Géométrie du plan

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **I

(ABC) est un vrai triangle.

1. Montrer que ses médianes sont concourantes en G l'isobarycentre de (ABC).
2. Montrer que ses médiatrices sont concourantes en O le centre du cercle circonscrit à (ABC).
3. Montrer que ses hauteurs sont concourantes en H l'orthocentre de (ABC) puis montrer la relation d'EULER : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (considérer l'homothétie de centre G et de rapport -2).
4. Montrer que ses bissectrices (intérieures) sont concourantes en I le centre du cercle inscrit.

Correction ▼ [005195]

Exercice 2 **IT

On donne les points $A(1,2)$, $B(-2,1)$ et $C(0,4)$.

1. Déterminer $\widehat{BAC}$ au degré près.
2. Déterminer l'aire du triangle (ABC).
3. Déterminer son isobarycentre, son orthocentre, le centre de son cercle circonscrit puis une équation de ce cercle.
4. Déterminer une équation des bissectrices de l'angle $\widehat{BAC}$ puis de la bissectrice intérieure à l'angle $\widehat{A}$.

Correction ▼ [005196]

Exercice 3 *IT

Déterminer le projeté orthogonal du point $M(x_0, y_0)$ sur la droite (D) d'équation $x+3y-5=0$ ainsi que son symétrique orthogonal.

Correction ▼ [005197]

Exercice 4 *

Soit $(ABDC)$ un parallélogramme. Déterminer les coordonnées de D dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Correction ▼ [005198]

Exercice 5 **

Soit (E) l'ensemble d'équation cartésienne $2x^2+5xy+3y^2-3x-2y-5=0$. Montrer que (E) est une réunion de deux droites. Déterminer l'aire du parallélogramme formé par ces deux droites et les parallèles à ces deux droites passant par O.

Correction ▼ [005199]

Exercice 6 **

Déterminer un cercle tangent aux trois droites d'équations respectives $y=2x+1$, $y=2x+7$ et $y=-\frac{1}{2}x$.

Correction ▼ [005200]

Exercice 7 **I

1. h (resp. h') est l'homothétie de centre Ω et de rapport k (resp. k') non nul. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h' \circ h$.
2. s (resp. s') est la symétrie centrale de centre Ω (resp. Ω'). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s' \circ s$.
3. s est la symétrie centrale de centre Ω et t est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ s$.

Correction ▼ [005201]

Exercice 8 ***I

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, puis A_1, A_2,..., A_n n points du plan. Existe-t-il n points B_1, B_2,..., B_n tels que, pour $i \in \{1,...,n\}$, A_i soit le milieu de $[B_i, B_{i+1}]$ (avec la convention $B_{n+1} = B_1$) ? (Utiliser l'exercice précédent.)

Correction ▼ [005202]

Exercice 9 *T

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

1. Déterminer une équation de la tangente au point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(2, -2 + \sqrt{3})$.
2. Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}$ et du cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 2.

Correction ▼ [005203]

Exercice 10 *** Théorème de MÉNÉLAÜS

Soient A, B et C trois points non alignés. Soient M, N et P trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (CA) et (AB) et distincts de A, B et C. Montrer que :

$$(M,\ N,\ \text{et } P \text{ sont alignés}) \Leftrightarrow \left(\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1\right).$$

(Trouver une démonstration utilisant le théorème de THALÈS, une utilisant la composée de deux homothéties et une utilisant des coordonnées.)

Correction ▼ [005204]

Exercice 11 ***

Construire l'ensemble des points M de coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant
$r = \frac{1}{\sqrt{1+\sin(2\theta)}+\sqrt{1-\sin(2\theta)}}$ (commencer par étudier toutes les symétries de l'ensemble considéré).

Correction ▼ [005205]

Exercice 12 **

Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets appartiennent aux points d'intersection des lignes d'une feuille blanche quadrillée usuelle.

Correction ▼ [005206]

Exercice 13 *T

Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :

1. $z' = z + 3 - i$
2. $z' = 2z + 3$
3. $z' = iz + 1$
4. $z' = (1 - i)z + 2 + i$

Correction ▼ [005207]

Exercice 14 ** Faisceaux de droites

1. Soient (D) et (D') deux droites sécantes d'équation respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$, $(a,b)\neq(0,0)$, $(a',b')\neq(0,0)$. Soit (Δ) une droite. Montrer que (D), (D') et (Δ) sont concourantes si et seulement si il existe (Δ) a une équation cartésienne de la forme $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c')=0$, $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$.
2. Equation cartésienne de la droite passant par le point $(1,0)$ et par le point d'intersection des droites d'équations respectives $5x+7y+1=0$ et $-3x+2y+1=0$
3. Pour $m\in\mathbb{R}$, on considère (D_m) la droite d'équation $(2m-1)x+(m+1)y-4m-1=0$. Montrer que les droites (D_m) sont concourantes en un point A que l'on précisera. Toute droite passant par A est-elle une droite (D_m) ?

