

Понятие модели и моделирования. Общая классификация моделей. Требования к моделям.	
Примеры из конкретных предметных областей.	4
Схема вычислительного эксперимента.	6
Понятие математической модели. Функции моделей. Источники погрешностей при построении модели, алгоритмизации и программировании.....	7
Понятие корректности постановки задач. Привести примеры некорректно поставленных и слабо обусловленных задач и неустойчивых алгоритмов.	8
Общая классификация методов построения математических моделей.	10
Построение математических моделей на основе законов природы. Привести примеры.	11
Построение математических моделей на основе вариационных принципов. Привести примеры. 12	
Построение математических моделей выстраиванием иерархии сверху - вниз и снизу - вверх.	
Привести примеры.....	14
Построение математических моделей методом аналогий. Привести примеры.	15
Понятие ОДУ. Сведение ОДУ произвольного порядка к системе ОДУ первого порядка. Привести примеры.....	17
Постановка задачи Коши для системы ОДУ первого порядка.....	17
Постановка краевой задачи для ОДУ.	18
Задача Коши для ОДУ. Метод Пикара при решении ОДУ. Привести пример.	19
Задача Коши для ОДУ. Метод Рунге - Кутты 2-го порядка точности. Оценка точности.	20
Задача Коши для ОДУ. Метод Рунге - Кутты 4-го порядка точности. Оценка точности.	23
Задача Коши для ОДУ. Метод Адамса.....	24
Задача Коши для ОДУ. Неявные численные методы (Эйлера, трапеций, Гира).	25
Краевая задача для ОДУ. Метод коллокаций. Привести пример.....	27
Краевая задача для ОДУ. Интегральный метод наименьших квадратов. Привести пример.	29
Краевая задача для ОДУ. Дискретный метод наименьших квадратов. Привести пример.....	31
Краевая задача для ОДУ. Метод Галеркина. Привести пример.	32
Краевая задача для ОДУ. Сходимость разностного решения к точному на примере линейного уравнения 2-го порядка.	34
Краевая задача для ОДУ. Получение интегро- интерполяционным методом разностной схемы для уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода.....	38
Краевая задача для ОДУ. Наилучшая разностная схема для уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода в цилиндрических координатах.....	42
Метод прогонки для реализации разностных схем с краевыми условиями 3-го рода.	46
Краевая задача для ОДУ. Методы решения квазилинейных разностных схем для уравнений 2-го порядка.....	47
Уравнения в частных производных. Области применения. Классификация уравнений второго порядка. Общие понятия о методах решения.....	49

Уравнения в частных производных. Постановка задач Коши, краевых и смешанных краевых задач. Привести примеры с краевыми условиями 1-го, 2-го и 3-го родов.....	51
Уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Основные понятия метода конечных разностей. Понятие о явных и неявных схемах.	53
Квазилинейные уравнения в частных производных. Получение разностной схемы для одномерного параболического уравнения с краевыми условиями 3-го рода интегро-интерполяционным методом.....	57
Решение разностных схем для квазилинейных уравнений в частных производных- метод простых итераций и метод Ньютона.....	59
Методы повышения порядка аппроксимации краевых условий 2-го и 3-го родов (интегро-интерполяционная процедура, разложение в ряд Тейлора, введение фиктивного узла).	62
Понятие невязки для разностных схем. Привести пример вычисления невязки для неявной схемы.	63
Свойство аппроксимации разностных схем для уравнений в частных производных.....	65
Понятие устойчивости разностных схем по начальным данным и правой части. На основе принципа максимума исследовать устойчивость явной и неявной схем для уравнения параболического типа.....	66
На основе метода разделения переменных исследовать устойчивость четырехточечных явной и неявной разностных схем для уравнения параболического типа.	68
На основе метода разделения переменных исследовать устойчивость шести-точечной разностной схемы для уравнения параболического типа.....	70
Уравнения в частных производных. Сходимость разностных схем. Теорема о сходимости разностного решения к точному.....	73
Метод продольно-поперечной прогонки для решения многомерных уравнений в частных производных.	75
Локально-одномерный метод для решения многомерных уравнений в частных производных....	78
Вероятностный метод для решения многомерных уравнений в частных производных.....	78

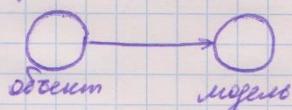
Понятие модели и моделирования. Общая классификация моделей. Требования к моделям. Примеры из конкретных предметных областей.

Моделирование

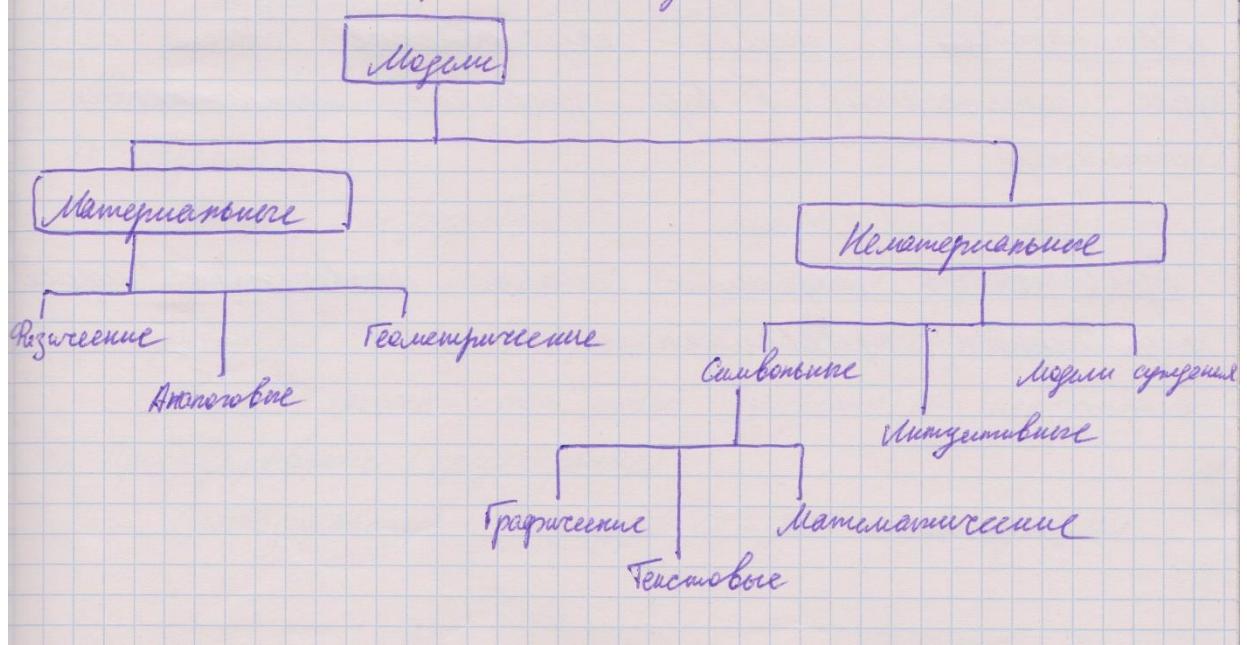
1. Понятие модели и моделирования. Общая классификация моделей. Требования к моделям. Примеры из конкретных предметных областей.

Модель - это представление объекта (системы, процесса, ситуации) в виде, отражающем один и способа его функционирования (существование).

Моделирование - метод научного исследования, основанный на анализе реального объекта (системы, процесса) модели и исследовании в дальнейшем конкретной модели.



Общая классификация моделей



Геометрические модели - линейки
Ризие модели - беспроизводное представление человека
функционирования объектов (например, модель самолета
в аэротрубе)

Аналоговые - один процесс заменяется другим
(например, существующий процесс передачи消息. Результат
заменяется протеканием электрического тока. Сформированный
электрический импульс и определяет появление消息а)

Модель управления - мировоззрение
Инициативные - например, в модели протекания процессов,
протодирующие исходя из определенной ситуации, когда человек
перестает работать).

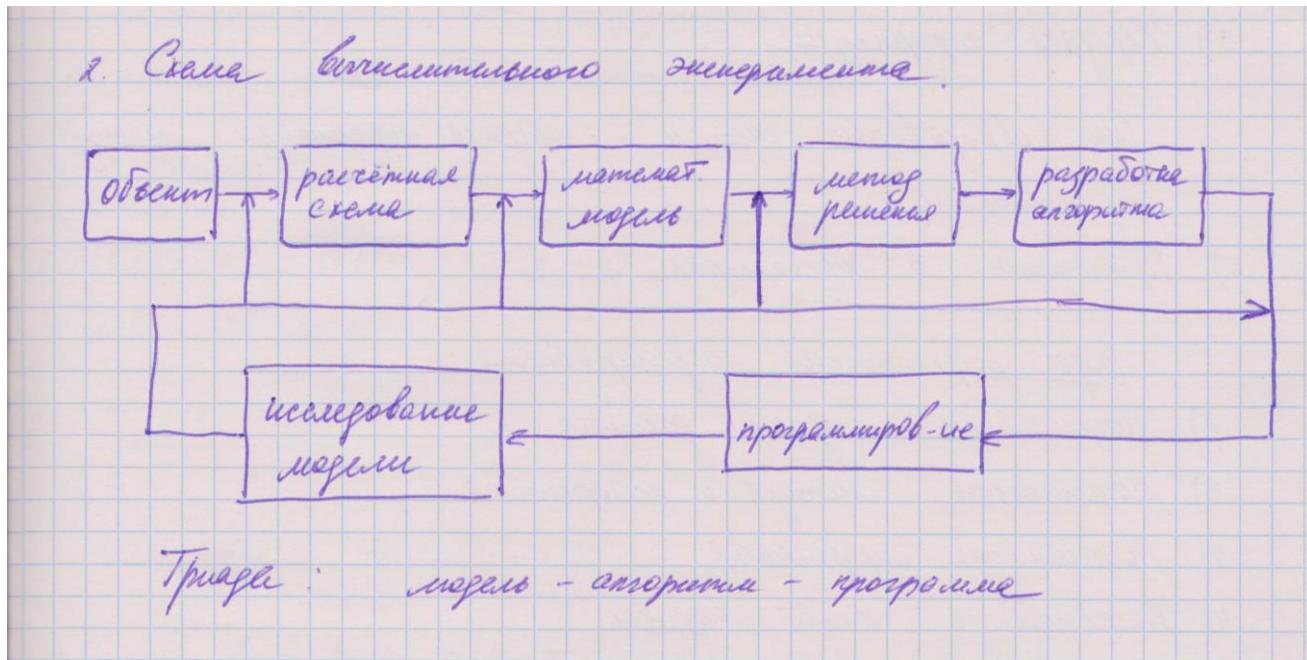
Графические - рисунки, диаграммы, схемы

Программные - программы

Математические модели - представление объекта на
基础上 математики в виде уравнений, математических
сообщений.

Адекватность модели - степень соответствия модели
представлением предъявляемым.

Схема вычислительного эксперимента.



Понятие математической модели. Функции моделей. Источники погрешностей при построении модели, алгоритмизации и программировании.

3. Понятие математической модели. Понятие модели, методами построения при построении модели, алгоритмизация и программирование.

Математическая модель - это представление объекта на языке математики в виде уравнений, мат. соотношений

Понятие модели:

1) Познание

Чтобы, тем разрабатывать модели, нужно получать информационное описание (математическое изображение) расстояний или из экспериментов. Чем более детально описывается процесс - тем больше проблем для инженеров.

2) Прогнозирование (преподавание)

Прогнозирование используется для оптимизации.

3) Перехода информации

При образовании систем - перехода информации между подсистемами.

4) Применение в перспективах.

Виды погрешностей моделирования:

- 1) Погрешность исходных данных
- 2) Погрешность метода и алгоритмов
- 3) Погрешность вычисления
- 4) Погрешность самой модели

Понятие корректности постановки задач. Привести примеры некорректно поставленных и слабо обусловленных задач и неустойчивых алгоритмов.

4. Понятие корректности постановки задач. Привести примеры некорректно поставленных и слабо обусловленных задач и неустойчивых алгоритмов.

Задача называется корректно поставленной, если решение существует, единствено и непрерывно зависит от начального замысла.

Пример некорректно поставленной задачи.

$$y = Ax \quad \delta x \rightarrow \delta y \quad \delta x \rightarrow 0, \delta y \rightarrow 0, \text{ если } \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

Если $\delta x \rightarrow 0$, а δy бесконечное, то это некорректно поставленная задача.

$\delta y = c \delta x$, если c - бесконечное, то задача называется алгебраической.

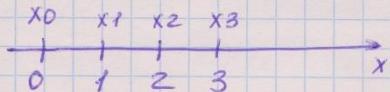
Помимо непрерывной дифференцированной саюи языки, алгоритм
её решения можно представить более наглядными

Пример:

$$u'(x) = -\alpha u, \quad \alpha > 0$$

$$u(x) = u_0 e^{-\alpha x}$$

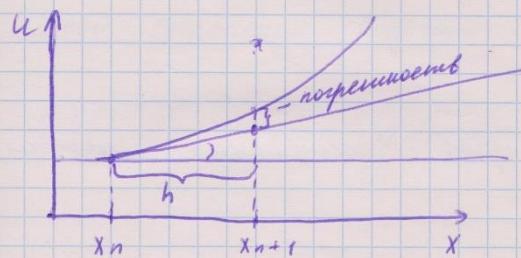
$$\begin{aligned} du/dx &= -Lu \\ du/u &= -Ldx \\ \ln(u) &= -Lx + C \\ u &= C \cdot \exp(-Lx) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{т.к. } u(0) &= u_0 \\ u_0 &= C \cdot [\exp(-L \cdot 0) \text{ стремится к } 1] \end{aligned}$$

$$u(x) \rightarrow y, \quad u(x_i) \rightarrow y_i$$

$$y_{n+1} = y_n + h u_n' = y_n + h (-\alpha y_n) = y_n (1 - h\alpha)$$

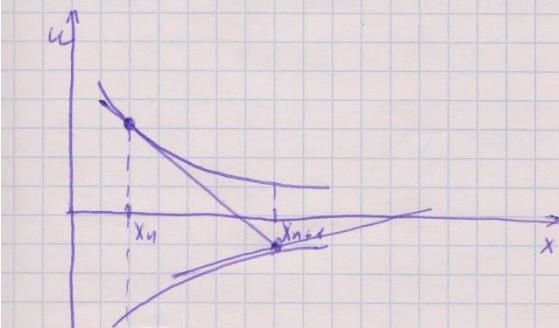


Если $(1 - h\alpha) < 0$ возникает "выбегающее" решение.

Чтобы этого избежать, необходимо ограничение на h

$$1 - h\alpha > 0 \iff h < \frac{1}{\alpha}. \quad \text{Получим стабильное}$$

геморрагическое решение

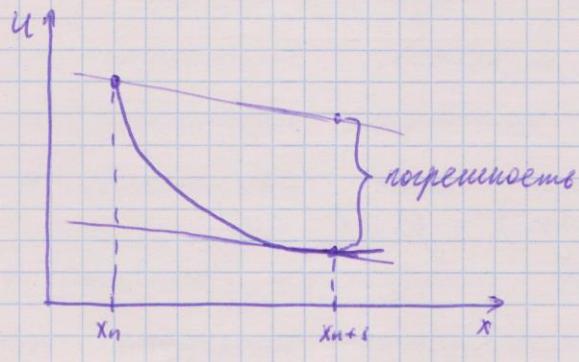


$$y_{n+1} = y_n + h u'_{n+1} = y_n + h (-\alpha y_{n+1})$$

$$y_{n+1} (1 + \alpha h) = y_n$$

$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \alpha h}$ — глубокое решение, но циклическое решение не обнаружим

Схема абсолютного устойчивости:



Общая классификация методов построения математических моделей.

