Espaces préhilbertiens

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 *** I Polynômes de LEGENDRE

Soit $E=\mathbb{R}[X]$. On munit E du produit scalaire $P|Q=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,dt$.

1. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $L_n=\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.
   (a) Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(E,\,|\,)$.
   (b) Déterminer $\|L_n\|$ pour $n\in\mathbb{N}$.
2. Déterminer l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E.

Correction ▼ [005772]

Exercice 2 *** I

Soit $E=\mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q)\in E^2$, on pose $\varphi(P,Q)=\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $h_n=(X^ne^{-X})^{(n)}e^X$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Pour $n\in\mathbb{N}$, préciser les coefficients de h_n. Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de E.
   (b) Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E,φ).
   (c) Pour $n\in\mathbb{N}$, déterminer $\|h_n\|$. En déduire une base orthonormée de l'espace préhilbertien (E,φ).

Correction ▼ [005773]

Exercice 3 ** I Polynômes de TCHEBYCHEV

Soit $E=\mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q)\in E^2$, on pose $\varphi(P,Q)=\int_{-1}^{1}\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on note T_n le n-ème polynôme de TCHEBYCHEV de première espèce c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall\theta\in\mathbb{R},\ T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E,φ).
   (b) Pour $n\in\mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

Correction ▼ [005774]

Exercice 4 ** I

On note E l'ensemble des suites réelles de carrés sommables c'est-dire les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2<+\infty.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Pour $(u,v)\in E^2$, on pose $\varphi(u,v)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nv_n$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Correction ▼ [005775]

Exercice 5 * I

Soit Φ l'application qui à deux matrices carrées réelles A et B de format n associe $\mathrm{Tr}({}^tA \times B)$. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Est ce que Φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

Correction ▼ [005776]

Exercice 6 ****

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme, notée $\| \ \|$, vérifiant l'identité du parallélogramme. Montrer que cette norme est hilbertienne.

Correction ▼ [005777]

Exercice 7 **

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que pour tout vecteur x de E, on ait $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$. Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Correction ▼ [005778]

Exercice 8 ***

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, non nulle à valeurs réelles positives. Pour P et Q polynômes donnés, on pose $\Phi(P,Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)\,dt$.

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour Φ telle que, pour tout entier naturel n, $\deg(P_n) = n$.
3. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle base. Montrer que chaque polynôme P_n, $n \in \mathbb{N}^*$, a n racines réelles simples.

Correction ▼ [005779]

Exercice 9 *** I Matrices et déterminants de GRAM

Soit E un espace préhilbertien réel.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ dans E^n, on pose $G(x_1, \ldots, x_n) = (x_i|x_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice de GRAM) puis $\gamma(x_1, \ldots, x_n) = \det(G(x_1, \ldots, x_n))$ (déterminant de GRAM).

1. Montrer que $\mathrm{rg}(G(x_1, \ldots, x_n)) = \mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n)$.
2. Montrer que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1, \ldots, x_n) = 0$ et que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1, \ldots, x_n) > 0$.
3. On suppose que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre dans E. On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d(x,F)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|^2$). Montrer que $d(x,F) = \sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,\ldots,x_n)}{\gamma(x_1,\ldots,x_n)}}$.

Correction ▼ [005780]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons $\ell_n=(X^2-1)^n$ de sorte que $L_n=\ell_n^{(n)}$. L_n est un polynôme de degré n car ℓ_n est de degré $2n$.

