

Espaces vectoriels

1 Définition, sous-espaces

Exercice 1

Déterminer lesquels des ensembles E_1 , E_2 , E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 . Calculer leurs dimensions.

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y - z = x + y + z = 0\}.$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 - z^2 = 0\}.$$

$$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; e^x e^y = 0\}.$$

$$E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z(x^2 + y^2) = 0\}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000886]

Exercice 2

Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0\}$$

$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; f(1) = 0\}, \quad E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) ; f(0) = 1\}$$

$$E_4 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] ; P' = 3\}, \quad E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x + \alpha y + 1 \geq 0\}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000888]

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

1. Soient F et G deux sous-espaces de E . Montrer que

$$F \cup G \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

2. Soient H un troisième sous-espace vectoriel de E . Prouver que

$$G \subset F \implies F \cap (G + H) = G + (F \cap H).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000893]

2 Systèmes de vecteurs

Exercice 4

Soient dans \mathbb{R}^4 les vecteurs $\vec{e}_1(1, 2, 3, 4)$ et $\vec{e}_2(1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000900]

Exercice 5

Dans \mathbb{R}^4 on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^4 ? Si oui, en donner une base.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000901]

Exercice 6

Soient E et F les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 engendrés respectivement par les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$. Montrer que E et F sont égaux.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000908]

Exercice 7

Peut-on déterminer des réels x, y pour que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans \mathbb{R}^4 par le système (e_1, e_2) où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$?

[Correction ▼](#)

[000914]

Exercice 8

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \text{ si } x = \alpha, 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000916]

3 Somme directe

Exercice 9

Soient $\vec{e}_1(0, 1, -2, 1), \vec{e}_2(1, 0, 2, -1), \vec{e}_3(3, 2, 2, -1), \vec{e}_4(0, 0, 1, 0)$ et $\vec{e}_5(0, 0, 0, 1)$ des vecteurs de \mathbb{R}^4 . Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $\text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \text{Vect}\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\}$.
2. $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \cap \text{Vect}\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$.
3. $\dim(\text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \cap \text{Vect}\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}) = 1$.
4. $\text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} + \text{Vect}\{\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\} = \mathbb{R}^4$.
5. $\text{Vect}\{\vec{e}_4, \vec{e}_5\}$ est un sous-espace vectoriel de supplémentaire $\text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ dans \mathbb{R}^4 .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000919]

Exercice 10

On considère les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0, 1), v_2 = (0, 0, 1, 0), v_3 = (0, 1, 0, 0), v_4 = (0, 0, 0, 1), v_5 = (0, 1, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^4 .

1. $\text{Vect}\{v_1, v_2\}$ et $\text{Vect}\{v_3\}$ sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^4 ?
2. Même question pour $\text{Vect}\{v_1, v_3, v_4\}$ et $\text{Vect}\{v_2, v_5\}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000920]

Exercice 11

Soit $E = \Delta^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer un supplémentaire de F dans E .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000923]

Exercice 12

Soit

$$E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge} \}.$$

Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces supplémentaires de E .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000926]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. E_1 est un espace vectoriel, sa dimension est 1.
 2. E_2 n'est pas un espace vectoriel.
 3. E_3 n'est pas un espace vectoriel.
 4. E_4 n'est pas un espace vectoriel.
-

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 si et seulement si $a = 0$.
 2. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 3. E_3 n'est pas un espace vectoriel.
 4. E_4 n'est pas un espace vectoriel.
 5. E_5 n'est pas un espace vectoriel.
-

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Pour le sens \Rightarrow : raisonner par l'absurde et prendre un vecteur de $F \setminus G$ et un de $G \setminus F$. Regarder la somme de ces deux vecteurs.
 2. Raisonner par double inclusion.
-

Indication pour l'exercice 4 ▲

On ne peut pas pour le premier, mais on peut pour le second.

