Übungsstunde 12

Nachbesprechung Serie 10 Aufgabe 5b)

U, V, W endlich-dimensionale VR, $S: V \to W$, $T: W \to U$ linear

z.z. Falls T injektiv ist, so gilt $\text{Rang}(T \circ S) = \text{Rang}(S)$.

Beweis

$\ker(T) = \{0\}$, da T injektiv ist. D.h. wenn $T(s) = 0 \Rightarrow s = 0$ für alle $s \in$

Also gilt:

$$\begin{aligned}\ker(T \circ S) &= \{v \in V \mid T(S(v)) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid S(v) = 0\} \\ &= \ker(S). \quad (*)\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\text{Rang}(T \circ S) &\overset{!}{=} \dim V - \dim \ker(T \circ S) \\ &\overset{(*)}{=} \dim V - \dim \ker(S) \\ &\overset{!}{=} \text{Rang}(S).\end{aligned}$$

$\square$

Elementarmatrizen

Linksmultiplikati

3 Typen

- $Q_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $L_i + \alpha L_j \to L_i$
- P_{ij} = Einheitsmatrix Zeile $i \leftrightarrow$ Zeile $L_i \leftrightarrow L$
- $S_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \alpha & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\alpha L_i \to L_i$ Zeile mit

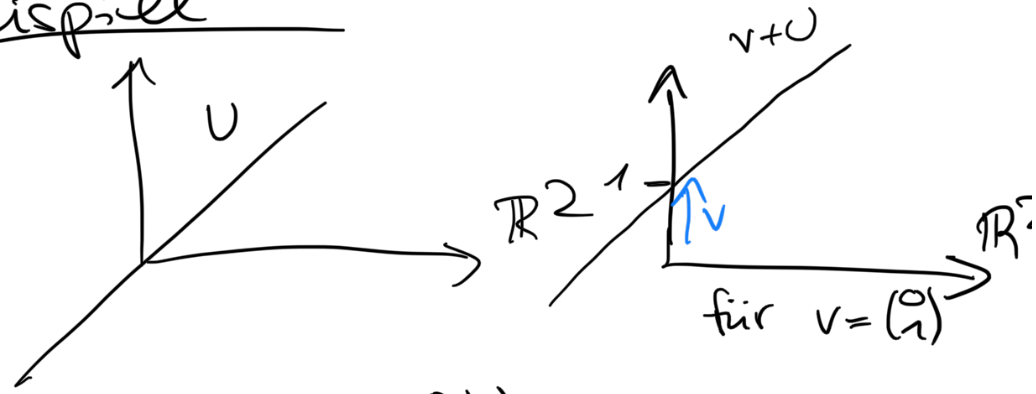
α multiplizie

Quotientenvektorräume

Affiner Unterraum von V:

Sei V ein VR, U ein UVR. Wir nennen für $v \in V$ eine Menge der Form $v + U := \{v + u \mid u \in U\}$ einen affinen Unterraum von V.

Beispiel



$V = \mathbb{R}^2$, $U = Sp\left(\binom{0}{1}\right)$. Dann gilt

$$\binom{1}{0} + U = \left\{ \binom{1}{0} + u \;\middle|\; u \in U \right\}$$
$$= \left\{ \binom{1}{0} + t\binom{0}{1} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ \binom{1}{t} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Quotientenraum/Faktorraum

$V/U := \{ v + U \mid v \in V \}$.

Dies ist Vektorraum mit der Addition $(v+U) + (v'+U) = (v+v') +$ und der Skalarmultiplikation $a \cdot (v+U) = (a \cdot v) + U$.

Beispiel

V/U für alle $v \in \mathbb{R}^2$.

$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(x,y) \longmapsto x$.

Dann gilt $\mathrm{Ker}(T) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid T((x,y))$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$

$= \{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\} \overset{(*)}{=} U$

$\mathrm{Im}(T) \overset{(*)}{=} \mathbb{R}$.

$V/U \overset{(*)}{=} V/\mathrm{Ker}(T) \cong \mathrm{Im}(T) \overset{(*)}{=} \mathbb{R}$.

VL

Serie 11, Aufgabe 7

$V = \mathbb{R}^5$, Standardbasis $e_1, \ldots, e_5$.

$U \subseteq V$ UVR aufgespannt durch

$u = (1, 2, 0, 1, 1)^T$

$v_1 = (1, 2, 0, -1, 1)^T$
$v_2 = (0, 1, 1, 0, 1)^T$
$v_3 = (0, 1, 1, 1, 1)^T$

(a) Basis von V/U?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2 \to L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim(U) = 3$

v_1, v_2, v_3, e_3, e_5 sind linear unabhängig

$\Rightarrow U' = Sp(e_3, e_5)$ mit $U + U'$ eine direkte Summe mit $U \cap U' = \{0\}$.

$\pi_U : V \longrightarrow V/U$, $v \longmapsto v + U$
hat Kern U.

$\pi_U|_{U'} : \underbrace{U'}_{2} \longrightarrow \underbrace{V/U}_{2}$ ist injektiv.

