Etude métrique des courbes

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1

Longueur L de (Γ) dans chacun des cas suivants :

1. Γ est l'astroïde de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{array}\right.$ $(a>0$ donné$)$.
2. Γ est l'arche de cycloïde de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=R(t-\sin t) \\ y=R(1-\cos t) \end{array}\right.$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.
3. Γ est l'arc de parabole d'équation cartésienne $x^2=2py$, $0\leq x\leq a$ $(p>0$ et $a>0$ donnés$)$.
4. Γ est la cardioïde d'équation polaire $r=a(1+\cos\theta)$ $(\ a>0$ donné$)$.

Correction ▼ [005535]

Exercice 2

Déterminer et construire la développée

1. $\left\{\begin{array}{l} x=R\left(\cos t+\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|\right) \\ y=R\sin t \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} x=R(t-\sin t) \\ y=R(1-\cos t) \end{array}\right.$.
3. $y=x^3$

Correction ▼ [005536]

Exercice 3

Trouver le point de la courbe d'équation $y=\ln x$ en lequel la valeur absolue du rayon de courbure est minimum.

Correction ▼ [005537]

Exercice 4

Soit (Γ) la courbe d'équation $y=\ln(\cos x)$, pour $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. Calculer l'abscisse curviligne s quand O est l'origine des abscisses curvilignes et l'orientation est celle des x croissants. Trouver une relation entre R et s. Tracer (Γ) et sa développée.

Correction ▼ [005538]

Exercice 5

Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, on note (Γ_λ) la courbe d'équation $y=\lambda xe^{-x}$. Quel est le lieu des centres de courbure C_λ en O à (Γ_λ) quand λ décrit $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005539]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. L'astroïde complète est obtenue quand t décrit $[-\pi,\pi]$ et pour des raisons de symétrie, $L=4\int_0^{\pi}2\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|dt$.

   Or $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}=\begin{pmatrix}-3a\sin t\cos^2 t\\3a\cos t\sin^2 t\end{pmatrix}=3a\sin t\cos t\begin{pmatrix}-\cos t\\\sin t\end{pmatrix}$ et donc $\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|=3a|\sin t\cos t|=\frac{3a}{2}|\sin(2t)|$ puis

$$L=4\int_0^{\pi/2}\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|dt=6a\int_0^{\pi/2}\sin(2t)\,dt=6a\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2}=6a.$$

$$\boxed{L=6a.}$$

2. $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}=\begin{pmatrix}R(1-\cos t)\\R\sin t\end{pmatrix}=2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin t\cos t\begin{pmatrix}\sin(t/2)\\\cos(t/2)\end{pmatrix}$ et donc $\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|=2R\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|$ puis

$$L=\int_0^{2\pi}\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|dt=2R\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,dt=4R\left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}=8R.$$

$$\boxed{L=8R.}$$

3. Une représentation paramétrique de Γ est $\begin{cases}x=t\\y=\frac{t^2}{2p}\end{cases}$, $0\leqslant t\leqslant a$ et donc

$$\begin{aligned}L&=\int_0^a\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_0^a\sqrt{1+\frac{t^2}{p^2}}\,dt=p\int_0^{a/p}\sqrt{u^2+1}\,du\\&=p\left(\left[u\sqrt{u^2+1}\right]_0^{a/p}-\int_0^{a/p}\frac{u^2}{\sqrt{u^2+1}}\,du\right)=a\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}}-p\int_0^{a/p}\frac{u^2+1-1}{\sqrt{u^2+1}}\,du\\&=a\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}}-L+p\operatorname{Argsh}\left(\frac{a}{p}\right),\end{aligned}$$

   et donc

$$\boxed{L=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{1+\frac{a^2}{p^2}}+p\operatorname{Argsh}\left(\frac{a}{p}\right)\right).}$$

4. La cardioïde complète est obtenue quand θ décrit $[-\pi,\pi]$.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}=a((-\sin\theta)\overrightarrow{u}_\theta+(1+\cos\theta)\overrightarrow{v}_\theta)=2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta\right).$$

