**Опред. пространства элемен. исходов. Понятие события (нестрогое), следствие события, невозможное и достоверное событие.** Множество все элементарных исходов Ω называется пространством элементарных исходов. | Каждый неделимый результат случайного эксперимента наз. элементарным исходом. | Событием наз. любое подмножество множества Ω. | Событие В наз. следствием события А, если из того, что произошло событие А следует, что произошло событие В. Другими словами, В наз. следствием А, если А ⊆ В. | Любое множество Ω содержит два подмножества ø и Ω. Эти события наз. невозможными (ø) и достоверными(Ω). Эти события наз. несобственными. | Операции над событиями: A ∪ B = A+B; A ⋂ B = A\*B; A\B; -A = Ω\А | Свойства операций над событиями A+B = B+A; A\*B=B\*A (коммутативность); (A+B)+C=A+B+C; (A\*B)\*C=A\*(B\*C) (ассоциативность); A+A=A; A\*A=A (идемпотентность); A\*(B+C) = A\*B + A\*C; A+(B\*C)=A+B\*C (дистрибутивность); -(A+B)= -A\* -B; -(A\*B)= -A+ -B (законы де Моргана); -(-A)=A; A⊆B => AB=A; =>A+B=B; => -B ⊆ -A | Классическое опред. вероятности: Пусть   
1) | Ω | = N; 2) все элементарные исходы равновероятны. Вероятностью события   
A⊆ Ω наз. число P(A)=NA/N, где NA = |A| | Свойства вероятности: 1) P(A) ≥ 0;   
2) P(Ω)=1; 3) Если AB = ø, то P(A+B) = P(A)+P(B); Доказательство: 1) P(A)=NA/N, NA≥0; N≥0 => P(A) ≥0; 2) P(Ω) = |Ω|/N = N/N=1; 3) |A+B|=|A|+|B|-|AB|=|A|+|B|; NA+NB и P(A+B)=( NA+NB)/N= P(A)+P(B)

**Опред. пространства элем. исходов. Понятие события. Сформулировать геометрическое и статистическое опред. вероятности.** Множество все элементарных исходов Ω называется пространством элементарных исходов. | Каждый неделимый результат случайного эксперимента наз. элементарным исходом. | Событием наз. любое подмножество множества Ω. | Геометрическое опред. обощает классическое опред. на случай, когда Ω явл. бесконечным множеством в Rn. Пусть А ⊆ Rn. Через ϻ(A) обозначим меру множества А: n=1 (ϻ(A)-длина), n=2 (ϻ(A)-площадь), n=1 (ϻ(A)-объем). Пусть 1) Ω ⊆ Rn, ϻ(Ω)<∞; 2) A⊆ Ω. Вероятностью события А наз. число P(A)= ϻ(A)/ ϻ(Ω). Недостатком геом. опред. явл. то, что оно не применимо в случае, когда отдельные области явл. более предпочтительными. | Статистич. опред. вероятности: Пусть 1) случайный эксперимент повторяется n раз; 2) событие А произошло nA раз. Вероятностью события А наз. эмпирический предел . Недостатком статистич. опред. явл. то, что опыт нельзя повторить бесконечное количество раз и то, что такое опред. не даёт достаточной основы для развития математической теории.

**Опред. пространства элем. исходов. Сформулировать опред. сигма-алгебры событий. Доказать простейшие свойства сигма-алгебры.** Множество все элементарных исходов Ω называется пространством элементарных исходов. |   
Сигма-алгебра: Пусть 1) Ω – пространство элем. исходов; 2) β – некоторый набор подмножеств множества Ω, β ≠ ø. β наз. сигма-алгеброй, если: 1) А ∈ β => -A∈ β;   
2) A1, … , An ∈ β => A1+ … +An ∈ β. Простейшие следствия из определения: 1) Ω∈ β; 2) ø ∈ β; 3) Если A1, … , An ∈ β, то A1\* … \* An ∈ β; 4) Если A,B ∈ β, то A\B ∈ β. Доказательство: 1) Т. к. β≠ ø, то произвольное множество А∈ β. Из определения: -A∈ β и Ω = A+ -A ∈ β; 2) Ω ∈ β => ø = -Ω ∈ β; 3) A1,…,An ∈ β => -A1,…,-An ∈ β =>   
-A1 +…+ -An ∈ β => -(-A1 +…+ -An) ∈ β => A1\*…\*An ∈ β; 4) A\B=A\* -B A∈ β, B∈ β => A∈ β, -B ∈ β => A\* -B ∈ β | Аксиоматическое опред. вероятности: Пусть – пространство ЭИ, – сигма-алгебра. Вероятностью называется отображение , для которого выполняются условия:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 3)для попарно несовместных событий А1,…,An,… |

