dr hab. inż. Mirosław Łątka
mgr inż. Klaudia Kozłowska
Metody numeryczne
Semestr zimowy 2019/20

Laboratorium 7
Równania różniczkowe zwyczajne - metody numeryczne

1) Napisz klasę, która umożliwi całkowania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

metodą Eulera:

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i)h.$$

2) Tak zwane jednokrokowe metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu mają taką samą ogólną postać:

nowa wartość= stara wartość + nachylenie × długość kroku.

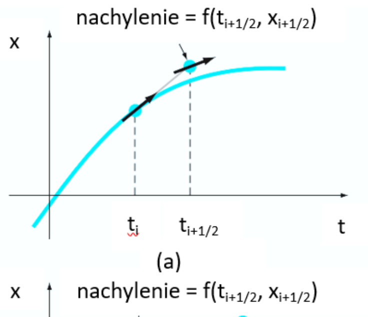
Metody różnią się między sobą sposobem obliczania wartości nachylenia. W metodzie Eulera nachylenie to wartość pochodnej obliczonej dla punktu początkowego: $f(t_i, x_i)$. W zmodyfikowanej metodzie Eulera obliczenie nachylenia przebiega w następujący sposób.

- Korzystając z wartości pochodnej dla punktu początkowego $f(t_i, x_i)$ znajdujemy przybliżoną wartość rozwiązania dla środka przedziału [t_i, t_{i+1}]:

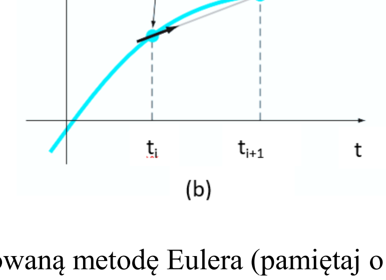
$$x_{i+1/2} = x_i + f(t_i, x_i)h/2.$$

- Za wartość nachylenia przyjmujemy wartość pochodnej w środku przedziału: $f\left(t_{i+1/2}, x_{i+1/2}\right)$.
- Nową wartość obliczamy w następujący sposób:

$$x_{i+1} = x_i + f\left(t_{i+1/2}, x_{i+1/2}\right)h.$$



(a)



(b)

Zaimplementuj w Javie zmodyfikowaną metodę Eulera (pamiętaj o użyciu interfejsów).

3) Znajdź rozwiązanie równania różniczkowego z poprzedniej listy za pomocą zmodyfikowanej metody Eulera. Porównaj rozwiązanie z wynikiem całkowania metodą Eulera. Porównania dokonaj dla różnych kroków całkowania h.

4) Na jednej z list rozważaliśmy swobodny spadek spadochroniarza. Równanie ruchu wynikające z drugiej zasady dynamiki Newtona ma następującą postać:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v.$$

Powyższe równanie może zostać rozwiązane zarówno analitycznie, jak i numerycznie. Bardziej dokładny model opisany jest poniższym równaniem:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v\left[v + a\left(\frac{v}{v_{max}}\right)^b\right],$$

gdzie a, b i v_{max} są stałymi wyznaczonymi eksperymentalnie. Rozwiązanie analityczne zmodyfikowanego równania jest jednak znacznie trudniejsze.

Wykorzystaj zmodyfikowaną metodę Eulera do znalezienie przybliżonego rozwiązania numerycznego obu modeli. Porównaj wykresy prędkości jako funkcji czasu dla obu modeli. Przyjmij: $g = 9.81$, $c = 12.5$, $m = 68.1$, $v = 0$ dla $t = 0$, $a = 8.3$, $b = 2.2$ i $v_{max} = 46$.

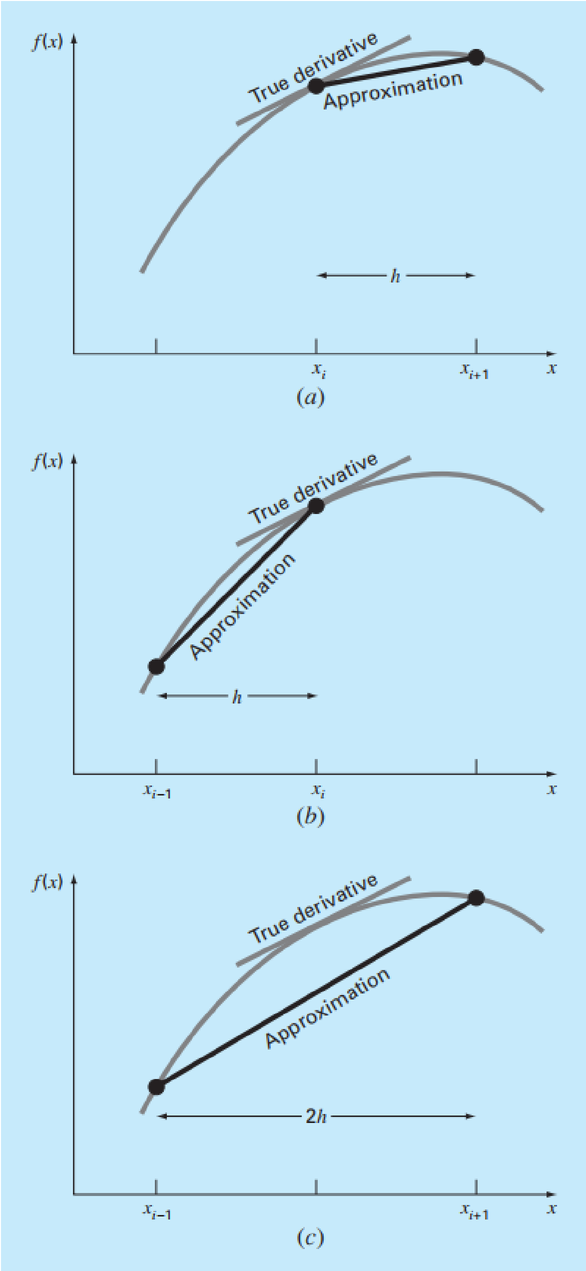
5. Rozważmy następujące równanie różniczkowe na przedziale $t = [0, 2]$ i $x(0) = 1$:

$$\frac{dx}{dt} = xt^2 - 1.1x.$$

a) Rozwiąż równanie analitycznie.

b) Rozwiąż równanie za pomocą metody Eulera i jej zmodyfikowanej wersji dla $h = 0.5$ i 0.25. Przeanalizuj dokładność obu metod.

Dodatek 1.



Trzy sposoby obliczenia przybliżenia wartości pochodnej w punkcie.