   Comme le vecteur $-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{u}_\theta+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{v}_\theta$ est unitaire, $\left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta}\right\|=\left|2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$ puis

$$L=\int_{-\pi}^{\pi}\left|2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|dt=4a\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)dt=8a\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]_0^{\pi}=8a.$$

$$\boxed{L=8a.}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

On obtient la courbe complète quand t décrit $]-\pi,0[\cup]0,\pi[$. Puisque $M(-t)=s_{(Ox)}(M(t))$ et $M(\pi-t)=s_{(Oy)}(M(t))$, on se contente d'étudier et de construire la courbe quand $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axe (Oy) puis d'axe (Ox). Pour $t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}=\begin{pmatrix}R(-\sin t+\frac{1}{\sin t})\\R\cos t\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}\frac{\cos^2 t}{\sin t}\\\cos t\end{pmatrix}=R\frac{\cos t}{\sin t}\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}=R\operatorname{cotan}t\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix}.$$

Puisque $R\,\text{cotan}\,t > 0$ pour $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et puisque le vecteur $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ est unitaire, on a

$$\frac{ds}{dt} = R\,\text{cotan}\,t \text{ puis } \overrightarrow{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

On a donc $\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ et d'autre part, on peut prendre $\alpha(t) = t$. En notant $\rho(t)$ le rayon de courbure au point $M(t)$,

$$\rho(t) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = R\,\text{cotan}\,t,$$

