Enoncés et corrections : Sandra Delaunay

Sujets de l'année 2005-2006

1 Devoir à la maison

Exercice 1

Soient a,b,c des réels vérifiant $a^2+b^2+c^2=1$ et P la matrice réelle 3×3 suivante :

$$P=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de P.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $\ker P$ et $\operatorname{Im} P$.
3. Soit $Q=I-P$, calculer P^2, PQ, QP et Q^2.
4. Caractériser géométriquement P et Q.

Correction ▼ [002578]

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et u un endomorphisme de E. On suppose u nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier strictement positif n tel que $u^n=0$.

1. Montrer que u n'est pas inversible.
2. Déterminer les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.

Correction ▼ [002579]

Exercice 3

Soit M la matrice de $\mathbb{R}^4$ suivante

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D=P^{-1}MP$, pour $k\in\mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k, puis calculer M^k.

Correction ▼ [002580]

2 Partiel

Exercice 4

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que les valeurs propres de A sont -1 et 2. Déterminer les sous-espaces propres associés.
3. Démontrer que A est diagonalisable et donner une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
4. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Correction ▼ [002581]

Exercice 5

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de A et déterminer pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.
2. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible.

Correction ▼ [002582]

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Expliquer sans calcul pourquoi la matrice A n'est pas diagonalisable.

Correction ▼ [002583]

Exercice 7

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels. On suppose que dans chaque colonne de A la somme des coefficients est égale à 1.

1. Soient (x_1, x_2), (y_1, y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on suppose que
$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
montrer qu'alors
$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$
2. Soit le vecteur $\varepsilon = (1, -1)$, montrer que c'est un vecteur propre de A. On notera λ sa valeur propre.
3. Montrer que si v est un vecteur propre de A non colinéaire à ε, alors la valeur propre associée à v est égale à 1.
4. Soit $e_1 = (1, 0)$. Montrer que la matrice, dans la base (e_1, ε), de l'endomorphisme associé à A est de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix},$$
où $\alpha \in \mathbb{R}$.
En déduire que si $\lambda \neq 1$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [002584]

Exercice 8

Soient A et B des matrices non nulles de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A.B = 0$.

1. Démontrer que $\operatorname{Im} B \subset \ker A$.
2. On suppose que le rang de A est égal à $n - 1$, déterminer le rang de B.

Correction ▼ [002585]

3 Examen

Exercice 9

I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Première partie :

1. Factoriser le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.
2. Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.
3. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.
4. Déterminer selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.

Seconde partie :
On suppose désormais que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A.

1. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
2. Démontrer que f admet un plan stable (c'est-à-dire f-invariant).
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$ et exprimer $\exp tA$ à l'aide de P et $\exp tB$.
6. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.

II

On rappelle qu'une matrice $N \in M_n(\mathbb{C})$ est dite nilpotente d'ordre m si $N^m = 0$, et si pour tout k dans $\mathbb{N}$, $k < m$, on a $N^k \neq 0$. Soient $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'ordre m et $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $AN = NA$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de N. En déduire le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de N.
2. Déterminer les valeurs propres de N.
3. Démontrer que $\det(I+N) = 1$.
4. On suppose A inversible. Démontrer que les matrices AN et NA^{-1} sont nilpotentes. En déduire que

$$\det(A+N) = \det A.$$

5. On suppose A non inversible. En exprimant $(A+N)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, démontrer que

$$\det(A+N) = 0.$$

Correction ▼ [002586]

4 Rattrapage

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [002587]

Exercice 11

Soit N une matrice nilpotente, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $N^q = 0$. Montrer que la matrice $I - N$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de N.

Correction ▼ [002588]

Exercice 12

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).

Correction ▼ [002589]

Exercice 13

La suite de Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ est la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation de récurrence $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geq 1$, avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

1. Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \geq 1$,
$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que A admet deux valeurs propres réelles distinctes que l'on note λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
3. Trouver des vecteurs propres ε_1 et ε_2 associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2, sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, on les note x_1 et x_2.
5. Montrer que $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n x_1 \varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2 \varepsilon_2$. En déduire que
$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$
6. Donner un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [002590]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soient a,b,c des réels vérifiant $a^2+b^2+c^2=1$ et P la matrice réelle 3×3 suivante :

$$P=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}$$

1. Calculons le déterminant de P.

$$\det P=\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix} a & a & a\\ b & b & b\\ c & c & c\end{vmatrix}=0.$$

2. Déterminons les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, $\ker P$ et $\operatorname{Im} P$.

$$\ker P=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\},$$

on a

$$(x,y,z)\in\ker P\iff\begin{cases} a(ax+by+cz)=0\\ b(ax+by+cz)=0\\ c(ax+by+cz)=0\end{cases}$$

Or, a,b et c ne sont pas simultanément nuls car $a^2+b^2+c^2=1$, ainsi

$$\ker P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ ax+by+cz=0\},$$

c'est le plan vectoriel d'équation $ax+by+cz=0$.
L'image de P est le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs colonnes de la matrice P. Sachant que $\dim\ker P+\dim\operatorname{Im} P=\dim\mathbb{R}^3=3$, on sait que la dimension de l'image de P est égale à 1, c'est-à-dire que l'image est une droite vectorielle. En effet, les vecteurs colonnes de P sont les vecteurs

$$\begin{pmatrix} a^2\\ ab\\ ac\end{pmatrix},\begin{pmatrix} ab\\ b^2\\ bc\end{pmatrix},\begin{pmatrix} ac\\ bc\\ c^2\end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$a\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix},b\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix},c\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}.$$

Le sous-espace $\operatorname{Im} P$ est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}$.

