Plan für Übungsstunde 8

Summen, direkte Summen, Dimensionsformel
Uebung am 09.11.20

0.0.1 Wiederholung

Definition 1. (Erzeugendensystem & Basis)
Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum, $W \subset U$ eine Teilmenge, wir sagen W ist ein *Erzeugendensystem* von U, falls $\langle W \rangle := \mathrm{Sp}(W) = U$. Falls zusätzlich W linear unabhängig ist, nennen wir W eine Basis von U.

Bemerkung:
In obiger Definition kann auch $U = V$ sein!

Beispiel 0.1. 1. $\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

2. $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$: Dimension 2 mit Basis $\{1, i\}$

3. $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$: Dimension 1 mit Basis $\{1\}$, da $i(1, 0) = (0, 1)$.

0.0.2 Zeilen- & Spaltenraum

Definition 2. (Zeilenraum & Spaltenraum)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
Wir definieren den *Spaltenraum*

$$SR(A) = \langle \{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\} \rangle \subset \mathbb{K}^m$$

Wobei $A^{(j)}$ die j-te Spalte der Matrix A bezeichnet. Analog definieren wir den *Zeilenraum*

$$ZR(A) = \langle \{A_{(1)}, A_{(2)}, \ldots, A_{(n)}\} \rangle \subset \mathbb{K}^n$$

Wobei $A_{(j)}$ die j-te Zeile der Matrix bezeichnet.

Beispiel 0.2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $m = n = 4$

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Dann ist der Spaltenraum und eine Basis davon gegeben durch...? Uff.

Zum Glück kennen wir folgende Proposition aus der Vorlesung:

Proposition 1. *Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Sei A' durch elementare Zeilenumformungen von A entstanden, so gilt:*

$$ZR(A') = ZR(A)$$

Sei $\tilde{A}$ aus elementaren Spaltenumformungen von A entstanden, so gilt

$$SR(\tilde{A}) = SR(A)$$

Wieso gilt das? Wenn wir uns an das Beispiel:
"$\dots v_1, v_2 \in V \;\lambda, \mu \in \mathbb{K}\; U := \langle\{v_1, v_2\}\rangle = \langle\{v_1, v_2, \lambda v_1 + \mu v_2\}\rangle$"
erinnern. Dort haben wir gesehen, dass wir einen Vektor unter der Voraussetzung, dass er eine Linearkombination aus den restlichen Vektoren im Erzeugendensystem ist, aus einem Erzeugendensystem "wegkürzen" können ohne den aufgespannten Unterraum zu verändern. Insbesondere können wir das solange machen, bis unser Erzeugendensystem linear unabhängig und somit eine Basis ist! Dasselbe passiert bei elementaren Zeilen-/Spaltenumformungen.

Beispiel 0.3. A umformen zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Mit $A^{(1)} + \frac{1}{2}A^{(4)} - A^{(3)} \to A^{(1)}$; $\frac{1}{2}(A^{(2)} + \frac{-3}{2}A^{(1)} + \frac{1}{2}A^{(3)}) \to A^{(1)}$; $\frac{1}{2}(A^{(3)} - A^{(1)}) \to A^{(3)}$ und $A^{(4)} + 2A^{(1)} - A^{(2)} \to A^{(4)}$

Definition 3. (Zeilenrang & Spaltenrang) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$
Wir haben den *Zeilenrang* von A definiert:

$$Zeilenrang(A) := dim(ZR(A))$$

und analog den *Spaltenrang* von A:

$$Spaltenrang(A) := dim(SR(A))$$

Wir haben gesehen, dass die beiden gleich sind! Wir verzichten deshalb auf die Präfixe "Zeilen-" und "Spalten-" und definieren den *Rang* von A:

$$Rang(A) := dim(SR(A)) = dim(ZR(A))$$

Beispiel 0.4. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{K}^m$
Dann gilt: $Lös(A, b) \neq \emptyset$ genau dann wenn $Rang(A) = Rang(A|b)$. Wobei $A|b$ die erweiterte Koeffizientenmatrix ist.

