••• *Remarque/Commentaire n°1* :
Pour certaines questions ci-après, nous proposons plusieurs méthodes de résolution qui étaient envisageables (certaines méthoes étant inspirées ou affinées de ce qui a été lu dans les copies).
Mais évidemment à une question particulière, pour répondre, une seule solution suffisait.

******* EXERCICE 1 ******* ***On pose :*** $A = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\operatorname{sh}(n) + \operatorname{ch}(n)}$.

1°) *Sans calculer* A*, montrons que* $A \in \mathbb{R}$.

Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$: $u_n = \frac{\sin(n)}{\operatorname{sh}(n) + \operatorname{ch}(n)}$. On a ainsi : $A = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

Comme la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est ***à valeurs réelles***, alors :

pour montrer que $A \in \mathbb{R}$***, il suffit de montrer que la série numérique*** $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ ***est convergente***.

Mais remarquons alors que, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x, \implies \boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant 2),\ u_n = e^{-n} \sin(n)}. \qquad (\textbf{\textit{E1.1}})$$

Ayant observé cela, plusieurs méthodes étaient envisageables pour démontrer la convergence de la série numérique $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ ***. Nous en examinons 3 ci-après parmi les plus rapides et les plus efficaces pour y arriver.***

••• *Méthode 1.*

On remarque que, d'après (***E1.1***) : $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$, $u_n = a_n \sin(n\theta)$, avec $\begin{cases} a_n = e^{-n} \searrow 0 \\ \theta = 1 \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z}), \end{cases}$

$\implies$ d'après le ***Critère des séries trigonométriques***, la série numérique $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ est convergente,

$\implies$ sa somme (totale) $A = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R}$, car, de plus, $u_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$. ***Cqfd.***

••• *Méthode 2.*

Comme, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant 1$ et $e^x > 0$, il vient, d'après (***E1.1***) :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant 2),\ 0 \leqslant |u_n| \leqslant e^{-n}. \qquad (\textbf{\textit{E1.2}})$$

Or $\sum_{n \geqslant 2} e^{-n} = \sum_{n \geqslant 2} \left(e^{-1}\right)^n$ est une ***série géométrique*** de raison $z = e^{-1}$ telle que $|z| = e^{-1} < 1$,

$$\implies \text{la série numérique } \sum_{n \geqslant 2} e^{-n} \text{ est convergente.} \qquad (\textbf{\textit{E1.3}})$$

Mais, d'après le ***Critère de comparaison des séries à termes*** $\geqslant 0$,

$$(\textbf{\textit{E1.2}}) \text{ et } (\textbf{\textit{E1.3}}) \implies \text{la série numérique } \sum_{n \geqslant 2} |u_n| \text{ est convergente,}$$

$\implies$ la série numérique $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ est absolument convergente, $\implies$ $\sum_{n \geqslant 2} u_n$ est convergente,

$\implies$ sa somme (totale) $A = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R}$, car, de plus, $u_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$. ***Cqfd.***

••• ***Remarque/Commentaire n°2 :***

La nature d'une série géométrique $\sum_{n \geqslant n_0} z^n$ est un résultat du Cours (donc censé être connu) :

elle converge (et même absolument) si $|z| < 1$, *et diverge si* $|z| \geqslant 1$,

ce qui fait 2 conditions assez triviales à vérifier.

Par conséquent, étudier la nature d'une telle série par tout autre approche ou critère (du genre ***Règle « $n^\alpha u_n$ »***) est inefficace et traduit davantage une méconnaissance du Cours, et donc un travail insuffisant pour sa compréhension et sa maîtrise. Il faut savoir simplement reconnaître une série géométrique chaque fois qu'on en a une devant soi, ce qui est, là aussi, plutôt trivial.

••• ***Remarque/Commentaire n°3 :***

Une formulation très populaire dans beaucoup de copies a consisté (dans cet Exercice, comme dans les suivants), après avoir écrit un encadrement comme (***E1.2***) ci-dessus, à écrire juste après :

« *Donc les séries* $\sum_{n \geqslant 2} |u_n|$ *et* $\sum_{n \geqslant 2} e^{-n}$ *sont de même nature, d'après le **Critère de comparaison des séries à termes*** $\geqslant 0$. »

Ceci était une utilisation ***très approximative*** de ce critère de convergence, lequel ne parle nulle part, dans son énoncé, de séries qui seraient de même nature (au contraire du ***Critère des équivalents des séries à termes*** $\geqslant 0$). Il est donc espéré que les un(e)s et les autres auront bien noté la manière dont il a été utilisé ici, et iront relire plus attentivement le Cours sur ce point. Ne faites pas dire à un critère de de convergence ce qu'il ne dit pas ***!!!***

••• ***Méthode 3.***

Remarquons que, d'après (***E1.1***), on a, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$:

$$\begin{aligned} u_n &= e^{-n}\sin(n) = e^{-n} \cdot \mathbf{Im}\,(e^{in}) \\ &= \mathbf{Im}\,(e^{-n} \cdot e^{in}) \qquad \text{(car } e^{-n} \in \mathbb{R}) \\ &= \mathbf{Im}\,(e^{-n+in}) = \mathbf{Im}\,(e^{(i-1)\,n}), \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$, $u_n = \mathbf{Im}\,(v_n)$, où $v_n = e^{(i-1)\,n} = \left(e^{i-1}\right)^n$.

La série numérique à termes complexes $\sum_{n \geqslant 2} v_n$ est une ***série géométrique*** de raison $z = e^{i-1}$ vérifiant :

$$z = e^i e^{-1} \implies |z| = |e^i| \times |e^{-1}| = 1 \times e^{-1} \implies |z| = e^{-1} < 1,$$

$\Longrightarrow$ la série numérique $\sum_{n \geqslant 2} v_n$ est convergente, $\Longrightarrow$ $\sum_{n \geqslant 2} u_n = \sum_{n \geqslant 2} \mathbf{Im}\,(v_n)$ est convergente,

$\Longrightarrow$ sa somme (totale) $A = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R}$, car, de plus, $u_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$. ***Cqfd.***

2°) ***Calculons*** A.

Le plus efficace ici consiste à partir de la remarque utilisée dans la ***Méthode 3*** ci-dessus, et selon laquelle :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;\; (n \geqslant 2), \quad u_n = \mathbf{Im}\,(e^{(i-1)\,n})}.$$

En effet, alors, du fait que $\sum_{n \geqslant 2} e^{(i-1)\,n}$ est une ***série géométrique*** convergente, car de raison $z = e^{i-1}$ vérifiant $|z| = e^{-1} < 1$, il s'ensuit que :

$$A = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{Im}\,(e^{(i-1)\,n}) = \mathbf{Im}\left[\sum_{n=2}^{+\infty} e^{(i-1)\,n}\right] = \mathbf{Im}\,(B), \quad \text{avec} \quad B = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{(i-1)\,n}.$$

Comme somme d'une série géométrique convergente de raison $z = e^{i-1}$ et de 1^{er} terme $z^2 = e^{2\,(i-1)}$,

$$B = \frac{z^2}{1-z} = \frac{e^{2\,(i-1)}}{1-e^{i-1}} = \frac{e^{-2}e^{2\,i}}{1-e^{-1}e^{i}} = e^{-2}\frac{\cos 2 + i\sin 2}{1-e^{-1}(\cos 1 + i\sin 1)} = e^{-2}\frac{\cos 2 + i\sin 2}{(1-e^{-1}\cos 1) - i\,e^{-1}\sin 1}$$

$$= e^{-2}\frac{(\cos 2 + i\sin 2)\cdot[\,(1-e^{-1}\cos 1) + i\,e^{-1}\sin 1\,]}{[\,(1-e^{-1}\cos 1)\ -\ i\,e^{-1}\sin 1\,]\cdot[\,(1-e^{-1}\cos 1)\ +\ i\,e^{-1}\sin 1\,]}$$

$$= e^{-2}\,\frac{[\,(1-e^{-1}\cos 1)\cos 2\ -\ (e^{-1}\sin 1)\sin 2\,] + i\,[\,(1-e^{-1}\cos 1)\sin 2\ +\ (e^{-1}\sin 1)\cos 2\,]}{(1-e^{-1}\cos 1)^2\ +\ (e^{-1}\sin 1)^2}.$$

Comme $A = \mathbf{Im}\,(B)$, on en déduit que :

$$\boxed{A\ =\ \frac{(1-e^{-1}\cos 1)\sin 2\ +\ (e^{-1}\sin 1)\cos 2}{(1-e^{-1}\cos 1)^2\ +\ (e^{-1}\sin 1)^2}\cdot e^{-2}\ =\ \frac{(e-\cos 1)\sin 2\ +\ (\sin 1)\cos 2}{(e-\cos 1)^2\ +\ \sin^2 1}\cdot e^{-1}}.$$

••• ***Remarque/Commentaire n°4 :***

En principe, ceci suffisait comme résultat. Mais il existe diverses autres variantes équivalentes de l'expression de A auxquelles on pouvait arriver, toutes aussi valables les unes que les autres.

