1. *Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• События А и В нзываются несовместными, если их пересечение является невозможным событием, т.е. .

• Если А и В несовместные события, (а также то они обязательно зависимые. Если А и В – совместные, то они могут быть как зависимыми, так и независимыми; если А и В – зависимые, то они могут быть как совместными, так и несовместными.

1. *Сформулировать геометрическое определение вероятности.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Пусть

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1) | 2) , где – мера множества (длина для n=1, площадь для n=2, объём для n=3, ..) | 3) возможность принадлежности исхода эксперимента множеству пропорциональна мере множества А и не зависит от его формы и расположения внутри . |

Тогда вероятностью осуществления события А называют число .

1. *Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Сигма-алгеброй событий на множестве элементарных исходов называют такой набор подмножеств , что:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) ; | 2) . |

• Основные следствия из определения сигма-алгебры:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. ; | 2. ; | 3.; | 4. . |

1. *Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Пусть – пространство ЭИ, – сигма-алгебра. Вероятностью называется отображение , для которого выполняются условия:

|  |  |
| --- | --- |
|  | для попарно несовместных событий А1,…,An,… |

• Свойства вероятности:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) | 5) |
| 2) | 6) конечного набора событий , . |
| 3) |
| 4) |

1. *Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения и аксиому непрерывности. Как они связаны между собой?*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Аксиома сложения: для попарно непересекающихся событий .

Расширенная аксиома сложения: для попарно несовместных событий А1,…,An**,…** .

Аксиома непрерывности: для любой неубывающей последовательности событий , где справедливо .

• Расширенная аксиома сложения эквивалентна аксиоме сложения и аксиоме непрерывности.

1. *Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Пусть А и В – события, . Условной вероятностью осуществления А при условии произошедшего В называют число . Условная вероятность P(A|B) удовлетворяет аксиомам безусловной вероятности: .

1. *Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

**Теорема 1**: пусть . Тогда .

**Теорема 2**: пусть события таковы, что . Тогда .

1. *Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Пусть А и В – события, связанные с одним и тем же экспериментом. А и В называются независимыми, если .

• Если , то А и В независимы тогда и только тогда, когда . Аналогично, если , то А и В независимы тогда и только тогда, когда овторяя это утверждение, получаем требуемую формулу

1. *Сформулировать определение попарно независимых событий, и независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• События называются попарно независимыми, если ; независимыми в совокупности, если для любого набора

• Если А – независимы в совокупности, то они независимы попарно. При этом обратное неверно.

1. *Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Говорят, что H образует полную группу событий, если .

• Так как являются несовместными событиями и их вероятность не равна нулю, то они могут быть только зависимыми.

1. *Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

**Теорема**: Пусть H1…Hn – полная группа событий, А – некоторое событие и . Тогда .

1. *Сформулировать теорему о формуле Байеса.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

**Теорема**: Пусть выполняются все условия теоремы о полной вероятности и P(A)>0. Тогда

1. *Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно K успехов в серии из N испытаний.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Рассмотрим случайный эксперимент, в результате которого возможна реализация одного из двух ЭИ; первый будем называть «успех», второй «неудача»; вероятность успеха: p, вероятность неудачи: q=1-p. Схемой испытаний Бернулли называется серия последовательных экспериментов такого вида, в которых также: вероятность успеха неизменна во всех испытаниях; испытания – независимы, т.е. вероятность исхода i-го испытания не зависит от исходов испытаний 1…i-1.

• Обозначим – вероятность реализации k успехов в серии из n испытаний Бернулли. Тогда

1. *Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из N испытаний а) ровно к успехов; б) хотя бы одного успеха; в) от к1 до к2 успехов.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Пусть – вероятность реализации k успехов в серии из n испытаний Бернулли. Тогда

Пусть – вероятность реализации хотя бы одного успеха. Тогда .

Пусть – вероятность реализации от к1 до к2 успехов. Тогда .

1. *Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Элементарный исход эксперимента – такой его исход, который в рамках данного эксперимента: 1) мыслится неделимым; 2) никакие 2 ЭИ не могут произойти одновременно (в рамках одного эксперимента); 3) в результате эксперимента всегда имеет место ровно один из ЭИ.

