и } B - \text{логически эквивалентные утверждения.} \right)$$

$$\forall A, B ((A \longrightarrow B) - \text{ прямое утверждение.} \Leftrightarrow (B \longrightarrow A) - \text{ обратное утверждение.})$$

$$\forall A, B ((A \longrightarrow B) - \text{ прямое утверждение.} \Leftrightarrow (\overline{A} \longrightarrow \overline{B}) - \text{ противоположное утверждение.})$$

$$\forall A, B ((A \longrightarrow B) - \text{ прямое утверждение.} \Leftrightarrow (\overline{B} \longrightarrow \overline{A}) - \text{ противоположное обратному утверждение.})$$

$$\forall A, B \left( \begin{cases} A - \text{ прямое утверждение.} \\ B - \text{ противоположное обратному утверждение.} \end{cases} \longrightarrow A \Leftrightarrow B \right)$$

**Доказательство от противного:**

$$\forall A \exists B (B \wedge (\bar{A} \longrightarrow \bar{B}) \longrightarrow A)$$

**Принцип математической индукции (ПМИ):**

$$\forall f \left( \forall n \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ f(0) \\ f(n) \longrightarrow f(n+1) \end{array} \right. \longrightarrow \forall n f(n) \right)$$

$\forall f \text{ } Prog(f)$  – прогрессивность свойства  $f$ .

$$\forall f, g \left( \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ g : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ f(g) = \forall n (\forall m (m < n \longrightarrow g(m)) \longrightarrow g(n)) \end{array} \right. \Leftrightarrow f = Prog(g) \right)$$

**Принцип сильной индукции (ПСИ):**

$$\forall f (Prog(f) \longrightarrow \forall n f(n))$$

**Принцип наименьшего числа (ПНЧ):**

$$\forall f \left( \exists m \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ f(m) \end{array} \right. \longrightarrow \exists n \forall a \left\{ \begin{array}{l} f(n) \\ a < n \longrightarrow \overline{f(a)} \end{array} \right. \right)$$

## Глава 3

# Множества

### 3.1 Аксиомы множеств

$\forall a$   $a$  — множество.

$$\forall a, b \begin{cases} b \in a \\ b \notin a \end{cases}$$

**Аксиома основания:**

Не бывает бесконечных цепочек вида  $\begin{cases} x_1 \in x_2 \\ x_2 \in x_3 \\ \vdots \end{cases}$

**Аксиома равенства:**

$$\forall a, b \ (a = b \Leftrightarrow \forall c \ (a \in c \Leftrightarrow b \in c))$$

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \ \exists a \ a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \quad b \left( b \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a_1 \\ b = a_2 \\ \vdots \\ b = a_n \end{cases} \right)$$

$$\forall f, c \quad (f : c \longrightarrow Bool \Leftrightarrow \exists b \quad b = \{a \in c \mid f(a)\})$$

$$\forall f, b, c \quad \left( c \in \{a \in b \mid f(a)\} \Leftrightarrow \begin{cases} c \in b \\ f(c) \end{cases} \right)$$

## 3.2 Другое

$$\forall a, b \quad (a \subseteq b \Leftrightarrow \forall c \quad (c \in a \longrightarrow c \in b))$$

$$\forall a, c \quad (a \subset c \Leftrightarrow c - \text{собственное подмножество } a.)$$

$$\forall a, b \quad (a = b \Leftrightarrow \forall c \quad (c \in a \Leftrightarrow c \in b))$$

$$\forall a, b \quad (a = b \Leftrightarrow \forall f \quad (\exists c \quad f : c \longrightarrow Bool \longrightarrow (f(a) \Leftrightarrow f(b))))$$

$$\forall a, b \quad \left( a = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \subseteq b \\ b \subseteq a \end{cases} \right)$$



$$a \subseteq a$$

$$\forall a, c \left( \exists b \left\{ \begin{array}{l} a \subseteq b \\ b \subseteq c \end{array} \right\} \longrightarrow a \subseteq c \right)$$

$$\forall a \ a \notin \emptyset$$

$$\forall a \ \emptyset \subseteq a$$

**Парадокс Рассела:**

$$\overline{\exists a \ \forall b \ (b \in a \Leftrightarrow b \notin b)}$$

$$\forall a, b \ (a \in P(b) \Leftrightarrow a \subseteq b)$$

$$\forall a, b, c \left( c \in a \cup b \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} c \in a \\ c \in b \end{array} \right] \right)$$

$$\forall a, c \left( a \in \cup b \Leftrightarrow \exists c \left\{ \begin{array}{l} a \in c \\ c \in b \end{array} \right\} \right)$$

$$\forall a, b \ a \cap b = \{c \in a \mid c \in b\}$$

$$\forall a, b \ a \setminus b = \{c \in a \mid c \notin b\}$$

$$\forall a, b \ a \subseteq b \Leftrightarrow a \cap b = a$$

$$\forall a, b \ a \subseteq b \Leftrightarrow a \cup b = b$$

$$\forall a, b \ (b - \text{univsum.} \Leftrightarrow \bar{a} = b \setminus a)$$

$\cup$  — операция, обладающая коммутативным свойством.

$\cup$  — операция, обладающая ассоциативным свойством.

$\cup$  — операция, обладающая дистрибутивным свойством с  $\cap$ .

$\cap$  — операция, обладающая коммутативным свойством.

$\cap$  — операция, обладающая ассоциативным свойством.

$\cap$  — операция, обладающая дистрибутивным свойством с  $\cup$ .

$$\forall a, b \ (a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$\forall a, b, c \ \left( \begin{cases} a \in c \\ b \in c \end{cases} \longrightarrow (a, b) \in P(P(c)) \right)$$

$$a \times b = \left\{ z \in P(P(a \cup b)) \mid \exists x, y \begin{cases} x \in a \\ y \in b \\ z = (x, y) \end{cases} \right\}$$

$$a^0 = \{\emptyset\}$$

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_n \ (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = (((a_1, a_2), a_3) \dots a_n)$$

## Глава 4

# Бинарные отношения

$\forall A, B, C \ (C \subseteq A \times B \Leftrightarrow C \text{ — множество бинарных отношений между множествами } A \text{ и } B.)$

$\forall A, B, C \ (C \subseteq A \times B \Leftrightarrow \text{dom } C = \{x \in A \mid \exists y \ (x, y) \in C\})$

$\forall A, B, C \ (C \subseteq A \times B \Leftrightarrow \text{rng } C = \{y \in B \mid \exists x \ (x, y) \in C\})$

$\forall A, B, C \ (C \subseteq A \times B \Leftrightarrow C^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in C\})$

$\forall A, B, C \ (C \subseteq A \times B \Leftrightarrow \forall x, y \ (xCy \Leftrightarrow (x, y) \in C))$

$\forall A, B, C, Q, Z \ \left( \begin{cases} C \subseteq A \times Z \\ Q \subseteq Z \times B \end{cases} \Leftrightarrow Q \circ C = \left\{ (x, y) \in \text{dom } C \times \text{rng } Q \mid \exists z \ \begin{cases} xCz \\ zQy \end{cases} \right\} \right)$

$\forall A, B, C, Q, Z \ \left( \begin{cases} C \subseteq A \times Z \\ Q \subseteq Z \times B \end{cases} \Leftrightarrow (Q \circ C)^{-1} = C^{-1} \circ Q^{-1} \right)$

$\forall A \ id_A = \{z \in A \times A \mid \exists x \ z = (x, x)\}$

$\forall A, B, C \ \left( C \subseteq A \times B \longrightarrow \begin{cases} id_B \circ C = C \\ C \circ id_A = C \end{cases} \right)$

$$\forall A, B, C \left( C \subseteq A \times B \longrightarrow \begin{cases} id_B \circ C = C \\ C \circ id_A = C \end{cases} \right)$$

$$\forall C, X \quad (\exists A, B \quad C \subseteq A \times B \Leftrightarrow C[X] - \text{образ множества } X \text{ под действием отношения } C.)$$

$$\forall C, X \quad C[X] = \left\{ b \in \text{rng } C \mid \exists a \begin{cases} a \in X \\ aCb \end{cases} \right\}$$

$$\forall C \quad C[\text{dom } C] = \text{rng } C$$

$$\forall C, X \quad (C[X] - \text{образ множества } X \text{ под действием отношения } C. \Leftrightarrow C^{-1}[X] - \text{прообраз множества } X \text{ под действием } C.)$$

$$\forall C \quad C^{-1}[\text{rng } C] = \text{dom } C$$

$$\forall C \quad C[\emptyset] = \emptyset$$

$$\forall C, X, Y \quad C[X \cup Y] = C[X] \cup C[Y]$$

$$\forall C, X, Y \quad C[X \cap Y] \subseteq C[X] \cap C[Y]$$

$$\forall C, X, Y \quad (Q \circ C)[X] = Q[C[X]]$$

$$\forall R \left( \forall x, y, z \left( \begin{cases} xRy \\ xRz \end{cases} \longrightarrow y = z \right) \Leftrightarrow R - \text{функционально.} \right)$$

$$\forall R \left( \forall x, y, z \left( \begin{cases} yRx \\ zRx \end{cases} \longrightarrow y = z \right) \Leftrightarrow R - \text{инъективно.} \right)$$

$$\forall R \quad (\forall x, y, z \quad (R - \text{функционально.} \Leftrightarrow R^{-1} - \text{инъективно.}))$$

$$\forall R, X \quad (X \subseteq \text{dom } R \Leftrightarrow R - \text{тотально для } X.)$$

$$\forall R, Y \quad (Y \subseteq \text{rng } R \Leftrightarrow R - \text{сюръективно для } Y.)$$

$$\forall R, X \quad (R - \text{тотально для } X. \Leftrightarrow R^{-1} - \text{сюръективно для } X.)$$

$$\forall R, Q \left( \left( \begin{array}{l} R - \text{функционально.} \\ Q - \text{функционально.} \end{array} \right) \longrightarrow R \circ Q - \text{функционально.} \right)$$

$$\forall R, Q \left( \left( \begin{array}{l} R - \text{инъективно.} \\ Q - \text{инъективно.} \end{array} \right) \longrightarrow R \circ Q - \text{инъективно.} \right)$$

$$\forall R, Q, A \left( \exists B \left\{ \begin{array}{l} Q \subseteq A \times B \\ R - \text{тотально для } \text{rng } Q. \\ Q - \text{тотально для } A. \end{array} \right. \longrightarrow R \circ Q - \text{тотально для } A. \right)$$

$$\forall R, Q, C \left( \exists B \left\{ \begin{array}{l} R \subseteq B \times C \\ Q - \text{сюръективно для } \text{dom } R. \\ R - \text{сюръективно для } C. \end{array} \right. \longrightarrow R \circ Q - \text{сюръективно для } C. \right)$$

$$\forall A, R \left( \exists B \left\{ \begin{array}{l} R : A \longrightarrow B \\ R - \text{инъекция.} \end{array} \right. \Leftrightarrow R^{-1} \circ R \subseteq \text{id}_A \right)$$

$$\forall B, R \left( \exists A \left\{ \begin{array}{l} R : A \longrightarrow B \\ R - \text{функционально.} \end{array} \right. \Leftrightarrow R \circ R^{-1} \subseteq \text{id}_B \right)$$

$$\forall A, R \left( \exists B \left\{ \begin{array}{l} R : A \longrightarrow B \\ R - \text{тотально для } A. \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{id}_A \subseteq R^{-1} \circ R \right)$$

$$\forall B, R \left( \exists A \left\{ \begin{array}{l} R : A \longrightarrow B \\ R - \text{сюръективна для } B. \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{id}_B \subseteq R \circ R^{-1} \right)$$

## Глава 5

# Общая алгебра

$$\forall A, * \left( \begin{array}{l} * \text{ — операция.} \\ * : A \times A \longrightarrow A \end{array} \Leftrightarrow * \text{ — бинарная операция на множестве } A. \right)$$

$$\forall A, * ((A, *) \Leftrightarrow * \text{ — бинарная операция на множестве } A.)$$

$$\forall A, * ((A, *) \Leftrightarrow A \text{ — группоид (магма).})$$

$$\forall A, * \left( \forall a, b, c \begin{array}{l} (*, A) \\ a, b \in A \longrightarrow a * b = b * a \end{array} \Leftrightarrow * \text{ — бинарная ассоциативная операция на множестве } A. \right)$$

$$\forall A, * \left( \forall a, b, c \begin{array}{l} (*, A) \\ a, b, c \in A \longrightarrow (a * b) * c = a * (b * c) \end{array} \Leftrightarrow * \text{ — бинарная коммутативная операция на } \right. \\ \left. \text{множестве } A. \right)$$

$$\forall A, * \left( \begin{array}{l} * \text{ — бинарная ассоциативная операция} \\ \text{на множестве } A. \end{array} \Leftrightarrow A \text{ — полугруппа относительно бинарной операции } * . \right)$$

$$\forall A, *, e \left( \begin{array}{l} (*, A) \\ e \in A \\ a \in A \longrightarrow e * a = a * e = a \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} e \text{ — нейтральный элемент группоиды } A \\ \text{относительно бинарной операции } * . \end{array} \right)$$

$$\forall A, * \left( \forall a (*, A) \Leftrightarrow \begin{array}{l} e_A - \text{нейтральный элемент группоида } A \\ \text{относительно бинарной операции } *. \end{array} \right)$$

$$\forall A, * \left( \exists e \left\{ \begin{array}{l} A - \text{полугруппа относительно бинарной операции } *. \\ e - \text{нейтральный элемент группоида } A \\ \text{относительно бинарной операции } *. \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} A - \text{моноид относительно} \\ \text{бинарной операции } *. \end{array} \right)$$

$$\forall A, *, a, b, e \left( \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} e - \text{нейтральный элемент группоида } A \\ a, b \in A \longrightarrow a * b = b * a = e \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a - \text{обратимый элемент группоида } A \\ \text{относительно бинарной операции } *. \\ b - \text{обратный элемент группоида } A \\ \text{относительно бинарной операции } * \\ \text{и элемента } a. \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$\forall A, * \left( \forall a \left\{ \begin{array}{l} A - \text{моноид.} \\ a \in A \longrightarrow a - \text{обратимый элемент группоида } A \Leftrightarrow A - \text{группа.} \\ \text{относительно бинарной операции } *. \end{array} \right. \right)$$

$$\forall A, * \left( \left( \begin{array}{l} (A, *) - \text{группа.} \\ * - \text{коммутативная операция.} \end{array} \right) \Leftrightarrow (A, *) - \text{абелева группа.} \right)$$

$$\forall *, n \ (S_n, *) - \text{симметрическая группа.}$$

$$\forall A, * \left( \forall a \exists b, n \left\{ \begin{array}{l} (A, *) - \text{группа.} \\ a \in A \wedge b \in A \wedge n \in \mathbb{N} \longrightarrow a = b^n \end{array} \right. \Leftrightarrow (A, *) - \text{циклическая группа.} \right)$$

$$\forall A, B, *, \circ, f \left( \forall a, b \left\{ \begin{array}{l} (A, *) \\ (B, \circ) \\ f : A \longrightarrow B \\ f(a * b) = f(a) \circ f(b) \end{array} \right. \Leftrightarrow f - \text{гомоморфизм относительно } (A, *) \text{ и } (B, \circ). \right)$$

$$\forall A, B, *, \circ, f \left( \left( \begin{array}{l} f - \text{гомоморфизм относительно } (A, *) \text{ и } (B, \circ). \\ (A, *) - \text{группа.} \\ (B, \circ) - \text{группа.} \end{array} \right) \Leftrightarrow \forall a \left\{ \begin{array}{l} f(a^{-1}) = f(a)^{-1} \\ f(e_A) = e_B \end{array} \right. \right)$$

$$\forall A, B, *, \circ, f \ (f - \text{гомоморфизм относительно } (A, *) \text{ и } (B, \circ). \Leftrightarrow \ker f = \{x \in A \mid f(x) = e_B\})$$



