PROLOGUE

Ouf !!! Quel chef d'œuvre ?

Cette nouvelle édition du **« *TOUS au niveau III* »** tome 2 a été réalisée dans l'optique non seulement de pérenniser cette œuvre pour laquelle des grands hommes ont travaillé très dur de génération en génération, mais surtout parce qu'elle demeure très utile pour le *pipos.*

Etant conscient que ceci est mon ultime chance de superviser la réalisation de ce document très puissant, j'en profite pour tirer un sérieux coup de chapeau à ***TEKOU LIZA***, président de ***l'AEENSPY* 2012**, LE FAMEUX PROMOTEUR du TOUS, à ***FOSSO LEONCE*** PRESIDENT AEENSPY 2013 et à l'actuel président ***NDONGO CEDRIC FENELON*** qui ont tous trois travaillé sur ce chef-d'œuvre avant moi et nous ont laissé à tous l'agréable plaisir du bon travail.

Cet ouvrage ne fait donc point l'apologie du <fax> et encore moins celle du <<facsimile>>, mais est censé apporter un soutien indéniable à l'étudiant dans des travaux personnels ou des travaux de groupes.

En se pliant à la pensée philosophique selon laquelle nul ne détient le monopole du savoir, bien vouloir nous contacter à valerefoulami.pipos Pour toute suggestion dans le but de l'amélioration des éditions à venir.

Je vous souhaite un merveilleux séjour en compagnie du « TOUS »

Valère FOULAMI

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

AVEC LA PARTICIPATION DE :

DJOUMATCHOUA HOSNI……………………………….3GTEL…………………………..71379617

BUNANG LIONEL………………………………..3GTEL………………………….91006942

FIFEN CHRISTIAN…………………………………………3GC……………………………70711122

TOGUEM SAINT-CLAIR…………………………………3GM………………………51273649

TCHUISSEU CARLIN………………………………………3GM…………………………75774651

TUENO STEVE………………………………………3GI…………………………76571728

Merci à vous

TABLE DES MATIÈRES

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

ANGLAIS

« mistakes do not cancel the value of hardwork»

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

SUJETS D'ANGLAIS

RATTRAPAGE D'ANGLAIS 2002-2003

Fill the empty space with the correct proposition.

Work is done when a force moves a load _______a certain distance. The capacity to do work is called energy. Energy, ______ work is measured ________ergs and joules. It is a scalar quantity, having magnitude but no direction. Mechanical energy exists in two forms: kinetic energy and potential energy. A pendulum shows the relationship __________kinetic energy and potential energy, and who illustrates the principle of the conservation of energy. The rate _______which work is done is called power. This is expressed ________the formula $p = \frac{w}{t}$ where W is the amount of work done or energy expended, t is the time taken, and p is the power.

a) Give the noun formed from <u>measure</u>, <u>move</u> and <u>exist</u>. 3 mks
b) Form verb from <u>quantity</u> and <u>energy.   2 mks</u>
c) What is the text talking about?   3 mks
d) How can electrical energy be obtained from the sea?   7 mks

<u>**Answer**</u> **:**

a) Measurement, movement, existence
b) To quantify - energize
c) The text is talking about the relationship between work, energy and power.
d) ---

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

EPREUVE DE CONTROLE CONTINU D'ANGLAIS 2012-2013

1- Make a clear distinction between
a) Atom and molecule
b) Buoyant force and buoyancy
c) Gravity and gravitational force

2- Copy and complete these sentences:
I) Gases are ________and their volume can be easily reduced.
II) Momentum can be seen as a force which maintains a body in motion.
III) A pendulum works by ____________
IV) The apparent loss of weight of a body ________in a liquid is equal to the__________ of the displaced liquid
V) An aneroid barometer consists of a _____attached by lever to a pointer.
VI) On a parallelogram of force, the ________on the lines show direction and the __________of the line is the magnitude.
VII) If the resultant of forces acting on a body is zero, the body is at rest and in ______.
VIII) Friction is _____________.
IX) The Centre of gravity of a body is ________________________________.

EPREUVE D'EXAMEN D'ANGLAIS 2012-3013

EPREUVE 1 *

1. Specific heat capacities are measured in ____
2. The best insulator of heat is ____
   Because____
3. latent heat is______________________________________ _____________ ____________
   ___________ ____
4. all pure substances change their states at fixed temperature which are i)_________________________ii) ____iii)__ ________________________________iv)____
5. as sound waves pass through a substance, the ____________________of this substance______ _______________
6. the wave length is ____
7. the amplitude of a wave is determined by____ ____
8. the speed of the wave is ____
9. give the arrangement order of **load, force/effort and fulcrum** in the three classes of levers that you know:
   a. class 1 lever:____
   b. class 2 lever:____
   c. class 3 lever:____
10. complete this table of verb forms

verb	Past tense	Past participle	verb	Past tense	Past participle
Swing			Refer		
Rise			catch		
Freeze			fly		
run			choose		

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

CORRECTIONS D'ANGLAIS

CORRECTION CONTRÔLE CONTINU D'ANGLAIS 2005-2006

1) When we measure matter we may use fundamental units of mass, time, length , etc. or derived units for area, volume, density, etc.
2) Why is it not possible to have an atom of salt?
   Because salt is made up of different elements. An atom is the smallest part of an elements. This is why it is not possible to have an atom of salt.
3) How do you show that a quantity of oil has definite volume but no definite shape?
   A quantity of oil can be poured into a measuring cylinder, with which we can be able to measure the volume of oil in it. The oil in the cylinder will take the shape of the cylinder. If this very amount of it is poured into a box of the same volume, it will fill the box to the and take the shape of the box. This shows that oil doesn't have a definite shape.
4) How can you show that pressure can increase with depth?
   Considering a dam with two outlets, at the top and at the bottom; water leaves the dam at the bottom with a higher pressure than that at the top. Another example: the tanks are supported with poles above the ground. This allows the water leaving it have a high pressure to reach its destination.
5) Explain why a ship is more stable in water when loaded than when empty.
   When loaded its center of gravity increases than when empty with a higher center of gravity it is more stable.
6) Force is expressed in terms of magnitude and direction.
7) The resultant of two forces may be expressed using the parallelogram of forces rule.
8) The earth's gravity acts downwards on every particle of a body with a force equal to the weight of the particle.
9) Air has mass and so it exerts pressure.
10) Water can exist in three states namely ice, water and steam (vapour).
11) What is the verb formed from quantity, production, mixture, application
    Quantify, produce, mix and apply.

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

CORRECTION D'EXAMEN D'ANGLAIS 2007-2008

A.

1- When do we say the resultant of two forces is zero?
When the two force are equal and opposite.
2- What do you understand by:
a- Gravity: attraction due to gravitation that earth exerts on an object on or near its surface.
b- Acceleration: rate at which the velocity of a body change
c- Friction: force opposed to motion, resistance encountered by moving object
3- Work is done when a force moves an object over a certain distance.
4- When the door of a building is opened on a cold day, the heat is lost by convection.
5- Latentheat is the amount of heat absorbed or given off by a substance to change its state.
6- What happens to some materials when heated and when cooled?
When heated, some materials expand
When cooled, some materials contract
7- the common thermos in which we keep food hot or a works on which principle?
The principle that the best insulator of heat is vacuum
8- why can some substances absorb and give off much more heat than others?
Because they have different coefficient of expansion

B.

Word	**Noun**	**Word**	**noun**
Confine	Confinement	obtain	
High	Height	Deep	Depth
Buoyant	Buoyancy	Mix	Mixture
Lose	Loss	Attach	Attachment
	Displacement	Long	length

CORRECTION D'EXAMEN D'ANGLAIS 2009-2010

1- Another name for matter having two or more elements is compound and the smallest particle of this substance is molecule.
2- A liquid will push sideways against the side of a container downwards on the bottom and upwards against anything placed on it, thereby exerting a force in these directions.
3- If the buoyant force is the same as the weight of an object, the object will float but if it is less, the object will sink
4- Pressure and depth are usually in direct proportion.
5- Best insulator of heat is vacuum
6- On a parallelogram of force, magnitude is represented by the length of the lines and direction by the lines.
7- Friction is force opposed to motion.
8- A pendulum is said to have a swinging movement.
9- Head raises the temperature of a material or the temperature is raised by heat.
10- Radiation is when heat is transmitted in form of heat wave.
11- A calorie will refer to the amount of heat absorbed or given off by 1g of water to change its temperature by 1°C. 1 cal = 4.2 J
12- The verb form condensation is condense and the adjective is condensed. (Another adjective: condensable).
13- Verb freeze: past tense froze past participle frozen.

CORRECTION DU CONTRÔLE CONTINU D'ANGLAIS 2011-2012

EXERCICE

1) Complete this table below

Verb	Noun	Adjective
lose	loss	lost
confine	confinement	confined
obtain	obtention	obtained
deepen	depth	deep
lengthen	length	long
to practise	practice	pratical
measure	measurement	measured
absorb	absorption	absorbed
to condense	condensation	condensed
cool	cold	cold

2) THE BEST INSULATOR IS VACUUM
3) WHAT OTHER EXPRESSION OR WORD IS SYNONYMOUS TO :
   a) ABSORB TAKE IN
   b) GIVE OFF TO LOSE
4) IF WE HEAT ICE WHAT DO WE OBSERVE ? WHEN ICE WILL REACH ITS MELTING POINT, ICE WILL START CHANGING INTO WATER (OR INTO A LIQUID)
5) SPECIFIC HEAT OF A SUBSTANCE IS THE AMOUNT OF HEAT REQUIRED TO RAISE THE TEMPERATURE OF A UNIT MASS OF THAT SUBSTANCE THROUGH 1°C.
6) WHAT IS THE UNIT FOR SPECIFIC HEAT CAPACITIES? IT'S EXPRESSED IN JOULE PER KILOGRAM PER DEGREE CELSIUS.

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

7) **WHAT IS THE FREEZING POINT OF A SUBSTANCE? IT'S THE TEMPERATURE AT WHICH THAT SUBSTANCE STARTS CHANGING STATE, FROM LIQUID TO SOLID.**
8) **THE PAST AND THE PAST PARTICIPLE FORM OF FREEZE IS FROZE AND FROZEN.**
9) **A HUMAN BEING'S TEMPERATURE IS MEASURED USING A CLINICAL THERMOMETER WHICH USES MERCURY, AND THIS WORKS ON THE PRINCIPLE OF EXPANSION AND CONTRACTION.**
10) **GRAVITY IS AN OPPOSITE FORCE ON THE EARTH'S SURFACE TO BUOYANCY IN WATER.**

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

CORRECTION DE CONTROLE CONTINU D'ANGLAIS 2012-2013

3- Make a clear distinction between
d) Atom and molecule
e) Buoyant force and buoyancy
f) Gravity and gravitational force
a) Atom is the smallest particle of matter constituting and element and many atom form's molecule
b) Buoyancy is the term used to describe the existence of an upward force in a liquid and the upward force in question is buoyant force.
c) The force of gravity is the force that exist between any body on earth and tye earth. The gravitational force exist between any two bodies
4- Copy and complete these sentences:
X) Gases are compressible and their volume can be easily reduced.
XI) Momentum can be seen as a force which maintains a body in motion.
XII) A pendulum works by swinging from side to side
XIII) The apparent loss of weight of a body immersed in a liquid is equal to the weight of the displaced liquid
XIV) An aneroid barometer consists of a vacuum cell attached by lever to a pointer.
XV) On a parallelogram of force, the arrow on the lines show direction and the magnitude of the line is the magnitude.
XVI) If the resultant of forces acting on a body is zero, the body is at rest and in equilibrium.
XVII) Friction is a force opposing to motion.
XVIII) The Centre of gravity of a body is the point where the entire weight of the body seems to act.

FRANCAIS

« seul l'attitude et l'aptitude d'un homme détermine son altitude »

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

SUJETS FRANCAIS

CORRECTION DE L'EXAMEN DE FRANÇAIS 2011-2012

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

____

Le Ministre

____

N° 02569 / 2012 / MINSUP / CAB

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN

Paix – Travail – Patrie

Yaoundé, le 02 juin 2012

Le Ministre de l'Enseignement Supérieur
À
Monsieur le Ministre des Travaux Publics
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES TRAVAUX PUBLICS

Objet : Jeux Universitaires 2012
Référence : V/L N° 429/ MINTP / ENSTP / DIR du 20 mai 2012.

Par lettre N° 429 / MINTP / ENSTP / DIR du 25 mai 2012 portant sur la participation de votre institution aux jeux universitaires 2012, j'ai l'honneur d'accuser réception de ce document dont j'ai pris connaissance avec intérêt.

En effet, nous constatons votre grand succès à ladite compétition ; vous y êtes démarqués par votre meilleure position parmi les institutions concernées.
En outre, je vous félicite pour les médailles remportées au Basket-ball, en football et en course de fond.

En définitive, je ne peux que vous encourager et souhaiter votre participation aux prochains jeux qui auront lieu à N'Gaoundéré.

Le Ministre de l'Enseignement Supérieur

Pr Jacques FAMES NDONGO

CORRECTION DE L'EXAMEN DE FRANÇAIS 2011-2012

REPUBLIQUE DU CAMEROUN

PAIX – TRAVAIL – PATRIE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

———

Le Ministre

———

YAOUNDE, LE 19 JUIN 2012.

N° 02549/2012/MINSUP/C AB

LE MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
A
MONSIEUR LE MINISTRE DES TRAVAUX PUBLICS
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TRAVAUX PUBLICS (E.N.S.T.P)

Objet : réforme à L'E.N.S.T.P.

J'ai l'honneur de porter à votre connaissance les dispositions que nous avons prises concernant la réforme en cours dans votre établissement.

D'une part en ce qui concerne la formation d'ingénieur de travaux initiée depuis l'an passé, nous vous proposons le parrainage de notre école, l'école nationale supérieure polytechnique de Yaoundé. Aussi, nous mettons à votre disposition le laboratoire de génie civil de l'université de Yaoundé 1. D'autre part, en ce qui concerne les réformes des bâtiments, nous mettons à votre disposition un prêt de 15 000 000 fcfa.

En définitive, nous ne pouvons que vous laissez le choix d'apprécier notre offre.

LE MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

JACQUES FAMES NDONGO

EPREUVE DE CONTRÔLE CONTINU DE LANGUE FRANCAISE 2012-2013

Sujet :

Rédigez une lettre dans laquelle le Recteur de l'Université de Yaoundé I informe le Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure Polytechnique des dispositions à prendre suite aux résolutions et recommandations issues de la réunion de concertation qu'il a tenue avec ses proches collaborateurs en vue du changement du planning des rattrapages dans l'institution qu'il dirige.

NB : 1 PAGE EPREUVE D'EXAMEN DE LANGUE FRANCAISE 2012-2013

Sujet :

Après avoir défini les notions d'information et de communication, donnez dix raisons pour lesquelles vous préfériez l'une de ces notions par rapport à l'autre.

Analyse dans les espaces vectoriels

« l'ereur n'annule pas la valeur de l'effort accompli»

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

SUJETS D'ANALYSE DANS LES ESPACES VECTORIELS

CONTRÔLE CONTINUE D'ANALYSE DANS LES ESPACES VECTORIELS 2007-2008

EXERCICE I :

1. Rappeler les définitions d'un espace métrique complet et d'un espace métrique compact
2. (E,|| . ||) est un espace vectoriel normé. A et B deux parties de E.

On note A + B = {a + b / a ϵ A et b ϵ B}

a) Montrer que si A est ouvert, alors A + B est ouvert
b) Montrer que si A est compact et B est fermé, alors A + B est fermé.

3. Montrer que dans un espace vectoriel normé (E, || . ||) tout chemin joignant l'intérieur d'une partie A et l'extérieure de A rencontre la frontière de A ; c.-à-d. si a $\epsilon \overbrace{A}^{0}$, b$\epsilon \overbrace{C_E^A}^{0}$, γ : [0,1]↦ E un chemin tel que γ(0) = a et γ(1) = b, alors γ([0,1])∩Fr(A) ≠ Ø

EXERCICE 2

1. Etudier la continuité en (0,0) de la fonction g définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8} si(x,y) \neq (0,0) \\ g(0,0) = 0 \end{cases}$$

2. Étudier la differentiabilité en (0,0) de la fonction h définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par

$$h(x,y) = \begin{cases} y^2 sin\frac{x}{y} si\ y \neq 0 \\ 0\ si\ y = 0 \end{cases}$$

3. soit f $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définie par f(x,y) = $(y^2 + 4y + x)e^{2x-6}$

a) Déterminer les points critiques de f

b) montrer que f admet un extrémum local atteint en un point A(x_0, y_0) que l'on déterminera

c) soit x ϵ $\mathbb{R}$. en étudiant les variations de la fonction f_x : y ↦ f(x_0, y)puis comparer f(x_0,y) et f(x_0,y_0)

d) En étudiant les variations de fonction φ : x ↦ f(x , y_0) comparer f(x_0,y_0) et f(x , y_0) pour x quelconque.

e) f admet-elle un extrémum global en (x_0,y_0) ?

EXERCICE 3

1. Calculer les intégrales multiples suivantes :

a) I =$\iint_D xydxdy$ où D est l'intérieur du triangle de sommet O , A(1,2) et B(3,3) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O , I ,J)

b) J = $\iiint_P zdxdydz$ où P est l'intérieur de la pyramide régulière de sommet S(0,0,1) , A(1,1,0) B(-1,1,0) , C (-1,-1,0) et D(1,-1,0) dans l'espace muni d'un repère orthonormé (O, I, J, K)

2. Calculer l'intégrale K =$\iint_D (x+y)(x-y)dxdy$ où D est le domaine carré délimité par les droites d'équations : x + y = 1 , x – y = 1 , x + y = 3 et x –y = -1.

NB : on posera u = x + y et v = x – y avec une représentation du domaine D ainsi que son image par la transformation (x , y) ↦ (u , v).

CONTRÔLE CONTINUE D'ANALYSE DANS LES ESPACES VECTORIELS 2008-2009

EXERCICE I :

Soient (E, d) un métrique.

1. Rappeler les définitions ci-dessous :
   1.1. (E, d) est un espace métrique complet.
   1.2. K est une partie compacte de (E , d)
   1.3. C est une partie connexe de (E , d) .
2. Soient A et B deux parties de E.
   2.1. Montrer que $\overline{AUB} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   2.2. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .donner dans $\mathbb{R}^2$ munie de la distance eucludienne un exemple où l'inclusion est stricte.
3. Soit A une partie compacte de E et x ϵ E tel que x n'appartienne pas à A. Montrer qu'il existe deux ouverts U et V de E vérifiant : x ϵ U , A ⊂ V et U∩ V = Ǿ

EXERCICE 2

Soit (E , d) un espace métrique et a ϵ E .pour x ,xϵE. on pose

$$d_1(x , y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ d(x,a) + d(a,x)\ si\ non \end{cases}$$

1. Montrer que d_1 est une distance sur E
2. Soit b ϵ E b ≠a
   2.1. Quelle est la boule ouverte de centre b et de rayon d (a,b) pour (E, d_1) ?
   2.2. On suppose E = $\mathbb{R}^2$ et d égale à la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.representer graphiquement cette boule pour a=(1,1) et b =(0,0)
3. Soient (E' ,d') un espace métrique et f une application définie de E vers E'.montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.
   i. L'application f est continue de (E,d_1) vers (E',d')
   ii. L'application f est continue en a de (E,d_1) vers (E',d')
   iii. L'application f est continue de (E,d) vers (E',d')

EXERCICE 3

On suppose $\mathbb{R}^2$ ***munie de la norme euclidienne*** $||\,.\,||$

1. On définit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x\,,\,y) = \frac{x^2y}{x^3+y^3}$. f est-elle prolongeable par continuité en (0,0) ?`
2. Etudier la différentiabilité en (0,0) de la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f(x\,,\,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

3. On définit la fonction f de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x\,,\,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2}$. $(x,y) \neq (0,0)$et f(x,y) = 0.

i. Trouver une constante positive C telle que $\forall\,(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $f(x,y) \leq C\|(x,y)\|$
ii. Utiliser ce qui précède pour montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$
iii. Etudier la différentiabilité de f en (0,0)

CONTRÔLE CONTINU D'ANALYSE DANS LES ESPACES VECTORIELS 2009-2010

EXERCICE I :

1. On considère $\mathbb{R}^2$. Munie des distances de et ds telles que pour A(x,y) et B(x',y') on ait :

de(A,B) = $\sqrt{(x-x')2 + (y-y')2}$ et d(A,B) = |x-x'| +|y-y'|

a) Déterminer et représenter graphiquement les boules B_{de} (O,1) et B_{ds} (O,1) avec O(0,0)
b) Déterminer et représenter graphiquement les boules ouvertes pour $(\mathbb{R}^2, ds)$ contenue dans B_{de} (O,1) .
c) Déterminer et représenter graphiquement les boules ouvertes pour $(\mathbb{R}^2, de)$ contenue dans B_{ds} (O,1) .

2. Exemple de norme dans $\mathbb{R}^2$ pour : pour (x,y) ϵ $\mathbb{R}^2$, on pose ||(x,y)|| = $Sup_{t\epsilon\,\mathbb{R}^2}\frac{|x+ty|}{1+t^2}$ montrer que ||.|| est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
3. on note par d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. pour A ,B ϵ $\mathbb{R}^2$ on pose

δ(A,B) = $\begin{cases} d(A;B) si\ \ A, B\ et\ O\ sont\ align\acute{e} \\ \ \ d(A,O) + d(O;B) \quad si \quad non \end{cases}$

a) montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}^2$
b) Soit A ϵ $\mathbb{R}^2$ distinct de O(0,0). On pose r = $\frac{1}{2}$ d(O,A) . déterminer et représenter graphiquement les ensembles B_δ (A,r) et B_δ $(A, 3r)$

EXERCICE 2

1) On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$
a) Soit ρ une norme sur $\mathbb{R}^n$ soient x ,y ϵ $\mathbb{R}^n$, montrer que | ρ(x) -ρ(y)| ≤ρ(x-y)
b) Montrer que ρ est une application continue de $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$
c) Montrer que S = { x ϵ $\mathbb{R}^n$, ρ(x) = 1} est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$
d) Soit ψ une autre norme sur $\mathbb{R}^n$ .montrer qu'il existe deux constantes positives C1 et C2 telles que : ∀ xϵ S C1≤ψ(x) ≤C2 et ∀ xϵ $\mathbb{R}^n$ρ(x) C1≤ψ(x) ≤C2 ρ(x)

2) Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies. Soient f : E ↦ F une application linéaire .montrer que f est continue.

EXERCICE 3

1) On définit sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions f1 et f2 par :

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} si(x,y) \neq (0,0) \\ f_1(0,0) = 0 \end{cases} \qquad f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} si(x,y) \neq (0,0) \\ f_2(0,0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f_1 n'est pas continue au point (0,0).
b) Montrer que $f_2 est con$tinue au point $(0,0)$

2) On définit la fonction f de $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+x+xy+y}{\sqrt{x^2+2x+y^2-2y+2}} si(x,y) \neq (-1,1) \\ f(-1,1) = 0 \end{cases}$$

a) montrer que ∀ x , y ϵ $\mathbb{R}^2$, $2|(x+1)(y-1)| \leq (x+1)^2 + (y-1)^2$
b) pour (x , y) ≠ $(-1,1)$ écrire f(x,y) en fonction des termes (x+1) et (y-1)
c) déterminer une constante positive C telle que pour (x , y) ≠ $(-1,1)$ on a
$|f(x, y)| \leq C\sqrt{(x+1)2 + (y-1)2}$
d) en déduire que f est continue au point $(-1,1)$

EXAMEN D'ANALYSE DANS LES ESPACES VECTORIELS 2008-2009

EXERCICE I :

1) Soient A et B deux parties d'un espace métrique (E,d) telles que $A \subset B \subset \overline{A}$ montrer que si A connexe alors B connexe.
2) Soient (E,d) et (F,δ) 2 espaces métriques , f : E ↦F une application continue. Montrer que le graphe de f définie par G(f)={(x,y) ϵ E*F ,y = f(x)} est fermé dans E*F
3) Soient (E,d) un espace métrique et ψ : $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ telle que :

i. $\forall$ x ϵ$\mathbb{R}^+$ Ψ(x) = 0 ⇔ x = 0

ii. Ψ est croissante

iii. $\forall$ x, y ϵ$\mathbb{R}^+$,ψ(x+y)≤ψ(x) +ψ(y)

a) Montrer que δ : E*E ↦ $\mathbb{R}^+$ définie sur par δ (x, y) = ψ(d(x, y)) , est une distance sur E.

b) soit (di)iϵℕ une suite bornée de distance sur E. montrer que d' définie par $\forall$ x , y ϵ E d''(x ,y)= $\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{di(x,y)}{2^i}$ est une distance sur E.

c) **Application** : montrer que si (di) iϵℕ est une suite de distances sur E , l'application définie par $\forall$ x , y ϵ E d''(x ,y) = $\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{di(x,y)}{2^i(1+di(x,y))}$ est une distance sur E.

EXERCICE 2

1) On définie la fonction f de $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ par f(x,y) = $\begin{cases} \frac{x^3y}{x^4+y^2} si(x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.on étudiera particulierement la continuité au point(0,0)

b) Etudier la différentiabilité de f en (0,0)

2) soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ par f(x,y) =(x + y^2+ 2y)e^{2x}

a) Montrer que f admet un point critique (x_0,y_0) que l'on déterminera

b) Ce point est –il un extremun local ?si oui de quel type ?

c) soit x ϵ$\mathbb{R}$ etudier les variations de la fonction y ↦ f(x_0,y) puis comparer f(x_0,y) et f(x_0,y_0)

d) En étudiant les variations de x ↦f(x , y_0) comparer f(x_0,y_0) et

f(x , y_0)

e) f admet -elle un extremun global en (x_0,y_0) ?

EXERCICE 3

1) Soit A le triangle du plan définie par $0 \leq x$, $0 \leq y$, $x + y \leq 2$ calculer I1 = $\iint_A \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$
2) Soit D le quart de boule de $\mathbb{R}^3$ définie par D= { (x,y,z)$\epsilon\mathbb{R}^3$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $0 \leq x$, $0\leq y$ $0\leq z$} calculer l' intégrale tripple J = $\iiint_{D3} 2xyzdxdydz$
3) Trouver le travail fourni pendant le déplacement d'une particule dans le champs de force F = $3x^2$i + (2xz-y)j +z k le long du segment joignant l'origine O du repère au point A (1,1,1)

EXERCICE 4

Résoudre le système différentiel suivant $\begin{cases} x' = 3x - y + t \\ y' = 4x - y - e^t \end{cases}$

RATTRAPAGE ANALYSE DANS LES ESPACES VECTORIELS 2008-2009

EXERCICE I :

On considère un espace métrique (E ,d). Montrer que pour $A \subset E$:

1. $d(x,A) = d(x,\overline{A})$
2. $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$
3. $|d(x,A)-d(y,A)| \leq d(x,y)$
4. $\delta(A) = 0$ si et seulement si A est un singleton où $\delta(A)$ est …… de A

EXERCICE 2

1. Déterminer les limites en (0, 0) de chacune des fonctions de deux variables ci-dessous

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1)}$

b) $g(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

2. on définie la fonction h sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

a) Déterminer les deux points critiques de h

b) Vérifier pour chacun de ces points si c'est un extremum. Si oui lequel ?

EXERCICE 3

1. On considère l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Vérifier que c'est une intégrale convergente et déterminer sa valeur numérique
2. Soit A le triangle du plan définie par $0 \leq x$, $0 \leq y$, , $x + y \leq 2\}$

Calculer $J = \iint_A \dfrac{dxdy}{(x+y+1)^2}$

3. Calculer l'intégrale triple $k = \iiint_P \dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$ où p est le domaine de l'espace délimité par les plans : $x = 0$,$y = 0$,$z = 0$ et $x + y + z = 1$

EXERCICE 4

Résoudre les systèmes différentiel suivant

1) $\begin{cases} x' = 4x - 10y - 5z \\ y' = 3x - 5y + 2z \\ z' = 2x - 4y + 2z \end{cases}$

2) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - 4y \end{cases}$

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

EXAMEN D'ANALYSE DANS LES ESPACES VECTORIELS 2009 -2010

EXERCICE I :

Soit (E,d) un espace métrique .on pose pour x,y $\in$ E d'(x,y) =$\sqrt{d(x,y)}$

1) Montrer que d'est une distance sur E
2) Enoncer les conditions suffisantes sur une fonction f : $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ pour que (x ;y) $\mapsto$f(d(x ;y)) soit une distance sur E
3) Montrer que l'application d'' définie sur E*E par d''(x ;y) = $\frac{d(x;y)}{1+d(x;y)}$ est une distance sur E
4) Comparer les distances d et d''
5) On pose E = $\mathbb{R}$ et d égale à la valeur absolue. Déterminer et construire $B_{d''}(0\,;\frac{1}{2})$

Exercice 2

1) On définie la fonction f : $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ par f(x,y) = x^3 + 3 xy^2- 15x-12y
a) Déterminer les points critiques de f
b) La fonction f présente telle un extremum local en chacun de ses points critiques ? si oui s'agit t-il d'un minimum ou un maximum ?
2) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}^*$
a) Montrer que u est différenciable en tout point a $\in\mathbb{R}^n$ et déterminer la différentielle de u.
b) On définie par < , > le produit scalaire habituelle de $\mathbb{R}^n$ (c est à dire attacher a la norme euclidienne). Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ par g(x) = <u(x) , x> ,$\forall$ x $\in\mathbb{R}^n$.

Etudier la differentiabilité de g

3) On définit la fonction h de $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ par

h(x,y) = $\begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} si (x,y) \neq (0,0) \\ h(0,0) = 0 \end{cases}$ montrer que h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

4) On définit la fonction Φ de $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ par $\Phi(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} si(x,y) \neq (0,0) \\ \Phi(0,0) = 0 \end{cases}$ étudier la différentiabilité de Φ en $(0,0)$

Exercice 3

1) D1 $=\{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 \; 0\leq x\leq 1 \; 1\leq x + y\leq 4\}$ et $\Delta 1 = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 \; x\geq 0 \; 1\leq x^2 + y^2 \leq 2y\}$ sont deux domaines du plan f1 et g1 deux fonctions définie respectivement sur D et Δ par f1(x,y) = $\frac{1}{(x+y)(1+x^2)}$ g1= $\sqrt{x^2 + y^2}$
   a) Dessiner D1 et $\Delta 1$ dans des repères différents
   b) Calculer $I1 = \iint_{D1} f1(x,y)dxdy$ et $J1 = \iint_{\Delta 1} g1(x,y)dxdy$
2) Dans le plan muni d'un repère, la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ et la droite d'équation y = x+ 2 délimitent un domaine D2. $\Gamma 2$ désigne le bord de D2 parcourue une fois dans le sens direct
a) Dessiner $\Gamma 2$
b) Calculer l'intégrale curviligne $I2 = \int_{\Gamma 2} xydx + y^2 dy$
3) Calculer $I3 = \iiint_{D3} ydxdydz$ où D3 $=\{ (x,y,z)\epsilon\mathbb{R}^3 \; 0\leq x, \; 0\leq y, \; 0\leq z, \; x + y + z\leq 1\}$
4) Soit $\Gamma 4 = \{ (x,y,z)\epsilon\mathbb{R}^3, \; x^2 + y^2 + z^2 = 25, 0 \leq x \} \cap \{(x,y,z) \epsilon\mathbb{R}^3, z = 3\}$calculer le travail effectué par le champ de force F = (y,z,x) suivant $\Gamma 4$ parcouru une fois dans le sens direct

5) Calculer l'intégrale de surface $I5 = \iint_{\Sigma} x^4 dzdy + y^4 dxdz + z^4 dxdy$ $\boldsymbol{\Sigma}$ est le coté intérieur de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

EXAMEN D'ANALYSE DES ESPACES VECTORIELS 2010-2011

Exercice 1. 4 points

1) Soit N l'application définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par $N(x, y) = \sqrt{4x^2 + 9y^2}$.
   a) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
   b) Dessiner la boule de centre O(0,0) et de rayon 1 pour la norme N.
2) Soient E un espace vectoriel et V un sous espace vectoriel de E. Montrer que l'adhérence V de V est un sous espace vectoriel de E.
3) Soit (E, d) un espace métrique. Montrer qu'une boule ouverte de E est une partie ouverte de (E, d).

Exercice 2. 8 points

1) Soit h la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ par $h(x, y) = \frac{xy + y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}}$.
   a) Déterminer un réel strictement positif C tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, $|h(x, y)| \leq C(|x|+|y|)$
   b) Montrer que h admet une limite en (0,0) et la déterminer.
2) La fonction φ définie par $\varphi(x, y) = \frac{x(y+1)}{x^2+y^2}$ admet-elle une limite en (0,0) ?
3) Montrer que l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} \ si \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est de classe C^1
4) Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x, y) = x^3 + y^3 + 6(y^2 - x^2)$
   a) Déterminer les points critiques de g.
   b) En utilisant les expressions de g(0, t) et g(t, 0), montrer que (0,0) n'est pas un extremum bien qu'étant un point critique.
   c) Déterminer la nature de (4, 0)

Exercice 3. 8 points

1) Calculer $I = \iint_D x dxdy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0 \ x^2 + y^2 \leq y\}$
2) Calculer $J = \iint_A e^{-\frac{x^3+y^3}{xy}} dxdy$ où $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0 \ y^2 - 2px \leq 0$ et $x^2 - 2py \leq 0\}$ avec $p \in \mathbb{R}_+$ NB : Envisager le changement de variable $x = u^2v$ et $y = uv^2$
3) Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$. Faire une esquisse graphique de D puis Calculer $K = \iiint_D (x + y + z)^2 dxdydz$

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

4) On suppose le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). On considère les points A(2, 4), B(1, 1) et la courbe ($\mathcal{C}$) d'équation $y = x^2$. Soit D le domaine du plan délimité par la courbe ($\mathcal{C}$), les droites (AB) et (OA). On désigne par Γ la frontière de D parcourue une fois dans le sens direct.
   a) Représenter graphiquement le domaine D et la courbe Γ.
   b) Calculer l'intégrale curviligne $L = \int_{\Gamma} (xy + y^2)dx + x^2dy$
5) Calculer le flux Φ du champ de vecteurs $\vec{V} = 4xz\vec{\imath} - y^2\vec{\jmath} + yz\vec{k}$ à travers la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

RATTRAPAGE D'ANALYSE DANS LES ESPACES VECTORIELS 2010-2011

EXERCICE I :

1) On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct.
a) Calculer les intégrales doubles ci-dessous :

$I = \iint_D (x+y)(x-y)dxdy$ où D est le domaine délimité par les paraboles $x = y^2$ et $y = x^2$

$J = \iint_D \sqrt{\frac{1-x2-y2}{x2+y2+1}}$ dxdyoù $D = \{ x^2 + y^2 \leq 1 \; 0 \leq x ,\; 0 \leq y \}$

$K = \iint_D \frac{x2}{y2} dxdy$ avec D domaine délimité par les droites x = 2 ,y = x et l'hyperbole xy = 1

b) Calculer les intégrales curvilignes ci-dessous en prenant le sens direct :

i. $\Delta_1 = \int_L x$dy. Où L est le triangle formé par les axes de coordonnées et la droite x + y = 2
$\Delta_2 = \int_L \frac{y2dx-x2dy}{x2+y2}$ où L est le quart de cercle de centre l'origine et de rayon 1 du premier quadrant.

2) On considère l'espace munie d'un repère orthonormé direct
a) Calculer $L = \iiint_D (x2 + y2)dxdydz$ avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; 0 \leq z ,\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$
b) Calculer l'intégrale de surface $\Delta_3 = \iint_S xzdxdy + xydydz + yzdzdx$ avec S la surface extérieure de la pyramide délimité par les plans :
x = 0 , y = 0 ; z = 0 et x + y + z = 1

EXERCICE 2

1) On considère les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2x}{y^4+x^2} si(x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} si(x,y) \neq (0,0) \\ g(0,0) = 0 \end{cases}$$

a) Etudier la continuité des fonctions f et g au point (0,0)
b) Etudier la différentiabilité des fonctions f et g en (0,0)
2) On considère les fonctions δ et φ définies de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par :

$\varphi(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ et $\delta(x,y) = x^4 + y^4$

a) Déterminer les points critiques de φ et étudier la nature de chacun de ces points.
b) Déterminer les points critiques de δ et étudier la nature de chacun de ces points.

EXERCICE 3

1) Rappeler la définition de : chemin dans un espace métrique, espace métrique connexe espace métrique connexe par arc.
2) Soient E un espace métrique, A et B deux parties connexes de E tels que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$

Montrer que A ∪B est une partie connexe de E

CONTROLE CONTINU D'ANALYSE DANS LES ESPACES VECTORIELS 2012-2013

Exercice 1 : (10 points)

1) Soit : $\rho: R_+^* \times R_+^* \to R_+$ $définie\ par\ \rho(x,y) = |\frac{1}{3x} - \frac{1}{3y}|$
   a) Montrer que ρ est une distance sur R_+^*.
   b) Soit $r \in R_+^*$ Déterminer la boule de R_+^* de centre 3 et de rayon r pour la distance ρ.
   c) On pose $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. La suite $(x_n)_{n\in N^*}$ admet-elle une limite pour la distance ρ?
2) Soit $\delta: R \times R \to R_+$ définie par $\delta(x,y) = |e^x - e^y|$
   a) Montrer que δ est une distance sur R.
   b) Décrire la boule B(0,1) relativement à δ.
   c) On pose $y_n = -n$. la suite $(y_n)_{n\in N}$ est-elle de Cauchy pour δ ? Est-elle convergente ? Conclure.
3) A et B sont deux parties connexes d'un espace métrique (E,d). On suppose $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que AUB est connexe.
4) Montrer que dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'un sous espace vectoriel est un sous espace vectoriel.

Exercice 2 : (10 points)

1) $f: R^2 \to R$ définie par $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+4y^2}$ est-elle prolongeable par continuité en (0,0) ?
2) Soit la fonction $g: R^2 \to R$ définie par $g(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si (x,y)≠(0,0) et $g(0,0) = 0$
   a) g est-elle continue en (0,0) ?
   b) g est-elle différentiable en (0,0) ?
3) on définit de R^2 vers R par $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$
   a) montrer que l'équation $e^{-x} = x$ admet une solution unique x_0 dans R.
   b) montrer que f admet un unique point critique dont on déterminera la nature.
4) On définit g de Ω =]0,1[×]0,1[vers R par $g(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$
   a) Déterminer le(les) point(s) critique(s) de g sur Ω.
   b) Déterminer la nature du (ou de ces) point(s) critique(s) de g sur Ω.

EXAMEN D ANALYSE DES ESPACES VECTORIELS 2012-2013

Exercice 1. 4 points

1) Soit : $\rho: R_+^* \times R_+^* \to R_+ \; définie\; par\; \rho(x,y) = |\frac{1}{3x} - \frac{1}{3y}|$
   a) Montrer que ρ est une distance sur R_+^*.
   b) Soit $r \in R_+^*$ Déterminer la boule de R_+^* de centre é et de rayon r pour la distance ρ.
   c) On pose $x_n = n + 2$. La suite $(x_n)_{n\in N^*}$ est-elle convergente dans (R^*, ρ)?si oui déterminer sa limite.
2) A et B sont deux parties connexes d'un espace métrique (E,d). On suppose $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que AUB est connexe.

Exercice 2. 8 points

1) La fonction $\varphi: R^2\{(0,0)\} \to R$ définie par $\varphi(x,y) = \frac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$ est-elle prolongeable par continuité en (0,0) ?

2) La fonction $\Psi: R^2\{(1,0)\} \to R$ définie par $\Psi(x,y) = \frac{\sin(x-1)^2+\sin y^2}{s^2+y^2-2x+1}$ est-elle prolongeable par continuité en (1,0) ?

3) On considère les fonctions $f: R^2 \to R \; et \; g: R_+^* \times R \to R$ définies par $f(x,y) = x^2 + y^4$ et $g(x,y) = x(lnx)^2 + xy^2$

a) Déterminer l'unique point critique de f ainsi que sa nature.

b) Déterminer les points critiques de g et étudier la nature de chacun de ces points.

4) On définit la fonction $h: R^2\{(0,0)\} \to R$ par $h(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
   a) Montrer qu'on peut prolonger h par continuité. On appelle $\tilde{h}$ ce prolongement.
   b) Etudier la différentiabilité de $\tilde{h}$ sur son ensemble de définition.

Exercice 3. 8 points

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les domaines $D_1 \; et \; D_2$ définis par $D_1 = \{(x,y) \in R^2, 0 \leq x \leq y \leq 1\} et \; D_2 = \{(x,y) \in R^2, x+y \geq 1, x^2+y^2 \leq 1, y \leq x\}$
   a) Représenté $D_1 \; et \; D_2$ dans le plan.
   b) Calculer les intégrales doubles $I_1 = \iint_{D_1} xe^{-y}dxdy \; et \; I_2 = \iint_{D_2} (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}dxdy$.

2) Calculer l'intégrale triple $J = \iiint_{\Delta} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$ où Δ est le domaine de l'espace limité par les surfaces d'équation $z = x^2 + y^2 \; et \; z = 4$
3) L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, I ; J ;.K). Soit D le cube de centre l'origine des trois fassent passent par les points I, J et K. On note S la surface de ce cube. Soit V=$(xy, x^2, x^2\, y^2$z) un champ de vecteurs. Calculer le flux Φ de V à travers S.
4) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le cercle Γ défini par : S.$\{x^2 + y^2 + z^2 = 1 \; et \; x + y + z = 1$.
   a) Déterminer les coordonnées du centre de Γ et son rayon.
   b) Donner une paramétrisation de Γ.
   c) Calculer l'intégrale curviligne $K = \int_{\Gamma} (y+z)dx + (x+y)dz$

CORRECTION D'ANALYSE DANS LES ESPACES VECTORIELS

CORRECTION RATTRAPAGE D'ANALYSE DANS LES ESPACES VECTORIELS 2010-2011

Soit h: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

h(x,y)= $\begin{cases} x^2y^2/(x^2+y^2) \\ h(0,0)=0 \end{cases}$ si (x,y) (0,0)

*Montrons que h est de classe c^2 sur $\mathbb{R}^2$

h est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$ \(0,0) comme rapport de fonctions de classes c^1 (fonctions polynomiales)

-Montrons que h est de classe c^1 en (0,0) ∂

$$\lim_{t\to 0}\frac{h(0,0)+t(1,0)-h(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{h(t,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} 0$$

$= 0$

$$i)\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy^3(x^2+y^2)-2x\,(x^2y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^2y^3+2xy^5-2x^3y^3}{x^2+y^2} = \frac{2xy^5}{x^2+y^2}$$

Or $0 \leq \frac{2xy^5}{x^2+y^2} \leq \frac{2xy^5}{y^4} = 2xy$

$\rightarrow 0 \leq \frac{\partial f}{\partial x} \leq 2xy$

D'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ car $2xy \to 0$ quand (x,y) → (0,0)

Donc $\lim\limits_{t\to 0} \frac{h(t,0)}{t} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}$

ii) $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{3x^2y^2(x^2+y^2)-2y\,(x^2y^3)}{(x^2+y^2)^2}$

$$= \frac{3x^4y^2 + 3x^2y^4 - 2x^2y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^4y^2 + x^2y^4}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{3x^2y^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\leq \frac{3x^2y^2}{x^2+y^2}$$

$\leq \frac{3x^2y^2}{y^2} = 3x^2$

$\rightarrow 0 \leq \frac{\partial f}{\partial x} \leq 3x^2$

D'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ car $3x^2 \to 0$ quand (x,y) → (0,0)

Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

1) Determinons les points critiques

Ce sont les points tels que :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \ \rightarrow (x+y)^2 - 2xy - 5 = 0 \ (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12 = 0 \ \rightarrow xy = 2 \ (2) \end{cases}$$

(1) et (2) implique

$$(x+y)^2 - 9 = 0$$

$$\begin{cases} x + y = 3 \ \ ou x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \quad y = 2 \\ ou \\ x = 2 \quad y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -1 \quad y = -2 \\ ou \\ x = -2 \quad y = -1 \end{cases}$$

Posons $A_1 = (1,2)$, $A_2(2,1)$, $A_3(-1,-2), A_4(-2,-1)$

Les points critiques sont A_1, A_2, A_3 et A_4

b) recherche des extremums

calculons pour chacun de A_i i=1 à n , les valeurs r , s et t

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6\,x$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 6y$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$

	$A_1(1,2)$	$A_2(2,1)$	$A_3(-1,-2)$	$A_4(-2,-1)$
r= 6x	6	12	-6	- 12
t= 6x	6	12	-6	- 12

S=6y	12	6	- 12	-6
$S^2 - t.r$	108	-108	108	-108

- A_1 et A_3 ne sont pas des extrémums
- A_2 et A_4 Sont des extrémums

• A_2 est un minimum

• A_4 est un maximum

D'après 2) d'(x,y)=f(d(x,y)) est une distance sur E

4) comparons les distances d et d'

$\forall\, x,y \in F^2, d(x,y) \geq 0 \rightarrow 1 + d(x,y) \geq 1$

$\rightarrow \frac{1}{1+d(x,y)} \leq 1$

$\rightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq d(x,y)$

$\rightarrow d'(x,y) \leq d(x,y)$

5) Déterminons et construisons $B_{d''}(0,\frac{1}{2})$

$B_{d''}(0,\frac{1}{2}) = \left\{x \epsilon E d(0,x) < \frac{1}{2}\right\}$

$D(0,x) < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{d(x,0)}{1+d(x,0)} < \frac{1}{2}$

$\rightarrow \frac{|x|}{1+|x|} < \frac{1}{2}$

$\rightarrow 2|x| < 1 + |x|$

$\rightarrow |x| < 1$

C'est le segment de la droite réelle de bornes -1 et 1

Exercice 1

D(x,y) =$\sqrt{d(x,y)}$

1) Montrons que d' est une distance sur E

i) positivité

d(x,y)≥ 0 $\rightarrow \sqrt{d(x,y)} \geq 0$

$\rightarrow \sqrt{d'(x,y)} \geq 0$

ii) séparation

$\forall\ x, y \in E,\ \sqrt{d(x,y)} = 0$

$\rightarrow d(x,y) = 0$

→ X = y car d est une distance

iii) symétrie

$\forall\ x, y \in E, d'(x,y) = \sqrt{d(x,y)} = \sqrt{d(y,x)}$

$D'où\ \ d'(x,y) = d'(y,x)$

iv) inégalité triangulaire

$\forall\ x, y, z \in E,\ \ d'(x,z) = \sqrt{d(x,z)}\ \leq \sqrt{d(x,y) + d(y,z)}$

$\leq \sqrt{d(x,y)}\ + \sqrt{d(y,z)}$

$Ainsi\ \ \ d'(x,z) \leq\ d'(x,y) + d'(y,z)$

De i) ,ii) ,iii), iv) on conclut que d' est une distance sur E .

