Exercices : Jean-François Burnol
Corrections : Volker Mayer
Relecture : François Lescure

Prolongement analytique et résidus

1 Un peu de topologie

Exercice 1

Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{]-\infty, 0]\}$. Déterminer en tout $z_0 \in \Omega$ la série de Taylor de la fonction holomorphe $z \mapsto \operatorname{Log} z$ ainsi que son rayon de convergence. Soit z_0 avec $\operatorname{Re}(z_0) < 0$. Soit R_0 le rayon de convergence pour z_0 et soit $f(z)$ la somme de la série dans $D(z_0, R_0)$. A-t-on $f(z) = \operatorname{Log} z$ dans $D(z_0, R_0)$?

Correction ▼ [002820]

Exercice 2

On considère la fonction analytique $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ sur l'ouvert U complémentaire de $\pi\mathbb{Z}$. Vérifier que la fonction $\sin(z)$ ne s'annule jamais sur U. Déterminer en tout $z_0 \in U$ donné le rayon de convergence du développement en série de Taylor de f. *Remarque :* il est déconseillé de chercher à résoudre ce problème en déterminant explicitement les coefficients des séries de Taylor.

Correction ▼ [002821]

Exercice 3

Soient f et g deux fonctions entières avec $\forall z\ f(z)g(z) = 0$. Montrer que l'une des deux est identiquement nulle.

Correction ▼ [002822]

Exercice 4

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert **convexe** U. Soit $z_1 \in U$, on suppose que le rayon de convergence de la série de Taylor de f en z_1 est R_1. De même, en $z_2 \in U$, on suppose que le rayon de convergence de la série de Taylor de f est R_2. Soit g_1 sur le disque ouvert $D(z_1, R_1)$ la somme de la série de Taylor de f en z_1 et de même g_2 sur $D(z_2, R_2)$. Soit $V = D(z_1, R_1) \cap D(z_2, R_2)$. Montrer que si V est non vide alors $g_1 = g_2$ sur V. On commencera par montrer que $V \cap U$ est non vide aussi. *Attention* : en général, sans hypothèse spéciale comme la convexité de U cela est complètement faux ; donner un exemple, avec U connexe, mais pas convexe, tel que $g_1 \neq g_2$ sur V (et on peut même faire avec $V \cap U \neq \emptyset$). Il suffira d'utiliser l'exercice 1.

Correction ▼ [002823]

2 Deux séries de Fourier

Exercice 5

1. Soit Ω l'ouvert habituel sur lequel est défini $\operatorname{Log} z$. Justifier pour tout $z \in \Omega$

$$\operatorname{Log}(z) = \int_0^1 \frac{z-1}{1+t(z-1)} dt ,$$

et donner une formule intégrale explicite pour le reste $R_N(z)$ dans :

$$\operatorname{Log}(z) = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \cdots + (-1)^{N-1} \frac{(z-1)^N}{N} + R_N(z) .$$

2. On suppose $\mathrm{Re}(z) \geq \delta$ pour un certain $\delta \in]0,1[$. Prouver :
$$|R_N(z)| \leq \frac{1}{\delta} \frac{|z-1|^{N+1}}{N+1}$$
On minorera $|1+t(z-1)|$ par δ.
3. En déduire que la série de Taylor de Log au point 1 est uniformément convergente sur le compact $\{|z-1| \leq 1, \delta \leq \mathrm{Re}(z)\}$.
4. Pour $-\pi < \phi < +\pi$ on pose $z = 1+e^{i\phi}$. Déterminer les coordonnées polaires $|z|$ et $\mathrm{Arg}(z)$ de z en fonction de ϕ. Déduire de ce qui précède les identités suivantes, pour tout $\phi \in]-\pi,+\pi[$:
$$\log(2\cos\frac{\phi}{2}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\cos k\phi}{k}$$
$$\frac{\phi}{2} = \sum_{k=1} (-1)^{k-1} \frac{\sin k\phi}{k}$$
et le fait que ces séries sont uniformément convergentes sur tout intervalle $[-\pi+\varepsilon, +\pi-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < \pi)$.

Correction ▼ [002824]

3 Principe du maximum

Exercice 6

1. Soit f une fonction continue sur $\overline{D(0,1)}$, holomorphe sur $D(0,1)$, nulle sur le cercle de rayon 1. Montrer que f est identiquement nulle.
2. Plus fort : on ne suppose plus que $f(e^{i\theta})$ est nulle pour tout θ mais seulement pour $0 \leq \theta \leq \pi$. Montrer que f est identiquement nulle. *Indication :* $f(z)f(-z)$.

Correction ▼ [002825]

Exercice 7

Soit $\phi(z) = \frac{4z+3}{4+3z}$. Montrer : $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad |\phi(e^{i\theta})| = 1$. En déduire $|z| < 1 \implies |\phi(z)| < 1$.