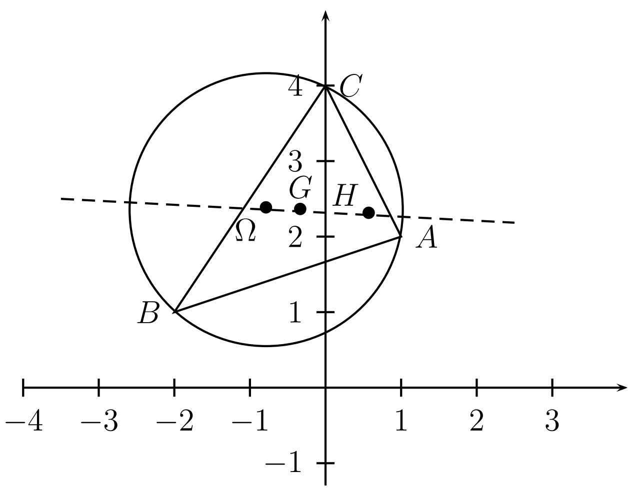
Correction ▼ [005208]

Correction de [**l'exercice 1 ▲**]

1. Soit G l'isobarycentre du triangle (ABC). On a donc $G = \text{bar}(A(1), B(1), C(1))$. Notons A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[B,C]$, $[C,A]$ et $[A,B]$. D'après le théorème du barycentre partiel, $G = \text{bar}(A(1), A'(2))$. En particulier, G est sur la médiane (AA'). De même, G est sur la médiane (BB') et sur la médiane (CC').
   Finalement, G est sur les trois médianes. les trois médianes sont donc concourantes en G.
2. Les droites (BC) et (CA) ne sont pas parallèles. Par suite, les médiatrices respectives des côtés $[B,C]$ et $[C,A]$ ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point que l'on note O. Par définition de O, on a $OA = OB = OC$. O est donc à égale distance de A et B et est ainsi sur la médiatrice de $[A,B]$. Finalement, les trois médiatrices sont concourantes en O. De plus, O étant à égale distance de A, B et C, le cercle de centre O et de rayon OA passe par B et C.
   Réciproquement, un cercle passant par A, B et C a pour centre un point à égale distance de ces points et donc nécessairement de centre O et de rayon OA. Ceci démontre l'existence et l'unicité du cercle circonscrit au triangle (ABC) : c'est le cercle de centre O et de rayon OA.
3. Les hauteurs issues de A et B ne sont pas parallèles (car perpendiculaires à deux droites non parallèles). Elles admettent ainsi un et un seul point d'intersection. Ceci assure l'unicité d'un point commun aux trois hauteurs.
   Soit h l'homthétie de centre G et de rapport -2. Puisque $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA}$, on a $h(A') = A$ et de même $h(B') = B$ et $h(C') = C$.
   Par h, l'image de la médiatrice de $[B,C]$, c'est-à-dire de la droite passant par A' et perpendiculaire à (BC) est la droite passant par $h(A') = A$ et perpendiculaire à (BC) (car parallèle à la médiatrice de $[B,C]$). Cette droite est la hauteur issue de A du triangle (ABC). De même, les images des médiatrices de $[C,A]$ et $[A,B]$ sont respectivement les hauteurs issues de B et C.
   Le point O est sur les trois médiatrices. Son image par h est donc sur les trois hauteurs (d'où l'existence d'un point commun aux trois hauteurs). Ces trois hauteurs sont ainsi concourantes en un point noté H et appelé l'orthocentre du triangle (ABC). De plus, l'égalité $h(O) = H$ s'écrit $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ ou encore $\overrightarrow{G0} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$ ou enfin,
   $$\boxed{\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \text{ EULER.}}$$
   Les trois points O, G et H, s'ils sont deux à deux distincts, sont en particulier alignés sur une droite appelée **droite d'EULER** du triangle (ABC).
4. Deux bissectrices intérieures ne sont pas parallèles (démontrez-le) et sont donc sécantes en un point I à égale distance des trois côtés et à l'intérieur du triangle (ABC). Ce point étant à égale distance des trois côtés est centre du cercle tangent intérieurement aux trois côtés, le cercle inscrit.

Correction de [**l'exercice 2 ▲**]

(Notez bien l'alignement des points G, H et O).



1. On a $AB = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$. Par suite,

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \frac{(-3)(-1)+(-1)(2)}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Par suite, $\widehat{BAC} = 81°$ à un degré près.

2. $\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2}\text{abs}(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}) = \frac{7}{2}$.

3. Notons G l'isobarycentre du triangle (ABC). $z_G = \frac{1}{3}(z_A+z_B+z_C) = \frac{1}{3}(1+2i-2+i+4i) = \frac{1}{3}(-1+7i)$, et donc $\boxed{G(-\frac{1}{3},\frac{7}{3}).}$

Notons (x,y) les coordonnées de Ω, le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC) (dans cette exercice, la lettre O désigne certainement l'origine du repère).

