Plan für die Übungsstunde 11

Inverse, Transformationsformel, Ähnlichkeit, Quotientenräume
Uebung am 30.11.20
Plan von Oriel und Menny

Themen/Stichpunkte zur Serie über Woche 11 (23.11-27.11.):

- Transformationsformel
- Äquivalenz und Ähnlichkeit,
- Beweis von Zeilenrang=Spaltenrang
- Hom(V,W) als VR und Isom. zu Matrixraum
- LGS Korollare
- Elementarmatrizen
- Inverse berechnen

Few points from Menny (see also our meeting) just because Paul asked :):

- Mention (as a fact or through an example of tow 3x3 matrices) that what we actually saw in class, is that two matrices are equivalent if and only if they have the same rang.
- Note (again since I did it in class) that this is far from being true for similarity (ähnlichkeit).
- Note (if you wish - it is a tip for the Serie) that similarity implies equivalence.
- I would be happy if you do Gauss-Jordan on a general 2x2 Matrix, and would appreiciate if you tell me (in the forum) if you didn't do this eventually.
- When you represent a linear map w.r.t. two different basis (what paula calls the transformationformel) it is good to explain to the students that one basiswechel Matrix is normally easy to calculate (e.g. when the Basis of the Zielmenge is the standard basis), and the other is very tiring to calculate. The solution is not calculate it and instead to note the it is the inverse of the Basiswechel matrix which was easy to calculate. I do such an explicit example at the end of the chapter 3.

1 Matrix Inverse

Sei A ein nxn matrix uber ein korper K. Wir mochten, wenn moglich, ein matrix A^{-1} finden so dass AA^{-1}=$A^{-1}A$= Id. Man schreibt die inverse als Spaltenvektor:

$$A^{-1} = (w_1, w_2, ..., w_n) \tag{1}$$

also man hat:

$$AA^{-1} = A(w_1, ..., w_n) = (Aw_1, ..., Aw_n) = Id = (e_1, e_2, ..., e_n) \tag{2}$$

Man bekommt dann n system von n lineare Gleichungen mit n^2 unbekannten. Die n LGS sind dann losbar genau dann wenn alle gleichungen linear unabhangig sind, dh rang(A)=n oder all Zeilen oder Spalten von A linear unabhangig sind. Man kann den Gauss benutzen um

$$(A|Id) \to (Id|A^{-1}) \tag{3}$$

Bemerke dass falls wir weniger als n Pivot kriegen, dann ist A nicht invertierbar. Beispiel: beginn mit ein einfach 2x2 beispiel wie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ mit inverse: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Dann ein gute Idee ist ein allgemein 2x2 matrix zu nehmen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und du zeigen durch direkt rechnungen, dass

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{4}$$

Wenn man motiviert ist, kann man 3x3 bsp machen: einfach falle sind zum bsp

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ mit inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. (Ausblick/Uebung) Sei K ein Körper.)

   (a) Zeigen Sie, dass
   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(K)$$
   invertierbar ist genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.
   Tipp: Benutzen Sie entweder das Gauss-Jordan-Verfahren oder versuchen Sie die Gleichungen zu lösen, die sich aus $AB = I_2$ für die Einträge von B ergeben.

   (b) Sei nun $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Inverse von A dann durch
   $$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
   gegeben ist.

   (c) Zeigen Sie, dass die Lösung von $Ax = b$ für $b = (b_1, b_2)^T \in K^2$ gegeben ist durch ... (Cramersche Regel verifizieren?)

   Bemerkung:

   In den nächsten Wochen werden Sie sehen, wie man ähnliche Resultate für $A \in M_{n\times n}(K)$ mit $n > 2$ zeigen kann. Sie werden zum Beispiel sehen, dass es für jede Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ einen Skalar $\det A$, die *Determinante* von A, gibt, sodass A invertierbar ist genau dann, wenn $\det A \neq 0$ ist. Für $n = 2$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $\det A = ad - bc$.

Lösung:

Siehe 04Determinante.pdf für (a) und (b).
c) Da ad-bc≠0, man kann A invertieren. man bekommt:

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} db_1 - bb_2 \\ ab_2 - cb_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} det(\begin{pmatrix} b_1 & b \\ b_2 & d \end{pmatrix}) \\ det(\begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & b_2 \end{pmatrix}) \end{pmatrix} \tag{5}$$

welche genau die Cramersch Regel anspricht.