3. Soit $Q=I-P$, calculons P^2, PQ, QP et Q^2.

$$\begin{aligned}P^2&=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} a^4+a^2b^2+a^2c^2 & a^3b+ab^3+abc^2 & a^3c+ab^2c+ac^3\\ a^3b+ab^3+abc^2 & a^2b^2+b^4+b^2c^2 & a^2bc+b^3c+bc^3\\ a^3c+ab^2c+ac^3 & a^2bc+b^3c+bc^3 & a^2c^2+b^2c^2+c^4\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} a^2(a^2+b^2+c^2) & ab(a^2+b^2+c^2) & ac(a^2+b^2+c^2)\\ ab(a^2+b^2+c^2) & b^2(a^2+b^2+c^2) & bc(a^2+b^2+c^2)\\ ac(a^2+b^2+c^2) & bc(a^2+b^2+c^2) & c^2(a^2+b^2+c^2)\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac\\ ab & b^2 & bc\\ ac & bc & c^2\end{pmatrix}=P.\end{aligned}$$

Car $a^2+b^2+c^2=1$.
Si $Q=I-P$, on a

$$PQ=P(I-P)=PI-P^2=P-P=0,$$
$$QP=(I-P)P=IP-P^2=P-P=0$$

et

$$Q^2=(I-P)(I-P)=I^2-IP-PI+P^2=I-P-P+P=I-P=Q.$$

4. Caractérisons géométriquement P et Q.
Nous avons vu que le noyau de P était égal au plan vectoriel d'équation $ax+by+cz=0$ et que son image de était la droite vectorielle engendrée par le vecteur (a,b,c). Par ailleurs, on a $P^2=P$, égalité qui caractérise les projecteurs, l'endomorphisme de matrice P est donc la projection sur $\operatorname{Im}P$ suivant la direction $\ker P$.
Soit $X\in\mathbb{R}^3$, on a

$$QX=0 \iff IX-PX=0 \iff PX=X \iff X\in\operatorname{Im}P,$$

ainsi $\ker Q=\operatorname{Im}P$. D'autre part,

$$Q=I-P=\begin{pmatrix}1-a^2 & -ab & -ac\\ -ab & 1-b^2 & -bc\\ -ac & -bc & 1-c^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b^2+c^2 & -ab & -ac\\ -ab & a^2+c^2 & -bc\\ -ac & -bc & a^2+b^2\end{pmatrix}.$$

On a $\dim\operatorname{Im}Q=2$ et les vecteurs colonnes de Q vérifient l'équation $ax+by+cz=0$, ainsi $\operatorname{Im}Q=\ker P$. L'égalité $Q^2=Q$ prouve que Q est également un projecteur, c'est la projection sur $\operatorname{Im}Q$ dirigée par $\ker Q$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et u un endomorphisme de E. On suppose u nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier strictement positif n tel que $u^n=0$.

1. Montrons que u n'est pas inversible.
On a : $0=\det u^n=(\det u)^n$, d'où $\det u=0$, ce qui prouve que u n'est pas inversible.
2. Déterminons les valeurs propres de u et les sous-espaces propres associés.
Soit λ une valeur propre de u, il existe alors un vecteur $x\in E$ non nul tel que $u(x)=\lambda x$. Or, $u(x)=\lambda x\Rightarrow u^n(x)=\lambda^n x$. Mais, $u^n(x)=0$ et $x\neq 0$, d'où $\lambda^n=0$ et donc $\lambda=0$. La seule valeur propre possible de u est donc 0 et c'est une valeur propre car, comme u n'est pas inversible, le noyau de u n'est pas réduit à $\{0\}$. L'endomorphisme u admet donc 0 comme unique valeur propre, le sous-espace propre associé est $\ker u$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit M la matrice de $\mathbb{R}^4$ suivante

$$M=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 7 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

1. Déterminons les valeurs propres de M et ses sous-espaces propres.
Les valeurs propres de M sont les réels λ tels que $\det(M-\lambda I)=0$.

$$\det(M-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 2 & -\lambda & -1 & 0\\ 0 & 7 & -\lambda & 6\\ 0 & 0 & 3 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^4-13\lambda^2+36=(\lambda^2-4)(\lambda^2-9)=(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda+3).$$