**Опред. пространства элем. исходов. Сформулировать опред. сигма-алгебры. Сформулировать аксиоматическое опред. вероятности** Множество все элементарных исходов Ω называется пространством элементарных исходов. | Сигма-алгебра: Пусть 1) Ω – пространство элем. исходов; 2) β – некоторый набор подмножеств множества Ω, β ≠ ø. β наз. сигма-алгеброй, если: 1) А ∈ β => -A∈ β; 2) A1, … , An ∈ β => A1+ … +An ∈ β. | Аксиоматическое опред. вероятности: Пусть – пространство ЭИ, – сигма-алгебра. Вероятностью называется отображение , для которого выполняются условия:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 3)для попарно несовместных событий А1,…,An,… |

Свойства вероятности: 1) ; 2) ; 3) ; 5) ; 6) конечного набора событий , . | Доказательство: 1) , =, P()=1, P()=P(A+) = P(A)+P(), P(A)+P() = 1 => P() = 1 - P(A); 2) ⊆является следствием 5 свойства и доказывается аналогично

**Сформулировать опред. условной вероятности. Доказать, что при фиксированном событии B вероятность P обладает всеми свойствами…** Пусть А и В – события, . Условной вероятностью осуществления А при условии произошедшего В называют число . Условная вероятность P(A|B) удовлетворяет аксиомам безусловной вероятности: . | Теорема: условная вероятность P(A|B) удовлетворяет аксиомам безусловной вероятности: . | Доказательство: ; 3) . | Свойства:   
1) ; 2) ; 3) ; 5) ;  
 6) конечного набора событий , .

**Сформулировать опред. условн. вероятности. Доказать теорему (формулу) умножения вероятностей.** Пусть А и В – события, . Условной вероятностью осуществления А при условии произошедшего В называют число . | Теорема : пусть события таковы, что . Тогда . |

Доказательство:  **( \* )**. . Следовательно, (\*). Повторяя это утверждение, получаем требуемую формулу .

**Сформулировать опред. пары независимых событий. Доказать критерии независимости двух событий. Сформулировать опред. попарно независ. событий**    
События А и В наз. независимыми, если Р(АВ)=Р(А)\*Р(В). | Теорема: 1) Если , то А и В независимы тогда и только тогда, когда . 2) Аналогично, если , то А и В независимы тогда и только тогда, когда | Доказательство: 1) необходимость. . По определению условной вероятности: . Достаточность. . Следовательно, А и В независимы.   
2) доказывается полностью аналогично. | События называются попарно независимыми, если ; независимыми в совокупности, если для любого набора (Если А – независимы в совокупности, то они независимы попарно. При этом обратное неверно.)

**Сформулировать опред. полной группы событий. Доказать теорему (формулу) полной вероятности и формулу Байеса** Говорят, что H образует полную группу событий, если . (H – гипотеза) | Теорема: Пусть H1…Hn – полная группа событий, А – некоторое событие и . Тогда . | Доказательство: , поскольку Далее, поскольку , то | Теорема: Пусть выполняются все условия теоремы о полной вероятности и P(A)>0. Тогда

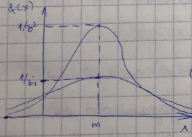
Доказательство: . По формуле полной вероятности, можно представить ; тогда . | Априорное распределение вероятностей неопределенной величины p – распределение вероятностей, которое выражает предположения о p до учёта экспериментальных данных. | Апостериорная вероятность события – условная вероятность события при некотором условии.

