Математика

Мы

15 ноября 2022 г.

Оглавление

1 Примечания **2**

2 Логика **3**

3 Алгебраические выражения **5**

4 Измерения **7**

5 Последовательности **8**

6 Функции **14**

7 Числа **22**
- 7.1 Натуральные числа (N) 22
- 7.2 Целые числа (Z) 24
- 7.3 Рациональные числа (Q) 29
- 7.4 Иррациональные числа (I) 30
- 7.5 Действительные числа (R) 31
- 7.6 Комплексные числа (C) 35

8 Матрицы **38**
- 8.1 Операции над матрицами 42
- 8.2 Перестановки 44
- 8.3 Определители 46
- 8.4 Миноры, алгебраические дополнения и ранги 49
- 8.5 Форматы матриц 51
- 8.6 СЛАУ относительно матриц 52

Глава 1

Примечания

Чтобы понять, что означают '$<$', '$>$', попробуйте их убрать.

Глава 2

Логика

$$\forall A,\ B\ \left(A \longrightarrow B \Leftrightarrow \begin{cases}\text{Из посылки } A \text{ вытекает вывод } B.\\ A - \text{достаточное условие для } B.\\ B - \text{необходимое условие для } A.\end{cases}\right)$$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{cases}A \longrightarrow B\\ B \longrightarrow A\end{cases} \Leftrightarrow A \text{ и } B - \text{логически эквивалентные утверждения.}\right)$$

$$\forall A,\ B\ ((A \longrightarrow B)\ -\ \text{прямое утверждение.} \Leftrightarrow (B \longrightarrow A)\ -\ \text{обратное утверждение.})$$

$$\forall A,\ B\ ((A \longrightarrow B)\ -\ \text{прямое утверждение.} \Leftrightarrow (\overline{A} \longrightarrow \overline{B})\ -\ \text{противоположное утверждение.})$$

$$\forall A,\ B\ ((A \longrightarrow B)\ -\ \text{прямое утверждение.} \Leftrightarrow (\overline{B} \longrightarrow \overline{A})\ -\ \text{противоположное обратному утверждение.})$$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{cases}A - \text{прямое утверждение.}\\ B - \text{противоположное обратному утверждение.}\end{cases} \longrightarrow A \Leftrightarrow B\right)$$

Доказательство от противного:

$$\forall A \; \exists B \; (B \wedge (\overline{A} \longrightarrow \overline{B}) \longrightarrow A)$$

Принцип математической индукции (ПМИ):

$$\forall f \;\; \left(\forall n \; \begin{cases} f : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ f(0) \\ f(n) \longrightarrow f(n+1) \end{cases} \longrightarrow \forall n \; f(n) \right)$$

$\forall f \;\, Prog(f)$ – прогрессивность свойства f.

$$\forall f, \; g \;\; \left(\begin{cases} f : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ g : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ f(g) = \forall n \;\; (\forall m \;\; (m < n \longrightarrow g(m)) \longrightarrow g(n)) \end{cases} \Leftrightarrow f = Prog(g) \right)$$

Принцип сильной индукции (ПСИ):

$$\forall f \;\; (Prog(f) \longrightarrow \forall n \; f(n))$$

Принцип наименьшего числа (ПНЧ):

$$\forall f \;\; \left(\exists m \; \begin{cases} f : \mathbb{N} \longrightarrow Bool \\ f(m) \end{cases} \longrightarrow \exists n \; \forall a \; \begin{cases} f(n) \\ a < n \longrightarrow \overline{f(a)} \end{cases} \right)$$

Глава 3

Алгебраические выражения

Алгебраическое выражение - это выражение, состоящее из чисел, буквенных величин и алгебраических операций над ними.

Область допустимых значений (ОДЗ) - это множество всех наборов числовых значений букв, входящих в данное алгебраическое выражение.

Тождественно равные алгебраические выражения - это алгебраические выражения, имеющие равные ОДЗ и равные числовые значения на этом ОДЗ.

Одночлен - это алгебраическое выражение, состоящее из произведения числового коэффициента и буквенных величин.

Стандартный вид одночлена:

1. Один числовой коэффициент.

2. Нет повторяющихся буквенных величин.

Подобные одночлены - это одночлены, отличающиеся только числовыми коэффициентами.

Многочлен (полином) - это алгебраическое выражение, состоящее из суммы одночленов.

Стандартный вид многочлена:

1. Все одночлены стандартного вида.

2. Нет подобных одночленов.

Формулы сокращённого умножения:

1. Квадрат суммы.
   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Разность квадратов.
   $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

3. Куб суммы.
   $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

4. Сумма кубов.
   $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

5. Бином Ньютона.
   $(a+b)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a^{n-i}b^i n!}{i!(n-i)!} = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a^{n-i}b^i \prod\limits_{k=0}^{i-1} n-k}{i!}$

Неполный квадрат разности:

$a^2 - ab + b^2$

Многочлен $Q(x)$ является частным и многочлен $R(x)$ является остатком при делении многочлена $P_n(x)$ на $S_m(x)$, если $P_n(x) = S_m(x)Q(x) + R(x)$ и степень $R(x)$ меньше степени $S_m(x)$.

Если степень $P_n(x)$ больше степени $S_m(x)$, степень частного от деления $P_n(x)$ на $S_m(x)$ равна разности степеней $P_n(x)$ и $S_m(x)$, иначе частное равно нулю.

Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен вида $x-\alpha$ равен значению многочлена при $x=\alpha$.

Теорема Безу:
Многочлен $P_n(x)$ делится без остатка на двучлен $x-\alpha$, только если α - корень многочлена.

Глава 4

Измерения

Величина - это объект, который может быть охарактеризован числом в результате измерения.

Постоянная величина - это величина, множество значений которой состоит из одного элемента.

Переменная величина - это величина, множество значений которой состоит более чем из одного элемента.

Область изменения - это множество значений, принимаемых переменной величиной.

Глава 5

Последовательности

$\forall f \ (\exists A \ f : \mathbb{N} \longrightarrow A \Leftrightarrow f$ – последовательность.)

$$\forall {<}n{>}, {<}x_n{>}, \ f \ \left(\begin{cases} f - \text{последовательность.} \\ f(n) = x_n \end{cases} \Leftrightarrow \{x_n\} \right)$$

$\forall {<}x_n{>} \ \{x_n\}$ – последовательность.

$\forall \{x_n\} \, (\forall k, \ l \ (k < l \longrightarrow x_k < x_l) \Leftrightarrow \{x_n\}$ – возрастающая последовательность.)

$\forall \{x_n\} \, (\forall k, \ l \ (k < l \longrightarrow x_k \geq x_l) \Leftrightarrow \{x_n\}$ – невозрастающая последовательность.)

$\forall \{x_n\} \, (\forall k, \ l \ (k < l \longrightarrow x_k > x_l) \Leftrightarrow \{x_n\}$ – убывающая последовательность.)

$\forall \{x_n\} (\forall k,\ l\ (k < l \longrightarrow x_k \leq x_l) \Leftrightarrow \{x_n\}$ – неубывающая последовательность.)

$\forall \{x_n\},\ M\ (\forall k\ \ |x_k| \leq M \Leftrightarrow \{x_n\}$ – ограниченная последовательность значением M.)

$\forall \{x_n\},\ M\ (\forall k\ x_k \leq M \Leftrightarrow \{x_n\}$ – ограниченная сверху последовательность значением M.)

$\forall \{x_n\},\ M\ (\forall k\ x_k \geq M \Leftrightarrow \{x_n\}$ – ограниченная снизу последовательность значением M.)

