

Plan für die Übungsstunde 11

Inverse, Transformationsformel, Ähnlichkeit, Quotientenräume
Uebung am 30.11.20

1 Matrix Inverse

Sei A ein $n \times n$ matrix über einem Körper K . Wir möchten, wenn möglich, ein matrix A^{-1} finden so dass $AA^{-1} = A^{-1}A = \text{Id}$. Man schreibt die Inverse als Matrix aus ihren Spalten:

$$A^{-1} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \quad (1)$$

Also hat man:

$$AA^{-1} = A(w_1, \dots, w_n) = (Aw_1, \dots, Aw_n) = \text{Id} = (e_1, e_2, \dots, e_n) \quad (2)$$

Man bekommt dann ein System von n lineare Gleichungen mit n^2 Unbekannten. Die n LGS sind dann losbar genau dann wenn alle gleichungen linear unabhängig sind, d.h. $\text{rang}(A)=n$ oder alle Zeilen oder Spalten von A linear unabhängig sind. Man kann den Gauss benutzen, um

$$(A|\text{Id}) \rightarrow (\text{Id}|A^{-1}) \quad (3)$$

zu berechnen. Bemerke dass falls wir weniger als n Pivot kriegen, dann ist A nicht invertierbar.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ hat die Inverse $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. (Rechnung im Detail handschriftlich am Ende des Dokuments)

Zu einer allgemeinen 2×2 Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist die Inverse gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad (4)$$

vorrausgesetzt $ad - bc \neq 0$.

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ hat die Inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Cramersche Regel:

Betrachte das Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer invertierbaren Matrix A . Dann können wir auf beiden Seiten mit A^{-1} multiplizieren und erhalten:

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} db_1 - bb_2 \\ ab_2 - cb_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} b_2 & d \\ a & b_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (5)$$

2 Ähnliche Matrizen

Man kann eine Relation auf dem Raum der $n \times n$ -Matrizen wie folgt definieren: Seien

$$A, B \in M_{n \times n}(K), A \sim B : \Leftrightarrow \exists Q \in Gl_n(K) : Q^{-1}BQ = A \quad (6)$$

Jede Äquivalenzklasse stellt eine lineare Abbildung $f : K^n \rightarrow K^n$ bezüglich verschiedener Basen dar. Wenn A die Darstellungsmatrix von f bezüglich B und \tilde{A} die Darstellungsmatrix bezüglich \tilde{B} . Dann gilt

$$\tilde{A} = M_B^B A M_{\tilde{B}}^{\tilde{B}} = Q^{-1} A Q \quad (7)$$

und dann sind A, \tilde{A} ähnlich.

Eigenschaften von ähnlichen Matrizen:

1. Sei A invertierbar und $B \in [A]$ dann ist auch B invertierbar: für $B = Q^{-1} A Q$ gilt, dass $B^{-1} = Q^{-1} A^{-1} Q$. Man prüft das durch Nachrechnen mit Kürzen.
2. Die Spur $\text{Spur}(A)$ oder $\text{tr}(A)$ ist konstant auf der Äquivalenzklasse von A : hier muss zuerst zeigen dass $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Dann gilt $\text{tr}(A) = \text{tr}(Q^{-1} B Q) = \text{tr}(B Q Q^{-1}) = \text{tr}(B)$. Man definiert die trace für ein $n \times n$ Matrix A als $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$

Lemma

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A_{ij} B_{ji}) \quad (8)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (B_{ji} A_{ij}) = \sum_{j=1}^n (AB)_{jj} \quad (9)$$

$$= \text{tr}(BA) \quad (10)$$

ich finde dass gut da es trainiert auch die matrixmultplikation von ein mehr abstrakt sicht.

1. Aufgabe: welche Paaren der folgenden Matrizen sind ähnlich?

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Antwort: Nein, da $\text{tr}(A) = 4 \neq 5 = \text{tr}(B)$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ Antwort: Nein, da $\text{rang}(A) = 2 \neq 1 = \text{rang}(B)$

iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ Antwort: unsere 2 Kriterien (trace and rank) bringen uns nichts, da $\text{tr}(A) = \text{tr}(B) = 0$ und $\text{rank}(A) = 1 = \text{rank}(B)$. Wir versuchen eine Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die durch A und B dargestellt werden kann zu finden. Zum Beispiel betrachten wir

$$f(x, y) = (0, x) \quad (11)$$

Hier sieht man direkt dass A die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Standardbasis ist. Man bemerkt, dass