Les valeurs propres de M sont donc $2,-2,3$ et -3. Notons E_2, E_{-2}, E_3 et E_{-3} les sous-espaces propres associés.

$$
\begin{aligned}
E_2 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 2X\} \\
&= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = 2x, 2x - z = 2y, 7y + 6t = 2z, 3z = 2t\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\text{or } \begin{cases} y = 2x \\ 2x - z = 2y \\ 7y + 6t = 2z \\ 3z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 2x - z = 4x \\ 14x + 9z = 2z \\ 3z = 2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \\ t = -3x \end{cases}
$$

ainsi, E_2 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_1 = (1, 2, -2, -3)$.

$$
\begin{aligned}
E_{-2} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -2X\} \\
&= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = -2x, 2x - z = -2y, 7y + 6t = -2z, 3z = -2t\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\text{or } \begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = -2y \\ 7y + 6t = -2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ 2x - z = 4x \\ -14x - 9z = 2z \\ 3z = -2t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = -2x \\ t = 3x \end{cases}
$$

ainsi, E_{-2} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_2 = (1, -2, -2, 3)$.

$$
\begin{aligned}
E_3 &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = 3X\} \\
&= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = 3x, 2x - z = 3y, 7y + 6t = 3z, 3z = 3t\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\text{or } \begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 3y \\ 7y + 6t = 3z \\ 3z = 3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ 2x - z = 9x \\ 21x + 6t = 3z \\ z = t \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ z = -7x \\ t = -7x \end{cases}
$$

ainsi, E_3 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_3 = (1, 3, -7, -7)$.

$$
\begin{aligned}
E_{-3} &= \{X \in \mathbb{R}^4, MX = -3X\} \\
&= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, y = -3x, 2x - z = -3y, 7y + 6t = -3z, 3z = -3t\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\text{or } \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = -3y \\ 7y + 6t = -3z \\ 3z = -3t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ 2x - z = 9x \\ -21x - 6z = -3z \\ z = -t \end{cases} \iff \begin{cases} y = -3x \\ z = -7x \\ t = 7x \end{cases}
$$

ainsi, E_{-3} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_4 = (1, -3, -7, 7)$.

2. Montrons que M est diagonalisable.

   La matrice M admet quatre valeurs propres distinctes, ce qui prouve que les quatres vecteurs propres correspondants sont linéairement indépendants. En effet, les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 déterminés en 1) forment une base de $\mathbb{R}^4$. L'endomorphisme dont la matrice est M dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est représenté par une matrice diagonale dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4) puisque $Mu_1 = 2u_1, Mu_2 = -2u_2, Mu_3 = 3u_3$ et $Mu_4 = -3u_4$.

3. Déterminons une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
Une base de vecteurs propres a été déterminée dans les questions précédentes. C'est la base (u_1,u_2,u_3,u_4) et la matrice de passage est la matrice
$$P=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&-2&3&-3\\-2&-2&-7&-7\\-3&3&-7&7\end{pmatrix}$$

4. On a $D=P^{-1}MP$, pour $k\in\mathbb{N}$ exprimons M^k en fonction de D^k, puis calculons M^k.
On a
$$D=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}\text{ donc }D^k=\begin{pmatrix}2^k&0&0&0\\0&(-2)^k&0&0\\0&0&3^k&0\\0&0&0&(-3)^k\end{pmatrix}.$$
Mais, $M=PDP^{-1}$, d'où, pour $k\in\mathbb{N}$, $M^k=(PDP^{-1})^k=PD^kP^{-1}$.
Pour calculer M^k, il faut donc déterminer la matrice P^{-1} qui exprime les coordonnées des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ dans la base (u_1,u_2,u_3,u_4).
On résout le système, et on a :
$$\begin{array}{l}u_1=i+2j-2k-3l\\u_2=i-2j-2k+3l\\u_3=i+3j-7k-7t\\u_4=i-3j-7k+7l\end{array}\iff\begin{cases}i=\frac{1}{10}(7u_1+7u_2-2u_3-2u_4)\\j=\frac{1}{10}(7u_1-7u_2-3u_3+3u_4)\\k=\frac{1}{10}(u_1+u_2-u_3-u_4)\\l=\frac{1}{10}(3u_1-3u_2-2u_3+2u_4)\end{cases}$$
d'où
$$P^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}7&7&1&3\\7&-7&1&-3\\-2&-3&-1&-2\\-2&3&-1&2\end{pmatrix}$$
et
$$M^k=PD^kP^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&-2&3&-3\\-2&-2&-7&-7\\-3&3&7&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k&0&0&0\\0&(-2)^k&0&0\\0&0&3^k&0\\0&0&0&(-3)^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&7&1&3\\7&-7&1&-3\\-2&-3&-1&-2\\-2&3&-1&2\end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A=\begin{pmatrix}-3&-2&-2\\2&1&2\\3&3&2\end{pmatrix}$$

