

Математика

Мы

2 декабря 2022 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Примечания</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Логика</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Алгебраические выражения</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Измерения</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Последовательности</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Функции</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>Числа</b>	<b>29</b>
7.1	Натуральные числа ( $\mathbb{N}$ ) . . . . .	29
7.2	Целые числа ( $\mathbb{Z}$ ) . . . . .	31
7.3	Рациональные числа ( $\mathbb{Q}$ ) . . . . .	36
7.4	Иррациональные числа ( $\mathbb{I}$ ) . . . . .	37
7.5	Действительные числа ( $\mathbb{R}$ ) . . . . .	37
7.6	Комплексные числа ( $\mathbb{C}$ ) . . . . .	41
<b>8</b>	<b>Матрицы</b>	<b>44</b>
8.1	Операции над матрицами . . . . .	48
8.2	Перестановки . . . . .	50
8.3	Определители . . . . .	52
8.4	Миноры, алгебраические дополнения и ранги . . . . .	55
8.5	Форматы матриц . . . . .	57
8.6	СЛАУ относительно матриц . . . . .	58

# Глава 1

## Примечания

Чтобы понять, что означают ' $<$ ', ' $>$ ', попробуйте их убрать.

## Глава 2

# Логика

$$\forall A, B \left( A \longrightarrow B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Из посылки } A \text{ вытекает вывод } B. \\ A - \text{достаточное условие для } B. \\ B - \text{необходимое условие для } A. \end{cases} \right)$$

$$\forall A, B \left( \begin{cases} A \longrightarrow B \\ B \longrightarrow A \end{cases} \Leftrightarrow A \text{ и } B - \text{логически эквивалентные утверждения.} \right)$$

$$\forall A, B ((A \longrightarrow B) - \text{ прямое утверждение.} \Leftrightarrow (B \longrightarrow A) - \text{ обратное утверждение.})$$

$$\forall A, B ((A \longrightarrow B) - \text{ прямое утверждение.} \Leftrightarrow (\overline{A} \longrightarrow \overline{B}) - \text{ противоположное утверждение.})$$

$$\forall A, B ((A \longrightarrow B) - \text{ прямое утверждение.} \Leftrightarrow (\overline{B} \longrightarrow \overline{A}) - \text{ противоположное обратному утверждение.})$$

$$\forall A, B \left( \begin{cases} A - \text{ прямое утверждение.} \\ B - \text{ противоположное обратному утверждение.} \end{cases} \longrightarrow A \Leftrightarrow B \right)$$

**Доказательство от противного:**

$$\forall A \exists B (B \wedge (\bar{A} \longrightarrow \bar{B}) \longrightarrow A)$$

**Принцип математической индукции (ПМИ):**

$$\forall f \left( \forall n \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ f(0) \\ f(n) \longrightarrow f(n+1) \end{array} \right. \longrightarrow \forall n f(n) \right)$$

$\forall f \text{ } Prog(f)$  – прогрессивность свойства  $f$ .

$$\forall f, g \left( \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ g : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ f(g) = \forall n (\forall m (m < n \longrightarrow g(m)) \longrightarrow g(n)) \end{array} \right. \Leftrightarrow f = Prog(g) \right)$$

**Принцип сильной индукции (ПСИ):**

$$\forall f (Prog(f) \longrightarrow \forall n f(n))$$

**Принцип наименьшего числа (ПНЧ):**

$$\forall f \left( \exists m \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ f(m) \end{array} \right. \longrightarrow \exists n \forall a \left\{ \begin{array}{l} f(n) \\ a < n \longrightarrow \overline{f(a)} \end{array} \right. \right)$$

## Глава 3

# Алгебраические выражения

**Алгебраическое выражение** - это выражение, состоящее из чисел, буквенных величин и алгебраических операций над ними.

**Область допустимых значений (ОДЗ)** - это множество всех наборов числовых значений букв, входящих в данное алгебраическое выражение.

**Тождественно равные алгебраические выражения** - это алгебраические выражения, имеющие равные ОДЗ и равные числовые значения на этом ОДЗ.

**Одночлен** - это алгебраическое выражение, состоящее из произведения числового коэффициента и буквенных величин.

**Стандартный вид одночлена:**

1. Один числовой коэффициент.
2. Нет повторяющихся буквенных величин.

**Подобные одночлены** - это одночлены, отличающиеся только числовыми коэффициентами.

**Многочлен (полином)** - это алгебраическое выражение, состоящее из суммы одночленов.

**Стандартный вид многочлена:**

1. Все одночлены стандартного вида.
2. Нет подобных одночленов.

**Формулы сокращённого умножения:**

1. Квадрат суммы.  

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
2. Разность квадратов.  

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
3. Куб суммы.  

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
4. Сумма кубов.  

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

**Неполный квадрат разности:**

$$a^2 - ab + b^2$$

$$\forall n, k \left( \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{N} \\ k \leq n \end{cases} \longrightarrow C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right)$$

$$\forall n, k \left( \begin{cases} n \in \mathbb{C} \\ k \in \mathbb{N} \\ k \leq n \end{cases} \longrightarrow C_n^k = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)}{k!} \right)$$

$$\forall n \ C_n^0 = 1$$

$$\forall n \ C_n^n = 1$$

$$\forall n, k \ C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

$$\forall x, n \ (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$$

**Бином Ньютона:**

$$\forall a, b, n \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$\forall A, B, Q, R \ \left( \begin{cases} 0 \leq \deg R < \deg Q \\ A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) - \text{частное при делении } A(x) \text{ на } B(x). \\ R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } B(x). \end{cases} \right)$$

$$\forall A, B, Q, R \ \left( \begin{cases} Q(x) - \text{частное при делении } A(x) \text{ на } B(x). \\ R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } B(x). \longrightarrow \deg Q = \deg A - \deg B \\ \deg B < \deg A \end{cases} \right)$$

$$\forall A, B, Q, R \ \left( \begin{cases} Q(x) - \text{частное при делении } A(x) \text{ на } B(x). \\ R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } B(x). \longrightarrow \deg Q = 0 \\ \deg A \leq \deg B \end{cases} \right)$$

$$\forall R, A, \alpha \ (R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } (x - \alpha). \longrightarrow R(x) = A(\alpha))$$

**Теорема Безу:**

$$\forall R \ \left( \exists A, x, \alpha \ \begin{cases} R(x) - \text{остаток при делении } A(x) \text{ на } (x - \alpha). \longrightarrow R(x) = 0 \\ \alpha - \text{корень } A. \end{cases} \right)$$



**Основная теорема алгебры:**

$$\forall A \exists z \left( \begin{cases} A(x) - \text{многочлен.} \\ z \in \mathbb{C} \end{cases} \longrightarrow z - \text{корень } A. \right)$$

$$\forall \{a_n\}, \{x_n\} \left( \begin{array}{l} \exists P \left\{ \begin{array}{l} P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \\ \forall i \quad x_i - \text{корень } P(x). \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$$\forall A \quad (0 < \deg A \Leftrightarrow A - \text{нетривиальный.})$$

$$\forall A \left( \exists B, C \left\{ \begin{array}{l} A(x) = B(x)C(x) \\ B - \text{нетривиальный.} \Leftrightarrow A(x) - \text{приводимый.} \\ C - \text{нетривиальный.} \end{array} \right. \right)$$

$$\forall A \quad (\deg A = 1 \longrightarrow A - \text{неприводимый над } \mathbb{C}.)$$

$$(1 < \deg A \longrightarrow A - \text{приводимый над } \mathbb{C}.)$$

$$\forall A \exists \{z_n\}, \{\alpha_n\}, a, k \left( A(z) - \text{многочлен.} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \deg A = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ a - \text{старший коэффициент } A. \\ A(z) = a(z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \dots (z - z_k)^{\alpha_k} \end{array} \right. \right)$$

$$\forall A \quad (\deg A = 1 \longrightarrow A - \text{неприводимый над } \mathbb{R}.)$$

$$\forall A \left( \begin{cases} \deg A = 2 \\ D(A) < 0 \end{cases} \longrightarrow A - \text{неприводимый над } \mathbb{R}. \right)$$

$$\forall A \left( \begin{cases} 2 < \deg A \\ D(A) < 0 \end{cases} \longrightarrow A - \text{приводимый над } \mathbb{R}. \right)$$

