Plan für die Übungsstunde 11

Inverse, Transformationsformel, Ähnlichkeit, Quotientenräume
Uebung am 30.11.20

1 Matrix Inverse

Sei A ein nxn matrix über einem Körper K. Wir möchten, wenn moglich, ein matrix A^{-1} finden so dass AA^{-1}=$A^{-1}A$= Id. Man schreibt die Inverse als Matrix aus ihren Spalten:

$$A^{-1} = (w_1, w_2, ..., w_n) \tag{1}$$

Also hat man:

$$AA^{-1} = A(w_1, ..., w_n) = (Aw_1, ..., Aw_n) = Id = (e_1, e_2, ..., e_n) \tag{2}$$

Man bekommt dann ein System von n lineare Gleichungen mit n^2 Unbekannten. Die n LGS sind dann losbar genau dann wenn alle gleichungen linear unabhängig sind, d.h. rang(A)=n oder alle Zeilen oder Spalten von A linear unabhängig sind. Man kann den Gauss benutzen, um

$$(A|Id) \to (Id|A^{-1}) \tag{3}$$

zu berechnen. Bemerke dass falls wir weniger als n Pivot kriegen, dann ist A nicht invertierbar.
Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ hat die Inverse $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. (Rechnung im Detail handschriftlich am Ende des Dokuments)
Zu einer allgemeinen 2x2 Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist die Inverse gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \tag{4}$$

vorrausgesetzt $ad - bc \neq 0$.
Beispiel:
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ hat die Inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Cramersche Regel:
Betrachte das Gleichungssytem $Ax = b$ mit einer invertierbaren Matrix A. Dann können wir auf beiden Seiten mit A^{-1} multiplizieren und erhalten:

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} db_1 - bb_2 \\ ab_2 - cb_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} det(\begin{pmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{pmatrix}) \\ det(\begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{pmatrix}) \end{pmatrix} \tag{5}$$

2 Ähnliche Matrizen

Man kann eine Relation auf dem Raum der $n \times n$-Matrizen wie folgt definieren: Seien

$$A, B \in M_{nxn}(K), A \sim B :\Leftrightarrow \exists Q \in Gl_n(K) : Q^{-1}BQ = A \tag{6}$$

Übungsstunde 11

Nachbesprechung der Serie

Aufgabe 6

- Schreibt die Lösung explizit als Menge auf
  $Im(f_a) = \{(u, -\frac{u}{3}) \mid u \in \mathbb{R}\}$
- $Im(f_a) \neq \mathbb{R}^2$ folgt direkt f_a nicht surjektiv

Aufgabe 5

T^{-1} bezeichnet nicht die $\underbrace{\text{inverse Abbildung}}_{\text{existiert nur wenn } T \text{ bijektiv}}$
Urbild $T^{-1}(W')$.

Inverse Matrix

Sei A eine $n \times n$-Matrix über K.
Wir möchten ein A^{-1} finden, sodass

$$AA^{-1} = Id = A^{-1}A \qquad A^{-1} = (w_1 \cdots w_n)$$

$$AA^{-1} = A(w_1 \cdots w_n) = (Aw_1 \cdots Aw_n)$$

$$= Id = (e_1 \cdots e_n)$$

$$Aw_1 = e_1$$

$\vdots$ linear unabhängig

$$A w_n = \boxed{e_n}$$

Lösbar $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rang}(A) = n$

$$(A \mid \mathrm{Id}) \longrightarrow (\mathrm{Id} \mid A^{-1})$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{II} \cdot (-1/2)]{\mathrm{I} + \mathrm{II}} \left(\underbrace{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}}_{\mathrm{Id}} \middle| \underbrace{\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{array}}_{A^{-1}}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -4+4 \\ 3/2-3/2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\mathrm{II} - \frac{c}{a}\mathrm{I}]{a \neq 0} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\mathrm{II} \cdot \frac{a}{ad-bc}]{ad-bc \neq 0} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{I} - b\mathrm{II}}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ba}{ad-bc} & a & 0 \\ \frac{c}{} & \frac{a}{} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\frac{}{ad-bc} \quad \frac{}{ad-bc}$$

$$1+\frac{bc}{ad-bc} = \frac{ad-bc}{ad-bc}+\frac{bc}{ad-bc} = \frac{ad}{ad-bc}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array}\right.\underbrace{\begin{matrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}\end{matrix}}_{A^{-1}}\left.\vphantom{\begin{matrix} \frac{d}{ad-bc} \\ \frac{c}{ad-bc}\end{matrix}}\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = Id = A^{-1}A$$

$$\det(A) = ad-bc \neq 0$$

d.h. A ist invertierbar gdw $ad-bc = \det(A) \neq 0$.

