Übungsstunde 1 (21.09.2020)

Geraden und lineare Gleichungssysteme, Ebenen

In dieser Übunsstunde betrachten wir $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. Das Rechnen mit Geraden und Ebenen ist Motivation für das Lösen von Gleichungssystemen. Später können wir $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ benutzen um eine Intuition für manche Vektorräume zu entwickeln.

1 Geraden in $\mathbb{R}^2$

1.1 Darstellungen von Geraden im $\mathbb{R}^2$

Es gibt zwei nützliche Arten, Geraden in der Ebene darzustellen:

Definition (0.2.4 in [F]). *Eine Teilmenge $L \subset \mathbb{R}^2$ heißt* Gerade*, wenn es $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ gibt, sodass*

$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\right\}.$$

Satz. *Eine Teilmenge $L \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann eine Gerade, wenn es $v,\ w \in \mathbb{R}^2$ gibt mit $w \neq 0$ sodass*

$$L = \{v + \lambda w | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Diese Art von Darstellung heisst *Parameterdarstellung*.

Man kann eine Gerade somit als Bild einer Funktion

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \lambda \mapsto v + \lambda w$$

auffassen. Diese Funktion ist die *Parametrisierung* der Geraden.

Die beiden Darstellungen lassen sich wie folgt in einander überführen:

1. Von linearer Gleichung in Parameterdarstellung:
   Falls a $\neq$ 0 und b $\neq$ 0: setze y = λ und forme Gleichung nach x um. **Falls a = 0:** Setze x = λ. Eine Gleichung für y (ohne Abhängigkeit von λ) ergibt sich direkt aus der linearen Gleichung für die Gerade.(analog für b=0) Ausführlicher findet ihr das im Buch von Fischer auf S.5 in Kapitel 1. (https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-03945-5).

2. Von Parameterdarstellung in lineare Gleichung: Alle Punkte (x,y) $\in$ L sind von der Form (x,y) = $(v_1 + \lambda w_1,\ v_2 + \lambda w_2)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Falls $w_1 \neq 0$: Umstellen von x = $v_1 + \lambda w_1$ nach λ ergibt $\lambda = \frac{x-v_1}{w_1}$. Dies eingesetzt in die Gleichung $y = v_2 + \lambda w_2$ ergibt $y = v_2 + \frac{x-v_1}{w_1} w_2$.
   Falls $w_1 = 0$: x = $v_1 + \lambda w_1 = v_1$ (y beliebig).

Zur Übung haben wir hier Aufgabe 1 und 3 gelöst (siehe unter Aufgaben).

1.2 Schnittpunkte von Geraden

Für die Schnittmengen von 2 Geraden in der Ebene gibt es drei Möglichkeiten: Alle Punkte sind Schnittpunkte (d.h. die Geraden sind identisch), sie schneiden sich in genau einem Punkt, oder sie schneiden sich in keinem Punkt (d.h. sie sind parallel, aber nicht identisch).
Die Schnittmenge bestimmen wir indem wir die linearen Gleichungen bestimmen und dann das resultierende LGS lösen.

Zur Übung haben wir Aufgabe 2 (a) gelöst.

2 Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$

2.1 Geraden im $\mathbb{R}^3$

Im $\mathbb{R}^3$ lässt sich eine Gerade in Parameterdarstellung analog wie im $\mathbb{R}^2$ definieren:

Definition (0.2.4 in [F]). *Eine Teilmenge $L \subset \mathbb{R}^3$ heißt* Gerade*, wenn es v, $w \in \mathbb{R}^3$ mit $w \neq 0$ gibt, sodass*

$$L = \{v + \lambda w | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Es gibt jedoch 2 wesentliche Unterschiede:

1. Zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$ sind im allgemeinen windschief, d.h ohne Schnittpunkt und nicht parallel.
2. Zur Beschreibung einer Gerade braucht man zwei lineare Gleichungen, mit jeweils 3 Variablen.

2.2 Darstellungen von Ebenen

Definition (0.3.2 in [F]). *Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^3$ heißt* Ebene*, wenn es $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ gibt, sodass*

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\right\}.$$

Bemerkung: Eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ kann somit als Schnittmenge zweier Ebenen aufgefasst werden.

Wir haben auch das **Parametrisieren von Ebenen** besprochen. Die Erklärung hierzu findet ihr in Fischer 0.3.3. Dies übt ihr in Aufgabe 5 von Serie 1.

2.3 Schnittmengen von zwei Ebenen

Für die Schnittmengen von zwei Ebenen gibt es im Allgemeinen 3 Möglichkeiten: Alle Punkte sind Schnittpunkte (d.h. die Ebenen sind identisch), die Schnittmenge ist eine Gerade, oder sie schneiden sich in keinem Punkt (d.h. sie sind parallel, aber nicht identisch).

