Логика:
упражнения

WinstonMDP

4 июля 2023 г.

0.1 Дашков ЕВ | 1.2.12

Приведите к противоречию предположение о существовании множества всех множеств.

$$
\begin{gathered}
]\ \exists x\ \forall y \in x \implies \exists x \in x \underset{\exists\{x,y\}}{\Longrightarrow} \exists x, \{x,x\}\ \ x \in x \implies \exists x, \{x\}\ \ x \in x \\
\underset{\exists y \in x\ \forall z \in z\ z \notin y}{\Longrightarrow} \exists x, \{x\} \begin{cases} x \in x \\ \exists w \in \{x\}\ \ \forall i \in \{x\}\ \ i \notin \{x\} \end{cases} \implies \\
\exists x, \{x\} \begin{cases} x \in x \\ \forall i \in \{x\}\ \ i \notin x \end{cases} \underset{?}{\Longleftrightarrow} \exists x, \{x\} \begin{cases} x \in x \\ x \notin x \end{cases} \implies \perp \\
\overline{\exists x\ \forall y \in x}
\end{gathered}
$$

Можно попробовать решить без аксиомы фундированности.

0.2 Дашков ЕВ | 1.2.13

Объясните, почему степень множества A единственна.

$$
\begin{gathered}
]\ \exists x, y\ \forall z \begin{cases} z \in x \iff z \subseteq A \\ z \in y \iff z \subseteq A \\ x \neq y \end{cases} \frac{\Longleftrightarrow}{def\ =} \exists x, y \begin{cases} \forall z\ (z \in x \iff z \subseteq A) \\ \forall z\ (z \in y \iff z \subseteq A) \\ \exists z\ (z \in x \oplus z \in y) \end{cases} \iff \\
\begin{cases} \forall z\ (z \in x \iff z \subseteq A) \\ \forall z\ (z \in y \iff z \subseteq A) \\ \exists z\ (z \subseteq A \oplus z \subseteq A) \end{cases} \implies \perp \\
\exists! \mathcal{P}(A)
\end{gathered}
$$

0.3 Дашков ЕВ | 1.2.15

Выпишите все элементы множества $\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\})$.

$$
\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}
$$

0.4 Дашков ЕВ | 1.2.19

Докажите, что $\cup\varnothing = \varnothing$ и $\cup\{A\} = A$ для всех A.

$$(x \in A \iff x \in A) \iff \left(\exists z \begin{cases} z = A \\ x \in z \end{cases} \iff x \in A\right) \underset{?}{\iff}$$

$$\begin{cases} \exists y \begin{cases} y \in \varnothing \\ x \in y \end{cases} \iff x \in \varnothing \\ \exists z \begin{cases} z \in \{A\} \\ x \in z \end{cases} \iff x \in A \end{cases} \underset{def\ \cup}{\iff} \begin{cases} x \in \cup\varnothing \iff x \in \varnothing \\ x \in \cup\{A\} \iff x \in A \end{cases} \underset{def\ =}{\iff}$$

$$\begin{cases} \cup\varnothing = \varnothing \\ \cup\{A\} = A \end{cases}$$

0.5 Дашков ЕВ | 1.2.20

Докажите, что если $X \subseteq Y$, то $\cup X \subseteq \cup Y$ для любых множеств X и Y.

$$(\forall x\ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x\ (x \in X \implies x \in Y)) \underset{x \in y \implies x \in y}{\iff}$$

$$\left(\forall x\ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x, y\ \left(\left(\begin{cases} y \in X \\ x \in y \end{cases} \implies \begin{cases} y \in Y \\ x \in y \end{cases}\right)\right)\right) \implies$$

$$\left(\forall x\ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x\ \left(\exists z \begin{cases} z \in X \\ x \in z \end{cases} \implies \exists w \begin{cases} w \in Y \\ x \in w \end{cases}\right)\right) \underset{def\ \cup}{\iff}$$

$$(\forall x\ (x \in X \implies x \in Y) \implies \forall x\ (x \in \cup X \implies x \in \cup Y)) \underset{def\ \subseteq}{\iff}$$

$$(X \subseteq Y \implies \cup X \subseteq \cup Y)$$

0.6 Дашков ЕВ | 1.2.22

Вычислите $\cup\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, $\cup\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$, а также $\cup\cup\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

$$\cup\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$
$$\cup\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$
$$\cup\cup\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \cup\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{\varnothing\}$$