Correction ▼ [002826]

Exercice 8

Soit F une fonction entière telle que $|F(z)| \leq \frac{1}{n}$ pour $|z| = n$, $n \geq 1$. Montrer que F est identiquement nulle.

Correction ▼ [002827]

Exercice 9

1. Soit f analytique sur un disque $|z-z_0| \leq R$ et telle qu'il existe un certain z_1 avec $|z_1-z_0| < R$ tel que $|f(z)| > |f(z_1)|$ pour $|z-z_0| = R$. Montrer que f s'annule au moins une fois dans le disque ouvert $D(z_0,R)$. *Indication :* considérer sinon ce que dit le principe du maximum pour la fonction $\frac{1}{f}$.
2. *Théorème de Hurwitz.* Soit f_n des fonctions holomorphes sur un voisinage commun U de $\overline{D(0,1)}$ qui convergent uniformément sur U. Soit F la fonction limite. On suppose que F n'a aucun zéro sur le cercle $|z| = 1$, et qu'elle a au moins un zéro dans le disque ouvert $D(0,1)$. Montrer en appliquant la question précédente à f_n que pour $n \gg 1$ la fonction f_n a au moins un zéro dans $D(0,1)$.[1] Ce résultat est souvent appliqué sous sa forme réciproque : *si des fonctions holomorphes f_n sans zéro convergent uniformément sur un ouvert connexe vers F alors soit F est identiquement nulle soit F n'a aucun zéro.* Justifier cette dernière reformulation.

[1] On verra plus tard en cours ou en exercice que pour $n \gg 1$ chaque f_n a, comptés avec leurs multiplicités, exactement le même nombre de zéros que F dans $D(0,1)$.

[002828]

Exercice 10

Montrer que si une fonction entière f a sa partie réelle bornée supérieurement alors elle est constante (considérer $\exp(f)$).

Correction ▼ [002829]

Exercice 11

Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \leq M(1+|z|)^n$ pour un certain M et un certain $n \in \mathbb{N}$. Donner plusieurs démonstrations que f est un polynôme de degré au plus n :

– en utilisant une formule intégrale de Cauchy pour $f^{(n+1)}(z)$, avec comme contour les cercles de rayon R centrés en l'origine, ou en z si l'on veut,
– en utilisant les formules de Cauchy pour $f^{(m)}(0)$, avec $m \geq n+1$,
– en appliquant le théorème de Liouville à $(f(z)-P(z))/z^{n+1}$ avec P le polynôme de McLaurin-Taylor à l'origine à l'ordre n.

Correction ▼ [002830]

Exercice 12

Soit f une fonction entière vérifiant $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = +\infty$. Donner plusieurs démonstrations que f est un polynôme :

– en montrant, par un théorème du cours, que $w=0$ est une singularité polaire de $g(w) = f(\frac{1}{w})$, et en en déduisant qu'il existe un polynôme P tel que $f(z)-P(z)$ tende vers 0 pour $|z| \to \infty$, puis Liouville,
– ou en montrant que f n'a qu'un nombre fini de zéros z_j, $1 \leq j \leq n$, et en appliquant à $(z-z_1)\dots(z-z_n)/f(z)$ le résultat de l'exercice précédent, plus quelques réflexions de conclusion pour achever la preuve.

Montrer que la fonction entière $z+e^z$ tend vers l'infini le long de tout rayon partant de l'origine. D'après ce qui précède $z+e^z$ est donc un polynôme. Commentaires ?

Correction ▼ [002831]

4 Séries de Laurent

Exercice 13

Déterminer les séries de Laurent et les résidus à l'origine des fonctions suivantes :

1. $f(z) = \frac{1}{z}$
2. $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$
3. $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$

Correction ▼ [002832]

Exercice 14

Déterminer la série de Laurent à l'origine de la fonction analytique $\exp(\frac{1}{z})$, et son résidu à l'origine. En $z_0 \neq 0$ quel est le résidu de cette fonction ?

Correction ▼ [002833]

Exercice 15

Déterminer la partie singulière, le résidu, et le terme constant des séries de Laurent à l'origine pour les fonctions :

1. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$
2. $f(z) = \frac{1}{\sin z - \operatorname{sh} z}$
3. $f(z) = \frac{1}{z\sin(z)\operatorname{sh}(z)}$

Correction ▼ [002834]

Exercice 16

Déterminer les séries de Laurent de $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans chacune des trois couronnes ouvertes $0<|z|<1$, $1<|z|<2$, $2<|z|<\infty$, ainsi que les séries de Laurent de f aux points 0, 1, 2, et 3. Quels sont les résidus en $z=0$, $z=1$, $z=2$ et $z=3$?

Correction ▼ [002835]

5 Lacets et indices

Exercice 17

Montrer que tout lacet est homotopiquement trivial dans $\mathbb{C}$.