1. (a) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $P\in E$. Une intégration par parties fournit

$$(L_n|P)=\int_{-1}^{1}L_n(x)P(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(\ell_n)^{(n)}(x)P(x)\,dx=\\ \left[(\ell_n)^{(n-1)}(x)P(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x)\,dx.$$

Maintenant, -1 et 1 sont racines d'ordre n du polynôme ℓ_n et donc, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, -1 et 1 sont racines d'ordre $n-k$ de $\ell_n^{(k)}$ et en particulier racines de $(\ell_n)^{(k}$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$. Donc

$$(L_n|P)=-\int_{-1}^{1}(\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x)\,dx.$$

Plus généralement, si pour un entier $k\in[\![0,n-1]\!]$, $(L_n|P)=(-1)^k\int_{-1}^{1}(\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)\,dx$ alors

$$\begin{aligned}(L_n|P)&=(-1)^k\left(\left[(\ell_n^{n-k-1}(x)P^{(k)}(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)\,dx\right)\\&=(-1)^{k+1}\int_{-1}^{1}(\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)\,dx.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier $k\in[\![0,n]\!]$, $(L_n|P)=(-1)^k\int_{-1}^{1}(\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)\,dx$. En particulier

$$(L_n|P)=(-1)^n\int_{-1}^{1}\ell_n(x)P^{(n)}(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^nP^{(n)}(x)\,dx/\text{quad}(*).$$

Cette dernière égalité reste vraie pour $n=0$ et on a montré que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall P\in\mathbb{R}[X],\ (L_n|P)=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^nP^{(n)}(x)\,dx.}$$

Soient alors n et p deux entiers naturels tels que $0\leqslant p<n$. Puisque $\deg(L_p)=p<n$, on a $(L_n|L_p)=0$. On a montré que

$$\boxed{\text{La famille } (L_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base orthogonale de l'espace } (\mathbb{R}[X],\,|\,).}$$

(b) On applique maintenant la formule $(*)$ dans le cas particulier $P=L_n$. On obtient

$$\begin{aligned}\|L_n\|^2&=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^nL_n^{(n)}(x)\,dx=2\times(2n)!\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx=2\times(2n)!\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos^2t)^n(-\sin t)\,dt\\&=2\times(2n)!\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt=2\times(2n)!W_{2n+1}\ (\text{intégrales de W}\text{ALLIS}).\end{aligned}$$

On « sait »que $\forall n\in\mathbb{N}$, $W_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}W_{2n-1}=\frac{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times3}W_1=\frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}$. On obtient alors

$$\|L_n\|^2=\frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}\times2\times(2n)!=\frac{2^{2n+1}n!^2}{2n+1},$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \|L_n\|=\sqrt{\frac{2}{2n+1}\frac{2^nn!}{2n+1}}.}$$

On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^nn!}L_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $(\mathbb{R}[X],\,|\,)$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $P_n=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^nn!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.

2. La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de orthonormée de $\mathbb{R}[X]$. Chaque P_n, $n\in\mathbb{N}$, est de degré n et donc, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(P_0,\ldots,P_n)=\mathrm{Vect}(1,X,\ldots,X^n)$ et de plus, pour $n\in\mathbb{N}$

$$P_n|X^n=\frac{1}{\mathrm{dom}}\left((P_n)|\mathrm{dom}(P_n)X^n\right)=\frac{1}{\mathrm{dom}(P_n)}\left(P_n|P_n\right)$$

car $P_n \in (P_0,\dots,P_{n-1})^\perp = (1,X,\dots,X^{n-1})^\perp = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Ceci montre que $P_n|X^n > 0$.

$$\boxed{\text{L'orthonormalisée de la base canonique de } \mathbb{R}[X] \text{ est la famille des polynômes de LENGENDRE } \left(\sqrt{\tfrac{2n+1}{2}}\,\tfrac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}.}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. • Soient P et Q deux polynômes. La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(P,Q)$ existe dans $\mathbb{R}$.