Indication pour l'exercice 5 ▲

E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 . Une base comporte trois vecteurs.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Soit montrer la double inclusion. Soit montrer une seule inclusion et faire un petit raisonnement sur les dimensions. Utiliser le fait que de manière générale pour $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ alors :

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad e_i \in F.$$

Indication pour l'exercice 8 ▲

Supposer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et des indices $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (tout cela en nombre fini !) tels que

$$\lambda_1 f_{\alpha_1} + \dots + \lambda_n f_{\alpha_n} = 0.$$

Ici le 0 est la fonction constante égale à 0. Évaluer cette expression est des valeurs bien choisies.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Vrai.
2. Vrai.
3. Faux.
4. Faux.

5. Vrai.

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Non.
 2. Non.
-

Indication pour l'exercice 11 ▲

Soit

$$G = \{x \mapsto ax + b; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Montrer que G est un supplémentaire de F dans E .

Indication pour l'exercice 12 ▲

Pour une suite (u_n) qui converge vers ℓ regarder la suite $(u_n - \ell)$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . En effet :

(a) $(0 \ 0 \ 0) \in E_1$.

(b) Soient $(x \ y \ z)$ et $(x' \ y' \ z')$ deux éléments de E_1 . On a donc $x + y - z = x + y + z = 0$ et $x' + y' - z' = x' + y' + z' = 0$. Donc $(x + x') + (y + y') - (z + z') = (x + x') + (y + y') + (z + z') = 0$ et $(x \ y \ z) + (x' \ y' \ z') = ((x + x') \ (y + y') \ (z + z'))$ appartient à E_1 .

(c) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x \ y \ z) \in E_1$. Alors la relation $x + y - z = x + y + z = 0$ implique que $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0$ donc que $\lambda (x \ y \ z) = (\lambda x \ \lambda y \ \lambda z)$ appartient à E_1 .

Posons $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$. F_1 est un plan passant par l'origine donc F_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . On a les inclusions strictes : $\{0\} \subset E_1$ et $E_1 \subset F_1 \subset \mathbb{R}^3$. Par la première on obtient $0 < \dim(E_1)$, par la seconde $\dim(F_1) < 3$ puis $\dim(E_1) < 2$ c'est à dire $\dim(E_1) = 1$.

2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 - z^2 = 0\}$ c'est à dire $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = z \text{ ou } x = -z\}$. Donc $(1 \ 0 \ -1)$ et $(1 \ 0 \ 1)$ appartiennent à E_2 mais $(1 \ 0 \ -1) + (1 \ 0 \ 1) = (2 \ 0 \ 0)$ n'appartient pas à E_2 qui n'est en conséquence pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

3. $(0 \ 0 \ 0) \notin E_3$ donc E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

4. Les vecteurs $(1 \ 0 \ 0)$ et $(0 \ 0 \ 1)$ appartiennent à E_4 mais leur somme $(1 \ 0 \ 0) + (0 \ 0 \ 1) = (1 \ 0 \ 1)$ ne lui appartient pas donc E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Correction de l'exercice 2 ▲

1. E_1 : non si $a \neq 0$ car alors $0 \notin E_1$; oui, si $a = 0$ car alors E_1 est l'intersection des sous-espaces vectoriels $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y = 0\}$ et $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}$.

2. E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. E_3 : non, car la fonction nulle n'appartient pas à E_3 .

4. E_4 : non car le polynôme nul n'appartient pas à E_4 .

5. E_5 : non, en fait E_5 n'est même pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$ car $(2, 0) \in E_5$ mais $-(2, 0) = (-2, 0) \notin E_5$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Sens \Leftarrow . Si $F \subset G$ alors $F \cup G = G$ donc $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. De même si $G \subset F$.

Sens \Rightarrow . On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel. Par l'absurde supposons que F n'est pas inclus dans G et que G n'est pas inclus dans F . Alors il existe $x \in F \setminus G$ et $y \in G \setminus F$. Mais alors $x \in F \cup G$, $y \in F \cup G$ donc $x + y \in F \cup G$ (car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel). Comme $x + y \in F \cup G$ alors $x + y \in F$ ou $x + y \in G$.