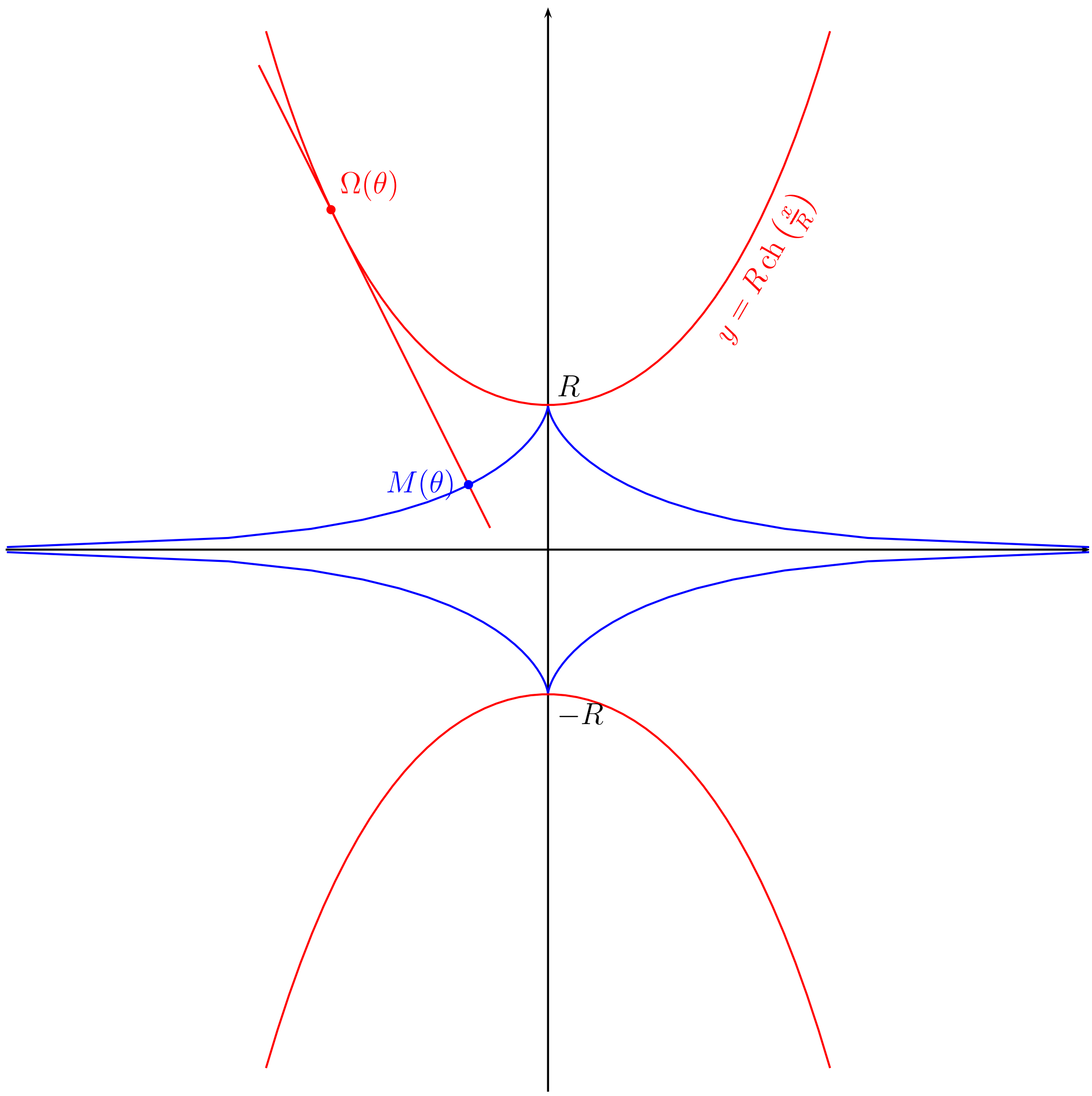
puis

$$\begin{aligned}\Omega(t) = M(t) + \rho(t)\overrightarrow{n}(t) &= \begin{pmatrix} R\left(\cos t + \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|\right) \\ R\sin t \end{pmatrix} + R\,\text{cotan}\,t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| \\ \frac{R}{\sin t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La développée cherchée est l'arc $t \mapsto \begin{pmatrix} R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| \\ \frac{R}{\sin t} \end{pmatrix}$, $t \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ (en complétant par symétrie). Quand t décrit $]0, \pi[$, on effectue alors le changement de paramètres $t \mapsto R\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| = u$ qui est un C^1-difféomorphisme de $]0, \pi[$ sur $\mathbb{R}$. On obtient $x = u$ puis

$$y = \frac{R}{\frac{2\tan\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}}} = \frac{R}{2}\left(\tan\frac{t}{2} + \frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\right) = R\frac{e^{u/R}+e^{-u/R}}{2} = R\,\text{ch}\left(\frac{u}{R}\right).$$

Le support de la développée sur $]0, \pi[$ est aussi le support de l'arc $u \mapsto \begin{pmatrix} u \\ R\,\text{ch}\left(\frac{u}{R}\right) \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$ ou encore la chaînette d'équation cartésienne $y = R\,\text{ch}\left(\frac{x}{R}\right)$.



Quand t décrit $[0,2\pi]$, on obtient une arche de cycloïde complète. Les autres arches s'en déduisent par translations de vecteurs $2k\pi R\overrightarrow{i}$. Pour $t \in [0,2\pi]$

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} R(1-\cos t) \\ R\sin t \end{pmatrix} = 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Le point $M(t)$ est régulier pour $t \in]0,2\pi[$ et pour $t \in]0,2\pi[$, $2R\sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$. Puisque le vecteur $\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ est unitaire, on a

$$\frac{ds}{dt} = 2R\sin\left(\frac{t}{2}\right) \text{ et } \overrightarrow{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ et d'autre part, on peut prendre $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$. En notant $\rho(t)$ le rayon de courbure au point $M(t)$,

$$\rho(t) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = \frac{2R\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -4R\sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