## Глава 4

# Измерения

**Величина** - это объект, который может быть охарактеризован числом в результате измерения.

**Постоянная величина** - это величина, множество значений которой состоит из одного элемента.

**Переменная величина** - это величина, множество значений которой состоит более чем из одного элемента.

**Область изменения** - это множество значений, принимаемых переменной величиной.

## Глава 5

# Последовательности

$$\forall f \ (\exists A \ f : \mathbb{N} \longrightarrow A \Leftrightarrow f - \text{последовательность.})$$

$$\forall \langle n \rangle, \langle x_n \rangle, \ f \ \left( \begin{cases} f - \text{последовательность.} \\ f(n) = x_n \end{cases} \Leftrightarrow \{x_n\} \right)$$

$$\forall \langle x_n \rangle \ \{x_n\} - \text{последовательность.}$$

$$\forall \{x_n\} \ (\forall k, \ l \ (k < l \longrightarrow x_k < x_l) \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{возрастающая последовательность.})$$

$$\forall \{x_n\} \ (\forall k, \ l \ (k < l \longrightarrow x_k \geq x_l) \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{невозрастающая последовательность.})$$

$$\forall \{x_n\} \ (\forall k, \ l \ (k < l \longrightarrow x_k > x_l) \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{убывающая последовательность.})$$

$$\forall \{x_n\} (\forall k, l (k < l \longrightarrow x_k \leq x_l) \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{неубывающая последовательность.})$$

$$\forall \{x_n\}, M (\forall k |x_k| \leq M \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{ограниченная последовательность значением } M.)$$

$$\forall \{x_n\}, M (\forall k x_k \leq M \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{ограниченная сверху последовательность значением } M.)$$

$$\forall \{x_n\}, M (\forall k x_k \geq M \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{ограниченная снизу последовательность значением } M.)$$

$$\forall \{x_n\}, a (\{x_n\} \Rightarrow a \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{последовательность, стабилизирующаяся к } a.)$$

$$\forall \{x_n\}, a \left( \exists k \forall m, l \begin{cases} x_m \in \mathbb{Z} \\ l > k \longrightarrow \{x_n\} \Rightarrow a \\ x_l = a \end{cases} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, M \left( \forall m \begin{cases} x_m \in \mathbb{Z} \\ \{x_n\} - \text{неубывающая последовательность.} \\ \{x_n\} - \text{ограниченная сверху последовательность значением } M. \end{cases} \longrightarrow \exists a \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \leq M \\ \{x_n\} \Rightarrow a \end{cases} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, M, a \left( \forall m \begin{cases} x_m \in \mathbb{R} \\ \{x_n\} - \text{ограниченная сверху последовательность значением } M. \\ \text{каждая соответствующая цифра } \{x_n\} \\ \Rightarrow \\ \text{каждая соответствующая цифра } a \end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \Rightarrow a \right)$$

$$\forall \langle n \rangle, \langle x_n \rangle, a \left( \begin{array}{l} \{x_n\} \\ x_n = a^{(n)} \end{array} \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{последовательность десятичных приближений } a. \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a, b \left( \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ \{x_n\} = \{a^{(n)} + b^{(n)}\} \end{array} \longrightarrow \{x_n\} \Rightarrow a + b \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a, b \left( \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ a > b > 0 \\ \{x_n\} = \{a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n})\} \end{array} \longrightarrow \{x_n\} \Rightarrow a - b \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a, b \left( \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ \{x_n\} = \{a^{(n)} b^{(n)}\} \end{array} \longrightarrow \{x_n\} \Rightarrow ab \right)$$

$$\forall a, b \left( \begin{array}{l} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ \{x_n\} = \left\{ \left( \frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}} \right)^{(n)} \right\} \end{array} \longrightarrow \{x_n\} \Rightarrow \frac{a}{b} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ стремится к } a \text{ как к своему пределу.} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall e \exists l \forall k \left\{ \begin{array}{l} |a - x_k| < e \\ k > l \end{array} \right. \right)$$

$$\forall \{x_n\}, M \left( \begin{array}{l} x_m \in \mathbb{R} \\ x_m > 0 \\ \{x_n\} - \text{неубывающая последовательность.} \\ \{x_n\} - \text{ограниченная сверху} \\ \text{последовательность значением } M. \end{array} \longrightarrow \exists a \begin{cases} a \leq M \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \end{cases} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a \left( \forall m \begin{cases} x_m \in \mathbb{R} \\ \{x_n\} = \{a^{(n)}\} \end{cases} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right)$$

$$\forall \{x_n\} \left( \exists a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{сходящаяся последовательность.} \right)$$

$$\forall \{x_n\} \left( \exists a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \longrightarrow \{x_n\} - \text{ограниченная последовательность.} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a \left( \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \longrightarrow \exists l \forall k \begin{cases} k > l \\ \begin{cases} a > 0 \\ x_k > \frac{a}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ x_k < \frac{a}{2} \end{cases} \end{cases} \end{array} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\}, a, b \left( \forall k \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \longrightarrow a \leq b \\ x_k \leq y_k \end{cases} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, a \left( \forall k \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \\ x_k \leq y_k \leq z_k \end{cases} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, a \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a| \right)$$

$$\forall a, b \left( \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow |a + b| \leq |a| + |b| \right)$$

$$\forall a, b \left( \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow |a - b| \geq ||a| - |b|| \right)$$

$$\forall A, M \ (M = \sup A \Leftrightarrow M - \text{точная верхняя граница } A.)$$

$$\forall A, M \ (M = \inf A \Leftrightarrow M - \text{точная нижняя граница } A.)$$

$$\forall A, M \left( \forall x, M' \exists y \begin{cases} x \in A \\ x \leq M \\ y \in A \\ M' < y \leq M \end{cases} \Leftrightarrow M = \sup A \right)$$

$$\forall A, M \left( \forall x, M' \exists y \begin{cases} x \in A \\ x \geq M \\ y \in A \\ M' > y \geq M \end{cases} \Leftrightarrow M = \inf A \right)$$

$$\forall A \left( \forall B, C \begin{cases} B \in A \\ C \in A \\ \left[ \begin{array}{l} B \subset C \\ C \subset B \end{array} \right] \end{cases} \Leftrightarrow A - \text{система вложенных отрезков.} \right)$$



$$\forall \{A_n\} \left( \forall i, j \begin{cases} i < j \\ A_j \subset A_i \end{cases} \Leftrightarrow \{A_n\} - \text{последовательность вложенных отрезков.} \right)$$

$$\forall \{A_n\} \left( \forall e \exists i \begin{cases} e \in \mathbb{R} \\ e > 0 \\ \{A_n\} - \text{последовательность} \\ \text{вложенных отрезков.} \\ |A_i| < e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \{A_n\} - \text{стягивающаяся последовательность} \\ \text{вложенных отрезков.} \end{matrix} \right)$$

$$\forall A \left( A - \text{система вложенных отрезков.} \longrightarrow \exists x \forall B \begin{cases} B \in A \\ x \in B \end{cases} \right)$$

**Принцип полноты Кантора:**

$$\forall \{A_n\} \left( \{A_n\} - \text{стягивающаяся последовательность вложенных отрезков.} \longrightarrow \exists x \forall i \begin{cases} x \in A_i \\ x \text{ единственен.} \end{cases} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\} \left( \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \\ \{y_n\} - \text{ограниченная.} \end{cases} \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0 \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$$

**Второй замечательный предел:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\forall A, a \left( \exists \{x_n\} \forall n \begin{cases} x_n \in A \\ x_n \neq a \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{предельная точка } A. \right)$$

## Глава 6

# Функции

$\forall X, Y \quad X \times Y$  — декартово произведение  $X$  и  $Y$ .

$$\forall X, Y \quad \left( X \times Y \Leftrightarrow \forall \langle x \rangle, \langle y \rangle \begin{cases} x \in X \\ y \in Y \\ X \times Y = \{(x, y)\} \end{cases} \right)$$

$$\forall \langle x \rangle, \langle y \rangle, f, X, Y \quad \left( \forall z, w \begin{cases} X = \{x\} \\ Y = \{y\} \\ z \in X \\ w \in Y \\ x = z \longrightarrow y = w \\ f = X \times Y \end{cases} \Leftrightarrow y = f(x) \right)$$

$\forall f \quad D(f)$  — область определения  $f$ .

