Travaux Dirigés d'Optique Géométrique : Série N°1

Exercice1

1. Montrer que le temps le plus court, donc le trajet court, pour un rayon lumineux pour aller d'un point A à un point B après réflexion sur un miroir plan, correspond à la loi de Descartes.
2. Même question si A et B sont dans 2 milieux d'indices respectifs n_1 et n_2 séparés par un dioptre plan

Exercice 2

On considère une lame à faces parallèles (voir figure 1), d'épaisseur e et d'indice n, plongée dans l'air. On ne prendra pas en compte les déphasages supplémentaires égaux à π qui interviennent lorsque la lumière pénètre dans un milieu plus réfringent.

a) Calculer la différence de chemin optique pour un rayon incident (0) arrivant sous l'angle i, entre le rayon réfléchi par le dioptre inférieur (2) et le rayon réfléchi par le dioptre supérieur (1).

b) Calculer la différence de chemin optique entre le rayon transmis par la lame (3) et le rayon qui aurait suivi un trajet dans l'air.

c) Pour quelle valeur i_B de l'angle d'incidence le rayon réfléchi (1) est-il perpendiculaire au rayon réfracté (**rayon IJ**) (**incidence de BREWSTER**) ?

On donne e = 2 mm ; n = 1,5 ; i = $\pi/6$.

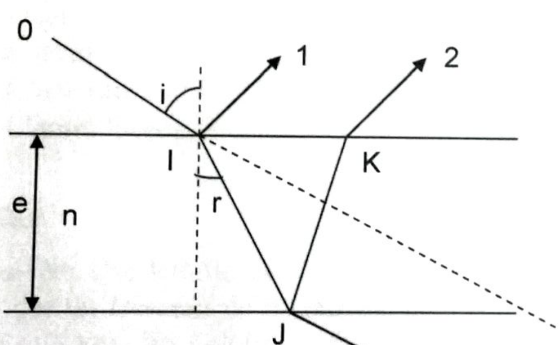


Figure 1

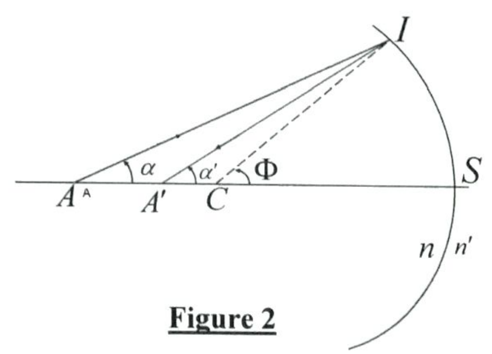


Figure 2

Exercice 3

Soit un dioptre sphérique (voir figure 2) de centre C, de rayon R=CS, qui sépare deux milieux homogènes d'indices n et n'. Une source ponctuelle A est placée sur l'axe du dioptre à la distance AS= a du sommet S.

Au rayon incident AI, issu de A, correspond un rayon émergent qui coupe l'axe en A' (A'S=a'). Le point d'incidence I est repéré par l'angle Φ=(CS,CI). On supposera a>a'>R et n'>n.

1) Calculer le chemin optique L(Φ)=(AIA') qui sépare A et A'.
2) a) En déduire la relation entre a, a', R, n, n' et Φ imposée par le principe de Fermat.

   b) Déterminer (en fonction de R, n et n') les abscisses a et a' des points conjugués (A, A') pour lesquels le dioptre réalise un stigmatisme rigoureux.

AN : R=6cm, n=1, n'=1,5. Calculer a et a'.

3) Quelle relation (**condition d'Abbe**) doit lier n, n' $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ et les angles orientés α et α' pour que le système rigoureusement stigmatique pour le couple (A, A') soit également

stigmatique pour le couple de points conjugués B et B', voisins de A et A' et situés dans le plan de front $(AB \perp$ axe et $A'B' \perp$ axe$)$.

4) Quelle relation (**condition de Herschell**) doit lier n, n', $\overline{AC}$, $\overline{A'C'}$, α et α' pour que le système rigoureusement stigmatique pour le couple (A, A') soit également stigmatique pour le couple de points conjugués C et C' situés sur l'axe et voisins de A et A'.

Exercice4

On considère dans l'air une demie sphère de rayon R, de centre C, d'indice n. Un faisceau de rayons parallèles (A à l'infini) arrive perpendiculairement à la face d'entrée plane.

