

Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана

В.М. ГРАДОВ

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
В ПРАКТИКЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
МОДЕЛИРОВАНИЯ

Часть 2

*Рекомендовано редсоветом МГТУ им. Н.Э. Баумана  
в качестве учебного пособия*

Москва  
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана  
2006

## 1. МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Математические модели в частных производных позволяют описывать поля разнообразной физической природы: температур, плотностей, скоростей и концентраций частиц, гравитационные, электромагнитные, радиационные и др. С уравнениями в частных производных приходится иметь дело в различных областях науки и техники при формировании моделей гидро- и газодинамики, переноса излучения, квантовой механики, теплопередачи, физики плазмы и т. д. В указанных уравнениях в качестве независимых переменных обычно выступают время и пространственные координаты, но могут использоваться и такие переменные, как проекции скоростей частиц на координатные оси, что может увеличить размерность уравнений до семи. Решение отыскивается в некоторой области  $G(t, x, y, z)$ , а на границе области ставятся дополнительные условия, причем условия, поставленные в начальный момент времени, называются *начальными*, а условия на границе пространственной области – *граничными*, или *краевыми*. Для уравнений в частных производных можно поставить задачу Коши, когда формулируются только начальные условия (например, при рассмотрении распространения тепла в неограниченном пространстве).

В пособии рассматриваются методы решения уравнений второго порядка, линейных относительно производных. Общий вид таких уравнений в случае двух переменных может быть представлен следующим образом [1, 2]:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

где коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  в общем случае являются функциями  $x$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ , и тогда уравнение называется *квазилинейным*. Если данные коэффициенты зависят только от  $x$  и  $y$ , то уравнение считается *линейным относительно старших производных*. Наконец, уравнение называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных, так и относительно функции и ее первых производных, т. е. уравнение может быть записано в виде

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0,$$

где все коэффициенты являются функциями только  $x$  и  $y$ . Если все коэффициенты не зависят от  $x$  и  $y$ , то уравнение называется *линейным с постоянными коэффициентами*.

Если коэффициенты  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  равны нулю, а  $b_1 \neq 0$ ,  $b_2 \neq 0$ , то уравнение имеет первый порядок и называется *уравнением переноса*.

В зависимости от знака дискриминанта  $d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  уравнения делятся на *гиперболические* ( $d > 0$ ), *параболические* ( $d = 0$ ) и *эллиптические* ( $d < 0$ ).

Общая классификация методов решения уравнений всех типов аналогична приведенной в [1, 6] для обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно: существуют *точные, аналитические приближенные и численные* методы. Точные решения уравнений в частных производных удается получить лишь в ограниченном ряде случаев, поэтому при реализации вычислительных моделей, построенных на таких уравнениях, особенно велика роль численных методов.

К точным методам решения относятся метод разделения переменных, метод функций источника, метод распространяющихся волн и др. Среди аналитических приближенных методов можно отметить метод малого параметра и метод Бубнова – Галеркина. К численным методам относятся метод конечных разностей (сеточный) и метод конечных элементов (проекционно-сеточный). В настоящем пособии внимание сосредоточено на методе конечных разностей.

## 1.1. Постановки задач

Рассмотрим уравнения математической физики, в которых независимыми переменными являются время  $t$  и пространственные координаты  $\vec{r}$ .

Для выделения единственного решения уравнения должны быть сформулированы дополнительные условия, которые записываются на границе области изменения независимых переменных  $\Omega(\vec{r}, t)$ . При этом различают задачу Коши (заданы только начальные условия, т. е. условия при  $t = t_0$ , например задача для беско-

нечного пространства), краевые задачи (заданы условия на границе пространственной области) и смешанные краевые, или нестационарные краевые, задачи (заданы и начальные, и краевые условия).

В качестве примера обсудим постановку задачи для уравнения параболического типа в одномерном и двумерном вариантах. В одномерном варианте имеем

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T_0. \quad (1.1)$$

Начальное условие формулируется в виде

$$u(x, 0) = \mu(x). \quad (1.2)$$

Границные условия могут быть нескольких типов в зависимости от того, задаются ли на границах функция или ее производная, или соотношение между функцией и ее производной. Могут быть также заданы соотношения на контактной границе и, кроме того, поставлены нелинейные граничные условия.

Простейшие граничные условия первого рода формируют заданием функции

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Границные условия второго рода содержат производную от исходной функции. Например, при  $x = 0$  можно написать соотношение

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \phi(t).$$

Границные условия третьего рода:

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta u = \psi(t).$$

В двумерной постановке задача формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, z, t), \quad (x, z) \in \Omega, \quad 0 < t < T_0. \quad (1.4)$$

Начальное условие:

$$u(x, z, 0) = \mu(x, z). \quad (1.5)$$

Краевые условия первого рода на границе  $\Gamma$ :

$$u|_{\Gamma} = \mu_1(x, z, t),$$

или более подробно для прямоугольной пространственной области  $0 < x < l, 0 < z < s$ :

$$\begin{aligned} u(0, z, t) &= \mu_1(z, t), & u(l, z, t) &= \mu_2(z, t), \\ u(x, 0, t) &= \mu_3(x, t), & u(x, s, t) &= \mu_4(x, t). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Краевые условия второго рода ставятся следующим образом:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \phi(x, y, t),$$

где  $n$  – внешняя нормаль к границе области.

## 1.2. Основные понятия метода конечных разностей

Применение разностного метода начинают с построения в области изменения аргументов  $\Omega(\vec{r}, t)$  разностной сетки, представляющей собой множество точек (узлов), образованных пересечением систем линий. На этой сетке производные, входящие в уравнение, аппроксимируют разностными аналогами, в которые входят значения функции в узлах сетки. Начальные и граничные условия также заменяют разностными соотношениями. Построенная таким образом система алгебраических уравнений называется *разностной схемой*, решение которой дает приближенные значения искомой функции в узлах. Получающаяся функция дискретного аргумента, определенная в узлах сетки, называется *сеточной функцией*.

Понятно, что должны быть выдвинуты требования существования и единственности решения разностной схемы, и это решение должно сходиться к решению исходной дифференциальной задачи.

Рассмотрим построение сетки на примере разностной аппроксимации уравнения (1.1) с дополнительными условиями (1.2), (1.3). Построим в области интегрирования уравнения прямоугольную сетку. Последняя образуется пересечением линий  $\{x_n = nh, 0 \leq n \leq N, t_m = m\tau, 0 \leq m \leq M\}$ , где  $h$  и  $\tau$  – шаги сетки по переменным  $x$  и  $t$ . Значения функции в узлах сетки обозначают как  $u_n^m = u(x_n, t_m)$  – рис. 1.1, и, соответственно,  $u_n^{m+1} = u(x_n, t_{m+1})$ . Значения сеточной функции в узлах, являющейся результатом решения разностных уравнений, обозначим  $y_n^m$  и  $y_n^{m+1}$ , причем для удобства записи формул освободим верхний индекс, приняв  $y_n = y_n^m$  и  $\hat{y}_n = y_n^{m+1}$ . Для уравнения (1.1) совокупность узлов, лежащих на линии  $t = t_m$  (или на плоскости, если решается двумерная по пространству задача, или же на гиперплоскости в случае многомерной постановки), называется *слоем*. Линии на слое, вдоль которых меняется только одна пространственная переменная, называются *направлением*. Выберем конфигурацию узлов, на которой будем проводить аппроксимацию дифференциального уравнения. Эта конфигурация узлов называется *шаблоном*. Для одной и той же задачи можно выбрать много разных шаблонов. На рис. 1.2 показаны три шаблона.

