CENTRE NATIONAL D'ORIENTATION ET DE PREPARATION AUX CONCOURS D'ENTREE DANS LES GRANDES ECOLES ET FACULTES DU CAMEROUN

Préparation au Concours d'Entrée en Troisième Année de l'ENSP et FGI

Support Cours

ALGÈBRE LINÉAIRE

Avec Intelligentsia Corporation, Il suffit d'y croire !!!

☏ 698 222 277 / 671 839 797
fb : Intelligentsia Corporation
email : contact@intelligentsia-corporation.com

2019

" Vous n'êtes pas un passager sur le train de la vie, vous êtes l'ingénieur. "

-- Elly Roselle --

Instructions :

Il est recommandé à chaque étudiant de traiter les exercices de ce recueil (du moins ceux concernés par la séance) avant chaque séance car ***le temps ne joue pas en notre faveur****.*

Chapitre I : LOIS DE COMPOSITION

1. Lois de composition interne

Définition

On appelle loi de composition interne dans E toute application d'une partie de $E \times E$ vers E. Dans le cas où on applique tout E^2 dans E, la loi est dite partout définie. Dans ce cas on peut reformuler en disant qu'une loi de composition interne dans E est une correspondance associant à tout couple (a, b) de E^2 un élément c bien déterminé de E. On écrit dans ce cas $c = a * b$ où $*$ est la loi de composition interne.

Propriétés des lois de composition interne

Soit $\boldsymbol{E}$ un ensemble et $*$ une loi de composition interne définie dans $\boldsymbol{E}$.

Définitions

- La loi $*$ est dite commutative si $\forall a, b \in E, a * b = b * a$.
- $*$ est dite associative si $\forall a, b, c \in E, (a * b) * c = a * (b * c)$. Dans ce cas, on note simplement $a * b * c$.
- On dit d'un élément $e \in E$ qu'il est élément neutre pour $*$ si $\forall a \in E, a * e = a$.

Remarque :
Dans un ensemble muni d'une loi interne, s'il existe un élément neutre, il est unique.

- Considérons une loi $*$ définie dans E et admettant e comme élément neutre. On dit que deux éléments $a, b \in E$ sont symétriques (ou inverse l'un de l'autre) si $a * b = b * a = e$. On dit que b est le symétrique (ou l'inverse) de a, et réciproquement.

Remarque :
Le symétrique d'un élément lorsqu'il existe est unique.

Théorème

Soit $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in (\boldsymbol{E}, *)$ admettant respectivement $\boldsymbol{a}' \,\boldsymbol{et}\, \boldsymbol{b}'$ comme inverses. Alors $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$ admet $\boldsymbol{b}' * \boldsymbol{a}'$ comme symétrique par $*$.

Définitions

- Soit $a \in (E, *)$.

$\boldsymbol{a}$ est dit régulier à gauche pour $*$ $\boldsymbol{si}\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{a} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{y} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.
$\boldsymbol{a}$ est dit régulier à droite pour $*$ $\boldsymbol{si}\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{x} * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{y} * \boldsymbol{a} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$.
$\boldsymbol{a}$ est dit régulier si et seulement s'il est régulier à gauche et à droite.
On dit qu'une loi est régulière dans un ensemble lorsque tous les éléments sont réguliers.

Exemple : Dans $(\mathbb{R}, \times)$ tout élément est régulier sauf $\mathbf{0}_{\mathbb{R}}$.

- Soit $a, b, c \in (E, *)$.

Téléphone : 698 222 277 / 671 839 797 **Facebook :** Intelligentsia Corporation **Email :** contact@intelligentsia-coropration.com

On appelle opération inverse à droite (resp. à gauche) de l'opération $*$, l'opération qui permet de déterminer $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ tel que $\boldsymbol{x} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ (resp. $\boldsymbol{a} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$).

Remarque :
Si $*$ est commutative alors l'opération inverse gauche est identique à l'opération inverse droite.

- Soit $v \in (E,*)$, v est absorbant si $\forall x \in E, v * x = x * v = v$.

Exemple : 0 est absorbant dans $(\mathbb{R}, \times)$.
Soient $\boldsymbol{E}$ un ensemble, $*$ et # deux lois internes définies dans $\boldsymbol{E}$. On dit que # est distributive par rapport à $*$ si $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{E}$,

- $(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y})\#\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}\#\boldsymbol{z}) * (\boldsymbol{y}\#\boldsymbol{z})$ (Distribution droite)
- $\boldsymbol{z}\#(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{z}\#\boldsymbol{x}) * (\boldsymbol{z}\#\boldsymbol{y})$ (Distribution gauche).

Homomorphismes et Isomorphismes

Soit $(\boldsymbol{E},*)$ $\boldsymbol{et}$ $(\boldsymbol{F},\#)$.

Définitions

On appelle homomorphisme entre $\boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{F}$ toute application $\boldsymbol{f}$ de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{F}$ qui vérifie :
$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\#\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$.
Lorsque $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}$ $\boldsymbol{et}$ $*=\#$,on dit que $\boldsymbol{f}$ est un endomorphisme de $\boldsymbol{E}$.
On appelle isomorphisme de $\boldsymbol{E}$ vers $\boldsymbol{F}$ tout homomorphisme bijectif de $\boldsymbol{E}$ vers $\boldsymbol{F}$.
Lorsque $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}$ $\boldsymbol{et}$ $*=\#$,on dit que $\boldsymbol{f}$ est un automorphisme de $\boldsymbol{E}$.