Cependant, il est souvent souhaitable de fournir (surtout en vue d'une exploitation future), comme résultat final d'un calcul mathématique, une expression aussi simple que possible. Ainsi, ici, on pouvait remarquer que :

$$(e-\cos 1)\sin 2\ +\ (\sin 1)\cos 2 = e\cdot\sin 2\ +\ (\sin 1)\cos 2\ -\ (\cos 1)\sin 2 = e\cdot\sin 2\ +\ \sin(1-2)$$

$$= e\cdot\sin 2\ +\ \sin(-1) = e\cdot\sin 2\ -\ \sin 1,\quad \text{(car } \textit{sinus} \text{ est impaire)}$$

$$(e-\cos 1)^2\ +\ \sin^2 1 = e^2\ -\ 2\,e\cdot\cos 1\ +\ \cos^2 1\ +\ \sin^2 1 = e^2\ -\ 2\,e\cdot\cos 1\ +\ 1,$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{A\ =\ \frac{e\cdot\sin 2\ -\ \sin 1}{e^2\ -\ 2\,e\cdot\cos 1\ +\ 1}\cdot e^{-1}\ =\ \frac{\sin 2\ -\ e^{-1}\sin 1}{e^{-2}\ -\ 2\,e^{-1}\cos 1\ +\ 1}\cdot e^{-2}}.$$

••• ***Remarque/Commentaire n°5 :***

La ***valeur de la somme d'une série géométrique convergente*** $\sum\limits_{n\,\geqslant\,n_0} u_n$ ***de raison*** z (i.e. avec $|\,z\,| < 1$), est un résultat du Cours (énoncé et démontré), et censé être bien connu :

$$\sum_{n\,=\,n_0}^{+\infty} u_n\ =\ \frac{1^{\text{er}}\ \textit{terme (dans la somme)}}{1\ -\ \textit{(raison)}}\ =\ \frac{u_{n_0}}{1-z}.$$

Par conséquent, calculer une telle somme en revenant à des arguments de niveau Terminale (comme cela s'est trop souvent lu dans les copies) est grossièrement inefficace (d'abord en termes de gestion du temps d'examen) pour le niveau où nous sommes censés être, et traduit davantage une méconnaissance du Cours, et donc un travail insuffisant pour sa compréhension et sa maîtrise.

••• ***Remarque/Commentaire n°6 :***

Pour un nombre complexe $z = a + ib$, avec $a, b\ \in \mathbb{R}$:

– sa ***partie réelle*** est le nombre réel $\mathbf{Re}\,(z) = a$;

– sa ***partie imaginaire*** est le nombre réel $\mathbf{Im}\,(z) = b$.

Ainsi, la partie imaginaire de z n'est pas ib (comme lu dans certaines copies).

****** *EXERCICE 2* ****** ***Etudions la nature des séries :***

$\boxed{\textit{(1)} \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\ln n}{n+\sqrt{\operatorname{ch} n}}}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant 2)$: $u_n = \dfrac{\ln n}{n+\sqrt{\operatorname{ch} n}} \geqslant 0.$

• • • ***Méthode 1.***

Comme, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \geqslant \dfrac{e^x}{2} > 0$, alors $\sqrt{\operatorname{ch} x} \geqslant \sqrt{\dfrac{e^x}{2}} = \dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{2}} > 0.$

Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant 2),\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, avec $v_n = \sqrt{2}\cdot e^{-n/2}\ln n.$ (***E2.1***)

• ***Etudions la nature de la série numérique*** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} v_n$ ***.*** Pour y arriver, notons que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^2 v_n = \sqrt{2}\times \lim_{n\longrightarrow+\infty} n^2 e^{-n/2}\ln n = \sqrt{2}\times \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(n^3 e^{-n/2}\right)\frac{\ln n}{n} = \sqrt{2}\times 0\times 0,$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} n^2 v_n = 0,$$

$\Longrightarrow$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} v_n$ converge, d'après la ***Règle «*** $\boldsymbol{n^\alpha v_n}$ ***»***, avec $\alpha = 2 > 1.$ (***E2.2***)

• ***Conclusion :*** D'après le ***Critère de comparaison des séries à termes*** $\geqslant 0$,

(***E2.1***) et (***E2.2***) $\Longrightarrow$ $\boxed{\textit{La série numérique } \displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{\ln n}{n+\sqrt{\operatorname{ch} n}} \textit{ est convergente}}$.

• • • ***Remarque/Commentaire n°7 :***
Il ne faut pas se contenter de dire : *La série* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} v_n$ *converge, d'après la* ***Règle «*** $\boldsymbol{n^\alpha v_n}$ ***»***.
Il faut préciser la valeur de α utilisée et, ***surtout***, quelle propriété de cette valeur permet de conclure, soit ici le fait que $\alpha > 1$.

• • • ***Remarque/Commentaire n°8 :***
Ci-dessus, la puissance $\alpha = 2$ a permis de conclure. Mais on vérifie aisément que tout réel $\alpha > 1$ aurait permis tout autant de le faire.

• • • ***Méthode 2.***

On part de : $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant 2),\ n + \sqrt{\operatorname{ch} n} = \sqrt{\dfrac{e^n}{2}}\cdot\left(\sqrt{2\,n\,e^{-n}} + \sqrt{2\,e^{-n}\operatorname{ch} n}\right).$ (***E2.3***)

Or, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt{2\,n\,e^{-n}} = 0$, et $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt{2\,e^{-n}\operatorname{ch} n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt{1+e^{-2n}} = 1.$ (***E2.4***)

Maintenant,

(***E2.3***) et (***E2.4***) $\Longrightarrow\ n + \sqrt{\operatorname{ch} n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{e^n}{2}} \Longrightarrow u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{2}\,e^{-n/2}\ln n.$ (***E2.5***)

En posant $v_n = \sqrt{2}\cdot e^{-n/2}\ln n$, alors (***E2.5***) $\Longrightarrow$ les 2 séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} v_n$ sont de même nature, d'après le ***Critère des équivalents des séries à termes*** $\geqslant 0$.

On peut alors étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} v_n$ comme cela a été fait dans la ***Méthode 1***, puis conclure.

• • • ***Remarque/Commentaire n°9 :***
« Critère des équivalents des séries à termes $\geqslant 0$ ***»***), et non ***« Critère des équivalences »***, comme populairement lu dans les copies ***!!!***

$\boxed{\textit{(2)} \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt[3]{n}\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - 1\right)}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sqrt[3]{n}\sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} - 1.$

Considérons $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Observons que $u_n = \dfrac{\sin x}{x} - 1$ et que $x \underset{>}{\longrightarrow} 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Or, pour $x \longrightarrow 0$, on a :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \implies \frac{\sin x}{x} - 1 = -\frac{x^2}{6} + o(x^2) \implies \frac{\sin x}{x} - 1 \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{6},$$

$$\implies u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{6\,n^{2/3}} \implies -u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6\,n^{2/3}} = \frac{A}{n^\alpha}, \text{ avec : } \begin{cases} A = 1/6 > 0, \\ \alpha = 2/3. \end{cases}$$

$\implies$ La série $\sum_{n \geqslant 1} (-u_n)$ est divergente, d'après la ***Règle de Riemann pour les séries***, car $\alpha \leqslant 1$.

- ***Conclusion :*** Comme $\sum_{n \geqslant 1} (-u_n)$ et $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ sont toujours de même nature, alors

$$\boxed{\textbf{\textit{La série numérique}} \sum_{n \geqslant 1} \left(\sqrt[3]{n} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - 1 \right) \textbf{\textit{ est divergente}}}.$$

$\boxed{\textit{(3)} \sum_{n \geqslant 0} e^{-(1+i)\,n} \cos\left(e^{n^2}\right)}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-(1+i)\,n} \cos\left(e^{n^2}\right)$.