1. Montrer que le stigmatisme rigoureux ne peut pas être réalisé : on commencera par montrer que tout rayon issu de A passe par le point A' tel que $CA' = \dfrac{nR}{n\cos i - \sqrt{1-n^2\sin^2 i}}$
2. Donner les positions limites des points images. Quel est celui correspondra à l'utilisation du système dans l'approximation de Gauss ?

Exercice 5

Un individu (1.85m) ayant les yeux à 15cm du sommet du crâne se trouve devant le miroir d'une armoire à glace. Par un hasard curieux, le miroir lui permet de se voir de la tête aux pieds, et rien de plus.

1. quelle est le hauteur du miroir ?
2. A quelle distance celui-ci est-il placé par rapport au sol ?
3. Quel est le rôle de la distance séparant l'individu de l'armoire ?

Pour cet exercice, on donnera deux solutions :

- L'une utilisant la réflexion des rayons lumineux,
- L'autre faisant intervenir la notion d'image.

Exercice 6

On considère une lentille demi – boule de rayon R et d'indice de réfraction n. Cette lentille est éclairée par un faisceau de rayons parallèles tombant en incidence normale sur sa face plane. On suppose que tous les rayons du faisceau sont contenus dans un cylindre de révolution autour de l'axe dont le rayon y_0 est tel qu'aucun des rayons du faisceau ne subisse une réflexion totale sur la surface sphérique.

a) Soit un rayon incident caractérisé par l'angle d'incidence i sur la face sphérique. Ce rayon subit une réfraction sur la surface sphérique et on note F' le point d'intersection entre le rayon émergent et l'axe de la lentille. Calculer en fonction de cos(i) le chemin optique parcouru par le rayon entre la face d'entrée de la lentille et le point F'.
b) On suppose que l'angle i est suffisamment petit pour négliger i^4 devant i^2. En déduire une expression du chemin optique en fonction de i.
c) F'est l'image du point à l'infini si sa position est indépendante de i. déterminer la position de F'.

Exercice N°7

1. On considère le dioptre sphérique d'indice n_o et n_i et le couple de point A_o et A_i sur l'axe Sz. Montrer que le chemin optique L entre A_o et A_i s'écrit :

$$L = n_0 d_0 \left\{ 1 + 2\rho \frac{(\rho + d_0)}{d_0^2}(1-\cos\omega) \right\}^{\frac{1}{2}} + n_i d_i \left\{ 1 + 2\rho \frac{(\rho + d_i)}{d_i^2}(1-\cos\omega) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

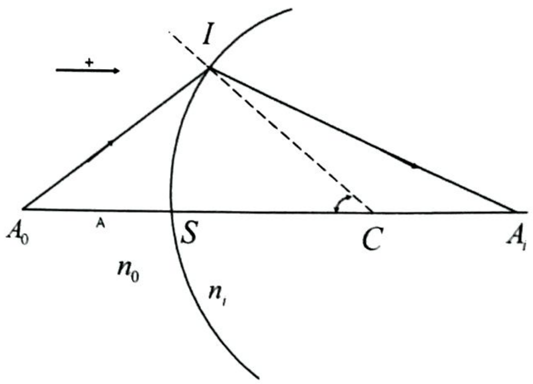
Où $d_0 = \left|\overline{SA_0}\right|$, $d_i = \left|\overline{SA_i}\right|$, $\rho = \left|\overline{SC}\right|$ et $\omega = ICS$.

En introduisant, dans l'expression précédente, les quantités algébriques $p_0 \equiv \overline{SA_0}$, $p_i \equiv \overline{SA_i}$ $R \equiv \overline{SC}$, établir :

a) Que le sommet S est sa propre image
b) Que le centre C est sa propre image
c) Que $L = 0$ pour deux points particuliers ; situer ces points par rapport à S puis par rapport à C (point d'Young ou de Weierstrass)

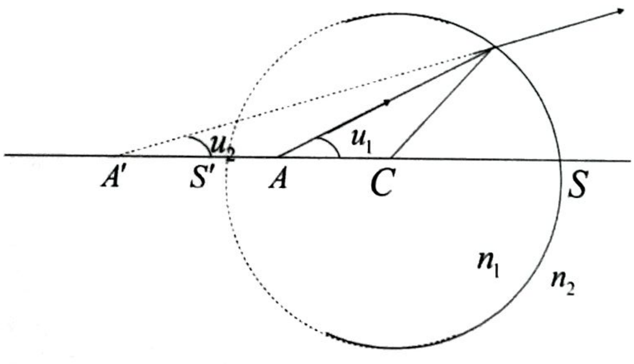
Etablir, dans le cas de l'approximation de Gauss, la relation de conjugaison de Descartes :

$$-\frac{n_0}{p_0} + \frac{n_i}{p_i} = V \qquad \text{avec} \qquad V \equiv \frac{n_i - n_0}{R}$$