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega A = \Omega B \\ \Omega A = \Omega C \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-1)^2+(y-2)^2 = (x+2)^2+(y-1)^2 \\ (x-1)^2+(y-2)^= x^2+(y-4)^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y=0 \\ 2x-4y=-11 \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow x = -\frac{11}{14} \text{ et } y = \frac{33}{14} \text{ (d'après les formules de CRAMER)},$$

et donc

$\boxed{\Omega(-\frac{11}{14},\frac{33}{14}).}$

Notons (x,y) les coordonnées de l'orthocentre H du triangle (ABC).

1ère solution.

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(x-1)+3(y-2)=0 \\ -(x+2)+2(y-1)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+3y=8 \\ -x+2y=4 \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow x = \frac{4}{7} \text{ et } y = \frac{16}{7} \text{ (d'après les formules de CRAMER)},$$

et donc, $\boxed{H(\frac{4}{7},\frac{16}{7}).}$

2ème solution. Il est bien meilleur de connaître la relation d'EULER $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$ et de l'utiliser.

$$H = \Omega + 3\overrightarrow{\Omega G} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{14} \\ \frac{33}{14} \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}+\frac{11}{14} \\ \frac{7}{3}-\frac{33}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix}.$$

Pour trouver le cercle circonscrit au triangle (ABC), on a déjà le centre Ω et le rayon

$$\Omega A = \sqrt{(1+\frac{11}{14})^2+(2-\frac{33}{14})^2} = \frac{1}{14}\sqrt{25^2+5^2} = \frac{5}{14}\sqrt{5^2+1} = \frac{5\sqrt{26}}{14}.$$

Il n'y a plus qu'à écrire l'équation cherchée :

$$(x+\frac{11}{14})^2+(y-\frac{33}{14})^2 = \frac{325}{98} \text{ ou encore } x^2+y^2+\frac{11}{7}x-\frac{33}{7}y+\frac{20}{7}=0.$$

Néanmoins, on peut trouver directement une équation de ce cercle. Les points A, B et C n'étant pas alignés, on sait que le cercle circonscrit existe et est unique.
Soient alors $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

$$(A,B,C) \in \mathscr{C}^3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+2b+c=-5 \\ -2a+b+c=-5 \\ 4b+c=-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c=-4b-16a-2b=11 \\ -2a-3b=11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\frac{11}{7} \\ b=-\frac{33}{7} \\ c=\frac{20}{7} \end{array}\right. \text{(CRAMER)}$$

4. Les bissectrices de l'angle A sont les deux droites constituées des points à égale distance des droites (AB) et (AC). Ces deux droites admettent pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1(1,-3)$ et $\vec{n}_2(2,1)$.
Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned}
d(M,(AB)) = d(M,(AC)) &\Leftrightarrow \frac{(\overrightarrow{AM}.\vec{n}_1)^2}{||\vec{n}_1||^2} = \frac{(\overrightarrow{AM}.\vec{n}_2)^2}{||\vec{n}_2||^2} \\
&\Leftrightarrow \frac{((x-1)-3(y-2))^2}{10} = \frac{(2(x-1)+(y-2))^2}{5} \Leftrightarrow (x-3y+5)^2 = 2(2x+y-4)^2 \\
&\Leftrightarrow [(x-3y+5)+\sqrt{2}(2x+y-4)].[(x-3y+5)-\sqrt{2}(2x+y-4)] = 0 \\
&\Leftrightarrow (1+2\sqrt{2})x+(-3+\sqrt{2})y+5-4\sqrt{2} = 0 \text{ ou } (1-2\sqrt{2})x-(3+\sqrt{2})y+5+4\sqrt{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow y = (1+\sqrt{2})x+1-\sqrt{2} \text{ ou } y = (1-\sqrt{2})x+1+\sqrt{2}
\end{aligned}$$

La bissectrice intérieure δ_A de l'angle $\widehat{A}$ est la droite (pour certains, cette bissectrice est une demi-droite) passant par $A(2,1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = -\sqrt{10}.(\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{AC}\overrightarrow{AC})$. Ce vecteur a pour coordonnées $(3+\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$.
Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned}
M \in \delta_A &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (1-2\sqrt{2})(x-1)-(3+\sqrt{2})(y-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow (1-2\sqrt{2})x-(3+\sqrt{2})y+5+4\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow y = (1-\sqrt{2})x+1+\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

(D) est une droite de vecteur normal $(1,3)$. Le projeté orthogonal $p(M_0)$ de M_0 sur (D) est de la forme $M_0+\lambda.\vec{n}$ où λ est un réel à déterminer. Le point $M_0+\lambda.\vec{n}$ a pour coordonnées $(x_0+\lambda, y_0+3\lambda)$.

$$M_0+\lambda.\vec{n} \in (D) \Leftrightarrow (x_0+\lambda)+3(y_0+3\lambda)-5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-x_0-3y_0+5}{10}.$$

$p(M_0)$ a pour coordonnées $(x_0+\frac{-x_0-3y_0+5}{10}, y_0+3\frac{-x_0-3y_0+5}{10})$ ou encore $(\frac{9x_0-3y_0+5}{10}, \frac{-3x_0+y_0+15}{10})$.
Le symétrique orthogonal $s(M_0)$ vérifie : $s(M_0) = M_0+2\overrightarrow{M_0p(M_0)}$.
Ses coordonnées sont donc $(x_0+2(\frac{9x_0-3y_0+5}{10}-x_0), y0+2(\frac{-3x_0+y_0+15}{10}-y_0)$ ou encore $(\frac{4x_0-3y_0+5}{5}, \frac{-3x_0-4y_0+15}{5})$.
(Remarque. Si on n'avait pas déjà $p(M_0)$ on aurait cherché le symétrique sous la forme $M_0+\lambda.\vec{n}$, λ étant entièrement déterminé par la condition : le milieu du segment $[M_0, s(M_0)]$ appartient à (D).)

