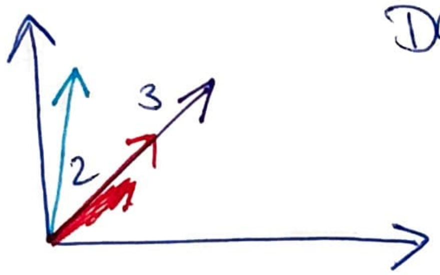
Übungsstunde 9.

Nachbesprechung Serie

Definition Lineare Unabhängigkeit

V K-VR, $v_1, \dots, v_n \in V$, $a_i \in K$ beliebig für $i \in \{1, \dots, n\}$

Aus $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i}_{= a_1 v_1 + \dots + a_n v_n} = 0$ folgt $a_1 = \dots = a_n = 0$.



Dann ist $1\uparrow - \frac{3}{2}\uparrow = 0$

d.h. aus $\sum a_i v_i = 0 \not\Rightarrow a_i = 0$

Andererseits ist $a_1\uparrow + a_2\uparrow = 0$

so folgt $a_1 = a_2 = 0$

Zur nächsten Serie / Summen (Aufgabe 1)

Gegeben $U \subseteq V$ finde W, sodass $U \oplus W = V$.

Wir machen Beispiel in $\mathbb{R}^3$:

$$U := \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Es gilt $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^3$

$W \cap U = \emptyset \implies U \oplus W = V$

Lineare Abbildungen (VR-Homomorphismus)

Seien V, W Vektorräume über einem Körper K.
$T: V \to W$ heisst linear falls gilt:

- $\forall v_1, v_2 \in V: T(v_1+v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
- $\forall a \in K, v \in V: T(av) = aT(v)$

Wichtige Eigenschaften

(1) $a_1, \dots, a_n \in K, v_1, \dots, v_n \in V$:

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i)$$

(2) $T(0_V) = 0_W$

"Eindeutigkeitssatz"

(3) Sei V endlich dimensional, $v_1, \dots, v_n \in V$ Basis von V. Seien $w_1, \dots, w_n \in W$ beliebige Vektoren. Dann existiert eine eindeutige Abbildung $T: V \to W$ mit $T(v_i) = w_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Achtung! Unterscheidung von $\underbrace{\text{Homomorphismen}}_{\text{strukturerhaltende Abbildungen}}$

Wir haben schon gesehen:
Gruppenhomomorphismen
$\phi: G \to H$
$\phi(g_1 * g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$

$T: V \to W$ linear nennen wir

Isomorphismus $\Leftrightarrow T$ bijektiv

Endomorphismus $\Leftrightarrow W = V$

Automorphismus $\Leftrightarrow T = W$ und T bijektiv

Jetzt: Vektorraumhomomorphismen

Beispiele für lineare Abbildungen

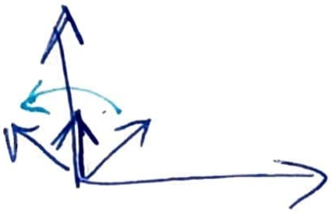
Betrachte $\mathbb{R}^2$. Lineare Abbildungen können hier als 2×2 Matrizen geschrieben werden.

Rotation

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

z.B. $\theta = \frac{\pi}{2}$ also $90°$

$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ $\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir können jeden Vektor in der Ebene darstellen in der Form $\begin{pmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \end{pmatrix}$.

Z.z. $A \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha)\cos(\theta) - r\sin(\theta)\sin(\alpha) \\ r\cos(\alpha)\sin(\theta) + r\sin(\alpha)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

Additionstheoreme

$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cdot\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$

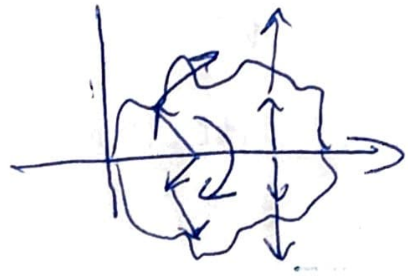
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

Lineartität

Folgt direkt aus der Darstellung als Matrix.

Spiegelung an X-Achse

$\left(A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$



Wie finden wir die passende Matrix?

Basis: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Skalierung mit 2

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Projektion auf Y-Achse

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{GeoGebra}}$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Eine lineare Abbildung ist also eindeutig bestimmt durch das Bild dieser Vektoren.

$\Rightarrow$ Link verschicken

Kern und Bild

- $\mathrm{Ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}$ ist ein Untervektorraum von V
- Bild: $\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$ ist UVR von W.

Eigenschaften

Sei T eine lineare Abbildung. Dann gilt

(1) T ist injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$

(2) T ist surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(T) = W$

Rangsatz

Sei $T: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung.

Dann gilt: $\dim \mathrm{Ker}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = \dim(V)$

Aufgabe

Seien $v_1, \dots, v_m \in V$. T eine lineare Abbildung von $K^m \longrightarrow V$

gegeben durch $T(z_1, \dots, z_m) = z_1 v_1 + \dots + z_m v_m$

(a) Welche Eigenschaft muss T haben, damit gilt $v_1, \dots, v_m$ V aufspannen?

Es gilt $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_m)$.

Wenn $v_1, \dots, v_m$ V aufspannen, so folgt T ist surjektiv.

(b) Welche Eigenschaft entspricht $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig?