**Сформулировать опред. схемы испытаний Бернулли. Доказать формулу для вычислен. вероятности….** Рассмотрим случайный эксперимент, в результате которого возможна реализация одного из двух ЭИ; первый будем называть «успех», второй «неудача»; вероятность успеха: p, вероятность неудачи: q=1-p. Схемой испытаний Бернулли называется серия последовательных экспериментов такого вида, в которых также: вероятность успеха неизменна во всех испытаниях; испытания – независимы, т.е. вероятность исхода i-го испытания не зависит от исходов испытаний 1…i-1. | Теорема: Обозначим – вероятность реализации k успехов в серии из n испытаний Бернулли. Тогда | Доказательство: опишем результаты испытаний кортежами , где . Исходов, в которых произошло ровно k успехов, штук. Вероятность осуществления ровно одного такого исхода: . В случае k успехов, имеем p k раз и q n-k раз; следовательно, . Поскольку различные исходы, на которых происходит ровно k успехов, являются несовместными, то . | Теорема (следствие 1): Пусть – вероятность реализации от к1 до к2 успехов. Тогда . | Доказательство: Пусть А={произошло >= k1 и <=k2 успехов}. Тогда A = Ak1+ …. + Ak2, где Ai = {произошло ровно i успехов}. P(A)=P()= | Теорема (следствие 2): Пусть – вероятность реализации хотя бы одного успеха. Тогда . | Доказательство: Pn (k>=1) = 1 – P{в серии из n испытаний будет 0 успехов} = =1- Pn (0)=1-qn

**Сформулировать опред. случайно величины и функции распределения вероятностей СВ. Доказать свойства функции распределения** Случайной величиной называют скалярную функцию , заданную на пространстве элементарных исходов, если для любого множество элементарных исходов, удовлетворяющих условию , является событием. | Функцией распределения (вероятностей) СВ Х называют функцию , значение которой в точке х равно вероятности события – т.е. события, состоящего из только тех элементарных исходов, для которых . | Свойства функции распределения: 1); 2) , при х1<х2; т.е. Ф – неубывающая функция; 3) ; 4) ; 5)=F(x0); т.е. F – непрерывная слева функция. | Доказательство: 1) Т.к. F(x)=P{X<x} => 0<=F(x)<=1; 2) P{X<x2}=P{{X<x1}+{x1<=X<=x2}} =P{X<x1}+P{x1<=X<=x2} => F(x2)>=F(x1); 3) Рассмотрим последовательность x1,…,xn, такую, что x1<=x2<=…<=xn и Пусть An={X<xn} – событие, тогда A1…An – неубывающая последовательность событий. A =U∞ n=1 An={x<+∞} . По теореме   
непрерывности lim P(An)=lim P(U∞ n=1 An) = P{X < +∞} – достоверное => P{X<+∞}=1. Т. о. получаем 4) Из доказательства 2: P{x1<=X<=x2}=F(x2)-F(x1); 5) Рассмотрим последовательность x1<=x2<=…<=xn<x0. Пусть An={X<xn}, тогда A1,…,An – неубывающ. последовательность. F(x0)=P{X<x0}=P(U∞ n=1 An) = = . Т.к. xn – произвольная последовательность, стремящаяся к x0 слева, то =F(x0)

**Сформулировать опред. случайно величины и функции распределения вероятностей СВ. Сформулировать определения дискретной и непрерывной случайной величины** Случайной величиной называют скалярную функцию , заданную на пространстве элементарных исходов, если для любого множество элементарных исходов, удовлетворяющих условию , является событием. | Функцией распределения (вероятностей) СВ Х называют функцию , значение которой в точке х равно вероятности события – т.е. события, состоящего из только тех элементарных исходов, для которых . | СВ Х называют дискретной, если множество её возможных значений конечно или счетно. | Непрерывной называют СВ Х, функцию распределения которой можно представить в виде . | Свойства: ; 2) 3);   
4) в точках непрерывности плотности распределения;

5) для любого наперед заданного . | Доказательство:   
1) f(x)=F`(x), т.к. F – неубывающая функция, то F`(x)>=0, т.е. f(x)>=0; 2) 3) 4) Т.к. х – точка непрерывности, а мало, то можно считать, что в окрестности (x, x+) функция f = F` непрерывна. Применим теорему Лагранжа: , где Ϛ ∈ (x, x +). Можно считать, что => ; 5) Если Х – непрерывная случайная величина, то для любого наперед заданного х: P{x <= X < x + } = = F(x)-F(x)=0