$\forall \{x_n\},\ a\ \ (\{x_n\} \rightrightarrows a \Leftrightarrow \{x_n\}$ – последовательность, стабилизирующаяся к a.)

$$\forall \{x_n\},\ a\ \left(\exists k\ \forall m,\ l\ \begin{cases} x_m \in \mathbb{Z} \\ l > k \\ x_l = a \end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \rightrightarrows a\right)$$

$$\forall \{x_n\},\ M\ \left(\forall m\ \begin{cases} x_m \in \mathbb{Z} \\ \{x_n\} - \text{неубывающая последовательность.} \\ \{x_n\} - \text{ограниченная сверху последовательность значением } M. \end{cases} \longrightarrow \exists a\ \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \leq M \\ \{x_n\} \rightrightarrows a \end{cases}\right)$$

$$\forall \{x_n\},\ M,\ a\ \left(\forall m\ \begin{cases} x_m \in \mathbb{R} \\ \{x_n\} - \text{ограниченная сверху последовательность значением } M. \\ \text{каждая соответствующая цифра } \{x_n\} \\ \rightrightarrows \\ \text{каждая соответствующая цифра } a \end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \rightrightarrows a\right)$$

$$\forall \langle n\rangle, \langle x_n\rangle,\ a\ \left(\begin{cases}\{x_n\}\\ x_n = a^{(n)}\end{cases} \Leftrightarrow \{x_n\} - \text{последовательность десятичных приближений } a.\right)$$

$$\forall \{x_n\},\ a,\ b\ \left(\begin{cases}a \in \mathbb{R}\\ b \in \mathbb{R}\\ \{x_n\} = \left\{a^{(n)} + b^{(n)}\right\}\end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \rightrightarrows a + b\right)$$

$$\forall \{x_n\},\ a,\ b\ \left(\begin{cases}a \in \mathbb{R}\\ b \in \mathbb{R}\\ a > b > 0\\ \{x_n\} = \left\{a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n})\right\}\end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \rightrightarrows a - b\right)$$

$$\forall \{x_n\},\ a,\ b\ \left(\begin{cases}a \in \mathbb{R}\\ b \in \mathbb{R}\\ \{x_n\} = \left\{a^{(n)} {b^{(n)}}^{(n)}\right\}\end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \rightrightarrows ab\right)$$

$$\forall a,\ b\ \left(\begin{cases}a \in \mathbb{R}\\ b \in \mathbb{R}\\ \{x_n\} = \left\{\left(\dfrac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-n}}\right)^{(n)}\right\}\end{cases} \longrightarrow \{x_n\} \rightrightarrows \frac{a}{b}\right)$$

$$\forall \{x_n\},\ a\ \left(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = a \Leftrightarrow \{x_n\} \text{ стремится к } a \text{ как к своему пределу.}\right)$$

$$\forall \{x_n\},\ a\ \left(\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall e\ \exists l\ \forall k\ \begin{cases}|a - x_k| < e\\ k > l\end{cases}\right)$$

$$\forall \{x_n\}, \ M \ \left(\forall m \ \begin{cases} x_m \in \mathbb{R} \\ x_m > 0 \\ \{x_n\} - \text{неубывающая последовательность.} \\ \{x_n\} - \text{ограниченная сверху} \\ \text{последовательность значением } M. \end{cases} \longrightarrow \exists a \ \begin{cases} a \leq M \\ \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \end{cases} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \ a \ \left(\forall m \ \begin{cases} x_m \in \mathbb{R} \\ \{x_n\} = \left\{ a^{(n)} \right\} \end{cases} \longrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \right)$$

$$\forall \{x_n\} \left(\exists a \ \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \longrightarrow \{x_n\} - \text{ограниченная последовательность.} \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \ a \ \left(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \longrightarrow \exists l \ \forall k \ \left[\begin{array}{l} k > l \\ \begin{cases} a > 0 \\ x_k > \dfrac{a}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ x_k < \dfrac{a}{2} \end{cases} \end{array} \right) \right.$$

$$\forall \{x_n\}, \ \{y_n\}, \ a, \ b \ \left(\forall k \ \begin{cases} \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} y_n = b \\ x_k \leq y_k \end{cases} \longrightarrow a \leq b \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \ \{y_n\}, \ \{z_n\}, \ a \ \left(\forall k \ \begin{cases} \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} z_n = a \\ x_k \leq y_k \leq z_k \end{cases} \longrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = a \right)$$

$$\forall \{x_n\}, \ a \ \left(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = a \longrightarrow \lim_{n \longrightarrow \infty} |x_n| = |a| \right)$$

$$\forall a,\ b\ \left(\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow |a+b| \le |a| + |b|\right)$$

$$\forall a,\ b\ \left(\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow |a-b| \ge ||a| - |b||\right)$$

$$\forall A,\ M\ \ (M = \sup A \Leftrightarrow M - \text{точная верхняя граница } A.)$$

$$\forall A,\ M\ \ (M = \inf A \Leftrightarrow M - \text{точная нижняя граница } A.)$$

$$\forall A,\ M\ \left(\forall x,\ M'\ \exists y\ \begin{cases} x \in A \\ x \le M \\ y \in A \\ M' < y \le M \end{cases} \Leftrightarrow M = \sup A\right)$$

$$\forall A,\ M\ \left(\forall x,\ M'\ \exists y\ \begin{cases} x \in A \\ x \ge M \\ y \in A \\ M' > y \ge M \end{cases} \Leftrightarrow M = \inf A\right)$$

$$\forall A\ \left(\forall B,\ C\ \begin{cases} B \in A \\ C \in A \\ \left[\begin{aligned} & B \subset C \\ & C \subset B \end{aligned}\right. \end{cases} \Leftrightarrow A - \text{система вложенных отрезков.}\right)$$

$$\forall \{A_n\}\ \left(\forall i,\ j\ \begin{cases} i < j \\ A_j \subset A_i \end{cases} \Leftrightarrow \{A_n\} - \text{последовательность вложенных отрезков.}\right)$$

$$\forall \{A_n\} \left(\forall e\ \exists i\ \begin{cases} e \in \mathbb{R} \\ e > 0 \\ \{A_n\} - \text{последовательность} \\ \text{вложенных отрезков.} \\ |A_i| < e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \{A_n\} - \text{стягивающаяся последовательность} \\ \text{вложенных отрезков.} \end{array} \right)$$

$$\forall A\ \left(A - \text{система вложенных отрезков.} \longrightarrow \exists x\ \forall B\ \begin{cases} B \in A \\ x \in B \end{cases} \right)$$

Принцип полноты Кантора:

$$\forall \{A_n\}\ \left(\{A_n\} - \text{стягивающаяся последовательность вложенных отрезков.} \longrightarrow \exists x\ \forall i\ \begin{cases} x \in A_i \\ x\ \text{единственен.} \end{cases} \right)$$

Глава 6

Функции

$\forall X,\ Y\ X \times Y$ – декартово произведение X и Y.

$$\forall X,\ Y\ \left(X \times Y \Leftrightarrow \forall{<}x{>},\ {<}y{>}\ \begin{cases} x \in X \\ y \in Y \\ X \times Y = \{(x, y)\} \end{cases} \right)$$

$$\forall{<}x{>},\ {<}y{>},\ f,\ X,\ Y\ \left(\forall z,\ w\ \begin{cases} X = \{x\} \\ Y = \{y\} \\ z \in X \\ w \in Y \\ x = z \longrightarrow y = w \\ f = X \times Y \end{cases} \Leftrightarrow y = f(x) \right)$$

$\forall f\ D(f)$ – область определения f.