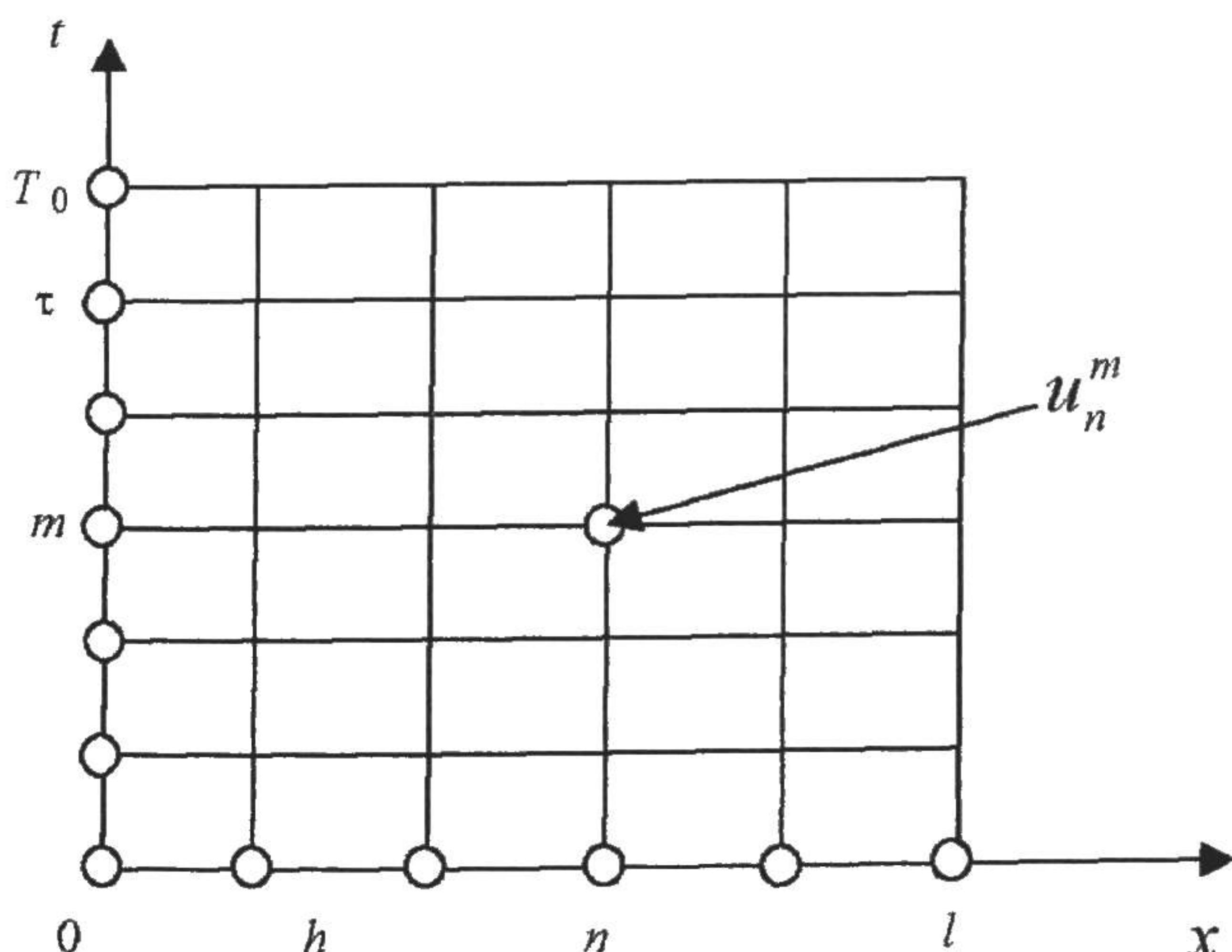
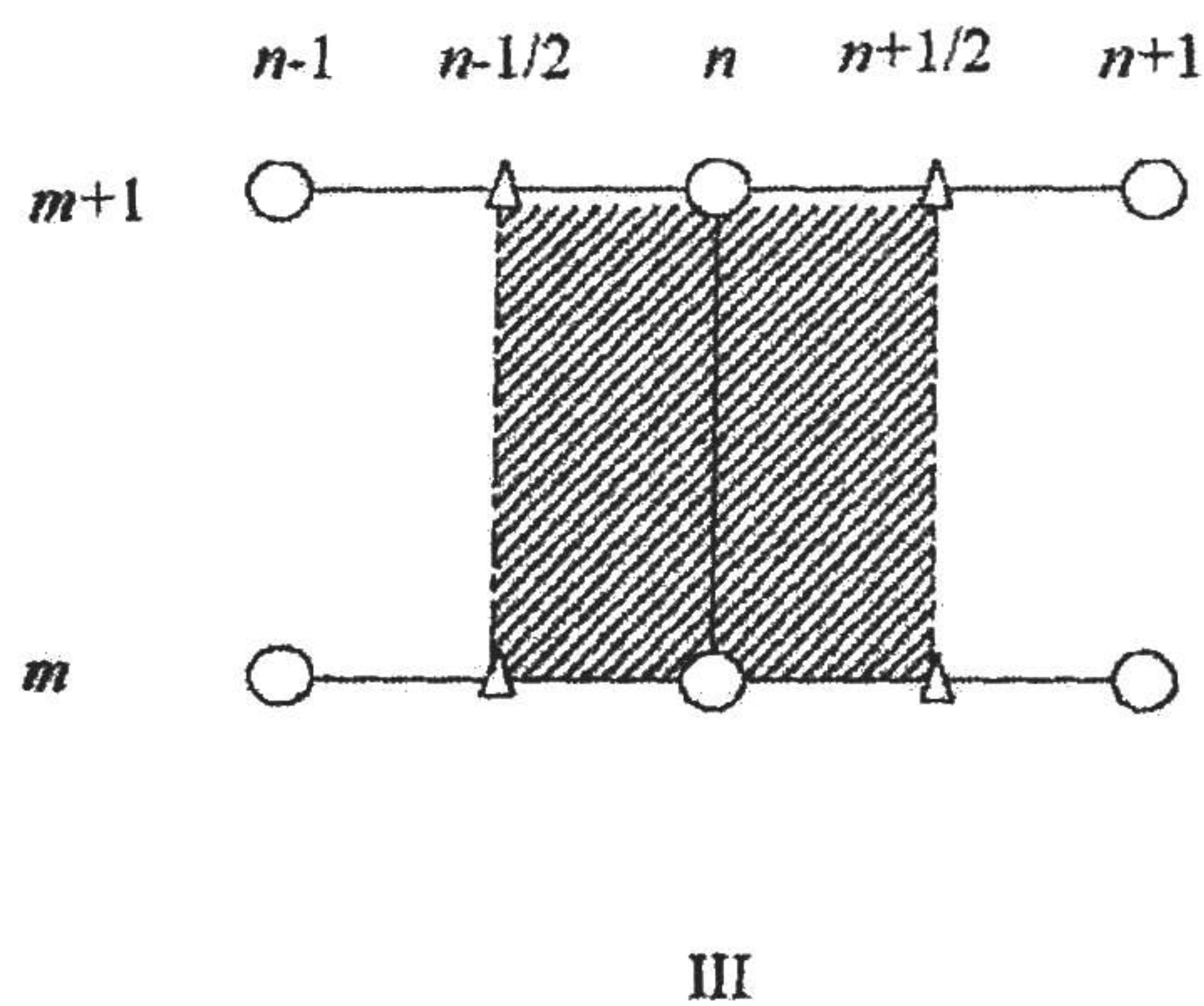
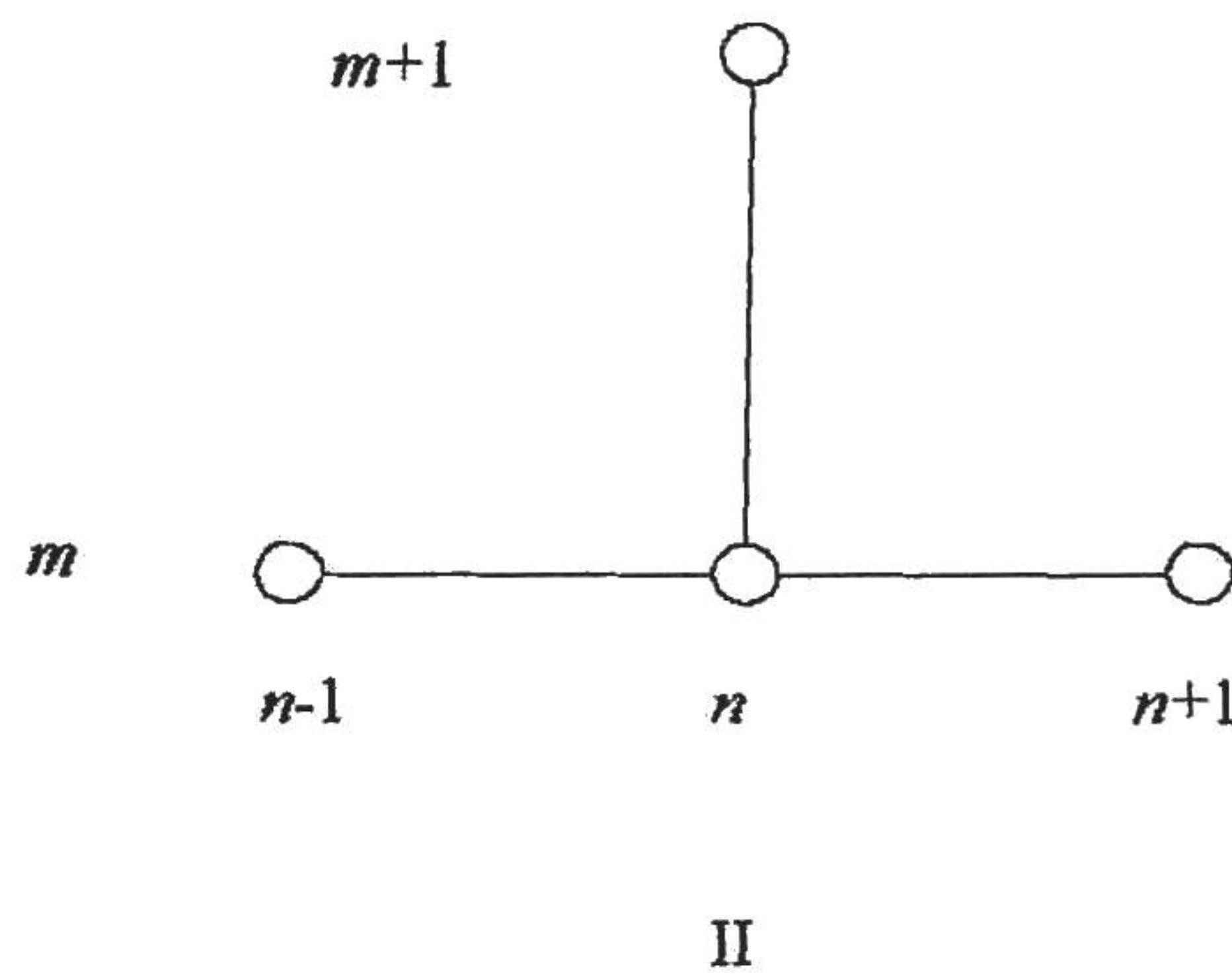
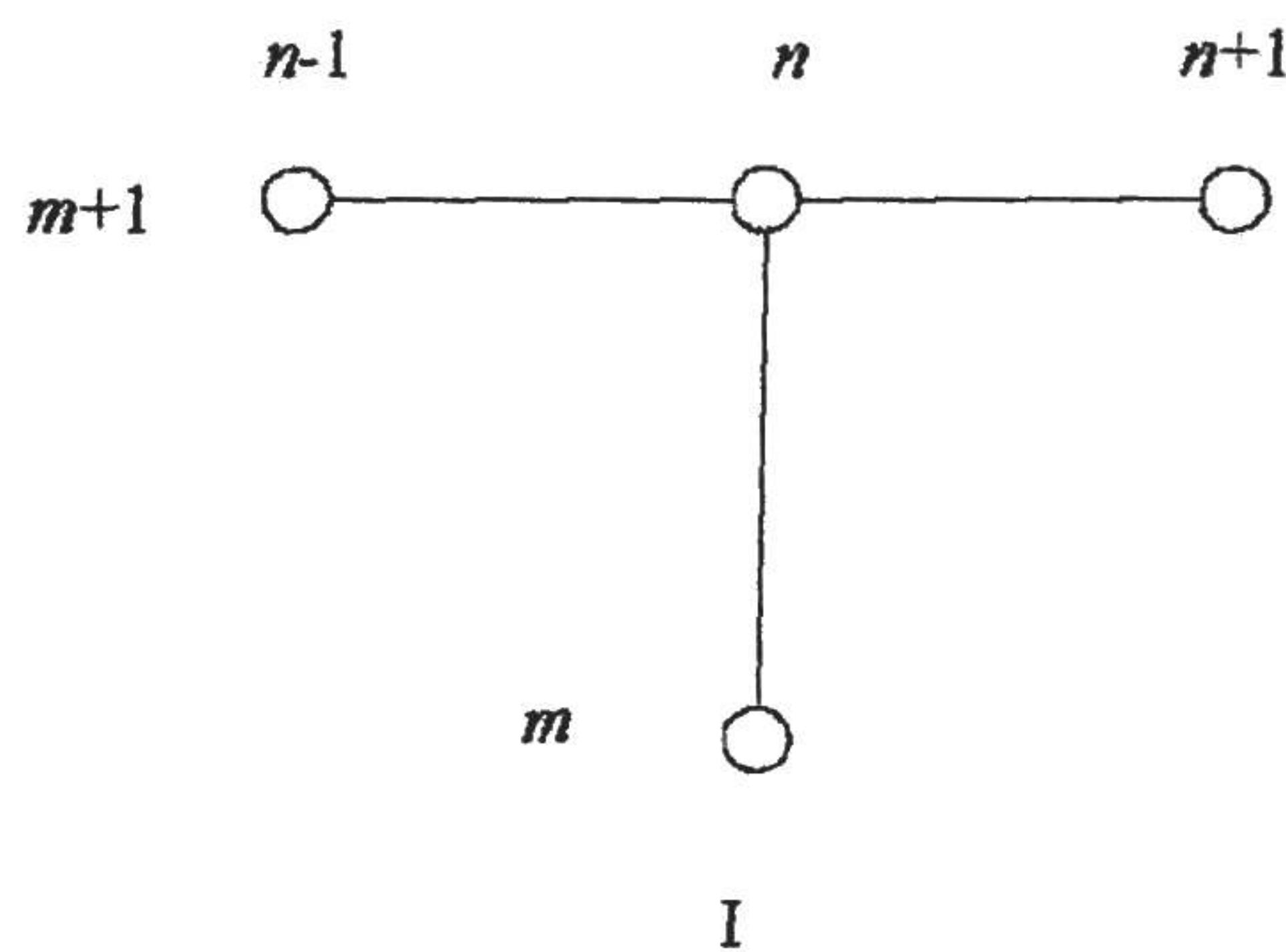