2. Lois de composition externe

- On appelle loi de composition externe entre E et F toute application de $E \times F$ vers E.
  Exemple : On définit le produit d'un vecteur $\vec{V}$ de $\vec{\varphi}$ par un scalaire $\lambda\ de\ \mathbb{R}$, on trouve $\vec{w} = \lambda\vec{V}$.

- Considérons une loi de composition externe # définie entre E et . Une partie $E'de\ E$ est dite stable (ou fermée) pour # si $\forall a \in E', \forall\lambda \in F$,$\lambda\#a \in E'$.

Chapitre 2: QUELQUES STRUCTURES ALGEBRIQUES

1. Semi-groupes ou demi-groupes

Définitions

- Un ensemble non vide $(E,*)$ où $*$ est une loi interne est dit semi-groupe si $*$ est associative.
- Soit $(E,*)$ un semi-groupe. $(E,*)$ est dit semi-groupe commutatif ou abélien si $*$ est commutative.
- Soit H un sous-ensemble non vide de E, avec $*$ une loi associative dans E. H un sous-semi-groupe de $E\ si\ (H,*)$ est fermée. Autrement dit, si$\forall x, y \in H, x * y \in H$.

Théorème

Toute intersection non vide de sous-semi-groupe de $\boldsymbol{E}$ est un sous-semi-groupe de $\boldsymbol{E}$.

Définition

L'application $\boldsymbol{\varphi}$ du sous-groupe $(\boldsymbol{E},*)$ vers le sous-groupe $(\boldsymbol{F},\top)$ est appelée homomorphisme (de sous-groupe) si $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \top \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})$.

Théorème

Soit $\boldsymbol{\varphi}$ un morphisme de $(\boldsymbol{E},*)$ vers $(\boldsymbol{F},\top)$ où $(\boldsymbol{E},*)$ et $(\boldsymbol{F},\top)$ sont des semi-groupes. Si $\boldsymbol{e}$ est neutre dans $\boldsymbol{E}$, alors $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e})$ est neutre dans $\boldsymbol{F}$.

Théorème

On considère le morphisme $\boldsymbol{\varphi}$ ci-dessus. Si $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{a}^{-1} \in \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{et}\ (\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}))^{-1}$ existent alors: $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}^{-1}) = (\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}))^{-1}$.

Théorème

Si $\boldsymbol{\varphi}$ est un morphisme de semi-groupe, alors $\boldsymbol{Im\varphi}$ est un sous-semi-groupe de $(\boldsymbol{F},\top)$.

Théorème

Si $\boldsymbol{\varphi}: (\boldsymbol{E},*) \longrightarrow (\boldsymbol{F},\top)$ est un morphisme de semi-groupe, alors $\boldsymbol{Ker\varphi}$ partitionne $\boldsymbol{E}$.

Théorème

Soit $\boldsymbol{\varphi}$ un homomorphisme surjectif de semi-groupe et $\boldsymbol{E} \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{E}/\boldsymbol{Ker\varphi}$ alors il existe un unique isomorphisme $\boldsymbol{\chi}: \boldsymbol{F} \longrightarrow \boldsymbol{E}/\boldsymbol{Ker\varphi}$ tel que $\boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\pi}$.

2. Groupes

Définition

Un semi-groupe est appelé groupe s'il contient un élément neutre et que chaque élément de $\boldsymbol{E}$ admet un inverse. Autrement dit, $(\boldsymbol{G},*)$ est un groupe si :

- $*$ est associative ;

- $\exists e \in G / \forall a \in G, a * e = e * a = a$;
- $\forall a \in G, \exists a' \in G \ / a * a' = a' * a = e$.

Si de plus $*$ est commutative dans, G alors on dit que G est un groupe commutatif ou groupe abélien.

Définition

Soit H un sous-ensemble non vide et $(G,*)$ un groupe. H est un sous-groupe de G et $(H,*)$ est un groupe.

Théorème

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- H est un sous-groupe de G
- $H \neq \emptyset$
  $\forall x, y \in H, x * y \in H$
  $\forall x \in H, x^{-1} \in H$
- $H \neq \emptyset$
  $\forall x, y \in H, x * y^{-1} \in H$

Théorème

L'intersection d'une famille de sous-groupe de G est un sous-groupe de G.

Théorème

Soient H *et* K deux sous-groupes de G.

$H \cup K$ est un sous-groupe de $G \Leftrightarrow H \subseteq K$ *ou* $K \subseteq H$.

Définition

Soient H un sous-groupe de G et $g \in G$.

L'ensemble $g * h, h \in H = g * H$ est appelé classe à gauche du sous-groupe H.

L'ensemble $h * g, h \in H = H * g$ est appelé classe à droite du sous-groupe H.

Théorème

Soient H un sous-groupe de G et $g \in G$.

$$g * H = H \text{ ou} H * g = H \Leftrightarrow g \in H.$$

Théorème

L'ensemble de toutes les classes à gauche forme une partition du groupe G.

Théorème (dit de LAGRANGE)

Si H est un sous-groupe d'un groupe fini, alors le cardinal de H divise le cardinal de G.

Définition

Soit H un sous-groupe de G.

H est dit normal ou distingué si $\forall h \in H$ *et* $\forall g \in G, ghg^{-1} \in H$.

Si G est abélien, $\forall h \in H, \forall g \in G, ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in H$. Ainsi, tous les sous-groupes d'un groupe abélien sont normaux.

3. Anneaux et corps

Définition

Un ensemble $(\boldsymbol{A}, +, \times)$ est un anneau si :

- $(\boldsymbol{A}, +)$ est un groupe abélien
- $(\boldsymbol{A}, \times)$ est un semi-groupe
- $\times$ est distributive par rapport à +.