$\forall f\ E(f)$ – область значений f.

$$\forall{<}x{>},\ f,\ X\ \left(f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} {<}x{>} - \text{аргумент (независимая переменная) } f. \\ f - \text{функция от } {<}x{>}. \end{cases}\right)$$

$$\forall{<}x{>},\ f,\ X\ \ (f(x) \Leftrightarrow X = \{x\} \longrightarrow X = D(f))$$

$$\forall{<}y{>},\ f,\ x\ \ (y = f(x) \Leftrightarrow {<}y{>} - \text{функция (зависимая переменная) } f.)$$

$$\forall{<}y{>},\ f,\ Y,\ x\ \ (y = f(x) \Leftrightarrow Y = \{y\} \longrightarrow Y = E(f))$$

$$\forall{<}y{>},\ {<}x{>},\ f\ \left(y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y - \text{образ } x. \\ x - \text{прообраз } y. \end{cases}\right)$$

$$\forall f,\ X,\ Y\ \left(f : X \longrightarrow Y \Leftrightarrow \begin{cases} X = D(f) \\ Y = E(f) \end{cases}\right)$$

$$\forall f,\ X,\ Y\ \left(f : X \longrightarrow Y \Leftrightarrow \begin{cases} Y - \text{образ } X. \\ X - \text{прообраз } Y. \end{cases}\right)$$

$$\forall f,\ A\ \left(\forall y \begin{cases} A = \{y\} \\ y \in E(f) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{сюръекция (накрытие).}\right)$$

$$\forall f\ \ (\forall x,\ y\ (f(x) = f(y) \longrightarrow x = y) \Leftrightarrow f - \text{инъекция (вложение).})$$

$$\forall f \ \left(\begin{cases} f - \text{сюръекция (накрытие).} \\ f - \text{инъекция (вложение).} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{биекция (взаимно-однозначное соответствие).} \right)$$

$$\forall A,\ B\ \ (A \sim B \Leftrightarrow A \text{ и } B - \text{равномощные.})$$

$$\forall f,\ A,\ B\ \left(\begin{cases} f : A \longrightarrow B \\ f - \text{биекция.} \end{cases} \Leftrightarrow A \sim B \right)$$

$$\forall f\ \left(\forall a,\ b\ f(a,b) = f(b,a) \longrightarrow \begin{array}{l} f - \text{фунция, обладающая коммутативным} \\ \text{(переместительным) свойством.} \end{array} \right)$$

$$\forall f\ \left(\forall a,\ b,\ c\ f(f(a,b),c) = f(a,f(b,c)) \longrightarrow \begin{array}{l} f - \text{фунция, обладающая ассоциативным} \\ \text{(сочетательным) свойством.} \end{array} \right)$$

$$\forall f,\ g\ \left(\forall a,\ b,\ c\ f(a,g(b,c)) = g(f(a,b),g(a,c)) \longrightarrow \begin{array}{l} f - \text{фунция, обладающая дистрибутивным} \\ \text{(распределительным) свойством с } g. \end{array} \right)$$

$$\forall A\ A \sim A$$

$$\forall A,\ B,\ C\ \ (A \sim B \Leftrightarrow B \sim A)$$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{cases} A \sim B \\ B \sim C \end{cases} \longrightarrow A \sim C \right)$$

$$\forall A \ \ (A \sim \mathbb{N} \Leftrightarrow A - \text{счётное множество.})$$

$$\forall A,\ B \ \left(\forall a,\ b \begin{cases} a \in A \\ b \in B \\ a \le b \end{cases} \Leftrightarrow A \text{ лежит левее } B. \right)$$

$$\forall A,\ B,\ c \ \left(\forall a,\ b \begin{cases} a \in A \\ b \in B \\ c \ge a \\ c \le b \end{cases} \Leftrightarrow c \text{ разделяет } A \text{ и } B. \right)$$

$$\forall A \ \left(\forall B,\ C\ \exists a \begin{cases} B \subset A \\ C \subset A \\ a \in A \\ a \text{ разделяет } B \text{ и } C. \end{cases} \Leftrightarrow A - \text{полное.} \right)$$

Если разделяющих элементов в полном множестве больше одного, то их бесконечно много.

$$\forall f,\ g \ \left(\forall x \begin{cases} D(f) = D(g) \\ f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow f \text{ и } g - \text{совпадающие функции.} \right)$$

$$\forall f,\ x \ (f(x) = 0 \Leftrightarrow x - \text{нуль (корень) функции f.})$$

$$\forall f \ \left(\forall x \begin{cases} f(-x) = f(x) \\ \exists a \left[\begin{aligned} &D(f) = (-a; a) \\ &D(f) = [-a; a] \end{aligned} \right. \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{чётная функция.} \right)$$

$$\forall f \quad \left(\forall x \; \begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ \exists a \; \left[\begin{array}{l} D(f) = (-a; a) \\ D(f) = [-a; a] \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{нечётная функция.} \right)$$

$$\forall f \quad \left(\begin{cases} \overline{f - \text{чётная функция.}} \\ \overline{f - \text{нечётная функция.}} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{общего вида функция.} \right)$$

$$\forall f,\ A \quad \left(\forall x_1,\ x_2 \; \begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{возрастающая функция на } A. \right)$$

$$\forall f,\ A \quad \left(\forall x_1,\ x_2 \; \begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{невозрастающая функция на } A. \right)$$

$$\forall f,\ A \quad \left(\forall x_1,\ x_2 \; \begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{убывающая функция на } A. \right)$$

$$\forall f,\ A \quad \left(\forall x_1,\ x_2 \; \begin{cases} x_1 \in A \\ x_2 \in A \\ x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{неубывающая функция на } A. \right)$$

$$\forall f,\ A \quad \left(\left[\begin{array}{l} f - \text{функция убывающая на } A. \\ f - \text{функция возрастающая на } A. \end{array} \right. \Leftrightarrow A - \text{интервал монотонности } f. \right)$$

$$\forall f,\ x_0 \quad \left(\exists A \; \forall x \; \begin{cases} x \in A \\ x_0 \in A \\ f(x_0) \leq f(x) \end{cases} \Leftrightarrow x_0 - \text{точка минимума } f. \right)$$

$$\forall f,\ x_0 \ \left(\exists A\ \forall x\ \begin{cases} x \in A \\ x_0 \in A \\ f(x_0) \geq f(x) \end{cases} \Leftrightarrow x_0 - \text{точка максимума } f. \right)$$

$$\forall f,\ x \ \left(\left[\begin{array}{l} x - \text{точка минимума } f. \\ x - \text{точка минимума } f. \end{array} \right. \Leftrightarrow x - \text{экстремум } f. \right)$$

Асимптота - это прямая линия, к которой график функции неограниченно приближается при удалении точки графика в бесконечность.

Исследование функции:

1. Область определения функции.
2. Область значений функции.
3. Нули функции.
4. Чётная, или нечётная, или общего вида функция.
5. Интервалы монотонности функции.
6. Экстремумы функции.
7. Асимптоты функции.

$$\forall {<}y{>},\ f,\ g\ (\forall x\ y = f(g(x)) \Leftrightarrow {<}y{>} - \text{сложная функция.})$$

$$\forall f,\ g\ (\forall x\ f(g(x)) = x \Leftrightarrow f - \text{обратная } g \text{ функция.})$$

Алгебраическая функция - это функция, закон соответствия которой определяется алгебраическим выражением. (**трансцендентная функция**)

Элементарные функции - это основные элементарные функции и сложные функции, образованные из основных элементарных.