$\forall A, B, *, \circ, f$  ( $f$  – гомоморфизм относительно  $(A, *)$  и  $(B, \circ)$ .  $\Leftrightarrow \ker f$  – ядро гомоморфизма  $f$ .)

$$\forall A, B, *, \circ, f \left( \left( \begin{array}{l} f - \text{гомоморфизм относительно} \\ (A, *) \text{ и } (B, \circ). \\ f - \text{инъекция.} \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} f - \text{мономорфизм относительно} \\ (A, *) \text{ и } (B, \circ). \end{array} \right)$$

$\forall f$  ( $\exists A \ker f = \{e_A\} \Leftrightarrow f$  – мономорфизм.)

$$\forall A, B, *, \circ, f \left( \left( \begin{array}{l} f - \text{гомоморфизм относительно} \\ (A, *) \text{ и } (B, \circ). \\ f - \text{сюръекция.} \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} f - \text{эпиморфизм относительно} \\ (A, *) \text{ и } (B, \circ). \end{array} \right)$$

$$\forall A, B, *, \circ, f \left( \left( \begin{array}{l} f - \text{мономорфизм относительно} \\ (A, *) \text{ и } (B, \circ). \\ f - \text{эпиморфизм относительно} \\ (A, *) \text{ и } (B, \circ). \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{array}{l} f - \text{изоморфизм относительно} \\ (A, *) \text{ и } (B, \circ). \end{array} \right)$$

$$\forall A, B, *, \circ \left( \begin{array}{l} \exists f \text{ } f - \text{изоморфизм относительно} \\ (A, *) \text{ и } (B, \circ). \end{array} \Leftrightarrow A \text{ и } B \text{ изоморфны.} \right)$$

$$\forall A, B, *, \circ \left( \begin{array}{l} \exists f \text{ } f - \text{изоморфизм относительно} \\ (A, *) \text{ и } (B, \circ). \end{array} \Leftrightarrow A \simeq B \right)$$

$\forall A$  ( $A$  – группа.  $\Leftrightarrow \text{ord } A =$  количество элементов  $A$ .)

$$\forall A, a \left( \left( \begin{array}{l} a \in A \\ a \neq e_A \end{array} \right) \Leftrightarrow \text{ord } a = \min \{n \in \mathbb{N} \mid a^n = e_A\} \right)$$

$\forall a$   $\text{ord } a$  – порядок  $a$ .

$$\forall A, a \left( \left( \begin{array}{l} A - \text{группа.} \\ a \in A \end{array} \right) \Leftrightarrow \text{ord } a \mid \text{ord } A \right)$$

$$\forall a, b, k \left( b^k \in \langle a \rangle \longrightarrow \text{ord } b^k = \frac{\text{ord } \langle a \rangle}{\text{НОД}(\text{ord } \langle a \rangle, k)} \right)$$

$$\forall a, k \ (a^k \in \langle a \rangle \longrightarrow (a^k = a \Leftrightarrow \text{НОД}(\text{ord } \langle a \rangle, k) = 1))$$

$$\forall A, B, * \left( \forall a, b \begin{cases} (A, *) - \text{группа.} \\ B \subseteq A \\ e_A \in B \\ a \in B \wedge b \in B \longrightarrow a * b \in B \\ a \in B \longrightarrow a^{-1} \in B \end{cases} \Leftrightarrow (B, *) - \text{подгруппа } A. \right)$$

$$\forall A, B, * \left( \begin{cases} (B, *) - \text{подгруппа } A. \\ B \neq \{e_A\} \\ B \neq A \end{cases} \Leftrightarrow (B, *) - \text{собственная подгруппа.} \right)$$

$$\forall A, B, * \left( \begin{cases} (B, *) - \text{подгруппа } A. \\ B = \{e_A\} \end{cases} \Leftrightarrow (B, *) - \text{тривиальная подгруппа.} \right)$$

$$\forall A \left( \forall B \begin{cases} A - \text{группа.} \\ B \not\subseteq A \\ B - \text{собственная.} \end{cases} \Leftrightarrow A - \text{простая группа.} \right)$$

$$\forall A, B, *, a \left( \begin{cases} (B, *) - \text{подгруппа } A. \\ a \in A \longrightarrow aB = \{c \in B \mid c = a * b \wedge b \in B\} \end{cases} \Leftrightarrow aB - \text{левый смежный класс.} \right)$$

$$\forall A, B, *, a \left( \begin{cases} (B, *) - \text{подгруппа } A. \\ a \in A \longrightarrow Ba = \{c \in B \mid c = b * a \wedge b \in B\} \end{cases} \Leftrightarrow Ba - \text{правый смежный класс.} \right)$$

$$\forall A, B, * \left( \forall a \begin{cases} (B, *) - \text{подгруппа } A. \\ aB = Ba \end{cases} \Leftrightarrow B - \text{нормальная подгруппа.} \right)$$

$$\forall A, B \ (B - \text{нормальная подгруппа } A. \Leftrightarrow B \triangleleft A)$$

$$\forall A, B, * \ ((B, *) - \text{подгруппа } A. \Leftrightarrow A : B = \text{количество множеств } \forall a \ aB.)$$

$$\forall A, B, * \ ((B, *) - \text{подгруппа } A. \Leftrightarrow A : B - \text{индекс подгруппы } B \text{ в } A.)$$

**Теорема Лагранжа:**

$$\forall A, B, * \ ((B, *) - \text{подгруппа } A. \Leftrightarrow |A| = |B| (A : B))$$

$$\forall G, H \left( \exists A, f \left( \begin{cases} f : G \longrightarrow A \\ f - \text{гомоморфизм.} \\ H = \text{Ker } f \end{cases} \right) \Leftrightarrow H - \text{нормальная подгруппа } G. \right)$$

$$\forall G, H \ (G/H \Leftrightarrow H - \text{нормальная подгруппа } G.)$$

$$\forall G, f \left( \exists A \begin{cases} f : G \longrightarrow A \\ f - \text{гомоморфизм.} \end{cases} \longrightarrow G/\text{Ker } f \simeq \text{Im } f \right)$$

$$\forall f \left( \exists A \begin{cases} f : A \longrightarrow A \\ f - \text{гомоморфизм.} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{эндоморфизм.} \right)$$

$$\forall f \left( \begin{cases} f - \text{изоморфизм.} \\ f - \text{эндоморфизм.} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{автоморфизм.} \right)$$

$$\text{Aut}(G) - \text{множество автоморфизмов } G.$$

$$\forall f \left( \exists a \begin{cases} f - \text{автоморфизм.} \\ a \in \text{dom } f \\ f(x) = axa^{-1} \end{cases} \quad f - \text{внутренний автоморфизм.} \right)$$

$$\text{Inn}(G) - \text{множество внутренних автоморфизмов } G.$$

$$\forall G, a \left( \forall b \begin{cases} a \in G \\ b \in G \longrightarrow ab = ba \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{центр } G. \right)$$

$$Z(G) - \text{множество центров } G.$$

$$\forall G \ G/Z(G) \simeq \text{Inn}(G)$$

$$\forall G, H \ \text{ord } G \times H = \text{ord } G \ \text{ord } H$$

$$\forall g, h \ \text{ord } (g, h) = \text{НОК}(\text{ord } g, \text{ord } h)$$

$$\forall G, H \left( \begin{cases} \text{НОД}(\text{ord } G, \text{ord } H) = 1 \\ G - \text{циклическая.} \\ H - \text{циклическая.} \end{cases} \longrightarrow G \times H - \text{циклическая.} \right)$$

$$\forall G, H, n, m \left( \begin{cases} \text{НОД}(\text{ord } G, \text{ord } H) = 1 \\ G - \text{циклическая.} \\ H - \text{циклическая.} \\ \text{НОД}(n, m) = 1 \end{cases} \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}) \right)$$

$$\forall A \text{ (ord } A = \text{простое число} \longrightarrow A - \text{циклическая})$$

$\forall n \ GL_n(\mathbb{R})$  (общая линейная группа) - множества всех невырожденных матриц размера  $n$  с операцией матричного умножения.

$$\forall n \ SL_n(\mathbb{R}) \text{ (специальная линейная группа)} = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

$$\forall n \ D_n - \text{группа диэдра } (R_i - \text{поворот, } u_j - \text{осевая симметрия}).$$

$$V_4 = D_2$$

$$\forall K \left( \exists +, * \begin{cases} (K, +) - \text{абелева группа.} \\ (K, *) - \text{полугруппа.} \\ a, b, c \in K \longrightarrow \begin{cases} c(a+b) = ca+cb \\ (a+b)c = ac+bc \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow K - \text{кольцо.} \right)$$

$$\forall K \left( \forall k \begin{cases} \text{Корректность } +. \\ \text{Корректность } *. \\ 0 \in K \\ k \in K \longrightarrow k - \text{обратимый.} \end{cases} \Leftrightarrow K - \text{кольцо.} \right)$$

Во всех кольцах, кроме кольца с одним элементом, не существует обратного к нулю.

$$\forall a \text{ (} \exists n \ a^n = 0 \Leftrightarrow a - \text{нильпотент.)}$$

$$\forall a \left( \exists b \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{делитель } 0. \right)$$

$$\forall b \left( \exists a \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b - \text{делитель } 0. \right)$$

$$\forall R, I \left( \forall r, i \left\{ \begin{array}{l} R - \text{кольцо.} \\ I - \text{подгруппа } R. \\ \left\{ \begin{array}{l} i \in I \\ r \in R \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ir \in I \\ ri \in I \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow I - \text{идеал } R. \right)$$

$$\forall I, R \ (I - \text{идеал } R. \Leftrightarrow I \triangleleft R)$$

$$\forall R, a \left( \left\{ \begin{array}{l} R - \text{коммутативное кольцо с единицей.} \\ a \in R \end{array} \right\} \Leftrightarrow \langle a \rangle = aR - \text{главный идеал.} \right)$$

$$\forall I \ (I \triangleleft \mathbb{Z} \longrightarrow I - \text{главный.})$$

$$\forall K \left( \forall a, b \left\{ \begin{array}{l} K - \text{кольцо.} \\ k \neq 0 \longrightarrow k - \text{обратимый.} \\ a, b \in K \longrightarrow ab = ba \end{array} \right\} \Leftrightarrow K - \text{поле.} \right)$$

$$\forall k \left( \exists K \left\{ \begin{array}{l} K - \text{поле.} \\ k \in K \end{array} \right\} \Leftrightarrow k - \text{скаляр.} \right)$$

$$\forall K \ (K - \text{поле} \Leftrightarrow \text{char } K = \text{количество } 1, \text{ которые нужно сложить, чтобы получился } 0.)$$

$$\forall K \left[ \begin{array}{l} \text{char } K - \text{простое.} \\ \text{char } K = 0 \end{array} \right]$$

$$\forall k \left( \exists K \left\{ \begin{array}{l} K - \text{поле.} \\ k \in K \end{array} \right\} \longrightarrow \overline{k} - \text{делитель } 0. \right)$$

$$\forall K \ (K - \text{конечное поле.} \longrightarrow \exists t \ |K| = (\text{char } K)^t)$$

$$\forall K \ (K - \text{конечное поле.} \longrightarrow \exists t \ |K| = (\text{char } K)^t)$$

## Глава 6

# Алгебраические выражения

**Алгебраическое выражение** - это выражение, состоящее из чисел, буквенных величин и алгебраических операций над ними.

**Область допустимых значений (ОДЗ)** - это множество всех наборов числовых значений букв, входящих в данное алгебраическое выражение.

**Тождественно равные алгебраические выражения** - это алгебраические выражения, имеющие равные ОДЗ и равные числовые значения на этом ОДЗ.

**Одночлен** - это алгебраическое выражение, состоящее из произведения числового коэффициента и буквенных величин.

**Стандартный вид одночлена:**

1. Один числовой коэффициент.
2. Нет повторяющихся буквенных величин.

