优化方法作业

计试 61 张翀 2140506063

Week 2

9.11 周二

作业 1-1

引理 1 (上确界函数凸性质的转述)**.** 对于函数 $f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$，记

$$dom f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \{(x_{m+1}, \ldots, x_n) | (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \in dom f\}$$

在 $dom f$ 中固定 $x_1, x_2, \ldots, x_m$, 并定义函数 $g(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$. 如果 $\forall x_1, x_2, \ldots, x_m$,$g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ 是凸函数，则

$$h(x_{m+1}, \ldots, x_n) = \underset{x_1, \ldots, x_m}{sup} \ g(x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

也是凸函数。

注 1. 引理 1 转述了对讲义上关于上确界函数凸性质的定理，两者具有相同的本质。此处提出引理 1 以铺垫下面的证明。

证明. 将 x, λ, v 均视为成组的变量，此时只需要证明

$$-L_D(\lambda, v) = \underset{x \in dom}{sup} -f(x) - \lambda^T g(x) - v^T h(x)$$

对 λ, v 是凸函数。考虑对称性，以下只给出 $-L_D(x)$ 对 λ 是凸函数的证明；$-L_D(x)$ 对 v 是凸函数可以类似地证明。

根据引理 1, 只需证明函数 $-f(x) - \lambda^T g(x) - v^T h(x)$ 对 λ 是凸函数。固定 x, v, 可知项 $-f(x), -v^T h(x)$ 与 λ 的变化无关，而项 $-\lambda^T g(x)$ 中的 $g(x)$ 是常向量。因此，项 $-f(x), -v^T h(x)$ 是关于 λ 的常函数，而项 $-\lambda^T g(x)$ 是关于 λ 的仿射函数，它们都是关于 λ 的凸函数，所以其和也是关于 λ 的凸函数。结合引理 1，可以证明 $-L_D(\lambda, v)$ 对 λ 是凸函数。

考虑对称性，对 $-L_D(x)$ 对 v 是凸函数的证明是类似的。 □

作业 1-2

证明. 记问题的可行解集为 X.

$\forall \lambda, v > 0, x \in X, \lambda^T g(x) \leq 0, v^T h(x) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} f^* &= f(x^*) \\ &\geq f(x^*) + \lambda^T g(x^*) + v^T h(x^*) \\ &= L(x^*, \lambda, v) \\ &\geq \underset{x \in X}{inf} L(x, \lambda, v) \\ &= L_D(\lambda, v) \end{aligned}$$

□