

## Suites et séries de matrices

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile    \*\* facile    \*\*\* difficulté moyenne    \*\*\*\* difficile    \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable

### Exercice 1 \*\*

Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$  ( $a$  réel strictement positif donné).

[Correction ▼](#)

[005864]

### Exercice 2 \*\*\*

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ ,  $p \geq 1$ . Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(1)  $\text{Sp}(A) \subset B_o(0, 1)$  (disque unité ouvert).

(2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$

(3) La série de terme général  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge.

[Correction ▼](#)

[005865]

### Exercice 3 \*\*

Soit  $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$ . Convergence et somme de la série de terme général  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

[Correction ▼](#)

[005866]

### Exercice 4 \*\* I

On munit  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  d'une norme sous-multiplicative notée  $\| \cdot \|$ . Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  tel que  $\|A\| < 1$ . Montrer que la série de terme général  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge puis que  $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I - A)^{-1}$ .

En déduire que  $\|(I - A)^{-1} - (I + A)\| \leq \frac{\|A\|^2}{1 - \|A\|}$ .

[Correction ▼](#)

[005867]

### Exercice 5 \*\* I

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer qu'il existe  $p_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall p \geq p_0$ ,  $\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{R})$ .

[Correction ▼](#)

[005868]

### Exercice 6 \*\* I

Calculer  $\exp(tA)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , si

1.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

[Correction ▼](#)

[005869]

### Exercice 7 \*\*

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\ln(I_3 + tA) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} A^n$  en précisant les valeurs de  $t$  pour lesquelles la série converge.

[Correction ▼](#)

[005870]

### Exercice 8 \*\* I Exponentielle d'un endomorphisme anti-symétrique de $\mathbb{R}^3$

1. (a) Soit  $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ . Pour  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ , on pose  $f_{\vec{\omega}}(\vec{x}) = \vec{\omega} \wedge \vec{x}$ . Vérifier que  $f_{\vec{\omega}} \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ .  
 (b) Réciproquement, soit  $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ . Montrer qu'il existe un vecteur  $\vec{\omega}$  unique tel que  $f = f_{\vec{\omega}}$ .
2. Soit  $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ . Montrer que  $\exp(f_{\vec{\omega}})$  est une rotation dont on déterminera l'axe (quand celui-ci est défini) et l'angle.

[Correction ▼](#)

[005871]

### Exercice 9 \*\*

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , calculer  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left( I_n + \frac{A}{p} \right)^p$ .

[Correction ▼](#)

[005872]

### Exercice 10 \*\*

Montrer que  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\exp(A)$  est un polynôme en  $A$ .

[Correction ▼](#)

[005873]

### Correction de l'exercice 1 ▲

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On peut écrire  $A_n = \sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}} & -\frac{a/n}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}} \\ \frac{a/n}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}} \end{pmatrix}$ . Les sommes des carrés des deux nombres  $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}$  et  $\frac{a/n}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}$  est égale à 1. Donc il existe un réel  $\theta_n \in ]-\pi, \pi]$  tel que  $\cos(\theta_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}$  et  $\sin(\theta_n) = \frac{a/n}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}$ . De plus,  $\cos(\theta_n) > 0$  et  $\sin(\theta_n) > 0$  et donc on peut prendre

$$\theta_n = \text{Arctan}\left(\frac{a}{n}\right) \in ]0, \frac{\pi}{2}[.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a alors

$$A_n^n = \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}\right)^n \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}^n = \left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Maintenant,  $\left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1)$ .

D'autre part,  $n\theta_n = n \text{Arctan}\left(\frac{a}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \times \frac{a}{n} = a$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n = 1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

$$\forall a > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

### Correction de l'exercice 2 ▲

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2). On sait que si la série de terme général  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1). Supposons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $A$  et  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$  un vecteur propre associé. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n X = \lambda^n X$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$ , on a encore  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n X = 0$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n X = 0$  et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n = 0$ .