**Сформулировать опред. нормальной случ. величины., геометрический смысл параметров. Понятие стандартного нормального закона** Говорят, что случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами m и δ2, если Х является непрерывно случайно величиной. функция плотности которой имеет вид f(x) = 1/(sqrt(2pi)\* δ)\*exp(-(x-m)2/(2 δ2)). Параметр m отвечает за смещение графика вдоль ОХ (положения центра симметрии графика). Параметр δ отвечает за «концентрацию» графика в точке x=m, чем меньше δ, тем выше «концентрация» (степень разброса значений случ. величины относительно среднего значения). Говорят, что случ. величина имеет стандартное распределение, если m=0, δ2=1   
Пусть X=N(m, δ2), тогда P{a<=X<=b}=Ф((b-m)/ δ)-Ф((a-m)/δ). Доказательство: P{a<=X<=b}=

**Сформулировать опред. случайного вектора и функции распред. вероятности случ. вектора. Сформул. свойства функции двумерного случ. вектора** Пусть: 1)(Ω, β, P) – вероятностное пространство; 2) х1…х2 – случайные величины заданные в этом пространстве. Случайным вектором размерности n наз. кортеж (x1…xn) | Функция распределения случ. вектора (x1….xn) наз. отображение F: Rn -> R, определенным правилом F(x1…xn) = P{X1<x1,…, Xn<xn} | Свойства двумерной функции распределения: 1) ;   
2) – неубывающая функция по каждому из аргументов х1 и х2.; 3); 4).; 6) – непрерывна слева в любой точке по каждому из аргументов х1, х2. ; 7); .

**Сформулировать опред. случайного вектора и функции распред случ. вектора. Доказать формулу для вычисления P{a1БX1<b1,a2<X2<b2}.** Пусть: 1)(Ω, β, P) – вероятностное пространство; 2) х1…х2 – случайные величины заданные в этом пространстве. Случайным вектором размерности n наз. кортеж (x1…xn) | Функция распределения случ. вектора (x1….xn) наз. отображение F: Rn -> R, определенным правилом F(x1…xn) = P{X1<x1,…, Xn<xn} | Свойства двумерной функции распределения: 1) ;   
2) – неубывающая функция по каждому из аргументов х1 и х2.; 3); 4).; 6) – непрерывна слева в любой точке по каждому из аргументов х1, х2. ; 7); . | Доказательство: 1) найдем вероятность попадания случайного вектора в полуполосу D{X1<x1, a1<=X2<b}. Заметим, что { X1<x1, X2<b } = {X1<x1, a2<=x2<b2}+{X1<x1, X2<a2}; P{X1<x1,X2<b2}=P{X1<x1, a2<=X2<b2}+P{X1<x1,X2<a2}; F(x1,b2)=P{X1<x1, a2<=X2<b2}+F(x1,a2); 2) {X1<b1, a2<=X2<b2}={x1<a1, a2<=X2<b2}+{a1<=X1<b1, a2<=X2<b2}; P{X1<b1,a2<=X2<b2}=P{X1<a1,a2<=X2<b2} + P{a1<=X1<b1, a2<=X2<b2}; F(b1,b2)-F(b1,a2)-F(a1,b2)+F(a1,a2)=P{a1<=X1<b1, a2<=X2<b2}

**Сформулировать опред. случ. вектора и функции распределения вероятностей случ. вектора. Сформулировать опред. непрерывного случ. вектора и доказать свойство плотности распределения вероятностей** Пусть: 1)(Ω, β, P) – вероятностное пространство; 2) х1…х2 – случайные величины заданные в этом пространстве. Случайным вектором размерности n наз. кортеж (x1…xn) | Функция распределения случ. вектора (x1….xn) наз. отображение F: Rn -> R, определенным правилом F(x1…xn) = P{X1<x1,…, Xn<xn} | СВектор (Х1,…Хн) называют непрерывным, если его совместную функцию распределения можно представить в виде сходящегося несобственного интеграла Функцию называют совместной двумерной плотностью распределения СВ Х1…Xn, либо плотностью распределения СВектора (Х1,…Xn); | Свойства функции плотности двумерных СВекторов: 1); 2); 3); 4); 5); 6); 7); | Доказательство: 1) Т.к. f(x1,x1)= для всех (x1,x2) в которых f непрерывна, т.к. А неубывающая функция, то f(x1,x2)>0; 2)

3) =

4). Т.к. (x,y) точка непрерывности, а ∆х и ∆у малы, то логично считать, что в некоторой окрестности функция f непрерывна. F()-F(y,x)=F`(Ϛ1, Ϛ2)∆x∆y= f(Ϛ1, Ϛ2)∆x∆y, где Ϛ1 ∈ (x+∆x) и Ϛ2 ∈ (y+∆y), и можно считать, что f(Ϛ1, Ϛ2)= f(х1, х2) (аналогично для )

5) ------; 6) обобщение свойства №2; 7) ; fx(x)=. Для Fy(y) аналогично.