**Подобные одночлены** - это одночлены, отличающиеся только числовыми коэффициентами.

**Многочлен (полином)** - это алгебраическое выражение, состоящее из суммы одночленов.

**Стандартный вид многочлена:**

1. Все одночлены стандартного вида.
2. Нет подобных одночленов.

**Формулы сокращённого умножения:**

1. Квадрат суммы.  

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
2. Разность квадратов.  

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
3. Куб суммы.  

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
4. Сумма кубов.  

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

**Неполный квадрат разности:**

$$a^2 - ab + b^2$$

$$\forall n, k \left( \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{N} \\ k \leq n \end{cases} \longrightarrow C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right)$$

$$\forall n, k \left( \begin{cases} n \in \mathbb{C} \\ k \in \mathbb{N} \\ k \leq n \end{cases} \longrightarrow C_n^k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)}{k!} \right)$$

$$\forall n \ C_n^0 = 1$$

$$\forall n \ C_n^n = 1$$

$$\forall n, k \ C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

$$\forall x, n \ (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

**Бином Ньютона:**

$$\forall a, b, n \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$\forall A, B, Q, R \ \left( \begin{cases} 0 \leq \deg R < \deg Q \\ A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) - \text{частное при делении } A(x) \text{ на } B(x). \\ R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } B(x). \end{cases} \right)$$

$$\forall A, B, Q, R \ \left( \begin{cases} Q(x) - \text{частное при делении } A(x) \text{ на } B(x). \\ R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } B(x). \longrightarrow \deg Q = \deg A - \deg B \\ \deg B < \deg A \end{cases} \right)$$

$$\forall A, B, Q, R \ \left( \begin{cases} Q(x) - \text{частное при делении } A(x) \text{ на } B(x). \\ R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } B(x). \longrightarrow \deg Q = 0 \\ \deg A \leq \deg B \end{cases} \right)$$

$$\forall R, A, \alpha \ (R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } (x - \alpha). \longrightarrow R(x) = A(\alpha))$$

**Теорема Безу:**

$$\forall R \ \left( \exists A, x, \alpha \ \begin{cases} R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } (x - \alpha). \longrightarrow R(x) = 0 \\ \alpha - \text{корень } A. \end{cases} \right)$$



**Основная теорема алгебры:**

$$\forall A \exists z \left( \begin{cases} A(x) - \text{многочлен.} \\ z \in \mathbb{C} \end{cases} \longrightarrow z - \text{корень } A. \right)$$

$$\forall \{a_n\}, \{x_n\} \left( \begin{array}{l} \exists P \left\{ \begin{array}{l} P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \\ \forall i \quad x_i - \text{корень } P(x). \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$\forall A \quad (0 < \deg A \Leftrightarrow A - \text{нетривиальный.})$$

$$\forall A \left( \exists B, C \left\{ \begin{array}{l} A(x) = B(x)C(x) \\ B - \text{нетривиальный.} \Leftrightarrow A(x) - \text{приводимый.} \\ C - \text{нетривиальный.} \end{array} \right. \right)$$

$$\forall A \quad (\deg A = 1 \longrightarrow A - \text{неприводимый над } \mathbb{C}.)$$

$$(1 < \deg A \longrightarrow A - \text{приводимый над } \mathbb{C}.)$$

$$\forall A \exists \{z_n\}, \{\alpha_n\}, a, k \left( A(z) - \text{многочлен.} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \deg A = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ a - \text{старший коэффициент } A. \\ A(z) = a(z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \dots (z - z_k)^{\alpha_k} \end{array} \right. \right)$$

$$\forall A \quad (\deg A = 1 \longrightarrow A - \text{неприводимый над } \mathbb{R}.)$$

$$\forall A \left( \begin{cases} \deg A = 2 \\ D(A) < 0 \end{cases} \longrightarrow A - \text{неприводимый над } \mathbb{R}. \right)$$

$$\forall A \left( \begin{cases} 2 < \deg A \\ D(A) < 0 \end{cases} \longrightarrow A - \text{приводимый над } \mathbb{R}. \right)$$

## Глава 7

# Измерения

**Величина** - это объект, который может быть охарактеризован числом в результате измерения.

**Постоянная величина** - это величина, множество значений которой состоит из одного элемента.

**Переменная величина** - это величина, множество значений которой состоит более чем из одного элемента.

**Область изменения** - это множество значений, принимаемых переменной величиной.

## Глава 8

# Последовательности

$$\forall f \ (\exists A \ f : \mathbb{N} \longrightarrow A \Leftrightarrow f - \text{последовательность.})$$

$$\forall \langle n \rangle, \langle x_n \rangle, \ f \ \left( \begin{cases} f - \text{последовательность.} \\ f(n) = x_n \end{cases} \Leftrightarrow \{x_n\} \right)$$

$$\forall \langle x_n \rangle \ \{x_n\} - \text{последовательность.}$$

$$\forall \{x_n\} \ (\forall k, \ l \ (k < l \longrightarrow x_k < x_l) \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{возрастающая последовательность.})$$

$$\forall \{x_n\} \ (\forall k, \ l \ (k < l \longrightarrow x_k \geq x_l) \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{невозрастающая последовательность.})$$

$$\forall \{x_n\} \ (\forall k, \ l \ (k < l \longrightarrow x_k > x_l) \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{убывающая последовательность.})$$

$$\forall \{x_n\} (\forall k, l (k < l \longrightarrow x_k \leq x_l) \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{неубывающая последовательность.})$$

$$\forall \{x_n\}, M (\forall k |x_k| \leq M \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{ограниченная последовательность значением } M.)$$

$$\forall \{x_n\}, M (\forall k x_k \leq M \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{ограниченная сверху последовательность значением } M.)$$

$$\forall \{x_n\}, M (\forall k x_k \geq M \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{ограниченная снизу последовательность значением } M.)$$

$$\forall \{x_n\}, a (\{x_n\} \Rightarrow a \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{последовательность, стабилизирующаяся к } a.)$$

$$\forall \{x_n\}, a \left( \exists k \forall m, l \begin{cases} x_m \in \mathbb{Z} \\ l > k \\ x_l = a \end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \Rightarrow a \right)$$

$$\forall \{x_n\}, M \left( \forall m \begin{cases} x_m \in \mathbb{Z} \\ \{x_n\} - \text{неубывающая последовательность.} \\ \{x_n\} - \text{ограниченная сверху последовательность значением } M. \end{cases} \longrightarrow \exists a \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \leq M \\ \{x_n\} \Rightarrow a \end{cases} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, M, a \left( \forall m \begin{cases} x_m \in \mathbb{R} \\ \{x_n\} - \text{ограниченная сверху последовательность значением } M. \\ \text{каждая соответствующая цифра } \{x_n\} \\ \Rightarrow \\ \text{каждая соответствующая цифра } a \end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \Rightarrow a \right)$$

$$\forall \langle n \rangle, \langle x_n \rangle, a \left( \begin{array}{l} \{x_n\} \\ x_n = a^{(n)} \end{array} \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{последовательность десятичных приближений } a. \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a, b \left( \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ \{x_n\} = \{a^{(n)} + b^{(n)}\} \end{array} \longrightarrow \{x_n\} \Rightarrow a + b \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a, b \left( \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ a > b > 0 \\ \{x_n\} = \{a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n})\} \end{array} \longrightarrow \{x_n\} \Rightarrow a - b \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a, b \left( \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ \{x_n\} = \{a^{(n)} b^{(n)}\} \end{array} \longrightarrow \{x_n\} \Rightarrow ab \right)$$

$$\forall a, b \left( \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ \{x_n\} = \left\{ \left( \frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}} \right)^{(n)} \right\} \end{array} \longrightarrow \{x_n\} \Rightarrow \frac{a}{b} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ стремится к } a \text{ как к своему пределу.} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall e \exists l \forall k \left\{ \begin{array}{l} |a - x_k| < e \\ k > l \end{array} \right. \right)$$

$$\forall \{x_n\}, M \left( \begin{array}{l} x_m \in \mathbb{R} \\ x_m > 0 \\ \{x_n\} - \text{неубывающая последовательность.} \\ \{x_n\} - \text{ограниченная сверху} \\ \text{последовательность значением } M. \end{array} \longrightarrow \exists a \begin{cases} a \leq M \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \end{cases} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a \left( \forall m \begin{cases} x_m \in \mathbb{R} \\ \{x_n\} = \{a^{(n)}\} \end{cases} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right)$$

$$\forall \{x_n\} \left( \exists a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{сходящаяся последовательность.} \right)$$

$$\forall \{x_n\} \left( \exists a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \longrightarrow \{x_n\} - \text{ограниченная последовательность.} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a \left( \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \longrightarrow \exists l \forall k \begin{cases} k > l \\ \begin{cases} a > 0 \\ x_k > \frac{a}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ x_k < \frac{a}{2} \end{cases} \end{cases} \end{array} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\}, a, b \left( \forall k \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \\ x_k \leq y_k \end{cases} \longrightarrow a \leq b \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, a \left( \forall k \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \\ x_k \leq y_k \leq z_k \end{cases} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a| \right)$$

$$\forall a, b \left( \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow |a + b| \leq |a| + |b| \right)$$

$$\forall a, b \left( \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow |a - b| \geq ||a| - |b|| \right)$$

$$\forall A, M \ (M = \sup A \Leftrightarrow M - \text{точная верхняя граница } A.)$$

$$\forall A, M \ (M = \inf A \Leftrightarrow M - \text{точная нижняя граница } A.)$$

$$\forall A, M \left( \forall x, M' \exists y \begin{cases} x \in A \\ x \leq M \\ y \in A \\ M' < y \leq M \end{cases} \Leftrightarrow M = \sup A \right)$$

$$\forall A, M \left( \forall x, M' \exists y \begin{cases} x \in A \\ x \geq M \\ y \in A \\ M' > y \geq M \end{cases} \Leftrightarrow M = \inf A \right)$$

$$\forall A \left( \forall B, C \begin{cases} B \in A \\ C \in A \\ \left[ \begin{array}{l} B \subset C \\ C \subset B \end{array} \right] \end{cases} \Leftrightarrow A - \text{система вложенных отрезков.} \right)$$



$$\forall \{A_n\} \left( \forall i, j \begin{cases} i < j \\ A_j \subset A_i \end{cases} \Leftrightarrow \{A_n\} - \text{последовательность вложенных отрезков.} \right)$$

$$\forall \{A_n\} \left( \forall e \exists i \begin{cases} e \in \mathbb{R} \\ e > 0 \\ \{A_n\} - \text{последовательность} \\ \text{вложенных отрезков.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \{A_n\} - \text{стягивающаяся последовательность} \\ \text{вложенных отрезков.} \end{matrix} \right)$$

$$\forall A \left( A - \text{система вложенных отрезков.} \longrightarrow \exists x \forall B \begin{cases} B \in A \\ x \in B \end{cases} \right)$$

**Принцип полноты Кантора:**

$$\forall \{A_n\} \left( \{A_n\} - \text{стягивающаяся последовательность вложенных отрезков.} \longrightarrow \exists x \forall i \begin{cases} x \in A_i \\ x \text{ единственен.} \end{cases} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\} \left( \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \\ \{y_n\} - \text{ограниченная.} \end{cases} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0 \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

**Второй замечательный предел:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\forall A, a \left( \exists \{x_n\} \forall n \begin{cases} x_n \in A \\ x_n \neq a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{предельная точка } A. \right)$$

## Глава 9

# Функции

$$\forall A, B, f \left( \begin{cases} f \subseteq A \times B \\ f - \text{функционально.} \Leftrightarrow f : A \longrightarrow B \\ f - \text{тотально для } A. \end{cases} \right)$$

$$\forall f \left( \exists A, B \ f : A \longrightarrow B \Leftrightarrow f - \text{функция.} \right)$$

$$\forall f, x, y \left( \begin{cases} f : A \longrightarrow B \\ x \in A \\ xfy \end{cases} \Leftrightarrow y = f(x) \right)$$

$$\forall f, g \left( \begin{cases} f - \text{функция.} \\ g - \text{функция.} \end{cases} \longrightarrow \left( \forall x \begin{cases} \text{dom } f = \text{dom } g \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f = g \right) \right)$$

$$\forall A, B \ B^A = \{f \in P(A \times B) \mid f : A \longrightarrow B\}$$

$$\forall A, B, R \left( \begin{cases} R : A \longrightarrow B \\ R - \text{биекция.} \end{cases} \Leftrightarrow A \overset{R}{\sim} B \right)$$

$$\forall A, B \left( \exists R \ A \overset{R}{\sim} B \Leftrightarrow A \sim B \right)$$

$$\forall A, B \ (A \sim B \Leftrightarrow A \text{ и } B \text{ — равномощные.})$$

$$\forall A, B, R \left( \begin{cases} id_A \subseteq R^{-1} \circ R \\ id_B \subseteq R \circ R^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow A \overset{R}{\sim} B \right)$$

$$\forall A \ \overline{A \sim P(A)}$$

$$\forall A, f \ \overline{\begin{cases} f : A \longrightarrow P(A) \\ f \text{ — сюръекция.} \end{cases}}$$

$$\forall n \ \underline{n} = \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$$

$$\forall A \ P(A) \sim \underline{2}^A$$

$$\forall A, n \ (n \in A \longrightarrow 1_A(n) = 1)$$

$$\forall A, n \ (n \notin A \longrightarrow 1_A(n) = 0)$$

$$\forall A \ 1_A \text{ — индикаторная функция.}$$

$$\forall A \ A \sim A$$

$$\forall A, B \ (A \sim B \longrightarrow \forall C \ A \times C \sim B \times C)$$

$$\forall A, B, C \ (A \sim B \Leftrightarrow B \sim A)$$

$$\forall A, B, C \ (A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$$

$$\forall A, B, C \ (A \times B)^C \sim A^C \times B^C$$

$$\forall A, B, C \ (C^B)^A \sim C^{B \times A}$$

$$\forall A, B \ \left( \begin{cases} A \sim B \\ B \sim C \end{cases} \longrightarrow A \sim C \right)$$

$$\forall A, B, f \left( \left\{ \begin{array}{l} f : A \longrightarrow B \\ f - \text{инъекция.} \end{array} \right\} \Leftrightarrow A \overset{f}{\leq} B \right)$$

$$\forall A, B \left( \exists f A \overset{f}{\leq} B \Leftrightarrow A \leq B \right)$$

$$\forall A, B \left( A \leq B \Leftrightarrow A \text{ вложено в } B. \right)$$

**Теорема Кантора-Бернштейна-Шрёдера:**

$$\forall A, B \left( \left\{ \begin{array}{l} A \leq B \\ B \leq A \end{array} \right\} \Leftrightarrow A \sim B \right)$$

$$\forall A A \leq A$$

$$\forall A, C \left( \exists B \left\{ \begin{array}{l} A \leq B \\ B \leq C \end{array} \right\} \longrightarrow A \leq C \right)$$

$$\forall A, B \left( A \leq B \Leftrightarrow \exists C \left\{ \begin{array}{l} C \subseteq B \\ C \sim A \end{array} \right\} \right)$$

$$\forall A, B \left( A \subseteq B \longrightarrow A \leq B \right)$$

$$\forall A, n \left( n \in \mathbb{N} \longrightarrow A^n \sim A^n \right)$$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$$

$$\forall A \left( A - \text{счётно.} \Leftrightarrow A \sim \mathbb{N} \right)$$

$$\forall N \overline{P(\mathbb{N})} - \text{счётно.}$$

$$\underline{2}^{\mathbb{N}} \sim P(\mathbb{N}) \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