$\forall f \quad E(f)$  — область значений  $f$ .

$$\forall \langle x \rangle, f, X \left( f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \langle x \rangle - \text{аргумент (независимая переменная) } f. \\ f - \text{функция от } \langle x \rangle. \end{cases} \right)$$

$$\forall \langle x \rangle, f, X \ (f(x) \Leftrightarrow X = \{x\} \longrightarrow X = D(f))$$

$$\forall \langle y \rangle, f, x \ (y = f(x) \Leftrightarrow \langle y \rangle - \text{функция (зависимая переменная) } f.)$$

$$\forall \langle y \rangle, f, Y, x \ (y = f(x) \Leftrightarrow Y = \{y\} \longrightarrow Y = E(f))$$

$$\forall \langle y \rangle, \langle x \rangle, f \left( y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y - \text{образ } x. \\ x - \text{прообраз } y. \end{cases} \right)$$

$$\forall f, X, Y \left( f : X \longrightarrow Y \Leftrightarrow \begin{cases} X = D(f) \\ Y = E(f) \end{cases} \right)$$

$$\forall f, X, Y \left( f : X \longrightarrow Y \Leftrightarrow \begin{cases} Y - \text{образ } X. \\ X - \text{прообраз } Y. \end{cases} \right)$$

$$\forall f, A \left( \forall y \begin{cases} A = \{y\} \\ y \in E(f) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{сюръекция (накрытие)}. \right)$$

$$\forall f \ (\forall x, y \ (f(x) = f(y) \longrightarrow x = y) \Leftrightarrow f - \text{инъекция (вложение).})$$

$$\forall f \left( \left( \begin{array}{l} f - \text{сюръекция (накрытие).} \\ f - \text{инъекция (вложение).} \end{array} \right) \Leftrightarrow f - \text{биекция (взаимно-однозначное соответствие).} \right)$$

$$\forall A, B \ (A \sim B \Leftrightarrow A \text{ и } B - \text{равномощные.})$$

$$\forall f, A, B \left( \left( \begin{array}{l} f : A \longrightarrow B \\ f - \text{биекция.} \end{array} \right) \Leftrightarrow A \sim B \right)$$

$$\forall f \left( \forall a, b \ f(a, b) = f(b, a) \longrightarrow \begin{array}{l} f - \text{функция, обладающая коммутативным} \\ \text{(переместительным) свойством.} \end{array} \right)$$

$$\forall f \left( \forall a, b, c \ f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c)) \longrightarrow \begin{array}{l} f - \text{функция, обладающая ассоциативным} \\ \text{(сочетательным) свойством.} \end{array} \right)$$

$$\forall f, g \left( \forall a, b, c \ f(a, g(b, c)) = g(f(a, b), g(a, c)) \longrightarrow \begin{array}{l} f - \text{функция, обладающая дистрибутивным} \\ \text{(распределительным) свойством с } g. \end{array} \right)$$

$$\forall A \ A \sim A$$

$$\forall A, B, C \ (A \sim B \Leftrightarrow B \sim A)$$

$$\forall A, B \left( \left( \begin{array}{l} A \sim B \\ B \sim C \end{array} \right) \longrightarrow A \sim C \right)$$

$$\forall A \ (A \sim \mathbb{N} \Leftrightarrow A - \text{счётное множество.})$$

$$\forall A, B \left( \forall a, b \begin{cases} a \in A \\ b \in B \Leftrightarrow A \text{ лежит левее } B. \\ a \leq b \end{cases} \right)$$

$$\forall A, B, c \left( \forall a, b \begin{cases} a \in A \\ b \in B \\ c \geq a \\ c \leq b \end{cases} \Leftrightarrow c \text{ разделяет } A \text{ и } B. \right)$$

$$\forall A \left( \forall B, C \exists a \begin{cases} B \subset A \\ C \subset A \\ a \in A \\ a \text{ разделяет } B \text{ и } C. \end{cases} \Leftrightarrow A - \text{полное.} \right)$$

Если разделяющих элементов в полном множестве больше одного, то их бесконечно много.

$$\forall f, g \left( \forall x \begin{cases} D(f) = D(g) \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f \text{ и } g - \text{совпадающие функции.} \right)$$

$$\forall f, x \ (f(x) = 0 \Leftrightarrow x - \text{нуль (корень) функции } f.)$$

$$\forall f \left( \forall x \begin{cases} f(-x) = f(x) \\ \exists a \begin{cases} D(f) = (-a; a) \\ D(f) = [-a; a] \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{чётная функция.} \end{cases} \right)$$

$$\forall f \left( \forall x \begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ \exists a \begin{cases} D(f) = (-a; a) \Leftrightarrow f - \text{нечётная функция.} \\ D(f) = [-a; a] \end{cases} \end{cases} \right)$$

$$\forall f \left( \overline{\begin{cases} f - \text{чётная функция.} \\ f - \text{нечётная функция.} \end{cases}} \Leftrightarrow f - \text{общего вида функция.} \right)$$

$$\forall f, A \left( \forall x_1, x_2 \begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{возрастающая функция на } A. \right)$$

$$\forall f, A \left( \forall x_1, x_2 \begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{невозрастающая функция на } A. \right)$$

$$\forall f, A \left( \forall x_1, x_2 \begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{убывающая функция на } A. \right)$$

$$\forall f, A \left( \forall x_1, x_2 \begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{неубывающая функция на } A. \right)$$

$$\forall f, A \left( \begin{cases} f - \text{функция убывающая на } A. \\ f - \text{функция возрастающая на } A. \end{cases} \Leftrightarrow A - \text{интервал монотонности } f. \right)$$

$$\forall f, x_0 \left( \exists A \forall x \begin{cases} x \in A \\ x_0 \in A \\ f(x_0) \leq f(x) \end{cases} \Leftrightarrow x_0 - \text{точка минимума } f. \right)$$

$$\forall f, x_0 \left( \exists A \forall x \begin{cases} x \in A \\ x_0 \in A \\ f(x_0) \geq f(x) \end{cases} \Leftrightarrow x_0 - \text{точка максимума } f. \right)$$

$$\forall f, x \left( \begin{cases} x - \text{точка минимума } f. \\ x - \text{точка минимума } f. \end{cases} \Leftrightarrow x - \text{экстремум } f. \right)$$

**Асимптота** - это прямая линия, к которой график функции неограниченно приближается при удалении точки графика в бесконечность.

**Исследование функции:**

1. Область определения функции.
2. Область значений функции.
3. Нули функции.
4. Чётная, или нечётная, или общего вида функция.
5. Интервалы монотонности функции.
6. Экстремумы функции.
7. Асимптоты функции.

$$\forall \langle y \rangle, f, g \ (\forall x \ y = f(g(x)) \Leftrightarrow \langle y \rangle - \text{сложная функция.})$$

$$\forall f, g \ (\forall x \ f(g(x)) = x \Leftrightarrow f - \text{обратная } g \text{ функция.})$$

**Алгебраическая функция** - это функция, закон соответствия которой определяется алгебраическим выражением. ( **трансцендентная функция** )



**Элементарные функции** - это основные элементарные функции и сложные функции, образованные из основных элементарных.

**Основные элементарные функции:**

1.

$$\forall \langle x \rangle, f, a \left( \begin{cases} f(x) = x^a \\ a \in R \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{степенная функция.} \right)$$

2.

$$\forall \langle x \rangle, f, a \left( \begin{cases} f(x) = a^x \\ a \in R \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{показательная функция.} \right)$$

3.

$$\forall \langle x \rangle, f, a \left( \begin{cases} f(x) = \log_a^x \\ a \in R \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{логарифмическая функция.} \right)$$

4.

$$\forall \langle x \rangle, f \left( \begin{cases} f(x) = \sin x \\ f(x) = \cos x \\ f(x) = \tan x \\ f(x) = \cot x \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{тригонометрическая функция.} \right)$$

5.

$$\forall \langle x \rangle, f \left( \begin{cases} f(x) = \arcsin x \\ f(x) = \arccos x \\ f(x) = \arctan x \\ f(x) = \text{arccot } x \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{обратная тригонометрическая функция.} \right)$$

$$\forall \langle y \rangle, \langle x \rangle, P_i, n, \left( \begin{cases} y = P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} \\ a_0 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \langle y \rangle - \text{целая рациональная функция} \\ (\text{многочлен от переменной } \langle x \rangle) \text{ (ЦРФ) степени } n. \end{matrix} \right)$$

$$\forall \langle y \rangle, \langle x \rangle, f, a \left( \begin{cases} y = f(x) = ax \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle y \rangle \text{ прямо пропорционально } \langle x \rangle. \\ \text{между } \langle y \rangle \text{ и } \langle x \rangle \text{ прямо пропорциональная зависимость.} \end{cases} \right)$$

$$\forall \langle y \rangle, \langle x \rangle, f, a, b \left( \begin{cases} y = f(x) = ax + b \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \langle y \rangle - \text{линейная ЦРФ (линейная функция).} \right)$$

$$\forall \langle y \rangle, \langle x \rangle, f, a, b \left( \begin{cases} y = f(x) = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle y \rangle - \text{квадратичная ЦРФ} \\ \text{(квадратный (квадратичный) трёхчлен).} \end{cases} \right)$$

$$\forall \langle y \rangle, \langle x \rangle, f, a \left( \begin{cases} y = f(x) = \frac{a}{x} \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle y \rangle \text{ обратно пропорционально } \langle x \rangle. \\ \text{между } \langle y \rangle \text{ и } \langle x \rangle \text{ обратно пропорциональная зависимость.} \end{cases} \right)$$

$$\forall \langle y \rangle, x \left( y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \Leftrightarrow \langle y \rangle - \text{дробно-рациональная функция (ДРФ).} \right)$$

$$\forall \langle y \rangle, \langle x \rangle, a, b, c, d \left( \begin{cases} y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} \\ c \neq 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \langle y \rangle - \text{дробно-линейная функция.} \right)$$

**Алгебраическая иррациональная функция** - это функция, закон соответствия которой содержит извлечение корня целой степени из алгебраического выражения, содержащего аргумент.