Angenommen es existiert eine Lösung $(x_1, \dots, x_n)$, dann ist $b = \sum_{i=1}^n x_i A^{(i)}$ und damit $ZR(A) = ZR(A|b)$ und $Zeilenrang(A) = Zeilenrang(A|b)$.
Mit $ZR(A) \subset ZR(A|b)$ folgt aus $dim(ZR(A|b)) = dim(ZR(A))$, dass $ZR(A|b) = ZR(A)$ und damit $b \in ZR(A|b) = ZR(A)$. Insbesondere heisst das, dass Koeffizienten $x_1, \dots, x_n$ existieren mit $b = \sum_{i=1}^n x_i A^{(i)}$ und damit für $x = (x_1, \dots, x_n)$, $Ax = b$.

0.0.3 Summe von Unterräumen und direkte Summe

Definition 4. (Summe v. Unterräumen)
Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. $U_1, U_2 \subset V$ Unterräume. Wir habden die Summe von U_1 und U_2 definiert als:

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \in V \mid u_1 \in U_1; u_2 \in U_2\}$$

Wiederholung: Wieso ist das ein Unterraum von V?

Beispiel 0.5.

1. $\left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right\rangle + \left\langle\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$
2. Zeige für $S_1, S_2 \subset V$ gilt: $\langle S_1 \cup S_2\rangle = \langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle$
3. $V = C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ is continous}\}$
   $U_1 := \{f \in V \mid \forall x \in \mathbb{R} :\ f(x) = f(-x)\}$,
   $U_2 := \{f \in V \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)\}$
   Dann ist $V = U_1 + U_2$. Das wurde in einer Serie gezeigt. Sie haben sogar gezeigt: $V = U_1 \oplus U_2$.

Proposition 2. *(Dimensionsformel)*
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit $dim(V) < \infty$. Seien $U, W \subset V$ Unterräume. Dann gilt:

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$$

Beispiel 0.6. 1. In $\mathbb{R}^3$ sind Ebenen und Geraden durch den Ursprung Untervektorräume. Wir haben überprüft, dass die Dimensionsformel für alle Kombinationen von Ebenen und Geraden gilt. Zwei parallele Ebenen müssen wir dabei nicht betrachten, da sich ja alle UVRs im Ursprung schneiden. Zwei Ebenen, die UVRs sind, schneiden sich also in einer Gerade von Dimension 1.

Definition 5. (Direkte Summe)
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $U_1, U_2 \subset V$ Unterräume. Wir sagen, dass V die direkte Summe von U_1 und U_2 ist, falls gilt:

i) $V = U_1 + U_2$

ii) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

und wir schreiben: $V = U_1 \oplus U_2$

Wir haben gesehen, dass wir die direkte Summe auch folgendermassen charakterisieren können:

Proposition 3. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $U_1, U_2 \subset V$ Unterräume. Folgende sind äquivalent:*

i) $V = U_1 \oplus U_2$

ii) Für alle $v \in V$ gibt es eindeutige $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$

Der Beweis wurde in der Vorlesung besprochen. Sich daran zu erinnern ist aber eine gute Übung.

Beispiel 0.7. 1. Siehe Bsp 3 mit ungeraden und geraden Funktionen, sie haben in der Serie gezeigt, dass Voraussetzung ii) in obiger Prop. erfüllt ist.

2. $V = Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$, wobei $char(\mathbb{K}) \neq 2$
$U_1 := \{A \in V \mid A^t = A\} = \{A \in V \mid \forall i, j : \ A_{ij} = A_{ji}\}$,
$U_2 := \{A \in V \mid A^t = -A\} = \{A \in V \mid \forall i, j : \ A_{ij} = -A_{ji}\}$

Was passiert wenn $char(\mathbb{K}) = 2$? Dann gilt $a_ij = -a_ij, alsoA = -AundU_1 = U_2$

Zeige: $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, bestimme $dim(U_1)$, $dim(U_2)$. Folgere mit der Dimensionsformel, dass für alle $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{K})$ eindeutige $B \in U_1$, $C \in U_2$ existieren mit $A = B + C$.