**Принцип Дрихле:**

$$\overline{\exists n \underline{n+1} \leq \underline{n}}$$

$$\forall m, n \left( m > n \longrightarrow \overline{\underline{m} \leq \underline{n}} \right)$$

$$\forall m, n \ (m \neq n \longrightarrow \overline{m} \sim \overline{n})$$

$$\forall A \ \exists! n \ (A \sim \underline{n} \longrightarrow A \sim \underline{n})$$

$$\forall A \ (\exists n \ A \sim \underline{n} \Leftrightarrow A - \text{конечно.})$$

$$\forall A \ (\overline{A - \text{конечно.}} \Leftrightarrow A - \text{бесконечно.})$$

$$\forall A \ (\exists n \ A \sim \underline{n} \Leftrightarrow |A| = n)$$

$$\forall A \ (A - \text{счётно.} \Leftrightarrow |A| - \text{мощность множества.})$$

$$\forall m, n \ \left( m < n \longrightarrow \overline{\left\{ \begin{array}{l} f : \underline{m} \longrightarrow \underline{n} \\ f - \text{сюръекция.} \end{array} \right\}} \right)$$

$$\forall A, B, f \ \left( \left\{ \begin{array}{l} A \sim B \\ f : A \longrightarrow B \end{array} \right\} \longrightarrow (f - \text{инъекция.} \Leftrightarrow f - \text{сюръекция.}) \right)$$

$$\forall m, n \ \underline{m} \sim \underline{n} \longrightarrow m = n$$

$$\forall A \ \left( A \subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \left[ \begin{array}{l} A - \text{конечно.} \\ A - \text{счётно.} \end{array} \right] \right)$$

$$\forall B \ \left( \exists A \ \left\{ \begin{array}{l} A - \text{счётно.} \\ A \lesssim B \end{array} \right\} \Leftrightarrow B - \text{бесконечно.} \right)$$

$$\forall B \ \left( \exists A \ \left\{ \begin{array}{l} A - \text{счётно.} \\ B \lesssim A \end{array} \right\} \longrightarrow \left[ \begin{array}{l} B - \text{конечно.} \\ B - \text{счётно.} \end{array} \right] \right)$$

$$\forall B \ \left( \exists A \ \left\{ \begin{array}{l} A - \text{конечно.} \\ B \lesssim A \end{array} \right\} \longrightarrow B - \text{конечно.} \right)$$

$$\forall A, B \ \left( \left\{ \begin{array}{l} A - \text{конечно.} \\ B \lesssim A \end{array} \right\} \longrightarrow |B| \leq |A| \right)$$

$$\forall A, B \left( \begin{array}{l} A - \text{счётно.} \\ \left[ \begin{array}{l} B - \text{счётно.} \longrightarrow A \cup B - \text{счётно.} \\ B - \text{конечно.} \end{array} \right] \end{array} \right)$$

$$\forall A, B \left( \begin{array}{l} A - \text{бесконечно.} \\ \left[ \begin{array}{l} B - \text{счётно.} \longrightarrow A \cup B \sim A \\ B - \text{конечно.} \end{array} \right] \end{array} \right)$$

$$\forall A, f \left( \exists B \left\{ \begin{array}{l} A - \text{конечно.} \\ A - \text{счётно.} \longrightarrow f[A] \leq A \\ f : A \longrightarrow B \end{array} \right. \right)$$

$$\forall A \left( A - \text{конечно.} \longrightarrow \forall B \ A \cap B - \text{конечно.} \right)$$

$$\forall A \left( A - \text{конечно.} \longrightarrow \forall B \ A \setminus B - \text{конечно.} \right)$$

$$\forall A, B \left( \left\{ \begin{array}{l} A - \text{конечно.} \\ B - \text{конечно.} \end{array} \right. \longrightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \right)$$

$$\forall A, B \left( \left\{ \begin{array}{l} A - \text{конечно.} \\ B - \text{конечно.} \end{array} \right. \longrightarrow \max(|A|, |B|) \leq |A \cup B| \right)$$

$$\forall A, B \left( \left\{ \begin{array}{l} A - \text{конечно.} \\ B - \text{конечно.} \end{array} \right. \longrightarrow |A \times B| = |A||B| \right)$$

$$\forall A, B \left( \left\{ \begin{array}{l} A - \text{конечно.} \\ B - \text{конечно.} \end{array} \right. \longrightarrow |B^A| = |B|^{|A|} \right)$$

$$\forall A \left( A - \text{конечно.} \longrightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} \right)$$

$$\forall A, B \left( \left\{ \begin{array}{l} A - \text{бесконечно.} \\ B - \text{конечно.} \end{array} \right. \longrightarrow A \setminus B - \text{бесконечно.} \right)$$

$$\text{Inj}(A, B) = \left\{ f : A \longrightarrow B \mid A \overset{f}{\lesssim} B \right\}$$

$$\forall A, B, A', B' \left( \left\{ \begin{array}{l} A \sim A' \\ B \sim B' \end{array} \right\} \longrightarrow Inj(A, B) \sim Inj(A', B') \right)$$

$$\forall n, m \ n^{(m)} = \frac{n!}{(n-m)!}, m \leq n$$

$$\forall n, m \ A_n^m - \text{количество размещений длины } m \text{ из } n \text{ элементов.}$$

$$\forall A, B, n, m \ |Inj(\underline{m}, \underline{n})| = \begin{cases} 0, m > n \\ n^{(m)}, m \leq n \end{cases} = A_n^m$$

$$Bij(A, B) = \{f : A \longrightarrow B \mid A \overset{f}{\sim} B\}$$

$$\forall A, B \ Bij(A, B) \sim Bij(A, A)$$

$$\forall n \ P_n - \text{количество перестановок из } n.$$

$$\forall n \ |Bij(\underline{n}, \underline{n})| = n! = P_n$$

$$\forall n, k \ C_n^k = \mathcal{P}_k(\underline{n}) = \{x \in \mathcal{P}(\underline{n}) \mid |x| = k\}$$

$$\forall n, k \ C_n^k - \text{количество сочетаний из } n \text{ по } k.$$

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$$

$$\forall n, k \ (k \leq n \longrightarrow C_n^k = C_n^{n-k})$$

$$\forall \{A_n\} \ |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{s=1}^n (-1)^{s-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}|$$

$$\forall m, n \ |Sur(\underline{m}, \underline{n})| = \sum_{s=0}^n (-1)^s C_n^s (n-s)^m$$

$$\forall A, f, n \ \left( f - \text{беспорядок на } \underline{n} \Leftrightarrow \forall x \ \begin{cases} x \in A \longrightarrow f(x) \neq x \\ f : A \longrightarrow A \end{cases} \right)$$



$$Der(\underline{n}) = \{f : \underline{n} \longrightarrow \underline{n} \mid f - \text{беспорядок на } \underline{n}\}$$

$$|Der(\underline{n})| = n! \sum_{s=0}^n \frac{(-1)^s}{s!}$$

$$\forall f \left( \forall a, b \ f(a, b) = f(b, a) \longrightarrow \begin{array}{l} f - \text{функция, обладающая коммутативным} \\ \text{(переместительным) свойством.} \end{array} \right)$$

$$\forall f \left( \forall a, b, c \ f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c)) \longrightarrow \begin{array}{l} f - \text{функция, обладающая ассоциативным} \\ \text{(сочетательным) свойством.} \end{array} \right)$$

$$\forall f, g \left( \forall a, b, c \ f(a, g(b, c)) = g(f(a, b), g(a, c)) \longrightarrow \begin{array}{l} f - \text{функция, обладающая дистрибутивным} \\ \text{(распределительным) свойством с } g. \end{array} \right)$$

$$\forall A \ (A \sim \mathbb{N} \Leftrightarrow A - \text{счётное множество.})$$

$$\forall A, B \left( \forall a, b \ \begin{cases} a \in A \\ b \in B \Leftrightarrow A \text{ лежит левее } B. \\ a \leq b \end{cases} \right)$$

$$\forall A, B, c \left( \forall a, b \ \begin{cases} a \in A \\ b \in B \\ c \geq a \\ c \leq b \end{cases} \Leftrightarrow c \text{ разделяет } A \text{ и } B. \right)$$

$$\forall A \left( \forall B, C \ \exists a \ \begin{cases} B \subset A \\ C \subset A \\ a \in A \\ a \text{ разделяет } B \text{ и } C. \end{cases} \Leftrightarrow A - \text{полное.} \right)$$

Если разделяющих элементов в полном множестве больше одного, то их бесконечно много.

$$\forall f, g \left( \forall x \left\{ \begin{array}{l} D(f) = D(g) \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \Leftrightarrow f \text{ и } g - \text{совпадающие функции.} \right)$$

$$\forall f, x \ (f(x) = 0 \Leftrightarrow x - \text{нуль (корень) функции } f.)$$

$$\forall f \left( \forall x \left\{ \begin{array}{l} f(-x) = f(x) \\ \exists a \left[ \begin{array}{l} D(f) = (-a; a) \\ D(f) = [-a; a] \end{array} \right] \Leftrightarrow f - \text{чётная функция.} \end{array} \right\} \right)$$

$$\forall f \left( \forall x \left\{ \begin{array}{l} f(-x) = -f(x) \\ \exists a \left[ \begin{array}{l} D(f) = (-a; a) \\ D(f) = [-a; a] \end{array} \right] \Leftrightarrow f - \text{нечётная функция.} \end{array} \right\} \right)$$

$$\forall f \left( \left\{ \begin{array}{l} \overline{f - \text{чётная функция.}} \\ \overline{f - \text{нечётная функция.}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow f - \text{общего вида функция.} \right)$$

$$\forall f, A \left( \forall x_1, x_2 \left\{ \begin{array}{l} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow f - \text{возрастающая функция на } A. \right)$$

$$\forall f, A \left( \forall x_1, x_2 \left\{ \begin{array}{l} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow f - \text{невозрастающая функция на } A. \right)$$

$$\forall f, A \left( \forall x_1, x_2 \begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{убывающая функция на } A. \right)$$

$$\forall f, A \left( \forall x_1, x_2 \begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{неубывающая функция на } A. \right)$$

$$\forall f, A \left( \left[ \begin{array}{l} f - \text{функция убывающая на } A. \\ f - \text{функция возрастающая на } A. \end{array} \right] \Leftrightarrow A - \text{интервал монотонности } f. \right)$$

$$\forall f, x_0 \left( \exists A \forall x \begin{cases} x \in A \\ x_0 \in A \\ f(x_0) \leq f(x) \end{cases} \Leftrightarrow x_0 - \text{точка минимума } f. \right)$$

$$\forall f, x_0 \left( \exists A \forall x \begin{cases} x \in A \\ x_0 \in A \\ f(x_0) \geq f(x) \end{cases} \Leftrightarrow x_0 - \text{точка максимума } f. \right)$$

$$\forall f, x \left( \left[ \begin{array}{l} x - \text{точка минимума } f. \\ x - \text{точка максимума } f. \end{array} \right] \Leftrightarrow x - \text{экстремум } f. \right)$$

**Асимптота** - это прямая линия, к которой график функции неограниченно приближается при удалении точки графика в бесконечность.

#### Исследование функции:

1. Область определения функции.
2. Область значений функции.

3. Нули функции.
4. Чётная, или нечётная, или общего вида функция.
5. Интервалы монотонности функции.
6. Экстремумы функции.
7. Асимптоты функции.

