

Limites de fonctions

1 Théorie

Exercice 1

1. Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que toute fonction croissante et majorée admet une limite finie en $+\infty$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000612]

Exercice 2

1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$.
2. Soient m, n des entiers positifs. Étudier $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$.
3. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sqrt{1+x+x^2} - 1) = \frac{1}{2}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000609]

2 Calculs

Exercice 3

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+2|x|}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
 d) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
 g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000616]

Exercice 4

Calculer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x (\cos 2x - \cos x)},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x} - \sqrt{x}}},$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2 x}, \text{ en fonction de } \alpha \in \mathbb{R}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000628]

Exercice 5

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + e^{-x}))^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000635]

Exercice 6

Trouver pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000637]

Exercice 7

Trouver pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000638]

Exercice 8

Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x + \sqrt{x})$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x \ln x}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x+1)}$
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1} \ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$
8. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^2 - 1) \ln(7x^3 + 4x^2 + 3)$
9. $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^x - 1)}{\ln(x+1)}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x - x \ln(x+2))$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2 - x}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^x$$

$$15. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2} \right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x+1}}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}}$$

[Correction ▼](#)

[000623]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Raisonner par l'absurde.
 2. Montrer que la limite est la borne supérieure de l'ensemble des valeurs atteintes $f(\mathbb{R})$.
-

Indication pour l'exercice 2 ▲

Utiliser l'expression conjuguée.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Réponses :

1. La limite à droite vaut $+2$, la limite à gauche -2 donc il n'y a pas de limite.
 2. $-\infty$
 3. 4
 4. 2
 5. $\frac{1}{2}$
 6. 0
 7. $\frac{1}{3}$ en utilisant par exemple que $a^3 - 1 = (a - 1)(1 + a + a^2)$ pour $a = \sqrt[3]{1 + x^2}$.
 8. $\frac{1}{n}$
-

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. Calculer d'abord la limite de $f(x) = \frac{x^k - \alpha^k}{x - \alpha}$.
 2. Utiliser $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ et faire un changement de variable $u = \cos x$.
 3. Utiliser l'expression conjuguée.
 4. Diviser numérateur et dénominateur par $\sqrt{x - \alpha}$ puis utiliser l'expression conjuguée.
 5. On a toujours $y - 1 \leq E(y) \leq y$, poser $y = 1/x$.
 6. Diviser numérateur et dénominateur par $x - 2$.
 7. Pour $\alpha \geq 4$ il n'y a pas de limite, pour $\alpha < 4$ la limite est $+\infty$.
-

Indication pour l'exercice 5 ▲

Réponses : $0, \frac{1}{e}, e$.

1. Borner $\sin \frac{1}{x}$.
 2. Utiliser que $\ln(1 + t) = t \cdot \mu(t)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0$.
 3. Utiliser que $e^t - 1 = t \cdot \mu(t)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0$.
-

Indication pour l'exercice 6 ▲

Réponse : $\max(a, b)$.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Réponse : \sqrt{ab} .

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $p > 0$ la période : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+p) = f(x)$. Par une récurrence facile on montre :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+np) = f(x).$$

Comme f n'est pas constante il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Notons $x_n = a + np$ et $y_n = b + np$. Supposons, par l'absurde, que f a une limite ℓ en $+\infty$. Comme $x_n \rightarrow +\infty$ alors $f(x_n) \rightarrow \ell$. Mais $f(x_n) = f(a+np) = f(a)$, donc $\ell = f(a)$. De même avec la suite $(y_n) : y_n \rightarrow +\infty$ donc $f(y_n) \rightarrow \ell$ et $f(y_n) = f(b+np) = f(b)$, donc $\ell = f(b)$. Comme $f(a) \neq f(b)$ nous obtenons une contradiction.

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et majorée par $M \in \mathbb{R}$. Notons

$$F = f(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

F est un ensemble (non vide) de \mathbb{R} , notons $\ell = \sup F$. Comme $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de F , alors $\ell < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, par les propriétés du sup il existe $y_0 \in F$ tel que $\ell - \varepsilon \leq y_0 \leq \ell$. Comme $y_0 \in F$, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = y_0$. Comme f est croissante alors :

$$\forall x \geq x_0 \quad f(x) \geq f(x_0) = y_0 \geq \ell - \varepsilon.$$

De plus par la définition de ℓ :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq \ell.$$

Les deux propriétés précédentes s'écrivent :

$$\forall x \geq x_0 \quad \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell.$$

Ce qui exprime bien que la limite de f en $+\infty$ est ℓ .