5. Общая классификация методов построения математических моделей.

Классификация: Метод:

- 1) На основе фундаментальных законов природы
- 2) Из барьерного принципа (их использования. Принцип Гамильтона, принцип Вернера)
- 3) Восстравивание иерархии моделей (струйки пресла, замену дифференциал)
- и) метод аналогии.

Построение математических моделей на основе законов природы.
Привести примеры.

6. Построение математических моделей на основе законов природы. Привести примеры.

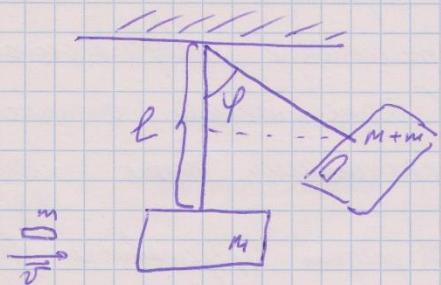
Базируется на хорошо проверенных законах. Есть уверенность, что это не ошибки \Rightarrow на данном этапе.

(Пример: падающее в брусья)
Пример: Падающий массой m листок со скоростью v и застревает в брусье массой M . Найти скорость бруса с которой падеет спущенное брусье

Запись сохранения импульса:

$$mv = (m+M)V, \text{ замена}$$

Запись сохранения энергии



$$\frac{m+M}{2}V^2 = (M+m)gl(1 - \cos\varphi)$$

к примеру, предложенное нации спортивных луков.

$v = \sqrt{\frac{2(M+m)gl(1 - \cos\varphi)}{m}}$, однако, эта формула не учитывает потери энергии на разогрев пути + трещи, преодоление сопротивления воздуха

$$v = \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi)}$$

$$v = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi)}$$

Построение математических моделей на основе вариационных принципов. Привести примеры.

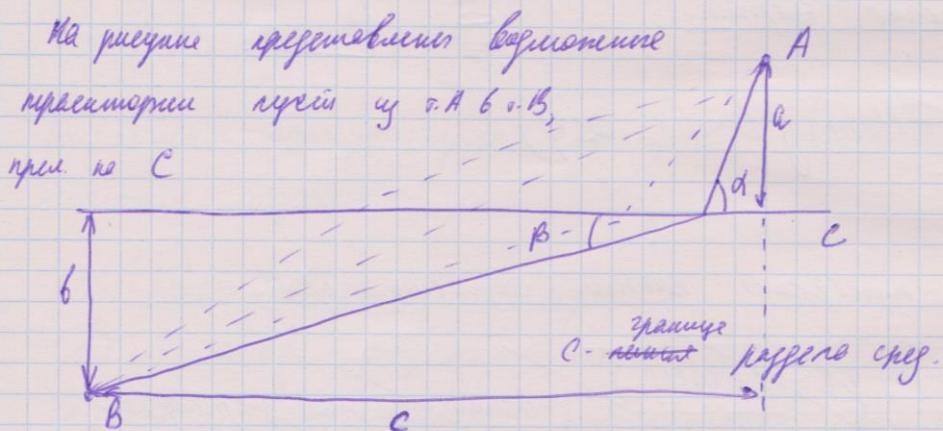
7. Построение математических моделей на основе вариационных принципов. Привести примеры.

Начну с формулировки вариационного принципа.

Вариационное принципо предполагает собой одни универсальные обобщение и гласит, что из всех возможных вариантов есть коечий определяющий, что улучшает определенное значение.

Пример:

применение вариационного принципа Ферма (поступление в геометрическое описание, согласно которому свет выбирает прямой путь между двумя точками)



Свет, вылетающий из A , движется со скоростью в первом среде, преломляется и движется во втором среде со скоростью в B .

Если d - длина путь пути, а $\beta(d)$ - длина его прохождения

то время прохождения из A в B равно

$$f(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a} \sin \alpha} + \frac{b}{\sqrt{b} \sin(\alpha)}$$

Числовые минимумы функции $f(\alpha)$ вблизи нуля.

$$\frac{a \cos \alpha}{\sqrt{a} \sin \alpha} + \frac{b \cos \alpha}{\sqrt{b} \sin(\alpha)} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0$$

Числовое значение производной $f'(\alpha)$ вблизи нуля, это

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \neq 0$$

или

$$\frac{a \cos \alpha}{\sqrt{a} \sin^2 \alpha} + \frac{b \cos \beta(\alpha)}{\sqrt{b} \sin^2 \beta(\alpha)} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \quad (1)$$

т.к. $\forall \alpha$ справедливо $c = \frac{a}{f(\alpha)} + \frac{b}{f(\beta(\alpha))}$, получаем

результат и получаем:

$$\frac{a}{\sin^2 \alpha} + \frac{b}{\sin^2 \beta(\alpha)} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \quad (2)$$

(2) сокращено с (1) получаем, что

$$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{a}} = \frac{\cos \beta(\alpha)}{\sqrt{b}} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{a}} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta(\alpha)}$$

Причины гармоничности

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} L(g, \dot{g}) dt$$

Q - закон малых колебаний

Конечно гармоники возможны

если функция L имеет гладкие производные (L - кин.).

Напоминание

$$L = T - U = \frac{m \dot{x}^2}{2} - k \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{уравнение Эйлера}$$

Получим закон колебаний

$$\ddot{x} = -\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} x = -kx$$

Построение математических моделей выстраиванием иерархии сверху - вниз и снизу - вверх. Привести примеры.

8. Построение математической модели структурированной иерархии сверху - вниз и снизу - вверх. Привести примеры.

Лишь в редких случаях удобно и оправдано построение мат. модели во всей целиком, с учетом всех существующих для изучения факторов. Естественен изнач "от частного к общему", а следующий шаг дается после изучения общего не особых аномалий модели. При этом формируется иерархия моделей, например из нескольких обобщенных предложений.

Пример:

Построение модели многоступенчатого ракеты.

Пусть m_i - общая масса i -го ступени.

λm_i - соответствующее спускающее масса $((1-\lambda)m_i)$ - масса = m_p - масса полезной нагрузки

Число ступеней 3

$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$ - общ. масса ракеты.

Рассл. момент, когда масса m_0 попадет в 1-ю ступень

$$\hat{m}_0 = m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3$$

Тогда максимальная скорость по прошлой формуле (с небольшими изменениями) равна:

$$v_t = u \ln \left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right), \text{ где } u - \text{скорость выброса}$$

После достижения m_0 для отображения и вычисления второй ступени и, связанной с этим моделью, ее можно

точного вторичного колеса второго ступеня, иначе не смыслило использовать две конструкции модели. Тогда выражение для момента передачи так:

$$d_2 = d_1 + \ln \left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right)$$

Эту зависимость можно представить в виде

В случае $n=3$

$$\frac{d_3}{n} = \ln \left(\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right) \cdot \left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right) \cdot \left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right) \right)$$

$$\text{Если известно } d_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}, d_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}, d_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p},$$

то

$$\frac{d_3}{n} = \ln \left(\left(\frac{d_1}{1 + \lambda(d_1 - 1)} \right) \left(\frac{d_2}{1 + \lambda(d_2 - 1)} \right) \left(\frac{d_3}{1 + \lambda(d_3 - 1)} \right) \right)$$

Максимальное значение при $d_1 = d_2 = d_3 = d$, где

$$\text{для } 3 \quad d = \frac{1-\lambda}{P-\lambda}, \quad P = e^{-\frac{d_3}{n}}$$

$$d^3 = \frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda} \right)^3$$

Построение цепочки моделей подвело к таким выводам. В маш. моделировании обычно применяется метод «от момента к приводу» (сверху-вниз)

Построение математических моделей методом аналогий. Привести примеры.

9. Построение математических моделей методом аналогий. Привести примеры.

В огромном количестве случаев при построении математических моделей нового - либо обобщение либо изограниченное применение заимствованного ранее или вариационные принципы, которые он подразумевает, либо

с м.з. наших симметричных задач заслуживает бросить
Одним из интереснейших направлений в решении подобных
задач является использование методов с учетом уп-
руких анизотропий.

Пример:

Мы хотим, например, как изменяется концентрация
вещей.

$n(t, x)$ — конц. вещей, x — бирюса.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial x} = -d(x)n \quad d(x) — \text{коэф. смертности.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{или } \frac{\partial n}{\partial t} = dn, \quad d — \text{коэф. рождества} \\ n(t) = n_0 e^{at} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial n}{\partial t} = -\beta n - \cancel{\text{переходы}} \text{распад} \end{array} \right\}$$

Краевое условие задачи: $x=0, n(0, b) = \int_{x_1}^{x_2} \beta(0, x) n(0, x) dx$

Это уравнение передает изменение численности населения.

Приложение этого метода.

Понятие ОДУ. Сведение ОДУ произвольного порядка к системе ОДУ первого порядка. Привести примеры.

10. Понятие ОДУ. Сведение ОДУ произвольного порядка к системе ОДУ первого порядка. Привести примеры.

Однинственное ОДУ содержит одно неизвестное первичное. Порядок уравнения определяется порядком производной.

ОДУ - ОДУ для функции от одно переменной.

$$u^{(n)}(x) = f(x, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)})$$

Задано первичных можно составить уравнение $n-20$ порядка и с-ти др-ий 1-го порядка

$$u^{(k)} = u_k$$

$$u_k' = (u^{(k)})' = u^{(k+1)} = u_{k+1}$$

$$\begin{cases} u_k' = u_{k+1} \\ u_{k+1}' = u_{k+2} \\ \vdots \\ u_{n-1}' = f(x, u_0, u_1, \dots, u_{n-2}) \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq n-2 \quad u(x) = u_0(x)$$

Все ур-я 1-го порядка

Постановка задачи Коши для системы ОДУ первого порядка.

11. Постановка задачи Коши для системы ОДУ 1-го порядка

В общем случае систем ОДУ 1-го порядка единственное

решение:

$$u_k'(x) = f_k(x, u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$$

$$k = 1, n$$

Задача Коши:

Из системы общих решений системы ОДУ выделяется единственное решение. В задаче Коши все же должно

для выражения частного решения ставится в однородные.

$$u_k(\xi) = \eta_k, k = \overline{1, n}$$

Постановка краевой задачи для ОДУ.

12. Постановка краевой задачи для ОДУ.

Общий вид систем ОДУ 1-го порядка.

$$u'_k(x) = f(x, u_1, u_2, \dots, u_n), k = \overline{1, n}$$

$$u' = u_1, u'' = u_2 \leftarrow \text{пример.}$$

||
V

$$a(x) u'_2(x) + b(x) u_2(x) + c(x) u_1(x) + d(x) u(x) = f(x)$$

Две ОДУ сужают 2 постепенные задачи.

1) Задача Коши (или II)

2) Краевая задача:

Доп. условия ставятся более, чем в 2 \sqrt{n} шагах.

М. б. постепенное для ур. и более, чем 1-го порядка, либо для систем 1-го порядка.

Краевая задача — задача о нахождении решения ОДУ, удовлетворяющей краевым условиям в концах интервала или на границе области.

Задача Коши для ОДУ. Метод Пикара при решении ОДУ. Привести пример.

13. Задача Коши для ОДУ. Метод Пикара при решении ОДУ. Привести пример.

By Задача Коши: an n.

Метод Пикара является приближенным аналитическим методом.

Дана задача Коши, проинтегрировав, получаем уравнение

$$u'(x) = f(x, u)$$

$$u(y) = u(0) + \int_0^x f(t, u(t)) dt$$

Итерац.-схема Пикара — задача нал. уравн.,
перемещающая в прямую тасмъ и итерационно решает
 $\left. \begin{array}{l} u - \text{аналит.} \\ y - \text{приблжн.} \end{array} \right\}$ S - итерация

$$y^{(s)}(x) = u(0) + \int_0^x f(t, y^{(s-1)}(t)) dt ; y^{(0)}(t) = u(0)$$

Метод сходится и это можно доказать.
Число суп-тас:

$$\begin{aligned} a < x < b \\ c \leq u \leq d \end{aligned} \quad \int \text{запасъ ограничена}$$

Ф-ия $f(x, u(t))$ по 2-ому арг-му уравн. должно липшица

$$|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|$$

нешение липшица

$$Z^{(s)}(x) = |u(0) - y^{(s)}(x)| - \text{погрешность}$$

$$\text{Когда } s \rightarrow \infty \quad Z^{(s)} \rightarrow 0.$$

Пример!

$$u'(x) = x^2 + u^2$$

$$u(0) = 0$$

$$y^{(1)}(x) = 0 + \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$$

$$y^{(2)}(x) = 0 + \int_0^x \left(t^2 + \left[\frac{t^3}{3} \right]^2 \right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{9 \cdot 7}$$

$$y^{(3)}(x) = 0 + \int_0^x \left(t^2 + \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{9 \cdot 7} \right]^2 \right) dt = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{21}x^7 + \frac{2}{695}x^{11}$$

Задача Коши для ОДУ. Метод Рунге - Кутты 2-го порядка точности.
Оценка точности.

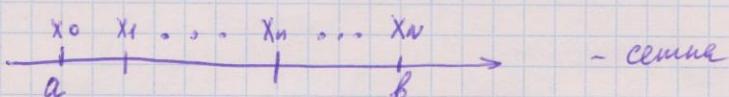
14. Задача Коши для ОДУ. Метод Рунге - Кутты 2-го порядка точности. Оценка точности.

Задача Коши для ОДУ: см II.

Ищем:

$$\int u'(x) = f(x, u)$$

$$u(\xi) = \eta$$



$$W = \{ a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < x_N = b \}$$

$$x_n = a + nh, \quad n = \overline{0, N} \quad - \text{сеть с пост. шагом}$$

$$\text{Решаем } x = a + nh = x_n, \quad h \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

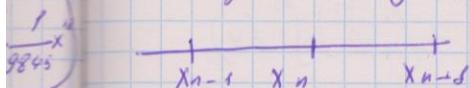
Семейство решений сходится к точному в δx , как $\frac{|u(x_n) - y_n|}{h} \rightarrow 0$

Семорное решение содержит и точку на отрезке $[a, b]$, если оно содержит в начале норм это отрезка.