Définitions

- $(\boldsymbol{A}, +, \times)$ est un anneau unitaire si $\times$ admet un élément neutre.
- $(\boldsymbol{A}, +, \times)$ est un anneau commutatif si $\times$ est commutative.

Exemple : $(\mathbb{R}, +, \times), (\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{Z}, +, \times)$ sont des anneaux commutatifs et unitaires.

Remarque :
Chaque groupe abélien $\boldsymbol{A}$ peut être transformé en anneau en définissant la deuxième loi par : $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_{\boldsymbol{A}}$. Cet anneau sera commutatif mais jamais unitaire et appelé anneau à multiplication nulle.

Théorème

$\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}, \forall \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}$,

- $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{0}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{0}_{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}_{\boldsymbol{A}}$;
- $\boldsymbol{a} \times (-\boldsymbol{b}) = (-\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

Définition

Soit $\boldsymbol{H}$ une partie de $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{H}$ est un sous-anneau de $(\boldsymbol{A}, +, \times)$ si $(\boldsymbol{H}, +, \times)$ est un anneau.

Théorème

Soit $\boldsymbol{H}$ une partie de $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{H}$ est un sous-anneau de $(\boldsymbol{A}, +, \times)$ si et seulement si :

- $\boldsymbol{H} \neq \emptyset$;
- $\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{H}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{H}$;
- $\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{H}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{H}$.

Théorème

L'intersection de sous-anneau de $\boldsymbol{A}$ est un sous-anneau de $\boldsymbol{A}$.

Définition

L'application $\boldsymbol{\varphi}: \boldsymbol{A} \longrightarrow \boldsymbol{A}'$ est appelée morphisme d'anneaux si :

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}) \ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}).$$

Définition

Soit $\boldsymbol{I}$ une partie de l'anneau $(\boldsymbol{A}, +, \times)$.

- $\boldsymbol{I}$ est un idéal à gauche de $\boldsymbol{A}$ si $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$
- $\boldsymbol{I}$ est un idéal à droite de $\boldsymbol{A}$ si $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{I}$
- $\boldsymbol{I}$ est un idéal de $\boldsymbol{A}$ si et seulement s'il est à la fois idéal à gauche et idéal à droite.

Définition

Soit $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{A}^* \times \boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{a}$ est dit diviseur de zéro $\exists\, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{A}^* / \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{ou}\ \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}_{\boldsymbol{A}}$.

Définition

Téléphone : 698 222 277 / 671 839 797 **Facebook :** Intelligentsia Corporation **Email :** contact@intelligentsia-coropration.com

L'ensemble $(\boldsymbol{K},+,\times)$ est un corps si :

- $(\boldsymbol{K},+)$ est un groupe abélien
- $(\boldsymbol{K}^{*},\times)$ est un groupe
- $\times$ est distributive par rapport à +.

$(\boldsymbol{K},+,\times)$ est un corps commutatif si $(\boldsymbol{K},+,\times)$ est un corps et $\times$ est commutative.

Chapitre 3 : ESPACES VECTORIELLES ET APPLICATIONS LINEAIRES

1. Semi-groupes ou demi-groupes

Soit K un corps commutatif et E un ensemble non vide. On dira que E est un espace vectoriel sur K ou un K −espace vectoriel lorsque E est muni d'une loi de composition interne notée + et d'une loi de composition externe notée . à l'opérateur sur K tel que :

- $(E, +)$ est un groupe abélien ;
- $\forall \lambda, \beta \in K, \forall x \in E, \lambda.(\beta x) = (\lambda\beta).x$;
- $\forall \lambda \in K, \forall x, y \in E, \lambda.(x + y)) = \lambda.x + \lambda.y$;
- $\forall \lambda \in K, \forall x, y \in E, \lambda.(x + y)) = \lambda.x + \lambda.y$;
- $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in E, (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$;
- $\forall x \in E, 1_K.x = x$ ou 1_K =l'unité de K.

$. : K \times E \longrightarrow E$

Attention : $(\alpha, x) \to \alpha x \equiv \alpha.x$

Donc pour $x \in E, \alpha \in K$, l'écriture $x\alpha$ n'a pas de sens.
Notation : 0_E est le neutre de $(E, +)$.

Définition

Soient E un K-espace vectoriel, $S = x_1, x_2, \cdots, x_n$ une partie non vide de E. On appelle combinaison des éléments de S tout vecteur x de E de la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \in K.$$

Définition

E est un espace vectoriel, E'une partie non vide de E. On dira que E' est un sous-espace vectoriel de E lorsque E' est stable (par combinaison linéaire) pour les opérations de E et que muni des opérations réduites, E' soit un espace vectoriel sur K (K-espace vectoriel).

Théorème

Soient E un K-espace vectoriel, E' une partie non vide de E. E' est un sous-espace vectoriel E si et seulement si $\forall x, y \in E', \forall \alpha, \beta \in K, \alpha x + \beta y \in E'$.

Théorème et définition

E est un *K*-espace vectoriel, S est une partie non vide de *E*, *S'* l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'élément de S est un sous-espace vectoriel de *E* appelé le sous-espace vectoriel engendré par *S*.
On note $S' = < S >$ ou $S' = \{x \in E,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \in K, x_i \in S, n \in N^*\}$.