Cramersche Regel

Sei A 2x2 und invertierbar.

Wir wollen $Ax=b$ lösen.

$$\Rightarrow \cancel{A^{-1}A}x = A^{-1}b$$

$$\Rightarrow x = A^{-1}b$$

$$A^{-1}b = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}b = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} db_1 - bb_2 \\ ab_2 - cb_1\end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d\end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & b_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

Äquivalente Matrizen

$B, A \in M_{m\times n}(K)$, $A \sim B \Leftrightarrow$
$\exists S \in M_{m\times m}(K), T \in M_{n\times n}(K)$, sodass

$$B = \underbrace{S}_{M^{B_1}_{B_3}} A \underbrace{T}_{M^{B_1}_{B_2}}.$$

Ähnliche Matrizen

$A, B \in M_{n\times n}(K)$, $A \sim B \Leftrightarrow$

$$\exists Q \in GL_n(K): \underbrace{Q^{-1}}_{M^{B_2}_{B_1}} B \underbrace{Q}_{M^{B_1}_{B_2}} = A$$

- Wir haben eine Abbildung $f: K^n \longrightarrow K^n$ mit A als Darstellungmatrix
- Dann ist $[A]$ die Menge aller Matrizen, die f bzgl. irgendeiner Basis darstellen.

Äquivalent $\Longleftarrow$ Ähnlich

Äquivalent

Eigenschaften

- Wenn A invertierbar ist, so ist B mit $A \sim B$ auch invertierbar.

$$B = Q^{-1}AQ$$

$$B^{-1} = (Q^{-1}AQ)^{-1} = (Q^{-1}A^{-1}(Q^{-1})^{-1})$$

$$= Q^{-1}A^{-1}Q$$

$$BB^{-1} = \cancel{Q^{-1}}\cancel{A}\cancel{Q}\cancel{Q^{-1}}\cancel{A^{-1}}\cancel{Q} = \mathrm{Id}$$

$$B^{-1}B = \cancel{Q^{-1}}\cancel{A^{-1}}\cancel{Q}\cancel{Q^{-1}}\cancel{A}\cancel{Q} = \mathrm{Id}$$

- Wenn $A \sim B$ dann gilt $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}$
- $\operatorname{Spur}(A) = \operatorname{Spur}(B)$

$$\boxed{\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)} \quad \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right) = 8$$

Lemma

$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ für $A, B \in M_{n \times n}(K)$ beliebig.

Beweis

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (A_{ij}B_{ji})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (B_{ji}A_{ij})} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj}$$

$$= \operatorname{tr}(BA)$$

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(Q^{-1}BQ) = \operatorname{tr}(B\cancel{QQ^{-1}}) = \operatorname{tr}(B)$$

$Tr(A) = Tr(Q^{-1}BQ) = Tr(BQQ^{-1}) = Tr(B)$

Welche Paare sind ähnlich?

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$tr(A) = 4$, $tr(B) = 5$ $A \not\sim B$

ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$tr(A) = 4$, $tr(B) = 5$ $A \not\sim B$

iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$tr(A) = 0 = tr(B) = 0$

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (0, x)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$f(1,1) = (0,1) = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1)$

$f(1,-1) = (0,1) = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1)$

$\tilde{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$

$\Rightarrow A \sim B$

$$Q = M_B^E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = M_E^{\tilde{B}^{-1}} B \, M_{\tilde{B}}^E$$

Zur Notation

$T \in \mathrm{Hom}(V,W)$ lineare Abbildung

$[T]_C^B$ Darstellungsmatrix von T bzgl. B und C

$$\Psi_C^B : \mathrm{Hom}(V,W) \longrightarrow M_{m\times n}(K)$$
$$T \longmapsto [T]_C^B$$

$A \in M_{n\times n}(K)$

$m_A : K^n \longrightarrow K^n$

$[m_A]_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_n} = A$ standardbasis

$$[T^{-1}]_B^C = \left([T]_C^B\right)^{-1}$$

Basiswechsel

$$[T]_{B'}^{B'} = [\mathrm{Id}]_{B'}^{B} [T]_B^B [\mathrm{Id}]_B^{B'}$$

$T: V \to W$

$$[T]_{C'}^{B'} = [\mathrm{Id}_W]_{C'}^{C} [T]_C^B [\mathrm{Id}_V]_B^{B'}$$

$[T]_C^B [v]_B = [Tv]_C$

Klausur 2019 Aufgabe 5

V, $\mathbb{C}$-VR der komplexen oberen 2×2-Dreiecksmatrizen

$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in V$

(a) Z.z $\Phi: V \longrightarrow V,\ A \longmapsto SAS$ ist eine wohldefinierte lineare Abbildung

