Plan für Übungsstunde 7.

Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

Wichtige Definitionen

Definition 1. Lineare Unabhängigkeit: Eine endliche Menge $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ ist *linear unabhängig*, falls aus $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$ für $a_1, \dots, a_n \in K$ stets folgt, dass $a_1 = \dots = a_n = 0$.
Genauer: $\forall\ a_1, \dots, a_n \in K : a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0 \implies a_1 = \dots = a_n = 0$
Gilt dies nicht, so heisst die Menge *liner abhängig*.

Definition 2. Erzeugnis (nur Wiederholung, da wir es für Basis brauchen): Gegeben sei eine nicht-leere Teilmenge $S \subseteq V$ eines K-Vektorraums V. Das *Erzeugnis*/der *Span* von S ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Sp}(S) &= \{a_1v_1 + \dots + a_nv_n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in K, v_i \in S\ \forall\ 1 \le i \le n\} \\ &= \{\text{alle Linearkombinationen von Vektoren aus } S\}\end{aligned}$$

Definition 3. Basis: Eine Menge $S \subseteq V$ heisst eine *Basis* für V falls S linear unabhängig ist und $\operatorname{Sp}(S) = V$. Eine äquivalente Definition für die Basis: Eine Menge $S \subseteq V$ ist eine Basis von V genau dann, wenn jedes $v \in V$ in einer eindeutigen Weise als Linearkombination von Vektoren aus S geschrieben werden kann.

Definition 4. Erzeugendensystem: Eine Teilmenge $S \subseteq V$ mit $\operatorname{Sp}(S) = V$ ist ein *Erzeugendensystem* von V.

Aufgaben

1. Lineare Unabhängigkeit mit dem Gauss-Verfahren :
   Gegeben seien folgende Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$:

   u=(1,2,1) , v=(-2,1,3) , w=(4,3,-1)

   (a) Stelle den Vektor $x = (-3, 4, 7)$ als Linearkombination von u, v und w dar.

Lösung:
Dies können wir mit dem Gauss-Verfahren lösen. Wir suchen α, β, γ so dass $x = \alpha u + \beta v + \gamma w$. Das ist nun ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten α, β, γ, das wir mit dem Gauss Verfahren lösen können:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{-2L_1+L_2 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{-1L_1+L_3 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{5}L_2 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir können nun die Lösung ablesen: Aus L_2 entnehmen wir mit $\gamma := t$ dass $\beta = 2 + t$ und somit aus L_1 dass $\alpha = -3 - 4t + 2(2 + t) = 1 - 2t$. Also $(\alpha, \beta, \gamma) = (1 - 2t, 2 + t, t)$. Wir haben unendlich viele Möglichkeiten gefunden, x als Linearkombination von u,v,w zu schreiben.

(b) Sind u,v,w linear unabhängig?

Lösung:
Dazu müssen wir das homogene LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

lösen.

$$\xrightarrow{-2L_1+L_2\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{-1L_1+L_3\to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\frac{1}{5}L_2\to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Mit $\gamma := t$ erhalten wir auch $\beta = t$ und somit $\alpha = -4t + 2t = -2t$ und die Lösung des LGS ist also $(\alpha, \beta, \gamma) = (-2t, t, t)$. Insbesondere existieren also $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Nach der Definition der linearen Unabhängigkeit folgt also, dass die Vektoren u,v,w linear abhängig sind.

Proposition 1. *Eine Menge $S \subseteq V$ ist eine Basis von V genau dann, wenn jedes $v \in V$ in einer eindeutigen Weise als Linearkombination von Vektoren aus S geschrieben werden kann.*

(c) Bilden $\{u, v, w\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Lösung:
Wir haben in a) gesehen, dass $x \in \mathbb{R}^3$ nicht eindeutig als Linearkombination geschrieben werden kann. Somit folgt mit der Proposition, dass $\{u, v, w\}$ keine Basis ist von $\mathbb{R}^3$.

2. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage. Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig und sei $w \in V$. Falls $v_1 + w_1, \dots, v_n + w$ linear abhängig sind, dann ist $w \in \mathrm{Sp}(v_1, \dots, v_n)$.

Lösung:

Da $v_1 + w_1, \dots, v_n + w$ linear abhängig sind, existieren $a_1, \dots, a_n \in K$ (nicht alle 0) so dass

$$a_1(v_1 + w) + \dots + a_n(v_n + w) = 0.$$

Also

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + (a_1 + \dots + a_n)w = 0$$

Ist nun $a_1 + \cdots + a_n = 0$, dann haben wir $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ woraus folgt dass $a_i = 0$, da $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind. Also gilt $a_1 + \cdots + a_n \neq 0$ und es folgt, dass

$$w = -\frac{1}{a_1 + \cdots + a_n}(a_1 v_1 + \ldots \ldots + a_n v_n) \in \mathrm{Sp}(v_1, \ldots, v_n).$$

3. Seien folgende Vektoren aus dem $\mathbb{R}^5$ gegeben:

$$v_1 = (1, 2, 3, 4, 0),\ v_2 = (-1, 1, -2, -3, 3),\ v_3 = (1, -1, 2, 3, -3),\ v_4 = (2, 10, 14, 10, 10)$$

Wähle aus v_1, v_2, v_3, v_4 bzw. w_1, w_2, w_3, w_4 Vektoren aus, die eine Basis von $\mathrm{Sp}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ bilden.

Lösung:

Wir bemerken zuerst, dass $v_2 = -v_3$. Mit dem Gauss Verfahren kann man auch hier überprüfen, dass v_1, v_3, v_4 linear unabhängig sind. Da nun $\mathrm{Sp}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{Sp}(v_1, v_3, v_4)$ gilt, folgt mit der Definition einer Basis, dass v_1, v_3, v_4 eine Basis von $\mathrm{Sp}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ sind.

4. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des folgenden Vektorraums: Der lineare Untervektorraum des $\mathbb{R}^5$, aufgespannt durch die Vektoren

$$(1, 3, 4, 0, 1), (2, 5, 6, -2, 1), (1, 5, 8, 4, 3),$$

Lösung:

Durch Nachrechnen ergibt sich, dass die Vektoren $v_1 := (1, 3, 4, 0, 1)$ und $v_2 := (2, 5, 6, -2, 1)$ linear unabhängig sind und $v_3 := (1, 5, 8, 4, 3) = 5v_1 - 2v_2$ eine Linearkombination von v_1 und v_2 ist. Somit haben wir einen zweidimensionalen Vektorraum mit Basis (v_1, v_2).

5. Sei K ein Körper. Zeigen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Es gibt eine Basis p_0, p_1, p_2, p_3 von

$$K[x]_3 = \{p \in K[x] \mid \deg(p) \leq 3\},$$

sodass keines der Polynome p_0, p_1, p_2, p_3 Grad 2 hat.

Lösung:

(Siehe Buch LinAlgDoneRight 2B, 5. Lösungen siehe `https://linearalgebras.com/`)
1. Lösungsweg (mit der Aufgabe 6)

Es gilt, dass $\{1, x, x^2, x^3\}$ die Monombasis von $K[x]_3$ ist. Mit der Behauptung aus der vorherigen Aufgabe gilt somit auch, dass $\{1 + x^3, x + x^3, x^2 + x^3, x^3\}$ eine Basis von $K[x]_3$ ist. Jedoch hat keines dieser Polynome Grad 2.