$v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig bedeutet

$z_1 v_1 + \dots + z_n v_n = 0 \Longleftrightarrow (z_1, \dots, z_m) = (0, \dots, 0)$

Daraus folgt $\mathrm{Ker}(T) = \{(0, \dots, 0)\} = \{0_V\}$.

Also ist T injektiv.

Sei V ein endlicher K-Vektorraum über K und $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus. Es gelte $\varphi \circ \varphi = 0$.

<u>z.z.</u> $\text{Bild}(\varphi) = \text{Kern}(\varphi) \Leftrightarrow \dim_K(V) = 2\dim_K(\text{Kern}(\varphi))$

<u>Beweis</u>

„$\Rightarrow$" Mit Rangsatz gilt:

$\dim_K(V) = \dim_K \text{Bild}(\varphi) + \dim_K \text{Kern}(\varphi)$

$\overset{\text{Voraussetzung } \text{Bild}(\varphi) = \text{Kern}(\varphi)}{=} 2\dim_K \text{Kern}(\varphi)$

„$\Leftarrow$" (i) <u>$\text{Bild}(\varphi) \subset \text{Kern}(\varphi)$</u>

Sei $v \in \text{Bild}(\varphi)$. Nach Definition gilt $\exists x \in V$ mit $v = \varphi(x)$. Da $\varphi \circ \varphi = 0$ gilt $\varphi(v) = \varphi(\varphi(x)) = \varphi \circ \varphi(x) = 0$.

Somit is $v \in \text{Kern}(\varphi)$.

<u>$\text{Kern}(\varphi) \subset \text{Bild}(\varphi)$</u> $\rightsquigarrow$ Wenn gleiche Dimension folgt das aus (i), da Bild & Kern UVR

Also verwende Rangsatz:

$2\dim_K \text{Kern}(\varphi) \overset{\text{Voraussetzung}}{=} \dim_K(V) = \dim_K \text{Bild}(\varphi) + \dim_K \text{Kern}(\varphi) \quad \Big| -\dim_K \text{Kern}(\varphi)$

$\dim_K \text{Kern}(\varphi) = \dim_K \text{Bild}(\varphi)$

$\xRightarrow{\text{(i) + Kern \& Bild UVRe}} \text{Bild}(\varphi) = \text{Kern}(\varphi)$

Aufgabe zu linearen Abbildungen als Fragen

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$ $\Rightarrow$ ist linear

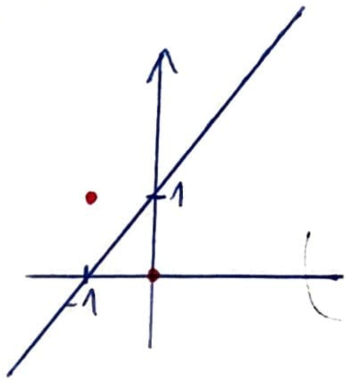
$$f(a_1 x + a_2 y) = 0 = a_1 f(x) + a_2 f(y) \checkmark$$

(b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$ $\Rightarrow$ nicht linear

$$f(0) = 1 \neq 0 \ ↯$$

(c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$.

$$f(0,0) = (-1,1) \neq (0,0) \ ↯$$



$\Rightarrow$ nicht linear

(d) Projektion $P: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ auf xy-Ebene.

$P(x,y,z) = (x,y,0)$ $\Rightarrow$ linear

Beweis Seien $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Dann gelten:
$$\begin{aligned} P(v_1 + v_2) &= P(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \\ &= (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = P(v_1) + P(v_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\lambda v_1) &= P(\lambda x_1, \lambda y_1, 0) \\ &= (\lambda x_1, \lambda y_1, 0) = \lambda (x_1, y_1, 0) = \lambda P(v_1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ P linear

Da P linear ist gilt:
- $\mathrm{Im}(P)$ ist UVR von $\mathbb{R}^2$
- $\mathrm{Ker}(P)$ ist UVR von $\mathbb{R}^2$

Aus Abbildungsvorschrift folgt ~~Ker(P) = {0} mit~~

$\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \Rightarrow \dim = 1$ ~~Basis {0}~~

$\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Span}\left(P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, P\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

Rangsatz: $\dim \operatorname{Ker}(P) + \dim \operatorname{Im}(P) = \dim(V)$

hier: $1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ ✓

(e) Seien $b, c \in \mathbb{R}$. Definiere $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$T(x, y, z) = (2x - 4y + 3z + b, 6x + cxyz)$

ist linear $\Leftrightarrow b = c = 0$

Da $(0,0,0) = T(0,0,0) \Rightarrow b = 0$

Ausserdem $T(1,1,1) = T(1,1,0) + T(0,0,1)$.

Das ist äquivalent zu $(2-4-3+b, 6+c)$

$= (1+b, 6+c) = (b-2, 6) + (3+b, 0)$

$= (1+2b, 6)$

$\Rightarrow 6 + c = 6 \Rightarrow c = 0$.

Sieht man $b=c=0$ als gegeben, so

~~ist wegen T nur eine l~~

besteht T nur aus eindeutig linearen operationen.

Weitere Anwendung des "Eindeutigkeitssatzes"

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (3x, 2y, x+y)$

Finde eine Matrix die T darstellt.

Lösung:

$(1,0,0) \longmapsto (3,0,1)$

$(0,1,0) \longmapsto (0,2,1)$

$(0,0,1) \longmapsto (0,0,0)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Man sieht gleich: $\dim \operatorname{Ker}(A) = 1$

$\dim \operatorname{Bild}(A) = 2$

Rangsatz ✓