Lineare Algebra Übungsstunde 4

Wiona Glänzer

12.10.2020

Wiederholung mit Kahoot

`https://create.kahoot.it/v2/share/ubungsstunde-4/c19082fc-78d0-41d1-8e22-fbeef8589a51`

Definition: Gruppe

Eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $*$ heisst eine **Gruppe** falls das folgende gilt:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$ für alle $a, b, c \in G$ (Assoziativgesetz),
2. Es gibt ein **neutrales Element** $e \in G$ so dass:
   2.1 $e * a = a$, für alle $a \in G$,
   2.2 zu jedem $a \in G$ gibt es ein **inverses Element** $a' \in G$, d.h. $a' * a = e$.

Untergruppen

Sei G eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heisst **Untergruppe** falls:

1. H ist nicht die leere Menge.
2. Wenn $a, b \in H$, dann ist $ab \in H$,
3. Wenn $a \in H$, dann ist $a^{-1} \in H$.

Um 1. zu überprüfen kann auch $e \in H$ geprüft werden, denn:

Untergruppen

Sei G eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heisst **Untergruppe** falls:

1. H ist nicht die leere Menge.
2. Wenn $a, b \in H$, dann ist $ab \in H$,
3. Wenn $a \in H$, dann ist $a^{-1} \in H$.

Um 1. zu überprüfen kann auch $e \in H$ geprüft werden, denn:
$\Leftarrow$ Gilt $e \in H$ so folgt direkt H $\neq \emptyset$.

Untergruppen

Sei G eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heisst **Untergruppe** falls:

1. H ist nicht die leere Menge.
2. Wenn $a, b \in H$, dann ist $ab \in H$,
3. Wenn $a \in H$, dann ist $a^{-1} \in H$.

Um 1. zu überprüfen kann auch $e \in H$ geprüft werden, denn:
$\Leftarrow$ Gilt $e \in H$ so folgt direkt H $\neq \emptyset$.
$\Rightarrow$ Es gelten Bedingungen 1,2 und 3.
Dann existiert nach 1. ein $a \in H$.

Untergruppen

Sei G eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heisst **Untergruppe** falls:

1. H ist nicht die leere Menge.
2. Wenn $a, b \in H$, dann ist $ab \in H$,
3. Wenn $a \in H$, dann ist $a^{-1} \in H$.

Um 1. zu überprüfen kann auch $e \in H$ geprüft werden, denn:
$\Leftarrow$ Gilt $e \in H$ so folgt direkt H $\neq \emptyset$.
$\Rightarrow$ Es gelten Bedingungen 1,2 und 3.
Dann existiert nach 1. ein $a \in H$.
Da $a \in H$ existiert nach 3. ein $a^{-1} \in H$ sodass $a * a^{-1} = e$.
Mit 2. folgt $e \in H$.

Gruppenhomomorphismen

Seien G, und H Gruppen mit Verknüpfungen $\cdot$, und $\odot$, so heisst eine Abbildung

$$\varphi\colon G \to H,$$

Homomorphismus von Gruppen, wenn

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b), \quad \forall a, b \in G.$$

Ein Homomorphismus, der auch bijektiv ist, heisst **Isomorphismus**.

Definition: Ringe

Eine Menge R mit zwei Verknüpfungen

$$+\colon R \times R \to R, (a, b) \mapsto a + b,$$
$$\cdot\colon R \times R \to R, (a, b) \mapsto a \cdot b$$

heisst **Ring** falls folgendes gilt:

1. R zusammen mit $+$ ist eine abelsche Gruppe.
2. Die Multiplikation ist assoziativ.
3. Es gelten die Distributivgesetze, d.h. für alle $a, b, c \in R$ gilt

$$a + (b + c) = (a + b) + c, \quad \text{und} \quad a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c).$$

Restklassenring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

- Definiert über Äquivalenzrelation: $a \sim b \Leftrightarrow a = bn$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}\}$
- $\bar{0}$ bezeichnet die Äquivalenzklasse von n, also alle $a \in \mathbb{Z}$ für die ein $b \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $a = bn$.