   • La symétrie, la bilinéarité et la positivité de l'application φ sont claires. De plus, pour $P \in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P) = 0 &\Rightarrow \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}\,dt = 0\\ &\Rightarrow \forall t \in [0,+\infty[,\ P^2(t)e^{-t} = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow \forall t \in [0,+\infty[,\ P(t) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

   Ainsi, la forme φ est définie et finalement

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de LEIBNIZ permet d'écrire

$$(X^ne^{-X})^{(n)}e^X = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(X^n)^{(n-k)}(e^{-X})^{(k)}\right)e^X = \sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}X^k.$$

   En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(h_n) = n$ (et $\mathrm{dom}(h_n) = (-1)^n$) et on sait que

$$\boxed{\text{la famille } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base de } \mathbb{R}[X].}$$

   (b) Soient $P \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto (t^ne^{-t})^{(n-1)}$ et P sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt = \int_0^A P(t)(t^ne^{-t})^{(n)}\,dt = \left[P(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}\right]_0^A - \int_0^A P'(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}\,dt$$

   Maintenant, $(t^ne^{-t})^{(n-1)}$ peut s'écrire $Q(t)e^{-t}$ où Q est un polynôme et donc $P(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, la formule de LEIBNIZ montre que le polynôme Q a une valuation au moins égale à 1. On en déduit que la fonction $t \mapsto P(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}(t)$ s'annule en 0. En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt = -\int_0^{+\infty} P'(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}\,dt.$$

   De manière générale, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, les remarques précédentes s'appliquent à la fonction $t \mapsto P^{(k)}(t)(t^ne^{-t})^{(n-k)}$ et par récurrence on obtient

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt = (-1)^k\int_0^{+\infty} P^{(k)}(t)(t^ne^{-t})^{(n-k)}\,dt.$$

   En particulier, pour $k = n$ on obtient $\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt = (-1)^n\int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^ne^{-t}\,dt$. Cette égalité reste vraie quand $n = 0$ et on a montré que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(P,h_n) = \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt = (-1)^n\int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^ne^{-t}\,dt.$$

   En particulier, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\deg(P) < n$, on a $P^{(n)} = 0$ et donc $\varphi(P,h_n) = 0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(h_n) = n$, on en déduit en particulier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $\varphi(hn,h_k) = 0$ et on a montré que

$$\boxed{\text{la famille } (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien } (\mathbb{R}[X],\varphi).}$$

(c) Soit $n\in\mathbb{N}$. Puisque $\deg(h_n)=n$ et $\mathrm{dom}(h_n)=(-1)^n$, on a $h_n^{(n)}=(-1)^n n!$. La question précédente fournit alors

$$\|h_n\|^2=(-1)^n\int_0^{+\infty}h_n^{(n)}(t)t^ne^{-t}\,dt=n!\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\,dt=n!\Gamma(n+1)=n!^2,$$

et donc $\|h_n\|=n!$. Par suite,

$$\boxed{\text{la famille } \left(\tfrac{1}{n!}h_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base orthonormale de l'espace préhilbertien } (\mathbb{R}[X],\varphi).}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. • Soit $(P,Q)\in E^2$. L'application $t\mapsto\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. Ensuite, l'application $t\mapsto\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}$ est bornée au voisinage de 1 car continue en 1 et donc quand t tend vers 1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}\times\frac{1}{\sqrt{1-t}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Puisque $\frac{1}{2}<1$, on en déduit que l'application $t\mapsto\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche. De même, quand t tend vers 1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}=O\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ et l'application $t\mapsto\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de -1 à droite. Finalement, l'application $t\mapsto\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$ et $\varphi(P,Q)$ existe.
   • La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $P\in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0&\Rightarrow\int_{-1}^{1}\frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=0\\&\Rightarrow\forall t\in]-1,1[,\ \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}=0\text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\&\Rightarrow\forall t\in]-1,1[,P(t)=0\Rightarrow P=0\text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

   Ainsi, l'application φ est définie et finalement

$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2. (a) Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$. En posant $t=\cos\theta$, on obtient

$$\varphi(T_n,T_p)=\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int_{\pi}^{0}\frac{T_n(\cos\theta)T_p(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}(-\sin\theta d\theta)=\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\cos(p\theta)\,d\theta.$$

   Si de plus, $n\neq p$,

$$\varphi(T_n,T_p)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos((n+p)\theta)+\cos((n-p)\theta))\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+p)\theta)}{n+p}+\frac{\sin((n-p)\theta)}{n-p}\right]_0^{\pi}=0.$$