Ainsi, si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$  alors  $\text{Sp}(A) \subset B_o(0, 1)$ .

(1)  $\Rightarrow$  (3). Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  telle que  $\text{Sp}(A) \subset B_o(0, 1)$ . On sait (voir exercice ?? : décomposition de DUNFORD) qu'il existe deux matrices  $D$  et  $N$  telles que

- 1)  $A = D + N$
- 2)  $D$  diagonalisable
- 3)  $N$  nilpotente
- 4)  $DN = ND$ .

De plus, les valeurs propres de  $D$  sont les valeurs propres de  $A$ .

On note  $k$  l'indice de nilpotence de  $N$ . Puisque les matrices  $D$  et  $N$  convergent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire pour  $n \geq k$

$$A^n = (D + N)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D^{n-j} N^j = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} D^{n-j} N^j.$$

Il existe une matrice  $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{C})$  et une matrice diagonale  $\Delta$  tel que  $D = P\Delta P^{-1}$ . Mais alors,  $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ ,  $\forall n \geq j$ ,  $\binom{n}{j} D^{n-j} N^j = P \times \binom{n}{j} \Delta^{n-j} \times P N^j$ .

Soit  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ . Vérifions tout d'abord que la série de terme général  $\binom{n}{j} \Delta^{n-j}$ ,  $n \geq j$  converge. Posons  $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ . Alors  $\forall n \geq j$ ,  $\binom{n}{j} \Delta^{n-j} = \text{diag} \left( \binom{n}{j} \lambda_1^{n-j}, \dots, \binom{n}{j} \lambda_p^{n-j} \right)$ . Maintenant, si  $\lambda$  est une valeur propre de  $\Delta$  (et donc de  $A$ ),  $\binom{n}{j} \lambda^{n-j} = \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} \lambda^{n-j} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^j \lambda^{n-j} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{n^2} \right)$  car  $|\lambda| < 1$  et donc la série de terme général  $\binom{n}{j} \lambda^{n-j}$ ,  $n \geq j$ , converge.

Ainsi, la série de terme général  $\binom{n}{j} \Delta^{n-j}$  converge. D'autre part, l'application  $M \mapsto P \times M \times P N^j$  est continue sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie. On en déduit que la série de terme général  $P \times \binom{n}{j} \Delta^{n-j} \times P N^j$  converge.

Finalement, pour chaque  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , la série de terme général  $P \times \binom{n}{j} \Delta^{n-j} \times P N^j$  converge et donc la série de terme général  $A^n$  converge car est somme de  $j+1$  séries convergentes.

### Correction de l'exercice 3 ▲

$\chi_A = \begin{vmatrix} 4/3 - X & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 - X \end{vmatrix} = X^2 - \frac{1}{6}X - \frac{1}{6} = (X - \frac{1}{2})(X + \frac{1}{3})$ . Par suite,  $A = P D P^{-1}$  où  $D = \text{diag}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et donc  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\sum_{k=0}^n A^k = P \left( \sum_{k=0}^n D^k \right) P^{-1} = P \text{diag} \left( \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{2} \right)^k, \sum_{k=0}^n \left( -\frac{1}{3} \right)^k \right) P^{-1}.$$

Puisque  $\frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{3}$  sont dans  $] -1, 1[$ , les séries numériques de termes généraux respectifs  $(\frac{1}{2})^k$  et  $(-\frac{1}{3})^k$  convergent. Il en est de même de la série de terme général  $D^k$ . Maintenant, l'application  $M \mapsto P M P^{-1}$ , converge est continue car linéaire sur un espace de dimension finie et on en déduit que la série de terme général  $A^k$  converge. De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} P D^n P^{-1} = P \left( \sum_{n=0}^{+\infty} D^n \right) P^{-1} \text{ (par continuité de l'application } M \mapsto P M P^{-1}) \\ &= P \text{diag} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n, \sum_{n=0}^{+\infty} \left( -\frac{1}{3} \right)^n \right) P^{-1} = P \text{diag} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}, \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} \right) P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}.$$