$$f(1, 1) = (0, 1) = \frac{1}{2}(1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1) \quad (12)$$

und

$$f(1, -1) = (0, 1) = \frac{1}{2}(1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1) \quad (13)$$

deswegen ist die darstellungsmatrix von bezüglich $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ gerade B . Dann gilt $A \sim B$. Bem: hier Q ist die Basiswechselmatrix

$$Q = M_B^E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

3 Darstellungsmatrix und Basiswechsel

Wiederholung der Notationen aus dem Skript. Altklausuraufgabe Frühjahr 2019 Aufgabe 5, die Lösung findet ihr in der Prüfungssammlung des VMP.

Weitere Übungen zu Matrizen (nur 4 in Übung besprochen)

- Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A - Id$, rechne B^n . Deduce A^n for any $n \in N$.

Lösung:

rechne B^2 and B^3 per hand. we remark that $AB = BA$ and that $B^3 = 0$. dann gilt es mit binomische lehrsatz

$$A^n = Id^n + \binom{n}{1} Id^{n-1}B + \binom{n}{2} Id^{n-2}B^2 \quad (15)$$

welche gibt

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

- Eine matrix $M \in M_n(K)$ is said to be stochastic if the sum of all coefficients in each columns is 1, that is

$$\sum_{i=1}^n M_{ik} = 1, \forall k \quad (17)$$

show that if A,B are stochastic, so is AB

Lösung:

$$\sum_{i=1}^n (AB)_{ik} = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{jk} = \sum_j \sum_i A_{ij} B_{jk} \quad (18)$$

$$= \sum_j B_{jk} \sum_i A_{ij} = 1 * 1 = 1 \quad (19)$$

weil k beliebig war, zeigt das die aussage

- maybe too dificult but let see: let be $A \in M_{nxn}(K)$ nilpotent, that is $\exists n \in N$ su that $A^n=0$, show that $(A-Id)$ is inversible and compute its inverse.

Lösung:

we have to think to the geometric serie from analysis. For $x < 1$ we have

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, \quad (20)$$

that is

$$(Id - A)(Id + A + A^2 + \dots + A^{n-1}) = Id - A + A - A^2 + A^2 - \dots + A^{n-1} - A^n = Id - A^n = Id \quad (21)$$

4. Let $A \in M_{3,2}(R)$ and $B \in M_{2,3}(R)$ such that

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

show that

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Lösung:

let f, g the linear map whom matrix representations in the standard base are given by A and B . We know then that

$$f(g(e_2)) = e_2, f(g(e_3)) = e_3 \quad (24)$$

therefore

$$g(f(g(e_2))) = g(e_2), g(f(g(e_3))) = g(e_3) \quad (25)$$

but we also know that $g(e_1), g(e_2)$ are linearly independant. indeed

$$0 = f(ag(e_2) + bg(e_3)) = ae_2 + be_3 \quad (26)$$

but because f is linear and e_2, e_3 are linearly independant, so are $g(e_2), g(e_3)$. So is $g(e_2), g(e_3)$ a base of R^2 and gf acts like the identity on this base, so is $BA = Id_2$, which concludes the proof.

Übungsstunde 11

Nachbesprechung der Serie

Aufgabe 6

- Schreibt die Lösung explizit als Menge auf

$$\text{Im}(f_a) = \left\{ \left(u, -\frac{u}{3} \right) \mid u \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\text{Im}(f_a) \neq \mathbb{R}^2$ folgt direkt f_a nicht surjektiv

Aufgabe 5

T^{-1} bezeichnet nicht die inverse Abbildung
Urbild $T^{-1}(w')$.

existiert nur
wenn T
bijektiv

Inverse Matrix

Sei A eine $n \times n$ -Matrix über K .
Wir möchten ein A^{-1} finden, sodass

$$AA^{-1} = \text{Id} = A^{-1}A \quad A^{-1} = (w_1, \dots, w_n)$$

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= A(w_1, \dots, w_n) = (Aw_1, \dots, Aw_n) \\ &= \text{Id} = (e_1, \dots, e_n) \end{aligned}$$

$$Aw_1 = e_1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{linear} \\ \text{unabhängig} \end{array} \right\}$$

$$A \cdot \underline{e_n} = \underline{e_n} \quad \text{wenn } A \neq 0$$

Lösbar $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$

$$(A \mid \text{Id}) \xrightarrow{\quad} (\text{Id} \mid A^{-1})$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{I+II \\ II \cdot (-1/2)}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right)}$$