Beispielrechnung

Betrachte den Körper $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
$\overline{4}^{2018}$

Definition: Körper

Eine Menge K mit zwei Verknüpfungen

$$+\colon K \times K \to K, (a, b) \mapsto a + b,$$
$$\cdot\colon K \times K \to K, (a, b) \mapsto a \cdot b$$

heisst **Körper** falls folgendes gilt:

1. K zusammen mit $+$ ist eine abelsche Gruppe
2. Bezeichnet $K^* = K \setminus \{0\}$, so gilt für $a, b \in K^*$ auch $a \cdot b \in K^*$, und K^* mit der so erhaltene Multiplikation ist eine abelsche Gruppe.
3. Es gelten die Distributivgesetze, d.h. für alle $a, b, c \in K$ gilt

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad \text{und} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Sind Restklassenringe auch Körper?

- für p Primzahl ist $\mathbb{Z}$ /p $\mathbb{Z}$ ein Körper
- Dies wir gezeigt über die Nullteilerfreiheit.
- Für n keine Primzahl ist $\mathbb{Z}$ /n $\mathbb{Z}$ **kein** Körper.
- Denn es existieren $a, b \neq 0 \in \mathbb{Z}$, sodass $ab = n = 0$

Beispielrechnung

Betrachte den Körper $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
$\overline{4}^{2018}$:

$$\overline{4}^{2018} = \overline{4^2}^{1009} = \overline{16}^{1009} = \overline{1}^{1009} = \overline{1}.$$

Beispielrechnung

Betrachte den Körper $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
$\frac{\overline{3}}{\overline{4}} + \frac{\overline{1}}{\overline{3}} =?$
Wir bearbeiten den ersten Term zuerst, und benutzen, dass $\overline{3} \cdot \overline{2} = \overline{6} = \overline{1}$, also $\frac{\overline{1}}{\overline{3}} = \overline{3}^{-1} = \overline{2}$

$$\frac{\overline{2}}{\overline{3}} = \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}.$$

Beispielrechnung

Betrachte den Körper $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
$\frac{\overline{3}}{\overline{4}} + \frac{\overline{1}}{\overline{3}} = ?$
Wir bearbeiten den ersten Term zuerst, und benutzen, dass $\overline{3} \cdot \overline{2} = \overline{6} = \overline{1}$, also $\frac{\overline{1}}{\overline{3}} = \overline{3}^{-1} = \overline{2}$

$$\frac{\overline{2}}{\overline{3}} = \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}.$$

Weiter ist $\overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{1}$, also $\frac{\overline{1}}{\overline{4}} = \overline{4}^{-1} = \overline{4}$ und

$$\frac{\overline{1}}{\overline{4}} = \overline{1} \cdot \overline{4} = \overline{4}.$$

Beispielrechnung

Betrachte den Körper $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

$\frac{\overline{3}}{\overline{4}} + \frac{\overline{1}}{\overline{3}} =?$

Wir bearbeiten den ersten Term zuerst, und benutzen, dass $\overline{3} \cdot \overline{2} = \overline{6} = \overline{1}$, also $\frac{\overline{1}}{\overline{3}} = \overline{3}^{-1} = \overline{2}$

$$\frac{\overline{2}}{\overline{3}} = \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}.$$

Weiter ist $\overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{1}$, also $\frac{\overline{1}}{\overline{4}} = \overline{4}^{-1} = \overline{4}$ und

$$\frac{\overline{1}}{\overline{4}} = \overline{1} \cdot \overline{4} = \overline{4}.$$

Also

$$\frac{\overline{2}}{\overline{3}} + \frac{\overline{1}}{\overline{4}} = \overline{4} + \overline{4} = \overline{3}.$$

Übungsaufgabe 1

Sei $\mathbb{F}$ ein Körper. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.
Tipp: Für das Widerlegen genügt es, ein Gegenbeispiel zu finden.