Рис. 1.1. Разностная сетка для уравнения (1.1)



**Рис. 1.2. Шаблоны (I–III) разностных схем  
(на схеме III заштрихована ячейка)**

Заменяя в уравнении (1.1) производные разностными аналогами, получаем на выбранных шаблонах соответствующие разностные схемы:

на шаблоне I

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a \frac{\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}}{h^2} + \varphi_n; \quad (1.7)$$

на шаблоне II

$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + \varphi_n; \quad (1.8)$$

на шаблоне III

$$\begin{aligned} \frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} &= a\sigma \frac{\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}}{h^2} + \\ &+ a(1-\sigma) \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} + \varphi_n. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В формулах (1.7)–(1.9)  $1 \leq n \leq N-1$ ;  $\sigma$  – параметр со значениями в пределах  $0\dots 1$ ;  $a$  – коэффициент уравнения. Схемы дополняются уравнениями, аппроксимирующими граничные условия:

для шаблонов I и III

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t_{m+1}), \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_{m+1}); \quad (1.10)$$

для шаблона II

$$y_0 = \mu_1(t_m), \quad y_N = \mu_2(t_m). \quad (1.11)$$

Начальное условие имеет вид

---


$$y_n^0 = \mu(x_n). \quad (1.12)$$

Остановимся на вопросе существования решения.

Схема (1.8) представляет собой формулу для вычисления единственного неизвестного  $\hat{y}_n$ , которое легко выразить через значения сеточной функции на предыдущем слое:

$$\hat{y}_n = y_n + \frac{\tau a}{h^2} (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + \tau \varphi_n, \quad (1.13)$$

где  $\varphi_n = f(x_n, t_m)$ ,  $1 < n < N - 1$ .

При этом значения  $y_0$  и  $y_N$  находят из краевых условий (1.11), а при расчете  $\hat{y}_n^1$  используют начальное условие (1.12). Схемы типа (1.8) называются явными.

Схемы (1.7) и (1.9) относятся к типу *неявных*. Для получения решения на данном слое здесь приходится решать систему уравнений, в которой каждое уравнение, кроме первого и последнего, содержит три неизвестных:  $\hat{y}_{n-1}$ ,  $\hat{y}_n$ ,  $\hat{y}_{n+1}$ . Системы (1.7), (1.9) могут быть приведены к виду

$$A_n \hat{y}_{n-1} - B_n \hat{y}_n + C_n \hat{y}_{n+1} = -F_n, \quad 1 < n < N - 1,$$

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t_{m+1}), \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_{m+1}), \quad n = 0 \text{ и } n = N. \quad (1.14)$$

Коэффициенты для разностной схемы (1.7):

$$A_n = \frac{\tau a}{h^2},$$

$$C_n = A_n,$$

$$B_n = A_n + C_n + 1,$$

$$F_n = \tau \varphi_n + y_n. \quad (1.15)$$

Для схемы (1.9) коэффициенты следующие:

$$A_n = \frac{\tau a \sigma}{h^2},$$

$$C_n = A_n,$$

$$B_n = A_n + C_n + 1,$$

$$F_n = \left(1 - \frac{2\tau a(1-\sigma)}{h^2}\right) y_n + \frac{\tau a(1-\sigma)}{h^2} (y_{n-1} + y_{n+1}) + \tau \varphi_n. \quad (1.16)$$

Матрица линейной системы (1.14) – трехдиагональная, ее решение может быть найдено методом прогонки. При  $\sigma > 0$  решение существует, единственno и прогонка устойчива в силу преобладания диагонального элемента матрицы системы: из (1.15), (1.16) ясно, что модуль этого элемента больше суммы модулей недиагональных членов.

Видно, что при  $\sigma = 0$  схема (1.9) переходит в явную схему (1.8), а при  $\sigma = 1$  – в чисто неявную (1.7). При  $\sigma = \frac{1}{2}$  схема (1.9) называется *симметричной (по времени)*.