Основные элементарные функции:

1. $$\forall \langle x \rangle,\ f,\ a\ \left(\begin{cases} f(x) = x^a \\ a \in R \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{степенная функция.}\right)$$

2. $$\forall \langle x \rangle,\ f,\ a\ \left(\begin{cases} f(x) = a^x \\ a \in R \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{показательная функция.}\right)$$

3. $$\forall \langle x \rangle,\ f,\ a\ \left(\begin{cases} f(x) = \log_a^x \\ a \in R \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{логарифмическая функция.}\right)$$

4. $$\forall \langle x \rangle,\ f\ \left(\left[\begin{array}{l} f(x) = \sin x \\ f(x) = \cos x \\ f(x) = \tan x \\ f(x) = \cot x \end{array}\right. \Leftrightarrow f - \text{тригонометрическая функция.}\right)$$

5. $$\forall \langle x \rangle,\ f\ \left(\left[\begin{array}{l} f(x) = \arcsin x \\ f(x) = \arccos x \\ f(x) = \arctan x \\ f(x) = \operatorname{arccot} x \end{array}\right. \Leftrightarrow f - \text{обратная тригонометрическая функция.}\right)$$

$$\begin{array}{l}\forall \langle y \rangle,\ \langle x \rangle,\ P_i,\ n, \\ a_0,\ a_1,\ \dots\ ,\ a_n\end{array} \left(\begin{cases} y = P_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \\ a_0 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \langle y \rangle - \text{целая рациональная функция} \\ \text{(многочлен от переменной } \langle x \rangle\text{) (ЦРФ) степени } n. \end{array}\right)$$

$$\forall {<}y{>},\ {<}x{>},\ f,\ a\ \left(\begin{cases} y = f(x) = ax \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {<}y{>} \text{ прямо пропорционально } {<}x{>}. \\ \text{между } {<}y{>} \text{ и } {<}x{>} \text{ прямо пропорциональная зависимость.} \end{cases}\right)$$

$$\forall {<}y{>},\ {<}x{>},\ f,\ a,\ b\ \left(\begin{cases} y = f(x) = ax + b \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow {<}y{>} - \text{линейная ЦРФ (линейная функция).}\right)$$

$$\forall {<}y{>},\ {<}x{>},\ f,\ a,\ b\ \left(\begin{cases} y = f(x) = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} {<}y{>} - \text{квадратичная ЦРФ} \\ \text{(квадратный (квадратичный) трёхчлен).} \end{matrix}\right)$$

$$\forall {<}y{>},\ {<}x{>},\ f,\ a\ \left(\begin{cases} y = f(x) = \dfrac{a}{x} \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {<}y{>} \text{ обратно пропорционально } {<}x{>}. \\ \text{между } {<}y{>} \text{ и } {<}x{>} \text{ обратно пропорциональная зависимость.} \end{cases}\right)$$

$$\forall {<}y{>},\ x\ \left(y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \Leftrightarrow {<}y{>} - \text{дробно-рациональная функция (ДРФ).}\right)$$

$$\forall {<}y{>},\ {<}x{>},\ a,\ b,\ c,\ d\ \left(\begin{cases} y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} \\ c \neq 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow {<}y{>} - \text{дробно-линейная функция.}\right)$$

Алгебраическая иррациональная функция - это функция, закон соответствия которой содержит извлечение корня целой степени из алгебраического выражения, содержащего аргумент.

Глава 7

Числа

Числовое кольцо - это множество чисел, результат суммы, разности, произведения любых чисел которого принадлежит ему тоже.

Числовое поле - это множество чисел, результат выполнения рациональных действий над любыми числами которого принадлежит ему тоже.

7.1 Натуральные числа (N)

Целочисленная переменная - это величина, принимающая только натуральные значения.

Свойства сложения и умножения:

1. Переместительное.

   $a + b = b + a$

   $ab = ba$

2. Сочетательное (ассоциативное).

   $(a + b) + c = a + (b + c)$

   $(ab)c = a(bc)$

3. Распределительное.

$+$ – операция на числах, обладающая коммутативным свойством.

$+$ – операция на числах, обладающая ассоциативным свойством.

$*$ – операция на числах, обладающая коммутативным свойством.

$*$ – операция на числах, обладающая ассоциативным свойством.

$*$ – операция на числах, обладающая дистрибутивным свойством с $+$.

Делитель а - это число, на которое а делится без остатка.

Кратное а - это всякое число, которое делится на а без остатка.

$$\forall a\ \left(\forall b\ \begin{cases} a > 1 \\ b|a \longrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \pm 1 \\ b = \pm a \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{простое.}\right)$$

$$\forall a\ (\overline{a - \text{простое}}. \Leftrightarrow a - \text{составное.})$$

Простых чисел имеется бесконечное множество.

$$\forall n,\ \{p_n\}\ \left(\exists\{\alpha_n\}\ \forall i\ \left(\begin{cases} i\in\mathbb{N}\\ \alpha_i\in\mathbb{N}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\{p_n\} - \text{все попарно различные простые числа.}\\ n\in\mathbb{N}\\ n\neq 0\\ n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots\end{cases}\right)\right.\Leftrightarrow$$

$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots$ – разложениена простые множители n.)

Основная теорема арифметики:

$\exists! <n>\ <n>$ – разложение на простые множители n.

$\forall a,\ b$ (НОД$(a,b)=1\Leftrightarrow a,b$ – взаимно однозначные.)

$\forall a$ ($a|2\Leftrightarrow a$ – чётное.)

Признаки делимости в 10-й системе счисления:

1. Признак делимости на 2: последняя цифра в записи числа выражает чётное число.

2. Признак делимости на 3: сумма цифр записи числа делится на 3.

3. Признак делимости на 4: последние две цифры в записи числа выражают число, делящееся на 4.

4. Признак делимости на 5: последняя цифра в записи числа является 0 или 5.

5. Признак делимости на 9: сумма цифр записи числа делится на 9.

$\forall a,\ b$ НОД(a,b) НОК$(a,b)=ab$

7.2 Целые числа (Z)

$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$

Целое алгебраическое выражение - это алгебраическое выражение, в котором используют только сложение, вычитание, умножение.

Положительное число - это число, большее нуля.

Отрицательное число - это число, меньшее нуля.

Противоположные числа - это числа, отличающиеся знаком.

$$a - b = a + (-b)$$

$$a(-b) = -ab$$

$$\forall a,\ b\ \ (a|b \Leftrightarrow a \text{ делит } b.)$$

$$\forall a,\ b\ \ \left(a|b \Leftrightarrow \exists c \begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z} \\ c \in \mathbb{Z} \\ b = ac \end{cases}\right)$$

$$\forall a,\ b\ \ \left(a|b \Leftrightarrow \exists \{\alpha_n\},\ \{\beta_n\}\ \ \left(\exists \{p_n\} \begin{cases} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots - \text{разложение на простые множители } a \\ p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots - \text{разложение на простые множители } b \end{cases} \longrightarrow \forall i\ \alpha_i \le \beta_i\right)\right)$$

$$\forall a\ a|a$$

$$\forall a,\ b\ \ \left(\begin{cases} a|b \\ b|a \end{cases} \longrightarrow a = \pm b\right)$$

$$\forall a,\ b,\ c\ \left(\begin{cases} a|b \\ b|c \end{cases} \longrightarrow a|c\right)$$

$$\forall a,\ b,\ c\ \left(\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \longrightarrow a|(b \pm c)\right)$$

$$\forall a,\ b\ \left(\begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ b \in \mathbb{N} \\ b \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \exists! c,\ d\ \begin{cases} d \in \mathbb{N} \\ c \in \mathbb{N} \\ a = bd + c \\ 0 \leq c < |b| \end{cases}\right)$$

$$\forall a,\ b,\ c\ (a \equiv b\ (mod\ c) \Leftrightarrow c|(a-b))$$

$$\forall a,\ b,\ c\ (a \equiv b\ (mod\ c) \Leftrightarrow a\%c = b\%c)$$

$$\forall a,\ b,\ c,\ d,\ i\ \left(\begin{cases} a \equiv b\ (mod\ i) \\ c \equiv d\ (mod\ i) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d\ (mod\ i) \\ ac \equiv bd\ (mod\ i) \end{cases}\right)$$

$$\forall a,\ b,\ c,\ d\ \big(a \equiv b\ (mod\ c) \longrightarrow a^d \equiv b^d\ (mod\ c)\big)$$

$$\forall a,\ b,\ d\ \left(\begin{cases} d|a \\ d|b \\ \forall d'\ \begin{cases} d'|a \\ d'|b \end{cases} \longrightarrow d'|d \end{cases} \Leftrightarrow d - \text{НОД}(a, b).\right)$$

$$\forall \{p_n\},\ \{\alpha_n\},\ \{\beta_n\},\ a,\ b\ \left(\begin{cases} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots - \text{разложение на простые} \\ \text{множители } a \\ p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots - \text{разложение на простые} \\ \text{множители } b \end{cases} \longrightarrow \text{НОД}(a,b) = p_1^{min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{min(\alpha_2,\beta_2)} \ldots\right)$$