Дискретное (семорное) решение содержит и точку в первом ряду P , если

$$|u(x_n) - y_n| = O(h^p), \text{ при } h \rightarrow 0$$

Введем схему:



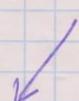
$$u_{n+1} = u(x_{n+1})$$

$$u_{n+1} = u_n + h u'_n + \frac{h^2}{2} u''_n + \frac{h^3}{3!} u'''_n + \dots$$

$$u'_n = u'(x_n) = f(x_n, u_n)$$

$$u''_n = \left. \frac{d f(x, u)}{d x} \right|_{x=x_n} = f'_x(x_n, u_n) + f'_u u'_n = f'_x(x_n, u_n) + f'_u f(x_n, u_n)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t}$$



Члены 2-го порядка:

$$y_{n+1} = y_n + h u'_n + \frac{h^2}{2} u''_n \quad (1)$$

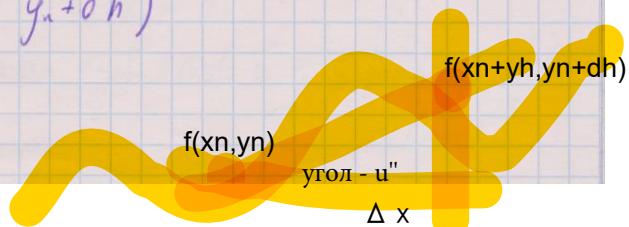
$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} (f'_x + f'_u f) \Big|_{x_n, y_n} \quad (2)$$

$$u''_n = \frac{f(x_n + \beta h, y_n + \delta h) - f(x_n, y_n)}{\Delta x}$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2 \Delta x} f(x_n + \beta h, y_n + \delta h) - \frac{h^2}{2 \Delta x} f(x_n, y_n) =$$

$$= y_n + \beta h f(x_n, y_n) + \alpha h f(x_n + \beta h, y_n + \delta h)$$

$$\therefore \left\{ \beta = 1 - \frac{h}{2 \Delta x}; \alpha = \frac{h}{2 \Delta x} \right\}$$



$$y_{n+1} = y_n + h [\beta f(x_n, y_n) + \alpha f(x_n + \gamma h, y_n + \delta h)]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{погл. б пус тенора:} \\ f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) \end{array} \right\}$$

$$y_{n+1} = y_n + h [\beta f(x_n, y_n) + \alpha (f(x_n, y_n) + f_x' \gamma h + f_u' \delta h)]$$

$$y_{n+1} = y_n + h [(d + \beta) f(x_n, y_n) + \alpha h (f_x' \gamma + f_u' \delta)] \quad (4)$$

Случай (4) имеет нестабильный предел, так как:

$$\begin{cases} d + \beta = 0 \\ d \gamma = \frac{1}{2} \\ \alpha \delta = \frac{1}{2} f(x_n, y_n) \end{cases}$$

тако d - характеристика непр., симметрична на ω та ω'

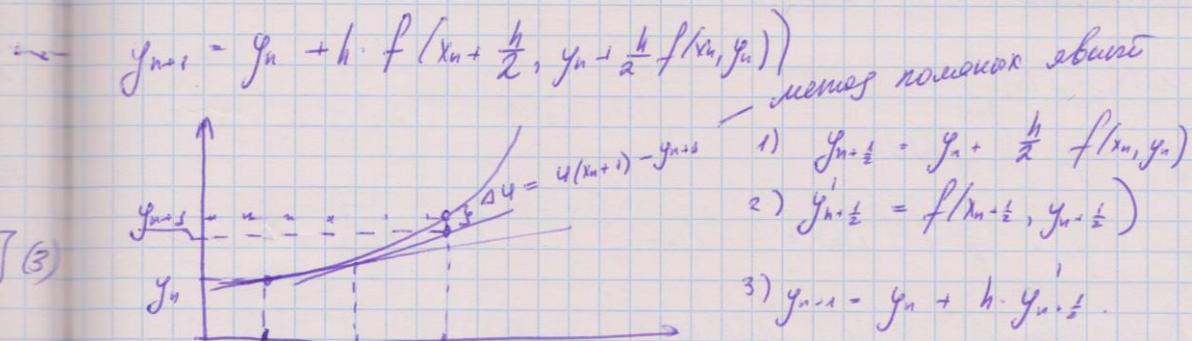
$$\begin{cases} \beta = 1 - d \\ \gamma = \frac{1}{2d} \\ \delta = \frac{1}{2d} f(x_n, y_n) \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left[(1 - d) f(x_n, y_n) + d f \left(x_n + \frac{h}{2d}, y_n + \frac{h}{2d} f(x_n, y_n) \right) \right]$$

Норма погрешности $O(h^2)$

На практике $d = 3$ или $d = \frac{1}{2}$

Геометр. интерпр. при $\sigma = 5$



Задача Коши для ОДУ. Метод Рунге - Кутты 4-го порядка точности.
Оценка точности.

15. Задача Коши для ОДУ. Метод Рунге-Кутты
4-го порядка точности

Метод Рунге-Кутты:

Оценка точности: см 14

10

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

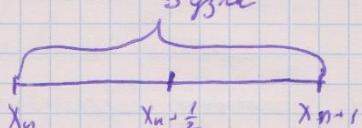
$f(u') = f(x, u) \quad k_1 = f(x_n, y_n)$

$k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1 h}{2})$

$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2 h}{2})$

$k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3 h) \quad \text{Нар. о-ва } O(h^4)$

(5)



$u'(x) = f(x, u)$

$d u'(x) = f'(x) dx$

$u_{n+1} - u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f'(x) dx = \frac{h}{3 \cdot 2} [f(x_n) + 4f(x_{n+\frac{1}{2}}) + f(x_{n+1})]$

Ряд симметрии имеет 4
пер-и погрешн., поэтому Р.К че-пор. име $O(h^4)$

Погрешность $O(h^4)$

$$u'(v) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} [f(x_n) + 4f(x_n + \frac{h}{2}) + f(x_{n+1})] - \text{погреш}$$

Рунге-Куммер 4-го порядка

$$\left\{ y_{n+1} - y_n + \frac{h}{6} f(x_n + \frac{h}{2}) - 2\text{-го порядка} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & P.K. 2\text{-го порядка} - \text{метод трапеций } O(h^2) \\ & P.K. 4\text{-го порядка} - \text{метод Симпсона } O(h^4) \end{aligned} \right\}$$

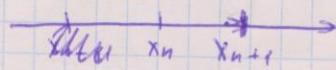
Задача Коши для ОДУ. Метод Адамса.

16. Задача Коши для ОДУ. Метод Адамса.

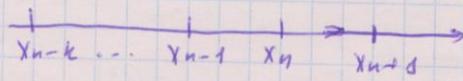
Задача Коши для ОДУ: а) и. б)

Метод Адамса:

Одноступенчатые методы требуют при вычислении следующего шага зная значение предыдущего не предшествующих шагов.



Многоступенчатые методы учитывают ~~занесенные~~ накопленные предыдущие значения.



Самый распространенный среди многочленовых - метод Ньютона.

Идея:

$$u'(x) = f'(x), u(x_0) = F(x_0)$$

$$u_{n+1} = u_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x) dx \quad (1)$$

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} + F(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) +$$

$$+ (x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}) \quad (2)$$

Разделим (2) по (1), получим:

$$y_{n+1} = y_n + h_n F(x_n) + \frac{1}{2} h_n^2 F(x_n, x_{n-1}) + \frac{1}{6} h_n^3 (2h_n - 3h_{n-1}) F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) + \\ + \frac{1}{12} \left(3h_n^2 + 8h_n h_{n-1} + 4h_n h_{n-2} + 6h_{n-1}^2 + 6h_{n-1} h_{n-2} \right) F(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_n)$$

разложение рациональное

$$\text{где } h_n = x_{n+1} - x_n$$

$$h_{n-1} = x_n - x_{n-1}$$

Задача Коши для ОДУ. Неявные численные методы (Эйлера, трапеций, Гира).

17. Задача Коши для ОДУ. Использование методов (Эйлера, трапеций, Гира)

Задача Коши для ОДУ: ан 11.

Некоторые методы:

Метод Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad \text{Сложность: } O(1)$$

Как нетрудно понять, геометрическая интерпретация одного шага метода заключается в том, что решение на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ аппроксимируется касательной $y = y_n + f'(x_n)(x - x_n)$, произведенной в точке (x_n, y_n) к интегральной кривой, проходящей через эту точку.

2. Метод Гравицай:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

Погрешн.: $O(h^2)$

Метод геном таборі:

Приближене б'юсе, як решато урівнення.

Нам підходить $y_{n+1}^{(1)}$?

$$y_{n+1}^{(1)} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(2)})] - \text{так, юзяє фуз}$$

$$x = \Psi(x)$$

$$x^{(q)} = \Psi(x^{(q-1)})$$

$$|\Psi'(\xi)| < 1 \quad -\text{змінне стабільне}$$

3. Метод Гіпа:

$$\frac{3}{2}y_n - 2y_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-2} = hf(x_n, y_n) \quad O(h^2)$$

$$\frac{11}{6}y_n - 3y_{n-1} + \frac{3}{2}y_{n-2} - \frac{1}{3}y_{n-3} = hf(x_n, y_n) \quad O(h^3)$$

Конструктивний метод.



$$y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_k y_{n-k} + b h f(x_n, y_n)$$

a_i і b нах. як параметри

$$\begin{array}{c|c|c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \dots & -(h-1) & 1 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & (-1)^n & (-2)^n & \dots & (-h+1)^n & n \end{pmatrix} & \left| \begin{array}{c} a_1(n) \\ \vdots \\ b(n) \end{array} \right. & = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Краевая задача для ОДУ. Метод коллокаций. Привести пример.

18. Краевая задача для ОДУ. Метод коллокаций.

Привести пример

Краевая задача для ОДУ: см 12.

Метод коллокаций (аппроксимация - приближения)

числ.

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x)$$

или

$$L[u(x)] = f(x) \quad (1)$$

L - оператор $u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x)$; $p(x), q(x), f(x)$ - заданное ф-ии.

Получаем систему уравнений:

краевые условия

$$a \leq x \leq b$$

$$\text{Ra u: } \alpha_0 u(a) + \beta_0 u'(a) = A \int f(x) dx$$

$$\text{Re u: } \alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b) = B \int f(x) dx$$

$u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ - базисные ф-ии лин. нрвнс.)

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k u_k(x)$$

$u_0(x)$ подбирается так, чтобы она удовлетворяла краевые условия.

Все ф-ии u_k , $k = 1, n$ подбираются такими образом, чтобы они удовлетворяли ~~и~~ краевые условия.
 $(A = 0, B = 0)$

Погрешность б.т.:

$$R(x, c_1, c_2, \dots, c_n) = L[y] - f(x) =$$
$$= L[u_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k u_k(x)] - f(x)$$

Возьмем n членов, б.которых погрешность R .

$$R(x, c_1, \dots, c_n) = 0$$

Затем для этих членов решим систему ур-ий, в.которой входят k -член c_1, \dots, c_n .

$$\sum_{k=1}^n L[u_k(x)] = -L[u_0(x)] - f(x), \text{ где } x = x_1, \dots, x_n.$$

x_1, \dots, x_n — точки наименьшего отстояния

Пример:

$$\begin{cases} u'' + (1+x^2)u + 1 = 0 \\ u(-1) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Возьмем } u_k(x) = x^{2k-2}(1-x^2), \quad k=1, 2, \dots$$

Наше решение: $u_1(x)$ и $u_2(x)$.

$$u_0(x) \equiv 0.$$

$$y = c_1(1-x^2) + c_2(x^2-x^4)$$

$$y' = -c_1 \cdot 2x + 2c_2(x-2x^3)$$

$$y'' = -2c_1 + 2c_2(1-6x^2)$$

$$R(x, c_1, c_2) = -2c_1 + 2c_2(1-6x^2) + (1-x^2)[c_1(1-x^2) + c_2(x^2-x^4)] + 1 =$$
$$= 1 - c_1(1+x^4) + c_2(2-11x^2-x^6)$$

Водоизрасходы можно количественные

$$x = 0, \quad x = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{x=0}: \quad 1 - C_3 + 2C_2 = 0$$

$$\underline{x=\frac{1}{2}}: \quad 1 - \frac{17}{16}C_3 - \frac{49}{64}C_2 = 0$$

$$C_3 = 0,957; \quad C_2 = -0,022$$

таким образом

$$y(x) \approx 0,957(1-x^2) - 0,022(x^2-x^4).$$

Краевая задача для ОДУ. Интегральный метод наименьших квадратов. Привести пример.

19. Краевая задача для ОДУ. Интегральный метод наименьших квадратов. Привести пример.

Краевая задача для ОДУ: аи 12.

Метод наименьших квадратов (интегральный):

Ищем

$$u''(x) + p(x)u'(x) + g(x)u(x) = f(x) \quad (1)$$

$$L[u(x)] = f(x) \quad L - \text{оператор } u''(x) + p(x)u'(x) + g(x)u(x).$$

$p(x), g(x), f(x)$ - заданные

Краевые условия:

$$a \leq x \leq b$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{1a} \ u: \quad u(a) + \beta_0 u'(a) = A \\ \text{1b} \ u: \quad \alpha_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = B \end{array} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x) \end{array} \right. \text{ - базисные ф-ии (н. н. н.)}$$

Водоизрасходы базисные ф-ии, удовлетворяющие условиям (2).

$$g = u_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k u_k(x)$$

Справедливое выражение, но есть неравенство $y \leq M$.

$$R(x, c_1, \dots, c_n) = L[y] - f(x) = L[u_0(x)] + \sum_{k=1}^n c_k L[u_k(x)] -$$

$$+ \sum_{k=1}^n L[u_k(x)] - f(x)$$

Нужно, чтобы выражение для R было меньше нуля

$$\int_a^b R^2 dx \rightarrow \min \quad \left. \begin{array}{l} \text{дифференцируем относительно} \\ c_k, k=1, n; \text{ решаем систему} \end{array} \right\}$$

$$\int_a^b R \frac{\partial R}{\partial c_k} dx = 0, \quad k = 1, n$$

Пример:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$u^4 + (1+x^2) u + 1 = 0$$

$$u_1 = 1-x^2$$

$$u_2 = x^2 - x^4$$

$$y = c_1(1-x^2) + c_2(x^2 - x^4)$$

$$y' = -2x c_1 + 2x c_2 - 4x^3 c_2$$

$$y'' = -2c_1 + 2c_2(1-6x^2)$$

Найдем R :

$$R(x, c_1, c_2) = 1 - c_1(1+x^4) + c_2(2-11x^2-x^6)$$

$$\frac{\partial}{\partial c_1} \int_0^1 R^2 dx = 2 \int_0^1 R \frac{\partial R}{\partial c_1} dx = 0 \quad \frac{\partial}{\partial c_2} \int_0^1 R^2 dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_1} \cdot \int_0^1 \left[1 - c_1(1+x^4) + c_2(2-11x^2-x^6) \right] \cdot \left[-1/(1+x^4) \right] dx = 0$$

$$\int_0^1 \left[1 - C_1 (1+x^4) + C_2 (2 - 11x^2 - x^6) \right] \cdot [2 - 11x^2 - x^6] dx = 0$$

$$\frac{68}{45} C_1 + \frac{3548}{1155} C_2 = \frac{5}{4}$$

$$\frac{3548}{1155} C_1 + \frac{63404}{4055} C_2 = \frac{38}{25}$$

$$C_1 = 0,985$$

$$C_2 = -0,098$$

$$y(x) = 0,985 (1-x^2) - 0,098 (x^2-x^4)$$

Краевая задача для ОДУ. Дискретный метод наименьших квадратов.
Привести пример.

20. Краевая задача для ОДУ. Дискретный метод наименьших квадратов. Привести пример.

Краевая задача для ОДУ: см 12

Линейные задачи: см 19.

Дискретный метод наименьших квадратов:

В интегральном смысле мы имеем $\int_0^6 R^2(x, \vec{c}) dx \rightarrow \min$

Интеграл заменяется суммой

Подразделяем N точек на $[a, b]$ x_i : $i = 1, N$

$$\Phi(\vec{c}) = \sum_{i=1}^N R^2(x_i, \vec{c}) \rightarrow \min$$

т. е.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0$$

Вариант из 18.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_n} = 0$$

В примере из 19:

$$\sum_{i=1}^N \left[1 - (1+x_i^4) C_1 + (2 - 10x_i^2 - x_i^6) C_2 \right]^2 \rightarrow \text{мин}$$

Если $N = n$, то метод превращает в метод коллокаций (для фундамент.)
помимо брачно $N > n$.

Дио примера из 19 иллюст.

$$y(x) = 0,9317(1-x^2) - 0,0474(x^2-x^4)$$

Краевая задача для ОДУ. Метод Галеркина. Привести пример.

25. Краевая задача для ОДУ. Метод Галеркина.
Бесстий пример.

Краевая задача для ОДУ : сс 12.