### 1.3. Понятие об аппроксимации, устойчивости и сходимости

Качество построенной разностной схемы оценивается такими свойствами, как аппроксимация, устойчивость, сходимость. Ниже будет показано, что из аппроксимации и устойчивости разностной схемы следует сходимость приближенного решения к точному. Рассмотрим последовательно указанные свойства схем.

#### 1.3.1. Аппроксимация

Введем понятие невязки разностной схемы, построенной для дифференциального уравнения, записанного в общем операторном виде

$$Au(x) = f, \quad (1.17)$$

с граничными условиями

$$Bu(x) = \mu(x), \quad (1.18)$$

где, например, для уравнения (1.1) оператор  $A$  имеет вид

$$A = \left( \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right).$$

Разностная схема для задачи (1.17), (1.18):

$$A_h y = \Phi_h, \quad (1.19)$$

$$B_h y = \beta_h. \quad (1.20)$$

Подставляя в соотношения (1.19) точное решение, получаем, что данное равенство будет нарушено, так как приближенное решение  $u$  не совпадает с точным решением  $u$ .

*Невязкой* называется величина

$$\psi = \phi_h - A_h u = (Au - f) - (A_h u - \phi_h). \quad (1.21)$$

Для граничных условий получаем невязку в виде

$$\rho = \beta_h - B_h u = (Bu - \mu) - (B_h u - \beta_h). \quad (1.22)$$

Дадим определение аппроксимации.

Разностная схема (1.19), (1.20) аппроксимирует задачу (1.17), (1.18), если  $\|\psi\| \rightarrow 0$ ,  $\|\rho\| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , и аппроксимация имеет  $p$ -й порядок, если  $\|\psi\| = O(h^p)$ ,  $\|\rho\| = O(h^p)$  при  $h \rightarrow 0$ .

Фигурирующие в приведенных соотношениях нормы могут быть определены как сеточные аналоги различных норм: чебышевской  $\|u(x)\|_C$ , гильбертовой  $\|u(x)\|_{L_2}$ , энергетической  $\|u(x)\|_E$ :

$$\|u(x)\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|;$$

$$\|u(x)\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b \rho(x) u^2(x) dx}, \quad \rho(x) > 0;$$

$$\|u(x)\|_E = \sqrt{\int_a^b [\rho_1(x) u_x^2(x) + \rho_0(x) u^2(x)] dx}, \quad \rho_1(x) > 0, \quad \rho_0(x) > 0.$$

Указанные сеточные аналоги выписанных норм представляют в таком виде, чтобы при  $h \rightarrow 0$  они переходили в эти нормы:

$$\|y\|_C = \max_{0 \leq n \leq N} |y_n|,$$

$$\|y\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \rho_n y_n^2 h_n}.$$

Невязку оценивают, проводя разложение точного решения в ряд Тейлора. Найдем невязку разностной схемы (1.9) для уравнения (1.1).

Выполним разложение решения на сетке, принимая за центр разложения точку  $\left( x_n, t_m + \frac{\tau}{2} \right)$ . Получим

$$\hat{u}_{n\pm 1} = u + \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} + \frac{1}{6} \left( \frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24} \left( \frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} \pm h u_x +$$

$$+ \frac{h^2}{2} u_{xx} \pm \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} \pm$$

$$\pm \frac{\tau h}{2} u_{tx} \pm \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{2} \right)^2 h u_{ttx} + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{2} \right) h^2 u_{txx} \pm \frac{1}{6} \left( \frac{\tau}{2} \right)^3 h u_{tttx} +$$

$$+ \frac{1}{4} \left( \frac{\tau}{2} \right)^2 h^2 u_{ttxx} \pm \frac{1}{6} \left( \frac{\tau}{2} \right) h^3 u_{txxx} + \dots,$$

$$\hat{u}_n = u + \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2!} \left( \frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} + \frac{1}{3!} \left( \frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{4!} \left( \frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} + \dots,$$

$$u_{n+1} = u - \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} - \frac{1}{6} \left( \frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24} \left( \frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} + h u_x +$$

$$+ \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} -$$

$$- \frac{\tau h}{2} u_{tx} + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{2} \right)^2 h u_{ttx} - \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{2} \right) h^2 u_{txx} - \frac{1}{6} \left( \frac{\tau}{2} \right)^3 h u_{tttx} +$$

$$+ \frac{1}{4} \left( \frac{\tau}{2} \right)^2 h^2 u_{ttxx} - \frac{1}{6} \left( \frac{\tau}{2} \right) h^3 u_{txxx} + \dots,$$

$$u_{n-1} = u - \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} - \frac{1}{6} \left( \frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{24} \left( \frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} - h u_x +$$

$$+ \frac{h^2}{2} u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\tau h}{2} u_{tx} - \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{2} \right)^2 h u_{ttx} - \frac{1}{2} \left( \frac{\tau}{2} \right) h^2 u_{txx} + \frac{1}{6} \left( \frac{\tau}{2} \right)^3 h u_{tttx} + \\
& + \frac{1}{4} \left( \frac{\tau}{2} \right)^2 h^2 u_{txxx} + \frac{1}{6} \left( \frac{\tau}{2} \right) h^3 u_{txxx} + \dots,
\end{aligned}$$

$$u_n = u - \frac{\tau}{2} u_t + \frac{1}{2!} \left( \frac{\tau}{2} \right)^2 u_{tt} - \frac{1}{3!} \left( \frac{\tau}{2} \right)^3 u_{ttt} + \frac{1}{4!} \left( \frac{\tau}{2} \right)^4 u_{tttt} + \dots$$

В этих формулах введены обозначения:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ и т. д.}$$

Подставив эти разложения в формулу для невязки, приедем к соотношению

$$\begin{aligned}
\Psi &= \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - f(x, t) \right)_{x=x_n}^{t=t_m + \frac{\tau}{2}} - \frac{\hat{u}_n - u_n}{\tau} + \\
&+ a\sigma \frac{\hat{u}_{n-1} - 2\hat{u}_n + \hat{u}_{n+1}}{h^2} + a(1-\sigma) \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} + \Phi_n = \\
&= a\tau \left( \sigma - \frac{1}{2} \right) u_{txx} + \frac{\tau^2}{8} \left( au_{txxx} - \frac{1}{3} u_{ttt} \right) + \frac{ah^2}{12} u_{xxxx} + \\
&+ \Phi_n - f \left( x_n, t_m + \frac{\tau}{2} \right) + O(\tau^2 + h^2).
\end{aligned}$$

Можно заметить, что если взять  $\Phi_n = f \left( x_n, t_m + \frac{\tau}{2} \right)$ , то при  $\sigma = \frac{1}{2}$  рассматриваемая разностная схема имеет аппроксимацию  $O(\tau^2 + h^2)$ , а при  $\sigma \neq \frac{1}{2}$  –  $O(\tau + h^2)$ .

Аналогично проверяется аппроксимация начальных и граничных условий, если они содержат производные от функции, например граничных условий второго или третьего рода.

### 1.3.2. Устойчивость

Под устойчивостью задачи понимают непрерывную зависимость решения от входных данных, т. е. малые отклонения во входных данных должны приводить к малому изменению решения. Неустойчивость проявляется в том, что малые ошибки, допущенные на любом расчетном шаге, приводят к быстрому их нарастанию в ходе дальнейших вычислений, что, естественно, обесценивает получаемые результаты.

Дадим определение устойчивости.

Разностная схема  $A_h y = \Phi_h$ ,  $B_h y = \beta_h$  устойчива, если ее решение непрерывно зависит от входных данных  $\Phi_h$  и  $\beta_h$  и если эта зависимость равномерна относительно шага сетки, т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta(\varepsilon)$ , не зависящее от шага  $h$ , что  $\|y^{(1)} - y^{(2)}\| \leq \varepsilon$ , если  $\|\Phi_h^{(1)} - \Phi_h^{(2)}\| \leq \delta$ ,  $\|\beta_h^{(1)} - \beta_h^{(2)}\| \leq \delta$ .

В случае нескольких независимых переменных рассматривают условную и безусловную устойчивость. Если сформулированные выше условия выполняются при определенном соотношении шагов по различным переменным, то устойчивость называется *условной*, в противном случае, когда соотношение между шагами может быть произвольным, устойчивость называется *безусловной*. При этом непрерывную зависимость решения от  $\Phi_h$  называют *устойчивостью по правой части*, а непрерывную зависимость от  $\beta_h$  – *устойчивостью по дополнительным условиям* (начальным и граничным).

Устойчивость разностных схем может быть исследована несколькими методами: разделения переменных, энергетических неравенств, операторных неравенств, на основе принципа максимума и др.

**Рассмотрим вначале принцип максимума.**

Перепишем разностные схемы (1.14) в виде

$$\sum_k a_k \hat{y}_{n+k} = \sum_p b_p y_{n+p} + \Phi_n, \quad (1.23)$$

где суммирование выполняется по узлам шаблона около  $n$ -го узла. Пронумеруем узлы так, чтобы  $|a_0| = \max_k |a_k|$ .