$$\forall a,\ b,\ d\ \left(\begin{cases} a|d \\ b|d \\ \forall d'\ \begin{cases} a|d' \\ b|d' \end{cases} \longrightarrow d|d' \end{cases} \Leftrightarrow d - \text{НОК}(a,b).\right)$$

$$\text{НОД}(0,0) = 0$$

$$\forall a\ \text{НОД}(a,0) = a$$

$$\forall a,\ b,\ q\ q \in \mathbb{Z} \longrightarrow \text{НОД}(a+bq,b) = \text{НОД}(a,b)$$

$$\forall a,\ b\ \text{НОД}(a\%b,b) = \text{НОД}(a,b)$$

$$\forall a,\ b\ \text{НОД}\left(\frac{a}{\text{НОД}(a,b)}, \frac{b}{\text{НОД}(a,b)}\right) = 1$$

$$\forall a,\ c\ \left(\exists b\ \begin{cases} a|bc \\ \text{НОД}(a,b) = 1 \end{cases} \longrightarrow a|c\right)$$

$$\forall x,\ y,\ m\ \left(\exists a\ \begin{cases} \text{НОД}(a,m)=1 \\ ax \equiv ay\ (mod\ m) \end{cases} \longrightarrow x \equiv y\ (mod\ m)\right)$$

Тождество Безу:

$$\forall a,\ b\ \left(\text{НОД}(a,b)=1 \longrightarrow \exists x,\ y\ ax+by=1\right)$$

$$\forall a,\ b\ \left(\exists x,\ y\ \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \longrightarrow ax+by=\text{НОД}(a,b)\right)$$

$$\forall a,\ m\ \left(\forall{<}x{>}\ ax \equiv 1\ (mod\ m) - \text{имеет решение.} \Leftrightarrow \text{НОД}(a,m)=1\right)$$

$$\forall{<}x{>}\ \varphi(x) - \text{функция Эйлера.}$$

$$\forall{<}x{>}\ \varphi(x) = \text{количество чисел взаимно простых с } x\ \ 1,2,\ldots,x-1.$$

$$\forall x\ \left(x - \text{простое.} \longrightarrow \varphi(x) = x-1\right)$$

$$\forall a,\ b\ \left(\text{НОД}(a,b)=1 \longrightarrow \varphi(a,b)=\varphi(a)\varphi(b)\right)$$

Теорема Эйлера:

$$\forall a,\ x\ \left(\begin{cases} \text{НОД}(a,x)=1 \\ x>1 \end{cases} \longrightarrow a^{\varphi(x)} \equiv 1\ (mod\ x)\right)$$

$$\forall x,\ y,\ a\ \left(\begin{cases} x \equiv y\ (mod\ \varphi(x)) \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases} \longrightarrow a^x \equiv a^y\ (mod\ x)\right)$$

Малая теорема Ферма:

$$\forall a,\ p\ \left(\begin{cases} p - \text{простое.} \\ \text{НОД}(a,p) = 1 \end{cases} \longrightarrow a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)\right)$$

$$\forall p,\ a\ \ (p - \text{простое.} \longrightarrow a^p \equiv a\ (mod\ p))$$

$$\begin{matrix} \forall \left\{p_n\right\},\ \left\{\alpha_n\right\}, \\ \left\{\beta_n\right\},\ a,\ b \end{matrix}\ \left(\begin{cases} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots - \text{разложение на простые} \\ \text{множители } a \\ p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots - \text{разложение на простые} \\ \text{множители } b \end{cases} \longrightarrow \text{НОК}(a,b) = p_1^{max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{max(\alpha_2,\beta_2)} \ldots\right)$$

7.3 Рациональные числа (Q)

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Рациональное число - это число, представимое в виде $\frac{a}{b}$, где числитель $a \in Z$, а знаменатель $b \in N$.

Рациональные числа образуют поле.

$\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Арифметические (рациональные) действия: сложение, вычитание, умножение, деление.

Рациональное алгебраическое выражение - это алгебраическое выражение, в котором используют только рациональные действия.

Дробное алгебраическое выражение - это рациональное алгебраическое выражение, в записи которого используют деление на буквенные выражения.

Алгебраическая дробь - это это алгебраическое выражение, имеющее вид частного от деления двух целых алгебраических выражений.

Дробное число - это рациональное число, числитель которого не делится на знаменатель нацело.

Целая часть числа - это наибольшее целое число, не превосходящее данного ($[x]$) .

Дробная часть числа - это разность между данным числом и его целой частью ((x)) .

$$x - [x] \geq 0$$

$$x - [x] < 1$$

Разложение рационального числа на сумму целой и дробной частей взаимно однозначно.

Десятичная дробь - это дробь, у которой знаменатель представляет собой натуральную степень числа 10.

Всякое рациональное число может быть представленно бесконечной десятичной периодической дробью взаимно однозначно.

7.4 Иррациональные числа (I)

Всякое иррациональное число может быть представленно бесконечной десятичной непериодической дробью взаимно однозначно.

Иррациональные алгебраические выражения - это алгебраическое выражение, в записи которого используются знаки радикала из буквенного выражения.

Корень находится в простейшей форме, если:

1. Он не содержит иррациональности в знаменателе.

2. Нельзя сократить его показатель с показателем подкоренного выражения.

3. Все возможные множители вынесены из-под корня.

Подобные корни - это корни, отличающиеся только коэффициентами.

7.5 Действительные числа (R)

$$Q \subset R$$

$$I \subset R$$

Действительные числа образуют поле.

Множество действительных чисел упорядочено.

Множество действительных чисел непрерывно.

$\mathbb{R}$ – полное.

Аксиома Архимеда:

$$\forall a \exists n \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N} \\ na \geq 1 \end{cases}$$

$$\forall x,\ y \left(\begin{cases} x < y \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \exists z,\ w \begin{cases} z \in \mathbb{Q} \\ w \in \mathbb{I} \\ x < z < y \\ x < w < y \end{cases} \right)$$

Всякое десятичное число определяет действительное число взаимно однозначно.

$$\forall a \left(\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ a \geq 0 \end{cases} \longrightarrow |a| = a \right)$$

$$\forall a \quad \left(\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ a < 0 \end{cases} \longrightarrow |a| = -a \right)$$

Многочлен с действительными коэффициентами разлагается в произведение линейных двучленов вида $x - a$ и квадратных трёхчленов вида $x^2 + px + q$.

n-ая степень числа a - это произведение n сомножителей, равных a. (a^n)
a - основание степени.
n - показатель степени.

Возведение отрицательного числа в иррациональную степень не определено.

Возведение нуля в не положительную степень не определено.

$$a^x = a^y \longrightarrow x = y$$

Корень n-ой степени из числа a - это число, n-ая степень которого равна a. ($\sqrt[n]{a}$)

Извлечение корня степени из a - это отыскание корня из a.

Арифметический корень (арифметическое значение корня) - это положительный корень чётной степени из положительного числа.

Корень чётной степени по умолчанию арифметический.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = a \\ n \text{ - нечётное.} \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = |a| \\ n \text{ - чётное.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Квадратный корень:

$$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$$

Кубический корень:

$$\sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$$

Логарифм числа N по основанию a - это показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить N.

$$\begin{cases} a^{\log_a N} = N \\ N > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

Если число и основание логарифма лежат по одну сторону от единицы, то этот логарифм положителен, и наоборот.

Потенцирование - это возведение числа, от которого взят логарифм, в этот логарифм.

Если основание больше единицы, то большее число имеет больший логарифм.

Если основание меньше единицы, то большее число имеет меньший логарифм.

Десятичный логарифм - это логарифм по основанию 10.

$$\log_{10} N = \lg N$$

Характеристика - это целая часть десятичного логарифма.

Мантиса - это дробная часть десятичного логарифма.