- Für alle $a, b \in \mathbb{F}$ gilt $-(a - b) = b - a$.
- Für $a, b \in \mathbb{F}$ folgt aus $a + a + a = b + b + b$, dass $a = b$
- Für $a, b \in \mathbb{F}$ folgt aus $a + a + a + a = b + b + b + b$, dass $a = b$

Übungsaufgabe 2

Gibt es ein surjektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Übungsaufgabe 3

Gibt es ein surjektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Übungsaufgabe 4

Seien $G_1, G_2, ..., G_n$ Gruppen, mit neutralen Elementen $e_i \in G_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$, und betrachte das kartesische Produkt $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$.
Definiere die Verknüpfung in G als $(g_1, g_2, \dots, g_n) * (h_1, h_2, \dots, h_n) = (g_1 h_1, g_2 h_2, \dots, g_n h_n)$.
Zeige: Die Menge G mit Verknüpfung $*$ ist eine Gruppe.

Lösungen der Übungsaufgaben

1 Beispielrechnungen

Betrachte den Körper $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Seine Elemente sind $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$, wobei jeweils $\overline{n}$ die Restklasse von n modulo 5 bedeutet.

1. $\overline{4}^{2018}$:

$$\overline{4}^{2018} = \overline{4^2}^{1009} = \overline{16}^{1009} = \overline{1}^{1009} = \overline{1}.$$

2. $\frac{\overline{2}}{\overline{3}} + \frac{\overline{1}}{\overline{4}}$: Wir bearbeiten den ersten Term zuerst, und benutzen, dass $\overline{3} \cdot \overline{2} = \overline{6} = \overline{1}$, also $\frac{\overline{1}}{\overline{3}} = \overline{3}^{-1} = \overline{2}$

$$\frac{\overline{2}}{\overline{3}} = \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}.$$

Weiter ist $\overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{1}$, also $\frac{\overline{1}}{\overline{4}} = \overline{4}^{-1} = \overline{4}$ und

$$\frac{\overline{1}}{\overline{4}} = \overline{1} \cdot \overline{4} = \overline{4}.$$

Also

$$\frac{\overline{2}}{\overline{3}} + \frac{\overline{1}}{\overline{4}} = \overline{4} + \overline{4} = \overline{3}.$$

2 Aufgabe 1

1. Sei $\mathbb{F}$ ein Körper. Zeigen oder wiederlegen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Für alle $a, b \in \mathbb{F}$ gilt, $-(a-b) = b - a$:
   Das Element $-(a-b)$ ist die Inverse von $(a-b)$. Da Inverse Elemente eindeutig sind, genügt es zu zeigen, dass $b-a$ auch die Inverse von $a-b$ ist. D.h., wir müssen zeigen, dass $(a-b)+(b-a) = e$:

$$\begin{aligned}(a-b)+(b-a) &= (a+(-b))+(b+(-a)) \underbrace{=}_{\text{Assoziativität (Induktion mit 4 Elemente)}} (a+((-b)+b))+(-a) \\ &= (a+e)+(-a) = a+(-a) = e.\end{aligned}$$

   (b) Für $a, b \in \mathbb{F}$ folgt aus $a+a+a = b+b+b$, dass $a = b$:
   Nein. Sei $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, und $a = \overline{0}, b = \overline{1}$. Dann ist $a+a+a = \overline{0} = b+b+b$.

   (c) Für $a, b \in \mathbb{F}$ folgt aus $a+a+a+a = b+b+b+b$, dass $a = b$:
   Nein. Sei $\mathbb{F} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und $a = \overline{0}, b = \overline{1}$. Dann ist $a+a+a+a = \overline{0} = b+b+b+b$.

3 Aufgabe 2

2. Gibt es ein surjektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? **Lösung:** Ja, wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\pi_6"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \end{tikzcd}$$

wobei $\pi_6 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, und $\pi_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Projektionen sind. Wir können dann φ wie folgt definieren:

$$\varphi(\overline{n}) := \pi_2(n),$$

wobei n ein Repräsentant der Restklasse $\overline{n} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist. Man muss jetzt überprüfen dass so eine Abbildung wohldefiniert ist. D.h., falls wir vershieden Repräsentanten derselben Restklasse nehmen, sollte φ beide zum selben Element schicken. Sei nun $n, n' \in \mathbb{Z}$, und nehmen wir an, dass $\overline{n} = \overline{n'}$, d.h. $\pi_6(n) = \pi_6(n')$. Dann ist $\overline{n - n'} = \overline{n} - \overline{n'} = \overline{0}$. D.h. $n - n'$ ist durch 6 teilbar. D.h. dass $n - n'$ auch teilbar durch 2 ist, da 6 teilbar durch 2 ist. Damit ist