Correction de l'exercice 4 ▲

Puisque $(ABDC)$ un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Les coordonnées de D dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ sont donc $(1,1)$.

Correction de l'exercice 5 ▲

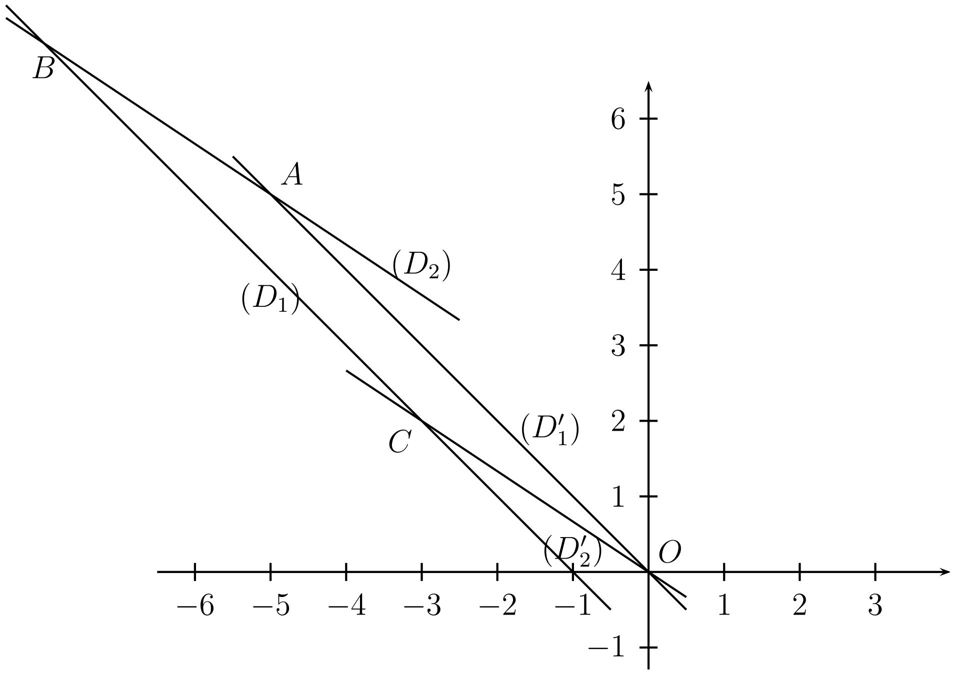
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
2x^2+5xy+3y^2-3x-2y-5 = 2x^2+x(5y-3)+3y^2-2y-5 &= 2(x+\frac{1}{4}(5y-3))^2-\frac{1}{8}(5y-3)^2+3y^2-2y-5 \\
&= \frac{1}{8}(4x+5y-3)^2-\frac{1}{8}y^2+\frac{14}{8}y-\frac{49}{8} \\
&= \frac{1}{8}[(4x+5y-3)^2-(y^2-14y+49)] = \frac{1}{8}[(4x+5y-3)^2-(y-7)^2] \\
&= \frac{1}{8}(4x+4y+4)(4x+6y-10) = (x+y+1)(2x+3y-5)
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 2x^2+5xy+3y^2-3x-2y-5=0 \Leftrightarrow (x+y+1=0 \text{ ou } 2x+3y-5=0.$$

(E) est la réunion de la droite (D_1) d'équation $x+y+1=0$ et de la droite (D_2) d'équation $2x+3y-5=0$.



La parallèle à (D_1) passant par O est la droite (D'_1) d'équation $x+y=0$ et la parallèle à (D_2) passant par O est la droite (D'_2) d'équation $2x+3y=0$. Ces droites se coupent en les quatre points $O(0,0)$, $A(-5,5)$, $B(-8,7)$ et $C(-3,2)$. L'aire de ce parallélogramme vaut $\left|\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\right|=5$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Notons (D_1), (D_2) et (D_3) les droites d'équations respectives $y=2x+1$, $y=2x+7$ et $y=-\frac{1}{2}x$. Soit $\mathscr{C}$ un cercle.

Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles. Donc, $\mathscr{C}$ est un cercle tangent à (D_1) et (D_2) si et seulement si son centre est sur l'ensemble des points à égale distance de (D_1) et (D_2) à savoir la droite d'équation $y=2x+4$ et son rayon est la moitié de la distance de (D_1) à (D_2), ou encore la moitié de la distance d'un point de (D_1), par exemple $(0,1)$, à (D_2). Cette distance vaut $\frac{|2.0-1+7|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $\mathscr{C}$ est un cercle tangent à (D_1) et (D_2) si et seulement si son centre Ω a des coordonnées de la forme $(a,2a+4)$, $a\in\mathbb{R}$, et son rayon vaut $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Un cercle de centre Ω et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$ est tangent à (D_3) si et seulement si la distance de Ω à (D_3) est le rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$. Donc,

$$\begin{aligned}\mathscr{C} \text{ solution} &\Leftrightarrow d(\Omega,(D_3))=\frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|a+2(2a+4)|}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |5a+8|=3\\ &\Leftrightarrow 5a+8=3 \text{ ou } 5a+8=-3 \Leftrightarrow a=-1 \text{ ou } a=-\frac{11}{5}\end{aligned}$$

On trouve deux cercles solutions, le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre $\Omega_1(-1,2)$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$ et le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre $\Omega_2(-\frac{11}{5},-\frac{2}{5})$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$

Correction de l'exercice 7 ▲

---

1. Soient k et k' deux réels non nuls, Ω et Ω' deux points (pas nécessairement distincts), puis h (resp.h') l'homothétie de centre Ω (resp. Ω') et de rapport k (resp. k').
Soient M un point du plan, puis $M' = h(M)$ et $M'' = h'(M')$.

$$M'' = \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega' M'} = \Omega' + k'(\overrightarrow{\Omega'\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'}) = \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + kk'\overrightarrow{\Omega M}\ (*)$$

Chechons alors les points invariants par $h' \circ h$.

$$h' \circ h(M) = M \Leftrightarrow \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + kk'\overrightarrow{\Omega M} = M \Leftrightarrow -\overrightarrow{\Omega' M} + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + kk'\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow (kk'-1)\overrightarrow{\Omega M} = (k'-1)\overrightarrow{\Omega\Omega'}\ (**)$$

1er cas. Si $kk' \neq 1$, $(**) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \frac{k'-1}{kk'-1}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$, ce qui signifie que l'équation $(**)$ a une et eune seule solution que l'on note Ω'', ou encore $h' \circ h$ a un et un seule point invariant, le point Ω'' tel que $\Omega'' = \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + kk'\overrightarrow{\Omega\Omega''}$.
Mais alors, l'égalié $(*)$ s'écrit pour tout point M

$$M'' = \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + kk'\overrightarrow{\Omega M} = \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + kk'\overrightarrow{\Omega\Omega''} + kk'\overrightarrow{\Omega'' M} = \Omega'' + kk'\overrightarrow{\Omega'' M}.$$

$h' \circ h$ est donc l'homothétie de rapport kk' et de centre Ω''. On doit noter que le centre Ω'' est sur la droite $(\Omega\Omega')$.

$\boxed{\text{Si } kk' \neq 1,\ h' \circ h \text{ est une homothétie de rapport } kk'.}$

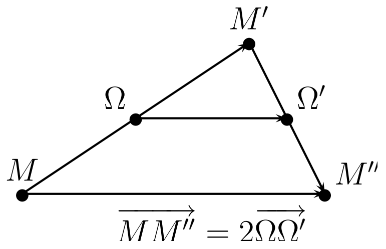
2ème cas. Si $kk' = 1$, l'égalité $(*)$ s'écrit pour tout point M, $M'' = \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ et donc

$$\overrightarrow{MM''} = \Omega' + k'(\Omega - \Omega') + (M - \Omega) - M = (1-k')\overrightarrow{\Omega\Omega'}.$$

Dans ce cas, $h' \circ h$ est la translation de vecteur $(1-k')\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

En résumé, **la comoposée de deux homothéties de rapport respectifs k et k$'$ tous deux non nuls est une homothétie de rapport kk$'$ si kk$' \neq 1$ et une tranlation si kk$' = 1$** (ce résultat est à connaître).

2. C'est un cas particulier de la question précédente. Une symétrie centrale est une homothétie de rapport -1. Puisque $(-1)(-1) = 1$, $s' \circ s$ est une translation. Son vecteur est $\overrightarrow{\Omega s' \circ s(\Omega)} = \overrightarrow{\Omega s'(\Omega)} = 2\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.



La composée de deux symétries centrales est une translation.

3. Soit Ω' le point tel que $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{\Omega'\Omega}$, c'est-à-dire $\Omega' = \Omega - \frac{1}{2}\overrightarrow{u}$. Soit s' la symétrie centrale de centre Ω'. D'après 2), $s \circ s'$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\Omega'\Omega} = \overrightarrow{u}$. Par suite, $s \circ t = s \circ s \circ s' = s'$.
La composée d'une symétrie centrale et d'une translation est une symétrie centrale.