Идеи

$$u''(x) + p(x) u'(x) + g(x) u(x) = f(x)$$

$$L[u(x)] = f(x) \quad (1)$$

L-оператор $(u''(x) + p(x) u'(x) + g(x) u(x))$, $p(x), g(x), f(x) -$ я

Краевые условия:

$$a \leq x \leq b$$

$$\begin{aligned} \Gamma_a u &= \alpha_0 u(a) + \beta_0 u'(a) = A \\ \Gamma_b u &= \alpha_1 u(b) + \beta_1 u'(b) = B \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^n c_k u_k(x) \\ \text{допущение о } u \end{array} \right.$$

Найдем неизвестные, используя свойство:

$$\text{если } \int_a^b f(x) u_k(x) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \infty, \text{ то } f(x) = 0$$

$$\int_0^b R(x, c_1, \dots, c_n) u_k(x) dx = 0, \quad k = 1, n.$$

$$\int_0^b \left(L[u_0(x)] + \sum_{k=1}^n c_k L[u_k(x)] - f(x) \right) u_k(x) dx = 0, \quad k = 1, n$$

$$\sum_{k=1}^n c_k \int_0^b L[u_k(x)] u_k(x) dx = \int_0^b u_k(x) [f(x) - L[u_0(x)]] dx, \quad k = 1, n$$

} u_k нулевое при $x = 0$.
 } u_k — функция, ее конопр. уменьшается вблизи 0 и растет.
 } u_k — базисное ф-ие в небольшом окрестности 0 .

Пример:

$$\begin{cases} u'' + x u' + u = 2x \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

$$u_0(x) = 1-x$$

$$u_1(x) = x(1-x)$$

$$u_2(x) = x^2(1-x)$$

$$u_3(x) = x^3(1-x)$$

$$y(x) = (1-x) + C_1 x(1-x) + C_2 x^2(1-x) + C_3 x^3(1-x)$$

Небольшое:

$$\begin{aligned} R(x, C_1, C_2, C_3) &= (1-4x) + C_1(-2+2x-3x^2) + C_2(2-6x+3x^2-4x^3) \\ &+ C_3(6x-12x^2+4x^3-5x^4) \end{aligned}$$

Дано:

$$\int_0^1 (1-x^2) R(x, \bar{C}) dx = 0 \quad \bar{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$$

$$\int_0^1 (x^2-x^3) R(x, \bar{C}) dx = 0$$

$$\int_0^1 |x^3 - x^4| f(x, \bar{c}) dx = 0$$

Вычислим величина каждого интеграла, подставив
известные коэффициенты для \bar{c} :

$$\begin{cases} 183 C_1 + 63 C_2 + 36 C_3 = -70 \\ 140 C_1 + 106 C_2 + 79 C_3 = -98 \\ 264 C_1 + 252 C_2 + 211 C_3 = -210 \end{cases}$$

Решение:

$$C_1 = -0,209$$

$$C_2 = -0,7894$$

$$C_3 = 0,2090$$

$$y(x) = (1-x) (1 - 0,209x - 0,7894x^2 + 0,209x^3)$$

Краевая задача для ОДУ. Сходимость разностного решения к точному на примере линейного уравнения 2-го порядка.

22. Краевая задача для ОДУ. Сходимость разностного решения к точному на примере линейного уравнения 2-го порядка.

Краевая задача для ОДУ: см 12

Лин. уравнение 2-го порядка:

$$\begin{cases} u''(x) - p(x) u'(x) = f(x) \\ u(a) = d \\ u(b) = \beta \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

Разностного метода: нах. для каждого промежуточн. из уравнения заменяется разностным выражением. Получается СЛАУ для систем коэффициентов ~~и~~ от уравнений.

Погрешн. в схеме первого порядка не доказ.

Задача: u'' разностно.

$$u''(x) = \frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} u''(\xi)$$

$x_{n-1} \leq \xi \leq x_{n+1}$

~~Возьмем~~ $\frac{h^2}{12} u''(\xi)$

Наглядность

$$\frac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} u''(\xi) - p_n u_n = f_n \quad | \cdot h^2$$

$$u_{n-1} - (2 + p_n h^2) u_n + u_{n+1} = h^2 f_n + \frac{h^4}{12} u''(\xi) \quad (1)$$

Если отбросить $\frac{h^4}{12} u''(\xi)$, то ошибка получится h^2

поправ.

$$\begin{cases} u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} \\ u_{n-1} - (2 + p_n h^2) u_n + u_{n+1} = h^2 f_n \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y_0 = d \\ y_N = \beta \end{cases}$$

Решаем методом прогонки.

Решение однородным и не однородное

Соединение в норму?

$$Z_n = Y_n - U_n \quad - \text{погрешность}$$

Если $|Z_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то решение соединение в норму
искусственное ибо это неизвестно погрешность решения

Если разностное решение аппроксимировано гладко и
составна гладкостью, то решение соединение в норму

Возьмем из (2) (1)

$$Z_{n-1} - (2 + p_n h^2) Z_n + Z_{n+1} = - \frac{h^4}{12} u''(\xi)$$

$$(2 + p_n h^2) Z_n \leq Z_{n-1} + Z_{n+1} + \frac{h^4}{12} u''(\xi)$$

Можно сумма членов ~~меньше~~ сумма членов

$$(2 + p_n h^2) |Z_n| \leq |Z_{n-1}| + |Z_{n+1}| + \left| \frac{h^4}{12} u''(\xi) \right|$$

Возьмем норму X_m с максимумом погрешности

$$(2 + p_m h^2) |Z_m| \leq |Z_{m-1}| + |Z_{m+1}| + \left| \frac{h^4}{12} u''(\xi) \right|$$

и т.к. $|Z_m| = \max$.

$$(2 + p_m h^2) |Z_m| \leq 2 |Z_m| + \left| \frac{h^4}{12} u''(\xi) \right|$$

$$|Z_m| \leq \left| \frac{h^2}{12 p_m} u''(\xi) \right| \quad \text{При } h \rightarrow 0 \quad |Z_m| \rightarrow 0.$$

Чисел ищем согласно, т.к.

погрешность $\rightarrow 0$ со скоростью h^2

Несколько пропущено:

$$A_i x_{i-3} + B_i x_i + C_i x_{i+3} = F_i \quad (1)$$

Задаем уравнение: $x_i = \eta_{i+3} x_{i+3} + \xi_{i+3}$ (2)

Тогда $x_{i-3} = \eta_i x_i + \xi_i$, т.е. $x_{i-3} = \eta_i \eta_{i+3} x_{i+3} + \eta_i \xi_{i+3} + \xi_i$ (3)

Подставляем (2) и (3) в (1)

$$x_{i+3} \cdot (A_i \eta_{i+3} \eta_i + B_i \eta_{i+3} + C_i) + A_i \eta_i \xi_{i+3} + A_i \xi_i + B_i \xi_{i+3} - F_i = 0$$

тогда (9) = 0 независимо от x_{i+3} , предполагаем: (4)

$$A_i \eta_{i+3} \eta_i + B_i \eta_{i+3} + C_i = 0 \quad (5)$$

$$A_i \eta_i \xi_{i+3} + A_i \xi_i + B_i \xi_{i+3} - F_i = 0 \quad (6)$$

Из (5):

Из (6):

$$\eta_{i+3} = -\frac{C_i}{A_i \eta_i + B_i} \quad (7) \quad \xi_{i+3} = \frac{F_i - A_i \xi_i}{A_i \eta_i + B_i} \quad (8)$$

Как находим η_2 и ξ_2 ?

Используем второе прямое уравнение:

$$B_3 x_3 + C_3 x_2 = F_3 \quad (A_3 = 0)$$

$$\eta_2 = -\frac{C_3}{B_3} \quad (9) \quad \xi_2 = \frac{F_3}{B_3} \quad (10)$$

Задаем использовано (7), (8) и получаем (9), (10) находит

$$\eta_i, \xi_i, i = \overline{3, n} \quad (11)$$

Чисел $x_{n-3} = \eta_n x_n + \xi_n$: x_n - неизвестно.

Используем первое прямое уравнение:

$$A_n x_{n-3} + B_n x_n = F_n \quad (12)$$

Подставляем (11) в (12): $A_n (\eta_n x_n + \xi_n) + B_n x_n = F_n$

$$x_n = \frac{F_n - A_n \xi_n}{B_n + A_n \eta_n} \quad (13).$$

Используем (13) в (12), находит все решения.

Краевая задача для ОДУ. Получение интегро-интерполяционным методом разностной схемы для уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода.

23. Краевая задача для ОДУ. Получение интегро-интерполяционного методом разностной схемы для уравнений 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода.

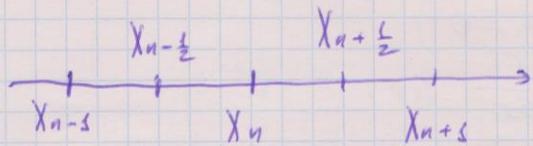
Краевая задача для ОДУ: см 12.

Используем

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dy}{dx} \right) - p(x) u(x) + f(x) = 0 : k, p, f - зад. гр.$$

Введем схему и на неё интегрируем
Удобно, так как к моментам отыскания разрывов

При получении разностной схемы применение интегро-интерполяционного метода - интегрируем схеме.



Введен "полублок" F :

$$\begin{cases} F = -k(x) \frac{du}{dx} \\ -\frac{dF}{dx} - p(x)u(x) + f(x) = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} -\frac{dF}{dx} dx - \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} p u dx + \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} f dx = 0 \quad - \text{для средних узлов.}$$

Две задачи:

$$\int_0^{x_{\frac{1}{2}}} -\frac{dF}{dx} dx - \int_0^{x_{\frac{1}{2}}} p u dx + \int_0^{x_{\frac{1}{2}}} f dx = 0 \quad - \text{reb.}$$

$$\int_{x_{\frac{1}{2}}}^{x_N} -\frac{dF}{dx} dx - \int_{x_{\frac{1}{2}}}^{x_N} p u dx + \int_{x_{\frac{1}{2}}}^{x_N} f dx = 0 \quad - \text{раб.}$$

\leftarrow некорректные граничные условия.

Две сист.: $\begin{cases} \int_{x_{\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} p u dx \approx p \left(\frac{x_{n+\frac{1}{2}} + x_{n-\frac{1}{2}}}{2} \right) h / \left(\frac{x_{n+\frac{1}{2}} + x_{n-\frac{1}{2}}}{2} \right) \cdot (x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-\frac{1}{2}}) \\ x_{n-\frac{1}{2}} = p_n y_n h \end{cases}$

$$-F_{n+\frac{1}{2}} + F_{n-\frac{1}{2}} - p_n y_n h + f_n h = 0 \quad ; \quad p_n = p(x_n), \quad f_n = f(x_n)$$

\leftarrow неподвижные граничные условия. в б. x_n . (3)

Температурный (1):

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} F dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} -k(x) \frac{du}{dx} dx$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{F dx}{k(x)} = - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{du}{dx} dx \Rightarrow F_{n+\frac{1}{2}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)} = \cancel{k(x)} \quad U_n - U_{n+1}$$

$$F_{n+\frac{1}{2}} = \frac{U_n - U_{n+1}}{\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{k(x)}} = \mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} \frac{y_n - y_{n+1}}{h}, \quad \text{где } \mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{h}{k(x)}$$

Коэффициент $\mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}}$:

Система:

$$\mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} = k_{n+\frac{1}{2}} = \frac{k_n + k_{n+1}}{2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{трансп.} \\ \mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{h}{\frac{h}{2} \left(\frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_{n+1}} \right)} = \frac{2k_n k_{n+1}}{k_n + k_{n+1}} \end{array} \right.$$

$$F_{n-\frac{1}{2}} = \mathcal{X}_{n-\frac{1}{2}} \frac{y_{n-s} - y_n}{h} \quad (\text{также называемое}).$$

Возьмем для поправок неравенство 6 (3):

$$\mathcal{X}_{n-\frac{1}{2}} \frac{y_{n-s} - y_n}{h} - \mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} \frac{y_n - y_{n+s}}{h} - p_n y_n h + f_n h = 0$$

Получаем разностное соотношение

$$\underbrace{\mathcal{X}_{n-\frac{1}{2}} y_{n-s}}_{A_n} - \underbrace{(\mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{X}_{n-\frac{1}{2}} + p_n h^2)}_{B_n} y_n + \underbrace{\mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} y_{n+s}}_{C_n} =$$

Т.к. $|B_n| > |A_n| + |C_n|$, то в матрице генератора предложенное (для погрешности сущесвтующего) существует единственное решение

~~Коэффициенты~~ Поправки кимпто-интервалов метода разностного аналог краевого условия есть

$$-k(x) \frac{du}{dx} = F_0 \quad ; \quad x=0$$



$$\int_0^{x_{\frac{1}{2}}} \frac{df}{dx} dx + \int_0^{x_{\frac{1}{2}}} p u dx = \int_0^{x_{\frac{1}{2}}} f u dx$$

$$F_2 - F_0 + \frac{p_2 y_1 + p_0 y_0}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{f_2 + f_0}{2} \cdot \frac{h}{2}$$

$$\mathcal{D}_2 \frac{y_0 - y_1}{h} - F_0 + \frac{h}{4} (p_0 y_0 + p_2 \frac{y_0 + y_1}{2}) = \frac{h}{4} (f_0 + f_2)$$

$$\left(\mathcal{D}_2 + \frac{p_0 h^2}{4} + \frac{p_2 h^2}{8} \right) y_0 = \left(\mathcal{D}_2 - \frac{h^2}{8} p_2 \right) y_1 + h F_0 + \frac{h^2}{4} (f_0 + f_2)$$

~~y_0~~ Решение:

$$\left. \begin{array}{l} F(a) = d - 1\text{-го ряда} \\ \frac{\partial F}{\partial x}(a) = d - 2\text{-го ряда} \\ \alpha F(a) + \beta \frac{\partial F}{\partial x}(a) = y - 3\text{-го ряда}. \end{array} \right\}$$

ищем нормальное начальное значение производной, включив в исходное:

$$\Rightarrow 0 = \left(\mathcal{D}_2 + \frac{p_0 h^2}{4} + \frac{p_2 h^2}{8} \right) (y_0 - u_0) + \left(\frac{h^2}{8} p_2 - \mathcal{D}_2 \right) (y_1 - u_1).$$

Помним $O(h^2)$ - второй порядок погрешности.

Краевая задача для ОДУ. Наилучшая разностная схема для уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода в цилиндрических координатах. СМОТРИ ДРУГОЙ ФАЙЛ, ТАМ ТОЛЬКО ЭТОТ ВОПРОС

24. Краевая задача для ОДУ. Наилучшая разностная схема для уравнения 2-го порядка с краевыми условиями 3-го рода в цилиндрических координатах.

Краевая задача для ОДУ: см 12

Рассмотрим по примеру изображено дробление, записанное в виде, удобном для обработки процедурой итерационного метода

$$\int \vec{F}_V = -\frac{C}{3k_0} \nabla U_0$$

$$\text{div } \vec{F}_V = C k_0 (U_{0p} - U_0)$$

F - норма, C - скорость света $3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}}$

k_0 - коэффициент поглощения [см^{-1}]

$$U_{0p} = \frac{8\pi h J^3}{C^3 (e^{\frac{hJ}{kT}} - 1)} - \text{функция Планка.}$$

h -конт. Планка $16,63 \cdot 10^{-34}$

J - генома излучения (с^{-1})

R - конст Больцмана ($1,38 \cdot 10^{-23}$)

U - объемная спектральная мощность излучения.

