

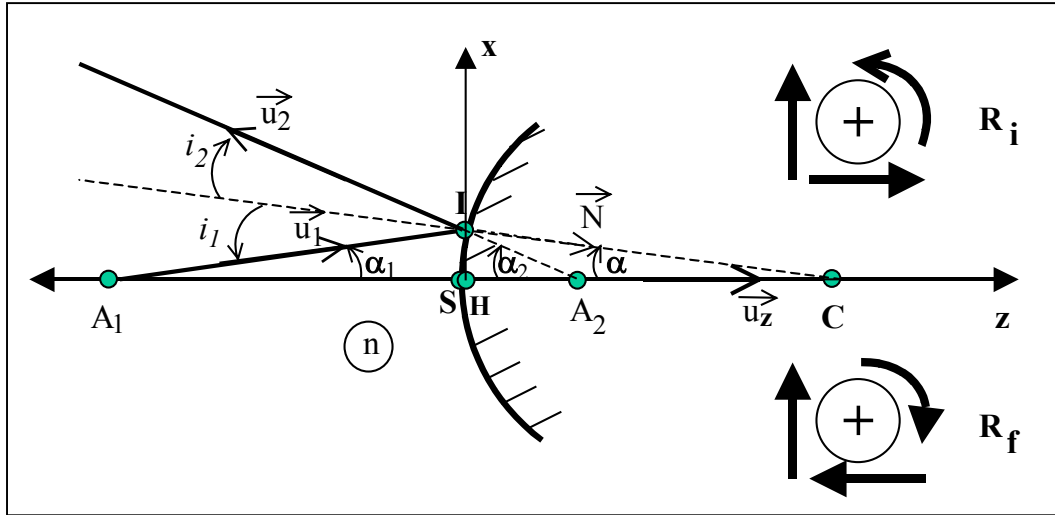
# **Chapitre 7**

## **MIROIRS SPHERIQUES**

- I. Relation de conjugaison du miroir sphérique**
- II. Eléments cardinaux du miroir sphérique**
- III. Constructions géométriques**
- IV. Principe de détermination des éléments caractéristiques d'un système catadioptrique**

## I. Relation de conjugaison du miroir sphérique

Du fait de la symétrie de révolution autour de l'axe optique on peut se contenter d'examiner le problème dans un plan (méridien) défini par les vecteurs  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  et  $\vec{u}_z$ . Cela revient à repérer le point d'impact  $I$  (du rayon incident sur le dioptré) par sa distance par rapport à l'axe optique, que nous noterons  $x=HI$ . Dans ce plan (contenant l'axe  $HI$ ) les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont repérés par leurs angles d'inclinaison respectifs,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , par rapport à l'axe optique repéré par  $\vec{u}_z$ .



$$\alpha_1 = \widehat{(\vec{u}_z, \vec{u}_1)} > 0 \text{ (dans } R_i) \quad \alpha_2 = \widehat{(\vec{u}_z, \vec{u}_2)} > 0 \text{ (dans } R_f) \quad \alpha = \widehat{(\vec{u}_z, \vec{N})} < 0 \text{ (dans } R_i)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Direction} \\ \text{du rayon} \\ \text{incident} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 \\ 0 \\ \cos \alpha_1 \end{pmatrix}_{R_i} \text{ (avec } \alpha_1 > 0)_{R_i}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Direction} \\ \text{du rayon} \\ \text{émergent} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_2 \\ 0 \\ -\cos \alpha_2 \end{pmatrix}_{R_i} \text{ (avec } \alpha_2 < 0)_{R_i} = \begin{pmatrix} \sin \alpha_2 \\ 0 \\ \cos \alpha_2 \end{pmatrix}_{R_f} \text{ (avec } \alpha_2 > 0)_{R_f}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{Normale} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \vec{N} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}_{R_i} \text{ (avec } \alpha < 0)_{R_i} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ 0 \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}_{R_f} \text{ (avec } \alpha > 0)_{R_f}$$

$i_1 = \widehat{(\vec{N}, \vec{u}_1)}$  et  $i_2 = \widehat{(\vec{N}, \vec{u}_2)}$  représentent les angles d'incidence et de réflexion. La loi de Snell-Descartes relative à la réflexion s'écrit :

$$n(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) = a \vec{N} \Rightarrow$$

$$a = n(\vec{u}_2 \cdot \vec{N} - \vec{u}_1 \cdot \vec{N}) = n(\cos(\pi - i_2) - \cos i_1) = -n(\cos i_2 + \cos i_1)$$