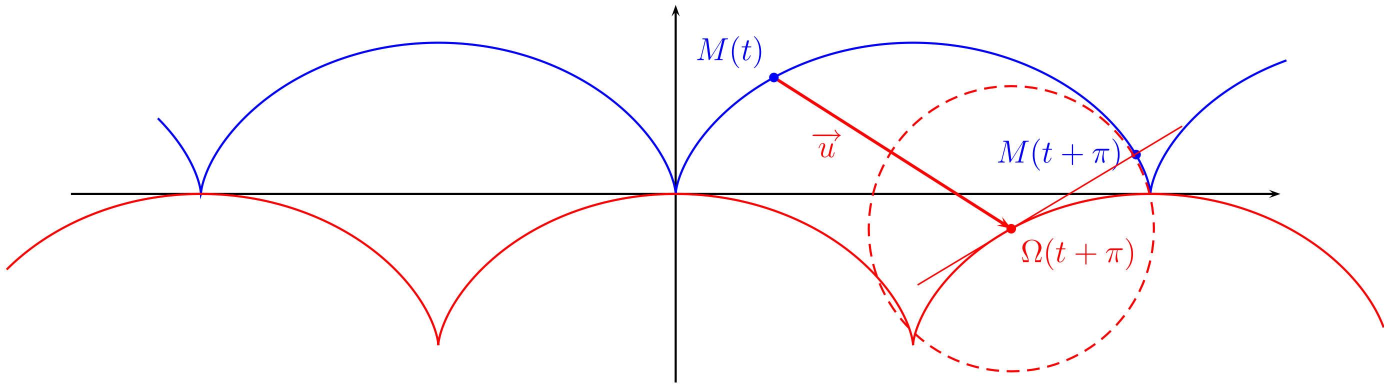
et donc

$$\Omega(t)=M(t)+\rho(t)\overrightarrow{n}(t)=\begin{pmatrix} R(t-\sin t)\\ R(1-\cos t)\end{pmatrix}-4R\sin\left(\frac{t}{2}\right)\begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{t}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R(t-\sin t)+2R\sin t\\ R(1-\cos t)-2R(1-\cos t)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} R(t+\sin t)\\ -R(1-\cos t)\end{pmatrix}.$$

La développée cherchée est l'arc $t\mapsto\begin{pmatrix} R(t+\sin t)\\ -R(1-\cos t)\end{pmatrix}$. Poursuivons.

$$\Omega(t+\pi)=\begin{pmatrix} R(t+\pi-\sin t)\\ -R(1+\cos t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R(t-\sin t)\\ R(1-\cos t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \pi R\\ -2R\end{pmatrix}=t_{\overrightarrow{u}}(M(t)) \text{ où } \overrightarrow{u}=(\pi R,-2R).$$

Ainsi, le centre de courbure au point $M(t+\pi)$ est le translaté du point $M(t)$ dans la translation de vecteur $(\pi R,-2R)$ et donc la développée de la cycloïde est la translatée de la cycloïde par la translation de vecteur $(\pi R,-2R)$. En particulier, c'est encore une cycloïde.



$\mathscr{C}$ est le support de la courbe paramétrée $t\mapsto M(t)=\begin{pmatrix} t\\ t^3\end{pmatrix}$. $M(t)$ est birégulier si et seulement si $t/neq0$.

Pour $t\in\mathbb{R}$, $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}=\begin{pmatrix} 1\\ 3t^2\end{pmatrix}$. Par suite

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+9t^4} \text{ et } \overrightarrow{\tau}(t)=\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}\begin{pmatrix} 1\\ 3t^2\end{pmatrix}.$$

Donc, d'une part $\overrightarrow{n}(t)=\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}\begin{pmatrix} -3t^2\\ 1\end{pmatrix}$ et d'autre part, puisque les coordonnées de $\overrightarrow{\tau}(t)$ sont positives, on peut prendre $\alpha(t)=\text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}\right)$. Par suite, pour $t\neq 0$

