**1. Первообразная и ее свойства. Неопределенный интеграл, его свойства.**

Функция F(x) называется первообразной f(x) если

Cвойства

Если так же первообразная f(x) где C-любая постоянная ()

Если две первообразные одной и той же функции f(x) на (a,b) то (

Свойства неопределенного интеграла

**2. Интегрирование простейших дробей**

**3. Свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции.**

Свойства

**Теорема**

1) f(x) интегрируема на [a,b]; 2) Тогда

Доказательство:

Пусть . Составим интегральную сумму f(x) на [a,b]: т.к

Переходя к переделу при d(T)->0

**4. Свойства определенного интеграла. Доказать теорему о оценке определенного интеграла знака подынтегральной функции.**

Свойства

**Теорема**

Если f(x) интегрируема на на , m,M – минимальное и максимальное значение f(x) на [a,b]

Док левого неравнества. Правое доказывается аналогично

**5. Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла.**

Свойства

**Т** Пусть f(x) интегрируема на [a,b] тогда

**6. Доказать теорему о среднем для определенного интеграла.**

Свойства

Т.

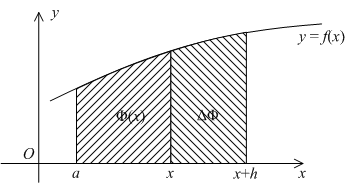
Док-во

*||т. Вейерштрасса Пусть дана непрерывная числовая функция, определённая на отрезке, то есть . Пусть*

*— точные верхняя и нижняя границы множества значений функции f соответственно. Тогда эти значения конечны и достигаются (существуют ||*

*//т. Больцано-Коши. Пусть дана непрерывная функция на отрезке Пусть также , и без ограничения общности предположим, что f(a) = A < B = f(b). Тогда для любого существует такое, что f(c)=C. //*

**7. Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу.**



***Теорема.***

Пусть f(x) интегрируема на [a,b] и нерперывна в некоторой точке x этого отрезка тогда функция дифференцируема в точке x и F’(x)=f(x)

Док.во

Т.к f непрерывна в точке

**8. Вывести формулу Ньютона-Лейбница**

Свойства

**Ф**

**9. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для неопределенного инетграла.**

**10. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определенного инетграла.**

**11. Интегрирование периодических функций, интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.**

1) Функция периодическая с периодом T

2) Функция четная или нечетная

**12. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-ого рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравнеству для неопределенного интеграла 1-ого рода.**

Опр. f(x) непрерывна на . Несобственный интеграл 1-ого рода

**Теорема**

**13.** **Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода**

Пусть непрерывна на .

Неопределенным интегралом первого рода называется:

Предельный признак сравнения:

Пусть и , тогда:

*Доказательство:*

*Значит:*

**14.** **Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода:**

Пусть непрерывна на .

Неопределенным интегралом первого рода называется:

Признак абсолютной сходимости:

Пусть непрерывна на :

Доказательство:

*Значит:*

*Значит:*

**15.** **Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода и признаки сходимости таких интегралов:**

Пусть интегрируема на любом отрезке , где .

Пусть f не является ограниченной в окрестности точки .

Тогда несобственным интегралом 2-го рода называется:

1.Признак сравнения по неравенству:

Пусть интегрируемы на любом отрезке , где и для выполняется неравенство , тогда:

2.Предельный признак сравнения:

Пусть интегрируемы на любом отрезке , где и , , для , тогда:

3.Признак абсолютной сходимости:

Пусть интегрируема на любом отрезке , где , тогда:

**16.** **Фигура ограничена кривой y = f(x) > 0, прямыми x = a, x = b и y = 0 (a < b). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры:**

Из необходимого и достаточного условия:

Если f(x) < 0 :

**17.** **Фигура ограничена лучами ϕ = α, ϕ = β и кривой r = f(ϕ). Здесь r и ϕ — полярные координаты точки, , где r и ϕ — полярные координаты точки. Вывести формулу:**

