N°3 CC MAT 217 SERIES & INTEGRALES G.
DU 21 DECEMBRE 2020
ELEMENTS DE CORRIGE

Exercice 1. (5pts) REVISITER SES NOTES DE COURS

Exercice 2. (4pts)

1.) Critère de Cauchy appliqué à $\sum t_n$, $t_n = \left[\frac{5n+\sqrt{2}}{2n+\sqrt{3}+1}\right]^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{t_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{2n} = \frac{5}{2} > 1 \Rightarrow \sum t_n$ diverge

2) $f_n(x) = n e^{-(n-1)x}$, $n \in \mathbb{N}^*$, sur $[0,1]$

$f_n(0) = n$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(0)$ Diverge donc $\sum f_n$ ne converge pas simplement en $x_0 = 0$; $\Rightarrow \sum f_n$ ne converge pas uniformement sur $[0,1]$.

3) a) $U_n = \frac{\cos(n^2\pi)}{n \ln n} = \frac{(-1)^n}{n \ln n}$, $\forall n \geq 2$.

En posons $v_n = \frac{1}{n \ln n} \geq 0$ $\forall n \geq 2$ $\sum U_n = \sum (-1)^n v_n$ est une série alternée, de plus (v_n) est une suite décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, donc par le critère de Leibniz $\sum (-1)^n v_n$ converge

b) $v_n = \left(\frac{3n^2+4n+1}{5n^2+2n+2}\right)^2$. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \neq 0$, $\Rightarrow$

$\sum v_n$ diverge grossièrement.

c) $w_n = \frac{(2n)!}{n!\, n^n}$; $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!\, n!\, n^n}{(n+1)\, n!\, (2n)!\, (n+1)^n (n+1)}$

$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2(2n+1)\, n^n}{(n+1)^n (n+1)}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n}{n} \frac{e^{n \ln n}}{e^{n \ln(n+1)}} > 1$

Donc $\sum W_n$ diverge (Critère d'Alembert)

d) $h_n = \frac{1}{n^2(n-1)}$, $n \geq 2$ et $0 < h_n \leq \frac{1}{n^2}$; $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

Donc $\sum h_n$ converge. (Critère Comparaison)

Exercice 3 (Règle de Raab et Duhamel)

1/ $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$; $u_n > 0, v_n > 0$

Si $\sum v_n$ converge ; il suffit de montrer que $\exists M \in \mathbb{R}_+^* / u_n \leq M v_n$ à partir d'un certain rang, puis utiliser le critère de comparaison.

Or $\exists N \in \mathbb{N} / \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}, \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \dots \leq \frac{u_N}{v_N}$

$\Rightarrow \forall n \geq N, \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_N}{v_N} \Rightarrow u_n \leq \left(\frac{u_N}{v_N}\right) v_n$

Prendre $\boxed{M = \frac{u_N}{v_N}} \in \mathbb{R}_+^*$

2) $\exists \alpha \in \mathbb{R} / \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \ (n \to \infty)$.

Si $\alpha > 1$, $\exists \beta \in \mathbb{R} / 1 < \beta < \alpha$, on pose $v_n = \frac{1}{n^\beta}$, $\sum v_n$ cvge. [Riemann]

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \ (n \to \infty)$

$1 < \beta < \alpha \Rightarrow -\alpha < -\beta \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \ (n \to \infty)$

Donc $\exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

D'après la question 1) $\Rightarrow \sum u_n$ converge $\boxtimes$

Si $0 < \alpha < 1$ $\exists \beta \in \mathbb{R} / 0 < \alpha < \beta < 1$, $v_n = \frac{1}{n^\beta}$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ et comme $-\beta < -\alpha < 0$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$; $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} / \left(\frac{u_N}{v_N}\right) v_n \leq u_n$

$\sum v_n = \sum \frac{1}{n^\beta}$, $\beta < 1 \Rightarrow \sum v_n$ diverge $\Rightarrow \sum u_n$ Div. $\boxtimes$

Si $\alpha = 0$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 4

1) $U_n = \frac{2n-1}{n^3-4n} = \frac{2n-1}{n(n^2-4)} = \frac{2n-1}{n(n-2)(n+2)}$

$n \geq 3$, $U_n > 0$. [Règle $n^\alpha U_n$]

$\lim_{n\to\infty} n^2 U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{n^3} = 2 > 1 \Rightarrow \sum U_n$ Converge $\boxed{V}$

Calcul de la somme $U_n = \frac{2n-1}{n(n-2)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-2} + \frac{C}{n+2}$

Par calcul on trouve $A = 1/4$; $B = \frac{3}{8}$, $C = \frac{-5}{8}$

$\sum U_n = \frac{1}{4} \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n} + \frac{3}{8} \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n-2} - \frac{5}{8} \sum \frac{1}{n+2} = \frac{89}{96}$

2) $U_n = \ln n + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$

$\sum U_n$ cvge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} U_n = 0 = \lim_{n\to\infty} (1+a+b)\ln n + a\ln(1+\frac{1}{n}) + b\ln(1+\frac{2}{n})$

$\Rightarrow 1+a+b = 0$; $\Rightarrow U_n = a\ln(1+\frac{1}{n}) + b\ln(1+\frac{2}{n})$

Or $\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $(x \to \infty)$

$\Rightarrow U_n \underset{(n\to\infty)}{\simeq} \frac{a+2b}{n} - \frac{a}{2n^2} - \frac{b}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

$\sum U_n$ cvge $\Rightarrow a+2b = 0$; $\Rightarrow a = -2, b = 1$

Somme $S = \sum_{n\geq 1} U_n = \sum_{n\geq 1} \ln - 2\sum_{n\geq 2} \ln + \sum_{n\geq 3} \ln n$

$S = \ln 2 + \sum_{n\geq 3} \ln - 2\ln 2 - 2\sum_{n\geq 3} \ln + \sum_{n\geq 3} \ln = -\ln 2$

Exercice 5 : Convergence normale. $|f_n(x)| = f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n+x} \leq \frac{xe^{-nx}}{n}$ $x \in \mathbb{R}_+^*$

Etudiant $g_n(x) = \frac{x}{n} e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, n fixé ds $\mathbb{N}^*$

on trouve $\sup_{\mathbb{R}_+^*} g_n = \frac{1}{n^2} e^{-1} = \frac{1}{en^2} \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \|g_n\|_\infty$ Converge

Comme $\|f_n\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty$ $\sum f_n$ Converge Normalement

Or C.N. $\Rightarrow$ C.U ; C.S. $\boxed{V}$