Übungsstunde 2, 28.09.20

Relationen, Mächtigkeit

1 Nachbesprechung der letzten Serie

Zu Aufgabe 2: Wir wollen die Gleichheit der Mengen L und L' zeigen. Gleichheiten von Mengen lassen sich häufig (und so auch hier) gut durch Inklusionen in beide Richtungen zeigen. Wir zeigen also zuerst L $\subset$ L' und dann L' $\subset$ L. Die detaillierte Lösung wird auf der Vorlesungswebsite hochgeladen.

Es ist sehr wichtig zu lernen gut strukturierte formal korrekte Beweise zu schreiben. Begründet alle Schritte. Viel Schulwissen wurde nicht formal besprochen und sollte daher auch nur begründet verwendet werden.

Um euch damit zu helfen wurde eine Dokument Beweismethoden erstellt (per Mail verschickt). Außerdem gibt es dieses Skript zur Aussagenlogik und Beweismethoden: `http://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-1151-00L/sc/aussagenlogik.pdf`

2 Relationen

2.1 Wiederholung der Theorie

Wir wiederholen einige Definitionen aus dem Analysis Skript:

Relation

Seien X und Y Mengen. Eine Relation auf X $\times$ Y ist eine Teilmenge R $\subset$ X $\times$ Y . Wir schreiben auch xRy falls (x, y) $\in$ R oder verwenden Symbole wie z.B. $\sim$.

Äquivalenzrelation

Eine Relation auf X ist eine Äquivalenzrelation, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Reflexivität: $\forall$ x $\in$ X: x$\sim$x.
- Symmetrie: $\forall$ x,y $\in$ X: x$\sim$y $\Rightarrow$ y$\sim$x.
- Transitivität: $\forall$ x,y,z $\in$ X: ((x$\sim$y) $\wedge$ (y$\sim$z)) $\Rightarrow$ x$\sim$z.

Wir haben gezeigt, dass = eine Äquivalenzrelation ist.

Äquivalenzklasse

Ist x $\in$ X, so nennen wir die Menge [x] = {y $\in$ X: y $\sim$ x} die Äquivalenzklasse von X. Der Quotient von X modulo x ist definiert als X / $\sim$ = {[x]: x $\in$ X}.

Nach Proposition 1.62 können wir jeder Äquivalenzrelation auf X eine Partition von X zuordnen und umgekehrt.

Beispiel 1:

- Menge = alle Schüler im Gymnasium.
- ÄRel. = Teilmenge von Schüler×Schüler : „x ist in derselben Klasse wie y“.
- Partition = Teilung der Gymnasium in Klassen.
- Äquivalenzklassen = man braucht nur einen beliebigen Schüler aus einer Klasse (der gewählt wird), um die ganze Klasse zu repräsentieren, z.B. bei der Schulkonferenz.
- Quotientenmenge = alle Klassenrepräsentanten.

2.2 Übungen

1. Wie viele verschiedene Relationen gibt es auf $\{1, 2\}$?
   Tipp: Wie viele Elemente hat die Potenzmenge von A x A?
   Lösung: $2^{|A \times A|}$
   Wie lauten alle Äquivalenzrelationen auf $\{1, 2\}$? Welche Partitionen entsprechen ihnen jeweils? Tipp: Es kommen nur Teilmengen in Betracht, die die Diagonale von $A \times A$ enthalten, also die Menge $\{(a, a) \mid a \in A\}$ (wegen der Reflexivität).

2. Wenn wir eine neue Definition kennenlernen, sollten wir uns immer fragen, inwiefern diese Definition sinnvoll gewählt wurde. Zum Beispiel: Sind alle Axiome notwendig oder folgt schon eines aus den anderen?

   Wir zeigen (teilweise), dass die Axiome für Äquivalenzrelationen unabhängig voneinander sind. Wir tun dies mit Gegenbeispielen (weitere Fälle sind in der Serie gefragt, der vollständige Beweis erfordet nur zu zeigen, dass aus jedem Tupel von Axiomen nicht das dritte folgt).
   1. Finde eine Relation, die nur die Reflexivität erfüllt.
   2. Finde eine Relation, die Transitivität und Symmetrie, aber nicht Reflexivität erfüllt.
   3. Finde eine Relation, die Reflexivität und Symmetriem aber nicht Transitivität erfüllt.