$$\varphi(\overline{n}) = \pi_2(n) = \pi_2(n - n' + n') = \pi_2(n - n') + \pi_2(n') = \overline{0} + \pi_2(n') = \varphi(\overline{n'}).$$

F"ur die Surjektivität, nehmen wir nur $\overline{0} \in \mathbb{Z}//\mathbb{Z}6\mathbb{Z}$, dann ist $\varphi(\overline{0}) = \overline{0} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und für $\overline{1} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, ist $\varphi(\overline{1}) = \overline{1} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

4 Aufgabe 3

3. Gibt es ein surjektiven Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?
   Lösung: Nein: Nehmen wir an, dass es ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ existiert. Dann muss φ das neutrale Element in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ zum neutralen Element in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ schicken: $\varphi(\overline{0}) = \overline{0}$. Nun gibt es zwei Möglichkeiten für wo $\overline{1} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ geschickt werden kann:

   (a) $\underline{\varphi(\overline{1}) = \overline{0}}$:
   Dann ist φ nicht surjektiv: Sei $\overline{n} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Wir können dann $\overline{n}$ so schreiben ($\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ist zyklisch!):

   $$\overline{n} = \underbrace{\overline{1} + \cdots + \overline{1}}_{n-\text{Mal}}.$$

   D.h.

   $$\varphi(\overline{n}) \underbrace{=}_{\varphi \text{ ist ein Homomorphismus}} \varphi(\overline{1}) + \cdots + \varphi(\overline{1}) = \overline{0} + \cdots + \overline{0}.$$

   D.h., $\varphi(\overline{n}) = \overline{0}$ für alle $\overline{n} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

   (b) $\underline{\varphi(\overline{1}) = \overline{1}}$: Dann gilt

   $$\overline{0} = \varphi(\overline{0}) = \varphi(\overline{1} + \overline{1} + \overline{1} + \overline{1} + \overline{1}) = \varphi(\overline{1}) + \varphi(\overline{1}) + \varphi(\overline{1}) + \varphi(\overline{1}) + \varphi(\overline{1}) = \overline{1}.$$

   Dies widerspricht dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist.

5 Aufgabe 4

4. Löse den folgenden Gleichungssystem in $\mathbb{F}_7$:

   $$\begin{aligned} 3x - y &= 7 \\ 2x + 8y + \frac{\overline{1}}{\overline{2}} z &= -4 \\ 6y + \frac{\overline{1}}{\overline{2}} z &= 0. \end{aligned}$$

   Wir berechnen die Brüche zuerst:
   $\overline{2} \cdot \overline{4} = \overline{1}$, also $\frac{\overline{1}}{\overline{2}} = \overline{1} \cdot \overline{4} = \overline{4}$
   Und da $\overline{7} = \overline{0}, \overline{-1} = \overline{6}, \overline{8} = \overline{1}$ und $\overline{-4} = \overline{3}$, ist die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3/2 \to L_3, L_1/3 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - 2L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 - L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right)$$

Wir bekommen dann

$$\overline{6}z = \overline{3} \implies z = \frac{\overline{1}}{\overline{2}} = \overline{4}.$$

Für die zweite Zeile:

$$\overline{4}y + \overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{3} \iff \overline{4}y + \overline{16} = \overline{3} \iff \overline{4}y + \overline{2} = \overline{3} \implies y = \frac{\overline{1}}{\overline{4}} = \overline{2}.$$

Für die letzte Gleichung haben wir:

$$x + \overline{2}y = \overline{0} \iff x + \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{0} \implies x = \overline{-4} = \overline{3}.$$

Die Lösung ist also $(x, y, z) = (\overline{3}, \overline{2}, \overline{4})$.

