

Plan für Übungsstunde 8

Summen, direkte Summen, Dimensionsformel
Uebung am 09.11.20

0.0.1 Wiederholung

Definition 1. (Erzeugendensystem & Basis)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} . Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum, $W \subset U$ eine Teilmenge, wir sagen W ist ein *Erzeugendensystem* von U , falls $\langle W \rangle := \text{Sp}(W) = U$. Falls zusätzlich W linear unabhängig ist, nennen wir W eine Basis von U .

Bemerkung:

In obiger Definition kann auch $U = V$ sein!

Beispiel 0.1. 1. $\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

2. \mathbb{C} als Vektorraum über \mathbb{R} : Dimension 2 mit Basis $\{1, i\}$
3. \mathbb{C} als Vektorraum über \mathbb{C} : Dimension 1 mit Basis $\{1\}$, da $i(1, 0) = (0, 1)$.

0.0.2 Zeilen- & Spaltenraum

Definition 2. (Zeilenraum & Spaltenraum)

Sei \mathbb{K} ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

Wir definieren den *Spaltenraum*

$$SR(A) = \langle \{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\} \rangle \subset \mathbb{K}^m$$

Wobei $A^{(j)}$ die j-te Spalte der Matrix A bezeichnet. Analog definieren wir den *Zeilenraum*

$$ZR(A) = \langle \{A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}\} \rangle \subset \mathbb{K}^n$$

Wobei $A_{(j)}$ die j-te Zeile der Matrix bezeichnet.

Beispiel 0.2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}; m = n = 4$

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Dann ist der Spaltenraum und eine Basis davon gegeben durch...? Uff.}$$

Zum Glück kennen wir folgende Proposition aus der Vorlesung:

Proposition 1. Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Sei A' durch elementare Zeilenumformungen von A entstanden, so gilt:

$$ZR(A') = ZR(A)$$

Sei \tilde{A} aus elementaren Spaltenumformungen von A entstanden, so gilt

$$SR(\tilde{A}) = SR(A)$$

Wieso gilt das? Wenn wir uns an das Beispiel:

$$\dots v_1, v_2 \in V \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad U := \langle \{v_1, v_2\} \rangle = \langle \{v_1, v_2, \lambda v_1 + \mu v_2\} \rangle$$

erinnern. Dort haben wir gesehen, dass wir einen Vektor unter der Voraussetzung, dass er eine Linearkombination aus den restlichen Vektoren im Erzeugendensystem ist, aus einem Erzeugendensystem "wegkürzen" können ohne den aufgespannten Unterraum zu verändern. Insbesondere können wir das solange machen, bis unser Erzeugendensystem linear unabhängig und somit eine Basis ist! Dasselbe passiert bei elementaren Zeilen-/Spaltenumformungen.

Beispiel 0.3. A umformen zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit $A^{(1)} + \frac{1}{2}A^{(4)} - A^{(3)} \rightarrow A^{(1)}$; $\frac{1}{2}(A^{(2)} + \frac{-3}{2}A^{(1)} + \frac{1}{2}A^{(3)}) \rightarrow A^{(1)}$; $\frac{1}{2}(A^{(3)} - A^{(1)}) \rightarrow A^{(3)}$ und $A^{(4)} + 2A^{(1)} - A^{(2)} \rightarrow A^{(4)}$

Definition 3. (Zeilenrang & Spaltenrang) Sei \mathbb{K} ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$

Wir haben den *Zeilenrang* von A definiert:

$$\text{Zeilenrang}(A) := \dim(ZR(A))$$

und analog den *Spaltenrang* von A :

$$\text{Spaltenrang}(A) := \dim(SR(A))$$

Wir haben gesehen, dass die beiden gleich sind! Wir verzichten deshalb auf die Präfixe "Zeilen-" und "Spalten-" und definieren den *Rang* von A :

$$\text{Rang}(A) := \dim(SR(A)) = \dim(ZR(A))$$

Beispiel 0.4. Sei \mathbb{K} ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$

Dann gilt: $\text{Lös}(A, b) \neq \emptyset$ genau dann wenn $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$. Wobei $A|b$ die erweiterte Koeffizientenmatrix ist.

Angenommen es existiert eine Lösung (x_1, \dots, x_n) , dann ist $b = \sum_{i=1}^n x_i A^{(i)}$ und damit $ZR(A) = ZR(A|b)$ und $\text{Zeilenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(A|b)$.