1. Déterminons le polynôme caractéristique de A.
On a
$$\begin{aligned}P_A(X)&=\begin{vmatrix}-3-X&-2&-2\\2&1-X&2\\3&3&2-X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3-X&0&-2\\2&-1-X&2\\3&1+X&2-X\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}-3-X&0&-2\\5&0&4-X\\3&1+X&2-X\end{vmatrix}=-(1+X)\begin{vmatrix}-3-X&-2\\5&4-X\end{vmatrix}\\&=-(1+X)[(X-4)(X+3)+10]=-(1+X)(X^2-X-2)=-(1+X)^2(X-2)\end{aligned}$$

2. Démontrons que les valeurs propres de A sont -1 et 2 et déterminons les sous-espaces propres associés.
   Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, ce sont donc bien les réels -1 et 2.
   Les sous-espaces propres associés sont les ensembles

$$E_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ker(A + I_3)$$

   et

$$E_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \ker(A - 2I_3)$$

   On a

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -3x - 2y - 2z = -x \\ 2x + y + 2z = -y \\ 3x + 3y + 2z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} -2x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

   Le sous-espace caractéristique E_{-1} associé à la valeur propre -1 est donc le plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$, il est de dimension 2, égale à la multiplicité de la racine -1.
   On a

$$(x,y,z) \in E_2 \iff \begin{cases} -3x - 2y - 2z = 2x \\ 2x + y + 2z = 2y \\ 3x + 3y + 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} -5x - 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

   ce qui équivaut à $y = -x$ et $2z = -3x$.
   Le sous-espace caractéristique E_2 associé à la valeur propre 2 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(2,-2,-3)$, il est de dimension 1, égale à la multiplicité de la racine 2.
3. Démontrons que A est diagonalisable et donnons une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est diagonale.
   La question précédente et les résultats obtenus sur les dimensions des sous-espaces propres permettent d'affirmer que la matrice A est diagonalisable. Une base de $\mathbb{R}^3$ obtenue à partir de bases des sous-espaces propres est une base de vecteurs propres dans laquelle la matrice de u est diagonale. Par exemple dans la base formée des vecteurs $u_1 = (1,-1,0)$, $u_2 = (1,0,-1)$ et $u_3 = (2,-2,-3)$, la matrice de u est la matrice D qui s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
   La matrice cherchée P est la matrice de passage exprimant la base de vecteurs propres (u_1, u_2, u_3) dans la base canonique. C'est donc la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

   On a $P^{-1}AP = D$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculons le déterminant de A et déterminons pour quelles valeurs de a la matrice est inversible.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = -1 - a^3.$$

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, c'est-à-dire si et seulement si $1 + a^3 \neq 0$, ce qui équivaut à $a \neq -1$ car $a \in \mathbb{R}$.

2. Calculons A^{-1} lorsque A est inversible, c'est-à-dire $a \neq -1$. Pour cela nous allons déterminer la comatrice $\tilde{A}$ de A. On a

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix},$$

on remarque que $\tilde{A} = {}^t\tilde{A}$ et on a bien $A{}^t\tilde{A} = {}^t\tilde{A}A = (-1-a^3)I_3$ d'où

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1-a^3)}\tilde{A} = \frac{1}{-1-a^3}\begin{pmatrix} -1 & a & -a^2 \\ a & -a^2 & -1 \\ -a^2 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Expliquons sans calcul pourquoi la matrice A n'est pas diagonalisable.

On remarque que le polynôme caractéristique de A est égal à $(1-X)^4$. Ainsi la matrice A admet-elle une unique valeur propre : $\lambda = 1$, si elle était diagonalisable, il existerait une matrice P inversible telle que $A = PI_4P^{-1}$ alors $A = I_4$, or ce n'est pas le cas, par conséquent la matrice A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels. On suppose que dans chaque colonne de A la somme des coefficients est égale à 1.

1. Soient (x_1, x_2), (y_1, y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, on suppose que

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

montrons qu'alors

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$

Compte tenu des hypothèses, la matrice A est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix},$$

où a et b sont des réels. On a alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ (1-a)x_1 + (1-b)x_2 = y_2 \end{cases}$$

ce qui implique $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.

2. Montrons que le vecteur $\varepsilon = (1,-1)$ est un vecteur propre de A.

   Si $A\varepsilon = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, alors $y_1 + y_2 = 0$ donc $y_2 = -y_1$ et $A\varepsilon = y_1\varepsilon$, ce qui prouve que ε est un vecteur propre.

   On peut aussi le voir de la manière suivante

$$A\varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-a \end{pmatrix} = (a-b)\varepsilon.$$

   On note $\lambda = (a-b)$ sa valeur propre.