**Remarque.** D'après l'exercice suivant, la matrice obtenue est  $(I - A)^{-1}$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  telle que  $\|A\| < 1$ . Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ . Puisque  $\|A\| < 1$ , la série numérique de terme général  $\|A\|^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge. Il en est de même de la série de terme général  $\|A^n\|$  et donc la série de terme général  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge absolument. Puisque  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  est complet en tant que  $\mathbb{C}$  espace de dimension finie, on en déduit que la série de terme général  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , converge. De plus,

$$\begin{aligned}(I-A) \sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= (I-A) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^n A^k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( (I-A) \sum_{k=0}^n A^k \right) \text{ (par continuité de l'application } M \mapsto (I-A)M) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (I-A^{n+1}) = I \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} A^{n+1} = 0 \text{ car } \forall n \in \mathbb{N}, \|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \right).\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice  $I-A$  est inversible à droite et donc inversible et de plus,  $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ . On en déduit encore

$$\|(I-A)^{-1} - (I+A)\| = \left\| \sum_{n=2}^{+\infty} A^n \right\| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \|A\|^n = \frac{\|A\|^2}{1-\|A\|}.$$

### Correction de l'exercice 5 ▲

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On sait que d'une part  $\det(\exp(A)) \neq 0$  et d'autre part  $\exp(A) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \right)$ . Par continuité du déterminant, on a donc  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \det \left( \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \right) = \det(\exp(A)) \neq 0$ . Par suite, il existe  $p_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall p \geq p_0$ ,  $\det \left( \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \right) \neq 0$  et donc tel que  $\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{R})$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

$$1. \chi_A = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 2 \\ 1 & -X & 1 \\ -1 & 1 & -X \end{vmatrix} = (3-X)(X^2-1) - (-2X-2) - (2X+2) = -(X+1)(X-1)(X-3).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La division euclidienne de  $X^n$  par  $\chi_A$  s'écrit  $X^n = Q_n \times \chi_A + a_n X^2 + b_n X + c_n$  où  $Q_n \in \mathbb{R}[X]$  et  $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ . En évaluant les deux membres de cette égalité en  $-1, 1$  et  $3$ , on obtient

$$\begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) \\ a_n + c_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) \\ 8a_n + \frac{3}{2}(1 - (-1)^n) + \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) = 3^n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{8}(3^n - 2 + (-1)^n) \\ b_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) \\ c_n = \frac{1}{8}(-3^n + 6 + 3(-1)^n) \end{cases}.$$

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON fournit alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{8}((3^n - 2 + (-1)^n)A^2 + 4(1 - (-1)^n)A + (-3^n + 6 + 3(-1)^n)I_3).$$

Maintenant,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc, pour tout réel  $t$ ,

$$\begin{aligned}\exp(tA) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \frac{1}{8}((3^n - 2 + (-1)^n)A^2 + 4(1 - (-1)^n)A + (-3^n + 6 + 3(-1)^n)I_3) \\ &= \frac{e^{3t} - 2e^t + e^{-t}}{8} \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \frac{4(e^t - e^{-t})}{8} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{-e^{3t} + 6e^t + 3e^{-t}}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8e^{3t} & 8e^{3t} - 8e^t & 8e^{3t} - 8e^t \\ 2e^{3t} - 2e^{-t} & 2e^{3t} + 6e^{-t} & 2e^{3t} - 2e^{-t} \\ -2e^{3t} + 2e^{-t} & -2e^{3t} + 8e^t - 6e^{-t} & 2e^{3t} + 8e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4e^{3t} & 4e^{3t} - 4e^t & 4e^{3t} - 4e^t \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + 3e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} + 4e^t - 3e^{-t} & e^{3t} + 4e^t + e^{-t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4e^{3t} & 4e^{3t} - 4e^t & 4e^{3t} - 4e^t \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + 3e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} + 4e^t - 3e^{-t} & e^{3t} + 4e^t + e^{-t} \end{pmatrix}.$$