Correction de l'exercice 8 ▲

Pour $1 \leq i \leq n$, notons s_i la symétrie centrale de centre A_i. Le problème revient à trouver n points B_1,..., B_n tels que $B_2 = s_1(B_1)$, $B_3 = s_2(B_2)$,...,$B_n = s_{n-1}(B_{n-1})$, $B_1 = s_n(B_n)$. Ceci équivaut à

$$\forall i \in \{2, ..., n\},\ B_i = s_{i-1} \circ s_{i-2} \circ ... \circ s_1(B_1) \text{ et } B_1 = s_n \circ s_{n-1} \circ ... \circ s_1(B_1)\ (*).$$

Posons alors $f = s_n \circ s_{n-1} \circ \ldots \circ s_1$. f est une composée de symétries centrales. Il y a donc deux cas. Si n est pair, on peut regrouper les symétries deux par deux. f est alors (d'après l'exercice 7) une composée de translations et donc f est une translation. Si n est impair, $n-1$ est pair et donc la composée des $n-1$ premières symétries est une translation. Par suite, f est la composée d'une translation et d'une symétrie centrale et est donc une symétrie centrale (d'après l'exercice 7).

Maintenant, $(*)$ a une solution si et seulement si f a un point invariant.

1er cas. Si n est impair, f étant une symétrie centrale, f a un et un seul point invariant : son centre. Il existe donc un et un seul point B_1 vérfiant $B_1 = s_n \circ s_{n-1} \circ \ldots \circ s_1(B_1)$ et finalement, un et un seul n-uplet $(B_1, \ldots, B_n)$ solution du problème posé.

2ème cas. Si n est pair, f est une translation. Si son vecteur est non nul, f n'a pas de point invariant et le problème n'a pas de solution. Si son vecteur est nul, f est l'identité et tout point est invariant par f.
Déterminons le vecteur de f. On pose $n = 2p$. On a alors

$$f = s_{2p} \circ s_{2p-1} \circ \ldots s_2 \circ s_1 = t_{2\overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}}} \circ \ldots \circ t_{2\overrightarrow{A_1A_2}} = t_{2(\overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}})}.$$

Quand $n = 2p$ est pair, le problème posé a des solutions si et seulement si $\overrightarrow{A_1A_2} + \ldots + \overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}} = \overrightarrow{0}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Tout d'abord, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ et $\mathscr{C}$ est le cerlce de centre $\Omega(1,-2)$ et de rayon 2.

1. Le point $A(2, -2+\sqrt{3})$ est effectivement sur $\mathscr{C}$ car $(2-1)^2 + (-2+\sqrt{3}+2)^2 = 1+3 = 4$. La tangente (T) en A à $\mathscr{C}$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$.

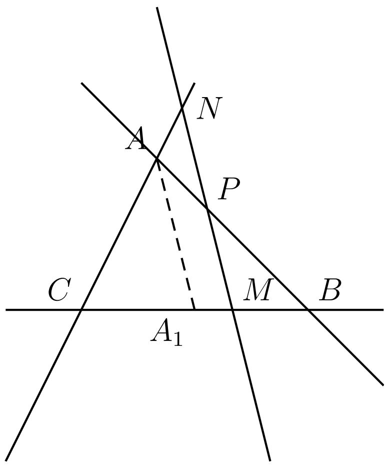
$$M(x,y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0 \Leftrightarrow (x-2) + \sqrt{3}(y+2-\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y - 5 + 2\sqrt{3} = 0.$$

2. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 2. Une équation de ce cercle est $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$. Par suite,

$$M(x,y) \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}' \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2-2x+4y+1=0 \\ x^2+y^2-2x-3=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4y+4=0 \quad ((1)-(2)) \\ x^2+y^2-2x-3=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=-1 \\ x^2-2x-2=0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=-1 \\ x = 1+\sqrt{3} \text{ ou } x = 1-\sqrt{3} \end{array} \right.$$

Il ya donc deux points d'intersection : $(1+\sqrt{3}, -1)$ et $(1-\sqrt{3}, -1)$.

Correction de l'exercice 10 ▲



Montrons tout d'abord que si M, N et P sont alignés, alors $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$ $(*)$.
On suppose donc que M, N et P sont alignés et on note (Δ) la droite contenant M, N et P.

1ère solution. Soit A_1 le projeté de A sur la droite (BC) parallèlement à la droite (Δ). D'après le théorème de THALES, on a

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MA_1}} \text{ et } \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}},$$

et donc,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}.\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.\frac{\overline{MC}}{\overline{MA_1}}.\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}} = 1.$$

2ème solution. Soit h_1 l'homothétie de centre M et de rapport $k_1 = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$, de sorte que $h_1(C) = B$. Soit h_2 l'homothétie de centre N et de rapport $k_2 = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$, de sorte que $h_2(A) = C$.

Maintenant, le produit k_1k_2 peut-il être égal à 1 ? Si c'était le cas, on aurait $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$ et donc, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$. La réciproque du théorème de THALES permettrait alors d'affirmer que (MN) et (AB) sont parallèles, ce qui n'est pas. Donc, $k_1k_2 \neq 1$ et d'après l'exercice 7, $h_1 \circ h_2$ est une homothétie. Puisque $h_1 \circ h_2$ transforme A en B, son centre est sur la droite (AB). Mais d'autre part, son centre est sur la droite des centres (MN). Finalement, le centre de $h_1 \circ h_2$ est le point d'intersection de (MN) et (AB), c'est-à-dire le point P.