Définition

E est un *K*-espace vectoriel, S une partie non vide de *E.*

- On dira que S est libre lorsque toute combinaison linéaire finie nulle d'élément de S a ses coefficients tous nuls, c'est à dire :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i x_i} = \boldsymbol{0_E} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha_i} = \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{i} \in \{\boldsymbol{1}, \cdots, \boldsymbol{n}\}, \boldsymbol{x_i} \in \boldsymbol{S}$$

- $\boldsymbol{S}$ est liée si $\boldsymbol{S}$ n'est pas libre, c'est-à-dire :

$$\exists \{\boldsymbol{\alpha_i}\}_{1\le i\le n}, \exists \boldsymbol{i_0} \in \{\boldsymbol{1}, \cdots, \boldsymbol{n}\}, \boldsymbol{\alpha_{i0}} \neq \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{et} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_i x_i} = \boldsymbol{0_E},$$

Propriétés

- $\{\boldsymbol{0_E}\}$ est lié
- $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0_E}, \{\boldsymbol{x}\}$ est libre
- Toute famille contenant le vecteur nul est liée
- Si $\boldsymbol{S}$ est liée et $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{S'}$ alors $\boldsymbol{S'}$ est liée
- Si $\boldsymbol{S}$ est libre et $\boldsymbol{S'} \subseteq \boldsymbol{S}$ alors $\boldsymbol{S'}$ est libre
- Si $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \cdots, \boldsymbol{x_n}\}$ est liée alors l'un au moins des $\boldsymbol{x_i}$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Théorème

$\boldsymbol{E}$ est un $\boldsymbol{K}$-espace vectoriel.

- Toute intersection de sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$.
- Si $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{E}$, alors :
  $$\boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2} = \{\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}, \boldsymbol{x_1} \in \boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{E_2}\}$$

Définition

- Si $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{E}$, la somme $\boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2}$ est dite directe si $\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2} = \{\boldsymbol{0_E}\}$.
- Deux sous-espaces vectoriels $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}$ d'un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ sont dit supplémentaire si $\boldsymbol{E}$ est somme directe de $\boldsymbol{E_1}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{E_2}$.
  On note $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_1} \oplus \boldsymbol{E_2}$.

Définition

Soit S une partie non vide d'un espace vectoriel *E* (non trivial, c'est-à-dire $\boldsymbol{E} <> \boldsymbol{0_E}$). On dit que $\boldsymbol{S}$ engendre $\boldsymbol{E}$ lorsque $\boldsymbol{E}$ est égale au sous-espace vectoriel engendré par S, c'est-à-dire $\boldsymbol{E} =< \boldsymbol{S} >$. Si *E* est engendré par une partie *S* finie on dira que *E* est un espace vectoriel de dimension finie.

Définition

$\boldsymbol{E}$ est un K-espace vectoriel ($\boldsymbol{E} \neq \mathbf{0}_{\boldsymbol{E}}$), S est une partie non vide de E. S sera une base de E lorsque S sera une partie génératrice et une partie libre.

Théorème

Soit $\boldsymbol{E}$ un $\boldsymbol{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
$\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\}$ est une base de $\boldsymbol{E}$ si et seulement si tout vecteur $\boldsymbol{x}$ de $\boldsymbol{E}$ peut s'écrire de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\boldsymbol{S}$.

Théorème

Si une base d'un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ est une base ayant $\boldsymbol{n}$ vecteurs, alors toutes les bases de $\boldsymbol{E}$ possèdent exactement $\boldsymbol{n}$ vecteurs. Ce nombre $\boldsymbol{n}$ est appelé dimension de l'espace vectoriel $\boldsymbol{E}$.

Remarque

- $\dim\{\mathbf{0}_{\boldsymbol{E}}\} = \mathbf{0}$

Une base $\boldsymbol{B}$ d'un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ est caractérisée par les assertions suivantes :

- $\boldsymbol{B}$ est un système libre maximal.
- $\boldsymbol{B}$ est un système générateur minimal

Théorème (de la base incomplète)

Soit $\boldsymbol{E}$ un $\boldsymbol{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\boldsymbol{n}$. Soit $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_r}\}$, $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{n}$ un système libre de $\boldsymbol{E}$. Alors, on peut compléter le système $\boldsymbol{S}$ par $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{r}$ vecteurs de $\boldsymbol{E}$ de façon à obtenir une base de $\boldsymbol{E}$.

Théorème

$\boldsymbol{E}$ est un $\boldsymbol{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\boldsymbol{E_1}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{E_1}$ deux sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{E}$ tel que $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2}$. Soit $\boldsymbol{B_i}$ une base de $\boldsymbol{E_i}, \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}$.

Alors $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_1} \oplus \boldsymbol{E_2}$ si et seulement si $\begin{cases} \boldsymbol{B_1} \cap \boldsymbol{B_2} = \emptyset \\ \boldsymbol{B_1} \cup \boldsymbol{B_2} \ \textbf{\textit{est une partie libre de E}} \end{cases}$

Dans ce cas, $\boldsymbol{B_1} \cup \boldsymbol{B_2}$ est une base de $\boldsymbol{E}$.

Corollaire

Si $\boldsymbol{E}$ est un $\boldsymbol{K}$-espace vectoriel de dimension finie $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{E_1}$et $\boldsymbol{E_2}$ deux sous-espaces vectoriels de $\boldsymbol{E}$, alors :

- $\dim(\boldsymbol{E_1} \oplus \boldsymbol{E_2}) = \dim\boldsymbol{E_1} + \dim\boldsymbol{E_2}$
- $\dim(\boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2}) = \dim\boldsymbol{E_1} + \dim\boldsymbol{E_2} - \dim(\boldsymbol{E_1} \cap \boldsymbol{E_2})$.

