



# Propriétés de $\mathbb{R}$

---

## 1 Les rationnels $\mathbb{Q}$

### Exercice 1

---

1. Démontrer que si  $r \in \mathbb{Q}$  et  $x \notin \mathbb{Q}$  alors  $r+x \notin \mathbb{Q}$  et si  $r \neq 0$  alors  $r.x \notin \mathbb{Q}$ .
2. Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ,
3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000451]

### Exercice 2

---

Montrer que  $\frac{\ln 3}{\ln 2}$  est irrationnel.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000461]

### Exercice 3

---

1. Soit  $N_n = 0,19971997 \dots 1997$  ( $n$  fois). Mettre  $N_n$  sous la forme  $\frac{p}{q}$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$ .
2. Soit  $M = 0,199719971997 \dots$ . Donner le rationnel dont l'écriture décimale est  $M$ .
3. Même question avec :  $P = 0,1111 \dots + 0,2222 \dots + 0,3333 \dots + 0,4444 \dots + 0,5555 \dots + 0,6666 \dots + 0,7777 \dots + 0,8888 \dots + 0,9999 \dots$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000459]

### Exercice 4

---

Soit  $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$ . On suppose que tous les  $a_i$  sont des entiers.

1. Montrer que si  $p$  a une racine rationnelle  $\frac{\alpha}{\beta}$  alors  $\alpha$  divise  $a_0$  et  $\beta$  divise  $a_n$ .
2. On considère le nombre  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ . En calculant son carré, montrer que ce carré est racine d'un polynôme de degré 2. En déduire, à l'aide du résultat précédent qu'il n'est pas rationnel.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000457]

## 2 Maximum, minimum, borne supérieure...

### Exercice 5

---

Le maximum de deux nombres  $x, y$  (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté  $\max(x, y)$ . De même on notera  $\min(x, y)$  le plus petit des deux nombres  $x, y$ . Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Trouver une formule pour  $\max(x, y, z)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000464]

### Exercice 6

---

Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de :  $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  en posant  $u_n = 2^n$  si  $n$  est pair et  $u_n = 2^{-n}$  sinon.

[Indication ▼](#)      [Correction ▼](#)

[000465]

### Exercice 7

Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q}, \quad ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}, \quad \mathbb{N}, \quad \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

[Correction ▼](#)

[000466]

### Exercice 8

Soient  $A$  et  $B$  deux parties bornées de  $\mathbb{R}$ . On note  $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$ .

1. Montrer que  $\sup A + \sup B$  est un majorant de  $A + B$ .
2. Montrer que  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ .

[Indication ▼](#)      [Correction ▼](#)

[000476]

### Exercice 9

Soit  $A$  et  $B$  deux parties bornées de  $\mathbb{R}$ . **Vrai ou faux ?**

1.  $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$ ,
2.  $A \subset B \Rightarrow \inf A \leq \inf B$ ,
3.  $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ ,
4.  $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$ ,
5.  $\sup(-A) = -\inf A$ ,
6.  $\sup A + \inf B \leq \sup(A + B)$ .

[Indication ▼](#)      [Correction ▼](#)

[000477]

## 3 Divers

### Exercice 10

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Montrer que

1.  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n \cdot f(1)$ .
2.  $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n) = n \cdot f(1)$ .
3.  $\forall q \in \mathbb{Q} \quad f(q) = q \cdot f(1)$ .
4.  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x \cdot f(1)$  si  $f$  est croissante.

[Indication ▼](#)      [Correction ▼](#)

[000497]

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

---

1. Raisonner par l'absurde.
  2. Raisonner par l'absurde en écrivant  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  avec  $p$  et  $q$  premiers entre eux. Ensuite plusieurs méthodes sont possibles par exemple essayer de montrer que  $p$  et  $q$  sont tous les deux pairs.
  3. Considérer  $r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$  (faites un dessin !) pour deux rationnels  $r, r'$ . Puis utiliser les deux questions précédentes.
- 

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

Raisonner par l'absurde !

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

1. Multiplier  $N_n$  par une puissance de 10 suffisamment grande pour obtenir un nombre entier.
  2. Multiplier  $M$  par une puissance de 10 suffisamment grande (pas trop grande) puis soustraire  $M$  pour obtenir un nombre entier.
- 

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

1. Calculer  $\beta^n p(\frac{\alpha}{\beta})$  et utiliser le lemme de Gauss.
  2. Utiliser la première question avec  $p(x) = (x^2 - 5)^2 - 24$ .
- 

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

Distinguer des cas.

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

---

$\inf A = 0$ ,  $A$  n'a pas de borne supérieure.

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

---

Il faut revenir à la définition de la borne supérieure d'un ensemble borné : c'est le plus petit des majorants. En particulier la borne supérieure est un majorant.