Exercice 8

Une calotte sphérique de centre *C*, de rayon de courbure *R* sépare deux milieux d'indice *n* et *n'* (dioptre sphérique).
Ce système donne d'un point objet *A* une image ponctuelle *A'*



1°) Etablir la relation suivante :

$$\frac{n\overline{CA}}{\overline{IA}} = \frac{n'\overline{CA'}}{\overline{IA'}} \text{ (Invariant fondamental du dioptre sphérique)}$$

2°) Montrer que les points de Weierstrass (ou points de Young) vérifient la relation

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CS}} = -\frac{n'}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{CA}}{\overline{CS}} = -\frac{n'}{n}$$

3°) En déduire la relation particulière aux points de Weierstrass $n\overline{IA} = n'\overline{IA'}$

4°) Montrer que les points de Weierstrass sont exactement aplanétiques et vérifient la relation d'Abbe $n\overline{AB}\sin u_1 = n'\overline{A'B'}\sin u_2$

Exercice N°9

On considère un dioptre sphérique concave, de rayon $2,4\ cm$, séparent deux milieux d'indices 1,6 pour le milieu objet et 1 pour le milieu image.

1°) Déterminer la position du couple de points rigoureusement stigmatiques A_0 et A_i. Faire un schéma soigné à l'échelle 1

2°) Montrer que les rayons qui émergent du dioptre sous l'angle maximal sont, dans l'espace objet, normaux à l'axe du dioptre Sz passant par A_0. Calculer l'angle d'émergence de ces rayons par rapport à Sz. Représenter le faisceau utilisable issu de A_0

Exercice N°10

1- Soit un milieu réfringent formé de couches homogènes, d'indices n_1, n_2, . . . , n_p, . . . limité par des dioptres plans horizontaux. Un rayon lumineux se propageant dans ce milieu fait avec la normale aux dioptres un angle ip dans la couche d'indice n_p.

Montrer que la trajectoire du rayon est plane. Ecrire une relation entre n_p, i_p, n_{p+1} et i_{p+1} ; en déduire une expression invariante.

2- On suppose maintenant que les couches homogènes sont infiniment minces de sorte que les surfaces équi-indices sont des plans horizontaux et que l'indice est une fonction $n(z)$ de l'altitude z.

Pour un rayon lumineux se propageant dans ce milieu, écrire une relation entre l'indice n à l'altitude z et l'angle i que fait la trajectoire avec la verticale à cette altitude (on utilisera le résultat de la question précédente sans soulever de difficulté mathématique sur les conditions de passage à la limite).

En déduire l'équation différentielle et la trajectoire suivie.

3- On suppose que l'indice du milieu varie suivant la loi $n(z) = n_o + \lambda z$. on considérera dans ces calculs que est assez petit pour négliger les termes du second ordre en $\dfrac{\lambda z}{n_o}$

Trouver l'équation de la trajectoire dans son plan, sachant que le rayon incident arrive à l'origine des axes sous un angle de 45° avec l'horizontale. Quelle est la nature de la trajectoire ?

Travaux Dirigés d'Optique Géométrique : Série N°2

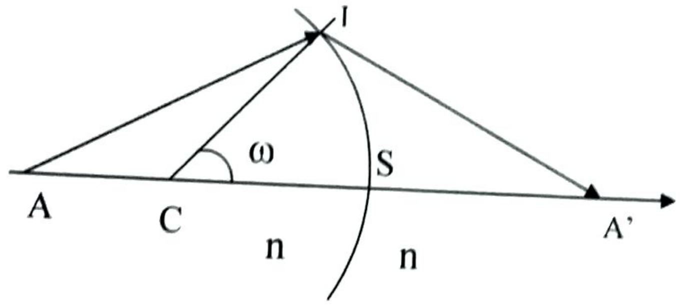
Exercice N°1

Soit un dioptre sphérique concave de centre C et de rayon R qui sépare l'espace en un milieu d'indice n_1 et un milieu d'indice n_2. Construire par diverses méthodes le rayon réfracté correspondant à un rayon incident quelconque. Considérer le cas où $n_1 > n_2$ et le cas $n_1 < n_2$.

Refaire les mêmes constructions pour un dioptre sphérique convexe.