Открытый интервал (интервал) (a; b) - это множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравествам $a < x \leq b$.

Окрестность точки $\mathbf{x_0}$ $(\mathbf{x_0 - h; x_0 + h})$ - это интервал длины 2h серединой x_0 .

$$\forall a,\ e\ (a-e;a)\cup(a;a+e) - \text{проколотая } e\text{-окрестность точки } a.$$

Замкнутый интервал (отрезок) [a; b] - это множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$.

Полуоткрытый интервал [a; b) или (a; b] - это множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$ соответственно.

Бесконечный интервал $(\mathbf{a};\infty)$, или $[\mathbf{a};\infty)$, или $(\infty;\mathbf{b})$, или $(\infty;\mathbf{b}]$, или $(\infty;\infty)$ - это множество действительных чисел x, удовлетворяющих $a < x$, или $a \leq x$, или $x < b$, или $x \leq b$, или $x \in R$ соответственно. ($\overline{\textbf{конечный интервал}}$)

$$\forall a,\ b\ \ |[a;b]| - \text{длина отрезка } [a;b].$$

$$\forall a,\ b\ \ |[a;b]| = b - a$$

$$\forall A,\ a,\ b\ \ \left(A = [a;b] \longrightarrow \overline{A - \text{счётное множество.}}\right)$$

$$\text{Мощность } [0;1] - \text{мощность континуума.}$$

$$\forall C,\ B\ \ \left(\left(\forall A,\ a\ \begin{cases} A - \text{интервал.} \\ A \subset B \\ a \in A \end{cases} \longrightarrow a \in C\right) \Leftrightarrow C \text{ всюду плотно в } B.\right)$$

7.6 Комплексные числа (C)

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Комплексные числа образуют поле.

Комплексное число:

$$z = a + bi$$

a - действительная часть
b - мнимая часть или коэффициент при мнимой единице.
$i^2 = -1$

Алгебраические действия: рациональные действия и извлечение корня.

$z_1 = z_1$, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

$a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, если $z_1 = z_2$.

Чисто мнимое число - это комплексное число, у которого действительная часть равна нулю.

Комплексно сопряжённые числа z и $\overline{\mathbf{z}}$ - это два комплексных числа, действительные части которых равны, а мнимые противоположны.

$$z = \overline{\overline{z}}$$

$$z\overline{z} = a^2 + b^2$$

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{(z_1 + z_2)}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(z_1 z_2)}$$

Значения многочлена при комплексного сопряжённых значениях комплексно сопряжены между собой.

Если многочлен имеет комплексный корень, то и сопряжённое число является его корнем.

Если $P_n(z) = (z-\alpha)^k P_{n-k}(z)$, P_{n-k} не делится на $z-\alpha$ нацело, то k - кратность корня α .

Сумма кратности корней равна степени многочлена.

Если $P_n(z) = (z-\alpha)^k P_{n-k}(z)$, P_{n-k} не делится на $z-\alpha$ нацело и $k=1$, то корень α однократный (простой).

Если $P_n(z) = (z-\alpha)^k P_{n-k}(z)$, P_{n-k} не делится на $z-\alpha$ нацело и $k>1$, то корень α кратный.

Абсолютная величина (модуль) z:

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

Алгебраическая форма комплексного числа:

$$z = a + bi$$

Тригонометрическая форма комплексного числа:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

r - модуль.
ϕ - аргумент.

Главное значение аргумента:

$$argz$$

$$\begin{cases} argz \geq 0 \\ argz < 2\pi \end{cases}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$$

Формула Муавра:

$$z^n = r^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$$

Глава 8

Матрицы

$$\forall m,\ n\ \left(\begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow M_{m \times n} - \text{множество матриц размера (порядка) } m \text{ на } n.\right)$$

$$\forall A,\ m,\ n\ \left(\begin{cases} m \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N} \\ A - \text{множество.} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} M_{m \times n}(A) - \text{множество матриц размера (порядка) } m \text{ на } n, \\ \text{элементы которых принадлежат } A. \end{array}\right)$$

$\forall n\ M_n = M_n$

$\forall n\ M_n$ – множество квадратных матриц размера (порядка) n.

$\forall A,\ n\ M_n(A) = M_n(A)$

$\forall A,\ n\ M_n(A)$ – множество квадратных матриц размера (порядка) n, элементы которых принадлежат A.

$$\forall A,\ m,\ n\ (A \in M_{m\times n} \Leftrightarrow A = A_{m\times n}.)$$

$$\forall A\ (A \in M_n \Leftrightarrow A_n = A_n)$$

$$\forall A,\ m,\ n\ \left(A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \in M_{m\times n}\right)$$

$$\forall A,\ i,\ j\ \left(\exists m,\ n \begin{cases} A \in M_{m\times n} \\ i \in \mathbb{N} \\ i \le m \\ j \in \mathbb{N} \\ j \le n \end{cases} \Leftrightarrow [A]_{ij} - \text{элемент матрицы с индексами i и j.}\right)$$

$$\forall A,\ n\ \left[\begin{array}{l} A_n - \text{столбец } n \text{ матрицы } A. \\ A_n - \text{строка } n \text{ матрицы } A. \end{array}\right.$$

$$\forall A\ (\exists m\ A \in M_{m\times 1} \Leftrightarrow A - \text{матрица-строка (вектор-строка).})$$

$$\forall A\ (\exists n\ A \in M_{1\times n} \Leftrightarrow A - \text{матрица-столбец (вектор-столбец).})$$

$$\forall A\ (A = 0 \Leftrightarrow A - \text{нулевая.})$$

$\forall A\ (\forall i,\ j\ [A]_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = 0)$

$\forall B\ (\forall A\ AB = BA = A \Leftrightarrow B$ – единичная.)

E – единичная матрица.

$\forall i,\ j\ (i \neq j \Leftrightarrow [E]_{ij} = 0)$

$\forall i,\ j\ (i = j \Leftrightarrow [E]_{ij} = 1)$

$\forall i,\ j\ E_{ij}$ – матричная единичка.

$$\forall i,\ j,\ k,\ l\ \left(\begin{cases} k \neq i \\ l \neq j \end{cases} \Leftrightarrow [E_{ij}]_{kl} = 0\right)$$

$$\forall i,\ j,\ k,\ l\ \left(\begin{cases} k = i \\ l = j \end{cases} \Leftrightarrow [E_{ij}]_{kl} = 1\right)$$

$\forall A\ (\exists \lambda\ A = \lambda E \Leftrightarrow A$ – скалярная (диагональная).)

$\forall A\ (\exists n\ A^n = 0 \Leftrightarrow A$ – нильпотентная.)

$$\forall A,\ B,\ m,\ n\ \left(\forall i,\ j\ \begin{cases} A_{m\times n} \\ B_{m\times n} \\ [A]_{ij} = [B]_{ij} \end{cases} \Leftrightarrow A = B\right)$$

$\forall A\ A^T$ – транспонированная.

$$\forall A,\ B\ \left(\forall i,\ j\ [A]_{ij} = [B]_{ji} \Leftrightarrow B = A^T\right)$$

$$\forall A,\ n\ \left(A = A_n \longrightarrow \widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T\right)$$

$\forall A,\ B\ \left(B = \widetilde{A} \Leftrightarrow B\right.$ – союзная к $\left.A.\right)$

$\forall A\ (AB = E \Leftrightarrow B$ – обратная к $A.)$

$\forall A,\ B\ \left(B = A^{-1} \Leftrightarrow B\right.$ – обратная к $\left.A.\right)$

$\forall A\ (A$ – обратная. $\longrightarrow \exists n\ A \in M_n)$

$$\forall A\ A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{detA}$$

8.1 Операции над матрицами

$$\forall A,\ B,\ m,\ n,\ i,\ j\ \left(\begin{cases} A \in M_{m\times n} \\ B \in M_{m\times n} \end{cases} \longrightarrow [A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}\right)$$

$+$ – операция на матрицах, обладающая коммутативным свойством.