(x,y) $\rightarrow f\big(d(x,y)\big)$

Condition suffisante pour que f soit une distance sur E

•$f(0) = 0$

•$f\ continue$

• $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

2) *Montrons que l'application d'' sur $E \times E$ tel que :*

$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ *soit une distance sur E*

Soit f : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$t \to \frac{t}{1+t}$

•$f(0) = \frac{0}{1+0} = 0$

•f *continue comme inverse d'une fonction continue*

• $f(x+y) = \dfrac{x+y}{1+x+y} = \dfrac{x}{1+x+y} + \dfrac{y}{1+x+y}$

$$\leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \, car \;\; x \geq 0 \; et \; y \geq 0$$

D'où $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

CORRECTION DU CONTRÔLE CONTINU D'ANALYSE DES ESPACES VECTORIELS 2011-2012

EXERCICE I :

1)

a) Montrons que $\overline{V}$ est un sous espace vectoriel

V sous-espace vectoriel de E ⇒ V$\neq \emptyset$

Par ailleurs, $V \subset \overline{V} \Rightarrow \overline{V} \neq \emptyset$ (1)

On a : $x \in \overline{V} \Leftrightarrow$ il est une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V convergeant vers x.

Montrons que $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda x + y \in \overline{V},\ (x, y) \in \overline{V}^2$.

$x \in \overline{V} \Leftrightarrow$ il existe une $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n) = x$.

$y \in \overline{V} \Leftrightarrow$ il existe une $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n) = y$.

Soit a suite $(\lambda x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Comme V est un sous espace vectoriel, $(\lambda x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à V et on a :

$$\lim_{n\to+\infty}(\lambda x_n + y_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n$$
$$= \lambda x + y$$

Donc $\lambda x + y \in \overline{V}$ (2)

$\boxed{\text{(1) et (2) } \Rightarrow \overline{V} \text{ est un sous espace vectoriel de E.}}$

b) Montrons que $V^\circ \neq \emptyset \Rightarrow V = E$

$x_0 \in V^\circ \Leftrightarrow \exists r > 0 /\ B(x_0, r) \in V$.

Par ailleurs, $B(x_0, r) = x_0 + B(0, r)$.

Soit $x \in E$, montrons que $x \in V$.

- Si $x = x_0$, alors $x \in V^\circ \subset V$
- Si $x \neq x_0$.

$\frac{r}{2} \times \frac{x-x_0}{||x-x_0||} \in B(0,r)$ car $\left\|\frac{r}{2} \times \frac{x-x_0}{||x-x_0||}\right\| = \frac{r}{2} < r.$

Donc $x_0 + \frac{r}{2} \times \frac{x-x_0}{||x-x_0||} \in x_0 + B(0,r) \subset V.$

Posons $y = x_0 + \frac{r}{2} \times \frac{x-x_0}{||x-x_0||}$

On a: $y - x_0 = \frac{r}{2} \times \frac{x-x_0}{||x-x_0||}$

$$\Rightarrow r(x - x_0) = 2||x - x_0||(y - y_0)$$

$$\Rightarrow x = x_0 + \frac{2||x - x_0||}{r}(y - x_0)$$

x est combinaison linéaire d'éléments de V donc appartient à V car V est un sous-espace vectoriel de E.

D'où $x \in V$. Ainsi $E \subset V$. Par hypothèse, $V \subset E \Rightarrow V = E.$

Conclusion : $V^\circ \neq \emptyset \Rightarrow V = E.$

2) Montrons que toute boule ouverte est une partie ouverte.

Soit $a \in E$, $\epsilon > 0$ et $B(a,\epsilon)$ une boule ouverte.

Soit $x \in B(a,\epsilon)$, cherchons r>0 / $B(x,r) \subset B(a,\epsilon)$.

Posons $r = \epsilon - d(x,a)$.

Vérifions si $B(x,r) \subset B(a,\epsilon)$

Soit $y \in B(x,r) \Rightarrow d(x,y) < r.$

On a : $d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a)$car d est une distance
$\leq r + d(x,a)$

Or $d(x,a) = \epsilon - r.$

D'où $d(y,a) \leq r + \epsilon - r = \epsilon$

$$\Rightarrow y \in B(a,\epsilon)$$

D'où $B(x,r) \subset B(a,\epsilon)$

Ainsi $B(a,\epsilon)$ est un ouvert de (E,d).

3) Soit l'application

$$\boldsymbol{d}:\ \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_+$$

$$(\boldsymbol{z_1},\boldsymbol{z_2}) \mapsto \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z_1},\boldsymbol{z_2}) = \begin{cases} \boldsymbol{0}, \boldsymbol{si}\ \boldsymbol{z_1} = \boldsymbol{z_2} \\ |\boldsymbol{z_1} - \boldsymbol{z_2}|, \boldsymbol{si}\ \ \boldsymbol{M_1}(\boldsymbol{z_1})\boldsymbol{M_2}(\boldsymbol{z_2})\ \boldsymbol{et}\ \ \boldsymbol{O}(\boldsymbol{0}) \\ \boldsymbol{sont\ align\acute{e}s} \\ |\boldsymbol{z_1}| + |\boldsymbol{z_2}|, \quad \boldsymbol{si}\ \ \boldsymbol{M_1}(\boldsymbol{z_1})\boldsymbol{M_2}(\boldsymbol{z_2})\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{O}(\boldsymbol{0}) \\ \boldsymbol{ne\ sont\ pas\ align\acute{e}s}. \end{cases}$$

Déterminer et représenter $B\left(1,\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2},1\right)$

- **Détermination de $B\left(1,\frac{1}{2}\right)$**

$\forall z \in \mathbb{C}, z \in B\left(1,\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow d(1,z) < \frac{1}{2}$

- si $z = 1, d(1,1) = 0 < \frac{1}{2}$ d'où $B\left(1,\frac{1}{2}\right) \cap \{1\} = \{1\}$

- si $z \in \mathbb{R}, d(1,z) = |z-1|$ ainsi $z \in B\left(1,\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow |z-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow z \in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[$ d'où

$$B\left(1,\frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{R} =]\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}[$$

-si $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ d(1,z) = |z| + |1| = |z| + 1 > \frac{1}{2}$ ainsi $z \in B\left(1,\frac{1}{2}\right)$ est impossible. D'où

$$B\left(1,\frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} = \emptyset$$

Alors, $\boxed{B\left(1,\frac{1}{2}\right) = \left(B\left(1,\frac{1}{2}\right)\cap\mathbb{R}\right) \cup \left(B\left(1,\frac{1}{2}\right)\cap\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\right) = \left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[}$

- **Détermination de $B\left(\frac{1}{2},1\right)$**

$\forall z \in \mathbb{C}, z \in B\left(\frac{1}{2},1\right) \Leftrightarrow d\left(\frac{1}{2},z\right) < \frac{1}{2}$

- si $z = \frac{1}{2}, d\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0 < 1$ d'où $B\left(\frac{1}{2},1\right) \cap \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

- si $z \in \mathbb{R}, d\left(\frac{1}{2},z\right) = \left|z-\frac{1}{2}\right|$ ainsi $z \in B\left(\frac{1}{2},1\right) \Leftrightarrow \left|z-\frac{1}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow z \in]-\frac{1}{2},\frac{3}{2}[$ d'où

$$B\left(\frac{1}{2},1\right) \cap \mathbb{R} =]-\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}[$$

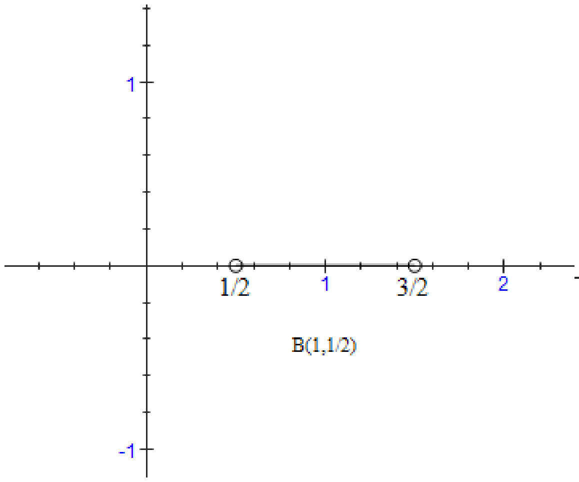
-si $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ d\left(\frac{1}{2},z\right) = |z| + \left|\frac{1}{2}\right| = |z| + \frac{1}{2}$

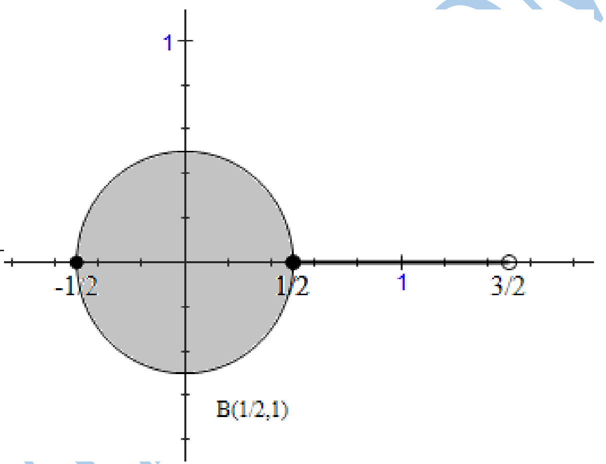
ainsi $z \in B\left(1,\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow |z| + \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow z \in D\left(O,\frac{1}{2}\right) \setminus \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ c'est le disque complexe ouvert centré en O(0), de rayon $\frac{1}{2}$, privé su segment $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ réel

D'où $B\left(\frac{1}{2},1\right) \cap \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} =$

Alors, $\boxed{B\left(\frac{1}{2},1\right) = \left(B\left(1,\frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{R}\right) \cup \left(B\left(1,\frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\right) = D\left(O,\frac{1}{2}\right) \cup \left]\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right[}$

Représentation :





4)

a) Vérifions que $||.||_\infty$ et $||.||_1$ sont 2 normes sur E et $\forall f \in E, ||f||_1 \leq ||f||_\infty$

- Vérifions que $||.||_\infty$ *et* $||.||_1$ sont des normes :
  - Montrons que $||f||_\infty = 0 \Rightarrow f = 0_E$, pour $f \in E$

$$\begin{aligned} ||f||_\infty = 0 &\Leftrightarrow Sup_{x\in[0,1]}|f(x)| = 0 \\ &\Rightarrow \forall x \in [0,1], |f(x)| = 0 \\ &\Rightarrow f = 0 \end{aligned}$$

  - Montrons que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda f||_\infty = |\lambda| ||f||_\infty, pour\ f \in E$

$$\begin{aligned} ||\lambda f||_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| \\ &= |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \\ &= |\lambda| ||f||_\infty \end{aligned}$$

  - Montrons que $\forall f, g \in E, ||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$

$$\begin{aligned}||f+g||_\infty &= \sup_{x\in[0,1]}(|f(x)+g(x)|)\\ &\le \sup_{x\in[0,1]}(|f(x)|+|g(x)|)\\ &\le \sup_{x\in[0,1]}|f(x)| + \sup_{x\in[0,1]}|g(x)|\\ &\le ||f||_\infty + ||g||_\infty\end{aligned}$$

D'où $||f||_\infty$ est une norme sur E.

- Montrons que $\forall f \in E, ||f||_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0_E$.

$$\begin{aligned}||f||_1 = 0 &\Leftrightarrow \int_0^1 |f(t)|dt = 0\\ &\Rightarrow |f(t)| = 0 \; car \; 0 < 1, t \in [0,1]\\ &\Rightarrow \forall t \in [0,1], f(t) = 0\\ &\Rightarrow f = 0_E\end{aligned}$$

- Montrons que $\forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, ||\lambda f||_1 = |\lambda| ||f||_1$

$$\begin{aligned}||\lambda f||_1 &= \int_0^1 |\lambda f(t)|dt\\ &= |\lambda| \int_0^1 |f(t)|dt\\ &= |\lambda| ||f||_1\end{aligned}$$

- Montrons que $\forall f, g \in E, ||f+g||_1 \le ||f||_1 + ||g||_1$

$$\begin{aligned}||f+g||_1 &= \int_0^1 |f(t)+g(t)|dt\\ &\le \int_0^1 (|f(t)|+|g(t)|)dt\\ &\le \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |g(t)|dt\\ &\le ||f||_1 + ||g||_1\end{aligned}$$

D'où $||.||_1$ est une norme sur E.

- Montrons que $\forall f \in E, ||f||_1 \le ||f||_\infty$

On a :

$$\forall x \in [0,1], |f(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$
$$\Rightarrow \int_0^1 |f(x)|dx \leq \int_0^1 \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|dt$$
$$\Rightarrow \int_0^1 |f(t)|dt \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$
$$\Rightarrow ||f||_1 \leq ||f||_\infty$$

b)

i) ***Calculons*** $||f_n||_\infty$ ***et*** $||f_n||_1$

- Calcul de $||f_n||_\infty$

$$||f_n||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |x^n|, n \in \mathbb{N}^*$$
$$= \sup_{x\in[0,1]} (|x|)^n, n \in \mathbb{N}^* \ car\ \forall x \in [0,1], |x| \leq 1$$
$$= 1$$

D'où $\boxed{||f_n||_\infty = 1}$, pour n∈ℕ *

- Calcul de $||f_n||_1$

$$||f_n||_1 = \int_0^1 |f_n(t)|dt = \int_0^1 |t^n|dt = \int_0^1 t^n dt$$
$$= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Donc $\boxed{||f_n||_1 = \frac{1}{n+1}, pour\ n \in \mathbb{N}^*}$

ii) Prouvons que $||.||_\infty$ ***et*** $||.||_1$ ***ne sont pas deux normes uniformément équvalentes***

Supposons que $||.||_\infty$ *et* $||.||_1$ soient uniformément équivalentes. Alors, $\forall f \in E$, il existe C_1 et $C_2 > 0$ tels que $C_1||f||_1 \leq ||f||_\infty \leq C_2||f||_1$

Pour $f = f_n$ c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = x^n$$

On a d'après a), $||f_n||_1 \leq ||f||_\infty \Rightarrow C_1 = 1 > 0.$

Cherchons $C_2 > 0$ tel que $||f||_\infty \leq C_2||f||_1$

C'est-à-dire $1 \leq \frac{C_2}{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$

C'est-à-dire $C_2 \geq (n+1)$

Or la suite$(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}/U_n = N = 1\,, n \in \mathbb{N}^*$ est strictement croissante et divergente.

Donc C_2 n'existe pas. Contradiction.

Ainsi $||.||_\infty\ et\ ||.||_1$ ne sont pas uniformément équivalentes.

EXERCICE II :

1)

a) Calcul de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y)$

En faisant tendre (x,y) vers $(0,0)$ suivant la droite d'équation $y = x$ on a : $f_1(x,x) = e\sin\frac{1}{x}$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{2}{\pi n}$, on a : $x_{n_{n\to 0}} \to 0$ $f_1(x_n,x_n) = esin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 1\ si\ n = 1 \\ 0\ si\ n = 2k, k \in \mathbb{N}^* \\ -1\ sinon \end{cases}$

Donc f_1 diverge.

Ainsi f_1 n'admet pas de limite en $(0,0)$.

b) Prolongement par continuité de f_2 en (0,0)

f_2 est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car fonction rationnelle.

On a : $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Etudions la continuité de f_2 en $(0,0)$.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-1)y^2 - x^2}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} - 1\end{aligned}$$

Or $\begin{aligned}(|x|-|y|)^2 \geq 0 \ &\Leftrightarrow\ x^2+y^2 \geq 2|x||y| \\ &\Rightarrow \frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2|x||y|} \\ &\Rightarrow \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|y^2}{2|x||y|} - \frac{|y|}{2}\end{aligned}$

Or $y \mapsto \frac{|y|}{2}$ est continue en $(0,0)$ car polynôme

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$

Ainsi, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-1)y^2-x^2}{x^2+y^2} = -1 \in \mathbb{R}$

Ainsi f_2 peut-être prolongé par continuité en (0,0).

2)

a) Montrons que g est continue sur $\mathbb{R}^2$ et en particulier en (0,0)

g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme fraction rationnelle.

Etudions la continuité de g en (0,0)

On a :$|g(x,y)| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \leq \frac{x^2y^2}{x^2} = y^2$

$y \mapsto y^2$ est un polynôme donc continue en (0,0).

D'où $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |g(x,y)| \leq \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$

Ainsi , g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrons que g admet une dérivée suivant $(u,v) \neq (0,0)$

Existence de $\lim\limits_{t\to0} \frac{g(t(u,v))-g(0,0)}{t}$

$$g\big((0,0)+t(u,v)\big) = g\big(t(u,v)\big) = g(tu,tv)$$

On a :

$$= \frac{(tu)^2(tv)^2}{(tu)^2+(tv)^4}, (u,v) \neq (0,0)$$

$$= \frac{t^4u^2v^2}{t^2(u^2+t^2v^4)}, (u,v) \neq (0,0)$$

$$\frac{g\big(t(u,v)\big)-g(0,0)}{t} = \frac{t^4u^2v^2}{t^3(u^2+t^2v^4)} = \frac{tu^2v^2}{u^2+t^2v^4}, \quad (u,v) \neq (0,0)$$

$$\lim_{t\to0} \frac{g\big(t(u,v)\big)-g(0,0)}{t} = \lim_{t\to0} t\frac{u^2v^2}{u^2+t^2v^4} = 0$$

Donc g admet en (o,o) une dérive suivant (u,v)≠ (o,o).

c) Différentiabilité de g en (0,0)

Existence des dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{g(t,0)-g(0,0)}{t}$$
$$= 0 \quad car\ g(t,0) = 0\ pour\ t \neq 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0{,}0) = \lim_{t\to 0}\frac{g(0,t)-g(0{,}0)}{t}$$
$$= 0\ car\ g(0,t) = 0\ pour\ t \neq 0$$

Evaluons $\lim\limits_{\|h,k\|\to 0}\frac{g(h,k)-g(0,0)-Dg(0,0).(h,k)}{\|h,k\|}$

Or $Dg(0{,}0) = (0{,}0) \quad \Rightarrow \quad Dg(0{,}0).(h,k) = 0.$

On a: $\lim\limits_{\|h,k\|\to 0}\frac{g(h,k)}{\|h,k\|} = \lim\limits_{\|h,k\|\to 0}\frac{h^2k^2}{(h^2+k^4)\|h,k\|}$

$$\lim_{\|h,k\|\to 0}\frac{h^2k^2}{(h^2+k^4)\|h,k\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2k^2}{(h^2+k^4)\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{\sqrt{2}(1+h^2)}$$

Or $h^2+k^2 \geq 2|h||k| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{|h||k|}}$

$$\left|\frac{h^2k^2}{(h^2+k^4)\|h,k\|}\right| \leq \frac{h^2k^2}{(h^2+k^2)\|h,k\|} \leq \frac{|h||k|}{\sqrt{h^2+k^2}}\times\frac{1}{2}$$
$$\leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{|k||h|}$$

$(h,k) \mapsto \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{|k||h|}$ est continue en (0,0) et $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{h^2k^2}{(h^2+k^4)\sqrt{h^2+k^2}}\right| = 0$

Donc $\lim\limits_{\|h,k\|\to 0}\frac{g(h,k)-g(0,0)-Dg(0,0).(h,k)}{\|h,k\|} = 0$

Ainsi g est différentiable en (o,o).

3) Montrons que h est de class $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

Pour cela, il suffit de montrer que h admet des dérivées partielles en (0,0) et que ces dérivées partielles sont continues en (0,0).

Existence des dérivées partielles.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0{,}0) = \lim_{t\to 0}\frac{h(t,0)-h(0{,}0)}{t}\ or\ h(t,0) = 0, t \neq 0$$
$$= 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0{,}0) = \lim_{t\to 0}\frac{h(0,t)-h(0{,}0)}{t}\quad or\ h(0,t) = 0, t \neq 0$$
$$= 0$$

Donc h admet des dérivées partielles en (0,0)

Par ailleurs h est une fonction rationnelle, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et admettent des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

On a:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{4x^3y^3(x^4+y^2) - 4x^3(x^4y^3)}{(x^4+y^2)^2} = \frac{4x^3y^5}{(x^4+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{3x^4y^2(x^4+y^2) - 2y(x^4y^3)}{(x^4+y^2)^2} = \frac{3x^8y^2 + x^4y^4}{(x^4+y^2)^2}$$

- Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en (0,0)

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{4x^3y^5}{(x^4+y^2)^2}\right|, pour\ (x,y) \neq (0,0)$$
$$\leq \left|\frac{4x^3y^5}{y^4}\right| = 4|x^3y|$$

$(x,y) \mapsto 4x^3y$ est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}^2$ Ainsi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\right| = 0$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0$$

D'où $\frac{\partial h}{\partial x}$ est continue en (0,0).

- Continuité de $\frac{\partial h}{\partial y}$ en (0,0)

On a : $(|x|-|y|)^2 \geq 0 \ \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2|x||y|$
$\Rightarrow (x^2+y^2)^2 \geq 4x^2y^2$
$\Rightarrow \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{1}{4x^2y^2}$

$$\left|\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{3x^8y^2+x^4y^4}{(x^4+y^2)^2}\right|$$
$$\leq \left|\frac{3x^8y^2+x^4y^4}{(x^2+y^2)^2}\right|$$
$$\leq \frac{3x^8y^2+x^4y^4}{4x^2y^2} = \frac{1}{4}(3x^6+x^2y^2)$$

$(x,y) \mapsto \frac{1}{4}(3x^6+x^2y^2)$ est un polynôme, donc continue sur $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right| = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0$$

D'où $\frac{\partial h}{\partial y}$ est continue en (0,0).

Conclusion :

$\boxed{\text{h est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ Sur } \mathbb{R}^2}$

4) Continuité de k en (1,0)

En faisant tendre (x,y) vers $(1,0)$ suivant la droite d'équation $y = x - 1$, on a :

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} k(x,y) = \lim_{y\to 1} \frac{y^2}{2y^2} = \frac{1}{2}$$

En faisant tendre (x,y) vers $(1,0)$ suivant la droite d'équation $y = 0$, on a : $k(x,0) = 0$ et $k(1,0) = 0 \neq \frac{1}{2}$.

Donc k n'est pas continue en (1,0).

CORRECTION DU CONTROLE CONTINU D'ANALYSE DES ESPACES VECTORIELS 2012-2013

Exercice 1

1) Soit $p\colon \mathbb{R}_+^* \text{ X } \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $p(x,y) = |\frac{1}{3x} - \frac{1}{3y}|$

a) Montrons que p est une distance

Soit x, y, z $\in \mathbb{R}_+^*$

- **Positivité**

$$\left|\frac{1}{3x} - \frac{1}{3y}\right| \geq 0 \Rightarrow p(x,y) \geq 0$$

- **Symétrie**

$$p(x,y) = \left|\frac{1}{3x} - \frac{1}{3y}\right| = \left|\frac{1}{3y} - \frac{1}{3x}\right| = p(y,x)$$

Donc $p(x,y) = p(y,x)$

- **Séparation**

Posons $p(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{3x} - \frac{1}{3y}\right| = 0$

$$\Leftrightarrow 3x = 3y$$
$$\Leftrightarrow x = y$$

- **Inégalité de Minkowski (triangulaire)**

$$p(x,y) = \left|\frac{1}{3x} - \frac{1}{3y}\right| = \left|\left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{3z}\right) + \left(\frac{1}{3z} - \frac{1}{3y}\right)\right|$$
$$\leq \left|\frac{1}{3x} - \frac{1}{3z}\right| + \left|\frac{1}{3z} - \frac{1}{3y}\right| = p(x,z) + p(z,y)$$
$$\Rightarrow p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y)$$

Conclusion p est une distance sur $\mathbb{R}_+^* \text{X } \mathbb{R}_+^*$

b) Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, déterminons $B(3,n) \subset \mathbb{R}_+^*$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \in B(3,n)$ ssi $p(3,n) < r$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{\mathrm{q}} - \frac{1}{3\mathrm{x}}\right| < \mathrm{r}$$

$$\Leftrightarrow -r < \frac{1}{q} - \frac{1}{3x} < r$$

$$\Leftrightarrow -qr < 1 - \frac{1}{3x} < qr$$

$$\Leftrightarrow -1 - qr < -\frac{3}{x} < qr - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - qr < \frac{1}{x} < \frac{1+qr}{3}$$

- Pour $\leq \frac{1}{9}$, $x > \frac{3}{1+qr} \Longrightarrow x \in]\,3/(1+qr)\,, +\infty[$
- Pour $r > \frac{1}{9}, \frac{3}{1+9r} < x < \frac{3}{1-9r}$

$$\Longrightarrow x \in \left]\,\frac{3}{1+9r}, \frac{3}{1-9r}\right[$$

Donc $B(3,r) = \begin{cases} \left]\frac{3}{1+9r}, +\infty\right[\ si\ r \leq \frac{1}{9} \\ \left]\frac{3}{1+9r}, \frac{3}{1-9r}\right[\ si\ r > \frac{1}{9} \end{cases}$

c) On pose $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

(x_n) n'admet pas de limite pour p

<u>*preuve*</u>

Supposons que $\exists l \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$

Soit $\varepsilon > 0$, soit $A > 0$ cherchons $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n_\varepsilon > A$ et

$p(x_n, l) \geq \varepsilon$ (c.-à-d. $\left|\frac{\sqrt{n}}{3} - \frac{1}{3l}\right| \geq \varepsilon$)

Posons $n_\varepsilon = E\left(\left(3(A+\varepsilon) + \frac{1}{l}\right)^2\right) + 1$

$n_\varepsilon > \left(3(A+\varepsilon) + \frac{1}{l}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n_\varepsilon}}{3} > A + \varepsilon + \frac{1}{3l}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{n_\varepsilon}}{3} - \frac{1}{3l}\right| \geq |A + \varepsilon| \geq \varepsilon$$

$$donc\ prendre\ n_\varepsilon = E\left(\left(3(A+\varepsilon) + \frac{1}{l}\right)^2\right) + 1$$

2) Soit $\delta: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}_+$définie par $\delta(x,y) = |e^x - e^y|$

a) Montrons que δ est une distance

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$

- Positivité :
  $|e^x - e^y| \geq 0 \Rightarrow \delta(x,y) \geq 0$
- Symétrie
  $\delta(x,y) = |e^x - e^y| = |e^y - e^x| = \delta(y,x)$
- Séparation
  Posons $\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow |e^x - e^y| = 0$
  $\Leftrightarrow e^x = e^y$
  $\Leftrightarrow x = y$
- Inégalité triangulaire
  $$\delta(x,y) = |e^x - e^y| = |(e^x - e^z) + (e^z - e^y)|$$
  $$\leq |e^x - e^z| + |e^z - e^y| = \delta(x,z) + \delta(z,y)$$
  Donc $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$
  Conclusion
  δ est une distance.

b) Description de $B(0,1)$ relativement à δ

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in B(0,1)\ ssi$

$\delta(x,0) < 1 \ \Leftrightarrow |e^x - 1| < 1$

$\Leftrightarrow 0 < e^x < 2$

$\Leftrightarrow x < ln2$

$\Rightarrow x \in]-\infty, ln2[$

Soit $B(0,1) =]-\infty, ln2[$

c) On pose $y_n = -n$

→ (y_n) Est-elle de Cauchy ?

On remarque que $\forall \varepsilon > 0\ , \forall n, m \geq E\left(\ln\left(\frac{2}{A}\right)\right) + 1$

On a $\delta(y_n, y_m) = \left|e^{y^n} - e^{y^m}\right|$

$$= |e^{-n} - e^{-m}|$$
$$= |e^{-n}| + |e^{-m}| = e^{-n} + e^{-m}$$

Or $n, m \geq E\left(\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right) + 1 \Rightarrow n, m \geq \ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)$

$$\Rightarrow e^n, e^m > \frac{2}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow e^{-n}, e^{-m} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow e^{-n} + e^{-m} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \delta(y_n, y_m) \leq \varepsilon$$

Donc (y_n) est de Cauchy d'après la définition d'une suite Cauchy.

→ (y_n) est –elle convergente ?

$\forall l \in \mathbb{R}$, si on pose $A = \frac{e^l}{2}$ $et\ N_A = \sup\left\{1; E\left(\ln\left(\frac{2}{e^l}\right) + 1\right\}, on\ a\right.$

$A > 0, N_A \in \mathbb{N}, n \geq N_A; n > \ln\left(\frac{2}{e^l}\right) \Rightarrow e^n > 2/e^l$

$\Rightarrow e^{-n} < \frac{e^l}{2} \Leftrightarrow e^{-n} > -\frac{e^l}{2}$

$$\Leftrightarrow e^l - e^{-n} > \frac{e^l}{2}$$

$$\Leftrightarrow \delta(l, y_n) > \frac{e^l}{2}\ ie\ \delta(l, y_n) > A$$

Ainsi, $\forall l \in \mathbb{R}, \exists A > 0, \exists N_A \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_A, \delta(l, y_n) > A$, d'où l n'est pas limite de (y_n) mais alors, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite dans $(\mathbb{N}, \delta)$, c'est-à-dire $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est convergente.

3) Soit A et B deux parties connexes de (E, d)

On suppose $(A \cap B) C (O_1 \cup O_2)$ et $O_1 \cap O_2 = \emptyset$

Montrons que $((A \cup B) \subset O_1 et\ (A \cup B) \cap O_2 = \emptyset\ ou\ (A \cup B) \subset 0_2\ et\ (A \cup B) \cap 0_1 = \emptyset$

En effet : $(A \cup B) \subset O_1 \cup O_2$

$\Leftrightarrow \big(A \subset (O_1 \cup O_2)\ et\ B \subset (0_1 \cup O_2)\big)$

$\Rightarrow \Big\{ \big((A \subset O_1\ et\ A \cap O_2 = \emptyset)\ ou\ (A \subset 0_2\ et\ A \cup O_1 = \emptyset)\big) et \big((B \subset O_1\ et\ B \cap O_2 = \emptyset)\ ou\ (B \subset O_2\ et\ B \cap 0_2 = \emptyset)\big)\Big\}$ car A et B sont connexes et $O_1 \cap 0_2 = \emptyset$

$$\Rightarrow \{\big((A \subset O_1\ et\ A \cap O_2 = \emptyset) et\ (B \subset O_1\ et\ B \cap O_2 = \emptyset)\big)\ ou\ \big((A \subset O_1\ et\ A \cap O_2 = \emptyset)\ et\ (B \subset O_2\ et\ B \cap O_1 = \emptyset)\big) ou\ \big((A \subset 0_2 et\ A \cap O_1 = \emptyset)\ et\ (B \subset O_2\ et\ B \cap O_1 = \emptyset)\big)$$

Or $A \cap B \neq \emptyset$ donc on a :

$$\{\big((A \subset O_1\ et\ A \cap O_2 = \emptyset)\ et\ (B \subset O_1\ et\ B \cap O_2 = \emptyset)\big)\ ou\ \big((A \subset O_2\ et\ A \cap 0_1 = \emptyset) et\ (B \subset O_2\ et\ B \cap O_1 = \emptyset)\big)\}$$

$\Rightarrow \{\ (A \cup B \subset O_1\ et\ (A \cup B) \cap O_2 = \emptyset\ ou\ (A \cup B \subset O_2\ et\ (A \cup B) \cap O_1 = \emptyset)\ \}$

$soit\ A \cup B\ est\ connexe.$

4) Soit E un e.v normé, et A un s.e.v de E.

Montrons que $\bar{A}$ est un s.e.v

- $A \subset \bar{A}\ donc\ \bar{A} \neq \emptyset$
- Soient $x\ et\ y \in \bar{A}$, alors $\exists\ (x_n) et\ (y_n)$ suites d'éléments de A tels que :

  $\lim_{n\to\infty} x_n = x\ et\ \lim_{n\to\infty} y_n = y$

  $(x_n + y_n)$ admet une limite comme somme de deux suite convergentes et :

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n = x + y$$

  Donc $(x + y) \in \bar{A}$

- Soit $z \in \bar{A}$, alors $\exists\ (z_n)$ suite d'éléments de A tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$

  soit $\lambda \in \mathbb{K}$ (corps de base de E).
  (λz_n) admet une limite et $\lim(\lambda z_n) = \lambda \lim z_n = \lambda z$
  Donc $\lambda z \in \ \bar{A}$
  Conclusion $\bar{A}$ est un s.e.v

Exercice2

1) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+4y^2}$

$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ on a :

$$0 \leq |f(x,y)| \leq \frac{x^2}{4}$$

En effet $|f(x,y)| = \left|\frac{x^2y^2}{x^4+4y^2}\right| \leq \frac{x^2y^2}{4y^2} = \frac{x^2}{4}$

Or $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{4} = 0$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$

$\Longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Conclusion f est prolongeable par continuité en (0,0) et on a :

$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ non \end{cases}$$

2) Soit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Etude de la continuité de g en (0,0)

$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash(0,0)$ on a :

$0 \leq |g(x,y)| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}$

$\leq \frac{|x^3|}{x^2+y^2} + \frac{|y^3|}{x^2+y^2}$

$\leq \frac{|x||x^2|}{x^2+y^2} + \frac{|y||y^2|}{x^2+y^2}$

$\leq |x| + |y|$

Or $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| + |y| = 0$

$\Longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$

Donc g *est continue en* $(0,0)$

b) Différentiabilité en $(0,0)$

$\rightarrow$ *suivant* $\overrightarrow{e_x}$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g\big((0,0)+t\,\overrightarrow{e_x}\big)-g(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{g(t,0)-g(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$

$\rightarrow$ *suivant* $\overrightarrow{e_y}$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g\big((0,0)+t\,\overrightarrow{e_y}\big)-g(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{g(t,0)-g(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$

Donc la matrice Jacobienne de g en $(0,0)$ nous donne

$$\big(D_g(0,0)\big)(h,x) = \left(\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(0,0)\right)h + \left(\left(\frac{\partial g}{\partial y}g\right)(0,0)\right)k$$

$$= h + k$$

$\rightarrow$ *verifions qu'effectivementg est différentiable en* $(0,0)$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g\big((0,0)+(h,k)\big)-g(0,0)-\big(D_g(0,0)\big)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3+k^3}{h^2+k^2}-0-(h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left(h^3+k^3-(h+k)(h^2+k^2)\right)}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} -\frac{hk(k+h)}{(k^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Posons $H(h,k) = -\frac{hk(k+h)}{(k^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$

En appliquant H suivant la direction $h = k$ on a :

$$\lim_{h\to 0} H(h,h) = \lim_{h\to 0} -\frac{2h^3}{2^{\frac{3}{2}}h^3} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Donc g n'est pas différentiable en (0 ,0)

3) On donne $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \to x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$

a) Montrons que l'équation $e^{-x} = x$ admet une solution unique x_0 dans $\mathbb{R}$

Posons $g(x) = e^{-x} - x$

<u>Etude de g</u>

$D_g = \mathbb{R}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$g'(x) = -e^{-x} - 1 = -(1 + e^{-x}) < 0$

D'où le tableau de variation suivant

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	
$g(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$

g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et de plus $\left(\lim_{x \to -\infty} g(x)\right) \times \left(\lim_{x \to +\infty} g(x)\right) < 0$

donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ x_o.

b) Point Critique

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y - e^{-x} = 0 \ (1) \\ -2x + 4y = 0 \ (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$

$(1) \Rightarrow x - e^{-x} = 0$

$$\Rightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = \frac{1}{2}x_0 \end{cases}$$

Donc g admet un unique point critique $A_0(x_0, \frac{1}{2}x_0)$

→ Nature de $A_0\left(x_0, \frac{1}{2}x_0\right)$

$$r_0 = \frac{\partial^2}{\partial^2 x_0} f\left(x_0, \frac{1}{2}x_0\right) = 2 + e^{-x_0}$$

$$s_0 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f\left(x_0, \frac{1}{2}x_0\right) = -2$$

$$t_0 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f\left(x_0, \frac{1}{2}x_0\right) = 4$$

$$\Delta = r_o t_0 - s_0^2 = (2 + e^{-x_0})4 - 4 = 4(x_0 + 1)$$

car $x_0 = e^{-x_0}$

$g(0) = 1 - 0 = 1 > 0$ comme g est décroissante, on en déduit que $x_0 > 0$

Donc $\Delta = 4(x_0 + 1) > 0$

$(NB$: on pouvait tout simplement remarquer que $\Delta = 4(e^{-x_0} + 1) > 0$)

De plus $r_0 + t_0 = 2 + x_0 + 4 > 0$

Donc $A_0\left(x_0, \frac{1}{2}x_0\right)$ est extremum et plus précisément un minimum local.

4) On définit $g :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$

$$(x, y) \to \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x-y}$$

a) Points critiques de g sur Ω

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x, y) = 0 \\ \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0 \ (1) \\ \frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} = 0 \ (2) \end{cases}$$

(1) et (2) nous donnent $(1-x)^2 = (1-y)^2$

Soit $\begin{cases} x+y = 2\ (a) \\ ou \\ x = y\ \ (b) \end{cases}$ comme $(x,y) \in \Omega\ (a): x+y = 2$ est impossible.

Donc les points critiques sont de la forme $x = y$ en remplaçant dans (1) on a :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(2x)^2} \Longrightarrow (2x)^2 - (1-x)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow (x+1)(3x+1) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ ou \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} or\ x \in]0,1[\Longrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Donc les points critiques est : $A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

b) Nature du point critique

$$r = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} g\right)\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{27}{2}$$

$$s = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{27}{4}$$

$$t = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{27}{2}$$

$$\Delta = rt - s^2 = \frac{27^2}{4} - \frac{27^2}{16} = 3 \times \frac{27^2}{16} > 0$$

Donc $A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est un minimum local.

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ANALYSE DANS LES ESPACES VECTORIELS 2011-2012

EXERCICE I :

1°)

a) Montrons que d est une distance sur $\mathbb{R}_+^*$

d étant définie comme ci-dessus (sur $\mathbb{R}_+^*$), il s'agit de vérifier trois points :

- $\forall$ x,y$\in\mathbb{R}_+^*$, d(x,y) = 0 $\Leftrightarrow$ x = y

On a d(x,y) = 0 $\Leftrightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$

$\Leftrightarrow$ x = y

- $\forall$ x,y$\in\mathbb{R}_+^*$, d(x,y) = d(y,x)

On a : $d(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{1}{y} - \frac{1}{x}| = d(y,x)$

- $\forall$ x,y,z$\in\mathbb{R}_+^*$, d(x,y) $\leq$ d(x,z) + d(z,y)

On a : $d(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{z} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y}|$

$\leq |\frac{1}{x} - \frac{1}{z}| + |\frac{1}{z} - \frac{1}{y}|$

$\leq$ d(x,z) + d(z,y)

Conclusion : d est une distance sur $\mathbb{R}_+^*$

b) Déterminer la boule de $\mathbb{R}_+^*$ de centre 1 et de rayon r pour la distance d

$\forall$ x $\in\mathbb{R}_+^*$, on a : x $\in B_d(1,r) \Leftrightarrow d(1,x) < r$

$\Leftrightarrow |1 - \frac{1}{x}| < r$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \in]1 - r; 1 + r[$

Si r $\geq$ 1, $\frac{1}{x}\in]1 - r; 1 + r[$ donc x $\in]\frac{1}{1+r}; +\infty[$, car $\frac{1}{x} > 0$

D'où $\boxed{B_d(1,r) =]\frac{1}{1+r}; +\infty[}$

Si r $\leq$1, $\frac{1}{x}\in]1 - r; 1 + r[$ soit x $\in]\frac{1}{1+r}; +\infty[$

D'où $\boxed{B_d(1,r) =]\frac{1}{1+r}; \frac{1}{1-r}[}$

c) On pose $x_n = \sqrt{n}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle de Cauchy pour d ?

On remarque que $\forall A > 0$, $\forall$ n,m$\in\mathbb{N}^*$, n,m $\geq E(\frac{4}{A^2}) + 1$, on a :

$$D(x_n,x_m) = \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_m}\right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{x_n}\right| + \left|\frac{1}{x_m}\right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\leq A$$

En effet, n,m $\geq E(\frac{4}{A^2}) + 1 \Rightarrow$ n,m $> \frac{4}{A^2}$

$$\Rightarrow \sqrt{n},\sqrt{m} > \frac{2}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}},\frac{1}{\sqrt{m}} < \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{m}} < A$$

Ainsi, $\forall A > 0$, $\exists N_A \in \mathbb{N}^*/ \forall n,m \in \mathbb{N}$, n,m $\geq N_A$, $d(x_n,x_m) \leq A$. Prendre $N_A = E(\frac{4}{A^2}) + 1$

Conclusion : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy pour d dans $\mathbb{R}_+^*$

2°)

a) Montrons que δ est une distance sur ℝ

Il s'agit encore de vérifier les trois points

- $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

On a : $\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow |e^x - e^y| = 0$

$$\Leftrightarrow e^x - e^y = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = e^y$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

- $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\delta(x,y) = \delta(y,x)$

On a : $\delta(x,y) = |e^x - e^y| = |-e^x + e^y| = |e^y - e^x| = \delta(y,x)$

- $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$, $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$

On a : $\delta(x,y) = |e^x - e^y| = |e^x - e^z + e^z - e^y|$

$$\leq |e^x - e^z| + |e^z - e^y|$$

$$\leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$$

Conclusion : δ est une distance sur ℝ

b) Décrire la boule B(0,1) relativement à δ

$\forall x\in\mathbb{R}$, $x \in B_\delta(0,1) \Leftrightarrow \delta(0,x) < 1$

$\Leftrightarrow |e^0 - e^x| < 1$

$\Leftrightarrow |e^x - 1| < 1$

$\Leftrightarrow e^x \in]0\,;2[$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty\,;\ln 2\,[$

D'où $B_\delta(0,1) =]-\infty\,;\ln 2[$

c) <u>On pose $y_n = -n$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle de Cauchy pour δ ? Est-elle convergente ? Conclure</u>

On remarque que: $\forall A > 0$, $\forall n,m \in \mathbb{N}^*$, $n,m \geq E(\ln(\frac{2}{A})) + 1$, on a :

$\delta(y_n,y_m) = |e^{y_n} - e^{y_m}|$

$= |e^{-n} - e^{-m}|$

$\leq |e^{-n}| + |e^{-m}| = e^{-m} + e^{-n}$

$\leq A$

En effet, $n,m \geq E(\ln(\frac{2}{A})) + 1 \Rightarrow n,m > \ln(\frac{2}{A})$

$\Rightarrow e^n, e^m > \frac{2}{A}$

$\Rightarrow e^{-n}, e^{-m} < \frac{A}{2}$

$\Rightarrow e^{-n} + e^{-m} < A$

Ainsi, $\forall A > 0$, $\exists N_A \in \mathbb{N} / \forall n,m \in \mathbb{N}$, $n,m \geq N_A$, $\delta(y_n,y_m) \leq A$

Prendre $N_A = \text{Sup}\{ E(\ln\frac{2}{A}) + 1\,;\,0\}$

<u>$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy pour δ dans $\mathbb{R}$</u>

$\forall\, l \in \mathbb{R}$, si on pose $A = \frac{e^l}{2}$ et $N_A = \text{Sup}\{ 1\,;\,E(\ln(\frac{2}{e^l})) + 1\}$, on a :

$A > 0$, $N_A \in \mathbb{N}$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_A\,;\, n > \ln(\frac{2}{e^l}) \Rightarrow e^n > \frac{2}{e^l}$

$\Leftrightarrow e^{-n} < \frac{e^l}{2}$

$\Leftrightarrow -e^{-n} > -\frac{e^l}{2}$

$\Leftrightarrow e^l - e^{-n} > \frac{e^l}{2}$

$\Leftrightarrow \delta(l,y_n) > \frac{e^l}{2}$ ie $\delta(l,y_n) > A$

Ainsi, $\forall\, l \in \mathbb{R}$, $\exists A > 0$, $\exists N_A \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_A$, $\delta(l,y_n) > A$. D'où l n'est pas limite de (y_n). Mais alors, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite dans $(\mathbb{R},\delta)$ ie <u>$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.</u>

<u>$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy mais non convergente : $(\mathbb{R},\delta)$ n'est pas complet.</u>

EXERCICE II :

1°) $h_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h_1(x,y) = \frac{x^2y}{x^4 - 2x^2y + 3y^2}$ est –elle prolongeable par continuité en (0,0) ?

