E.N.S.P. .... *Niveau II/Année 2014-15, Semestre 1* .... ND/NG

*** U.E. MAT 217 « *Séries et Intégrales généralisées* » ***

***** Examen Final *(3H 00mn)* *****

1. **TOUT DOCUMENT INTERDIT.**
2. **Le correcteur appréciera le SOIN apporté à la REDACTION et à la PRESENTATION du devoir.**
3. **Toute réponse doit être justifiée, mais éviter des explications INUTILEMENT KILOMETRIQUES.**
4. **L'objectif ici ne doit pas être de chercher à traiter à tout prix toute l'épreuve, en sprintant inconsidérément et en bâclant. Mais, plutôt, d'en couvrir une part significative de manière convaincante.**

**** *EXERCICE 1* (8,5 POINTS) ****

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose : $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$, $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\, e^{-x^2} \mathrm{d}x$, $L_k = J_{2k}$ et $M_k = J_{2k+1}$.

1°) Sans calculer ni I_k, ni J_k, montrer que I_k et $J_k \in \mathbb{R}$.

2°) Sans calculer ni I_k, ni M_k, montrer que $M_k = \alpha\, I_k$, où α est une constante réelle à préciser.

3°) **a)** Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $I_{k+1} = (k+1)\, I_k$.

b) En déduire les valeurs de I_k et M_k, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

4°) **a)** Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $L_k = \beta \cdot (2k-1)\, L_{k-1}$, où β est une constante réelle à préciser.

b) En déduire que, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, on a : $L_k = \dfrac{(p\,k)\,!}{q^k \cdot (k\,!)} \cdot B$, où p, q sont 2 *constantes entières*, et B est une constante réelle, toutes les 3 à préciser. **NOTA : *On admettra que*** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

5°) **a)** Trouver un équivalent simple de L_k quand $k \longrightarrow +\infty$.

b) Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{J_{2k}}{J_{2k+1}}$.

**** *EXERCICE 2* (3 POINTS) ****

Trouver le *domaine de définition* dans $\mathbb{R}$ de la fonction : $H(a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$.

T.S.V.P. / P.T.O. ⟶

****** *PROBLEME* (14 POINTS) ******

N.B. ***A condition d'avoir préalablement bien lu l'énoncé de tout ce Problème, les parties*** $\boxed{\mathbf{I}}$, $\boxed{\mathbf{II}}$, $\boxed{\mathbf{III}}$ ***, ci-après, peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.***

$\boxed{\mathbf{I}}$ **-** Pour $z \in \mathbb{C}$, et sans calculer $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, montrer que $F(z) \in \mathbb{C}$.

N.B. ***Dans toute la suite de ce Problème, on admettra que :*** $\forall z \in \mathbb{C}$, $F(z) = e^z$.

$\boxed{\mathbf{II}}$ **-** On pose : $U = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n!}$, $V = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n!}$, et $W = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2(n)}{n!}$.

1°) Sans calculer ni U, ni V, ni W, montrer que U, V et $W \in \mathbb{R}$. **N.B.** ***Soyez efficace !!!***

2°) Calculer U, V et W.

$\boxed{\mathbf{III}}$ **-** Pour un réel $\lambda > 0$ donné, on considère X, une variable aléatoire qui suit la *loi de Poisson* de paramètre λ. Cela signifie que X est une variable aléatoire qui peut prendre comme valeurs les entiers naturels (*i.e.* 0, 1, 2, 3, $\cdots$), et avec les probabilités respectives :

$$P_n = \mathbf{Pr}\,(X = n) = C(\lambda) \cdot \frac{\lambda^n}{n!}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

où $C(\lambda)$ est une fonction appropriée de λ.

1°) Trouver la fonction $C(\lambda)$, sachant qu'on doit avoir : $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n = 1$.

2°) La *moyenne* ou *espérance mathématique* de X est donnée par : $m_X = \mathbf{E}\,(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n$, lorsque *cette somme infinie existe.*

a) Sans calculer m_X, montrer que $m_X \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $m_X = \lambda^k$, où k est une *constante entière* à préciser.

3°) La *variance* de X est donnée par : $\mathbf{Var}\,(X) = \mathbf{E}\left[\,(X - m_X)^2\,\right] = \mathbf{E}\,(X^2) - (m_X)^2$,

avec $\mathbf{E}\,(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P_n$, lorsque *cette somme infinie existe.*

a) Sans calculer $\mathbf{E}\,(X^2)$, montrer que $\mathbf{E}\,(X^2) \in \mathbb{R}$.

b) Calculer $\mathbf{Var}\,(X)$. **NOTA :** ***On pourra remarquer que*** $n^2 = n(n-1) + n$.

4°) Après avoir montré qu'elle existe, calculer la valeur de la somme infinie $A = \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 P_n$.

FIN

MEILLEURS VOEUX POUR L'ANNEE QUI COMMENCE !!!

BEST WISHES FOR THE NEW YEAR!!!