République du Cameroun
Paix – Travail – Patrie

Université de Yaoundé I
Sapienta – Collativia – Cognitio

Ecole Nationale Supérieure Polytechnique
Département de Mathématiques et Sciences Physiques

Republic of Cameroon
Peace – Work – Fatherland

University of Yaoundé I
Sapienta – Collativia – Cognitio

National Advanced School of Engineering
Department of Mathematics and Physical Sciences

EXPOSE D'ELECTROCINETIQUE

Transfert maximal de puissance : Adaptation d'impédance

Exposé réalisé par :

DONCHI KAMGA Isaac Christ (MSP II)

Examinateur : Dr TCHOMGO

Année académique : 2020-2021

Sommaire

Introduction

« Rien ne se perd, rien ne crée, tout se transforme » ce principe énoncé par Lavoisier garantie effectivement la conservation de la matière dans les réactions chimiques. Mais en électricité on observe que l'énergie électrique reçu par un récepteur est toujours inferieur à l'énergie électrique de la source. Où est donc passée l'énergie manquante ? La loi de joule nous dit que cette énergie manquante est transformée en chaleur dans le générateur, dans le circuit de transport, et dans la résistance du récepteur. Dans une situation ou on veut transporter l'énergie électrique, ou transmettre un signal (télécommunication) ou s'simplement alimenter un appareil électronique dont le but n'est pas de produire de la chaleur, ce déficit d'énergie est un problème majeur tant sur le plan économique que sécuritaire, ou climatique. Il sera donc question pour nous dans cet exposé de présenter les solutions mise en place pour minimiser ces pertes ou réciproquement maximiser la puissance transférée tout en insistant sur la notion d'adaptation d'impédances.

I. Généralité

1. Impédance

a) Définition

Lorsqu'un dipôle passif est alimenté par une source de tension sinusoïdale e(t), il est parcouru par un courant i(t) sinusoïdal dont l'amplitude I_0 peut être déterminée par l'équation :

$E_0 = Z.I_0$ ou encore $E_{eff} = Z.I_{eff}$

Où Z représente **l'impédance** (Ω) du dipôle. Cette équation traduit le fait que la loi d'ohm s'applique en régime sinusoïdal à condition de considérer les amplitudes des grandeurs électriques.

- Modèle complexe d'un circuit en régime sinusoïdal
  En considérant une grandeur électrique sinusoïdale u(t), on peut écrire :

  $$u(t) = U_{eff}\sqrt{2}\cos(wt+\varphi) = R[U_{eff}\sqrt{2}\cos(wt+\varphi) + jU_{eff}\sqrt{2}\sin(wt+\varphi)]$$

  $$= R[U_{eff}\sqrt{2}e^{j(wt+\phi)}]$$

  On transpose alors la plupart du temps le schéma réel du circuit sous la forme d'un modèle dit complexe, dans lequel les grandeurs sont remplacées par leurs formes complexes notées U en gras.
  Cette forme complexe est issue de l'association, à la grandeur électrique réelle u(t), de la fonction complexe $U_{eff}\sqrt{2}e^{j(wt+\phi)}$.
  Comme dans un circuit, toutes les grandeurs sont sinusoïdales de même pulsation que la source et que chacune de ces

grandeurs posséde une valeur efficace, on retiendra l'association suivante :

$$U(t) \rightarrow \mathbf{U} = U_{eff}e^{j(wt)}]$$

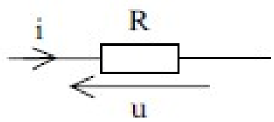
Dans ce modèle (qui n'est rien d'autre qu'une représentation théorique du circuit), tout dipôle linéaire possédé une impédance dite complexe Z en gras = R + jX où R représente sa résistance et X sa réactance.
Le module de Z en gras, noté Z correspond à l'impédance réelle telle qu'elle est décrite dans le paragraphe précèdent.