On remarque que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h_1(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(x^2)}{x^4-2x^2(x^2)+3(x^2)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$,

Alors que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h_1(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(2x^2)}{x^4-2x^2(2x^2)+3(2x^2)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^4}{9x^4} = \frac{2}{9}$

Comme $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} h_1(x,y) \neq \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x^2}} h_1(x,hy)$, h_1 n'est pas prolongeable par continuité en (0,0)

2°) $h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h_2(x,y) = y\sin\left(\frac{x}{y}\right)$ admet-elle une limite quand (x,y) tend vers (0,0) ?

On remarque que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, |h_2(x,y)| = |y|\left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \leq |y|$

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, on a aussi $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h_2(x,y) = 0$

Donc, oui , h_2 admet une limite, égale à 0, quand (x,y) tend vers (0,0).

3°) Soit la fonction g définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$ et g(0,0)=0

a) G est-elle continue en (0,0) ?

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a :

$$\begin{aligned} |g(x,y)| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} &\leq \frac{|x^3|}{x^2+y^2} + \frac{|y^3|}{x^2+y^2} \\ &\leq \frac{|x|x^2}{x^2+y^2} + \frac{|y|y^2}{x^2+y^2} \\ &\leq |x| + |y|, car\, \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \; et\, \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1 \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (|x|+|y|) = 0$, on a

$$\underline{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0), d'où g\; est\; continue\; en\; (0,0)}$$

b) G est-elle de classe $\mathcal{C}^1$

- g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme fraction rationnel sur son ensemble de définition

De plus, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$

- $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0}\frac{g(0,t)-g(0,0)}{t} = 1$

Comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4+3x^2-2x^4}{4x^4} = \frac{1}{2} \neq \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$, on peut dire que $\frac{\partial g}{\partial x}$ n'est pas continue en (0,0).

Ainsi, g n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en (o,o), donc g n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

4°) Soient $U =]\frac{1}{3};\frac{2}{3}[\times]0;1[$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f: U \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - x + xy^2 - xy$

a) Montrer que f est strictement négative sur U

On remarque que : $\forall(x,y) \in U, \quad f(x,y) = x(x-1) + xy(y-1)$

Or $\forall(x,y) \in U$, $on a: x > 0\ et x-1 < 0, soit x(x-1) < 0$ (1)

De plus , $\forall(x,y) \in U, on a: x > 0, y > 0, y-1 < 0, soit xy(y-1) < 0$ (2)

(1)+(2) $\Rightarrow \forall(x,y) \in U, x(x-1) + xy(y-1) < 0\ ie\ f(x,y) < 0$

D'où f est strictement négative sur U.

b) Montrer que f admet un unique extremum sur U

On remarque que : $\forall(x,y) \in U, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy - x = x(2y-1)$

Or la fonction : $x \mapsto x$ est strictement positive sur $]\frac{1}{3};\frac{2}{3}[$, tandis que la fonction : $y \mapsto 2y-1$ s'annule une seule fois sur $]0;1[$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'annule une seule fois sur U.

Comme une extremum ne peut être atteint que lorsque les deux dérivées partielles s'annulent, on peut déjà dire que f admet au plus un extrémum sur U. (1)

De plus, on remarque que $\lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{3},0\right)} f(x,y) = -\frac{2}{9} = \lim_{(x,y)\to\left(\frac{2}{3},1\right)} f(x,y)$, ce qui veut dire que, sur U, f est soit constante, soit non monotone. Or f n'est pas constante, car $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas égale à 0 donc f est non-monotone.

En outre, f est continue sur U.

Mais alors, une application continue et non-monotone sur un ensemble y admet au moins un extremum. (2)

(1) Et (2) $\Rightarrow$<u>f admet exactement un extremum sur U.</u>

c) De quel type d'extremum s'agit-il ? Déterminons sa valeur

- On remarque que $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{3}{8}$, d'où

$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) < lilm_{(x,y)\to\left(\frac{1}{3},0\right)} f(x,y)$ et $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) < \lim_{(x,y)\to\left(\frac{2}{3},1\right)} f(x,y)$

Ainsi, quand (x,y) parcout U, il y a décroissance puis croissance de f comme f est continue, ceci révèle la présence d'un minimum : l'extremum unique est un minimum.

- On a : $\forall(x,y)\in U, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-1+y^2-y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2xy-x$

Ainsi ,

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1+y^2-y=0\\ x(2y-1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}, car\ x\neq 0\\ 2x-1+y^2-y=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}\\ x=\frac{5}{8}\end{cases}$$

L'extremum de f sur U vaut donc $\left(\frac{5}{8};\frac{1}{2}\right)$

d) ***Montrer que*** $\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in \boldsymbol{U},-\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{64}}\leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})<\mathbf{0}$

On sait déjà que $\forall(x,y)\in U, f(x,y)<0$

De plus, $\forall(x,y)\in U, f(x,y)\geq f\left(\frac{5}{3},\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}\left(\frac{5}{8}-1\right)+\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{25}{64}$

D'où $\forall(x,y)\in U,-\frac{25}{64}\leq f(x,y)<0$

EXERCICE III :

1) Soient les domaines $\boldsymbol{D_1}=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^2, \boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}, \boldsymbol{y}\geq\mathbf{0}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\leq\mathbf{1}\}$,

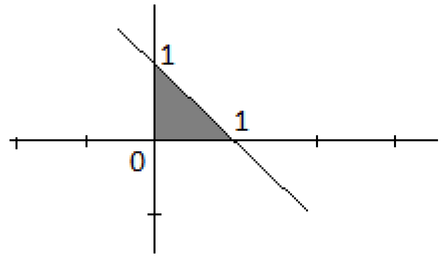
$D_2=\{(x,y)\in[0;1]\times[0,1]; x^2+y^2\geq 1\}, D_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2-y\geq 0, x^2+y^2-x\leq 0\}$

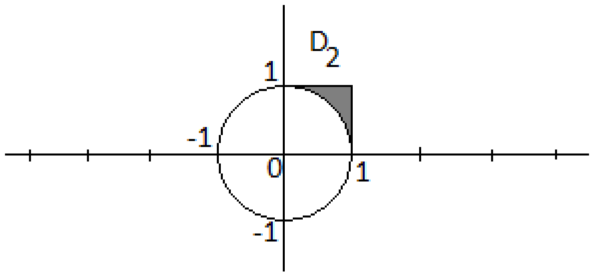
$D_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\geq 0, y\geq 0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}$ avec $a,b\in\mathbb{R}_+^*$

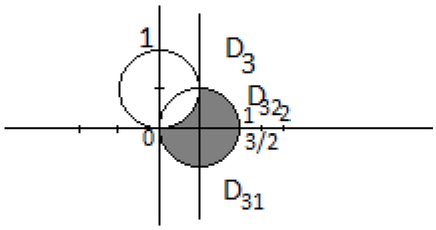
- ***Représentation des domaines***

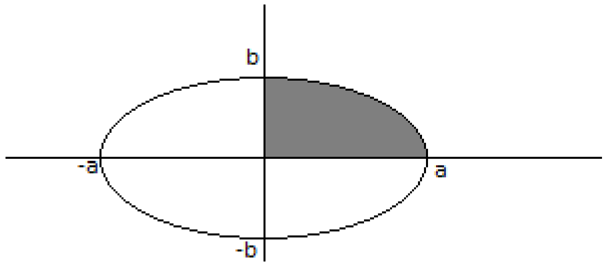
En dehors de D_3, les expression des domaines sont assez explicites

$$D_3=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\geq\frac{1}{4}; \left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\leq\frac{1}{4}\right\}$$









- ***Calcul d'intégrales :***

$$I_1 = \int\int_{D_1} (x+y)e^{-(x+y)}dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (x+y)e^{-(x+y)}dy\right]dx$$
$$= \int_0^1 \left[-(x+y+1)e^{-(x+y)}\right]dx$$
$$= \int_0^1 \left[(x+1)e^{-x} - 2e^{-1}\right]dx$$
$$= \left[-(x+2)e^{-x} - 2e^{-1}x\right]_0^1$$

$$\underline{\underline{I_1 = 2 - 5e^{-1}}}$$

$$I_2 = \int\int_{D_2} \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy = \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{xy}{1+x^2+y^2}dy\right]dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{x}{2}\ln(1+x^2+y^2)\right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{x}{2}\ln(2+x^2) - \frac{x}{2}ln2\right]dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{4}\ln(2+x^2) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\ln(2+x^2) - \frac{x^2}{4}ln2\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{4}ln3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}ln3 - \frac{1}{4}ln2 - \frac{1}{2}ln2$$
$$= \frac{3}{4}ln3 - \frac{3}{4}ln2 - \frac{1}{4}$$

$I_2 = \frac{1}{4}(3ln3 - 3ln2 - 1)$

$$I_3 = \int\int_{D_3} (x^2 + y^2)dxdy$$

Si on passe en coordonnées polaires (r,θ), par x=rcosθ et y=rsinθ , ona :

$$I_3 = \int\int_{D_3} r^2 r dr d\theta = \int\int_{D_3} r^3 dr d\theta$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} D_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - y \geq 0, x^2 + y^2 - x \leq 0\} \\ &= \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [-\pi,\pi], r^2 - rsin\theta \geq 0, r^2 - rcos\theta \leq 0\} \\ &= \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [-\pi,\pi], r \geq sin\theta, r \leq cos\theta\} \end{aligned}$$

On peut scinder D_3en une partition de deux domaines D_{31}(en-dessous de l'axe des abcisses) et D_{32} (au – dessus)

$$\boldsymbol{On\ a\ alors D_3 = \{(r,\theta) \in \mathbb{R} \times [-\pi,\pi], sin\theta \leq r \leq cos\theta\}}$$

Or , $\forall\theta \in [-\pi, -\frac{3\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \pi]$, $cos\theta < \sin\theta$, d'où $(r,\theta) \in D_3$ $(car\ r \geq 0\ et\ r \leq \cos\theta)$

$$\boldsymbol{Ainsi,\ D_3 = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]; sin\theta \leq r \leq cos\theta\right\} = D_{31} \cup D_{32}}$$

Avec $D_{32} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]; \sin\theta \leq r \leq \cos\theta\right\}$

Comme $\forall(r,\theta) \in D_{31}, sin\theta \leq 0$, on a $sin\theta \leq r \leq cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq r \leq cos\theta (car\ r \geq 0)$

Soit $D_{31} = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]; 0 \leq r \leq cos\theta$ Alors,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int\int_{D_3} r^3 dr d\theta = \int\int_{D_{31}} r^3 dr d\theta + \int\int_{D_{32}} r^3 dr d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left[\int_0^{cos\theta} r^3 dr\right] d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_{sin\theta}^{cos\theta} r^3 dr\right] d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\cos\theta} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{\sin\theta}^{cos\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left[\frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}cos2\theta + \frac{3}{8}\right] d\theta + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2\theta))d\theta \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{32}sin4\theta + \frac{1}{4}sin2\theta + \frac{30}{8}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$I_3 = \frac{3\pi}{64} + \frac{1}{3} = \frac{1}{64}(3\pi + 8)$$

$$I_4 = \int\int_{D_4} xydxdy = \int_0^a \left[\int_0^b xydy\right] dx = \int_0^a \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx$$
$$= \int_0^a \frac{b^2}{2a^2} x(a^2 - x^2)dx$$
$$= \frac{b^2}{2a^2}\left[\frac{a^2}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

$$I_4 = \frac{1}{8}a^2b^2$$

2) Calculer J

On peut considerer que Γ est paramétré par $X = 2y^2 - 1$ et Y=y

Alors , dX=4ydy et dY=dy, d'où

$$J = \int_1^0 y^2(4ydy) + (2y^2 - 1)^2 dy$$
$$= \int_0^1 (4y^4 + 4y^3 - 4y^2 + 1)dy$$
$$= \left[\frac{4}{5}y^5 + y^4 - \frac{4}{3}y^3 + y\right]_0^1$$

$$J = \frac{22}{15}$$

3) Calcul de K

Si on note D' le domaine plan défini par $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + (y - 2)^2 \leq 1\}$

On a : $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D' et -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - (y - 2)^2}\right) \leq z \leq -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - (y - 2)^2}\right)\right\}$

D'où

$$K=\int\int_{D'}\left[\int_{-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-(y-2)^2}\right)}^{-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-(y-2)^2}\right)} xyzdz\right]dxdy$$

$$=\int\int_{D'}\left[\frac{1}{2}xyz^2\right]_{-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-(y-2)^2}\right)}^{-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-(y-2)^2}\right)} dxdy$$

$$=\int\int_{D'}-\frac{1}{2}xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-(y-2)^2dxdy}$$

$$=\int\int_{D'}-\frac{1}{2}\times(y-2)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-(y-2)^2\,dxdy}-\int\int_{D'}x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-(y-2)^2\,dxdy}$$

Comme

$$\int\int_{D'}-\frac{1}{2}\times(y-2)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-(y-2)^2\,dxdy}=\int_{-a}^{a}\left[\int_{2-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{2+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}-\frac{1}{2}\times(y-2)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-(y-2)^2dy}\right]dx$$

$$=\int_{-a}^{a}\left[\frac{x}{6}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-(y-2)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{2-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{2+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}dx$$

$$=\int_{-a}^{a}0dx=0 \quad et$$

Et

$$\boldsymbol{\int\int_{D'}x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-(y-2)^2\,dxdy}=\int_{-a}^{a}\left[\int_{2-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{2+\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-(y-2)^2dy}\right]dx}$$

$$\boldsymbol{=\int_{-a}^{a}\left[\int_{2-R_x}^{2+R_x}x\sqrt{R_x^2-(y-2)^2}dy\right]dx\,,avec\ R_x=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

$$\boldsymbol{=\int_{-a}^{a}\left[\int_{2-R_x}^{2+R_x}xR_x\sqrt{1-\left(\frac{y-2}{R_x}\right)^2}dy\right]dx}$$

$$\boldsymbol{=\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}xR_x^2\cos^2\theta d\theta\right]dx\,,avec\ y=2+R_x sin\theta}$$

$$\boldsymbol{=\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\times R_x^2(1+cos2\theta)d\theta\right]dx}$$

$$\boldsymbol{=\int_{(-a)}^{a}\frac{1}{2}\times R_x^2\left[\theta+\frac{1}{2}sin2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx}$$

$$\boldsymbol{=\int_{-a}^{a}\frac{\pi}{2}\times R_x^2dx=\int_{-a}^{a}\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\left[\frac{\pi}{4}x^2-\frac{\pi}{8a^2}x^4\right]_{-a}^{a}=0}$$

On a encore $\underline{\underline{K=0}}$

CORRECTION D EXAMEN D ANALYSE DES ESPACES VECTORIELS 2012-2013

Exercice 1

1) a → 1.c identique au CC.

1. c) on donne $(x_n) : x_n = n + 2$

Nature de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^*$

(x_n) N'est pas convergente

Preuve : pareille qu'au CC mas en prenant

$$n_\varepsilon = \sup\left\{1; E\left(3(A+\varepsilon) + \frac{1}{l} - 2\right) + 1\right\}$$

Exercice 2

1) On donne $\varphi: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

- Approchons φ suivant la direction $y = x$

  On a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4+x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$
- Approchons φ suivant la direction $y = 2x$

  On a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4+4x^2}{5x^2} = \frac{4}{5} \neq \frac{1}{2}$

  Donc φ n'admet pas de limite en (0,0) et par conséquent n'est pas prolongeable en (0,0)

2) On donne $\psi: \mathbb{R}\backslash\{1\} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to \frac{\sin(x-1)^2 + siny^2}{x^2 + y = 2 - 2x + 1}$$

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

$\psi(x,y) = \frac{(\sin(x-1)^2 + \sin y^2)}{(x-1)^2+y^2}$

Lorsque $(x,y) \to (1,0)$ on a :

$$\varphi(x,y) = \left(\frac{\left((x-1)^2+y^2-\left(\frac{(x-1)^6}{6}+\frac{y^6}{6}\right)\right)}{(x-1)^2+y^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{6}[(x-1)^4 + y^4 - y^2(x-1)^2]$$

$$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(1,0)} \psi(x,y) = 1$$

3) On donne : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to x^2 + y^4$$

$g: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to x(lnx)^2 + xy^2$$

a) Point critique de f

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc l'unique point critique de f est $A(0,0)$

$\rightarrow$ Nature de $A(0,0)$

$$r = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\right)(0,0) = 2$$

$$s = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(0,0) = 0$$

$$t = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(0,0) = 0$$

$\Delta = rt - s^2 = 0$ Et $t + r = 2 > 0$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ On a $f(x,y) = x^2 + y^4 \geq 0 = f(0,0)$

Donc le point A est un minimum global de f.

b) Point critique de g

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x,y)=0\\ \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(x,y)=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(lnx)^2+2lnx+y^2=0(1)\\ 2xy=0(2)\end{cases}$$

$(2) \Rightarrow y=0$ car $x \in \mathbb{R}_+^*$

$(1) \Rightarrow (lnx)[\ln(x)+2]=0$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=e^{-2}\\ ou\\ x=1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Les points critiques sont $A(e^{-2},0)$ $B(1{,}0)$

$\rightarrow$ Nature de $A(e^{-2},0)$

$$r=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}g\right)(e^{-2},0)=\frac{2lne^{-2}}{e^{-2}}+\frac{2}{e^{-2}}=-2e^2$$

$$s=\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}g\right)(e^{-2},0)=0$$

$$t=\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}g\right)(e^{-2},0)=2e^{-2}$$

$$\Delta=rt-s^2=-4<0$$

g N'admet pas d'extremum en A

$\rightarrow$ Nature de $B(1{,}0)$

$$\begin{vmatrix}t=2\\ r=2\\ s=0\end{vmatrix} \Rightarrow \Delta=4>0 \quad r+t=4>0$$

g admet un minimum local en $B(0{,}1)$

4) On donne

$h: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \rightarrow \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

a) Montrons que h est prolongeable par continuité en (0,0)

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, 0 \leq |h(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x||y|}{|y|} \leq |x|$$

Or $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |h(x,y)| = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |h(x,y)| = 0$

Donc h est prolongeable par continuité en (0,0) et on a :

$\tilde{h}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \to \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \; si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \; si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) Différentiabilité de $\tilde{h}$ sur $\mathbb{R}^2$

$\tilde{h}$ Est différentiable sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

Etude de cas

$\to$ *suivant* $\overrightarrow{e_x}$

$$\lim_{t\to0} \frac{\tilde{h}\left((o,o)+t\overrightarrow{e_x}\right)-\tilde{h}(o,o)}{t}$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{\tilde{h}(t,0)-0}{t}$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{\tilde{h}(t,0)}{t} = 0$$

$\to$ *suivant* $\overrightarrow{e_y}$

$$\lim_{t\to0} \frac{\tilde{h}\left((o,o)+t\overrightarrow{e_y}\right)-\tilde{h}(o,o)}{t}$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{\tilde{h}(t,0)-0}{t}$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{\tilde{h}(t,0)}{t} = 0$$

$\to$ Vérifions que $\tilde{h}$ est dérivable en (0 ,0).

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left(\tilde{h}((0,0)+(h,x)) - \tilde{h}(0,0) - \left(D_{\tilde{h}}(0,0)(h,k)\right)\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Avec $\left(D_{\tilde{h}}(0,0)(h,k)\right) = 0$

Posons $H = \frac{\tilde{h}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$

$\rightarrow$ Calculons $\lim_{(h,k)\to(0,0)} H(h,k)$

$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$

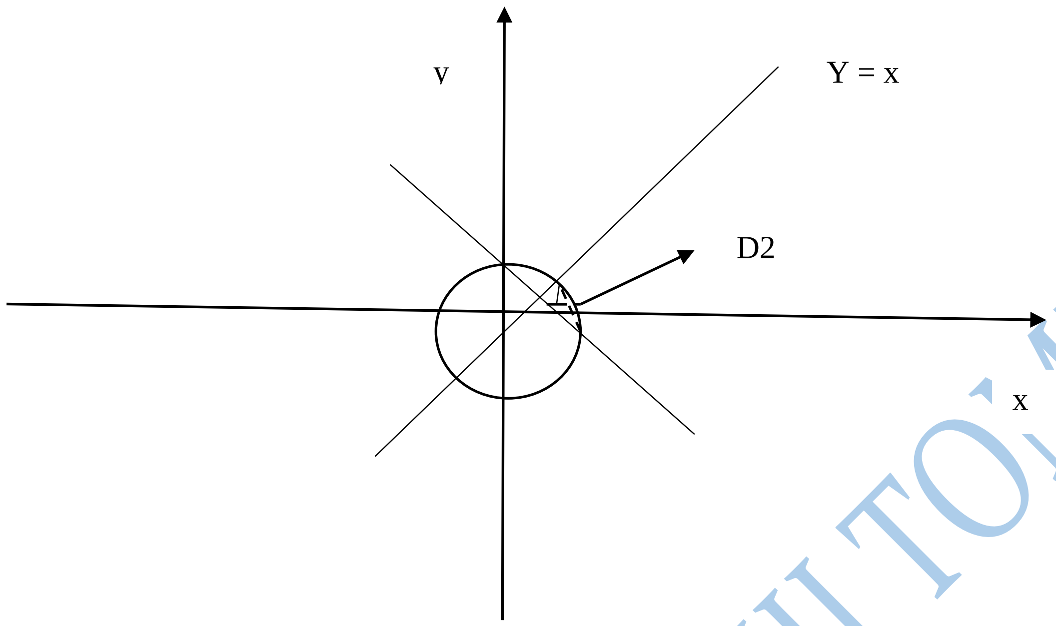
- En approchant H par $h = k$
  $\lim_{(h,k)\to(0,0)} H(h,k) = \frac{1}{2}$
- En approchant H par $h = -k$

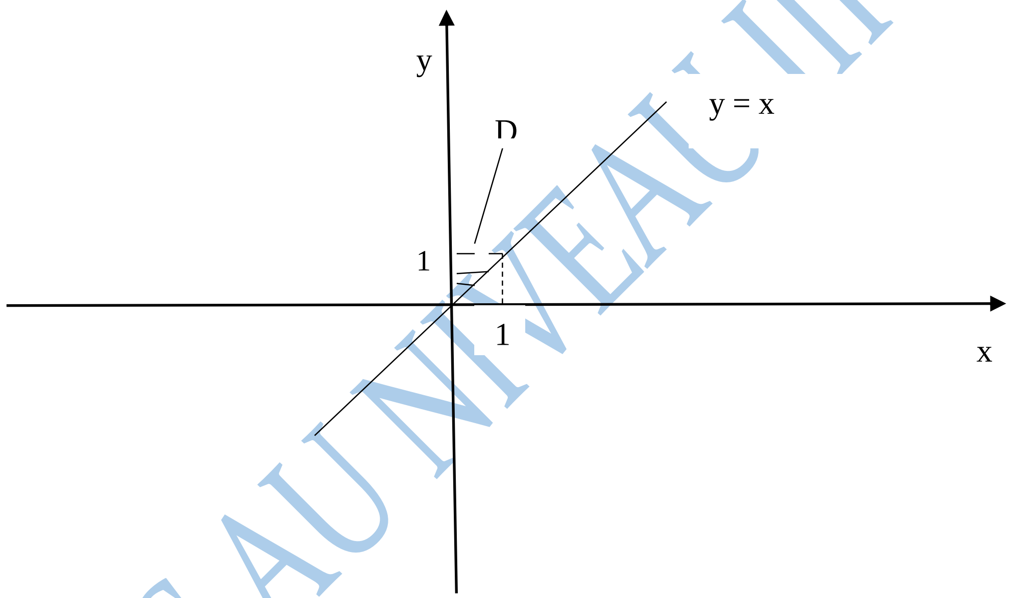
  On a $\lim_{(h,k)\to(0,0)} H(h,k) = -\frac{1}{2}$

  Donc $\lim_{(h,k)\to(0,0)} H(h,k)$ n'existe pas et par conséquent $\tilde{h}$ n'est pas dérivable en (0,0)

Exercice 3

1) On donne :
   $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq y \leq 1\}$
   $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y \geq 1, x+y \geq 1, x^2+y^2 \leq 1, y \leq x\}$
   a) Représentation D_1 et D_2





b) Calcul de $I_1 = \int\int_{D1} xe^{-y}dxdy$

$I_1 = \int_0^1 e^{-y}\left(\int_0^y xdx\right)dy$

$= \int_0^1 \frac{e^{-y}}{2} y^2 dy$

$= \frac{1}{2}\int_0^1 y^2 e^{-y} dy$

$= \frac{1}{2}[[-y^2e^{-y}]_0^1 + 2]_0^1 ye^{-y}dy]$

$= \frac{1}{2}[-e^{-1} + 2(-e^{-1} + 1 - e^{-1})]$

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

$I_1 = 1 - \frac{3}{2}e^{-1}$

Calcul de $I_2 = \int \int_{D2} (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dxdy$

$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dy)\, dx$

Posons $x = rcos\theta, y = rsin\theta$

On remarque que $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Ainsi $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} r(r^2)^{-\frac{3}{2}}\, dr\, d\theta$

$I_2 = \left(\frac{\pi}{4}\right) \times \left[-\frac{1}{r}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}$

$I_2 = \frac{\pi}{4}$

2) Calcul de $J = \int \int \int_{\Delta} \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$

$\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z\ compri\ entre\ 4\ et\ x^2 + y^2\}$

$J = \int \int_{\mathcal{C}} \int_{\Delta} \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$ où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre 0 et de rayon $r = 2$

Posons $\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$

$j = \int \int_{\mathcal{C}} (\int_4^{r^2} r^2 dz)\, drd\theta$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (r^2 - 4) r^2 dr\, d\theta$

$= (2\pi) \times (\frac{1}{5} \times 2^5 - \frac{4}{3} \times 2^3)$

$J = -\frac{128\pi}{15}$

3) On donne $V = (xy, x^2, x^2y^2z)$

Calcul de $\phi = \int\int_S \vec{V} d\vec{S}$

D'après Green-Ostrogradski, on :

$\phi = \int\int\int_V (div\, V)\, dxdydz$

Or $div\, V = y + x^2y^2$

$\Rightarrow \phi = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(y + x^2y^2)\, dxdydz$

$= 2\int_{-1}^{1}\left[yx + \frac{y^2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} dy$

$= 4\left[\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{9}\right]_{-1}^{1}$

$\phi = 8/9$

4)a) coordonnées du centre et rayon

Soit $(\mathcal{D})$ la droite orthogonal au plan $(\mathcal{P})$ et passant par O centre de la sphère, on a :

$\forall M(x, y, z), M \in (\mathcal{D})\ ssi\ x = y = z$

Or le centre $\Omega(x_0, y_0, z_0) = (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{D})$

$\Rightarrow x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \Omega(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$\rightarrow$ rayon r

On a $r^2 + O\Omega^2 = 1^2$

$r = \sqrt{1 - O\Omega^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$r = \frac{\sqrt{2}}{3}$

b) Paramétrisation de (Γ)

Désignons par $(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ le nouveau repère dans lequel

$\overrightarrow{e_3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \overrightarrow{e_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \overrightarrow{e_1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{X}{\sqrt{6}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2X}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \quad car\ \Omega(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \\ z = \frac{X}{\sqrt{6}} - \frac{Y}{\sqrt{2}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \end{cases}$$

Or dans le nouveau repère tous les points des cercles vérifient :

$$\begin{cases} Z = 0 \\ X = \sqrt{\frac{2}{3}}\,cos\theta \\ Y = \sqrt{\frac{2}{3}}\,sin\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

c) Calcul de $K = \int_\Gamma (y+z)dx + (x+y)dz$

$$dx = 1/2\left(-sin\theta + \sqrt{3}cos\theta\right)d\theta$$

$$dz = \frac{1}{2}\left(-sin\theta - \sqrt{3}cos\theta\right)d\theta$$

$$K = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{3}cos2\theta d\theta$$

$$= 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}[sin2\theta]_0^{2\pi} = 0$$

On pouvait le remarque directement avec la formule de Green-Riemann.

$$K = \int_\Gamma (y+z)dx + (x+y)dz$$

$$= \int \int_\Delta \frac{\partial}{\partial z}(y+z) - \frac{\partial}{\partial x}(x+y)dxdz$$

$$= \int \int_D (1-1)dxdz = 0$$

$$K = 0$$

ANALYSE NUMERIQUE

« la réuissite se trouve au bout des souffrances et de la persevérance »

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

SUJETS D'ANALYSE NUMERIQUE

EXAMEN D'ANALYSE NUMERIQUE 2002-2003

EXERCICE I :

Soient donnés x_0 , … , $x_n \in \Re$,2 à 2 distincts ,et $y_0 = f(x_0)$, … , $y_n = f(x_n) \in \Re$ ($n \in N$).

On fixe $x \in \Re$;et on s'intéresse à l'évaluation de ($pL\ x_0 \ldots x_n\ f$)(x) par l'algorithme d'Aitken.

1) Lorsque x=0, ce cout numérique peut etre réduit Comment ?
2) a) En adaptant ce qui a été fait en classe pour les différences divisées, écrire une procédure informatique mettant en œuvre cet algorithme pour x quelconque.

b) Ecrire la version simplifiée de cet algorithme pour x=0 .

EXERCICE 2

Soient $[a , b] \subset \Re$ ($a<b$) et f :$[a , b] \rightarrow \Re$.On pose : $I(f ;[a , b]),=\int_a^b f(x)dx$.

1) a)On considère les 2 estimations pratiques de l'erreur d'intégration numérique dans la formule du trapèze sur [a , b] vues en cours, l'une utilisant la formule de Simpson comme quadrature auxiliaire, l'autre celle du point central. Comparer les valeurs fournies par ces deux approximations de cette erreur.

b) En déduire l'approximation de I(f ; [a , b]), par la formule de Simpson en fonction de celle respectives de **I** (f ; [a , b]) par la formule du trapèze et celle du point milieu.

2) Compte tenu de ce qui précède :

a) On évalue numériquement **I** (f ; [a , b]), avec une précision fixée d'avance, suivant l'une des 2 approches algorithmiques vues en cours (i.e , subdivision récursive ou séquentielle), en utilisant la formule du trapèze comme quadrature élémentaire de base , et et celle du point central pour contrôler l'erreur . A la fin de l'algorithme, quelle est l'approximation la plus pertinente à proposer pour I(f ;[a , b]) ?

b) En quoi ceci serait-il particulièrement bénéfique dans le cas d'un algorithme par subdivision séquentielle ?

PROBLEME

Soit à résoudre un système de Cramer dans $\Re^n$, (S) : A.X = Y, avec A matrice tri diagonale . Les coefficients a_{ij} de A sont donnés, ainsi que les coordonnées y_i du vecteur Y . Les inconnues sont Les coordonnées x_i du vecteur X.

I - Une matrice tri diagonale (05 points)

II-Méthode de Gauss sans permutation

On suppose ici que l'élimination de Gauss dans A peut se faire sans aucune permutation.

1) a) Ecrire alors la version simplifiée de l'algorithme d'élimination de Gauss pertinente pour (**S**) ici.

N.B : de tout évidence, une boucle POUR dans quelle l'indice de parcours ne peut prendre qu'une seule valeur (voir même 2) est une instruction informatique de peu d'intérêt.

b) Cout numérique de cet algorithme ?

2) a) Représenter l'aspect de la matrice A à la sortie de cette phase.

b) En déduire la version simplifiée de l'algorithme de remontée appropriée pour résoudre le système triangulaire équivalent à **(S)** issu de cette élimination.

3) Cout de la résolution d'un système de Cramer triangulaire par la méthode de Gauss sans permutation.

III-**Méthode de Gauss avec stratégie du pivot partiel**

On souhaite ici résoudre **(S)** en utilisant la méthode de Gauss avec stratégie du pivot partiel.

1) **a) Pour bien repérer la situation,** représenter A en permutant des équations 1 et 2 du système.

b) Si on procède à l'élimination sur la colonne 1 , après cette permutation , que devient l'aspect de A ?

2) a) Ecrire alors la version simplifiée de l'algorithme d'élimination de Gauss pertinente pour **(S)** ici.

b) Expliquer pourquoi le cout numérique de l'algorithme d'élimination peut varier d'un tri diagonale à l'autre.

c) Evaluer le cout maximal possible. d) Et quel est son cout minimal ?

3) a) Représenter l'aspect de la matrice A à la sortie de cette phase

b) En déduire la version simplifiée de l'algorithme de remontée appropriée pour résoudre le système triangulaire équivalent à (S) issu de cette élimination.

c) Cout numérique de cet algorithme ?

4^0) Cout numérique maximal de la résolution d'un système de Cramer tri diagonal par la méthode de gauss avec stratégie du pivot partiel ?

Iv- **Problème de stockage en mémoire et TURBO6PASCAL**

L'objectif ici est de traduire les algorithmes précédents par des procédures **TURBO-PASCAL** appropriées .cependant pour y arriver il est clair qu'il structurellement inefficace de bloquer l'espace réservé à un tableau n*n de réels en mémoire d'ordinateurs pour stocker une matrice tri diagonale. Un tableau à 3*n éléments suffit pour ce faire.

Dans les deux procédures **TURBO-PASCAL** demandées ci-après, on notera le tableau en question par **TA.**

Celui-ci sera de type tableau : **TABLEAU 3n**, type qui aura été créé dans la partie des déclarations des programmes par :

Const n=100 ; type vecteur = array[1...n] of real ; tabkeau3n = [1..1] of vecteur ;

N.B : Chacun des 2 procédures doit être autonome en ne faisant appel à aucune procédure externe , ni comporter de sous-procédures en son sein.

1) Pourquoi et comment **TA** peut-il effectivement contenir l'information pertinente relative à A ?

2) Adapter alors ce qui a été fait en II pour écrire une procédure **TURBO-PASCAL** prenant en entrée les 2 tableaux **TA** et **Y (supposés** remplis dans le programme principal) et renvoyant la solution **X**du système tri diagonalA.X = Y calculée par la méthode de Gauss avec stratégie du pivot partiel.

EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE TEST N^{0}1 2007-2008

.

EXERCICE I (3 POINTS)

I – Qu'est-ce que l'Analyse Numérique ?

II – Qu'est-ce que le *calcul scientifique* ?

III – Qu'est-ce qu'un *algorithme* ?

EXERCICE 2 (4 POINTS)

1^0) Quelle est l'écriture contemporaine des entiers et quelle est sa signification mathématique ?

2^0) a) Expliquer pourquoi il faut y ajouter une contrainte pour éviter certaines ambiguïtés.

b) Quelle est la contrainte appropriée pour y arriver ?

c) Ceci résout-il toutes les ambiguïtés dans ce mode d'écriture des entiers ?

3^0) a) Pourquoi les entiers peuvent-ils être stockes, en général, en valeur exact en mémoire d'ordinateur ?

b) Il y a quand même une limitation a cela. Laquelle ?

EXERCICE 3 (3,5 POINTS)

I – Quel est le réel qui s'écrit -0,20201111….. (i.e. des 1 jusqu'à l'infini) en base 3 ?

II-Le réel a = 31,417819 est une approximation d'une quantité numérique inconnue avec une incertitude relative < 10^{-5}.

1^0) On est alors sur que la vrai valeur de a appartient a quelle intervalle de $\mathbb{R}$?

2^0) Alors on peut dire que a ≈ ?

PROBLEME(12 POINTS)

Soit f : $\mathbb{R}, \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $x_0>0$. On suppose qu'on sait évaluer f en tout point, mais pas sa dérivée. Pour approcher cette dérivée en x_0, on prend $h \ll petit \gg et > 0, et\ on\ adopte$

$$d(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Comme approximation de $d_0 = f'(x_0)$. Approximation qu'on évalue alors par ordinateur.

I - 1⁰) a) Quel résultat théorique justifie cette approximation ?

b) Montrer que si h est suffisamment petit et f 2 fois dérivable, alors l'erreur relative dans l'approximation de d_0 par$d(h)$ vaut approximativement : $h.\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)}$

2⁰) Cependant, il faudra évaluer concrètement $d(h)$ en machine.

a) Expliquer alors pourquoi il existe un $h_0>0$ (qu'on ne cherchera pas à préciser ici) tel que si on prend $h<h_0$, la machine va systématiquement renvoyer comme résultat : $d(h) = 0$.

b) Ceci est embêtant. Pourquoi ?

c) Justifier l'approximation grossière : $h_0 \approx x_0 + \varepsilon_R$, ou$\varepsilon_R$ est l'epsilon-machine.

3⁰) a) Mais même si le problème précèdent n'existait pas, la fonction f sera évaluée en machine (nécessairement) avec une certaine erreur, et ce en tout point. On alors ε_1 *et* $\varepsilon_2$les erreurs relatives respectives dans le calcul machine de $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$. Montrer que si h est pris trop petit, et même si les opérations dans le calcul en machine de $d(h)$ sont sans erreur d'arrondi, il s'en suivra une erreur relative sur le calcul en machine de $d(h)$ approximativement égale a : $\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \cdot \frac{\varepsilon 2-\varepsilon 1}{h}$

b) La aussi, c'est embêtant. Pourquoi ?

4⁰) Donner une approximation de l'erreur relative due a l'approximation finale de d_0 par $d(h)$

II – L'étude précédente montre que 2 types d'erreurs se comportent essentiellement de manière antagoniste en calcul scientifique, i.e. quand on essaye de réduire l'une, on augmente l'autre, et vice versa.

1⁰) Quels sont ces 2 types d'erreur ?

2⁰) Comment voit-on cet antagonisme dans l'étude qui précède ?

III – La manœuvre qui consiste a approcher $d_0$par $d(h)$ est un cas particulier d'une situation générale en Analyse Numérique.

1⁰) De quelle situation s'agit-il et quelle en est la motivation ?

2⁰) Citer un autre exemple de cette situation.

EPREUVE D'ANALYSE NUMERIQUE TEST N°2 2007-2008

EXERCICE I (12 POINTS)

L'objectif est la résolution numérique efficace d'un système de cramer dans $\mathbb{R}^n$, (S) : A.X = b par la *méthode de Gauss* avec *stratégie du pivot partiel.*

1⁰) Expliquer en quoi consistent les 2 phases de méthode.

2⁰) a) Ecrire une procédure algorithmique PIVOT-PARTIEL mettant en œuvre la stratégie du *pivot partiel.*

b) Pourquoi a-y-on besoin d'une telle stratégie de CHOIX du pivot dans la méthode de Gauss ?

3⁰) a) Ecrire une procédure algorithmique ELIMINATION GAUSS effectuant le travail d'élimination dans (S).

b) Cout numérique de cet algorithme ?

c) Au cours de cet algorithme, l'élimination sur la colonne *k* vise a annuler les coefficients a_{ij} pour i >*k*, tout en préservant la solution du système. Pourtant ces coefficients ne sont pas explicitement mis a zéro. Ceci n'est pas gênant pour la suite. Pourquoi ?

4⁰) a) Quel est l'aspect de la matrice **A** au sortir de la procédure ELIMINATION GAUSS ?

b) Ecrire alors une procédure algorithmique permettant d'achever la résolution de (S).

c) Cout numérique de cet algorithme ?

5⁰) a) Ecrire une procédure algorithmique METHODE GAUSS pour la résolution globale de (S).

b) Cout numérique de cet algorithme ?

EXERCICE 2 (8 POINTS)

Objectif : Approcher une fonction $f : [a\ ,\ b]\mathbb{R} \to$ par *P*, *son polynôme d'interprétation d'Hermite* basé sur $y_0 = f(x_0)$, $dy_0 = f'(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$, $dy_3 = f'(x_3)$, ou : $x_0 = a$, $x_1 = \frac{2a + B}{3}$, $x_2 = \frac{a + 2b}{3}$, $x_3 = b$.

NOTA : Ci-après, chaque fois que c'est utile, on supposera *f* aussi dérivable que nécessaire.

1⁰) Quel est le degré maximal possible du polynôme *P* ?

2⁰) Montrer que l'erreur globale de cette approximation de f sur $[a\ ,\ b]$ par *P* est majorée par $C_1.C_2.\backslash(f).h^p$. *où* p est une constante entière, C_1 est une constante universelle, C_2 est une constante dépendante de f, toutes les 3 à préciser.

NOTA : ***Un bonus significatif pour une valeur de*** C_1 ***aussi petite que possible.***

3⁰) a) Construire ***P*** sous la forme de Newton pour les données suivantes :

$a = -1$, $b = 2$, $y_0 = 0$, $dy_0 = 10$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 57$, $dy_3 = 244$.

a) Ces données correspondent a la fonction : $f(x) = x^7 - x^6 - x^3 - 1$.
En déduire une majoration de l'erreur de l'approximation de *f* par *P* sur [-1, 2].

EXAMEN D'ANALYSE NUMERIQUE 2007-2008

.

PROBLEME I (11 points)

L'objectif ici est la résolution numérique, par la *méthode de Cholesky*, d'un système de cramer dans $\mathbb{R}^n$,

$$(S) : A.X = b.$$

I – Préliminaires (2 POINTS)

1⁰) a) Pour qu'une telle résolution soit possible, il faut que la matrice A possède une certaine propriété. Laquelle ?

b) Quand dit-on qu'une matrice possède cette propriété ?

2⁰) Pourquoi dit-on que la *méthode de Cholesky* est une méthode par factorisation ?

II – Phase de factorisation (6 POINTS).

La phase de *factorisation* de la *méthode de Cholesky* consiste essentiellement a calculer les coefficients l_{ij} d'une certaine matrice L a partir de la donnée de ceux a_{ij} de A.

1⁰) a) Etablir la relation mathématique existant les coefficients de ces 2 matrices.

b) Effectuer alors l'analyse mathématique pour obtenir les formules de calcul des l_{ij} a partir des a_{ij}.

2⁰) a) En déduire une procédure algorithmique FACTO_CHOLESKY effectuant la phase de factorisation de la *méthode de Cholesky*.

b) Cout numérique de cet algorithme ?

III – Phase de résolution et bilan global (3 POINTS)

1⁰) a) Ecrire une procédure algorithmique SOLVE_CHOLESKY permettant d'achever la résolution de (S) en utilisant le résultat de la phase de factorisation précédente et n'appelant aucune procédure externe.

b) Cout numérique de cet algorithme ?

2⁰) a) Ecrire une procédure algorithmique METHODE_CHOLESKY pour la résolution globale de (S).

b) Cout numérique de cet algorithme ?

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

IV – Partie subsidiaire : Problèmes de stockage (+1 POINT)

Dans les procédures algorithmiques précédentes, était-il indispensable d'avoir un tableau pour contenir la matrice L ? Justifier (brièvement mais clairement) la réponse donnée.

PROBLEME 2 (10 points)

Dans ce qui suit, on pose : $\boldsymbol{I}\,(f, [a\,,b]\,) \approx \int_a^b f(x)dx$.

I – Quadrature élémentaire de Simpson (notée Q^S) sur [a, b] (7.5 POINTS)

1⁰) Par quel type d'aire approche-t-on l'intégrale $\boldsymbol{I}\,(f, [a\,,b]\,)$ dans cette quadrature ?

Esquisser un graphique illustratif et lisible pour motiver la réponse donnée.

2⁰) Construire explicitement cette quadrature sur [a, b], puis déterminer son ordre.

