Логика:
упражнения

Мы

3 июля 2023 г.

0.1 Дашков ЕВ | 1.2.12

Приведите к противоречию предположение о существовании множества всех множеств.

$$
\begin{aligned}
&]\ \exists x\ \forall y \in x \implies \exists x \in x \underset{\exists\{x,y\}}{\Longrightarrow} \exists x, \{x,x\}\ \ x \in x \implies \exists x, \{x\}\ \ x \in x \\
&\underset{\exists y \in x\ \forall z \in z\ z \notin y}{\Longrightarrow} \quad \exists x, \{x\} \begin{cases} x \in x \\ \exists w \in \{x\}\ \ \forall i \in \{x\}\ \ i \notin \{x\} \end{cases} \implies \\
&\exists x, \{x\} \begin{cases} x \in x \\ \forall i \in \{x\}\ \ i \notin x \end{cases} \underset{?}{\Longleftrightarrow} \quad \exists x, \{x\} \begin{cases} x \in x \\ x \notin x \end{cases} \implies \bot \\
&\overline{\exists x\ \forall y \in x}
\end{aligned}
$$

Можно попробовать решить без аксиомы фундированности.

0.2 Дашков ЕВ | 1.2.13

Объясните, почему степень множества A единственна.

$$
\begin{aligned}
&]\ \exists x, y\ \forall z \begin{cases} z \in x \iff z \subseteq A \\ z \in y \iff z \subseteq A \\ x \neq y \end{cases} \frac{\Longleftrightarrow}{def\ =} \quad \exists x, y \begin{cases} \forall z\ (z \in x \iff z \subseteq A) \\ \forall z\ (z \in y \iff z \subseteq A) \\ \exists z\ (z \in x \oplus z \in y) \end{cases} \iff \\
&\begin{cases} \forall z\ (z \in x \iff z \subseteq A) \\ \forall z\ (z \in y \iff z \subseteq A) \\ \exists z\ (z \subseteq A \oplus z \subseteq A) \end{cases} \implies \bot \\
&\exists! \mathcal{P}(A)
\end{aligned}
$$

0.3 Дашков ЕВ | 1.2.15

Выпишите все элементы множества $\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$.

$$\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

0.4 Дашков ЕВ | 1.2.19

Докажите, что $\cup\varnothing = \varnothing$ и $\cup\{A\} = A$ для всех A.

$$(x \in A \iff x \in A) \iff \left(\exists z \begin{cases} z = A \\ x \in z \end{cases} \iff x \in A\right) \underset{?}{\iff}$$

$$\begin{cases} \exists y \begin{cases} y \in \varnothing \\ x \in y \end{cases} \iff x \in \varnothing \\ \exists z \begin{cases} z \in \{A\} \\ x \in z \end{cases} \iff x \in A \end{cases} \underset{def\,\cup}{\iff} \begin{cases} x \in \cup\varnothing \iff x \in \varnothing \\ x \in \cup\{A\} \iff x \in A \end{cases} \underset{def\,=}{\iff}$$

$$\begin{cases} \cup\varnothing = \varnothing \\ \cup\{A\} = A \end{cases}$$

0.5 Дашков ЕВ | 1.2.20

Докажите, что если $X \subseteq Y$, то $\cup X \subseteq \cup Y$ для любых множеств X и Y.

$$(\forall x\ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x\ (x \in X \implies x \in Y)) \underset{x \in y \implies x \in y}{\iff}$$

$$\Bigg(\forall x\ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x, y \Bigg(\Bigg(\begin{cases} y \in X \\ x \in y \end{cases} \implies \begin{cases} y \in Y \\ x \in y \end{cases}\Bigg)\Bigg) \implies$$

$$\Bigg(\forall x\ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x \Bigg(\exists z \begin{cases} z \in X \\ x \in z \end{cases} \implies \exists w \begin{cases} w \in Y \\ x \in w \end{cases}\Bigg)\Bigg) \underset{def\,\cup}{\iff}$$

$$(\forall x\ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x\ (x \in \cup X \implies x \in \cup Y)) \underset{def\ \subseteq}{\iff}$$

$$(X \subseteq Y \implies \cup X \subseteq \cup Y)$$

0.6 Дашков ЕВ | 1.2.22

Вычислите $\cup\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, $\cup\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$, а также $\cup\cup\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

$$\cup\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$
$$\cup\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$
$$\cup\cup\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \cup\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{\varnothing\}$$