**Сформулировать опред. пары независимых случ. величин. Доказать свойства независимых случ. величин. понятия попарно независ. случ. величин.** СВ Х и У называют независимыми, если совместная функция распределения является произведением одномерных функций распределения: . | СВ X1…Xn, заданные на одном вероятностном пространстве, называются независимыми в совокупности, если ; независимыми попарно, если | Свойства независимых СВ: 1)СВ Х и У независимы тогда и только тогда, когда события независимы; 2)Х и У независимы ⬄ независимы; 3)Х и У независимы ⬄ независимы, где М – промежутки, либо объединения промежутков; 4)Если Х,У – ДСВ, то Х,У независимы ⬄ ; 5)Если Х,У – НСВ, то они независимы ⬄ .

**Понятие условного распред. случ. величины. Сформулировать опред. условнойго ряда распределения** Пусть дан двумерный СВектор (Х,У) и известно, что СВ У принимает значение у. Пусть (Х,У) – дискретный СВектор; . Пусть для некоторого j . Условной вероятностью того, что СВ Х примет значение xi при условии что У принимает значение yj, называется число ; набор вероятностей называется условным распределением СВ Х. | Пусть (ХУ) – непрерывный СВектор. Условной функцией распределения СВ Х при условии называется отображение Условной плотностью распределения СВ Х при условии У=у называется функция , где f(x,y) – совместная плотность распределения СВектора. | Пусть (Х,У) – дискретный СВектор; . Пусть для некоторого j . Условной вероятностью того, что СВ Х примет значение xi при условии что У принимает значение yj, называется число ; набор вероятностей называется условным распределением СВ Х. | Пусть (Х,У) – двумерный случайный вектор. Тогда:

1. СВ Х,У независимы ⬄

2. Если (Х,У) – НСВектор, то Х,У независимы ⬄

3. Если (Х,У) – ДСВектор, то Х,У независимы ⬄

**Понятие функции скалярной случ. величины. Доказать теорему о формуле для вычисления плотности** Пусть 1) X – некоторая случ. величина, 2) φ: R->R – некоторая известная функция. Тогда φ(x)=Y – некоторая случайная величина. Y(x) – функция от скалярной случ. величны. | Теорема: если Х – НСВ с плотностью распределения , - монотонная и непрерывно диффернцируемая скалярная функция, а – обратная к ), то для СВ функция распределения .

**Понятие скалряной функции случ. вектора. Обосновать формулу для вычисления функции распределения случ. вел Y**  Пусть (Х1, Х2) – СВектор, - скалярная функция. СВ называют скалярной функией случайного вектора. | Теорема: Пусть (Х1,Х2) – НСВектор и . Тогда | Доказательство: эквивалентны. Следовательно, . | Теорема: пусть (Х,У) – СВектор, непрерывный и независимый, а  **|** Доказательство: Т.к. Х,У независимы, то следовательно Наконец**,**  Выражение

**Сформулировать опред мат. ожидания для дискретной и непрерывной случ. величины** ДСВ: Математическим ожиданием СВ Х называется число пробегает множество всех значений Х. НСВ: Математическим ожиданием СВ Х называется число , где f(x) – плотность распределения НСВ Х. | Механический смысл мат.ожидания: пусть есть стержень, обладающий «вероятностной массой» и в xi лежит её pi часть. Тогда математическое ожидание задаёт x0 – центр тяжести для этого стержня. В случае НСВ, f(x) можно интерпретировать как «плотность» бесконечного стержня. | Свойства МО: 1)Если Х принимает значение х0 с вероятностью 1 (т.е. не является СВ), то MX=x0.; 2); 3); 4)Если Х и У независимые, то | Доказательство:   
1) MX=∑pi\*xi=1\*x0=x0; 2)M[aX+b]=; 3)M[X1+X2]=∑i∑j (x1i+x2j)pij = ]=∑i∑j x1ipij+∑i∑j x2ipij

=∑ix1i∑j pij+∑ix2i∑j x2ipij = ∑P{X1=x1i}\* x1i + ∑P{X2=x2i}\* x2i=MX1+MX2; 4) M[X1\*X2]=