Correction de l'exercice 2 ▲

Généralement pour calculer des limites faisant intervenir des sommes de racines carrées, il est utile de faire intervenir "l'expression conjuguée" :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Les racines au numérateur ont "disparu" en utilisant l'identité $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.

Appliquons ceci sur un exemple :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{1+x^m - (1-x^m)}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^m}{x^n(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} \\ &= \frac{2x^{m-n}}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} \end{aligned}$$

Et nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = 1.$$

Donc l'étude de la limite de f en 0 est la même que celle de la fonction $x \mapsto x^{m-n}$. Distinguons plusieurs cas pour la limite de f en 0.

- Si $m > n$ alors x^{m-n} , et donc $f(x)$, tendent vers 0.
- Si $m = n$ alors x^{m-n} et $f(x)$ tendent vers 1.
- Si $m < n$ alors $x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}} = \frac{1}{x^k}$ avec $k = n - m$ un exposant positif. Si k est pair alors les limites à droite et à gauche de $\frac{1}{x^k}$ sont $+\infty$. Pour k impair la limite à droite vaut $+\infty$ et la limite à gauche vaut $-\infty$. Conclusion pour $k = n - m > 0$ pair, la limite de f en 0 vaut $+\infty$ et pour $k = n - m > 0$ impair f n'a pas de limite en 0 car les limites à droite et à gauche ne sont pas égales.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x}$. Si $x > 0$ cette expression vaut $x + 2$ donc la limite à droite en $x = 0$ est $+2$. Si $x < 0$ l'expression vaut -2 donc la limite à gauche en $x = 0$ est -2 . Les limites à droite et à gauche sont différentes donc il n'y a pas de limite en $x = 0$.
2. $\frac{x^2+2|x|}{x} = x + 2\frac{|x|}{x} = x - 2$ pour $x < 0$. Donc la limite quand $x \rightarrow -\infty$ est $-\infty$.
3. $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$, lorsque $x \rightarrow 2$ cette expression tend vers 4.
4. $\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = 1 - \cos x$. Lorsque $x \rightarrow \pi$ la limite est donc 2.
5. $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x-(1+x^2)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{x-x^2}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})} = \frac{1-x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}$. Lorsque $x \rightarrow 0$ la limite vaut $\frac{1}{2}$.
6. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3} = (\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}) \times \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{x+5-(x-3)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}} = \frac{2}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-3}}$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, la limite vaut 0.
7. Nous avons l'égalité $a^3 - 1 = (a-1)(1+a+a^2)$. Pour $a = \sqrt[3]{1+x^2}$ cela donne :

$$\frac{a-1}{x^2} = \frac{a^3-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1+x^2-1}{x^2(1+a+a^2)} = \frac{1}{1+a+a^2}.$$

Lors que $x \rightarrow 0$, alors $a \rightarrow 1$ et la limite cherchée est $\frac{1}{3}$.

Autre méthode : si l'on sait que la limite d'un taux d'accroissement correspond à la dérivée nous avons une méthode moins astucieuse. Rappel (ou anticipation sur un prochain chapitre) : Pour une fonction f dérivable en a alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Pour la fonction $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ ayant $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}$ cela donne en $a = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \frac{1}{3}.$$

8. $\frac{x^n-1}{x-1} = 1+x+x^2+\dots+x^{n-1}$. Donc si $x \rightarrow 1$ la limite de $\frac{x^n-1}{x-1}$ est n . Donc la limite de $\frac{x-1}{x^n-1}$ en 1 est $\frac{1}{n}$.
La méthode avec le taux d'accroissement fonctionne aussi très bien ici. Soit $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$ et $a = 1$. Alors $\frac{x^n-1}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tend vers $f'(1) = n$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Montrons d'abord que la limite de

$$f(x) = \frac{x^k - \alpha^k}{x - \alpha}$$

en α est $k\alpha^{k-1}$, k étant un entier fixé. Un calcul montre que $f(x) = x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \dots + \alpha^{k-1}$; en effet $(x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \alpha^2 x^{k-3} + \dots + \alpha^{k-1})(x - \alpha) = x^k - \alpha^k$. Donc la limite en $x = \alpha$ est $k\alpha^{k-1}$. Une autre méthode consiste à dire que $f(x)$ est le taux d'accroissement de la fonction x^k , et donc la limite de f en α est exactement la valeur de la dérivée de x^k en α , soit $k\alpha^{k-1}$. Ayant fait ceci revenons à la limite de l'exercice : comme

$$\frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x^n - \alpha^n} = \frac{x^{n+1} - \alpha^{n+1}}{x - \alpha} \times \frac{x - \alpha}{x^n - \alpha^n}.$$