3⁰) a) Montrer que si $f \in C^4([a, b])$, alors il existe $\xi_1 \in [a, b]$ tel que :

$$E\,(Q^3 : f,\ [a,b]) \ =\ A_1\,.\,(b-a)^5.\, f^{(4)}(\zeta_1),$$ ou A_1 est une *constante universelle* a préciser.

b) Effectuer un *développement limite* de $E\,(Q^5 : f\,,[a\,,b]\,)$ lorsque $b - a \longrightarrow 0$, avec reste en $Q(b-a)^7$, sous une hypothèse a préciser.

4⁰) En réalité, la quadrature de Simpson ainsi étudie fait partie d'une famille connue de quadrature qui suit optimales dans leur catégorie. De quelle famille de quadrature s'agit-il ? Justifier la réponse donnée.

5⁰) On rappelle que la suite (L_n) des *polynôme de Legendre* est donnée par les relations :

$$L_0(x) = 1,\quad L_1(x) = x,\quad \text{et}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^+ ,$$

$$L_{n+1}(x) = x.\,L_n(x) - \frac{n^2}{4n^2-1}\,.\,L_{n-1}(x)$$

a) Construire la *quadrature élémentaire de Gauss-Legendre* sur $[a\,,b]$ qui est de même ordre que Q^5.

b) dans la suite, on la notera $Q^{G.Leg}$ et ou admettra que, sous la même hypothèse qu'en **3⁰) a),** on a :

$$\exists\, \zeta_2 \in [a\,,b] \qquad E\,(Q^{G.Leg} : f\,,[a\,,b]) \ =\ f^{(4)}(\zeta_2)\ .\ \frac{(b-a)^5}{4320}$$

En déduire (*sans calculs*) un *développement limite* de $E\,(\,Q^{G.Leg} : f\,,[a\,,b]\,)$ lorsque b – a → 0, avec reste en $0(b-a)^7$, sous une hypothèse à préciser.

6⁰) Comment peut-on s'aider de Q^S et $Q^{G.Leg}$ pour obtenir respectivement :

a) une approximation aisément calculable de l'erreur E (Q^5 ; *f*, $[a , b]$) :

b) une approximation de I (*f* , $[a , b]$) meilleure a la fois que Q^5 (*f* , $[a , b]$) et $Q^{G.Leg}$ (*f* , $[a , b]$).

Ii⁰) – Intégration numérique adaptive de Simpson sur $[a , b]$ (2,5 Points).

1⁰) Ecrire un *algorithme* calculant une *valeur approchée* de I (*f* , $[a , b]$ en construisant de manière *récursive*, une subdivision σ de $[a , b]$ garantissant approximativement une *incertitude absolue globale* ne dépassant pas une tolérance. $\in > 0$ fixe d'avance (et entrée comme paramètre), et ce en prenant :

(i) Q^S comme *quadrature élémentaire de base* ;

(ii) $Q^{G.Leg}$ comme *quadrature élémentaire auxiliaire* pour *Controller l'erreur* dans Q^S

2⁰) Dans l'algorithme précèdent, lorsqu'on ajoute un nouveau point a la subdivision, de combien est sensiblement réduite l'*erreur d'intégrations* dans le sous-intervalle de la subdivision qui contenait ce point ? Justifier la réponse donnée

III – Partie subsidiaire : incertitude relative (+ 1 Point)

1⁰) Que faudrait-il changer dans l'algorithme du **II** ci-dessus pour garantir approximativement plutôt une *incertitude relative globale* pas une tolérance $\epsilon \in]0 , 1[$ *fixée d'avance ?*

2⁰) Pour au moins deux raisons différentes, cette version modifiée de l'algorithme serait préférable. Pourquoi ?

RATTRAPAGE D'ANALYSE NUMERIQUE 2007-2008

.

EXERCICE I (5 points)

Soit $\mathcal{R} = \mathcal{R}(b\ ;\ L\ ;\ e_{min}\ ;\ e_{max}\ )$ un système de représentation des réels a virgule flottante normalisée sur L chiffres significatifs en base b. On note $\mathcal{R}_+^*$ l'ensemble des éléments >0 de $\mathcal{R}$

1⁰) a) Quel est le plus grand élément M de $\mathcal{R}$?

b) Et le plus petit élément m de $\mathcal{R}_+^*$?

2⁰) a) Quel est le cardinal de $\mathcal{R}_+^*$?

b) Et celui de $\mathcal{R}$?

3⁰) a) Donner la représentation dans $\mathcal{R}$ du nombre.

b) Donner $succ_R(1)$, le successeur de 1 dans $\mathcal{R}$ dans l'ordre numérique naturel.

NB : On donnera 2 expressions pour $succ_R(1)$: **1**- son écriture dans $\mathcal{R}$. **2-** sous la forme 1 + a.

C) Donner $pred_R(1)$, le prédécesseur de 1 dans $\mathcal{R}$ dans l'ordre numérique naturel.

NB : On donnera 2 expressions de $pred_R(1)$: 1- son écriture dans $\mathcal{R}$. **2-** sous la forme 1 – b.

EXERCICE 2 (5 POINTS)

Objectif : Approcher une fonction $f : [a\ ,\ b] \longrightarrow$ R par P, *son polynôme d'interprétation d'Hermite* base sur $y_0 = f\,(x_0)$, $y_1 = f\ (x_1)$ $dy_2 = f\,'(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ou : $x_0 = \frac{3a + 2B}{5}$, $x_1 = \frac{a + b}{2}$, $x_2 = \frac{2a + 3a}{5}$

NOTA : Ci-après, chaque fois que c'est utile, on supposera f aussi dérivable que nécessaire.

1⁰) Quel est le degré maximal possible du polynôme P ?

2⁰) Montrer que l'erreur globale de cette approximation de f sur $[a\ ,\ b]$ par P est majorée par $C_1.C_2.\backslash(f).h^p$. *où* p est une constante entière, C_1 est une constante universelle, C_2 est une constante dépendante de f, toutes les 3 à préciser.

NOTA : Un bonus significatif pour une valeur de C_1 aussi petite que possible.

EXERCICE 3 (11 POINTS)

Dans ce qui suit, on pose : $I\,(f, [a\,,b]) \approx \int_a^b f(x)dx$.

I - Une première quadrature élémentaire sur $\lfloor a\,,\ b \rfloor$: (5 points),

On considère ici la *quadrature élémentaire d'intégration numérique* :

$$I\,(f, [a\,,b]) \approx w_0\, f\left(\frac{11a+b}{12}\right) + w_1\, f\left(\frac{3a+7b}{10}\right) \qquad \textbf{(Q.1)}$$

1^0) a) Exprimer le principe de la construction de l'approximation **(Q.1)**

b) Par quel type d'aire approche-t-on l'intégrale $I\,(f, [a\,,b])$ dans cette quadrature ?

Esquisser un graphique illustratif et lisible pour motiver la réponse donnée.

2^0) Construire explicitement cette quadrature sur [a , b] puis déterminer son ordre.

3^0) Effectuer un *développement limite* de l'erreur associée à **(Q.1)** lorsque $b - a \longrightarrow 0$ avec reste en $0(b-a)^5$, sous une hypothèse a préciser.

II - Une deuxième quadrature élémentaire sur $\lfloor a\,,b \rfloor$ (6 Points).

On considère ici la *quadrature élémentaire d'intégration numérique :*

$$I\,(f,[a\,,b]) \approx w_0\, f\left(\frac{7a+3b}{10}\right) + w_1\, f\left(\frac{a+11b}{12}\right) \qquad \textbf{(Q.2)}$$

1^0) a) Construire explicitement cette quadrature sur $\lfloor a\,,b \rfloor$, puis déterminer son ordre,

b) Compte tenu des résultats obtenus en **I,** ceux trouves en a) ci-dessus étaient prévisibles. Pourquoi ?

2^0) Effectuer un développement limite de Perreur associe a **(Q.2)** lorsque b, a $\longrightarrow$ 0,avec reste en ***$O(b-a)^3$***,sous une hypothèse à préciser.

3^0) a) comment peut-on combiner **(Q.1)** et **(Q.2)** pour obtenir l'approximation de $I\,(f,[a\,,b])$ meilleure à la fois que chacune de ces 2 quadratures ?

b) A quoi peut servir un tel résultat dans la pratique effective de l'intégration numérique ?

CONTRÔLE CONTINU D'ANALYSE NUMERIQUE 2009-2010

.

EXERCICE I (6 points)

I – Quelle différence y a-t-il entre l'analyse numérique et le calcul scientifique ?

II – Soit x = 3,1415926535 en base 10.Trouver les écritures respectives de x :

1 – en base 5 jusqu'à 7 chiffres après la virgule.

2 - en base 2 jusqu'à 10 chiffres après la virgule.

III – Quelles sont les 2 principaux types de situation pouvant amener à s'intéresser au problème de l'approximation numérique d'une fonction de la variable réelle ? Donner un exemple concret pour chacun.

PROBLEME (15 points)

I – Soient a, b, c, 3 réels distincts. On note l_a, l_b, l_c les 3 polynômes de $\mathbb{R}_2[x]$ caractérisés par :

$$\forall\, u, v \in \{a, b, c\},\ l_u(v) = \delta_{uv}\ .$$

1⁰) a) Démontrer que les polynômes l_a, l_b, l_c existent, sont uniques et trouver leurs expressions respectives.

b) Esquisser le graphe de chacun de ces polynômes lorsque a < b < c. **NB :*3 dessins différents.***

2⁰) soit alors $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $a, b, c, \in D_f$

a) Rappeler la définition de $pL_{abc}f$.

b) Donner, en la justifiant, l'expression de $(pL_{abc}f)(x)$ en fonction de $l_a(x), l_b(x), l_c(x)$, et y_a, y_b, y_c,

c) Donner une majoration de $|\, f(x) - (pL_{abc}f)(x)\,|$ sur $I = \text{conv}\,(a, b, c)$ sous une hypothèse à préciser.

3) On suppose maintenant que a < b < c et que b – a = c – b = h.

a) Exprimer alors $l_a(x), l_b(x), l_c(x)$, à travers le changement de variable $\delta = (x - b)/h$.

b) Montrer que, sous une hypothèse à préciser, on a : $\forall\, x \in I$, $|\, f(x) - (pL_{abc}f)(x)\,| \leq C_1.C_2(f).h^p$, où p est un entier, C_1 est une constante universelle, C_2 est une constante dépendante de f.

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

II – On veut maintenant approcher une fonction f sur un intervalle [a, b] (avec a < b) à partir des valeurs qu'elle prend aux nœuds d'une équi-subdivision de [a, b] de taille paire :

$\sigma = (a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{2N} = b)$; avec, $\forall$ i = 1(1)2N, $a_i - a_{i-1} = h > 0$.

Pour ce faire, on approche f sur [a, b] par $\tilde{f}$, la fonction définie par morceaux par :

$\forall$ i = 1(1) N, $\tilde{f} = pL_{a_{2i-2}a_{2i-1}a_{2i}}f$ sur $[a_{2i-2}, a_{2i}]$.

1⁰) Quel type de fonction est $\tilde{f}$ sur [a, b] ? Et sa courbe $C_{\tilde{f}}$? Justifier les 2 réponses.

2⁰)a) Démontrer que la fonction $\tilde{f}$ est continue sur [a, b].

b) Est-elle dérivable sur [a, b] ? Pourquoi (brièvement) ?

3⁰) Sous une hypothèse appropriée :

a) Démontrer que : $\forall$ x $\in$ [a, b], $| f(x) - \tilde{f}(x)| \leq C_1.C_2(f).h^p$.

b) En déduire que $\tilde{f}$ converge uniformément vers f sur [a, b] quand N $\to$ $+\infty$.

Interprétation ?

4⁰) Finalement, avantages et inconvénients de $\tilde{f}$ en tant que fonction d'approximation de f sur [a, b] ?

5⁰) Décrire, *dans les grandes lignes*, comment calculer $\tilde{f}$(x) pour un x donne dans [a, b]

6⁰) Il se poserait, a priori, un problème pour construire $\tilde{f}$ sur [a, b] dans le cas d'une equisubdivision de taille impaire 2N + 1. Supposons par exemple qu'on ait plutôt b = a_{2N+1}. Comment définir alors $\tilde{f}$ sur $[a_{2N}, a_{2N+1}]$ pour que le résultat de **3⁰) a)** reste valable ?

EXAMEN D'ANALYSE NUMERIQUE 2009-2010

.

EXERCICE I (6 points)

Soit a résoudre une équation

$$(E) \quad : f(x) = 0,$$

où f est une fonction donnée (et donc bien connue) de ℝℝ→Pour simplifier, on suppose ici que (E) admet une unique solution dans R, que nous notons α.

En dehors des cas ou f est suffisamment simple, il n'est pas souvent possible de résoudre une équation comme (E) ≪ a la main ≫. Une approche numérique est alors suggérée. Elle consiste généralement à calculer, jusqu'à un rang approprie, les termes d'une suite $(x_n)_{n}\geq 0$ définie par récurrence dans le but d'avoir :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = 0,$$

Et que la suite $(x_n)_n\geq 0$ se rapproche suffisamment vite de limite. La suite se construisant par récurrence, son ou ses premier(s) terme(s) sont alors à choisir aussi proches de α qu'on pourrait le faire (tout en ne connaissant α …) pour que (1) ait des chances de se réalisé

Une *méthode numérique* pour résoudre (E) est définie par sa manière de calculer un nouveau terme de la suite x_{n+1} a partir des précédents. Le plus souvent, x_{n+1} est obtenue comme solution de l'équation

$$(E_n) : \check{f}_n(x) = 0, \qquad (1)$$

où $\check{f}_n$ est une approximation ≪ simple ≫ de la fonction f, approximation construite a partir des termes de la suite obtenus jusqu'au rang *n*.

1⁰) Dans le présent contexte, comment devrait se mesurer la ≪ simplicite ≫ de $\tilde{f}_n$?

2⁰) Il a été dit, ci-dessus, que les termes de la suite $(x_n)_n\geq 0$ doivent être calcules jusqu'à un rang approprié ceci est quelque peu vague. Suggérer alors un critère d'arrêt précis dans le calcul des termes successifs de cette suite. Quelle sera alors l'approximation finale proposée pour α ?

3⁰) a) Trouver x_{n+1} lorsqu'on prend : $\tilde{f}_n = pLx_nx_{n-2}\tilde{f}$.

b) Avec cette méthode (dite ≪ de la secante ≫), quels sont les termes de la suite,$(x_n)_n \geq 0$ qu'on ait de fournir d'avance ?

C) Sur cette représentation graphique appropriée. Tracer le graphe d'une fonction f quelconque, et placer l'abscisse α puis x_0 et x_1 arbitrairement choisis, mais ensuite x_2 et x_3.

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

4⁰⁾ a) Trouver x_{n+1} lorsqu'on tend plutôt : $\tilde{f}_n = pHx_nx_n\ f$.

b) Avec cette méthode (dite ≪ de newton ≥), qu'est-ce qu'on est obligé de fournir pour pouvoir démarrer la construction de la suite ?

c) Sur une représentation graphique appropriée, tracer le graphe d'une fonction f quelconque, et placer l'abscisse α, puis x_0 arbitrairement choisi, mais ensuite x_1 et x_2.

PROBLEME(16,5 points)

L'objectif ici set la résolution numérique, par la méthode LU, d'un système de cramer dans $\mathbb{R}^n$,
(S) : AX = b.

Pour cela on suppose que l'*élimination de Gauss* peut être opérée dans (S) sans permutation, et que cela soit numériquement stable, i.e. sans propagation désastreuse des erreurs d'arrondi dans les calculs par ordinateur.

I – Préliminaires (2 POINTS)

1⁰) Pourquoi l'*élimination de Gauss* est-elle terminée après l'élimination sur la colonne n – 1de la matrice du système ? Est-ce la même chose pour l'*élimination de Gauss-Jordan* ? Pourquoi ?

2⁰) Pourquoi faut-il craindre, a priori, la propagation des erreurs d'arrondi dans la résolution d'un système comme (S) par ordinateur ?

II – Factorisation LU de A et principe de la méthode LU (7 POINTS)

On sait qu'en opérant l'élimination de gauss sans permutation sur le système (S), celui-ci subit une suite de transformations :

$$\mathbf{A}^{(0)}.\mathbf{X} = \mathbf{b}^{(0)} \to \mathbf{A}^{(1)}.\mathbf{X} = \mathbf{b}^{(1)} \to \mathbf{A}^{(2)}.\mathbf{X} = \mathbf{b}^{(2)} \xrightarrow{\dots} \mathbf{A}^{(n-1)}.\mathbf{X} = \mathbf{b}^{(n-1)}$$

$\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}$, $\mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}^{(n-1)}$ est sup-triangulaire inversible, et, ∀ k = 1(1) n-1 on passe du système $\mathbf{A}^{(k-1)}.\mathbf{X} = \mathbf{b}^{(k-1)}$ a $\mathbf{A}^{(k)}.\mathbf{X} = \mathbf{b}^{(k)}$ par élimination de Gauss (sans permutation) sur la colonne k de $\mathbf{A}^{(k-1)}$.

1⁰) a)Démontrer que ∀ k = 1(1) n-1 : $A^{(k)} = \mathbf{G}^{(k)}.\ \mathbf{A}^{(k-1)}$, *où* $\mathbf{G}^{(k)}$est une matrice à préciser, et dont on signalera les propriétés remarquables les plus évidentes.

b) En déduire que $\mathbf{A}^{(n-1)} = \mathbf{G}.\ \mathbf{A}$ *où* **G** est une matrice dont on donnera les propriétés les plus évidentes.

2⁰) a) Qu'entend-t-on par *factorisation LU* de **A** ?

b) Comment peut-on obtenir concrètement les 2 facteurs de cette factorisation ?

NB : Brièvement : donner seulement les grandes lignes.

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

3^0)a) Ayant ces 2 facteurs, comment procède alors la *méthode LU* pour résoudre le système (S) ?

NB : Décrire seulement les grandes lignes.

b) A priori la mise en œuvre algorithmique de cette méthode par ordinateur pose un problème évident stockage en mémoire. Lequel ? Comment le résoudre au mieux ?

4^0) Pourquoi l'intérêt de la méthode LU va-t-il au-delà de la résolution du seul système (S) ?

III – Méthode LU pour résoudre (S) (5 POINTS)

Ecrire une fonction *MATLAB*, appelé LU, et résolvant, par la méthode de LU le système (S). Cette fonction devra comporter (et appeler dans son corps) 2 *sous-fonctions* :

- Une pour effectuer la phase de factorisation, appelé FACTO LU, et tenant compte de **II-3^0) b)**
- Et une pour effectuer la phase de résolution de la méthode.

IV – Le problème de l'unicité de la factorisation LU d'une matrice inversible.(2.5 POINTS)

1^0) Que peut-on dire d'une matrice inf-triangulaire et d'une matrice sup-triangulaire qui sont égales ?

2^0) En déduire que si une matrice inversible admet une factorisation LU, alors les 2 facteurs de cette factorisation sont inversibles et uniques.

RATTRAPAGE D'ANALYSE NUMERIQUE 2010-2011

Timing suggéré (mais purement indicatif !) :

Lecture → 15 mn/ EXECICE 1 → 55 mn/ EXERCICE 2 : I → 25 mn ; II → 25 mn ; III →15 mn

Exercice 1 (13 points)

Soient a,b ∈ℝ / a<b et $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. On pose :

$$I = \int_a^b f(x)dx, \quad \tilde{I} = \int_a^b \tilde{f}(x)dx, \quad E(I, \tilde{I}) = I - \tilde{I}, \quad M_k(f) = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(k)}(x)\right|,$$

On s'intéresse ici au problème du *calcul d'une valeur numérique approchée* de l'intégrale I lorsqu'un primitive de la fonction f n'est pas facile à trouver. L'idée de base est alors de construire une fonction $\tilde{f}$, approximation « simple » bien choisie de f sur [a,b], puis de calculer l'intégrale $\tilde{I}$ qu'on fournit comme *valeur approchée* de l'intégrale de la différence $E(I, \tilde{I})$, appelée *erreur d'intégration numérique*, mesure alors l'erreur dans cette approximation de I par $\tilde{I}$. On posera :

$x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad h = \frac{b-a}{2}, \quad x_0 = x_1 - uh, \quad x_2 = x_1 + uh,$ avec u constante réelle fixée ∈]0,1].

N.B. *Dans les calculs d'intégrales ci-après, utiliser le changement de variable :* $x = x_1 + h\lambda$

1) On prend ici: $\tilde{f} = pL_{x_0x_1x_2}f$
   a) Rappeler d'abord la définition de $pL_{x_0x_1x_2}f$.
   b) A partir du graphique de la courbe d'une fonction f quelconque (mais >0) sur [a,b], expliquer quelle aire de surface est approchée par quelle autre dans l'approximation de I par $\tilde{I}$ obtenue avec cette $\tilde{f}$.
   c) Montrer que : $\tilde{I} = (b-a)\left[\frac{f(x_0)+f(x_2)}{Ru^2} + \left(1 - \frac{1}{Su^2}\right)f(x_1)\right]$, où R et S sont deux entiers > 0.
   d) En déduire la valeur de u pour laquelle l'un des 3 points x_0, x_1, x_2 devient, en fait, inutile dans $\tilde{I}$.
   e) Montrer que, pour f de classe C^3 sur [a,b] : $\left|E(I, \tilde{I})\right| \leq \frac{M_3(f)}{192}[1 - \beta u^2(1-u^2)](b-a)^4$, avec β >0.
   f) En déduire, en la justifiant, la *valeur optimale* de la constant u lorsque f est de classe C^3 sur [a,b]. Préciser la majoration correspondante de $|E(I, \tilde{I})|$.
2) On prend ici plutôt: $\tilde{f} = pH_{x_0x_1x_1x_2}f$
   a) Rappeler d'abord la définition de $pH_{x_0x_1x_1x_2}f$
   b) Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$: $\left(pH_{x_0x_1x_1x_2}f\right)(x) - \left(pL_{x_0x_1x_2}f\right)(x) = C.(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$, où C est une constante réelle (i.e. indépendante de x, mais pouvant dépendre de *a,b,f*). (**NOTA :** Préciser à quoi est égale *C* dans les *notations du cours*).
   c) En déduire que l'approximation $\tilde{I}$ de I obtenue ici redonne encore, en fait, celle de **1)**

d) En déduire alors que, pour f polynôme de degré ≤3, l'approximation de **1)** vérifie : $\tilde{I} = I$.

e) Déduire aussi l'analogue du résultat de **1)e)** lorsque $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$.

f) Trouver, en la justifiant, la *valeur optimale* de la constante *u* lorsque *f* est de classe $\mathcal{C}^4$ sur [a,b]. Préciser la majoration correspondante de $|E(I,\tilde{I})|$.

Exercice 2 9 points

L'objectif ici est d'examiner 2 approches algorithmiques pour résoudre un système (S) de la forme:

$$(S):\ \boldsymbol{M.N.X} = \boldsymbol{b}$$

Avec **M** et **N** matrices inversibles données dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et le second membre **b** est un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$.

Pour ce faire, on admet qu'on a déjà écrit une procédure algorithmique résolvant un système de Cramer arbitraire d'ordre n par la *méthode de Gauss* avec *stratégie du pivot partiel.*

Procédure GAUSS_SP(A :matrice ; b :vecteur ;var X :vecteur) ;

Ci-après, on pourra appeler cette procédure depuis un algorithme partout où la nécessite se ferait sentir. De même, on admettra que son coût numérique est :

$$\frac{n(n-1)(2n+5)}{6}(+),\quad \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}(\times),\quad \frac{n^2+n}{2}(\div)$$

On admettra aussi que les types **matrice** et **vecteur** ont été définis précédemment comme en Cours.

I- Approche 1: Produit matriciel préalable, puis Gauss une fois. (3,5 points)

Ici, on calcule d'abord la matrice **A=M.N** en effectuant un produit matriciel. Ensuite, on résoud le système **A.X=b** par la *méthode de Gauss.*

1) Ecrire une procédure algorithmique PROD_MAT effectuant le produit de 2 matrices carrées d'ordre n.
   NOTA : Admettre que l'*opérateur de sommation* $\sum$ fait partie du langage de programmation.
2) Ecrire une procédure (courte) SOLVE_PROD_1 résolvant le système (S) comme indiqué ci-dessus.
3) Quel est le coût numérique de cette manière de résoudre (S) ?

II- Approche 2: Sans produit matriciel, mais par Gauss 2 fois successives. (3,5 points)

Pour résoudre (S) ici, on ne calcule pas du tout la matrice **A=M.N**. On considère plutôt qu'il suffit de résoudre successivement 2 systèmes de Cramer appropriés, chacun par la méthode de Gauss.

1) Comment cela est-il possible? **NOTA:** Donner seulement ici les grandes lignes du travail à faire.
2) Ecrire une procédure (courte) SOLVE_PROD_2 résolvant le système (S) par cette approche.

3) Entre cette façon de résoudre (S) et celle de **I**, laquelle recommanderiez-vous davantage ?Pourquoi ?

III- Que modélise (S)? (2 points)

On considère un *dispositif expérimental ( )* qui :

(i) Prend, en *entrée*, une *grandeur physique* par un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées ne sont pas directement mesurables ;

(ii) Et qui rend, en *sortie*, une *grandeur physique* représentée par un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ dont on peut directement mesurer les coordonnées par une appareil de mesure placé à la sortie du dispositif ( ).

Le problème est alors le suivant : *déduire les valeurs des coordonnées de* **X***à partir de celles de* **b.** Mais, pour cela, on doit tenir compte de ce que le dispositif ($\mathcal{D}$) est, en réalité, l'enchaînement en *série* (***Cf.***

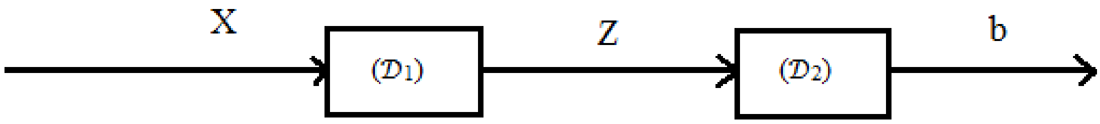


Figure 1)

FIG. 1 – **Dispositif expérimental ($\mathcal{D}$)=($\mathcal{D}_1$)∪($\mathcal{D}_2$).**

i. d'un *premier dispositif* ($\mathcal{D}_1$) qui prend **X** et rend un certain vecteur $Z \in \mathbb{R}^n$, non directement mesurable ;

ii. suivi d'un *second dispositif* ($\mathcal{D}_2$)prenant Z et rendant le vecteur $b \in \mathbb{R}^n$.

1) Quelle relation mathématique doit-il y avoir entre **X** et **Z**, d'une part, puis entre **Z** et **b**, d'autre part, pour que l'ensemble du dispositif ( ) soit modélisé par le système (S) ?

2) De ce point de vue, une des 2 approches étudiées ci-dessus pour résoudre (S) est plus intéressant que l'autre. Laquelle et pourquoi ?

IV- Partie subsidiaire: MATLAB (+1 points)

Etant donnés les 2 matrices **M, N**, et le 2nd membre **b**, pour chacune des 2 approches examinées ci-dessus pour résoudre (S), une seule instruction **MATLAB** suffit pour la mettre en œuvre.

1) Ecrire l'instruction **MATLAB** qui résoud le système (S) par l'**Approche 1**.
2) Ecrire l'instruction **MATLAB** qui résoud le système (S) par l'**Approche 2**.

CONTROLE CONTINU D'ANALYSE NUMERIQUE 2011-2012

E.N.S.P. .... *Niveau II 2011-12 / Semestre 2* .... ND/NG

***** U.E. MAT 227 « *Introduction à l'Analyse Numérique* » *****

*** Test n°1 (2H 30mn) ***

NB : 1. Le correcteur appréciera le soin apporté à la rédaction et à la présentation du devoir.

2. TOUS DOCUMENTS INTERDITS.
3. CALCULATRICES AUTORISEES, SAUF LES PROGRAMMABLES.
4. SOYEZ CLAIR ET PRECIS DANS LES REPONSES, mais CONCIS.
5. L'objectif ici ne doit pas être de chercher à traiter à tout prix toute l'épreuve, mais, plutôt, d'en couvrir une part significative de manière convaincante.

***** *PROBLEME* *****

- N.B. 1 : *Les Parties* I *et* II *peuvent être traitées de manière indépendante.*
- N.B. 2 : *Le* III *utilise les résultats du* II.

I - Relation entre $\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f$ et $\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1\cdots x_n}f$. (6 POINTS)

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable, et $n+1$ réels $x_0, \cdots, x_n \in \mathcal{D}_f$, 2 à 2 distincts, avec $n \geqslant 1$.

1°) Rappeler les définitions respectives de $\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f$ et $\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1\cdots x_n}f$.

2°) Montrer qu'on a, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f)(x) - (\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1\cdots x_n}f)(x) = C\cdot(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

où C est une constante réelle (i.e. indépendante de x, mais pouvant dépendre de f et des réels x_i).

3°) a) Préciser, en le justifiant, à quoi est égale la constante C dans les *notations du Cours*.

b) Mais démontrer qu'on a aussi : $C = \dfrac{(\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f)'(x_0) - f'(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}$.

c) En déduire une expression de $f[x_1, \cdots, x_n, x_0, x_0]$.

II - Spécialisation de $\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1\cdots x_n}f$ au cas $n=1$. (10 POINTS)

On suppose ici $n=1$, i.e. il n'y a que les 2 points x_0 et x_1 (avec $x_0 < x_1$). On pose alors : $P = \mathrm{pH}_{x_0x_0x_1}f$. Par ailleurs, on notera $h = x_1 - x_0$, chaque fois que cette différence apparaîtra ci-après.

1°) Sous une hypothèse à préciser, montrer que l'erreur globale de l'approximation de f par P sur $[x_0, x_1]$ est majorée par $C_1 \cdot C_2(f)\cdot h^r$, où r est une constante entière, C_1 est une constante universelle et $C_2(f)$ est une constante dépendante de f, toutes les 3 à préciser. N.B. ***Avec C_1 aussi petite que possible.***

- ***Conseil :*** Après un démarrage approprié, on pourra avoir intérêt à se ramener à l'intervalle $[0,1]$ par le *changement de variable* $s = (x-x_0)/h$.

2°) On considère maintenant les 3 polynômes Q_0, Q_1, $R_0 \in \mathbb{R}_2[x]$ vérifiant :

$$\forall i,j \in \{0,1\},\ Q_i(x_j) = \delta_{ij} \text{ et } Q_i'(x_0) = 0, \quad \text{alors que, } \forall i \in \{0,1\},\ R_0(x_i) = 0, \text{ et } R_0'(x_0) = 1.$$

a) Sans les calculer, démontrer l'existence et l'unicité des polynômes Q_0, Q_1, R_0 dans $\mathbb{R}_2[x]$.

b) Démontrer l'égalité, $\forall x \in \mathbb{R}$: $P(x) = f(x_0)\cdot Q_0(x) + f(x_1)\cdot Q_1(x) + f'(x_0)\cdot R_0(x)$.

3°) a) Trouver les expressions respectives de $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ et $R_0(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b) Esquisser les courbes de ces polynômes sur $[x_0, x_1]$. N.B. ***Faire 3 dessins différents.***

c) Exprimer ces mêmes polynômes à travers le *changement de variable* : $s = (x-x_0)/h$.

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

EPREUVE DE CONTROLE CONTINU D'ANALYSE NUMERIQUE 2012-2013

Exercice 1

1) Comment appelle-t-on respectivement *, M, b, E ?
2) Pour chacune de ces 4 caractéristiques du réel x, quel est l'ensemble de ses valeurs possibles ?
3) Mais, au fait pourquoi l'ordinateur ne peut-il pas stocker et manipuler n'importe quel nombre réel ?
4) Quelle(s) conséquence(s) cela a-t-il sur les calculs éffectués par l'ordinateur et pour les données numériques qu'on y rentre ?

Exercice 2

Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dérivable, et 3 réels $x_0, x_1, x_2 \in D_f$, 2 à 2 distincts. On pose : $P = pH_{x_0x_1x_1x_2f}$.

1°) Rappeler la définition de $pH_{x_0x_1x_1x_2f}$.

2°) On admet l'existence et l'unicité de 4 polynômes $Q_0, Q_1, Q_2\ et\ R_1 \in \mathbb{R}_3[x]$ vérifiant :

$\forall i,j \in \{0,1,2\}, Q_i(x_j) = \delta_{ij}$ et $Q_i'(x_1) = 0$, alors que, $\forall j \in \{0,1,2\}$, $R_1(x_j) = 0$ et $R_1'(x_1) = 1$

a) Sans calculer ces polynômes, ni P, démontrer que :

   $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = f(x_0).Q_0(x) + f(x_1).Q_1(x) + f(x_2).Q_2(x) + f'(x_1).R_1(x)$

b) Trouver les expressions respectives $(sous\ forme\ factorisée)$ de $Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x)\ et\ R_1(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   Nota : Pour simplifier ces expressions, utiliser la notation $h_{ij} = x_i - x_j, \forall i,j \in \{0,1,2\}$.
c) Pourquoi ce calcul établit-il, en fait aussi, l'existence et l'unicité des polynômes $Q_0, Q_1, Q_2\ et\ R_1$?

3°) Si on avait plutôt considéré le polynôme d'interpolation $pH_{x_0x_1x_1x_2f}$ alors :

a) Quels polynômes aurait-il fallu prendre ci-dessus à la place de $Q_0, Q_1, Q_2\ et\ R_1$?
   Nota : Ne pas chercher à calculer ces autres polynômes. Se contenter d'en donner une caractérisation analogue à celle donnée pour $Q_0, Q_1, Q_2\ et\ R_1$ à l'introduction de la question **2°)** ci-dessus.
b) Donner alors$(sans\ démonstration)$, le résultat pour $pH_{x_0x_1x_1x_2f}$ analogue à celui démontré en **2°)a).**

4°) **Application numérique :**

a) Trouver P sous sa $forme\ de\ Newton$ pour les données : $f(-2) = 20, f(0) = -12, f'(0) = 0, f(1) = 1$.
b) Ecrire le $Schéma\ de\ Hörner$ de cette forme de Newton de P.
c) En fait, ces données proviennent de la fonction : $f(x) = 2x^6 - x^4 + 10x^3 - 12$
En déduire qu'on a : $\forall x \in [-2\ ,1], |\ f(x) - P(x)| \leq K.g(x)$, où K est une constante universelle, et g une fonction, toutes les 2 à préciser.

Exercice 3

Soit f, une fonction donnée de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lorsqu'il n'est pas possible de calculer analytiquement (i.e., « à la main ») la solution α de l'équation

$$(E): f(x) = 0$$

L'alternative est d'essayer de calculer une approximation numérique $\tilde{\alpha}$ deα. Une des approches les plus courantes consiste ainsi à calculer successivement u_0, u_1, u_2 ..., les termes d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ censée vérifier :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$$

L'idée est de calculer les termes successifs de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ jusqu'à un rang n_0 où une condition d'arrêt sera satisfaite et visant à garantir une proximité suffisante entre u_{n_0} et la solution inconnue α. En définitive, on prend alors, comme valeur approchée de α : $\tilde{\alpha} = u_{n_0}$

Les diverses méthodes numériques pour résoudre (E) se distinguent par leurs manières respectives de calculer les termes successifs de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Lorsque la fonction f est continûment dérivable, la méthode la plus utilisée est, probablement, celle dite « $de\ Newton$ ». Dans cette méthode, ayant obtenu u_n au rang n, on calcule u_{n+1} au rang suivant comme solution de l'équation :

$$(E_n): \left(pH_{u_n u_n} f\right)(x) = 0.$$

$\boldsymbol{C'est\ dans\ ce\ cadre\ qu'on\ se\ place\ ci-après\ .}$

1°) a) Rappeler la définition de $pH_{u_n u_n} f$.

b) Donner l'expression de $\left(pH_{u_n u_n} f\right)(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

2°) a) Trouver l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n

b) La méthode de Newton est aussi appelée « $méthode\ de\ la\ tangente$ ». S'appuyer sur une représentation graphique approprié (et claire !) pour justifier pourquoi.

c) Cette méthode n'est cependant pas toujours utilisable. S'appuyer sur une représentation graphique pour illustrer une situation où on ne pourra pas calculer u_{n+1} à partir de u_n.

3°)a) En utilisant, et *sous une hypothèse* à *préciser*, un résultat connu sur *l'erreur d'interpolation polynômiale*, montrer qu'on a :

(i): $|f(u_{n+1}| \leq K.(u_{n+1} - u_n)^2$, (ii) $|(pH_{(u_n u_n f)}(\alpha)| \leq K.(\alpha - u_n)^2$, où K est une constante réelle à préciser.

b) En déduire que : $|f'(u_n).(\alpha - u_{n+1})| \leq K.(\alpha - u_n)^2$.

Dans la suite, on suppose $f'(\alpha) \neq 0$, et on admet qu'il existe alors une constante $C > 0$ telle que :

$$|\alpha - u_{n+1}| \leq C.(\alpha - u_n)^2.$$

On pose ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$: $\delta_n = C.|\alpha - u_n|$.

4)a) Montrer qu'il existe un entier $r > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \delta_{n+1} = \delta_n^r$

b) Montrer alors qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \delta_n \leq \delta_0^{r^n}$.

c) En déduire un intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que si $u_0 \in J$, alors $(E3.1)$ est effectivement vérifié.

EPREUVE D'EXAMEN D'ANALYSE NUMERIQUE 2012-2013

EXERCICE 1 (7 POINTS) *

Soit à résoudre un système de Cramer dans R^n, **A.X=b,** par la méthode de Gauss-Jordan. On rappelle que celle-ci consiste à transformer le système en un système diagonal équivalent qu'on résoudra ensuite aisément.

Par ailleurs, la problématique du choix et du positionnement des pivots dans la méthode est gérée avec la stratégie de pivot partiel. Ci-après, on admettra qu'une procédure PIVOT_PARTIEL a déjà été écrite à cet effet, et peut-être appelée partout où besoin s'en fait sentir.

1°) Ecrire une procédure GAUSS-JORDAN_1 programmant la version 1 de la méthode de Gauss-Jordan i.e. celle dans laquelle la matrice à la sortie de la phase d'élimination est diagonale inversible quelconque.

2°) L'objectif ici est de mettre en place la version **2** (version de référence) de la méthode de Gauss-Jordan dans laquelle la matrice du système diagonal à la sortie est $\boldsymbol{I_n}$, la matrice unité ou identité d'ordre n :

a) Comparée à la version précédente, expliquer (brièvement) quelle manœuvre permet d'arriver à ce résultat.

b) Expliquer pourquoi, dans la nouvelle version, la phase résolution devient essentiellement inutile.

c) Ecrire une procédure GAUSS_JORDAN_2 programmant cette version 2 de la méthode de GAUSS-JORDAN et évitant tout résultat superflu.

3°) Pour $h \in \{1,2\}$, on note $A_h(n), M_h(n), et\ D_h(n)$, les nombres respectifs d'additions, de multiplications et de divisions dans la version h ci-dessus de la méthode de Gauss- Jordan.

Sans calculer explicitement ces nombres, mais simplement en regardant les corps des 2 procédures écrites ci-dessus, trouver les valeurs respectives des 3 différences $A_1(n) - A_2(n), M_1(n) - M_2(n), et\ D_1(n) - D_2(n)$

PROBLEME (16 POINTS)*

Soit f une fonction dérivable de [a,b]→R, avec $a, b \in R/$ a<b.

On considère une subdivision de [a,b] de taille paire et à pas constant.

$$\sigma = (a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{2N} = b), avec\ \forall i = 1(1)2N, a_i - a_{i-1} = h > 0$$

On approche f sur [a,b] par $\tilde{f}$, la fonction définie par morceaux par :

$$\forall i = 1(1)N, \tilde{f} = pH_{a_{2i-2}a_{2i-1}a_{2i}}f \; sur \; [a_{2i-2}, a_{2i}]$$

I. Propriétés de base de la fonction $\tilde{f}$.

1°) Rappeler la définition de $pH_{a_{2i-2}a_{2i-1}a_{2i}}f$.

2°) Quelles sont les données dont on a besoin pour calculer $\tilde{f}$ sur [a,b] ?

3°) Quel type de fonction est $\tilde{f}$ sur [a,b] ?

4°) Démontrer que la fonction $\tilde{f}$ est continue sur [a,b].

5°) Est-elle dérivable sur [a,b] ?

II. Etude de l'erreur de l'approximation de f par $\tilde{f}$

1°) Sous une hypothèse à préciser :

a) Montrer que l'erreur globale de l'approximation de f par $\tilde{f}$ sur $[a_{2i-2}, a_{2i}]$ est majorée par $C_1.C_{2,i}(f).h^r$, où r est une constante entière, $C_1 est\ une\ constante$ universelle et $C_{2,i}(f) est$ une constante indépendante de f et de i, toutes les 3 à préciser. **NB : Avec C_1 aussi petite que possible.**

.Conseil : après un démarrage approprié, utiliser le changement de variable s=(x-a_{2i-1})/h.

b) En déduire une majoration globale de l'approximation de f par $\tilde{f}$ sur [a,b] .

c) Que peut-on alors dire de la qualité de l'approximation de f par $\tilde{f}$ sur [a,b] lorsque h est de plus en plus petit ? Interprétation pratique de ce résultat ?

2°)

a) Finalement comparée à l'approximation affine par morceaux, avantages et inconvénients de $\tilde{f}$ en tant que fonction d'approximation de f sur [a,b] ?

b) Et comparée à la fonction d'interpolation spline cubique ?

III. Calcul effectif de la fonction $\tilde{f}$ en un point de [a,b].

1°) On admet l'existence et l'unicité de 4 polynômes $Q_0, Q_1, Q_2\ et\ R_1 \in R_3[x]$ vérifiant :

CORRECTIONS D'ANALYSE NUMERIQUE

CORRECTION DU TEST N⁰1 D'ANALYSE NUMERIQUE 2007-2008

EXERCICE I

I) Analyse Numérique : C'est la branche des mathématiques qui développe et étudie les outils et les méthodes mathématiques pertinents pour la résolution numérique des problèmes issus des divers domaines de l'activité humaine et susceptible d'une modélisation mathématique.

II) Calcul scientifique : C'est la mise en œuvre effective sur ordinateur des méthodes développées en Analyse Numérique.

III) Algorithme : C'est une suite finie et ordonnée d'instructions pour résoudre un problème, en temps fini, partant d'un ensemble fini de données pour fournir un ensemble fini de résultats.

EXERCICE 2

1⁰) On utilise ici les systèmes dit des chiffres arabes. Pour un entier relatif N, on l'écrit en base b (b ∈ N*, b est appelé base de numération) sous la forme :

$\boxed{N = \pm\, \overline{CnCn-1 \ldots . C1C0}^{b}}$ Ou $C_0, \ldots, C_n \in [0(1)\ b-1]$

Signification :

$N = \overline{CnCn-1 \ldots . C1C0}^{b} \Leftrightarrow \quad N = (C_n b^n + C_{n-1} b^{n-1} + \ldots + C_1 b + C_0)$

2⁰) a) Il se pose un problème pour la représentation d'un entier N : Le problème de l'existence et de l'unicité.

On peut intercaler le nombre de zéro qu'on veut entre le signe et C_n sans modifier la signification donnée plus haut (ou alors sans modifier la valeur de N)

a) Contrainte :

$\boxed{C_n = 0 \rightarrow n = 0}$

c)Ceci ne résout pas toutes les ambiguïtés car il en existe encore une qui est le choix du signe de N = 0.

3⁰) a) Cela est possible parce que la représentation d'un entier dans une base b (b>1) est fini.

Et la mémoire d'un ordinateur est aussi finie.

b) Il existe une limitation a cela car la mémoire de l'ordinateur peut ne pas être suffisante pour sauvegarder les n+1 entiers appartenant à [0(1) b-1] et permettant de représenter N dans la base b.

CORRECTION DU TEST N^{0}2 D'ANALYSE NUMERIQUE 2007-2008

EXERCICE I (12 POINTS)

1^0) Explication des 2 phases de la méthode.

La première phase est la phase d'élimination sur les colonnes 1, 2, 3, …, n-1. Elle consiste a transformer le système (S) en un autre équivalent et de matrice sup-T.

La seconde est la phase de résolution proprement dite du système (S) : A.X = b, ie la détermination du vecteur, x $\in \mathbb{R}^n$ vérifiant (S).