2.  $\chi_A = \begin{vmatrix} 4-X & 1 & 1 \\ 6 & 4-X & 2 \\ -10 & -4 & -2-X \end{vmatrix} = (4-X)(X^2 - 2X) - 6(-X+2) - 10(X-2) = (X-2)[-X(X-4) + 6 - 10] = -(X-2)(X^2 - 4X + 4) = -(X-2)^3$ . On est dans la situation où  $A$  a une unique valeur propre. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON,  $(A - 2I_3)^3 = 0$  et donc pour tout réel  $t$ ,

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp(t(A - 2I_3) + 2tI_3) = \exp(t(A - 2I_3)) \times \exp(2tI_3) \text{ (car les matrices } t(A - 2I_3) \text{ et } 2tI_3 \text{ commutent)} \\ &= \left( I_3 + t(A - 2I_3) + \frac{t^2}{2}(A - 2I_3)^2 \right) \times e^{2t} I_3 \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + te^{2t} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -10 & -4 & -4 \end{pmatrix} + \frac{t^2 e^{2t}}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -10 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -10 & -4 & -4 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + te^{2t} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -10 & -4 & -4 \end{pmatrix} + \frac{t^2 e^{2t}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2t+1)e^{2t} & te^{2t} & te^{2t} \\ (2t^2+6t)e^{2t} & (t^2+2t+1)e^{2t} & (t^2+2t)e^{2t} \\ (-2t^2-10t)e^{2t} & (-t^2-4t)e^{2t} & (-t^2-4t)e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA) = \begin{pmatrix} (2t+1)e^{2t} & te^{2t} & te^{2t} \\ (2t^2+6t)e^{2t} & (t^2+2t+1)e^{2t} & (t^2+2t)e^{2t} \\ (-2t^2-10t)e^{2t} & (-t^2-4t)e^{2t} & (-t^2-4t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

### Correction de l'exercice 7 ▲

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & 1/2 & -2 \\ 1/2 & -X & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 - X \end{vmatrix} = -X(X^2 + \frac{1}{2}X) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{4}) = -X^2(X + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}(X + \frac{1}{2}) = -(X + \frac{1}{2})^2(X - \frac{1}{2}).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La division euclidienne de  $X^n$  par  $\chi_A$  s'écrit  $X^n = Q_n \chi_A + a_n X^2 + b_n X + c_n$  où  $Q_n \in \mathbb{R}[X]$  et  $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ .

On évalue les deux membres de cette égalité en  $\frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{2}$  et on obtient  $\frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{2} + c_n = (\frac{1}{2})^n$  et  $\frac{a_n}{4} - \frac{b_n}{2} + c_n = (-\frac{1}{2})^n$ .

Puis en dérivant les deux membres de l'égalité et en évaluant en  $-\frac{1}{2}$ , on obtient  $-a_n + b_n = n(-\frac{1}{2})^{n-1} = -2n(-\frac{1}{2})^n$ . Maintenant,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{2} + c_n = (\frac{1}{2})^n \\ \frac{a_n}{4} - \frac{b_n}{2} + c_n = (-\frac{1}{2})^n \\ -a_n + b_n = -2n(-\frac{1}{2})^n \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b_n = (\frac{1}{2})^n - (-\frac{1}{2})^n \\ \frac{a_n}{2} + 2c_n = (\frac{1}{2})^n + (-\frac{1}{2})^n \\ -a_n + (\frac{1}{2})^n - (-\frac{1}{2})^n = -2n(-\frac{1}{2})^n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = (\frac{1}{2})^n + (2n-1)(-\frac{1}{2})^n \\ b_n = (\frac{1}{2})^n - (-\frac{1}{2})^n \\ c_n = \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^n - \frac{2n-3}{4}(-\frac{1}{2})^n \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = \left( (\frac{1}{2})^n + (2n-1)(-\frac{1}{2})^n \right) A^2 + \left( (\frac{1}{2})^n - (-\frac{1}{2})^n \right) A + \left( \frac{1}{4}(\frac{1}{2})^n - \frac{2n-3}{4}(-\frac{1}{2})^n \right) I_3$  avec  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ . On en déduit que pour  $|t| < 2$ ,