Le premier terme du produit tend vers $(n+1)\alpha^n$ et le second terme, étant l'inverse d'un taux d'accroissement, tend vers $1/(n\alpha^{n-1})$. Donc la limite cherchée est

$$\frac{(n+1)\alpha^n}{n\alpha^{n-1}} = \frac{n+1}{n}\alpha.$$

2. La fonction $f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)}$ s'écrit aussi $f(x) = \frac{1 - \cos x}{\cos x(\cos 2x - \cos x)}$. Or $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$. Posons $u = \cos x$, alors

$$f(x) = \frac{1-u}{u(2u^2-u-1)} = \frac{1-u}{u(1-u)(-1-2u)} = \frac{1}{u(-1-2u)}$$

Lorsque x tend vers 0, $u = \cos x$ tend vers 1, et donc $f(x)$ tend vers $-\frac{1}{3}$.

3.

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} &= \frac{\left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right) \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}} + 1} \end{aligned}$$

Quand $x \rightarrow +\infty$ alors $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ et $\frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}} \rightarrow 0$, donc la limite recherchée est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. La fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha} - \sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x - \alpha}\sqrt{x + \alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x - \alpha}} - 1}{\sqrt{x + \alpha}}.$$

Notons $g(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{x - \alpha}}$ alors à l'aide de l'expression conjuguée

$$g(x) = \frac{x - \alpha}{(\sqrt{x - \alpha})(\sqrt{x} + \sqrt{\alpha})} = \frac{\sqrt{x - \alpha}}{\sqrt{x} + \sqrt{\alpha}}.$$

Donc $g(x)$ tend vers 0 quand $x \rightarrow \alpha^+$. Et maintenant $f(x) = \frac{g(x) - 1}{\sqrt{x + \alpha}}$ tend vers $-\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$.

5. Pour tout réel y nous avons la double inégalité $y - 1 \leq E(y) \leq y$, donc $\frac{y-1}{y} \leq \frac{E(y)}{y} \leq 1$. On en déduit que lorsque y tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) alors $\frac{E(y)}{y}$ tend 1. En posant $y = 1/x$, et en faisant tendre x vers 0, alors $xE(\frac{1}{x}) = \frac{E(y)}{y}$ tend vers 1.

6.

$$\frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6} = \frac{e^x - e^2}{x - 2} \times \frac{x - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{e^x - e^2}{x - 2} \times \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{e^x - e^2}{x - 2} \times \frac{1}{x + 3}.$$

La limite de $\frac{e^x - e^2}{x - 2}$ en 2 vaut e^2 ($\frac{e^x - e^2}{x - 2}$ est la taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto e^x$ en la valeur $x = 2$), la limite voulue est $\frac{e^2}{5}$.

7. Soit $f(x) = \frac{x^4}{1 + x^\alpha \sin^2 x}$. Supposons $\alpha \geq 4$, alors on prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet pour pour $u_k = 2k\pi$, $f(2k\pi) = (2k\pi)^4$ tend vers $+\infty$ lorsque k (et donc u_k) tend vers $+\infty$. Cependant pour $v_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $f(v_k) = \frac{v_k^4}{1 + v_k^\alpha}$ tend vers 0 (ou vers 1 si $\alpha = 4$) lorsque k (et donc v_k) tend vers $+\infty$. Ceci prouve que $f(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Reste le cas $\alpha < 4$. Il existe β tel que $\alpha < \beta < 4$.

$$f(x) = \frac{x^4}{1+x^\alpha \sin^2 x} = \frac{x^{4-\beta}}{\frac{1}{x^\beta} + \frac{x^\alpha}{x^\beta} \sin^2 x}.$$

Le numérateur tend $+\infty$ car $4-\beta > 0$. $\frac{1}{x^\beta}$ tend vers 0 ainsi que $\frac{x^\alpha}{x^\beta} \sin^2 x$ (car $\beta > \alpha$ et $\sin^2 x$ est bornée par 1). Donc le dénominateur tend vers 0 (par valeurs positives). La limite est donc de type $+\infty/0^+$ (qui n'est pas indéterminée !) et vaut donc $+\infty$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Comme $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq +1$ alors $1 \leq 2 + \sin \frac{1}{x} \leq +3$. Donc $\frac{x}{3} \leq \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}} \leq x$. Ce qui implique $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 + \sin \frac{1}{x}} = 0$.
2. Sachant que $\frac{\ln(1+t)}{t} \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0$, on peut le reformuler ainsi $\ln(1+t) = t \cdot \mu(t)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0$. Donc $\ln(1+e^{-x}) = e^{-x} \mu(e^{-x})$. Maintenant

$$\begin{aligned} (\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}} &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln(\ln(1+e^{-x}))\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln(e^{-x} \mu(e^{-x}))\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} (-x + \ln \mu(e^{-x}))\right) \\ &= \exp\left(-1 + \frac{\ln \mu(e^{-x})}{x}\right) \end{aligned}$$

$\mu(e^{-x}) \rightarrow 1$ donc $\ln \mu(e^{-x}) \rightarrow 0$, donc $\frac{\ln \mu(e^{-x})}{x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

3.