3. Montrons que si v est un vecteur propre de A non colinéaire à ε, alors la valeur propre associée à v est égale à 1.

   Soit $v = (x_1, x_2)$ un vecteur propre de A non colinéaire à ε, notons μ sa valeur propre, on a $Av = \mu v$, et, d'après la question 1), on a

$$x_1 + x_2 = \mu x_1 + \mu x_2 = \mu(x_1 + x_2)$$

   ce qui implique $\mu = 1$ car v est supposé non colinéaire à ε donc $x_1 + x_2 \neq 0$.

4. Soit $e_1 = (1,0)$. Montrons que la matrice, dans la base (e_1, ε), de l'endomorphisme associé à A est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix},$$

   où $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Pour cela on écrit Ae_1 et $A\varepsilon$ dans la base (e_1, ε). On a d'une part $A\varepsilon = \lambda\varepsilon$ et, d'autre part,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (a-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   D'où la matrice dans la base (e_1, ε)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \lambda \end{pmatrix}$$

   où $\alpha = a-1$ et $\lambda = a-b$.

   On en déduit que si $\lambda \neq 1$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Le polynôme caractéristique de A est égal à $(1-X)(\lambda - X)$, ainsi, si $\lambda \neq 1$, il admet deux racines distinctes ce qui prouve que A est diagonalisable.

Correction de l'exercice 8 ▲

Soient A et B des matrices non nulles de $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A.B = 0$.

1. Démontrons que $\mathrm{Im}\,B \subset \ker A$.

   Soit $y \in \mathrm{Im}\,B$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = Bx$, d'où $Ay = ABx = 0$, ainsi $y \in \ker A$ ce qui prouve l'inclusion.

2. On suppose que le rang de A est égal à $n-1$, déterminons le rang de B.

   On a $\mathrm{rg}B = \dim \mathrm{Im}\,B$ et on sait que $\dim \mathrm{Im}\,A + \dim \ker A = n$ par conséquent, si $\mathrm{rg}A = n-1$ on a $\dim \ker A = 1$ et l'inclusion $\mathrm{Im}\,B \subset \ker A$ implique $\dim \mathrm{Im}\,B \leq 1$ or, B est supposée non nulle d'où $\dim \mathrm{Im}\,B = 1 = \mathrm{rg}B$.

Correction de l'exercice 9 ▲

I

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Première partie :

1. *Factorisons le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.*
   On a

$$
\begin{aligned}
P_{A_\alpha}(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2-X & 0 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ -1-X & -2-X & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1-X & 0 & \alpha+1 \\ 0 & -2-X & -\alpha-1 \\ -1 & 1 & \alpha-X \end{vmatrix} \\
&= (-1-X)[(-2-X)(\alpha-X)+\alpha+1] \\
&= -(X+1)[X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha].
\end{aligned}
$$

   Factorisons le polynôme $X^2+(2-\alpha)X+1-\alpha$, son discriminant est égal à

$$\Delta = (2-\alpha)^2 - 4(1-\alpha) = \alpha^2.$$

   On a donc $\sqrt{\Delta} = |\alpha|$, ce qui nous donne les deux racines

$$\lambda_1 = \frac{\alpha-2-\alpha}{2} = -1 \text{ et } \lambda_2 = \frac{\alpha-2+\alpha}{2} = \alpha-1.$$

   Le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ se factorise donc en

$$P_{A_\alpha}(X) = -(X+1)^2(X-\alpha+1).$$

2. *Déterminons selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.*
   Les valeurs propres de A_α sont les racines du polynôme caractéristique P_{A_α}, ainsi,
   - si $\alpha = 0$, la matrice A_α admet une valeur propre triple $\lambda = -1$,
   - si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = -1$ valeur propre double et $\lambda_2 = \alpha - 1$, valeur propre simple.
3. *Déterminons les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable.*
   Il est clair que dans le cas $\alpha = 0$, la matrice n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était, il existerait une matrice inversible P telle que $A_\alpha = P(-I)P^{-1} = -I$, ce qui n'est pas le cas.
   Si $\alpha \neq 0$, la matrice A_α est diagonalisable si le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension 2. Déterminons ce sous-espace propre.

$$E_{-1} = \ker(A_\alpha + I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \right\}$$

   ainsi,

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+(\alpha+1)z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y+\alpha z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha+1)z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases}$$

   Il faut distinguer les cas $\alpha = -1$ et $\alpha \neq -1$.
   - Si $\alpha = -1$, le sous-espace E_{-1} est le plan vectoriel d'équation $x = y$, dans ce cas la matrice A_α est diagonalisable.
   - Si $\alpha \neq -1$, le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$, dans ce cas la matrice A_α n'est pas diagonalisable.
4. *Déterminons selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.*
   Notons Q_A le polynôme minimal de A_α. On sait que la matrice A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son polynôme minimal a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$ et que celles-ci sont simples. Or, nous venons de démontrer que A_α est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement $\alpha = -1$, on a donc
   - Si $\alpha = -1$, A_α est diagonalisable, donc $Q_A(X) = (X+1)(X-\alpha+1) = (X+1)(X+2)$.
   - Si $\alpha \neq -1$, A_α n'est pas diagonalisable, donc $Q_A(X) = P_A(X) = (X+1)^2(X-\alpha+1)$.