Построим разностную схему:

Введем сетку W_n - $x_n : x_n = n \cdot h$, $n = \overline{0, N}$, $h = \frac{1}{N}$

$$\int F = -\frac{1}{R} \cdot \frac{C}{3k_{(0)}} \frac{du}{dx} P \quad (1)$$

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx} (2F) \tilde{P} = C k_{(0)} / (U_{0p}(x) - U) \quad (2)$$

$$x = z = 0 \quad \frac{du}{dx} = 0$$

$$x = z = 1 \quad F = \frac{mcu}{z}$$

$$z = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(y_{\max})$$

$$a = \frac{\pi}{2} - \delta$$

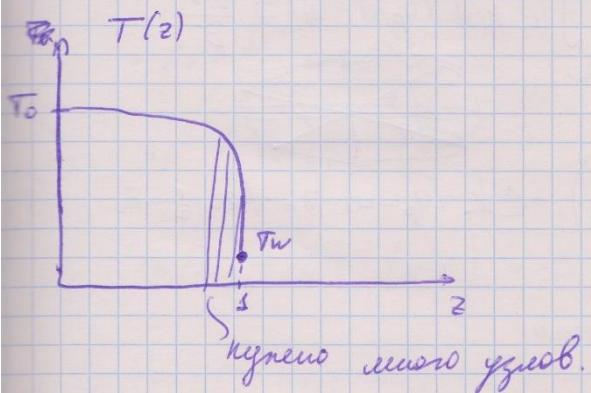
$$y_{\max} = f(a)$$

$$m = 0,786$$

$$C = 3 \cdot 10^{10}$$

$$\tilde{P} = \frac{q}{y_{\max}} / (1 + x^2 y_{\max}^2)$$

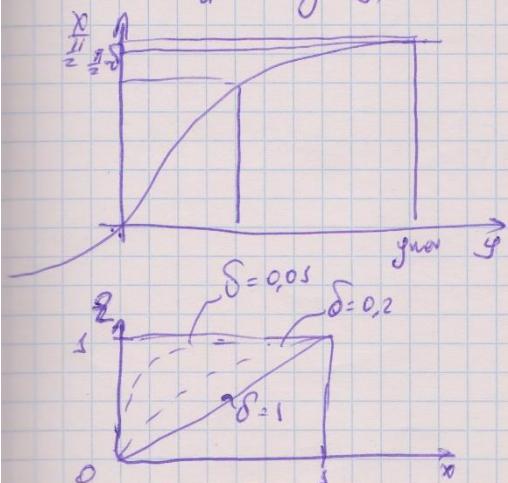
$$2dz = z \frac{d^2}{dx^2} dx = z \frac{dx}{\tilde{P}}$$



$$T(z) = T_0 + (T_w - T_0) z^\rho \quad \rho = 0.5 - 0.7.$$

Число одномерного давления не бо знат б конце

$$z = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(y)$$

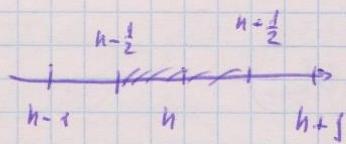


$$x = \frac{y}{y_{\max}}$$

$$z = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}(y_{\max})$$

$$a = \frac{\pi}{2} - \delta \quad y_{\max} = f(a)$$

УЧМ.



Интегрируем (2) по нововведенмм зредам:

$$\int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} \frac{1}{R^2} \frac{d}{dx} (2F) \tilde{P} dz = \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} (c k(x) (u_p(x) - u)) z \frac{dx}{\tilde{P}}$$

узн. е.к

$$\frac{1}{R} (z_{n+\frac{1}{2}} F_{n+\frac{1}{2}} - z_{n-\frac{1}{2}} F_{n-\frac{1}{2}}) = c k_n (u_p - u) z_n \cdot (z_{n+\frac{1}{2}} - z_{n-\frac{1}{2}})$$

УЗ (1): $\int_{x_n}^{x_{n+s}} () dx$, получим

$$\int_{x_n}^{x_{n+s}} \frac{F}{c \tilde{P}} dx = - \int_{x_n}^{x_{n+s}} \frac{du}{dx} dx$$

меняя перемен

$$\frac{3Rk_{n+\frac{1}{2}}}{c} F_{n+\frac{1}{2}} (z_{n+\frac{1}{2}} - z_n) = -u_{n+s} + u_n$$

Очевидно получим:

$$F_{n+\frac{1}{2}} = \frac{c}{3Rk_{n+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{u_n - u_{n+s}}{z_{n+1} - z_n} \quad (4)$$

$$F_{n-\frac{1}{2}} = \frac{c}{3Rk_{n-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{u_{n-s} - u_n}{z_n - z_{n-s}}$$

Кезембап (4), (5), (6), (7), (8) күткөргөмөл 1 наимен.

b) y:

$A_n u_{n-3} - B_n u_n + C_n u_{n+3} = -F_n$ (5) - орнагың салғынан
назарияда.

$$A_n = \frac{2n - \frac{1}{2}}{k_{n-\frac{1}{2}} (2n - 2n - \frac{1}{2})}, \quad C_n = \frac{2n + \frac{1}{2}}{k_{n+\frac{1}{2}} (2n + \frac{1}{2} - 2n)}$$

$$B_n = A_n + C_n + 3R^2 k_n V_n, \quad V_n = 2n / (2n + \frac{1}{2} - 2n - \frac{1}{2})$$

$$F_n = 3R^2 k_n V_n \text{ Upz}$$

) (3)

$$\frac{1}{R} (2n F_n - 2n - \frac{1}{2} F_{n - \frac{1}{2}}) = c \int (1) 2 \frac{dx}{\tilde{P}}$$

$k_n u_n + m_n u_{n-3} = p_n$ (6) - спектр алғындағы
ағаштың рефлексы (7).

К силеме (5), (6), (7) аркы менен нұсқалы.

Метод прогонки для реализации разностных схем с краевыми условиями 3-го рода.

Метод прогонки:

$$A_i x_{i-3} + B_i x_i + C_i x_{i+3} = F_i \quad (1)$$

Делаем универсальное: $x_i = \eta_{i+3} x_{i+3} + \xi_{i+3} \quad (2)$

Тогда: $x_{i-3} = \eta_i x_i + \xi_i$, т.е. $x_{i-3} = \eta_i \eta_{i+3} x_{i+3} + \eta_i \xi_{i+3} + \xi_i \quad (3)$

Подставляем (2) и (3) в (1)

$$x_{i+3} \cdot (A_i \eta_{i+3} \eta_i + B_i \eta_{i+3} + C_i) + A_i \eta_i \xi_{i+3} + A_i \xi_i + B_i \xi_{i+3} - F_i = 0$$

Умножим (4) на x_{i+3} и вычтем из (4) предыдущее:

$$A_i \eta_{i+3} \eta_i + B_i \eta_{i+3} + C_i = 0 \quad (5)$$

$$A_i \eta_i \xi_{i+3} + A_i \xi_i + B_i \xi_{i+3} - F_i = 0 \quad (6)$$

Из (5):

$$\eta_{i+3} = -\frac{C_i}{A_i \eta_i + B_i} \quad (7) \quad \xi_{i+3} = \frac{F_i - A_i \xi_i}{A_i \eta_i + B_i} \quad (8)$$

Как найти η_2 и ξ_2 ?

Используем левое граничное условие:

$$B_s x_s + C_s x_2 = F_s \quad (A_s = 0)$$

$$\eta_2 = -\frac{C_s}{B_s} \quad (9) \quad \xi_2 = \frac{F_s}{B_s} \quad (10)$$

Затем используем (7), (8) и значения (9), (10) находим

$\eta_i, \xi_i, i = 3, n$

(11)

Имеем $x_{n-3} = \eta_n x_n + \xi_n$; x_n - неизвестно.

Используем правое граничное условие:

$$A_n x_{n-3} + B_n x_n = F_n \quad (12)$$

Подставляем (11) в (12): $A_n (\eta_n x_n + \xi_n) + B_n x_n = F_n$

$$x_n = \frac{F_n - A_n \xi_n}{B_n + A_n \eta_n} \quad (13)$$

Используем (13) в (12), находим все решения.

Краевая задача для ОДУ. Методы решения квазилинейных разностных схем для уравнений 2-го порядка.

26. Краевые задачи для ОДУ. Метод решения квазилинейных разностных схем для уравнений 2-го порядка.

Краевые задачи для ОДУ.

Пример нелинейного уравнения:

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda(T) \frac{dy}{dx} \right) + q(T) = 0$$

$$\text{На конце отрезка } \lambda(T) = \lambda_0 \left(\frac{T}{\Theta} \right)^{\alpha} \quad \Theta = 300$$

Нек. значение R задаётся граничными

L -значение чл. ре

Так.

k_0, \dots, n

d_0, \dots, n

F_0

Найдем $\lambda(\Theta)$.

Простое аппроксимационное:

$A_n y_{n-1} - B_n y_n + C_n y_{n+1} = -F_n$ — граничные квазилинейные

$$A = \mathcal{H}_{n-\frac{1}{2}} \quad C_n = \mathcal{X}_{n+\frac{1}{2}} \quad B = A_n + C_n + 3R^2 \lambda_n V_n$$

$$V_n = 2n \left(\mathcal{Z}_{n+\frac{1}{2}} - \mathcal{Z}_{n-\frac{1}{2}} \right) / \text{дл. пр.}$$

$$F_n = 3R^2 \lambda_n V_n \text{ при}$$

$$A_n (y_{n-1}, y_n) y_{n-1} - B_n (y_{n-1}, y_n, y_{n+1}) y_n + C_n (y_n, y_{n+1}) y_{n+1} =$$

1) Метод прогонки симплекса:

$$A_n \left(y_{n-1}^{(s-1)}, y_n^{(s-1)} \right) y_n^{(s)} - B_n \left(y_{n-1}^{(s-1)}, \dots \right) y_n^{(s)} + C_n \left(\dots \right) y_{n+1}^{(s)} = -F_n^{(s-1)}$$

Остановка симплекса:

$$\max_{n=1, N} \left| \frac{T_n^{(s)} - T_n^{(s-1)}}{T_n^{(s)}} \right| < \epsilon$$

алгоритмическое моделирование: $\frac{d\tilde{f}}{dt} = \frac{d}{dt} (\lambda(t) \frac{df}{dt}) + g(t)$

2) Метод Ньютона:

Линеаризованная система ~~$f(x_1, x_2, x_3)$~~ $f(x_1, x_2, x_3) = 0$:

$$f(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)}) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_k} (x_k^{(s+1)} - x_k^{(s)}) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= x_k^{(s+1)} - x_k^{(s)} \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^3 \frac{df^{(s)}}{dx_k} \Delta x_k = -f(x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)}) \end{aligned}$$

(зел.) $x_k^{(s+1)} = x_k^{(s)} + \Delta x_k$

Пример:

$$\begin{aligned} F_1 & \left\{ \begin{array}{l} e^{x_1^2+x_2^2} + x_1 x_2 - 5 = 0 \\ x_1^3 + x_2^2 - 7 = 0 \\ (e^{x_1^2+x_2^2} \cdot 2x_1 + x_2)_{S_{12}} \Delta x_3^{(s)} + (e^{x_1^2+x_2^2} \cdot 2x_2 + x_1)_{S_{12}} \Delta x_2^{(s)} = -(e^{x_1^2+x_2^2} \cdot x_1 x_2 - 5)_{S_{12}} \end{array} \right. \\ & \quad \left. \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{array} \right. \\ & \quad \left. \begin{array}{l} 3x_1^2 \Big|_{S_{12}} \Delta x_1^{(s)} + 2x_2 \Big|_{S_{12}} \Delta x_2^{(s)} = - (x_1^3 + x_2^2 - 7) \Big|_{S_{12}} \end{array} \right. \end{aligned}$$

в нашем же ур-ии.

$$\left[\frac{\partial A_n}{\partial y_{n-1}} y_{n-1} + A_n + \frac{\partial B_n}{\partial y_{n-1}} y_n \right]^{(S)} \Delta y_{n-1} - \left[\frac{\partial A_n}{\partial y_n} y_{n-1} - \frac{\partial B_n}{\partial y_n} y_n - b_n \right. \\ \left. + \frac{\partial C_n}{\partial y_n} \right]^{(S)} \Delta y_n - \left[\frac{\partial B_n}{\partial y_{n+1}} y_n + \frac{\partial C_n}{\partial y_{n+1}} y_{n+1} + C_n \right]^{(S)} \Delta y_{n+1} = -f_n$$

Решаем методом прогонки

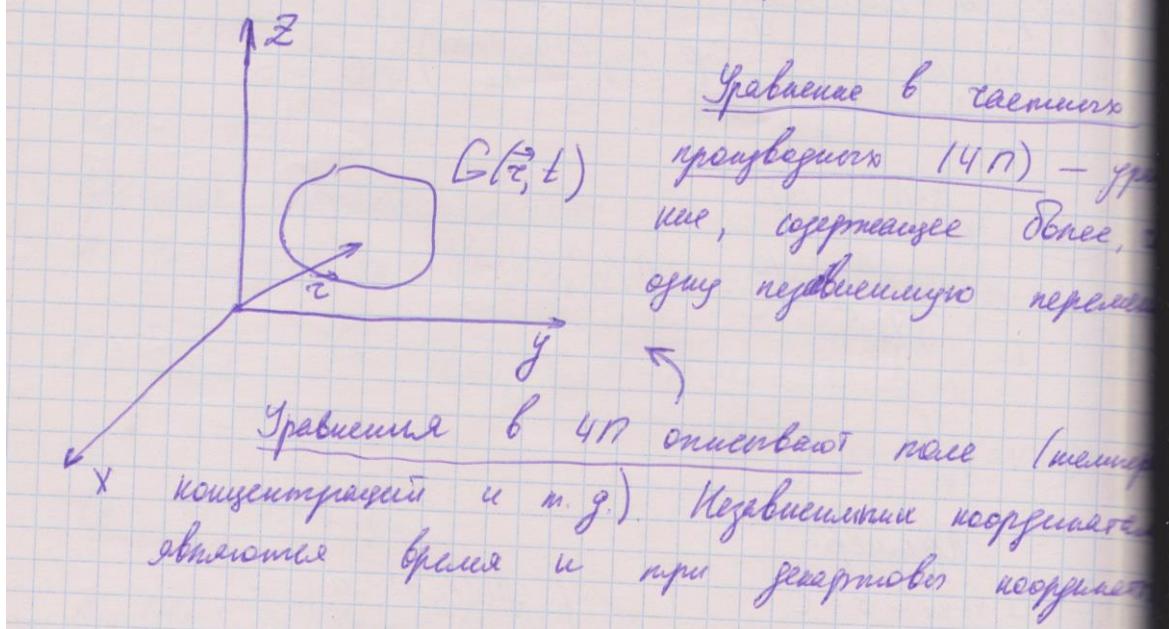
Условие остановки: $\max \left| \frac{\Delta y_n}{y_n} \right|^{(S+1)} < \epsilon$ $\max \left| \frac{\Delta y_n}{\Delta y_n} \right|^{(S)}$

(см.зачеркнутое)

Уравнения в частных производных. Области применения.

Классификация уравнений второго порядка. Общие понятия о методах решения.

27. Уравнение в частных производных. Области применения. Классификация уравнений второго порядка. Общие понятия о методах решения.



Классификация уравнений 2-го порядка:

Уравнение, нелинейное относительно старших производных:

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

x, y - независимые переменные

$u(x, y)$ - искомая функция

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

1.) Если a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят от x, y, u, u_x, u_y , то ур-е называется изогипсометрическим.

2.) Если a_{11}, a_{12}, a_{22} не зависят от u, u_x, u_y , то уравнение называется аналитическим относительно старших производных.

3) Уравнение линейное:

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b u_x + c u_y + d u + f(x, y) = 0,$$

где $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$, b, c, d зависят только от x, y , но само уравнение называется линейным.

4) Все к-ты в (3) константы - уравнение называется линейным с коэффициентами конст.