Remarquons que, $\forall n \in \mathbb{N}$: $|u_n| = \left|e^{-n}\right| \cdot \left|e^{-i\,n}\right| \cdot \left|\sin(e^{n^2})\right| = e^{-n} \cdot \left|\sin(e^{n^2})\right|$.
Comme, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant 1$ et $e^x > 0$, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant |u_n| \leqslant e^{-n}$.
On peut alors procéder exactement comme dans la ***Méthode 2*** de la question **1°)** de l'***Exercice 1***.

- ***Conclusion :*** $\boxed{\textbf{\textit{La série numérique}} \sum_{n \geqslant 0} e^{-(1+i)\,n} \cos\left(e^{n^2}\right) \textbf{\textit{ est convergente}}}$.

> **• • • *Remarque/Commentaire n° 10 :***
> Une inégalité telle que (rencontrée dans certaines copies)
>
> $$e^{-(1+i)\,n} \cos\left(e^{n^2}\right) \leqslant e^{-(1+i)\,n}$$
>
> ne veut rien dire, car les inégalités usuelles $\leqslant$, $\geqslant$, $<$ et $>$, connues entre nombres réels, ***n'ont aucun sens entre nombres complexes arbitraires***.

$\boxed{\textit{(4)} \sum_{n \geqslant 2} (-1)^n \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$: $u_n = (-1)^n \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$.

En partant du résultat classique $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n\pi) = (-1)^n}$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant 2),\ u_n = (-1)^n \frac{(-1)^n}{\ln n} = \frac{(-1)^{2n}}{\ln n}, \quad \text{i.e.} \quad u_n = \frac{1}{\ln n},$$

$$\implies \lim_{n \longrightarrow +\infty} n\,u_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n}{\ln n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} n \cdot (\ln n)^{-1} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} n \implies \lim_{n \longrightarrow +\infty} n\,u_n = +\infty.$$

- ***Conclusion :*** D'après la ***Règle « nu_n »***, $\boxed{\textbf{\textit{La série numérique}} \sum_{n \geqslant 2} (-1)^n \frac{\cos(n\pi)}{\ln n} \textbf{\textit{ est divergente}}}$.

> **• • • *Remarque/Commentaire n° 11 :***
> Une approche intempestive et précipitée, malheureusement populaire dans beaucoup de copies, a consisté à « démontrer » que cette série convergeait par le ***Critère des séries alternées***.
> Or, pour envisager qu'une série puisse, éventuellement, converger par ce critère, ***une condition minimale est (évidemment !!!) que cette série soit alternée***, i.e. que ce soit une série de nombre de réels dont 2 termes consécutifs vérifient : $u_n\,u_{n+1} \leqslant 0$. Ce n'était pas du tout le cas ici. On a même plutôt affaire à une série à termes > 0 ***...!!!***

****** EXERCICE 3 ****** ***Soit ω, un réel arbitraire fixé.***

1°) a) ***Trouvons le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{C}$ de la fonction :*** $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(\omega n) - \operatorname{ch}(\omega n)}{\operatorname{sh}(\omega n) + \operatorname{ch}(\omega n)} z^n$.

Posons, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n(z) = \frac{\operatorname{sh}(\omega n) - \operatorname{ch}(\omega n)}{\operatorname{sh}(\omega n) + \operatorname{ch}(\omega n)} z^n \in \mathbb{C}$.

Notons alors que $\mathcal{D}_f = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, f(z) \text{ existe dans } \mathbb{C} \right\} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, \text{la série } \sum_{n \geqslant 0} u_n(z) \text{ converge} \right\}$.

Déterminer $\mathcal{D}_f$ revient donc à mener une discussion sur la nature de la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n(z)$ selon les valeurs de z dans $\mathbb{C}$. Pour y arriver, remarquons d'abord que, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) = -e^{-x} \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x) = e^x \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x)} = -e^{-2x} \,;$$

$$\Longrightarrow \boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \; u_n(z) = -e^{-2\omega n} z^n = -(e^{-2\omega} z)^n}.$$

Il vient que $\boxed{\sum_{n \geqslant 0} u_n(z) \text{ est une série géométrique de raison } q = e^{-2\omega} z, \text{ et de } 1^{\text{er}} \text{ terme } u_0(z) = -1 \neq 0}$.

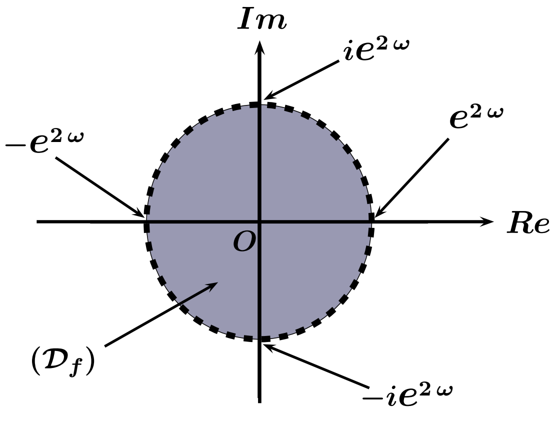
Par conséquent, elle converge si, et seulement si, $|\,q\,| < 1$. Or, comme ω est un nombre réel, alors $e^{-2\omega}$ est un réel > 0, et donc $|\,e^{-2\omega} z\,| = e^{-2\omega} |\,z\,|$. D'où l'équivalence :

$$\Big(\sum_{n \geqslant 0} u_n(z) \text{ converge} \Big) \iff \big(e^{-2\omega} |\,z\,| < 1, \text{ soit } |\,z\,| < e^{2\omega} \big).$$

• ***Conclusion :*** $\boxed{\boxed{\mathcal{D}_f = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, |\,z\,| < e^{2\omega} \right\} = D(O, e^{2\omega})}}$,

i.e. $\boxed{\boxed{\mathcal{D}_f \text{ est le } \textbf{\textit{disque ouvert}} \text{ du plan complexe de centre } O \text{ (l'origine du plan) et de rayon } R = e^{2\omega}}}$.

b) ***Représentation de ce domaine dans le plan complexe.***



N.B. $\boxed{\textit{Le bord du disque ne fait pas partie de } \mathcal{D}_f}$

2°) ***Calculons $f(z)$, $\forall z \in \mathcal{D}_f$.***

D'après ci-dessus, on a, $\forall z \in \mathcal{D}_f = D(O, e^{2\omega})$: $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} [-(e^{-2\omega} z)^n]$,

soit la somme d'une série géométrique convergente de raison $q = e^{-2\omega} z$ et de 1^{er} terme $-(e^{-2\omega} z)^0 = -1$. D'où :

$$\boxed{\boxed{\forall z \in \mathcal{D}_f = D(O, e^{2\omega}), \quad f(z) = \frac{-1}{1 - e^{-2\omega} z} = \frac{e^{2\omega}}{z - e^{2\omega}}}}.$$

**** *EXERCICE 4* ****

●●● ***Trouvons le domaine de définition dans*** $\mathbb{N}$ ***de la fonction :*** $T(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(k\pi\sqrt{1+n^2}\right)$.

Posons, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $f_n(k) = \sin\left(k\pi\sqrt{1+n^2}\right) \in \mathbb{R}$.

Alors $\mathcal{D}_f(\mathbb{N}) = \left\{k \in \mathbb{N} \;/\; T(k) \text{ existe dans } \mathbb{R}\right\} = \left\{k \in \mathbb{N} \;/\; \text{la série } \sum_{n\geqslant 0} f_n(k) \text{ converge}\right\}$.

Menons donc une discussion sur la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(k)$ selon les valeurs de k dans $\mathbb{N}$.

Fixons ainsi $k_0 \in \mathbb{N}$, arbitraire, et posons $u_n = f_n(k_0)$.

Pour étudier la série, partons du fait que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{1+n^2} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$.