Mit $ZR(A) \subset ZR(A|b)$ folgt aus $\dim(ZR(A|b)) = \dim(ZR(A))$, dass $ZR(A|b) = ZR(A)$ und damit $b \in ZR(A|b) = ZR(A)$. Insbesondere heisst das, dass Koeffizienten x_1, \dots, x_n existieren mit $b = \sum_{i=1}^n x_i A^{(i)}$ und damit für $x = (x_1, \dots, x_n)$, $Ax = b$.

0.0.3 Summe von Unterräumen und direkte Summe

Definition 4. (Summe v. Unterräumen)

Sei V ein Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} . $U_1, U_2 \subset V$ Unterräume. Wir habden die Summe von U_1 und U_2 definiert als:

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \in V \mid u_1 \in U_1; u_2 \in U_2\}$$

Wiederholung: Wieso ist das ein Unterraum von V ?

Beispiel 0.5. 1. $\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle + \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

2. Zeige für $S_1, S_2 \subset V$ gilt: $\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$

3. $V = C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ is continous}\}$

$$U_1 := \{f \in V \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\},$$

$$U_2 := \{f \in V \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)\}$$

Dann ist $V = U_1 + U_2$. Das wurde in einer Serie gezeigt. Sie haben sogar gezeigt: $V = U_1 \oplus U_2$.

Proposition 2. (*Dimensionsformel*)

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} mit $\dim(V) < \infty$. Seien $U, W \subset V$ Unterräume. Dann gilt:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

Beispiel 0.6. 1. In \mathbb{R}^3 sind Ebenen und Geraden durch den Ursprung Untervektorräume. Wir haben überprüft, dass die Dimensionsformel für alle Kombinationen von Ebenen und Geraden gilt. Zwei parallele Ebenen müssen wir dabei nicht betrachten, da sich ja alle UVRs im Ursprung schneiden. Zwei Ebenen, die UVRs sind, schneiden sich also in einer Gerade von Dimension 1.

Definition 5. (Direkte Summe)

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} , $U_1, U_2 \subset V$ Unterräume. Wir sagen, dass V die direkte Summe von U_1 und U_2 ist, falls gilt:

i) $V = U_1 + U_2$

ii) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

und wir schreiben: $V = U_1 \oplus U_2$

Wir haben gesehen, dass wir die direkte Summe auch folgendermassen charakterisieren können:

Proposition 3. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} , $U_1, U_2 \subset V$ Unterräume. Folgende sind äquivalent:

i) $V = U_1 \oplus U_2$

ii) Für alle $v \in V$ gibt es eindeutige $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$

Der Beweis wurde in der Vorlesung besprochen. Sich daran zu erinnern ist aber eine gute Übung.

Beispiel 0.7. 1. Siehe Bsp 3 mit ungeraden und geraden Funktionen, sie haben in der Serie gezeigt, dass Voraussetzung ii) in obiger Prop. erfüllt ist.

2. $V = Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$, wobei $char(\mathbb{K}) \neq 2$

$$U_1 := \{A \in V \mid A^t = A\} = \{A \in V \mid \forall i, j : A_{ij} = A_{ji}\},$$

$$U_2 := \{A \in V \mid A^t = -A\} = \{A \in V \mid \forall i, j : A_{ij} = -A_{ji}\}$$

Was passiert wenn $char(\mathbb{K}) = 2$? Dann gilt $a_{ij} = -a_{ij}$, also $A = -A$ und $U_1 = U_2$

Zeige: $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, bestimme $\dim(U_1)$, $\dim(U_2)$. Folgere mit der Dimensionsformel, dass für alle $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{K})$ eindeutige $B \in U_1$, $C \in U_2$ existieren mit $A = B + C$.

Übungsstunde 8

Nachbesprechung der Serie

- als Text schreiben
- Variablen definieren
- (i) \Leftrightarrow (ii): $u - av \in W$
 $\Rightarrow u + v' \in W \quad \forall v, v' \in W$
 $a = -1$
- $f_1 + f_2 = f \quad f_1 = \frac{f(-x) + f(x)}{2}$
Könnte vielleicht noch anders definiert werden
→ Eindeutig
→ Existenz

Definition

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Sei $U \subset V$ ein UVR, $W \subset U$ eine Teilmenge.
Wir sagen W ist ein Erzeugendensystem von U , falls
 $\langle W \rangle = \sum_{i=1}^n (w_i) = U$. Falls zusätzlich

Spur: ...
 W linear unabhängig ist, nenne
 wir W eine Basis von U.

