Plan Übungsstunde 3

Fischer 0.4

1 Wiederholung der Theorie

Definition (Zeilenstufenform, 0.4.3 Fischer)**.** *Eine* (mxn)*-Matrix* $A = (a_{ij})$ *heisst in* ***Zeilenstufenform****, wenn folgendes gilt:*

1. *Es gibt eine Zahl* r *mit* $0 \leq r \leq m$ *sodass in den Zeilen mit Index* $r+1$ *bis* m *nur Nullen stehen.*
2. *Für jedes* i *mit* $1 \leq i \leq r$ *sei* $j_i = \min\{j \in \{1, \ldots, n\} \colon a_{ij} \neq 0\}$*. Dann:*

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_r.$$

Zeichung siehe 0.4.3 in Fischer
$a_{1j_1} \ldots a_{rj_r}$ heissen **Pivots**. Mögliche Beispiele:

1. Die Nullmatrix (d.h.$A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 0$ für alle i, j) ist in ZSF (r=0 in obiger Def.).
2. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   ist nicht in ZSF ($j_2 < j_1$).

Wieso sind Matrizen in ZSF interessant? Gleichungssysteme mit erweitert Koefizzientmatrix in ZSF sind einfacher zu lösen!

Ist es möglich eine erweiterte Koeffizientmatrix (A, b) umwandeln sodass sie in ZSF wird?

Zeilenoperationen: Wir haben drei Zeilenoperationen auf Matrizen:

1. Zwei Zeilen vertauschen
2. Addition des λ-fachen i-ten Zeile zur k-ten Zeile, wobei $i \neq k$, $\lambda \in \mathbb{R}$
3. ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ mit einer Zeile multiplizieren.

Zeilenoperationen ändern die Lösungsmengen, d.h das LGS $A \cdot x = b$ hat die gleiche Lösungsmenge wie $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$, wobei $(\tilde{A}, \tilde{b})$ durch endlich viele Zeilenoperationen von (A, b) erhalten wird (siehe Satz 0.4.6 Fischer).

2 Übungen

1. Wie Aufgabe 2 in der Serie:
   Sei $E \subset \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ die Ebene durch die Punkte $P = (1, 1, 0)$, $Q = (1, -1, 3)$ und $R = (0, 3-1)$ und sei $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 2x + y + 3z = 1\}$. Bestimme die Schnittmenge $E \cap F$.

Lösung:

E als Lösungsmenge einer linearen Gleichung: $\mathrm{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 4x + 3y + 2z = 7\}$. Diese können wir finden indem wir erst in Parameterform und dann in Koordinatenform umformen. Wir erhalten folgendes LGS:

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ 4x + 3y + 2z &= 7 \end{aligned}$$

Mit elementaren Zeilenumoformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 - 2L_1 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

x_3 ist ein freier Parameter und wir haben die folgende Parametrisierung der Schnittmenge:

$$\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \left\{ \left(-\frac{(4+7t)}{2}, 5 + 4t, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Auf diese Lösung kommt man z.B. indem man sich als vierte Zeile 0,0,1,t (da z=t) dazudenkt und dann Zeilenumformungen durchführt.

Nicht besprochen, könnte als Beispiel für Aufgabe 3 hilfreich sein:

Betrachte die Ebene

$$\mathrm{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Wir wollen E als die Lösungsmenge einer Linearegleichung schreiben.

Ein Punkt $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ liegt in E genau dann, wenn es $s, t \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Wir kriegen so ein lineares Gleichunssystem mit Variablen $s, t \in \mathbb{R}$, das wir mit dem Gauss-Algorithmus/elementaren Zeilenumformungen lösen:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & x_1 - 1 \\ 0 & -2 & x_2 - 2 \\ 3 & 3 & x_3 \end{array}\right) &\xrightarrow{L_3 - \frac{3}{2}L_1 \to L_3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & x_1 - 1 \\ 0 & -2 & x_2 - 2 \\ 0 & -\frac{9}{2} & x_3 + \frac{3}{2} - \frac{3x_1}{2} \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{\frac{2}{9}L_3 \to L_3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & x_1 - 1 \\ 0 & -2 & x_2 - 2 \\ 0 & -1 & \frac{2x_3}{9} + \frac{1}{3} - \frac{x_1}{3} \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{L_3 - \frac{1}{2}L_2 \to L_3} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & x_1 - 1 \\ 0 & -2 & x_2 - 2 \\ 0 & 0 & -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{2} + \frac{2x_3}{9} + \frac{4}{3} \end{array}\right) \end{aligned}$$

Insbesondere existiert eine Lösung genau dann, wenn

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} - \frac{2x_3}{9} = \frac{4}{3}$$

und das ist die Gleichung, deren Lösungsmenge die Ebene E ist.