2 Ähnliche Matrizen

Man kann eine Relation auf dem Raum der $n \times n$-Matrizen wie folgt definieren: Seien

$$A, B \in M_{nxn}(K), A \sim B :\Leftrightarrow \exists Q \in Gl_n(K) : Q^{-1}BQ = A \tag{6}$$

Man kann sehr schnell zeigen oder erwähnen dass es eine Aquivalenzrelation ist. Die intuition zu haben daruber, ist dass jede Klasse darstellt ein lineare abbildung $f : K^n \to K^n$ und dass jede element ist ein matrixdarstellung bezuglich ein verschiedene Basis. Formal gesagt, wenn A die darstellungsmatrix von f bezuglich B und dass $\tilde{A}$ die Darstellungsmatrix bezuglich $\tilde{B}$. Dann gilt

$$\tilde{A} = M^B_{\tilde{B}} A M^{\tilde{B}}_B = Q^{-1}AQ \tag{7}$$

und dann sind $A, \tilde{A}$ ahnlich.
Eigenschaften von ähnlichen Matrizen:

Man kann einigen Eigenschaften von ähnlichen matrizen zeigen:
Bem. von Paula: ich denke, die Aussage über die Spur würde den Studierenden bei Aufgabe 5(e) am meisten helfen. Invertierbarkeit ist ein Teil der Lösung von 5(c), die Invarianz des Rangs ist 5(d). Es ist aber auch ok, wenn ihr diese Teile machen wollt.

1. sei A invertierbar, $B \in [A]$ dann ist auch B invertierbar: fur $B = Q^{-1}AQ$ gilt dass $B^{-1} = QA^{-1}Q^{-1}$. man kann das uberprufen bei einsetzen

2. Sei $A \sim B$, dann gilt rank(A)=rank(B). **Bem. von Paula: das ist Aufgabe 5(d) auf der Serie, aber ihr könnt es trotzdem machen.** Diese Aussage zeigt man z.B. mit den rangsatz: sei A ein nxn Matrix uber K, dann existiert ein matrix $Q \in Gl_n(K)$ so dass QA=BQ. Sei $x \in Kern(A)$, dh Ax=0. dann man hat $BQx = QAx = Q0 = 0$ dh $Qx \in Kern(B)$. Da Q injectiv und linear ist, folgt es mit Aufagbe 7 (serie 9) dass $\{Qb_1, ..., Qb_l\}$ linear unabhangig, wenn $\{b_1, ..., b_l\}$ ein basis von Kern(A) ist. Dh dim(Kern(A))=dim(Kern(B)) und mit der rangsatz folgt direkt dass dim(Im(A))=dim(Im(B))=rank(A)=rank(B)

3. Die Spur Spur(A) oder tr(A) ist konstant auf der Äquivalenzklasse von A: hier man muss zuerst zeigen dass tr(AB) = tr(BA). Dann gilt tr(A)=tr($Q^{-1}BQ$)=tr(BQQ^{-1})=tr(B). Man definiert die trace fur ein nxn Matrix A als $tr(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$

die lemma ist gezeigt mit ein bischen index Arbeit:

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (A_{ij}B_{ji}) && (8) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (B_{ji}A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (AB)_{jj} && (9) \\ &= tr(BA) && (10) \end{aligned}$$

ich finde dass gut da es trainiert auch die matrixmultplikation von ein mehr abstrakt sicht.

1. Aufgabe: welche Paaren der folgenden Matrizen sind ähnlich? (**Bem. von Paula: finde ich super als Vorbereitung auf 5(e)**)
   i)$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Antwort: nein da tr(A)=4≠5=tr(B)
   ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ antwort: nein da rang(A)=2≠1=rang(B)
   iii)$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ antwort: unsere 2 einfach kriterium (trace and rank) give

us nothing da tr(A)=tr(B)=0 und rank(A)=1=rank(B). wir versuchen wir ein map $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die dargestellt werden kann durch A und B zu finden. Zum beispiel betrachten wir

$$f(x,y) = (0,x) \tag{11}$$

hier sieht man direkt dass A die darstellungsmatrix von f bezuglich die standart basis. man bemerkt dass

$$f(1,1) = (0,1) = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1) \tag{12}$$

und

$$f(1,-1) = (0,1) = \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(1,-1) \tag{13}$$

deswegen ist die darstellungsmatrix von bezuglich B={(1,1),(1,-1)} gerade B. Dann gilt A$\sim B$. Bem: hier Q ist die Basiswechselmatrix

$$Q = M_B^E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

3 Darstellungsmatrix und Basiswechsel

Es lohnt sich ein vollständiges Beispiel von einer Darstellunsgmatrix (DM) Aufgabe zu machen. Dazu kann man zwei Basen wahlen und rechnen die DM wrt each basis und auch wie kann man von eine zu der andere via BasisWechselMatrix (BWMatrix) gehen konnen. Gute bsp mit Lösungen sind die A1 und A2 in der s9_Akveld.pdf file. Am besten macht man A2 als erstes (advice from Menny). Wichtig ist klar zu machen von welche Basis nach welche Basis eine BWmatrix äbersetzt. Mein Vorschlag ist dass M_{B2}^{B1} ein koordinaten vektor in der B1 Basis nimmt und spukt ein Koordinaten vektor in der B2 basis.