$\underbrace{\text{Id}}_{\text{Id}} \quad \underbrace{A^{-1}}_{A^{-1}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -4+4 \\ 3/2-3/2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{a \neq 0 \\ II - \frac{c}{a} I}} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{II \cdot \frac{a}{ad-bc} \\ I - bII}} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ba}{ad-bc} & a & 0 \\ c & a & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\leftarrow ad-bc \quad \overline{ad-bc} \mid \quad \downarrow$$

$$\left(1 + \frac{bc}{ad-bc} = \frac{ad-bc}{ad-bc} + \frac{bc}{ad-bc} \right) \\ = \frac{ad}{ad-bc}$$

\rightarrow

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}^{-1}$$

$$AA^{-1} = I \Leftrightarrow A^{-1}A = I$$

$$\det(A) = ad-bc \neq 0$$

d.h. A ist invertierbar gdw $ad-bc = \det(A) \neq 0$.

Cramersche Regel

Sei A 2×2 und invertierbar.

Wir wollen $Ax=b$ lösen.

~~$A^{-1}Ax = A^{-1}b$~~

$$\hookrightarrow x = A^{-1}b$$

$$A^{-1}b = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= ad - bc = \dots \text{ (blue)} \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} ab_1 - bb_2 \\ ab_2 - cb_1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(b_1 & b_2) \\ \det(c & b_2) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Aquivalente Matrizen

$B, A \in M_{m \times n}(K)$, $A \sim B \iff$

$\exists S \in M_{m \times m}(K), T \in M_{n \times n}(K)$, sodass

$B = SAT$.

$$\begin{matrix}
 & \uparrow & \uparrow & M_{B_1}^{B_1} \\
 M_{B_1}^{B_1} & & M_{B_2}^{B_2} \\
 & \uparrow & \uparrow & M_{B_3}^{B_3}
 \end{matrix}$$

Ähnliche Matrizen

$A, B \in M_{n \times n}(K)$, $A \sim B \iff$

$\exists Q \in GL_n(K) : Q^{-1}BQ = A$

Wir haben eine Abbildung

$f: K^n \rightarrow K^n$ mit A als Darstellungsmatrix

Dann ist $[A]$ die Menge aller Matrizen, die f bzgl. irgendeiner Basis darstellen.

Äquivalent \iff Ähnlich

Hymenoptera

Eigenschaften

- Wenn A invertierbar ist, so ist B mit $A \sim B$ auch invertierbar.

$$B = Q^{-1} A Q$$

$$B^{-1} = (Q^{-1} A Q)^{-1} = (Q^{-1} A^{-1} (Q^{-1})^{-1})$$

\nwarrow

$$= Q^{-1} A^{-1} Q$$

$$BB^{-1} = Q^{-1}AQQ^{-1}A^{-1}Q = Id$$

$$B^{-1}B = Q^{-1}A^{-1}Q Q^{-1}A Q = \text{Id}$$

- Wenn $A \sim B$ dann gilt $\text{rank}(A) = \text{rank}$
 - $\text{Spur}(A) = \text{Spur}(B)$
 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ $\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 8$

Lemma

$$\underline{\text{Lemma}} \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad \text{für } A \in M_{n \times n}(K) \text{ beliebig.}$$

Beweis

$$\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (A_{ij}B_{ji})$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (B_{ji} A_{ij}) = \sum_{i=1}^n (BA)_{ii}$$

$$= \operatorname{tr}(BA)$$

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(Q^{-1} \cdot DQ) = \text{Tr}(D) \quad \text{Falls } Q \text{ invertierbar}$$

Welche Paare sind ähnlich?

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\text{tr}(A) = 4, \text{tr}(B) = 5 \quad A \not\sim B$$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\text{tr}(A) = 4, \text{tr}(B) = 5 \quad A \not\sim B$$

iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$\text{tr}(A) = 0 = \text{tr}(B) = 0$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = (0, x)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(1,1) = (0,1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1,1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1,-1 \end{pmatrix}$$

$$f(1,-1) = (0,1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1,1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1,-1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$$

$$\Rightarrow A \sim B$$

$$Q = M_B^E = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = M_E^{-1} B M_B^E$$