Seconde partie :
On suppose désormais que $\alpha = 0$, on note $A = A_0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice A. On a donc

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_A(X) = -(X+1)^3$.

1. *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*
   La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = -1$ de multiplicité 3, le sous-espace propre associé est l'espace $E_{-1} = \ker(A+I)$, et on a

$$(x,y,z) \in E_{-1} \iff \begin{cases} -x+z = -x \\ x-2y = -y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

   Le sous-espace E_{-1} est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$.
   Le sous-espace caractéristique de A, associé à l'unique valeur propre $\lambda = -1$, est le sous-espace $N_{-1} = \ker(A+I)^3$, or, compte tenu du théorème de Hamilton-Cayley, on sait que $P_A(A) = 0$, ainsi, la matrice $(A+I)^3$ est la matrice nulle, ce qui implique $N_{-1} = \mathbb{R}^3$, c'est donc l'espace tout entier.

2. *Démontrons que f admet un plan stable.*
   La matrice de f n'est pas diagonalisable, mais comme son polynôme caractéristique se factorise sur $\mathbb{R}$, elle est trigonalisable, ce qui prouve qu'elle admet un plan stable, le plan engendré par les deux premiers vecteurs d'une base de trigonalisation.
   Par ailleurs, on a $E_{-1} = \ker(A+I) \subset \ker(A+I)^2 \subset \ker(A+I)^3 = \mathbb{R}^3$, le sous-espace $\ker(A+I)^2$ est clairement stable par A car pour tout $v \in \ker(A+I)^2$, $Av \in \ker(A+I)^2$, en effet

$$(A+I)^2 Av = A(A+I)^2 v = 0.$$

   Démontrons que ce sous-espace est un plan. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   donc $\ker(A+I)^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+y+z = 0\}$, c'est bien un plan vectoriel.

3. *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   et trouvons une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
   Nous cherchons des vecteurs e_1, e_2, e_3 tels que $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 - e_2$ et $Ae_3 = e_2 - e_3$. Le vecteur e_1 appartient à $E_1 = \ker(A+I)$, nous choisirons $e_2 \in \ker(A+I)^2$ tel que (e_1, e_2) soit une base de $\ker(A+I)^2$.
   Remarquons que si l'on cherche $e_2 = (x,y,z)$ tel que $Ae_2 = e_1 - e_2$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = 1-y \\ -x+y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x-y = 1 \end{cases}$$

   ce qui nous donne bien un vecteur de $\ker(A+I)^2$. Ainsi, les vecteurs $e_1 = (1,1,0)$ et $e_2 = (1,0,1)$ conviennent. Il nous reste à chercher un vecteur e_3 tel que $Ae_3 = e_2 - e_3$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ 1-z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x+z = 1-x \\ x-2y = -y \\ -x+y = 1-z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases}$$

Le vecteur $e_3 = (0,0,1)$ convient. On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. *Décomposition de Dunford de B*

On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à $-I$. Or, il existe un unique couple de matrice D et N, D diagonalisable et N nilpotente, telles que $B = D+N$ et $DN = ND$. C'est donc là la décomposition de Dunford, $B = D+N$ avec

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. *Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons* $\exp tB$ *et exprimons* $\exp tA$ *à l'aide de P et* $\exp tB$.

Remarquons tout d'abord que $N^2 = 0$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(tN)^2 = 0$ et l'expenentielle est égale à $\exp(tN) = I + tN$, par ailleurs $ND = DN$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, les matrices tN et tD commutent également, $(tN)(tD) = (tD)(tN)$, on a donc

$$\exp(tB) = \exp(tD+tN) = \exp(tD)\exp(tN) = \exp(-tI)\exp(-tN) = e^{-t}(I+tN).$$

D'où

$$\exp(tB) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer l'exponentielle de la matrice tA, on écrit

$$\exp(tA) = \exp(t(PBP^{-1})) = \exp(P(tA)P^{-1}) = P\exp(tB)P^{-1}.$$

6. *Solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.*

La solution générale du système $Y' = BY$ s'écrit

$$S(t) = \exp(tB)v$$

où $v = (a,b,c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. La solution $S : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ s'écrit donc

$$S(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} a+bt \\ b+ct \\ c \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la solution du système $X' = AX$, on écrit

$$X' = AX \iff X' = (PBP^{-1})X \iff P^{-1}X' = (BP^{-1})X \iff (P^{-1}X)' = B(P^{-1}X)$$

ainsi, en notant $Y = P^{-1}X$ ou encore $X = PY$, les solutions du système $X' = AX$ sont les $PS(t)$ où P est la matrice vérifiant $A = PBP^{-1}$ et S une solution du système $Y' = BY$.