Définition

On appelle hyperplan d'un espace vectoriel $\boldsymbol{E}$ tout espace vectoriel admettant un supplémentaire de dimension $\mathbf{1}$.

N.B : lorsque $\boldsymbol{E}$ est de dimension finie $\boldsymbol{n}$, un hyperplan de $\boldsymbol{E}$ est tout simplement un sous-espace vectoriel de dimension $\boldsymbol{n} - \mathbf{1}$.

Définition (espace vectoriel quotient)

Si $\boldsymbol{E}$ est un $\boldsymbol{K}$-espace vectoriel,$\boldsymbol{E_1}$ un sous-espace vectoriel de $\boldsymbol{E}$ sur $\frac{E}{E_1}$, on définit les opérations suivantes :

- $(x + E_1) + (y + E_1) = (x + y) + E_1$
- $\lambda(x + E_1) = \lambda x + E_1, \lambda \in K$

Muni de ces deux opérations, $(\frac{E}{E_1}, +, .)$ est un $\boldsymbol{K}$-espace vectoriel qu'on appelle espace vectoriel quotient de $\boldsymbol{E}$ par $\boldsymbol{E_1}$.

2. APPLICATIONS LINEAIRES

Soit $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$ deux $\boldsymbol{K}$-espaces vectoriels :

- Une application de *E* vers *F* est une fonction de *E* vers *F* telle que chaque élément ait une image.
- Cette application est dite linéaire si et seulement si on a les relations suivantes :
  (a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous x , y de $\boldsymbol{E}$.
  (b) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$pour tous x de $\boldsymbol{E}$ et λ de .
  Notez que, on peut résumer les deux propriétés ci-dessus par :
  $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ pour tous x , y de $\boldsymbol{E}$ et λ de .

- Soit $B_E = (e_i), 1 \leq i \leq n$, une base de $\boldsymbol{E}$ et $B_F = (e_j), 1 \leq j \leq p$, une base de $\boldsymbol{F}$.

Alors on peut écrire :

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} e_j, \forall i \in 1, \cdots, n$$

On appelle donc matrice de l'application linéaire, l'ensemble des coefficients α_{ij} associés

aux couples d'indices (i, j) et on note $M = (\alpha_{ij})$.

Exemple : Soit l'application définie par : $\begin{cases} x' = 2x + 3y + z \\ y' = 2x - y + 2z \\ z' = 3x - z + y \end{cases}$

La matrice de cette application est donc définie par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Chapitre 4: LES MATRICES

1. Généralités

Soient $M = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ et $N = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$

- **Egalité :**

$M = N$ si et seulement si $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, p\}$.

- **Somme**

On appelle somme des matrices M et N la matrice $= (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$, avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, p\}$.

- **Multiplication par un scalaire**

La multiplication par un scalaire λ de la matrice M est la matrice L définie par :
$L = (l_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$, avec $l_{ij} = \lambda a_{ij}$ $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, p\}$.

- **Produit des matrices**

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le q}}$deux matrices de $M_{n,p}$ et $M_{p,q}$ respectivement. On appelle produit des matrices A et B la matrice $C = A.B$ définie par :
$C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$, avec $c_{ij} = \sum_{k=0}^{p} a_{ik}a_{kj}$ $\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\} \times \{1, \cdots, p\}$.

Quelques propositions :

- $(M_{n,p}(K), +, .)$ est un K-espace vectoriel.
- $(M_{n,p}(K), +, x)$ est un anneau unitaire.

- **Transposée d'une matrice**

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $M_{n,p}(K)$. On appelle transposée de A la matrice de $M_{p,n}(K)$ notée A^t,définie par $A^t = (a_{ij})$.

- **Trace d'une matrice carrée**

On appelle trace d'une matrice carrée, la somme de ses termes diagonaux. Ainsi, si $A = (a_{ij})$, on a :

$$Tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

2. Quelques matrices particulières

Matrice identique

Il s'agit de la matrice $I = (i_{ij}) \in M_n(K)$ définie par :

$$i_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$$

Ainsi, $I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Matrice symétrique

Une matrice $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}}) \in \boldsymbol{M_n}(\boldsymbol{K})$ est dite symétrique si on a $\boldsymbol{a_{ij}} = \boldsymbol{a_{ji}}\ \forall \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$. Ceci est équivalent à $\boldsymbol{A^t} = \boldsymbol{A}$.

Matrice antisymétrique

Une matrice $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}}) \in \boldsymbol{M_n}(\boldsymbol{K})$ est dite antisymétrique si on a $\boldsymbol{a_{ij}} = -\boldsymbol{a_{ji}}\ \forall \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$. Ceci est équivalent à $\boldsymbol{A^t} = -\boldsymbol{A}$.
Noter que pour le cas particulier des termes diagonaux ($\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$) d'une matrice carrée, on a $\boldsymbol{a_{ii}} = -\boldsymbol{a_{ii}} \Leftrightarrow \boldsymbol{a_{ii}} = \boldsymbol{0}\ \forall \boldsymbol{i}$. Ainsi, tous les termes diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

Matrice diagonale

Une matrice $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{M_n}(\boldsymbol{K})$ est diagonale si et seulement si ses seuls termes potentiellement non nuls sont ses termes diagonaux. C'est-à-dire pour $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{a_{ij}})$, alors on a : $(\boldsymbol{a_{ij}}) = \boldsymbol{0}\ \forall \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$. $\boldsymbol{M}$ peut s'écrire : $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}$

Matrice triangulaire ou trigonale

Une matrice $\boldsymbol{M} \in \boldsymbol{M_n}(\boldsymbol{K})$ est triangulaire nord ou supérieure (respectivement sud ou inferieure) si et seulement si ses seuls termes potentiellement non nuls sont ses termes du triangle supérieure ou nord (respectivement inferieure ou sud).
Ainsi, soit $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{a_{ij}})$.

