Логика:
упражнения

Мы

4 июля 2023 г.

0.1 Дашков ЕВ | 1.2.12

Приведите к противоречию предположение о существовании множества всех множеств.

$$
\begin{aligned}
&] \ \exists x \ \forall y \in x \implies \exists x \in x \ \overset{\implies}{\exists \{x, y\}} \ \exists x, \{x, x\} \ x \in x \implies \exists x, \{x\} \ x \in x \\
&\overset{\implies}{\exists y \in x \ \forall z \in z \ z \notin y} \quad \exists x, \{x\} \begin{cases} x \in x \\ \exists w \in \{x\} \ \forall i \in \{x\} \ i \notin \{x\} \end{cases} \implies \\
&\exists x, \{x\} \begin{cases} x \in x \\ \forall i \in \{x\} \ i \notin x \end{cases} \underset{?}{\iff} \exists x, \{x\} \begin{cases} x \in x \\ x \notin x \end{cases} \implies \perp \\
&\overline{\exists x \ \forall y \in x}
\end{aligned}
$$

Можно попробовать решить без аксиомы фундированности.

0.2 Дашков ЕВ | 1.2.13

Объясните, почему степень множества A единственна.

$$
\begin{aligned}
&] \ \exists x, y \ \forall z \begin{cases} z \in x \iff z \subseteq A \\ z \in y \iff z \subseteq A \\ x \neq y \end{cases} \overset{\iff}{\overline{def \ =}} \ \exists x, y \begin{cases} \forall z \ (z \in x \iff z \subseteq A) \\ \forall z \ (z \in y \iff z \subseteq A) \\ \exists z \ (z \in x \oplus z \in y) \end{cases} \iff \\
&\begin{cases} \forall z \ (z \in x \iff z \subseteq A) \\ \forall z \ (z \in y \iff z \subseteq A) \\ \exists z \ (z \subseteq A \oplus z \subseteq A) \end{cases} \implies \perp \\
&\exists ! \mathcal{P}(A)
\end{aligned}
$$

0.3 Дашков ЕВ | 1.2.15

Выпишите все элементы множества $\mathcal{P}\left(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\right)$.

$$\mathcal{P}\left(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\right) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

0.4 Дашков ЕВ | 1.2.19

Докажите, что $\cup\varnothing = \varnothing$ и $\cup\{A\} = A$ для всех A.

$$(x \in A \iff x \in A) \iff \left(\exists z \begin{cases} z = A \\ x \in z \end{cases} \iff x \in A\right) \underset{?}{\iff}$$

$$\begin{cases} \exists y \begin{cases} y \in \varnothing \\ x \in y \end{cases} \iff x \in \varnothing \\ \exists z \begin{cases} z \in \{A\} \\ x \in z \end{cases} \iff x \in A \end{cases} \underset{def\ \cup}{\iff} \begin{cases} x \in \cup\varnothing \iff x \in \varnothing \\ x \in \cup\{A\} \iff x \in A \end{cases} \underset{def\ =}{\iff}$$

$$\begin{cases} \cup\varnothing = \varnothing \\ \cup\{A\} = A \end{cases}$$

0.5 Дашков ЕВ | 1.2.20

Докажите, что если $X \subseteq Y$, то $\cup X \subseteq \cup Y$ для любых множеств X и Y.

$$(\forall x \ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x \ (x \in X \implies x \in Y)) \underset{x \in y \implies x \in y}{\iff}$$

$$\left(\forall x \ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x, y \left(\left(\begin{cases} y \in X \\ x \in y \end{cases} \implies \begin{cases} y \in Y \\ x \in y \end{cases}\right)\right)\right) \implies$$

$$\left(\forall x \ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x \left(\exists z \begin{cases} z \in X \\ x \in z \end{cases} \implies \exists w \begin{cases} w \in Y \\ x \in w \end{cases}\right)\right) \underset{def\ \cup}{\iff}$$

$$(\forall x \ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x \ (x \in \cup X \implies x \in \cup Y)) \underset{def\ \subseteq}{\iff}$$

$$(X \subseteq Y \implies \cup X \subseteq \cup Y)$$

0.6 Дашков ЕВ | 1.2.22

Вычислите $\cup\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, $\cup\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$, а также $\cup\cup\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

$$\cup\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$
$$\cup\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$
$$\cup\cup\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \cup\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{\varnothing\}$$

