1. *Сформулировать определение плоской квадрируемой фигуры. Сформулировать определение площади такой фигуры. Сформулировать критерий квадрируемости плоской фигуры (в терминах ее границы).*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Пусть дана некоторая плоская фигура D. Обозначим через (S – площади), где m – всевозможные многоугольники, целиком *содержащиеся в* фигуре D, а M – многоугольники, целиком *содержащие в себе* фигуру D. Тогда область D называют квадрируемой, если , при этом S – площадь фигуры.

Пусть D – плоская область. D квадрируема тогда и только тогда, когда её граница имеет площадь нуль.

1. *Задача о вычислении объема z-цилиндрического тела. Сформулировать определение двойного интеграла.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Пусть тело Q ограничено плоскостью Оху; графиком функции ; цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Z и пересекают D.  
Разобъём D на непересекающиеся участки Di, так чтобы . Внутри Di выберем точку Mi. Тогда объём части , а весь объём . Чем меньше , тем точнее формула – переходя к пределу, получаем

• Пусть D – квадрируемая замкнутая плоская область. Двойным интегралом функции f по области D называется число  
, где , а d(T) – диаметр разбиения T области D.

1. *Сформулировать свойства линейности и аддитивности двойного интеграла, сохранения двойным интегралом знака функции.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

2° Линейность:

3° Аддитивность: пусть интегрируема в каждой из областей D1, D2. Тогда f интегрируема и в D, причем

4° Пусть в D и интегрируема в D. Тогда и .

1. *Сформулировать теоремы об оценке модуля двойного интеграла, об оценке двойного интеграла и следствие из нее, теорему о среднем значении для двойного интеграла.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

**Теорема** об оценке модуля: Пусть f интегрируема в D. Тогда модуль этой функции |f| интегрируема в D, причем .

**Теорема** об оценке интеграла: Пусть функции f и g интегрируемы в D, причем . Тогда .

**Следствие** теоремы об оценке: если f интегрируема в D и , то .

**Теорема** о среднем значении: Пусть f непрерывна в D, а D – линейно связная квадрируемая область (т.е. любые 2 точки можно соединить кривой, лежащей в области). Тогда .

1. *Сформулировать теорему о вычислении двойного интеграла по прямоугольной области.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

**Теорема**: Пусть существует прямоугольная область Dy такая, что ; , и . Тогда интеграл .

1. *Сформулировать определение y-правильной области и теорему о вычислении двойного интеграла по произвольной у-правильной области.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Область D на Оху называют у-правильной, если ее можно задать в виде .

**Теорема**: Пусть область D – у-правильная, . Тогда существует повторный интеграл , и I=Iп.

1. *Сформулировать теорему о замене переменных в двойном интеграле.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

**Теорема**: Пусть Ф –биективна, непрерывна и непрерывно дифференцируема в Duv; якобиан . Тогда, .

1. *Приложения двойного интеграла: записать формулы для вычисления площади плоской фигуры, объема z-цилиндрического тела, массы пластины с использованием двойного интеграла.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Вычисление массы пластины D. Если плотность определяется как f(x,y), то масса пластины .

Вычисление объёма z-цилиндрического тела Q, ограниченного функцией z=f(x,y), плоскостью Oxy и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны Oz и пересекают границу D:

Вычисление площади плоской фигуры. Если фигура занимает область D, то её площадь .

1. *Сформулировать определение кубируемого тела и его объема. Сформулировать критерий кубируемости тела (в терминах границы).*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Рассмотрим область . Пусть q – множество многогранников, которые целиком содержатся в G, , а Q – множество многогранников, целиком содержащих в себе G, . Область G называется кубируемой, если , при этом V называют объёмом области G.

**Теорема**: область кубируема тогда и только тогда, когда её граница имеет объём нуль.

1. *Задача о вычислении массы тела. Сформулировать определение тройного интеграла.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Пусть тело занимает область G, а f(x,y,z) – значение плотности материала тела в точке (xyz). Разобъём тело на непересекающиеся области Gi и в каждой выберем точку Mi. Тогда масса части Gi , а масса всего тела . Чем меньше , тем точнее формула: переходя к пределу имеем

• Тройным интегралом функции f(x,y,z) по области G называют число , где d(T) – диаметр разбиения Т области G.

1. *Сформулировать свойства линейности и аддитивности тройного интеграла, сохранения тройным интегралом знака функции.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

*<полностью аналогичны свойствам для двойного интеграла, 3.>*

1. *Сформулировать теоремы об оценке модуля тройного интеграла, об оценке тройного интеграла и следствие из нее, обобщенную теорему о среднем значении для тройного интеграла.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

*<оценки аналогичны теоремам для двойного интеграла,4.>*

**Теорема** обобщенная о среднем значении: пусть функция f непрерывна в G, а функция g – интегрируема и знакопостоянав G, а сама G является линейно связанной областью. Тогда .