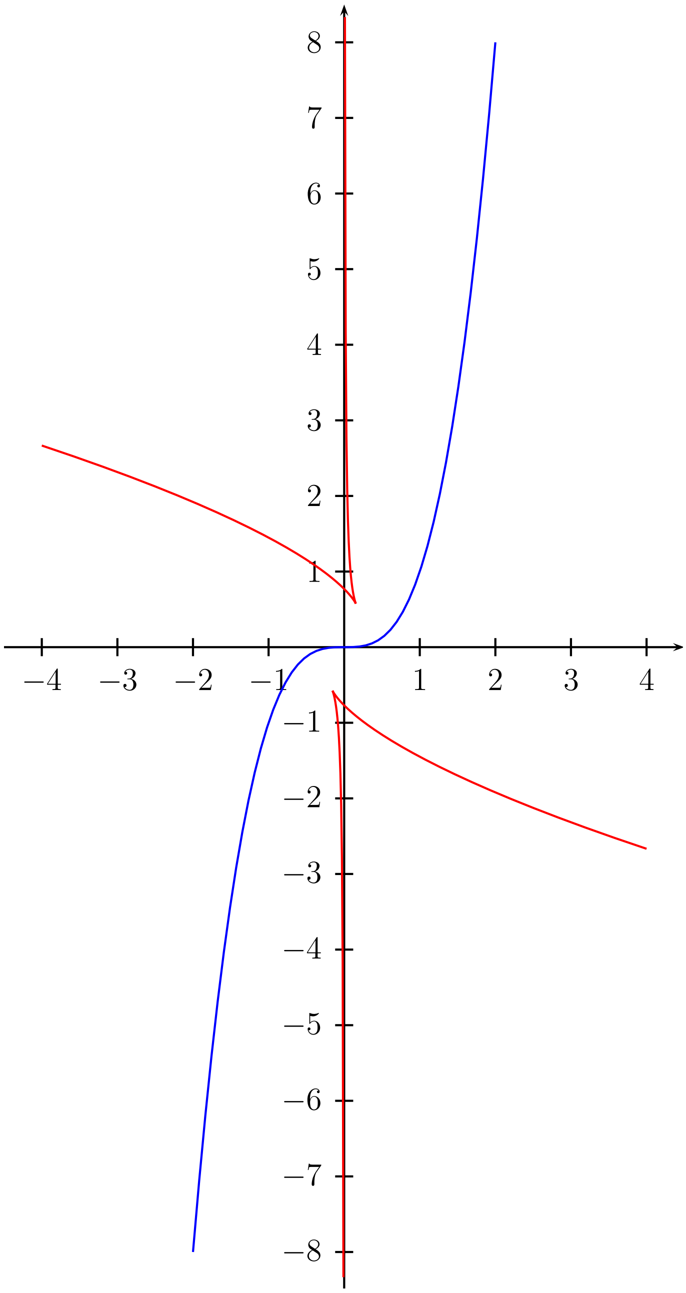
$$\frac{d\alpha}{dt}=-\left(-\frac{1}{2}\right)36t^3(1+9t^4)^{-3/2}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+9t^4}}}=\frac{6t}{1+9t^4}$$

puis

$$R(t)=\frac{ds/dt}{d\alpha/dt}=\frac{(1+9t^4)^{3/2}}{6t},$$

et donc

$$\Omega(t)=M(t)+R(t)\overrightarrow{n}(t)=\begin{pmatrix} t\\ t^3\end{pmatrix}+\frac{1+9t^4}{6t}\begin{pmatrix} -3t^2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{t}{2}-\frac{9t^5}{2}\\ \frac{5t^3}{2}+\frac{1}{6t}\end{pmatrix}.$$



Correction de l'exercice 3 ▲

$\mathscr{C}$ est le support de l'arc paramétré $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln t \end{pmatrix}$, $t > 0$.

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/t \end{pmatrix} = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} \\ 1/\left(t\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{pmatrix}.$$

Donc, $\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$ et on peut prendre $\alpha(t) = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ puis

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{t}{(t^2+1)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}} = -\frac{1}{t^2+1},$$

et finalement

$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = -\frac{1}{t}(t^2+1)^{3/2}.$$

Pour $t>0$, posons $f(t)=|R(t)|=\frac{1}{t}(t^2+1)^{3/2}$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $t>0$,

$$f'(t)=-\frac{1}{t^2}(t^2+1)^{3/2}+3(t^2+1)^{1/2}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}(-(t^2+1)+3t^2)=\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}(2t^2-1).$$

f admet un minimum en $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ égal à $\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)^{3/2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\text{Le rayon de courbure minimum est } \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ et est le rayon de courbure en } M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}.}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

$\mathscr{C}$ est le support de l'arc paramétré $t\mapsto\begin{pmatrix} t\\ \ln(\cos t)\end{pmatrix}$.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}=\begin{pmatrix} 1\\ -\sin t/\cos t\end{pmatrix}=\frac{1}{\cos t}\begin{pmatrix} \cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}.$$

Puisque $\frac{1}{\cos t}>0$ et que $\begin{pmatrix} \cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$ est unitaire, on a successivement $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{\cos t}$, $\overrightarrow{\tau}(t)=\begin{pmatrix} \cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n}(t)=\begin{pmatrix} \sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$, $\alpha(t)=-t$ puis