Exercice 2

Deux milieux transparents et homogènes d'indices de réfraction $n > n'$ sont séparés par une surface sphérique de sommet S et de centre C dans n. Soit le rayon AI qui se réfracte en IA'.



1°) Exprimer le chemin optique $L = (AIA')$ en fonction de n et n', des abscisses $\overline{CA}$ et $\overline{CA'}$ et de ω

2°) Le système étant utilisé dans les conditions de Gauss, on peut alors remplacer les fonctions sinusoïdales de ω par leurs développements au 2ème ordre. Exprimer ainsi L en fonction de ω^2.

3°) Appliquer le principe de Fermat pour obtenir la relation de conjugaison du dioptre sphérique avec origine au centre.

Exercice 3

Une sphère de verre de $4\ cm$ de diamètre, dont l'indice de réfraction est de $1,5$, contient à $1\ cm$ de son centre, une petite bulle d'air de $2\ mm$ de diamètre. Quelles sont la position et la grandeur de l'image de la bulle pour un observateur qui regarde la sphère le long d'un diamètre passant par la bulle d'air ?

On fera le calcul pour les deux positions possible de l'observateur.

Exercice 4

On considère une lentille épaisse, en verre d'indice n=1,5, constituée de 2 dioptres, D_1 et D_2 :

D_1 de rayon +20cm, de sommet S_1, et de centre C_1.

D_2 de rayon -10cm, de sommet S_2, et de centre C_2.

L'épaisseur de la lentille est de $\overline{S_1S_2} = 5cm$.

1) Quelle est la forme de la lentille ?
2) Calculer la position des foyers de chacun des dioptres.
3) Calculer la position des foyers de la lentille.
4) Déterminer la position et la hauteur de l'image A'B' donnée d'un objet AB par la lentille, AB ayant une hauteur de 2cm et tel que $\overline{S_1A} = -8cm$.

5) Sur un schéma, placer les foyers des deux dioptres. Vérifier la position de A'B' par une construction géométrique.

Exercice 5

Soit un système de deux lentilles minces convergentes. La première lentille L1 donne une image réelle et la seconde lentille L2 est placée suffisamment loin de telle sorte que cette image réelle lui serve d'objet réel.

a) Faire un dessein et calculer la position de l'image finale dans le cas où $p_1 = -30cm$, $f_1 = 10cm$, $f_2 = 15cm$ et en considérant que la distance entre les lentilles est $d = 45cm$;

b) Trouver le grandissement transversal total : $G_t = G_{t1}G_{t2}$.

Exercice 6 :

On considère sur un axe optique d'origine O un système optique constitué par un ménisque à bords épais d'indice n, de sommets S_1 et S_1' , de courbures R_1 et R_1', de centre C_1 et d'épaisseur e. On pose $R_1 = \overline{C_1S_1}$; $R_1' = \overline{C_1S'_1}$; $\overline{C_1S_1} < \overline{C_1S'}$. La première face baigne dans l'air et la seconde dans un milieu d'indice n'.

1°) Représenter ce ménisque et déterminer la position de son centre optique O_1. Rappeler les deux formules de conjugaison d'un dioptre sphérique de centre C et de sommet S et de rayon $\overline{SC}$.

2°) Calculer les distances focales objet et image f_1 et f_1' du ménisque.

Dans la suite on suppose que le système baigne dans l'air.

3°) On place symétriquement à O un autre ménisque identique au premier de sorte que les deux sommets opposés soient séparés par une distance d telle que $\overline{S_1'S_2'} = d$.

a) Quelles sont les distances focales objet et image du nouveau système ainsi constitué ? Et sa nature ?

b) Où se trouvent ses points principaux objet et image ?

4°) Déterminer la position de l'image d'un objet AB de hauteur h placé à un point d'abscisse x tel que $Ox = -40\ cm$.

A.N. $R_1 = -2{,}50\ cm$; $R_1' = -2{,}00cm$; $n = 1{,}50$; $n' = 1{,}33$; OC

Exercice 7 :

Une cuve a pour fond un miroir constitué d'une lame de verre dont la face inférieure est argentée. Cette cuve contient de l'eau. L'indice de réfraction du verre est $n_v = 1{,}5$ et l'indice de réfraction de l'eau est $n_e = 4/3$.

1°) On considère un rayon lumineux arrivant de l'air, et faisant un angle donné avec la surface libre de l'eau. Montrer qu'un rayon lumineux sort de cette cuve, par la surface libre, quelle que soit l'incidence initiale.