$\forall \langle y \rangle, f, g \ (\forall x \ y = f(g(x)) \Leftrightarrow \langle y \rangle - \text{сложная функция.})$

$\forall f, g \ (\forall x \ f(g(x)) = x \Leftrightarrow f - \text{обратная } g \text{ функция.})$

**Алгебраическая функция** - это функция, закон соответствия которой определяется алгебраическим выражением. ( **трансцендентная функция** )

**Элементарные функции** - это основные элементарные функции и сложные функции, образованные из основных элементарных.

**Основные элементарные функции:**

1.

$$\forall \langle x \rangle, f, a \left( \begin{cases} f(x) = x^a \\ a \in R \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{степенная функция.} \right)$$

2.

$$\forall \langle x \rangle, f, a \left( \begin{cases} f(x) = a^x \\ a \in R \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{показательная функция.} \right)$$

3.

$$\forall \langle x \rangle, f, a \left( \begin{cases} f(x) = \log_a^x \\ a \in R \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{логарифмическая функция.} \right)$$

4.

$$\forall \langle x \rangle, f \left( \begin{cases} f(x) = \sin x \\ f(x) = \cos x \\ f(x) = \tan x \\ f(x) = \cot x \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{тригонометрическая функция.} \right)$$

5.

$$\forall \langle x \rangle, f \left( \begin{cases} f(x) = \arcsin x \\ f(x) = \arccos x \\ f(x) = \arctan x \\ f(x) = \operatorname{arccot} x \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{обратная тригонометрическая функция.} \right)$$

$$\forall \langle y \rangle, \langle x \rangle, P_i, n, \left( \begin{cases} y = P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} \\ a_0 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \langle y \rangle - \text{целая рациональная функция} \\ \text{(многочлен от переменной } \langle x \rangle \text{) (ЦРФ) степени } n. \end{array} \right)$$

$$\forall \langle y \rangle, \langle x \rangle, f, a \left( \begin{cases} y = f(x) = ax \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle y \rangle \text{ прямо пропорционально } \langle x \rangle. \\ \text{между } \langle y \rangle \text{ и } \langle x \rangle \text{ прямо пропорциональная зависимость.} \end{cases} \right)$$

$$\forall \langle y \rangle, \langle x \rangle, f, a, b \left( \begin{cases} y = f(x) = ax + b \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \langle y \rangle - \text{линейная ЦРФ (линейная функция).} \right)$$

$$\forall \langle y \rangle, \langle x \rangle, f, a, b \left( \begin{cases} y = f(x) = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \langle y \rangle - \text{квадратичная ЦРФ} \\ \text{(квадратный (квадратичный) трёхчлен).} \end{array} \right)$$

$$\forall \langle y \rangle, \langle x \rangle, f, a \left( \begin{cases} y = f(x) = \frac{a}{x} \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle y \rangle \text{ обратно пропорционально } \langle x \rangle. \\ \text{между } \langle y \rangle \text{ и } \langle x \rangle \text{ обратно пропорциональная зависимость.} \end{cases} \right)$$

$$\forall \langle y \rangle, x \left( y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \Leftrightarrow \langle y \rangle - \text{дробно-рациональная функция (ДРФ).} \right)$$

$$\forall \langle y \rangle, \langle x \rangle, a, b, c, d \left( \begin{cases} y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} \\ c \neq 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \langle y \rangle - \text{дробно-линейная функция.} \right)$$

**Алгебраическая иррациональная функция** - это функция, закон соответствия которой содержит извлечение корня целой степени из алгебраического выражения, содержащего аргумент.

**Определение предела функции по Гейне:**

$$\forall f, a, b \left( \forall \{x_n\} \left( \forall i \begin{cases} x_i \in D(f) \\ x_i \neq a \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \end{cases} \longrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = b \right) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \right)$$

$$\forall f, a, b \left( \forall \{x_n\} \left( \forall i \begin{cases} x_i \in D(f) \\ x_i < a \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \end{cases} \longrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = b \right) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b \right)$$

$$\forall f, a, b \left( \forall \{x_n\} \left( \forall i \begin{cases} x_i \in D(f) \\ a < x_i \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \end{cases} \longrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = b \right) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b \right)$$

$$\forall f, g, a \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\forall f, g, a \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\forall f, g, a \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$\forall g, a, b \quad \left( \exists f, h \forall i \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \\ f(i) \leq g(i) \leq h(i) \end{array} \right. \longrightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \right)$$

$$\forall a \quad \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty \right)$$

$$\forall f, g, a, c \quad \left( \exists b \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right. \longrightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c \right)$$

$$\forall f, a \quad \left( \left[ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \\ a - \text{предельная } D(f). \end{array} \right] \Leftrightarrow f - \text{непрерывна в точке } a. \right)$$

$$\forall f \exists \delta \forall x \quad \left( \exists a \left\{ \begin{array}{l} f - \text{непрерывная в } a. \\ \delta > 0 \\ x \in O_\delta(a) \end{array} \right. \longrightarrow \exists b \quad |f(x)| \leq b \right)$$

$$\forall f \exists \delta \forall x \quad \left( \exists a \left\{ \begin{array}{l} f - \text{непрерывна в } a. \\ f(a) \neq 0 \\ x \in O_\delta(a) \end{array} \right. \longrightarrow f(x) \neq 0 \right)$$

$$\forall f, g, h, a \left( \begin{cases} f - \text{непрерывная в } a. \\ g - \text{непрерывная в } a. \\ h(x) = f(x) + g(x) \end{cases} \longrightarrow h(x) - \text{непрерывная в } a. \right)$$

$$\forall f, g, h, a \left( \begin{cases} f - \text{непрерывная в } a. \\ g - \text{непрерывная в } a. \\ h(x) = f(x)g(x) \end{cases} \longrightarrow h(x) - \text{непрерывная в } a. \right)$$

$$\forall f, g, h, a \left( \begin{cases} f - \text{непрерывная в } a. \\ g - \text{непрерывная в } a. \\ g(a) \neq 0 \\ h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases} \longrightarrow h(x) - \text{непрерывная в } a. \right)$$

$$\forall h, a \left( \exists f, g \begin{cases} f - \text{непрерывная в } a. \\ g - \text{непрерывная в } f(a). \\ h(x) = g(f(x)) \end{cases} \longrightarrow h - \text{непрерывная в } a. \right)$$

$$\forall f, d \exists c \left( \exists a, b \begin{cases} f \text{ непрерывна на } [a, b] \\ c \in (a, b) \\ d \text{ между } f(a) \text{ и } f(b) \end{cases} \longrightarrow d = f(c) \right)$$

$$\forall f, a \left( \exists b, c \begin{cases} f - \text{разрывная в } a. \\ \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \neq \infty \\ \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \neq \infty \\ \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = c \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{точка разрыва первого рода } f. \right)$$



$$\left( \exists b \begin{cases} a - \text{точка разрыва первого рода.} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{точка устранимого разрыв.} \right)$$

$$\forall f, a \left( \begin{cases} f - \text{разрывная в } a. \\ a - \text{точка разрыва первого рода.} \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{точка разрыва второго рода } f. \right)$$

## Глава 10

# Числа

**Числовое кольцо** - это множество чисел, результат суммы, разности, произведения любых чисел которого принадлежит ему тоже.

**Числовое поле** - это множество чисел, результат выполнения рациональных действий над любыми числами которого принадлежит ему тоже.

### 10.1 Натуральные числа ( $\mathbb{N}$ )

$+$  — операция на числах, обладающая коммутативным свойством.

$+$  — операция на числах, обладающая ассоциативным свойством.

$*$  — операция на числах, обладающая коммутативным свойством.

$*$  — операция на числах, обладающая ассоциативным свойством.

$*$  – операция на числах, обладающая дистрибутивным свойством с  $+$ .

**Делитель  $a$**  – это число, на которое  $a$  делится без остатка.

**Кратное  $a$**  – это всякое число, которое делится на  $a$  без остатка.

$$\forall a \left( \forall b \left\{ \begin{array}{l} a > 1 \\ b|a \longrightarrow \left[ \begin{array}{l} b = \pm 1 \Leftrightarrow a - \text{простое.} \\ b = \pm a \end{array} \right] \end{array} \right. \right)$$

$$\forall a \ (\overline{a - \text{простое.}} \Leftrightarrow a - \text{составное.})$$

Простых чисел имеется бесконечное множество.

$$\forall n, \{p_n\} \left( \exists \{\alpha_n\} \forall i \left( \left\{ \begin{array}{l} i \in \mathbb{N} \\ \alpha_i \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{p_n\} - \text{все попарно различные простые числа.} \\ n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0 \\ n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots \end{array} \right. \right) \right) \Leftrightarrow$$

$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots$  – разложение на простые множители  $n$ .)

**Основная теорема арифметики:**

$\exists! \langle n \rangle \langle n \rangle$  – разложение на простые множители  $n$ .

$$\forall a, b \ (\text{НОД}(a, b) = 1 \Leftrightarrow a, b - \text{взаимно простые.})$$

$$\forall a \ (a|2 \Leftrightarrow a - \text{чётное.})$$

**Признаки делимости в 10-й системе счисления:**

1. Признак делимости на 2: последняя цифра в записи числа выражает чётное число.
2. Признак делимости на 3: сумма цифр записи числа делится на 3.
3. Признак делимости на 4: последние две цифры в записи числа выражают число, делящееся на 4.
4. Признак делимости на 5: последняя цифра в записи числа является 0 или 5.
5. Признак делимости на 9: сумма цифр записи числа делится на 9.

$$\forall a, b \text{ НОД}(a, b) \text{ НОК}(a, b) = ab$$

## 10.2 Целые числа ( $\mathbb{Z}$ )

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

**Целое алгебраическое выражение** - это алгебраическое выражение, в котором используют только сложение, вычитание, умножение.

**Положительное число** - это число, большее нуля.

**Отрицательное число** - это число, меньшее нуля.

**Противоположные числа** - это числа, отличающиеся знаком.

$$a - b = a + (-b)$$

$$a(-b) = -ab$$

**Неравенство Бернулли:**

$$\forall x, n \left( \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \geq -1 \\ n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0 \end{cases} \rightarrow (1+x)^n \geq 1+nx \right)$$

$$\forall a, b \ (a|b \Leftrightarrow a \text{ делит } b.)$$

$$\forall a, b \left( a|b \Leftrightarrow \exists c \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z} \\ c \in \mathbb{Z} \\ b = ac \end{cases} \right)$$

$$\forall a, b \left( a|b \Leftrightarrow \exists \{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \left( \exists \{p_n\} \begin{cases} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots - \text{разложение на простые множители } a \\ p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots - \text{разложение на простые множители } b \end{cases} \longrightarrow \forall i \ \alpha_i \leq \beta_i \right) \right)$$

$$\forall a \ a|a$$

$$\forall a, b \left( \begin{cases} a|b \\ b|a \end{cases} \longrightarrow a = \pm b \right)$$

$$\forall a, b, c \left( \begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases} \longrightarrow a|c \right)$$

$$\forall a, b, c \left( \begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \longrightarrow a|(b \pm c) \right)$$

$$\forall a, b \left( \begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N} \\ b \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \exists! c, d \begin{cases} d \in \mathbb{N} \\ c \in \mathbb{N} \\ a = bd + c \\ 0 \leq c < |b| \end{cases} \right)$$

$$\forall a, b, c \ (a \equiv b \pmod{c} \Leftrightarrow c|(a-b))$$

$$\forall a, b, c \ (a \equiv b \pmod{c} \Leftrightarrow a \% c = b \% c)$$

$$\forall a, b, c, d, i \ \left( \begin{cases} a \equiv b \pmod{i} \\ c \equiv d \pmod{i} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a+c \equiv b+d \pmod{i} \\ ac \equiv bd \pmod{i} \end{cases} \right)$$

$$\forall a, b, c, d \ (a \equiv b \pmod{c} \longrightarrow a^d \equiv b^d \pmod{c})$$

$$\forall a, b, d \ \left( \begin{cases} d|a \\ d|b \\ \forall d' \begin{cases} d'|a \\ d'|b \end{cases} \longrightarrow d'|d \end{cases} \Leftrightarrow d = \text{НОД}(a, b). \right)$$

$$\forall \{p_n\}, \{\alpha_n\}, \begin{cases} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots - \text{разложение на простые} \\ \text{множители } a \\ p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots - \text{разложение на простые} \\ \text{множители } b \end{cases} \longrightarrow \text{НОД}(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \dots$$

$$\forall a, b, d \ \left( \begin{cases} a|d \\ b|d \\ \forall d' \begin{cases} a|d' \\ b|d' \end{cases} \longrightarrow d|d' \end{cases} \Leftrightarrow d = \text{НОК}(a, b). \right)$$

$$\text{НОД}(0, 0) = 0$$

$$\forall a \text{ НОД}(a, 0) = a$$

$$\forall a, b, q \ q \in \mathbb{Z} \longrightarrow \text{НОД}(a + bq, b) = \text{НОД}(a, b)$$

$$\forall a, b \text{ НОД}(a \% b, b) = \text{НОД}(a, b)$$

$$\forall a, b \text{ НОД}\left(\frac{a}{\text{НОД}(a, b)}, \frac{b}{\text{НОД}(a, b)}\right) = 1$$

$$\forall a, c \left( \exists b \left\{ \begin{array}{l} a|bc \\ \text{НОД}(a, b) = 1 \end{array} \right. \longrightarrow a|c \right)$$

$$\forall x, y, m \left( \exists a \left\{ \begin{array}{l} \text{НОД}(a, m) = 1 \\ ax \equiv ay \pmod{m} \end{array} \right. \longrightarrow x \equiv y \pmod{m} \right)$$

$$\forall x, y, m \ (\exists a \ ax \equiv ay \pmod{am} \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{m})$$

**Тождество Безу:**

$$\forall a, b \ (\text{НОД}(a, b) = 1 \longrightarrow \exists x, y \ ax + by = 1)$$

$$\forall a, b \left( \exists x, y \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \longrightarrow ax + by = \text{НОД}(a, b) \right)$$

$$\forall a, m \quad (\exists x \, ax \equiv 1 \pmod{m} \Leftrightarrow \text{НОД}(a, m) = 1)$$

$$\forall x > 0 \quad \varphi(x) - \text{функция Эйлера.}$$

$$\forall x > 0 \quad \varphi(x) = \text{количество чисел взаимно простых с } x \text{ из } 1, 2, \dots, x-1.$$

$$\forall x \quad (x - \text{простое} \rightarrow \varphi(x) = x - 1)$$

$$\forall a, b \quad (\text{НОД}(a, b) = 1 \rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b))$$

**Теорема Эйлера:**

$$\forall a, x \quad \left( \begin{cases} \text{НОД}(a, x) = 1 \\ x > 1 \end{cases} \rightarrow a^{\varphi(x)} \equiv 1 \pmod{x} \right)$$

$$\forall x, y, a \quad \left( \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \text{НОД}(a, m) = 1 \\ x \equiv y \pmod{\varphi(m)} \end{cases} \rightarrow a^x \equiv a^y \pmod{m} \right)$$

