Injection, surjection, bijection

Exercice 1

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2-1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000185]

Exercice 2

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = id$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000199]

Exercice 3

Soit $f : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ telle que $f(x) = x^2-1$. f est-elle bijective ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000202]

Exercice 4

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n+1$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$
4. $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000190]

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$. Changer les ensembles de départ et d'arrivée afin que (la restriction de) f devienne bijective.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000200]

Exercice 6 Exponentielle complexe

Si $z = x+iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $e^z = e^x \times e^{iy}$.

1. Déterminer le module et l'argument de e^z.
2. Calculer $e^{z+z'}, e^{\bar{z}}, e^{-z}, (e^z)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
3. L'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z$, est-elle injective ?, surjective ?

Correction ▼ Vidéo ■ [000197]

Exercice 7

On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g \circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective.}$$

Montrer que :

$$\big(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}\big) \Leftrightarrow \big(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000193]

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?

2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [000191]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Prouver que l'égalité est fausse.

Indication pour l'exercice 2 ▲

id est l'application identité définie par $id(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$. Donc $f \circ f = id$ signifie $f \circ f(c) = x$ pour tout $x \in [0,1]$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Montrer que f est injective et surjective.

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. f est injective mais pas surjective.
2. g est bijective.
3. h aussi.
4. k est injective mais par surjective.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Montrer que la restriction de f définie par : $[0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}$, $t \mapsto e^{it}$ est une bijection. Ici $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Pour la première assertion le début du raisonnement est : "supposons que $g \circ f$ est injective, soient $a, a' \in A$ tels que $f(a) = f(a')$",... à vous de travailler, cela se termine par "...donc $a = a'$, donc f est injective."

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. f n'est ni injective, ni surjective.
2. Pour $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $f(x) = y$.
3. On pourra exhiber l'inverse.

Correction de l'exercice 1 ▲

Si $f \circ g = g \circ f$ alors
$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; f \circ g(x) = g \circ f(x).$$
Nous allons montrer que c'est faux, en exhibant un contre-exemple. Prenons $x = 0$. Alors $f \circ g(0) = f(-1) = -2$, et $g \circ f(0) = g(1) = 0$ donc $f \circ g(0) \neq g \circ f(0)$. Ainsi $f \circ g \neq g \circ f$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ alors $f(x) = x$ donc $f \circ f(x) = f(x) = x$. Soit $x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}$ alors $f(x) = 1 - x$ donc $f \circ f(x) = f(1-x)$, mais $1 - x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q}$ (vérifiez-le !) donc $f \circ f(x) = f(1-x) = 1 - (1-x) = x$. Donc pour tout $x \in [0,1]$ on a $f \circ f(x) = x$. Et donc $f \circ f = id$.

Correction de l'exercice 3 ▲

- f est injective : soient $x, y \in [1, +\infty[$ tels que $f(x) = f(y)$:
$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Rightarrow x = \pm y \text{ or } x, y \in [1, +\infty[\text{ donc } x, y \text{ sont de même signe} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$
- f est surjective : soit $y \in [0, +\infty[$. Nous cherchons un élément $x \in [1, +\infty[$ tel que $y = f(x) = x^2 - 1$. Le réel $x = \sqrt{y+1}$ convient !