   Lösung:
   1. R = $\{$(x,y) : x-y $\in \{$0,1$\}\}$
   2. R = $\{$(x,y) : x = y $\neq$ 1 $\}$
   3. R = $\{$(x,y) : |x-y| $\leq$ 1 $\}$

   Zum Beweis werden jeweils alle Eigenschaften nachgeprüft bzw. Gegenbeispiele für nicht erfüllte Eigenschaften angegeben.

   (Die folgende Aufgabe haben wir aus Zeitgründen nicht mehr machen können. Hier seht ihr aber gut, wie man ordentlich einen Beweis führt.)

3. Sei X eine Menge. Wie behandeln in dieser Aufgabe Relationen auf X als Teilmengen von $X \times X$. Sei $U \subseteq X \times X$ eine Teilmenge, und es bezeichne $\mathcal{S}_U$ die Menge aller Äquivalenzrelationen auf X die U als Teilmenge enthalten. Zeigen Sie, dass
   $$R := \bigcap_{S \in \mathcal{S}_U} S$$
   eine Äquivalenzrelation auf X ist. Die Äquivalenzrelation R wird als *von U erzeugte Äquivalenzrelation* bezeichnet. Betrachten Sie das konkrete Beispiel $X = \mathbb{Z}$ und
   $$U = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \geq 100\}$$

Was ist die von U erzeugte Äquivalenzrelation?

Lösung:

R ist reflexiv. Sei $x \in X$. Tatsächlich gilt $(x,x) \in S$ für alle $S \in \mathcal{S}_U$. Somit erhalten wir $(x,x) \in \bigcap_{S \in \mathcal{S}_U} = R$.

R ist transitiv. Sei $x, y, z \in X$ so dass $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$. Weil $R = \bigcap_{S \in \mathcal{S}_U}$ ist, dann gilt $(x,y), (y,z) \in S$ für alle $S \in \mathcal{S}_U$. Alle $S \in \mathcal{S}_U$ sind Äquivalenzrelationen. Somit gilt $(x,z) \in S$ für alle $S \in \mathcal{S}_U$. Folglich haben wir $(x,z) \in \bigcap_{S \in \mathcal{S}_U} = R$.

R ist symmetrisch. Sei $x, y \in X$ so dass $(x,y) \in R$. Weil $R = \bigcap_{S \in \mathcal{S}_U}$ ist, dann gilt $(x,y) \in S$ für alle $S \in \mathcal{S}_U$. Alle $S \in \mathcal{S}_U$ sind Äquivalenzrelationen. Somit gilt $(y,x) \in S$ für alle $S \in \mathcal{S}_U$. Folglich haben wir $(y,z) \in \bigcap_{S \in \mathcal{S}_U} = R$.

Somit haben wir gezeigt dass R eine Äquivalenzrelation auf X ist.

Behauptung. Die von U erzeugte Äquivalenzrelation ist $\mathbb{Z}^2$.

Sei $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. Für ein genügend grosses $n \in \mathbb{Z}$ haben wir $(x,n) \in U$ und $(n,y) \in U$. Sei S eine Äquivalenzrelation $\mathbb{Z}$ die U enthält. Insbesondere gilt $(x,n) \in S$ und $(n,y) \in S$, und folglich $(x,y) \in S$ weil S transitiv ist. Das zeigt $(x,y) \in S$ für alle $S \in \mathcal{S}_U$, und also $(x,y) \in R$. Da $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ beliebig war, finden wir $\mathbb{Z}^2 \subseteq R = \bigcap_{S \in \mathcal{S}_U} S \subseteq \mathbb{Z}^2$. Daraus schliessen wir dass $\mathbb{Z}^2$ die von U erzeugte Äquivalenzrelation ist.

3 Mächtigkeit

3.1 Theoriewiederholung

Gleichmächtigkeit: Zwei Mengen A und B heissen gleichmächtig, wenn eine Bijektion B: $A \to B$ existiert.

