Логика:
упражнения

Мы

2 июля 2023 г.

0.1 Дашков ЕВ | 1.2.12

Приведите к противоречию предположение о существовании множества всех множеств.

$$
] \; \exists x \; \forall y \in x \implies \exists x \in x \underset{\exists \{x, y\}}{\implies} \exists x, \{x, x\} \;\; x \in x \implies \exists x, \{x\} \;\; x \in x
$$

$$
\underset{\exists y \in x \; \forall z \in z \;\; z \notin y}{\implies} \exists x, \{x\} \begin{cases} x \in x \\ \exists w \in \{x\} \;\; \forall i \in \{x\} \;\; i \notin \{x\} \end{cases} \implies
$$

$$
\exists x, \{x\} \begin{cases} x \in x \\ \forall i \in \{x\} \;\; i \notin x \end{cases} \underset{?}{\iff} \exists x, \{x\} \begin{cases} x \in x \\ x \notin x \end{cases} \implies \bot
$$

$$
\overline{\exists x \; \forall y \in x}
$$

Можно попробовать решить без аксиомы фундированности.

0.2 Дашков ЕВ | 1.2.13

Объясните, почему степень множества A единственна.

$$
] \; \exists x, y \; \forall z \begin{cases} z \in x \iff z \subseteq A \\ z \in y \iff z \subseteq A \\ x \neq y \end{cases} \underset{def \; =}{\overline{\iff}} \exists x, y \begin{cases} \forall z \; (z \in x \iff z \subseteq A) \\ \forall z \; (z \in y \iff z \subseteq A) \\ \exists z \; (z \in x \oplus z \in y) \end{cases} \iff
$$

$$
\begin{cases} \forall z \; (z \in x \iff z \subseteq A) \\ \forall z \; (z \in y \iff z \subseteq A) \\ \exists z \; (z \subseteq A \oplus z \subseteq A) \end{cases} \implies \bot
$$

$$
\exists! \mathcal{P}(A)
$$

0.3 Дашков ЕВ | 1.2.15

Выпишите все элементы множества $\mathcal{P}\left(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\right)$.

$$
\mathcal{P}\left(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\right) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}
$$

0.4 Дашков ЕВ | 1.2.19

Докажите, что $\cup\varnothing = \varnothing$ и $\cup\{A\} = A$ для всех A.

$$(x \in A \iff x \in A) \iff \left(\exists z \begin{cases} z = A \\ x \in z \end{cases} \iff x \in A\right) \underset{?}{\iff}$$

$$\begin{cases} \exists y \begin{cases} y \in \varnothing \\ x \in y \end{cases} \iff x \in \varnothing \\ \exists z \begin{cases} z \in \{A\} \\ x \in z \end{cases} \iff x \in A \end{cases} \underset{def \cup}{\iff} \begin{cases} x \in \cup\varnothing \iff x \in \varnothing \\ x \in \cup\{A\} \iff x \in A \end{cases} \underset{def =}{\iff}$$

$$\begin{cases} \cup\varnothing = \varnothing \\ \cup\{A\} = A \end{cases}$$

0.5 Дашков ЕВ | 1.2.20

Докажите, что если $X \subseteq Y$, то $\cup X \subseteq \cup Y$ для любых множеств X и Y.

$$\left(\forall x \ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x, y \ \left(\begin{cases} y \in X \\ x \in y \end{cases} \implies \begin{cases} y \in Y \\ x \in y \end{cases}\right)\right) \implies$$

$$\left(\forall x \ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x \ \left(\exists z \begin{cases} z \in X \\ x \in z \end{cases} \implies \exists w \begin{cases} w \in Y \\ x \in w \end{cases}\right)\right) \underset{def \cup}{\iff}$$

$$(\forall x \ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x \ (x \in \cup X \implies x \in \cup Y)) \underset{def \subseteq}{\iff}$$

$$(X \subseteq Y \implies \cup X \subseteq \cup Y)$$