0.7 Дашков ЕВ | 1.2.23

Приведите к противоречию предположение о существовании множества всех одноэлементных (ТЕ вида $\{x\}$) множеств.

$$] \; \exists x \; \forall y \; \left(\begin{cases} \left(\forall z, w \; \begin{cases} z \in y \\ w \in y \end{cases} \implies z = w \right) \\ y \neq \varnothing \end{cases} \implies y \in x \right) \underset{\exists \{x\}}{\implies}$$

$$\exists x, \{x\} \; \forall y \; \left(\begin{cases} \left(\forall z, w \; \begin{cases} z \in y \\ w \in y \end{cases} \implies z = w \right) \\ y \neq \varnothing \end{cases} \implies y \in x \right) \underset{\exists \{x, y\}}{\implies}$$

$$\exists x, \{x\}, \{x, \{x\}\} \; \forall y \; \left(\begin{cases} \left(\forall z, w \; \begin{cases} z \in y \\ w \in y \end{cases} \implies z = w \right) \\ y \neq \varnothing \end{cases} \implies y \in x \right) \implies$$

$$\exists x, \{x\}, \{x, \{x\}\} \; \{x\} \in x \underset{\exists y \in x \; \forall z \in x \; z \notin y}{\implies}$$

$$\exists x, \{x\}, \{x, \{x\}\}, i \; \begin{cases} \{x\} \in x \\ i \in \{x, \{x\}\} \; \forall z \in \{x, \{x\}\} \; z \notin i \end{cases} \implies$$

$$\exists x, \{x\}, \{x, \{x\}\}, i \; \begin{cases} \{x\} \in x \\ \left[\begin{array}{l} i = x \implies \forall z \in \{x, \{x\}\} \; z \notin i \\ i = \{x\} \implies \forall z \in \{x, \{x\}\} \; z \notin i \end{array} \right. \end{cases} \implies$$

$$\exists x, \{x\}, i \; \begin{cases} \{x\} \in x \\ \left[\begin{array}{l} i = x \implies \begin{cases} \exists z = x \; z \notin i \\ \exists z = \{x\} \; z \notin i \end{cases} \\ i = \{x\} \implies \begin{cases} \exists z = x \; z \notin i \\ \exists z = \{x\} \; z \notin i \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \underset{def \; \{x\}}{\implies}$$

$$\exists x, \{x\}, i \; \begin{cases} \{x\} \in x \\ \left[\begin{array}{l} i = x \implies \begin{cases} \exists z = x \; z \notin i \\ \exists z = \{x\} \; z \notin i \end{cases} \\ i = \{x\} \implies \begin{cases} \exists z = x \; z \notin i \\ \exists z = \{x\} \; z \notin i \end{cases} \end{array} \right. \\ x \in \{x\} \end{cases} \implies \bot$$

0.8 Дашков ЕВ | 1.2.24

Приведите пример множеств $X \neq Y$, ТЧ $\cup X = \cup Y$.

$X = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
$Y = \{\{\varnothing\}\}$

0.9 Дашков ЕВ | 1.2.26

Докажите, что $X \subseteq \mathcal{P}(\cup X)$ для всех X. Приведите примеры множества X, ТЧ $\mathcal{P}(\cup X) \nsubseteq X$ и ТЧ $\mathcal{P}(\cup X) = X$.

$$\left(\forall x \begin{cases} x \in X \\ y \in x \end{cases} \implies \forall x \begin{cases} x \in X \\ y \in x \end{cases}\right) \implies$$

$$\left(x \in X \implies \forall y \left(y \in x \implies \exists z \begin{cases} z \in X \\ y \in z \end{cases}\right)\right) \underset{def\ \cup}{\iff}$$

$$(x \in X \implies \forall y \ (y \in x \implies y \in \cup X)) \underset{def\ \subseteq}{\iff}$$

$$(x \in X \implies x \subseteq \cup X) \underset{def\ \mathcal{P}(x)}{\iff} (x \in X \implies x \in \mathcal{P}(\cup X)) \underset{def\ \subseteq}{\iff}$$

$$X \subseteq \mathcal{P}(\cup X)$$

Доказательство с новой нотацией.

$$\left(\left(\forall x \begin{cases} x \in X \\ y \in x \end{cases}\right) \forall x \begin{cases} x \in X \\ y \in x \end{cases}\right) \left(x \in X \ y \in x \ \exists z \begin{cases} z \in X \\ y \in z \end{cases}\right) \underset{def\ \cup}{\iff}$$

$$(x \in X \ y \in x \ y \in \cup X) \underset{def\ \subseteq}{\iff} (x \in X \ x \subseteq \cup X) \underset{def\ \mathcal{P}(x)}{\iff}$$

$$(x \in X \ x \in \mathcal{P}(\cup X)) \underset{def\ \subseteq}{\iff} X \subseteq \mathcal{P}(\cup X)$$

Пробел правоассоциативен.