Принцип максимума, дающий достаточное условие устойчивости явных и неявных двухслойных разностных схем, формулируется следующим образом:

1) схема равномерно устойчива по начальным данным, если

$$(1 + C\tau)|a_0| \geq \sum_{k \neq 0} |a_k| + \sum_p |b_p|, \quad C = \text{const}; \quad (1.24)$$

2) схема устойчива по правой части, если справедливо соотношение (1.24) и имеет место неравенство

$$|a_0| - \sum_{k \neq 0} |a_k| \geq \frac{D}{\tau}, \quad D = \text{const} > 0. \quad (1.25)$$

Сформулированные условия не являются необходимыми для устойчивости схем, т. е. несоблюдение (1.24), (1.25) не обязательно ведет к их неустойчивости. Данным методом можно доказать устойчивость схем точности  $O(\tau)$ , в других случаях используют иные методы.

В качестве примера рассмотрим неявную схему (1.7). Представив ее в виде (1.23), получим выражения для коэффициентов

$$a_0 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}, \quad a_{-1} = a_1 = \frac{a}{h^2}, \quad b_0 = \frac{1}{\tau}, \quad 1 \leq n \leq N-1.$$

В случае граничных условий первого рода (1.10)  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = 0$  для  $n = 0$  и  $n = N$ . Все остальные коэффициенты равны нулю.

Видно, что условие (1.25) выполнено во внутренних узлах при произвольных соотношениях шагов по переменным  $x$  и  $t$ , а условие (1.24) справедливо во всех узлах сетки. Таким образом, рассматриваемая неявная разностная схема безусловно устойчива по начальным данным, правой части и краевым условиям. Принцип максимума позволяет доказывать устойчивость в чебышевской (локальной) норме.

**Метод разделения переменных** применяют для исследования устойчивости схем в гильбертовой (среднеквадратичной) норме. Запишем разностную схему в канонической форме:

$$B \frac{\hat{y} - y}{\tau} + Ay = \varphi, \quad (1.26)$$

где  $A$  и  $B$  – разностные операторы, действующие на функцию по пространственным переменным. Например, для явной схемы (1.8) очевидно, что

$$B = E, \quad Ay = -a \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2}. \quad (1.27)$$

При постоянной правой части погрешность решения удовлетворяет уравнению

$$B\hat{z} + (A\tau - B)z = 0. \quad (1.28)$$

Частное решение (1.28) будем искать методом разделения переменных:

$$z(x_n, t_m) = \rho_q^m e^{i\pi q x_n / l}, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.29)$$

Здесь  $\rho_q$  – множитель роста  $q$ -й гармоники при переходе с одного слоя на следующий слой, так что  $\hat{z} = \rho_q z$ . Подставив (1.29) в (1.28), придем к уравнению

$$\rho_q B e^{i\pi q x / l} + (A\tau - B) e^{i\pi q x / l} = 0. \quad (1.30)$$

Если в схеме (1.26) коэффициенты постоянны, а сетка равномерна, то уравнение (1.30) после сокращения множителя  $e^{iqx}$  не будет зависеть от индекса  $n$ , т. е. от координаты  $x$ , соответственно  $\rho_q$  не будет зависеть от  $x$ .

*Признак устойчивости* формулируется следующим образом.

Схема (1.26) с постоянными коэффициентами устойчива по начальным данным, если для всех гармоник с индексом  $q$  выполняется неравенство

$$|\rho_q| \leq 1 + C\tau, \quad C = \text{const.} \quad (1.31)$$

Константа  $C$  не должна быть большой, поэтому обычно принимают  $C = 0$ .

*Признак неустойчивости* заключается в следующем: если хотя бы для одной гармоники  $q$  величину  $|\rho_q|$  нельзя мажорировать величиной  $1 + C\tau$ , то схема (1.26) неустойчива.

В качестве примера проверим устойчивость явной схемы (1.8). Зафиксируем правую часть в разностной схеме (1.26), представим погрешность решения в виде (1.29) с учетом того, что  $\hat{z} = \rho_q z$ , и, подставив ее в (1.8), получим

$$\begin{aligned} & \rho_q^m \left( \frac{(\rho_q - 1)e^{i\pi q x_n / l}}{\tau} \right) - \\ & - a \rho_q^m \left( \frac{e^{i\pi q(x_n - h) / l} - 2e^{i\pi q x_n / l} + e^{i\pi q(x_n + h) / l}}{h^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

или

$$(\rho_q - 1) - \frac{a\tau}{h^2} (e^{-i\pi q h / l} - 2 + e^{i\pi q h / l}) = 0.$$

Заменяя по формуле Эйлера

$$e^{-i\pi q h / l} + e^{i\pi q h / l} = 2 \cos \pi q h / l,$$

получаем окончательно

$$(\rho_q - 1) + \frac{4a\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2l} = 0.$$

Отсюда

$$\rho_q = 1 - \frac{4a\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2l}. \quad (1.32)$$

Теперь согласно условию (1.31) ( $|\rho_q| \leq 1$ ) получим из (1.32) критерий устойчивости рассматриваемой разностной схемы, учитывая, что  $\sin^2 \frac{\pi q h}{2l} \geq 0$ :

$$\frac{4a\tau}{h^2} \leq 2.$$

Таким образом, явная схема устойчива при определенном соотношении между шагами по координатам  $x$  и  $t$ :

$$\tau \leq \frac{h^2}{2a}, \quad (1.33)$$

т. е. явная схема условно устойчива.

Отметим, что из признака (1.31) и дополнительного условия (1.25) следует устойчивость разностной схемы по правой части в гильбертовой норме.

Если дифференциальное уравнение имеет переменные коэффициенты или используется неравномерная сетка, то применяют прием «замораживания коэффициентов». В этом случае коэффициенты считают постоянными и равными их значениям в некотором фиксированном узле  $n$ . Схема считается устойчивой, если при любых  $n$  и  $q$  оказывается справедливым неравенство (1.31).

Применим метод разделения переменных для исследования устойчивости разностной схемы (1.9). Вначале проверим устойчивость по начальным данным. Положим  $\varphi_n = 0$  и представим погрешность решения в виде (1.29), при этом  $\hat{z} = \rho_q z$ . Сделав данную подстановку в (1.9), получим

$$\left( \frac{(\rho_q - 1)e^{i\pi q x_n / l}}{\tau} \right) - a\sigma\rho_q \left( \frac{e^{i\pi q(x_n - h) / l} - 2e^{i\pi q x_n / l} + e^{i\pi q(x_n + h) / l}}{h^2} \right) - \\ - a(1 - \sigma) \left( \frac{e^{i\pi q(x_n - h) / l} - 2e^{i\pi q x_n / l} + e^{i\pi q(x_n + h) / l}}{h^2} \right) = 0,$$

или, проведя сокращение на  $e^{i\pi q x_n / l}$ , перейдем к уравнению

$$\frac{(\rho_q - 1)}{\tau} - a\sigma\rho_q \left( \frac{e^{-i\pi q h / l} - 2 + e^{i\pi q h / l}}{h^2} \right) - \\ - a(1 - \sigma) \left( \frac{e^{-i\pi q h / l} - 2 + e^{i\pi q h / l}}{h^2} \right) = 0.$$

Используя формулу Эйлера, получаем окончательно

$$\rho_q - 1 + \frac{4a\sigma\tau}{h^2}\rho_q \sin^2 \frac{\pi q h}{2l} + \frac{4a\tau(1 - \sigma)}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2l} = 0.$$

Отсюда

$$\rho_q = \frac{1 - \frac{4a\tau(1-\sigma)}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2l}}{1 + \frac{4a\sigma\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2l}}. \quad (1.34)$$

Из этого выражения следует, что при любом  $\sigma \geq 0$  множитель роста гармоники  $\rho_q \leq 1$ . Осталось выяснить условие выполнения соотношения  $\rho_q \geq -1$ . Элементарными преобразованиями легко показать, что данное обстоятельство реализуется в случае, если

$$\frac{4a\tau}{h^2}(1-2\sigma) \leq 2,$$

или

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a\tau}. \quad (1.35)$$

Дополнительное условие устойчивости по правой части (1.25), как это следует из (1.16), выполняется для всех  $\tau$  и  $h$ . Таким образом, разностная схема (1.9) устойчива по правой части, если выполнено условие (1.35) устойчивости по начальным данным.

Для чисто неявной разностной схемы  $\sigma = 1$  и из (1.35) следует, что данные схемы устойчивы при любом соотношении шагов по независимым переменным, т. е. они безусловно устойчивы. Этот результат был получен выше на основе принципа максимума.

Для явной разностной схемы  $\sigma = 0$  и устойчивость согласно (1.35) обеспечивается при условии  $\tau \leq \frac{h^2}{2a}$ , что было показано ранее.

### 1.3.3. Сходимость

Дадим определение сходимости.