   Ainsi, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. De plus, on sait que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg(T_n)=n$ et on a donc montré que

$$\boxed{\text{la famille } (T_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien } (E,\varphi).}$$

   (b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Quand $p=n$, la formule précédente fournit

$$\|T_n\|^2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos(2n\theta))\,d\theta=\left\{\begin{array}{l}\pi\text{ si }n=0\\\frac{\pi}{2}\text{ si }n\geqslant1\end{array}\right.,$$

   et donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \|T_n\|=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\pi}\text{ si }n=0\\\sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{ si }n\geqslant1\end{array}\right..}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Montrons que E est un sous-espace de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.)$. La suite nulle est élément de E. Soient $(u,v)\in E^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
$0\leqslant(\lambda u+\mu v)^2=\lambda^2u^2+2\lambda\mu uv+\mu^2v^2\leqslant\lambda^2u^2+\lambda\mu(u^2+v^2)+\mu^2v^2=(\lambda^2+\lambda\mu)u^2+(\lambda\mu+\mu^2)v^2$.
Par hypothèse, la série de terme général $(\lambda^2+\lambda\mu)u_n^2+(\lambda\mu+\mu^2)v_n^2$ converge et on en déduit que la suite $\lambda u+\mu v$ est de carré sommable. On a montré que
$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel } (\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.).}$$
2. • Soient u et v deux éléments de E. Pour tout entier naturel n,
$$|u_nv_n\leqslant\frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2).$$
Ainsi, la série de terme général u_nv_n est absolument convergente et donc convergente. Ceci montre que $\varphi(u,v)$ existe dans $\mathbb{R}$.
• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $u\in E$,
$$\varphi(u,u)=0\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2=0\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ u_n^2=0\Rightarrow u=0.$$
En résumé, l'application φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive et donc
$$\boxed{\text{l'application } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $(A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.
$$\Phi(A,B)=\mathrm{Tr}({}^tA\times B)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}b_{i,j}.$$
L'application Φ n'est autre que produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier est un produit scalaire. La base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (constituée des matrices élémentaires) est orthonormée pour ce produit scalaire.
L'application Φ n'est pas un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Par exemple, si $A=iE_{1,1}\neq 0$ alors ${}^tAA=-E_{1,1}$ puis $\mathrm{Tr}({}^tAA)=-1<0$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit N une norme sur E vérifiant $\forall(x,y)\in E^2\ (N(x+y))^2+(N(x-y))^2=2((N(x))^2+(N(y))^2)$.
Il faut montrer que la norme N est associée à un produit scalaire B. Si B existe, B est nécessairement défini par
$$\forall(x,y)\in E^2,\ B(x,y)=\frac{1}{4}((N(x+y))^2-(N(x-y))^2).$$
Réciproquement,
• Pour tout $x\in E$, $B(x,x)=\frac{1}{4}((N(2x))^2-(N(0))^2)=\frac{1}{4}(4(N(x))^2-0)=(N(x))2$ et donc $\forall x\in E$, $B(x,x)\geqslant 0$ puis $B(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$. De plus, $\forall x\in E$, $N(x)=\sqrt{B(x,x)}$.
• $\forall(x,y)\in E^2$, $B(y,x)=\frac{1}{4}((N(y+x))^2-(N(y-x))^2)=\frac{1}{4}((N(x+y))^2-(N(x-y))^2)=B(x,y)$.
• Vérifions alors que l'application B est bilinéaire.
1) Montrons que $\forall(x,y,z)\in E^3$, $B(x+y,z)+B(x-y,z)=2B(x,z)$.
$$\begin{aligned}B(x+y,z)+B(x-y,z)&=\frac{1}{4}((N(x+y+z))^2-(N(x+y-z))^2+(N(x-y+z))^2-(N(x-y-z))^2)\\&=\frac{1}{4}((N(x+y+z))^2+(N(x-y+z))^2)-((N(x+y-z))^2+(N(x-y-z))^2)\\&=\frac{1}{4}(2(N(x+z))^2+(N(y))^2)-2((N(x-z))^2+(N(y))^2)\ \text{(par hypothèse sur } N)\\&=\frac{2}{4}((N(x+z))^2-(N(x-z))^2)=2B(x,z).\end{aligned}$$