**Определение предела функции по Гейне:**

$$\forall f, a, b \left( \forall \{x_n\} \left( \forall i \begin{cases} x_i \in D(f) \\ x_i \neq a \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \end{cases} \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = b \right) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \right)$$

$$\forall f, a, b \left( \forall \{x_n\} \left( \forall i \left\{ \begin{array}{l} x_i \in D(f) \\ x_i < a \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \end{array} \right. \longrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = b \right) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b \right)$$

$$\forall f, a, b \left( \forall \{x_n\} \left( \forall i \left\{ \begin{array}{l} x_i \in D(f) \\ a < x_i \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \end{array} \right. \longrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = b \right) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b \right)$$

$$\forall f, g, a \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\forall f, g, a \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\forall f, g, a \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$\forall g, a, b \left( \exists f, h \forall i \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b \\ f(i) \leq g(i) \leq h(i) \end{array} \right. \longrightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \right)$$

$$\forall a \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty \right)$$

$$\forall f, g, a, c \left( \exists b \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \end{array} \right. \longrightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c \right)$$

$$\forall f, a \left( \left[ \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)}{a - \text{предельная } D(f)}. \right] \Leftrightarrow f - \text{непрерывна в точке } a. \right)$$

$$\forall f \exists \delta \forall x \left( \exists a \left\{ \begin{array}{l} f - \text{непрерывная в } a. \\ \delta > 0 \\ x \in O_\delta(a) \end{array} \right. \longrightarrow \exists b |f(x)| \leq b \right)$$

$$\forall f \exists \delta \forall x \left( \exists a \left\{ \begin{array}{l} f - \text{непрерывна в } a. \\ f(a) \neq 0 \\ x \in O_\delta(a) \end{array} \right. \longrightarrow f(x) \neq 0 \right)$$

$$\forall f, g, h, a \left( \left\{ \begin{array}{l} f - \text{непрерывная в } a. \\ g - \text{непрерывная в } a. \\ h(x) = f(x) + g(x) \end{array} \right. \longrightarrow h(x) - \text{непрерывная в } a. \right)$$

$$\forall f, g, h, a \left( \left\{ \begin{array}{l} f - \text{непрерывная в } a. \\ g - \text{непрерывная в } a. \\ h(x) = f(x)g(x) \end{array} \right. \longrightarrow h(x) - \text{непрерывная в } a. \right)$$

$$\forall f, g, h, a \left( \left\{ \begin{array}{l} f - \text{непрерывная в } a. \\ g - \text{непрерывная в } a. \\ g(a) \neq 0 \\ h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right. \longrightarrow h(x) - \text{непрерывная в } a. \right)$$

$$\forall h, a \left( \exists f, g \left\{ \begin{array}{l} f - \text{непрерывная в } a. \\ g - \text{непрерывная в } f(a). \\ h(x) = g(f(x)) \end{array} \right. \longrightarrow h - \text{непрерывная в } a. \right)$$

$$\forall f, d \exists c \left( \exists a, b \left\{ \begin{array}{l} f \text{ непрерывна на } [a, b] \\ c \in (a, b) \\ d \text{ между } f(a) \text{ и } f(b) \end{array} \right\} \longrightarrow d = f(c) \right)$$

$$\forall f, a \left( \exists b, c \left\{ \begin{array}{l} f - \text{разрывная в } a. \\ \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \neq \infty \\ \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b \\ \lim_{x \rightarrow a+} f(x) \neq \infty \\ \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = c \end{array} \right\} \Leftrightarrow a - \text{точка разрыва первого рода } f. \right)$$

$$\left( \exists b \left\{ \begin{array}{l} a - \text{точка разрыва первого рода.} \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \end{array} \right\} \Leftrightarrow a - \text{точка устранимого разрыв.} \right)$$

$$\forall f, a \left( \left\{ \begin{array}{l} f - \text{разрывная в } a. \\ a - \text{точка разрыва первого рода.} \end{array} \right\} \Leftrightarrow a - \text{точка разрыва второго рода } f. \right)$$

## Глава 7

# Числа

**Числовое кольцо** - это множество чисел, результат суммы, разности, произведения любых чисел которого принадлежит ему тоже.

**Числовое поле** - это множество чисел, результат выполнения рациональных действий над любыми числами которого принадлежит ему тоже.

### 7.1 Натуральные числа ( $\mathbb{N}$ )

$+$  — операция на числах, обладающая коммутативным свойством.

$+$  — операция на числах, обладающая ассоциативным свойством.

$*$  — операция на числах, обладающая коммутативным свойством.

$*$  — операция на числах, обладающая ассоциативным свойством.

$*$  – операция на числах, обладающая дистрибутивным свойством с  $+$ .

**Делитель  $a$**  - это число, на которое  $a$  делится без остатка.

**Кратное  $a$**  - это всякое число, которое делится на  $a$  без остатка.

$$\forall a \left( \forall b \left\{ \begin{array}{l} a > 1 \\ b|a \longrightarrow \left[ \begin{array}{l} b = \pm 1 \Leftrightarrow a - \text{простое.} \\ b = \pm a \end{array} \right] \end{array} \right. \right)$$

$$\forall a \ (\overline{a - \text{простое.}} \Leftrightarrow a - \text{составное.})$$

Простых чисел имеется бесконечное множество.

$$\forall n, \{p_n\} \left( \exists \{\alpha_n\} \forall i \left( \left\{ \begin{array}{l} i \in \mathbb{N} \\ \alpha_i \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{p_n\} - \text{все попарно различные простые числа.} \\ n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0 \\ n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots \end{array} \right. \right) \right) \Leftrightarrow$$

$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots$  – разложение на простые множители  $n$ .)

**Основная теорема арифметики:**

$\exists! \langle n \rangle \langle n \rangle$  – разложение на простые множители  $n$ .

$$\forall a, b \ (\text{НОД}(a, b) = 1 \Leftrightarrow a, b - \text{взаимно простые.})$$

$$\forall a \ (a|2 \Leftrightarrow a - \text{чётное.})$$

**Признаки делимости в 10-й системе счисления:**

1. Признак делимости на 2: последняя цифра в записи числа выражает чётное число.
2. Признак делимости на 3: сумма цифр записи числа делится на 3.
3. Признак делимости на 4: последние две цифры в записи числа выражают число, делящееся на 4.
4. Признак делимости на 5: последняя цифра в записи числа является 0 или 5.
5. Признак делимости на 9: сумма цифр записи числа делится на 9.

$$\forall a, b \text{ НОД}(a, b) \text{ НОК}(a, b) = ab$$

## 7.2 Целые числа ( $\mathbb{Z}$ )

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

**Целое алгебраическое выражение** - это алгебраическое выражение, в котором используют только сложение, вычитание, умножение.