$$\begin{aligned}
\ln(I_3 + tA) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} A^n \\
&= \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^n + (2n-1) \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right) \right) A^2 + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^n - \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right) \right) A \\
&\quad + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \right)^n - \frac{2n-3}{4} \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right) I_3.
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\ln(I_3 + tA) &= \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (t/2)^n}{n} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (t/2)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-t/2)^n}{n} \right) A^2 \\
&\quad + \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (t/2)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-t/2)^n}{n} \right) A \\
&\quad + \frac{1}{4} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (t/2)^n}{n} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (t/2)^n + 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-t/2)^n}{n} \right) I_3 \\
&= \left( \ln \left( 1 + \frac{t}{2} \right) - 2 \left( \frac{1}{1 - \frac{t}{2}} - 1 \right) - \ln \left( 1 - \frac{t}{2} \right) \right) A^2 + \left( \ln \left( 1 + \frac{t}{2} \right) - \ln \left( 1 - \frac{t}{2} \right) \right) A \\
&\quad + \frac{1}{4} \left( \ln \left( 1 + \frac{t}{2} \right) + 2 \left( \frac{1}{1 - \frac{t}{2}} - 1 \right) + 3 \ln \left( 1 - \frac{t}{2} \right) \right) I_3 \\
&= \left( \ln \left( \frac{2+t}{2-t} \right) - \frac{2t}{2-t} \right) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} + \ln \left( \frac{2+t}{2-t} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{4} \left( \ln \left( 1 + \frac{t}{2} \right) + \frac{2t}{2-t} + 3 \ln \left( 1 - \frac{t}{2} \right) \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{t^2}{4} \right) & \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2+t}{2-t} \right) & -\ln \left( \frac{2+t}{2-t} \right) - \frac{2t}{2-t} \\ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2+t}{2-t} \right) & \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{t^2}{4} \right) & -\ln \left( \frac{2+t}{2-t} \right) + \frac{2t}{2-t} \\ 0 & 0 & \ln \left( 1 - \frac{t}{2} \right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\forall t \in ]-2, 2[, \ln(I_3 + tA) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{t^2}{4} \right) & \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2+t}{2-t} \right) & -\ln \left( \frac{2+t}{2-t} \right) - \frac{2t}{2-t} \\ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2+t}{2-t} \right) & \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{t^2}{4} \right) & -\ln \left( \frac{2+t}{2-t} \right) + \frac{2t}{2-t} \\ 0 & 0 & \ln \left( 1 - \frac{t}{2} \right) \end{pmatrix}.$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. (a) Soit  $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ .  $f_{\vec{\omega}}$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  par bilinéarité du produit vectoriel. De plus, pour  $(\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2$ ,

$$f_{\vec{\omega}}(\vec{x}) \cdot \vec{y} = (\vec{\omega} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{y} = [\vec{\omega}, \vec{x}, \vec{y}] = -[\vec{\omega}, \vec{y}, \vec{x}] = -(\vec{\omega} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{x} = -\vec{x} \cdot f_{\vec{\omega}}(\vec{y}).$$

Donc,

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, f_{\vec{\omega}} \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3).$$

(b) Soit  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ .  
 $\vec{\omega} \mapsto f_{\vec{\omega}}$