0.7 Дашков ЕВ | 1.2.23

Приведите к противоречию предположение о существовании множества всех одноэлементных (ТЕ вида $\{x\}$) множеств.

$$
] \ \exists x \ \forall y \ \left(\begin{cases} \left(\forall z, w \ \begin{cases} z \in y \\ w \in y \end{cases} \implies z = w \right) \\ y \neq \varnothing \end{cases} \implies y \in x \right) \underset{\exists \{x\}}{\implies}
$$

$$
\exists x, \{x\} \ \ \forall y \ \left(\begin{cases} \left(\forall z, w \ \begin{cases} z \in y \\ w \in y \end{cases} \implies z = w \right) \\ y \neq \varnothing \end{cases} \implies y \in x \right) \underset{\exists \{x, y\}}{\implies}
$$

$$
\exists x, \{x\}, \{x, \{x\}\} \ \ \forall y \ \left(\begin{cases} \left(\forall z, w \ \begin{cases} z \in y \\ w \in y \end{cases} \implies z = w \right) \\ y \neq \varnothing \end{cases} \implies y \in x \right) \implies
$$

$$
\exists x, \{x\}, \{x, \{x\}\} \ \ \{x\} \in x \quad \underset{\exists y \in x \ \forall z \in x \ z \notin y}{\implies}
$$

$$
\exists x, \{x\}, \{x, \{x\}\}, i \ \begin{cases} \{x\} \in x \\ i \in \{x, \{x\}\} \ \ \forall z \in \{x, \{x\}\} \ \ z \notin i \end{cases} \implies
$$

$$
\exists x, \{x\}, \{x, \{x\}\}, i \ \begin{cases} \{x\} \in x \\ \left[\begin{array}{l} i = x \implies \forall z \in \{x, \{x\}\} \ \ z \notin i \\ i = \{x\} \implies \forall z \in \{x, \{x\}\} \ \ z \notin i \end{array} \right. \end{cases} \implies
$$

$$
\exists x, \{x\}, i \ \begin{cases} \{x\} \in x \\ \left[\begin{array}{l} i = x \implies \begin{cases} \exists z = x \ z \notin i \\ \exists z = \{x\} \ \ z \notin i \end{cases} \\ i = \{x\} \implies \begin{cases} \exists z = x \ z \notin i \\ \exists z = \{x\} \ \ z \notin i \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \quad \underset{def \ \ \{x\}}{\implies}
$$

$$
\exists x, \{x\}, i \ \begin{cases} \{x\} \in x \\ \left[\begin{array}{l} i = x \implies \begin{cases} \exists z = x \ z \notin i \\ \exists z = \{x\} \ \ z \notin i \end{cases} \\ i = \{x\} \implies \begin{cases} \exists z = x \ z \notin i \\ \exists z = \{x\} \ \ z \notin i \end{cases} \end{array} \right. \\ x \in \{x\} \end{cases} \implies \perp
$$

0.8 Дашков ЕВ | 1.2.24

Приведите пример множеств $X \neq Y$, ТЧ $\cup X = \cup Y$.

$X = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
$Y = \{\{\varnothing\}\}$

0.9 Дашков ЕВ | 1.2.26

Докажите, что $X \subseteq \mathcal{P}(\cup X)$ для всех X. Приведите примеры множества X, ТЧ $\mathcal{P}(\cup X) \not\subseteq X$ и ТЧ $\mathcal{P}(\cup X) = X$.