Enoncés : Stephan de Bièvre
Corrections : Johannes Huebschmann

Sujets d'examen

Partiel

Exercice 1

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

1. Donner la définition de "D est ouvert." (Ceci est une question de cours !)
2. Donner la définition de "$a \in \mathbb{R}^2$ est un point adhérent de D." (Ceci est une question de cours !)
   On considère dans la suite de l'exercice l'ensemble
   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq |y|, x^2+y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$
3. Dessiner D.
4. Montrer que D n'est pas ouvert.
5. Déterminer $\overline{D}$, l'adhérence de D. On justifiera brièvement sa réponse, en s'aidant d'un dessin.

[002647]

Exercice 2

On considère la fonction $f(x,y) = 2x^2+y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Tracer les lignes de niveau $f(x,y) = 2, f(x,y) = 4$.
2. Tracer le graphe de la fonction f. Expliquer votre dessin en quelques phrases, en identifiant notamment les intersections du graphe de f avec les plans parallèles aux trois plans des coordonnées.

[002648]

Exercice 3

On considère une suite $(u_n)_n$, de terme général $u_n \in \mathbb{R}^2$.

1. Donner la définition de convergence pour une telle suite. (Ceci est une question de cours !)
2. Soit la suite de terme général $u_n = (\mathrm{th}(n), \cos(n)\exp(-n^2))$. Étudier sa convergence.

[002649]

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2y}{x-y}, \quad \text{si } x \neq y \\ &= x, \quad \text{si } x = y. \end{aligned}$$

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,-2)$.
2. Pour tout $v = (\cos\theta, \sin\theta)$, calculer $D_v f(1,-2)$. Pour quelles valeurs de $\theta \in [0,2\pi[$, $D_v f(1,-2) = 0$?
3. Étudier la continuité de f au point $(1,1) \in \mathbb{R}^2$.
4. Étudier la continuité de f au point $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
5. Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et les déterminer.

6. Montrer que la dérivée directionnelle $D_v f(0,0)$ existe pour $v=(1,1)$, et la déterminer. On constatera que l'égalité $D_v f(0,0) = \partial_x f(0,0) + \partial_y f(0,0)$ n'est pas satisfaite. Expliquer pourquoi cela ne contredit aucun théorème du cours.

[002650]

Examen

Exercice 5

1. Soit $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $a \in D$. Donner la définition de "f est différentiable en a".
2. Montrer que, si f est différentiable en a, alors toutes ses dérivées partielles existent. Exprimer le lien entre la différentielle df_a de f en a et les dérivées partielles de f en a.
3. Les affirmations suivantes, sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera brièvement sa réponse.
   (A) Si f est différentiable en a, alors elle y est continue.
   (B) Si toutes les dérivées partielles de f en a existent, alors f est différentiable en a.

[002651]

Exercice 6

Utiliser une approximation affine bien choisie pour calculer une valeur approchée de

$$\exp[-0.02\sqrt{4.03}].$$

[002652]

Exercice 7

On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$y^2(x^2+1)+x^2(y^2+1) = 1.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $b>0$ tel que le point de coordonnées $(1/2,b)$ se trouve sur $\mathscr{C}$. Déterminer b, puis déterminer l'équation de la droite tangente à $\mathscr{C}$, passant par $(1/2,b)$.
2. Trouver l'unique fonction $\varphi : x \in]-1,1[\to \varphi(x) \in \mathbb{R}^+$ telle que $(x,\varphi(x)) \in \mathscr{C}$ pour tout $x \in]-1,1[$. Montrer que $\varphi(-x) = \varphi(x)$ et que φ est décroissante sur $[0,1[$. Tracer $\mathscr{C}$.
3. Énoncer le théorème des fonctions implicites et montrer qu'il existe exactement deux points de la courbe $\mathscr{C}$ où le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas pour écrire, au voisinage de chacun de ces deux points, y comme fonction de x.

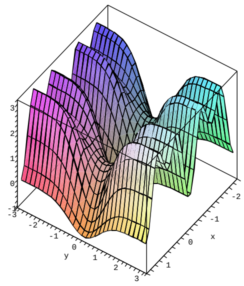
[002653]

Exercice 8

On considère la fonction

$$f(x,y) = (1+2\cos^2(\pi x))(1-\exp(-y^2)) + \sin(\pi x).$$

Son graphe est reproduit dans la figure ci-dessous.



1. Trouver tous les points critiques de f et déterminer leur nature. Vos résultats sont-ils compatibles avec le graphe de la fonction, reproduit ci-dessus ?
2. Déterminer l'équation du plan tangent au graphe de f au point de coordonnées $(1,1,f(1,1))$. Tracer la droite d'intersection de ce plan avec le plan xOy.

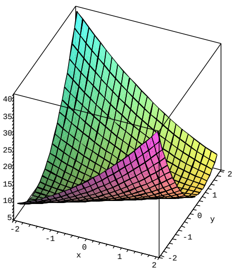
[002654]

Exercice 9

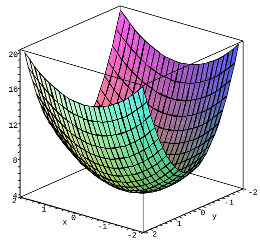
On considère les quatre surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$, définies par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 - \exp(2x^2+y^2) = 0 &\quad (\Sigma_1) \\ z = x^2+3y^2+4 &\quad (\Sigma_2) \\ z-(x-2y)^2-4=0 &\quad (\Sigma_3) \\ \exp(x^2+y^2)+\exp(y^2+z^2) = 3 &\quad (\Sigma_4) \end{aligned}$$

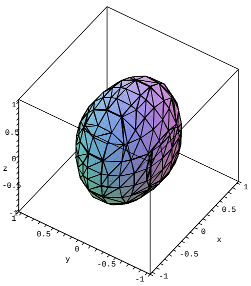
Les quatre surfaces sont tracées dans les parties A, B, C et D de la figure sur la page suivante. Indiquer quelle surface correspond à quelle partie de la figure. On justifiera très brièvement ses réponses.



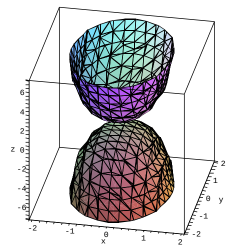
A



B



C



D

[002655]