Mais alors, le rapport de $h_1 \circ h_2$ vaut également $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$. Ainsi, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ et finalement, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

3ème solution. On se place dans le repère $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Dans ce repère, les coordonnées des différents points sont : $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $M(m, 1-m)$, $N(0,n)$ et $P(p,0)$ où m, n et p sont distincts de 0 et de 1. Les coordonnées de $\overrightarrow{MB}$ sont $(1-m, m-1)$ et celles de $\overrightarrow{MC}$ sont $(-m, m)$. Par suite, $m\overrightarrow{MB} = (m-1)\overrightarrow{MC}$ et finalement, $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{m-1}{m}$. On trouve de même $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{n-1}{n}$ et $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{p}{p-1}$. Finalement,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{(m-1)(n-1)p}{mn(p-1)}.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
M, N \text{ et } P \text{ alignés } &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -m & p-m \\ m+n-1 & m-1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -m(m-1)-(p-m)(m+n-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow -pm-pn+p+mn = 0 \Leftrightarrow mn = p(m+n-1) \Leftrightarrow mn \\
&= -p(m-1)(n-1)+pmn \Leftrightarrow p(m-1)(n-1) = mn(p-1) \\
&\Leftrightarrow \frac{(m-1)(n-1)p}{mn(p-1)} = 1
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que si $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$, alors les points M, N et P sont alignés. Pour cela, vérifions tout d'abord que (MN) n'est pas parallèle à (AB). Dans le cas contraire, le théorème de THALES fournirait $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$ et donc $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$, puis $\overline{PA} = \overline{PB}$ et finalement $\overline{AB} = 0$, ce qui n'est pas.
Par suite, la droite (MN) coupe la droite (AB) en un point P_1 vérifiant d'après le début de l'exercice $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}} = 1$. On en déduit que $\frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$. Notons k la valeur commune de ce rapport.
On a déjà que $k \neq 1$, ou encore $1-k \neq 0$. Par suite, $P_1 = \text{bar}\{A(1), B(-k)\} = P$, ce qui montre que les points M, N et P sont alignés.

Correction de l'exercice 11 ▲

Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble cherché.
Tout d'abord, pour tout réel θ, $1+\sin(2\theta) \geq 0$, $1-\sin(2\theta) \geq 0$ puis $\sqrt{1+\sin(2\theta)} + \sqrt{1-\sin(2\theta)} > 0$, car $\sin(2\theta)$ ne peut valoir simultanément 1 et -1. La fonction $r \mapsto r(\theta)$ est donc définie sur $\mathbb{R}$, clairement 2π-périodique.
Ainsi,

$$M(\theta+2\pi) = [r(\theta+2\pi), \theta+2\pi] = [r(\theta), \theta+2\pi] = M(\theta).$$

On obtient donc l'ensemble complet quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi,\pi]$ par exemple. La fonction $r \mapsto r(\theta)$ est plus paire. Par suite,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta \in [0,\pi]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Ox).
Pour $\theta \in [0,\pi]$, on a clairement $r(\pi-\theta) = r(\theta)$. Par suite,

$$M(\pi-\theta) = [r(\pi-\theta), \pi-\theta] = [r(\theta), \pi-\theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Oy) puis par symétrie orthogonale d'axe (Ox).
Pour $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$, on a clairement $r(\frac{\pi}{2}-\theta) = r(\theta)$. Par suite, en notant (Δ) la droite d'équation $y = x$,

$$M(\frac{\pi}{2}-\theta) = [r(\frac{\pi}{2}-\theta), \frac{\pi}{2}-\theta] = [r(\theta), \frac{\pi}{2}-\theta] = s_{(\Delta)}(M(\theta)).$$

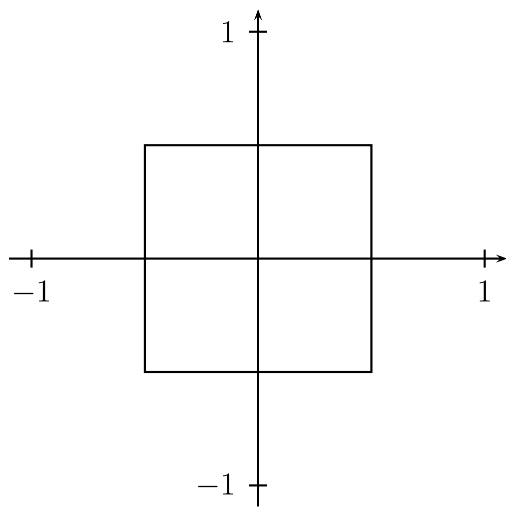
On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta \in [0,\frac{\pi}{4}]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Δ) puis par symétrie orthogonale d'axe (Oy) et enfin par symétrie orthogonale d'axe (Ox).
Maintenant, pour $\theta \in [0,\frac{\pi}{4}]$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+\sin(2\theta)}+\sqrt{1-\sin(2\theta)}} &= \frac{1}{\sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)}+\sqrt{1-\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta)}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\theta)}+\sqrt{2\sin^2(\frac{\pi}{4}-\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)+\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)}\\ &= \frac{1}{2\cos(\frac{\pi}{4}-(\frac{\pi}{4}-\theta))} = \frac{1}{2\cos\theta}.\end{aligned}$$