Разностное решение  $y(x)$  сходится к решению задачи (1.17), (1.18), если

$$\|y(x) - u(x)\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0;$$

разностное решение имеет порядок точности  $p$ , если

$$\|y(x) - u(x)\| = O(h^p) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

В теории разностных схем большое значение имеет теорема, которую часто в кратком виде формулируют следующим образом: «Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость». Сформулируем и докажем данную теорему.

**Теорема.** Если решение задачи (1.17), (1.18) существует, разностная схема (1.19), (1.20) корректна (т. е. ее решение существует, единственно и схема устойчива) и аппроксимирует задачу на данном решении, то разностное решение сходится к точному.

Действительно, из определения невязки (1.21), (1.22) следует

$$A_h u = \Phi_h - \Psi, \quad (1.36)$$

$$B_h u = \beta_h - \rho. \quad (1.37)$$

Перепишем разностную схему (1.19), (1.20):

$$A_h y = \Phi_h, \quad B_h y = \beta_h.$$

Сравнивая (1.36), (1.37) с выписанной разностной схемой, видим, что система (1.36), (1.37) представляет собой не что иное, как разностную схему, правые части которой изменены на величину невязки.

Из устойчивости разностной схемы следует, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$ ; что  $\|y - u\| \leq \varepsilon$ , если  $\|\psi\| < \delta(\varepsilon)$ ,  $\|\rho\| < \delta(\varepsilon)$ .

Но разностная схема аппроксимирует задачу, значит  $\forall \delta > 0 \exists h_0(\delta)$ , что невязки  $\|\psi\| \leq \delta$ ,  $\|\rho\| \leq \delta$  при  $h \leq h_0(\delta)$ .

Таким образом,  $\forall \varepsilon > 0 \exists h_0(\delta(\varepsilon))$ , что  $\|y - u\| \leq \varepsilon$  при  $h \leq h_0(\delta)$ , что и доказывает сходимость.

Сделаем замечание относительно точности разностного решения. Краткая формулировка соответствующей теоремы имеет следующий вид: «Для линейных разностных схем порядок точности не ниже порядка аппроксимации». В развернутом варианте теорема формулируется так.

*Если условия вышеприведенной теоремы о сходимости выполнены, операторы  $A_h$ ,  $B_h$  линейные, а порядок аппроксимации равен  $p$ , то сходимость имеет порядок не ниже  $p$ .*

## 2. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

При выбранном шаблоне разностные схемы могут быть составлены несколькими методами: непосредственной аппроксимации, неопределенных коэффициентов, интегро-интерполяционным. У этих методов есть свои особенности и области применения.

### 2.1. Метод разностной аппроксимации

Данный метод применяют для уравнений с гладкими коэффициентами в регулярных областях на прямоугольных сетках. При использовании этого метода дифференциальные операторы непосредственно заменяют разностными аналогами, как это было сделано выше при получении схем (1.7)–(1.9). Метод сложно использовать для уравнений с разрывными коэффициентами, на косоугольных сетках и т. д.

Этим методом можно получить схемы повышенной точности в крайних узлах при постановке граничных условий, содержащих производные решения.

Пусть для уравнения (1.1) при  $x = 0$  поставлено краевое условие

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{0,t} = \alpha u(0, t). \quad (2.1)$$

Если аппроксимировать производную односторонней разностью  $\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h}$ , то граничное условие примет вид

$$\frac{\hat{y}_1 - \hat{y}_0}{h} = \alpha \hat{y}_0.$$

В соответствии с формулой Тейлора

$$\hat{u}_1 = \hat{u}_0 + h \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{0, t+\tau} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{0, t+\tau} + O(h^3). \quad (2.2)$$

Тогда невязка в начальном узле  $x_0$  будет следующей:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u \right) \Big|_{0, t+\tau} - \left( \frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h} - \alpha \hat{u}_0 \right) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u \right) \Big|_{0, t+\tau} - \\ &- \left\{ \frac{\hat{u}_0 + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^3) - \hat{u}_0}{h} - \alpha \hat{u}_0 \right\} = \\ &= -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^2) = O(h),\end{aligned}\tag{2.3}$$

т. е. невязка имеет первый порядок малости, который оказался более низким, чем порядок аппроксимации разностной схемы (1.7) для рассматриваемого дифференциального уравнения.

Получим разностное краевое условие с порядком аппроксимации  $O(h^2)$ . Выразим в разложении (2.2) производную  $\frac{\partial u}{\partial x}$  из (2.1),

а производную  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  – из уравнения (1.1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \hat{u}_0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f(x, t)}{a}.$$

Тогда из (2.2)

$$\begin{aligned}\hat{u}_1 &= \hat{u}_0 + ha \hat{u}_0 + \frac{h^2}{2!} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f_0}{a} \right) + O(h^3) = \\ &= \hat{u}_0 + ha \hat{u}_0 + \frac{h^2}{2!} \left( \frac{1}{a} \frac{\hat{u}_0 - u_0}{\tau} + O(\tau) - \frac{f_0}{a} \right) + O(h^3).\end{aligned}$$

Таким образом, имеем краевое условие вида

$$\frac{\hat{u}_1 - \hat{u}_0}{h} = \alpha \hat{u}_0 + \frac{h}{2} \left( \frac{\hat{u}_0 - u_0}{a\tau} - \frac{f_0}{a} \right) + O(\tau + h^2),$$

и разностный аналог записывается следующим образом:

$$\frac{\hat{y}_1 - y_0}{h} = \alpha \hat{y}_0 + \frac{h}{2} \left( \frac{\hat{y}_0 - y_0}{a\tau} - \frac{f_0}{a} \right). \quad (2.4)$$

Разностное уравнение (2.4) имеет второй порядок аппроксимации относительно шага  $h$ .

Приведем разностное уравнение (2.4) к виду, удобному для реализации метода прогонки:

$$\alpha_0 \hat{y}_0 + \alpha_1 \hat{y}_1 = \beta_0,$$

где

$$\alpha_0 = h\alpha + \frac{h^2}{2a\tau}, \quad \alpha_1 = -1, \quad \beta_0 = \frac{h^2 f_0}{2a} - y_0.$$

Записывая формулу прогонки в виде

$$\hat{y}_0 = \xi_1 \hat{y}_1 + \eta_1,$$

получаем выражение начальных прогоночных коэффициентов для вычисления массивов прогоночных коэффициентов по рекуррентным формулам

$$\xi_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad \eta_1 = \frac{\beta_0}{\alpha_0}.$$

## 2.2. Метод неопределенных коэффициентов

Суть метода состоит в том, что на выбранном шаблоне сетки составляют линейную комбинацию значений сеточной функции в узлах и получают выражение для соответствующей невязки, причем коэффициенты сформированной линейной комбинации находят из условия, чтобы невязка имела наиболее высокий порядок малости относительно шагов по координатам.

В качестве примера получим методом неопределенных коэффициентов разностную схему для уравнения (1.1) на шаблоне I (см. рис. 1.2).

Составим линейную комбинацию значений разностного решения в узлах шаблона:

$$a_1 \hat{y}_{n-1} + a_2 \hat{y}_n + a_3 \hat{y}_{n+1} + a_4 y_n - \Phi_n = 0. \quad (2.5)$$

Выполняя разложение решения в ряд Тейлора около узла  $(x_n, t_{m+1})$ , получаем

$$\begin{aligned}\hat{u}_{n\pm 1} &= \hat{u}_n \pm hu_x(x_n, t_{m+1}) + \frac{1}{2}h^2u_{xx}(x_n, t_{m+1}) + \dots, \\ u_n &= \hat{u}_n - \tau u_t(x_n, t_{m+1}) + \dots\end{aligned}$$

Невязку разностной схемы определяем согласно (1.21):

$$\begin{aligned}\Psi &= (Au - f) - (A_h u - \Phi_h) = (u_t - au_{xx})|_{x_n, t_{m+1}} - \\ &\quad - f(x_n, t_{m+1}) - (a_1 \hat{y}_{n-1} + a_2 \hat{y}_n + a_3 \hat{y}_{n+1} + a_4 y_n - \Phi_n) = \\ &= (u_t - au_{xx})|_{x_n, t_{m+1}} - \\ &\quad - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \hat{u}_n + (a_1 - a_3) hu_x - \\ &\quad - \frac{1}{2}(a_1 + a_3) h^2 u_{xx} + a_4 \tau u_t + O(\tau^2 + h^3) - \\ &\quad - f(x_n, t_{m+1}) + \Phi_n.\end{aligned}$$

Чтобы минимизировать невязку, следует положить

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 0, \quad a_1 - a_3 = 0, \quad \frac{1}{2}(a_1 + a_3)h^2 = -a, \\ a_4 \tau &= -1, \quad \Phi_n = f(x_n, t_{m+1}).\end{aligned}$$

Выписанные соотношения приводят к следующим формулам для неизвестных коэффициентов схемы:

$$a_1 = a_3 = -\frac{a}{h^2}, \quad a_2 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}, \quad a_4 = -\frac{1}{\tau}.$$

Разностная схема выглядит следующим образом:

$$A_n \hat{y}_{n-1} - B_n \hat{y}_n + C_n \hat{y}_{n+1} = -F_n,$$

где

$$\begin{aligned}A_n = C_n &= -a_1 = \frac{a}{h^2}, \quad B_n = a_2 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\tau}, \\ F_n &= -(a_4 y_n - \Phi_n) = \frac{1}{\tau} y_n + \Phi_n.\end{aligned}$$

Полученная разностная схема совпадает со схемой (1.15), составленной выше методом разностной аппроксимации.