$+$ – операция на матрицах, обладающая ассоциативным свойством.

$$\forall A,\ \lambda,\ i,\ j\ \ (\lambda \in \mathbb{F} \longrightarrow [\lambda A]_{ij} = \lambda [A]_{ij})$$

$*$ – операция на матрице и числе, обладающая ассоциативным свойством.

$*$ –операция на матрице и числе, обладающая дистрибутивным свойством (относительно матриц и относительно чисел) с $+$.

$$\forall \{\lambda_n\}\ A,\ B,\ i,\ j\ \ (B = \lambda_i A_i + \ldots + \lambda_j A_j \longrightarrow B - \text{линейная комбинация } A_i, \ldots, A_j.)$$

$$\forall \{\lambda_n\},\ A,\ B,\ i,\ j\ \left(\exists k\ \begin{cases} B = \lambda_i A_i + \ldots + \lambda_j A_j \\ \lambda_k \neq 0 \end{cases} \longrightarrow B - \text{нетривиальная.}\right)$$

$$\forall A,\ i,\ j\ \left(\exists B\ \begin{cases} B - \text{линейная комбинация } A_i, \ldots, A_j. \\ B - \text{нетривиальная.} \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A_i, \ldots, A_j - \text{линейно зависимые.}\right)$$

$$\forall A,\ i,\ j\ \left(\overline{A_i, \ldots, A_j - \text{линейно зависимые.}} \Leftrightarrow A_i, \ldots, A_j - \text{линейно независимые.}\right)$$

$$\forall A,\ B,\ m,\ r,\ n,\ i,\ j\ \left(\begin{cases} A \in M_{m \times r} \\ B \in M_{r \times n} \end{cases} \longrightarrow [AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{r} [A]_{ik}[B]_{kj}\right)$$

$*$ – операция на матрицах, обладающая ассоциативным свойством.

$*$ – операция на матрицах, обладающая дистрибутивным свойством с $+$.

$$\forall A,\ B\ (AB)^T = B^T A^T$$

$$\forall A,\ B\ (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Элементарные преобразования матриц:

1. Перестановка местами любых двух строк или столбцов матрицы.

   (a) Переставить местами i и j строки - это единичную матрицу, где переставили местами i и j строки или столбцы, умножить на матрицу.

   (b) Переставить местами i и j столбцы - это умножить матрицу на единичную матрицу, где переставили местами i и j строки или столбцы.

2. Умножение любой строки или столбца матрицы на константу, отличную от нуля.

   (a) Умножить строку i на константу, отличную от нуля, - это единичную матрицу, где i строку или столбец умножили на эту константу, умножить на матрицу.

(b) Умножить столбец i на константу, отличную от нуля, - это умножить матрицу на единичную матрицу, где i строку или столбец умножили на эту константу.

3. Прибавление к любой строке или столбцу матрицы этой матрицы другой строки или столбца, умноженной на некоторую константу.

(a) Прибавить к строке i строку j, умноженную на константу, - это единичную матрицу, где прибавили к i строке строку j, умноженную на константу, умножить на матрицу.

(b) Прибавить к столбцу i столбец j, умноженный на константу, - это умножить матрицу на единичную матрицу, где прибавили к i столбцу столбец j, умноженный на константу.

8.2 Перестановки

$$\forall \{a_r\},\ a,\ n\ \left(\forall k,\ l\ \begin{cases} a_k \in \mathbb{N} \\ a_k \neq n \\ k \neq l \longrightarrow a_k \neq a_l \\ a = a_1, a_2, \ldots, a_n \end{cases} \Leftrightarrow a - \text{перестановка.}\right)$$

$$\forall f,\ n\ \left(\begin{cases} (f(1), f(2), \ldots, f(n)) - \text{перестановка.} \\ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{подстановка.}\right)$$

$$\forall n\ \ (n \in \mathbb{N} \longrightarrow S_n - \text{множество подстановок длины } n.)$$

$$\forall f\ \left(\forall i\ \exists n\ \begin{cases} f \in S_n \\ f(f(\ldots f(i)\ldots)) = i \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{цикл (циклическая подстановка).}\right)$$

$$\forall f\ \left(\begin{cases} f \in S_2 \\ f - \text{цикл.} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{транспозиция.}\right)$$

$$\forall f,\ n\ \ (n - \text{сумма инверсий первой и второй строки подстановки } f. \longrightarrow sgnf = (-1)^n)$$

$$\forall f\ \ \left(\begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ \text{Сумма инверсий первой и второй строки } f \text{ чётна.} \end{cases} \Leftrightarrow f - \text{чётная.}\right)$$

$$\forall f,\ g\ \ \left(\begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ g - \text{подстановка.} \end{cases} \longrightarrow fg - \text{умножение (композиция) подстановок.}\right)$$

$$\forall f,\ g\ \ \left(\begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ g - \text{подстановка.} \end{cases} \longrightarrow fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(g(1)) & f(g(2)) & \dots & f(g(n)) \end{pmatrix}\right)$$

$$\forall f,\ g\ \ \left(\begin{cases} f - \text{подстановка.} \\ g - \text{подстановка.} \end{cases} \longrightarrow sgn(fg) = sgnf * sgng\right)$$

$$\forall f\ \ \left(f - \text{подстановка.} \longrightarrow \begin{cases} d(f) - \text{декремент.} \\ d(f) = \text{длина } f - \\ \text{(число независимых циклов } f + \\ \text{количество символов, оставляемых на месте).} \\ d(f) = \text{количество действительно перемещаемых символов} - \\ \text{количество независимых циклов.} \\ d(f) = \text{сумма длин циклов} - \text{количество циклов.} \end{cases} \right)$$

$$\forall f\ \ \left(f - \text{подстановка.} \longrightarrow sgnf = (-1)^{d(f)}\right)$$

id – подстановка.

id – тождественная.

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\forall f\ f^{-1} = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \dots & f(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\forall n,\ k\ \big(k \in \mathbb{N} \longrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)^{nk} = id\big)$$

При возведении подстановки в степень, кратную НОКу длин всех её циклов, будет получаться тождественная подстановка.

8.3 Определители

$\forall A\ detA$ – определитель A.

$$\forall A,\ n\ \left(A \in M_n \longrightarrow detA = \sum_{f \in S_n} sgnf * [A]_{1f(1)} * [A]_{2f(2)} * \dots * [A]_{nf(n)}\right)$$

$\forall A\ \ (detA = 0 \Leftrightarrow A$ – вырожденная.)

$\forall A\ \ (detA \neq 0 \Leftrightarrow A$ – невырожденная.)

$\forall A\ detA^T = detA$

$$\forall A,\ A',\ i\ det(A_1, \ldots, A'_i + A''_i, \ldots, A_n) = det(A_1, \ldots, A'_i, \ldots, A_n) + det(A_1, \ldots, A''_i, \ldots, A_n)$$

$$\forall A,\ A',\ i,\ \lambda\ det(A_1, \ldots, \lambda A'_i, \ldots, A_n) = \lambda det(A_1, \ldots, A'_i, \ldots, A_n)$$

$$\forall A,\ i,\ j\ det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = -det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$$

$$\forall A\ \ (\exists i\ A_i = 0 \longrightarrow detA = 0)$$

$$\forall A\ \ (\exists k,\ l\ A_k = A_l \longrightarrow detA = 0)$$

$$\forall A\ \ (\exists i\ A_i - \text{линейная комбинация остальных.} \longrightarrow detA = 0)$$

$$\forall \{\lambda_n\},\ A\ det(A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n) =$$
$$det(A_1, A_2, \ldots, A_i + (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_{i-1} A_{i-1} + \lambda_{i+1} A_{i+1} + \ldots + \lambda_n A_n), \ldots, A_n)$$

$$detE = 1$$

Разложение по строке:

$$\forall A,\ j,\ n\ \left(A = A_n \longrightarrow detA = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ij} A_{ij}\right)$$