2°) Sachant que l'épaisseur de la lame est de $12cm$, et que l'épaisseur d'eau est de $20cm$, calculer dans le cadre de 'l'approximation de Gauss, la position par rapport à la surface libre de l'eau, de l'image définitive d'un point objet lumineux A placé dans l'air, à $25cm$ de la surface libre.

3°) Montrer que le système optique précédent est équivalent à un seul miroir plan dont on déterminera la position par rapport à la surface libre de l'eau.

Travaux Dirigés d'Optique Géométrique : Série N°3

I. Etude matricielle d'un système centré.

Exercice 1 : L'œil

Dans un modèle simplifié on assimile l'œil humain à un dioptre sphérique de sommet *S* et de centre de courbure *C*, dit centre optique de l'œil, séparant l'air, d'indice égal à *1*, et le cristallin, milieu d'indice *n=1,336*. Le fonctionnement de l'œil est le suivant : le dioptre fait d'un point objet *A* (que l'œil regarde) une image A' sur la rétine *Re*. Celle-ci n'est qu'un simple écran situé à une distance fixe du sommet (*SRe=cste*). Pour que l'image de l'objet regardé se forme sur la rétine, l'œil est obligé d'accommoder. Il contracte le cristallin, ce qui revient à modifier le rayon de courbure $\overline{SC} = R$ du dioptre. Une personne dont la vue est normale peut voir, en accommodant, les points situés entre l'infini, appelé punctum remotum et un point situé à *15cm* du sommet S du dioptre : le punctum proximum.

1. Sachant que le rayon du dioptre sphérique équivalent à l'œil normal est de 8mm lorsque la personne regarde un point à l'infini (œil au repos qui n'accommode pas), déterminer l'abscisse $\overline{SR_e}$ de la rétine. Que devient le rayon du dioptre lorsque l'œil observe un objet situé à son punctum proximum ?
2. Une personne de vue normale plonge dans l'eau d'indice *N=1,333* pour aller pêcher. A quelle distance de l'œil doit être placé un objet pour que son image se forme sur la rétine, quand l'œil est au repos et quand il accommode au maximum ? (pour les applications numériques, donner les résultats au centième de mm). Commenter.
3. La personne s'équipe d'un masque étanche formé d'une vitre plane d'épaisseur négligeable. La distance du verre au sommet *S* est de *5cm*. Que deviennent les limites de vision distincte du punctum proximum au punctum remotum ?

Exercice 2

On considère un système dioptrique, placé dans l'air et caractérisé par la matrice de transfert

$$T\left(\overline{ES}\right) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{10} \\ -\frac{40}{3} & -1 \end{Bmatrix}. \quad \text{On donne } \overline{ES} = 0{,}1m$$

1. On considère un rayon incident coupant en un point *I* le plan de front passant par *E*, avec $x_1 = 10^{-2}m$ et $\alpha = 0.01\ rad$. Déterminer les paramètres du rayon émergent dans le plan de front passant par *S*. Déterminer de la même façon, la position du foyer image *F'* du système en prenant un rayon particulier passant par *I* ($x_1 = 10^{-2}m$). On exprimera $\overline{SF}$.
2. Calculer les paramètres d'un rayon incident (x_1, α_1) correspondant à un émergent passant par *J* tel que $x_2 = 10^{-2}m$ et parallèle à l'axe optique. Déterminer la position du foyer objet *F* en exprimant $\overline{EF}$.
3. Quelle est la vergence du système ? Quelles sont ses distances focales ?

II. Etude matricielle des systèmes centrés

Exercice 3 : Lentille biconvexe

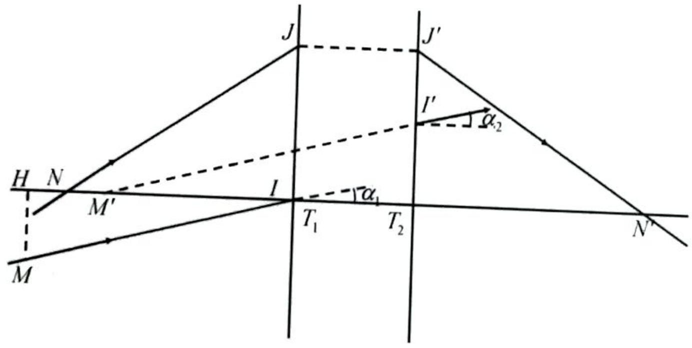
Soit une épaisse, en verre d'indice $n=1.5$, constituée de 2 dioptres sphériques, D_1 et D_2 :
D_1 de rayon $+20cm$, de sommet S_1, et de centre C_1.
D_2 de rayon $-10cm$, de sommet S_2, et de centre C_2.
et d'épaisseur $\overline{S_1S_2} = 5cm$. (*cf TD N°2*)