• Vérifions que  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathcal{A}(\mathbb{R}^3))$ . Soient  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) \in (\mathbb{R}^3)^2$ . Pour tout  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\begin{aligned} (\varphi(\lambda_1 \vec{\omega}_1 + \lambda_2 \vec{\omega}_2))(\vec{x}) &= f_{\lambda_1 \vec{\omega}_1 + \lambda_2 \vec{\omega}_2}(\vec{x}) = (\lambda_1 \vec{\omega}_1 + \lambda_2 \vec{\omega}_2) \wedge \vec{x} = \lambda_1 (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{x}) + \lambda_2 (\vec{\omega}_2 \wedge \vec{x}) \\ &= \lambda_1 f_{\vec{\omega}_1}(\vec{x}) + \lambda_2 f_{\vec{\omega}_2}(\vec{x}) = ((\lambda_1 \varphi(\vec{\omega}_1) + \lambda_2 \varphi(\vec{\omega}_2))(\vec{x})) \end{aligned}$$

et donc  $\varphi(\lambda_1 \vec{\omega}_1 + \lambda_2 \vec{\omega}_2) = \lambda_1 \varphi(\vec{\omega}_1) + \lambda_2 \varphi(\vec{\omega}_2)$ . On a montré que  $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathcal{A}(\mathbb{R}^3))$ .

• Vérifions que  $\varphi$  est injective. Soit  $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ .

$$\vec{\omega} \in \text{Ker}(\varphi) \Rightarrow f_{\vec{\omega}} = 0 \Rightarrow \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{\omega} \wedge \vec{x} = \vec{0}.$$

On applique alors ce dernier résultat à deux vecteurs non colinéaires  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . On obtient  $\vec{\omega} \wedge \vec{u} = \vec{0} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  et donc  $\vec{x} \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \{\vec{0}\}$ . On a montré que  $\varphi$  est injective.

• Enfin,  $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \frac{3 \times (3-1)}{2} = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) < +\infty$ . On en déduit que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  sur  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$ . En particulier,

$$\forall f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3), \exists \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3 / f = f_{\vec{\omega}}.$$

2. Soit  $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ . Si  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , alors  $f_{\vec{\omega}} = 0$  et donc  $\exp(f_{\vec{\omega}}) = Id_{\mathbb{R}^3}$ .

On suppose dorénavant  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ . On pose  $\vec{e}_3 = \frac{1}{\|\vec{\omega}\|} \vec{\omega}$  puis on complète la famille orthonormale  $(\vec{e}_3)$  en une base orthonormale directe  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  (en particulier  $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$ ).

• Puisque  $\vec{e}_3$  est colinéaire à  $\vec{\omega}$ ,  $f_{\vec{\omega}}(\vec{e}_3) = \vec{0}$ . On en déduit que

$$\exp(f_{\vec{\omega}})(\vec{e}_3) = Id(\vec{e}_3) + f_{\vec{\omega}}(\vec{e}_3) + \frac{1}{2}f_{\vec{\omega}}^2(\vec{e}_3) + \frac{1}{6}f_{\vec{\omega}}^3(\vec{e}_3) + \dots = \vec{e}_3.$$

• D'autre part,  $f_{\vec{\omega}}(\vec{e}_1) = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1 = \|\vec{\omega}\| \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \|\vec{\omega}\| \vec{e}_2$  et de même  $f_{\vec{\omega}}(\vec{e}_2) = -\|\vec{\omega}\| \vec{e}_1$ .

On en déduit que  $f_{\vec{\omega}}^2(\vec{e}_1) = -\|\vec{\omega}\|^2 \vec{e}_1$  et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_{\vec{\omega}}^{2n}(\vec{e}_1) = (-1)^n \|\vec{\omega}\|^{2n} \vec{e}_1 \quad \text{puis} \quad f_{\vec{\omega}}^{2n+1}(\vec{e}_1) = (-1)^n \|\vec{\omega}\|^{2n+1} \vec{e}_2.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \exp(f_{\vec{\omega}})(\vec{e}_1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f_{\vec{\omega}}^n(\vec{e}_1) \\ &= \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\|\vec{\omega}\|^{2n}}{(2n)!} \right) \vec{e}_1 + \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\|\vec{\omega}\|^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \vec{e}_2 \quad (\text{somme de deux séries convergentes}) \\ &= \cos(\|\vec{\omega}\|) \vec{e}_1 + \sin(\|\vec{\omega}\|) \vec{e}_2. \end{aligned}$$