En notant x et y les coordonnées d'un point M, on a alors

$$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2\cos\theta} \Leftrightarrow r\cos(\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

D'où le graphique :



Correction de l'exercice 12 ▲

Il revient au même de démontrer que, si le plan est rapporté à un repère orthonormé, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets ont pour coordonnées des nombres entiers.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soient A, B et C trois points deux à deux distincts, non alignés et à coordonnées entières. On sait que $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AB}||.||\overrightarrow{AC}||}$ et $\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{||\overrightarrow{AB}||.||\overrightarrow{AC}||}$.
Par suite, ou bien le triangle (ABC) est rectangle en A (et n'est donc pas équilatéral), ou bien $\tan(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}$. Dans ce dernier cas, $\tan(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ est un quotient de deux nombres entiers, et est donc un rationnel. Malheureusement, pour un triangle équilatéral, la tangente de chacun de ses angles vaut $\sqrt{3}$ qui n'est pas un rationnel.
Quand le repère est orthonormé, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets sont à coordonnées entières.

Correction de l'exercice 13 ▲

Soit f la transformation considérée.

1. f est la translation de vecteur $\vec{u}(3,-1)$.
2. $\omega = 2\omega+3 \Leftrightarrow \omega = -3$. f est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3,0)$.
3. $\omega = i\omega+1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1+i)$. Comme $i = e^{i\pi/2}$, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
4. $\omega = (1-i)\omega+2+i \Leftrightarrow \omega = 1-2i$. Comme $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f est la similitude de centre $\Omega(1,-2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 14 ▲

1. Le fait que (D) et (D') soient sécantes équivaut à $ab'-a'b \neq 0$.
   Soit $A(x_A,y_A)$ le point d'intersection de (D) et (D').
   Si (Δ) est une droite ayant une équation de la forme $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c') = 0$, $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ alors, puisque
   $$\lambda(ax_A+by_A+c)+\mu(a'x_A+b'y_A+c') = \lambda.0+\mu.0 = 0,$$
   le point A appartient à (Δ).
   Réciproquement, soit (Δ) une droite d'équation $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées (α,β). Puisque $ab'-a'b \neq 0$, les deux vecteurs $\overrightarrow{u}(a,b)$ et $\overrightarrow{u}'(a',b')$ ne sont pas colinéaires. Mais alors, la famille $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}')$ est une base du plan (vectoriel). Par suite, il existe $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$ (car $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$) tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{u}'$, ou encore tel que $\alpha = \lambda a+\mu a'$ et $\beta = \lambda b+\mu b'$. Toute droite (Δ) admet donc une équation cartésienne de la forme $\lambda(ax+by)+\mu(a'x+b'y)+\gamma = 0$, $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$.
   Maintenant, si $A \in (\Delta)$, alors
   $$\gamma = -\lambda(ax_A+by_A)+\mu(a'x_A+b'y_A) = -\lambda(-c)-\mu(-c') = \lambda c+\mu c'.$$
   Finalement, si $A \in (\Delta)$, (Δ) admet une équation de la forme $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c') = 0$, $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$.
2. Les deux droites (D) et (D') considérées sont bien sécantes car $5.2-7(-3) = 31 \neq 0$. Notons A leur point d'intersection et B le point de coordonnées $(1,0)$. B n'est sur aucune des deux droites considérées de sorte qu'il existe une et seule droite, notée (Δ), solution du problème posé.
   Puisque (Δ) passe par A, (Δ) a une équation de la forme $\lambda(5x+7y+1)+\mu(-3x+2y+1) = 0$. Il est clair que l'on ne peut avoir $\lambda = 0$ (car (Δ) n'est pas (D')) et après division par λ, l'équation s'écrit sous la forme $(5x+7y+1)+k(-3x+2y+1) = 0$ où k est un réel. Maintenant, (Δ) passe par B si et seulement si $6-2k = 0$ ou encore $k = 3$.
   Une équation cartésienne de (Δ) est donc $(5x+7y+1)+3(-3x+2y+1) = 0$ ou encore $-4x+13y+4 = 0$.
3. Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$\forall m \in \mathbb{R},\ M \in (D_m) \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ (2m-1)x+(m+1)y-4m-1=0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ m(2x+y-4)-x+y-1=0$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x+y-4=0 \\ -x+y-1=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x=1 \text{ et } y=2$$

Toutes les droites (D_m) passent par le point $A(1,2)$.

La droite (D_{-1}) passe par A et est parallèle à (Oy). Ensuite, pour $m \neq -1$, (D_m) est la droite passant par A et de coefficient directeur $f(m) = \frac{-2m+1}{m+1} = -2 + \frac{3}{m+1}$. Quand m décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(m)$ prend toutes les valeurs réelles sauf -2.

La droite passant par A de coefficient directeur -2 (et donc d'équation $y=-2x+4$) n'est pas une droite (D_m). Toute autre droite passant par A est une droite (D_m).