$\dim V/U = \dim V - \dim U = 5 - 3 = 2$
$= \dim U'$

$\Rightarrow \pi_U|_{U'}$ ein Isomorphismus

Da Isomorphismen Basen auf Basen abbilden folgt, dass

$\pi_U|_{U'}(e_3) = e_3 + U$
$\pi_U|_{U'}(e_5) = \underbrace{e_5 + U}$

= ... von V/U

Basis von

Proposition

V endlichdimensionaler VR, dann gilt: $\dim V/U = \dim V - \dim U$

Universelle Eigenschaft

Sei $T: V \longrightarrow W$ linear, $X \subset V$ ein UV mit $X \subset \operatorname{Ker}(T)$. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\tilde{T}: V/X \longrightarrow W$, sodass

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi_U"'] & W \\ V/U \arrow[ur, "\tilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Determinante

Eigenschaften $A \in M_{n \times n}(K)$

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Falls A eine Nullzeile hat, dann ist $\det(A) = 0$
- Für alle $A, B \in M_{n \times n}(K)$ gilt:

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

- $\det A \neq 0 \iff \mathrm{Rang}(A) = n \iff$ A invertierbar

Obere Dreiecksmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

$\det(A) = a_1 \cdots a_n$

+ genauso für untere Dreiecksmatrizen

Wie verändert sich die Determinante bei Gauss-Umformungen?

- Sei $\lambda \in K$ und $A \xrightarrow{\lambda L_i \to L_i} B$. Dann gilt $\det(B) = \lambda \det(A)$
  $\det(A) = \frac{1}{\lambda}\det(B)$
- Sei $A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} B$. Dann gilt
  $\det(B) = -\det(A)$
- Sei $\lambda \in K$ und $A \xrightarrow{L_i + \lambda L_j \to L_i} B$ mit $i \neq j$. Dann gilt $\det B = \det A$.

Lemma 4.12. *Für jedes $\alpha \in K$ gilt*

(1) $\det(S_i(\alpha)) = \alpha$,

(2) $\det(P_{i,j}) = -1$.

(3) $\det(Q_{i,j}(\alpha)) = 1$

Ausserdem gilt für jede Elementarmatrix T und jede beliebige Matrix B, dass

$$\det(TB) = \det T \det B.$$

$$\det(\lambda A) = \det(\overbrace{S_1(\lambda)\cdots S_n(\lambda)}^{\text{multipliziere jede Zeile mit } \lambda} A)$$

$$= \det(S_1(\lambda))\det(S_2(\lambda))\cdots\det(S_n(\lambda))\det(A)$$

$$= \underbrace{\lambda\cdots\lambda}_{n\text{-mal}} \det(A)$$

$$= \lambda^n \det(A)$$

Aufgaben

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\det(A) = ad - bc$

1) $\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = 3\cdot 5 - 2\cdot 7 = 15 - 14 = 1$

2) $\det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & 1 \\ \text{[redacted]} \end{pmatrix} = \text{[redacted]} \det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & 1 \\ \text{[redacted]} \end{pmatrix}$

$$= 3 \det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \text{[redacted]}3 \det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$(2 \quad 0 \quad 0$

3) $\det\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 2\cdot 3\cdot 5 = 30$

Regel von Sarrus

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}}_{A}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

4) $\underbrace{\det\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{matrix} 2 & 5 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \end{matrix}} = \cancel{2\cdot 0\cdot 1} + 5\cdot 4\cdot 1 + \cancel{0\cdot 0\cdot 3} - \cancel{1\cdot 0\cdot 0} - 3\cdot 4\cdot 2 - \cancel{1\cdot 0\cdot 5}$

$= 20 - 24 = -4$

5) $A = \begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ 2t & t^2+1 & t \\ 2t^2 & t^3 & t^2+1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2t^2 & t^3 & t^2+1 \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2 & t & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Blockmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \boxed{A_{12}} \\ \boxed{A_{21}} & \boxed{A_{22}} \end{pmatrix}$$

quadratische Matrizen

Matrizen

$$A \cdot B = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le p}} \text{ mit } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$A \cdot B = (C_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le p}} \text{ mit } C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

$$\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} a_1 & & * & * \\ & \ddots & & \\ & & a_n & \\ & & & I \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^k a_1 \cdots a_n$$

$$\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & I \end{pmatrix} = (-1)^k a_1 \cdots a_n \cdot 1 \cdots 1$$

$$\boxed{\Rightarrow \det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)}$$

+ Laplace Entwicklung

Symmetrische Gruppe

Permutation = bijektive Abbildung einer Menge X auf sich selbst

Menge aller Permutationen auf X nennen wir die symmetrische Gruppe von X und bezeichnen sie

Gruppe
mit $S(X)$

$X = \{1, \dots, n\}$ $\quad S_n = S(\{1, \dots, n\})$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1(3) = 5$

$\sigma_1(5) = 7$

Transposition = Permutation die genau 2 Elemente vertauscht.

Signum

Sei $\sigma \in S_n$. Wir nennen ein Paar $(i,j) \subset \{1, \dots, n\}$ mit $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ Fehlstand.

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{falls } \sigma \text{ eine gerade Anzahl Fehlstände hat} \\ -1 & \text{falls } \sigma \text{ eine ungerade Anzahl Fehlstände hat} \end{cases}$$

$\sigma \in S_4$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Fehlstände: $\underbrace{(1,4), (2,4), (3,4), (1,2}_{4 \text{ Fehlstände}}$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$$

$$\tau_1 = (1 \ 3)$$

$$\tau_1 \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau_2 = (3 \ 4)$$

$$\tau_2 \cdot \tau_1 \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = id$$

$$id_{S_4} = \tau_2 \tau_1 \sigma$$

$$\Rightarrow \sigma = \tau_1^{-1} \cdot \tau_2^{-1} = \tau_1 \tau_2$$

$$= (1 \ 3)(3 \ 4)$$