Or, quand $n \longrightarrow +\infty$, $x = \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$,

$$\Longrightarrow \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2) = 1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\Longrightarrow \sqrt{1+n^2} = n\cdot\left[1+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] = n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\Longrightarrow k_0\pi\sqrt{1+n^2} = k_0\pi n + \frac{k_0\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad \text{car } k_0\pi \text{ constante réelle} \Longrightarrow (k_0\pi)\cdot O\left(\frac{1}{n^3}\right) = O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$\Longrightarrow u_n = \sin(k_0\pi n + \theta), \quad \text{avec } \theta = \frac{k_0\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty, \qquad (\textbf{\textit{E4.1}})$$

$$= (-1)^{k_0 n}\sin\theta, \quad \text{car } k_0 n \text{ est un entier.} \qquad (\textbf{\textit{E4.2}})$$

Par ailleurs, $(\textbf{\textit{E4.1}}) \Longrightarrow$ quand $n \longrightarrow +\infty$, $\theta \longrightarrow 0$ et $O(\theta^3) = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$; d'où :

$$\sin\theta = \theta + O(\theta^3) = \frac{k_0\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{k_0\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \qquad (\textbf{\textit{E4.3}})$$

D'autre part, $(-1)^{k_0 n}$ bornée $\Longrightarrow (-1)^{k_0 n}\cdot O\left(\frac{1}{n^3}\right) = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Ainsi, en combinant $(\textbf{\textit{E4.2}})$ et $(\textbf{\textit{E4.3}})$, il vient :

$$u_n = v_n + w_n, \quad \text{où} \quad v_n = (-1)^{k_0 n}\frac{k_0\pi}{2n}, \quad \text{et} \quad w_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \text{ quand } n \longrightarrow +\infty. \qquad (\textbf{\textit{E4.4}})$$

Rappelons nous alors que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ est une série de Riemann convergente, car $\alpha = 3 > 1$, et donc une série numérique absolument convergente, car elle est à termes positifs. Comme $w_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ quand $n \longrightarrow +\infty$, il s'ensuit que :

$$\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} w_n \text{ est aussi absolument convergente, et donc convergente.} \qquad (\textbf{\textit{E4.5}})$$

Mais alors $(\textbf{\textit{E4.4}})$ et $(\textbf{\textit{E4.5}})$ $\Longrightarrow$ les 2 séries $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ sont de même nature. $(\textbf{\textit{E4.6}})$

Il suffit donc de discuter la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ selon la valeur de k_0 dans $\mathbb{N}$.

Mais, pour cela, remarquons déjà qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (-1)^{k_0 n} = [\,(-1)^{k_0}\,]^n = \begin{cases} 1^n = 1 & \text{si } k_0 \text{ est un entier pair,} \\ (-1)^n & \text{si } k_0 \text{ est un entier impair.} \end{cases} \qquad (\textbf{\textit{E4.7}})$$

D'où la discussion de cas :

•• ***Cas 1 : k_0 entier pair.***

Dans ce cas, (***E4.7***) $\Longrightarrow \quad \forall\, n \in \mathrm{IN}^*, \quad v_n = \dfrac{k_0\pi}{2\,n}$.

Il faut alors encore distinguer 2 sous-cas :

• ***Sous-Cas 1.1 : $k_0 = 0$.***

Alors $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ est une série à termes nuls, $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ est une série convergente ,

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\textbf{\textit{Pour } } k_0 = 0, \quad \sum_{n \geqslant 1} u_n \ \textbf{\textit{ est une série convergente, et donc }} 0 \in \mathcal{D}_f(\mathrm{IN})}.$$

• ***Sous-Cas 1.2 : k_0 entier pair $\neq 0$.***

Alors $\dfrac{k_0\pi}{2}$ étant une constante réelle $\neq 0$, $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ est de même nature que la série harmonique $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, donc divergente.

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\textbf{\textit{Pour }} k_0 \textbf{\textit{ entier pair }} \neq 0, \quad \sum_{n \geqslant 1} u_n \ \textbf{\textit{ est une série divergente, et donc }} k_0 \notin \mathcal{D}_f(\mathrm{IN})}.$$

•• ***Cas 2 : k_0 entier impair.***

Dans ce cas, (***E4.7***) $\Longrightarrow \quad \forall\, n \in \mathrm{IN}^*, \quad v_n = (-1)^n \dfrac{k_0\pi}{2\,n}$.

Mais alors $\left(\forall\, n \in \mathrm{IN}^*, \ \ \dfrac{k_0\pi}{2\,n} \geqslant 0\right) \Longrightarrow \sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ est une ***série alternée***.

Comme, de plus, $|\, v_n \,| = \dfrac{k_0\pi}{2\,n} \searrow 0$, alors $\sum\limits_{n \geqslant 1} v_n$ converge, d'après le ***Critère des séries alternées***.

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\textbf{\textit{Pour }} k_0 \textbf{\textit{ entier impair, }} \sum_{n \geqslant 1} u_n \ \textbf{\textit{ est une série convergente, et donc }} k_0 \in \mathcal{D}_f(\mathrm{IN})}.$$

•• ***Conclusion :*** $\boxed{\mathcal{D}_f(\mathrm{IN}) = \Big\{k \in \mathrm{IN} \,/\ k = 0 \ \text{ ou } \ k \text{ est impair}\Big\} = (2\mathrm{IN}+1) \cup \{0\}}$.

••• ***Remarque/Commentaire n°12 :***
Le fait que $0 \in \mathcal{D}_f(\mathrm{IN})$ pouvait aussi se voir d'entrée en notant que $f_n(0) = 0, \ \forall\, n \in \mathrm{IN}^*$. Ainsi, $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(0)$ est une série numérique à termes nuls, donc convergente.

••• ***Déduisons le domaine de définition dans $\mathbb{Z}$ de la fonction $T(k)$.***

Ici, $\mathcal{D}_f(\mathbb{Z}) = \Big\{k \in \mathbb{Z} \,/\ T(k) \text{ existe dans } \mathrm{IR}\Big\} = \Big\{k \in \mathbb{Z} \,/\ \text{la série } \sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(k) \text{ converge}\Big\}$.

Il s'agirait donc de mener une discussion sur la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(k)$ selon les valeurs de k dans $\mathbb{Z}$.

Cependant, un examen attentif de la discussion menée dans IN fait apparaître que tout ce qui y a joué est le fait que k_0 soit un entier. Son signe n'y a joué aucun rôle. Par conséquent, cette discussion reste valable y compris pour $k_0 \in \mathbb{Z}$.

•• ***Conclusion :*** $\boxed{\mathcal{D}_f(\mathbb{Z}) = \Big\{k \in \mathbb{Z} \,/\ k = 0 \ \text{ ou } \ k \text{ est impair}\Big\} = (2\mathbb{Z}+1) \cup \{0\}}$.

****** EXERCICE 5 ******

1°) *Trouvons le domaine de définition $\mathcal{D}_F$ dans* IR×IR *de la fonction :* $F(a,b) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(an+b)^2}$ **.**

Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-(an+b)^2}$, qui appartient à IR et est > 0. Par définition, on a :

$$\mathcal{D}_F = \Big\{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, F(a,b) \text{ existe dans } \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge}\Big\}.$$

Menons donc une discussion sur la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ selon les valeurs de (a,b) dans IR × IR. Nous l'orientons selon les valeurs du réel a parce c'est le coefficient de n (et donc du monôme de plus haut degré) à l'intérieur du terme au carré dans l'exponentielle définissant u_n.

••• ***Cas 1 :*** $a = 0$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{-b^2}$, ***constante non nulle***, $\Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge, car $u_n \not\longrightarrow 0$.

• ***Conclusion 1 :*** $\boxed{\text{Pour } a = 0, \ (a,b) = (0,b) \notin \mathcal{D}_F, \text{ et ce } \forall b \in \mathbb{R}}$.

••• ***Cas 2 :*** $a \in \mathbb{R}^*$.

Nous examinons ici 3 méthodes différentes pour étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ dans ce cas.

• ***Méthode 1.***

On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{1/n} = \exp\left[-a^2 n\left(1+\dfrac{b}{an}\right)^2\right]$.

Or $a \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow a^2 > 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left[-a^2 n\left(1+\dfrac{b}{an}\right)^2\right] = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$.

Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$, alors, d'après la ***Règle de Cauchy***, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

• ***Méthode 2.***

On a, $\forall n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{e^{-(a(n+1)+b)^2}}{e^{-(an+b)^2}} = e^{(an+b)^2 - ((an+b)+a)^2} = e^{-2a^2 n - 2ab - a^2}$.