Метод неопределенных коэффициентов достаточно универсален и весьма удобен при написании разностных схем на косоугольных сетках.

### 2.3. Интегро-интерполяционный метод

Этот метод наиболее надежен и применим во всех случаях, даже для уравнений с разрывными коэффициентами.

Обсудим получение данным методом разностной схемы для уравнения типа (1.1) с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + f(x, t). \quad (2.6)$$

Коэффициент данного уравнения  $\lambda(x, t)$  и источниковый член уравнения  $f(x, t)$  – кусочно-непрерывные функции. Для уравнения (2.6) непрерывными величинами являются функция  $u(x, t)$  и поток

$$F = -\lambda(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Тогда уравнение (2.6) можно переписать в виде

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} + f(x, t). \quad (2.8)$$

Для составления разностной схемы выбираем шаблон и связанную с шаблоном ячейку (см. рис. 1.2, шаблон III – ячейка заштрихована). Проводим интегрирование уравнения (2.8) по ячейке:

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x, t) dx,$$

или

$$\int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} (\hat{u} - u) dx = \int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_{n-1/2} - F_{n+1/2}) dt + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x, t) dx.$$

Интеграл в левой части уравнения вычислим методом средних, а первый интеграл в правой части запишем с помощью двухточечной квадратурной формулы с весами  $\sigma$  и  $1 - \sigma$ :

$$(\hat{y}_n - y_n)h = \tau \left[ \sigma(\hat{F}_{n-1/2} - \hat{F}_{n+1/2}) + (1 - \sigma)(F_{n-1/2} - F_{n+1/2}) \right] + \Phi_n, \quad (2.9)$$

где величина

$$\Phi_n = \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-1/2}}^{x_{n+1/2}} f(x, t) dx. \quad (2.10)$$

Проинтегрируем уравнение (2.7) по интервалу сетки:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x} dx = - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{F}{\lambda(x, t)} dx,$$

или

$$u_n - u_{n+1} = F_{n+1/2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{\lambda(x, t)}.$$

Отсюда

$$F_{n+1/2} \approx k_{n+1/2} \frac{u_n - u_{n+1}}{h}, \quad (2.11)$$

где

$$k_{n+1/2} = 1 / \left( \frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{\lambda(x, t)} \right). \quad (2.12)$$

Аналогично

$$F_{n-1/2} \approx k_{n-1/2} \frac{u_{n-1} - u_n}{h}. \quad (2.13)$$

Выражения, подобные (2.11), (2.13), можно записать и для величин  $\hat{F}_{n-1/2}$ ,  $\hat{F}_{n+1/2}$ .

Получим разностную схему, которая в [1] называется наилучшей. Для этого подставим в (2.9) выражения для потоков  $\hat{F}_{n-1/2}$ ,  $\hat{F}_{n+1/2}$ ,  $F_{n-1/2}$ ,  $F_{n+1/2}$ , при этом коэффициенты  $k_{n-1/2}$ ,  $k_{n+1/2}$  и величину  $\Phi_n$  будем вычислять в момент времени  $t' = t_m + \frac{\tau}{2}$ . Результатом такой процедуры будет уравнение

$$\begin{aligned} (\hat{y}_n - y_n)h &= \\ &= \tau \left[ \sigma(k_{n-1/2} \frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h} - k_{n+1/2} \frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}}{h}) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \sigma)(k_{n-1/2} \frac{y_{n-1} - y_n}{h} - k_{n+1/2} \frac{y_n - y_{n+1}}{h}) \right] + \Phi_n. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Осталось вычислить интегралы, входящие в (2.10), (2.12). Будем считать для общности, что функции  $\lambda(x, t)$  и  $f(x, t)$  всюду непрерывны, за исключением узла  $x_n$ .

Если воспользоваться формулой трапеций, то получим

$$k_{n+1/2} = \frac{1}{\frac{1}{h} \left( \frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) \frac{h}{2}} = \frac{2\lambda_n \lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}},$$

а если использовать формулу средних, то выражение для  $k_{n+1/2}$  будет следующим:

$$k_{n+1/2} = \frac{1}{\frac{1}{h} \left( \frac{1}{\lambda_{n+1/2}} \right) h} = \lambda_{n+1/2} \approx \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2}.$$

Аналогично определяем коэффициент  $k_{n-1/2}$ .

Величина  $\Phi_n$  может быть найдена согласно выражению

$$\Phi_n = \tau \frac{h}{2} (f_{n-1/2} + f_{n+1/2}).$$

Разностная схема (2.14) представляет собой линейную систему с трехдиагональной матрицей, которая решается методом прогонки.

Можно показать, что схема устойчива при условии

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\tau} \min \frac{h^2}{k}. \quad (2.15)$$

Приведем результаты по сходимости разностного решения к точному.

Будем считать, что функции  $\lambda(x, t)$  и  $f(x, t)$ , а также их первые и вторые производные кусочно-непрерывны, причем точки разрыва неподвижны. Выберем неравномерную сетку, такую, чтобы узлы попадали на точки разрыва. Тогда наилучшая схема (2.14) при выполнении условия устойчивости (2.15) равномерно сходится на указанной сетке с точностью  $O(\tau^p + h^2)$ , причем  $p = 2$  при весе  $\sigma = \frac{1}{2}$  и  $p = 1$  при  $\sigma \neq \frac{1}{2}$ .

В приложениях часто приходится формулировать задачу в криволинейных координатах: цилиндрических или сферических. В этом случае общий вид уравнения следующий:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r}(r^p F) + f(r, t), \quad (2.16)$$

$$F = -\lambda(r, t) \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (2.17)$$

В уравнении (2.16)  $p = 0, 1, 2$  для плоской, цилиндрической и сферической геометрии соответственно.

Применим интегро-интерполяционный метод для получения наилучшей схемы. Для этого проинтегрируем уравнение (2.16) по ячейке, аналогичной той, которая представлена на рис. 1.2:

$$\begin{aligned} & \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} r^p dr \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} \frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r}(r^p F) r^p dr + \\ & + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} f(r, t) r^p dr, \end{aligned}$$

или

$$\int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} (\hat{u} - u) r^p dr = \int_{t_m}^{t_{m+1}} (r_{n-1/2}^p F_{n-1/2} - r_{n+1/2}^p F_{n+1/2}) dt + \\ + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{r_{n-1/2}}^{r_{n+1/2}} f(r, t) r^p dr.$$

Выполнив те же вычисления, которые привели к формуле (2.9), получим

$$(\hat{y}_n - y_n) V_n = \tau \left[ \sigma (r_{n-1/2}^p \hat{F}_{n-1/2} - r_{n+1/2}^p \hat{F}_{n+1/2}) + \right. \\ \left. + (1 - \sigma) (r_{n-1/2}^p F_{n-1/2} - r_{n+1/2}^p F_{n+1/2}) \right] + \Phi_n, \quad (2.18)$$

где

$$V_n = \frac{1}{p+1} (r_{n+1/2}^{p+1} - r_{n-1/2}^{p+1}).$$

Потоки  $\hat{F}_{n-1/2}$ ,  $\hat{F}_{n+1/2}$ ,  $F_{n-1/2}$ ,  $F_{n+1/2}$  вычисляем аналогично (2.11), (2.13).

Подставляя в (2.18) выражения для потоков, получаем уравнение, подобное (2.14):

$$(\hat{y}_n - y_n) V_n = \\ = \tau \left[ \sigma (r_{n-1/2}^p k_{n-1/2} \frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h} - r_{n+1/2}^p k_{n+1/2} \frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}}{h}) + \right. \\ \left. + (1 - \sigma) (r_{n-1/2}^p k_{n-1/2} \frac{y_{n-1} - y_n}{h} - r_{n+1/2}^p k_{n+1/2} \frac{y_n - y_{n+1}}{h}) \right] + \Phi_n. \quad (2.19)$$

Величины  $k_{n-1/2}$ ,  $k_{n+1/2}$ ,  $\Phi_n$  вычисляем так же, как это описано выше. Высказанные ранее замечания относительно сходимости приближенного решения справедливы и для данного случая.

