Plan für Übungsstunde 5

Vektorräume, Untervektorräume, Span, Linearkombinationen

Overview from Menny

Plan von Wiona

Nachbesprechung zur Serie 4

Häufige Fehler:
Aufgabe 2 (c): Wohldefiniertheit wurde nicht gezeigt, nochmal erklären was wir hier darunter verstehen
Aufgabe 2 (d): aus $\phi(a^k) = (\phi(a))^k = 0$ wurde gleich gefolgert, dass $ord(\phi(a)) = ord(a)$, es gilt aber nur die Ungleichung.

1 Matrizenraum

1.1 Definition

$M_{m\times n}(K)$ bezeichnet die Menge der $m \times n$ Matrizen mit Einträgen aus dem Körper K. Auf dieser Menge ist durch die Addition von Matrizen und die Skalarmultiplikation mit Elementen aus K eine Vektorraumstruktur gegeben:
$(M_{m\times n}(K), +, \cdot)$:

$$\begin{aligned}
+ &: M_{m\times n}(K) \times M_{m\times n}(K) \to M_{m\times n}(K) : A + B = (a_{ij})_{ij} + (b_{ij})_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})_{ij} \\
\cdot &: K \times M_{m\times n}(K) \to M_{m\times n} : k \cdot A = k \cdot (a_{ij})_{ij} = (k \cdot a_{ij})_{ij}
\end{aligned}$$

Bemerkung zur Definition von Vektorräumen: Anders als in der Schule bezeichnen wir jetzt alle Elemente eines Vektorraumes als Vektoren. Hier sind also Matrizen unsere Vektoren. Elemente aus dem Körper nennen wir Skalare.

1.1.1 Beispiel

Für $K = \mathbb{R}$ und $m = n = 2$ erhalten wir den Vektorraum der reellen 2×2 Matrizen mit Nullelement $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Eventuell Addition und Skalarmultiplikation mit Beispielmatrizen vorrechnen.

1.2 Nachprüfen der Vektorraumaxiome

(V1) **Assoziativität der Addition** $\forall v_1, v_2; v_3 \in V : v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$
$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$, da $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in K$ für alle i, j und weil nach Körperaxiom (K1) die Addition in K assoziativ ist. Daraus folgt A + (B + C) = (A + B) + C für alle A,B,C $\in M_{m\times n}(K)$.

(V2) **Neutrales Element der Addition** $\exists 0 = 0_V \in V\, \forall v \in V : 0 + v = v$
Das neutrale Element der Addition ist gegeben durch $0_V = \begin{pmatrix} 0_K & \cdots & 0_K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_K & \cdots & 0_K \end{pmatrix}$. Die Neutralität folgt daraus, dass 0_K in K neutral ist.

(V3) **Inverses Element der Addition** $\forall v \in V\ \exists v' \in V : v + v' = 0$
Sei $A \in M_{m\times n}(K)$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Dann existiert ein Inverses $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$, da $a_{ij} \in K$ und nach (K4) zu jedem Element in K ein Inverses der Addition existiert.

(V4) **Kommutativität der Addition** $\forall v_1, v_2 \in V : v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
Folgt ebenfalls aus der Kommutativität der Addition in K.

(V5) **Kompatabilität Skalar- und Körpermultiplikation** $\forall a, b \in K, v \in V : a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$
Seien $a, b \in K, v \in V$. Dann gilt $a \cdot (b \cdot v) = a \cdot ((bv_{ij})_{ij} = ((abv_{ij})_{ij} = (a \cdot b) \cdot (v_{ij})_{ij} = (a \cdot b) \cdot v$.

(V6) **Neutrales Element der Multiplikation** $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$ Für alle $v \in M_{m\times n}(K)$ gilt $1_K \cdot v = (1v_{ij})_{ij} = v$, da 1 neutrales Element in K ist.

(V7) **Distributivität 1** $\forall a \in K, v_1, v_2 \in V : a \cdot (v_1 + v_2) = a \cdot v_1 + a \cdot v_2$

(V8) **Distributivität 2** $\forall a_1, a_2 \in K, v \in V : (a_1 + a_2) \cdot v = a_1 \cdot v + a_2 \cdot v$

Folgen beide aus der Distributivität in K.