Au premier ordre, on a  $a = -2n$ , car les angles  $i_1$  et  $i_2$  sont très petits en raison de la faible inclinaison des rayons lumineux (approximation de Gauss). Dans la figure précédente, tous les angles ont été fortement grossis par souci de clarté de la figure. Ainsi, avec  $a = -2n$ , on a :

$$n(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) = a \vec{N} = -2n \vec{N} \Rightarrow$$

$$n \begin{pmatrix} \sin \alpha_2 \\ 0 \\ \cos \alpha_2 \end{pmatrix}_{R_f} - n \begin{pmatrix} \sin \alpha_1 \\ 0 \\ \cos \alpha_1 \end{pmatrix}_{R_i} = -2n \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}_{R_i}. \quad (1)$$

Ici, l'approximation de Gauss (rayons peu inclinés par rapport à l'axe) implique que

$$\sin \alpha_1 \approx \alpha_1 \text{ et } \sin \alpha_2 \approx \alpha_2$$

Dans cette situation le système d'équations (1) se réduit à l'équation suivante :

$$n(\alpha_2 - \alpha_1) = -2n\alpha \quad (2)$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\overline{HI}}{A_1 H} \approx \sin \alpha_1 = \frac{x}{A_1 I} \approx \alpha_1 \approx \frac{x}{A_1 S}, \quad (3a)$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{\overline{HI}}{A_2 H} \approx \sin \alpha_2 = \frac{x}{A_2 I} \approx \alpha_2 \approx \frac{x}{A_2 S}, \quad (3b)$$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{HI}}{CH} \approx \sin \alpha = \frac{x}{CI} \approx \alpha \approx \frac{x}{CS}, \quad (3c)$$

Ainsi, l'équation (2) se réduit à la seule équation qui suit :

$$n\alpha_2 - n\alpha_1 = 2n \frac{x}{SC}. \quad (4)$$

Au point I, on peut donc écrire

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ n\alpha_2 = 2n \frac{x_1}{SC} + n\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ n\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{SC} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ n\alpha_1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

La **matrice de réflexion** du miroir sphérique s'écrit

$$R_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{\overline{SC}} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

où  $\overline{SC}$  est la valeur algébrique du rayon de courbure du miroir sphérique, évaluée dans le repère  $R_i$ , où l'axe des  $z > 0$  est orienté dans le sens de propagation de la lumière incidente. La vergence du miroir est définie par :

$$V = -\frac{2n}{\overline{SC}} \quad (7)$$

Les relations (3) et (4) donnent la relation de conjugaison du miroir sphérique

$$\frac{1}{\overline{SA_2}} - \frac{1}{\overline{SA_1}} = -\frac{2}{\overline{SC}} \quad (\overline{SA_1} \text{ évalué dans } R_i \text{ et } \overline{SA_2} \text{ évalué dans } R_f) \quad (8a)$$

On peut aussi mettre cette relation sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\overline{SA_2}} + \frac{1}{\overline{SA_1}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad (\text{toutes les grandeurs évaluées dans le même repère}) \quad (8b)$$

La comparaison entre la relation (8b) et la formule de conjugaison d'un dioptré sphérique de sommet S et centre C (voir chapitre III)

$$\frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \quad (\text{dioptré sphérique})$$

montre que la relation de conjugaison du miroir sphérique (8b) s'obtient à partir de celle du dioptré sphérique en écrivant :

$$n_1 = n \quad \text{et} \quad n_2 = -n \quad (9)$$

**Les relations (9) constituent les formules permettant un passage simple du dioptré sphérique au miroir sphérique.**

## II. Eléments cardinaux du miroir sphérique

### \* Distances focales

Dans le repère  $R_i$  orienté dans le sens de propagation de la lumière incidente, on peut facilement déterminer les éléments cardinaux du miroir sphérique, en utilisant les formules de passage (9).

*Distance focale image*

$$f' = \frac{n_2}{V} = -\frac{n}{V} \quad (10)$$

*Distance focale objet*

$$f = -\frac{n_1}{V} = -\frac{n}{V} . \quad (11)$$

Les valeurs de  $f$  et  $f'$ , repérées sur l'axe  $zz'$  dans le sens de propagation de la lumière incidente, sont identiques.