2) Montrons que $\forall(x,z)\in E^2$, $B(2x,z)=2B(x,z)$. Tout d'abord, $B(0,z)=\frac{1}{4}((N(z))^2-(N(-z))^2)=0$ puis d'après 1)

$$B(2x,z)=B(x+x,z)+B(x-x,z)=2B(x,z).$$

3) Montrons que $\forall(x,y,z)\in E^3$, $B(x,z)+B(y,z)=B(x+y,z)$.

$$\begin{aligned}B(x,z)+B(y,z)&=B\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2},z\right)+B\left(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2},z\right)\\&=2B\left(\frac{x+y}{2},z\right)\text{ (d'après 1))}\\&=B(x+y,z)\text{ (d'après 2)).}\end{aligned}$$

4) Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall(x,y)\in E^2$, $B(nx,y)=nB(x,y)$.
• C'est vrai pour $n=0$ et $n=1$.
• Soit $n\geqslant 0$. Supposons que $\forall(x,y)\in E^2$, $B(nx,y)=nB(x,y)$ et $B((n+1)x,y)=(n+1)B(x,y)$. Alors

$$B((n+2)x,y)+B(nx,y)=B((n+2)x+nx,y)=B(2(n+1)x,y)=2B((n+1)x,y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence, $B((n+2)x,y)=2(n+1)B(x,y)-nB(x,y)=(n+2)B(x,y)$.
5) Montrons que $\forall n\in\mathbb{Z}$, $\forall(x,y)\in E^2$, $B(nx,y)=nB(x,y)$. Le résultat est acquis pour $n\geqslant 0$. Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$B(nx,y)+B(-nx,y)=B(0,y)=0\text{ et donc }B(-nx,y)=-B(nx,y)=-nB(x,y),$$

6) Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall(x,y)\in E^2$, $B\left(\frac{1}{n}x,y\right)=\frac{1}{n}B(x,y)$.

$$B(x,y)=B\left(\frac{1}{n}nx,y\right)=nB\left(\frac{1}{n}x,y\right)\text{ et donc }B\left(\frac{1}{n}x,y\right)=\frac{1}{n}B(x,y).$$

7) Montrons que $\forall r\in\mathbb{Q}$, $\forall(x,y)\in E^2$, $B(rx,y)=rB(x,y)$. Soient $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ puis $r=\frac{p}{q}$.

$$B(rx,y)=B\left(\frac{p}{q}x,y\right)=pB\left(\frac{1}{q}x,y\right)=\frac{p}{q}B(x,y)=rB(x,y).$$

8) Montrons que $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(x,y)\in E^2$, $B(\lambda x,y)=\lambda B(x,y)$. Soit λ un réel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une
suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite λ.
Maintenant, l'application $\begin{array}{cccc}N: & (E,N) & \to & (\mathbb{R},|\,|)\\ & x & \mapsto & N(x)\end{array}$ est continue sur E car 1-Lipschitzienne sur E. Donc

$$B(\lambda x,y)=B(\lim_{n\to+\infty}r_nx,y)=\lim_{n\to+\infty}B(r_nx,y)=\lim_{n\to+\infty}r_nB(x,y)=\lambda B(x,y).$$

Finalement, l'application B est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc un produit scalaire. Puisque $\forall x\in E$, $N(x)=\sqrt{B(x,x)}$, N est la norme associée à ce produit scalaire. On a montré que

$$\boxed{\text{toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est une norme hilbertienne.}}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $i\in[\![1,n]\!]$.

$$1=\|e_i\|^2=\sum_{j\geq 1}(e_i|e_j)^2=1+\sum_{j\neq i}(e_i|e_j)^2$$

et donc $\sum_{j\neq i}(e_i|e_j)^2=0$.On en déduit que $\forall j\neq i$, $(e_i|e_j)=0$. Ainsi, pour tout couple d'indices (i,j) tel que $i\neq j$, on a $e_i|e_j=0$. Par suite

$$\text{la famille } (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ est une famille orthonormale.}$$