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

---

Deux propositions sont fausses...

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

---

1.  $f(2) = f(1+1) = \dots$ , faire une récurrence.
  2.  $f((-n)+n) = \dots$ .
  3. Si  $q = \frac{a}{b}$ , calculer  $f(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b})$  avec  $b$  termes dans cette somme.
  4. Utiliser la densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  : pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé, prendre une suite de rationnels qui croît vers  $x$ , et une autre qui décroît vers  $x$ .
-

### Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  et  $x \notin \mathbb{Q}$ . Par l'absurde supposons que  $r + x \in \mathbb{Q}$  alors il existe deux entiers  $p', q'$  tels que  $r + x = \frac{p'}{q'}$ . Donc  $x = \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} = \frac{qp' - pq'}{qq'}$  ce qui est absurde car  $x \notin \mathbb{Q}$ .

De la même façon si  $r \cdot x \in \mathbb{Q}$  alors  $r \cdot x = \frac{p'}{q'}$  Et donc  $x = \frac{p'}{q'} \cdot \frac{q}{p}$ . Ce qui est absurde.

2. Méthode "classique". Supposons, par l'absurde, que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$  alors il existe deux entiers  $p, q$  tels que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ . De plus nous pouvons supposer que la fraction est irréductible ( $p$  et  $q$  sont premiers entre eux). En élevant l'égalité au carré nous obtenons  $q^2 \times 2 = p^2$ . Donc  $p^2$  est un nombre pair, cela implique que  $p$  est un nombre pair (si vous n'êtes pas convaincu écrivez la contraposée " $p$  impair  $\Rightarrow p^2$  impair"). Donc  $p = 2 \times p'$  avec  $p' \in \mathbb{N}$ , d'où  $p^2 = 4 \times p'^2$ . Nous obtenons  $q^2 = 2 \times p'^2$ . Nous en déduisons maintenant que  $q^2$  est pair et comme ci-dessus que  $q$  est pair. Nous obtenons ainsi une contradiction car  $p$  et  $q$  étant tous les deux pairs la fraction  $\frac{p}{q}$  n'est pas irréductible et aurait pu être simplifiée. Donc  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

Autre méthode. Supposons par l'absurde que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ . Alors  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  pour deux entiers  $p, q \in \mathbb{N}^*$ . Alors nous avons  $q \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$ . Considérons l'ensemble suivant :

$$\mathcal{N} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cet ensemble  $\mathcal{N}$  est une partie de  $\mathbb{N}^*$  qui est non vide car  $q \in \mathcal{N}$ . On peut alors prendre le plus petit élément de  $\mathcal{N}$  :  $n_0 = \min \mathcal{N}$ . En particulier  $n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$ . Définissons maintenant  $n_1$  de la façon suivante :  $n_1 = n_0 \cdot \sqrt{2} - n_0$ . Il se trouve que  $n_1$  appartient aussi à  $\mathcal{N}$  car d'une part  $n_1 \in \mathbb{N}$  (car  $n_0$  et  $n_0 \cdot \sqrt{2}$  sont des entiers) et d'autre part  $n_1 \cdot \sqrt{2} = n_0 \cdot 2 - n_0 \cdot \sqrt{2} \in \mathbb{N}$ . Montrons maintenant que  $n_1$  est plus petit que  $n_0$ . Comme  $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$  alors  $n_1 = n_0(\sqrt{2} - 1) < n_0$  et est non nul.

Bilan : nous avons trouvé  $n_1 \in \mathcal{N}$  strictement plus petit que  $n_0 = \min \mathcal{N}$ . Ceci fournit une contradiction. Conclusion :  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel.

3. Soient  $r, r'$  deux rationnels avec  $r < r'$ . Notons  $x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r' - r)$ . D'une part  $x \in ]r, r'[$  (car  $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ ) et d'après les deux premières questions  $\sqrt{2} \left( \frac{r' - r}{2} \right) \notin \mathbb{Q}$  donc  $x \notin \mathbb{Q}$ . Et donc  $x$  est un nombre irrationnel compris entre  $r$  et  $r'$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

Par l'absurde supposons que  $\frac{\ln 3}{\ln 2}$  soit un rationnel. Il s'écrit alors  $\frac{p}{q}$  avec  $p \geq 0, q > 0$  des entiers. On obtient  $q \ln 3 = p \ln 2$ . En prenant l'exponentielle nous obtenons :  $\exp(q \ln 3) = \exp(p \ln 2)$  soit  $3^q = 2^p$ . Si  $p \geq 1$  alors 2 divise  $3^q$  donc 2 divise 3, ce qui est absurde. Donc  $p = 0$ . Ceci nous conduit à l'égalité  $3^q = 1$ , donc  $q = 0$ . La seule solution possible est  $p = 0, q = 0$ . Ce qui contredit  $q \neq 0$ . Donc  $\frac{\ln 3}{\ln 2}$  est irrationnel.