Разложение по столбцу:

$$\forall A,\ i,\ n\ \left(A = A_n \longrightarrow detA = \sum_{j=1}^{n}[A]_{ij}A_{ij}\right)$$

Фальшивое разложение:

$$\forall A,\ n,\ k,\ i\ \left(\begin{cases} A \in M_n \\ k \neq i \end{cases} \longrightarrow \sum_{j=0}^{n}[A]_{ij}A_{kj} = 0\right)$$

$$\forall A,\ n,\ k,\ i\ \left(\begin{cases} A \in M_n \\ k \neq j \end{cases} \longrightarrow \sum_{i=0}^{n}[A]_{ij}A_{ik} = 0\right)$$

$$\forall A,\ n\ \left(\begin{cases} A = A_n \\ \text{Под главной диагональю } A \text{ только нули.} \end{cases} \longrightarrow detA = \prod_{i=1}^{n}[A]_{ii}\right)$$

10) Если A и B – квадратные матрицы, то для блочной матрицы: $\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det A \cdot \det B$

$$\forall A,\ B\ \left(\begin{cases} A \in M_n \\ B \in M_n \end{cases} \longrightarrow det(AB) = detA\ detB\right)$$

$$det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \text{– определитель Вандермонда.}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

$$\forall A \ \big(\exists B \ B = A^{-1} \Leftrightarrow detA \neq 0\big)$$

8.4 Миноры, алгебраические дополнения и ранги

$$\forall B,\ M,\ k \ \left(\exists A \begin{cases} A - \text{матрица из элементов матрицы } B, \\ \text{стоящих на пересечении } k \text{ строк и } k \text{ столбцов.} \\ M = detA \end{cases} \Leftrightarrow M - \text{минор } k \text{ порядка матрицы } B.\right)$$

$$\forall B,\ M \ \left(\exists A \begin{cases} A - \text{матрица, на главной диагонали которой стоят} \\ \text{только все или не все элементы} \\ \text{главной диагонали } B. \\ M = detA \end{cases} \Leftrightarrow M - \text{главный минор матрицы } B.\right)$$

$\forall A \ RgA$ – ранг A.

$\forall A \ RgA =$ наибольший порядок отличного от 0 минора матрицы A.

$\forall A \ RgA =$
максимальное число линейно независимых строк =
максимальное число линейно независимых столбцов.

$\forall A,\ A'$ (A' – матрица, полученная из A элементарными преобразованиями. $\longrightarrow RgA = RgA'$)

$$\forall A\ \left(\exists n\ \begin{cases} A \in M_n \\ RgA = n \end{cases} \Leftrightarrow detA \neq 0\right)$$

$$\forall A\ \left(\exists n\ \begin{cases} A \in M_n \\ A_1, A_2, \ldots, A_n - \text{линейно независимые.} \end{cases} \Leftrightarrow detA \neq 0\right)$$

$$\forall A,\ M\ \left(\begin{cases} M - \text{минор порядка } RgA \text{ матрицы } A. \\ M \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow M - \text{базисный минор матрицы } A.\right)$$

$$\forall A,\ i\ (A_i - \text{то, из чего составлен базисный минор матрицы } A. \longrightarrow A_i - \text{базисный.})$$

$$\forall A,\ i\ \left(\overline{A_i - \text{базисный}}. \longrightarrow A_i - \text{линейная комбинация базисных матрицы } A.\right)$$

$$\forall M,\ M'\ \left(\exists A\ \begin{cases} M - \text{минор матрицы } A. \\ M' - \text{минор, составленный} \\ \text{из тех же строк и столбцов, что и } M, \\ \text{и добавленных одной строки и одного столбца} \\ \text{матрицы } A. \end{cases} \Leftrightarrow M' - \text{окаймляющий минор } M.\right)$$

$$\forall A,\ M,\ k\ \left(\begin{cases} M - \text{минор } k \text{ порядка матрицы } A. \\ \text{Все окаймляющие миноры минора } M = 0 \end{cases} \longrightarrow RgA = k\right)$$

$$\forall A,\ B,\ M\ \left(\begin{cases} A - \text{матрица из элементов матрицы } B, \\ \text{кроме строк и столбцов } B, \\ \text{из которых составлен минор } M. \\ M' = detA \end{cases} \Leftrightarrow M' - \text{дополнительный минор к минору } M.\right)$$

$$\forall M,\ M^* \ \left(\exists A,\ \alpha,\ n \begin{cases} A = A_n \\ \alpha = \text{сумма номеров строк и столбцов } A, \\ \text{из которых составлен минор } M. \\ M' - \text{дополнительный минор к минору } M. \\ M^* = (-1)^{\alpha} M' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} M^* - \text{алгебраическое дополнение} \\ \text{к минору } M. \end{matrix} \right)$$

$\forall A,\ i,\ j\ M_{ij}$ – минор элемента $[A]_{ij}$ матрицы A.

$$\forall A,\ n,\ i,\ j \ \left(\begin{cases} A = A_n \\ A - \text{матрица из элементов матрицы } B, \\ \text{кроме строки } i \text{ и столбца } j. \end{cases} \Leftrightarrow detA = M_{ij} \right)$$

$\forall A,\ i,\ j\ A_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента $[A]_{ij}$.

$$\forall A,\ i,\ j\ A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

8.5 Форматы матриц

Ведущий элемент - это первый ненулевой элемент строки.

Ступенчатый вид матрицы - это матрица, номера столбцов ведущих элементов которой возрастают, а нулевые строки, если они есть, расположены внизу.

Улучшенный (приведённый, канонический) ступенчатый вид матрицы - это ступенчатый вид матрицы, в котором все ведущие элементы - единицы, над которыми в столбце все элементы - нули.

Любую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к улучшенному ступенчатому виду.

$$\forall A,\ B,\ C\ \left(\exists m,\ r,\ n\ \begin{cases} B \in M_{m\times r} \\ C \in M_{r\times n} \\ r = RgB = RgC \\ A = BC \end{cases} \Leftrightarrow BC - \text{скелетное разложение } A.\right)$$

$$\forall A,\ B,\ C\ \left(\exists m,\ r,\ n\ \begin{cases} B - \text{нижняя треугольная матрица матрицы.} \\ C - \text{верхняя треугольная матрица матрицы.} \\ A = BC \end{cases} \Leftrightarrow BC - \text{LU разложение } A.\right)$$

$$\forall A\ \ (A - \text{строго регулярная.} \Leftrightarrow A - \text{имеет LU разложение.})$$

8.6 СЛАУ относительно матриц

$$\forall a\ \left(\begin{cases} a - \text{СЛАУ.} \\ a - \text{имеет решение.} \end{cases} \longrightarrow a - \text{совместная.}\right)$$

$$\forall a\ \left(\begin{cases} a - \text{СЛАУ.} \\ a - \text{не имеет решений.} \end{cases} \longrightarrow a - \text{несовместная.}\right)$$

$$\forall A,\ x,\ b\ \left(Ax = b - \text{СЛАУ.} \longrightarrow \forall i\ \begin{cases} \Delta_i = det(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, B, Ai+1, \ldots, A_n) \\ \Delta = detA \\ x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} \end{cases}\right)$$

$$\forall A,\ x,\ b\ \left(\exists i\ \begin{cases} Ax = b - \text{СЛАУ.} \\ \Delta = 0 \\ \Delta_i \neq 0 \end{cases} \longrightarrow Ax = b - \text{несовместная.}\right)$$

$$\forall A,\ x,\ b\ \left(\begin{cases} Ax = b - \text{СЛАУ.} \\ \Delta \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} Ax = b - \text{совместная.} \\ Ax = b - \text{имеет единственное решение.} \end{cases}\right)$$

Теорема Кронекера-Капелли:

$$\forall A,\ b\ \ (RgA = Rg(A|b) \Leftrightarrow \exists x\ Ax = b - \text{совместная.})$$