Correction ▼ [002836]

Exercice 18

Justifier les affirmations du polycopié relatives à l'invariance de l'indice d'un lacet par rapport à un point, lorsque l'on déforme continûment soit le lacet, soit le point. Montrer que lorsque γ est un lacet il existe R tel que $|z|>R \implies \mathrm{Ind}(\gamma,z)=0$.

Correction ▼ [002837]

Exercice 19

1. Soit $\gamma\colon[0,1]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ un lacet et soit $N\in\mathbb{Z}$ son indice par rapport à 0. En utilisant la notion de variation de l'argument, montrer qu'il existe une fonction continue $g:[0,1]\to\mathbb{C}$ telle que $\forall t\quad \gamma(t)=e^{g(t)}$ et $g(1)-g(0)=2\pi iN$. Montrer que toute autre fonction continue G avec $\forall t\quad \gamma(t)=e^{G(t)}$ est de la forme $g+2\pi ik$ pour un certain $k\in\mathbb{Z}$. On pose $h(t,u)=(1-u)\,2\pi iNt+ug(t)$ puis $H(t,u)=e^{h(t,u)}$. Montrer que pour chaque $u\in[0,1]$ l'application $t\mapsto H(t,u)$ est un lacet. En déduire que le lacet $c_N(t)=e^{2\pi i\,Nt}$ et γ sont homotopes dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
2. On considère le lacet obtenu en suivant d'abord c_N puis c_M. Montrer que ce lacet est homotope dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ au lacet c_{N+M} (il suffit de calculer son indice !).

Correction ▼ [002838]

Exercice 20

On considère un lacet $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (donc ne passant pas par l'origine). On suppose qu'il n'existe qu'un nombre fini de $t\in[a,b]$ avec $\gamma(t)\in\Delta=]-\infty,0[$. On les note $t_0<t_1<\cdots<t_N$. Pour simplifier on supposera que $\gamma(a)$ est sur Δ, donc $t_0=a$ et $t_N=b$. Montrer que pour $t=t_j-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ suffisamment petit, le signe μ_j de $\mathrm{Im}(\gamma(t_j-\varepsilon))$ ne dépend pas de ε, et de même pour le signe μ'_j de $\mathrm{Im}(\gamma(t_j+\varepsilon))$ (préciser ce que l'on fait pour $j=0$ et $j=N$).
Si $\mu_j=+$ et $\mu'_j=-$ on dit que γ traverse Δ en $t=t_j$ dans le sens direct, si $\mu_j=-$ et $\mu'_j=+$ on dit que γ traverse Δ en $t=t_j$ dans le sens rétrograde. Sinon on dit que γ touche mais ne traverse pas Δ. En utilisant la relation entre la fonction $\mathrm{Log}(\gamma(t))$ et la variation de l'argument de $\gamma(t)$ sur chaque intervalle $]t_j,t_{j+1}[$, prouver $\Delta_{\gamma_j}\arg(z)=\pi(\mu_{j+1}-\mu'_j)$ avec $\gamma_j=\gamma$ restreint à $[t_j,t_{j+1}]$.
En déduire que $\mathrm{Ind}(\gamma,0)$ est égal au nombre de valeurs de t (a et b ne comptent que pour un seul) pour lesquelles γ traverse Δ, comptées positivement si la traversée est directe, négativement si la traversée est rétrograde.
Dans la pratique vous pourrez utiliser n'importe quelle demi-droite issue de l'origine à la place de Δ à partir du moment où elle n'intersecte le lacet γ qu'en un nombre fini de points (si on n'impose pas au lacet d'être régulier, c'est-à-dire d'avoir un vecteur vitesse partout non nul, alors il peut rester figé en un même point un certain temps, et donc il faut modifier un petit peu la discussion ci-dessus qui suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de t pour lesquels $\gamma(t)$ est sur la demi-droite). [002839]

6 Résidus

Note : une notation telle que $\int_{|z|=R} f(z)\,dz$ est utilisée pour l'intégrale le long du cercle de rayon R, dans le sens **direct**.

Exercice 21

Justifier les formules suivantes : lorsque f présente en z_0 un pôle simple on a :

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

Lorsque f présente en z_0 un pôle d'ordre au plus N on a :

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(N-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{N-1}(z-z_0)^N f(z)$$

Correction ▼ [002840]

Exercice 22

1. Soit g une fonction analytique ayant un zéro simple en z_0, et f une autre fonction analytique définie dans un voisinage de z_0. Montrer
$$\operatorname{Res}(\frac{f}{g},z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}\,.$$
2. On suppose que g a un zéro d'ordre n : $g(z_0+h) = h^n(c_0+c_1h+\dots)$, $c_0\neq 0$, et l'on écrit $f(z_0+h) = a_0+a_1h+\dots$. Montrer :
$$\operatorname{Res}(\frac{f}{g},z_0) = e_{n-1}$$
avec e_0, e_1, ..., obtenus par la division suivant les puissances croissantes (comme dans les calculs de développement limités) :
$$\frac{a_0+a_1h+a_2h^2+\dots}{c_0+c_1h+c_2h^2+\dots} = e_0+e_1h+e_2h^2+\dots\,.$$

[002841]

Exercice 23

Soit $0<a<b<c$ et soit C le cercle de rayon r centré en l'origine, parcouru dans le sens direct. Calculer $\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}dz$ selon la valeur de r. On donnera deux preuves, soit en utilisant le théorème des résidus, soit en décomposant en éléments simples.