Il reste à vérifier que si $F = \mathrm{Vect}(e_1,...,e_n)$ alors $F = E$.
Soit x un vecteur de E. F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On peut donc définir le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F. On sait que

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i.$$

On en déduit que $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2 = \|x\|^2$. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|2 - \|p_F(x)\|^2 = 0,$$

et donc $x = p_F(x)$ ce qui montre que $x \in F$. Donc $F = E$ et finalement

$$\boxed{\text{la famille } (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \text{ est une base orthonormée de } E.}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. L'existence, la bilinéarité, la symétrie et la positivité sont immédiates. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned}\Phi(P,P) = 0 &\Rightarrow \int_0^1 f(t)P^2(t)\,dt = 0\\ &\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ f(t)P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle).}\end{aligned}$$

   Maintenant, la fonction f est continue, positive sur $[0,1]$ et n'est pas nulle. Donc la fonction f est strictement positive sur un intervalle ouvert non vide inclus dans le segment $[0,1]$. Par suite, le polynôme P a une infinité de racines et finalement $P = 0$.

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$$

2. L'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ répond à la question.
3. Soit n un entier naturel non nul. Le polynôme $P_n \in (P_0,...,P_{n-1})^{\perp} = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}$. Soit p le nombre de racines réelles d'ordre impair du polynôme P_n. Soient a_1,..., a_p ces racines (deux à deux distinctes, réelles et d'ordre impair) dans le cas où $p \geqslant 1$. Si $p \geqslant 1$, on pose $Q = (X-a_1)...(X-a_p)$ et si $p = 0$, on pose $Q = 1$.
   Si $p < n$, le polynôme Q est orthogonal à P_n car de degré strictement plus petit que le de gré de P_n. D'autre part , au vu de la définition de Q, la fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est continue sur $[0,1]$, de signe constant sur $[0,1]$, d(intégrale nulle sur $[0,1]$. La fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est donc nulle. On en déduit que le polynôme P_n est le polynôme nul ce qui n'est pas. Donc $p = n$ ce qui signifie que le polynôme P_n a n racines réelles simples.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Soit $F = \mathrm{Vect}(x_1,...,x_n)$ et $m = \dim F$. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une base orthonormée de F puis M la matrice de la famille $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans la base $\mathscr{B}$ .M est une matrice rectangulaire de format (m,n).
   Soit $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$. Puisque la base $\mathscr{B}$ est orthonormée, le coefficient ligne i, colonne j de la matrice ${}^tMM$ est

$$\sum_{k=1}^{m} m_{k,i}m_{k,j} = (x_i|x_j),$$

   et on a donc

$$G(x_1,x_2,...,x_n) = {}^tMM.$$

Puisque $\text{rg}(x_1,...,x_n) = \text{rg}M$, il s'agit de vérifier que $\text{rg}({}^tMM) = \text{rg}M$. Pour cela, montrons que les matrices M et ${}^tMM$ ont même noyau.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X \in \text{Ker}M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}({}^tMM)$ et aussi

$X \in \text{Ker}({}^tMM) \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow \|MX\|_2^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}M$.

Finalement, $\text{Ker}({}^tMM) = \text{Ker}M$ et donc, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(x_1,...,x_n) = \text{rg}M = \text{rg}({}^tMM) = \text{rg}(G(x_1,x_2,...,x_n))$.

$$\boxed{\text{rg}(G(x_1,x_2,...,x_n)) = \text{rg}(x_1,\dots,x_n).}$$

2. D'après 1),

$$\begin{aligned}(x_1,...,x_n) \text{ liée} &\Leftrightarrow \text{rg}(x_1,x_2,...,x_n) <\Leftrightarrow \text{rg}G(x_1,x_2,...,x_n) < n \Leftrightarrow G(x_1,x_2,...,x_n) \notin \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})\\ &\Leftrightarrow \gamma(x_1,x_2,...,x_n) = 0.\end{aligned}$$