2^0) a) Procédure algorithmique PIVOT PARTIEL

Constante : n=10 ;

Type auxiliaire :

matrice = tableau [1 …n, 1 … n] de réel ;

vecteur = tableau [1… n] de réel ;

procédure PIVOT_PARTIEL (Var A : matrice ; Var b : vecteur ; k : entier) ;

(* Objectif : Détermination et positionnement du pivot partiel : le plus grand réel ≠0 en valeur absolue sur la colonne k, il prend la position (k, k) dans A*)

(* PE : A $\in M_n(\mathbb{R})$ inversible, b $\in \mathbb{R}^n$ second membre, A matrice du système, k ∈ **N**, colonne de recherche du pivot partiel *)

(* PS : A $\in M_n(\mathbb{R})$ modifiée après positionnement du pivot partiel, A est inversible et b $\in \mathbb{R}^n$ modifie, Apres positionnement du pivot partiel *)

Variable i, index: entier; max: reel;

Debut

i ⟵ k; max ⟵ $|a_{ik}|$; index ⟵ i;

Pour i = k+1(1) n faire

Si (max < $|a_{ik}|$) alors

Debut

Max ⟵ $|a_{ik}|$; index ⟵ i;

Fin

Si max ≠ $|a_{ik}|$ alors

Début

Pour i = k(1) n faire

Début

max ⟵ $a_{index,i}$;

$a_{index,i}$ ⟵ $a_{k,I}$;

$a_{k,I}$ ⟵ max;

Fin;

Fin

3⁰) a) Procédure d'élimination

Procédure ELIMINATION_GAUSS (Var A : matrice ; Var b : vecteur ; k : entier) ;

(* Objectif : Détermination de A∈$M_n(\mathbb{R})$ inversible et sup-T résultant de l'élimination sur les connes de A ; détermination de b résultant des transformations sur A pour que le nouveau système soit équivalent a (S) *)

(* PE : A ∈$M_n(\mathbb{R})$ inversible, b ∈$\mathbb{R}^n$ second membre, A matrice du système *)

(* PS : A ∈$M_n(\mathbb{R})$ inversible, sup-T, résultat de l'élimination sur les colonnes 1, …, n-1 et b ∈$\mathbb{R}^n$ 2nd membre issu de l'élimination sur les colonnes 1, …, n-1 de A *)

Variable i, j, k: entier;

Début ⟵

Pour i = 1(1) n-1 faire

Début

PIVOT_PARTIEL (A, b, k) ;

Pour i = k+1(1) n faire

Début

$l_{ik} \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$;

Pour j=k+1(1) n faire

$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - l_{ik} * a_{kj}$; $b_i \leftarrow b_i - l_{ik} * b_k$;

Fin

Fin

Fin

b) Cout numérique

Pour k = 1(1) n-1

Pour i= k+1(1) n -------------------------------

1(÷) --------------------------

Pour j= k+1(1) n n-k+1 (+) (n-k) (n-k+1) (+)

1(+) n-k (+)

1(×) n-k (×) n-k+1(×) (n-k)(n-k+1) (×)

1(+) 1(÷) n-k (÷)

1(×) -------------------------

$\sum_{n=1}^{n-1}(n-k)(n-k+1) = \sum_{j=1}^{n-1} j\,(j+1) = \sum_{j=1}^{n-1} (j^2+j)$ avec n-k=j

$$= \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} + \frac{(1+n-1)(n-1)(2(n-1)+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{n(n^2-1)}{3} = \frac{n^3-n}{3}$$

$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$

Bilan de l'élimination :

$\frac{n^3-n}{3}\ (+)\quad \sim \frac{n^3}{3}\ (+)$

$\frac{n^3-n}{3}\ (\times)\quad \sim \frac{n^3}{3}\ (\times)$

$\frac{n^2-n}{2}\ (\times)\quad \sim \frac{n^2}{2}\ (\times)$

$\sim \frac{2n^3}{3}$ Ovf

c) Cela n'est pas gênant pour la suite parce que l'on n'utilise pas ces coefficients(Remontée) et même si s'était le cas, on remplacerait par zéro ces coefficients dans toutes les expressions ou ils se trouveraient.

4⁰) a) Aspect de la matrice A

$$\begin{pmatrix} ****.....* \\ **....* \\ 0 \qquad * \end{pmatrix}$$

b) Procédure de résolution

Procédure REMONTEE (Var A : matrice ; Var b : vecteur ; Var x : vecteur) ;

(* Objectif : Résoudre le système (S) : AX=b avec A ∈$M_n(\mathbb{R})$, inversible et sup-T ; b ∈ $\mathbb{R}^n$ *)

(* PE : A ∈$M_n(\mathbb{R})$ inversible et sup-T, matrice du système, b ∈$\mathbb{R}^n$ second membre, A matrice du système *)

(* PS : X vecteur solution de (S). X ∈$\mathbb{R}^n$ *)

Variable i, j : entier;

Début (*Remontée*)

$X_n \leftarrow b_n/a_{nn}$;

Pour i= n-1(-1)1 faire

Début

$x_i \leftarrow b_i$;

Pour j =i+1(1) n faire

$x_i \leftarrow x_i - a_{ij} * x_j$; $x_i \leftarrow x_i / a_{ii}$;

Fin ;

Fin

c)Cout numérique

1(÷)

Pour i = n-1(-1)1

Pour j = i+1(1) n

1(+) (n-i) (+)

1(×) (n-i) (×)

$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}$

$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \frac{n(n-1)}{2}$ (×)

1(÷) n-1 (÷)

Bilan de remontée

$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ (+) $\sim \frac{n^2}{2}$ (+)

$\frac{n^2-n}{2}$ (×) $\sim \frac{n^2}{2}$ (×)

n (÷) $\sim \frac{n^2}{2}$ (÷)

n^2 ovf

5⁰) a) Procédure pour la résolution globale de (S)

Procédure METHAUDE_GAUSS (Var A : matrice ; Var b : vecteur ; Var x : vecteur) ;

(* Objectif : Résoudre le système (S) : AX=b avec A $\in M_n(\mathbb{R})$, inversible et sup-T ; b $\in \mathbb{R}^n$ *)

(* PE : A $\in M_n(\mathbb{R})$ inversible et sup-T, matrice du système, b $\in \mathbb{R}^n$ second membre, A matrice du système *)

(* PS : X vecteur solution de (S). X $\in \mathbb{R}^n$ *)

Debut

ELIMINATION_GAUSS (A, b);

REMONTEE (A, b, X);

Fin

b) Cout numérique de la méthode Gauss

$\frac{n^3-n}{3} + \frac{n^2-n}{2} = \frac{2n^3+3n^2-5n}{2}$ $(+) \sim \frac{n^3}{3}$
$\frac{n^3-n}{3} + \frac{n^2-n}{2} = \frac{2n^3+3n^2-5n}{2} (\times) \sim \frac{n^3}{3}$
$\frac{n^2-n}{2} + \mathrm{n} = \frac{n^2+n}{2} (\div) \sim \frac{n^2}{2}$
$\sim \frac{2n^3}{3}$ Ovf

Exercice 2

1⁰) Degré maximal de P : n

n $=\sum_{k=0}^{3}(v_k + 1)-1$

= (1+1) + (0+1) + (0+1) + (1+1) – 1

$\boxed{n = 5}$ Est le degré maximal de P

2⁰) Montrons que l'erreur globale de cette approximation est majorée

D'après le théorème fondamentale de l'erreur d'interpolation polynomiale, si $f \in C^{(6)}([a, b])$, $\forall$ x∈[a, b], $\exists\ \varepsilon_x \in$ conv(x, x_0, x_1, x_2, x_3) /

$f(x)-P(x) = \frac{f^{(6)}(\varepsilon x)}{6!}(x-x_0)^2(x- x_1)(x-x_2)(x-x_3)^2$

$\Rightarrow \forall$ x $\in$[a, b], $|f(x)-P(x)| \leq \frac{M_6(f)}{720}(x-x_0)^2)(x-x_3)^2\ |(x- x_1)(x-x_2)|$

Ou $M_6(f) = \sup_{x\,\epsilon\,[a,\,b]} |f^{(6)}(x)|$

$[a, b] \longrightarrow [-1, 1]$

$x \longrightarrow t = t(x)$

$\frac{x-a}{b-a} = \frac{t+1}{2} \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b-a}{2}$, $t \in [-1, 1]$

$x-x_0 = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} - a = \frac{b-a}{2}t + \frac{b-a}{2}$

$x-x_1 = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} - \frac{2a+b}{3} = \frac{b-a}{2}t - \frac{b-a}{6}$

$x-x_2 = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} - \frac{a+2b}{3} = \frac{b-a}{2}t - \frac{b-a}{6}$

$x-x_3 = \frac{b-a}{2}t + \frac{b-a}{2} - b = \frac{b-a}{2}t - \frac{b-a}{2}$

On a ainsi $\forall$ x $\in$[a, b],

$|f(x)-P(x)| \leq \frac{M_6(f)}{720}.\frac{h^6}{64}(t^2-1)^2\,|t^2-\frac{1}{9}|$

Posons $g(t) = (t^2-1)^2\,(t^2-\frac{1}{9})$, $\forall$ t $\in$[-1, 1],

$g(t) = g(-t) \Rightarrow$ g est paire sur [-1, 1]

$\Rightarrow$ étude sur [0, 1]

$g'(t) = 2(t^2-1)2t(t^2-\frac{1}{9}) + 2t(t^2-1)^2$

$= 2t(t^2-1)[2(t^2-\frac{1}{9}) + t^2-1]$

$= 2t(t^2-1)(3t^2 - \frac{11}{9})$

$g'(t)=0 \Rightarrow t=0$ ou $t=1$ ou $t=-1$ ou $t=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{11}{3}}$ ou $t=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{11}{3}}$

T	0		$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{11}{3}}$		1
T	0	+		+	
$t^2 - 1$		-		-	0
$3t^2-\frac{11}{9}$		-	0	+	
g'(t)	0	+	0	-	0

g(t)		$g(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{11}{3}})$	
	$\nearrow$		$\searrow$
	$-\frac{1}{9}$		0

$g(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{11}{3}}) = (\frac{11}{27}- 1)^2(\frac{11}{27} - \frac{1}{9}) = \frac{2048}{19683} = 0.104$

$g(0) = -\frac{1}{9} = -0{,}111$

On a $\forall$ t $\in[0, 1]$, $|g(t)| \leq \frac{1}{9}$, $or\ g(t) = g(-t)$

$\Rightarrow \forall$ t $\in[-1, 1]$, $|g(t)| \leq \frac{1}{9}$

On obtient : $\forall$ x $\in[a, b]$,

$| f(x)-P(x)| \leq \frac{M_6(f)}{720}.\frac{h^6}{64}.\frac{1}{9} = \frac{1}{414720}.M_6(f).h^6$

$\Rightarrow | f(x)-P(x)| \leq C_1.C_2(f).h^p$ avec

$$\begin{cases} P = 6 \\ C_2(f) = M_6(f) \\ C_1 = \frac{1}{414720} \end{cases}$$

3⁰) a) <u>Construisons P sous la forme de Newton</u>

$(pI_{x0\ldots xn}f)(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[xx_0 \ldots . x_n](x - x_0) \ldots .(x - x_{k-1})$

$x_0 = -1 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2$

$p(x) = 0 + f[-1, -1](x+1) + f[-1, -1, 0](x+1)^2 + f[-1, -1, 0, 1](x+1)^2(x) +$ f[-1,-1,0,1,2]$(x+1)^2x(x-1)$ + f[-1,-1,0,1,2,2]]$(x+1)^2x(x-1)(x-2)$

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

x_i	$\frac{f^{(\delta)}(x_i)}{\delta_i}$	$f(x_i)$					
-1	0	0					
			10				
-1	10	0		-9			
			1		4		
0	1	1		-1		2	
			-1		10		7
1	0	0		29		23	
			57		79		
2	57	57		187			
			244				
2	244	57					

$$\begin{cases} f[x_0 \ldots x_n] = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, & x_0 = x_n \\ f[x_0 \ldots x_n] = \dfrac{f[x_1 \ldots x_n] - f[x_0 \ldots x_{n-1}]}{x_n - x_0}, & x_0 \neq x_n \end{cases}$$

$p(x) = 10(x+1) - 9(x+1) + 4x(x+1)^2 + 2x(x+1)^2(x-1) + 7x(x+1)^2(x-1)(x-2)$

b) <u>Majoration de l'erreur</u>

$|f(x)-P(x)| \leq \frac{1}{414720}.M_6(f).h^6$, $h=2-(-1)=3$

$M_6(f) = \text{Sup}_{x \in [-1,2]} |f^{(6)}(x)|$

$f(x)= x^7 - x^6 - x^3 + 1$

$f'(x) = 7x^6 - 6x^5 - 3x^2$

$f''(x) = 42x^5 - 30x^4 - 6x$

$f^{(6)}(x) = 5040x - 720 \Rightarrow M_6(f) = f^{(6)}(2) = 9360$

Donc $|f(x)-P(x)| \leq \frac{9360}{414720}.729 = 16,45$

CORRECTION DE L'EPREUVE D'EXAMEN D'ANALYSE NUMERIQUE 2002-2003

PROBLEME

I) –**une matrice tri diagonale   (n = 5)**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \\ & & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ & & & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

II) Méthode de Gauss sans- permutation

1) **Version simplifiée de l'algorithme de l'élimination de Gauss pour (S)**

Procédure Gauss 1 (var : matrice ; var V :vecteur)

Var   k : entier ;

Aux : réel ;

Début ;

Pour k = 1(1)n-1 faire

Début ; (* Elimination sur la colonne k *)

$aux \leftarrow a_{(k12)k} / a_{kk}$;

$a_{(k+1)(k+2)} \leftarrow a_{(k+1)(k+2)} - aux * a_{(k+1)(k+2)}$

$y_{k+1} \leftarrow y_{k+1} - aux * y_k$;

fin ;

fin.

a) **cout numérique de cette élimination**

Pour un k fixé on a :

1(÷) ; 2(×) ; 2(+) ;

Donc pour k = 1(1) n-1 on a :

n-1 (÷) ; **2n – 2 (×) ; 2n-2 (+) ;**

D'où

Cout numérique de cet algorithme est

n – 1 (÷)

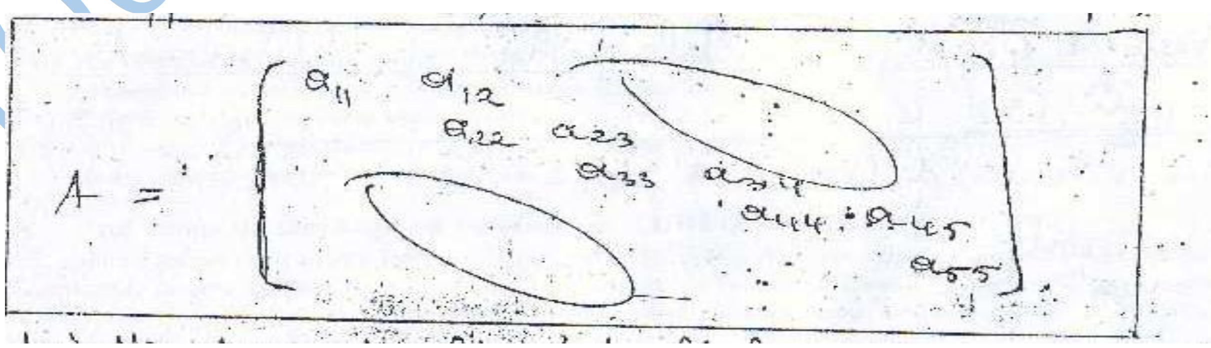
2n – 2 (×)

{→ 5n – 5 O . A . e

2n – 2 (+)

2) **a) Aspect de A à la sortie de cette phase.**

Supposons n = 5 à la sortie de cette phase ; on a



b) version simplifiée de l'algorithme remontée

Procédure REMONTEE 1 (A : matrice ; Y = vecteur ; varX : vecteur)

Var k : entier ;

Début (* *calcul de x_n) ;

$X_n \leftarrow y_n / \mathbf{a_{nn}}$;

Pour k = n(-1) 1 faire

$X_k \leftarrow (y_k - \mathbf{a_{k(k+1)}} * x_{k+1}) / a_{kk}$;

3) Cout de la résolution d'un système de Cramer tri diagonal par la méthode de Gauss sans permutation.

On a :

i) cout numérique de l'élimination :

n – 1 (÷)

2n – 1 (×) →{ soit 5n - 5 O. a. e

2n- 2 (+)

ii)) cout numérique de l'algorithme remontée

(α) k = n → 1(÷)

(β) pour un k fixé dans [1 (1) n – 1]] on a

1(+) 1(×) 1(÷) ; donc pour k = n -1 (-1) 1 on a :

n - 1 (+) ; n -1 (×) ; n -1 (÷)

Donc (α) × (β)

→ n (÷)

n - 1 (×) } soit 3n – 2 O.A .E

n – 1 (+)

i) + (ii) →{ le cout de la résolution du système est :

2n – 1 (÷)

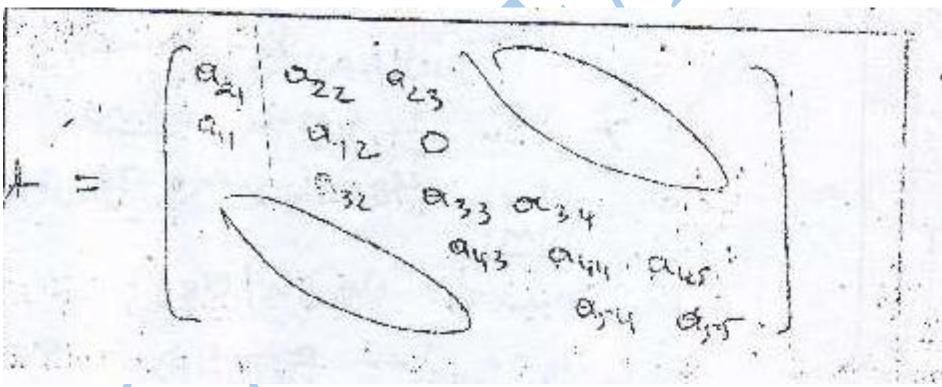
3n – 3 (×) { soit 8n -7 O.A .E

3n – 3 (+)

II) **<u>Méthode de Gauss avec stratégie du pivot partiel</u>**

a) <u>Représentation de A en cas de permutation des équations et 2 du système</u>

supposons n =5 alors on a :



CORRECTION DU TEST N°1 D'ANALYSE NUMERIQUE 2007-2008

EXERCICE I

I) Analyse Numérique : C'est la branche des mathématiques qui développe et étudie les outils et les méthodes mathématiques pertinents pour la résolution numérique des problèmes issus des divers domaines de l'activité humaine et susceptible d'une modélisation mathématique.

II) Calcul scientifique : C'est la mise en œuvre effective sur ordinateur des méthodes développées en Analyse Numérique.

III) Algorithme : C'est une suite finie et ordonnée d'instructions pour résoudre un problème, en temps fini, partant d'un ensemble fini de données pour fournir un ensemble fini de résultats.

EXERCICE 2

1°) On utilise ici les systèmes dit des chiffres arabes. Pour un entier relatif N, on l'écrit en base b (b ∈ N*, b est appelé base de numération) sous la forme :

$$\boxed{N = \pm\, \overline{CnCn-1\ldots.C1C0}^{b}}$$ Ou $C_0, \ldots, C_n \in [0(1)\ b\text{-}1]$

Signification :

N= $\overline{CnCn-1\ldots.C1C0}^{b} \Leftrightarrow$ N= $(C_n b^n + C_{n-1} b^{n-1} + \ldots + C_1 b + C_0)$

2°) a) Il se pose un problème pour la représentation d'un entier N : Le problème de l'existence et de l'unicité.

On peut intercaler le nombre de zéro qu'on veut entre le signe et C_n sans modifier la signification donnée plus haut (ou alors sans modifier la valeur de N)

a) Contrainte :

$$\boxed{C_n = 0 \rightarrow n = 0}$$

c)Ceci ne résout pas toutes les ambiguïtés car il en existe encore une qui est le choix du signe de N = 0.

3°) a) Cela est possible parce que la représentation d'un entier dans une base b (b>1) est fini.

Et la mémoire d'un ordinateur est aussi finie.

b) Il existe une limitation a cela car la mémoire de l'ordinateur peut ne pas être suffisante pour sauvegarder les n+1 entiers appartenant à [0(1) b-1] et permettant de représenter N dans la base b.

CORRECTION D'EXAMEN D'ANALYSE NUMERIQUE 2007-2008

PROBLEME I

I)

1. a) Propriété : Matrice symétrique et définie et définie positive

b) Une matrice A € M_n (ℝ) est dite symétrique et définie positive lorsque :

- A est symétrique : i.e. $t_A = A$

- A est définie positive i.e. :

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \{ \vec{0} \}$, $< \vec{X}, A\vec{X} > 0$

Ou, $< .,. >$ est le produit scalaire i.e.

$\forall \vec{X} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}, \forall \overline{Y} = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$

$< \vec{X}, \vec{Y} > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

2^0) on dit que la méthode de Choleshy est une méthode par factorisation parce qu'elle détermine, pour une matrice donnée A, une matrice L dont le produit L ^{t}L = A

II.

$A \in M_N(\mathbb{R})$ inf – T / $L.t_L = A$

1-a) Relation mathématique existant entre les coefficients de L et ceux de A

L inf – T $\Rightarrow$ lij= 0 $\forall$ i < j, c, j ∈ $[1\ (I\ )n]$

$A = L.t_L \Rightarrow \forall_{i\,,\,j} = 1\ (\ I\ )n$, $(A)_{ij} = (L.t_L)_{ij}$

$\Rightarrow \forall_{I\,,\,j} = 1\ (I)_n$, $(\forall)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (t_L)_{kj}$

$= \sum_{k=1}^{n} (O_{ik})(L_{jk})$

$\Rightarrow \forall_{I\,,\,j} = 1\ (I)_n$, $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} L_{jk}$

Mais (L – inf – T) o

(∝)

b) Formule de calcul des l_{ij}

Pour la colonne 1 , ie $j = 1$

(∝) ***donne :*** $\forall_i = 1(I)n$, $a_{i1} = \sum_{n=1}^{1} l_{ix} l_{1k}$

$= l_{i1} l_{11}$

$\Rightarrow a_{i1} = l^2_{11}$

$\rightarrow$ $\boxed{L_{11} = \sqrt{a_{11}}}$

$\forall_I = 2$ (I)n $\boxed{L_{i1} = \underline{a_{i1}0}...}$

*Colonne j ∈ $[2(1)n.]$
Par récurrence supposons avoir déjà détermine les colonnes C_1 (L) , … , C_{J-1} (L) i.e. les coefficients l_{ik} , $\forall k = 1$ (I) $j - 1$, $\forall_i = 1$ (I)n. la matrice L étant inf. T, on détermine seulement les coefficients l_{ij} , $\forall_i = j$ (1) n $\Rightarrow$ min (i , j)= j dans (∝
Pour (∝),

$\forall$ i = j (1) n, $a_{ij} = \sum_{n=1}^{j} l_{ix} l_{jk}$

$= \underbrace{\sum_{x=1}^{i=1} l_{ix} l_{jk}}_{\text{Connue par hypothèse de récurrence}} + l_{ij} l_{jj}$

Pour i = j .

$A_{ij} = \sum_{x=1}^{j-1} l_{jx}$

$\Rightarrow l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{x=1}^{j-1} l^2_{jx}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{L_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{x=1}^{j-1} l^2_{jx}}}$

On a : $a_{ij} = \sum_{x=1}^{j-1} l_{ix} l_{jx} + l_{ij} l_{jj}$

⇒ $\boxed{L_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{x=1}^{j-1} l_{ix}\, l_{ix} \right) \big/ \, l_{jj}}$

2-a) Algorithme. constante n = 4 type auxiliaire matrice = tableau $[1 \ldots n, 1..n]$ **de réels**
procédure FACTO-CHOLESKY (A : motrice , var L ; motrice)

(* objectif : déterminer la matrice L $\in M_N(\mathbb{R})$ / $L^t L = A$, L inf-T et A est S D P *)

(* Param. Entrant: A $\in M_n(\mathbb{R})$, S D P *)

(* param sortant : L $\in M_N(\mathbb{R})$ inf-T / $L^t L = A$ et $\forall_i = 1(1)n$, $l_{ii} > 0$)

Variable i, j, k : entier ;

Début

(* calcul colonne 1 de L *).

⟶

$L_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$

Pour i = 2(1)n faire $l_{i1} \leftarrow a_{i1} / l_{11}$;

(* calcul colonne de 2 a n de L A) .

Pour j = 2 (1)n faire

Début

$L_{jj} \leftarrow \sqrt{a_{jj} - \sum_{x=1}^{j-1} l_{jx}^2}$

Pour i = j +1 (1)n faire

$L_{ij} \leftarrow \sqrt{a_{ij} - \sum_{x=1}^{j-1} l_{ix} l_{jx}} \; \big/ \, l_{jj}$

Fin

Fin

CORRECTION D'EXAMEN D'ANALYSE NUMERIQUE 2009-2010

Exercice I (6 points)

$$(E) \quad : f(x) = 0$$

α, l'unique solution de (E)

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha$$

x_{n+1} solution de (E_n) : $\tilde{f}_n(x) = 0$

1- Function affine?

Condition d'arrêt

1. $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon\epsilon$ très petit 10^{-3}
2. $|x_{n+1} - x_n| \leq \epsilon|x_{n+1}|$ $\quad\epsilon$ très petit
3. Trouver x_{n+1} lorsqu'on prend $\tilde{f}_n = pL_{x_n x_{n-1}} f$

$$\left(pL_{x_n x_{n-1}} f\right)(n) = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$$

$$\tilde{f}_n(x) = f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$$

$$or \ \tilde{f}_n(x) = 0 \Rightarrow \tilde{f}_n(x_{n+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x_n) + \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x_{n+1} - x_n) \quad = 0$$

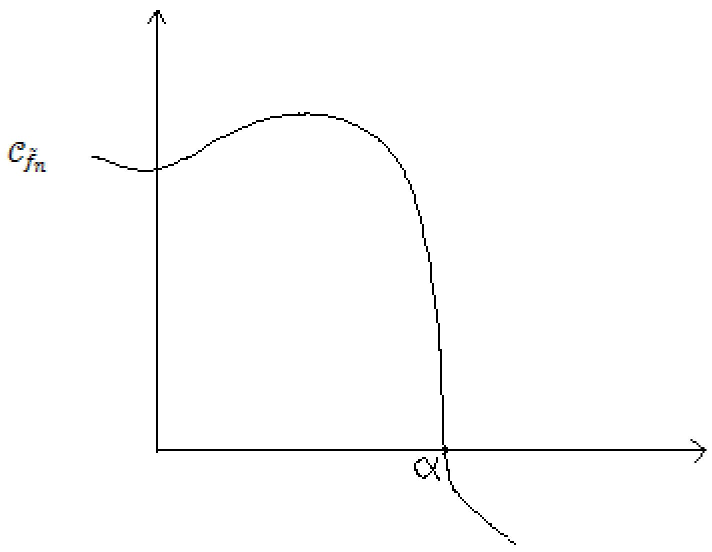
$$\Rightarrow \quad x_{n+\&} - x_{n-1} = -\frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} + x_n$$

Donc $x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

b) x_0, x_1

c)



$$pL_{x_1x_2}f \in \mathbb{R}_1(x) \ et \ \tilde{f}_2(x_3) = 0$$

$$pL_{x_0x_1}f \quad \in \quad \mathbb{R}_1(x) \quad et \quad \tilde{f}_1(x_2) = 0$$

1)

a) x_{n+1} lorsque $\tilde{f}_n = pH_{x_nx_n}f$

$$\left(PH_{x_nx_n}f\right)(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{f}_n(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{f}_n(x_{n+1}) = f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

$$or \ \tilde{f}_n(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}_n(x_{n+1}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} - x_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x_n$$

CORRECTION DU CONTROLE CONTINU D'ANALYSE NUMERIQUE 2011-2012

$\boxed{\text{I}}$ - **Relation entre** $\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f$ **et** $\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1x_2\cdots x_n}f$

i) $\Big(\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f \in \mathrm{IR}_n[x]$ et $\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1x_2\cdots x_n}f \in \mathrm{IR}_{n+1}[x]\Big) \Longrightarrow (D \in \mathrm{IR}_{n+1}[x])$;

ii) $\Big(\forall u \in \{x_0, \cdots, x_n\},\ (\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f)(u) = (\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1x_2\cdots x_n}f)(u) = f(u)\Big) \Longrightarrow (D(u) = 0)$.

Or, du fait que $x_0, \cdots, x_n$ sont $n+1$ réels 2 à 2 distincts, ***ii)*** entraîne que :

$$\exists Q,\ \text{polynôme tel que, } \forall x \in \mathrm{IR},\ D(x) = Q(x)\cdot(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\ ;$$

$$\Longrightarrow \deg(D) = \deg(Q) + \deg[(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)] = \deg(Q) + n + 1.$$

Mais, d'après ***i)***, on a : $\deg(D) \leqslant n+1$. D'où $\deg(Q) \leqslant 0$, i.e. Q est un polynôme constant.

$$\Longrightarrow \exists C \in \mathrm{IR} \,/\, \forall x \in \mathrm{IR},\ D(x) = C\cdot(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).\quad \textit{Cqfd.}$$

••• ***Méthode 2 : Par la symétrie entre points d'interpolation et la forme de Newton d'un polynôme d'interpolation.***

D'après les propriétés de symétrie connues entre points d'interpolation pour les polynômes d'interpolation respectivement de Lagrange et d'Hermite (et qui découlent des définitions rappelées ci-dessus dans nos cas particuliers de cet énoncé), on a :

$$\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f = \mathrm{pL}_{x_1\cdots x_nx_0}f \qquad \text{et} \qquad \mathrm{pH}_{x_0x_0x_1x_2\cdots x_n}f = \mathrm{pH}_{x_1x_2\cdots x_nx_0x_0}f.$$

D'où :

$$\forall x \in \mathrm{IR},\quad D(x) = (\mathrm{pL}_{x_1\cdots x_nx_0}f)(x) - (\mathrm{pH}_{x_1x_2\cdots x_nx_0x_0}f)(x). \qquad \textbf{(E1.1)}$$

Or, d'après leurs *formes de Newton* respectives, on a, $\forall x \in \mathrm{IR}$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{pL}_{x_1\cdots x_nx_0}f)(x) &= f(x_1) + f[x_1,x_2](x-x_1) + \cdots + f[x_1, \cdots, x_n](x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\\ &\quad + f[x_1, \cdots, x_n, x_0](x-x_1)\cdots(x-x_n),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{pH}_{x_1x_2\cdots x_nx_0x_0}f)(x) &= f(x_1) + f[x_1,x_2](x-x_1) + \cdots + f[x_1, \cdots, x_n](x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\\ &\quad + f[x_1, \cdots, x_n, x_0](x-x_1)\cdots(x-x_n)\\ &\quad + f[x_1, \cdots, x_n, x_0, x_0](x-x_1)\cdots(x-x_n)(x-x_0),\end{aligned}$$

D'où, en faisant la différence des 2 égalités précédentes, et compte tenu de **(E1.1)** :

$$\forall x \in \mathrm{IR},\quad D(x) = -f[x_1, \cdots, x_n, x_0, x_0](x-x_1)\cdots(x-x_n)(x-x_0).$$

D'où le résultat en prenant la constante réelle : $\boxed{C = -f[x_1, \cdots, x_n, x_0, x_0]}$. ***Cqfd.***

> ••• ***Remarque/Commentaire n°4 :***
> On a discuté en Cours sur les permutations permises entre *points d'interpolation virtuels* dans un polynôme d'interpolation d'Hermite. Et on a alors insisté sur le fait que ce sont celles qui maintiennent les ***points d'interpolation virtuels égaux entre eux de manière consécutive.***
> Ainsi, ***les notations*** $\mathrm{pH}_{x_0x_1x_2\cdots x_nx_0}f$ ***et*** $f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x_0]$ ***n'ont aucun sens !!!***

> ••• ***Remarque/Commentaire n°5 :***
> Ci-dessus, la ***Méthode 1*** a l'avantage d'être facilement adaptable à toute situation analogue de différence de 2 polynômes d'interpolation ayant un certain nombre de points d'interpolation en commun. On peut donc la recommander à tout un chacun, l'essentiel étant de bien raisonner sur les degrés des différents polynômes en jeu (mais, parfois aussi, sur les multiplicités des racines de ceux-ci).
> La ***Méthode 2*** requiert plus de subtilité mathématique, et une adaptation attentive spécifique à chaque contexte. Elle serait donc davantage recommandée pour ceux et celles qui se sentent plus inspiré(e)s par la subtilité mathématique.

3°) a) ***Précisons, en le justifiant, à quoi est égale la constante*** C ***dans les notations du Cours.***

Dans l'égalité démontrée à la question précédente, la constante C est aussi égale au coefficient de x^{n+1} au membre droit de cette égalité. Par conséquent, elle est aussi égale au coefficient de x^{n+1} au membre gauche. Or, le membre gauche de l'égalité est la différence de $\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f$, polynôme de degré $\leqslant n$, et de $\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1x_2\cdots x_n}f$, polynôme de degré $\leqslant n+1$. Par conséquent son monôme en x^{n+1} ne peut provenir que de $-\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1x_2\cdots x_n}f$, soit donc l'opposé de celui de $\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1x_2\cdots x_n}f$. Il s'ensuit :

$$\boxed{C = -f[\,x_0, x_0, x_1\,, \cdots, x_n\,] = -f[\,x_1\,, \cdots, x_n\,, x_0, x_0\,]}.$$

b) ***Mais démontrons qu'on a aussi :*** $C = \dfrac{(\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f)'(x_0) - f'(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}$.

Ici aussi, nous proposons ***2 méthodes*** différentes de démonstration de ce résultat.

••• ***Méthode 1 : Par dérivation directe de l'égalité de la question 2°).***

Dans le résultat qu'il est demandé de démontrer, on voit bien que le point x_0 joue un rôle différent de celui des autres x_i. Posons alors, $\forall x \in \mathrm{IR}$: $Q(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n)$. L'égalité de **2°**) équivaut à :

$$(\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f)(x) - (\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1x_2\cdots x_n}f)(x) = C\cdot(x-x_0)\cdot Q(x). \qquad \textbf{(E1.2)}$$

En dérivant **(E1.2)** membre à membre, il vient :

$$(\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f)'(x) - (\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1x_2\cdots x_n}f)'(x) = C\cdot\big[Q(x) + (x-x_0)\cdot Q'(x)\big].$$

D'où, en faisant $x = x_0$:

$$(\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f)'(x_0) - (\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1x_2\cdots x_n}f)'(x_0) = C\cdot Q(x_0). \qquad \textbf{(E1.3)}$$

Or, les x_i étant 2 à 2 distincts, on a :

$$Q(x_0) = (x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n) \neq 0.$$

D'où le résultat, en divisant **(E1.3)** membre à membre par $Q(x_0)$:

$$C = \frac{(\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f)'(x_0) - f'(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}. \quad \textit{Cqfd.}$$

••• ***Méthode 2 : Retour à la définition du nombre dérivé en*** x_0.

Posons encore : $\forall x \in \mathrm{IR}$, $D(x) = (\mathrm{pL}_{x_1\cdots x_nx_0}f)(x) - (\mathrm{pH}_{x_1x_2\cdots x_nx_0x_0}f)(x)$.

D'après la question **2°**), on a, $\forall x \in \mathrm{IR}\setminus\{x_0\}$:

$$\frac{D(x)}{x-x_0} = C\cdot(x-x_1)\cdots(x-x_n)\ ;$$

d'où :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{D(x)}{x-x_0} = C\times\lim_{x\to x_0}\big[(x-x_1)\cdots(x-x_n)\big] = C\cdot(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n). \qquad \textbf{(E1.4)}$$

Par ailleurs, en tant que fonction polynôme, D est dérivable sur IR. Or, comme

$$D(x_0) = (\mathrm{pL}_{x_1\cdots x_nx_0}f)(x_0) - (\mathrm{pH}_{x_1x_2\cdots x_nx_0x_0}f)(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0,$$

alors

$$\lim_{x\to x_0}\frac{D(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{D(x)-0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{D(x)-D(x_0)}{x-x_0} = D'(x_0). \qquad \textbf{(E1.5)}$$

De plus,

$$\begin{aligned} D'(x_0) &= (\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f)'(x_0) - (\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1x_2\cdots x_n}f)'(x_0) \\ &= (\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f)'(x_0) - f'(x_0). \end{aligned} \qquad \textbf{(E1.6)}$$

En combinant **(E1.4)**, **(E1.5)**, **(E1.6)**, on obtient bien, du fait que les $x_0, \cdots, x_n$ sont 2 à 2 distincts :

$$C = \frac{(\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f)'(x_0) - f'(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}. \quad \textit{Cqfd.}$$

c) ***Déduction d'une expression de*** $f[\,x_1\,, \cdots, x_n\,, x_0, x_0\,]$.

Du fait que $f[x_0, x_0, x_1\,, \cdots, x_n\,] = f[\,x_1\,, \cdots, x_n\,, x_0, x_0\,]$, les résultats des 2 questions précédentes entraînent que :

$$\boxed{f[\,x_1\,, \cdots, x_n\,, x_0, x_0\,] = \frac{f'(x_0) - (\mathrm{pL}_{x_0x_1\cdots x_n}f)'(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}}.$$

II - Spécialisation de $\mathrm{pH}_{x_0 x_0 x_1 x_2 \cdots x_n} f$ au cas $n = 1$.

On suppose ici $n = 1$, i.e. il n'y a que les 2 points x_0 et x_1 (avec $x_0 < x_1$). On pose alors : $P = \mathrm{pH}_{x_0 x_0 x_1} f$. Par ailleurs, on notera $h = x_1 - x_0$, chaque fois que cette différence apparaîtra ci-après.

1°) ***Sous une hypothèse à préciser, montrons que l'erreur globale de l'approximation de f par P sur $[x_0, x_1]$ est majorée par $C_1 \cdot C_2(f) \cdot h^r$, où r est une constante entière, C_1 est une constante universelle et $C_2(f)$ est une constante dépendante de f, toutes les 3 à préciser.***
N.B. ***Avec C_1 aussi petite que possible.***

- ***Conseil : Après un démarrage approprié, on pourra avoir intérêt à se ramener à l'intervalle $[0, 1]$ par le*** **changement de variable** $s = (x - x_0)/h$.

Supposons f de classe C^3 sur $[x_0, x_1]$. Comme, par définition, $P = \mathrm{pH}_{x_0 x_0 x_1} f$, alors, d'après le *Corollaire sur la majoration locale de l'erreur d'interpolation*, on a :

$$\boxed{\forall x \in [x_0, x_1], \quad |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{M_3(f)}{3!} \cdot |(x - x_0)^2 (x - x_1)|}, \qquad \textbf{(E2.1)}$$

avec $\boxed{M_3(f) = \sup_{x \in [x_0, x_1]} |f^{(3)}(x)|}$.

Posons alors, $\forall x \in [x_0, x_1]$: $g(x) = |(x - x_0)^2 (x - x_1)| = (x - x_0)^2 (x_1 - x)$. Déterminons $\sup_{x \in [x_0, x_1]} g(x)$.
Pour cela, considérons le changement de variable : $s = (x - x_0)/h$, i.e. $x = x_0 + h\,s$. Quand x parcourt $[x_0, x_1]$, s parcourt $[0, 1]$, et *vice versa*. D'où :

$$\sup_{x \in [x_0, x_1]} g(x) = \sup_{s \in [0,1]} g(x_0 + h\,s). \qquad \textbf{(E2.2)}$$

Par ailleurs, $g(x_0 + h\,s) = (x_0 + h\,s - x_0)^2 \cdot (x_1 - x_0 - h\,s) = (h\,s)^2 \cdot h \cdot (1 - s) = h^3 \cdot s^2 \cdot (1 - s)$.
Comme $h^3 > 0$, il s'ensuit :

$$\sup_{s \in [0,1]} g(x_0 + h\,s) = h^3 \cdot \sup_{s \in [0,1]} s^2 \cdot (1 - s). \qquad \textbf{(E2.3)}$$

Posons alors : $\varphi(s) = s^2 \cdot (1 - s) = s^2 - s^3$. Etudions la fonction $\varphi(s)$ sur $[0, 1]$. On a :

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0\,; \quad \varphi'(s) = 2\,s - 3\,s^2 = s\,(2 - 3\,s), \text{ d'où : } \varphi'(s) \begin{cases} = 0 \iff s = 2/3 \\ > 0 \iff s < 2/3\,; \\ < 0 \iff s > 2/3 \end{cases} \quad \varphi(2/3) = 4/27.$$

On en déduit le tableau de variation de la fonction $\varphi(s)$ sur $[0, 1]$:

s	0		2/3		1
$\varphi'(s)$		+	0	−	
$\varphi(s)$	0	↗	4/27	↘	0

,

$\Longrightarrow \sup_{s \in [0,1]} \varphi(s) = \dfrac{4}{27}$. En combinant avec **(E2.2)**-**(E2.3)**, il vient : $\sup_{x \in [x_0, x_1]} g(x) = \dfrac{4\,h^3}{27}$.

- ***Conclusion :*** $\boxed{\forall x \in [x_0, x_1], \quad |f(x) - P(x)| \leqslant \frac{2}{81} M_3(f) \cdot h^3}$.

D'où le résultat, avec : $\boxed{C_1 = 2/81}$, $\boxed{C_2(f) = M_3(f)}$, $\boxed{r = 3}$.

> • • • ***Remarque/Commentaire n°6 :***
> Ci-dessus, le "3" dans $M_3(f)$ et $3!$ se trouve de manière mécanique car correspondant au *nombre de points d'interpolation virtuels dans le polynôme d'interpolation* d'Hermite $\mathrm{pH}_{x_0 x_0 x_1} f$.
> On peut remarquer que c'est aussi le degré du polynôme $(x - x_0)^2 (x - x_1)$.

> **••• *Remarque/Commentaire n° 7* :**
> Le **N.B.** dans cette question précisait bien, et en gras : « ***Avec C_1 aussi petite que possible*** ». Par conséquent, il ne suffisait pas de balancer la première majoration trouvée de l'erreur d'interpolation, mais bien de chercher la plus petite possible. Et, pour y arriver, il fallait bien passer par la détermination préalable de la borne supérieure $\sup\limits_{x\in[x_0,x_1]} g(x)$ pour obtenir cette plus petite majoration de l'erreur.

> **••• *Remarque/Commentaire n° 8* :**
> Dans le traitement de cette question, il n'était, évidemment, pas indispensable de passer par le changement de variable suggéré $s = (x - x_0)/h$ pour trouver $\sup\limits_{x\in[x_0,x_1]} g(x)$.
> Cependant, l'intérêt de ce type de changement de variable dans ce contexte est qu'il simplifie énormément les calculs à faire pour trouver cette borne supérieure, et limite les risques d'erreur dans ces calculs.

2°) ***On considère maintenant les*** 3 ***polynômes*** Q_0, Q_1, $R_0 \in \mathbb{R}_2[x]$ ***vérifiant :***

$$\forall\, i,j \in \{0,1\},\ \ Q_i(x_j) = \delta_{ij}\ \ \textit{et}\ \ Q_i'(x_0) = 0,\quad \textit{alors que},\ \ \forall\, i \in \{0,1\},\ \ R_0(x_i) = 0,\ \ \textit{et}\ \ R_0'(x_0) = 1.$$

a) ***Sans les calculer, démontrons l'existence et l'unicité des polynômes Q_0, Q_1, R_0 dans $\mathbb{R}_2[x]$.***

- ***Cas de Q_0.***

D'après ci-dessus, Q_0 vérifie : $Q_0 \in \mathbb{R}_2[x]$, $Q_0(x_0) = 1$, $Q_0'(x_0) = 0$, $Q_0(x_1) = 1$.

Soit alors $f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction quelconque, dérivable et vérifiant :

$$f_0(x_0) = 1,\ \ f_0'(x_0) = 0,\ \ f_0(x_1) = 1.$$

$$\Longrightarrow\ \Big(Q_0 \in \mathbb{R}_2[x],\ \ Q_0(x_0) = f_0(x_0),\ \ Q_0'(x_0) = f_0'(x_0),\ \ Q_0(x_1) = f_0(x_1)\Big)\ \Longrightarrow\ Q_0 = \mathrm{pH}_{x_0x_0x_1} f_0.$$

D'où l'existence et l'unicité de Q_0, par le *Théorème-Définition du polynôme d'interpolation d'Hermite*.

- ***Raisonnement analogue pour R_0 et Q_1.***

> **••• *Remarque/Commentaire n° 9* :**
> Le raisonnement qu'il y avait à faire ici était strictement le même pour les 3 polynômes. Ce n'était donc pas la peine d'écrire 3 fois la même chose, à quelques détails près. Présenter le raisonnement pour l'un des 3 polynômes était amplement suffisant en précisant juste après que le raisonnement était analogue pour les 2 autres.