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. Soit  $p = 19971997 \dots 1997$  et  $q = 100000000 \dots 0000 = 10^{4n}$ . Alors  $N_n = \frac{p}{q}$ .
2. Remarquons que  $10000 \times M = 1997, 19971997 \dots$ . Alors  $10000 \times M - M = 1997$ ; donc  $9999 \times M = 1997$  d'où  $M = \frac{1997}{9999}$ .
3.  $0,111 \dots = \frac{1}{9}, 0,222 \dots = \frac{2}{9}$ , etc. D'où  $P = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{9}{9} = \frac{1+2+\dots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit  $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$  avec  $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$ . Pour  $p(\frac{\alpha}{\beta}) = 0$ , alors  $\sum_{i=0}^n a_i \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^i = 0$ . Après multiplication par  $\beta^n$  nous obtenons l'égalité suivante :

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} \beta + \dots + a_1 \alpha \beta^{n-1} + a_0 \beta^n = 0.$$

En factorisant tous les termes de cette somme sauf le premier par  $\beta$ , nous écrivons  $a_n \alpha^n + \beta q = 0$ . Ceci entraîne que  $\beta$  divise  $a_n \alpha^n$ , mais comme  $\beta$  et  $\alpha^n$  sont premiers entre eux alors par le lemme de Gauss

$\beta$  divise  $a_n$ . De même en factorisant par  $\alpha$  tous les termes de la somme ci-dessus, sauf le dernier, nous obtenons  $\alpha q' + a_0 \beta^n = 0$  et par un raisonnement similaire  $\alpha$  divise  $a_0$ .

2. Notons  $\gamma = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ . Alors  $\gamma^2 = 5 + 2\sqrt{2}\sqrt{3}$  Et donc  $(\gamma^2 - 5)^2 = 4 \times 2 \times 3$ , Nous choisissons  $p(x) = (x^2 - 5)^2 - 24$ , qui s'écrit aussi  $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ . Vu notre choix de  $p$ , nous avons  $p(\gamma) = 0$ . Si nous supposons que  $\gamma$  est rationnel, alors  $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$  et d'après la première question  $\alpha$  divise le terme constant de  $p$ , c'est-à-dire 1. Donc  $\alpha = \pm 1$ . De même  $\beta$  divise le coefficient du terme de plus haut degré de  $p$ , donc  $\beta$  divise 1, soit  $\beta = 1$ . Ainsi  $\gamma = \pm 1$ , ce qui est évidemment absurde !

### Correction de l'exercice 5 ▲

Explicitons la formule pour  $\max(x, y)$ . Si  $x \geq y$ , alors  $|x - y| = x - y$  donc  $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x$ . De même si  $x \leq y$ , alors  $|x - y| = -x + y$  donc  $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = y$ .

Pour trois éléments, nous avons  $\max(x, y, z) = \max(\max(x, y), z)$ , donc d'après les formules pour deux éléments :

$$\begin{aligned} \max(x, y, z) &= \frac{\max(x, y) + z + |\max(x, y) - z|}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x + y + |x - y|) + z + \left| \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) - z \right|}{2}. \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

$(u_{2k})_k$  tend vers  $+\infty$  et donc  $A$  ne possède pas de majorant, ainsi  $A$  n'a pas de borne supérieure (cependant certains écrivent alors  $\sup A = +\infty$ ). D'autre part toutes les valeurs de  $(u_n)$  sont positives et  $(u_{2k+1})_k$  tend vers 0, donc  $\inf A = 0$ .

### Correction de l'exercice 7 ▲

- $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Les majorants :  $[1, +\infty[$ . Les minorants :  $] -\infty, 0]$ . La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Le plus grand élément : 1. Le plus petit élément 0.
- $]0, 1[ \cap \mathbb{Q}$ . Les majorants :  $[1, +\infty[$ . Les minorants :  $] -\infty, 0]$ . La borne supérieure : 1. La borne inférieure : 0. Il n'existe pas de plus grand élément ni de plus petit élément.
- $\mathbb{N}$ . Pas de majorants, pas de borne supérieure, ni de plus grand élément. Les minorants :  $] -\infty, 0]$ . La borne inférieure : 0. Le plus petit élément : 0.
- $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ . Les majorants :  $[\frac{5}{4}, +\infty[$ . Les minorants :  $] -\infty, -1]$ . La borne supérieure :  $\frac{5}{4}$ . La borne inférieure :  $-1$ . Le plus grand élément :  $\frac{5}{4}$ . Pas de plus petit élément.