**Положительное число** - это число, большее нуля.

**Отрицательное число** - это число, меньшее нуля.

**Противоположные числа** - это числа, отличающиеся знаком.

$$a - b = a + (-b)$$

$$a(-b) = -ab$$

**Неравенство Бернулли:**

$$\forall x, n \left( \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \geq -1 \\ n \in \mathbb{N} \\ n \neq 0 \end{cases} \rightarrow (1+x)^n \geq 1+nx \right)$$



$$\forall a, b \ (a|b \Leftrightarrow a \text{ делит } b.)$$

$$\forall a, b \left( a|b \Leftrightarrow \exists c \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z} \\ c \in \mathbb{Z} \\ b = ac \end{cases} \right)$$

$$\forall a, b \left( a|b \Leftrightarrow \exists \{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \left( \exists \{p_n\} \begin{cases} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots - \text{разложение на простые множители } a \\ p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots - \text{разложение на простые множители } b \end{cases} \longrightarrow \forall i \ \alpha_i \leq \beta_i \right) \right)$$

$$\forall a \ a|a$$

$$\forall a, b \left( \begin{cases} a|b \\ b|a \end{cases} \longrightarrow a = \pm b \right)$$

$$\forall a, b, c \left( \begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases} \longrightarrow a|c \right)$$

$$\forall a, b, c \left( \begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \longrightarrow a|(b \pm c) \right)$$

$$\forall a, b \left( \begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N} \\ b \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \exists! c, d \begin{cases} d \in \mathbb{N} \\ c \in \mathbb{N} \\ a = bd + c \\ 0 \leq c < |b| \end{cases} \right)$$

$$\forall a, b, c \ (a \equiv b \pmod{c} \Leftrightarrow c|(a-b))$$

$$\forall a, b, c \ (a \equiv b \pmod{c} \Leftrightarrow a \% c = b \% c)$$

$$\forall a, b, c, d, i \ \left( \begin{cases} a \equiv b \pmod{i} \\ c \equiv d \pmod{i} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a+c \equiv b+d \pmod{i} \\ ac \equiv bd \pmod{i} \end{cases} \right)$$

$$\forall a, b, c, d \ (a \equiv b \pmod{c} \longrightarrow a^d \equiv b^d \pmod{c})$$

$$\forall a, b, d \ \left( \begin{cases} d|a \\ d|b \\ \forall d' \ \begin{cases} d'|a \\ d'|b \end{cases} \longrightarrow d'|d \end{cases} \Leftrightarrow d = \text{НОД}(a, b). \right)$$

$$\forall \{p_n\}, \{\alpha_n\}, \begin{cases} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots - \text{разложение на простые} \\ \text{множители } a \\ p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots - \text{разложение на простые} \\ \text{множители } b \end{cases} \longrightarrow \text{НОД}(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \dots$$

$$\forall a, b, d \ \left( \begin{cases} a|d \\ b|d \\ \forall d' \ \begin{cases} a|d' \\ b|d' \end{cases} \longrightarrow d|d' \end{cases} \Leftrightarrow d = \text{НОК}(a, b). \right)$$

$$\text{НОД}(0, 0) = 0$$

$$\forall a \text{ НОД}(a, 0) = a$$

$$\forall a, b, q \in \mathbb{Z} \longrightarrow \text{НОД}(a + bq, b) = \text{НОД}(a, b)$$

$$\forall a, b \text{ НОД}(a \% b, b) = \text{НОД}(a, b)$$

$$\forall a, b \text{ НОД}\left(\frac{a}{\text{НОД}(a, b)}, \frac{b}{\text{НОД}(a, b)}\right) = 1$$

$$\forall a, c \left( \exists b \left\{ \begin{array}{l} a|bc \\ \text{НОД}(a, b) = 1 \end{array} \right. \longrightarrow a|c \right)$$

$$\forall x, y, m \left( \exists a \left\{ \begin{array}{l} \text{НОД}(a, m) = 1 \\ ax \equiv ay \pmod{m} \end{array} \right. \longrightarrow x \equiv y \pmod{m} \right)$$

**Тождество Безу:**

$$\forall a, b \left( \text{НОД}(a, b) = 1 \longrightarrow \exists x, y \ ax + by = 1 \right)$$

$$\forall a, b \left( \exists x, y \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \longrightarrow ax + by = \text{НОД}(a, b) \right)$$

$$\forall a, m \left( \forall \langle x \rangle \ ax \equiv 1 \pmod{m} \text{ — имеет решение.} \Leftrightarrow \text{НОД}(a, m) = 1 \right)$$

$\forall x > 1 \quad \varphi(x)$  — функция Эйлера.

$\forall x > 1 \quad \varphi(x)$  = количество чисел взаимно простых с  $x$   $1, 2, \dots, x-1$ .

$\forall x \quad (x \text{ — простое.} \longrightarrow \varphi(x) = x-1)$

$\forall a, b \quad (\text{НОД}(a, b) = 1 \longrightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b))$

**Теорема Эйлера:**

$$\forall a, x \quad \left( \begin{cases} \text{НОД}(a, x) = 1 \\ x > 1 \end{cases} \longrightarrow a^{\varphi(x)} \equiv 1 \pmod{x} \right)$$

$$\forall x, y, a \quad \left( \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \text{НОД}(a, m) = 1 \\ x \equiv y \pmod{\varphi(m)} \end{cases} \longrightarrow a^x \equiv a^y \pmod{m} \right)$$

**Малая теорема Ферма:**

$$\forall a, p \quad \left( \begin{cases} p \text{ — простое.} \\ \text{НОД}(a, p) = 1 \end{cases} \longrightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \right)$$

$\forall p, a \quad (p \text{ — простое.} \longrightarrow a^p \equiv a \pmod{p})$

$$\forall \{p_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, a, b \quad \left( \begin{cases} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots \text{ — разложение на простые} \\ \text{множители } a \\ p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots \text{ — разложение на простые} \\ \text{множители } b \end{cases} \longrightarrow \text{НОК}(a, b) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \dots \right)$$

### 7.3 Рациональные числа ( $\mathbb{Q}$ )

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

**Рациональное число** - это число, представимое в виде  $\frac{a}{b}$ , где числитель  $a \in \mathbb{Z}$ , а знаменатель  $b \in \mathbb{N}$ .

Рациональные числа образуют поле.

$\mathbb{Q}$  всюду плотно в  $\mathbb{R}$ .

**Арифметические (рациональные) действия:** сложение, вычитание, умножение, деление.

**Рациональное алгебраическое выражение** - это алгебраическое выражение, в котором используют только рациональные действия.

**Дробное алгебраическое выражение** - это рациональное алгебраическое выражение, в записи которого используют деление на буквенные выражения.

**Алгебраическая дробь** - это это алгебраическое выражение, имеющее вид частного от деления двух целых алгебраических выражений.

**Дробное число** - это рациональное число, числитель которого не делится на знаменатель нацело.

**Целая часть числа** - это наибольшее целое число, не превосходящее данного ( $[x]$ ).

**Дробная часть числа** - это разность между данным числом и его целой частью ( $(x)$ ).

$$x - [x] \geq 0$$

$$x - [x] < 1$$

Разложение рационального числа на сумму целой и дробной частей взаимно однозначно.

**Десятичная дробь** - это дробь, у которой знаменатель представляет собой натуральную степень числа 10.

Всякое рациональное число может быть представлено бесконечной десятичной периодической дробью взаимно однозначно.

## 7.4 Иррациональные числа (I)

Всякое иррациональное число может быть представлено бесконечной десятичной непериодической дробью взаимно однозначно.

**Иррациональные алгебраические выражения** - это алгебраическое выражение, в записи которого используются знаки радикала из буквенного выражения.

**Корень находится в простейшей форме, если:**

1. Он не содержит иррациональности в знаменателе.
2. Нельзя сократить его показатель с показателем подкоренного выражения.
3. Все возможные множители вынесены из-под корня.

**Подобные корни** - это корни, отличающиеся только коэффициентами.

## 7.5 Действительные числа (R)

$$Q \subset R$$

$$I \subset R$$

Действительные числа образуют поле.

Множество действительных чисел упорядочено.

Множество действительных чисел непрерывно.

$\mathbb{R}$  — полное.

**Аксиома Архимеда:**

$$\forall a \exists n \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N} \\ na \geq 1 \end{cases}$$

$$\forall x, y \left( \begin{cases} x < y \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \exists z, w \begin{cases} z \in \mathbb{Q} \\ w \in \mathbb{I} \\ x < z < y \\ x < w < y \end{cases} \right)$$

Всякое десятичное число определяет действительное число взаимно однозначно.

$$\forall a \left( \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ a \geq 0 \end{cases} \longrightarrow |a| = a \right)$$

$$\forall a \left( \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ a < 0 \end{cases} \longrightarrow |a| = -a \right)$$

Многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение линейных двучленов вида  $x - a$  и квадратных трёхчленов вида  $x^2 + px + q$ .

**n-ая степень числа a** - это произведение n сомножителей, равных a. (  $a^n$  )

a - основание степени.

n - показатель степени.

Возведение отрицательного числа в иррациональную степень не определено.

Возведение нуля в не положительную степень не определено.

$$a^x = a^y \longrightarrow x = y$$

**Корень n-ой степени из числа a** - это число, n-ая степень которого равна a. (  $\sqrt[n]{a}$  )

**Извлечение корня степени из а** - это отыскание корня из а.

**Арифметический корень (арифметическое значение корня)** - это положительный корень чётной степени из положительного числа.