– Si $x + y \in F$ alors, comme $x \in F$, $(x + y) + (-x) \in F$ donc $y \in F$, ce qui est absurde.

– Si $x + y \in G$ alors, comme $y \in G$, $(x + y) + (-y) \in G$ donc $x \in G$, ce qui est absurde.

Dans les deux cas nous obtenons une contradiction. Donc F est inclus dans G ou G est inclus dans F .

2. Supposons $G \subset F$.

– Inclusion \supset . Soit $x \in G + (F \cap H)$. Alors il existe $a \in G$, $b \in F \cap H$ tels que $x = a + b$. Comme $G \subset F$ alors $a \in F$, de plus $b \in F$ donc $x = a + b \in F$. D'autre part $a \in G$, $b \in H$, donc $x = a + b \in G + H$. Donc $x \in F \cap (G + H)$.

– Inclusion \subset . Soit $x \in F \cap (G + H)$. $x \in G + H$ alors il existe $a \in G$, $b \in H$ tel que $x = a + b$. Maintenant $b = x - a$ avec $x \in F$ et $a \in G \subset F$, donc $b \in F$, donc $b \in F \cap H$. Donc $x = a + b \in G + (F \cap H)$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1.

$$\begin{aligned}(x, 1, y, 1) &\in \text{Vect}\{e_1, e_2\} \\ \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (x, 1, y, 1) &= \lambda(1, 2, 3, 4) + \mu(1, -2, 3, -4) \\ \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (x, 1, y, 1) &= (\lambda, 2\lambda, 3\lambda, 4\lambda) + (\mu, -2\mu, 3\mu, -4\mu) \\ \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (x, 1, y, 1) &= (\lambda + \mu, 2\lambda - 2\mu, 3\lambda + 3\mu, 4\lambda - 4\mu) \\ \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad 1 &= 2(\lambda - \mu) \text{ et } 1 = 4(\lambda - \mu) \\ \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda - \mu &= \frac{1}{2} \text{ et } \lambda - \mu = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Ce qui est impossible (quelque soient x, y). Donc on ne peut pas trouver de tels x, y .

2. On fait le même raisonnement :

$$\begin{aligned}(x, 1, 1, y) &\in \text{Vect}\{e_1, e_2\} \\ \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (x, 1, 1, y) &= (\lambda + \mu, 2\lambda - 2\mu, 3\lambda + 3\mu, 4\lambda - 4\mu) \\ \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x &= \lambda + \mu \\ 1 &= 2\lambda - 2\mu \\ 1 &= 3\lambda + 3\mu \\ y &= 4\lambda - 4\mu \end{cases} \\ \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \lambda &= \frac{5}{12} \\ \mu &= -\frac{1}{12} \\ x &= \frac{1}{3} \\ y &= 2 \end{cases}.\end{aligned}$$

Donc le seul vecteur $(x, 1, 1, y)$ qui convient est $(1/3, 1, 1, 2)$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. On vérifie les propriétés qui font de E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 (l'origine est dans E , la somme de deux vecteurs de E est dans E , la multiplication d'un vecteur de E par un réel reste dans E).
2. Il faut trouver une famille libre de vecteurs qui engendrent E . Comme E est dans \mathbb{R}^4 , il y aura moins de 4 vecteurs dans cette famille. On prend un vecteur de E (au hasard), par exemple $V_1 = (1, -1, 0, 0)$. Il est bien clair que V_1 n'engendre pas tout E , on cherche donc un vecteur V_2 linéairement indépendant de V_1 , prenons $V_2 = (1, 0, -1, 0)$. Alors V_1, V_2 n'engendrent pas tout E ; par exemple $V_3 = (1, 0, 0, -1)$ est dans E mais n'est pas engendré par V_1 et V_2 . Montrons que (V_1, V_2, V_3) est une base de E .
 - (a) (V_1, V_2, V_3) est une famille libre. En effet soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0$. Nous

obtenons donc :

$$\begin{aligned}\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 &= 0 \\ \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ -\alpha &= 0 \\ -\beta &= 0 \\ -\gamma &= 0 \end{cases} & \\ \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0. &\end{aligned}$$

Donc la famille est libre.