Correction ▼ [002842]

Exercice 24

Soit $\mathscr{R} = \{x_0\le x\le x_1, y_0\le y\le y_1\}$ un rectangle. En utilisant le théorème des résidus justifier la formule intégrale de Cauchy pour z dans l'intérieur du rectangle et f holomorphe sur le rectangle fermé :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathscr{R}}\frac{f(w)}{w-z}dw$$

Démontrer ce résultat de manière plus simple, directement à partir du théorème de Cauchy-Goursat pour les fonctions holomorphes sur les rectangles, en utilisant la fonction $w\mapsto (f(w)-f(z))/(w-z)$ (et aussi la notion d'indice d'un lacet). Dans le cas où z est à l'*extérieur* du rectangle $\mathscr{R}$, que vaut $\int_{\partial\mathscr{R}}\frac{f(w)}{w-z}dw$? [002843]

Exercice 25

Soit Ω un domaine, de bord le cycle $\partial\Omega$ orienté dans le sens direct. Soit f une fonction holomorphe sur $\overline{\Omega}$, soient z_1 et z_2 deux points de Ω. Que vaut

$$\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} \ ?$$

Qu'obtient-on pour $z_2 \longrightarrow z_1$, z_1 fixé ?

Correction ▼ [002844]

Exercice 26

Que vaut, en fonction de $R > 0$:

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{2z^2 - 5z + 2} \ ?$$

On précisera les valeurs exclues de R.

Correction ▼ [002845]

Exercice 27

Déterminer, C désignant tour à tour le cercle $|z-i| = 1$, ou le cercle $|z+i| = 1$, ou encore $|z| = 2$, parcourus dans le sens direct, les valeurs des intégrales :

$$\int_C \frac{1}{z^2+1}\,dz$$

Même question pour :

$$\int_C \frac{1}{z^3-1}\,dz \quad \text{et} \quad \int_C \frac{1}{z^4-1}\,dz \quad \text{et} \quad \int_C \frac{1}{z^5-1}\,dz$$

[002846]

Exercice 28

Que vaut $\int_{|z|=N} \tan(\pi z)\,dz$, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$?

Correction ▼ [002847]

Exercice 29

Déterminer pour A, B, C réels, avec $A^2 > B^2 + C^2$ la valeur de :

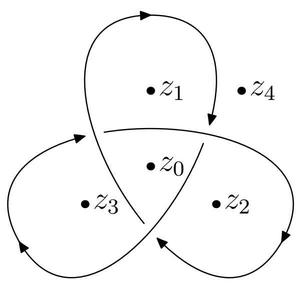
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A + B\sin\theta + C\cos\theta}$$

On aura intérêt, comme première étape, à poser $B = R\cos\phi$, $C = R\sin\phi$, mais on peut aussi se frotter plus directement au résidu (utiliser bien sûr $z = e^{i\theta}$ ou dans ce genre).

Correction ▼ [002848]

Exercice 30

On considère dans le plan complexe un chemin fermé paramétré γ qui parcourt la figure ci-dessus dans le sens indiqué.



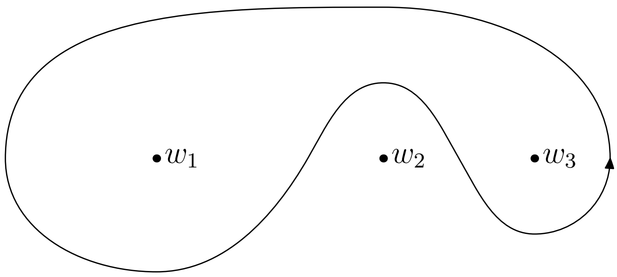
Pour $j=0,1,2,3,4$ on note

$$A_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_j} \quad \text{et} \quad B_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_j)^2}$$

Déterminer, en le justifiant, les valeurs de A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, et de B_0, B_1, B_2, B_3, B_4. On précisera aussi quel est le nom que l'on donne aux quantités données par les intégrales A_j, $j=0\dots4$. [002849]

Exercice 31

Soit γ le contour, parcouru dans le sens direct, dessiné ci-contre.