- $SAS \in V$ für alle $A \in V$
- Das Produkt von oberen Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere Dreiecksmatrix. $\Rightarrow$ wohldefiniert

$$\Phi(\lambda A+B) = S(\lambda A+B)S = \lambda SAS + SBS = \lambda \Phi(A) + \Phi(B)$$

$\Longrightarrow \Phi$ linear

(b) Zeige, dass $b_1 = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & +i \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ eine Basis von V bilden.

Elementarmatrizen

$E_{..} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{11} = ib_1 + 3b_2 - b_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3i \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{12} = ib_2 - b_1 = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{22} = b_3 - b_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\underbrace{\{b_1, b_2, b_3\}}_{B}$ ein Erzeugendensystem von V.

$\dim(V) = 3 \Rightarrow \{b_1, b_2, b_3\}$ ist Basis.

(c) Bestimme die Darstellungsmatrix bzgl. B.

(1.) Bestimme die Bilder der Basisvekto[ren] unter Φ:

$$\Phi(b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i+2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} = b_1 + 4E_{12}$$
$$= -3b_1 + 4ib_2$$

(2.) Bzgl. der Basis B darstellen

$$\Phi(b_2) = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = b_2 - 2iE_{12} = 2ib_1 + 3b_2$$

$$\Phi(b_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1-i \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = b_3 - (2i+1)E_{12}$$
$$= (2i+1)\,b_1 + (2-i)\,b_2 + b$$

(3.) Darstellungsmatrix zusammensetzen

$$\begin{pmatrix} -3 & 2i & 2i+1 \\ 4i & 3 & 2-i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hom(V, W) sind ein Vektorraum.

$$H : K \longrightarrow \mathrm{Hom}(K, K)$$
$$[f_a(x) = ax,\ a \in K]$$
$$a \longmapsto f_a$$

$$H(a+b)(x) = f_{(a+b)}(x) = (a+b)(x)$$
$$= ax + bx \quad = (H(a) + H(b))(x)$$

Aufgabe zu Matrizen

Sei $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, sodass

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeige, dass $\quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$B : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

Lösung

Seien f, g die linearen Abbildungen mit Matrixdarstellungen A, B bzgl. der Standardbasis.

$$[f]^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_3} = A \qquad \mathcal{E}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$[g]^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2} = B$$

$$f(g(e_2)) = AB\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2 \qquad (*)$$

$$f(g(e_3)) = AB\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3$$

Somit gilt:

$$g(f(g(e_3))) = g(e_3)$$

$$g(f(g(e_2))) = g(e_2)$$

$a, b \in K$:

$$0 = f(ag(e_2) + bg(e_3)) = f(ag(e_2)) + f(bg(e$$

$$= a f(g(e_2)) + b f(g(e_3)) \overset{(*)}{=} a e_2 + b e_3$$

- e_2, e_3 sind linear unabhängig
- $g(e_2), g(e_3)$ linear unabhängig

$\Rightarrow g(e_2), g(e_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$

gf die Identität auf $\mathbb{R}^2$, also gilt $BA = Id_2$

$$g(f(g(e_2))) = g(e_2)$$

$g(f(g(e_3)))=g(e_3)$

$g(f(g(e_2)))=g(e_2)$

Jede Äquivalenzklasse stellt eine lineare Abbildung $f : K^n \to K^n$ bezüglich verschiedener Basen dar. Wenn A die Darstellungsmatrix von f bezuglich B und $\tilde{A}$ die Darstellungsmatrix bezuglich $\tilde{B}$. Dann gilt

$$\tilde{A} = M_{\tilde{B}}^{B} A M_{B}^{\tilde{B}} = Q^{-1}AQ \tag{7}$$

und dann sind $A, \tilde{A}$ ahnlich.