Die Schnittmenge zweier Ebenen in Koordinatenform lässt sich durch die Lösung des LGS bestimmen, welches aus den definierenden Gleichungen der Ebenen besteht. Dies kann man wie folgt berechnen. Seien (1), (2) die definierenden Gleichungen der Ebenen.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \tag{1}$$
$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = d \tag{2}$$

1. Elimination von x_1 $\rightarrow$ ergibt für Gleichung von x_3 in Abhängigkeit von x_2
2. Definiere $x_2 = t$ (d.h., wähle x_2 als den Parameter der Lösungsmenge) $\rightarrow$ ergibt Ausdruck für x_3 in Abhängigkeit des Parameters t.
3. Setze Ausdrücke für x_2, x_3 in Abhängigkeit von t in (1) ein $\rightarrow$ ergibt Ausdruck für x_1 in Abhängigkeit von t.

Bei diesem "Rezept" können 3 Fälle vorkommen:

1. Bei Schritt 1. kommt eine triviale Gleichung raus (d.h. $0 = 0$). Dies bedeutet dass alle Punkte, welche eine der Gleichungen erfüllt, beide Gleichungen erfüllt.
2. Bei Schritt 1. kommt eine falsche Gleichung raus (z.B. $4 = 5$). Dies bedeutet, dass es keinen Punkt in $\mathbb{R}^3$ gibt, der beide Gleichungen erfüllt.
3. Es ergibt sich als Lösungsmenge eine Gerade in Parameterform (mit Parameter t, welcher beliebig ist).

Wir haben zur Übung das Beispiel auf S.15 im Buch von Fischer durchgerechnet.

Nebenbemerkung (nicht besprochen): Für zwei Ebenen in Parameterform kann man die Schnittgerade dadurch bestimmen, dass man ein LGS aufstellt, in dem die Parametrisierungen gleichgestellt werden, siehe (3). Hier sind $\alpha, \beta, \delta, \eta \in \mathbb{R}$ die Parameter und a, b, c, d, e, f $\in \mathbb{R}^3$. Das LGS lässt sich lösen indem man erst eine Variable eliminiert und dann so vorgeht wie im "Rezept" für die Koordinatenform.

$$\alpha a + \beta b + c = \delta d + \eta e + f \tag{3}$$

3 Aufgaben

3.1 Aufgabe 1

Fassen Sie $\mathbb{R}^2$ als die xy-Ebene mit den üblichen kartesischen Koordinaten auf. Zeichnen Sie (für jede Teilaufgabe jeweils in dasselbe Koordinatensystem) die Geraden
(a) $L_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 2y = c_i\}$ für $c_i \in \{1, 2, 3\}$
(b) $L_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2}y = c_i\}$ für $c_i \in \{1, 2, 3\}$
Finden Sie jeweils eine Parameterdarstellung der Geraden.

Lösung: Teil (a) $L_1 = \left\{\left(\frac{1}{3}, 0\right) + t\left(\frac{2}{3}, 1\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\left(0, -\frac{1}{2}\right) + t\left(1, \frac{3}{2}\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ (b) $L_i = \{(0, 2c_i) + t\,(1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$

3.2 Aufgabe 2

(a) Lösen Sie die folgenden drei linearen Gleichungssysteme:

$$\text{(i)}\ \begin{aligned} 5x - 2y &= 9 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned} \qquad \text{(ii)}\ \begin{aligned} 3x - 4y &= 2 \\ 6x - 8y &= 5 \end{aligned} \qquad \text{(iii)}\ \begin{aligned} 7x + 8y &= 3 \\ -3.5x - 4y &= -1.5 \end{aligned}$$

Lösung:

(i) $L = \{(3, 3)\}$

(ii) $L = \emptyset$.

(iii) $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 7x + 8y = 3\}$.

(b) Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

$$\text{(i)}\ \begin{aligned} x - 2y - 3z &= 4 \\ 4x + y - 2z &= -3 \\ -3x + 4y + z &= -2 \end{aligned} \qquad \text{(ii)}\ \begin{aligned} x - 4y + 9z &= 16 \\ 4x + 2y - z &= 0 \\ -7x - 8y + 11z &= 15 \end{aligned}$$

Lösung: Für (i) ist die Lösungsmenge $\{(-1, -1, -1)\}$, für (ii) ist die Lösungsmenge die leere Menge $\emptyset$.

3.3 Aufgabe 3

Stellen Sie die Gerade $L = \left\{(1, 2) + t\left(-3, \frac{1}{2}\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ als die Lösungsmenge einer Gleichung der Form $ax + by = c$ dar. **Lösung:** $L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 6y + x = 13\right\}$.