- $\boldsymbol{M}$ est triangulaire nord si et seulement si $(\boldsymbol{a_{ij}}) = \boldsymbol{0}\ \forall \boldsymbol{i} < \boldsymbol{j}$. $\boldsymbol{M}$ peut s'écrire :
$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}$$
- $\boldsymbol{M}$ est triangulaire sud si et seulement si $(\boldsymbol{a_{ij}}) = \boldsymbol{0}\ \forall \boldsymbol{j} < \boldsymbol{i}$. $\boldsymbol{M}$ peut s'écrire :
$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Chapitre 5: DETERMINANTS

1. Définitions

- La sous matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant les $i^{ème}$ lignes et les $j^{ème}$ colonnes de la matrice est appelé **mineur d'ordre** (i,j). On le note A_{ij}, il s'agit d'un mineur d'ordre $n-1$.
- Le cofacteur du terme a_{ij} est le terme $x_{ij} = (-1)^{i+j} detA_{ij}$.
- On appelle alors déterminant de A, le réel $detA$ définie par :

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} detA_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$

Dans ce cas on dit qu'on a développé selon la $i^{ème}$ ligne. C'est nous qui choisissons la ligne suivant laquelle développer. En pratique, il est conseillé de choisir la ligne comportant le maximum de termes nuls.
Il est à noter qu'on peut aussi développer suivant une colonne. Dans ce cas on aura :

$$detA = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} detA_{ij} \ \forall j \in \{1, \cdots, n\}$$

2. Quelques propriétés du déterminant

- Soit $A \in M_n(K)$, alors $|A^t| = -|A|$.
- Si B est obtenue de A en inter-changeant 2 lignes ou 2 colonnes, alors $|B| = -|A|$.
- Si A a 2 lignes (respectivement 2 colonnes) identiques, alors on a $|A| = 0$
- $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
- Les opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes laissent le déterminant invariant.
- $\lambda |A.B| = |A|.|B|$
- Si A est inversible, alors $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

3. Quelques applications du déterminant

Règle de Cramer

Considérons le système suivant de n équations à n inconnues $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ avec \ i = \overline{1,..,n}$$

Soit $A = a_{ij}$ la matrice des coefficients et $B = b_i$ la matrice uni-colonne des constantes.

- Si $|A| \neq 0$, alors ce système a une unique solution $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ avec $\forall j \in \{1, \cdots, n\}$

$x_j = \frac{|B(j)|}{|A|}$, $B(j)$ étant la matrice obtenue en remplaçant la $j^{ème}$ colonne de A par B.

- Si $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$ et $|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{j})| = \mathbf{0}\ \forall \boldsymbol{j} \in \{\mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{n}\}$ alors ce système possède une infinité de solutions.

- Si $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$ et $\exists \boldsymbol{jj} \in \{\mathbf{1}, \cdots, \boldsymbol{n}\}/|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{j})| \neq \mathbf{0}$ alors ce système ne possède aucune solution.

Inverse d'une matrice régulière

$\boldsymbol{A}$ est régulière si et seulement si $|\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$. Dans ce cas, on a :

$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}(\boldsymbol{A})} \boldsymbol{com}(\boldsymbol{A})^{\boldsymbol{t}}$ Avec la comatrice $\boldsymbol{com}(\boldsymbol{A})$ de $\boldsymbol{A}$, la matrice des cofacteurs.

i. Systèmes homogènes $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} = \mathbf{0}$

- Si $|\boldsymbol{A}| \neq \mathbf{0}$, alors ce système a une unique solution $\boldsymbol{X}$
- Si $|\boldsymbol{A}| = \mathbf{0}$, alors ce système a une infinité de solutions.

Chapitre 6: DIAGONALISATION

1. Définitions

$\boldsymbol{2}$ matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ d'ordre $\boldsymbol{n}$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $\boldsymbol{P}$ d'ordre $\boldsymbol{n}$ telle que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}.\boldsymbol{B}.\boldsymbol{P}^{-1}$.

1. Propriétés

- Soient $\boldsymbol{2}$ matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ d'ordre $\boldsymbol{n}$ semblables. Alors :

✓ $\boldsymbol{A}^t$ et $\boldsymbol{B}^t$ sont semblables.

✓ $\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{A}^k$ et $\boldsymbol{B}^k$ sont semblables et si $\boldsymbol{A}$ est inversible, $\boldsymbol{B}$ l'est aussi et on a : $\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{A}^k$ et $\boldsymbol{B}^k$ sont inversibles

✓ $\boldsymbol{Tr}(A) = \boldsymbol{Tr}(B)$.

- Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{End}(\boldsymbol{E})$ commutent (c'est-à-dire $\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{u}$), alors $\mathbf{ker}(\boldsymbol{u})$ et $\in$ $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{u})$ sont stables par $\boldsymbol{v}$ et inversement. C'est-à-dire :

$$\in \boldsymbol{v}(\mathbf{ker}(\boldsymbol{u})) = \mathbf{ker}(\boldsymbol{u}) \text{ et } \boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{u})\big) = \boldsymbol{Im}(\boldsymbol{u}) \text{ et inversement.}$$

2. Principe de diagonalisation

$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{End}(\boldsymbol{E})$ et $\mathbf{dim}(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{n}$ identiques, alors on a : $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{0}$.