0.7 Дашков ЕВ | 1.2.23

Приведите к противоречию предположение о существовании множества всех одноэлементных (ТЕ вида $\{x\}$) множеств.

$$] \ \exists x \ \forall y \ \left(\begin{cases} \left(\forall z, w \ \begin{cases} z \in y \\ w \in y \end{cases} \implies z = w \right) \\ y \neq \varnothing \end{cases} \implies y \in x \right) \underset{\exists \{x\}}{\implies}$$

$$\exists x, \{x\} \ \ \forall y \ \left(\begin{cases} \left(\forall z, w \ \begin{cases} z \in y \\ w \in y \end{cases} \implies z = w \right) \\ y \neq \varnothing \end{cases} \implies y \in x \right) \underset{\exists \{x, y\}}{\implies}$$

$$\exists x, \{x\}, \{x, \{x\}\} \ \ \forall y \ \left(\begin{cases} \left(\forall z, w \ \begin{cases} z \in y \\ w \in y \end{cases} \implies z = w \right) \\ y \neq \varnothing \end{cases} \implies y \in x \right) \implies$$

$$\exists x, \{x\}, \{x, \{x\}\} \ \ \{x\} \in x \ \underset{\exists y \in x \ \forall z \in x \ z \notin y}{\implies}$$

$$\exists x, \{x\}, \{x, \{x\}\}, i \ \begin{cases} \{x\} \in x \\ i \in \{x, \{x\}\} \ \ \forall z \in \{x, \{x\}\} \ \ z \notin i \end{cases} \implies$$

$$\exists x, \{x\}, \{x, \{x\}\}, i \ \begin{cases} \{x\} \in x \\ \left[\begin{array}{l} i = x \implies \forall z \in \{x, \{x\}\} \ \ z \notin i \\ i = \{x\} \implies \forall z \in \{x, \{x\}\} \ \ z \notin i \end{array} \right. \end{cases} \implies$$

$$\exists x, \{x\}, i \ \begin{cases} \{x\} \in x \\ \left[\begin{array}{l} i = x \implies \begin{cases} \exists z = x \ z \notin i \\ \exists z = \{x\} \ \ z \notin i \end{cases} \\ i = \{x\} \implies \begin{cases} \exists z = x \ z \notin i \\ \exists z = \{x\} \ \ z \notin i \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \underset{def \ \ \{x\}}{\implies}$$

$$\exists x, \{x\}, i \ \begin{cases} \{x\} \in x \\ \left[\begin{array}{l} i = x \implies \begin{cases} \exists z = x \ z \notin i \\ \exists z = \{x\} \ \ z \notin i \end{cases} \\ i = \{x\} \implies \begin{cases} \exists z = x \ z \notin i \\ \exists z = \{x\} \ \ z \notin i \end{cases} \end{array} \right. \\ x \in \{x\} \end{cases} \implies \perp$$

0.8 Дашков ЕВ | 1.2.24

Приведите пример множеств $X \neq Y$, ТЧ $\cup X = \cup Y$.

$X = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
$Y = \{\{\varnothing\}\}$

0.9 Дашков ЕВ | 1.2.26

Докажите, что $X \subseteq \mathcal{P}(\cup X)$ для всех X. Приведите примеры множества X, ТЧ $\mathcal{P}(\cup X) \nsubseteq X$ и ТЧ $\mathcal{P}(\cup X) = X$.

$$\left(\forall x \begin{cases} x \in X \\ y \in x \end{cases} \implies \forall x \begin{cases} x \in X \\ y \in x \end{cases} \right) \implies$$

$$\left(x \in X \implies \forall y \left(y \in x \implies \exists z \begin{cases} z \in X \\ y \in z \end{cases} \right)\right) \underset{def\ \cup}{\iff}$$

$$(x \in X \implies \forall y\ (y \in x \implies y \in \cup X)) \underset{def\ \subseteq}{\iff}$$

$$(x \in X \implies x \subseteq \cup X) \underset{def\ \mathcal{P}(x)}{\iff} (x \in X \implies x \in \mathcal{P}(\cup X)) \underset{def\ \subseteq}{\iff}$$

$$X \subseteq \mathcal{P}(\cup X)$$

Доказательство с новой нотацией.

