ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1 Équations différentielles homogènes du premier ordre

On considère l'équation différentielle homogène du premier ordre suivante :

$$(E_0) \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

où a et b sont deux fonctions définies sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$.

Théorème (Ensemble des solutions de (E_0)).

S'il existe un intervalle $I \subset J$ sur lequel les fonctions a et b sont continues et où la fonction a ne s'annule pas, alors l'ensemble des solutions de (E_0) sur I est :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)} dt} \end{array} ; k \in \mathbb{R} \right\}$$

Conseil méthode : ici, nous voulons démontrer une égalité entre deux ensembles S_0 et l'ensemble de droite noté par exemple B. On procède par double inclusion : $S_0 \subset B$ et $B \subset S_0$.
Démontrer par exemple que $S_0 \subset B$ revient à démontrer que tous les éléments de S_0 sont dans B.

Preuve :

Dans toute la preuve, on note $F(t) = \int \frac{b(t)}{a(t)} dt$ une primitive de $\frac{b}{a}$ sur I. (F est bien définie sur I par continuité des fonctions a et b et puisque a ne s'annule pas sur I).
On a : $\forall\, t \in I,\ F'(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$.

$\boxed{\subset}$ Soit $y_0 \in S_0$ une solution de (E_0) sur I : $\forall\, t \in I,\ a(t)y_0'(t) + b(t)y_0(t) = 0$.
Considérons sur I la fonction $z : t \longmapsto y_0(t)e^{F(t)}$. z est dérivable sur I et

$$\begin{aligned} \forall\, t \in I,\ z'(t) &= y_0'(t)e^{F(t)} + y_0(t)F'(t)e^{F(t)} \\ &= y_0'(t)e^{F(t)} + y_0(t)\frac{b(t)}{a(t)}e^{F(t)} \\ &= \frac{e^{F(t)}}{a(t)}\left(a(t)y_0'(t) + b(t)y_0(t)\right) \\ &= \frac{e^{F(t)}}{a(t)} \times 0 = 0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que la fonction z est constante égale à $k \in \mathbb{R}$ sur I.

Ainsi, $\forall\, t \in I$, $z(t) = y_0(t)e^{F(t)} = k$ ce qui donne $y_0(t) = ke^{-F(t)} = ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}\mathrm{d}t}$.

$\boxed{\supset}$ Soit y la fonction définie sur I par $y(t) = ke^{-F(t)}$ avec $k \in \mathbb{R}$. y est dérivable sur I et

$$\forall\, t \in I,\ y'(t) = -kF'(t)e^{-F(t)} = -F'(t)y(t) = -\frac{b(t)}{a(t)}y(t)$$

Ainsi, $\forall\, t \in I$, $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = a(t)\left(-\frac{b(t)}{a(t)}y(t)\right) + b(t)y(t) = -b(t)y(t) + b(t)y(t) = 0$
Donc $y \in S_0$.

2 Solution générale d'une équation différentielle du premier ordre

Théorème (Ensemble des solutions de (E)).

Soient (E) $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ et (E_0) $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$
où a, b et c sont trois fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ avec $\forall\, t \in I$, $a(t) \neq 0$.

Soit y_p une solution particulière de (E).

Alors :

$$S = \{y_p + y_0;\ y_0 \in S_0\}$$

où S_0 est l'ensemble des solutions de (E_0).

Preuve :

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in S$ une solution quelconque de (E) : $\forall\, t \in I$, $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$.

Définissons pour tout $t \in I$, $y_0(t) = y(t) - y_p(t)$. y_0 est dérivable sur I et $\forall\, t \in I$, $y_0'(t) = y'(t) - y_p'(t)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall\, t \in I,\ a(t)y_0'(t) + b(t)y_0(t) &= a(t)\left(y'(t) - y_p'(t)\right) + b(t)\left(y(t) - y_p(t)\right) \\
&= \left(a(t)y'(t) + b(t)y(t)\right) - \left(a(t)y_p'(t) + b(t)y_p(t)\right) \\
&= c(t) - c(t) = 0
\end{aligned}$$

On en déduit que $y_0 \in S_0$. Ainsi, on a bien $y = y_0 + y_p$ avec $y_0 \in S_0$. Cela signifie que $y \in \{y_p + y_0;\, y_0 \in S_0\}$.

On a démontré que $S \subset \{y_p + y_0;\, y_0 \in S_0\}$

$\boxed{\supset}$ Soit $f \in \{y_p + y_0;\, y_0 \in S_0\}$. Pour tout $t \in I$, on a $f(t) = y_p(t) + y_0(t)$ avec $y_0 \in S_0$.

f est dérivable sur I et $\forall\, t \in I$, $f'(t) = y_p'(t) + y_0'(t)$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
\forall\, t \in I,\ a(t)f'(t) + b(t)f(t) &= a(t)\left(y_p'(t) + y_0'(t)\right) + b(t)\left(y_p(t) + y_0(t)\right) \\
&= \left(a(t)y_p'(t) + b(t)y_p(t)\right) + \left(a(t)y_0'(t) + b(t)y_0(t)\right) \\
&= c(t) + 0 = c(t)
\end{aligned}$$

Donc $f \in S$. L'inclusion $\{y_p + y_0;\, y_0 \in S_0\} \subset S$ est démontrée.