Or $a \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow a^2 > 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(-2a^2 n - 2ab - a^2) = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors, d'après la ***Règle de d'Alembert***, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

• ***Méthode 3.***

On a : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^2 u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^2 e^{-(an+b)^2} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left[\left(\dfrac{n}{an+b}\right)^2 \cdot (an+b)^2 e^{-(an+b)^2}\right]$.

Or, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{n}{an+b}\right)^2 = \dfrac{1}{a^2} \in \mathbb{R}$.

Tandis que, comme $x = (an+b)^2 \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$, alors :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(an+b)^2 e^{-(an+b)^2} \underset{x=(an+b)^2}{=} \lim_{x\longrightarrow+\infty} x\, e^{-x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{-x} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} n^2 u_n = 0,$$

$\Longrightarrow$ d'après la ***Règle « $n^\alpha u_n$ »***, avec $\alpha = 2 > 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

• ***Conclusion 2 :*** $\boxed{\text{Pour } a \in \mathbb{R}^*, \ (a,b) \in \mathcal{D}_F, \text{ et ce } \forall b \in \mathbb{R}}$.

••• ***Conclusion pour $\mathcal{D}_F$:*** $\boxed{\mathcal{D}_F = \Big\{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, a \neq 0\Big\} = \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}}$.

••• ***Remarque/Commentaire n°13 :***

Certain(e)s ont voulu forcer un *fax* du Test précédent en démarrant leur réponse à cette question en affirmant que

*« Comme la fonction $f(x) = e^{-(ax+b)^2}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est de même nature que l'**I.I.S.** en $+\infty$ $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. »*

Le problème est que cette affirmation est précipitée, car lorsque les réels a et b sont de signes opposés, la fonction $f(x) = e^{-(ax+b)^2}$ ***n'est pas décroissante sur*** $[0, +\infty[$ ***!!!***

Certes il y avait une manière d'arranger l'argument, mais même cela était une complication inutile, au vu des méthodes ci-dessus qui opèrent directement et rapidement sur la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$.

••• ***Remarque/Commentaire n°14 :***

Malgré la remarque insistante sur ce point effectuée par l'enseignant lors de la remise des copies du dernier Test, certain(e)s ont persisté à démarrer leur réponse à cette question en affirmant que

$$e^{-(an+b)^2} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} e^{-(an)^2}.$$

Nous le répétons donc encore une fois : en dehors du cas $b = 0$ (où elle est triviale, donc sans intérêt), ***cette équivalence est fausse***. En effet, on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{e^{-(an+b)^2}}{e^{-(an)^2}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} e^{-2abn - b^2} = \begin{cases} e^{-b^2} & \text{si } a = 0, \\ 0 & \text{si } a.b > 0, \\ +\infty & \text{si } a.b < 0. \end{cases}$$

Ainsi, pour $b \neq 0$***, cette limite n'est jamais égale à 1.***

Par conséquent, toute personne qui démarrait la réponse à cette question de cette manière là avait manifestement décidé que les points affectés à la dite question ne l'intéressaient pas ***!!!***

2°) ***Trouvons le domaine de définition*** $\mathcal{D}_G$ ***dans*** $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ***de la fonction :*** $G(h,\beta) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{h(n+\beta)^2}$.

Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = e^{h(n+\beta)^2}$, qui appartient à $\mathbb{R}$ et est > 0. Par définition, on a :

$$\mathcal{D}_G = \Big\{(h,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, G(h,\beta) \text{ existe dans } \mathbb{R}\Big\} = \Big\{(h,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, \text{la série } \sum_{n \geqslant 0} v_n \text{ converge}\Big\}.$$

Menons une discussion sur la nature de la série $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ selon les valeurs de $G(h,\beta)$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, en l'orientant selon les valeurs de h, coefficient du monôme de plus haut degré dans l'exponentielle définissant v_n.

••• ***Cas 1 :*** $h \geqslant 0$.

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(n+\beta)^2 \geqslant 0 \implies v_n \geqslant 1$, constante > 0, $\implies \sum_{n \geqslant 0} v_n$ diverge, car $v_n \not\longrightarrow 0$.

• ***Conclusion 1 :*** $\boxed{\text{Pour } h \geqslant 0, \ (h,\beta) \notin \mathcal{D}_G, \text{ et ce } \forall \beta \in \mathbb{R}}$.

••• ***Cas 2 :*** $h < 0$.

Alors $|h| = -h \implies h = -|h| \implies h = -\big(\sqrt{|h|}\big)^2$,

$\implies \forall n \in \mathbb{N}$, $h(n+\beta)^2 = -(an+b)^2$, avec $a = \sqrt{|h|} \neq 0$ et $b = \beta\sqrt{|h|} \in \mathbb{R}$,

$\implies \forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^{-(an+b)^2}$,

$\implies G(h,\beta) = F(a,b)$, avec $a \neq 0$.

En utilisant le résultat de la question **1°)**, on peut alors directement conclure :

• ***Conclusion 2 :*** $\boxed{\text{Pour } h < 0, \ (h,\beta) \in \mathcal{D}_G, \text{ et ce } \forall \beta \in \mathbb{R}}$.

••• ***Conclusion pour*** $\mathcal{D}_G$ ***:*** $\boxed{\mathcal{D}_G = \Big\{(h,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, h < 0\Big\} = \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}}$.

> ••• ***Remarque/Commentaire n°15 :***
> Les 2 ***Remarques/Commentaires*** à la fin de la réponse à la question **1°)** ont des versions analogues pour la question qui vient d'être traitée. Vous êtes invité(e) à les formuler vous-même ***!!!***

3°) ***Domaine de définition*** $\mathcal{D}_L$ ***dans*** $\mathsf{IR}\times\mathsf{IR}\times\mathsf{IR}$ ***de la fonction :*** $L(a,b,c) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{an^2+bn+c}$.

Posons, $\forall n \in \mathsf{IN}$: $w_n = e^{an^2+bn+c}$, qui appartient à IR et est > 0. Par définition, on a :

$$\mathcal{D}_L = \Big\{(a,b,c) \in \mathsf{IR}\times\mathsf{IR}\times\mathsf{IR} \,/\, L(a,b,c) \text{ existe dans } \mathsf{IR}\Big\}$$
$$= \Big\{(a,b,c) \in \mathsf{IR}\times\mathsf{IR}\times\mathsf{IR} \,/\, \text{la série } \sum_{n\geqslant 0} w_n \text{ converge}\Big\}.$$

Menons ainsi une discussion sur la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ selon les valeurs de (a,b,c) dans $\mathsf{IR}\times\mathsf{IR}\times\mathsf{IR}$.

Nous l'orientons selon les valeurs du réel a parce c'est le coefficient du monôme de plus haut degré à l'intérieur du terme dans l'exponentielle définissant w_n.

••• ***Cas 1 :*** $a = 0$.

Alors, $\forall n \in \mathsf{IN}$, $w_n = e^{bn+c} = e^c \cdot (e^b)^n$,

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{n\geqslant 0} w_n \text{ est une série géométrique de raison } z = e^b, \text{ et de } 1^{\text{er}} \text{ terme } w_0 = e^c \neq 0}.$$

Par conséquent, cette série converge si, et seulement si, $|z| < 1$, i.e. $e^b < 1$, soit $b < 0$.

• ***Conclusion 1.1 :*** $\boxed{\text{Pour } a = 0 \text{ et } b \geqslant 0,\ (a,b,c) \notin \mathcal{D}_L, \text{ et ce } \forall c \in \mathsf{IR}}$.

• ***Conclusion 1.2 :*** $\boxed{\text{Pour } a = 0 \text{ et } b < 0,\ (a,b,c) \in \mathcal{D}_L, \text{ et ce } \forall c \in \mathsf{IR}}$.

••• ***Cas 2 :*** $a \neq 0$.

Alors, $\forall n \in \mathsf{IN}$, on a :

$$an^2 + bn + c = a\Big(n^2 + \frac{b}{a}n\Big) + c = a\left[\Big(n + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\Big(n + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2}{4a} + c,$$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathsf{IN},\ w_n = \lambda \cdot e^{a(n+\beta)^2}, \text{ avec } \lambda = \exp\Big(c - \frac{b^2}{4a}\Big) \text{ et } \beta = \frac{b}{2a}.$$

Comme λ est une constante réelle > 0, donc ***une constante non nulle***, il s'ensuit que :

$$\sum_{n\geqslant 0} w_n \text{ est de même nature que la série } \sum_{n\geqslant 0} e^{a(n+\beta)^2} \text{ dont la somme est } G(a,\beta).$$

En utilisant le résultat de la question **2°)**, on peut conclure :

• ***Conclusion 2.1 :*** $\boxed{\text{Pour } a > 0,\ (a,b,c) \notin \mathcal{D}_L, \text{ et ce } \forall (b,c) \in \mathsf{IR}\times\mathsf{IR}}$.

