E.N.S.P. *Niveau II / Année 2017-18, Session de Rattrapage* ND/NG

*** U.E. MAT 217 ≪*Séries et Intégrales généralisées*≫, Examen Final *(3H 00mn)* ***

1. **DOCUMENTS INTERDITS / CALCULATRICES AUTORISEES, SAUF LES PROGRAMMABLES.**
2. **Le correcteur appréciera le SOIN apporté à la REDACTION et à la PRESENTATION du devoir.**
3. **Toute réponse doit être justifiée, mais éviter des explications INUTILEMENT KILOMETRIQUES.**
4. **L'objectif ici ne doit pas être de chercher à traiter à tout prix toute l'épreuve, en sprintant inconsidérément et en bâclant. Mais, plutôt, d'en couvrir une part significative de manière convaincante.**

****** *EXERCICE 1* (5,5 POINTS) ****** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} (1 - \operatorname{th}^{2n} t)\,\mathrm{d}t, \quad J_n = \int_0^1 \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2}\,\mathrm{d}x, \quad K_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \operatorname{th}^{2n} t)\,\mathrm{d}t.$$

1°) Sans chercher à trouver la nature, ni calculer la valeur des intégrales I_n, J_n, K_n, montrer que :

a) $I_n = J_n$, et dire ce que cela signifie cette égalité dans ce contexte ;

b) J_n est une *intégrale définie* (au sens de Riemann) ;

c) I_n est un réel $\geqslant 0$.

2°) Exprimer I_n sous forme de somme de n réels $\geqslant 0$, mais en calculant chaque terme de cette somme.

3°) Utiliser ce qui précède pour : **a)** Déduire que K_n est un réel $\geqslant 0$; **b)** Trouver la valeur de K_n.

****** *EXERCICE 2* (4,5 POINTS) ****** Soit $A = \displaystyle\sum_{n=p+q}^{+\infty} \frac{\cos^2(\omega n - \omega q)}{5^n}$, où $\omega \in \mathbb{R}$ et $p, q \in \mathbb{N}$.

1°) Pourquoi dit-on que A est une *somme infinie* ?

2°) Sans chercher à calculer A, montrer que $A \in \mathbb{R}$.

3°) Calculer A (**N.B. *En simplifiant le résultat autant que possible***).

4°) Dire ce que signifie, en pratique, cette valeur de la somme infinie A (notamment pourquoi on parle, plus précisément, de *somme totale*, et préciser de quoi).

****** *EXERCICE 3* (6,5 POINTS) ******

$\boxed{\textbf{I}}$ **-** Etudier la nature des séries :

$$\textit{(1)} \sum_{n \geqslant 0} \sqrt[5]{1 - \operatorname{th}^6 n}\ ; \quad \textit{(2)} \sum_{n \geqslant 2} (-1)^n \frac{\cos(7n\pi)}{\ln n}, \quad \textit{(3)} \sum_{n \geqslant 0} e^{2n} \operatorname{sh}(e^{-10n/3}), \quad \textit{(4)} \sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \sin(5n)}.$$

$\boxed{\textbf{II}}$ **-** L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-it^3}\,\mathrm{d}t$ et la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} e^{-in^3}$ sont-elles de même nature ?

****** *EXERCICE 4* (7 POINTS) ******

On pose : $\displaystyle F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)\,!}, \quad I = \int_0^8 \frac{\cos(\sqrt{x}\,) - 1}{x}\,\mathrm{d}x, \quad W = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-8)^k}{(2k)\,! \cdot k}, \quad T = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n.$

1°) Sans chercher à calculer ni $F(x)$, ni I, ni W :

a) Montrer que $W \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que I est une *intégrale définie* (au sens de Riemann).

c) Trouver le domaine de définition $\mathcal{D}_F$ de la fonction F dans $\mathbb{C}$.

2°) **a)** Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\cos x = F(x)$.

b) En déduire que $I = W$. **N.B.** *Admettre que permuter les symboles intégral et somme infinie est valide ici.*

c) Utiliser ce résultat pour calculer une approximation de I avec une *incertitude absolue* $< 10^{-8}$.

3°) On rappelle qu'une *série entière* est une série de la forme T, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique. Montrer alors que $F(x)$ est la somme d'une série entière, en précisant les coefficients a_n appropriés. **N.B.** On donnera d'abord a_0, a_1, a_2, a_3, avant d'extrapoler le cas général pour n quelconque dans $\mathbb{N}$.

FIN