Число линий много уравнений (и способов решения), образующих характеристики:

$$\mathcal{D} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

1) $\mathcal{D} > 0$ - гиперболическое ур-е

2) $\mathcal{D} = 0$ - параболическое ур-е

3) $\mathcal{D} < 0$ - эллиптическое ур-е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) - \text{гипербол.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y) = 0 - \text{эллиптическое}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) - \text{парabol.}$$

Метод решения:

- 1) Точное аналитическое (метод разложения первых, метод бегущих волн, метод функций Лапласа (~~функций Фурье~~))
- 2) Приближенное аналитическое (метод будьона-Гантера, метод малого параметра)
- 3) Численное / семиточечный (разностный), преобразование (метод конечных элементов).

Уравнения в частных производных. Постановка задач Коши, краевых и смешанных краевых задач. Привести примеры с краевыми условиями 1-го, 2-го и 3-го родов.

28. Уравнение в частных производных. Постановка задач Коши, краевые и смешанные краевые задач. Привести примеры с краевыми условиями 1-го, 2-го и 3-го родов.

Уравнение в 4н: см 27.

Коши и краев

Задачи нач. условия $\left[t=0 : u(\vec{r}, 0) = u_0(\vec{r}) \right]$ и
краевые (граничные условия) $\left[u(\vec{r}, t) \Big|_{\Gamma} = u_s(\vec{r}, t) \right]$
граница Γ

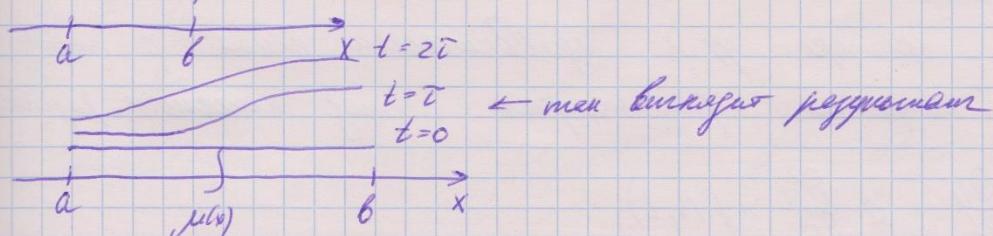
Получаем смешанную краевую задачу.

G - это бесконечное пространство (на бесконечной прямой, на конечной плоскости, пространстве).

Мы можем бросить спектральное или гауссовское представление загара (нем чистых частот, есть спектральное представление), или загара Коши (есть кратные частоты, есть кратных частот).

Пример конкретной квантовой загар:

1) Уравнение параболического типа в ограниченном варианте:



Два случая:

1. Пограничный с краевым значениею подразумевается:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$\text{Нар. гр. } u(0, 0) = u_0$$

$$\begin{aligned} \text{Гр. гр: } u(0, t) &= u_0(t) \\ u(b, t) &= u_1(t) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{I раз} \\ \text{или} \end{array} \right.$$

Мысль о первом
чистом краевом
условии для
региона разобралась

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} = \alpha(t) \quad \left. \begin{array}{l} \text{II раз} \\ \dots \end{array} \right.$$

$$\left. \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=a} + \beta u(0, t) = \psi(t) \quad \left. \begin{array}{l} \text{III раз} \\ \dots \end{array} \right.$$

2. Квадратичной:

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(u, x, t)$$

Уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами.
Основные понятия метода конечных разностей. Понятие о явных и неявных схемах.

29. Уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами. Основные понятия метода конечных разностей. Понятие о явных и неявных схемах.

Уравнение в ЧП с постоянными коэффициентами: см 27.

На примере ур-я гармонического типа с постоянными коэффициентами рассмотрим метод конечного раз-

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$И.~у.: u(x, 0) = \mu_1(x)$$

$$Г.~у.: u(0, t) = \mu_1(t)$$

$$u(b, t) = \mu_2(t)$$

В пр-ве будем считать единицей количество узлов (узлов), которые образуются в результате разбиения параллелепипеда t и x пр-в.

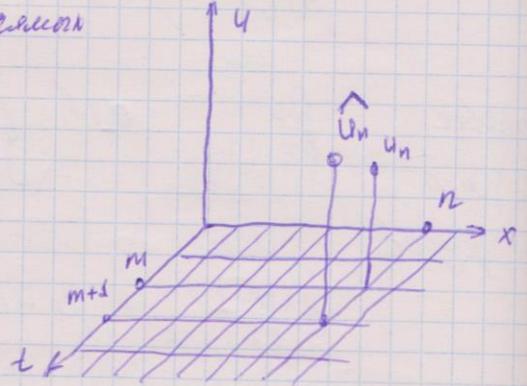
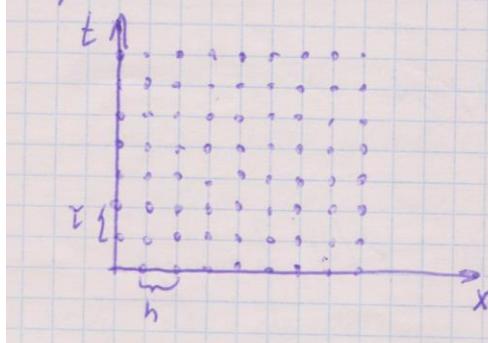


Схема:

$$Wh \tilde{u} = \left\{ \begin{array}{l} x_n = a + nh, \quad t_m = m\tau, \quad n = \overline{0, N}, \quad m = \overline{0, M} \end{array} \right\}$$

$$u(x_n, t_m) = u_n^m$$

$$u(x_n, t_{m+1}) = u_n^{m+1}$$

Будем обозначать $u_n^m = \hat{u}_n$
 $u_n^{m+1} = \tilde{u}_n$

U - точное решение (не может вычислить)

y - разностное (приближенное) решение.

$$y_n^m = \hat{y}_n$$

$$y_n^{m+1} = \tilde{y}_n$$

Производящее значение разности $\frac{y_{m+1} - y_m}{\tau} = \frac{\tilde{y}_n - \hat{y}_n}{\tau}$

На схеме соблюдается условие, отвечающее в фиксированном моменту времени, обраузим алб.

Дискретное значение функции в ~~текущих~~ узлах обраузим симметрию функции. Разностное приближенное решение будем обозначать $U_n + \tilde{y}_n$.

Для восстановления преобразованной разности схемы необходимо на схеме выбрать шаги, т.е. конгруэнтную сетку, на которых производящее значение не разбогатит аналог.

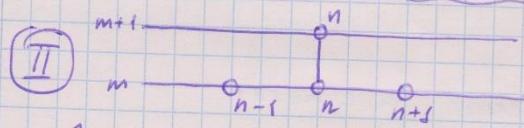
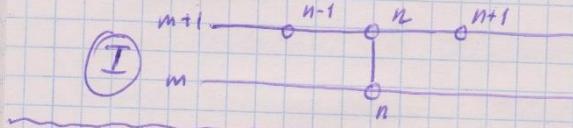
Разностная схема имеет вид:

$$\frac{\tilde{y}_n - y_n}{\tau} = a \frac{\tilde{y}_{n+1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n-1}}{h^2} + f(x_n, t_{m+1})$$

$$t=0, \quad y_2 = \mu_1(x_n)$$

$$x=a, \quad \hat{y}_0 = \mu_1(t_{m+1})$$

$$x=b, \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_{m+1})$$

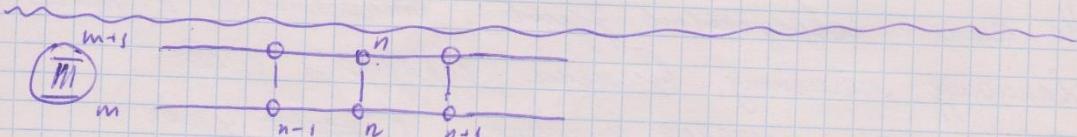


$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a \frac{\hat{y}_{n+1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n-1}}{h^2} + f(x_n, t_m)$$

$$t=0, \quad y_n = \mu_1(x_n)$$

$$x=a, \quad \hat{y}_0 = \mu_1(t_m)$$

$$x=b, \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_m)$$



$$\frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = a \tilde{\sigma} \frac{\hat{y}_{n+1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n-1}}{h^2} + a(\tilde{\sigma} - \sigma) \frac{\hat{y}_{n+s} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n-1} + \psi}{h^2}$$

$\tilde{\sigma}$ - неявной параметр [например $\frac{1}{2}$]

Схема (I) неявная. Чтобы найти \hat{y} нужно найти решения системы диф. урн.

Схема (II) явная. Обычная формула

Схема (III) при $\tilde{\sigma}=3$ возвращается в (I), а при $\tilde{\sigma}=0$ в (II).

В явной схеме устойчивость зависит от шага.

В явной схеме устойчивость зависит от шага.

Некоторые особенности генерации.

В (III) случае при $\sigma = \frac{1}{2}$ получаемое значение опоры не зависит, но несет генерацию. Но σ является ограничением

Реализация разностного схем:

(I):

$$A_n \hat{y}_{n-1} - B_n \hat{y}_n + C_n \hat{y}_{n+1} = -f_n$$

$$A_n = \frac{D\alpha}{h^2}$$

$$C_n = \frac{D\alpha}{h^2}$$

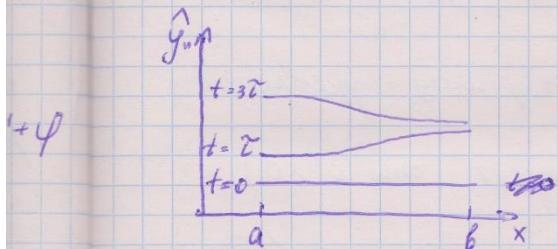
$$B_n = 1 + \frac{2D\alpha}{h^2} = A_n + C_n + 1$$

$$f_n = y_n + \tau f(x_n, t_{m+1})$$

$|B_n| > |A_n| + |C_n|$ - условие генерации краевое
 $1 \leq n \leq N-1$

t_{m+1} — неустойчиво

t_m — устойчиво (устойчиво, если $m=0$)



Случай (II):

$$\hat{y}_n = y_n + \frac{D\alpha}{h^2} (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + \tau f(x_n, t_m) \leftarrow \text{используя}$$

Случай (III):

Случай (III): с неустойчивым неимпульсом

$$A_n \hat{y}_{n-1} - B_n \hat{y}_n + C_n \hat{y}_{n+1} = -f_n$$

$$A_n = \frac{\Gamma a \delta}{h^2}$$

$$E_n = \frac{\Gamma a \delta}{h^2}$$

$$\beta_n = 1 + \frac{2\gamma a \delta}{h^2}$$

$$f_n = y_n + \Gamma a (1 - \delta) \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + \varphi \Delta$$

Квазилинейные уравнения в частных производных. Получение разностной схемы для одномерного параболического уравнения с краевыми условиями 3-го рода интегро-интерполяционным методом.

30. Квазилинейное уравнение в частных производных.

Получение разностной схемы для одномерного параболического уравнения с краевыми условиями 3-го рода интегро-интерполяционным методом.

Квазилинейное ур-е в частных производных - см 27.

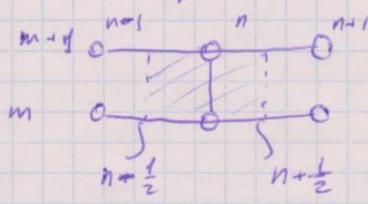
$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (\lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x})}_{\text{diff}} + f(u)$$

Если $a = \frac{\lambda}{c}$, то переходим к исходному уравнению.

(тогда a общий a^2 , следовательно, что $a^2 > 0$)

Для этого, чтобы применить ИИМ, нужно выбрать шаги.

Конструим структуру начального состояния. Рассмотрим методом.



$$\left\{ \begin{array}{l} F = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \text{бюджет ограничение} \quad (1) \\ e(u) \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} + f(u) \end{array} \right.$$

$$e(u) \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} + f(u) \quad (2)$$

$$\int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} dx \int_{t_m}^{t_{m+1}} e(u) \frac{\partial u}{\partial t} dt = - \int_{t_m}^{t_{m+1}} dt \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \iint_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} f(x, t) dx dt$$

$$\left(\int_V dv \vec{F} \cdot \vec{v} - \int_{\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dE - \text{не неприменим} \right)$$

$$\int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} \cancel{\int_{\mathcal{P}} dx} \cdot \hat{C}(u-u) = \int_{t_m}^{t_{m+1}} (F_{n-\frac{1}{2}} - F_{n+\frac{1}{2}}) + \cancel{\iint_{t_m}^{t_{m+1}} \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} f(x, t) dx dt} + f(x_n, t_{m+1}) \tau_h$$

без τ в момент времени t_{m+1}

без τ в момент времени t_{m+1}

Когда берут t_{m+1} , становится неизменным.

$$\hat{C}_n (y_n - y_{n-1}) \cdot h = (\hat{F}_{n-\frac{1}{2}} - \hat{F}_{n+\frac{1}{2}}) \tau + f(x_n, t_{m+1}) \tau h \quad (3)$$

применение метод

средних + метод

императ

Две разные методы для вычисления значений производных

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{F}{\lambda} dx = - \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{\partial v}{\partial x} dx - \text{а это бывает.}$$

$$F_{n+\frac{1}{2}} \circ \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{\lambda} = y_n - y_{n+1}$$

По аналогии краевое условие

$$F_{n+\frac{1}{2}} = \hat{F}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2} \text{ или } \frac{2\lambda_n \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} + \lambda_n}$$

Применяли к решаемой задаче

$$\hat{F}_{n+\frac{1}{2}} = \hat{F}_{n-\frac{1}{2}} \frac{\hat{y}_{n+\frac{1}{2}} - \hat{y}_{n+\frac{1}{2}}}{h}$$

$$\hat{F}_{n-\frac{1}{2}} = \hat{F}_{n-\frac{1}{2}} \frac{\hat{y}_{n-1} - \hat{y}_n}{h}$$

Подставляем в (3) и получаем ради соседей

$$\hat{A}_n \hat{y}_{n-1} - \hat{B}_n \hat{y}_n + \hat{C}_n \hat{y}_{n+1} = -\hat{F}_n$$

где $\hat{A}_n, \hat{B}_n, \hat{C}_n, \hat{F}_n$ какв. из (3).

Решение разностных схем для квазилинейных уравнений в частных производных- метод простых итераций и метод Ньютона.

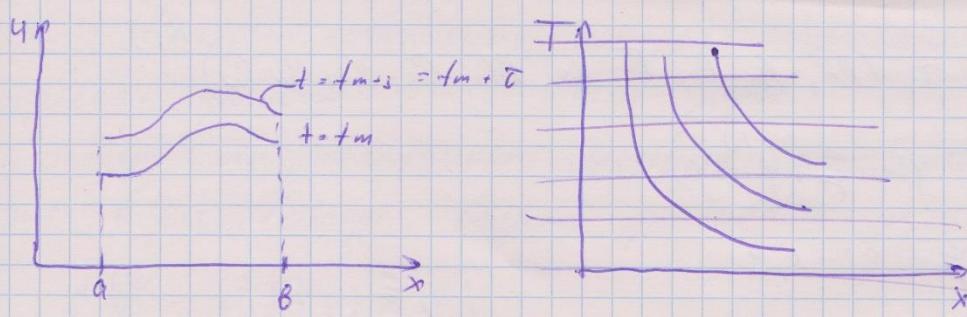
35. Решение разностных схем для квазилинейного уравнения в частных производных при заданных граничных условиях. Метод простых итераций и метод Ньютона.