Eine Menge M ist:

- *abzählbar*, falls $|A| = |\mathbb{N}|$. Sie also gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist, es also eine Bijektion $M \to \mathbb{N}$ gibt. Das heisst, dass die Elementen von M durch die Elementen von $\mathbb{N}$ numeriert werden können.

  Beispiele: $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$, Menge der Primzahlen

- *überabzählbar*, falls sie nicht abzählbar unendlich ist. Beispiel: $\mathbb{R}$.

Beispiel 3: Beweis zu $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich:
Wir können benutzen, dass falls wir zwei Injektionen finden, eine von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{N}$ und eine von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$, dann existiert es eine Bijektion zwischen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ und die zwei Mengen sind gleichmächtig.5

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, f(z) = \begin{cases} -(2z-1), z \leq 0 \\ 2z, z > 0 \end{cases}$$

Diese Funktion schickt negative ganze Zahlen auf ungerade natürliche Zahlen und positive ganze Zahlen auf gerade natürliche Zahlen. Die Null wollen wir jedoch nicht treffen, damit wir eine Injektion behalten. Jetzt müssen wir nur noch eine Injektion in der anderen Richtung finden, und das geht sogar einfacher: Wir nehmen die Inklusion:

$$f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, f(z) = z$$

Diese sind unsere zwei Injektionen, also es existiert eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ und sie sind gleichmächtig. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich.

3.2 Übungen

1. Seien A, B und C Mengen. Dann ist $A^B = \{f \mid f\colon B \to A \text{ ist eine Funktion}\}$.
   Zeigen Sie, dass $|(A \times B)^C| = |A^C \times B^C|$.

   Lösung:

   Wir betrachten die Abbildung

   $$\varphi\colon A^C \times B^C = \{f \mid f\colon C \to A\} \times \{g \mid g\colon C \to B\} \to (A \times B)^C, \qquad (f, g) \mapsto (x \mapsto (f(x), g(x)))\,.$$

   Wir behaupten dass φ injektiv ist. Seien dazu $(f, g), (h, j) \in A^C \times A^B$ mit $\varphi(f, g) = \varphi(h, j)$. Das bedeutet $\varphi(f, g)(x) = \varphi(h, j)(x)$ für alle $x \in C$. Also gilt $(f(x), g(x)) = (h(x), j(x))$ für alle $x \in C$ und damit $f(x) = h(x)$ und $g(x) = j(x)$ für alle $x \in C$. Also $f = g$ (man schreibt auch $f \equiv h$) und $g = j$ $(g \equiv j)$.

   Sei nun $h\colon C \to A \times B$ ein Element von $(A \times B)^C$. Durch Verknüpfung mit den Projektionsabbildungen $A \times B \to A$ und $A \times B \to B$ erhalten wir Abbildungen $f\colon C \to A$ und $g\colon C \to B$ mit $\varphi(f, g) = h$. (Diesen Teil kann/sollte man etwas genauer machen)

   Die Abbildung φ ist also eine Bijektion und damit sind $(A \times B)^C$ und $A^B \times A^C$ gleichmächtig.

2. Zeige: Die Vereinigung zweier abzähhlbarer Mengen ist abzählbar.

   Lösung:

   Seien A und B abzählbare Mengen. Dann gibt es Injektionen f: A $\to \mathbb{N}$ und g: B $\to \mathbb{N}$. Wir definieren eine neue Injektion: h: (A$\cup$B) $\to \mathbb{N}$ durch h(x) = 2f(x) für x in A und h(x) = 2g(x) + 1 für x in B$\setminus$A. Damit folgt (A$\cup$B) ist abzählbar.

3. Sei A eine überabzählbare Menge, B $\subset$ A eine abzählbare Menge. Zeige, dass A$\setminus$B (A ohne B) überabzählbar ist.

   Lösung:

   Wir vewenden hierzu einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an A$\setminus$B wäre abzählbar. Die Vereinigung abzählbarer Mengen ist immer abzählbar. Da A = A$\setminus$B $\cup$ B folgt also A abzählbar. Dies ist ein Widerspruch zur Vorraussetzung A überabzählbar.