• ***Conclusion 2.2 :*** $\boxed{\text{Pour } a < 0,\ (a,b,c) \in \mathcal{D}_L, \text{ et ce } \forall (b,c) \in \mathsf{IR}\times\mathsf{IR}}$.

••• ***Conclusion pour*** $\mathcal{D}_L$ ***:*** $\boxed{\mathcal{D}_L = \Big\{(a,b,c) \in \mathsf{IR}\times\mathsf{IR}\times\mathsf{IR} \,/\, (a<0) \text{ ou } (a = 0 \text{ et } b < 0)\Big\}}$,

ou encore $\boxed{\mathcal{D}_L = \big(\mathsf{IR}_-^* \times \mathsf{IR}\times\mathsf{IR}\big) \cup \big(\{0\} \times \mathsf{IR}_-^* \times \mathsf{IR}\big)}$.

> ••• ***Remarque/Commentaire n°16 :***
> Les 2 ***Remarques/Commentaires*** à la fin de la réponse à la question **1°)** ont des versions analogues pour la question qui vient d'être traitée. Vous êtes invité(e) à les fromuler vous-même ***!!!***

4°) a) ***Calculons une valeur approchée de*** $L(-1/5,-1,0)$ ***à*** 10^{-8} ***près.***

Par définition, $L(-1/5,-1,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$, avec, $\forall n \in \mathsf{IN}$, $w_n = e^{-\frac{n^2}{5} - n} > 0$.

Pour obtenir une valeur approchée de $L(-1/5,-1,0)$ à 10^{-8} près, il suffit de considérer une somme partielle $S_N = \sum_{n=0}^{N} w_n$, pour un rang N (à trouver et aussi petit que possible) vérifiant :

$$|\,L(-1/5,-1,0)\;-\;S_N\,| < 10^{-8}. \qquad (\textbf{\textit{E5.1}})$$

Or, $L(-1/5,-1,0)\;-\;S_N \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} w_n - \sum_{n=0}^{N} w_n \;=\; \sum_{n=N+1}^{+\infty} w_n \;=\; R_N$. Ainsi :

$$(\textbf{\textit{E5.1}}) \iff |\,R_N\,| < 10^{-8} \iff R_N < 10^{-8}, \quad \text{car } w_n > 0, \forall n \in \mathsf{IN}. \qquad (\textbf{\textit{E5.2}})$$

Etant une somme infinie, R_N est très difficile à manœuvrer directement. Cependant, pour trouver un rang N tel que $R_N < 10^{-8}$, il suffit de trouver une suite (ρ_N), ***plus maniable***, convergente vers 0 (***aussi vite que possible***) et vérifiant (au moins à partir d'un rang identifié) : $\forall N,\ R_N \leqslant \rho_N$. Une fois une telle suite trouvée, tout rang N satisfaisant $\rho_N < 10^{-8}$ vérifiera aussi $R_N < 10^{-8}$.

On sait que pour trouver une suite (ρ_N) appropriée, on peut s'inspirer de la manière dont la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ aura été prouvée. Or, cette convergence peut se prouver de plusieurs manières. Nous examinons ainsi 4 méthodes différentes (par ordre décroissant d'efficacité) pour trouver le rang N.

• • • *Méthode 1.*

On observe que :

$$\forall n \in \mathsf{IN}^*, \quad \sqrt[n]{w_n} \;=\; (w_n)^{1/n} \;=\; e^{-(n+5)/5}, \qquad (\textbf{\textit{E5.3}})$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0 < 1, \quad \Longrightarrow \quad \text{la série } \sum_{n\geqslant 0} w_n \text{ converge par la } \textbf{\textit{Règle de Cauchy}}.$$

Or, par ailleurs, $(\textbf{\textit{E5.3}}) \Longrightarrow$ la suite $(\sqrt[n]{w_n})_{n\geqslant 1}$ est décroissante et à valeurs dans $[\,0\,,\,1\,[$,

$$\Longrightarrow \forall N \in \mathsf{IN},\ \forall n \geqslant N+1\ (n \in \mathsf{IN}^*),\ \ (w_n)^{1/n} \leqslant r_N, \quad \text{où} \quad r_N \;=\; (w_{N+1})^{1/(N+1)} \;=\; e^{-(N+6)/5} \in [\,0\,,\,1\,[\,;$$

$$\Longrightarrow \forall N \in \mathsf{IN}, \quad R_N \leqslant \frac{(r_N)^{N+1}}{1-r_N}, \quad \text{i.e.} \quad \boxed{R_N \leqslant \rho_N, \quad \text{avec } \rho_N = \frac{w_{N+1}}{1-r_N}}.$$

Ainsi, pour avoir $R_N < 10^{-8}$, il suffit que $\rho_N = \dfrac{w_{N+1}}{1-r_N} < 10^{-8}$.

En calculant les termes successifs, on obtient le tableau de calculs suivant :

N	w_N	ρ_N	S_N
0	$1,00000\,00000$	$4,31 \times 10^{-1}$	$1,00000\,00000$
1	$3,01194\,21191 \times 10^{-1}$	$8,07 \times 10^{-2}$	$1,30119\,42119$
2	$6,08100\,62625 \times 10^{-2}$	$1,03 \times 10^{-2}$	$1,36200\,42745$
3	$8,22974\,70490 \times 10^{-3}$	$8,94 \times 10^{-4}$	$1,37023\,40216$
4	$7,46585\,80837 \times 10^{-4}$	$5,25 \times 10^{-5}$	$1,37098\,06074$
5	$4,53999\,29762 \times 10^{-5}$	$2,08 \times 10^{-6}$	$1,37102\,60073$
6	$1,85060\,11975 \times 10^{-6}$	$5,56 \times 10^{-8}$	$1,37102\,78579$
7	$5,05653\,13483 \times 10^{-8}$	$1,00 \times 10^{-9}$	$1,37102\,79085$

Ceci montre que $\rho_N < 10^{-8}$ est vérifié pour la première fois au rang $\boxed{N = 7}$, et qu'alors on a :

$$\boxed{S_N = S_7 \simeq 1,37102\,791, \ \text{ qui est donc une valeur approchée de } L(-1/5,-1,0) \text{ à } 10^{-8} \text{ près}}.$$

• • • *Méthode 2.*

Observons que :

$$\forall n \in \mathsf{IN}, \quad \frac{w_{n+1}}{w_n} \;=\; e^{-(2n+6)/5}, \qquad (\textbf{\textit{E5.4}})$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = 0 < 1, \Longrightarrow \text{ la série } \sum_{n \geqslant 0} w_n \text{ converge par la } \textbf{\textit{Règle de d'Alembert}}.$$

Or, par ailleurs, (***E5.4***) $\Longrightarrow$ la suite $\left(\dfrac{w_{n+1}}{w_n}\right)_{n \geqslant 0}$ est décroissante et à valeurs dans $[0, 1[$,

$$\Longrightarrow \forall N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N+1 \ (n \in \mathbb{N}),\ \frac{w_{n+1}}{w_n} \leqslant r_N, \quad \text{où } r_N = \frac{w_{N+2}}{w_{N+1}} = e^{-(2N+8)/5} \in [0, 1[\,;$$

$$\Longrightarrow \forall N \in \mathbb{N},\ R_N \leqslant \frac{w_{N+1}}{1 - r_N}, \quad \text{i.e.} \quad \boxed{R_N \leqslant \rho_N, \quad \text{avec } \rho_N = \frac{w_{N+1}}{1 - r_N}}.$$

Ainsi, pour avoir $R_N < 10^{-8}$, il suffit que $\rho_N = \dfrac{w_{N+1}}{1 - r_N} < 10^{-8}$.