### Correction de l'exercice 8 ▲

- Soient  $A$  et  $B$  deux parties bornées de  $\mathbb{R}$ . On sait que  $\sup A$  est un majorant de  $A$ , c'est-à-dire, pour tout  $a \in A$ ,  $a \leq \sup A$ . De même, pour tout  $b \in B$ ,  $b \leq \sup B$ . On veut montrer que  $\sup A + \sup B$  est un majorant de  $A + B$ . Soit donc  $x \in A + B$ . Cela signifie que  $x$  est de la forme  $a + b$  pour un  $a \in A$  et un  $b \in B$ . Or  $a \leq \sup A$ , et  $b \leq \sup B$ , donc  $x = a + b \leq \sup A + \sup B$ . Comme ce raisonnement est valide pour tout  $x \in A + B$  cela signifie que  $\sup A + \sup B$  est un majorant de  $A + B$ .
- On veut montrer que, quel que soit  $\varepsilon > 0$ ,  $\sup A + \sup B - \varepsilon$  n'est pas un majorant de  $A + B$ . On prend donc un  $\varepsilon > 0$  quelconque, et on veut montrer que  $\sup A + \sup B - \varepsilon$  ne majore pas  $A + B$ . On s'interdit donc dans la suite de modifier  $\varepsilon$ . Comme  $\sup A$  est le plus petit des majorants de  $A$ ,  $\sup A - \varepsilon/2$  n'est pas un majorant de  $A$ . Cela signifie qu'il existe un élément  $a$  de  $A$  tel que  $a > \sup A - \varepsilon/2$ . Attention :  $\sup A - \varepsilon/2$  n'est pas forcément dans  $A$  ;  $\sup A$  non plus. De la même manière, il existe  $b \in B$  tel que  $b > \sup B - \varepsilon/2$ . Or l'élément  $x$  défini par  $x = a + b$  est un élément de  $A + B$ , et il vérifie  $x > (\sup A - \varepsilon/2) + (\sup B - \varepsilon/2) = \sup A + \sup B - \varepsilon$ . Ceci implique que  $\sup A + \sup B - \varepsilon$  n'est pas un majorant de  $A + B$ .

3.  $\sup A + \sup B$  est un majorant de  $A + B$  d'après la partie 1. Mais, d'après la partie 2., dès qu'on prend un  $\varepsilon > 0$ ,  $\sup A + \sup B - \varepsilon$  n'est pas un majorant de  $A + B$ . Donc  $\sup A + \sup B$  est bien le plus petit des majorants de  $A + B$ , c'est donc la borne supérieure de  $A + B$ . Autrement dit  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ .
- 

### Correction de l'exercice 9 ▲

---

1. Vrai.
  2. Faux. C'est vrai avec l'hypothèse  $B \subset A$  et non  $A \subset B$ .
  3. Vrai.
  4. Faux. Il y a égalité.
  5. Vrai.
  6. Vrai.
- 

### Correction de l'exercice 10 ▲

---

1. Calculons d'abord  $f(0)$ . Nous savons  $f(1) = f(1+0) = f(1) + f(0)$ , donc  $f(0) = 0$ . Montrons le résultat demandé par récurrence : pour  $n = 1$ , nous avons bien  $f(1) = 1 \times f(1)$ . Si  $f(n) = nf(1)$  alors  $f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$ .
2.  $0 = f(0) = f(-1+1) = f(-1) + f(1)$ . Donc  $f(-1) = -f(1)$ . Puis comme ci-dessus  $f(-n) = nf(-1) = -nf(1)$ .
3. Soit  $q = \frac{a}{b}$ . Alors  $f(a) = f(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \dots + \frac{a}{b}) = f(\frac{a}{b}) + \dots + f(\frac{a}{b})$  ( $b$  termes dans ces sommes). Donc  $f(a) = bf(\frac{a}{b})$ . Soit  $af(1) = bf(\frac{a}{b})$ . Ce qui s'écrit aussi  $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}f(1)$ .
4. Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Soit  $(\alpha_i)$  une suite croissante de rationnels qui tend vers  $x$ . Soit  $(\beta_i)$  une suite décroissante de rationnels qui tend vers  $x$  :

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \dots \leq x \leq \dots \leq \beta_2 \leq \beta_1.$$

Alors comme  $\alpha_i \leq x \leq \beta_i$  et que  $f$  est croissante nous avons  $f(\alpha_i) \leq f(x) \leq f(\beta_i)$ . D'après la question précédent cette inéquation devient :  $\alpha_i f(1) \leq f(x) \leq \beta_i f(1)$ . Comme  $(\alpha_i)$  et  $(\beta_i)$  tendent vers  $x$ . Par le "théorème des gendarmes" nous obtenons en passant à la limite :  $xf(1) \leq f(x) \leq xf(1)$ . Soit  $f(x) = xf(1)$ .

---