2. Lösungsweg (Menny und ich bevorzugen diesen)
Wir behaupten, dass $\{1, x, x^2 + x^3, x^3\}$ eine Basis von $K[x]_3$ bilden.
Es gilt zunächst, dass $\{1, x, x^2 + x^3, x^3\}$ linear unabhängig ist, denn $a_1 + a_2 x + a_3(x^2 + x^3) + a_4 x^3 = 0$

falls $a_1 + a_2x + a_3x^2 + (a_3 + a_4)x^3 = 0$ und da die Monombasis $\{1, x, x^2, x^3\}$ linear unabhängig ist, ist auch somit $a_1 + a_2x + a_3x^2 + (a_3 + a_4)x^3 = 0$ nur erfüllt, falls $a_1 = a_2 = a_3 = a_3 + a_4 = 0$.
Nun behaupten wir, dass span$(1, x, x^2, x^3)$=span$(1, x, x^2 + x^3, x^3)$.
span$(1, x, x^2 + x^3, x^3) \subseteq$ span$(1, x, x^2, x^3)$ ist klar. span$(1, x, x^2, x^3) \subseteq$span$(1, x, x^2 + x^3, x^3)$ folgt aus:
$x^2 = (x^2 + x^3) - x^3$
Somit ist $\{1, x, x^2 + x^3, x^3\}$ eine Basis von $K[x]_3$ und insbesondere hat keines dieser Polynome Grad 2.

Wiederholungs Kahoot: https://create.kahoot.it/share/ubungsstunde-7/7bc78a27-60e3-4a07-ae3f-0356d335bdfd

Übungsstunde 7

$f(x)$ Polynom in $\mathbb{R}[x]$
NST sind in $\mathbb{R}$
$f(x)$ in $\mathbb{C}[x]$

$f(x) = (x+1)(x+3)^2(x+1-i)(x+1+i)$

$(x - \text{NST})$

Lineare Unabhängigkeit

$\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ heisst linear unabhängig wenn aus $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ folgt $a_1 = \dots = a_n = 0$ mit $a_1, \dots, a_n \in K$. Sonst sind sie linear abhängig.

Erzeugnis

Betrachte eine Teilmenge $S \subseteq V$. Das Erzeugnis ist definiert als $Sp(S) = \{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in K \ \forall 1 \leq i \leq n\}$
$= \{$alle Linearkombinationen von Vektoren aus $S\}$

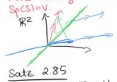
Basis

Eine Menge $S \subseteq V$ heisst Basis für V

- S linear unabhängig und $Sp(S) = V$
- Jedes $v \in V$ lässt sich als eindeutige Linearkombination von Vektoren aus S darstellen

Erzeugendensystem

Eine Teilmenge $S \subseteq V$ mit $Sp(S) = V$.



Satz 2.85

V Vektorraum mit $\dim(V) = n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Für eine Liste $v_1, \dots, v_n \in V$ der Länge n sind äquivalent:

(1) $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig
(2) $v_1, \dots, v_n$ sind erzeugend
(3) $v_1, \dots, v_n$ bilden eine Basis

$\mathbb{R}^3$: $u = (1,2,1)$
$v = (-2,1,3)$
$w = (4,3,-1)$

$x = (-3,4,7)$ als Linearkombination darstellen.

a_1, a_2, a_3 sodass $u a_1 + v a_2 + w a_3 = x$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{-2L_1 + L_2 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-1L_1 + L_3 \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{1/5 L_2 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$a_3 = t \quad a_2 = 2 + t$
$a_1 = -3 - 4t + 2(2+t)$
$= 1 - 2t$

$(a_1, a_2, a_3) = (1-2t, 2+t, t)$

$(u \ v \ w \mid 0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$a_3 = t$, $a_2 = +t$, $a_3 = -2t$

$\longrightarrow \infty$-viele mögliche Linearkombinationen

$\Rightarrow u, v, w$ sind linear abhängig

Beweisaufgabe

Sei V ein Vektorraum über K. Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig. Sei $w \in V$. Falls $v_1 + w, v_2 + w, \dots, v_n + w$ linear abhängig sind, dann ist $w \in Sp(v_1, \dots, v_n)$

Lösung:

$v_1 + w, \dots, v_n + w$ sind linear abhängig, d.h. es existieren $a_1, \dots, a_n \in K$ (nicht alle 0) sodass
$a_1(v_1 + w) + \dots + a_n(v_n + w) = 0$.