Déterminer (avec justification) en fonction de w_1, w_2, w_3 les intégrales suivantes :

$$A = \int_\gamma \frac{dz}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)}$$
$$B = \int_\gamma \sin(z)dz$$
$$C = \int_\gamma \frac{dz}{(z-w_1)^2(z-w_3)}$$

[002850]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $f(z) = \mathrm{Log}(z)$. Alors

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{z} = \frac{1}{z_0-(z_0-z)} = \frac{1}{z_0}\frac{1}{1-\frac{z_0-z}{z_0}} \\ &= \frac{1}{z_0}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{z_0^k}(z_0-z)^k \quad \text{pour} \quad |z-z_0|<|z_0|. \end{aligned}$$

Notons que $\{z \in \mathbb{C};\ |z-z_0| < |z_0|\} = D(z_0,|z_0|)$ est optimal car on ne peut prolonger $\mathrm{Log}(z)$ en 0. Le développement est :

$$f(z) = \mathrm{Log}(z_0) - \sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{kz_0^k}(z-z_0)^k.$$

En ce qui concerne la deuxième question, la réponse est NON. D'après le cours f coincide avec sa série de Taylor *si* $D(z_0,R) \subset \Omega$. Or, si $\mathrm{Re}(z_0) < 0$, ce n'est pas le cas et $D(z_0,|z_0|) \cap]-\infty,0[\neq \emptyset$. Le Log et la série de Taylor ne coincident pas dans $D(z_0,|z_0|) \cap \Omega$ puisque le Log ne peut être prolongé de manière continu dans aucun point de $]-\infty,0[$. Remarquons qu'ici $D(z_0,|z_0|) \cap \Omega$ n'est pas connexe ce qui est cruciale dans l'exercice 4.

Correction de l'exercice 2 ▲

On a $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}) = 0$ si et seulement si $e^{2i\pi z} = 1$ ce qui est le cas si et seulement si $z \in \pi\mathbb{Z}$. Soit $z_0 \in U = \mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Alors, le rayon de convergence de la séries de Taylor de f est

$$R = \mathrm{dist}(z_0,\pi\mathbb{Z}) = \min_{n\in\mathbb{Z}}|z_0-\pi n|.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Si $f(z)g(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, alors au moins une des fonctions f,g a un zéro non isolé.

Correction de l'exercice 4 ▲

Commençons donc par le contre-exemple en prenant $U = \Omega$, c'est à dire $U = \mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$, et $f = \mathrm{Log}$. Il suffit alors de choisir $z_1 = -1+i$ et $z_2 = -1-i$ et d'appliquer l'exercice 1. Supposons maintenant U convexe, notons $D_i = D(z_i,R_i)$, $i = 1,2$, et supposons que $V = D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Les conséquences immédiates de la convexité de U sont : (a) $U \cap D_1$ et $U \cap D_2$ sont connexes (et même convexes). (b) $[z_1,z_2] \subset U$ et donc $V \cap U$ est un ouvert non vide. Considérons g_1. Si $r > 0$ est suffisamment petit pour que $D(z_1,r) \subset U$, alors $f = g_1$ dans $D(z_1,r)$. Par le principe du prolongement analytique (ou celui des zéros isolés) on a $f = g_1$ dans le connexe $U \cap D_1$. C'est donc aussi vrai dans $V \cap U \subset D_1 \cap U$. Le même raisonnement s'applique à g_2 et donc $g_1 = g_2$ dans $V \cap U$. Encore une fois le principe du prolongement analytique assure donc que $g_1 = g_2$ dans V (qui est connexe).

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Soit $\phi(t,z) = \frac{z-1}{1+t(z-1)}$ et notons $D = \{|z-1| < 1\}$. Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $z \in D$ on a

   $$\phi(t,z) = (z-1)\sum_{k\geq 0}(-1)^k t^k (z-1)^k.$$

   Or $|(-1)^k t^k (z-1)^k| \leq |z-1|^k$. Si $0 < r < 1$, alors la série précédente converge normalement dans $D(1,r)$ ce qui permet d'avoir (cf. le polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol, chapitre 15, théorème 29)

   $$\int_0^1 \phi(t,z)dt = \sum_{k\geq 0}(-1)^k(z-1)^{k+1}\int_0^1 t^k dt = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\frac{(z-1)^{k+1}}{k+1}.$$

   Cette série est la série de Taylor de $\mathrm{Log}(z)$ en 1 qui coincide avec $\mathrm{Log}(z)$ dans le disque D. Par conséquent, $z \mapsto \int_0^1 \phi(t,z)dt$ et $z \mapsto \mathrm{Log}(z)$ coincident dans D. On conclut par prolongement analytique et en remarquant que $z \mapsto \int_0^1 \phi(t,z)dt$ est une fonction holomorphe dans Ω (cf. le polycopié 2005/2006 de J.-F. Burnol, chapitre 14, théorème 26). En ce qui concerne le reste R_N voici le calcul :

$$\begin{aligned} R_N(z) &= \int_0^1 \sum_{k\geq N}(-1)^k(z-1)^{k+1}t^k dt \\ &= (-1)^N \int_0^1 (z-1)^{N+1}t^N \sum_{k\geq 0}(-1)^k(z-1)^k t^k dt \\ &= (-1)^N(z-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{t^N}{1+t(z-1)}dt. \end{aligned}$$