Корень чётной степени по умолчанию арифметический.

$$\left[ \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = a \\ n - \text{нечётное.} \end{cases} \right. \left[ \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = |a| \\ n - \text{чётное.} \end{cases} \right.$$

**Квадратный корень:**

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$$

**Кубический корень:**

$$\sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$$

**Логарифм числа N по основанию а** - это показатель степени, в которую нужно возвести а, чтобы получить N.

$$\left[ \begin{cases} a^{\log_a N} = N \\ N > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \right.$$

Если число и основание логарифма лежат по одну сторону от единицы, то этот логарифм положителен, и наоборот.



**Потенцирование** - это возведение числа, от которого взят логарифм, в этот логарифм.

Если основание больше единицы, то большее число имеет больший логарифм.

Если основание меньше единицы, то большее число имеет меньший логарифм.

**Десятичный логарифм** - это логарифм по основанию 10.

$$\log_{10} N = \lg N$$

**Характеристика** - это целая часть десятичного логарифма.

**Мантисса** - это дробная часть десятичного логарифма.

**Открытый интервал (интервал)  $(a; b)$**  - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a < x \leq b$ .

**Окрестность точки  $x_0$   $(x_0 - h; x_0 + h)$**  - это интервал длины  $2h$  серединой  $x_0$ .

$$\forall a, \epsilon \ (a - \epsilon; a) \cup (a; a + \epsilon) - \text{проколота } \epsilon\text{-окрестность точки } a.$$

**Замкнутый интервал (отрезок)  $[a; b]$**  - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a \leq x \leq b$ .

**Полуоткрытый интервал  $[a; b)$  или  $(a; b]$**  - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a \leq x < b$  или  $a < x \leq b$  соответственно.

**Бесконечный интервал  $(a; \infty)$ , или  $[a; \infty)$ , или  $(-\infty; b)$ , или  $(-\infty; b]$ , или  $(-\infty; \infty)$**  - это множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих  $a < x$ , или  $a \leq x$ , или  $x < b$ , или  $x \leq b$ , или  $x \in R$  соответственно. ( **конечный интервал** )

$$\forall a, b \ | [a; b] | - \text{длина отрезка } [a; b].$$

$$\forall a, b \quad |[a; b]| = b - a$$

$$\forall A, a, b \quad (A = [a; b] \longrightarrow \overline{A - \text{счётное множество}})$$

Мощность  $[0; 1]$  — мощность континуума.

$$\forall C, B \quad \left( \left( \forall A, a \begin{cases} A - \text{интервал.} \\ A \subset B \\ a \in A \end{cases} \longrightarrow a \in C \right) \Leftrightarrow C \text{ всюду плотно в } B. \right)$$

## 7.6 Комплексные числа (C)

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Комплексные числа образуют поле.

**Комплексное число:**

$$z = a + bi$$

a - действительная часть

b - мнимая часть или коэффициент при мнимой единице.

$$i^2 = -1$$

**Алгебраические действия:** рациональные действия и извлечение корня.

$$z_1 = z_2, \text{ если } a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2.$$

$$a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2, \text{ если } z_1 = z_2.$$

**Чисто мнимое число** - это комплексное число, у которого действительная часть равна нулю.

**Комплексно сопряжённые числа  $z$  и  $\bar{z}$**  - это два комплексных числа, действительные части которых равны, а мнимые противоположны.

$$z = \overline{\bar{z}}$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

Значения многочлена при комплексного сопряжённых значениях комплексно сопряжены между собой.

Если многочлен имеет комплексный корень, то и сопряжённое число является его корнем.

Если  $P_n(z) = (z - \alpha)^k P_{n-k}(z)$ ,  $P_{n-k}$  не делится на  $z - \alpha$  нацело, то  $k$  - кратность корня  $\alpha$ .

Сумма кратности корней равна степени многочлена.

Если  $P_n(z) = (z - \alpha)^k P_{n-k}(z)$ ,  $P_{n-k}$  не делится на  $z - \alpha$  нацело и  $k = 1$ , то корень  $\alpha$  однократный (простой).

Если  $P_n(z) = (z - \alpha)^k P_{n-k}(z)$ ,  $P_{n-k}$  не делится на  $z - \alpha$  нацело и  $k > 1$ , то корень  $\alpha$  кратный.

**Абсолютная величина (модуль)  $z$ :**

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

**Алгебраическая форма комплексного числа:**

$$z = a + bi$$

**Тригонометрическая форма комплексного числа:**

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

$r$  - модуль.

$\phi$  - аргумент.

**Главное значение аргумента:**

$$\arg z$$

$$\begin{cases} \arg z \geq 0 \\ \arg z < 2\pi \end{cases}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$$

**Формула Муавра:**

$$z^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

$$\forall z, r, n, \varphi \left( z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \longrightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right)$$

$$\forall \varphi \quad \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$$

## Глава 8

# Матрицы

$$\forall m, n \left( \begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow M_{m \times n} - \text{множество матриц размера (порядка) } m \text{ на } n. \right)$$

$$\forall A, m, n \left( \begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \\ A - \text{множество.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} M_{m \times n}(A) - \text{множество матриц размера (порядка) } m \text{ на } n, \\ \text{элементы которых принадлежат } A. \end{matrix} \right)$$

$$\forall n \ M_n = M_n$$

$$\forall n \ M_n - \text{множество квадратных матриц размера (порядка) } n.$$

$$\forall A, n \ M_n(A) = M_n(A)$$

$$\forall A, n \ M_n(A) - \text{множество квадратных матриц размера (порядка) } n, \text{ элементы которых принадлежат } A.$$

$$\forall A, m, n \ (A \in M_{m \times n} \Leftrightarrow A = A_{m \times n}.)$$

$$\forall A \ (A \in M_n \Leftrightarrow A_n = A_n)$$

$$\forall A, m, n \left( A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \in M_{m \times n} \right)$$

$$\forall A, i, j \left( \exists m, n \begin{cases} A \in M_{m \times n} \\ i \in \mathbb{N} \\ i \leq m \\ j \in \mathbb{N} \\ j \leq n \end{cases} \Leftrightarrow [A]_{ij} - \text{элемент матрицы с индексами } i \text{ и } j. \right)$$

$$\forall A, n \begin{cases} A_n - \text{столбец } n \text{ матрицы } A. \\ A_n - \text{строка } n \text{ матрицы } A. \end{cases}$$

$$\forall A \ (\exists m \ A \in M_{m \times 1} \Leftrightarrow A - \text{матрица-строка (вектор-строка).})$$

$$\forall A \ (\exists n \ A \in M_{1 \times n} \Leftrightarrow A - \text{матрица-столбец (вектор-столбец).})$$

$$\forall A \ (A = 0 \Leftrightarrow A - \text{нулевая.})$$

$$\forall A \ (\forall i, j \ [A]_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = 0)$$

$$\forall B \ (\forall A \ AB = BA = A \Leftrightarrow B - \text{единичная.})$$

$E$  — единичная матрица.

$$\forall i, j \ (i \neq j \Leftrightarrow [E]_{ij} = 0)$$

$$\forall i, j \ (i = j \Leftrightarrow [E]_{ij} = 1)$$

$\forall i, j \ E_{ij}$  — матричная единица.

$$\forall i, j, k, l \ \left( \begin{cases} k \neq i \\ l \neq j \end{cases} \Leftrightarrow [E_{ij}]_{kl} = 0 \right)$$

$$\forall i, j, k, l \ \left( \begin{cases} k = i \\ l = j \end{cases} \Leftrightarrow [E_{ij}]_{kl} = 1 \right)$$

$$\forall A \ (\exists \lambda \ A = \lambda E \Leftrightarrow A - \text{скалярная (диагональная).})$$

$$\forall A \ (\exists n \ A^n = 0 \Leftrightarrow A - \text{нильпотентная.})$$

$$\forall A, B, m, n \left( \forall i, j \begin{cases} A_{m \times n} \\ B_{m \times n} \\ [A]_{ij} = [B]_{ij} \end{cases} \Leftrightarrow A = B \right)$$

$$\forall A \ A^T - \text{транспонированная.}$$

$$\forall A, B \ (\forall i, j \ [A]_{ij} = [B]_{ji} \Leftrightarrow B = A^T)$$

$$\forall A, n \left( A = A_n \longrightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T \right)$$

$$\forall A, B \ (B = \tilde{A} \Leftrightarrow B - \text{союзная к } A.)$$

$$\forall A \ (AB = E \Leftrightarrow B - \text{обратная к } A.)$$

$$\forall A, B \ (B = A^{-1} \Leftrightarrow B - \text{обратная к } A.)$$

$$\forall A \ (A - \text{обратная.} \longrightarrow \exists n \ A \in M_n)$$

$$\forall A \ A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A}$$



## 8.1 Операции над матрицами

$$\forall A, B, m, n, i, j \left( \begin{cases} A \in M_{m \times n} \\ B \in M_{m \times n} \end{cases} \longrightarrow [A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij} \right)$$

$+$  — операция на матрицах, обладающая коммутативным свойством.