On a : $Z = |\mathbf{Z}| \leftrightarrow \mathbf{Z} = Z\,e^{j(\arg(Z))}$

b) Dipôles passifs de base

i. Résistance

- Symbole
  Tension u et courant i :



- Loi d'Ohm

  $$u = Ri$$

- Résistivité de quelque conducteur

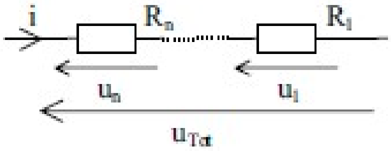
Résistivité à T° ambiante	Conductivité (ohm/m) sensiblement égale
Argent (Ag)	$1,6.10^{-8}$
Cuivre (Cu)	$1,7.10^{-8}$
Or (Au)	$2,3.10^{-8}$
Aluminium (Al)	$2,6.10^{-8}$

- Résistance d'un conducteur filiforme homogène. L est la longueur du conducteur, S sa section et ro la résistivité du matériau

  $R = \rho l/S$ Unités : ohm mètre
- Conductivité mettre le symbole gamma ici

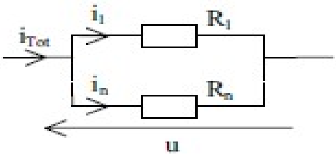
  $\gamma = 1/\rho$ Unités S/m
- Conductance (exprimé en siemens)

  $G = 1/R$
- Mise en série



$$R_{Equ} = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

- Mise en parallèle



$$\frac{1}{R_{Equ}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \quad \text{ou} \quad G_{Equ} = \sum_{k=1}^{n} G_k$$

- Variation linéaire : Coefficient de température

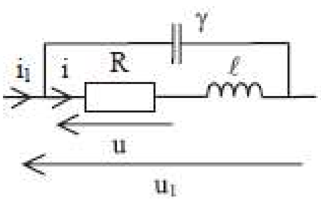
  En supposant la variation linéaire, la résistance R à la température T s'exprime par

$$R = R_N [1 + TC1\,(T - T_N)]$$

Où R_N est la résistance mesurée à la température, et TC1 le coefficient linéaire de température (constant)

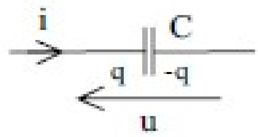
- Schéma équivalent aux fréquences élevée

  L est l'inductance interne et des connexions, et ɣ la capacité interne et des connexions.



$$\underline{Z}_{(HF)} = \frac{R + j\ell\omega}{1 + jR\gamma\omega + j^2\,\ell\gamma\omega^2}$$

- Symbole (convention récepteur)
  Tension u, courant i et charge q



- Relation entre la charge et la tension

$$q = Cu$$

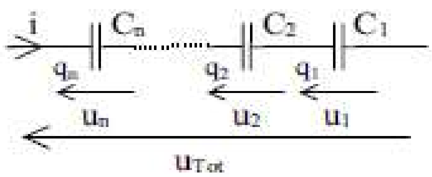
- Relation entre l'intensité et la tension

$$i = C\frac{du}{dt}$$

- Capacité de quelques configurations particulières

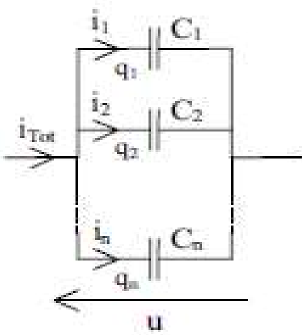
Capacité	Formule	Commentaires
d'un condensateur plan	$C = \varepsilon\frac{S}{d}$	S : aire commune aux parties d'armatures en regard d : distance entre les armatures
d'une sphère	$C = 4\pi\varepsilon r$	r : rayon de la sphère
de deux sphères concentriques	$C = \frac{4\pi\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}$	r_1 et r_2 : rayons des sphères ($r_2 > r_1$)
de deux cylindres concentriques	$C = \frac{2\pi\varepsilon\ell}{\ln(r_2/r_1)}$	r_1 et r_2 : rayons des cylindres ($r_2 > r_1$) ℓ : longueur des cylindres