2. Si $\mathrm{Re}(z) \geq \delta$, alors
$$|1+t(z-1)| \geq |\mathrm{Re}(1+t(z-1))| = |1+t\,\mathrm{Re}(z-1)| \geq \delta.$$
Par conséquent,
$$|R_N(z)| \leq |z-1|^{N+1}\int_0^1 \frac{t^N\,dt}{|1+t(z-1)|} \leq \frac{1}{\delta}\frac{|z-1|^{N+1}}{N+1}.$$
D'où la convergence uniforme.
3. Voir ci-dessus.
4. On a $z = 1+e^{i\phi} = (e^{i\frac{\phi}{2}}+e^{-i\frac{\phi}{2}})e^{i\frac{\phi}{2}} = 2\cos\frac{\phi}{2}e^{i\frac{\phi}{2}}$. D'où $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\phi}{2}$ et $r = |z| = 2|\cos\frac{\phi}{2}| = 2\cos\frac{\phi}{2}$. Comme :
$$\begin{aligned} \log(2\cos\frac{\phi}{2})+i\frac{\phi}{2} &= \mathrm{Log}(z) = \sum_{k\geq 1}(-)^{k-1}\frac{(z-1)^k}{k} = \\ &= \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cos(k\phi)+i\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin(k\phi) \end{aligned}$$
il suffit d'identifier les parties réelles et imaginaires pour en déduire les égalités demandées. La convergence uniforme résulte de la question 3 puisque
$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(1+e^{i\phi}) = 1+\cos\phi \geq 1+\cos(\pi-\varepsilon) = \delta > 0.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. C'est le principe du maximum.
2. La fonction $g(z) = f(z)f(-z)$ est nulle sur le cercle de rayon 1.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $z = e^{i\theta}$. Alors $|4z+3| = |e^{i\theta}(4+3e^{-i\theta})| = |\overline{4+3e^{i\theta}}| = |4+3z|$. Par le principe du maximum
$$|\Phi(z)| < 1 = \sup_\theta |\Phi(e^{i\theta})| \quad \text{pour tout} \quad z \in D.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Supposons qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ avec $F(z) \neq 0$ et notons $\alpha = |F(z)| > 0$. Si $n > 1$ tel que $\frac{1}{n} < \alpha$, alors le principe du maximum affirme que
$$|F(z)| < \frac{1}{n} < \alpha \quad \text{pour tout} \ |z| < n.$$
Contradiction.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit $g(z)=e^{f(z)}$. On a $|g(z)|=e^{\mathrm{Re}(f(z))}$. Par conséquent g est une fonction entière bornée. Elle est donc constante par d'Alembert-Liouville.

Correction de l'exercice 11 ▲

La formule de Cauchy pour $f^{(n+1)}(z)$ est

$$\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+2}}d\xi$$

où $C_R=\{|\xi|=R\}$. Pour les estimations suivantes, prenons $R>\min(2|z|,1)$. Comme $|\xi-z|\geq|\xi|-|z|=R-|z|\geq R/2$,

$$\frac{|f(\xi)|}{|(\xi-z)^{n+2}|}\leq M\frac{(1+R)^n}{(R/2)^{n+2}}\leq M\frac{(2R)^n}{(R/2)^{n+2}}=2^{2n+2}M\frac{1}{R^2}.$$

Ensemble avec la formule de Cauchy on a donc

$$\frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!}\leq\frac{1}{2\pi}\int_{C_R}2^{2n+2}M\frac{1}{R^2}|d\xi|=2^{2n+2}M\frac{1}{R}$$

pour n'importe quel $R>2|z|$. On vient de montrer que $f^{n+1}(z)=0$ pour tout $z\in\mathbb{C}$. Utilisons maintenant $g(z)=\frac{f(z)-P(z)}{z^{n+1}}$ où P est le polynôme de Taylor de f à l'origine à l'ordre n. On remarque d'abord que l'origine est zéro d'ordre $n+1$ de $f(z)-P(z)$ ce qui explique que g se prolonge holomorphiquement à l'origine. C'est donc une fonction entière pour laquelle on a

$$|g(z)|\leq\frac{C|z|^n}{|z|^{n+1}}=C\frac{1}{|z|}$$

pour un certain $C>0$ et pour z de module suffisamment grand. De nouveau, g est une fonction entière bornée, elle est donc constante (notre estimation donne même $g\equiv0$ et donc $f=P$).