1.3 Untervektorräume

1.3.1 Definition

Eine Teilmenge $U \subset$ V, die selbst einen Vektorraum (mit der selben Addition und Skalarmultiplikation) bildet, ist ein Untervektorraum.
Wir können auch überprüfen:

(UVR1) $U \neq \emptyset$ oder (UVR1') $0 \in U$

(UVR2) Abgeschlossenheit unter Addition

(UVR3) Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation

1.3.2 Beispiel 1

$$\begin{aligned} V &= M_{2\times 3}(K) \\ U_1 &= \{A \in M_{2\times 3}(K) \mid \text{Summe aller Matrixeinträge } = 0\} \end{aligned}$$

Wir überprüfen die Eigenschaften einer Untervektorraums allgemein für $M_{n\times m}(K)$:

(UVR1) Für die Matrix $0_V = \begin{pmatrix} 0_K & \cdots & 0_K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_K & \cdots & 0_K \end{pmatrix}$ gilt, dass die Summe der Einträge 0 ist. Es folgt $0_V \in U_1$.

(UVR2) Seien $(a_{ij})_{ij}, (b_{ij})_{ij} \in U_1$. Es gilt $(a_{ij})_{ij} + (b_{ij})_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})_{ij} := (c_{ij})_{ij}$. Es folgt

$$\sum_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} (c_{ij}) = \sum_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} (a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} (a_{ij}) + \sum_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} (b_{ij}) = 0$$

nach Vorrausstezung. Demnach ist $(c_{ij})_{ij} \in U_1$.

(UVR3) Sei $(a_{ij})_{ij} \in U_1, \lambda \in K$. Dann gilt $\lambda * (a_{ij})_{ij} = (\lambda a_{ij})_{ij}$ und $\sum_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} (\lambda a_{ij}) = \lambda \sum_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} (a_{ij}) = 0$. U_1 ist also abgeschlossen unter Skalarmultiplikation.

In der Vorlesung wurden schon zwei damit zusammenhängende Beispiele besprochen.
In 2.3 wurde der Untervektorraum $\{p \in K[x]_5 \mid p = a_0 + \ldots + a_5 x^5 \text{ mit } \sum_{i=0}^{5} a_i = 0\}$ von $K[x]_5$ untersucht.
In 2.17 der Untervektorraum $W = \{(x_1, \ldots, x_6) \mid x_1 + \ldots + x_6 = 0\} \subseteq K^6$ betrachtet.

In der Serie seht ihr zwei weitere Beispiele für Untervektorräume vom Matrizenraum.
Dafür benötigt ihr die **Transposition einer Matrix**:
A^T bezeichnet die Transposition von A. $(a_{ij})^T = (a_{ji})$. Man kann sich das auch als Spiegelung an der Diagonalen oder schreiben der Zeilen als Spalten der neuen Matrix vorstellen.
Weitere Untervekotorraumbeispiele (aus möglichen Aufgaben von Paula, Summe von UVRs weglassen): Seien $W_1, W_2 \subset V$ gegeben als

$$W_1 := \{A \in V \mid i < j \Rightarrow A_{ij} = 0\}$$
$$W_2 := \{A \in V \mid i \geq j \Rightarrow A_{ij} = 0\}$$

Dann sind W_1, W_2 Unterräume von V.
Seien $W_3, W_4, W_5 \subset V$ gegeben als:

$$W_3 := \{A \in V \mid i > j \Rightarrow A_{ij} = 0\}$$
$$W_4 := \{A \in V \mid i \neq j \Rightarrow A_{ij} = 0\}$$
$$W_5 := \{A \in V \mid i \geq j \Rightarrow A_{ij} = 0\}$$

Dann sind W_3, W_4, W_5 Unterräume von V.

1.3.3 Gegenbeispiele

(a) Finde ein Beispiel für eine Teilmenge U des Matrixraumes $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, sodass $U \neq \emptyset$ und U ist abgeschlossen unter Addition und (Bilden von additiven Inversen), aber U ist kein Vektorraum.

Lösung: Zum Beispiel $U = \{M \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}\ \forall i,j\}$. Es gilt $U \neq \emptyset$. Da $\mathbb{Z}$ abgeschlossen unter Addition und Bildung von additivem Inversem ist, gilt das auch für U. Die Skalarmultiplikation wird allerdings mit Elementen aus $\mathbb{R}$ durchgeführt. Also gilt zum Beispiel: A mit $(a_{ij}) = 1\ \forall i,j$ ist Element von U, aber $\frac{1}{2} * A \notin U$ und daher ist U kein Untervekotrraum.

