Travaux dirigés d'informatique 4

Serie $N°3$

NB :

1. ***Ces exercices sont extraits du support de cours "Algo de Base" du Dr NDONG NGUEMA.***
2. ***Les algorithmes demandés seront donnés sous forme de fonctions ou procédures algorithmiques.***
3. ***Il est vivement conseillé d'implementer et tester ces algorithmes sous :*** C, $Matlab$ ***ou*** $Python$.

Exercice 1 : **(Somme des inverses des carrés d'entiers > 0)**

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, *on pose :* $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$.

1. *Concevoir et écrire une fonction algorithmique* ***non récursive*** *qui calcule le terme de rang N arbitraire de la suite S_N.* **N.B.** *Essayer d'envisager plusieurs approches.*
2. *On sait que (S_N) est la suite des sommes partielles d'une* ***série numérique convergente****. Concevoir et écrire alors une fonction algorithmique qui somme les termes de cette série jusqu'à un rang N tel que la somme S_N est une approximation de la somme totale de cette série avec une incertitude absolue $< \varepsilon$, avec ε réel > 0 donné, et qui renvoie cette approximation comme résultat.*

Exercice 2 : **(Somme des inverses des factorielles - Calcul du nombre e)**

*Comme dans l'****Exercice 1****, mais avec :*$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n\,!}$.

N.B. *Bien faire attention ici à la problématique posée par la présence de la* ***fonction factorielle****.*

Exercice 3 : **(Calcul approchée d'une intégrale par développement en série)**

On pose : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$, $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n\,!)}$.

1. *Montrer que $I \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}$.*
2. *Démontrer que $I = A$.*

3. *Utiliser ce dernier résultat pour construire une méthode numérique permettant de calculer une approximation de I avec une incertitude absolue $< \varepsilon$, avec ε réel > 0 donné, ainsi qu'une approximation de l'erreur absolue associée à cette approximation de I.*
4. *Concevoir et écrire alors une fonction algorithmique mettant cette méthode numérique en œuvre.*

Exercice 4 : (Calcul approchée d'une intégrale par développement en série)

On pose : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}dx, \quad S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)\,!\cdot(2n-1)}$.

1. *Montrer que $I \in \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$.*
2. *Démontrer que $I = S$.*
3. *Utiliser ce dernier résultat pour construire une méthode numérique permettant de calculer une approximation de I avec une incertitude absolue $< \varepsilon$, avec ε réel > 0 donné, ainsi qu'une approximation de l'erreur absolue associée à cette approximation de I.*
4. *Concevoir et écrire alors une fonction algorithmique mettant cette méthode numérique en œuvre.*

Exercice 5 :

On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\sin x)dx, \;\; A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n\,!)^2}, \;\; B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)\,!}\cdot J_n$, *où* $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n}dx$.

L'objectif ici est de calculer, avec une précision fixée d'avance, la valeur de l'intégrale I.

1. *Démontrer que :* ***a)*** $A \in \mathbb{R}$; ***b)*** $I = B$; ***c)*** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (2n)\cdot J_n = (2n-1)\cdot J_{n-1}$.
2. *Déduire l'égalité :* $I = \frac{\pi}{2}\cdot A$.
3. *Utiliser ce dernier résultat pour construire une méthode numérique permettant de calculer une approximation de I avec une incertitude absolue $< \varepsilon$, avec ε réel > 0 donné, ainsi qu'une approximation de l'erreur absolue associée à cette approximation de I.*
4. *Concevoir et écrire alors une fonction algorithmique mettant cette méthode numérique en œuvre.*

Exercice 6 :

On pose : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\cos x)dx, \quad A = \sum_{n=0}^{+\infty}(-4)^n \left[\frac{n\,!}{(2n+1)\,!}\right]^2, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1}dx,$

$B = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot J_n}{(2n+1)\,!}.$

L'objectif ici est de calculer, avec une précision fixée d'avance, la valeur de l'intégrale I.

1. *Démontrer que :* ***a)*** $A \in \mathbb{R}$; ***b)*** $I = B$; ***c)*** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (2n+1) \cdot J_n = (2n) \cdot J_{n-1}$.
2. *Déduire l'égalité :* $I = A$.
3. *Utiliser ce dernier résultat pour construire une méthode numérique permettant de calculer une approximation de* I *avec une incertitude absolue* $< \varepsilon$*, avec* ε *réel* > 0 *donné, ainsi qu'une approximation de l'erreur absolue associée à cette approximation de* I.
4. *Concevoir et écrire alors une fonction algorithmique mettant cette méthode numérique en œuvre.*