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit $z=Re^{i\theta}$. Alors $|e^z|=e^{R\mathrm{Re}(e^{i\theta})}=e^{R\cos(\theta)}$. Pour $f(z)=z+e^z$, on a, pour θ tel que $\cos(\theta)\leq0$, $|f(z)|\geq R-e^{R\cos(\theta)}\geq R-1$. Si par contre $\cos(\theta)>0$ alors $|f(z)|\geq e^{R\cos\theta}-R$. Dans les deux cas

$$|f(Re^{i\theta})|\to\infty\quad\text{pour }\ R\to\infty.$$

Nos calculs n'impliquent pas $\lim_{|z|\to\infty}|f(z)|=\infty$! Comme en fait e^z n'est PAS un polynôme, on peut même affirmer que $\lim_{|z|\to\infty}|f(z)|=\infty$ est FAUX.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Le résidu est $a_{-1}=1$.
2. $f(z)=\frac{1}{1+z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kz^{2k}$ pour $|z|<1$. C'est une série entière car f est holomorphe dans le disque unité et $\mathrm{Res}(f,0)=0$.
3. $f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1+z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kz^{2k-1}=\frac{1}{z}-z+z^3$.....et $\mathrm{Res}(f,0)=0$

Correction de l'exercice 14 ▲

Comme $e^w=\sum_{n\geq0}\frac{w^n}{n!}$,

$$\exp(\frac{1}{z})=\sum_{n\geq0}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}=\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}z^n.$$

Par conséquent, $\mathrm{Res}(f,0)=1$. Sinon, si $z_0\neq0$, alors $\mathrm{Res}(f,z_0)=0$ par holomorphie de f dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Comme $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots = z(1+o(z))$,

$$f(-z) = \frac{1}{\sin(z)} = \frac{1}{z}(1+o(z))^{-1} = \frac{1}{z}(1+o(z)) = \frac{1}{z} + o(1).$$

Par conséquent f possède un pôle simple à l'origine (ce qui est évident puisque $\sin(z)$ possède un zéro simple à l'origine) et $\mathrm{Res}(f,0) = 1$. On l'obtient aussi par la formule de l'exercice 21 et le fait que l'origine est un pôle simple :

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin(z)} = 1.$$

La partie singulière de la série de Laurent est $\frac{1}{z}$ et le terme constant est 0.

2. On a $\sin(z) - \mathrm{sh}(z) = (z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)) - (z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)) = -\frac{z^3}{3} + O(z^7)$. D'où

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z) - \mathrm{sh}(z)} = -\frac{3}{z^3}(1+O(z^4)) = -\frac{3}{z^3} + O(z).$$

3. On obtient de manière analogue que

$$f(z) = \frac{1}{z \sin(z)\,\mathrm{sh}(z)} = \frac{1}{z^3} + O(z).$$

Correction de l'exercice 16 ▲

Observons tout d'abord que :

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1-z}.$$

On a

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n \quad \text{pour } |z| < 1$$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0} z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \quad \text{pour } |z| > 1.$$

De la même manière

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \quad \text{si } |z| < 2 \text{ et } \frac{1}{z-2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \quad \text{si } |z| > 2.$$

On en déduit les expressions des séries de Laurent en 0 dans les trois couronnes centrées à l'origine. En $z = 1$ et $z = 2$, f a des pôles simples. D'où

$$\mathrm{Res}(f,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = -1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Res}(f,2) = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = 1.$$

Déterminons encore la série de Laurent f en 1 :

$$f(z) = \frac{1}{z-1}\frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1}(-1)\sum_{n\geq 0}(z-1)^n = -\sum_{n=-1}^{\infty}(z-1)^n$$

pour $|z-1| < 1$.

Correction de l'exercice 17 ▲

Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un lacet quelconque. Posons

$$H(t,u) = u\gamma(t) \quad \text{pour} \quad t \in I \quad \text{et} \quad u \in [0,1].$$

C'est clairement une homotopie de lacets (voir la définition du cours !) telle que $H(t,1)=\gamma(t)$ et $H(t,0)=0$ pour tout $t\in I$.

Correction de l'exercice 18 ▲

Soit γ un lacet dans $\mathbb{C}$. Alors $\sup_{t\in I}|\gamma(t)| = R/2 < \infty$. Si $|z|>R$, la fonction $\xi \mapsto \frac{1}{\xi - z}$ est holomorphe dans le disque $D(0,R)$. Par conséquent,

$$\mathrm{Ind}(\gamma,z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = 0.$$

Remarquons que ceci implique que $\mathrm{Ind}(\gamma,z)=0$ pour tout z dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Le calcul de l'indice de c_N est évident. L'affirmation sur l'existence de g continue telle que $\gamma = e^g$ et $g(1)-g(0)=2\pi i N$ est le contenu du polycopié de J.-F. Burnol 2005/2006, chapitre 30. Le reste est laissé au lecteur.

