UNIVERSITE DE YAOUNDE 1

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE DE YAOUNDE

DEPARTEMENT DE MSP

UE : SERIES ET INTEGRALES — Année 2020/2021 — Semestre 1

PAR : Pr MANJIA MARCELINE — Fiche TD 2

Exercice 1. Etudier la convergence simple séries de fonctions de termes généraux :

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}, \quad g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n-x}, \quad h_n(x) = nx^n \ln x.$$

Exercice 2. Etudier la convergence simple et déterminer la somme de la série de fonctions :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq n \\ n^2 & \text{si } x = n. \end{cases}$$

Exercice 3. On considère la série des fonctions f_n définies sur [0, 1] par $f_n(x) = nx^{n-1}$ $(n \geq 1)$.

1. Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur [0, 1[. Déterminer sa fonction somme S.
2. Cette série est-elle uniformément convergente sur [0, 1[?

Exercice 4. Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions donnée sur R_+ Et de terme général : $f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n+x}$.

Exercice 5. Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions:

$$\sum \left(\arctan(x+n) - \arctan n\right)$$

Sur R, puis sur tout intervalle compact [a, b] inclus dans R.

Exercice 6. On considère la série de fonctions de terme général $f_n(x) = 3^n \sin^3(\frac{x}{3^n})$.

1) Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2) A-t-on convergence uniforme sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$?
3) a) Établir : $f_n(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x)$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
b) En déduire la somme S de la série $\sum f_n$.
4) Soit R_n le reste d'ordre n de la série $\sum f_n$.
a) Calculer la limite de la suite numérique de terme général $R_n(3^n)$.
b) La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7.

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{ke^{-kx}}{k^2+1}$$

Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est continue sur D.

2. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k} \frac{e^{-kx}}{k^2+1}$$

Déterminer le domaine de définition D' de g et montrer que g est de classe C^1 sur D'.

Exercice 8.

Montrer que les fonctions suivantes sont définies et continues :

$$f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \sin(nx)} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$h : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nx+1} \quad \text{sur } \mathbb{R}^{+*}$$

Exercice 9.

Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$ avec $]0, +\infty[$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f.
2. Montrer que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Exercice 10.

On fixe $\alpha > 0$ et on pose

$$f_n(x) = e^{-n^\alpha x} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

1. Quel est le domaine de définition de f.
2. Continuité de f.
3. Etudier

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Exercice 11.

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

1. Domaine de définition de f. On étudie ensuite f sur $]1, +\infty[$.
2. Continuité de f et limites de f en 1 et $+\infty$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Exercice 12.

1. Quel est le domaine de définition D de la fonction

$$f \,:\, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1} \ ?$$

2. Montrer que f est continue sur D.

Exercice 13.

1. Quel est le domaine de définition D de la fonction

$$f \,:\, x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1} \ ?$$

2. Montrer que f est de clase C^1 sur D\{0}.

Exercice 14. On considère la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \sin(nx)/n^3$.

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une fonction continue.
3. Montrer que

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

4. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

5.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$