De plus, quand la famille $(x_1,x_2,...,x_n)$ libre, avec les notations de la question 1), on a $m = n$ et la matrice M est une matrice carrée. On peut donc écrire

$$\gamma(x_1,x_2,...,x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM) \times \det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(x_1,...,x_n) \text{ liée} \Leftrightarrow \gamma(x_1,\dots,x_n) = 0\\ (x_1,...,x_n) \text{ libre} \Leftrightarrow \gamma(x_1,\dots,x_n) > 0.\end{array}}$$

3. **1ère solution.** Soit x un vecteur de E et $p_F(x)$ son projeté orthogonal sur F. Dans la première colonne de $\gamma(x,x_1,\dots,x_n)$, le théorème de PYTHAGORE permet d'écrire (puisque $x - p_F(x) \in F^\perp$)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}(x|x)\\(x|x_1)\\ \vdots\\(x|x_n)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\|x-p_F(x)+p_F(x)\|^2\\(x-p_F(x)+p_F(x)|x_1)\\ \vdots\\(x-p_F(x)+p_F(x)|x_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\|x-p_F(x)\|^2+\|p_F(x)\|^2\\(p_F(x)|x_1)\\ \vdots\\(p_F(x)|x_n)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\|x-p_F(x)\|^2\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}(p_F(x)|p_F(x))\\(p_F(x)|x_1)\\ \vdots\\(p_F(x)|x_n)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Après avoir remplacé aussi en première ligne les $(x|x_i)$ par $(p_F(x)|x_i)$, on obtient par linéarité par rapport à la première colonne

$$\gamma(x,x_1,x_2,...,x_n) = \gamma(x-p_F(x),x_1,x_2,...,x_n) + \gamma(p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)$$

Maintenant, $p_F(x)$ est dans F et donc la famille $(p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)$ est liée puis d'après la question 2) $\gamma(p_F(x),x_1,x_2,...,x_n) = 0$. Il reste $\gamma(x,x_1,x_2,...,x_n) = \gamma(x-p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)$ et en développant suivant la première colonne, on obtient

$$\forall x \in E,\ \gamma(x,x_1,\dots,x_n) = \gamma(x-p_F(x),x_1,x_2,...,x_n) = \|x-p_F(x)\|^2\gamma(x_1,x_2,...,x_n).$$

Finalement

$$\boxed{\|x-p_F(x)\| = \sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,x_2,...,x_n)}{\gamma(x_1,x_2,...,x_n)}}.}$$

2ème solution. Posons $p_F(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ puis $d = \|x-p_F(x)\|$ de sorte que

$$d^2 = (x-p_F(x))|(x-p_F(x)) = (x-p_F(x))|x = \|x\|^2 - (x|p_F(x)).$$

D'autre part, pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, $x|x_i = (x - p_F(x)|x_I) + (p_F(x)|x_i) = (p_F(x)|x_i)$. Par suite, les $n+1$ réels d^2, λ_1,..., λ_n sont solutions du système d'équations linéaires

$$\left\{\begin{array}{ll} d^2 + & \lambda_1(x|x_1) + \ldots + \lambda_n(x|x_n) = \|x\|^2 \\ & \lambda_1(x_1|x_1) + \ldots + \lambda_n(x_1|x_n) = (x|x_1) \\ & \qquad\vdots \\ & \lambda_1(x_n|x_1) + \ldots + \lambda_n(x_n|x_n) = (x|x_n) \end{array}\right.$$

Le déterminant de ce système vaut $\gamma(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ et le système est de CRAMER. Le déterminant associé à d^2 est $\gamma(x, x_1, x_2, ..., x_n)$ et les formules de CRAMER refournissent

$$d^2 = \frac{\gamma(x, x_1, \ldots, x_n)}{\gamma(x_1, \ldots, x_n)}.$$