La solution générale du système $X' = AX$ s'écrit donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t}(a+bt) \\ e^{-t}(b+ct) \\ e^{-t}c \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} a+b+(c+b)t \\ a+bt \\ b+c+ct \end{pmatrix}$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

II

Soient K un corps, $N \in M_n(K)$ une matrice nilpotente et A une matrice telle que $AN = NA$.

1. *Déterminons les valeurs propres de N.*
   La matrice N étant nilpotente, il existe un entier naturel m tel que $N^n = 0$, on a donc $\det N^m = (\det N)^m = 0$ donc $\det N = 0$, l'endomophisme de matrice N n'est pas bijectif ce qui prouve que 0 est valeur propre de N, c'est la seule, en effet si λ est une autre valeur propre et $x \neq 0$ un vecteur propre associé à λ on a
   $$Nx = \lambda x \Rightarrow N^m x = \lambda^m x$$
   d'où $\lambda^m x = 0$, mais $x \neq 0$ donc $\lambda = 0$. Ainsi la matrice N admet une unique valeur propre $\lambda = 0$ de multiplicité n.
2. *Démontrons que N est trigonalisable.*
   Le polynôme caractéristique de N admet une unique racine $0 \in K$, toutes ses racines sont donc dans K, ce qui prouve que la matrice N est trigonalisable. Elle est semblable à une matrice triangulaire n'ayant que des 0 sur la diagonale.
3. *Démontrons que* $\det(I+N) = 1$.
   Compte tenu de ce qui précède, la matrice $N+I$ est une matrice triangulaire n'ayant que des 1 sur la diagonale, or le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux, ainsi on a bien $\det(N+I) = 1$.
4. *On suppose A inversible. Démontrons que les matrices AN et NA^{-1} sont nilpotentes.*
   Comme les matrices A et N commutent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(AN)^k = A^k N^k$ donc pour $k = m$, $(AN)^m = A^m N^m = A.0 = 0$ ce qui prouve que AN est nilpotente. De même $NA^{-1} = A^{-1}N$ et NA^{-1} est nilpotente.
   On en déduit que
   $$\det(A+N) = \det A.$$
   L'égalité $AN = NA$ implique $N = ANA^{-1}$ ainsi, on a
   $$\det(N+A) = \det(ANA^{-1}+A) = \det(A(NA^{-1}+I)) = \det A \det(NA^{-1}+I) = \det A.$$
5. *On suppose A non inversible. En exprimant $(A+N)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, démontrons que* $\det(A+N) = 0$.
   Comme les matrices A et N commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de $A+N$. Soit m tel que $N^m = 0$ et, pour tout $k < m, N^k \neq 0$ on a alors
   $$(A+N)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k N^{m-k} = \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^k N^{m-k} = A \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^{k-1} N^{m-k}$$
   ainsi
   $$\det((A+N)^m) = \det A . \det \sum_{k=1}^{m} C_m^k A^{k-1} N^{m-k} = 0$$
   car $\det A = 0$. Or, $\det((A+N)^m) = (\det(A+N))^m$, on a donc bien $\det(A+N) = 0$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, on montre que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & c \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - c^2 = X^2 - (a+d)X + ad - c^2,$$

déterminons ses racines : calculons le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (a+d)^2-4(ad-c^2)\\ &= a^2+d^2+2ad-4ad+4c^2\\ &= a^2+d^2-2ad+4c^2\\ &= (a-d)^2+4c^2 \geq 0\end{aligned}$$

On a $\Delta = 0 \iff a-d=0$ et $c=0$, mais, si $c=0$, la matrice A est déjà diagonale. Sinon $\Delta > 0$ et le polynôme caractéristique admet deux racines réelles distinctes, ce qui prouve que la matrice est toujours diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

Soit N une matrice nilpotente, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $N^q = 0$. Montrons que la matrice $I-N$ est inversible et exprimons son inverse en fonction de N.
On remarque que $(I-N)(I+N+N^2+\cdots+N^{q-1}) = I-N^q = I$. Ainsi, la matrice $I-N$ est inversible, et son inverse est $(I-N)^{-1} = I+N+N^2+\cdots+N^{q-1}$.

Correction de l'exercice 12 ▲

On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. *Factorisons le polynôme caractéristique de A.*
   On a

$$\begin{aligned}P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0\\ 1 & -X & -1\\ -1 & 0 & 2-X\end{vmatrix}\\ &= (1-X)\begin{vmatrix} -X & -1\\ 0 & 2-X\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1\\ -1 & 2-X\end{vmatrix}\\ &= (1-X)(X^2-2X)+(1-X)\\ &= (1-X)(X^2-2X+1) = (1-X)^3.\end{aligned}$$

   Le polynôme caractéristique de A admet une valeur propre triple $\lambda = 1$.