(b) Finde ein Beispiel für eine Teilmenge $U \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $U \neq \emptyset$, U ist abgschlossen unter Skalarmultiplikation, aber kein Vektorraum.

Lösung: Zum Beispiel $U = \{M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a_{11} = 0 \text{ oder } a_{12} = 0\}$. Es gilt $U \neq \emptyset$. $\lambda * M \in U$ $\forall M \in U, \lambda \in \mathbb{R}$, da $\lambda a_{ij} = 0\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, wenn $a_{ij} = 0$. Addieren wir aber $A \in U$ mit $a_{11} = 0$ und $a_{12} = 1$ und $B \in U$ mit $b_{11} = 1$ und $b_{12} = 0$, so gilt für $A + B := (c_{ij}) : c_{11} = 1 \neq 0, c_{12} = 1 \neq 0$. Also $A + B \notin U$. Somit ist U kein Untervekotrraum.

2 Weitere Aufgaben zu allgemeinen Vektorräumen und UVR

1. (a) Beweisen Sie, dass $a \cdot 0_V = 0_V$ für alle $a \in K$ gilt. **Beweis in Fischer, S. 77. Aber bitte besser begründen**

Lösung:
Sei $a \in K$, dann ist

$$a \cdot 0_V \overset{0_V \text{ neutrales Element}}{=} a \cdot (0_V + 0_V) \overset{(V7)}{=} a \cdot 0_V + a \cdot 0_V.$$

Durch addieren des additiv Inversen von a auf beiden Seiten der Gleichung, folgt $0_V = a \cdot 0_V$.

(b) Beweisen Sie, dass $-1 \cdot v = -v$ für alle $v \in V$ gilt. **Beweis in Fischer, S. 77. Aber bitte besser begründen. Lsg auch in Linear Algebra Done right 1.30 bzw. 1.31**

> **Lösung:**
> $v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1-1)v = 0 \cdot v = 0$. Somit ist $(-1)v$ ein additiv Inverses zu v. Da das Inverse eindeutig bestimmt ist gilt also $(-1)v = -v$.

2. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5\} \subset \mathbb{R}^3$

> **Lösung:**
> Die Menge ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, denn $(0, 0, 0)$ ist nicht enthalten, (UVR') ist also verletzt.

(b) $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$, wobei $\mathbb{C}^2$ der Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation eines Koordinatenraumes ist

> **Lösung:**
> Falls $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ ein Untervektorraum über $\mathbb{C}$ ist, muss $i(1, 1) = (i, i) \in \mathbb{R}^2$ gelten, ein Widerspruch. Also ist $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ kein Untervektorraum.

(c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^3 = x_2^3\} \subset \mathbb{R}^3$. Was passiert, wenn wir hier $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen?

> **Lösung:**
> In $\mathbb{R}$ gilt $x_1^3 = x_2^3$ genau dann, wenn $x_1 = x_2$. Also ist
>
> $$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^3 = x_2^3\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2\}$$
>
> ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ als Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $x_1 - x_2 = 0$.
> Über $\mathbb{C}$ gibt es allerdings $x, y \in B := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_1^3 = x_2^3\}$ mit $x + y \notin B$, z.B. $x, y = (1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, 0)$. Also ist (UVR2) verletzt und B kein Untervektorraum von $\mathbb{C}^3$.

3 Linearkombinationen und Span

Wir definieren das *Erzeugnis* (oder den *Span*) $\mathrm{Sp}(S)$ von S durch

$$\mathrm{Sp}(S) := \bigcap_{W \in \mathcal{N}} W,$$

wobei $\mathcal{N} = \{W \mid S \subset W,\, W \text{ ein Untervektorraum von } V\}$. $\mathrm{Sp}(S)$ ist dann der kleinste Vektorraum, der S enthält.
In der Vorlesung wurde auch gezeigt, dass: $\mathrm{Sp}(S) = \{\text{alle Linearkombinationen von Elementen aus } S\}$.

Eine *Linearkombination* ist definiert als: Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ein Vektor $v \in V$ der Form

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

heisst eine *Linearkombination von* $v_1, \ldots, v_n$ *(über* K*)*. Die Skalare $a_1, \ldots, a_n$ heissen die *Koeffizienten* der Linearkombination.

Die Abgeschlossenheit eines Vektorraums ist äquivalent dazu, dass jeder Linearkombination von Vektoren wieder im Vektorraum liegt.