**Малая теорема Ферма:**

$$\forall a, p \quad \left( \begin{cases} p - \text{простое} \\ \text{НОД}(a, p) = 1 \end{cases} \rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \right)$$



$$\forall p, a \quad (p - \text{простое} \longrightarrow a^p \equiv a \pmod{p})$$

$$\forall \{p_n\}, \{ \alpha_n \}, \{ \beta_n \}, a, b \quad \left( \begin{array}{l} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots - \text{разложение на простые} \\ \text{множители } a \\ p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots - \text{разложение на простые} \\ \text{множители } b \end{array} \longrightarrow \text{НОК}(a, b) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \dots \right)$$

**Алгоритм Евклида:**

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a \% b, b) = \text{НОД}(a \% b, b \% (a \% b)) = \dots = \text{НОД}(\dots, 0)$$

**Расширенный алгоритм Евклида:**

$$\left\{ \begin{array}{l} r_t = au_t + bv_t \\ r_t = r_{t-2} - r_{t-1}q_{t-1} \\ r_0 = a \\ r_1 = b \\ u_t = u_{t-2} - u_{t-1}q_{t-1} \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ v_t = v_{t-2} - v_{t-1}q_{t-1} \\ v_0 = 0 \\ v_1 = 1 \end{array} \right.$$

$$\forall \langle x \rangle, \langle y \rangle, b, c \quad \left( \exists a \left\{ \begin{array}{l} ax + by = c \\ a = 0 \\ b \mid c \end{array} \right. \longrightarrow \forall t \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = \frac{c}{b} \end{array} \right. \right)$$

$$\forall \langle x \rangle, \langle y \rangle, a, b, c \left( \begin{array}{l} ax + by = c \\ a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ \text{НОД}(a, b) \mid c \end{array} \longrightarrow \exists a', b', c', u, v \forall t \left( \begin{array}{l} a' = \frac{a}{\text{НОД}(a, b)} \\ b' = \frac{b}{\text{НОД}(a, b)} \\ c' = \frac{c}{\text{НОД}(a, b)} \\ a'u + b'v = 1 \\ x = uc' - b't \\ y = vc' + a't \\ t \in \mathbb{Z} \end{array} \right) \right)$$

$$\forall a, b, c \left( \exists \langle x \rangle, \langle y \rangle \left\{ \frac{ax + by = c}{\text{НОД}(a, b) \mid c} \longrightarrow \forall t, k \left( \begin{array}{l} t \in \mathbb{Z} \\ k \in \mathbb{Z} \longrightarrow \overline{at + bk = c} \end{array} \right) \right\} \right)$$

$$\forall A, m, x' \left( \begin{array}{l} A(x) \equiv 0 \pmod{m} \\ 0 \leq x' < m \end{array} \Leftrightarrow x' - \text{решение сравнения } A(x) \equiv 0 \pmod{m} \right)$$

$$\forall a, c, m \left( \exists x' \text{ } x' - \text{решение } ax \equiv c \pmod{m} \Leftrightarrow \text{НОД}(a, m) \mid C \right)$$

$$\forall \langle x \rangle, a, c, m \left( \begin{array}{l} ax \equiv c \pmod{m} \\ \text{НОД}(a, m) \mid c \end{array} \longrightarrow \exists a', c', m' \forall t \left( \begin{array}{l} t \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq t < \text{НОД}(a, m) \longrightarrow \begin{array}{l} a' = \frac{a}{\text{НОД}(a, m)} \\ c' = \frac{c}{\text{НОД}(a, m)} \\ m' = \frac{m}{\text{НОД}(a, m)} \\ x = a^{-1}c' \% m' + m't \end{array} \end{array} \right) \right)$$

$$\forall \langle x \rangle, \begin{array}{l} \{c_n\}, \\ \{m_n\} \end{array} \left( \begin{array}{l} \begin{array}{l} x \equiv c_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv c_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv c_n \pmod{m_n} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \exists \{M_n\}, \\ \{x_n\}, \\ \{b_n\} \\ \forall i \end{array} \left\{ \begin{array}{l} M_i = m_1 m_2 \dots m_{i-1} m_{i+1} \dots m_n \\ x_i - \text{решение } M_i b_i \equiv c_i \\ x = (x_1 M_1 + x_2 M_2 + \dots + x_n M_n) \% m_1 m_2 \dots m_n \end{array} \right. \end{array} \right)$$

### 10.3 Рациональные числа ( $\mathbb{Q}$ )

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

**Рациональное число** - это число, представимое в виде  $\frac{a}{b}$ , где числитель  $a \in \mathbb{Z}$ , а знаменатель  $b \in \mathbb{N}$ .

Рациональные числа образуют поле.

$\mathbb{Q}$  всюду плотно в  $\mathbb{R}$ .

**Арифметические (рациональные) действия:** сложение, вычитание, умножение, деление.

**Рациональное алгебраическое выражение** - это алгебраическое выражение, в котором используют только рациональные действия.

**Дробное алгебраическое выражение** - это рациональное алгебраическое выражение, в записи которого используют деление на буквенные выражения.

**Алгебраическая дробь** - это это алгебраическое выражение, имеющее вид частного от деления двух целых алгебраических выражений.

**Дробное число** - это рациональное число, числитель которого не делится на знаменатель нацело.

**Целая часть числа** - это наибольшее целое число, не превосходящее данного ( $[x]$ ).

**Дробная часть числа** - это разность между данным числом и его целой частью ( $(x)$ ).

$$x - [x] \geq 0$$

$$x - [x] < 1$$

Разложение рационального числа на сумму целой и дробной частей взаимно однозначно.

**Десятичная дробь** - это дробь, у которой знаменатель представляет собой натуральную степень числа 10.

Всякое рациональное число может быть представлено бесконечной десятичной периодической дробью взаимно однозначно.

## 10.4 Иррациональные числа (I)

Всякое иррациональное число может быть представлено бесконечной десятичной непериодической дробью взаимно однозначно.

**Иррациональные алгебраические выражения** - это алгебраическое выражение, в записи которого используются знаки радикала из буквенного выражения.

**Корень находится в простейшей форме, если:**

1. Он не содержит иррациональности в знаменателе.
2. Нельзя сократить его показатель с показателем подкоренного выражения.
3. Все возможные множители вынесены из-под корня.

**Подобные корни** - это корни, отличающиеся только коэффициентами.

## 10.5 Действительные числа (R)

$$Q \subset R$$

$$I \subset R$$

Действительные числа образуют поле.

Множество действительных чисел упорядочено.

Множество действительных чисел непрерывно.

$$\mathbb{R} - \text{полное.}$$

**Аксиома Архимеда:**

$$\forall a \exists n \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N} \\ na \geq 1 \end{cases}$$

$$\forall x, y \left( \begin{cases} x < y \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \exists z, w \begin{cases} z \in \mathbb{Q} \\ w \in \mathbb{I} \\ x < z < y \\ x < w < y \end{cases} \right)$$

Всякое десятичное число определяет действительное число взаимно однозначно.

$$\forall a \left( \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ a \geq 0 \end{cases} \longrightarrow |a| = a \right)$$

$$\forall a \left( \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ a < 0 \end{cases} \longrightarrow |a| = -a \right)$$

Многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение линейных двучленов вида  $x - a$  и квадратных трёхчленов вида  $x^2 + px + q$ .

**n-ая степень числа a** - это произведение n сомножителей, равных a. (  $a^n$  )

a - основание степени.

n - показатель степени.

Возведение отрицательного числа в иррациональную степень не определено.

Возведение нуля в не положительную степень не определено.

$$a^x = a^y \longrightarrow x = y$$

**Корень n-ой степени из числа a** - это число, n-ая степень которого равна a. (  $\sqrt[n]{a}$  )

**Извлечение корня степени из а** - это отыскание корня из а.

**Арифметический корень (арифметическое значение корня)** - это положительный корень чётной степени из положительного числа.

Корень чётной степени по умолчанию арифметический.

$$\left[ \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = a \\ n - \text{нечётное.} \end{cases} \right. \quad \left[ \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = |a| \\ n - \text{чётное.} \end{cases} \right.$$

**Квадратный корень:**

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$$

**Кубический корень:**

$$\sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$$

**Логарифм числа N по основанию а** - это показатель степени, в которую нужно возвести а, чтобы получить N.

$$\left[ \begin{cases} a^{\log_a N} = N \\ N > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \right.$$

Если число и основание логарифма лежат по одну сторону от единицы, то этот логарифм положителен, и наоборот.

**Потенцирование** - это возведение числа, от которого взят логарифм, в этот логарифм.

Если основание больше единицы, то большее число имеет больший логарифм.

Если основание меньше единицы, то большее число имеет меньший логарифм.

**Десятичный логарифм** - это логарифм по основанию 10.

$$\log_{10} N = \lg N$$

**Характеристика** - это целая часть десятичного логарифма.

**Мантисса** - это дробная часть десятичного логарифма.

**Открытый интервал (интервал)  $(a; b)$**  - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a < x \leq b$ .

**Окрестность точки  $x_0$   $(x_0 - h; x_0 + h)$**  - это интервал длины  $2h$  серединой  $x_0$ .

$$\forall a, \epsilon \quad (a - \epsilon; a) \cup (a; a + \epsilon) - \text{проколота } \epsilon\text{-окрестность точки } a.$$

**Замкнутый интервал (отрезок)  $[a; b]$**  - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a \leq x \leq b$ .

**Полуоткрытый интервал  $[a; b)$  или  $(a; b]$**  - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a \leq x < b$  или  $a < x \leq b$  соответственно.

**Бесконечный интервал  $(a; \infty)$ , или  $[a; \infty)$ , или  $(-\infty; b)$ , или  $(-\infty; b]$ , или  $(-\infty; \infty)$**  - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих  $a < x$ , или  $a \leq x$ , или  $x < b$ , или  $x \leq b$ , или  $x \in \mathbb{R}$  соответственно. ( **конечный интервал** )

$$\forall a, b \quad |[a; b]| - \text{длина отрезка } [a; b].$$

$$\forall a, b \quad |[a; b]| = b - a$$

$$\forall A, a, b \quad (A = [a; b] \longrightarrow \overline{A} - \text{счётное множество.})$$

Мощность  $[0; 1]$  — мощность континуума.

$$\forall C, B \quad \left( \left( \forall A, a \begin{cases} A - \text{интервал.} \\ A \subset B \\ a \in A \end{cases} \longrightarrow a \in C \right) \Leftrightarrow C \text{ всюду плотно в } B. \right)$$

## 10.6 Комплексные числа (C)

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Комплексные числа образуют поле.

**Комплексное число:**

$$z = a + bi$$

a - действительная часть

b - мнимая часть или коэффициент при мнимой единице.

$$i^2 = -1$$

**Алгебраические действия:** рациональные действия и извлечение корня.

$$z_1 = z_2, \text{ если } a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2.$$

$$a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2, \text{ если } z_1 = z_2.$$

**Чисто мнимое число** - это комплексное число, у которого действительная часть равна нулю.



**Комплексно сопряжённые числа  $z$  и  $\bar{z}$**  - это два комплексных числа, действительные части которых равны, а мнимые противоположны.

$$z = \overline{\bar{z}}$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

Значения многочлена при комплексного сопряжённых значениях комплексно сопряжены между собой.

Если многочлен имеет комплексный корень, то и сопряжённое число является его корнем.

Если  $P_n(z) = (z - \alpha)^k P_{n-k}(z)$ ,  $P_{n-k}$  не делится на  $z - \alpha$  нацело, то  $k$  - кратность корня  $\alpha$ .

Сумма кратности корней равна степени многочлена.

Если  $P_n(z) = (z - \alpha)^k P_{n-k}(z)$ ,  $P_{n-k}$  не делится на  $z - \alpha$  нацело и  $k = 1$ , то корень  $\alpha$  однократный (простой).

Если  $P_n(z) = (z - \alpha)^k P_{n-k}(z)$ ,  $P_{n-k}$  не делится на  $z - \alpha$  нацело и  $k > 1$ , то корень  $\alpha$  кратный.

**Абсолютная величина (модуль)  $z$ :**

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

**Алгебраическая форма комплексного числа:**

$$z = a + bi$$

**Тригонометрическая форма комплексного числа:**

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

$r$  - модуль.

$\phi$  - аргумент.