- Mise en série



$$\frac{1}{C_{Equ}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k}$$

- Mise en parallèle



$$C_{Equ} = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

- Energie emmagasinée

$$w = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} q u = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

- Régime sinusoïdal

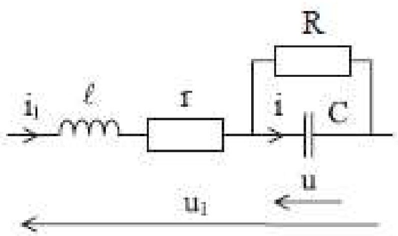
Loi « d'Ohm »	$\underline{U} = \underline{Z_C}\ \underline{I}$
Impédance complexe	$\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$
Module	$Z_C = \lvert \underline{Z_C} \rvert = \frac{\lvert \underline{U} \rvert}{\lvert \underline{I} \rvert} = \frac{U_{Max}}{I_{Max}} = \frac{U_{Eff}}{I_{Eff}} = \frac{1}{C\omega}$
Réactance	$X_C = \frac{-1}{C\omega}$
Déphasage de u par rapport à i	$\varphi_C = \operatorname{Arg}(\underline{Z_C}) = \theta_U - \theta_I = \frac{-\pi}{2}$

- Variation linéaire coefficient : coefficient de température
  En supposant une variation linéaire, la capacité C à la température T s'exprime par

$$C = C_N [1 + TC1 (T - T_N)]$$

Où C_N est capacité mesurée à la température T_N, et TC1 le coefficient linéaire de température (constant)

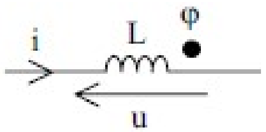
- Schéma équivalent aux fréquences élevées
  l est ici l'inductance interne de construction et des connexions, r la résistance des connexions et des armatures, et R la résistance d'isolement du diélectrique et du boitier.



$$\underline{Z} = r + j\ell\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

iii. Bobine

- Symbole



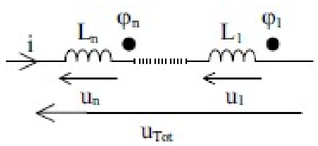
- Relation entre la tension et l’intensité

$$u = L\frac{di}{dt}$$

- Inductance de quelque configuration particulière

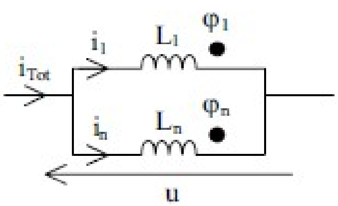
Inductance	Formule	Commentaires
d’un solénoïde « long »	$L = \mu n^2 \frac{S}{\ell}$	n : nombre de spires S : section du solénoïde ℓ : longueur du solénoïde
d’une bobine torique	$L = \mu n^2 \frac{S}{2\pi r}$	n : nombre de spires S : section du tore r : rayon moyen du tore
Unités	$H = H/m\,\frac{m^2}{m}$	

- Mise en série



$$L_{Equ} = \sum_{k=1}^{n} L_k$$

- Mise en parallèle



$$\frac{1}{L_{Equ}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{L_k}$$

- Energie

$$w = \frac{1}{2} L i^2$$

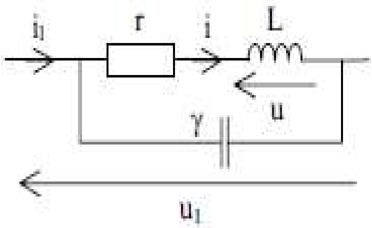
- Régime sinusoïdale

Loi « d'Ohm »	$\underline{U} = \underline{Z_L}\ \underline{I}$
Impédance complexe	$\underline{Z_L} = jL\omega$
Module	$Z_L = \lvert \underline{Z_L} \rvert = \frac{\lvert \underline{U} \rvert}{\lvert \underline{I} \rvert} = \frac{U_{Max}}{I_{Max}} = \frac{U_{Eff}}{I_{Eff}} = L\omega$
Réactance	$X_L = L\omega$
Déphasage de u par rapport à i	$\varphi_L = \mathrm{Arg}\,(\underline{Z_L}) = \theta_U - \theta_I = \frac{+\pi}{2}$