Eigenschaften von ähnlichen Matrizen:

1. Sei A invertierbar und $B \in [A]$ dann ist auch B invertierbar: für $B = Q^{-1}AQ$ gilt, dass $B^{-1} = Q^{-1}A^{-1}Q$. Man prüft das durch Nachrechnen mit Kürzen.
2. Die Spur Spur(A) oder tr(A) ist konstant auf der Äquivalenzklasse von A: hier man muss zuerst zeigen dass $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Dann gilt tr(A)=tr($Q^{-1}BQ$)=tr($BQQ^{-1}$)=tr(B). Man definiert die trace fur ein nxn Matrix A als $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$

Lemma

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A_{ij}B_{ji}) && (8)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(B_{ji}A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(AB)_{jj} && (9)\\ &= tr(BA) && (10) \end{aligned}$$

ich finde dass gut da es trainiert auch die matrixmultplikation von ein mehr abstrakt sicht.

1. Aufgabe: welche Paaren der folgenden Matrizen sind ähnlich?

   i)$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Antwort: Nein, da tr(A)=4≠5=tr(B)

   ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ Antwort: Nein, da rang(A)=2≠1=rang(B)

   iii)$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ Antwort: unsere 2 Kriterien (trace and rank) bringen uns nichts, da tr(A)=tr(B)=0 und rank(A)=1=rank(B). Wir versuchen eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch A und B dargestellt werden kann zu finden. Zum Beispiel betrachten wir

   $$f(x, y) = (0, x) \tag{11}$$

   Hier sieht man direkt dass A die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Standardbasis ist. Man bemerkt, dass

   $$f(1, 1) = (0, 1) = \frac{1}{2}(1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1) \tag{12}$$

   und

   $$f(1, -1) = (0, 1) = \frac{1}{2}(1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1) \tag{13}$$

   deswegen ist die darstellungsmatrix von bezuglich B={(1,1),(1,-1)} gerade B. Dann gilt A$\sim B$. Bem: hier Q ist die Basiswechselmatrix

   $$Q = M_B^E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

3 Darstellungsmatrix und Basiswechsel

Wiederholung der Notationen aus dem Skript. Altklausuraufgabe Frühjahr 2019 Aufgabe 5, die Lösung findet ihr in der Prüfungssammlung des VMP.

Weitere Übungen zu Matrizen (nur 4 in Übung besprochen)

1. Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A - Id$, rechne B^n. Deduce A^n for any $n \in N$.

Lösung:
rechne B^2 and B^3 per hand. we remark that $AB = BA$ and that $B^3 = 0$. dann gilt es mit binomische lehrsatz

$$A^n = Id^n + \binom{n}{1} Id^{n-1}B + \binom{n}{2} Id^{n-2}B^2 \tag{15}$$

welche gibt

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

2. Eine matrix $M \in M_n(K)$ is said to be stochastic if the sum of all coefficients in each columns is 1, that is

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ik} = 1, \forall k \tag{17}$$

show that if A,B are stochastic, so is AB

Lösung:

$$\sum_{i=1}^{n} (AB)_{ik} = \sum_i \sum_j A_{ij}B_{jk} = \sum_j \sum_i A_{ij}B_{jk} \tag{18}$$

$$= \sum_j B_{jk} \sum_i A_{ij} = 1 * 1 = 1 \tag{19}$$

weil k belieibig war, zeigt das die aussage

3. maybe too dificult but let see: let be $A \in M_{nxn}(K)$ nilpotent, that is $\exists n \in N$ su that A^n=0, show that (A-Id) is inversible and compute its inverse.

Lösung:
we have to think to the geometric serie from analysis. For x<1 we have

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, \tag{20}$$

that is

$$(Id - A)(Id + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) = Id - A + A - A^2 + A^2 - \cdots + A^{n-1} - A^n) = Id - A^n = Id \tag{21}$$

4. Let A$\in M_{3,2}(R)$ and B$\in M_{2,3}(R)$ such that

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

show that

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Lösung:

let f,g the linear map whom matrix representations in the standard base are given by A and B. We know then that

$$f(g(e_2)) = e_2, f(g(e_3)) = e_3 \tag{24}$$

therefore

$$g(f(g(e_2))) = g(e_2), g(f(g(e_3))) = g(e_3) \tag{25}$$

but we also know that $g(e_1), g(e_2)$ are linearly independant. indeed

$$0 = f(ag(e_2) + bg(e_3)) = ae_2 + be_3 \tag{26}$$

but because f is linear and e_2, e_3 are linearly independant, so are $g(e_2), g(e_3)$. So is $g(e_2), g(e_3)$ a base of R^2 and gf acts like the identity on this base, so is $BA = Id_2$, which concludes the proof.