4 Hom(V,W)

man kann auch ein beispiel von ein Homorphimus zwischen Hom(K,K) and K, fur K ein Korper. Die element von Hom(K,K) sind gerade lineare function f: $K \to K$

$$f(x) = ax, a \in K \tag{15}$$

Dann haben wir ein naturlich homomorphismus H: K$\to$ Hom(K,K)

$$a \mapsto f_a : K \to K \tag{16}$$
$$x \mapsto ax \tag{17}$$

since $H(a+b)(x) = f_{(a+b)}(x) = (a+b)x = ax+bx = (H(a)+H(b))(x)$ und H is clearly bijective, ist H ein homomorphismus.

1. (**Pink HS 18, Serie 11, Aufgabe 5**)
   Betrachte den Unterraum

   $$U := \langle\ (2,2,2,2,2)^T,\ (1,2,2,2,2)^T,\ (1,1,2,2,2)^T\ \rangle$$

   von $V := \mathbb{R}^5$. Bestimme eine Teilmenge der Standardbasis von $\mathbb{R}^5$, welche sich bijektiv auf eine Basis von V/U abbildet.

Lösung:

TODO: etwas ausführlicher erklären?
Die Teilmenge muss die Basis eines Komplements von U sein, also zum Beispiel

$$(0,0,1,0,0)^T, (0,0,0,1,0)^T).$$

This is because element in U are in the same equivalent class as the zero vector, so they can not span the space. Therefore we have to take element outside of U, that is the complement of U.

Weitere Fragen zu Matrizen

1. Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A - Id$, rechne B^n. Deduce A^n for any $n \in N$.

Lösung:

rechne B^2 and B^3 per hand. we remark that $AB = BA$ and that $B^3 = 0$. dann gilt es mit binomische lehrsatz

$$A^n = Id^n + \binom{n}{1} Id^{n-1}B + \binom{n}{2} Id^{n-2}B^2 \tag{18}$$

welche gibt

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

2. Eine matrix $M \in M_n(K)$ is said to be stochastic if the sum of all coefficients in each columns is 1, that is

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ik} = 1, \forall k \tag{20}$$

show that if A,B are stochastic, so is AB

Lösung:

$$\sum_{i=1}^{n} (AB)_{ik} = \sum_i \sum_j A_{ij} B_{jk} = \sum_j \sum_i A_{ij} B_{jk} \tag{21}$$

$$= \sum_j B_{jk} \sum_i A_{ij} = 1 * 1 = 1 \tag{22}$$

weil k belieibig war, zeigt das die aussage

3. maybe too dificult but let see: let be $A \in M_{nxn}(K)$ nilpotent, that is $\exists n \in N$ su that A^n=0, show that (A-Id) is inversible and compute its inverse.

Lösung:
we have to think to the geometric serie from analysis. For x<1 we have

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, \tag{23}$$

that is

$$(Id - A)(Id + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) = Id - A + A - A^2 + A^2 - \cdots + A^{n-1} - A^n) = Id - A^n = Id \tag{24}$$

4. Let A$\in M_{3,2}(R)$ and B$\in M_{2,3}(R)$ such that

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

show that

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Lösung:
let f,g the linear map whom matrix representations in the standard base are given by A and B. We know then that

$$f(g(e_2)) = e_2, f(g(e_3)) = e_3 \tag{27}$$

therefore

$$g(f(g(e_2))) = g(e_2), g(f(g(e_3))) = g(e_3) \tag{28}$$

but we also know that $g(e_1), g(e_2)$ are linearly independant. indeed

$$0 = f(ag(e_2) + bg(e_3)) = ae_2 + be_3 \tag{29}$$

but because f is linear and e_2, e_3 are linearly independant, so are $g(e_2), g(e_3)$. So is $g(e_2), g(e_3)$ a base of R^2 and gf acts like the identity on this base, so is $BA = Id_2$, which concludes the proof.