- Coefficient de température : variation linéaire
  En supposant la variation linéaire, l'inductance L à la température T s'exprime par

$$L = L_N\,[1 + TC1\,(T - T_N)]$$

- Schéma équivalent aux fréquences élevé
  R est la résistance série du fil constituant le bobinage et les connexions et ɣ la capacité répartie équivalente à l'ensemble des capacités entre spires et de la capacite entre connexions.

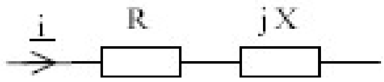


$$\underline{Z} = \frac{r + jL\omega}{1 + jr\gamma\omega + j^2 L\gamma\omega^2}$$

2. Puissance

- Puissance instantanée

  Soit le dipôle linéaire réactif alimenté par un courant sinusoïdal



On a $i = I_{Max} \sin(\omega t + \varphi_{0,i})$ et $u = U_{Max} \sin(\omega t + \varphi_{0,u})$

A ces grandeurs temporelles, on associe les fonctions complexes :

$$\underline{i} = I_{Max}\, e^{j(\omega t + \varphi_{0,i})} \quad \text{et} \quad \underline{u} = U_{Max}\, e^{j(\omega t + \varphi_{0,u})}$$

La puissance instantanée est :

$$p = ui = \mathrm{Im}(\underline{u})\ \mathrm{Im}(\underline{i}) = \frac{-1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{u}\,\underline{i} - \underline{u}\,\bar{\underline{i}}\right) \quad \text{avec} \quad \underline{u} = (R + jX)\ \underline{i}$$

Tout calcul fait, on obtient :

$$p = \frac{RI_{Max}^2}{2}\left[1 - \cos[2(\omega t + \varphi_{0,i})]\right] + \frac{XI_{Max}^2}{2}\ \sin[2(\omega t + \varphi_{0,i})]$$

Ainsi, la puissance instantanée (p) est la somme d'une puissance transmise à la résistance, appelée puissance active instantanée (p_A), et d'une puissance transmise à la réactance, appelée puissance réactive instantanée (p_R). On écrit :

$$p = p_A + p_R$$

Avec

$$p_A = P\ \left[1 - \cos[2(\omega t + \varphi_{0,i})]\right] \quad \text{où} \quad P = \frac{RI_{Max}^2}{2}$$

$$p_R = Q\ \sin[2(\omega t + \varphi_{0,i})] \quad \text{où} \quad Q = \frac{XI_{Max}^2}{2}$$

On appelle P puissance active et Q puissance réactive

- Puissance moyenne. Par définition :

$$P_{Moy} = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (p_A + p_R)\,dt$$

La valeur moyenne d'une fonction sinusoïdale étant nulle, on obtient ;
P_{MOY} = P (La puissance moyenne est égale à la puissance active)

- Formule et relation

Puissance	Unité	Formules	Relations
apparente complexe	volt-ampère (VA)	$\underline{S} = \frac{1}{2}\underline{U}\,\underline{I}^* = U_{Eff}I_{Eff}e^{j\varphi}$	$\underline{S} = P + jQ$
active ou moyenne	watt (W)	$P = U_{Eff}I_{Eff}\cos(\varphi)$ $= RI_{Eff}^2$	$P = \mathrm{Re}(\underline{S})$ $P = P_{Moy}$
réactive	volt-ampère -réactif (var)	$Q = U_{Eff}I_{Eff}\sin(\varphi)$ $= XI_{Eff}^2$	$Q = \mathrm{Im}(\underline{S})$ $Q = P\tan(\varphi)$
apparente	volt-ampère (VA)	$S = U_{Eff}I_{Eff}$	$S = \lvert\underline{S}\rvert = \sqrt{P^2+Q^2}$