Soit $\in \boldsymbol{M}$ une matrice carrée d'ordre $\boldsymbol{n}$, elle est associée à un endomorphisme $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}^n$ dans la base canonique. Diagonaliser $\boldsymbol{M}$ revient à trouver une matrice diagonale $\boldsymbol{D}$ semblable à $\boldsymbol{M}$.

Ceci revient à trouver une $\boldsymbol{K}^n$ dans laquelle la matrice de $\boldsymbol{u}$ est diagonale.

Soit $\boldsymbol{E}$ un $\boldsymbol{K}$-espace vectoriel, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{End}(\boldsymbol{E})$. S'il existe $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} \setminus \{\boldsymbol{0}_E\}$ tel que $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\lambda x}$, alors :

- On dit que $\boldsymbol{\lambda}$ est une valeur propre de $\boldsymbol{u}$.
- $\boldsymbol{x}$ est un vecteur propre de $\boldsymbol{u}$ associé à la valeur propre $\boldsymbol{\lambda}$.
- $\boldsymbol{E}_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} / \ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\lambda x}\}$ est un s.e.v de $\boldsymbol{E}$ appelé sous-espace propre associé à la valeur propre $\boldsymbol{\lambda}$.
- L'ensemble des valeurs propres de $\boldsymbol{u}$ est appelé spectre de $\boldsymbol{u}$ et est noté $\boldsymbol{S_P}(\boldsymbol{u})$.

3. Définitions-propositions

- Les propositions suivantes sont équivalentes :
  - ✓ $\boldsymbol{\lambda}$ est une valeur propre de $\boldsymbol{u}$.
  - ✓ $\mathbf{det}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda e}) = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \mathbf{det}(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{\lambda I}) = \boldsymbol{0}$ ou est une matrice associée à $\boldsymbol{u}$.
  - ✓ $\mathbf{ker}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda e}) \neq \{\boldsymbol{0}_E\}$.

- Le polynôme $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{det}(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{xI})$ de degré $\boldsymbol{n}$ est appelé polynôme caractéristique de $\boldsymbol{M}$ ou de $\boldsymbol{u}$ et est noté $\boldsymbol{X_M}(\boldsymbol{x})$ ou $\boldsymbol{X_u}(\boldsymbol{x})$.

- On note $\xi_u = \{P \in K[X]/P(u) = 0(endomorphisme\ nul)\}$, il existe un unique $P \in K[X]$ unitaire tel que $\xi_u =< P >$. P est appelé le polynôme minimal de u et est noté Π_u.

- Π_u divise X_u.

- On a : λ valeur propre de $M \Leftrightarrow X_M(\lambda) = 0$.

- $E_\lambda = \ker(M - \lambda I)$.

Propriétés

- $\lambda \in S_P(u) \Leftrightarrow \Pi_u(\lambda) = 0$.
- $u \in End(E)$ avec $\dim(E) = n$ alors u est diagonalisable dans K si et seulement Π_u est scindé dans K et toutes ses racines sont simples.

N.B : Π_u et X_u ont les mêmes racines, mais celles de Π_u sont simples.

Remarques importantes relatives aux polynômes caractéristiques

Soient E un K-espace vectoriel de dimension n, $u \in End(E)$, M associé à u :

- Le coefficient dominant de X_u est $(-1)^n$.
- Le terme constant de X_u est égal au $detM$ qui n'est rien d'autre que le produit des valeurs propres.
- La trace de M est égale à la somme des valeurs propres. C'est le coefficient du monôme de degré $n - 1$.

Proposition

$$X_u = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

Ainsi, u est diagonalisable si, et seulement si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i est égal à la dimension de E_i ;c'est-à-dire : $dimE_i = \alpha_i$.

Théorème de Caley-Hamilton

Si $\Pi_u(X)$ est le polynôme de u, alors $\Pi_u(u) = 0$. En d'autre termes, tout endomorphisme est racine de son polynôme caractéristique (Π_u).
Ce théorème permet de calculer l'inverse de la matrice associée à u lorsqu'il existe.

1. Application de la diagonalisation

- M est diagonalisable $\Rightarrow \exists P, D \in M_n(K)/M = P.D.P^{-1}$ avec D matrice diagonale. Ainsi $\forall p \in \mathbb{N}, M^p = P.D^p.P^{-1}$ avec :

$$D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

- Soit $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite définie sur K^k par la donnée de $u_0 = (x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^k)$ et la relation de récurrence $u_{p+1} = Mu_p$ où $M \in M_n(K)$.
  Puisque $M^p = P.D^p.P^{-1}$, nous déduisons que $u_p = M^p u_0 = (P.D^p.P^{-1})u_0$.
- Résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants :

On considère le système linéaire définit sous la forme matricielle par :

$$\frac{dX}{dt} = M.X, \text{ où } M \in M_n(K), X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ avec } X(0) \text{ donné.}$$

Alors :

$$X(t) = X(0)e^{tM}.$$

Si on a $M = P.D.P^{-1}$, alors $e^{tM} = P.e^{tD}.P^{-1}$ avec :

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \text{ et donc } X(t) = (P.e^{tD}.P^{-1})X(0).$$

Chapitre 7: TRIGONALISATON

1. Motivation et proposition

Lorsque nous ne pouvons pas diagonaliser une matrice, il est possible de la trigonaliser, c'est-à-dire trouver une matrice triangulaire $\boldsymbol{T}$ qui lui est semblable. Nous rappelons que nous traitons les endomorphismes, donc les matrices carrées. Supposons que :

$\mathrm{X}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{X}) = \prod_{i=1}^{k}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\lambda}_i)^{\alpha_i}$,

polynôme caractéristique de $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{End}(\boldsymbol{E})$, où les valeurs propres sont 2 à 2 distinctes.