> **••• *Remarque/Commentaire n° 10* :**
> Une erreur malencontreuse et inattendue rencontrée dans un certain nombre de copies a consisté à prendre comme fonction auxiliaire $f_0 = Q_0$ dans le raisonnement précédent. Et donc à dire que $Q_0 = \mathrm{pH}_{x_0x_0x_1} Q_0$, ce qui démontrerait l'existence (et l'unicité) de Q_0.
> La déficience dans ce raisonnement est qu'il est ***circulaire***. En effet, pour pouvoir parler de $\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1} Q_0$, cela signifie qu'on a déjà supposé que Q_0 existe. En effet, il faut déjà que Q_0 existe pour pouvoir parler ainsi de son polynôme d'interpolation d'Hermite relativment à $(x_0; 1)$ et $(x_1; 0)$. Par conséquent, on ne peut s'appuyer sur cela pour prétendre démontrer l'existence de ce même Q_0 ***!!!***

b) ***Démontrons l'égalité,*** $\forall\, x \in \mathbb{R}$ ***:*** $P(x) = f(x_0)\cdot Q_0(x) + f(x_1)\cdot Q_1(x) + f'(x_0)\cdot R_0(x)$.

Posons, $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $T(x) = f(x_0)\cdot Q_0(x) + f(x_1)\cdot Q_1(x) + f'(x_0)\cdot R_0(x)$. On a :

- $Q_0, Q_1, R_0 \in \mathbb{R}_2[x] \implies T \in \mathbb{R}_2[x]$, car $\mathbb{R}_2[x]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;
- $T(x_0) = f(x_0) \times 1 + f(x_1) \times 0 + f'(x_0) \times 0 = f(x_0)$;
- $T(x_1) = f(x_0) \times 0 + f(x_1) \times 1 + f'(x_0) \times 0 = f(x_1)$.

Par ailleurs, T est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec, $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$T'(x) = f(x_0)\cdot Q_0'(x) + f(x_1)\cdot Q_1'(x) + f'(x_0)\cdot R_0'(x),$$

Aller à la table de matière

$\Longrightarrow \quad T'(x_0) = f(x_0)\times 0 + f(x_1)\times 0 + f'(x_0)\times 1 = f'(x_0).$

Or, $\Big(T \in \mathrm{IR}_2[x] \,/\, T(x_0)=f(x_0),\, T'(x_0)=f'(x_0),\, T(x_1)=f(x_1)\Big) \Longrightarrow T = \mathrm{pH}_{x_0x_0x_1}f,$
par unicité du polynôme d'interpolation d'Hermite de la fonction f relativement à $(x_0;1)$ et $(x_1;0)$.

D'où : $\forall x \in \mathrm{IR},\ P(x) = T(x)$. ***Cqfd.***

> ••• ***Remarque/Commentaire n°11 :***
> Une erreur malencontreuse dans un certain nombre de copies a consisté à ne pas introduire le polynôme auxiliaire T, mais, en fait, à partir de l'égalité qu'on devait démontrer et « démontrer » que : $P(x_0)=f(x_0)$, $P'(x_0)=f'(x_0)$, $P(x_1)=f(x_1)$. L'erreur ici est dramatiquement double :
> 1. Partir de ce qu'on est censé démontrer pour le démontrer est un argument circulaire ***!!!***
> 2. Les égalités $P(x_0)=f(x_0)$, $P'(x_0)=f'(x_0)$, $P(x_1)=f(x_1)$ sont déjà vraies par définition de P, puisqu'on a posé dans l'énoncé, au début de ce $\boxed{\text{II}}$: $P=\mathrm{pH}_{x_0x_0x_1}f$. Par conséquent, cela ne rime à rien de les démontrer ***!!!***
>
> Le raisonnement pour établir ce genre d'égalité pour un polynôme d'interpolation a été explicité plusieurs fois en classe. S'y référer (Cf. Démonstration du *Lemme d'Aitken-Neville* ou autre).

3°) a) ***Expressions respectives de $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ et $R_0(x)$ sur IR.***

Nous proposons ***2 méthodes*** différentes pour trouver ces expressions.

••• ***Méthode 1 : Par factorisation directe de Q_0, Q_1, R_0.***

- ***Cas de Q_0.***

$\Big(Q_0 \in \mathrm{IR}_2[x] \,/\, Q_0(x_1)=0\Big) \Longrightarrow$ x_1 est racine du polynôme Q_0 ;

$\Longrightarrow \exists\, C_0,\, C_1 \in \mathrm{IR}$, constantes, telles que : $Q_0(x) = (x-x_1)\cdot\big(C_1(x-x_0)+C_0\big)$.

Mais alors : $Q_0(x_0)=0 \Longrightarrow (x_0-x_1)\cdot C_0 = 1 \Longrightarrow C_0 = \dfrac{1}{x_0-x_1} = -\dfrac{1}{h}$.

De plus, $Q_0'(x_0)=0 \Longrightarrow C_0 + C_1\cdot(x_0-x_1) = 0 \Longrightarrow C_1 = \dfrac{C_0}{h} = -\dfrac{1}{h^2}$.

$$\Longrightarrow \boxed{Q_0(x) = -\left(\frac{x-x_1}{h}\right)\left(1+\frac{x-x_0}{h}\right)}.$$

> ••• ***Remarque/Commentaire n°12 :***
> Il n'était pas indispensable d'écrire le facteur restant ci-dessus après factorisation de $x-x_1$ sous la forme $C_1(x-x_0)+C_0$. On pouvait tout aussi bien l'écrire C_1x+C_0, et aboutir, évidemment, également au résultat.
> Cependant, la forme $C_1(x-x_0)+C_0$ du facteur restant simplifie grandement les calculs suivants et est motivée par le fait que les propriétés du polynôme Q_0 qui n'ont pas encore été prises en compte à ce stade sont celles relatives au point x_0.

- ***Cas de Q_1.***

$\Big(Q_1 \in \mathrm{IR}_2[x] \,/\, Q_1(x_0)=Q_1'(x_0)=0\Big) \Longrightarrow$ x_0 est racine (au moins) double du polynôme Q_1 ;

$\Longrightarrow \exists\, C \in \mathrm{IR}$, constante, telle que : $Q_1(x) = C\cdot(x-x_0)^2$.

Mais alors : $Q_1(x_1)=1 \Longrightarrow C\cdot(x_1-x_0)^2 = 1 \Longrightarrow C = \dfrac{1}{h^2}$, $\Longrightarrow \boxed{Q_1(x) = \left(\dfrac{x-x_0}{h}\right)^2}$.

- ***Cas de R_0.***

$\Big(R_0 \in \mathrm{IR}_2[x] \,/\, R_0(x_0)=R_0(x_1)=0\Big) \Longrightarrow$ x_0 et x_1 sont 2 racines distinctes du polynôme R_0 ;

$\Longrightarrow \exists\, C_2 \in \mathrm{IR}$, constante, telle que : $R_0(x) = C_2\cdot(x-x_0)(x-x_1)$.

Or, $\Big(R_0'(x_0)=1\Big) \Longrightarrow C_2\cdot(x_0-x_1) = 1 \Longrightarrow C_2 = -\dfrac{1}{h}$, $\Longrightarrow \boxed{R_0(x) = -\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{h}}$.

••• *Méthode 2 : Par la forme de Newton de Q_0, Q_1, R_0.*

- *Cas de Q_0.*
  D'après **2° a)**, $Q_0 = \mathrm{pH}_{x_0x_0x_1}f_0$, avec $f_0 : \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR}$, une fonction quelconque, dérivable et vérifiant :

$$f_0(x_0) = 1, \ \ f_0'(x_0) = 0, \ \ f_0(x_1) = 0.$$

On peut donc calculer Q_0 comme polynôme d'interpolation d'Hermite de la fonction f_0 relativement à $(x_0; 1)$ et $(x_1; 0)$, par exemple sous une forme de Newton :

$$Q_0(x) = f_0(x_0) + f_0[x_0, x_0](x - x_0) + f_0[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2.$$

Il suffit de calculer $f_0[x_0, x_0]$ et $f_0[x_0, x_0, x_1]$ par le tableau des différences divisées généralisées :

$$\begin{array}{lllll}
x_0 : f_0(x_0) = 1 : f_0(x_0) = 1 & \searrow & & & \\
x_0 : f_0'(x_0) = 0 : f_0(x_0) = 1 & \longrightarrow & f_0[x_0, x_0] = f_0'(x_0) = 0 & \searrow & \\
x_1 : f_0(x_1) = 0 : f_0(x_1) = 0 & \longrightarrow & f_0[x_0, x_1] = -\dfrac{1}{h} & \longrightarrow & f_0[x_0, x_0, x_1] = -\dfrac{1}{h^2}
\end{array}$$

D'où : $\boxed{Q_0(x) = 1 - \left(\dfrac{x - x_0}{h}\right)^2}$.

- *Cas de Q_1.*
  D'après **2° a)**, $Q_1 = \mathrm{pH}_{x_0x_0x_1}f_1$, avec $f_1 : \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR}$, une fonction quelconque, dérivable et vérifiant :

$$f_1(x_0) = 0, \ \ f_1'(x_0) = 0, \ \ f_1(x_1) = 1.$$

On peut donc calculer Q_1 comme polynôme d'interpolation d'Hermite de la fonction f_1 relativement à $(x_0; 1)$ et $(x_1; 0)$, par exemple sous une forme de Newton :

$$Q_0(x) = f_1(x_0) + f_1[x_0, x_0](x - x_0) + f_1[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2.$$

Il suffit de calculer $f_1[x_0, x_0]$ et $f_1[x_0, x_0, x_1]$ par le tableau des différences divisées généralisées :

$$\begin{array}{lllll}
x_0 : f_1(x_0) = 0 : f_1(x_0) = 0 & \searrow & & & \\
x_0 : f_1'(x_0) = 0 : f_1(x_0) = 0 & \longrightarrow & f_1[x_0, x_0] = f_1'(x_0) = 0 & \searrow & \\
x_1 : f_1(x_1) = 1 : f_1(x_1) = 1 & \longrightarrow & f_1[x_0, x_1] = \dfrac{1}{h} & \longrightarrow & f_1[x_0, x_0, x_1] = \dfrac{1}{h^2}
\end{array}$$

D'où : $\boxed{Q_1(x) = \left(\dfrac{x - x_0}{h}\right)^2}$.

- *Cas de R_0.*
  D'après **2° a)**, $R_0 = \mathrm{pH}_{x_0x_0x_1}f_2$, avec $f_2 : \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR}$, une fonction quelconque, dérivable et vérifiant :

$$f_2(x_0) = 0, \ \ f_2'(x_0) = 1, \ \ f_2(x_1) = 0.$$

On peut donc calculer R_0 comme polynôme d'interpolation d'Hermite de la fonction f_2 relativement à $(x_0; 1)$ et $(x_1; 0)$, par exemple sous une forme de Newton :

$$R_0(x) = f_2(x_0) + f_2[x_0, x_0](x - x_0) + f_2[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2.$$

Il suffit de calculer $f_2[x_0, x_0]$ et $f_2[x_0, x_0, x_1]$ par le tableau des différences divisées généralisées :

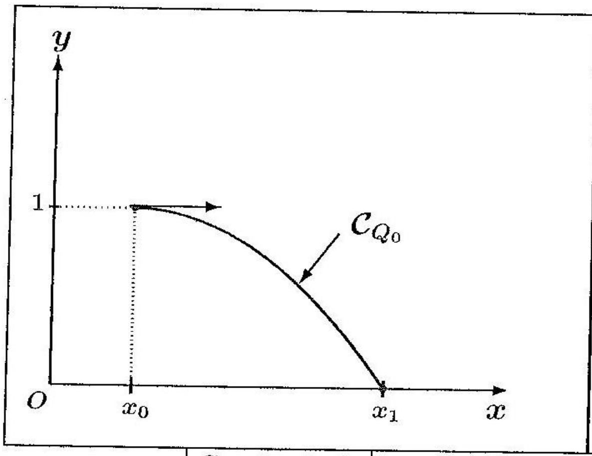
$$\begin{array}{lllll}
x_0 : f_2(x_0) = 0 : f_2(x_0) = 0 & \searrow & & & \\
x_0 : f_2'(x_0) = 1 : f_2(x_0) = 0 & \longrightarrow & f_2[x_0, x_0] = f_2'(x_0) = 1 & \searrow & \\
x_1 : f_2(x_1) = 0 : f_2(x_1) = 0 & \longrightarrow & f_2[x_0, x_1] = 0 & \longrightarrow & f_2[x_0, x_0, x_1] = -\dfrac{1}{h}
\end{array}$$

II - **Spécialisation de** $\mathrm{pH}_{x_0 x_0 x_1 x_2 \cdots x_n} f$ **au cas** $n = 1$

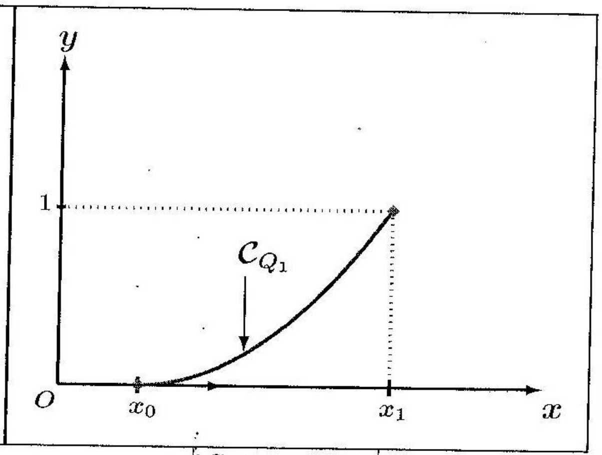
D'où : $\boxed{R_0(x) = (x - x_0) - \dfrac{(x-x_0)^2}{h} = -\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{h}}$.

••• *Remarque/Commentaire n°13 :*
La forme de Newton d'un polynôme d'interpolation dépend de l'ordre dans lequel on prend ses points d'interpolation. Ainsi, dans les calculs ci-dessus, on pouvait trouver d'autres expressions respectives de $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ et $R_0(x)$ sur IR en considérant $\mathrm{pH}_{x_1 x_0 x_0}$ au lieu de $\mathrm{pH}_{x_0 x_0 x_1}$.

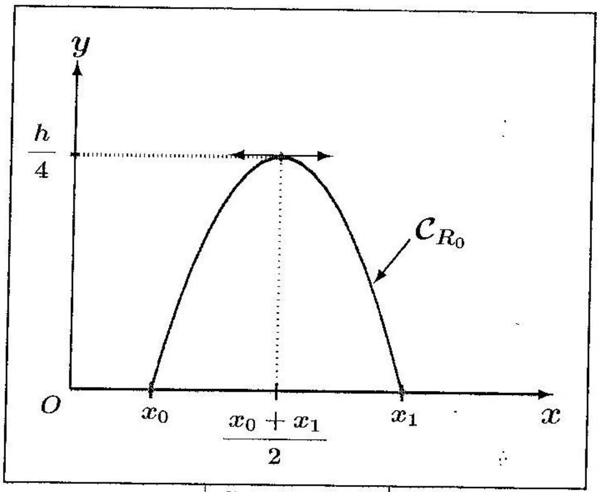
b) *Esquisse des courbes de ces polynômes sur* $[x_0, x_1]$. N.B. *3 dessins différents.*



Courbe de Q_0



Courbe de Q_1



Courbe de R_0

c) *Expressions de ces mêmes polynômes à travers le* changement de variable : $s = (x - x_0)/h$.

Remarquons d'abord que : $s = (x - x_0)/h \iff x = x_0 + h\,s$. D'où : $x - x_1 = h\,(s-1)$.

$\Longrightarrow$ $\boxed{Q_0(x) = 1 - s^2}$, $\boxed{Q_1(x) = s^2}$, $\boxed{R_0(x) = h \cdot s \cdot (1-s) = h\,(s - s^2)}$.

4°) Application numérique :

a) *Trouvons P sous sa* **forme de Newton** *pour les données :* $f(-1) = 6,\ f'(-1) = -3,\ f(2) = -5.$

On a : $P(x) = \mathrm{pH}_{-1,-1,2}\, f(x) = f(-1) + f[-1,-1](x+1) + f[-1,-1,2](x+1)^2.$

Il suffit de calculer $f[-1,-1]$ et $f[-1,-1,2]$ par le tableau des différences divisées généralisées :

$$\begin{array}{llllll}
-1 : f(-1) = 6 & : f(-1) = 6 \searrow & & & & \\
-1 : f'(-1) = -3 & : f(-1) = 6 & \longrightarrow & f[-1,-1] = f'(-1) = -3 & & \\
& \searrow & & & \searrow & \\
2 : f(2) = -5 & : f(2) = -5 & \longrightarrow & f[-1,2] = -\dfrac{11}{3} & \longrightarrow & f[-1,-1,2] = -\dfrac{2}{9}
\end{array}$$

D'où : $\boxed{P(x) = 6 - 3(x+1) - \dfrac{2}{9}(x+1)^2}$.

••• *Remarque/Commentaire n°14 :*

Alternativement, on pouvait aussi prendre (mais c'est moins efficace ici) :

$$P(x) = \mathrm{pH}_{2,-1,-1}\, f(x) = f(2) + f[2,-1](x-2) + f[2,-1,-1](x-2)(x+1).$$

On aurait alors construit le tableau des différences divisées généralisées suivant :

$$\begin{array}{llllll}
2 : f(2) = -5 & : f(2) = -5 \searrow & & & & \\
-1 : f(-1) = 6 & : f(-1) = 6 & \longrightarrow & f[2,-1] = -\dfrac{11}{3} & & \\
& \searrow & & & \searrow & \\
-1 : f'(-1) = -3 & : f(1) = 6 & \longrightarrow & f[-1,-1] = f'(-1) = -3 & \longrightarrow & f[2,-1,-1] = -\dfrac{2}{9}
\end{array}$$

D'où : $\boxed{P(x) = -5 - \dfrac{11}{3}(x-2) - \dfrac{2}{9}(x-2)(x+1)}$.

b) ***Pour ces données, clairement la fonction f admet une racine quelque part entre -1 et 2. Pourquoi ?***

Par hypothèse, la fonction f est dérivable, donc continue. De ce fait, par le *Théorème des valeurs intermédiaires*, on a :

$$f(-1) \times f(2) < 0 \implies \exists\, \alpha \in]-1, 2[\ /\ f(\alpha) = 0.$$

Donc la fonction f admet bien une racine α quelque part entre -1 et 2.

• ***Calculons une approximation numérique $\widetilde{\alpha}$ de cette racine, en donnant $\widetilde{\alpha}$ avec 3 décimales après la virgule.***

On peut considérer le polynôme $P = \mathrm{pH}_{-1,-1,2}\, f$ comme une approximation de la fonction f sur l'intervalle $[-1, 2]$. Une approximation numérique $\widetilde{\alpha}$ de la racine de f dans $]-1, 2[$ peut donc être un réel $\widetilde{\alpha} \in]-1, 2[\ /\ P(\widetilde{\alpha}) = 0$. Or,

$$P(x) = 0 \iff -\frac{2}{9}(x+1)^2 - 3(x+1) + 6 = 0 \iff -\frac{2}{9}t^2 - 3t + 6 = 0, \quad \text{avec } t = x+1,$$

$$\iff 2t^2 + 27t - 54 = 0. \qquad \textbf{(E2.4)}$$

Le discriminant de **(E2.4)** est : $\Delta = 27^2 + 8 \times 54 = 1161 > 0$. Donc **(E2.4)** admet 2 racines réelles distinctes :

$$t_1 = \frac{-27 - \sqrt{1161}}{4}, \qquad t_2 = \frac{-27 + \sqrt{1161}}{4};$$

$\implies$ P admet 2 racines réelles distinctes :

$$x_1 = t_1 - 1 = \frac{-31 - \sqrt{1161}}{4} < -1, \qquad x_2 = t_2 - 1 = \frac{-31 + \sqrt{1161}}{4} \simeq 0{,}768 \in]-1, 2[.$$

Donc on peut prendre $\boxed{\widetilde{\alpha} = 0{,}768}$ comme approximation de la racine α de f dans $]-1, 2[$.

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ANALYSE NUMERIQUE 2011-2012

EXERCICE I :

E.1. Les bases de la méthode de Cholesky

1)

La méthode de Cholesky peut s'appliquer pour résoudre les systèmes linéaires à matrice S.D.P.(symétrique , définie et positive).

2) Théorème à la base de cette méthode

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, S.D.P on a :

1. $\exists L \in M_n(\mathbb{R})$, infT et inversible / $A = L^tL$
2. Sous la contrainte que ses coefficients diagonaux soient strictement positifs, la matrice vérifiant (1) est unique.
3. Avec cette contrainte sur L, (1) est appelée ≪factorisation de Cholesky≫ de la matrice S.D.P.

3) Grandes lignes de la méthode

$$L = (l_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$\forall i = 2(1)n, l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}$$

$$\forall i = 1(1)n, \qquad i = j \quad l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

$$\forall i = j+1(1)n, \ l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}.l_{jk}\right) \Big/ l_{jj}$$

E.2. Stratégie du pivot partiel

1)

Cette méthode consiste à déterminer le plus grand élément en valeur absolue de la colonne ou s'effectue l'élimination.

2) Utilité

Elle réduit la propagation des erreurs d'arrondie.

3) Procédure PIVOT_PARTIEL

```
Procédure PIVOT_PARTIEL (var A :matrice, var b :vecteur, k :entier)
(*Objectif : choix et positionnement d'un pivot en (k,k) supérieur en valeur absolue à tous les autres
éléments de la colonne k*)
(*données : -A ∈ M_n(ℝ), telle qu'issue après l'élimination des colonnes 1à k-1, ie sup.T jusqu'à la
colonne k-1
            -b ∈ ℝ^n, 2nd membre après l'élimination des colonnes 1 à k-1
            -k ∈ [1(1)n − 1] indice de la colonne sur laquelle on doit
    maintenant éliminer*)
(*Résultat : A et b éventuellement modifiées par le positionnement du pivot*)
Variables locales :  i, j, imax : entier ;
                     Aux :réel ;
Début(*PIVOT_PARTIEL*)
    i ← k ;
    imax ← i ;
    pour i=k+1(1)n faire
        si(|A(i,k)|>|A(imax,k)|)faire
            imax ← i ;
        finsi
    finpour
    (*permutation des équations i et k si i≠ k*)
    Si (imax≠ k)alors
        Pour j=k(1)n faire
            Aux ← A(k,j) ;A(k,j) ← A(imax,j) ; A(imax,j) ← aux ;
        Finpour ;
        Aux ← b(k) ;b(k)← b(imax) ; b(imax) ← aux ;
    Finsi
Fin(*PIVOT_PARTIEL*)
```

PROBLEME:

I- Relation entre $pL_{x_0x_1}f$ et $pH_{x_0x_0x_1}f$

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable, et 2 réels distincts $x_0, x_1 \in D_f$.

1) Rappels des définitions :

$pL_{x_0x_1}f$: c'est l'unique polynôme de degré ≤1 qui prend la valeur $f(x_0)$ en x_0 et $f(x_1)$ en x_1.

$pH_{x_0x_0x_1}f$: C'est l'unique polynôme de degré ≤2 qui prend la valeur $f(x_0)$ en x_0 ,$f(x_1)$ en x_1 et dont la dérivée prend la valeur $f'(x_0)$ en x_0.

2)

a) Montrons qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $\left(pH_{x_0x_0x_1}f\right)(x) - \left(pL_{x_0x_1}f\right)(x) = C.(x - x_0)(x - x_1)$

Posons $D(x) = \left(pH_{x_0x_0x_1}f\right)(x) - (pL_{x_0x_1}f)(x)$

On a :

- D(x) est un polynôme comme somme de polynômes donc $\deg(D) \leq \max(\deg\left(pH_{x_0x_0x_1}f\right), \deg\left(pL_{x_0x_1}f\right))$

Or $\deg\left(pH_{x_0x_0x_1}f\right) \leq 2$ et $\deg\left(pL_{x_0x_1}f\right) \leq 1$ donc $\deg(D) \leq 2$ (1)

- $D(x_0) = \left(pH_{x_0x_0x_1}f\right)(x_0) - \left(pL_{x_0x_1}f\right)(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ est une racine de D.
  $D(x_1) = \left(pH_{x_0x_0x_1}f\right)(x_1) - \left(pL_{x_0x_1}f\right)(x_1) = f(x_1) - f(x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1$ est une racine de D.
  (2)

(1) et (2) $\Rightarrow D(x) = C(x - x_1)(x - x_0)$ avec C, une constante réelle.

b) *Valeur de la constante C :*

Dans les notions du cours, C est le coefficient de x^2 parce que nous constatons que $D(x) = Cx^2 - Cx_0x - Cx_1x + Cx_1x_0 = Cx^2 - C(x_1 + x_0)x + Cx_1x_0$ donc C correspond au coefficient de x^2 de plus $pH_{x_0x_0x_1}f \in \mathbb{R}_2[x] \;\Rightarrow\; \boxed{C = f[x_0x_0x_1]}$

II- Plus de précision à propos de $pL_{x_0x_1}f$ sur $[a, b]$, où $x_0 = \frac{2a+b}{3}$, $x_1 = b$

On pose $P_1 = pL_{x_0x_1}f$:

1) *Montrons que l'erreur globale de l'approximation de f par P_1 sur [a,b] est majorée par $C_1.C_2(f).h^r$*

<u>Hypothèse :</u> Supposons que f est de classe c^3 sur [a,b].

D'après le corollaire sur le théorème fondamental de l'érreur d'interpolation, on a :

$|f - P_1| = \frac{M_{3_0}(f)}{3!}|(x - x_0)(x - x_1)|$ avec $M_{3_0}(f) = \sup\limits_{x \in [x_0, x_1]} |f^3(x)|$

Posons $\pi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$

On a , par changement de variable :

$$x - x_0 = \frac{h}{3}(2 - 3s), \quad x - x_1 = -sh,$$

Posons $g(s) = (3s - 2)s = 6s - 2 \quad g(s) = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1}{3}$

s	0	1/3	1
$g'(s)$	-		+
$g(s)$	0 ↘	-1/3	↗ 1

D'après le tableau de variation, $\forall s \in [0,1],\ g(s) \leq 1$

On a donc :

$$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{M_{3_0}(f)}{3!} \times \frac{h^2}{3} \quad or \;\; M_{3_0}(f) \leq M_3(f) = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(3)}(x)\right| \;\Rightarrow\; |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{M_3(f)h^2}{18}$$

Par identification, $\boxed{C_1 = \frac{1}{18}, C_2(f) = M_3(f), r = 2}$

2) Calcul de P_1

a) Sous sa forme de Newton

$$P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

$$f[x_0x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\big(f(x_1) - f(x_0)\big)3}{2h}$$

$$\Rightarrow \quad p_1(x) = f(x_0) + \frac{3\big(f(x_1) - f(x_0)\big)}{2h}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{2h}(3x - 2a - b)}$$

b) Sous sa forme de Lagrange

$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1},\ \ l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ en posant h=b-a nous obtenons :

$$P_1(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x)$$

$$l_0(x) = \frac{3(x - x_1)}{2h}, \quad l_1(x) = \frac{3(x - x_0)}{2h},$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_1(x) = -\frac{3f(x_0)(x - b)}{2h} + \frac{3f(x_1)(x - x_0)}{2h}}$$

Aller à la table de matière

III- Quadrature élémentaire pour le cas [a,b] « petit ».

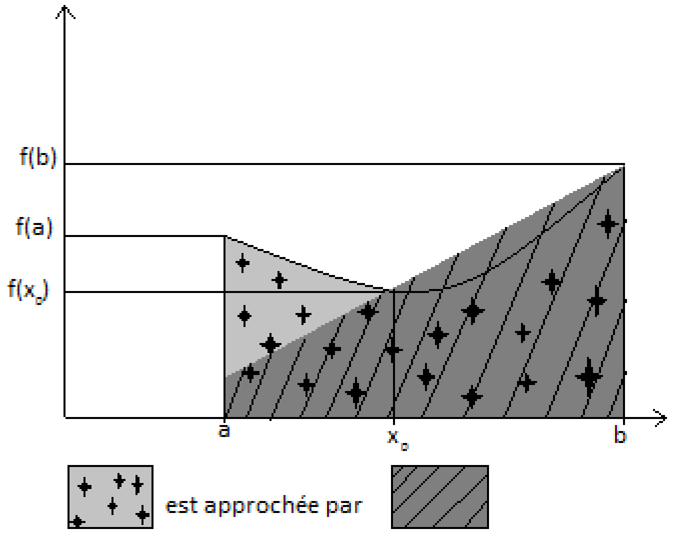
1)

a) Partant de 2, montrons que la valeur approchée est celle donnée :

$$\begin{aligned} Q(f;[a,b]) &= I(P_1;[a,b]) \\ &= \int_a^b P_1(x)dx \\ &= \int_a^b -3\left(\frac{f(x_0)(x-b)}{2h} - \frac{f(x_1)(x-x_0)}{2h}\right)dx \\ &= -\frac{3}{2h}\int_a^b \big(f(x_0)(x-b) - f(x_1)(x-x_0)\big)dx \\ &= -\frac{3}{2h}\left[f(x_0)\int_a^b (x-b)dx - f(x_1)\int_a^b (x-x_0)dx\right] \\ &= \cdots \\ &= h\left[\frac{f(x_0)3}{4} + \frac{f(x_1)1}{4}\right] \end{aligned}$$

Par identification, $\boxed{\begin{matrix}\lambda_0 = \frac{3}{4} \\ \lambda_1 = \frac{1}{4}\end{matrix}}$

b) Graphique



2) $\boldsymbol{E(Q;f,[a,b]) = I(f;[a,b]) - Q(f;[a,b])}$

a) Etablissons que $\boldsymbol{Q(f;[a,b]) = I(P_2;[a,b])}$

D'après la question I.2), $pH_{x_0x_0x_1}f(x) - pL_{x_0x_1}f(x) = C(x-x_0)(x-x_1) \quad \Rightarrow$

$\int_a^b pH_{x_0x_0x_1}f(x)dx - \int_a^b pL_{x_0x_1}f(x)dx = C\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)dx$

$$\Rightarrow \quad I(P_2;[a,b]) - I(P_1;[a,b]) = \int_a^b C.(x-x_0)(x-x_1)dx = \int_0^1 \frac{Ch^2}{3}(3s-2)s \times -hds$$

$$\Rightarrow \quad I(P_2;[a,b]) - I(P_1;[a,b]) = -\frac{Ch^3}{3}[s^3 - s^2]_0^1 = 0$$

Donc $I(P_1;[a,b]) = I(P_2;[a,b]) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q(f;[a,b]) = I(P_2;[a,b])}$

b) Déduisons donc que lorsque f est de classe C^3 sur [a,b],on a l'expression donnée :

$$|E(Q;f,[a,b])| = \left|\int_a^b [f(x) - P_2(x)]dx\right|$$
$$\leq \int_a^b |f(x) - P_2(x)|dx \leq \int_a^b \frac{M_{3_1}(f)}{3!}|(x-x_0)^2(x-x_1)|dx = \frac{M_3(f)}{3!}\int_a^b |(x-x_0)^2(x-x_1)|dx$$

Effectuons un changement de variable : $s = (b-x)/h$ et posons : $J = \int_a^b |(x-x_0)^2(x-x_1)|dx$

$$J = \frac{h^2}{9}\int_1^0 (3s-S)^2 sds \times -h$$

On a : $= \frac{h^4}{9}\int_0^1 (3s-2)^2 sds$ et

$= \frac{h^4}{36}$

$$M_{3_1}(f) = \sup_{x\in[x_0,x_1]} \left|f^{(3)}(x)\right| \leq M_3(f) = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(3)}(x)\right|$$

Ona donc au final :

$$|E(Q;f,[a,b])| \leq \frac{M_3(f)}{6\times 36}h^4 = \frac{M_3(f)}{216}h^4$$

Par identification, $\boxed{P = 4}$

c)

En effet, [a,b] petit signifie que b-a→ 0 or h=b-a → 0 $\Rightarrow \frac{M_3(f)}{216}h^4 \to 0 \Rightarrow |E(Q;f,[a,b])| \to 0$

Donc $\boxed{Q(f;[a,b]) \to I(f;[a,b])}$

3) *Situation idéale lorsque $Q(f;[a,b]) = I(f;[a,b])$*

a)

Elle est idéale parce qu'elle nous permet d'obtenir la valeur de $I(f;[a,b])$ d'une façon plus aisée.

b)

<u>1e manière :</u>

Si f est un polynôme de dégrée deux , alors, $pH_{x_0x_0x_1}f$ étant l'unique polynôme de dégrée ≤2 coïncidant avec f en x_0 et x_1, et dont la dérivée coincide avec f'en x_0, on a : $pH_{x_0x_0x_1}f = f$

Donc $I(f;[a,b]) = I(P_2;[a,b]) = Q(f;[a,b])$

2e manière :

Si f est un polynôme de dégrée deux, alors, la dérivée d'ordre 3 de f est nulle, et donc le max de la dérivée d'ordre 3 de f est nulle. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, |E(Q;f,[a,b])| \leq 0$ d'où on peut dire que f est égale au polynôme d'interpolation de Lagrange.

c)

Lorsque f est un polynôme de dégrée ≤1 , on l'adapte en faisant coïncider la courbe de la fonction f avec celle de $pL_{x_0x_1}f$ autrement dit en joingnat les points $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$ par un segment de droite.

4) Question subsidiaire

« A votre inspiration »

IV- Quadrature composite pour le cas [a,b] « non petit »

1) Description du procédé :

Il s'agit de découper [a,b] en « petits » sous intervalles $[a_{k-1}, a_k]$ pour une subdivision $\delta = (a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b)$

$\forall k = 1(1)n, h_k = a_k - a_{k-1}$ $\boxed{Q_\sigma(f;[a,b]) = \sum_{(k=1)}^n Q(f;[a_{k-1},a_k])}$ avec $Q(f;[a_{k-1},a_k])$ approximation de $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx$.

2)

a) Montrons que si f est de classe C^3 sur [a,b], alors l'érreur d'intégration numérique associée à $Q_\sigma(f;[a,b])$

$$|E(Q_\sigma(f,[a,b])| = |I(f,[a,b]) - Q_\sigma(f;[a,b])| = \left|\sum_{k=1}^n [I(f,[a_{k-1},a_k]) - Q(f;[a_{k-1},a_k])]\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^n |I(f,[a_{k-1},a_k]) - Q(f,[a_{k-1},a_k])| = \sum_{k=1}^n |E(Q;f,[a,b])|$$

Or $|E(Q;f,[a_{k-1},a_k])| \leq \frac{M_{3,k}(f)}{216} h_k^4$ de plus $M_{3,k}(f) = \sup\limits_{x\in[a_{k-1},a_k]} \left|f^{(3)}(x)\right| \leq M_3(f) = \sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f^{(3)}(x)\right|$

D'où $|E(Q_\sigma;f,[a,b])| \leq \sum_{k=1}^n \frac{M_3(f)}{216} h_k^4 = \frac{M_3(f)}{216} \sum_{k=1}^n h_k^4$

Posons $\Delta = \max\limits_{1\leq k\leq n} h_k$ $\sum_{k=1}^n h_k^4 = \sum_{k=1}^n h_k^3 h_k \leq \Delta^3 \sum_{k=1}^n h_k$ $\Delta^3(b-a)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|E(Q_\sigma; f, [a,b])| \leq \frac{M_3(f)}{216}\Delta^3(b-a)}$$

b)

$$\lim_{\Delta\to 0}|E(Q_\sigma; f, [a,b])| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta\to 0} Q_\sigma(f, [a,b]) = I(f, [a,b])$$

c)

Il signifie que, plus les subdivisions sont petites, plus l'approximation est bonne

3)

Oui, elle est meilleure Car elle permet une meilleure majoration de l'erreur d'interpolation c'est-à-dire qu'on a une meilleure estimation de l'erreur approximation et par conséquent une meilleure approximation (voir comparaison cours)

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ANALYSE NUMERIQUE 2010-2011

Exercice

N.B. Dans les calculs analytiques d'intégrales ci-après, on aura intérêt à utiliser le changement de variable : $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\lambda$

1) On prend ici: $\tilde{f} = pL_{ax_0b}f$

   a) **Rappel de la définition de $pL_{ax_0b}f$**

   L'une ou l'autre des formulations suivantes est valable :

   - **Définition 1 :**
     $pL_{ax_0b}f$ est l'*unique polynôme de degré ≤2 qui coïncide avec la fonction f en a, $x_0$et b.*
   - **Définition 2:**
     $pL_{ax_0b}f$ *est l'unique polynôme de degré ≤2 qui prend les mêmes valeurs que f en a,x_0 et b.*
   - **Définition 3:**
     $pL_{ax_0b}f$ *est l'unique polynôme* $P \in \mathbb{R}_2[x]$ *vérifiant :* $P(a) = f(a), P(x_0) = f(x_0)$ *et* $P(b) = f(b)$

Remarque/Commentaire n°1 (Exercice) : $PL_{ax_0b}f$ est appelé « *polynôme d'interpolation de Lagrange de la fonction f relativement aux 3 points a, x_0 et b* »

Mais cela ne le définit pas, car cela ne dit pas ce qu'il est : ce n'est que son appellation !!!

   b) ***L'approximation de I par $\tilde{I}$ obtenue en prenant cette $\tilde{f}$est appelée* « formule de Simpson »**
   Graphique à partir du tracé de la courbe d'une fonction f quelconque (mais>0) sur [a,b] pour expliquer quelle aire de surface est approchée par quelle autre dans cette approximation.
   Cf. Fin de l'exercice.

   c) ***Sans calculs, montrons que si f est une fonction polynôme de degré ≤2, alors $I = \tilde{I}$***
   Supposons que *f* est une fonction polynôme de degré ≤2. Du fait que, de plus, *f* coïncide trivialement avec elle-même en a, x_0 et b, il s'ensuit que $f = pL_{ax_0b}f$, puisque, par définition, $pL_{ax_0b}f$ est l'unique polynôme de degré ≤2 ayant cette propriété.
   Mais $\left(f = pL_{ax_0b}f = \tilde{f}\right) \Rightarrow \int_a^b \tilde{f}(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, i.e. $\tilde{I} = I. CQFD$

   d) ***Partant de la forme de Lagrange de $\tilde{f}$, montrons qu'on a ici :***

$$\tilde{I} = \frac{b-a}{r}[s_1 f(a) + s_0 f(x_0) + s_2 f(b)]$$

   Où r, s_0, s_1, s_2***sont 4 entiers naturels à préciser.***
   NOTA : On admet que $s_1 = s_2$ et $s_1 + s_0 + s_2 = r$

Rappelons d'abord la forme de Lagrange de $\tilde{f} = pL_{ax_0b}f$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = f(a).l_a(x) + f(x_0).l_{x_0}(x) + f(b).l_b(x)}$$

$$avec, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left\{\boxed{\begin{aligned} l_a(x) &= \frac{(x-x_0)(x-b)}{(a-x_0)(a-b)} = \frac{2(x-x_0)(x-b)}{(b-a)^2} \\ l_{x_0}(x) &= \frac{(x-a)(x-b)}{(x_0-a)(x_0-b)} = -4\frac{(x-a)(x-b)}{(b-a)^2} \\ l_b(x) &= \frac{(x-a)(x-x_0)}{(b-a)(b-x_0)} = 2\frac{(x-a)(x-x_0)}{(b-a)^2} \end{aligned}}\right.$$

Passer à l'intégrale dans (E.1) entraîne que : $\tilde{I} = f(a).j_a + f(x_0).j_{x_0} + f(b).j_b$

$$avec: \begin{cases} J_a = \displaystyle\int_a^b l_a(x)dx = \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b (x-x_0)(x-b)dx \\ J_{x_0} = \displaystyle\int_a^b l_{x_0}(x)dx = -\frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx\,, \\ J_b = \displaystyle\int_a^b l_b(x)dx = \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)(x-x_0)dx \end{cases}$$

Pour calculer J_a, J_{x_0} et J_b, considérons le changement de variable : $x = \frac{(a+b)}{2} + \frac{b-a}{2}\lambda$

$$On\ a\ alors: \begin{cases} dx = \dfrac{b-a}{2}d\lambda, \quad x = a \Leftrightarrow \lambda = -1, \quad x = b \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1, \\ x-a = \dfrac{b-a}{2}(\lambda+1), \ x - x_0 = \dfrac{b-a}{2}\lambda, \ x - b = \dfrac{b-a}{2}(\lambda-1) \end{cases}$$

D'où :

$$J_a = \frac{2}{(b-a)^2}\int_{-1}^{1} \frac{b-a}{2}\lambda.\frac{b-a}{2}(\lambda-1).\frac{b-a}{2}d\lambda = \frac{b-a}{4}\int_{-1}^{1}\lambda(\lambda-1)d\lambda$$
$$= \frac{b-a}{4}\int_{-1}^{1}(\lambda^2-\lambda)d\lambda = \frac{b-a}{4}\times 2\int_0^1 \lambda^2 d\lambda = \frac{b-a}{4}\times 2\times\frac{1}{3} = \frac{b-a}{6}$$

$$J_{x_0} = \frac{4}{(b-a)^2}\int_{-1}^{1}\frac{b-a}{2}(\lambda+1).\frac{b-a}{2}(\lambda-1).\frac{b-a}{2}d\lambda = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}(1-\lambda^2)d\lambda$$
$$= \frac{b-a}{2}\times 2\int_0^1(1-\lambda^2)d\lambda = \frac{b-a}{2}\times 2\times\left(1-\frac{1}{3}\right) = 2\frac{b-a}{3}$$

$$J_b = \frac{2}{(b-a)^2}\int_{-1}^{1}\frac{b-a}{2}(\lambda+1).\frac{b-a}{2}\lambda.\frac{b-a}{2}d\lambda = \frac{b-a}{4}\int_{-1}^{1}\lambda(\lambda+1)d\lambda$$
$$= \frac{b-a}{4}\int_{-1}^{1}(\lambda^2+\lambda)d\lambda = \frac{b-a}{4}\times 2\int_0^1\lambda^2 d\lambda = \frac{b-a}{6}$$

$$Où\ a\ été \quad le\ fait\ que \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1}\lambda d\lambda = 0\,, car\ la\ fonction\ \{\lambda \mapsto \lambda\} est\ impaire; \\ \displaystyle\int_{-1}^{1}\lambda^2 d\lambda = 2\int_0^1 \lambda^2 d\lambda\,, car\ la\ fonction\ \{\lambda \mapsto \lambda^2\} est\ paire \end{cases}$$

En insérant les valeurs obtenues de J_a, J_{x_0} et J_b dans (E.2), on arrive à :

$$\tilde{I} = f(a).\frac{b-a}{6} + f(x_0).2.\frac{b-a}{3} + f(b).\frac{b-a}{6}$$

$$\boxed{\tilde{I} = \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(x_0) + f(b)]}$$

Ce qui est bien le résultat demandé, en prenant :

$\boxed{r = 6, s_1 = s_2 = 1, s_0 = 4}$ des entiers c.q.f.d.

Remarque/Commentaire n°2 (Exercice) :

Ceci fait beaucoup de calculs. Mais, en réalité, une lecture attentive de l'énoncé permettait de diviser la quantité de calculs effectués sensiblement par 3. En fait, en tenant compte du **NOTA**, il suffisait de calculer une seule des 3 intégrales ci-dessus pour en déduire le résultat demandé.

En effet, supposons, par exemple avoir calculé $J_a = \frac{b-a}{6}$. On en déduit qu'on doit avoir :

$\frac{s_1}{r} = \frac{1}{6}$. Et comme $s_1 = s_2$ et $s_1 + s_0 + s_2 = r$, alors $\frac{s_2}{r} = \frac{1}{6}$ et $\frac{s_0}{r} = \frac{2}{3}$

D'où qu'on puisse prendre : $r = 6,\ s_1 = s_2 = 1, s_0 = 4$

Mais encore fallait-il préalablement connaître la « forme de Lagrange » du polynôme d'interpolation du même nom !! !Résultat énoncé et démontré en Cours !! !

e) **Montrons que si $f \in \mathcal{C}^3([a,b])$, on a : $|E(I,\tilde{I})| \leq \frac{M_3(f)}{192}.(b-a)^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$**

Supposons f de classe $\mathcal{C}^3$ sur [a,b]. Comme, par définition, $\tilde{f} = pL_{ax_0b}f$, alors, d'après le ***Corollaire*** sur la majoration locale de l'erreur d'interpolation, on a :

$$\boxed{\forall x \in [a,b], \qquad |f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \frac{M_3(f)}{3!}.|\pi_3(x)|}$$

$$avec\ M_3(f) = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(3)}(x)| \quad et \quad \boxed{\pi_3(x) = (x-a)(x-x_0)(x-b)}$$

Par ailleurs, d'après les propriétés bien connues de l'intégrale, on sait que :

$$|E(I,\tilde{I})| = \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b \tilde{f}(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f(x) - \tilde{f}(x)]dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)|dx \quad (E.4)$$

En combinant cette dernière inégalité avec (E.3) il vient : $|E(I,\tilde{I})| \leq \frac{M_3(f)}{3!}\int_a^b |\pi_3(x)|dx$

Par le même changement de variable qu'en 1)d), et avec les calculs qui y on été effectués, on obtient :

$$\int_a^b |\pi_3(x)|dx = \int_{-1}^1 \left|\frac{b-a}{2}(\lambda+1).\frac{b-a}{2}\lambda.\frac{b-a}{2}(\lambda-1)\right|.\frac{b-a}{2}d\lambda = \left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \int_{-1}^1 |\lambda^3 - \lambda|d\lambda$$

Mais, comme la fonction $\{\lambda \mapsto \lambda^3 - \lambda\}$ est impaire, alors $\{\lambda \mapsto |\lambda^3 - \lambda|\}$ est paire.