3.1 Beispiel 1

Wir betrachten wieder das Untervektorraumbeispiel von vorhin, nur diesmal mit 2×2 Matrizen:

$$V = M_{2\times 2}(K)$$
$$U_1 = \{A \in M_{2\times 2}(K) \mid \text{Summe aller Matrixeinträge } = 0\}$$

Wir wollen versuchen U_1 als Erzeugnis einer Menge von Elementen aus U_1 darzustellen. Wir könnten zum Beispiel U_1 als solche Menge verwenden. $\mathrm{Sp}(U_1) = U_1$, da U_1 ein Vektorraum ist, der kleinste VR der U_1 enthält ist also U_1 selbst.

Wir wollen nun aber eine möglichst kleine solche Menge finden. Hierfür verwenden wir den Begriff der *linearen Abhängigkeit*:
$(v_1, v_2, ..., v_n)$ sind linear unabhängig, wenn aus $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ mit $\alpha_i \in K$ folgt $\alpha_i = 0\ \forall i \in \{1, ..., n\}$. Andernfalls sind sie linear abhängig. Fügen wir v_{n+1} zu einer linear unabhängigen Menge $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ hinzu, so ist $(v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1})$ linear unabhängig genau dann, wenn sich v_{n+1} nicht als Linearkombination aus Elementen von v darstellen lässt.

Wir können aus U_1 also solange linear abhängige Vektoren streichen, bis unsere Menge gerade so nicht mehr linear abhängig ist. Den Rest nennen wir U'. Dann ist $\mathrm{Sp}(U_1)$=$\mathrm{Sp}(U')$.

Wie könnte U' hier aussehen?
Damit die Summe der Matrixeinträge 0 ist, muss es zu jedem Eintrag einen mit negativem Wert geben. Wir schlagen vor:

$$\tilde{U} = \{b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\}.$$

Aber ist diese Menge wirklich linear unabhängig?
Nein! Denn $b_1 = b_2 + b_6 - b_4$. Das heisst wir können b_1 als Linearkombination aus anderen Vektoren aus $\tilde{U}$ darstellen oder nach der Definition von linearer Unabhängigkeit: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = 0$ mit $\alpha_1 = 1, \alpha_4 = -1, \alpha_6 = 1$. Also nicht alle $\alpha = 0$.
Wir streichen also noch b_1 und b_4 aus $\tilde{U}$.

$$\tilde{U'} = \{b_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\}.$$

Es gilt immernoch $b_6 = b_2 + b_3 + b_5$. Wir streichen also weiter b_6 und erhalten:

$$U' = \{b_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}.$$

Diese Menge ist nun linear unabhängig. Tatsächlich ist 3 die kleinste Anzahl an Elementen in einer Menge A, sodass $Sp(A) = U_1$. Warum das gilt, wird in der Vorlesung gezeigt (Eindeutigkeit der Dimension von Basen).
Wir betrachten einen weiteren Untervekotrraum:

$$U_2 := \{A \in V \mid (i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0) \wedge (\exists c \in \mathbb{R}\, \forall i : a_{ii} = c)\}$$

Es gilt $U_1 \cap U_2 = 0$, denn sind alle Diagonaleneinträge gleich c, so muss die Summe der anderen Einträge $2c$ betragen. Die anderen Einträge sind aber alle 0.
Man sieht schnell, dass

$$U_2 = \mathrm{Sp}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}). \text{ Außerdem gilt } V = \mathrm{Sp}(b_2, b_3, b_5, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

3.2 Beispiel 2

Aufgabe aus Linear Algebra Done Right 2.A:
(a) Zeige, dass wenn wir $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ betrachten die Liste $(1+i, 1-i)$ linear unabhängig ist.
(b) Zeige, dass wenn wir $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ betrachten, $(1+i, 1-i)$ linear abhängig ist.
Lösung (a) Seien $x, y \in K = \mathbb{R}$, sodass $x(1+i) + y(1-i) = 0$. Dann gilt:

$$x + xi + y - yi = x + y + (x - y)i = 0.$$

Daraus folgt $x - y = 0$, also $x = y$ und außerdem $x + y = 0$ und somit $x = y = 0$. Das zeigt, dass $(1+i, 1-i)$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ ist.
(b) Um lineare Abhängigkeit zu zeigen, finden wir eine Linearkombination mit Summe 0:

$$i(1+i) - i(1-i) = i - 1 - i + 1 = 0$$

.