2. (Andere Art der Matrixmultiplikation) Erinnern Sie sich, dass auf dem reellen n-dimensionalen Raum

$$\mathbb{R}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}\}$$

eine Addition und eine Skalarmultiplikation definiert sind. In dieser Aufgabe wollen wir über die Elemente von $\mathbb{R}^m$ als Spaltenvektoren denken und Ihnen eine andere Art zeigen, über die Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor nachzudenken. **(Obwohl ich die Vektoren als Zeilenvektoren schreibe aus Platzgründen.)**

Seien die Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gegeben und sei A die $(m \times n)$-Matrix mit Spalten $a_1, \ldots, a_n$. (am besten aufschreiben wie in Lemma 28 in 02Matrizen.pdf)

(a) Zeigen Sie, dass

$$A \cdot x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i \tag{1}$$

gilt.

Lösung:

Der Vektor $Ax = (y_1, \ldots, y_m)$ hat die Einträge $y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j$. Da die Spaltenvektoren von A die Vektoren $a_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{m,i})$ sind, ist die rechte Seite von (1) ein Vektor mit k-tem Eintrag (Koordinate) $\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ki} = y_k$.

(b) Überprüfen Sie (1) anhand des folgenden Beispiels: Seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -4 & -8 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Dann

$$\begin{aligned} A \cdot x &\overset{(a)}{=} -1 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition. *Ein Vektor in $\mathbb{R}^n$ der Form $\sum_{i=1}^{n} x_i a_i$ für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ heißt eine* Linearkombination *der Vektoren $a_1, \ldots, a_n$.*

Diese Denkweise über die Matrixmultipliation kann beim Lösen eines linearen Gleichungssystem wie folgt helfen: Manchmal können Sie eine Lösung von $A \cdot x = b$ für einen gegebenen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ finden, in dem Sie b als Linearkombination der Spalten $a_1, \ldots, a_n$ darstellen. Wenn Sie eine solche Linearkombination finden, garantiert dies nicht, dass es keine weiteren Lösungen des Gleichungssystems gibt. Doch insbesonere wegen Aufgabe 6 auf der Serie ($\text{Lös}(A, b) = y + \text{Lös}(A, 0)$) kann dies weniger Rechenarbeit beim Lösen des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ bedeuten.

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -4 & -8 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Matrix bzw. ein Vektor über $\mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $A \cdot x = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3$.
(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $A \cdot x = b$ für $x \in \mathbb{R}^3$.

Lösung:

1. Lösungsmenge
$$\text{Lös}(A,0) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Der Vektor
$$y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
ist eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystem, d.h. $Ay = b$. **Diesen Vektor kann man finden, in dem man eine Linearkomb. der Spalten von A sucht, die b ergibt.** Somit ist der Lösungsraum gegeben durch
$$\text{Lös}(A,b) = y + \text{Lös}(A,0).$$

(c) Für reelle Zahlen a, b führen wir die folgende reelle 3×3 Matrix in Zeilenstufenform über:
$$B = \begin{pmatrix} 0 & b & a \\ b & a & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Falls $b = 0 = a$, dann ist B die Nullmatrix und insbesondere in ZSF.
Falls $b = 0$ und $a \neq 0$ dann
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
die dritte und die erste Zeile umtauschen.
Falls $b \neq 0$:
$$\begin{pmatrix} 0 & b & a \\ b & a & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} b & a & b \\ 0 & b & a \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - \frac{a}{b} L_1 \to L_3} \begin{pmatrix} b & a & b \\ 0 & b & a \\ 0 & b - \frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$$

Nun: falls $b - \frac{a^2}{b} = 0$ dann ist B schon in ZSF. Sonst nehmen wir $b - \frac{a^2}{b} \neq 0$ an, so können wir weiter:
$$\xrightarrow{\frac{1}{(b - \frac{a^2}{b})} L_3 \to L_3} \begin{pmatrix} b & a & b \\ 0 & b & a \\ 0 & 1 & -\frac{a}{(b - \frac{a^2}{b})} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - \frac{1}{b} L_2 \to L_3} \begin{pmatrix} b & a & b \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & -\frac{a}{b} - \frac{a}{(b - \frac{a^2}{b})} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 24 (Rechnen mit Matrizen, $4 = 1 + 0.5 + 1 + 0.5 + 1$ Punkte).

Berechnen Sie die folgenden Produkte und Summen von Matrizen über dem Körper $\mathbb{R}$, sofern sie definiert sind:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}^{123}$ und $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{79}$

Lösung:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Analog sehen wir, dass $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 2 & 2 \cdot (-2) + 4 \\ 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Analog dazu berechnen wir $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$ und

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-2) \\ -1 \cdot 4 & -1 \cdot 3 & -1 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 & -6 \\ -4 & -3 & 2 \\ 8 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Die Addition $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert.

(e) Wir definieren $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$. Dann ist $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 12 & -4 & -4 \\ 24 & -8 & -8 \end{pmatrix}$ und $A^3 = 0$. Daher ist $A^{123} = 0$.

Definiere $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. Dann gilt $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = B$, weswegen $B^{79} = B$.