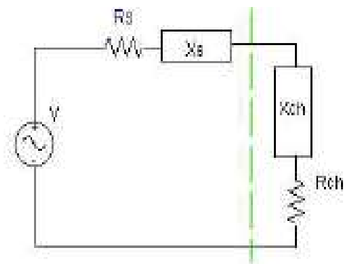
- Puissance des dipôles linéaires élémentaires

Dipôle élémentaire	Puissance active	Puissance réactive
R	$P = RI_{Eff}^2 = \frac{U_{Eff}^2}{R}$	0
L	0	$Q = L\omega I_{Eff}^2 = \frac{U_{Eff}^2}{L\omega}$
C	0	$Q = \frac{-I_{Eff}^2}{C\omega} = -C\omega U_{Eff}^2$

- Interprétation physique
  A la puissance active correspond une énergie active qui est absorbé et transformée dans le récepteur en énergie thermique, mécanique, chimique, etc.

  A contrario, à la puissance réactive correspond une énergie réactive qui va périodiquement de la source vers le récepteur puis du récepteur vers la source, et ainsi de suite sans jamais être absorbé par le récepteur.
  L'existence d'une puissance réactive conduit à une augmentation du courant dans le générateur et la ligne alimentant le récepteur. Cette augmentation engendre un surcroit de perte et nécessite un sur dimensionnement des moyens de transport. La puissance apparente est un élément de dimensionnement de la ligne et du générateur. Pour une puissance active donnée, plus le facteur de puissance est faible et plus le courant est élevé. C'est pourquoi ENEO impose un facteur de puissance élevé et pénalise financièrement les consommateurs d'Energie réactive.

3. Théorie de la puissance maximale



Pour maximiser la puissance transférée (c'est-à-dire, la puissance dans la charge) il faut adapter les impédances. Pour réaliser cette adaptation, on commence par compenser la partie réactive de l'impédance de la source .il faut pour cela que :

$$X_{ch} = -X_s$$

Puis, il faut que la partie résistive R_{ch} de l'impédance de la charge soit égale à la partie résistive de l'impédance de la source :

$$R_{ch} = R_s$$

En langage mathématique, les deux impédances sont conjuguées.
Dans ce cas, la puissance dissipée dans la résistance de charge est :

$$P_{max} = \frac{V_{eff}^2}{4R_s}$$

Il faut remarquer que la même puissance est alors dissipée dans la résistance de la source (le rendement est de 50%)

démonstration

En notation complexe, le module du courant $|I|$ parcourant le circuit est :

$$|I| = \frac{|V|}{|Z_g + Z_{ch}|}$$

Avec $Z_g = R_g + jX_g$
$Z_{ch} = R_{ch} + jX_{ch}$

La puissance moyenne dissipée par la charge s'écrit :

$$P_{ch} = I_{rms}^2 R_{ch} = \frac{1}{2}|I|^2 R_{ch} = \frac{1}{2}\left(\frac{|V|}{|Z_g + Z_{ch}|}\right)^2 R_{ch} = \frac{1}{2}\frac{|V|^2 R_{ch}}{(R_g + R_{ch})^2 + (X_g + X_{ch})^2}$$

On peut calculer les valeurs de R_{ch} et X_{ch} (avec V_g, R_g, et X_g fixés) pour lesquelles l'expression est un maximum, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{R_{ch}}{(R_g + R_{ch})^2 + (X_g + X_{ch})^2}$$

est maximal. Le terme des réactances peut facilement être minimisé :

$$X_S = -X_{ch}$$

L'équation se simplifie en :

$$P_{ch} = \frac{1}{2}\frac{|V|^2 R_{ch}}{(R_S + R_{ch})^2} = \frac{V_{rms}^2}{R_S^2/R_{ch} + 2R_S + R_{ch}}$$

Nous pouvons calculer la valeur de R_{ch} pour laquelle le dénominateur

$$R_S^2/R_{ch} + 2R_S + R_{ch}$$

est minimal.