Zur Notation

$\rightarrow T \in \text{Hom}(V, W)$ lineare Abbildung

$[T]_C^B$ Darstellungsmatrix von T
bzgl. B und C

$$\Psi_C^B : \text{Hom}(V, W) \rightarrow M_{n \times n}(K)$$

$$T \mapsto [T]_C^B$$

$A \in M_{n \times r}(K)$

$m_A : K^n \rightarrow K^r$ standardbasis

$$[m_A]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_r} = A$$

$$[T^{-1}]_B^C = ([T]_C^B)^{-1}$$

Basiswechsel

$$[T]_B^{B'} = [\text{Id}]_B^B [T]_B^B [\text{Id}]_B^{B'}$$

$$T: V \xrightarrow{W} [\text{Id}_W]_C^C [T]_C^B [\text{Id}_V]_B^{B'}$$

$$[\text{Id}_W]_C^C [T]_C^B [\text{Id}_V]_B^{B'}$$

$$[T]_C^B [v]_B = [Tv]_C$$

Klausur 2019 Aufgabe 5

V , \mathbb{C} -VR der komplexen oberen
 2×2 -Dreiecksmatrizen

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V$$

(a) Zeige $\Phi: V \rightarrow V, A \mapsto SAS$ ist
 eine wohldefinierte lineare
 Abbildung

- $SAS \in V$ für alle $A \in V$
- Das Produkt von oberen Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere Dreiecksmatrix. \Rightarrow wohldefiniert

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda A + B) &= S(\lambda A + B)S \\ &= \lambda SAS + SBS \\ &= \lambda \Phi(A) + \Phi(B)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \Phi$ linear

(b) Zeige, dass $b_1 = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & i \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $b_3 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ eine Basis
 von V bilden.

Elementarmatrizen

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{11} = ib_1 + 3b_2 - b_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3i \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{12} = ib_2 - b_1 = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{22} = b_3 - b_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{b_1, b_2, b_3\}$ ein Erzeugendensystem von V . B

$\dim(V) = 3 \Rightarrow \{b_1, b_2, b_3\}$ ist Basis.

(c) Bestimme die Darstellungsmatrix bzgl. B.

① Bestimme die Bilder der Basisvektoren unter Φ :

$$\begin{aligned} \Phi(b_1) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & i+2 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} = b_1 + 4E_{12} \\ &\quad = -3b_1 + 4ib_2 \end{aligned}$$

② Bzgl. der Basis B darstellen

$$\Phi(b_2) = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & i \end{pmatrix} = b_2 - 2iE_{12} = 2ib_1 + 3b_2$$

$$\overset{+}{\Phi}(b_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1-i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = b_3 - (2i+1)E_{12} \\ = (2i+1)b_1 + (2-i)b_2 + b_3$$

③ Darstellungsmatrix zusammensetzen

$$\begin{pmatrix} -3 & 2i & 2i+1 \\ 4i & 3 & 2-i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Hom}(V, W)$ sind ein Vektorraum.

$$H: K \longrightarrow \text{Hom}(K, K) \\ \left[f_a(x) = ax, a \in K \right] \\ a \mapsto f_a$$

$$H(a+b)(x) = f_{a+b}(x) = (a+b)x \\ = ax + bx = (H(a) + H(b))(x)$$

Aufgabe zu Matrizen

Sei $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$, $B \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, sodass

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Lösung

Seien f, g die linearen Abbildungen mit Matrixdarstellungen A, B bzgl. der Standardbasis.

$$[f]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2} = A \quad \mathcal{E}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[g]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3} = B \quad \mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$f(g(e_2)) = AB \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2 \quad (*)$$

$$f(g(e_3)) = AB \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_3$$

Somit gilt:

$$g(f(g(e_3))) = g(e_3)$$

$$g(f(g(e_2))) = g(e_2)$$

a.bek:

$$0 = f(ae_2 + be_3) = f(ag(e_2)) + f(bg(e_3))$$

$$= af(g(e_2)) + bf(g(e_3)) \stackrel{(*)}{=} ae_2 + be_3$$

• e_2, e_3 sind linear unabhängig

• $g(e_2), g(e_3)$ linear unabhängig

$\Rightarrow g(e_2), g(e_3)$ eine Basis von \mathbb{R}^2

gf die Identität auf \mathbb{R}^2 , also gilt $BA = \text{Id}_2$

$$\gamma(\text{Cr}(ae_3)) = a(e_3)$$

$$y(\sigma^{-1} \circ \tau) = \tau^{-1} \circ y$$
$$g(f \circ g(e_2))) = g(e_2)$$