- (b) Montrons que la famille est génératrice : soit $V = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$. Il faut écrire V comme combinaison linéaire de V_1, V_2, V_3 . On peut résoudre un système comme ci-dessus (mais avec second membre) en cherchant α, β, γ tels que $\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = V$. On obtient que $V = -x_2 V_1 - x_3 V_2 - x_4 V_3$ (on utilise $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$).

Bien sûr vous pouvez choisir d'autres vecteurs de base (la seule chose qui reste indépendante des choix est le nombre de vecteurs dans une base : ici 3).

Correction de l'exercice 6 ▲

Pour que deux ensembles X et Y soient égaux, il faut et il suffit que $X \subset Y$ et $Y \subset X$. Dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie, la situation est un peu plus simple : pour que $E = F$ il faut et il suffit que $F \subset E$ et $\dim(E) = \dim(F)$. Appliquons ce critère : E est engendré par deux vecteurs donc $\dim(E) \leq 2$.

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants donc $\dim(E) \geq 2$ c'est à dire $\dim(E) = 2$.

Un raisonnement identique montre $\dim(F) = 2$. Enfin, les égalités $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ montrent que $F \subset E$ c'est à dire $E = F$.

Correction de l'exercice 7 ▲

$v \in \text{Vect}(e_1, e_2)$ est équivalent à l'existence de deux réels λ, μ tels que $v = \lambda e_1 + \mu e_2$.

Alors $(-2, x, y, 3) = \lambda(1, -1, 1, 2) + \mu(-1, 2, 3, 1)$ est équivalent à

$$\begin{cases} -2 &= \lambda - \mu \\ x &= -\lambda + 2\mu \\ y &= \lambda + 3\mu \\ 3 &= 2\lambda + \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda &= 1/3 \\ \mu &= 7/3 \\ x &= 13/3 \\ y &= 22/3 \end{cases}.$$

Le couple qui convient est donc $(x, y) = (13/3, 22/3)$.

Correction de l'exercice 8 ▲

À partir de la famille $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ nous considérons une combinaison linéaire (qui ne correspond qu'à un nombre fini de termes).

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels distincts, considérons la famille (finie) : $(f_{\alpha_i})_{i=1, \dots, n}$. Supposons qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i} = 0$. Cela signifie que, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{\alpha_i}(x) = 0$; en particulier pour $x = \alpha_j$ l'égalité devient $\lambda_j = 0$ car $f_{\alpha_i}(\alpha_j)$ vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. En appliquant le raisonnement ci-dessus pour $j = 1$ jusqu'à $j = n$ on obtient : $\lambda_j = 0, j = 1, \dots, n$. Donc la famille $(f_{\alpha})_{\alpha}$ est une famille libre.

Correction de l'exercice 9 ▲

Faisons d'abord une remarque qui va simplifier les calculs :

$$e_3 = 2e_1 + 3e_2.$$

Donc en fait nous avons $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et c'est un espace de dimension 2. Par la même relation on trouve que $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = \text{Vect}(e_2, e_3)$