Beispiel

- $\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$
- \mathbb{C} als Vektorraum über \mathbb{R} / \mathbb{C}

Über \mathbb{R} :

$$\circ: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : \lambda \overset{\mathbb{R}}{\in} (a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : (a, b) + (c, d) =$$

$$(a \overset{\mathbb{C}}{+} c, b \overset{\mathbb{C}}{+} d)$$

$$\text{Basis } \{1, i\} = \{(1, 0), (0, 1)\} \\ = \{1 + 0i, 0 + 1i\}$$

$$\text{Sei } (a, b) \in \mathbb{C} : (a, b) = a \cdot 1 + b \cdot i$$

Diese ist eindeutig, da die Vorfaktoren
 in der Linearkombination in \mathbb{R}
 liegen. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda \neq i$ und
 $\lambda \cdot i \neq i$.

$$\boxed{\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2}$$

Über \mathbb{C} :

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : (a,b) \cdot (c,d) = \\ (ac - bd, ad + bc)$$

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

Basis: $\{1\} = \{f(1,0)\}$

$$(a,b) \in \mathbb{C} : (a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1)$$

$$i(1+0i) = i+0 \approx (0,1)$$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$$

Körper \mathbb{K} , $A \in \mathbb{K}^{m \times n} = \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$

Wir definieren den Spaltenraum:

$$\text{SR}(A) = \text{Sp}(\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\}) \subset \mathbb{K}^m$$

$A^{(j)}$ bezeichnet die j-te Spalte der Matrix A.

Zeilenraum

$$\text{ZR}(A) = \text{Sp}(\{A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(n)}\}) \subset \mathbb{K}^n$$

$A_{(j)}$ ist die j-te Zeile von A.

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -1/2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1/2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\underbrace{}_{\text{U(1)}} \quad \underbrace{}_{\text{U(2)}} \quad \underbrace{}_{\text{U(3)}} \quad \underbrace{}_{\text{U(4)}}$

$$A^{\sim\sim} \quad A^{\sim\sim\sim} \quad A^{\sim\sim\sim\sim} \quad A$$

Proposition

Sei $A \in K^{m \times n}$. A' durch elementare Zeilenumformungen aus A entstanden

$$ZR(A') = ZR(A)$$

\tilde{A} durch elementare Spaltenumformungen

$$SR(\tilde{A}) = SR(A)$$

$$A \longrightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ZR(A) = SP \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right) \subseteq R'$$

Zeilenrang, $A \in K^{m \times n}$

$$\text{Zeilenrang}(A) = \dim(ZR(A))$$

$$\text{Spaltenrang}(A) = \dim(SR(A))$$

$$\text{Rang}(A) = \dim(SR(A)) = \dim(ZR(A))$$

K Körper, $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$

Dann gilt $\text{Lös}(A, b) \neq \emptyset$ genau dann wenn $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$, wobei $A|b$ die erweiterte Koeffizientenmatrix ist.

Sei $\text{Lös}(A, b) \neq \emptyset$. Dann existiert eine

Lösung (x_1, \dots, x_n) . Dann ist

$$b = \sum_{i=1}^n x_i A^{(i)} \quad x_i \in \mathbb{K}$$

Daraus folgt $\text{ZR}(A) = \text{ZR}(A|b)$

$\Rightarrow \text{Zeilenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(A|b)$

" Sei $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b)$.

$\text{ZR}(A) \subset \text{ZR}(A|b)$

da $\dim(\text{ZR}(A)) = \dim(\text{ZR}(A|b))$

$\Rightarrow \text{ZR}(A|b) = \text{ZR}(A)$.

Damit folgt $b \in \text{ZR}(A|b) = \text{ZR}(A)$.

Das heisst es existieren Koeffizienten

x_1, \dots, x_n mit $b = \sum_{i=1}^n x_i A^{(i)}$ und dann

(x_1, \dots, x_n) eine Lösung für $Ax=b$

Summe von Untervektorräumen

Sei V ein VR über \mathbb{K} . $U_1, U_2 \subset V$

Wir definieren die Summe von VR.

U_1 und U_2 als:

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \in V \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

$$U_1 \subset U_1 + U_2, \quad U_2 \subset U_1 + U_2$$

$$U_1 \cup U_2 \subset U_1 + U_2, \text{ aber}$$

im Allgemeinen $U_1 \cup U_2 \neq U_1 + U_2$.