Решение рх схем с. 27

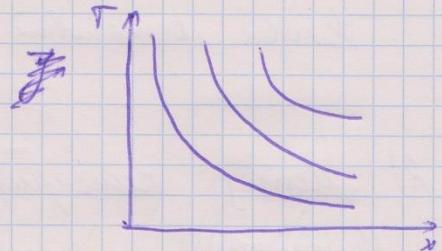
1) Метод краевого итераций:

Если функции сконцентрированы, метод может не сработать.

$$\begin{aligned} A_n^{(s-1)} \hat{y}_{n-1}^{(s)} - B_n^{(s-1)} \hat{y}_n^{(s)} + C_n^{(s-1)} \hat{y}_{n+1}^{(s)} &= -F_n^{(s-1)} \\ K_0^{(s-1)} \hat{y}_0^{(s)} + M_0^{(s-1)} \hat{y}_1^{(s)} &= P_0^{(s-1)} \\ K_N^{(s-1)} \hat{y}_N^{(s)} + M_N^{(s-1)} \hat{y}_{N+1}^{(s)} &= P_N^{(s-1)} \end{aligned}$$



Нестационарный процесс

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = Q / \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + f(t)$$


Общее решение. Квадратичное выражение с (S-1) степенями
на начальной интервале времени выражено в виде
Соединение между решениями происходит плавно
Больше не с горючего момента, изменяется лишь τ .

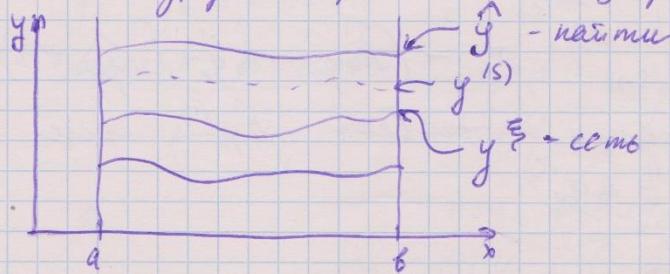
Если дробь присутствует в решении — меняет решения.

Нестационарный процесс:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = Q / \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + f(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + f(t)$$

Если дробь присутствует — меняет решения.



Бескрайні / $A_n, B_n, C_n, E_n, K_n, Mo, Po, Kr, Mn, Pb$ / $^{(S-1)}$

$$\hat{y}^{\frac{\epsilon}{2}} = y + \frac{\epsilon}{2} (y^{(S)} - y)$$

$$\frac{\epsilon}{2} = 0,2 - 0,9$$

Числове доказування: $\max \left| \frac{\hat{y}_n^{\frac{\epsilon}{2}} - y_n^{(S)}}{y_n^{(S)}} \right| \leq \epsilon$

2) Метод підсумуючих разомів (методу
Ньютона)

Конкретний підсумок зростання:

$$\hat{y}_{n-1}, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1}$$

$$\hat{A}_n = \hat{A}_n(\hat{y}_{n+1}, \hat{y}_n)$$

$$\hat{B}_n = \hat{B}_n(\hat{y}_{n-1}, \hat{y}_n, \hat{y}_{n+1})$$

$$\hat{C}_n = \hat{C}_n(\hat{y}_n, \hat{y}_{n+1})$$

$$\hat{F}_n = \hat{F}_n(\hat{y}_n)$$

Підсумуючий (1).

$$\left(\frac{\partial \hat{A}_n}{\partial \hat{y}_{n-1}} \hat{y}_{n-1} + \hat{A}_n - \frac{\partial \hat{B}_n}{\partial \hat{y}_n} \hat{y}_n \right) \left| \Delta \hat{y}_{n-1}^{(S)} + \frac{\partial \hat{A}_n}{\partial \hat{y}_n} \hat{y}_n + \frac{\partial \hat{B}_n}{\partial \hat{y}_n} \hat{y}_n - \hat{B}_n + \right. \\ \left. + \frac{\partial \hat{C}_n}{\partial \hat{y}_n} \hat{y}_n \right|_{(S-1)} + \left. \frac{\partial \hat{F}_n}{\partial \hat{y}_n} \hat{y}_n \right|_{(S-1)} \left| - \frac{\partial \hat{B}_n}{\partial \hat{y}_{n+1}} \hat{y}_{n+1} + \frac{\partial \hat{C}_n}{\partial \hat{y}_{n+1}} \hat{y}_{n+1} + \hat{C}_n \right|_{(S-1)}.$$

$$\circ \Delta \hat{y}_{n+1}^{(S)} = - \frac{\partial \hat{F}_n}{\partial \hat{y}_n} \Big|_{(S-1)} \Delta \hat{y}_n^{(S)} = - (\hat{A}_n \hat{y}_{n-1} + \hat{B}_n \hat{y}_n + \hat{C}_n \hat{y}_{n+1} + \hat{F}_n) \Big|_{(S-1)}$$

Методом прямого сподівання $\hat{A} \hat{y}_n^{(S)}$, тоді
тоді $\hat{y}_n^{(S)} = \hat{y}_n^{(S-1)} + \Delta \hat{y}_n^{(S)}$

Методы повышения порядка аппроксимации краевых условий 2-го и 3-го родов (интегро-интерполяционная процедура, разложение в ряд Тейлора, введение фиктивного узла).

32. Методы повышения порядка аппроксимации краевых условий 2-го и 3-го родов.

(интегро-интерполяционная процедура, разложение в ряд Тейлора, введение фиктивного узла).

$$C \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$x=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu(t)$$

1) УМЧ.

$$\int_t^{t+\tau} \int_0^{\frac{h}{2}} C \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = - \int_t^{t+\tau} dt \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\partial F}{\partial x} dx + \int_t^{t+\tau} \int_0^{\frac{h}{2}} f(x, t) dx dt$$

$$F_{\frac{h}{2}} = R_{\frac{h}{2}} - \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$F_0 = -a \mu(t)$$

2) Разложение в ряд Тейлора:

$$u_i = u_0 + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{c}{a} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f}{a}$$

$$g_1 = \left. g_0 + h \mu(t_{m+1}) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{c \partial u}{\partial t} - \frac{f}{a} \right) \right|_0$$

$$g_1 = \left. g_0 + h \mu(t_{m+1}) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{c}{a} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{f}{a} \right) \right|_{t_{m+1}}$$

3) Введение фиктивного узла: кр. условие

$$\text{---} \quad \begin{matrix} & & i \\ -s & 0 & s \end{matrix} \quad (1) \quad \frac{\hat{g}_i - \hat{g}_{-1}}{2h} = \mu(t_{m+1}) \Rightarrow \hat{g}_{-1} = \hat{g}_i - 2h \mu(t_{m+1})$$

$$\begin{aligned} A \hat{g}_{-1} + B \hat{g}_0 + C \hat{g}_i &= -F_0 - \text{чсл. } \hat{g}_{-1} \\ M_0 \hat{g}_0 + D_0 \hat{g}_i &= F_0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{с нач. } (1) \\ \text{и } \hat{g}_{-1} \end{matrix}$$

Понятие невязки для разностных схем. Привести пример вычисления невязки для неявной схемы.

33. Понятие невязки для разностного схем. Привести пример вычисления невязки для неявной схемы.

Невязка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x_i, t)$$

Разностная схема

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{h} = a \frac{2y_n + y_{n+1} - f(x_n, t_n)}{h^2} \rightarrow A_n y = \varphi_n$$

$$U_n = \varphi_n - A_n y = (A_n - f) - (A_n y - \varphi_n)$$

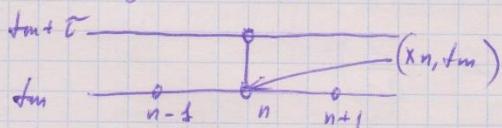
$$U_n = \varphi_n - A_n y = (A_n - f) - (A_n y - \varphi_n)$$

Невязка определяет в какой мере разностная схема ^{соответствует} ^{ошибке} дифр. уравнению.

Сходимость означает, что при $h \rightarrow 0$ U переходит в 0.

Два свойства разностных схем: аппроксимирующая и устойчивость.

Каждый невязку для $\frac{\partial u}{\partial t}$ и соотвтвие разностному уравнению. Невязка изменяется разнообразием в реде Годона.



$$U_n = \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(x_i, t) - \left[\frac{U_{n-1} - U_n}{h} - \frac{a}{h^2} (U_{n-1} - 2U_n + U_{n+1}) - f(x_n, t) \right]$$

$$U_n = \widehat{U}_n + \sum \frac{\partial^k u}{\partial t^k} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x_n, \theta_m, f_m}$$

$$f_m \leq \theta_m \leq f_{m+1}$$

$$U_{n+1} = \widehat{U}_n + h \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{\xi_{n+1}, f_{m+1}}$$

$x_{n-1} \leq \xi_{n-1} \leq x_n$
 $x_n \leq \xi_{n+1} \leq x_{n+1}$

$\Psi_n = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x_n, t) \right) \Big|_{x_n, f_{m+1}} - \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_{x_n, \theta_m} -$
 $- \frac{a}{h^2} \left(h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x_n, \xi_{n+1}} - f(x_n, f_m) \right) =$
 $= + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x_n, \theta_m} + \frac{a h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = O(h^2)$

Т.е. $|\Psi_n| \rightarrow 0$, если $h \rightarrow 0$ и $c \rightarrow 0$ со спр. а
 (впринципе поп. аппроксимации) и h^2 (впринципе поп. аппрокс.)

пример квадратичного уравнения:
 $\sin \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda |u| \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t)$
 $\widehat{c} \quad \frac{\widehat{y}_{n+1} - \widehat{y}_n}{h} = \widehat{\mathcal{D}}_{n-\frac{1}{2}} \frac{\widehat{y}_{n-1} - \widehat{y}_n}{h} - \widehat{\mathcal{D}}_{n+\frac{1}{2}} \frac{\widehat{y}_n - \widehat{y}_{n+1}}{h} + \varphi$

Если подобрать \widehat{c} и h так, что
 $\frac{ch^2}{2} = \frac{a h^2}{12}$, т.е. $\widehat{c} = \frac{h^2}{6a}$, то можно избежать
 диффузии решения порядка аппроксимации не попадет.
 как это можно?

$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]$

Свойство аппроксимации разностных схем для уравнений в частных производных.

34. Свойство аппроксимации разностной схем для уравнений в частных производных.

Аппроксимация:

$$\text{Уравнение: } Au = f \quad (1)$$

$$\text{Доп. ум.: } Bu = \beta$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \\ \text{доп. } \begin{cases} x=0, & \frac{\partial u}{\partial x} = \delta(u - \gamma) \\ x=l, & \frac{\partial u}{\partial x} = \eta(u - \xi) \\ t=0, & u(x, 0) = \mu(x) \end{cases} \end{array} \right| \text{пример}$$

Разностная схема:

$$\begin{aligned} A_n y &= f_n \\ B_n y &= \beta_n \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\hat{y}_n - y_n}{h} = \frac{\alpha}{h^2} (\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}) + f_n \\ \frac{\hat{y}_0 - y_0}{h} = \delta(\hat{y}_0 - \gamma) \\ \frac{\hat{y}_n - y_{n+1}}{h} = \eta(\hat{y}_n - \xi) \end{array} \right| \text{пример.}$$

$$\text{Небудка: } \psi_n = (A_n u - f_n) + (Au - f)$$

$$\rho_n = (Bu - \beta) + (Bu - \beta_n)$$

Разностная схема (2) аппроксимирует исходную доп. задачу (1), если $\|\psi_n\| \rightarrow 0$, $\|\rho_n\| \rightarrow 0$, при $h \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow 0$

Разностная схема (2) аппроксимирует исходную диф.
задачу (1) с погрешностью ρ , если

$$\left. \begin{array}{l} \|\psi_n\| = O(\tau^k + h^p) \\ \|\rho_n\| = O(\tau^k + h^p) \end{array} \right\} \text{при } h=0, \tau \rightarrow 0.$$

— — — (2) — — — (1) с к-м порядком по времени
и ρ по коэффициенту.

Это безусловная аппроксимация ($\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ независимо)

При условной аппроксимации

$$\|\psi_n\| = O(\tau^k + h^p + \frac{\tau^m}{h^2}), \quad \tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0 \quad \|\rho_n\| = O(\tau^k + h^p + \frac{\tau^m}{h^2}),$$

Если, например, выбрать $\tau = h^{\frac{q}{m}}$,
то аппроксимации не будут одна и другая аппрокс.
нечетное D_g)

Если $nh\omega \rightarrow 0$, то разд. схема переходит в
неч. D_g . Исследуя получаем "близость" двух
типов уравнений (неч. и разностн. схем)

Из аппроксимации с учетом гипотезы получим соотв.
ночеств.

Понятие устойчивости разностных схем по начальным данным и
правой части. На основе принципа максимума исследовать
устойчивость явной и неявной схем для уравнения параболического
типа.

35. Понятие устойчивости разностных схем по
начальным данным и правой части. На основе
принципа максимума исследовать устойчивость
явной и неявной схем уравнений передвижного
типа.

Устойчивость — это непрерывная зависимость
решения от входных данных. Это означает, что
малое изменение входных данных должно при-

бесконечн и монотону сходимость редукции.

Устойчивость по начальным данным означает насколько чувствительна разностная схема к изменениям начальных данных.

Применение

Задача разностного метода в исследовании есть:

$$\sum_n a_k y_{n+k} = \sum_p b_p y_{n+p} + f_n$$

$$|a_0| = \max |a_k|$$

Схема устойчива по начальным данным, если

$$(1 + \alpha) |a_0| \geq \sum_{k \neq 0} |a_k| - \sum_p |b_p| \quad (1)$$

Схема C -стабильна по начальным данным, если

$$|a_0| - \sum_{k \neq 0} |a_k| = \frac{D}{\alpha} \quad 0 < D = \text{const.}, \text{none}$$

Применение к краевым задачам № 34:

$$a_s = \frac{a}{h^2}, a_0 = \frac{2a}{h^2} + \frac{1}{\alpha}, |a_0| = \frac{D}{\alpha}$$

Аналогично работаем с краевыми условиями.

Конечно-разностный метод показывает, что винкельская разностная схема устойчива по приводимым видах краевых условиях, если и только если коэффициенты винкельской разностной схемы устойчива по приводимым видах краевых условиях.

На основе метода разделения переменных исследовать устойчивость четырехточечных явной и неявной разностных схем для уравнения параболического типа.

Задача методом разделения переменных исследовать устойчивость четырехточечных явной и неявной разностных схем для уравнения параболического типа

Проверим устойчивость по каскадной схеме
 $\tilde{z}_n = z_n - u_n$ — погрешность

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial x^2} + f(x, t)$$

Считаем, что разностная схема аппроксимирует задачу. Невязка стартит на 0. Приведя член f к линейному погрешению. Тогда:

$$\frac{\hat{z}_n - z_n}{\tau} = \frac{a}{h^2} (\hat{z}_{n+1} - 2\hat{z}_n + \hat{z}_{n-1}) \text{ линейное схема}$$

$$\frac{\hat{z}_n - z_n}{\tau} = \frac{a}{h^2} (z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1}) \text{ явная схема}$$

Для явной схемы

$z(x_n, t_n) = z_n = p_q^m e^{i\pi q x_n / h}$, где q — номер гармоники, p — положение роста гармоники. $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$z(x_n, t_{n+1}) = \hat{z}_n = p_q z_n$$

Чтобы погрешность не увеличивалась, $|p_q| \leq 1$

Условие устойчивости:

$$|1 + c\tau| |p_q| < 1, \text{ с единицей} = 0$$

Признак неустойчивости

$$|p_q| > 1$$

Чтобы вычислить значение p_{q-1} непосредственно из формулы

$$\frac{Z_n(p_{q-1})}{Z} = \frac{\rho_q^m e^{i\pi q x_n/\ell} (p_{q-1})}{Z} =$$

$$= \frac{a}{h^2} \left(\rho_q^m e^{i\pi q(x_n-h)/\ell} - 2\rho_q^m e^{i\pi q x_n/\ell} + \rho_q^m e^{i\pi q(x_n+h)/\ell} \right)$$

$$(p_{q-1}) = \frac{2\pi a}{h^2} (e^{-i\pi q h/\ell} - 2 + e^{i\pi q h/\ell})$$

$$\left\{ e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \right.$$

$$e^{-i\pi q h/\ell} + e^{i\pi q h/\ell} = \cos(\pi q h/\ell) - i \sin(\pi q h/\ell) + \cos(\pi q h/\ell) + i \sin(\pi q h/\ell) = 2 \cos(\pi q h/\ell)$$

$$(p_{q-1}) = \frac{2\pi a}{h^2} (\cos(\pi q h/\ell) - 1)$$

Лемма

$$p_{q-1} = \frac{2\pi a}{h^2} \left(-2 \sin^2 \frac{\pi q h}{2\ell} \right),$$

$$p_q = 1 - \frac{4\pi a}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2\ell}$$

$$|p_{q-1}| \leq 1, \text{ т.е. } -1 \leq p_{q-1} \leq 1$$

$$\frac{p_{q-1} \leq 1}{1}$$

$$1 - \frac{4\pi a}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2\ell} \leq 1, \text{ т.е. } \frac{4\pi a}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q h}{2\ell} \geq 0$$

$$\rho_q \geq -s$$

$$1 - \frac{4\alpha}{h^2} \rho_m^2 \frac{\pi q b}{2L} \leq -s$$

~~$$\frac{4\alpha}{h^2} \leq 2$$~~

$$\frac{4\alpha}{h^2} \sin^2 \frac{\pi q b}{2L} \leq 2$$

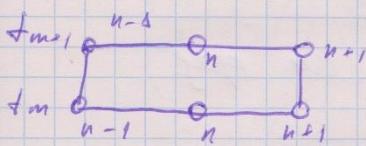
~~$$\frac{4\alpha}{h^2} \leq 2$$~~

$$s \leq \frac{h^2}{2\alpha} \quad (*).$$

Разностные схемы являются устойчивыми.
) решение уравнения вида $()$

На основе метода разделения переменных исследовать устойчивость шести-точечной разностной схемы для уравнения параболического типа.

