CC 3 Analyse Numérique 2016

$$-2\Delta u = 4f \ sur \ \Omega =]0,1[\times]0,1[$$

$$U = g \ sur \ \partial\Omega, f \ continue \ et \ dérivale \ sur \ \Omega$$

a) Définir un maillage admissible au sens des volumes finis

On appelle maillage admissible une famille $(K_{ij})_{(1\leq i\leq n)_{1\leq j\leq m}}$ $où \ K_{ij} = \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}\right]$ $où$

$$\forall i = \overline{1,n}\,, x_{i-\frac{1}{2}} < x_{i+\frac{1}{2}} \ et \ \forall j = \overline{1,m} \ y_{j-\frac{1}{2}} < y_{j+\frac{1}{2}}$$

Et où les points (x_{ij}, y_{ij}) sont définis tels que $x_{i-\frac{1}{2}} < x_{i+\frac{1}{2}} \ et \ y_{j-\frac{1}{2}} < y_{ij} < y_{j+\frac{1}{2}}$

$h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}\ , k_j = y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}$

b) Ecrire la formulation volumes finis discrètes de l'équation (1) sur le maillage proposé

On rappelle que $div(\overrightarrow{grad}\, u) = \Delta u$

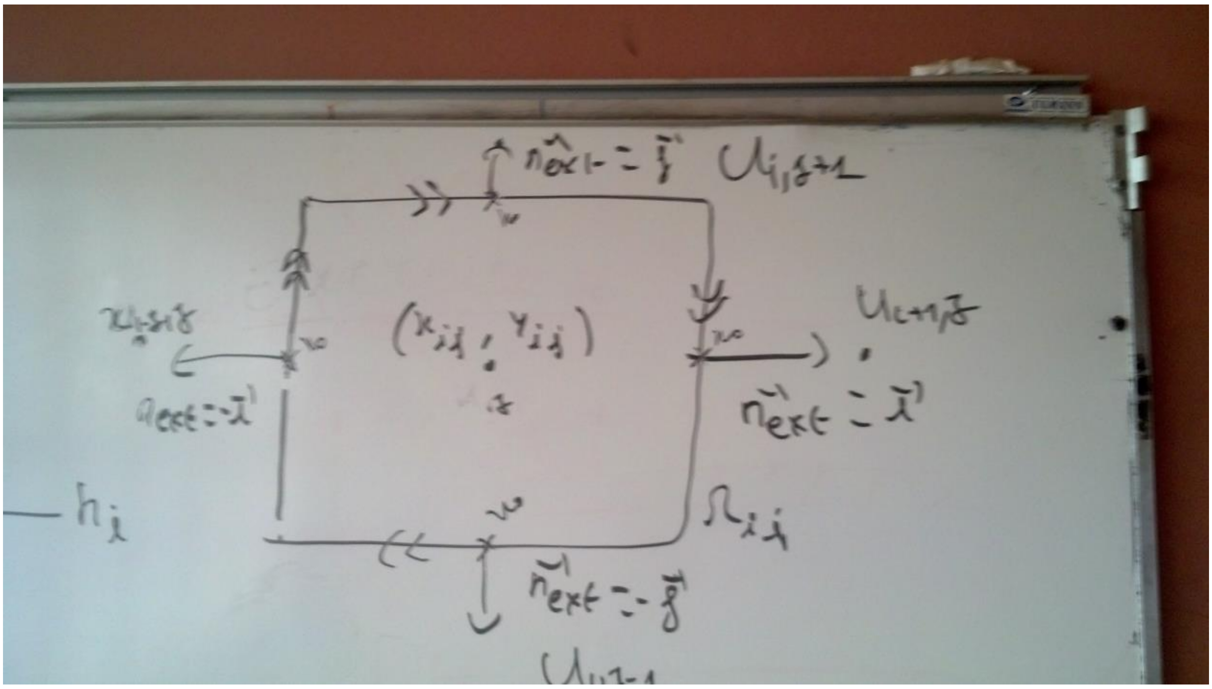
$\left(Dans \ le \ cours \ on \ a \ vu - div(k\overrightarrow{grad}\, u) = f \ .Ici\ , K = Identité\right)$

$-\Delta u = 2f \rightarrow -\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u\ ) = 2f$