Correction de l'exercice 21 ▲

Si f a un pôle d'ordre N en z_0, on a, avec $a_{-N}\neq 0$,

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \ldots$$

D'où

$$(z-z_0)^N f(z) = a_{-N} + \ldots + a_{-1}(z-z_0)^{N-1} + a_0(z-z_0)^N + \ldots.$$

ce qui donne

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{N-1}\left[(z-z_0)^N f(z)\right] = (N-1)!\,a_{-1} + o(z-z_0).$$

La formule en résulte en faisant tendre z vers z_0. Le cas $N=1$ est important pour la pratique. Notons que, si f a un pôle simple en z_0, cette fonction s'écrit $f=h/g$ au voisinage de z_0 où h,g sont des fonctions holomorphes au voisinage de z_0 telles que h ne s'annule pas en z_0 et g a un zéro simple en z_0, i.e. $g(z_0)=0$ et $g'(z_0)\neq 0$. Comme

$$\mathrm{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = h(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{g(z)-g(z_0)}$$

on a aussi la formule utile

$$\mathrm{Res}(f,z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}. \tag{1}$$

Correction de l'exercice 23 ▲

La fonction $f(z) = 1/(z-a)(z-b)(z-c)$ est holomorphe dans le disque $D(0,a)$. Par conséquent l'intégrale est nulle si $r<a$. Par le théorème des résidus,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}dz \quad &= \quad \mathrm{Res}(f,a) \quad , \quad \mathrm{Res}(f,a)+\mathrm{Res}(f,b) \quad \mathit{ou} \\ & \quad\quad \mathrm{Res}(f,a)+\mathrm{Res}(f,b)+\mathrm{Res}(f,c)\end{aligned}$$

si $a<r<b$, $b<r<c$ ou $c<r$. Le calcul de ces résidus se fait par la formule de l'exercice 21 puisque tous les pôles sont simples :

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{(a-b)(a-c)} \quad , \quad \mathrm{Res}(f,b) = \frac{1}{(b-a)(b-c)}$$
$$\mathit{et} \quad \mathrm{Res}(f,c) = \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

On en déduit façilement la valeur de l'intégrale dans les trois cas. En ce qui concerne le calcul de cette intégrale via la décomposition en éléments simples remarquons juste que

$$\int_C \frac{1}{z-d}\,dz$$

vaut $2i\pi$ si d est à l'intérieur de C et 0 si d est à l'extérieur.

Correction de l'exercice 25 ▲

On a

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} &= \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} - \sum_{j=1}^N \int_{\gamma_j} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} \\
&= 2i\pi\Big(\mathrm{Res}(f,z_1)+\mathrm{Res}(f,z_2)\Big) = 2i\pi\Big(\frac{f(z_1)}{z_1-z_2}+\frac{f(z_2)}{z_2-z_1}\Big).
\end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{z_2\to z_1} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_1)(z-z_2)} = 2i\pi f'(z_1).$$

Correction de l'exercice 26 ▲

Analogue à l'exercice 23

Correction de l'exercice 28 ▲

Comme $\tan(\pi z) = \frac{\sin(\pi z)}{\cos(\pi z)}$ cette fonction est une fonction méromorphe de $\mathbb{C}$ ayant que des pôles simples en $1/2 \bmod 1$. En effet, $\cos(w) = 0$ si et seulement si $w = \pi/2 \bmod \pi$ et $\cos'(\pi/2+k\pi) \neq 0$. Notons $z_k = 1/2+k$, $k \in \mathbb{Z}$. La formule (1) s'applique et donne

$$\mathrm{Res}(\tan(\pi z), z_k) = \frac{\sin(\pi z_k)}{-\pi\sin(\pi z_k)} = -\frac{1}{\pi}.$$

Par conséquent :

$$\int_{|z|=N} \tan(\pi z)\,dz = 2i\pi 2N\Big(-\frac{1}{\pi}\Big) = -4iN.$$

Correction de l'exercice 29 ▲

Si $A = R\cos(\Phi)$ et $B = R\sin(\Phi)$ on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A+B\sin(\theta)+C\cos(\theta)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{A+R\sin(\theta+\Phi)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{A+R\sin(\alpha)}.$$

Pour trouver la valeur de cette dernière intégrale posons $z = e^{i\alpha}$. Alors $d\alpha = -i\frac{dz}{z}$ et

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{A+R\sin(\alpha)} = \int_{|z|=1} \frac{-i\,dz}{z(A+R\frac{z-\bar{z}}{2i})} = \int_{|z|=1} \frac{2dz}{Rz^2+2iAz-R}.$$

Le dénominateur de cette dernière expression s'annule en

$$z^\pm = \frac{-2iA \pm \sqrt{-4A^2+4R^2}}{2R} = -i\left(\frac{A}{R} \mp \sqrt{\left(\frac{A}{R}\right)^2-1}\right)$$

Un calcul élémentaire montre que seulement la racine $z^{+} = -i\left(\frac{A}{R} - \sqrt{\left(\frac{A}{R}\right)^2 - 1}\right)$ est dans le disque unité ouvert pourvu que $A > 0$ (le cas $A < 0$ est similaire). Il s'ensuit par le théorème du résidu que

$$\frac{1}{2\pi} I = i\frac{2}{R}\frac{1}{z^{+} - z^{-}} = \frac{1}{R\sqrt{\left(\frac{A}{R}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 - R^2}}.$$