Далее выполним интегро-интерполяционным методом аппроксимацию граничного условия третьего рода типа (2.1) для уравнения (2.6). Запишем данное условие в виде

$$F(0, t) = \gamma u(0, t), \quad (2.20)$$

где

$$F(0, t) = -\lambda(0, t) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Выберем ячейку  $[0, x_{1/2}; t_m, t_{m+1}]$ . Проинтегрируем уравнение (2.8) по выбранной ячейке:

$$\int_0^{x_{1/2}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} \frac{\partial u}{\partial t} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_0^{x_{1/2}} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_0^{x_{1/2}} f(x, t) dx,$$

или

$$\int_0^{x_{1/2}} (\hat{u} - u) dx = \int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_0 - F_{1/2}) dt + \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_0^{x_{1/2}} f(x, t) dx. \quad (2.21)$$

Вычисляя интегралы каким-либо численным методом (например, методом трапеций) и учитывая, что согласно (2.20) и (2.11)

$$\hat{F}_0 = \gamma \hat{y}_0, \quad \hat{F}_{1/2} = k_{1/2} \frac{\hat{y}_0 - \hat{y}_1}{h},$$

получаем разностный аналог краевого условия в виде, представленном выше:

$$\alpha_0 \hat{y}_0 + \alpha_1 \hat{y}_1 = \beta_0.$$

В практике математического моделирования значительное место занимают задачи, описываемые квазилинейными уравнениями. Выпишем квазилинейный вариант уравнения (2.6), в котором введем зависимость коэффициента  $\lambda$  и функции  $f$  от искомого решения  $u$ :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(x, t, u) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + f(x, t, u). \quad (2.22)$$

Для решения таких уравнений обычно используют неявные схемы. Основываясь на (2.14), выпишем чисто неявную схему для (2.22) в линейном и нелинейном вариантах, приводящих к различным алгоритмам реализации. При  $\sigma = 1$  имеем в линейном случае

$$\begin{aligned}
(\hat{y}_n - y_n)h &= \\
&= \tau \left( k_{n-1/2} \frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h} - k_{n+1/2} \frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}}{h} \right) + \varphi_n,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

в нелинейном случае

$$\begin{aligned}
(\hat{y}_n - y_n)h &= \\
&= \tau \left( \hat{k}_{n-1/2} \frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h} - \hat{k}_{n+1/2} \frac{\hat{y}_n - \hat{y}_{n+1}}{h} \right) + \hat{\varphi}_n.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Обе эти схемы абсолютно устойчивы и имеют погрешность аппроксимации  $O(\tau + h^2)$ .

В линейном варианте (2.23) коэффициенты  $k_{n-1/2}$ ,  $k_{n+1/2}$ ,  $\varphi_n$  берем с предыдущего известного слоя, т. е. они известны, и трудностей с реализацией схемы не возникает – решение ищем прогонкой. В нелинейном варианте (2.24) указанные коэффициенты относят к слою, на котором ищется решение, т. е. коэффициенты неизвестны и система разностных уравнений (2.24) оказывается нелинейной. Решать данную систему можно методом последовательных приближений (простых итераций) и методом Ньютона.

При использовании последовательных приближений строят итерационную процедуру, причем значения  $k_{n-1/2}$ ,  $k_{n+1/2}$ ,  $\varphi_n$  берутся с предыдущей  $(s - 1)$ -й итерации, а в качестве начального приближения используются коэффициенты с предыдущего слоя, т. е. рассчитывают по сеточной функции  $y_n$ :

$$\begin{aligned}
(\hat{y}_n^{(s)} - y_n)h &= \\
&= \tau \left( \hat{k}_{n-1/2}^{(s-1)} \frac{\hat{y}_{n-1}^{(s)} - \hat{y}_n^{(s)}}{h} - \hat{k}_{n+1/2}^{(s-1)} \frac{\hat{y}_n^{(s)} - \hat{y}_{n+1}^{(s)}}{h} \right) + \hat{\varphi}_n^{(s-1)}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

В процессе итераций решение  $\hat{y}_n^{(s)}$  (2.25) находят методом прогонки.

При использовании метода Ньютона схему (2.24) линеаризуют с учетом того, что коэффициенты  $\hat{k}_{n-1/2}$ ,  $\hat{k}_{n+1/2}$  зависят от значений функции в двух узлах:  $\hat{k}_{n-1/2} = \hat{k}(\hat{y}_{n-1}, \hat{y}_n)$ ,  $\hat{k}_{n+1/2} = \hat{k}(\hat{y}_n, \hat{y}_{n+1})$ . Получают следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial \hat{k}_{n-1/2}}{\partial \hat{y}_{n-1}} (\hat{y}_{n-1}^{(s-1)} - \hat{y}_n^{(s-1)}) + \hat{k}_{n-1/2}^{(s-1)} \right] \delta \hat{y}_{n-1}^{(s-1)} - \\
& - \left[ \frac{h^2}{\tau} + \hat{k}_{n-1/2}^{(s-1)} + \hat{k}_{n+1/2}^{(s-1)} - \frac{\partial \hat{k}_{n-1/2}}{\partial \hat{y}_n} (\hat{y}_{n-1}^{(s-1)} - \hat{y}_n^{(s-1)}) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial \hat{k}_{n+1/2}}{\partial \hat{y}_n} (\hat{y}_n^{(s-1)} - \hat{y}_{n+1}^{(s-1)}) - \frac{h}{\tau} \frac{\partial \hat{\phi}_n}{\partial \hat{y}_n} \right] \delta \hat{y}_n^{(s-1)} + \\
& + \left[ \hat{k}_{n+1/2}^{(s-1)} - \frac{\partial \hat{k}_{n+1/2}}{\partial \hat{y}_{n+1}} (\hat{y}_n^{(s-1)} - \hat{y}_{n+1}^{(s-1)}) \right] \delta \hat{y}_{n+1}^{(s-1)} = \\
& = \frac{h^2}{\tau} (\hat{y}_n^{(s-1)} - \hat{y}_n) - \hat{k}_{n-1/2}^{(s-1)} (\hat{y}_{n-1}^{(s-1)} - \hat{y}_n^{(s-1)}) + \\
& + \left. \hat{k}_{n+1/2}^{(s-1)} (\hat{y}_n^{(s-1)} - \hat{y}_{n+1}^{(s-1)}) - \frac{h}{\tau} \hat{\phi}_n^{(s-1)} \right]. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Каждое уравнение записанной системы содержит три неизвестных  $\delta \hat{y}_{n-1}^{(s-1)}$ ,  $\delta \hat{y}_n^{(s-1)}$ ,  $\delta \hat{y}_{n+1}^{(s-1)}$ , которые определяют методом прогонки. После того как система (2.26) решена, очередное приближение ис-комой функции находят по формуле

$$\hat{y}_n^{(s)} = \hat{y}_n^{(s-1)} + \delta \hat{y}_n^{(s-1)}.$$

Отметим, что при использовании нелинейного варианта разностной схемы вычисления можно проводить с большим шагом по времени, чем в линейном случае. Поэтому нелинейная схема оказывается предпочтительнее, несмотря на ее громоздкость и сложность.

## 2.4. Продольно-поперечная схема при решении многомерных уравнений

Рассмотрим построение разностной схемы для уравнения с несколькими независимыми пространственными переменными типа (1.4). Для составления схемы, которая носит название продольно-поперечной, вводят полуцелый слой  $\bar{t} = t_m + \frac{\tau}{2}$ . Схема имеет вид

$$\frac{\bar{y}_{nk} - y_{nk}}{0,5\tau} = A_1 \bar{y}_{nk} + A_2 y_{nk} + \bar{f}_{nk}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\hat{y}_{nk} - \bar{y}_{nk}}{0,5\tau} = A_1 \bar{y}_{nk} + A_2 \hat{y}_{nk} + \bar{f}_{nk}, \quad (2.28)$$

причем разностные операторы  $A_1, A_2$  определяются следующими выражениями:

$$A_1 y_{nk} = \frac{a}{h_1^2} (y_{n-1, k} - 2y_{nk} + y_{n+1, k}),$$

$$A_2 y_{nk} = \frac{a}{h_2^2} (y_{n, k-1} - 2y_{nk} + y_{n, k+1}),$$

т. е. операторы  $A_1, A_2$  действуют по координатам  $x$  и  $z$ .

Схема (2.27), (2.28) реализуется следующим образом. Вначале находят решение на полуцелом слое согласно (2.27). В системе линейных уравнений (2.27) с трехдиагональной матрицей неизвестными являются величины  $\bar{y}_{nk}$ , которые находят прогонкой по индексу  $n$  (по координате  $x$ ) для каждого фиксированного значения индекса  $k$ . При найденном решении  $\bar{y}_{nk}$  система (2.28) также является линейной системой уравнений с трехдиагональной матрицей, в которой неизвестными выступают  $\hat{y}_{nk}$ . Решение  $\hat{y}_{nk}$  находят прогонкой по индексу  $k$  (по координате  $z$ ) для каждого индекса  $n$ .

Относительно аппроксимации и устойчивости продольно-поперечной схемы следует отметить, что согласно [1] схема (2.27), (2.28) равномерно и безусловно устойчива по начальным данным и по правой части и аппроксимирует задачу на равномерных сетках с погрешностью  $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$ .