Übungsstunde 10

Nachbesprechung

Aufgabe 3: • U, V als Span gegeben

• LGS aufstellen

$$(*) \quad 0 = a_1\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

• In Matrix Notation

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

• Lösung ist vierer vektor

↓

Einsetzen $(*)$

Kern und Bild einer Matrix

$T: \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^3, \; x \longmapsto Ax$

$\mathrm{Bild}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{Q}^4\}$

$\mathrm{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{Q}^4 \mid Ax = 0\}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme Kern(A):

LGS: $$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}-3\times\mathrm{II}]{\mathrm{I}-2\times\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{I}-\mathrm{III}$

$$\xrightarrow{I-III} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$a_1 - a_3 = 0$$
$$a_2 + a_3 + 2a_4 = 0$$

Setze $a_1 = 1 \Rightarrow a_3 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$a_2 = 1 \Rightarrow a_4 = -1$

$a_1 = 0,\ a_2 = 2 \Rightarrow a_3 = 0$

$a_4 = -1$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{span}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{Basis}}\Big)$$

Bild (A)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} A = \cancel{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}},\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} A = \cancel{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

$V = \mathbb{Q}^4 \qquad \dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(T)) + \dim(\mathrm{Kern}(T))$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Bild}(T)) = 2$

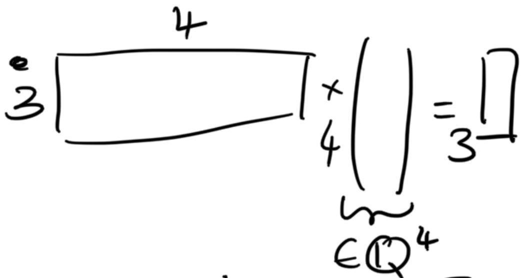
Rangsatz

Sei $T: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung

Dann gilt $\dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim($

① Sei $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q})$. Ist es möglich, dass $\mathrm{Lös}(A,0)$ nur die triviale Lösung enthält?

- $\mathrm{Lös}(A,0) = \mathrm{Ker}(A) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A))$
  $= \dim(\mathrm{Lös}(A,0))$



$V = \mathbb{Q}^4$

$\dim(V) = 4$

$\dim(\mathrm{Im}(A)) \leq 3$

$A: \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^3$

$\Rightarrow \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(T)) \geq 4 - 3 = 1$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Lös}(A,0)) > 0$

$\Rightarrow$ Nein, $\mathrm{Lös}(A,0) \neq \{0\}$

② Sei $A \in M_{4\times 6}(\mathbb{F}_7)$ mit $\dim(\{x \in \mathbb{F}_7^6 \mid Ax = 0\}) = 2$. Ist es möglich, dass ein $b \in \mathbb{F}_7^4$ existiert, sodass $\mathrm{Lös}(A,b) = \emptyset$?

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \dim(V) = 6 \\ \cdot \dim(\mathrm{Kern}(A)) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(A)) = 4$$

Das heisst $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{F}_7^4$ und

$\mathrm{Lös}(A,b) \neq \emptyset$ für alle $b \in \mathbb{F}_7^4$

$\mathcal{L}\ddot{o}s(A, b) \neq \emptyset$ für alle $b \in \mathbb{F}_2$.

Matrixmultiplikation

$m, n, p \in \mathbb{N}$ $\quad M_{m\times n}(K) \times M_{n\times p}(K) \longrightarrow M_{m\times p}(K)$

$$(A, B) = \left((a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le m}}, (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}\right) \longmapsto AB$$

$(AB) = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le p}}$ mit

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Achtung: Es muss gelten Anzahl Spalten von A = Anzahl Zeilen von B.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 1 - 2\cdot 1 & \\ & \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 1 - 2\cdot 1 & 3\cdot 0 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 & 3\cdot(-2) + 2\cdot 2 + 1\cdot 0 \\ 2\cdot(-2) + 0\cdot 1 + (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 0 + 3\cdot 0 + 1\cdot 1 & (-2)(-2) + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 7 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{nicht definiert}$$

Einheitsmatrix

$$\underbrace{I_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i=j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

$$I_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{n \times n}(K)$$

Trick:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

Vergleich zu bereits Bekannten

Skalarmultiplikation

$\lambda \in K$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ & \cdots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrix-Vektor

$A \in M_{m \times n}(K)$

$v \in K^n$

$$\begin{pmatrix} c & d & e \\ x & y & z \\ k & l & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} ac+bd+ec \\ xa+yb+zc \\ ka+lb+mc \end{pmatrix}}$$

Matrix-Matr

$M_{m \times n}(K)$

$\times M_{n \times p}(K$

$\rightarrow M_{m \times p}$

$w \in K^m$

Beispiel

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 - 1 + (-1)) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgaben

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{B} \qquad AB = ? \quad BA = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -20 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

- nicht kommutativ
- nicht nullteilerfrei

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

Invertierbare Matrix

Sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{n\times n}(K)$ heisst invertierbar, falls $B \in M_{n\times n}(K)$ existiert, sodass
$$AB = I_n$$
$$BA = I_n$$
$$B = A^{-1}.$$