$+$  — операция на матрицах, обладающая ассоциативным свойством.

$$\forall A, \lambda, i, j \ (\lambda \in \mathbb{F} \longrightarrow [\lambda A]_{ij} = \lambda[A]_{ij})$$

$*$  — операция на матрице и числе, обладающая ассоциативным свойством.

$*$  — операция на матрице и числе, обладающая дистрибутивным свойством (относительно матриц и относительно чисел) с  $+$ .

$$\forall \{\lambda_n\} A, B, i, j \ (B = \lambda_i A_i + \dots + \lambda_j A_j \longrightarrow B \text{ — линейная комбинация } A_i, \dots, A_j.)$$

$$\forall \{\lambda_n\}, A, B, i, j \left( \exists k \begin{cases} B = \lambda_i A_i + \dots + \lambda_j A_j \\ \lambda_k \neq 0 \end{cases} \longrightarrow B \text{ — нетривиальная.} \right)$$

$$\forall A, i, j \left( \exists B \begin{cases} B \text{ — линейная комбинация } A_i, \dots, A_j. \\ B \text{ — нетривиальная.} \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A_i, \dots, A_j \text{ — линейно зависимые.} \right)$$

$\forall A, i, j \ (\overline{A_i, \dots, A_j - \text{линейно зависимые.} \Leftrightarrow A_i, \dots, A_j - \text{линейно независимые.}})$

$$\forall A, B, m, r, n, i, j \left( \begin{cases} A \in M_{m \times r} \\ B \in M_{r \times n} \end{cases} \longrightarrow [AB]_{ij} = \sum_{k=1}^r [A]_{ik} [B]_{kj} \right)$$

$*$  — операция на матрицах, обладающая ассоциативным свойством.

$*$  — операция на матрицах, обладающая дистрибутивным свойством с  $+$ .

$$\forall A, B \ (AB)^T = B^T A^T$$

$$\forall A, B \ (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

### Элементарные преобразования матриц:

1. Перестановка местами любых двух строк или столбцов матрицы.
  - (a) Переставить местами  $i$  и  $j$  строки - это единичную матрицу, где переставили местами  $i$  и  $j$  строки или столбцы, умножить на матрицу.
  - (b) Переставить местами  $i$  и  $j$  столбцы - это умножить матрицу на единичную матрицу, где переставили местами  $i$  и  $j$  строки или столбцы.
2. Умножение любой строки или столбца матрицы на константу, отличную от нуля.
  - (a) Умножить строку  $i$  на константу, отличную от нуля, - это единичную матрицу, где  $i$  строку или столбец умножили на эту константу, умножить на матрицу.

- (b) Умножить столбец  $i$  на константу, отличную от нуля, - это умножить матрицу на единичную матрицу, где  $i$  строку или столбец умножили на эту константу.
3. Прибавление к любой строке или столбцу матрицы этой матрицы другой строки или столбца, умноженной на некоторую константу.
- (a) Прибавить к строке  $i$  строку  $j$ , умноженную на константу, - это единичную матрицу, где прибавили к  $i$  строке строку  $j$ , умноженную на константу, умножить на матрицу.
- (b) Прибавить к столбцу  $i$  столбец  $j$ , умноженный на константу, - это умножить матрицу на единичную матрицу, где прибавили к  $i$  столбцу столбец  $j$ , умноженный на константу.

## 8.2 Перестановки

$$\forall \{a_r\}, a, n \left( \forall k, l \begin{cases} a_k \in \mathbb{N} \\ a_k \neq n \\ k \neq l \longrightarrow a_k \neq a_l \\ a = a_1, a_2, \dots, a_n \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{перестановка.} \right)$$

$$\forall f, n \left( \begin{cases} (f(1), f(2), \dots, f(n)) - \text{перестановка.} \\ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{подстановка.} \right)$$

$$\forall n \ (n \in \mathbb{N} \longrightarrow S_n - \text{множество подстановок длины } n.)$$

$$\forall f \left( \forall i \exists n \begin{cases} f \in S_n \\ f(f(\dots f(i) \dots)) = i \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{цикл (циклическая подстановка).} \right)$$

$$\forall f \left( \begin{cases} f \in S_2 \\ f - \text{цикл.} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{транспозиция.} \right)$$

$$\forall f, n \quad (n - \text{сумма инверсий первой и второй строки подстановки } f. \longrightarrow \text{sgn } f = (-1)^n)$$

$$\forall f \quad \left( \begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ \text{Сумма инверсий первой и второй строки } f \text{ чётна.} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{чётная.} \right)$$

$$\forall f, g \quad \left( \begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ g - \text{подстановка.} \end{cases} \longrightarrow fg - \text{умножение (композиция) подстановок.} \right)$$

$$\forall f, g \quad \left( \begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ g - \text{подстановка.} \end{cases} \longrightarrow fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(g(1)) & f(g(2)) & \dots & f(g(n)) \end{pmatrix} \right)$$

$$\forall f, g \quad \left( \begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ g - \text{подстановка.} \end{cases} \longrightarrow \text{sgn}(fg) = \text{sgn } f * \text{sgn } g \right)$$

$$\forall f \quad \left( f - \text{подстановка.} \longrightarrow \begin{cases} d(f) - \text{декремент.} \\ d(f) = \text{длина } f - \\ \text{(число независимых циклов } f + \\ \text{количество символов, оставаемых на месте).} \\ d(f) = \text{количество действительно перемещаемых символов} - \\ \text{количество независимых циклов.} \\ d(f) = \text{сумма длин циклов} - \text{количество циклов.} \end{cases} \right)$$

$$\forall f \quad (f - \text{подстановка.} \longrightarrow \text{sgn } f = (-1)^{d(f)})$$

$$id - \text{подстановка.}$$

$id$  — тождественная.

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\forall f \ f^{-1} = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \dots & f(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\forall n, \ k \ (k \in \mathbb{N} \longrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)^{nk} = id)$$

При возведении подстановки в степень, кратную НОКу длин всех её циклов, будет получаться тождественная подстановка.

### 8.3 Определители

$\forall A \ det A$  — определитель  $A$ .

$$\forall A, \ n \left( A \in M_n \longrightarrow det A = \sum_{f \in S_n} sgn f * [A]_{1f(1)} * [A]_{2f(2)} * \dots * [A]_{nf(n)} \right)$$

$\forall A \ (det A = 0 \Leftrightarrow A \text{ — вырожденная.})$

$\forall A \ (det A \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ — невырожденная.})$

$$\forall A \ det A^T = det A$$

$$\forall A, A', i \det(A_1, \dots, A'_i + A''_i, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, A''_i, \dots, A_n)$$

$$\forall A, A', i, \lambda \det(A_1, \dots, \lambda A'_i, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n)$$

$$\forall A, i, j \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = -\det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

$$\forall A (\exists i A_i = 0 \longrightarrow \det A = 0)$$

$$\forall A (\exists k, l A_k = A_l \longrightarrow \det A = 0)$$

$$\forall A (\exists i A_i - \text{линейная комбинация остальных.} \longrightarrow \det A = 0)$$

$$\forall \{\lambda_n\}, A \det(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n) = \\ \det(A_1, A_2, \dots, A_i + (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_{i-1} A_{i-1} + \lambda_{i+1} A_{i+1} + \dots + \lambda_n A_n), \dots, A_n)$$

$$\det E = 1$$

**Разложение по строке:**

$$\forall A, j, n \left( A = A_n \longrightarrow \det A = \sum_{i=1}^n [A]_{ij} A_{ij} \right)$$

**Разложение по столбцу:**

$$\forall A, i, n \left( A = A_n \longrightarrow \det A = \sum_{j=1}^n [A]_{ij} A_{ij} \right)$$