$-\int_{\Omega_{ij}} div(\overrightarrow{grad}\, u) d\Omega_{ij} = 2\int_{\Omega_{ij}} f d\Omega_{ij}$

$Or \quad \int_{\Omega_{ij}} f d\Omega_{ij} = |\Omega_{ij}|\overrightarrow{(|f_{ij}|)} \ où \ \overline{f_{ij}} = \frac{1}{|\Omega_{ij}|}\int_{\Omega_{ij}} f d\Omega_{ij}$

$(avec \ |\Omega_{ij}| = \left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}\right) \times \left(y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}\right) = h_i k_j$



Or d'après Stokes $\int_{\partial\Omega_{ij}} \overrightarrow{grad}\, u \;.\; \overrightarrow{n_{ext}}\, d\gamma_{ij} = -|\Omega_{ij}|\overline{f_{ij}}$ $\quad (Formule\ de\ Stockes)$

$$= \int_{\wedge} \overrightarrow{(grad)}\,.\,(-\vec{\imath})\, dy \;+ \int_{>} \overrightarrow{(grad)}\, u\,.\,(\vec{\jmath})\, dx + \int_{V} \overrightarrow{grad}\, u\,.\,(\vec{\imath})\, dy \;+ \int_{<} \overrightarrow{grad}\, u\,.\,(-\vec{\jmath})\, dx$$

Or $\overrightarrow{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath}$

$$\to \int_{\wedge} -\frac{\partial u}{\partial x}\, dy + \int_{>} \frac{\partial u}{\partial y} dx \;+ \int_{V} \frac{\partial u}{\partial x} dy \;- \int_{<} \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

$$\boxed{Rappel : \int_a^b f dx \;= f(point_{milieu}).\,(b-a)\;\left(Le\ point\ milieu\ est\ souvent \frac{a+b}{2}\right)}$$

$$\boxed{f'(x_o) \approx \frac{f(x_o+h) - f(x_o-h)}{2}}$$

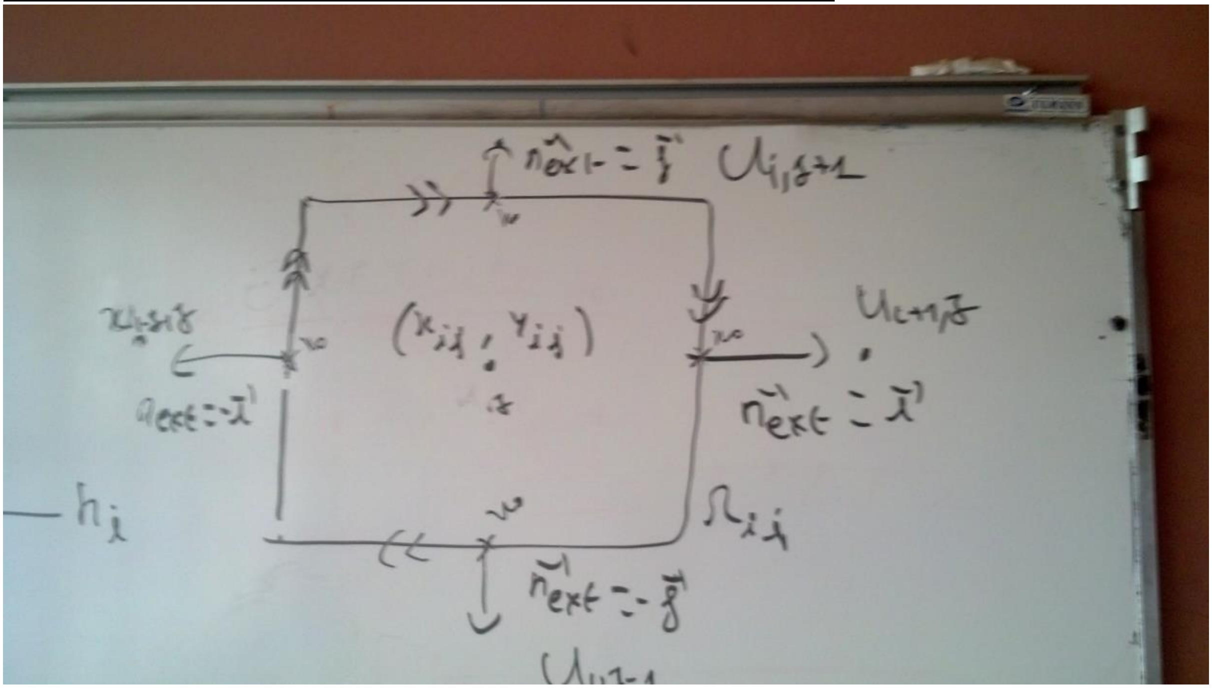
Donc on obtient :