$$\frac{d}{dR_{ch}}\left(R_S^2/R_{ch} + 2R_S + R_{ch}\right) = -R_S^2/R_{ch}^2 + 1 = 0$$

$$R_S^2/R_{ch}^2 = 1$$

ou

$$R_S = R_{ch}$$

car les résistances sont positives. La seconde dérivation

$$\frac{d^2}{dR_{ch}^2}\left(R_S^2/R_{ch} + 2R_S + R_{ch}\right) = 2R_S^2/R_{ch}^3$$

est positive pour des valeurs de R_S et R_{ch} positives, donc le dénominateur a un minimum, et P_{ch} est un maximum, lorsque

$$R_S = R_{ch}$$

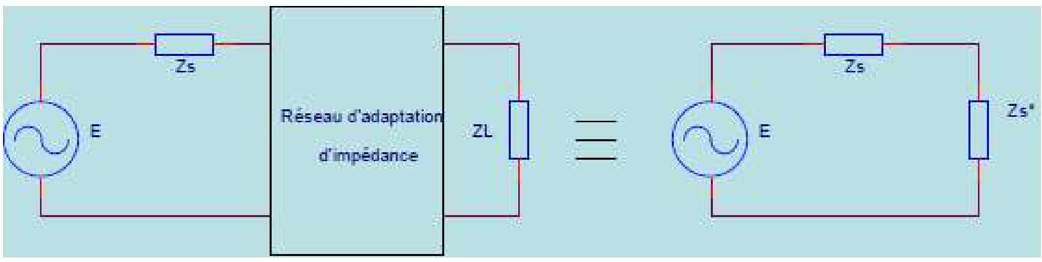
En conclusion on a

- $R_{ch} = R_S$
- $X_{ch} = -X_S$

qui peuvent être écrits comme complexes conjugués :

$$Z_S = Z_{ch}^*$$

Comment transférer la puissance maximale lorsque les impédances de source et de charge sont quelconques ?



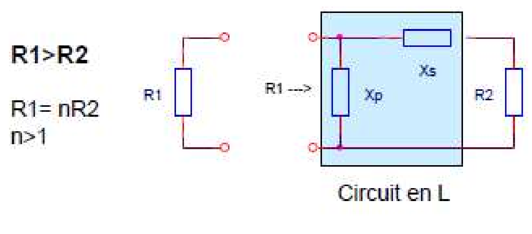
Le but de l'adaptation d'impédance ou plus précisément du réseau d'adaptation est de transformer l'impédance de charge Z_L en une impédance Z_S^* conjuguée de celle de la source

II. Enjeux de l'adaptation d'impédance

- D'après de le rapport annuel d'ENEO de 2017 les pertes transport s'élevé à 6.42% et le cout de cette énergie perdue revient à L'entreprise de transport et de distribution il est donc important pour celle-ci de s'assurer que la puissance transmise soit aussi maximale que possible

III. Solutions envisageables

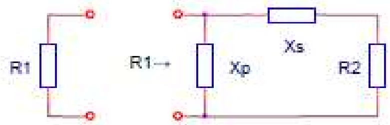
1. Adaptation d'impédance : réseau en L



Le circuit en L se compose de deux réactances X_p(shunt) et X_s (série). La branche parallèle (shunt) du L dit toujours se situer du coté de la résistance la plus forte

Les réactances X_s et X_p sont de signe opposé, si l'une est un condensateur, l'autre est une bobine et vice vers

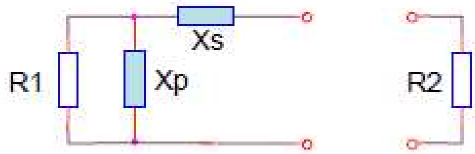
- Calcul de X_S et X_p



Impédance vue de R1 $\quad R_1 = jX_p \,//\, (R_2 + j\,X_s)$

$$R_1 = \frac{jX_P(R_2+jX_S)}{R_2+j(X_P+X_S)} = \frac{R_2X_P^{\,2}}{R_2^{\,2}+(X_P+X_S)^2} + j\frac{R_2^{\,2}X_P + X_PX_S(X_p+X_S)}{R_2^{\,2}+(X_P+X_S)^2}$$