### \* Position des foyers

*Foyer image*

D'après la relation de conjugaison (8b)  $\overline{SA_1} = \infty \Rightarrow \overline{SA_2} = \overline{SF'} = \overline{SC} / 2$

$$\overline{SF'} = \overline{SC} / 2 . \quad (12)$$

*Foyer objet*

D'après la relation (8b)  $\overline{SA_1} = \overline{SF} \Rightarrow \overline{SA_2} = \infty \Rightarrow$

$$\overline{SF} = \overline{SC} / 2 . \quad (13)$$

*Les foyers objet et image d'un miroir sphérique sont confondus, et situés à mi-distance entre le sommet et le centre courbure du miroir.*

\* **Plans et points principaux**

$$A_1 \xrightarrow{\mathfrak{T}(\overline{A_1 E})} E \xrightarrow{R_m} S \xrightarrow{\mathfrak{T}(\overline{SA_2})} A_2$$

La marche d'un rayon lumineux et la matrice de transfert reliant les points  $A_1$  et  $A_2$  s'écrivent:

$$M(\overline{A_1 A_2}) = \mathfrak{T}(\overline{SA_2}) R_m \mathfrak{T}(\overline{A_1 E})$$

D'après les formules (3) et (9) du chapitre 5, on déduit que :

$$M(A_1 A_2) = \begin{bmatrix} T_{11} - \frac{V \overline{SA_2}}{n_2} & T_{12} + T_{11} \frac{\overline{A_1 E}}{n_1} + \left( T_{22} - V \frac{\overline{A_1 E}}{n_1} \right) \frac{\overline{SA_2}}{n_2} \\ -V & -V \frac{\overline{A_1 E}}{n_1} + T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_t & 0 \\ -V & G_a \frac{n_2}{n_1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\text{où } \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ -V & T_{22} \end{bmatrix} = R_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2n}{SC} & 1 \end{bmatrix}$$

Les points principaux,  $A_1 = H_1$ ,  $A_2 = H_2$ , sont des points conjugués tels que  $G_t = 1$ . Les éléments diagonaux de la matrice (14) conduisent alors aux formules suivantes :

$$\begin{cases} \overline{SH_2} = f'(T_{11} - 1) = 0 & (15a) \\ \overline{SH_1} = f(T_{11} - 1) = 0 & (15b) \end{cases}$$

**Rem : Dans un miroir sphérique ( $E \equiv S$ ) ;**

***Les points principaux sont confondus avec le sommet S du miroir.***

Les plans principaux sont confondus avec le plan tangent au dioptré au sommet S.

\* **Points nodaux**

Les points nodaux,  $A_1 = N_1$ ,  $A_2 = N_2$ , sont des points conjugués tels que  $G_a = 1$ . Les éléments diagonaux de l'équation (14) conduisent alors aux formules suivantes :

$$\begin{cases} \overline{SN_2} = f' \left( T_{11} - \frac{n_1}{n_2} \right) = f'(T_{11} + 1) = 2f' = -2n/V = \overline{SC} & (16a) \\ \overline{EN_1} = \frac{-n_1}{V} \left( T_{22} - \frac{n_2}{n_1} \right) = f(T_{22} + 1) = 2f = -2n/V = \overline{SC} & (16b) \end{cases}$$

***Les points nodaux sont confondus avec le centre de courbure C du miroir.***

### Grandissement

L'élément diagonal  $m_{11}$  de la matrice (14) donne le grandissement transversal :

$$G_t = T_{11} - \frac{V \overline{SA_2}}{n_2} = 1 + \frac{\overline{SA_2}}{n} V = 1 + \frac{\overline{SA_2}}{n} \left( \frac{-2n}{\overline{SC}} \right) = 1 - \frac{\overline{SA_2}}{n} \left( \frac{n}{\overline{SA_2}} + \frac{n}{\overline{SA_1}} \right) \quad [\text{compte tenu de (8b)}]$$

On a donc

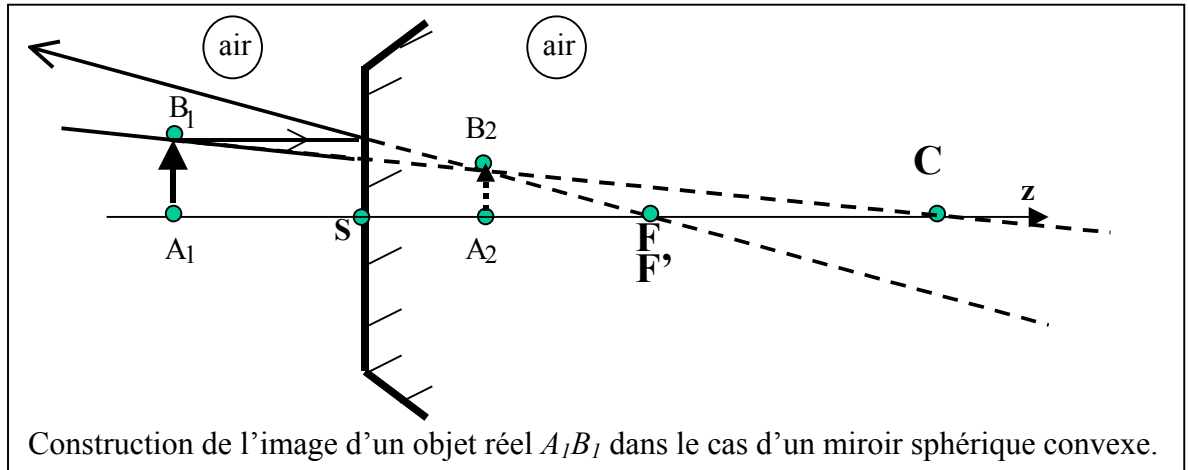
$$G_t = -\frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}} \quad (\overline{SA_1} \text{ et } \overline{SA_2} \text{ évalué dans le m. rép.}) \quad (17)$$