Et comme $\lambda^3 - \lambda \leq 0$ sur [0,1], il s'ensuit :

$$\int_{-1}^1 |\lambda^3 - \lambda|d\lambda = 2\int_0^1 (\lambda - \lambda^3)d\lambda = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Compte tenu de tout ce qui précède, il vient :

$\left|E(I,\tilde{I})\right| \le \frac{M_3(f)}{6} \times \frac{(b-a)^4}{16} \times \frac{1}{2}$, $i.e.$ $\boxed{\left|E(I,\tilde{I})\right| \le \frac{M_3(f)}{192}.(b-a)^4}$, soit $\boxed{p=4}$ Cqfd.

2) **On prend ici plutôt : $\tilde{f} = pH_{ax_0x_0b}f$**

a) **Rappel de la définition de $pH_{ax_0x_0b}f$**

L'une ou l'autre des formulations suivantes est valable :

- **Définition 1 :**

$pH_{ax_0x_0b}f$ est l'unique polynôme de degré ≤3 qui coïncide avec la fonction f en a, x_0 et b, et dont la dérivée coïncide avec celle de f en x_0.

- **Définition 2 :**

$pH_{ax_0x_0b}f$ est l'unique polynôme de degré ≤ 3 qui prend les mêmes valeurs que f en a, x_0 et b, et dont la dérivée prend la même valeur que celle de f en x_0.

- **Définition 3:**

$pH_{ax_0x_0b}f$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[x]$ vérifiant :

$$P(a) = f(a),\ \ P(x_0) = f(x_0),\ \ P'(x_0) = f'(x_0)\ \ et\ \ P(b) = f(b)$$

Remarque /Commentaire n°3 (Exercice) :

$pH_{a_{x_0x_0b}}f$ est appelé « *polynôme d'**interpolation d'Hermite de la fonction** f **relativement à (a ;0), $(x_0;1)$ et (b ;0)** »*

Mais cela ne le définit pas, car cela ne dit pas ce qu'il est : ce n'est que son appellation !! !

Remarque /Commentaire n°4 (Exercice) :

Une formulation approximative (et ***fausse*** *!*) consiste à dire que « $pH_{ax_0x_0b}f$ est l'*unique polynôme de degré ≤3 qui coïncide avec la fonction f en a, x_0 et b, et avec f' en x_0* ».

En effet, c'est la dérivée P' qui coïncide avec la dérivée f' en x_0, et non $P = pH_{ax_0x_0b}f$!

b) **Montrons que, $\forall x \in \mathbb{R}$: $\left(pH_{ax_0x_0b}f\right)(x) - \left(pL_{ax_0b}f\right)(x) = C.(x-a)(x-x_0)(x-b)$ où C est une constante réelle (i.e. indépendante de x, mais pouvant dépendre de a,b,f), en précisant à quoi est égale C dans les notations du Cours.**

Nous allons proposer 2 méthodes différentes de démonstration de ce résultat.

Méthode 1 : Par le polynôme différence $D = \left(pH_{ax_0x_0b}f\right) - \left(pL_{ax_0b}f\right)$

Posons, $\forall x \in \mathbb{R},\ D(x) = \left(pH_{ax_0x_0b}f\right)(x) - \left(pL_{ax_0b}f\right)(x)$. Ainsi défini, D vérifie :

i) $\left(pH_{ax_0x_0b}f \in \mathbb{R}_3[x] \; et \; pL_{ax_0b}f \in \mathbb{R}_2[x]\right) \Rightarrow (D \in \mathbb{R}_3[x])$

ii) $\left(\forall u \in \{a, x_0, b\}, \left(pH_{ax_0x_0b}f\right)(u) = \left(pL_{ax_0b}f\right)(u) = f(u)\right) \Rightarrow (D(a) = D(x_0) = D(b) = 0)$

Or i) et ii) ⇒∃ C, constante réelle que $\forall x \in \mathbb{R}, D(x) = C.(x-a)(x-x_0)(x-b)$. Cqfd.

De plus, $\left(pH_{ax_0x_0b}f \in \mathbb{R}_3[x] \; et \; pL_{ax_0b}f \in \mathbb{R}_2[x]\right) \Rightarrow$ la constante C est le coefficient de x^3 du polynôme $(pH_{ax_0x_0b}f)(x)$. D'où, selon les notations du Cours : $\boxed{C = f[a, x_0, x_0, b]}$

Méthode 2 : Par la symétrie entre points d'interpolation.

D'après les propriétés de symétrie connues entre points d'interpolation pour les polynômes d'interpolation respectivement de Lagrange et d'Hermite (et qui découlent des définitions rappelées ci-dessus dans nos cas particuliers de cet énoncé), on a :

$pL_{ax_0b}f = pL_{abx_0f} \quad et \quad pH_{ax_0x_0b}f = pH_{abx_0x_0}f$ (E.5)

Or, d'après leurs formes de Newton respectives, on a, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$\left(pL_{abx_0}f\right)(x) = f(a) + f[a,b](x-a) + f[a,b,x_0](x-a)(x-b)$,

$$\left(pH_{abx_0x_0f}\right)(x) = f(a) + f[a,b](x-a) + f[a,b,x_0](x-a)(x-b) + f[a,b,x_0x_0](x-a)(x-b)(x-x_0),$$

$\Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \; \left(pH_{abx_0x_0}f\right)(x) - \left(pL_{abx_0}f\right)(x) = f[a,b,x_0,x_0](x-a)(x-b)(x-x_0)$ (E.6)

En combinant (E.5) et (E.6), il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left(pH_{ax_0x_0b}f\right)(x) - \left(pL_{ax_0}f\right)(x) = f[a,b,x_0,x_0](x-a)(x-x_0)(x-b)$$

D'où le résultat en prenant la constante réelle : $\boxed{C = f[a,b,x_0,x_0] = f[a,x_0,x_0,b]}$ Cqfd.

Remarque/Commentaire n°5 (Exercice) :

On a discuté en Cours sur les permutations permises entre points d'interpolation virtuels dans un polynôme d'interpolation d'Hermite. Et on a alors insisté sur le fait que ce sont celles qui maintiennent les points d'interpolation virtuels égaux entre eux de manière consécutive.

Ainsi, les notations $pH_{ax_0bx_0}f$ et $f[a, x_0, b, x_0]$ ne correspondent à rien !! !

c) Déduisons que l'approximation $\tilde{I}$ de I obtenue ici redonne encore la formule de Simpson.

Il suffit de démontrer qu'on a l'égalité : $\int_a^b \left(pH_{ax_0x_0b}f\right)(x)dx - \int_a^b \left(pL_{ax_0b}f\right)(x)dx$ (E.7)

Or, le résultat de la question précédente entraîne (avec C constante réelle et $\pi_3(x) = (x-a)(x-x_0)(x-b)$) :

$$\int_a^b \left(pH_{ax_0x_0b}f\right)(x)dx = \int_a^b \left(pL_{ax_0b}f\right)(x)dx + C\int_a^b \pi_3(x)dx \quad (E.8)$$

Le calcul effectué à la question 1)e) permet directement d'écrire que :

$$\int_a^b \pi_3(x)dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \int_{-1}^{1} (\lambda^3 - \lambda)d\lambda = 0 \qquad (E.9)$$

Cette dernière valeur venant de ce que la fonction $\{\lambda \mapsto \lambda^3 - \lambda\}$ est impaire.
Mais (E.8) et (E.9) impliquent (E.7).
Ainsi, l'approximation $\tilde{I}$ de I obtenue ici redonne bien, en fait, la formule de Simpson. Cqfd.

d) ***Déduisons alors, sans calculs, que 1)c) reste vrai pour f polynôme de degré ≤3***

Supposons que f est une fonction polynôme de degré ≤3. Du fait que, de plus, f coïncide avec elle-même en a, x_0 et b, et sa dérivée f' coïncide aussi avec elle-même en x_0, il s'ensuit que $f = pH_{ax_0x_0b}f$, puisque, par définition, $pH_{ax_0x_0b}f$ est l'unique polynôme de degré ≤3 ayant cette propriété.

Mais $\left(f = pH_{ax_0b}f = \tilde{f}\right) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(pH_{ax_0x_0b}f\right)(x)dx = \int_a^b \left(pL_{ax_0b}f\right)(x)dx$

La dernière égalité résultant de la question précédente. D'où le résultat. **Cqfd**

e) ***Déduisons aussi l'analogue de 1)e) pour la formule de Simpson lorsque $f \in \mathcal{C}^4([a,b])$***

Supposons f de classe $\mathcal{C}^4$ sur [a,b]. Comme on obtient aussi la formule de Simpson en prenant $\tilde{f} = pH_{ax_0x_0b}f$, plaçons nous donc dans ce cas. Alors, d'après le Corollaire évoqué dessus, on a :

$$\forall x \in [a,b], \left|f(x) - \tilde{f}(x)\right| \leq \frac{M_4(f)}{4!}.|\pi_4(x)| \qquad (E.10)$$

En utilisant encore **(E.4)** combiné ici avec **(E.10)** il vient : $\left|E(I,\tilde{I})\right| \leq \frac{M_4(f)}{4!}\int_a^b |\pi_4(x)|dx$

Par le même changement de variable qu'en **1)d),** et avec les calculs qui y ont été effectués, on obtient :

$$\int_a^b |\pi_4(x)|dx = \int_{-1}^{1} \left|\frac{b-a}{2}(\lambda+1).\left(\frac{b-a}{2}\lambda\right)^2.\frac{b-a}{2}(\lambda-1)\right|.\frac{b-a}{2}d\lambda$$
$$-\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \int_{-1}^{1} \lambda^2(1-\lambda^2)d\lambda$$

Mais, comme la fonction $\{\lambda \mapsto \lambda^2(1-\lambda^2)\}$ est paire, alors :

$$\int_{-1}^{1} \lambda^2(1-\lambda^2)d\lambda = 2\int_0^1 \lambda^2(1-\lambda^2)d\lambda = 2\int_0^1 (\lambda^2 - \lambda^4)d\lambda = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \frac{4}{15}$$

Compte tenu de tout ce qui précède, il vient :

$$\left|E(I,\tilde{I})\right| \leq \frac{M_4(f)}{24} \times \frac{(b-a)^5}{32} \times \frac{4}{15}, \quad i.e. \quad \boxed{\left|E(I,\tilde{I})\right| \leq \frac{M_4(f)}{2880}.(b-a)^5} \quad (E.11)$$

f) ***Montrons comment cette dernière inégalité permet de re-démonter le résultat de 2)d).***

En effet, soit f, une fonction polynôme de degré ≤3 C'est une fonction de classe C^4 sur ℝ, et donc sur [a,b]. On peut ainsi lui appliquer le résultat de la question précédente, soit **(E.11)**. or, $(f\ fonction\ polynôme\ de\ degré \leq 3\ ) \Rightarrow \left(\forall x \in \mathbb{R}, f^{(4)}(x) = 0\right) \Rightarrow (M_4(f) = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right| = 0)$

Combiné avec (E.11), cela implique que $\left|E(I,\tilde{I})\right| \leq 0$ et donc $\left|E(I,\tilde{I})\right| = 0$, i.e. $E(I,\tilde{I}) = 0$ D'où : $\tilde{I} = I$. Cqfd.

3) Question subsidiaire (+1 points)

Justifier l'égalité $s_1 + s_0 + s_2 = r$ (utilisée ci-dessus) comme conséquence de 1)c).

Pour ceux et celles qui ne l'ont pas encore traitée, mais qui sont intéressée, continuer la recherche !! !

Retour au graphique demandé à la question 1)b).

Remarque /commentaire n°6 (Exercice)

Le point dans cette question consistait à remarquer que $\tilde{f} = pL_{ax_0b}f$ étant un polynôme de degré ≤2, sa courbe est un arc de parabole (éventuelle aplati lorsque d°(f̃)<2)).

Ainsi, cette courbe ne peut pas présenter n'importe quelle allure de courbe.

Pour bien illustrer la situation, nous présentons ci-après plusieurs cas de figure relativement représentatifs de ce qui étant souhaitable comme graphique.

PROBLEME

I- Approche 1: produit matriciel préalable, puis Gauss une fois

Ici on calcul d'abord la matrice $M = A^2$ en effectuant un produit matriciel. Ensuite, on résout le système $M.X = b$ par la méthode de Gauss.

1) Procédure algorithmique CARRE_MAT calculant le carré d'une matrice carrée d'ordre n.

NOTA : On admet que l'opérateur de sommation ∑ fait partie du langage de programmation.

Evidemment, il faut déjà se rappeler, au préalable, comment se calculent les coefficients du carré d'une matrice. Rappelons peut-être d'abord, plus généralement, comment s'obtiennent les coefficients d'une matrice produit de 2 matrices carrées d'ordre n. Soient donc A et B, 2 matrices carrées d'ordre n de coefficient génériques respectifs a_{ij} et b_{ij}. Leur matrice-produit C est la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont données par :

$$\boxed{\forall i,j = 1(1)n,\ \ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}$$

En appliquant ceci avec B=A, on voit que les coefficients m_{ij} de la matrice $M = A^2$ sont donnés par :

$$\boxed{\forall i,j = 1(1)n,\ \ m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}}$$

D'où la procédure algorithmique demandée, prenant A en entrée et renvoyant M comme résultat :

Procédure CARRE_MAT(A :matrice, var M :matrice) ;

(* Objectif : Calcul de la matrice $M = A^2$ *)

(* Paramètre(s) entrants(s) :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(* Paramètre(s) sortant(s) :

- $M \in \mathcal{M}_n / M = A^2$*)

Variables locales :

i, j, k :entier ;

(*** Corps de la procédure ***)

Début (*CARRE_MAT*)
Pour i=1(1)n faire
Pour j=1(1)n faire M[i,j]← $\sum_{k=1}^{n} A[i,k] * A[k,j]$;
Fin ; (*CARRE_MAT*)

Remarque/Commentaire n°1 (Problème) :

Dans cette procédure algorithmique, comme dans les suivantes, toute absence d'indentation des instructions ou un indentation fantaisiste on été sévèrement sanctionnées lors de la correction. Idem pour le fait de ne pas mettre les mots-clés en évidente en les soulignant.

Voir le document « Algorithmique de base » pour réapprendre le pourquoi de cette absence de concession sur ces 2 points en termes d'efficacité dans l'écriture des programmes informatiques !

2) Procédure (courte) SOLVE_CARRE_1 résolvant le système (S) comme indiqué ci-dessus.

Procédure SOLVE_CARRE_1(A :matrice ; b :vecteur ; var X :vecteur) ;

(* Objectif : Résolution du système $A^2.X = b$ *)

(* Paramètre(s) entrant(s) :

- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice inversible / $M = A^2$ est la matrice du système ;

- $b \in \mathbb{R}^n$, vecteur-2nd membre du système *)

Variable locale :

A :matrice ;

(*** Corps de la procédure ***)

Début (*SOLVE_CARRE_1*)
CARRE_MAT(A,M) ;
GAUSS_SP(M,b,X) ;
Fin ; (*SOLVE_CARRE_1*)

On signale ci-après, des manières incorrectes (et fatales d'écrire le corps de la procédure précédente.

Remarque/commentaire n° 2(Problème) :

Voici une manière incorrecte d'écrire le corps de la procédure précédente :

```
Debut (*SOLVE_CARRE_1*)
     CARRE_MAT(A :matrice ; var M :matrice) ;
     GAUSS_SP(A :matrice ;b :vecteur ;var X :vecteur) ;
Fin (* SOLVE_CARRE_1 *)
```

L'erreur ici consiste à appeler une procédure en recopiant pratiquement son en-tête, notamment avec les types des paramètres.

Remarque/Commentaire n°3(Problème) :

Voici une autre manière incorrecte d'écrire le corps de la procédure précédente :

```
Debut (*SOLVE_CARRE_1*)
     Procedure CARRE_MAT(A,M) ;
     ProcedureGAUSS_SP(A,b,X) ;
Fin (* SOLVE_CARRE_1 *)
```

L'erreur vient de ce que le mot-clé Procédure n'a rien à faire ici. En effet, il début l'en-tête de la procédure, mais n'a pas à paraître dans une instruction appelant la procédure.

3) ***Coût numérique de cette manière de résoudre (S).***
Le cout numérique de cette manière de résoudre (S) est la coût de la procédure CARRE_MAT ajouté à celui , rappelé plus haut, de GAUSS_SP.

Dans CARRE_MAT, on calcule les n^2 coefficients de la matrice $M = A^2$. Or, pour chacun de ces coefficients, on fait n multiplications et n-1 additions. D'où le coût numérique de CARRE_MAT :

$\boxed{n^2(n+1)(+)\ et\ n^3(\times)}$, soit $\boxed{n^2(2n-1) \approx 2n^3\ opérations\ en\ virgule\ flottante\ (O.v.f.)}$

Compte tenu du coût numérique de GAUSS_SP, celui de SOLVE_CARRE_1 est donc :

$$\frac{n^3-n}{3} + n^2(n-1)(+), \frac{n^3-n}{3} + n^3(\times), \frac{n^2+n}{2}\ (\div)$$

$$i.e.\ \boxed{\frac{n(n-1)(4n+1)}{3}(+), \frac{4n^3-n}{3}(\times), \quad \frac{n^2+n}{2}(\div)},\ soit\ \boxed{\frac{n(16n^2-3n-1)}{6} \approx \frac{3n^3}{3}\ \ O.v.f.}$$

II- Approche 2: Sans produit matrice, mais par Gauss 2 fois successives.

Pour résoudre (S) ici, on ne calcule pas du tout la matrice $M = A^2$, on considère plutôt qu'il suffit de résoudre successivement 2 systèmes de Cramer appropriés de matrice A, chacun par la méthode de Gauss ?

1) Donnons les grandes lignes du travail à faire montrant comment cela est possible.
On a les équivalences : $A^2.X = b \iff (A.A).X = b \iff A(A.X) = b \iff A.Y = b$
Où on a posé : $Y = A.X$. Or, Y est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ aussi inconnu que X.. Pour résoudre le système (S), on peut alors enchaîner les 2 résolutions successives suivantes :
    1. Résolution de A.Y=b, par la méthode de Gauss, ce qui va nous donner Y dans $\mathbb{R}^n$
    2. Résolution de A.X==Y (Y calculer en 1.), par la méthode de Gauss, ce qui va nous donner X.

A la sortie de la résolution du 2ème système ci-dessus, on aura donc obtenu le vecteur X, solution de (S)

2) Procédure (courte) SOLVE_CARRE_2 résolvant le système (S) par cette approche.

Procédure SOLVE_CARRE_2(A :matrice ;b :vecteur ;var X :vecteur) ;
(*Objectif : Résolution du système $A^2.X = b$ *)
(* Parametre(s) entrant(s) :
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice inversible $/M = A^2$ est la matrice du système ;
- $b \in \mathbb{R}^n$, vecteur-2nd membre du système *)
(* Paramètre(s) sortant(s) :
- $X \in \mathbb{R}^n$, vecteur-solution de $A^2.X = b$, obtenu par résolution successive des systèmes de Cramer $A.Y = b$, puis $A.X = Y$, par la méthode de Gauss avec stratégie du pivot partiel *)
Variables locales :
Y :vecteur ;
(*** Corps de la procédure ***)
Debut (* SOLVE_CARRE_2 *)
GAUSS_SP(A,b,Y) ;
GAUSS_SP(A,Y,X) ;

Fin ; (* SOLVE_CARRE_2 *)

3) Approche la plus efficace entre cette façon de résoudre (S) et celle de I

Il s'agit de comparer les coûts numériques respectifs de SOLVE_CARRE_1 et SOLVE_CARRE_2. Pour cela, ayant déjà obtenu celui de SOLVE_CARRE_1 précédemment, attelons nous d'abord ici à déterminer le coût numériques de SOLVE_CARRE_2

Le coût numérique de SOLVE_CARRE_2 est simplement le double de celui de GAUSS_SP, soit :

$$\boxed{2\frac{n^2-n}{3}(+), 2\frac{n^3-n}{3}(\times), \qquad n^2+n\,(\div)},$$

$$soit \ \boxed{\frac{n(n+1)(4n-1)}{3} \approx \frac{4n^3}{3} O.V.F.}$$

Comme $\frac{4n^3}{3} < \frac{8n^3}{3}$, SOLVE_CARRE_2 coûte donc sensiblement moitié moins que SOLVE_CARRE_1.

Conclusion : $\boxed{Pour\ résoudre\ (S), l'approche de\ II\ est\ plus\ efficace\ que\ celle\ de\ I}$

Remarque /commentaire n°4 (Problème)

Une manière assez aérienne de conclure consistait à détermine seulement le coût numérique de SOLVE_CARRE_2, puis à affirmer péremptoirement :

« Donc SOLVE_CARRE_2 est plus efficace que SOLVE_CARRE_1 »

Ceci est, pour le moins une affirmation gratuite : quelle est la base pour la valider ?

III- Approche 3 : Affinage de l'Approche 2

Du fait qu'on y résout successivement 2 systèmes de Cramer de même matrice par la même méthode, mais indépendamment, l'Approche 2 présente, malgré l'es apparences, une inefficacité algorithmique assez significative. En effet une quantité importante d calculs et d'instructions y sont exécutés 2 fois.

Remarque /Commentaire n°5 (Problème) :

Une lecture « entre les lignes » de l'énoncé suggère assez nettement que l'expression « malgré les apparences » dans le paragraphe ci-dessus est une indication assez claire de la réponse à la dernière question de II. Elle aurait dû aider, ne serait-ce que rétroactivement, le lecteur (ou la lectrice) confronté(e) à cette épreuve. Dommage que certain(e)s ne l'ait pas perçu comme cela !

1) Lors de l'exécution de la procédure SOLVE_CARRE_2, instructions et/ou séquences d'instructions de l'algorithme de la méthode de Gauss qui seront exécutés 2 fois, respectivement:
   a) Dans les recherches et le positionnement du pivot l'élimination sur une colonne k ?

(*Recherche de l'indice $i_{\max}$ tel que $|A[i_{\max}, k]| = \max_{k\le i\le n} |A[i,k]|$ *)

$i_{\max} \leftarrow k$;

Pour $i = k+1(1)n$ faire

    Si $|A[i,k]| > |A[i_{\max}, k]|$ alors $i_{\max} \leftarrow i$;

(* permutation des lignes $i_{\max}$ et k de la matrice A si $i_{\max} \neq k$ *)

<u>Si</u>$i_{\max} \neq k$<u>alors</u>   <u>Pour</u>$i = k + 1(1)n$<u>faire</u>   <u>Debut</u> $aux \leftarrow A[i_{\max}, j]$; $A[i_{\max}, j] \leftarrow A[k, j]$; $A[k, j] \leftarrow aux$;   <u>Fin</u> ;

b) *Dans l'élimination de Gauss?*

<u>Pour</u> k=1(1)n-1 <u>faire</u>
    <u>Pour</u> i=k+1(1)n <u>faire</u>
        <u>Début</u>
            $l_{ik} \leftarrow A[i, k]/A[k, k]$;
            <u>Pour</u> j=k+1(1)n <u>faire</u>$A[i, j] \leftarrow A[i, j] - l_{ik} * A[k, j]$;
        <u>Fin</u>

2) ***Dans ces conditions, il est souhaitable de ne pas appeler la procédure GAUSS_SP pour résoudre successivement, et indépendamment, chacun des 2 systèmes de matrice A de l'Approche 2. Il faut plutôt écrire une nouvelle procédure algorithmique GAUSS_CARRE effectuant ces 2 résolutions successives, par la méthode de Gauss avec stratégie du pivot partiel. Mais en évitant tout calcul ou instruction redondant(e).***

Ecrivons cette procédure algorithmique GAUSS_CARRE.

1. Dans la recherche et le positionnement du pivot pour l'élimination sur une colonne k :

(*permutation des coordonnées $i_{\max}$ et k du 2nd membre *) <u>Si</u>$i_{\max} \neq k$<u>alors</u>   <u>Debut</u> $aux \leftarrow b[i_{\max}]$; $b[i_{\max}] \leftarrow b[k]$; $b[k] \leftarrow aux$;   <u>Fin ;</u>

2. Dans l'élimination de Gauss:

<u>Pour</u> k=1(1)n-1 <u>faire</u>   <u>Pour</u> i=k+1(1)n <u>faire</u> b[i] ← b[i]-l_{ik}*b[k];

Le problème est alors de concevoir une procédure algorithmique pour résoudre (S) et dans laquelle:

- Les instructions d'élimination ne modifiant que les coefficients de la matrice A, et repérées aux questions 1)a) et b) , ne seront exécutées qu'une seule fois;
- Par contre, celle affectant le 2nd membre, et signalées ci-dessus, devront être exécutées :
  - Une fois pour la résolution de A.Y=b, avec le 2nd membre b du système (S) ;

- Puis une 2e fois pour la résolution de A.X = Y, avec comme 2nd membre le vecteur Y obtenu comme solution du 1er système.

Cependant, il est fondamental de noter que, dans les instructions affectant le 2nd membre, apparaissent des variables dont la valeur est, en fait, calculée ou déterminée pendant les instructions d'élimination dans la matrice A. Ce sont :

- Les valeurs successives de l'indice $i_{\max}$ trouvées lors de la recherché du pivot pour l'élimination sur les colonnes de A, pour k=1(1)n-1;
- Les valeurs des coefficients l_{ik} calculées pendant l'élimination dans A.

Pour ne pas avoir à les calculer ou déterminer 2 fois, il faut donc stocker les valeurs successives prises par $i_{\max}$ et celles des l_{ik} de mamnière appropriée pendant l'élimination dans A. Ceci en vue de pouvoir les utiliser pour les calculs d'élimination concernant le 2nd membre, d'abord pour le 1er , ensuite pour le 2ème système. Nous ferons cela de la manière suivante :

1. Stockage des valeurs successives de l'indice $i_{\max}$
   Elles seront stockées comme éléments d'un tableau d'entiers T de telle sorte que :
   $\forall k = 1(1)n-1, T[k]$
   $= valeur\ de\ i_{\max}\ \ trouvée\ au\ début\ de\ l'éliminationsur\ la\ colonne\ k\ de\ A$
   Pour cela, T sera une variable de type **tabEnt**, type que nous créons comme suit :
   Type :tabEnt = tableau[1…n] d'entiers ;
2. Stockage des valeurs des coefficients l_{ik}
   Comme on sait qu'après le calcul de $l_{ik} = A[i,k]/A[k,k]$, on n'aura plus besoin du contenu du coefficient A[i,k] (censé être devenu nul), on va donc garder cette valeur de l_{ik} dans A[i,k].

La procédure GAUSS CARRE

La procédure GAUSS_CARRE que nous allons écrire, et concrétisant l'analyse précédente, appellera, en plus de la procédure REMONTEE, 4 procédure auxiliaires que nous écrivons préalablement :

1. PIVOT_PARTIEL_NEW, version de l'habituelle procédure PIVOT_PARTIEL dans laquelle ont été supprimées toutes les permutations dans le 2nd membre, et renvoyant l'indice de ligne du pivot ;
2. ELIM_GAUSS_MAT et ELIM_GAUSS_vec, issues du découpage en deux de l'habituelle procédure d'élimination de Gauss, l'une récupérant les instructions sur la matrice, et l'autre celles affectant le 2nd membre (mais en utilisant les valeurs de $i_{\max}$ et des l_{ik} déterminées et stockées par la première)
3. ECHANGE, une procédure (très courte qui échanges les valeurs de 2 variables de type réel.

Procédure PIVOT_PARTIEL_NEW(k :entier ; var A :matrice ;var i_{max} :entier) ;
(* Objectif : Recherche et positionnement du pivot en (k,k), selon la stratégie du pivot partiel, pour l'élimination de Gauss sur la colonne k dans la matrice A, avec sauvegarde l'indice de la ligne du pivot trouvée. *)

(* Paramètre(s) entrant(s) :
- A∈$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, déjà sup-triangulaire des colonnes 1 à k-& ;
-k∈ [1(1)n-1], indice de la colonne où on doit maintenant éliminer *)
(* paramètre(s) sortant(s) :
- i_{max}∈ [k(1)n], indice de la ligne de A où le pivot aura été trouvé ;
- A modifiée par le positionnement de ce pivot en (k,k) (si i_{max}≠ k) *)
Variables locales :
I,j :entier ;
(*** Corps de la procédure ***)
Début (* PIVOT_PARTIEl_NEW *)
(* recherche de l'indice i_{max} tel que |A[i_{max},k]|= $\max_{k\leq i\leq n} |A[i,k]|$ *)
I_{max} ← k ;
Pour i=k+1(1)n faire
Si |A[i,k]|>|A[i_{max},k]| alors i_{max} ← i ;
(*Permutation des lignes i_{max} et k de la matrice A si i_{max} ≠ k *)
Si i_{max}≠ k alorspour j=k(1)n faire ECHANGE(A[i_{max},j],A[k,j]) ;
Fin ; (* PIVOT_PARTIEL_NEW *)

Procédure ECHANGE(var x,y :réel) ;
(* Objectif : Echange des valeurs de 2 variables x et y de type réel. *)
(* Paramètre(s) entrant(s) :
- x et y, les 2 variables réelles dont les valeurs doivent être inter changées *)
(* paramètre(s) sortant(s) :
- x et y dont les valeurs ont été inter changées *)
Variables locales :
Aux : réel ;
(*** Corps de la procédure ***)
Début (* ECHANGE *)
Aux ← x ; x← y ; y← aux ;
Fin ; (* ECHANGE *)

Procédure ELIM_GAUSS_MAT (var A :matrice ;var t:tabEnt);
(* Objectif: Elimination de Gauss dans la matrice A, avec stratégie du pivot partiel, et stockage dans T des indices des lignes des pivots successifs sur les colonnes. *)
(* paramètres(s) entrant(s):
- A∈$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice inversible*)
(* paramètre(s) sortant(s) :
- A, devenue sup-triangulaire, mais contenant aussi, dans sa partie inf-triangulaire stricte, les coefficients l_{ik} calculés pendant l'élimination ;
- T, tableau contenant les indices des lignes des pivots successifs *)

Variables locales :
I,j,k :entier ;
(*** corps de la procédure ***)
Début (* ELIM_GAUSS_MAT *)
Pour k=1(1)n-1 faire
Début (* Elimination dans la colonne k*)
(* Recherche, puis positionnement du pivot en (k,k) *)
PIVOT_PARTIEL_NEW(k,A,T[k]) ;
(* Elimination proprement dite dans la colonne k de A *)
Pour i=k+1(1) n faire
Début
A[i,k] ← A[i,k]/A[k,k] ;
Pour j=k+1(1)n faire A[i,j] ← A[i,j]-A[i,k]*A[k,j] ;
Fin;
Fin;(* Elimination dans la colonne k *)
Fin; (* ELIM_GAUSS_MAT *)

Remarque/Commentaire n°8 (Problème):

Compte tenu de l'en-tête de la procédure PIVOT_PARTIEL_NEW écrite précédemment, à la sortie de l'instruction « PIVOT_PARTIEL_NEW (k,A,T[k]) ; » dans la procédure ELIM_GAUSS_MAT ci-dessus, l'élément T[k] du tableau T contiendra la valeur de l'indice i_{max} de la ligne de A où aura été trouvé le pivot pour l'élimination sur la colonne k.

Procédure ELIM_GAUSS_vec(A :matrice ;T :tabEnt ;var b :vecteur) ;
(* objectif : Effet sur le 2^{nd} membre b de l'élimination de Gauss avec stratégie du pivot partiel dans un système A.X=b, en utilisant les informations recueillies au cours de l'élimination correspondante dans la matrice A. *)
(* paramètre(s) entrant(s) :
- A et T tels qu'issus d'ELIM_GAUSS_MAT ;
- $b \in \mathbb{R}^n$, vecteur 2^{nd} membre du système *)
(* paramètre(s) sortant(s) :
- b, modifié par cette élimination de Gauss avec stratégie du pivot partiel *)
Variables locales : i,k :entier ;
(*** Corps de la procédure ***)
Début (* ELIM_GAUSS_vec *)
Pour k=1(1)n-1 faire
Début (* Elimination dans la colonne k de A : effet sur le 2^{nd} membre *)
(* Permutation des coordonnées k et T[k] de b*)
Si T[k]≠ k alors ECHANGE(b[T[k]],b[k]) ;
(* Effet sur le 2^{nd} membre de l'élimination proprement dite dans A *)

Pour i=k+1(1)n faire b[i]← b[i]-A[i,k]*b[k] ;
Fin;(* élimination dans la colonne k de A: effet sur le 2nd membre *)
Fin ;(* ELIM_GAUSS_vec*)

Procédure GAUSS_CARRE(A :matrice ; b :vecteur ;var X :vecteur);
(* objectif : Résolution efficace du système $A^2.X=b$ *)
(* paramètre(s) entrant(s) :
- A $\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice inversible / $M=A^2$ est la matrice du système ;
- b$\in\mathbb{R}^n$, vecteur 2nd membre du système *)
(* paramètre(s) sortant(s) :
- X $\in\mathbb{R}^n$, vecteur-solution de $A^2.X=b$, obtenu par résolution successive efficace des systèmes de Cramer A.Y=b, puis A.X=Y, par la méthode de Gauss avec stratégie du pivot partiel*)
Variables locales : Y : vecteur ;T :tabEnt ;
(*** Corps de la procédure ***)
Début (* GAUSS_CARRE *)
(* Elimination de Gauss, avec stratégie du pivot partie, dans la matrice A *)
ELIM_GAUSS_MAT(A,T) ; (* Après ceci, A est devenue sup-triangulaire *)
ELIM_GAUSS_vec(A,T,b) ; (*Effet de l'élimination sur son 2nd membre b*)
REMONTEE (A,b,Y) ; (*Résolution du système sup-triangulaire obtenu *)
(* Résolution du 2ème système : A.X=Y *)
ELIM_GAUSS_vec(A,T,Y) ; (*Effet de l'élimination sur son 2nd membre Y*)
REMONTEE (A,Y,X) ; (* Résolution du système sup-triangulaire obtenu *)
Fin ;(* GAUSS_CARRE *)

Remarque/Commentaire n° 9 (Problème) :

De même qu'il n'y a pas une manière unique de résoudre un problème mathématique, il n'y a pas, non plus, une solution algorithmique unique à un problème donné (même s'il y a des solutions qui sont clairement plus efficaces que d'autres, en termes de temps d'exécution).

Ainsi, la version de la procédure GAUSS_CARRE écrite ci-dessus n'est, évidemment, absolument pas impérative. Diverses variantes, tout aussi algorithmiquement valables, étaient (et sont), bien entendu, envisageables.

La version présentée ici a visé à mettre bien en évidence la structure logique de ce qu'est censé faire GAUSS_CARRE, en le répartissant en procédures auxiliaires exécutant, chacune ***une sous-tâche identifiable et bien précise de ce travail.***

3)

b) Quel est le coût numérique de cette façon de résoudre (S)?

Un examen de la structure logique de la procédure GAUSS_CARRE permet de repérer assez rapidement la répartition de son coût numérique. En effet,

1. Le bloc formé par les 3 premières instructions (I.E. 3 appels de procédure) est équivalent, en fait, à l'algorithme de Gauss pour résoudre un système de Cramer d'ordre n (ici A.Y=b) avec stratégie du pivot partiel. Ainsi, le coût de ce bloc est le même que celui de la procédure GAUSS_SP, i.e. :

$$\boxed{\frac{n^3-n}{3}(+),\frac{n^3-n}{3}(\times),\frac{n^2+n}{2}(\div)},\quad soit\quad \boxed{\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}\quad O.v.f.}$$

2. Il faut donc y ajouter les coûts numériques respectifs de :
   2.1.L'appel de procédure

ELIM_GAUSS_vec(A,T,Y) ;

Obtenu en examinant le corps de la procédure ELIM_GAUSS_vec. Ce coût est celui de la répétition, pour k=1(1)n-1, de la boucle :

<u>Pour</u> i=k+1(1)n <u>faire</u> b[i] ← b[i]-A[i,k]*b[k] ;

Soit, sachant que $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) \underset{j=n-k}{=} \sum_{j=1}^{n-1} j$:

$$\boxed{\frac{n(n-1)}{2}(+),\frac{n(n-1)}{2}(\times),n(\div)}$$

D'où le bilan final de GAUSS_CARRE :

$$\frac{n^3-n}{3}+2\frac{n(n-1)}{3}(+),\frac{n^3-n}{3}+2\frac{n(n-1)}{2}(\times),\frac{n^2+n}{2}+n\,(\div)$$

$$i.e.\ \boxed{\frac{n(n-1)(n+4)}{3}(+),\frac{n(n-1)(n+4)}{3}(\times),\frac{n(n+3)}{2}(\div)}$$

$$soit\ \boxed{\frac{n(4n^2+15n-7)}{6}\approx\frac{2n^3}{3}\ O.v.f.}$$

Remarque/Commentaire n°10 (Problème) :

En fait, le coût de cette manière de résoudre (S) est sensiblement le même que celui pour résoudre un seul système de Cramer d'ordre n par la méthode de Gauss avec stratégie du pivot partiel. S'y ajoutent seulement $2n^2-n\ \ O.v.f.$

c) Comparée à GAUSS_CARRE, quel est le degré d'inefficacité de SOLVE_CARER_2?

Etant donné que, pour résoudre le système (S), GAUSS_CARRE fait sensiblement $2n^3/3$ O.v.f., tandis que SOLVE_CARRE_2 en fait $4n^3/3$, alos le degré d'inefficacité de SOLVE_CARRE_2, comparée à GAUSS_CARRE, peut être évalué à :

$$\frac{\left(\frac{4n^3}{3}\right) - \left(\frac{2n^3}{3}\right)}{\frac{2n^3}{3}} = 1 = \boxed{100\%}$$

Informations complémentaires

En réalité, les données de ce problème avaient été légèrement simplifies pour les besoins de la cause. En effet, les nombres d'additions et de multiplications donnés, au début de l'énoncé, dans le coût de la méthode de Gauss sont, en fait, ceux de la seule *phase d'élimination.* On y a donc, en quelque sorte, « laisser tomber » les additions et multiplications effectuées pour résoudre le système sup-triangulaire équivalent issus de l'élimination de Gauss dans le système de Cramer initial. La motivation derrière cette « manœuvre » était quadruple :

1. Cela simplifiait quelque peu les calculs de coûts numériques dans le problème ;
2. Mais cela ne changeait pas les ordres de grandeur de ces coûts numériques ;
3. Par conséquent cela n'impactait pas sur les comparaisons de coûts numériques dans ce Problème ;
4. Ainsi, les conclusions tirées, en termes de comparaison d'efficacité entre les diverses approches examinées pour résoudre le système $A^2.X = b$, sont les mêmes que celles qu'on aurait obtenues en considérant les nombres exactes d'additions set de multiplications effectués dans la méthode de Gauss.

Cependant, on a le droit d'être puriste, et ne pas apprécier cette « manœuvre simplificatrice » de l'énoncé. Dans ce cas « pour redresser les torts », nous vous invitons à traiter l'Exercice complémentaire ci-après :

EXERCICE (*complémentaire)*

Reprendre les calculs et comparaison de coûts numériques du problème en partant du vrai coût numérique de la méthode Gauss.

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ANALYSE NUMERIQUE 2011-2012

EXERCICE I :

E.3. *Les bases de la méthode de Cholesky*

4)

La méthode de Cholesky peut s'appliquer pour résoudre les systèmes linéaires à matrice S.D.P.(symétrique , définie et positive).

5) Théorème à la base de cette méthode

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, S.D.P on a :

4. $\exists L \in M_n(\ \mathbb{R})$, infT et inversible / $\quad A = L^t L$
5. Sous la contrainte que ses coefficients diagonaux soient strictement positifs, la matrice vérifiant (1) est unique.
6. Avec cette contrainte sur L, (1) est appelée ≪factorisation de Cholesky≫ de la matrice S.D.P.

6) Grandes lignes de la méthode

$$L = (l_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$\forall i = 2(1)n, l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}$$

$$\forall i = 1(1)n, \qquad i = j \quad l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

$$\forall i = j + 1(1)n,\ \ l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}.l_{jk}\right) \Big/ l_{jj}$$

E.4. *Stratégie du pivot partiel*

4)

Cette méthode consiste à déterminer le plus grand élément en valeur absolue de la colonne ou s'effectue l'élimination.

5) Utilité

Elle réduit la propagation des erreurs d'arrondie.

6) Procédure PIVOT_PARTIEL

```
Procédure PIVOT_PARTIEL (var A :matrice, var b :vecteur, k :entier)
(*Objectif : choix et positionnement d'un pivot en (k,k) supérieur en valeur absolue à tous les autres
éléments de la colonne k*)
(*données : -A ∈ Mn(ℝ), telle qu'issue après l'élimination des colonnes 1à k-1, ie sup.T jusqu'à la
colonne k-1
              -b ∈ ℝ^n, 2nd membre après l'élimination des colonnes 1 à k-1
              -k ∈ [1(1)n − 1] indice de la colonne sur laquelle on doit
    maintenant éliminer*)
(*Résultat : A et b éventuellement modifiées par le positionnement du pivot*)
Variables locales :  i, j, imax : entier ;
                     Aux :réel ;
Début(*PIVOT_PARTIEL*)
    i ← k ;
    imax ← i ;
    pour i=k+1(1)n faire
        si(|A(i,k)|>|A(imax,k)|)faire
            imax ← i ;
        finsi
    finpour
    (*permutation des équations i et k si i≠ k*)
    Si (imax≠ k)alors
        Pour j=k(1)n faire
            Aux ← A(k,j) ;A(k,j) ← A(imax,j) ; A(imax,j) ← aux ;
        Finpour ;
        Aux ← b(k) ;b(k)← b(imax) ; b(imax) ← aux ;
    Finsi
Fin(*PIVOT_PARTIEL*)
```

PROBLEME:

V- Relation entre $pL_{x_0x_1}f$ et $pH_{x_0x_0x_1}f$

Soient $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable, et 2 réels distincts $x_0, x_1 \in D_f$.

3) Rappels des définitions :

$pL_{x_0x_1}f$: c'est l'unique polynôme de degré ≤1 qui prend la valeur $f(x_0)$ en x_0 et $f(x_1)$ en x_1.

$pH_{x_0x_0x_1}f$: C'est l'unique polynôme de degré ≤2 qui prend la valeur $f(x_0)$ en x_0 ,$f(x_1)$ en x_1 et dont la dérivée prend la valeur $f'(x_0)$ en x_0.

4)

c) Montrons qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $\left(pH_{x_0x_0x_1}f\right)(x) - \left(pL_{x_0x_1}f\right)(x) = C.(x - x_0)(x - x_1)$

Posons $D(x) = \left(pH_{x_0x_0x_1}f\right)(x) - \left(pL_{x_0x_1}f\right)(x)$

On a :

- D(x) est un polynôme comme somme de polynômes donc $\deg(D) \leq \max\left(\deg\left(pH_{x_0x_0x_1}f\right), \deg\left(pL_{x_0x_1}f\right)\right)$

Or $\deg\left(pH_{x_0x_0x_1}f\right) \leq 2$ et $\deg\left(pL_{x_0x_1}f\right) \leq 1$ donc $\deg(D) \leq 2$ (1)

- $D(x_0) = \left(pH_{x_0x_0x_1}f\right)(x_0) - \left(pL_{x_0x_1}f\right)(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ est une racine de D.
  $D(x_1) = \left(pH_{x_0x_0x_1}f\right)(x_1) - \left(pL_{x_0x_1}f\right)(x_1) = f(x_1) - f(x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1$ est une racine de D.
  (2)

(2) et (2) $\Rightarrow D(x) = C(x - x_1)(x - x_0)$ avec C, une constante réelle.

d) *Valeur de la constante C :*

Dans les notions du cours, C est le coefficient de x^2 parce que nous constatons que $D(x) = Cx^2 - Cx_0x - Cx_1x + Cx_1x_0 = Cx^2 - C(x_1 + x_0)x + Cx_1x_0$ donc C correspond au coefficient de x^2 de plus $pH_{x_0x_0x_1}f \in \mathbb{R}_2[x] \;\Rightarrow\; \boxed{C = f[x_0x_0x_1]}$

VI- Plus de précision à propos de $pL_{x_0x_1}f$ sur $[a, b]$, où $x_0 = \frac{2a+b}{3}$, $x_1 = b$

On pose $P_1 = pL_{x_0x_1}f$:

3) *Montrons que l'erreur globale de l'approximation de f par P_1 sur [a,b] est majorée par $C_1.C_2(f).h^r$*

<u>Hypothèse :</u> Supposons que f est de classe c^3 sur [a,b].

