E.N.S.P. .... *Niveau II/Année 2016-17, Semestre 1* .... ND/NG

*** U.E. MAT 217 « *Séries et Intégrales généralisées* » ***

***** Examen Final *(3H 00mn)* *****

1. **TOUT DOCUMENT INTERDIT.**
2. **Le correcteur appréciera le SOIN apporté à la REDACTION et à la PRESENTATION du devoir.**
3. **Toute réponse doit être justifiée, mais éviter des explications INUTILEMENT KILOMETRIQUES.**
4. **L'objectif ici ne doit pas être de chercher à traiter à tout prix toute l'épreuve, en sprintant inconsidérément et en bâclant. Mais, plutôt, d'en couvrir une part significative de manière convaincante.**

**** *EXERCICE 1* (7 POINTS) ****

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_a(x) = \frac{x^{a-1}}{1+x^{2a}}, \quad I(a) = \int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x, \quad J(a) = \int_1^{+\infty} f_a(x)\,\mathrm{d}x, \quad K(a) = \int_0^{+\infty} f_a(x)\,\mathrm{d}x.$$

1°) Sans chercher à trouver la nature, ni calculer la valeur des intégrales $I(a)$, $J(a)$, $K(a)$:

a) Que peut-on dire des *parités* respectives de $I(a)$, $J(a)$, $K(a)$, vues, chacune, comme fonction de la variable réelle a ? **N.B.** ***Soyez efficace !!!***

b) Montrer qu'on peut écrire $I(a) = J(a)$, et dire ce que cela signifie dans ce contexte.

2°) a) Selon les valeurs du réel a, trouver l'*équivalent simple* de $f_a(x)$ quand $x \underset{>}{\longrightarrow} 0$.

b) En utilisant un critère de convergence approprié, discuter la nature de $I(a)$ selon les valeurs du réel a.

c) Déterminer l'ensemble des nombres réels a pour lesquels $I(a)$ est une *intégrale définie.*

3°) ***Utiliser ce qui précède pour trouver*** (**N.B.** ***Efficacement !!!***) :

a) Le *domaine de définition* $\mathcal{D}_K$ de $K(a)$ dans $\mathbb{R}$.

b) La valeur de la fonction $K(a)$ pour les réels a de son domaine de définition.

**** *EXERCICE 2* (6 POINTS) ****

Etudier la nature des séries :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\mathrm{sh}(1/n)}{\ln n}$; *(2)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{[(2n+1)!]^2}{(n+1)!\cdot(3n+1)!}$; *(3)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^n \ln(\mathrm{th}\, n)$;

(4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{5}{n}\right)^{n^2} e^{-(4+5i)n}$; *(5)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{\sqrt{n}} e^{-(4+5i)\sqrt{n}}$; *(6)* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{\sqrt{n}} e^{-(4+5i)n}$.

**** *EXERCICE 3* (3,5 POINTS) ****

On pose : $A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $B = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$, et $C = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+5)}$.

1°) Sans calculer ni A, ni B, ni C, montrer que A, B et $C \in \mathbb{R}$. **N.B.** ***Soyez efficace !!!***

2°) On admet que : $A = \dfrac{\pi}{4}$. En déduire, successivement, les valeurs de B et C.

**** *EXERCICE 4* (7 POINTS) ****

N.B. ***A condition d'avoir préalablement bien lu l'énoncé de tout cet Exercice, les parties*** $\boxed{\textbf{I}}$***,*** $\boxed{\textbf{II}}$***,*** $\boxed{\textbf{III}}$***, ci-après, peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.***

$\boxed{\textbf{I}}$ **- 1°)** Rappeler les définitions et notations respectives d'une série convergente et de sa somme.

N.B. ***Telles que données en Cours !***

2°) En utilisant ces définitions, démontrer que :

a) Si une série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge absolument, alors $\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$.

b) Si $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ sont 2 séries convergentes, à termes réels et vérifiant :

$$\forall n \geqslant n_0 \ (n \in \mathbb{N}), \quad u_n \leqslant v_n,$$

alors $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

$\boxed{\textbf{II}}$ **-** On suppose ici que $\forall n \geqslant n_0 \ (n \in \mathbb{N}), \ u_n = a_n b_n$,

où $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n \geqslant n_0}$ sont 2 suites numériques vérifiant :

(i) $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ est une *suite décroissante* de nombres réels $\geqslant 0$;

(ii) $(b_n)_{n \geqslant n_0}$ est une *suite géométrique* (à termes réels ou complexes) de raison q telle que $|q| < 1$.

- Démontrer alors successivement que :

1°) la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente ;

2°) son reste d'ordre N (où $N \in \mathbb{N} / \ N \geqslant n_0$) vérifie : $|R_N| \leqslant \dfrac{|u_{N+1}|}{1 - |q|}$.

$\boxed{\textbf{III}}$ **- 1°)** Utiliser le $\boxed{\textbf{II}}$ pour calculer, à 5×10^{-10} près, la valeur de la somme infinie $T = \sum_{n=0}^{+\infty} (-3)^n e^{-(n+1)^2}$.

N.B. ***Ne donner que les chiffres sûrement corrects dans*** T***.***

2°) Donner une valeur approchée de l'*incertitude relative* sur cette approximation du nombre réel T.

FIN