1. *Сформулировать теорему о сведении тройного интеграла к повторному для z-правильной области.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Область G называется z-правильной, если её можно задать в виде **(\*)**.  
**Теорема**: пусть G задана в виде \*; для каждой фиксированной точки . Тогда существует повторный интеграл , и I=Iп.

1. *Сформулировать теорему о замене переменных в тройном интеграле.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

**Теорема**: Пусть ; Ф – биективна, непрерывна и непрерывно диффрецируема в ; якобиан в Guvw; f – интегрируема в Gxyz. Тогда .

1. *Сформулировать определение ряда. Сформулировать определения сходящегося ряда, суммы сходящегося ряда и расходящегося ряда.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Рядом называют пару последовательностей: , где Sn – n-я частичная сумма ряда.

Ряд называют сходящимся, если существует конечнй предел . В противном случае (предел не существует или раве бесконечности) ряд называют расходящимся. S называют суммой ряда.

1. *Сформулировать линейные свойства сходящихся рядов.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Теорема: пусть ряды сходятся. Тогда ряд вида – также сходится.

1. *Сформулировать необходимый признак сходимости ряда. Сформулировать теорему об остатках.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

**Теорема** (необходимый признак): Пусть ряд сходится. Тогда предел .

n-ым остатком ряда называют ряда .  
**Теорема** (об остатках): Если ряд сходится, то сходится и любой из его остатков. Наоборот – если сходится остаток ряда, то и сам ряд сходится.

1. *Как изменится сходимость ряда, если к нему добавить произвольное конечное число слагаемых? Отбросить? Изменить? Как изменится при этом сумма ряда?*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

**Следствие** из теоремы об остатках: пусть числовой ряд составлен из ряда с использованием добавления, отбрасывания или перестановки любого конечного числа членов. Тогда оба ряда () сходятся или расходятся одновременно.

1. *Сформулировать критерий Коши сходимости ряда.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

**Теорема**: ряд сходится тогда и только тогда, когда выполняется .

1. *Сформулировать мажорантный и предельный признаки сравнения для рядов.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Мажорантный признак: пусть . Тогда, если – сходится, то сходится и ; а если расходится , то расходится и .

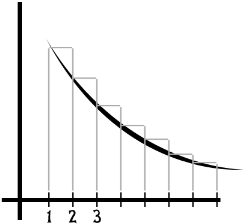
Предельный признак: пусть , т.е. , причем с конечна и не равна нулю. Тогда оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

1. *Сформулировать признак Даламбера и радикальный признак Коши для* ***знакоположительных*** *рядов.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Признак Даламбера: пусть . Тогда ряд сходится при q<1 и расходится при q>1. Если же q=1, то требуются дополнительные исследования.

Радикальный признак Коши: пусть . Тогда ряд сходится при q<1 и расходится при q>1. Если же q=1, то требуются дополнительные исследования.

1. *Сформулировать интегральный признак Коши сходимости ряда. Сделать поясняющий рисунок.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Интегральный признак Коши: пусть функция f(x) непрерывна и монотонна при , и . Тогда ряд и интеграл сходятся или расходятся одновременно.

Интеграл равен площади под кривой, которая задаётся функцией f, а сумма ряда равна площади «ступенек»: .

1. *Сформулировать определения абсолютно сходящегося и условно сходящегося рядов. Как связаны свойства ряда быть сходящимся, условно сходящимся, абсолютно сходящимся?*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Знакопеременным рядом называется ряд , члены которого могут быть любого знака.

**Теорема**: если сходится ряд , то сходится и ряд .  
Если сходятся оба ряда, то ряд называют абсолютно сходящимся. Если же ряд модулей расходится, но при этом исходный ряд сходится, то его называют условно сходящимся. По условию теоремы, невозможен случай сходящегося ряда модулей и расходящегося исходного.

1. *Сформулировать признак Даламбера и радикальный признак Коши для* ***произвольного*** *ряда.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Признак Даламбера: пусть . Тогда ряд сходится при q<1 и расходится при q>1. Если же q=1, то требуются дополнительные исследования.

Радикальный признак Коши: пусть . Тогда ряд сходится при q<1 и расходится при q>1. Если же q=1, то требуются дополнительные исследования.

1. *Дать определение знакочередующегося ряда. Сформулировать признак Лейбница сходимости ряда и утверждение об оценке остатка знакочередующегося ряда.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Знакочередующимся называется ряд вида или **(\*)**.

Признак Лейбница: пусть – монотонна, и на бесконечности стремится к нулю. Тогда ряд вида (\*) сходится, а погрешность .