**Главное значение аргумента:**

$$\arg z$$

$$\begin{cases} \arg z \geq 0 \\ \arg z < 2\pi \end{cases}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$$

**Формула Муавра:**

$$z^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

$$\forall z, r, n, \varphi \left( z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \longrightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right)$$

$$\forall \varphi \quad \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$$

## Глава 11

# Матрицы

$$\forall m, n \left( \begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow M_{m \times n} - \text{множество матриц размера (порядка) } m \text{ на } n. \right)$$

$$\forall A, m, n \left( \begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \\ A - \text{множество.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} M_{m \times n}(A) - \text{множество матриц размера (порядка) } m \text{ на } n, \\ \text{элементы которых принадлежат } A. \end{matrix} \right)$$

$$\forall n \ M_n = M_n$$

$$\forall n \ M_n - \text{множество квадратных матриц размера (порядка) } n.$$

$$\forall A, n \ M_n(A) = M_n(A)$$

$$\forall A, n \ M_n(A) - \text{множество квадратных матриц размера (порядка) } n, \text{ элементы которых принадлежат } A.$$

$$\forall A, m, n \ (A \in M_{m \times n} \Leftrightarrow A = A_{m \times n}.)$$

$$\forall A \ (A \in M_n \Leftrightarrow A_n = A_n)$$

$$\forall A, m, n \left( A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \in M_{m \times n} \right)$$

$$\forall A, i, j \left( \exists m, n \begin{cases} A \in M_{m \times n} \\ i \in \mathbb{N} \\ i \leq m \\ j \in \mathbb{N} \\ j \leq n \end{cases} \Leftrightarrow [A]_{ij} - \text{элемент матрицы с индексами } i \text{ и } j. \right)$$

$$\forall A, n \begin{cases} A_n - \text{столбец } n \text{ матрицы } A. \\ A_n - \text{строка } n \text{ матрицы } A. \end{cases}$$

$$\forall A \ (\exists m \ A \in M_{m \times 1} \Leftrightarrow A - \text{матрица-строка (вектор-строка).})$$

$$\forall A \ (\exists n \ A \in M_{1 \times n} \Leftrightarrow A - \text{матрица-столбец (вектор-столбец).})$$

$$\forall A \ (A = 0 \Leftrightarrow A - \text{нулевая.})$$

$$\forall A \ (\forall i, j \ [A]_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = 0)$$

$$\forall B \ (\forall A \ AB = BA = A \Leftrightarrow B - \text{единичная.})$$

$E$  — единичная матрица.

$$\forall i, j \ (i \neq j \Leftrightarrow [E]_{ij} = 0)$$

$$\forall i, j \ (i = j \Leftrightarrow [E]_{ij} = 1)$$

$\forall i, j \ E_{ij}$  — матричная единица.

$$\forall i, j, k, l \ \left( \begin{cases} k \neq i \\ l \neq j \end{cases} \Leftrightarrow [E_{ij}]_{kl} = 0 \right)$$

$$\forall i, j, k, l \ \left( \begin{cases} k = i \\ l = j \end{cases} \Leftrightarrow [E_{ij}]_{kl} = 1 \right)$$

$$\forall A \ (\exists \lambda \ A = \lambda E \Leftrightarrow A - \text{скалярная (диагональная).})$$

$$\forall A \ (\exists n \ A^n = 0 \Leftrightarrow A - \text{нильпотентная.})$$

$$\forall A, B, m, n \left( \forall i, j \begin{cases} A_{m \times n} \\ B_{m \times n} \\ [A]_{ij} = [B]_{ij} \end{cases} \Leftrightarrow A = B \right)$$

$$\forall A \ A^T - \text{транспонированная.}$$

$$\forall A, B \ (\forall i, j \ [A]_{ij} = [B]_{ji} \Leftrightarrow B = A^T)$$

$$\forall A, n \left( A = A_n \longrightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T \right)$$

$$\forall A, B \ (B = \tilde{A} \Leftrightarrow B - \text{союзная к } A.)$$

$$\forall A \ (AB = E \Leftrightarrow B - \text{обратная к } A.)$$

$$\forall A, B \ (B = A^{-1} \Leftrightarrow B - \text{обратная к } A.)$$

$$\forall A \ (A - \text{обратная.} \longrightarrow \exists n \ A \in M_n)$$

$$\forall A \ A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A}$$

## 11.1 Операции над матрицами

$$\forall A, B, m, n, i, j \left( \begin{cases} A \in M_{m \times n} \\ B \in M_{m \times n} \end{cases} \longrightarrow [A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} \right)$$

$+$  — операция на матрицах, обладающая коммутативным свойством.

$+$  — операция на матрицах, обладающая ассоциативным свойством.

$$\forall A, \lambda, i, j \ (\lambda \in \mathbb{F} \longrightarrow [\lambda A]_{ij} = \lambda[A]_{ij})$$

$*$  — операция на матрице и числе, обладающая ассоциативным свойством.

$*$  — операция на матрице и числе, обладающая дистрибутивным свойством с  $+$  относительно матриц и относительно чисел.

$$\forall \{\lambda_n\} A, B, i, j \ (B = \lambda_i A_i + \dots + \lambda_j A_j \longrightarrow B \text{ — линейная комбинация } A_i, \dots, A_j.)$$

$$\forall \{\lambda_n\}, A, B, i, j \left( \exists k \begin{cases} B = \lambda_i A_i + \dots + \lambda_j A_j \\ \lambda_k \neq 0 \end{cases} \longrightarrow B \text{ — нетривиальная.} \right)$$

$$\forall A, i, j \left( \exists B \begin{cases} B \text{ — линейная комбинация } A_i, \dots, A_j. \\ B \text{ — нетривиальная.} \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A_i, \dots, A_j \text{ — линейно зависимые.} \right)$$

$$\forall A, i, j \left( \overline{A_i, \dots, A_j - \text{линейно зависимые.}} \Leftrightarrow A_i, \dots, A_j - \text{линейно независимые.} \right)$$

$$\forall A, B, m, r, n, i, j \left( \begin{cases} A \in M_{m \times r} \\ B \in M_{r \times n} \end{cases} \longrightarrow [AB]_{ij} = \sum_{k=1}^r [A]_{ik} [B]_{kj} \right)$$

$*$  — операция на матрицах, обладающая ассоциативным свойством.

$*$  — операция на матрицах, обладающая дистрибутивным свойством с  $+$ .

$$\forall A, B \quad (AB)^T = B^T A^T$$

$$\forall A, B \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

### Элементарные преобразования матриц:

1. Перестановка местами любых двух строк или столбцов матрицы.
  - (a) Переставить местами  $i$  и  $j$  строки - это единичную матрицу, где переставили местами  $i$  и  $j$  строки или столбцы, умножить на матрицу.
  - (b) Переставить местами  $i$  и  $j$  столбцы - это умножить матрицу на единичную матрицу, где переставили местами  $i$  и  $j$  строки или столбцы.
2. Умножение любой строки или столбца матрицы на константу, отличную от нуля.
  - (a) Умножить строку  $i$  на константу, отличную от нуля, - это единичную матрицу, где  $i$  строку или столбец умножили на эту константу, умножить на матрицу.



- (b) Умножить столбец  $i$  на константу, отличную от нуля, - это умножить матрицу на единичную матрицу, где  $i$  строку или столбец умножили на эту константу.
3. Прибавление к любой строке или столбцу матрицы этой матрицы другой строки или столбца, умноженной на некоторую константу.
- (a) Прибавить к строке  $i$  строку  $j$ , умноженную на константу, - это единичную матрицу, где прибавили к  $i$  строке строку  $j$ , умноженную на константу, умножить на матрицу.
- (b) Прибавить к столбцу  $i$  столбец  $j$ , умноженный на константу, - это умножить матрицу на единичную матрицу, где прибавили к  $i$  столбцу столбец  $j$ , умноженный на константу.

## 11.2 Перестановки

$$\forall \{a_r\}, a, n \left( \forall k, l \begin{cases} a_k \in \mathbb{N} \\ a_k \neq n \\ k \neq l \longrightarrow a_k \neq a_l \\ a = a_1, a_2, \dots, a_n \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{перестановка.} \right)$$

$$\forall f, n \left( \begin{cases} (f(1), f(2), \dots, f(n)) - \text{перестановка.} \\ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{подстановка.} \right)$$

$$\forall n \ (n \in \mathbb{N} \longrightarrow S_n - \text{множество подстановок длины } n.)$$

$$\forall f \left( \forall i \exists n \begin{cases} f \in S_n \\ f(f(\dots f(i) \dots)) = i \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{цикл (циклическая подстановка).} \right)$$

$$\forall f \left( \begin{cases} f \in S_2 \\ f - \text{цикл.} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{транспозиция.} \right)$$

$$\forall f, n \quad (n - \text{сумма инверсий первой и второй строки подстановки } f. \longrightarrow \text{sgn } f = (-1)^n)$$

$$\forall f \quad \left( \begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ \text{Сумма инверсий первой и второй строки } f \text{ чётна.} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{чётная.} \right)$$

$$\forall f, g \quad \left( \begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ g - \text{подстановка.} \end{cases} \longrightarrow fg - \text{умножение (композиция) подстановок.} \right)$$

$$\forall f, g \quad \left( \begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ g - \text{подстановка.} \end{cases} \longrightarrow fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(g(1)) & f(g(2)) & \dots & f(g(n)) \end{pmatrix} \right)$$

$$\forall f, g \quad \left( \begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ g - \text{подстановка.} \end{cases} \longrightarrow \text{sgn}(fg) = \text{sgn } f * \text{sgn } g \right)$$

$$\forall f \quad \left( f - \text{подстановка.} \longrightarrow \begin{cases} d(f) - \text{декремент.} \\ d(f) = \text{длина } f - \\ \text{(число независимых циклов } f + \\ \text{количество символов, оставляемых на месте).} \\ d(f) = \text{количество действительно перемещаемых символов} - \\ \text{количество независимых циклов.} \\ d(f) = \text{сумма длин циклов} - \text{количество циклов.} \end{cases} \right)$$

$$\forall f \quad (f - \text{подстановка.} \longrightarrow \text{sgn } f = (-1)^{d(f)})$$

$$id - \text{подстановка.}$$

$id$  — тождественная.

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\forall f \ f^{-1} = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \dots & f(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\forall n, \ k \ (k \in \mathbb{N} \longrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)^{nk} = id)$$

При возведении подстановки в степень, кратную НОКу длин всех её циклов, будет получаться тождественная подстановка.

### 11.3 Определители

$\forall A \ det A$  — определитель  $A$ .

$$\forall A, \ n \left( A \in M_n \longrightarrow det A = \sum_{f \in S_n} sgn f * [A]_{1f(1)} * [A]_{2f(2)} * \dots * [A]_{nf(n)} \right)$$

$\forall A \ (det A = 0 \Leftrightarrow A \text{ — вырожденная.})$

$\forall A \ (det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ — невырожденная.})$

$$\forall A \ det A^T = det A$$

$$\forall A, A', i \det(A_1, \dots, A'_i + A''_i, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A''_i, \dots, A_n)$$

$$\forall A, A', i, \lambda \det(A_1, \dots, \lambda A'_i, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n)$$

$$\forall A, i, j \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = -\det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

$$\forall A (\exists i A_i = 0 \longrightarrow \det A = 0)$$

$$\forall A (\exists k, l A_k = A_l \longrightarrow \det A = 0)$$

$$\forall A (\exists i A_i - \text{линейная комбинация остальных.} \longrightarrow \det A = 0)$$

$$\forall \{\lambda_n\}, A \det(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n) = \\ \det(A_1, A_2, \dots, A_i + (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_{i-1} A_{i-1} + \lambda_{i+1} A_{i+1} + \dots + \lambda_n A_n), \dots, A_n)$$

$$\det E = 1$$

**Разложение по строке:**

$$\forall A, j, n \left( A = A_n \longrightarrow \det A = \sum_{i=1}^n [A]_{ij} A_{ij} \right)$$

**Разложение по столбцу:**

$$\forall A, i, n \left( A = A_n \longrightarrow \det A = \sum_{j=1}^n [A]_{ij} A_{ij} \right)$$

**Фальшивое разложение:**

$$\forall A, n, k, i \left( \left\{ \begin{array}{l} A \in M_n \\ k \neq i \end{array} \right\} \longrightarrow \sum_{j=0}^n [A]_{ij} A_{kj} = 0 \right)$$

$$\forall A, n, k, i \left( \left\{ \begin{array}{l} A \in M_n \\ k \neq j \end{array} \right\} \longrightarrow \sum_{i=0}^n [A]_{ij} A_{ik} = 0 \right)$$

$$\forall A, n \left( \left\{ \begin{array}{l} A = A_n \\ \text{Под главной диагональю } A \text{ только нули.} \end{array} \right\} \longrightarrow \det A = \prod_{i=1}^n [A]_{ii} \right)$$

10) Если  $A$  и  $B$  – квадратные матрицы, то для блочной матрицы:  $\det \left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \det A \cdot \det B$

$$\forall A, B \left( \left\{ \begin{array}{l} A \in M_n \\ B \in M_n \end{array} \right\} \longrightarrow \det(AB) = \det A \det B \right)$$

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} - \text{определитель Вандермонда.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

$$\forall A \quad (\exists B \quad B = A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0)$$

## 11.4 Миноры, алгебраические дополнения и ранги

$$\forall B, \quad M, \quad k \quad \left( \exists A \quad \begin{cases} A - \text{матрица из элементов матрицы } B, \\ \text{стоящих на пересечении } k \text{ строк и } k \text{ столбцов.} \Leftrightarrow M - \text{минор } k \text{ порядка матрицы } B. \\ M = \det A \end{cases} \right)$$

$$\forall B, \quad M \quad \left( \exists A \quad \begin{cases} A - \text{матрица, на главной диагонали которой стоят} \\ \text{только все или не все элементы} \\ \text{главной диагонали } B. \\ M = \det A \end{cases} \Leftrightarrow M - \text{главный минор матрицы } B. \right)$$

$$\forall A \quad Rg A - \text{ранг } A.$$

$$\forall A \quad Rg A = \text{наибольший порядок отличного от } 0 \text{ минора матрицы } A.$$

$$\begin{aligned} \forall A \quad Rg A = \\ \text{максимальное число линейно независимых строк} = \\ \text{максимальное число линейно независимых столбцов.} \end{aligned}$$

$$\forall A, \quad A' \quad (A' - \text{матрица, полученная из } A \text{ элементарными преобразованиями.} \longrightarrow Rg A = Rg A')$$

$$\forall A \left( \exists n \left\{ \begin{array}{l} A \in M_n \\ RgA = n \end{array} \right\} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \right)$$

$$\forall A \left( \exists n \left\{ \begin{array}{l} A \in M_n \\ A_1, A_2, \dots, A_n - \text{линейно независимые.} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \right)$$

$$\forall A, M \left( \left\{ \begin{array}{l} M - \text{минор порядка } RgA \text{ матрицы } A. \\ M \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow M - \text{базисный минор матрицы } A. \right)$$

$$\forall A, i \left( A_i - \text{то, из чего составлен базисный минор матрицы } A. \longrightarrow A_i - \text{базисный.} \right)$$

$$\forall A, i \left( \overline{A_i - \text{базисный.}} \longrightarrow A_i - \text{линейная комбинация базисных матрицы } A. \right)$$

$$\forall M, M' \left( \exists A \left\{ \begin{array}{l} M - \text{минор матрицы } A. \\ M' - \text{минор, составленный} \\ \text{из тех же строк и столбцов, что и } M, \\ \text{и добавленных одной строки и одного столбца} \\ \text{матрицы } A. \end{array} \right\} \Leftrightarrow M' - \text{окаймляющий минор } M. \right)$$

$$\forall A, M, k \left( \left\{ \begin{array}{l} M - \text{минор } k \text{ порядка матрицы } A. \\ \text{Все окаймляющие миноры минора } M = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow RgA = k \right)$$

$$\forall A, B, M \left( \left\{ \begin{array}{l} A - \text{матрица из элементов матрицы } B, \\ \text{кроме строк и столбцов } B, \\ \text{из которых составлен минор } M. \\ M' = \det A \end{array} \right\} \Leftrightarrow M' - \text{дополнительный минор к минору } M. \right)$$

$$\forall M, M^* \left( \begin{array}{l} \exists A, \alpha, n \left\{ \begin{array}{l} A = A_n \\ \alpha = \text{сумма номеров строк и столбцов } A, \\ \text{из которых составлен минор } M. \\ M' - \text{дополнительный минор к минору } M. \\ M^* = (-1)^\alpha M' \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} M^* - \text{алгебраическое дополнение} \\ \text{к минору } M. \end{array} \end{array} \right)$$

$\forall A, i, j$   $M_{ij}$  — минор элемента  $[A]_{ij}$  матрицы  $A$ .

$$\forall A, n, i, j \left( \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} A = A_n \\ A - \text{матрица из элементов матрицы } B, \Leftrightarrow \det A = M_{ij} \\ \text{кроме строки } i \text{ и столбца } j. \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$\forall A, i, j$   $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $[A]_{ij}$ .

$$\forall A, i, j \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

## 11.5 Форматы матриц

**Ведущий элемент** - это первый ненулевой элемент строки.

**Ступенчатый вид матрицы** - это матрица, номера столбцов ведущих элементов которой возрастают, а нулевые строки, если они есть, расположены внизу.