On suppose aussi que $\exists \boldsymbol{i}/\boldsymbol{dimE}_{\lambda_i} < \boldsymbol{\alpha}_i$, alors $\boldsymbol{u}$ n'est pas diagonalisable. Cependant, $\boldsymbol{u}$ est trigonalisable (c'est-à-dire qu'on peut trouver une base de $\boldsymbol{E}$ dans laquelle la matrice de $\boldsymbol{u}$ est triangulaire supérieure, les éléments de la diagonale étant évidemment les valeurs propres $\boldsymbol{\lambda}_i$).

Posons $\boldsymbol{v}_i = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda e})$. On a : $\boldsymbol{v}_i \in \boldsymbol{End}(\mathbf{ker}(\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{u})))$ et $\boldsymbol{v}_i^{\alpha_i} = \mathbf{0}$.

L'endomorphisme est nilpotent et on a : $\{\mathbf{0}_E\} \subset \mathbf{ker}(\boldsymbol{v}_i) \subset \cdots \subset \mathbf{ker}(\boldsymbol{v}_i^{\alpha_i})$

2. Détermination pratique de la base de dans laquelle la matrice de u est trigonale

Pour chaque $\boldsymbol{v}_i$:

- Prendre une base de $\mathbf{ker}(\boldsymbol{v}_i)$
- La compléter à une base de $\mathbf{ker}(\boldsymbol{v}_i^2)$, puis de $\mathbf{ker}(\boldsymbol{v}_i^3)$, et ainsi de suite jusqu'à $\mathbf{ker}(\boldsymbol{v}_i^{\alpha_i})$
- Mettre les bases ensemble pour obtenir une base de $\boldsymbol{E}$ dans laquelle la matrice de $\boldsymbol{u}$ est trigonale supérieure. Dans cette base, la matrice de $\boldsymbol{u}$ est sous la forme :

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{A}_k \end{pmatrix} \text{ où } \boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_1 & \cdots & \cdots & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{x}_i \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \boldsymbol{a}_{i-1}\boldsymbol{x}_i \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \boldsymbol{\lambda}_i \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N}_i$ où $\boldsymbol{N}_i$ est nilpotente. Ici,$\boldsymbol{T}^n$ se calcule par le binôme de Newton :

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^n = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{C}_n^k \boldsymbol{a}^k \boldsymbol{b}^{n-k}$$

Chapitre 8: MATRICES DE JORDAN ET JORDANISATION

1. Définition

On appelle matrice de Jordan de type (λ, n), la matrice $J_{\lambda,n}$ d'ordre n (carrée) définie par :

$$J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Soient $u \in End(E)$, M la matrice associée,

$$X_M(X) = \sum_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

On peut trouver une base dans laquelle la matrice u est formée de blocs diagonaux, où chaque bloc est soit une matrice diagonale, soit une matrice de Jordan de M.

2. Méthode de calcul de la réduite de Jordan et de la base de (Jordanisation)

Soit $u \in End(E)$, avec son polynôme caractéristique :

$$X_u(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

On effectue, comme dans le procédé de trigonalisation, la détermination d'une base de $\ker(v_i^{\alpha_i})$ par complétion et cela pour chaque $v_i = (u - \lambda_i e)$. Dans ce procédé, le dernier vecteur déterminé pour l'obtention d'une base de $\ker(v_i^{\alpha_i})$ est le vecteur que nous noterons e_{α_i} ensuite, on déduit :

$$e_{\alpha_{i-1}} = (u - \lambda_i e) e_{\alpha_i}$$

Ce qui nous donne le système de vecteurs $(e_1, e_2, \cdots, e_{\alpha_i})$ a qui on fait correspondre la matrice P des vecteurs colonnes de A de ce système de vecteurs correspondra (la matrice de Jordan) le bloc J_{d_i}, dans la réduite de Jordan de u.

Ce procédé est effectué pour tous les $v_i = (u - \lambda_i e)$. Puis pour obtenir la matrice de passage globale, on met juste ces bases ensemble (ou ces systèmes de vecteurs), puis l'on obtient la base de Jordan dans laquelle la matrice de u est réduite de Jordan.

Téléphone : 698 222 277 / 671 839 797 **Facebook :** Intelligentsia Corporation **Email :** contact@intelligentsia-coropration.com

3. Application à la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n

On suppose que l'équation s'écrit sous la forme :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$$

Sous forme condensée, on a :

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} y^{(n-k)} = 0$$

Posons $X = (y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \cdots, y^{(1)}, y)$, dans ce cas on a :

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{(n-1)} \\ y^{(n-2)} \\ \vdots \\ y^{(1)} \\ y \end{pmatrix}$$

Avec $\frac{dX}{dt} = (y^{(n)}, y^{(n-1)}, \cdots, y^{(1)})$.
La solution générale de ce système est donnée par $X(t) = e^{tM}.X_0$ et la résolution de notre équation est alors donnée par la dernière composante de $X(t)$.
Lorsque les conditions initiale sont données, c'est-à-dire $y(0), y^{(1)}(0), \cdots, y^{(n-1)}(0)$, alors on une solution unique pour ce système :

$$X(t) = e^{tM}.X(0)$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$P_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

On détermine ses valeurs propres et on commence la réduction, à la fin on trouve la réduite de Jordan de A et alors :

$$e^{tA} = P.e^{tB}.P^{-1}$$