De même,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_{\vec{\omega}}^{2n}(\vec{e}_2) = (-1)^n \|\vec{\omega}\|^{2n} \vec{e}_2 \quad \text{puis} \quad f_{\vec{\omega}}^{2n+1}(\vec{e}_2) = -(-1)^n \|\vec{\omega}\|^{2n+1} \vec{e}_1.$$

et donc

$$\begin{aligned} \exp(f_{\vec{\omega}})(\vec{e}_2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f_{\vec{\omega}}^n(\vec{e}_2) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\|\vec{\omega}\|^{2n}}{(2n)!} \right) \vec{e}_2 - \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\|\vec{\omega}\|^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \vec{e}_1 \\ &= -\sin(\|\vec{\omega}\|) \vec{e}_1 + \cos(\|\vec{\omega}\|) \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de  $\exp(f_{\vec{\omega}})$  dans la base orthonormée directe  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  est  $\begin{pmatrix} \cos(\|\vec{\omega}\|) & -\sin(\|\vec{\omega}\|) & 0 \\ \sin(\|\vec{\omega}\|) & \cos(\|\vec{\omega}\|) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et  $\exp(f_{\vec{\omega}})$  est la rotation d'angle  $\|\vec{\omega}\|$  autour de  $\vec{\omega}$ .



---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  d'une norme sous-multiplicative notée  $\| \cdot \|$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

$$\left\| \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} - \left( I + \frac{A}{p} \right)^p \right\| = \left\| \sum_{k=0}^p \left( \frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} \right) A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^p \left| \frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} \right| \|A\|^k.$$

Maintenant,  $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} = \frac{1}{k!} \left( 1 - \frac{\overbrace{p \times (p-1) \times \dots \times (p-k+1)}^k}{\underbrace{p \times p \times \dots \times p}_k} \right) \geq 0$ . Donc,

$$\sum_{k=0}^p \left| \frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} \right| \|A\|^k = \sum_{k=0}^p \frac{\|A\|^k}{k!} - \left( 1 + \frac{\|A\|^p}{p} \right)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} e^{\|A\|} - e^{\|A\|} = 0.$$

On en déduit que  $\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} - \left( I + \frac{A}{p} \right)^p$  tend vers 0 quand  $p$  tend vers  $+\infty$  et puisque  $\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!}$  tend vers  $\exp(A)$  quand  $p$  tend vers  $+\infty$ , il en est de même de  $\left( I + \frac{A}{p} \right)^p$ .

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exp(A) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( I_n + \frac{A}{p} \right)^p.$$

---

**Correction de l'exercice 10 ▲**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Puisque  $\chi_A$  est de degré  $n$ , la division euclidienne de  $X^k$  par  $\chi_A$  s'écrit

$$X^k = Q_k \times \chi_A + a_{n-1}^{(k)} X^{n-1} + \dots + a_1^{(k)} X + a_0^{(k)} \text{ où } Q_k \in \mathbb{R}[X] \text{ et } (a_0^{(k)}, \dots, a_{n-1}^{(k)}) \in \mathbb{C}^n.$$

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre alors que  $A^k = a_{n-1}^{(k)} A^{n-1} + \dots + a_1^{(k)} A + a_0^{(k)} I_n$ .

Ainsi,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k \in \text{Vect}(A^{n-1}, \dots, A, I_n)$  puis  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \in \text{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I_n)$ . Enfin, puisque  $\text{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I_n)$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie,  $\exp(A) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \in \text{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I_n)$ .

On a montré que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exp(A) \in \mathbb{C}_{n-1}[A].$$