Correction de l'exercice 4 ▲

1. f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent : en effet il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 0$ (si ce n existait ce serait $n = -1$ qui n'est pas un élément de $\mathbb{N}$). Par contre f est injective : soient $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$ alors $n + 1 = n' + 1$ donc $n = n'$. Bilan f est injective, non surjective et donc non bijective.
2. Pour montrer que g est bijective deux méthodes sont possibles. Première méthode : montrer que g est à la fois injective et surjective. En effet soient $n, n' \in \mathbb{Z}$ tels que $g(n) = g(n')$ alors $n + 1 = n' + 1$ donc $n = n'$, alors g est injective. Et g est surjective car chaque $m \in \mathbb{Z}$ admet un antécédent par g : en posant $n = m - 1 \in \mathbb{Z}$ on trouve bien $g(n) = m$. Deuxième méthode : expliciter directement la bijection réciproque. Soit la fonction $g' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $g'(m) = m - 1$ alors $g' \circ g(n) = n$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$) et $g \circ g'(m) = m$ (pour tout $m \in \mathbb{Z}$). Alors g' est la bijection réciproque de g et donc g est bijective.
3. Montrons que h est injective. Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $h(x,y) = h(x',y')$. Alors $(x+y, x-y) = (x'+y', x'-y')$ donc
$$\begin{cases} x + y &= x' + y' \\ x - y &= x' - y' \end{cases}$$
En faisant la somme des lignes de ce système on trouve $2x = 2x'$ donc $x = x'$ et avec la différence on obtient $y = y'$. Donc les couples (x,y) et (x',y') sont égaux. Donc h est injective.
Montrons que h est surjective. Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$, cherchons lui un antécédent (x,y) par h. Un tel antécédent vérifie $h(x,y) = (X,Y)$, donc $(x+y, x-y) = (X,Y)$ ou encore :
$$\begin{cases} x + y &= X \\ x - y &= Y \end{cases}$$
Encore une fois on faisant la somme des lignes on obtient $x = \frac{X+Y}{2}$ et avec la différence $y = \frac{X-Y}{2}$, donc $(x,y) = (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$. La partie "analyse" de notre raisonnement en finie passons à la "synthèse" : il suffit de juste de vérifier que le couple (x,y) que l'on a obtenu est bien solution (on a tout fait pour !). Bilan pour (X,Y) donné, son antécédent par h existe et est $(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$. Donc h est surjective.
En fait on pourrait montrer directement que h est bijective en exhibant sa bijection réciproque $(X,Y) \mapsto (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$. Mais vous devriez vous convaincre qu'il s'agit là d'une différence de rédaction, mais pas vraiment d'un raisonnement différent.
4. Montrons d'abord que k est injective : soient $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tels que $k(x) = k(x')$ alors $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x'+1}{x'-1}$ donc $(x+1)(x'-1) = (x-1)(x'+1)$. En développant nous obtenons $xx' + x' - x = xx' - x' + x$, soit $2x = 2x'$ donc $x = x'$.
Au brouillon essayons de montrer que k est surjective : soit $y \in \mathbb{R}$ et cherchons $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $f(x) = y$. Si un tel x existe alors il vérifie $\frac{x+1}{x-1} = y$ donc $x + 1 = y(x-1)$, autrement dit $x(y-1) = y + 1$. Si l'on veut exprimer x en fonction de y cela se fait par la formule $x = \frac{y+1}{y-1}$. Mais attention, il y a un piège ! Pour $y = 1$ on ne peut pas trouver d'antécédent x (cela revient à diviser par 0 dans la fraction précédente). Donc k n'est pas surjective car $y = 1$ n'a pas d'antécédent.
Par contre on vient de montrer que s'il l'on considérait la restriction $k_| : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ qui est définie aussi par $k_|(x) = \frac{x+1}{x-1}$ (seul l'espace d'arrivée change par rapport à k) alors cette fonction $k_|$ est injective et surjective, donc bijective (en fait sa bijection réciproque est elle même).

Correction de l'exercice 5 ▲

Considérons la restriction suivante de f : $f_| : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{U}, t \mapsto e^{it}$. Montrons que cette nouvelle application $f_|$ est bijective. Ici $\mathbb{U}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$ donné par l'équation $(|z| = 1)$.

- $f_|$ est surjective car tout nombre complexe de $\mathbb{U}$ s'écrit sous la forme polaire $e^{i\theta}$, et l'on peut choisir $\theta \in [0, 2\pi[$.
- $f_|$ est injective :

$$\begin{aligned} f_|(t) = f_|(t') &\Leftrightarrow e^{it} = e^{it'} \\ &\Leftrightarrow t = t' + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow t = t' \text{ car } t, t' \in [0, 2\pi[\text{ et donc } k = 0. \end{aligned}$$

En conclusion $f_|$ est injective et surjective donc bijective.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Pour $z = x + iy$, le module de $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ est e^x et son argument est y.
2. Les résultats : $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$, $e^{-z} = (e^z)^{-1}$, $(e^z)^n = e^{nz}$.
3. La fonction exp n'est pas surjective car $|e^z| = e^x > 0$ et donc e^z ne vaut jamais 0. La fonction exp n'est pas non plus injective car pour $z \in \mathbb{C}$, $e^z = e^{z+2i\pi}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Supposons $g \circ f$ injective, et montrons que f est injective : soient a, $a' \in A$ avec $f(a) = f(a')$ donc $g \circ f(a) = g \circ f(a')$ or $g \circ f$ est injective donc $a = a'$. Conclusion on a montré :
$$\forall a, a' \in A \quad f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$
c'est la définition de f injective.
2. Supposons $g \circ f$ surjective, et montrons que g est surjective : soit $c \in C$ comme $g \circ f$ est surjective il existe $a \in A$ tel que $g \circ f(a) = c$; posons $b = f(a)$, alors $g(b) = c$, ce raisonnement est valide quelque soit $c \in C$ donc g est surjective.
3. Un sens est simple ($\Leftarrow$) si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est également. De même avec $h \circ g$.
Pour l'implication directe ($\Rightarrow$) : si $g \circ f$ est bijective alors en particulier elle est surjective et donc d'après la question 2. g est surjective.
Si $h \circ g$ est bijective, elle est en particulier injective, donc g est injective (c'est le 1.). Par conséquent g est à la fois injective et surjective donc bijective.
Pour finir $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective comme composée d'applications bijectives, de même pour h.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. f n'est pas injective car $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$. f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent : en effet l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1 + x^2)$ soit $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solutions réelles.
2. $f(x) = y$ est équivalent à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1, 1]$. Nous venons de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1, 1]$.
3. Soit $y \in [-1, 1]$ alors les solutions x possibles de l'équation $g(x) = y$ sont $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La seule solution $x \in [-1, 1]$ est $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ en effet $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1, 1]$. Donc pour $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ nous avons trouvé un inverse $h : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ défini par $h(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$. Donc g est une bijection.
4. $f'(x) = \frac{2-2x^2}{1+x^2}$, donc f' est strictement positive sur $]-1, 1[$ donc f est strictement croissante sur $[-1, 1]$ avec $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$. Donc la restriction de f, appelée $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$, est une bijection.