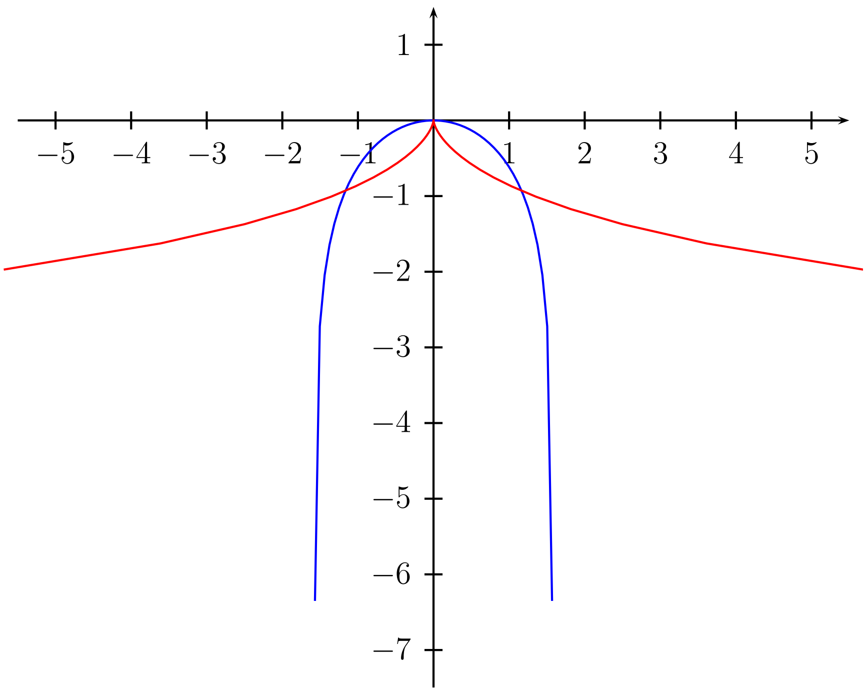
$$R(t)=\frac{ds/dt}{d\alpha/dt}=-\frac{ds}{dt}=-\frac{1}{\cos t}.$$

Ensuite, si s est l'abscisse curviligne d'origine 0 orientée dans le sens des t croissants,

$$s(t)=\int_0^t s'(u)\,du=\int_0^t \frac{1}{\cos u}\,du=\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Enfin,

$$\Omega(t)=M(t)+R(t)\overrightarrow{n}(t)=\begin{pmatrix} t\\ \ln(\cos t)\end{pmatrix}-\frac{1}{\cos t}\begin{pmatrix} \sin t\\ \cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t-\tan t\\ \ln(\cos t)-1\end{pmatrix}.$$



Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\mathscr{C}_\lambda$ est le support de l'arc paramétré $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \lambda t e^{-t} \end{pmatrix}$. $\mathscr{C}_0$ est l'axe (Ox) et donc C_0 n'est pas défini, puis $\mathscr{C}_{-\lambda}$ est la symétrique de $\mathscr{C}_\lambda$ par rapport à l'axe (Ox) et donc $C_{-\lambda}$ est le symétrique de C_λ par rapport à l'axe (Ox). Dans ce qui suit, on suppose $\lambda > 0$.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(1-t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