R1 est réelle (résistance pure)



9

Impédance vue de R2 $\quad$ *R2= jXp // (R1) + j Xs*

$$R_2 = \frac{jR_1X_P + jX_S(R_1+jX_P)}{R_1+jX_P}$$

$$R_2 = \frac{R_1X_P^{\,2} + j\left(R_1^{\,2}(X_P+X_S)+X_P^{\,2}X_S\right)}{R_1^{\,2}+X_P^{\,2}}$$

R2 est réelle (résistance pure)

$$R_1^{\,2}(X_P+X_S)+X_P^{\,2}X_S = 0 \qquad R_2 = \frac{R_1X_P^{\,2}}{R_1^{\,2}+X_P^{\,2}}$$

$$R_2 = \frac{R_1X_P^{\,2}}{R_1^{\,2}+X_P^{\,2}} \longrightarrow X_p^2 = \frac{R_2R_1^2}{R_1 - R_2}$$

$$\boxed{X_p = \mp R_1\sqrt{\frac{R_2}{R_1-R_2}}}$$

Ou encore si n = R1/R2 n>1

$$\boxed{X_P = \mp R_1 \frac{1}{\sqrt{n-1}}}$$

$$R_1^{\,2}(X_P+X_S)+X_P^{\,2}X_S = 0$$

$$R_1^{\,2} = -\frac{X_P^{\,2}X_S}{X_P+X_S}$$

$$R_2^{\,2} = -X_S(X_P+X_S)$$

$(R_1R_2)^2 = (X_PX_S)^2$

Xp et Xs de signe opposé

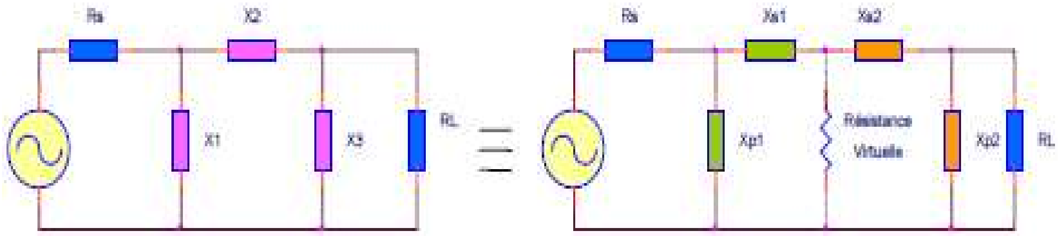
$R_1R_2 = -X_PX_S$

$$\boxed{X_S = \mp\sqrt{R_2(R_1 - R_2)}}$$

Ou encore si n = R1/R2 n>1

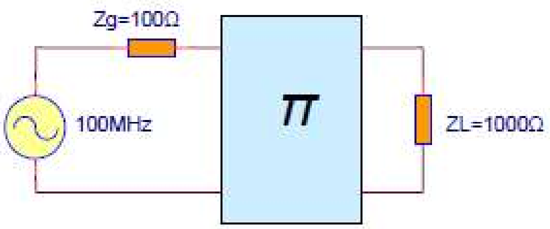
2. Adaptation d’impédance : Réseau en π

Les réseaux d’adaptation en π permettent la réalisation de circuits d’adaptation d’impédance dont le facteur de qualité Q peut prendre n’importe quelle valeur à condition qu’elle soit supérieure à celle du réseau en L assurant la même fonction. Q π > QL



Le réseau en TT peut être décomposé en deux réseaux en L montés en cascades et procurant une adaptation à une résistance virtuelle RV située entre les deux

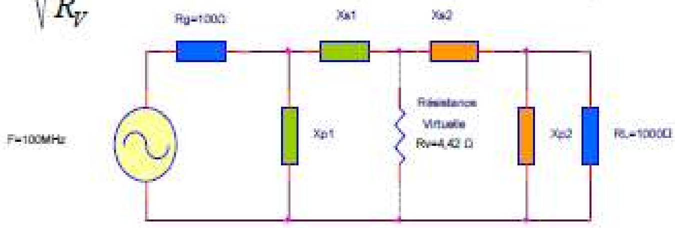
Considérons l’exemple suivant :