**для вычисления с помощью определенного интеграла площади этой фигуры**

**18.** **Тело образовано вращением вокруг оси криволинейной трапеции, ограниченной кривой y = f(x) > 0, прямыми x = a, x = b и y = 0 (a < b). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения:**

**19. Кривая задана в декартовых координатах уравнением y = f(x), где x и y — декартовые координаты точки,. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой:**

Пусть непрерывно дифференцируемая на функция. Тогда дуга графика функции , отсекаемая прямыми и является спрямляемой, причем:

Доказательство:

Если интеграл существует

***20.* Кривая задана в полярных координатах уравнением , где r и — полярные координаты точки, Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой:**

**21. ЛДУ 1-го порядка. Интегрирование ЛДУ 1-го порядка методом Бернулли (“u\*v”) и методом Лагранжа (вариация произвольной постоянной)**

ЛДУ 1-го порядка это уравнение линейное относительно неизвестной функции и её производной и имеет вид: , где – заданные функции от x, непрерывные в области отыскания решения уравнений (). Если , то данное уравнение называется линейным однородным, иначе – неоднородным.

Методы решения НЛДУ 1-го порядка:

* метод Лагранжа (вариация),
* метод Бернулли (подстановка)

*Метод Лагранжа*: рассмотрим *,* тогда

*,* согласно получаем:

; =>

; первая часть суммы – общее решение ЛОДУ; вторая – частное решение ЛНДУ

*Метод Бернулли*: пусть - произвольные функции,

тогда , , согласно получаем:

*,*

*,*

*=> =>* , тогда определим V(x):

, мы нашли U(x) и V(x), теперь:

***22) Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений* n-го порядка, допускающих понижение порядка.**

*Т. Коши:*

*Интегрирование:*

**23. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения ЛДУ n-го порядка. Доказать св-ва частных решений ЛОДУ n-го порядка.**

Теорема: пусть функция и её частные производные определены и непрерывны в некоторой области . Тогда в любой внутренней точке существует единственное решение ДУ, удовлетворяющее начальным условиям (т.е. , … , )

Св-ва: 1: пусть и – частные решения ОЛДУ, . Тогда + – решение ОЛДУ. Док-во: и => + . 2: пусть – решение ОЛДУ, . Тогда -решение ОЛДУ, . Док-во: , => . 3: пусть – частное решение ОЛДУ, и – частные решения НЛДУ, . Тогда: - решение НЛДУ, . Док-во:

**24) Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронксиане линейно зависимых функций.**

{ , … , (x)} линейно зависима, если ∃ хотя бы одно ≠ 0, а линейная комбинация

{ , … , (x)} линейно независима, если только когда все = 0, K = x ∈ [a,b]

***Теорема:***

{ , … , (x)} линейно зависима ⇒ ѡ(

≠ 0

() ≠ 0 ⇒ = 0

**25. Определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Теорема о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифф уравнения n-го порядка.**

– лин. **НЕзав**. если: => .

– лин. **ЗАВ**. если: .

**Вронксианом системы** n-1 раз дифф функций называется функциональный определитель = ,

***Теорема****:* , : , , – линейно независима ⬄ . Док-во (от противного): Необходимость: т.к. – линейно независима => и . Тогда: Данная система имеет определитель равный нулю => в т. : => в силу теоремы единственности получаем противоречие => => не все равны нулю. Достаточность: пусть в окр. т. , то решения линейно зависимы, но это противоречит теореме о вронскиане СЛ зависимых решений (Если система функций линейно зависима на интервале (a,b) , то )

**26) Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы**

**решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.**

∀ ∃ {, …, } - линейно независимое решение

**Д.**

y ≡ 0

**⇒ ∃!**  ≡ 0**,** k =  **⇒** Существ. системы решений **⇒ *ѡ 0 в т. ее окр-ти***

**27. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифф уравнения n-го порядка**

Теорема: , => , где – независимые решения. Док-во: возьмём , значит:

*=> =>* в силу единственности по т. Коши : =>

**28) Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального**

**уравнения 2-го порядка.**

= + =

**29. Формула для общего решения линейного однородного дифф уравнения 2-го порядка при одном известном частном решении.**

– ОЛДУ 2-го порядка. Пусть – известное решение. . Тогда – искомое решение. В то же время по формуле Остоградского –Лиувилля: . Получаем:

*=> => =>.* При – линейно независимы.

