UNIVERSITE DE YAOUNDE 1

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE DE YAOUNDE

DEPARTEMENT DE MSP

UE : SERIES ET INTEGRALES Année 2020/2021 Semestre 1

PAR : Pr MANJIA MARCELINE Fiche TD 1

Exercice 1. Etudier les séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{1-\sin n}{1+n\sqrt{n}}, \quad v_n = \frac{e^n - 1}{\sqrt{n}}, \quad w_n = e^{-\sqrt{2+n}}, \quad x_n = 1 - \cos\frac{1}{n}.$$

Exercice 2. Etudier les séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{1}{n^2 + \sin n^5}, \quad v_n = \frac{e^{-2n} + \sqrt{n}}{n^2+1}, \quad w_n = \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n.$$

Exercice 3. Etudier les séries de termes généraux suivants :

$$u_n = \int_0^{\pi/n} \sqrt{\sin x}\; dx, \quad v_n = \frac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^{2n} \quad \text{avec } \alpha \in [0, \pi/2].$$

Exercice 4. Etudier les séries de termes généraux suivants :

$$u_n = \frac{\cos(n^2\pi)}{n\ln n}, \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos n}, \quad w_n = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + (-1)^n}\right).$$

Exercice 5. Etudier les séries de termes généraux suivants :

$$u_n = (-1)^n \arcsin\left(\frac{n+1}{n^2+3}\right), \quad v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 6. Etudier les séries de termes généraux suivants :

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)} \quad (n \geq 2), \quad v_n = \int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x}\, dx \quad (n \geq 1).$$

Exercice 7. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs.

1) On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\forall n \geq N \,,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \;\leq\; \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Montrer que si $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge.*

2) On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \;=\; 1 \;-\; \frac{\alpha}{n} \;+\; o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{lorsque} \quad n \to +\infty.$$

Montrer que

a) si $\alpha > 1$*, alors* $\sum u_n$ *converge,*

b) si $\alpha < 1$*, alors* $\sum u_n$ *diverge.*

Exercice 8. Soient $\sum u_n$ une série à termes positifs, et $\alpha \in R$.

1) Montrer que si $\sum u_n$ *converge et si* $\alpha \geq 1$*, alors la série* $\sum u_n^\alpha$ *converge.*

2) Montrer que si $\sum u_n$ *diverge et si* $\alpha \leq 1$*, alors la série* $\sum u_n^\alpha$ *diverge.*

Exercice 9. Etudier les séries de termes généraux :

$$u_n \;=\; \frac{a^n\, 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} \,+\, b^n}, \quad v_n \;=\; \frac{a^n + (\ln n)^{\sqrt{n}}}{b^n + (\sqrt{n})^{\ln n}}, \qquad (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 10. Etudier la nature de la série de terme général :

$$u_n \;=\; \left(\sqrt{n^2 + an + 2} \;-\; \sqrt{n^2 + bn + 1}\right)^n, \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2, \;\; a \geq b.$$

Exercice 11. Etablir la convergence puis calculer la somme des séries de termes généraux :

$$u_n \;=\; \frac{2n-1}{n^3 - 4n} \;\; (n \geq 3), \qquad v_n \;=\; \frac{24}{(2n-1)\,(2n+1)\,(2n+5)}.$$

Exercice 12. Déterminer a et b dans R pour que les séries suivantes soient convergentes et déterminer leur somme,

$$\sum u_n \quad \text{où} \quad u_n \;=\; \ln n \;+\; a\,\ln(n+1) \;+\; b\,\ln(n+2)$$
$$\sum v_n \quad \text{où} \quad v_n \;=\; \sqrt{n} \;+\; a\sqrt{n+1} \;+\; b\sqrt{n+2}.$$

Exercice 13. Déterminer tous les polynômes P tels que

$$u_n = \sqrt[4]{n^4 + 3n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$$

Soit le terme général d'une série de Riemann convergente.

Exercice 14. Etudier la nature de la série de terme général:

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{n}\, dx \qquad (n \geq 1).$$

Exercice 15. Etudier la nature des séries de termes généraux:

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \quad \text{et} \quad v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$$

Exercice 16. Etudier la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}\ dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad v_n = \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - bx^2} \quad (b \in \mathbb{R}).$$

Exercicee 17. 1) Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3\,|\sin x|}}.$$

2) En déduire la nature de l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^3\,|\sin x|}}.$$

Exercice 18. On considère les séries de termes généraux :

$$u_n = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad n = 0 \\ 2^n & \text{si} \quad n \geq 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

1) Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont divergentes.
2) Déterminer la nature de la série produit.

Exercice 19. On considère la série harmonique alternée, de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \geq 1.$$

1) Vérifier que cette série est semi-convergente.
2) À l'aide de la formule de Mac-Laurin appliquée à $x \mapsto \ln(1+x)$ sur le segment $[0,1]$, trouver la valeur S de la somme de cette série.
3) On considère maintenant la série dont les termes sont ceux de la série précédente écrits dans l'ordre suivant :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} + \cdots$$

Montrer que cette série converge et que sa somme est égale à $S/2$.

Exercice 20. Soient (u_n) une suite décroissante de réels positifs et α un réel positif. On suppose la convergence de la série $\sum n^\alpha u_n$. Montrer que
$n^{\alpha+1}u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 21. Soient (u_n) une suite de réels positifs et $v_n = u_n/(1+u_n)$. Montrer que $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ sont de même nature.