1. Vrai. $\text{Vect}\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -4, 2)\}$ est inclus dans $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, car $(1, 1, 0, 0) = e_1 + e_2$ et $(-1, 1, -4, 2) = -e_1 + e_2$. Comme ils sont de même dimension ils sont égaux.
 2. Vrai. On a $(1, 1, 0, 0) = e_1 + e_2$ donc $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}(e_1, e_2)$, or $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(e_2, e_3) \subset \text{Vect}(e_2, e_3, e_4)$. Donc $(1, 1, 0, 0) \in \text{Vect}(e_1, e_2) \cap \text{Vect}(e_2, e_3, e_4)$.
 3. Faux. Toujours la même relation nous donne que $\text{Vect}(e_1, e_2) \cap \text{Vect}(e_2, e_3, e_4) = \text{Vect}(e_1, e_2)$ donc est de dimension 2.
 4. Faux. Encore une fois la relation donne que $\text{Vect}(e_1, e_2) + \text{Vect}(e_2, e_3, e_4) = \text{Vect}(e_1, e_2, e_4)$, or 3 vecteurs ne peuvent engendrer \mathbb{R}^4 qui est de dimension 4.
 5. Vrai. Faire le calcul : l'intersection est $\{0\}$ et la somme est \mathbb{R}^4 .
-

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Non. Ces deux espaces ne peuvent engendrer tout \mathbb{R}^4 car il n'y a pas assez de vecteurs. Premier type de raisonnement, on montre que $\text{Vect}(v_1, v_2) + \text{Vect}(v_3) = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$, mais 3 vecteurs ne peuvent engendrer l'espace \mathbb{R}^4 de dimension 4. Autre type de raisonnement : trouver un vecteur de \mathbb{R}^4 qui n'est pas dans $\text{Vect}(v_1, v_2) + \text{Vect}(v_3)$: par exemple faire le calcul avec $(0, 0, 0, 1)$.
 2. Non. Ces deux espaces ne sont pas supplémentaires car il y a trop de vecteurs ! Ils engendrent tout, mais l'intersection n'est pas triviale. En effet on remarque assez vite que $v_5 = v_3 + v_4$ est dans l'intersection. On peut aussi obtenir ce résultat en résolvant un système.
-

Correction de l'exercice 11 ▲

Les fonctions de E qui ne sont pas dans F sont les fonctions h qui vérifient $h(0) \neq 0$ ou $h'(0) \neq 0$. Par exemple les fonctions constantes $x \mapsto b, (b \in \mathbb{R})$, ou les homothéties $x \mapsto ax, (a \in \mathbb{R})$ n'appartiennent pas à F .

Posons

$$G = \{x \mapsto ax + b; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Montrons que G est un supplémentaire de F dans E .

Soit $f \in F \cap G$ alors $f(x) = ax + b$ (car $f \in G$) et $f(0) = b$ et $f'(0) = a$; mais $f \in F$ donc $f(0) = 0$ donc $b = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $a = 0$. Maintenant f est la fonction nulle : $F \cap G = \{0\}$.

Soit $h \in E$, alors remarquons que pour $f(x) = h(x) - h(0) - h'(0)x$ la fonction f vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ donc $f \in F$. Si nous écrivons l'égalité différemment nous obtenons

$$h(x) = f(x) + h(0) + h'(0)x.$$

Posons $g(x) = h(0) + h'(0)x$, alors la fonction $g \in G$ et

$$h = f + g,$$

ce qui prouve que toute fonction de E s'écrit comme somme d'une fonction de F et d'une fonction de G : $E = F + G$.

En conclusion nous avons montré que $E = F \oplus G$.

Correction de l'exercice 12 ▲

On note F l'espace vectoriel des suites constantes et G l'espace vectoriel des suites convergeant vers 0.

1. $F \cap G = \{0\}$. En effet une suite constante qui converge vers 0 est la suite nulle.
2. $F + G = E$. Soit (u_n) un élément de E . Notons ℓ la limite de (u_n) . Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \ell$, alors (v_n) converge vers 0. Donc $(v_n) \in G$. Notons (w_n) la suite constante égale à ℓ . Alors nous avons $u_n = \ell + u_n - \ell$, ou encore $u_n = w_n + v_n$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. En terme de suite cela donne $(u_n) = (w_n) + (v_n)$. Ce qui donne la décomposition cherchée.

Bilan : F et G sont en somme directe dans E : $E = F \oplus G$.