**30. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.**

T.

**Док-во:**

**31. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.**

- характеристическое уравнение

-дискриминант

**32. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.**

- характеристическое уравнение

-дискриминант

- формула Эйлера

и - линейно независимы

- линейно независимы => образуют ФСР

**33. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений.**

**Определение:** Квазимногочленом называется сумма нескольких слагаемых вида

где - многочлены

Частное решение уравнения ищется в виде

где , если не корень характеристического уравнения, и равно кратности этого корня, в противном случае; - многочлены с неопределенными коэффициентами, степень каждого из которых равна максимальной из степеней

**Т.**

**Док-во:**

**34. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных.**

имеет 2 линейных независимых решения

Подставим в уравнение

**35. Сформулировать определение дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной, и сформулировать задачу Коши для такого уравнения. Описать метод сведения этого уравнения к нормальной системе дифференциальных уравнений.**

ДУ n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, уравнение вида

Задача Коши

условие Коши

Сведение ДУ n-го порядка к нормальной системе

Замена переменных , ... , =>

**36. Сформулировать задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи. Описать метод сведения нормальной системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.**

**Определение:** Нормальной системой называется система вида:

Задача Коши:

Теорема Коши:

Сведение системы к ДУ

Берем любое уравнение

Из 1-го уравнения находим

условие разрешимости

**37. Сформировать определение первого интеграла нормальной системы дифференциальных уравнений. Описать методы нахождения первых интегралов и их применение для решения системы дифференциальных уравнений.**

Рассмотрим систему

Функция называется первым интегралом нормальной системы дифференциальных уравнений если эта функция нерпрерывна, имеет непрерывные частные производные по x,y1, … yn и при подстановке в нее любого решения системы она сохраняет постоянный знак. Пусть -решение нормальной системы, а функция ее первый интеграл. Тогда сформулированное определение означает что . Для разных решений число c-разное. Для фиксированного решения – это константа.

Нахождение 1х интегралов

Рассмотрим систему

Для нахлждения 1х интегралов обычно используют метод выделения интегрируемых комбинаций с помощью арифметических операций. С помощью арифметических операций уравнение системы приводят к виду

Функция в этих соотношениях является 1-м интегралом системы. Для нахождения интегрируемых комбинаций бывает удобно записать нормальную систему в симметрической форме. Чтобы ее получить из каждого уравнения системы dx и приравнять полученное выражение.

Это симметрическая форма записи нормальной системы.

Чтобы найти интегрируемую комбинацию нужно выделить пару отношений, допускающую разделение переменных либо воспользоваться свойством равных дробей.

Свойства равных дробей. Если

Для его доказательства достаточно заметить что

Коэфициенты стараются подобрать так чтобы знаменатель полученно дроби был =0, а числитель являлся полным дифференциалом некоторой функции тогда эта функция первый интеграл.

Получение решния нормальной системы при помощи 1-х интегралов.

Матрицей Якоби системы функций ,…, по части переменных называют матрицу

Определитель матрицы Якоби называется Якобианом. Рассмотрим нормальную систему n-ого порядка

Пусть известны n 1-х интегралов этой системы: ,…,

Опр. Первые интегралы ,…, системы называются независимыми в области D если в каждой точке области матрица Якоби невырождена (Якобиан отличен от нуля во всех точках области). Пусть первые интегралы ,…, системы (1) независимы.

Тогда можем показать, что в этом случае система соотношений

Где произвольные постоянные задает решение системы (1) и является по поределению общим интегралом этой системы. Для того чтобы решить систему (1) достаточно найти n 1-х интегралов этой системы и убедиться что они независимы.