$X = \varnothing \ \mathcal{P}(\cup X) \nsubseteq X$
$X = \{\varnothing\} \ \mathcal{P}(\cup X) = X$

0.10 Дашков ЕВ | 1.2.27

Приведите пример транзитивного множества с нетранзитивным элементом. Докажите, что если X транзитивно, то таковы же $\cup X$ и $\mathcal{P}(X)$. Докажите, что X транзитивно тогда и только тогда, когда $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

$\cup\,\varnothing=\varnothing$

$\cup\,\{\varnothing\}=\varnothing$

$\cup\,\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing\}$

$\cup\,\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$$\left(\left(\forall x\ \exists z \begin{cases} z\in X \\ x\in z\end{cases} \quad x\in X\right) \begin{cases} \forall x\ \left(\exists z \begin{cases}\exists w\ \begin{cases} w\in X\\ z\in w\end{cases} \\ x\in z\end{cases}\right) \left(\exists z\ \begin{cases} z\in X\\ x\in z\end{cases}\right) \\ \forall x\ \left(\exists z\ \begin{cases}\forall w\in z\ w\in X \\ x\in z\end{cases}\right)\ \forall w\in x\ w\in X\end{cases}\right)$$

$\Longleftrightarrow$

$\subseteq$

$$\left(\left(\forall x\ \exists z \begin{cases} z\in X \\ x\in z\end{cases} \quad x\in X\right) \begin{cases} \forall x\ \left(\exists z \begin{cases}\exists w\ \begin{cases} w\in X\\ z\in w\end{cases} \\ x\in z\end{cases}\right) \left(\exists z\ \begin{cases} z\in X\\ x\in z\end{cases}\right) \\ \forall x\ \left(\exists z\ \begin{cases} z\subseteq X \\ x\in z\end{cases}\right)\ x\subseteq X\end{cases}\right)$$

$\Longleftrightarrow$

$def\ \mathcal{P}(x)$

$$\left(\left(\forall x\ \exists z \begin{cases} z\in X \\ x\in z\end{cases} \quad x\in X\right) \begin{cases} \forall x\ \left(\exists z \begin{cases}\exists w\ \begin{cases} w\in X\\ z\in w\end{cases} \\ x\in z\end{cases}\right) \left(\exists z\ \begin{cases} z\in X\\ x\in z\end{cases}\right) \\ \forall x\ \left(\exists z\ \begin{cases} z\in \mathcal{P}\left(X\right) \\ x\in z\end{cases}\right)\ x\in \mathcal{P}\left(X\right)\end{cases}\right)$$

$\Longleftrightarrow$

$def\ \cup$

$$\left(\left(\forall x\ \exists z \begin{cases} z\in X \\ x\in z\end{cases} \quad x\in X\right) \begin{cases} \forall x\ \left(\exists z \begin{cases} z\in \cup X \\ x\in z\end{cases}\right) \left(\exists z\ \begin{cases} z\in X\\ x\in z\end{cases}\right) \\ \forall x\ \left(\exists z\ \begin{cases} z\in \mathcal{P}\left(X\right) \\ x\in z\end{cases}\right)\ x\in \mathcal{P}\left(X\right)\end{cases}\right) \underset{def\ \cup}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\left(\forall x\in\cup X\ x\in X\right)\ \begin{cases}\forall x\in\cup\cup X\ x\in\cup X \\ \forall x\in\cup\mathcal{P}\left(X\right)\ \ x\in\mathcal{P}\left(X\right)\end{cases}\right) \underset{def\ \subseteq}{\Longleftrightarrow}$$

$$\left(\cup X\subseteq X\ \begin{cases}\cup\cup X\subseteq\cup X \\ \cup\mathcal{P}\left(X\right)\subseteq\mathcal{P}\left(X\right)\end{cases}\right)$$