$$= -\frac{(U_{ij} - U_{i-1j})}{x_{ij} - x_{i-1,j}} k_j + \frac{U_{i,j+1} - U_{ij}}{y_{i,j+1} - y_{ij}}\; h_i + \frac{U_{i+1,j} - U_{ij}}{x_{i+1,j} - x_{ij}} k_j - \frac{(U_{ij} - U_{i\,j-1})}{y_{ij} - y_{i,j-1}} h_i$$

$$Or\ le\ maillage\ \text{é}tant\ uniforme$$

$$= -U_{ij}\left(\frac{K_j}{h_i} + \frac{h_i}{k_j} + \frac{k_j}{h_i} + \frac{h_i}{k_j}\right) + \frac{U_{i-1,j}k_j}{h_i} + \frac{U_{i,j+1}h_i}{k_j} + \frac{U_{i+1,j}k_j}{h_i} + \frac{U_{i,j-1}h_i}{k_j} = \;-2|\Omega_{\mathrm{ij}}|\overline{f_{ij}}|$$

$$\boxed{U_{ij}\left(\frac{2k_j}{h_i}+\frac{2h_i}{k_j}\right)-U_{i-1,j}\left(\frac{k_j}{h_i}\right)-U_{i,j+1}\left(\frac{k_j}{h_i}\right)\ -\ U_{i,j-1}\left(\frac{h_i}{k_j}\right)=2|\Omega_{ij}|\overline{f_{ij}}}$$



c) Proposer une numérotation des inconnues discrètes

$$\boxed{\eta_{inc}(x_{ij})=(i-1)+(j-1)n\ \text{ où }\ n\ est\ telle\ que\ l'on\ a\ définit\ à\ la\ question\ 1}$$

d) Sans écrire la matrice du système, montrer que la matrice obtenue est inversible

Avec la numérotation précédente, les termes diagonaux de la matrice sont les coefficients de U_{ij} qui sont tous positifs et les termes non diagonaux sont les autres coefficients qui sont tous négatifs.

$$\boxed{Donc\ la\ matrice\ est\ monotone\ et\ donc\ inversible}.$$

e) Proposer 3 données de test qui serviront à valider le programme réalisé.

Une donnée de test est un **6-uplet**

$$\boxed{(N, g, DE, f_{tester}, RA, \epsilon)\ \text{ où }\ N(g(DE, f(DE)), RA)\leq\epsilon}$$

- N : Distance euclidienne $d_e(x,y)=\sum_{(i=1)}^{n}(x_i-y_i)^2$ $(Norme\ preferé\ du\ prof)$
- $\epsilon\leq 10^{-10}$
- $g=\begin{Bmatrix} I_d \\ f^{-1}\end{Bmatrix}$
- f_{tester}: $la\ fonction\ \ qui\ résoud\ l'équation$

- RA: $Resultat\ \ attendu$
- DE : $Données\ d'entrée\ représentatif$ à $un\ scénario\ de\ test$
    - f_{droite}, g , $maillage$

Soit l'on peut proposer la donnée de test suivant :

- $\left(N = d_e, g = I_d, f_{tester}, RA = 0_{R^n}, \epsilon = 10^{-10}, DE = (f = 0, g = 0, n = 2 \times 2)\right)$

Pour être malin, lorsque vous avez défini un cas de test, changer le nombre de mailles pour les autres cas de test. (Préciser u à chaque fois $U = RA = 0_{R^n}$)

f) Proposer un format adapté au stockage de la matrice

$\boldsymbol{CDS}$: $\boldsymbol{Compressed\ Diagonal\ Storage}$ parce que les coefficients non nuls forment une bande autour de la diagonale.

g) Partant du principe que vous aurez à travailler sur des maillages 5000*5000, quel algorithme proposé vous pour la résolution du système discret $AX = B$ qui découle de cette discrétisation.

$-$ $\boldsymbol{Gauss\ Seidel}$ parce que c'est une méthode itérative (bien sur les grand systèmes) et est parralélisable.