37. На основе метода разделения переменных исследовать устойчивость шеститочечной разностной схемы для решения параболического типа.



Шеститочечная схема:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = \frac{a}{h^2} [6(y_{n-3} - 2y_{n-1} + y_{n+1}) + (1 - 6)(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1})] + f_n$$

При $\theta = 1$ и $\beta = 0$ биром. 6 генотрехтного схемы

$$z_n = \rho e^{i \pi q x_n / L}$$

$$z_n = z_n \rho q$$

Усл. устойчивости

$$\beta \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a^2}$$

Коэф. обр. устойчивости, тк $\theta = 3 > \frac{1}{2}$.

$$\text{При } \beta = 0 \quad \theta \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a^2} \quad (\text{исл. ар. кон})$$

$$\frac{\tilde{P}_{pq} e^{i\pi q x_n/\ell} (P_{pq} - 1)}{\tau} = \frac{q}{h^2} \left[\tilde{G} \left(\tilde{P}_{pq} e^{i\pi q (x_n-h)/\ell} - \tilde{P}_{pq} e^{i\pi q (x_n+h)/\ell} + \tilde{P}_{pq} e^{i\pi q (x_n+b)/\ell} \right) + (1-\delta) \left(\tilde{P}_{pq} e^{i\pi q (x_n-h)/\ell} - \tilde{P}_{pq} e^{i\pi q x_n/\ell} + \tilde{P}_{pq} e^{i\pi q (x_n+b)/\ell} \right) \right]$$

$$\frac{e^{i\pi q x_n/\ell} (P_{pq} - 1)}{\tau} = \frac{q}{h^2} \left[\tilde{G}_{pq} \left(e^{i\pi q (x_n-h)/\ell} - 2e^{i\pi q x_n/\ell} + e^{i\pi q (x_n+b)/\ell} \right) + (1-\delta) \left(e^{i\pi q (x_n-h)/\ell} - 2e^{i\pi q x_n/\ell} + e^{i\pi q (x_n+b)/\ell} \right) \right] \tau$$

$$\begin{aligned} P_{pq-1} &= \frac{2\pi q}{h^2} \left[\tilde{G}_{pq} \left(e^{-i\pi q h/\ell} - 2 + e^{i\pi q h/\ell} \right) + (1-\delta) \left(e^{-i\pi q h/\ell} - 2 + e^{i\pi q h/\ell} \right) \right] \\ &= \frac{2\pi q}{h^2} \left[\left(\tilde{G}_{pq} + (1-\delta) \right) \left(e^{-i\pi q h/\ell} - 2 + e^{i\pi q h/\ell} \right) \right] \end{aligned}$$

$$e^{i\pi q h/\ell} + e^{-i\pi q h/\ell} = 2\cos(\pi q h/\ell) \quad (\text{cm. resp.})$$

$$\tilde{P}_{pq-1} = \frac{2\pi q}{h} \left[\left(\tilde{G}_{pq} + \tilde{G}_{pq-1} \right) - 2\cos(\pi q h/\ell) \right]$$

$$P_{pq-1} = \frac{2\pi q}{h^2} \left[\left(\tilde{G}_{pq} - \tilde{G}_{pq-1} \right) \cdot 2\cos(\pi q h/\ell) \right]$$

$$\tilde{P}_{pq-1} = -\frac{4\pi q}{h^2} \left[\left(\tilde{G}_{pq-1} + 1 \right) \sin^2(\pi q h/\ell) \right]$$

~~\tilde{P}_{pq-1}~~ ~~$\frac{4\pi q}{h^2}$~~

$$(P_{pq-1}) \left(1 + \frac{4\pi q}{h^2} \tilde{G}_{pq-1} \sin^2(\pi q h/\ell) \right) = -\frac{4\pi q}{h^2} \sin^2(\pi q h/\ell)$$

$$pq - s = -\frac{4\pi a}{h^2} \sin^2(\pi q h/e) / \left(1 + \frac{4\pi a}{h^2} \tilde{\delta} \sin^2(\pi q h/e)\right)$$

$$\begin{array}{l} pq \leq s \\ pq - s \leq 0 \end{array}$$

$$\frac{\frac{4\pi a}{h^2} \sin^2(\pi q h/e)}{\left(1 + \frac{4\pi a}{h^2} \tilde{\delta} \sin^2(\pi q h/e)\right)} \geq 0$$

$$\begin{array}{l} pq = -s \\ pq - s = -2 \end{array}$$

$$\frac{\frac{4\pi a}{h^2} \sin^2(\pi q h/e)}{1 + \frac{4\pi a}{h^2} \tilde{\delta} \sin^2(\pi q h/e)} \leq 2$$

$$\frac{4\pi a}{h^2} \sin^2(1) \leq 2 + \frac{8\pi a}{h^2} \tilde{\delta} \sin^2(1)$$

$$\tilde{\delta} = \left(\frac{4\pi a}{h^2} \sin^2(1) \right)^{-2} \left(\frac{8\pi a}{h^2} \sin^2(1) \right)$$

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\pi a \sin^2(1)}$$

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\pi a} \quad [\text{как и предположено}]$$

Уравнения в частных производных. Сходимость разностных схем.
Теорема о сходимости разностного решения к точному.

38. Уравнение 6 главы производных.

Сходимость разностных схем. Теорема о
сходимости разностной решения к точному.

Имеем точное и разностное решение

$$\text{Диф. ур.: } \begin{cases} Ay = f \\ B = \beta \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{array}{l} \text{Разн.} \\ \text{сх.:} \end{array} \begin{cases} A_n y = \varphi_n \\ B_n y = \beta_n \end{cases} \quad (2)$$

Разностное решение склоннее к точному, если

$$\|u - y\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$$

Разностное решение удачнее приближения точности
по отдельности h и по отдельности τ , если

$$\|u - y\| = O(\tau^q + h^p) \text{ при } h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$$

Какие имеют нормы:

Чебышевская норма:

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq b} |f| \rightarrow \|y\| = \max_{0 \leq n \leq N} |y_n|$$

Квадратичная норма:

$$\|f\|_{L_2} = \left[\int_a^b p(x) f^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \|y\| = \left[\sum_{n=0}^{N-1} p_n y_n^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Основные меры по сокращению:

Из аппроксимации и уменьшения неизвестного коэффициента - первоначальной задачи.

Более разберём:

Если алгоритм дифференциального языка (1) постулирует корректное и разностное соотношение (2) аппроксимирующим (1), то разностное решение близится к истинному.

Корректность непротиворечивости существование и единственность решения со связью с устойчивостью.

Это алгоритм:

$$\begin{aligned} \text{Используем: } & \psi_n = \varphi_n - A_n u \\ & p_n = B_n - B_n u \end{aligned} \quad (3)$$

Перенесём (3):

$$A_n u = \varphi_n - \psi_n \quad (4)$$

$$B_n u = \beta_n - p_n$$

Сравнив (2) и (4)

Из устойчивости разностного соотношения:

при $\varphi_n \rightarrow 0$, $p_n \rightarrow 0$: $u \rightarrow y$

$$\|y - u\| \rightarrow 0$$

Из аппроксимации разностной соотношения:

при $h \rightarrow 0$, $T \rightarrow 0$; $\psi_n \rightarrow 0$, $p_n \rightarrow 0$

Сформулируем это в терминах ε - δ :

А $\varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon)$:

при $\|\psi_n\| < \delta(\varepsilon)$, $\|p_n\| \leq \delta(\varepsilon)$

$$\text{тогда } \|u - y\| < \varepsilon$$

Уз аппроксимация:

$\forall \delta(\varepsilon) \exists h_0$: при $h < h_0$

будет $\|\psi_n\| \leq \delta$, $\|p_n\| \leq \delta$

Для каждого коэффициента ^{дифференциальных} залог нереди
точности разностей состоит из меньше нереди
еи аппроксимации.

Метод продольно-поперечной прогонки для решения многомерных уравнений в частных производных.

39. Метод продольно-поперечной прогонки для
решения многомерных уравнений в частных производных.

Многомерное уравнение в частных производных

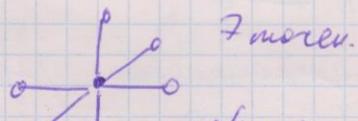
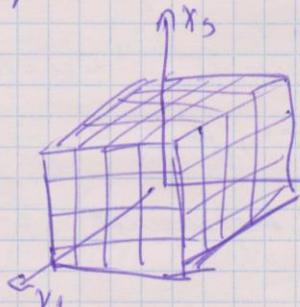
$$\frac{\partial u}{\partial t} = a / \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f(x_1, x_2, x_3, t)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_1 u + A_2 u + A_3 u + f(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$A_i u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

В приведении

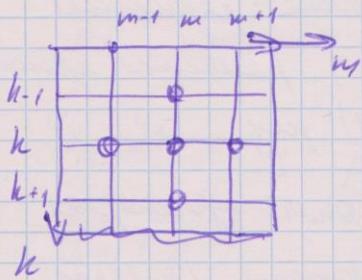


$$y(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) = y_{k \text{ moren}}$$

Семьи на шубе

Строим куб и производим аппроксимацию на 7 точках.

На основе 1 зеркальной ячейки



Задействовано 5 ~~шести~~ узлов
Приравняем элемент с 5-ти
узловым кубическим полиномом (решетка
его в виду).

Способ решения:

1) Прямолинейный метод:

Пришлем, что 2 независимые координаты

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_1 + A_2 - f(x_1, x_2, t)$$

Кубично 5-ти узловый полином приведем к виду, решаемой прямолинейно:

Убеждаемся приведенного вида в брачии

$$\bar{t}_m = t_m + 0,5 \tau$$

$$\frac{\bar{y}_{k,m} - y_{k,m}}{0,5 \tau} = \bar{A}_1 h + \bar{A}_2 h - f(x_1, x_2, \bar{t})$$

$$\frac{\hat{y}_{k,m} - \bar{y}_{k,m}}{0,5 \tau} = \bar{A}_1 h + \bar{A}_2 h - f(x_1, x_2, \bar{t})$$

применение для операторов:

Заменить A на \bar{A} (метод)

$$\frac{\overline{y_{k,m}} - \overline{y_{k-1,m}}}{0,5\tau} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + f(x_1, x_2, t) \quad \begin{array}{l} \text{обратное разностное} \\ \text{сравнение, начинаясь с} \\ \text{уравнения } (k-1) \text{ шага} \end{array}$$

$$\frac{\overline{y_{k,m}} - \overline{y_{k-1,m}}}{0,5\tau} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + f(x_1, x_2, t) \quad \begin{array}{l} \text{один шаг} \\ \text{последнее} \\ \text{уравнение } (M-1) \text{ шага} \end{array}$$

$$\bar{A}_1 = a \frac{\overline{y_{k-1,m}} - 2\overline{y_{k,m}} + \overline{y_{k+1,m}}}{h_1^2}$$

$$\bar{A}_1 = a \frac{\overline{y_{k-1,m}} - 2\overline{y_{k,m}} + \overline{y_{k+1,m}}}{h_1^2}$$

$$\bar{A}_2 = a \frac{\overline{y_{k,m-1}} - 2\overline{y_{k,m}} + \overline{y_{k,m+1}}}{h_2^2}$$

$$\bar{A}_2 = a \frac{\overline{y_{k,m-1}} - 2\overline{y_{k,m}} + \overline{y_{k,m+1}}}{h_2^2}$$

Получаем $(k-1)$ уравнение (K число решений по x_1 :

$x_1, k, k=1, K$) по x_1 и $M-1$ (M - количество x_2 : $x_2, m=1, M$) по x_2

Или же $(k-1) (M-1)$ уравнений

В трехмерной задаче метод применения аналогичен, но к трехмерному случаю не имеет аналога т.к. аналогичные методы не существуют.

Локально-одномерный метод для решения многомерных уравнений в частных производных.

Ч.о. локально-одномерный метод для решения многомерных уравнений в частных производных.

$$\frac{\hat{y}_d - y_d}{\frac{\tau}{P}} = \rho A_d + f \quad \rho - \text{параметр}$$

$$\frac{\hat{y}_d - y_d}{\frac{\tau}{P}} = A_2 + \frac{1}{P} f(x_1, t_1, x_3, t) \quad \text{альфа}$$

$$d = i, p$$

$$y_d = \hat{d}^{-1}, \quad g_i = y_{k, m, n} \rightarrow \text{оператор}$$

Одновременно можно 1 оператор (решить его в зеркале)

Методом проекции решается зеркало с 1 оператором, поменяв со 2-ой. (При этом же y_d берется регуляризация первым проекции, поменяв с 3-м 1 y_d -регуляризацией второй проекции) и т.д. Применяется для каждого шага квадратичного.

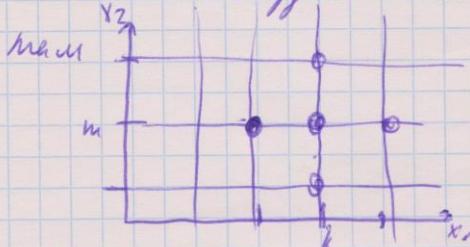
Вероятностный метод для решения многомерных уравнений в частных производных.

Ч.1. Вероятностный метод решения многомерных уравнений в частных производных.

Двумерная задача (демонстрировалась)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)$$

Схема: в узлах находят гамильтонианы



Процесс: за время τ все газы из ячейки
переходят в соседние ячейки. Понадобится новое
распределение функции.

$$\hat{y}_{n,m} = \frac{1}{4} (y_{k-1,m} + y_{k+1,m} + y_{k,m-1} + y_{k,m+1})$$

$$\hat{y}_{n,m} - y_{nm} = \frac{1}{4} (y_{k-1,m} - 2y_{k,m} + y_{k+1,m}) + \frac{1}{4} (y_{k,m-1} - 2y_{k,m} + y_{k,m+1})$$

Получим 2 разностных оператора:

$$T_{K,m} = \frac{\sum_j T_{j,p} \cdot K}{\Delta t m}$$