$\iff \operatorname{Rang}(A) = n$

$\iff$ Zeilen von A linear unabhängig

Allgemeine Lineare Gruppe

$GL_n(K) = \{$invertierbare $n\times n$ Matrizen über $K\}$

$\dim(V) = n$

$\dim(\operatorname{Bild}(A)) = n$

$\Rightarrow \dim(\operatorname{Kern}(A)) = 0$

Koordinatenvektor

V Vektorraum, B Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ und sei $v \in V$. Definiere den Koordinatenvektor von v bzgl. B als
$$[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ wobei } a_1 \dots a_n \in K$$

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

Koordinatenabbildung

$\Phi_B : V \longrightarrow K^n \quad v \longmapsto [v]_B$

- linear
- bijektiv

$\}$ Isomorphismus

Jeder VR der Dimension n ist isomorph zu K^n.

Zum Isomorphismus

$T : V \longrightarrow W$

"lineare Eigenschaften in V" $\overset{T}{\longleftrightarrow}$ "lineare Eigenschaften in W"

- $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig $\Longleftrightarrow$ $Tv_1, \dots, Tv_n$ linear unabhängig

erzeugend $\Longleftrightarrow$ $Tv_1 \dots Tv_n$ erzeugend

Darstellungsmatrix

$T : V \longrightarrow W$

$V \to$ B Basis, $W \to$ C Basis

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(v_1)]_C & [T(v_2)]_C & \dots & [T(v_n)]_C \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$[T]_C^B [v]_B = [Tv]_C$$

$\boxed{m \quad} = \Phi \circ T \circ \Phi^{-1}$

$\ldots [T]^{B}_{C} \quad \Phi_C \ldots \Phi_B$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] & W \arrow[d, "\Phi_C"] \\
K^n \arrow[u, "\Phi_B^{-1}"] \arrow[r, dashed, "\Phi_C \circ T \circ \Phi_B^{-1}"'] & K^m
\end{tikzcd}$$

$\longrightarrow$ Lemma 3.18: eindeutige Matrix $A \in M_{m \times n}$

$\longrightarrow$ Lemma 3.30: die Verkettung linearer Abbildungen ist linear

Beispiel mit Koordinaten

$T: P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R}),\ T(f) \to f'$

$\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$, $\gamma = \{1, x, x^2\}$

$\{1-x, x, x^2, x^3\}$, $\gamma = \{x, 1, x^2\}$

$T(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$T(x) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$T(x^2) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + \quad \cdot x^2$

$T(x^3) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2$

$$[T]^{\beta}_{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$$U: P_2(\mathbb{R})_\gamma \longrightarrow P_3(\mathbb{R})_\beta, \quad U(f)(x) = \int_0^x f(t)\,d$$

$$U(1) = x = 0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + 0x^3$$

$$U(x) = \tfrac{1}{2}x^2 = 0\cdot 1 + 0x + \tfrac{1}{2}x^2 + 0\cdot x^3$$

$$U(x^2) = \tfrac{1}{3}x^3 = 0\cdot 1 + 0x + 0\cdot x^2 + \tfrac{1}{3}x^3$$

$$[U]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$[TU]_\gamma = [T]_\gamma^\beta [U]_\beta^\gamma$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}$$

$$[UT]_\beta = [U]_\beta^\gamma \cdot [T]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \mathrm{Id}$$

Ergibt Sinn, denn: $(1)' = 0$

$$\int_0^x 0\,dt = 0 \quad \forall x$$

Nun führen wir Koordinatentransformation durch:

$$\Phi_\beta : P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\Phi_\gamma : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$L_A = A = [T]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Betrachte $p(x) = 2 + x - 3x^2 + 5x^3$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wir zeigen $L_A \Phi_\beta(p) = \Phi_\gamma T(p)$.

$$L_A \Phi_\beta(p) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$\Phi_B(v)$

$$T(p) = p' = 1 - 6x + 15x^2$$

$$\Phi_\gamma(1 - 6x + 15x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Also gilt $[T]_\gamma^\beta [v]_\beta = [Tv]_\gamma$.

$$\begin{tikzcd} P_3(\mathbb{R}) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi_\beta"'] & P_2(\mathbb{R}) \arrow[d, "\Phi_\gamma"] \\ \mathbb{R}^4 \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

17 $\Phi_\gamma^{-1} \circ \Phi_B$

$T: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R}),\ T(f) = f + f' + f''$

$\mathrm{Kern}(T) = \{0\}$, da $f \neq -f' + (-f'')$

$\Downarrow$

$\boxed{T \text{ invertierbar}}$

$$[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(1) = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$
$$T(x) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$$
$$T(x^2) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot x + x^2$$

Matrix

$$\underbrace{[T]_C^B}_{} = \Phi_C \circ T \circ \Phi_B^{-1}$$

$$v \in V \longrightarrow a_1 b_1 + \dots a_n b_n$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$[T]_C^B$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \end{vmatrix} \quad \alpha c_1 + \dots + \alpha c_n \in W$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$