Beispiel

$$\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rangle + \langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{K} \right\}$$

• Zeige für $S_1, S_2 \subset V$ gilt

$$\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle.$$

$$\langle S_1 \cup S_2 \rangle \subseteq \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle:$$

wähle $x \in \langle S_1 \cup S_2 \rangle$. Dann

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i s_i \quad \alpha_i \in \mathbb{K}, s_i \in S_1 \cup S_2$$

$\underbrace{\phantom{\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i}}_{\in S_1 \text{ oder } s_i \in S_2}$

$$\Rightarrow x \in \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$$

$$\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle:$$

$$x = s_1 + s_2 \quad \text{mit } s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$$

$$= \sum_{i=1}^2 \alpha_i s_i \quad \text{mit } s_i \in S_1 \cup S_2.$$

Proposition Dimensionsformel

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} mit $\dim(V) < \infty$. Seien $U, W \subset V$ Unterräume. Dann gilt:

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

UVR UVR
 UVR

Beispiel \mathbb{R}^3

Untervektorräume Geraden und Ebenen
Für einen UVR U gilt $0 \in U$.

Betrachte E_1, E_2 Ebenen durch den Ursprung.

- Fall 1: $E_1 \cap E_2$ ist eine Gerade.

$$E_1 + E_2 = \mathbb{R}^3 \rightarrow \dim(E_1 + E_2) = 3$$

$$\dim(E_1) = 2 \quad \dim(E_2) = 2$$

$$\dim(E_1 \cap E_2) = 1$$

$$\begin{aligned} \dim(E_1 + E_2) &= 3 = \dim(E_1) + \dim(E_2) \\ &\quad - \dim(E_1 \cap E_2) \\ &= 2 + 2 - 1 \end{aligned}$$

- Fall 2: $E_1 = E_2 = E_1 + E_2 = E_1 \cap E_2$

$$\begin{aligned} \dim(E_1 + E_2) &= 2 = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2) \\ &= 2 + 2 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Mit Geraden a_1, a_2 :

$$\dim(g_1 + g_2) = 2 = \dim(g_1) + \dim(g_2) - \dim(g_1 \cap g_2) = 1 + 1 - 0$$

UVR $\{0\}$ hat Basis \emptyset .

Direkte Summe

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} , $U_1, U_2 \subset V$ Unterräume. Wir sagen V ist die direkte Summe von U_1 und U_2 , falls gilt:

i) $V = U_1 + U_2$

ii) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

wir schreiben $V = U_1 \oplus U_2$.

Proposition

Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} . $U_1, U_2 \subset V$ Unterräume. Dann sind äquivalent:

i) $V = U_1 \oplus U_2$

ii) Für alle $v \in V$ gibt es eindeutig $v_1 \in U_1$ und $v_2 \in U_2$ mit

$u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 \dots$

$$v = u_1 + u_2$$

(i) \Rightarrow (ii):

$$\text{z.z. } V = U_1 + U_2$$

wenn jedes v in V sich als Summe darstellen lässt dann gilt natürlich $v \in U_1 + U_2 \Rightarrow V \subseteq U_1 + U_2$

$U_1 + U_2 \subseteq V$ gilt da $U_1, U_2 \subseteq V$.

$$U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

Angenommen $v \in V$ hat zu den Darstellungen $u_1 + u_2 = v$
 $w_1 + w_2 = v$

$$u_1 + u_2 = w_1 + w_2$$

$$u_1 - w_1 = w_2 - u_2 \Rightarrow u = u_1 - w_1 = u_2 - w_2$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ U_1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ U_2 \end{matrix}$$

$$u \in U_1 \cap U_2$$

$$\Rightarrow u = 0 \Rightarrow u_1 = w_1 \\ w_2 = u_2$$

Sei f_1 gerade und f_2 ungerade

$$f_1, f_2 \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Für jedes $f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ findet

f_1 und f_2 sodass $f = f_1 + f_2$.

$\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) =$ Gerade Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R}

\oplus ungerade
Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} .

$$U_1 = \{ A \in V \mid A^t = A \}$$

$$U_2 = \{ A \in V \mid A^t = -A \}$$

$$U_1 \oplus U_2 = V = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

$$\text{char } (\mathbb{K}) \neq 2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Angenommen $\text{char } (\mathbb{K}) = 2$:

a_{ij} ein Eintrag von A

$$a_{ij} = 3 \quad -a_{ij} = -3 \quad a_{ij} - (-a_{ij}) = 2a_{ij} = 0$$

$$3 = -3 \Rightarrow a_{ij} = -a_{ij} = 0$$

$$U_1 = U_2, \quad U_1 \cap U_2 = U_1 \neq \{0\}$$