Rem : En utilisant la relation (8a) on obtient

$$G_t = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}} \quad (\overline{SA_1} \text{ évalué dans } R_i \text{ et } \overline{SA_2} \text{ évalué dans } R_f) \quad (18)$$

On peut donc utiliser l'une ou l'autre des relations (17) ou (18) pour déterminer le grandissement transversal donné par un miroir sphérique.

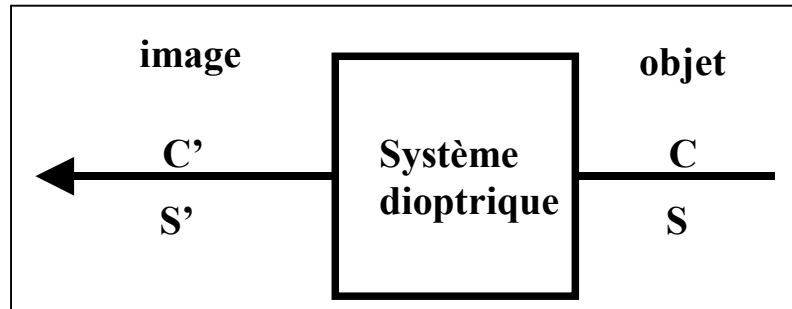
### III. Constructions géométriques



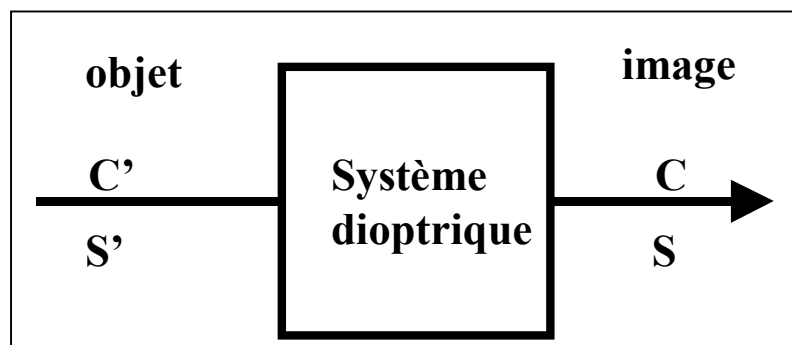
*Exercice : Faire la construction dans le cas d'un miroir concave.*

#### IV. Principe de détermination des éléments caractéristiques d'un système catadioptrique

Une méthode permettant de déterminer aisément les éléments caractéristiques d'un système catadioptrique, est fondée sur le principe suivant : Tout système dioptrique terminé par un miroir de centre  $C$  et de sommet  $S$ , est équivalent à un miroir sphérique de centre  $C'$  et de sommet  $S'$  conjugués respectivement de  $C$  et  $S$  par rapport au système dioptrique placé devant le miroir, *dans le sens de la lumière réfléchie*.



Dans le repère orienté dans le sens de propagation de la lumière incidente,  $C'$  et  $S'$  sont les points objet dont les images à travers le système dioptrique sont respectivement  $C$  et  $S$ .



En effet, tout rayon passant par  $C'$  émerge du système dioptrique en passant par son conjugué  $C$ . Le miroir renvoie ce rayon sur  $C$ , qui effectue en sens inverse le même chemin qu'à aller. Il repasse donc par  $C'$ , qui vérifie ainsi les propriétés d'un centre optique de miroir. Tout rayon incident passant par  $S'$  arrive sur le miroir en son sommet  $S$  et est donc réfléchi symétriquement par rapport à l'axe optique.  $S'$  vérifie donc les propriétés d'un sommet de miroir.

*Exercice : Déterminer le système équivalent à une boule en verre d'indice  $n$  de centre  $O$  et de rayon  $R$  dont on a métallisé la face arrière.*