1) Déterminer la matrice de transfert de cette lentille $T\left(\overline{S_1S_2}\right)$.
2) Utiliser la matrice de transfert pour déterminer la position de l'image $A'B'$ donnée par cette lentille d'un objet AB tel que $\overline{S_1A} = -8cm$. Calculer le grandissement.
3) Déduire de la matrice de transfert les éléments cardinaux de la lentille (points principaux, distances focales, points nodaux, foyers).
4) Placer les dioptres, leurs centres et leurs foyers (utiliser pour cela les résultats des *TD N°2*) sur un schéma. Par une construction géométrique, retrouver les positions des points principaux. Faire un pour chaque point principal.
5) Sur un autre schéma, placer S_1, S_2, les foyers de la lentille et les deux plans principaux. Par construction géométrique retrouver la position de l'image $A'B'$ de l'objet AB situé 8cm devant la lentille.

Exercice 4

Un système optique centre d'axe $x\,x'$ est utilisé dans les conditions de Gauss. La marche de deux rayons lumineux $MII'M'$ et $NJJ'N'$ est représenté sur la figure ci-après.

1. Déterminer la matrice de changement de transfert T sachant que : $n_1 = n_2 = 1$, $\overline{T_1T_2} = 100\ mm$, $\overline{HT_1} = 200\ mm$, $\overline{HM} = -30\ mm$, $\overline{T_2M'} = -200\ mm$, $\overline{JT_1} = \overline{T_2J'} = 3\ mm$, $\overline{T_2I'} = 10\ mm$ et $\overline{NT_1} = \overline{T_2N'} = 1000\ mm$. Calculer le déterminant de cette matrice.



Ce système est une lentille épaisse d'indice n délimité par deux dioptres sphériques de rayons de courbure respectivement R_1 et R_2.

2. Déterminer n, R_1 et R_2.

3. Placer sur un schéma les foyers images F_1' et F_2', les centres de courbure C_1 et C_2 et les sommets S_1 et S_2 des deux dioptres et construire l'image d'un objet AB placé à 15 cm en avant de S_1.

4. Montrer que le système est équivalent à une lentille mince dont on précisera la position et la convergence.

Exercice : Lentille boule avec milieux extrêmes différents

On considère une boule de verre, d'indice n et de rayon a. La partie gauche de la boule est dans l'air, sa partie droite dans l'eau d'indice N.

1. Déterminer, en fonction de a, n et N, la matrice de transfert $T(ES)$. Application numérique : $a = 1\ cm$; $n = 1,5$; $N = 1,33$. En déduire les éléments cardinaux.
2. Déterminer algébriquement et géométriquement la position de l'image d'un objet situé en E. Quel est le grandissement ?

Exercice 5

On dispose d'une lentille épaisse biconvexe d'indice $n = 3/2$, placée dans l'air. Ses faces ont pour rayon de courbure $\overline{S_1C_1} = R$ et $\overline{S_2C_2} = -2R$ et son épaisseur est $e = |R| = 4cm$.

1. Calculer la matrice de transfert $T(\overline{S_1S_2})$ de la lentille et en déduire la vergence V.

2. Utiliser directement la matrice de transfert pour construire l'image d'un objet AB situé dans un plan de front à une distance $d = 11\ cm$ en avant du plan de front d'entrée $\left(z_1 = \overline{S_1A_1} = -d\right)$.

3. Déduire de la matrice de transfert les éléments cardinaux de la lentille (points principaux, distances focales, points nodaux, foyers).

4. Que deviendraient les éléments cardinaux si le sens de propagation de la lumière était inversé ? Quelle serait alors la nouvelle matrice de transfert ?

5. Positionner le centre optique O sachant que $\dfrac{\overline{OS_1}}{\overline{OS_2}} = \dfrac{\overline{S_1C_1}}{\overline{S_2C_2}}$.

6. Retrouver les éléments cardinaux à partir de la relation de conjugaison du dioptre sphérique et du résultat de la question précédente (on commencera par déterminer la position des points nodaux).

7. Utiliser les éléments cardinaux de la lentille pour construire l'image de l'objet AB défini à la question 2. Faire un schéma en choisissant trois rayons particuliers. Faire le tracé d'un rayon quelconque.