$$\left(\left(\forall x \begin{cases} x \in X \\ y \in x \end{cases} \right) \forall x \begin{cases} x \in X \\ y \in x \end{cases} \right) \left(x \in X\ y \in x\ \exists z \begin{cases} z \in X \\ y \in z \end{cases} \right) \underset{def\ \cup}{\iff}$$

$$(x \in X\ y \in x\ y \in \cup X) \underset{def\ \subseteq}{\iff} (x \in X\ x \subseteq \cup X) \underset{def\ \mathcal{P}(x)}{\iff}$$

$$(x \in X\ x \in \mathcal{P}(\cup X)) \underset{def\ \subseteq}{\iff} X \subseteq \mathcal{P}(\cup X)$$

Пробел правоассоциативен.

$X = \varnothing\ \mathcal{P}(\cup X) \nsubseteq X$
$X = \{\varnothing\}\ \mathcal{P}(\cup X) = X$

0.10 Дашков ЕВ | 1.2.27

Приведите пример транзитивного множества с нетранзитивным элементом. Докажите, что если X транзитивно, то таковы же $\cup X$ и $\mathcal{P}(X)$. Докажите, что X транзитивно тогда и только тогда, когда $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.

$\cup\varnothing=\varnothing$

$\cup\{\varnothing\}=\varnothing$

$\cup\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing\}$

$\cup\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$$\left(\forall x,w\begin{cases}\left(\forall y\left(\exists z\begin{cases}z\in X\\ y\in z\end{cases}\right)\ y\in X\right)\\ \exists z\begin{cases}\forall i\in z\ i\in X\\ x\in z\end{cases}\\ w\in x\\ \left(\exists z\begin{cases}z\in X\\ w\in z\end{cases}\right)\ w\in X\\ x\in X\end{cases} w\in X\right)\iff$$

$$\left(\forall x,w\begin{cases}\left(\forall y\left(\exists z\begin{cases}z\in X\\ y\in z\end{cases}\right)\ y\in X\right)\\ \exists z\begin{cases}\forall i\in z\ i\in X\\ x\in z\end{cases}\\ w\in x\end{cases} w\in X\right)\iff$$

$$\left(\left(\forall x\left(\exists z\begin{cases}z\in X\\ x\in z\end{cases}\right)\ x\in X\right)\ \forall x\left(\exists z\begin{cases}\forall w\in z\ w\in X\\ x\in z\end{cases}\right)\ \forall w\in x\ w\in X\right)$$

$$\underset{def\ \subseteq}{\iff}$$

$$\left(\left(\forall x\left(\exists z\begin{cases}z\in X\\ x\in z\end{cases}\right)\ x\in X\right)\ \forall x\ \left(\exists z\ \begin{cases}z\subseteq X\\ x\in z\end{cases}\right)\ x\subseteq X\right)$$

$$\underset{def\ \mathcal{P}(x)}{\iff}$$

$$\left(\left(\forall x\left(\exists z\begin{cases}z\in X\\ x\in z\end{cases}\right)\ x\in X\right)\ \forall x\ \left(\exists z\ \begin{cases}z\in\mathcal{P}(X)\\ x\in z\end{cases}\right)\ x\in\mathcal{P}(X)\right)\underset{def\ \cup}{\iff}$$

$$((\forall x\in\cup X\ x\in X)\ \forall x\in\cup\mathcal{P}(X)\ x\in\mathcal{P}(X))\underset{def\ \subseteq}{\iff}$$

$$(\cup X\subseteq X\ \cup\mathcal{P}(X)\subseteq\mathcal{P}(X))\quad\underset{x\subseteq y\ \cup x\subseteq\cup y}{\iff}$$

$$\left(\cup X\subseteq X\ \begin{cases}\cup\cup X\subseteq\cup X\\ \cup\mathcal{P}(X)\subseteq\mathcal{P}(X)\end{cases}\right)$$