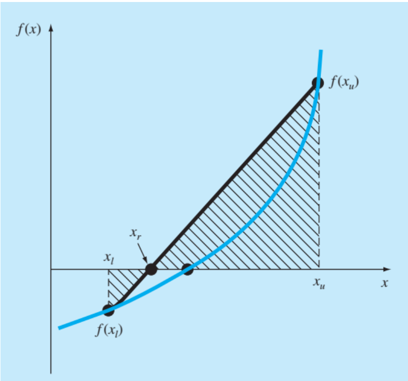
dr hab. inż. Mirosław Łątka
mgr inż. Klaudia Kozłowska
Metody numeryczne
Semestr zimowy 2019/20

Laboratorium 4
Numeryczne metody wyznaczania pierwiastków funkcji

1. Metoda regula falsi (fałszywej liniowości, ang. *method of false position, linear interpolation method*)

Mankamentem metody bisekcji jest podział przedziału od x_l do x_u na dwie połówki bez względu na to, jakie wartości przyjmuje funkcja na końcach przedziału np. jeżeli $f(x_l)$ jest bliżej zera niż $f(x_u)$, to jest bardziej prawdopodobne, że pierwiastek leży bliżej x_l niż x_u. W metodzie regula falsi prowadzimy linię prostą przez punkty $[x_l, f(x_l)]$ i $[x_u, f(x_u)]$. Przecięcie tej linii z osią X jest przybliżeniem pierwiastka. Im lepsze jest liniowe przybliżenie funkcji, tym metoda jest bardziej efektywna.



Istotę metody ilustruje powyższy rysunek. Przybliżenie pierwiastka wyznaczane jest z następującego wzoru:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}.$$

2. Metoda punktu stałego (ang. *fixed-point iteration*)

Rozważmy następujące równanie różnicowe:

$$x_{n+1} = m \times x_n.$$

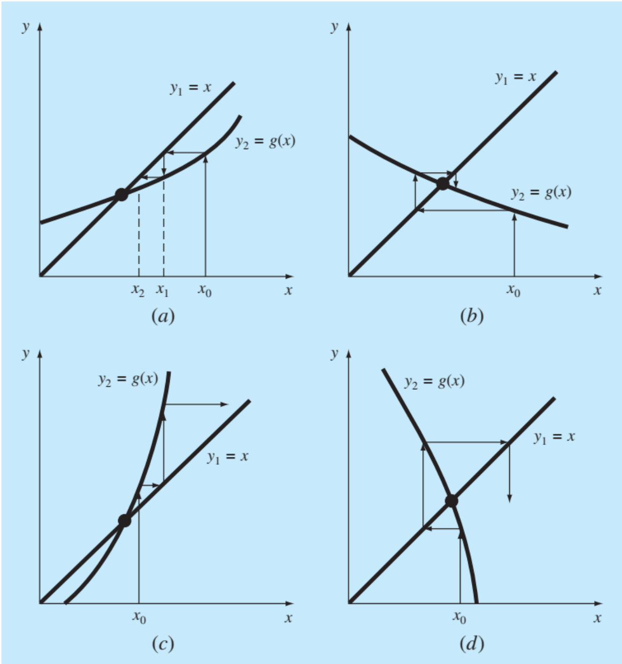
a) Dla $x_0 = 1$ i $m = 0.5$ oblicz pięć pierwszych iteracji.

b) Powtórz obliczenia dla $m = 2$.

Znajdowanie pierwiastka funkcji $f(x)$ można sprowadzić do iterowania następującego równania różnicowego:

$$x_{n+1} = g(x_n) = f(x_n) + x_n.$$

Na przykład, dla funkcji sinus $g(x) = sin(x) + x$. Wykonaj kilkanaście iteracji rozpoczynając od $x_0 = 0.5$.

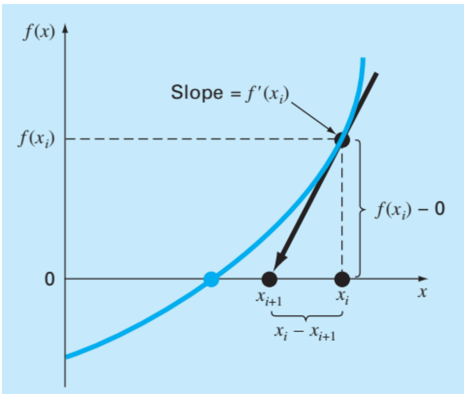


Powyższy rysunek pokazuje, kiedy metoda punktu stałego umożliwia znalezienie pierwiastka.

3. Metoda Newtona-Raphsona (stycznych)

Jeżeli początkowym przybliżeniem pierwiastka jest x_i, to przecięcie stycznej do wykresu funkcji w punkcie $[x_i, f(x_i)]$ z osią X służy jako kolejne przybliżenie pierwiastka:

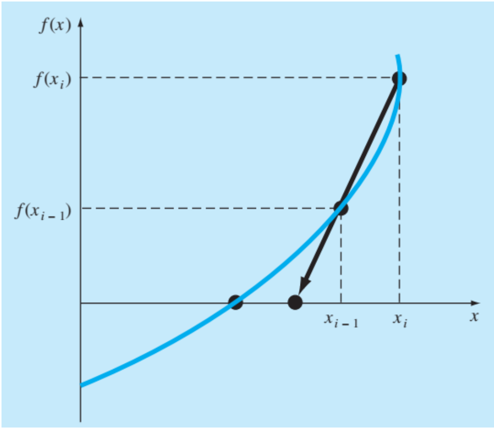
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$



4. Metoda siecznych

Metoda Newtona-Raphsona wymaga znajomości pierwszej pochodnej. Są jednak funkcje, dla których wyznaczenie pochodnych jest albo skomplikowane, albo niewygodne do obliczenia numerycznego. W metodzie siecznych pochodną funkcji *f(x)* w punkcie x_i przybliżamy za pomocą następującego wzoru:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}.$$



Zwróć uwagę, że w tej metodzie konieczne jest podanie dwóch wartości przybliżeń pierwiastka - x_i i x_{i-1}.

Zadania do wykonania

1. Wyznacz pierwiastek funkcji

$$f(x) = e^{-x} - x$$

za pomocą metod: bisekcji, regula falsi, punktu stałego, stycznych i siecznych. Za dokładną wartość pierwiastka przyjmij 0.56714329. Dla każdej iteracji analizowanych metod oblicz błędy ε_a i ε_t. Wykonaj wykres zależności *log* ε_t od kolejnych iteracji. Przedstaw wyniki na jednym wykresie.

2. Napisz program implementujący wszystkie opisane metody. Wykorzystaj interfejsy. Przeprowadź testy jednostkowe.