6 Beispiele von Gruppen

Beispiel 6.1. Wir betrachten die folgende Teilmenge der Gruppe $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (mit Multiplikation als Verknüpfung):

$$\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Wir möchten zeigen, dass $\mathbb{S}^1$ eine Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ ist:

1. $\mathbb{S}^1$ ist nicht leer, da $1 \in \mathbb{S}^1$,
2. Seien $z, w \in \mathbb{S}^1$, dann gilt
$$|zw| = |z||w| = 1 \cdot 1 = 1,$$
d.h. $zw \in \mathbb{S}^1$,
3. Sei $z \in \mathbb{S}^1$. Das inverse Element von z ist $1/z \in \mathbb{C}^\times$ (da $|z| = 1$, ist $z \neq 0$). Und
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1,$$
d.h. $1/z \in \mathbb{S}^1$.

Also $\mathbb{S}^1$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{C}$!

Frage: Sind alle Kreise in $\mathbb{C}$ auch Untegruppen? D.h. für $r \in \mathbb{R}_{>0}$, und $r \neq 1$, ist die Teilmenge von $\mathbb{C}$

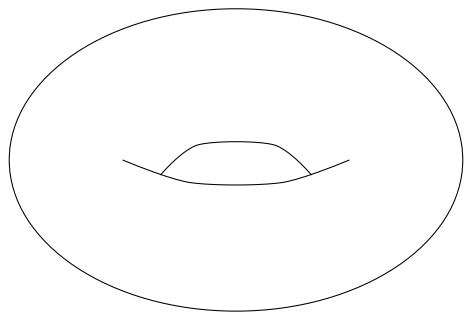
$$\mathbb{S}(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$$

auch eine Untergruppe?
Antwort: Nein! $\mathbb{S}(r)$ hat keine der Eigenschaften (a),(b), oder (c):

1. $1 \notin \mathbb{S}(r)$, da $|1| = 1 \neq r$.
2. Sei $z, w \in H$, dann ist
$$|zw| = |z||w| = r^2 \neq 1,$$
da $r \neq 1$,

3. Sei $z \in \mathbb{S}(r)$, dann ist
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r} \neq 1,$$
da $r \neq 1$.

Beispiel 6.2. Wir können jetzt dasselbe machen, aber mit dem kartesischen Produkt
$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \{(z,w) : \; |z| = 1, |w| = 1\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$
und man kann es sich so vorstellen:



Wir müssen aber eine Verknüpfung auf $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ definieren. Aber da wir schon eine Verknüpfung auf jeden Faktor haben, können wir die Verknüpfung wie folgt definieren. Seien $(z_1, w_1), (z_2, w_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, und definiere
$$(z_1, w_1) * (z_2, w_2) = (z_1 z_2, w_1 w_2).$$
Wir können in diesen Fall auch überprüfen, dass $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ mit dieser Verknüpfung auch eine Gruppe ist. Wir bemerken zuerst, dass falls $(z_1, w_1), (z_2, w_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, dann ist $(z_1 z_2, w_1 w_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, da
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| = 1, \quad \text{und} \quad |w_1, w_2| = |w_1||w_2| = 1.$$

1. Seien $(z_1, w_1), (z_2, w_2), (z_3, w_3) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, dann gilt
$$\begin{aligned}(z_1, w_1) * ((z_2, w_2) * (z_3, w_3)) &= (z_1, w_1) * (z_2 z_3, w_2 w_3) = (z_1 z_2 z_3, w_1 w_2 w_3) \\ &= (z_1 z_2, w_1 w_1) * (z_3, w_3) = ((z_1, w_1) * (z_2, w_2)) * (z_3, w_3).\end{aligned}$$

2. Das neutrale Element ist $(1, 1)$:
   (a) $(1, 1) * (z, w) = (z, w)$, für alle $(z, w) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$,
   (b) Sei $(z, w) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Dann ist $(1/z, 1/w)$ das inverse Element (da $|1/z| = |1/w| = 1$, ist $(1/z, 1/w) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$), und
$$(z, w) * (1/z, 1/w) = (z/z, w/w) = (1, 1).$$