Also $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n + \underbrace{(a_1 + \dots + a_n)}_{=0} w = 0$
Ist nun $a_1 + \dots + a_n = 0$

$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$
$\Rightarrow a_i = 0 \ \forall i$, da $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig.

$\Rightarrow a_1 + \dots + a_n \neq 0$

$w = -\frac{1}{a_1 + \dots + a_n}(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$

$\Rightarrow w \in Sp(v_1, \dots, v_n)$

$\mathbb{R}^5$: $v_1 = (1,2,3,4,0)$
$v_2 = (-1,1,-2,-3,3)$
$v_3 = (1,-1,2,3,-3)$
$v_4 = (2,10,14,10,10)$

Wählen Vektoren aus, sodass diese eine Basis von $Sp(v_1, v_2, v_3, v_4)$ bilden.

$v_2 = -v_3$
$\Rightarrow Sp(v_1, v_3, v_4) = Sp(v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 10 & 0 \\ 3 & 2 & 14 & 0 \\ 4 & 3 & 10 & 0 \\ 0 & -3 & 10 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 1 \cdot a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$
$-1 a_2 + 4 a_3 = 0$
$\Rightarrow 4 a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$
$a_1 + \underbrace{a_2}_{0} + \underbrace{2 a_3}_{0} = 0$

$\Rightarrow a_1 = 0$

d.h. die einzige Lösung ist $(a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow v_1, v_3, v_4$ sind linear unabhängig und somit eine Basis

---

Bestimmen sie eine Basis und die Dimension von
$V = Sp((1,3,4,0,1), (2,5,6,-2,1), (1,5,8,4,3)) \subseteq \mathbb{R}^5$

$(v_1, v_2 \mid v_3) \longrightarrow v_3 = 5v_1 - 2v_2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$v_1 = \lambda v_2$ für ein $\lambda \in K$

$1 = \lambda 2 \Rightarrow \lambda = 2$
$3 \neq 2 \cdot 5$ ↯

$\Rightarrow v_1$ und v_2 linear unabhängig sind
$B = \{v_1, v_2\}$

$\Rightarrow \dim(V) = |B| = 2$

Sei K ein Körper. Zeigen oder widerlegen Sie:
Es gibt eine Basis p_0, p_1, p_2, p_3 von $K[x]_3 = \{p \in K[x] \mid \deg(p) \leq 3\}$ sodass keines der Polynome p_0, p_1, p_2, p_3 Grad 2 hat.

Monombasis: $\{1, x, x^2, x^3\}$
$x \notin K$ d.h. für x $\nexists \lambda \in K$ sodass $x \cdot \lambda = x^2$ ebenso für $x^2 \cdot \lambda' = x^3$
$x + x^2 \neq x^3$

Behauptung: $\underbrace{\{1, x, x^2 + x^3, x^3\}}_{B'}$ ist eine Basis.

Lineare Unabhängigkeit:
$a_1 1 + a_2 x + a_3(x^2 + x^3) + a_4 x^3 = 0$
$\Rightarrow a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + (a_3 + a_4) x^3 = 0$
$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \underbrace{a_3}_{=0} + a_4 = 0$
$\Rightarrow a_4 = 0$
$\Rightarrow B'$ ist linear unabhängig

$Sp(B') = K[x]_3$
$Sp(1, x, x^2 + x^3, x^3) \subseteq Sp(1, x, x^2, x^3)$
$Sp(1, x, x^2, x^3) \subseteq Sp(1, x, x^2 + x^3, x^3)$:
$x^2 = (x^2 + x^3) - x^3$
$\Rightarrow B'$ eine Basis von $K[x]_3$

Linearkombinationen bestimmen
$(u \ v \ w \mid x)$

Lineare Unabhängigkeit zeigen:
$\left(u \ v \ w \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit Gauss lösen