**Улучшенный (приведённый, канонический) ступенчатый вид матрицы** - это ступенчатый вид матрицы, в котором все ведущие элементы - единицы, над которыми в столбце все элементы - нули.

Любую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к улучшенному ступенчатому виду.



$$\forall A, B, C \left( \exists m, r, n \begin{cases} B \in M_{m \times r} \\ C \in M_{r \times n} \\ r = \text{Rg} B = \text{Rg} C \\ A = BC \end{cases} \Leftrightarrow BC - \text{скелетное разложение } A. \right)$$

$$\forall A, B, C \left( \exists m, r, n \begin{cases} B - \text{нижняя треугольная матрица матрицы.} \\ C - \text{верхняя треугольная матрица матрицы.} \\ A = BC \end{cases} \Leftrightarrow BC - \text{LU разложение } A. \right)$$

$$\forall A \text{ (} A - \text{ строго регулярная.} \Leftrightarrow A - \text{ имеет LU разложение.)}$$

## 11.6 СЛАУ относительно матриц

$$\forall a \left( \begin{cases} a - \text{СЛАУ.} \\ a - \text{имеет решение.} \end{cases} \longrightarrow a - \text{совместная.} \right)$$

$$\forall a \left( \begin{cases} a - \text{СЛАУ.} \\ a - \text{не имеет решений.} \end{cases} \longrightarrow a - \text{несовместная.} \right)$$

$$\forall A, x, b \left( Ax = b - \text{СЛАУ.} \longrightarrow \forall i \begin{cases} \Delta_i = \det(A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n) \\ \Delta = \det A \\ x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \end{cases} \right)$$

$$\forall A, x, b \left( \exists i \begin{cases} Ax = b - \text{СЛАУ.} \\ \Delta = 0 \\ \Delta_i \neq 0 \end{cases} \longrightarrow Ax = b - \text{несовместная.} \right)$$

$$\forall A, x, b \left( \begin{cases} Ax = b - \text{СЛАУ.} \\ \Delta \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} Ax = b - \text{совместная.} \\ Ax = b - \text{имеет единственное решение.} \end{cases} \right)$$

**Теорема Кронекера-Капелли:**

$$\forall A, b \ (RgA = Rg(A|b) \Leftrightarrow \exists x \ Ax = b - \text{совместная.})$$

$$\forall A, l, n \left( \begin{cases} A_l, A_{l+1}, \dots, A_{l+n-RgA-1} - \text{л.н.з. столбцы.} & A_l, A_{l+1}, \dots, A_{l+n-RgA-1} - \\ A_l, A_{l+1}, \dots, A_{l+n-RgA-1} - \text{решения } Ax = 0. & \Leftrightarrow \text{фундаментальная система} \\ n - \text{число неизвестных.} & \text{решений (ФСР) } Ax = 0. \end{cases} \right)$$

$$\forall A, x \ (Ax = 0 \longrightarrow \exists C \ C - \text{ФСР } Ax = 0.)$$

$$\forall C, x \ \exists n \ (\exists m \ C_{m \times n} - \text{ФСР } Ax = 0. \longrightarrow x = \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n.)$$

$$\forall C, x \ \exists \{\alpha_n\}, n \left( \exists m \ \begin{cases} C_{m \times n} - \text{ФСР } Ax = 0. \\ Ax' = b \end{cases} \longrightarrow x' + \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n - \text{все решения } Ax = b. \right)$$

## Глава 12

# Векторы

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \left( \vec{a}, \vec{b} - \text{лежат на одной прямой или на параллельных.} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} - \text{коллинеарны.} \right)$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \left( \begin{array}{l} \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{лежат на прямых,} \\ \text{параллельных некоторой плоскости.} \end{array} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарны.} \right)$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \left( \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} \parallel \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \right)$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \left( \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = \vec{b} \\ \text{Начало } \vec{a}, \text{ начало } \vec{b} \text{ лежат на одной прямой.} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} - \text{скользящие.} \right)$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \left( \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = \vec{b} \\ \text{Начало } \vec{a} = \text{начало } \vec{b} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} - \text{связанные.} \right)$$

$+$  — операция на векторах, обладающая коммутативным свойством.

$+$  — операция на векторах, обладающая ассоциативным свойством.

$*$  — операция на векторе и числе, обладающая коммутативным свойством.

$*$  — операция на векторе и числе, обладающая ассоциативным свойством.

$*$  — операция на векторе и числе, обладающая дистрибутивным свойством с  $+$  относительно векторов и относительно чисел.

$\forall \vec{b} \left( \vec{b} \neq 0 \Leftrightarrow \exists \vec{a} \quad |\vec{a}| * \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \right)$  — ортогональная проекция  $\vec{a}$  на направление  $\vec{b}$ .

Ортогональная проекция уважает сложение векторов.

Ортогональная проекция уважает умножение вектора на число.

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \quad \left( \vec{a}, \vec{b} \right) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \quad \left( \vec{a}, \vec{b} \right) = \left( \vec{b}, \vec{a} \right)$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \quad (\alpha \vec{a}, \vec{b}) = \alpha (\vec{a}, \vec{b})$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \quad (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$$

$$\forall \vec{a} \quad (\vec{a} \neq 0 \Leftrightarrow 0 < (\vec{a}, \vec{a}))$$

$$\forall \vec{a} \quad (\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 0 = (\vec{a}, \vec{a}))$$

$$\forall \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \quad \left( \forall \vec{b} \quad \begin{cases} \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k - \text{л.н.з.} \\ \vec{b} - \text{линейная комбинация } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k. \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k - \text{базис.} \right)$$

$$\forall \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \quad \left( \forall \vec{b} \quad \begin{cases} \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k - \text{базис} \\ i = j \longrightarrow (a_i, a_j) = 1 \\ i \neq j \longrightarrow (a_i, a_j) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k - \text{ортонормированный базис (ОНБ).} \right)$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \quad (\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + \dots \text{ в ОНБ.}$$

$\Gamma$  — матрица Грама.

$$\forall \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \quad \left( \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 - \text{базис.} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & (\vec{e}_1, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & (\vec{e}_2, \vec{e}_3) \\ (\vec{e}_3, \vec{e}_1) & (\vec{e}_3, \vec{e}_2) & (\vec{e}_3, \vec{e}_3) \end{pmatrix} = \Gamma \right)$$

$$\forall \dots \left( \left\{ \begin{array}{l} \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 - \text{базис.} \\ \vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ \vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 \end{array} \right. \right)$$

$$\forall \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \left( \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} - \text{ортогональный базис.} \Leftrightarrow \forall \vec{a} \begin{array}{l} \cos \angle (\vec{a}, \vec{i}), \cos \angle (\vec{a}, \vec{j}), \cos \angle (\vec{a}, \vec{k}) - \\ \text{направляющие косинусы } \vec{a}. \end{array} \right)$$

$$\forall \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \left( \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} - \text{ортогональный базис.} \Leftrightarrow \forall \vec{a} \cos^2 \angle (\vec{a}, \vec{i}) + \cos^2 \angle (\vec{a}, \vec{j}) + \cos^2 \angle (\vec{a}, \vec{k}) = 1 \right)$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \left( \text{Со стороны } \vec{c} \text{ кратчайший поворот от } \vec{a} \text{ к } \vec{b} \text{ против часовой.} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{правая.} \right)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle (\vec{a}, \vec{b})$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \left( \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{правая.} \right)$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \left( \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \right)$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha (\vec{a} \times \vec{b})$$

$\times$  — операция на векторах, обладающая дистрибутивным свойством с  $+$  относительно векторов.

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad (0 < (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) \longrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{правая.})$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad ((\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) < 0 \longrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{левая.})$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad ((\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарны.})$$

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \text{ в ОНБ.}$$

$$\forall \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \quad \left( \exists a, b, c \begin{cases} \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} - \text{ОНБ.} \\ O = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow (O \times \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) - \text{прямоугольная} \right. \\ \left. \text{декартова система координат (ПДСК).} \right)$$

## Глава 13

# Линейная алгебра

$$\forall \lambda, \mu \in F \quad x, y \in V \quad \left\{ \begin{array}{l} (V, +) - \text{абелева группа.} \\ F - \text{поле.} \\ * : V \times F \longrightarrow V \\ 1x = x \\ (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \\ (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} V - \text{векторное пространство над} \\ \text{полем } F. \end{array}$$

$$\exists F \quad \forall \lambda \in F \quad x, y \in U \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y \in U \\ \lambda x \in U \end{array} \right. \Leftrightarrow U \subseteq V \quad (U \text{ подпространство } V)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1, \dots, \lambda_k \in F \\ v_1, \dots, v_k \in V \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k - \text{линейная комбинация} \\ \text{векторов } v_1, \dots, v_k \text{ с коэффициентами } \lambda_1, \dots, \lambda_k. \end{array}$$

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid \forall i \quad \lambda_i \in F \} - \text{линейная оболочка.}$$

$$\exists \{ \lambda \}, i \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \\ \lambda_i \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow v_1, \dots, v_k \text{ линейно зависимы (л.з.).}$$

$$\forall x \quad \exists \{ \alpha \} \quad x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \Leftrightarrow e_1, \dots, e_n - \text{полная система векторов.}$$

Выяснить по набору векторов, являются ли они л.з.

Алгоритм:



1. Записать координаты данных векторов по столбцам в матрицу.
2. Найти ступенчатый вид.
3. Есть свободные переменные  $\Leftrightarrow$  л.з.

$e_1, \dots, e_n \in V$ :

$e_1, \dots, e_n$  - базис  $\Leftrightarrow$  любые 2 из 3 достаточно в обратную сторону:

1.  $e_1, \dots, e_n$  л.н.з.
2.  $e_1, \dots, e_n$  - полная система векторов.
3.  $\dim V = n$

$e_1, \dots, e_n$  - базис в  $V$ .  $\Leftrightarrow \dim V = n$  ( $n$  - размерность  $V$ )

$\dim \mathbb{R}^n = n$

$\begin{cases} e_1, \dots, e_n \text{ - базис в } V. \\ x \in V \end{cases} \longrightarrow \exists! \{\alpha\} \quad x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

$\begin{cases} e_1, \dots, e_n \text{ - базис в } V. \\ x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \end{cases} \longrightarrow \forall i \quad \alpha_i \text{ - координата } x \text{ относительно базиса } e_1, \dots, e_n.$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  - стандартный базис.

$C_{e \rightarrow e'} = ((e'_1)_e \dots (e'_n)_e)$

$x_e = C_{e \rightarrow e'} x_{e'}$

$C_{e \rightarrow e'}^{-1} = C_{e' \rightarrow e}$

**Цепное правило:**

$C_{e \rightarrow e'} = C_{e \rightarrow \text{ст.}} C_{\text{ст.} \rightarrow e'}$

$$L_1 + L_2 = \left\{ x_1 + x_2 \mid \begin{cases} x_1 \in L_1 \\ x_2 \in L_2 \end{cases} \right\}$$

$$\dim L_1 \cap L_2 + \dim L_1 + L_2 = \dim L_1 + \dim L_2$$

Найти  $L_1 \cap L_2$ .

Алгоритм:

1. Задать через  $L_1$  СЛАУ.
2. Задать через  $L_2$  СЛАУ.
3. Склеить СЛАУ.
4. Решить полученную СЛАУ.

$$U \oplus W = V \Leftrightarrow \begin{cases} U + W = V \\ U \cap W = \{0\} \end{cases}$$

$$U \oplus W = V \Leftrightarrow \begin{cases} \forall v \in V \exists! u \in U \ w \in W \ v = u + w \\ u = \text{proj}_u v \\ w = \text{proj}_w v \end{cases}$$

$$\text{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$$

$$\text{Skew}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A = -A^T\}$$

$$\text{Sym}_n(\mathbb{R}) \oplus \text{Skew}_n(\mathbb{R}) = M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \frac{C + C^T}{2} + \frac{C - C^T}{2} = C$$