

Laboratorium 1

Błędy w obliczeniach numerycznych

Wszystkie zadania należy wykonać w języku Java.

1. Rozwinięcie Maclaurina funkcji wykładniczej opisane jest wzorem:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

gdzie n to liczba naturalna. W praktyce zastępuje się je sumą częściową:

$$e^x \cong 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{N!} x^N,$$

gdzie N to liczba naturalna.

- Oblicz błędy ϵ_t i ϵ_a dla sześciu pierwszych sum częściowych (od $N=1$ do $N=6$) i $x=0.5$.
- Przeprowadź analogiczne obliczenia dla $x=10$ i $x=-10$ ($N=30$). Dokonaj analizy błędów obliczeń.
- Napisz funkcję, która oblicza sumę częściową dla podanego argumentu i błędu ϵ_s . Obliczenia prowadzone są tak długo jak $\epsilon_a > \epsilon_s$.

2. Oblicz e^{-10} na dwa sposoby:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

oraz

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots}$$

dla $N=20$. Porównaj błąd względny procentowy ϵ_t dla tych dwóch obliczeń.

3. Szereg

$$f(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^4}$$

dąży do wartości $\pi^4/90$ gdy n dąży do nieskończoności. Oblicz sumę częściową dodając kolejne wyrazy od $i=1$ do $n=10000$. Powtórz obliczenia sumując w odwrotnej kolejności. Porównaj wyniki (błąd względny procentowy ε_i).

4. Podstawową własnością liczb rzeczywistych jest prawo rozdzielności:

$$(x + y)z = xz + yz.$$

W zadaniu należy sprawdzić, czy liczby zmiennoprzecinkowe zachowują to prawo. Napisz program, w którym 1000 razy wylosujesz liczby x , y i z z zakresu $(0,1)$ i sprawdzisz, czy prawo zostało spełnione (czy obie strony równania są równe). Sprawdź w ilu przypadkach prawo zostało zachowane a w ilu nie. Wyświetl w konsoli każdy zestaw liczb x , y i z , który doprowadził do niepoprawnego wyniku.

Powtórz to zadanie dla:

a) prawa łączności

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

b) prawa przemienności

$$x + y = y + x.$$

Error Definitions

True error

$$E_t = \text{true value} - \text{approximation}$$

True percent relative error

$$\varepsilon_t = \frac{\text{true value} - \text{approximation}}{\text{true value}} 100\%$$

Approximate percent relative error

$$\varepsilon_a = \frac{\text{present approximation} - \text{previous approximation}}{\text{present approximation}} 100\%$$

Stopping criterion

Terminate computation when

$$\varepsilon_a < \varepsilon_s$$

where ε_s is the desired percent relative error