Sachant $\frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$, on reformule ceci en $e^x - 1 = x \cdot \mu(x)$, pour une certaine fonction μ qui vérifie $\mu(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$. Cela donne $\ln(e^x - 1) = \ln(x \cdot \mu(x)) = \ln x + \ln \mu(x)$.

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} &= \exp\left(\frac{1}{\ln(e^x - 1)} \ln x\right) \\ &= \exp\left(\frac{\ln x}{\ln x + \ln \mu(x)} \ln x\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{1 + \frac{\ln \mu(x)}{\ln x}}\right) \end{aligned}$$

Maintenant $\mu(x) \rightarrow 1$ donc $\ln \mu(x) \rightarrow 0$, et $\ln x \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 0$. Donc $\frac{\ln \mu(x)}{\ln x} \rightarrow 0$. Cela donne

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{1 + \frac{\ln \mu(x)}{\ln x}}\right) = \exp(1) = e.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Supposons $a \geq b$. Alors

$$\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(a^x \times \frac{1 + (\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a \left(\frac{1 + (\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Or $0 \leq \frac{b}{a} \leq 1$, donc $0 \leq (\frac{b}{a})^x \leq 1$ pour tout $x \geq 1$. Donc $(\frac{1}{2})^{\frac{1}{x}} \leq \left(\frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \leq 1^{\frac{1}{x}}$. Les deux termes extrêmes tendent vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ donc le terme du milieu tend aussi vers 1. Conclusion : si $a \geq b$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = a$. Si $b \geq a$ alors cette limite vaudrait b . Cela se résume dans le cas général où a, b sont quelconques par $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \max(a, b)$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit

$$f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)$$

$a^x \rightarrow 1, b^x \rightarrow 1$ donc $\frac{a^x+b^x}{2} \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$ et nous sommes face à une forme indéterminée. Nous savons que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$. Autrement dit il existe une fonction μ telle que $\ln(1+t) = t \cdot \mu(t)$ avec $\mu(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0$.

Appliquons cela à $g(x) = \ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$. Alors

$$g(x) = \ln\left(1 + \left(\frac{a^x+b^x}{2} - 1\right)\right) = \left(\frac{a^x+b^x}{2} - 1\right) \cdot \mu(x)$$

où $\mu(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$. (Nous écrivons pour simplifier $\mu(x)$ au lieu de $\mu(\frac{a^x+b^x}{2} - 1)$.)

Nous savons aussi que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$. Autrement dit il existe une fonction v telle que $e^t - 1 = t \cdot v(t)$ avec $v(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow 0$.

Appliquons ceci :

$$\begin{aligned} \frac{a^x+b^x}{2} - 1 &= \frac{1}{2}(e^{x \ln a} + e^{x \ln b}) - 1 \\ &= \frac{1}{2}(e^{x \ln a} - 1 + e^{x \ln b} - 1) \\ &= \frac{1}{2}(x \ln a \cdot v(x \ln a) + x \ln b \cdot v(x \ln b)) \\ &= \frac{1}{2}x(\ln a \cdot v(x \ln a) + \ln b \cdot v(x \ln b)) \end{aligned}$$

Reste à rassembler tous les éléments du puzzle :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} g(x)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} \left(\frac{a^x+b^x}{2} - 1\right) \cdot \mu(x)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x(\ln a \cdot v(x \ln a) + \ln b \cdot v(x \ln b)) \cdot \mu(x)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}(\ln a \cdot v(x \ln a) + \ln b \cdot v(x \ln b)) \cdot \mu(x)\right) \end{aligned}$$

Or $\mu(x) \rightarrow 1$, $\nu(x \ln a) \rightarrow 1$, $\nu(x \ln b) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \exp\left(\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(ab)\right) = \sqrt{ab}.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. $-\infty$
 2. 0
 3. $+\infty$
 4. $+\infty$
 5. $\frac{3}{2}$
 6. $-\infty$
 7. 0
 8. 0
 9. 0
 10. 0
 11. -2
 12. $-\infty$
 13. 1
 14. e^4
 15. 1
 16. e
 17. e
 18. 0
 19. 0
 20. 0
-