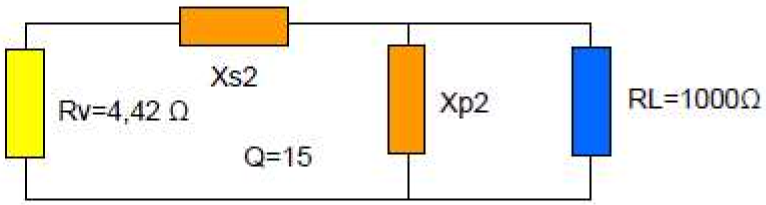
On veut Q=15

$$Q_L = \mp\sqrt{n-1} = \mp\sqrt{9} = \mp 3 \qquad Q\pi > QL \quad \underline{\textit{faisable}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{R_L}{R_V} - 1} \qquad RV = RL/(Q^2+1) = 1000/(15^2+1) = 4{,}42\Omega$$



Coté charge on a :

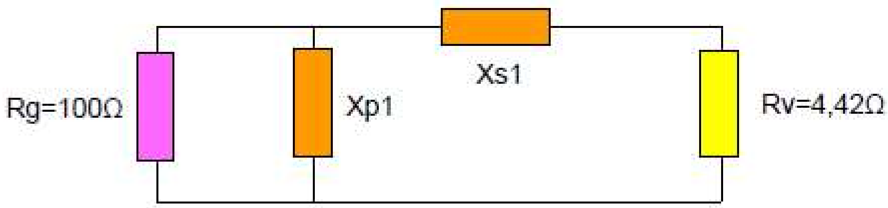


$X_{P2} = R_P/Q_P = R_L/Q = 1000/15 = 66{,}7\Omega$

$X_{S2} = Q_S R_S = QR_V = 15.4{,}42 = 66{,}3\Omega$

2 solutions:

(

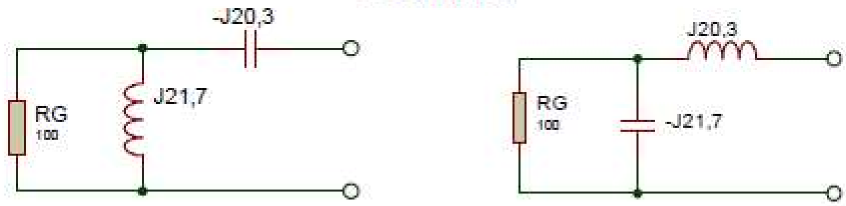


$$Q' = \sqrt{\frac{R_g}{R_v} - 1} = \sqrt{\frac{100}{4{,}42} - 1} = 4{,}6$$

Xp1 = Rg/Q' = 100/4,6 = 21,7Ω

Xs1 = Q'Rv = 4,6.4,42 = 20,3Ω

2 solutions:



Conclusion

Parvenu au terme de ce travail qui portait sur le problème de maximisation de puissance transféré d'une source à une charge, nous avons présenté les solutions mises en œuvre. Celle-ci s'appuie sur le théorème de transfert maximal de puissance. Nous notons que ces solutions agissent sur la topologie du réseau et la nature des composant du réseau. Dans une situation ou la topologie du réseau ou la nature des composants sont des constantes serait ce possible d'agir plutôt sur les propriétés physico chimiques des matériaux qui constituent les composant du réseau car en effet nous avons vu que les valeurs des inductance et capacité dépendent des propriétés physico-chimiques des matériaux qui les constituent

Bibliographie

1. Manuel de Génie électrique DUNOD (Guy Chateigner, Michel Boës, Daniel Bouix, Jacques Vaillant, Daniel Verkindère)
2. Adaptation d'impédance (Joël Redoutey -2009)
3. Wikipédia
4. Rapport annuel ENEO