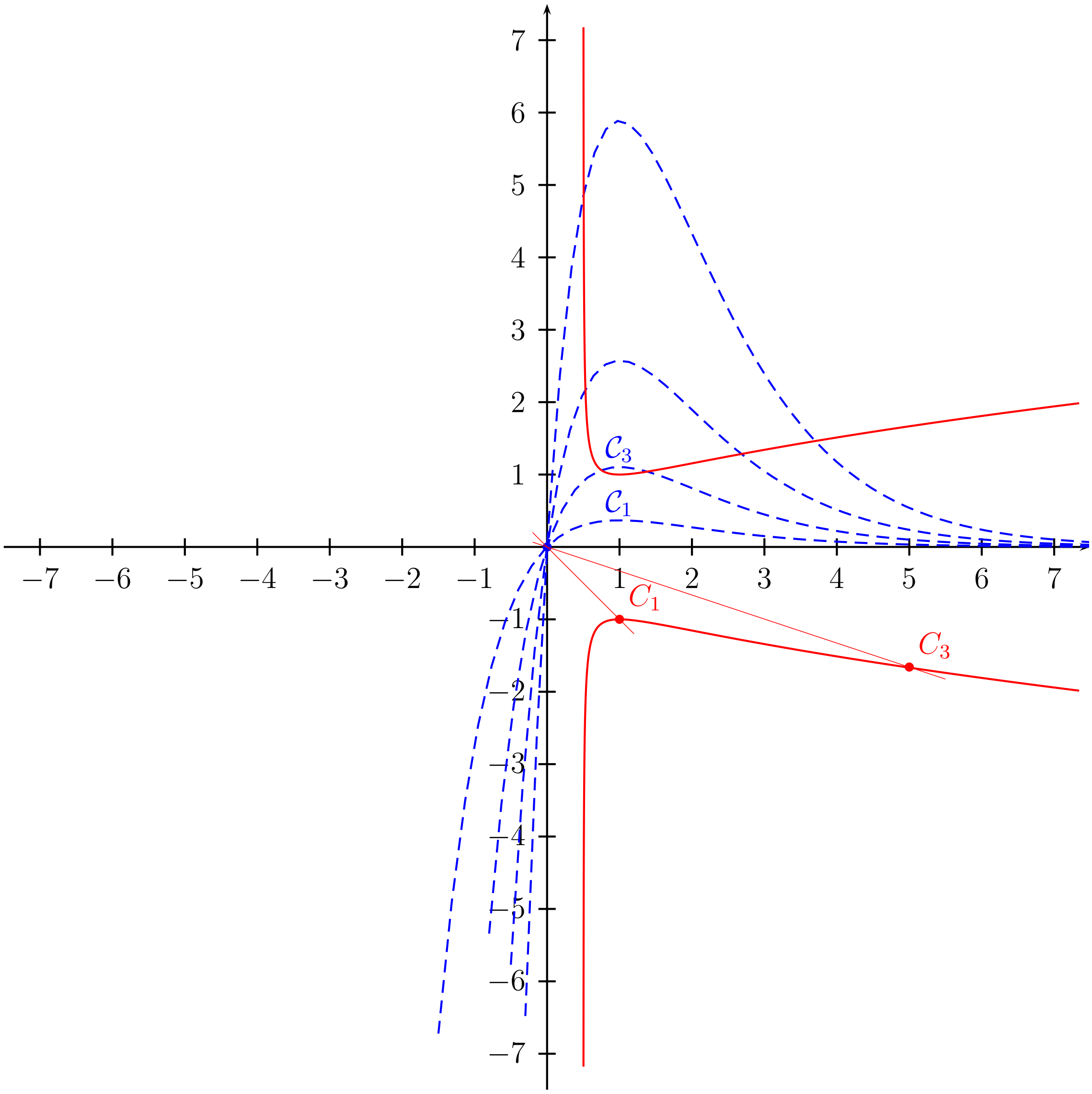
Par suite $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}$, $\overrightarrow{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}\begin{pmatrix} -\lambda(1-t)e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$ et on peut prendre $\alpha(t) = \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}\right)$ (car $\overrightarrow{\tau}(t)$ a une abscisse strictement positive). Ensuite,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\lambda^2((2t-2)-2(t-1)^2)e^{-2t}}{2(1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t})^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+\lambda^2(1-t)^2e^{-2t}}}}$$

et donc $\frac{d\alpha}{dt}(0) = \frac{-4\lambda^2}{2(1+\lambda^2)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+\lambda^2}}} = \frac{-2\lambda}{1+\lambda^2}$ puis $R(0) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt}(0) = -\frac{1}{2\lambda}(1+\lambda^2)^{3/2}$ et donc

$$C_\lambda = \Omega(0) = M(0) + R(0)\overrightarrow{n}(0) = O - \frac{1}{2\lambda}(1+\lambda^2)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\lambda^2)/2 \\ -(1+\lambda^2)/(2\lambda) \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des C_λ, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, est le support de l'arc $\lambda \mapsto \begin{pmatrix} (1+\lambda^2)/2 \\ -(1+\lambda^2)/(2\lambda) \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.


$\mathcal{C}_3$
$\mathcal{C}_1$
C_1
C_3