En calculant les termes successifs, on obtient le tableau de calculs suivant :

N	w_N	ρ_N	S_N
0	$1,00000\,00000$	$3,77 \times 10^{-1}$	$1,00000\,00000$
1	$3,01194\,21191 \times 10^{-1}$	$7,03 \times 10^{-2}$	$1,30119\,42119$
2	$6,08100\,62625 \times 10^{-2}$	$9,05 \times 10^{-3}$	$1,36200\,42745$
3	$8,22974\,70490 \times 10^{-3}$	$7,95 \times 10^{-4}$	$1,37023\,40216$
4	$7,46585\,80837 \times 10^{-4}$	$4,73 \times 10^{-5}$	$1,37098\,06074$
5	$4,53999\,29762 \times 10^{-5}$	$1,90 \times 10^{-6}$	$1,37102\,60073$
6	$1,85060\,11975 \times 10^{-6}$	$5,15 \times 10^{-8}$	$1,37102\,78579$
7	$5,05653\,13483 \times 10^{-8}$	$9,38 \times 10^{-10}$	$1,37102\,79085$

Ceci montre que $\rho_N < 10^{-8}$ est vérifié pour la première fois au rang $\boxed{N = 7}$, et qu'alors on a :

$$\boxed{S_N = S_7 \simeq 1,37102\,791, \text{ qui est donc une valeur approchée de } L(-1/5, -1, 0) \text{ à } 10^{-8} \text{ près}}.$$

• • • ***Méthode 3.***

On observe que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = f(n)$, où f est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = e^{-\frac{x^2}{5} - x}$.
Cette fonction étant $\geqslant 0$ et décroissante sur $[0, +\infty[$, alors, d'après le ***Critère de comparaison avec une I.I.S. en*** $+\infty$, la série $\sum_{n \geqslant 0} w_n$ est de même nature que l'***I.I.S.*** $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, donc convergentes toutes les deux. Mais, de plus, on a alors :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant R_N \leqslant I_N, \quad \text{avec } I_N = \int_N^{+\infty} f(x)\,dx = \int_N^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{5} - x}\,dx. \qquad (\textbf{\textit{E5.5}})$$

On pourrait penser à prendre ici $\rho_N = I_N$. Cependant, ce choix n'est pas pertinent car il ne vérifie pas le critère de la maniabilité visé sur ρ_N, du fait que l'intégrale I_N est incalculable « à la main ». Il est plutôt souhaitable de déduire, à partir de I_N, une ρ_N maniable telle que $I_N \leqslant \rho_N$. Or, ceci est possible par :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2/5} \cdot e^{-x}\right) \Longrightarrow \left(\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \geqslant N,\ f(x) \leqslant e^{-N^2/5} \cdot e^{-x}\right),$$

$$\Longrightarrow I_N \leqslant e^{-N^2/5} \cdot \int_N^{+\infty} e^{-x}\,dx. \qquad (\textbf{\textit{E5.6}})$$

Comme pour $N \in \mathbb{N}$, $\int_N^{+\infty} e^{-x}\,dx$ est une ***I.I.S.*** en $+\infty$, convergente, alors sa valeur est donnée par :

$$\int_N^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \int_N^X e^{-x}\,dx = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \left(e^{-N} - e^{-X}\right) = e^{-N}. \qquad (\textbf{\textit{E5.7}})$$

En enchaînant (***E5.5***) à (***E5.7***), on arrive à :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant R_N \leqslant e^{-N^2/5} \cdot e^{-N}, \quad \text{i.e.} \quad \boxed{0 \leqslant R_N \leqslant \rho_N, \quad \text{avec } \rho_N = w_N}.$$

Ainsi, pour avoir $R_N < 10^{-8}$, il suffit que $\rho_N = w_N < 10^{-8}$. Or, avec $\varepsilon = 10^{-8}$, on a :

$$w_N < \varepsilon \iff \ln(w_N) < \ln \varepsilon \iff -\frac{N^2}{5} - N < \ln \varepsilon \iff \frac{N^2}{5} + N > -\ln \varepsilon.$$

Par ailleurs,

$$\frac{N^2}{5} + N = \frac{N^2 + 5N}{5} = \frac{\left(N + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}}{5} = \frac{1}{5}\left(N + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

Par conséquent,

$$\rho_N < \varepsilon \iff w_N < \varepsilon \iff N > \frac{5}{2}\left(\sqrt{1 - \frac{4}{5}\ln \varepsilon} - 1\right) \simeq 7,417.$$

Ceci montre que $\rho_N < 10^{-8}$ est vérifié pour la première fois au rang $\boxed{N = 8}$. Et alors on a :

$$\boxed{S_N = S_8 \simeq 1,37102\,791, \text{ qui est donc une valeur approchée de } L(-1/5,-1,0) \text{ à } 10^{-8} \text{ près}}.$$

••• ***Remarque/Commentaire n°17 :***
Dans la ***Méthode 3***, les calculs à la fin sont plus simples que dans les 2 méthodes précédentes. Cependant, l'analyse mathématique qui précède, pour aboutir à cette simplicité finale, est beaucoup plus longue et plus élaborée. Et, surtout : il fallait y penser ! Ceci compense cela ***!!!***

••• ***Remarque/Commentaire n°18 :***
En réalité, l'approche la plus populaire dans les rares copies qui ont abordé cette partie de l'épreuve a consisté à manœuvrer de la manière suivante pour trouver ρ_N majorant R_N :

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{5} - n} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-n} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (e^{-1})^n. \qquad (\textbf{\textit{E5.8}})$$

Or, $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} (e^{-1})^n$ est la somme d'une série géométrique convergente de raison $z = e^{-1}$ et de 1[er] terme $(e^{-1})^{N+1} = e^{-N-1}$. Sa valeur est donc : $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} (e^{-1})^n = = \frac{e^{-N-1}}{1 - e^{-1}}$.

D'où : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\boxed{0 \leqslant R_N \leqslant \rho_N, \quad \text{avec } \rho_N = \frac{e^{-N-1}}{1 - e^{-1}}}$.

Ainsi, pour avoir $R_N < 10^{-8}$, il suffit que $\rho_N = \dfrac{e^{-N-1}}{1 - e^{-1}} < 10^{-8}$. Or, avec $\varepsilon = 10^{-8}$, on a :

$$\frac{e^{-N-1}}{1 - e^{-1}} < \varepsilon \iff N > -\ln\left[\,\varepsilon\,(1 - e^{-1}\,)\right] - 1 \simeq 17,879.$$

Ceci montre que $\rho_N < 10^{-8}$ est vérifié pour la première fois au rang $\boxed{N = 18}$. Ceci garantissait donc que $S_N = S_{18}$ est une valeur approchée de $L(-1/5,-1,0)$ à 10^{-8} près. Seulement, ayant obtenu cela, il fallait ensuite se taper le calcul de la dite somme partielle $S_{18} = \displaystyle\sum_{n=0}^{18} w_n$ sur sa calculatrice, ce à quoi la quasi-totalité des intéressé(e)s ont évidemment renoncé ...

La question est alors : ***pourquoi trouvait-on ici un nombre de termes à additionner égal à plus du double de celui trouvé dans les méthodes précédentes ?*** La réponse est que la majoration à la base de cette approche et utilisée pour écrire (***E5.8***), à savoir $e^{-\frac{n^2}{5} - n} \leqslant e^{-n}$, est correcte, certes, mais ***extrêmement brutale !!!*** En effet, il faut savoir que le nombre de termes à additionner pour atteindre une précision visée sur la somme d'une série est d'autant plus petit que son terme général tend plus vite vers 0 lorsque l'indice tend vers $+\infty$. Or, dans le cas présent, ce qui fait que le terme général w_n tend très vite vers 0 quand $n \longrightarrow +\infty$ est précisément la présence du terme $-n^2/5$ dans l'exponentielle. En l'éliminant pour ne garder que le $-n$, on réduit considérablement la vitesse à laquelle le terme général tend vers 0.

La ***Méthode 4*** ci-après a pour objectif de montrer comment on pouvait redresser la situation dans cette approche relativement intuitive.