• Пусть 1) количество ЭИ эксперимента ; 2) по условиям эксперимента все ЭИ равновозможны; 3) событие А состоит из элементов (). Тогда вероятностью осуществления события А называется .

• Пример: 2 раза бросают игральную кость, A={сумма выпавших очков >= 11}. .

1. *Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него доказать основные свойства вероятности.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Пусть 1) количество ЭИ эксперимента ; 2) по условиям эксперимента все ЭИ равновозможны; 3) событие А состоит из элементов (). Тогда вероятностью осуществления события А называется .

**• Теорема**:

1. ; 2. ; 3. Если А и В несовместн, то Р{A+B}=P{A}+P{B}.

**Доказательство**:

1. .

2.

3. по формуле включений и исключений. |AB|=0, следовательно .

1. *Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Пусть 1) Эксперимент проведён n раз; 2) событие А при этом произошло раз. Тогда вероятностью осуществления события А называют число .

• Недостатки: а) на практике невозможно провести эксперимент бесконечное число раз; для конечных N отношение может изменяться при разных N.

б) с позиций современной математики, статистическое определение является архаизмом, т.к. не дает достаточной базы для дальнейшего развития теории.

1. *Доказать основные свойства сигма-алгебры событий.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Сигма-алгеброй событий на множестве элементарных исходов называют такой набор подмножеств , что:  
1) ; 2) .

• **Теорема**:

1. ; 2. ; 3.; 4. .

Доказательство:

1) .

2) .

3) .

1. *Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Пусть – пространство ЭИ, – сигма-алгебра. Вероятностью называется отображение , для которого выполняются условия: для попарно несовместных событий А1,…,An,… .

• **Теорема**: 1) ; 2) ; 3) .

**Доказательство**:

1. *,* причем
2. *Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• **Теорема**:

**Доказательство**: а) , причем . Следовательно, .

б) .

1. *Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• Пусть А и В – события, . Условной вероятностью осуществления А при условии произошедшего В называют число .

• Теорема: условная вероятность P(A|B) удовлетворяет аксиомам безусловной вероятности: .

Доказательство:

1. .
2. .
3. *Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

**Теорема 1**: пусть . Тогда .

**Доказательство**: по определению условной вероятности,

**Теорема 2**: пусть события таковы, что . Тогда .

**Доказательство**:  **( \* )**. . Следовательно, (\*). Повторяя это утверждение, получаем требуемую формулу .

1. *Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

**Теорема**: 1) Если , то А и В независимы тогда и только тогда, когда . 2) Аналогично, если , то А и В независимы тогда и только тогда, когда

**Доказательство**: 1) необходимость. . По определению условной вероятности: . Достаточность. . Следовательно, А и В независимы.

2) доказывается полностью аналогично.

1. *Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

• События называются попарно независимыми, если ; независимыми в совокупности, если для любого набора

• Если А – независимы попарно, то из этого не следует, что они независимы в совокупности. Это подтверждает пример Бернштейна:  
рассмотрим правильный тетраэдр, на трех гранях которого записаны числа 1, 2, 3, а на 4-й все три числа. Тетраэдр кидают на плоскость и рассматривают три события: А независимы попарно, но не в совокупности:  
a) ;  
b) А – попарно независимые.  
Для независимости в совокупности: . Следовательно, А не являются независимыми в совокупности.

1. *Доказать теорему о формуле полной вероятности.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Говорят, что H образует полную группу событий, если .

**Теорема**: Пусть H1…Hn – полная группа событий, А – некоторое событие и . Тогда .

**Доказательство**: , поскольку Далее, поскольку , то

1. *Доказать теорему о формуле Байеса.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

**Теорема**: Пусть выполняются все условия теоремы о полной вероятности и P(A)>0. Тогда

**Доказательство**: . По формуле полной вероятности, можно представить ; тогда .

1. *Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно к успехов в серии из н испытаний по схеме Бернулли.*

~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~ ~~~

Обозначим – вероятность реализации k успехов в серии из n испытаний Бернулли.

**Теорема**: Тогда .

**Доказательство**: опишем результаты испытаний кортежами , где . Исходов, в которых произошло ровно k успехов, штук. Вероятность осуществления ровно одного такого исхода: . В случае k успехов, имеем p k раз и q n-k раз; следовательно, . Поскольку различные исходы, на которых происходит ровно k успехов, являются несовместными, то .