2. *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*
   La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = 1$ de multiplicité 3, le sous-espace propre associé est l'espace $E_1 = \ker(A-I)$, et on a

$$(x,y,z) \in E_1 \iff \begin{cases} x-y=x\\ x-z=y\\ -x+2z=z\end{cases} \iff \begin{cases} y=0\\ x=z\end{cases}$$

   Le sous-espace E_1 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,0,1)$.
   Le sous-espace caractéristique de A, associé à l'unique valeur propre $\lambda = 1$, est le sous-espace $N_1 = \ker(A-I)^3$, or, compte tenu du théorème de Hamilton-Cayley, on sait que $P_A(A) = 0$, ainsi, la matrice $(A-I)^3$ est la matrice nulle, ce qui implique $N_1 = \mathbb{R}^3$, c'est donc l'espace tout entier.

3. *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Nous cherchons des vecteurs e_1, e_2, e_3 tels que $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_1 + e_2$ et $Ae_3 = e_2 + e_3$. Le vecteur e_1 appartient à $E_1 = \ker(A - I)$, et $\ker(A - I)$ est la droite d'équations :
$\{y = 0, x = z\}$. On détermine $e_2 = (x, y, z)$ tel que $Ae_2 = e_1 + e_2$, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ 1+y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - y = 1 + x \\ x - z = y \\ -x + 2z = 1 + z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

Ainsi, les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$ et $e_2 = (-1, -1, 0)$ conviennent. Il nous reste à chercher un vecteur e_3 tel que $Ae_3 = e_2 + e_3$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+x \\ -1+y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - y = x - 1 \\ x - z = y - 1 \\ -x + 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = z \end{cases}$$

Le vecteur $e_3 = (0, 1, 0)$ convient. On obtient alors la matrice P suivante qui est inversible et vérifie $A = PBP^{-1}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. *Décomposition de Dunford de B*
On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et il est clair que les deux matrices commutent car l'une est égale à I. Or, il existe un unique couple de matrices D et N, D diagonalisable et N nilpotente, telles que $B = D + N$ et $DN = ND$. Or si

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $N^3 = 0$. La décomposition $B = D + N$ est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

Correction de l'exercice 13 ▲

La suite de Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ est la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation de récurrence $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geq 1$, avec $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

1. *Déterminons une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \geq 1$,*

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}.$$

On a $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$.

Notons, pour $n \geq 1$, X_n le vecteur $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$ et A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nous allons démontrer, par récurrence sur n que pour tout $n \geq 1$, on a $X_n = A^n X_0$, c'est clairement vrai pour $n = 1$, supposons que ce soit vrai pour un n arbitrairement fixé, on a alors

$$X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0,$$

d'où le résultat.

2. *Montrons que A admet deux valeurs propres réelles distinctes que l'on note λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$.*
   On a
$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - X - 1.$$
   Le discriminant $\Delta = 5 > 0$, le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes
$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

3. *Trouvons des vecteurs propres ε_1 et ε_2 associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2, sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*
   Posons $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ et calculons α tel que $A\varepsilon_1 = \lambda_1 \varepsilon_1$, c'est-à-dire
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$
   ce qui équivaut à
$$\begin{cases} \alpha + 1 = \lambda_1 \alpha \\ \alpha = \lambda_1 \end{cases} \iff \alpha = \lambda_1$$
   car $\lambda_1^2 - \lambda_1 - 1 = 0$, on a donc $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, de même, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. *Déterminons les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, on les note x_1 et x_2.*
   On cherche x_1 et x_2 tels que
$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \varepsilon_1 + x_2 \varepsilon_2 = x_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   x_1 et x_2 sont donc solutions du système
$$\begin{cases} x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 1 \\ x_2 = -x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \\ x_2 = -\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

5. *Montrons que $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n x_1 \varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2 \varepsilon_2$.*
   Les vecteurs ε_1 et ε_2 étant vecteurs propres de A, on a $A\varepsilon_1 = \lambda_1\varepsilon_1$ et $A\varepsilon_2 = \lambda_2\varepsilon_2$, ainsi par récurrence, on a, pour tout $n \geq 1$, $A^n\varepsilon_1 = \lambda_1^n\varepsilon_1$ et $A^n\varepsilon_2 = \lambda_2^n\varepsilon_2$. Ainsi,
$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^n(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2) = x_1 A^n \varepsilon_1 + x_2 A^n \varepsilon_2 = \lambda_1^n x_1 \varepsilon_1 + \lambda_2^n x_2 \varepsilon_2.$$
   On en déduit que
$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}\ .$$
   On a montré que $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a donc,
$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n \left(\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2^n \left(\frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
   d'où le résultat
$$F_n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}\ .$$

6. *Donnons un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.*

   On remarque que $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ ainsi, lorsque n tend vers l'infini, λ_1^n tend vers 0 et λ_2^n tend vers $+\infty$. On a donc
$$\lim_{n\to+\infty} (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{F_n}{\lambda_2^n} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{\lambda_1^n}{\lambda_2^n} + 1 = 1.$$
   Ce qui prouve que $\dfrac{\lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1}$ est un équivalent de F_n lorsque n tend vers $+\infty$.