••• ***Méthode 4.***

L'inefficacité dans l'approche intuitive ci-dessus tient à ce qu'elle utilise implicitement l'inégalité, certes vraie $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $e^{-n^2/5} \leqslant 1$. Mais elle oublie que dans la somme infinie R_N où elle est utilisée, l'indice n ne part pas de 0 en montant, mais plutôt de $N+1$ en montant. Par conséquent, une majoration plus pertinente était plutôt obtenue par :

$$\forall\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N+1\ (n \in \mathbb{N}),\quad e^{-n^2/5} \leqslant e^{-(N+1)^2/5}.$$

Avec cela, au lieu de (***E5.8***), il venait plutôt :

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{5}-n} \leqslant e^{-(N+1)^2/5} \times \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-n} = e^{-(N+1)^2/5} \times \frac{e^{-N-1}}{1-e^{-1}}.$$

$$\Longrightarrow\ \forall\, N \in \mathbb{N},\quad R_N \leqslant \frac{e^{-\frac{(N+1)^2}{5}-N-1}}{1-e^{-1}},\quad \text{i.e.}\quad \boxed{R_N \leqslant \rho_N,\quad \text{avec } \rho_N = \frac{w_{N+1}}{1-e^{-1}}}.$$

Ainsi, pour avoir $R_N < 10^{-8}$, il suffit que $\rho_N = \dfrac{w_{N+1}}{1-e^{-1}} < 10^{-8}$. Or, avec $\varepsilon = 10^{-8}$, on a :

$$\frac{w_{N+1}}{1-e^{-1}} < \varepsilon \iff N > \frac{5}{2}\sqrt{1-\frac{4}{5}\ln\left[\,\varepsilon\,(1-e^{-1})\right]} - \frac{7}{2} \simeq 6.532.$$

Ceci montre que $\rho_N < 10^{-8}$ est vérifié pour la première fois au rang $\boxed{N=7}$. Et alors on a :

$$\boxed{S_N = S_7 \simeq 1,37102\,791,\quad \text{qui est donc une valeur approchée de } L(-1/5,-1,0) \text{ à } 10^{-8} \text{ près}}.$$

••• ***Remarque/Commentaire n°19 :***
On retrouve bien ainsi un nombre de termes à additionner comparable à ceux des 3 premières méthodes.

b) ***Approximation de l'erreur absolue associée à cette valeur approchée de*** $L(-1/5,-1,0)$.

Notons $\widetilde{L}(-1/5,-1,0)$, la valeur approchée de $L(-1/5,-1,0)$ calculée par l'une quelconque des 4 méthodes précédentes. Par définition, l'erreur absolue qui lui est associée est :

$$\delta_L(-1/5,-1,0) = L(-1/5,-1,0) - \widetilde{L}(-1/5,-1,0) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n - \sum_{n=0}^{N} w_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} w_n = R_N,$$

où N est le rang jusqu'auquel on a sommé les termes de la série pour obtenir la valeur approchée $\widetilde{L}(-1/5,-1,0)$. Or,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{w_{n+1}}{w_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{-(2n+6)/5} = 0 < 1,$$

$\Longrightarrow\ \sum_{n\geqslant 0} w_n$ est une ***série asymptotiquement géométrique*** de raison $r=0$,

$\Longrightarrow$ une approximation de R_N est donnée par $\dfrac{w_{N+1}}{1-0} = w_{N+1}$.

Ainsi, si on considère la valeur de N qui est revenue dans 3 des 4 méthodes, à savoir $N=7$, il vient :

$$\boxed{\delta_L(-1/5,-1,0) \approx w_8},\quad \text{i.e.}\quad \boxed{\delta_L(-1/5,-1,0) \approx 9,26\times 10^{-10}}.$$

5°) a) ***Du calcul précédent, on peut déduire une valeur approchée de*** $L(-1/5,-1,7)$. ***Laquelle et que peut-on dire de l'erreur absolue associée ?***

Par définition,

$$L(-1/5,-1,7) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{5}-n+7} = e^7 \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{5}-n},\quad \text{i.e.}\quad \boxed{L(-1/5,-1,7) = e^7\cdot L(-1/5,-1,0)}.$$

De ce fait, une valeur approchée de $L(-1/5,-1,7)$ est donnée par : $\boxed{\widetilde{L}(-1/5,-1,7) = e^7\cdot\widetilde{L}(-1/5,-1,0)}$,

A.N. $\widetilde{L}(-1/5,-1,7) = e^7\cdot 1,37102\,791$, i.e. $\boxed{\widetilde{L}(-1/5,-1,7) = 1503,51467}$.

L'erreur absolue qui lui est associée est $\delta_L(-1/5,-1,7) = L(-1/5,-1,7) - \widetilde{L}(-1/5,-1,7)$ et vérifie :

$\delta_L(-1/5,-1,7) = e^7 \cdot [\,L(-1/5,-1,0) - \widetilde{L}(-1/5,-1,0)\,]$, soit $\boxed{\delta_L(-1/5,-1,7) = e^7 \cdot \delta_L(-1/5,-1,0)}$.

Donc cette erreur absolue vaut sensiblement 1504 fois celle associée à la valeur approchée de $L(-1/5,-1,0)$.

b) ***Que peut-on dire de l'erreur relative associée comparativement à celle associée à la valeur approchée de*** $L(-1/5,-1,0)$ ***calculée ci-dessus ?***

Par définition, l'erreur relative associée à la valeur approchée de $L(-1/5,-1,0)$ est :

$$\varepsilon_L(-1/5,-1,0) = \frac{\delta_L(-1/5,-1,0)}{L(-1/5,-1,0)}.$$

Celle associée à la valeur approchée de $L(-1/5,-1,7)$ est :

$$\varepsilon_L(-1/5,-1,7) = \frac{\delta_L(-1/5,-1,7)}{L(-1/5,-1,7)} = \frac{e^7 \cdot \delta_L(-1/5,-1,0)}{e^7 \cdot L(-1/5,-1,0)} = \frac{\delta_L(-1/5,-1,0)}{L(-1/5,-1,0)},$$

$$\Longrightarrow \boxed{\varepsilon_L(-1/5,-1,7) = \varepsilon_L(-1/5,-1,0)}.$$

Ainsi : ***L'erreur relative associée à la valeur approchée de*** $L(-1/5,-1,7)$ ***est égale à celle associée à la valeur approchée de*** $L(-1/5,-1,0)$ ***.***

• • • ***Remarque/Commentaire n° 20 :***

Pour terminer, nous signalons une erreur systématique grave (et ***fatale !!!***) rencontrée dans certaines copies (certes peu nombreuses, mais quand même !). ***« Systématique »*** en ce sens qu'elle a été ***répétée du début jusqu'à la fin de la copie***, i.e. dans le traitement de tous les Exercices. Erreur qui, de ce fait, a entraîné que les intéressé(e)s se sont retrouvé(e)s avec une note probablement nettement inférieure à leurs attentes à la sortie de la salle d'examen après l'épreuve (même si le correcteur a essayé d'être partiellement indulgent, en ne donnant pas systématiquement ***0***, comme cela se devait). En cause ici : un manque flagrant de rigueur dans l'approche de travail.

En effet, il a été lourdement insisté en Cours sur le fait que la ***série numérique*** $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et la ***suite numérique*** $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ sont ***2 objets mathématiques différents***, et, par conséquent, ***notés différemment***. Etudier la nature de l'une n'est pas étudier celle de l'autre. Or, voici, à titre illustratif, le genre de choses qu'on a lu de manière systématique dans certaines copies (et ce pour pratiquement toutes les études de séries demandées dans l'épreuve) :

> Comme, $\forall\, x \in \mathrm{IR}$, $|\sin x| \leqslant 1$ et $e^x > 0$, il vient :
>
> $$\forall\, n \in \mathrm{IN}\ \ (n \geqslant 2),\ \ 0 \leqslant |\, u_n \,| \leqslant e^{-n}.$$
>
> Posons $v_n = e^{-n}$. On a : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n^2\, v_n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n^2\, e^{-n} = 0$,
>
> $\Longrightarrow$ v_n converge d'après la Règle «$\boldsymbol{n^\alpha u_n}$»,
>
> $\Longrightarrow$ $|\, u_n \,|$ converge, d'après le Critère de comparaison des séries à termes $\geqslant 0$,
>
> $\Longrightarrow$ u_n converge absolument,
>
> $\Longrightarrow$ u_n converge.

Le problème est que (même si, en soi, elle constitue déjà un abus de langage), dans les notations contemporaines des Mathématiques, l'assertion ***«*** u_n ***converge »*** signifie que ***« la suite de terme général*** u_n ***converge »***. Or, la question portait plutôt sur la nature de la ***« série de terme général*** u_n ***»***. Par conséquent, tel que formulé, ce qui est encadré ci-dessus est tout simplement une ***réponse hors-sujet !!!***

FIN