**Фальшивое разложение:**

$$\forall A, n, k, i \left( \left\{ \begin{array}{l} A \in M_n \\ k \neq i \end{array} \right\} \longrightarrow \sum_{j=0}^n [A]_{ij} A_{kj} = 0 \right)$$

$$\forall A, n, k, i \left( \left\{ \begin{array}{l} A \in M_n \\ k \neq j \end{array} \right\} \longrightarrow \sum_{i=0}^n [A]_{ij} A_{ik} = 0 \right)$$

$$\forall A, n \left( \left\{ \begin{array}{l} A = A_n \\ \text{Под главной диагональю } A \text{ только нули.} \end{array} \right\} \longrightarrow \det A = \prod_{i=1}^n [A]_{ii} \right)$$

10) Если  $A$  и  $B$  – квадратные матрицы, то для блочной матрицы:  $\det \left( \begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \det A \cdot \det B$

$$\forall A, B \left( \left\{ \begin{array}{l} A \in M_n \\ B \in M_n \end{array} \right\} \longrightarrow \det(AB) = \det A \det B \right)$$

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} - \text{определитель Вандермонда.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

$$\forall A \quad (\exists B \quad B = A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0)$$

## 8.4 Миноры, алгебраические дополнения и ранги

$$\forall B, \quad M, \quad k \quad \left( \exists A \quad \begin{cases} A - \text{матрица из элементов матрицы } B, \\ \text{стоящих на пересечении } k \text{ строк и } k \text{ столбцов.} \Leftrightarrow M - \text{минор } k \text{ порядка матрицы } B. \\ M = \det A \end{cases} \right)$$

$$\forall B, \quad M \quad \left( \exists A \quad \begin{cases} A - \text{матрица, на главной диагонали которой стоят} \\ \text{только все или не все элементы} \\ \text{главной диагонали } B. \\ M = \det A \end{cases} \Leftrightarrow M - \text{главный минор матрицы } B. \right)$$

$$\forall A \quad \text{Rg} A - \text{ранг } A.$$

$$\forall A \quad \text{Rg} A = \text{наибольший порядок отличного от } 0 \text{ минора матрицы } A.$$

$$\begin{aligned} \forall A \quad \text{Rg} A = \\ \text{максимальное число линейно независимых строк} = \\ \text{максимальное число линейно независимых столбцов.} \end{aligned}$$

$$\forall A, \quad A' \quad (A' - \text{матрица, полученная из } A \text{ элементарными преобразованиями.} \longrightarrow \text{Rg} A = \text{Rg} A')$$



$$\forall A \left( \exists n \left\{ \begin{array}{l} A \in M_n \\ RgA = n \end{array} \right\} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \right)$$

$$\forall A \left( \exists n \left\{ \begin{array}{l} A \in M_n \\ A_1, A_2, \dots, A_n - \text{линейно независимые.} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \right)$$

$$\forall A, M \left( \left\{ \begin{array}{l} M - \text{минор порядка } RgA \text{ матрицы } A. \\ M \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow M - \text{базисный минор матрицы } A. \right)$$

$$\forall A, i \left( A_i - \text{то, из чего составлен базисный минор матрицы } A. \longrightarrow A_i - \text{базисный.} \right)$$

$$\forall A, i \left( \overline{A_i - \text{базисный.}} \longrightarrow A_i - \text{линейная комбинация базисных матрицы } A. \right)$$

$$\forall M, M' \left( \exists A \left\{ \begin{array}{l} M - \text{минор матрицы } A. \\ M' - \text{минор, составленный} \\ \text{из тех же строк и столбцов, что и } M, \\ \text{и добавленных одной строки и одного столбца} \\ \text{матрицы } A. \end{array} \right\} \Leftrightarrow M' - \text{окаймляющий минор } M. \right)$$

$$\forall A, M, k \left( \left\{ \begin{array}{l} M - \text{минор } k \text{ порядка матрицы } A. \\ \text{Все окаймляющие миноры минора } M = 0 \end{array} \right\} \longrightarrow RgA = k \right)$$

$$\forall A, B, M \left( \left\{ \begin{array}{l} A - \text{матрица из элементов матрицы } B, \\ \text{кроме строк и столбцов } B, \\ \text{из которых составлен минор } M. \\ M' = \det A \end{array} \right\} \Leftrightarrow M' - \text{дополнительный минор к минору } M. \right)$$

$$\forall M, M^* \left( \begin{array}{l} \exists A, \alpha, n \left\{ \begin{array}{l} A = A_n \\ \alpha = \text{сумма номеров строк и столбцов } A, \\ \text{из которых составлен минор } M. \\ M' - \text{дополнительный минор к минору } M. \\ M^* = (-1)^\alpha M' \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} M^* - \text{алгебраическое дополнение} \\ \text{к минору } M. \end{array} \end{array} \right)$$

$\forall A, i, j$   $M_{ij}$  — минор элемента  $[A]_{ij}$  матрицы  $A$ .

$$\forall A, n, i, j \left( \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} A = A_n \\ A - \text{матрица из элементов матрицы } B, \Leftrightarrow \det A = M_{ij} \\ \text{кроме строки } i \text{ и столбца } j. \end{array} \right. \end{array} \right)$$

$\forall A, i, j$   $A_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $[A]_{ij}$ .

$$\forall A, i, j \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

## 8.5 Форматы матриц

**Ведущий элемент** - это первый ненулевой элемент строки.

**Ступенчатый вид матрицы** - это матрица, номера столбцов ведущих элементов которой возрастают, а нулевые строки, если они есть, расположены внизу.

**Улучшенный (приведённый, канонический) ступенчатый вид матрицы** - это ступенчатый вид матрицы, в котором все ведущие элементы - единицы, над которыми в столбце все элементы - нули.

Любую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

$$\forall A, B, C \left( \exists m, r, n \begin{cases} B \in M_{m \times r} \\ C \in M_{r \times n} \\ r = \text{Rg} B = \text{Rg} C \\ A = BC \end{cases} \Leftrightarrow BC - \text{скелетное разложение } A. \right)$$

$$\forall A, B, C \left( \exists m, r, n \begin{cases} B - \text{нижняя треугольная матрица матрицы.} \\ C - \text{верхняя треугольная матрица матрицы.} \\ A = BC \end{cases} \Leftrightarrow BC - \text{LU разложение } A. \right)$$

$$\forall A \text{ (} A - \text{ строго регулярная.} \Leftrightarrow A - \text{ имеет LU разложение.)}$$

## 8.6 СЛАУ относительно матриц

$$\forall a \left( \begin{cases} a - \text{СЛАУ.} \\ a - \text{имеет решение.} \end{cases} \longrightarrow a - \text{совместная.} \right)$$

$$\forall a \left( \begin{cases} a - \text{СЛАУ.} \\ a - \text{не имеет решений.} \end{cases} \longrightarrow a - \text{несовместная.} \right)$$

$$\forall A, x, b \left( Ax = b - \text{СЛАУ.} \longrightarrow \forall i \begin{cases} \Delta_i = \det(A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n) \\ \Delta = \det A \\ x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \end{cases} \right)$$

$$\forall A, x, b \left( \exists i \begin{cases} Ax = b - \text{СЛАУ.} \\ \Delta = 0 \\ \Delta_i \neq 0 \end{cases} \longrightarrow Ax = b - \text{несовместная.} \right)$$

$$\forall A, x, b \left( \begin{cases} Ax = b - \text{СЛАУ.} \\ \Delta \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} Ax = b - \text{совместная.} \\ Ax = b - \text{имеет единственное решение.} \end{cases} \right)$$

**Теорема Кронекера-Капелли:**

$$\forall A, b \ (RgA = Rg(A|b) \Leftrightarrow \exists x \ Ax = b - \text{совместная.})$$

$$\forall A, l, n \left( \begin{cases} A_l, A_{l+1}, \dots, A_{l+n-RgA-1} - \text{л.н.з. столбцы.} & A_l, A_{l+1}, \dots, A_{l+n-RgA-1} - \\ A_l, A_{l+1}, \dots, A_{l+n-RgA-1} - \text{решения } Ax = 0. & \Leftrightarrow \text{фундаментальная система} \\ n - \text{число неизвестных.} & \text{решений (ФСР) } Ax = 0. \end{cases} \right)$$

$$\forall A, x \ (Ax = 0 \longrightarrow \exists C \ C - \text{ФСР } Ax = 0.)$$

$$\forall C, x \ \exists n \ (\exists m \ C_{m \times n} - \text{ФСР } Ax = 0. \longrightarrow x = \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n.)$$

$$\forall C, x \ \exists \{\alpha_n\}, n \left( \exists m \ \begin{cases} C_{m \times n} - \text{ФСР } Ax = 0. \\ Ax' = b \end{cases} \longrightarrow x' + \alpha_1 C_1 + \dots + \alpha_n C_n - \text{все решения } Ax = b. \right)$$