D'après le corollaire sur le théorème fondamental de l'érreur d'interpolation, on a :

$|f - P_1| = \frac{M_{3_0}(f)}{3!}|(x - x_0)(x - x_1)|$ avec $M_{3_0}(f) = \sup\limits_{x \in [x_0, x_1]} |f^3(x)|$

Posons $\pi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$

On a , par changement de variable :

$$x - x_0 = \frac{h}{3}(2 - 3s), \quad x - x_1 = -sh,$$

Posons $g(s) = (3s - 2)s = 6s - 2 \quad g(s) = 0 \Leftrightarrow s = \frac{1}{3}$

s	0 1	1/3
$g'(s)$	-	+
$g(s)$	0 ↘	-1/3 ↗ 1

D'après le tableau de variation, $\forall s \in [0,1],\ g(s) \leq 1$

On a donc :

$$|f(x) - P_1(x)| \leq \frac{M_{3_0}(f)}{3!} \times \frac{h^2}{3} \quad or\ \ M_{3_0}(f) \leq M_3(f) = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(3)}(x)\right| \Rightarrow \quad |f(x) - P_1(x)| \leq \frac{M_3(f)h^2}{18}$$

Par identification, $\boxed{C_1 = \frac{1}{18}, C_2(f) = M_3(f), r = 2}$

4) Calcul de P_1

c) Sous sa forme de Newton

$$P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

$$f[x_0x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\big(f(x_1) - f(x_0)\big)3}{2h}$$

$$\Rightarrow \quad p_1(x) = f(x_0) + \frac{3\big(f(x_1) - f(x_0)\big)}{2h}(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{2h}(3x - 2a - b)}$$

d) Sous sa forme de Lagrange

$l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1},\ \ l_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ en posant h=b-a nous obtenons :

$$P_1(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x)$$

$$l_0(x) = \frac{3(x - x_1)}{2h}, \quad l_1(x) = \frac{3(x - x_0)}{2h},$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P_1(x) = -\frac{3f(x_0)(x - b)}{2h} + \frac{3f(x_1)(x - x_0)}{2h}}$$

VII- Quadrature élémentaire pour le cas [a,b] « petit ».

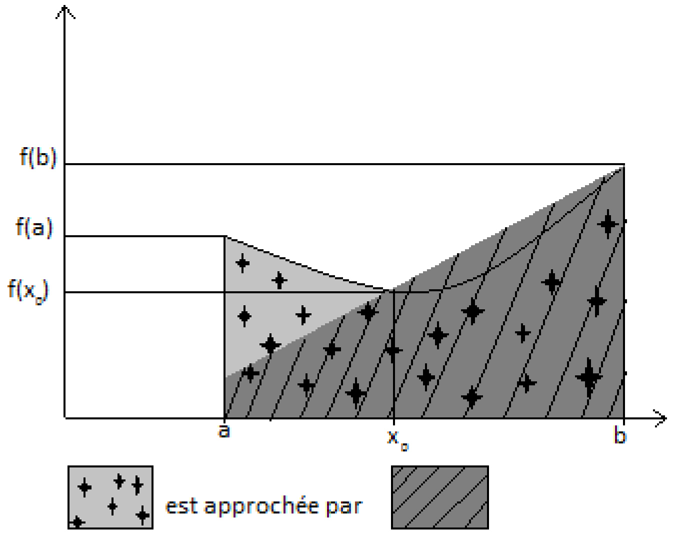
5)

c) Partant de 2, montrons que la valeur approchée est celle donnée :

$$
\begin{aligned}
Q(f;[a,b]) &= I(P_1;[a,b]) \\
&= \int_a^b P_1(x)dx \\
&= \int_a^b -3\left(\frac{f(x_0)(x-b)}{2h} - \frac{f(x_1)(x-x_0)}{2h}\right)dx \\
&= -\frac{3}{2h}\int_a^b \big(f(x_0)(x-b) - f(x_1)(x-x_0)\big)dx \\
&= -\frac{3}{2h}\left[f(x_0)\int_a^b (x-b)dx - f(x_1)\int_a^b (x-x_0)dx\right] \\
&= \cdots \\
&= h\left[\frac{f(x_0)3}{4} + \frac{f(x_1)1}{4}\right]
\end{aligned}
$$

Par identification, $\boxed{\begin{matrix}\lambda_0 = \frac{3}{4} \\ \lambda_1 = \frac{1}{4}\end{matrix}}$

d) Graphique



6) $\boldsymbol{E(Q; f, [a,b]) = I(f; [a,b]) - Q(f; [a,b])}$

d) Etablissons que $\boldsymbol{Q(f;[a,b]) = I(P_2;[a,b])}$

D'après la question I.2), $pH_{x_0x_0x_1}f(x) - pL_{x_0x_1}f(x) = C(x-x_0)(x-x_1) \quad \Rightarrow$

$\int_a^b pH_{x_0x_0x_1}f(x)dx - \int_a^b pL_{x_0x_1}f(x)dx = C\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)dx$

$$\Rightarrow \quad I(P_2;[a,b]) - I(P_1;[a,b]) = \int_a^b C.(x-x_0)(x-x_1)dx = \int_0^1 \frac{Ch^2}{3}(3s-2)s \times -hds$$

$$\Rightarrow \quad I(P_2;[a,b]) - I(P_1;[a,b]) = -\frac{Ch^3}{3}[s^3 - s^2]_0^1 = 0$$

Donc $I(P_1;[a,b]) = I(P_2;[a,b]) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q(f;[a,b]) = I(P_2;[a,b])}$

e) Déduisons donc que lorsque f est de classe C^3 sur [a,b],on a l'expression donnée :

$$|E(Q;f,[a,b])| = \left|\int_a^b [f(x) - P_2(x)]dx\right|$$
$$\leq \int_a^b |f(x) - P_2(x)|dx \leq \int_a^b \frac{M_{3_1}(f)}{3!}|(x-x_0)^2(x-x_1)|dx = \frac{M_3(f)}{3!}\int_a^b |(x-x_0)^2(x-x_1)|dx$$

Effectuons un changement de variable : $s = (b-x)/h$ et posons : $J = \int_a^b |(x-x_0)^2(x-x_1)|dx$

$$J = \frac{h^2}{9}\int_1^0 (3s-S)^2 sds \times -h$$

On a : $= \frac{h^4}{9}\int_0^1 (3s-2)^2 sds$ et

$$= \frac{h^4}{36}$$

$$M_{3_1}(f) = \sup_{x\in[x_0,x_1]} \left|f^{(3)}(x)\right| \leq M_3(f) = \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(3)}(x)\right|$$

Ona donc au final :

$$|E(Q;f,[a,b])| \leq \frac{M_3(f)}{6\times 36}h^4 = \frac{M_3(f)}{216}h^4$$

Par identification, $\boxed{P = 4}$

f)

En effet, [a,b] petit signifie que b-a→ 0 or h=b-a → 0 $\Rightarrow \frac{M_3(f)}{216}h^4 \to 0 \Rightarrow |E(Q;f,[a,b])| \to 0$

Donc $\boxed{Q(f;[a,b]) \to I(f;[a,b])}$

7) Situation idéale lorsque $Q(f;[a,b]) = I(f;[a,b])$

d)

Elle est idéale parce qu'elle nous permet d'obtenir la valeur de $I(f;[a,b])$ d'une façon plus aisée.

e)

1e manière :

Si f est un polynôme de dégrée deux , alors, $pH_{x_0x_0x_1}f$ étant l'unique polynôme de dégrée ≤2 coïncidant avec f en x_0 et x_1, et dont la dérivée coincide avec f'en x_0, on a : $pH_{x_0x_0x_1}f = f$

Donc $I(f;[a,b]) = I(P_2;[a,b]) = Q(f;[a,b])$

<u>2e manière :</u>

Si f est un polynôme de dégrée deux, alors, la dérivée d'ordre 3 de f est nulle, et donc le max de la dérivée d'ordre 3 de f est nulle. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, |E(Q;f,[a,b])| \leq 0$ d'où on peut dire que f est égale au polynôme d'interpolation de Lagrange.

f)

Lorsque f est un polynôme de dégrée ≤1 , on l'adapte en faisant coïncider la courbe de la fonction f avec celle de $pL_{x_0x_1}f$ autrement dit en joingnat les points $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$ par un segment de droite.

8) Question subsidiaire

« A votre inspiration »

VIII- Quadrature composite pour le cas [a,b] « non petit »

4) Description du procédé :

Il s'agit de découper [a,b] en « petits » sous intervalles $[a_{k-1},a_k]$ pour une subdivision $\delta = (a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b)$

$\forall k = 1(1)n, h_k = a_k - a_{k-1}$ $\boxed{Q_\sigma(f;[a,b]) = \sum_{(k=1)}^{n} Q(f;[a_{k-1},a_k])}$ avec $Q(f;[a_{k-1},a_k])$ approximation de $\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx$.

5)

d) Montrons que si f est de classe C^3 sur [a,b], alors l'érreur d'intégration numérique associée à $Q_\sigma(f;[a,b])$

$$|E(Q_\sigma(f,[a,b])| = |I(f,[a,b]) - Q_\sigma(f;[a,b])| = \left|\sum_{k=1}^{n}[I(f,[a_{k-1},a_k]) - Q(f;[a_{k-1},a_k])]\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}|I(f,[a_{k-1},a_k]) - Q(f,[a_{k-1},a_k])| = \sum_{k=1}^{n}|E(Q;f,[a,b])|$$

Or $|E(Q;f,[a_{k-1},a_k])| \leq \frac{M_{3,k}(f)}{216}h_k^4$ de plus $M_{3,k}(f) = \sup_{x\in[a_{k-1},a_k]}\left|f^{(3)}(x)\right| \leq M_3(f) = \sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(3)}(x)\right|$

D'où $|E(Q_\sigma;f,[a,b])| \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{M_3(f)}{216}h_k^4 = \frac{M_3(f)}{216}\sum_{k=1}^{n}h_k^4$

Posons $\Delta = \max_{1\leq k\leq n} h_k \sum_{k=1}^{n}h_k^4 = \sum_{k=1}^{n}h_k^3 h_k \leq \Delta^3\sum_{k=1}^{n}h_k\,\Delta^3(b-a)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|E(Q_\sigma; f, [a,b])| \leq \frac{M_3(f)}{216}\Delta^3(b-a)}$$

e)

$$\lim_{\Delta \to 0} |E(Q_\sigma; f, [a,b])| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta \to 0} Q_\sigma(f, [a,b]) = I(f, [a,b])$$

f)

Il signifie que, plus les subdivisions sont petites, plus l'approximation est bonne

6)

Oui, elle est meilleure Car elle permet une meilleure majoration de l'erreur d'interpolation c'est-à-dire qu'on a une meilleure estimation de l'erreur approximation et par conséquent une meilleure approximation (voir comparaison cours)

CORRECTION DU CONTRÔLE CONTINU D'ANALYSE NUMÉRIQUE 2012-2013

Exercice 1 (* voir les épreuves précédentes*)

Exercice 2

1) **Définition :**

$pH_{x_0x_1x_1x_2f}$ est l'unique polynômes de dégré inférieur ou égal à 3 qui coincide avec f en $x_0, x_1, et\ x_2$. Et dont la derivée première coïncide avec celle de f en x_1.2

2) Démontrons sans calcul que :
$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = f(x_0).Q_0(x) + f(x_1).Q_1(x) + f(x_2).Q_2(x) + f'(x_1).R_1(x)$
Posons :
$\forall x \in \mathbb{R}, T(x) = \left(\sum_{i=0}^{2} f(x_i)\, Q_i(x)\right) + f'(x)R_1(x)$
Comme $\begin{cases} Q_i \in \mathbb{R}_3[x], \forall\, i = 0(1)2 \\ \quad et \\ R_1 \in \mathbb{R}_3[x] \end{cases} \Longrightarrow$ alors $T \in \mathbb{R}_3[x]$ $(*)$ (car $\mathbb{R}_3[x]$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$)
En d'outre
$\forall j \in$, on a :
$T(x_j) = (\sum_{i=0}^{2} f(x_i)Q_i(x_j)) + f(x_j)R_1(x_j)$
$or\ R_1(x_j) = 0$ et $Q_i(x_j) = \delta_{ij}$
$\Longrightarrow T(x_j) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\delta_{ij}$
$\Longrightarrow T(x_j) = f(x_j)$ $(2\,*)$
Et $T'(x) = (\sum_{i=0}^{2} f(x_i)Q_i'(x)) + f'(x_1)R_1'(x)$
$\Longrightarrow T'(x) = (\sum_{(i=0)}^{2} f(x_i)Q_i'(x_1) + f'(x_1)R_1'(x_1)$

Or $R_1'(x_1) = 1$ et $Q_i(x_1) = 0, \forall i \in \{0,1,2\}$

$\Longrightarrow f'(x_1) = f'(x_1)$ $(3\,*)$

(*) (2*) et (3*) alors T est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 qui coïncide avec f en x_0, x_1, x_2 et dont la dérivée coïncide avec celle de f en x_1.

D'où $T(x) = \left(pH_{x_0x_1x_1x_2f}\right)(x) = P(x)$

b) trouvons les expressions respectives de Q_i, i∈ {0, 1, 2} et R_1

- Q_0

$Q_0(x_0) = 1$, $Q_0(x_1) = 0$, $Q_0(x_2) = 0$, $Q'_0(x_0) = 1$

On a :
$Q_0(x_0) = 1, Q_0(x_1) = 0, Q_0(x_2) = 0 \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{R}[x]\ , Q_0(x) = K(x)(x-x_1)^2(x-x_2)$
mais $d^0 Q_0 \leq 3 \Longrightarrow d^0(K) + 3 \leq 3$
$\Longrightarrow d^0(K) \leq 0$
$\Longrightarrow K$ *est un* Polynome constant.
$$\Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, Q_0(x) = c(x-x_1)^2(x-x_2)$$
Or $Q_0(x_0) = 1 \Longrightarrow c(x-x_1)^2(x-x_2) = 1$
$\Longrightarrow c = \frac{1}{h_{01}^2 h_{02}}$
d'où $Q_0(x) = \frac{1}{h_{01}^2 h_{02}}(x-x_1)^2(x-x_2)$

- ***Q1***

  $Q_1(x_0) = 0$, $Q_1(x_1) = 1$, $Q_1(x_2) = 0$, $Q'_1(x_0) = 0$

  $Q_1(x_0) = 0, Q_1(x_2) = 0 \Longrightarrow \exists K \in \mathbb{R}[x], Q_1(x) = K(x)(x-x_0)(x-x_2)$
  Mais $d^0(Q_1) \leq 3 \Longrightarrow d^0(k) + 2 \leq 3$
  $\Longrightarrow d^0(K) \leq 1$
  $\Longrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}\ K(x_1) = \alpha(x-x_1) + \beta$ et $K(x_1) = \beta, K'(x_1) = 2$
  Or $Q_1(x_1) = K(x)(x-x_0)(x-x_2) = 1$
  Ainsi $\beta(x_1 - x_0)(x_1 - x_3) = 1$
  D'où $\beta = \frac{1}{h_{10}h_{12}}$
  $Q'_1(x) = K'(x)(x-x_0)(x-x_2) + K(x)(2x - x_0 - x_2)$
  $Q'_1(x_1) = 0 \Longrightarrow \alpha(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) + \beta(x_1 - x_0 + x_1 - x_2) = 0$
  $\Longrightarrow \alpha = -\beta \frac{h_{10}+h_{12}}{h_{10}+h_{12}}$
  $\alpha = -\beta^2(h_{10} + h_{12}) = -\frac{h_{10}+h_{12}}{h_{10}^2 h_{12}^2}$
  Quitte à écrire :
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{Q_1(x) = \frac{1}{h_{01}h_{12}}\left[-\frac{h_{01}+h_{12}}{h_{01}h_{12}}(x-x_1) + 1\right](x-x_0)(x-x_2)}$$

- **Q2**

  $Q_2(x_0)=0$, $Q_2(x_1)= 0$, $Q_2(x_2)=1$, $Q'_2(x_1)=0$
  On a : $Q_2(x_0)=0$, $Q_2(x_1)= 0 \Longrightarrow \exists \in \mathbb{R}[x], \forall x \in \mathbb{R}$
  $Q_2(x)= K(x)(x-x_1)^2(x-x_0)$
  Mais $d^0(Q_2) \leq 3 \Longrightarrow d^0(K) + 3 \leq 3$
  $\Longrightarrow d^0(K) \leq 0$
  $\Longrightarrow K$ est un polynome constant
  $\Longrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, K(x) = c$
  $\Longrightarrow Q_2(x) = c(x-x_1)^2(x-x_0)$
  Comme $Q_2(x_2)=1$ alors $c(x-x_1)^2(x-x_0) = 1$

$\Rightarrow c = \frac{1}{h_{21}^2 h_{20}}$

$d'où\ \forall x \in \mathbb{R}, Q_2(x) = \frac{1}{h_{21}^2 h_{20}}(\mathrm{x}-\mathrm{x}_1)^2(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)$

- ***R1***

R1(x0)= 0, R1(x1)= 0, R1(x2)= 0

$\Rightarrow \exists G \in \mathbb{R}[x], \forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{R}_1(x) = G(x)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

Mais $d^0(R_1) \leq 3 \Rightarrow d^0(G) + 3 \leq 3$

$\Rightarrow d^0(G) \leq 0$

$\Rightarrow G$ est constant.

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}, \forall x, G(x) = C$

$\Rightarrow R_1(x) = c(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

Or $R_1'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \frac{c(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) - R_1(x_1)}{x-x_1} = 1$

$\Rightarrow c = \frac{1}{h_{10}h_{12}}$

$d'où\ R_1(x) = \frac{1}{h_{10}h_{12}}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

c) le calcul précédent établit l'existence et l'unicité des polynômes Q_0 , Q_1 , Q_2 et R_1 car ceux-ci ont une expression unique.

3) C'est très simple, il suffit de faire une analogie.
En effet, si l'on avait considéré $pH_{x_0x_1x_1x_2}$, il aurait fallu prendre :

- Q_0 , Q_1, Q_2 $\in \mathbb{R}_4[x]$ vérifiant :
  $\Rightarrow \forall i \in \{0,1,2\}, j \in \{0,1,2\}, Q_i(x_j) = \delta_{ij}$
  $\Rightarrow \forall i \in \{0,1,2\}, Q_i'(x_0) = Q_i'(x_2) = 0$ car x_0 et x_2 ont été répété $pH_{x_0x_0x_1x_2x_2}$
- R_0 et R_2 $\in \mathbb{R}_4[x]$ vérifiant :
  $\forall i \in \{0,2\}, \forall j \in \{0,1,2\}, R_i(x_j) = 0\ et\ R_i'(x_i) = 1$
  $\rightarrow R_0'(x_2) = R_2'(x_0) = 0$

b) résultat analogue pour $pH_{x_0x_1x_1x_2f}$

c'est assez trivial. En effet, ce n'est qu'une déduction
on aura alors :

$$(pH_{x_0x_1x_1x_2f})(x) = (\sum_{i=0}^{2} f(x_i)Q_i(x)) + f'(x_o)R_O(x) + f'(x_2)R_2(x)$$

4)Application

a) Trouvons P sous sa forme de Newton.

Posons x_0 = -2, x_1 = 0 et x_2 = 1

On a :

$P(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_o) + f[x_0, x_1, x_1](x-x_O)(x-x_1) + f[x_0, x_1, x_1, x_2](x-x_O)(x-x_1)^2$

j	x_i	$\frac{f^{(j)}(x_i)}{j!}$			
0	$x_0 = -2$	$f(x_0) = 20$			
0	$x_1 = 0$	$f(x_1) = -12$	$\to$ $f[x_0, x_1] = -16$		
1	$x_1 = 0$	$f(x_1) = 0$	$\to$ $f[x_1, x_1] = 0$	$\to$ $f[x_0, x_1, x_1] = 8$	
0	$x_2 = 1$	$f(x_2) = -1$	$\to$ $f[x_1, x_2] = 11$	$\to$ $f[x_1, x_1, x_2] = 11$	et $f[x_0, x_1, x_1, x_2] = 1$

D'où $P(x) = 20 - 16(x+2) + 8x(x+2) + x^2(x+2)$

b) schéma de Hoîner de P

Il est claire que

$$P(x) = 20 - 16(x+2) + 8x(x+2) + x^2(x+2)$$

c) Déduisons en que $\forall x \in [-2, 1], |f(x) - P(x)| \leq kg(x)$ avec K et g à préciser.
La fonction f définie par $f(x) = 2x^6 - x^4 + 10x^3 - 12$ est de classe C^4 sur $[-2,1]$ et donc d'après le corollaire de l'emeur local d'interpolation on a :

$$\forall x \in [-2,1], |f(x) - P(x)| \leq \frac{M_4(f)}{4!} |\Pi_3(x)|$$

Où $M_4(f) = \sup_{x\in[-2,1]} |f^4(x)|$ et $\Pi_3(x) = |(x+2)x^2(x-1)| = x^2(x-1)(x+2)$

Or $f(x) = 2x^6 - x^4 + 10x^3 - 12$

Rappel : si $g(x) = x^n, x \in \mathbb{N}$ alors $\forall k \in \mathbb{N}, k \leq n, g^{(k)}(x) = A_n^k x^{n-k}$ donc

$g^{(n)}(x) = A_n^n = n!$

Ainsi

$f^{(4)}(x) = 2 \times A_6^4 x^2 - 4! = 24(30x^2 - 1)$

Posons $\forall x \in [-2,1], h(x) = 30x^2 - 1$

h est de classe C^1 sur [-2,1] et on a :

$$h'(x) = 60x - 1 \text{ et } h'(x) = \begin{cases} < 0 \Rightarrow x \in [-2, \frac{1}{60}] \\ = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{60} \\ > 0 \Rightarrow x \in [\frac{1}{60}; 1] \end{cases}$$

On a le TV de h :

x	-2	1/60	1
$h'(x)$	$-$		$+$
$h(x)$	$h(-2)$ ↘	$h\left(\frac{1}{60}\right)$	↗ $h(1)$

Avec $\begin{cases} h(-2) = 119 \\ h(1) = 29 \\ h\left(\frac{1}{60}\right) = -\frac{119}{120} \end{cases}$ $et\ |h(-2)| > |h(1)| > |h\left(\frac{1}{60}\right)|$

$\Rightarrow h(-2) = \sup\limits_{x\in[-2,1]} |h(x)| \Rightarrow M_4(f) = sup_{x\in[-2,1]}\left|f^{(4)}(x)\right| = 24h(-2)$

Quitte à écrire

$|f(x) - P(x)| \leq \frac{24h(-2)}{4!}x^2(x-1)(x+2) \Rightarrow |f(x) - P(x)| \leq h(-2)x^2(x-1)(x+2)$

Prendre

$k = h(-2) = 119\ et\ g(x) = x^2(x-1)(x+2)$

Exercice 3

1) a) Rappelons la définition de $pH_{u_n u_n f}$

$pH_{u_n u_n f}$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à 1 qui coïncide avec f en $x = u_n$ et dont la dérivée première coïncide avec celle de f en $x = u_n$

b) expression de $pH_{u_n u_n f}, \forall x \in \mathbb{R}$

soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$\left(pH_{u_n u_n f}\right)(x) = f(u_n) + f[u_n, u_n](x - u_n)$ or $f[u_n, u_n] = f'(u_n)$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}, \left(pH_{u_n u_n f}\right)(x) = f(u_n) + f'(u_n)(x - u_n)$

2) a) expression de u_{n+1} en $f(u_n)$

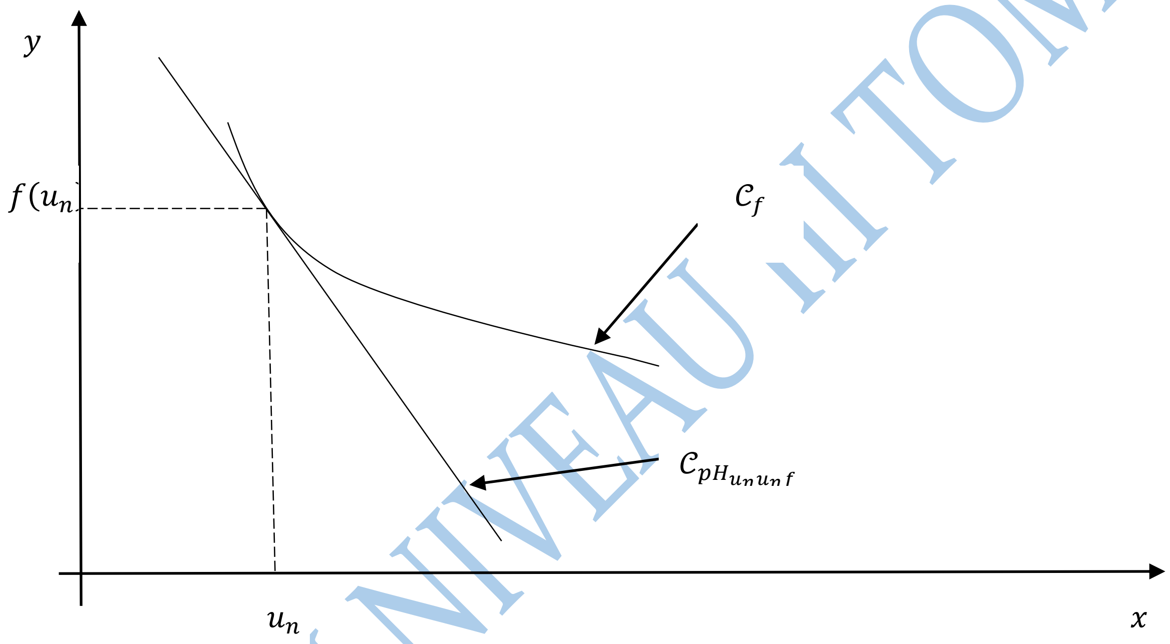
u_{n+1} est la racine de E_n donc :

$\left(pH_{u_n u_n f}\right)(u_{n+1}) = 0 \Longrightarrow f(u_n) + f'(u_n)(u_{n+1} - u_n) = 0$

D'où $u_{n+1} = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} + u_n$

b) Justifions la terminologie : "$Methode\ des\ tangentes$"

Cette terminologie vient du fait que $pH_{u_n u_n f}$ n'est autre que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f au point $A_n(u_n, f(u_n))$



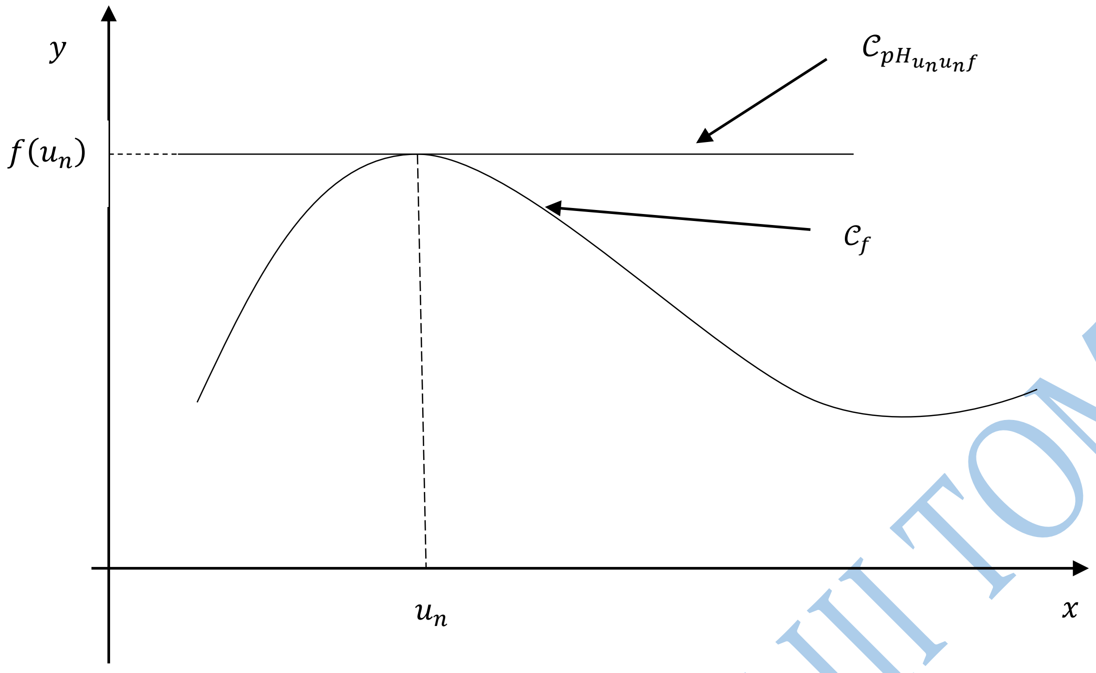
c) illustrons une situation où l'on ne pourra pas calculer u_{n+1} en $f(u_n)$

Il suffit que la fonction f s'annule en $x_O \in \mathbb{N}$ alors le calcul de u_{n_0+1} sera impossible.

Cette situation n'est pas assez inquiétante (en effet la suite serait constante)

La situation la plus inquiétante est la suivante :

Un extremum de la fonction f est atteint en $x_0 \in \mathbb{N}$ le calcul de x_{n_0+1} sera pratiquement impossible.



En effet, $pH_{u_n u_n f}$ ne pourra s'annuler.

Le calcul $u_{n+1} = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} + u_n$ sera impossible car $f'(u_n) = 0$

3°) a) Montrons qu'on a :

$i)|f(u_{n+1})| \leq k(u_{n+1} - u_n)^2$

$ii)\left|\left(pH_{u_n u_n f}\right)(\alpha)\right| \leq k(\alpha - u_n)^2$

hypothèse à préciser

f doit être de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f^{(2)}$ bornée.

$\Rightarrow$ alors d'après le corolaire de l'emeur local d'interpolation, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|f(x) - \left(pH_{u_n u_n f}\right)(x)\right| \leq \frac{M_2(f)}{2!}(x - u_n)^2 \ (*)$$

Avec $M_2(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(2)}(x)|$

Ainsi on a :

- Pour $x = u_{n+1}$
  $(pH_{u_n u_{nf}})(u_{n+1}) = 0$
  D'où $|f(u_{n+1})| \leq k(u_{n+1} - u_n)^2$ par $(*)$ avec $k = \frac{M_2(f)}{2!}$
- Pour $x = \alpha\, , f(\alpha)$
  D'où $|(pH_{u_n u_{nf}})(\alpha)| \leq k\,(\alpha - u_n)^2, k = \frac{M_2(f)}{2!}$
  b) déduisons en que $|f'(u_n)(\alpha - u_{n+1})| \leq k(\alpha - u_n)^2$

d'après 1-b) on a :

$(pH_{u_n u_{nf}})(x) = f(u_n) + f'(u_n)(x - u_n)$

$\Rightarrow (pH_{u_n u_{nf}})(\alpha) = f(u_n) + f'(u_n)(\alpha - u_n)$

$= \ -f'(u_n)[-\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} + u_n - \alpha]$

$= -f'(u_n)(u_{n+1} - \alpha)$

Car $u_{n+1} = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} + u_n$ par 2.a)

$\Rightarrow |(pH_{u_n u_{nf}})(\alpha)| = |f'(u_n)(u_{n+1} - \alpha|$ et d'après $3 - ii)$, on a :

$|(pH_{u_n u_{nf}})(\alpha)| \leq k(\alpha - u_n)^2$

$d'où\ |f'(u_n)(u_{n+1} - \alpha)| \leq k\,(\alpha - u_n)^2$

4.a) Montrons $\exists r > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \delta_{n+1} \leq \delta_n^r$

On a :

$|\alpha - u_{u+1}| \leq c(\alpha - u_n)^2$

$\Rightarrow c|\alpha - u_{n+1}| \leq c^2(\alpha - u_n)^2$

$\Rightarrow \delta_{n+1} \leq \delta_n^2$

$prendre\ r = 2$

b) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \delta_n \leq \delta_0^{r^n}$

Il suffit d'utiliser la réccurence.

c) déduisons en un intervalle $J, u_0 \in J \geq 0$ $(E_3.1)$ vérifié.

D'après 4-b) , on a :

$\delta_n \leq \delta_0^{2^n}$

$soit\ C.|\alpha - u_n| \leq c^{2^n}|\alpha - u_0|^{2^n} = |c(\alpha - u_0)|^{2^n}$

$E3.1$ est vérifiée ssi $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \alpha$

Il suffit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} |c(\alpha - u_0)|^{2^n} = 0$

Soit $|c(\alpha - u_0)| < 1$

Soit $u_0 \in]\,\alpha - 1/c\,;\alpha + 1/c[$

Prendre $J =]\,\alpha - 1/c\,;\alpha + 1/c[$

CORRECTION D'EXAMEN D'ANALYSE NUMERIQUE 2012-2013

Exercice 1 :

1) Ecrire la procédure GAUSS-JORDAN

Procédure petitbloc (Var A : matrice, var b : vecteur, k : entier, i : entier)

/*Objectif :annuler l'élément A(i,k) de la matrice A*/

/*Données : la matrice A du système, le vecteur b du second membre, la colonne k sur laquelle on réalise l'élimination, l'indice i de la ligne sur laquelle on annule l'élément A(i,k)*/

/*résultat : la matrice A où l'élément A(i,k) est considéré nul, le vecteur b résultant des opérations élémentaires effectuées*/

Variable j : entier ;

DEBUT /* petitbloc */

A(i,k) ← A(I,k)/A(k,k);

Pour j=k+1 (1) faire

A(i,j)← -A(i,k)*A(k,j);

Finpour

B(i)← b(i)-A(i,k)*b(k);

Fin /* petitbloc*/

Procédure Elim_Gj(var A: matrice, var b: vecteur)

/* transformer le système de cramer en un système équivalent de matrice diagonale */

/* Données : la matrice A du système, le vecteur b résultant du second membre */

/* Résultat : A devenue diagonale, le vecteur b résultant des opérations élémentaires effectuées*/

```
Variables i,k : entier ;
DEBUT  /* ELIM_GJ  */
Pour k=1 (1) faire
PIVOT_PARTIEL(A,b,k);
Pour i=1(1)k-1 faire
Petitbloc(A,b,k,i)
Finpour
Pour j=1 k+1 (1) n faire
Petitbloc(A,b,k,i)
Finpour
Finpour
FIN /* ELIM_GJ */
```

```
ProcedureGAUSS_JORDAN( A : matrice, b : vecteur, var X : vecteur)
/* Objectif : résoudre le système de cramer AX=b pour la méthode de GAUSS-JORDAN * /
/* Données : la matrice A du système, le vecteur second membre */
/* Résultat : le vecteur X solution du système */
DEBUT /* GAUSS-JORDAN */
ELIM_GJ (A,b) ;
REMONTEE(A,b,X);
FIN /* GAUSS-JORDAN_1 */
```

La procedure REMONTEE est celle exploitée ci-dessous

```
Procedure REMONTEE (A : matrice, b : vecteur, var X : vecteur)
```

/* Objectif : Déterminer le vecteur X tel que AX=b avec A matrice diagonale*/

/* Données : la matrice A telle que issue de l'élimination de GAUSS-JORDAN, le vecteur b tel que issu de ELIM_GJ */

/* Résultat : le vecteur X tel que AX=b */

Variable i : entier ;

DEBUT : /* REMONTEE */

Pour i=1(1)n faire

X(i) ← b(i)/A(i,i) /* A(i,i) ≠ 0 car A diagonal inversible */

Finpour

FIN /* REMONTEE */

2)

a) pour obtenir la matrice A=In , il convient de n'utiliser que les pivots égaux à 1

b) La phase de résolution devient ici inutile car le vecteur b obtenu à la sortie de l'élimination de GAUSS correspond au vecteur solution X cherché.

En effet AX=b⟹ In X= b car A= In

⟹ X = b

c) la procedure PIVOT_PARTIEL renvoit ici des pivots égaux à 1

procedure petitbloc2(var A : matrice, var b : vecteur, k : entier, i : entier)

/* Objectif :

/*Données :

/*Résultat :

Variable j : entier ;

DEBUT /* petitbloc2 */

Pour j= k+1 (1) n faire

A(i,j)← A(i,j) – A(i,k)*A(k,j) ;

Finpour

b(i) = b(i) – A(i,k)*b(k);

```
FIN /* petitbloc2*/


Procedure ELIM_GJ2 (var A: matrice, var b: vecteur)
/* Objectif :
/*Données :
/*Résultat :
Variables i,k entier ;
Debut /* ELIM_GJ2 */
Pour k=1 (1) n faire
PIVOT_PARTIEL2(A,b,k); /* A(k,k) =1 à la sortie */
Pour i = 1 (1)k-1 faire
Petitbloc2(A,b,k,i) ;
Finpour
Pour i = k+1 (1) n faire
Petitbloc2(A,b,k,i) ;
Finpour
Finpour
FIN /* ELIM_GJ2 */


Procedure GAUSS_JORDAN2(A : matrice, b : vecteur, var X : vecteur)
/* Objectif :
/*Données :
/*Résultat :
Variable i : entier ;
```

DEBUT /* GAUSS_JORDAN2*/

ELIM_GJ2(A,b) ;

Pour i=1 (1) n faire

X(i) ← b(i);

Finpour

Fin /*GAUSS-JORDAN_2 */

3) $A_1(n) - A_2(n)=0$
$M_1(n) - M_2(n)=0$
$D_1(n) - D_2(n)= n + n(n-1) - D \approx n^2$
D est le nombre de divisions effectuées lors des n appellation de la procedure PIVOT_PARTIEL_2

Exercice II :
1) a) Soit i ∈ [1(1)N]

En supposant f de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a_{2i-2}, a_{2i}]$ on a :

$$\forall\, x \in [a_{2i-2}, a_{2i}] \ \left|\tilde{f}(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{4!} M_4(f)|(x - a_{2i-2})(x - a_{2i-1})^2(x - a_{2i})|$$

Où $M_4(f) = \sup\limits_{x\in[a_{2i-2},a_{2i}]} |f^4(x)|$

Posons $s = \frac{x-a_{2i-1}}{h} \ \Longrightarrow \ x = sh + a_{2i-1}$

$$\begin{aligned}|(x - a_{2i-2})(x - a_{2i-1})^2(x - a_{2i})| &= |(sh + h)(sh^2)^2(sh - h)| \\ &= |(s + 1)(s - 1)|s^2h^4 \\ &= h^4s^2|s^2 - 1|\end{aligned}$$

Posons $\forall s \in [-1,1], g(s) = h^4s^2|s^2 - 1|$

On a $g'(s) = h^4 2s(s^2 - 1) + h^4 2s^3 = 2sh^4(2s^2 - 1)$

1	-1		$-\sqrt{2}/2$		0		$\sqrt{2}/2$	
g'(s) +		-		+		-		
g(s)	0	↘	$-\frac{1}{4}h^2$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}h^2$	↗ 0

$$\forall s \in [-1,1], |g(s)| \leq \frac{1}{4}h^4 \quad \Rightarrow \quad \forall s \in [a_{2i-2}, a_{2i}]\ , |(x-a_{2i-2})(x-a_{2i-1})^2(x-a_{2i})| \leq \frac{1}{4}h^4$$

Ainsi $\forall x \in [a_{2i-2}, a_{2i}]$ on a :

$$\left|\tilde{f}(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{96} \sup_{x\in[a_{2i-2},a_{2i}]} |f^4(x)|\, h^4$$

Prendre $C_1 = \frac{1}{96}$ $\qquad C_{2i} = \sup_{x\in[a_{2i-2},a_{2i}]} |f^4(x)|$

$r = 4$

a) $\forall x \in [a,b]\ \left|\tilde{f}(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{96} \sup_{x\in[a,b]} |f^4(x)|\, h^4$

b) La majoration de l'erreur d'approximation de f par $\tilde{f}$ sur [a,b] est d'autant plus petite que h est petit.
Ainsi, lorsque h est de plus en plus petit $\tilde{f}$ est une bonne approximation de f sur [a, b]. i.e. la courbe représentative de $\tilde{f}$ sur [a, b] est très proche de la courbe de f sur [a, b].

c) L'approximation affine par morceaux est obtenue à partir de moins de données que $\tilde{f}$. Elle est donc moins précise que $\tilde{f}$.

Exercice III :

a) Posons $\forall x \in [a_0, a_2]$ $P(x) = f(a_0).Q_0(x) + f(a_1).Q_1(x) + f(a_2).Q_2(x) + f'(a_1).R_1(x)$

On a : $P(x) = \sum_{k=0}^{2} f(a_k).Q_k(x) + f'(a_1).R_1(x)$

Soit $j \in \{0,1,2\}$

$$P(a_j) = \sum_{k=0}^{2} f(a_k).Q_k(a_j) + f'(a_1).R_1(a_j)$$

$$= \sum_{k=0}^{2} f(a_k).\delta_{kj} + f'(a_1).R_1(a_j)$$

$$= f(a_j).\delta_{jj} + 0$$

$$= f(a_j)$$

$$P'(a_1) = \sum_{k=0}^{2} f(a_k).Q_k(a_1) + f'(a_1).R_1(a_1)$$

$$= 0 + f'(a_1) \times 1$$

$$= f'(a_1)$$

$P(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ comme combinaison linéaire de polynôme de $\mathbb{R}_3[x]$

Par unicité du polynôme d'interpolation d'Hermite $P(x) = \tilde{f}(x)$

Conclusion : $\forall x \in [a_0, a_2], \quad \tilde{f}(x) = f(a_0).Q_0(x) + f(a_1).Q_1(x) + f(a_2).Q_2(x) + f'(a_1).R_1(x)$

b)

$$Q_k(a_j) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R}[x] / Q_k(x) = c(x) \prod_{\substack{j \neq k \\ j=0}}^{2} (x - a_j)$$

Or $\deg(Q_k) \leq 3 \implies degC \leq 1$

$$Q_k(a_k) = 1 \implies c(a_k) \prod_{\substack{j \neq k \\ j=0}}^{2} (a_k - a_j) = 1$$

$$\implies (a \times a_k + \beta) = \frac{1}{\prod_{\substack{j \neq k \\ j=0}}^{2} (a_k - a_j)}$$

$$Q_k'(a_1)=0 \implies \alpha\prod_{\substack{j\neq k\\ j=0}}^{2}(a_1-a_j)+(\alpha a_1+\beta)[a_1-a_{j_1}+a_1-a_{j_2}]=0$$

$si \quad k\neq 1 \quad \implies \quad \alpha a_1+\beta=0$

$$(a\times a_k+\alpha a_1)=\frac{1}{\prod_{\substack{j\neq k\\ j=0}}^{2}(a_k-a_j)} \implies \alpha=\frac{1}{(a_k-a_1)\prod_{\substack{j\neq k\\ j=0}}^{2}(a_k-a_j)} \quad avec\ \beta=-\alpha a_1$$

$$Q_k(x)=\alpha(x-a_1)\prod_{\substack{j\neq k\\ j=0}}^{2}(x-a_j)$$

$$=\frac{1}{(a_k-a_1)\prod_{\substack{j\neq k\\ j=0}}^{2}(a_k-a_j)}(x-a_1)\prod_{\substack{j\neq k\\ j=0}}^{2}(x-a_j)$$

$$Q_0(x)=\frac{1}{(a_0-a_1)(a_0-a_1)(a_0-a_2)}(x-a_1)(x-a_1)(x-a_2)$$

$$=-\frac{1}{h^2\times 2h}(x-a_1)^2(x-a_2)$$

$$\forall s\in[-1,1],Q_0(s)=-\frac{1}{2h_3}S^2h^2(sh+a_1-a_2)$$

$$=-\tfrac{1}{2h}s^2(s-1)h$$

$$=-\tfrac{1}{2}s^2(s-1)$$

$$Q_2(x)=\frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_0)(a_2-a_1)}(x-a_1)(x-a_1)(x-a_0)$$

$$=\tfrac{1}{h^2\times 2h}(x-a_1)^2(x-a_0)$$

$$Q_2(s)=\frac{1}{2h^3}s^2h^2\times h(s+1)$$

$$=\frac{1}{2}s^2(s+1)$$

Si h=1 $\alpha(a_1-a_0)(a_1-a_2)+(\alpha a_1+\beta)(a_1-a_0+a_1-a_2)=0\implies \ \alpha=0$

$$Q_1(x) = \frac{1}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)}(x - a_0)(x - a_2)$$

$$\forall s \in [-1, 1\,], Q_1(s) = -\frac{1}{h \times h}(s+1)(s-1)h^2 = 1 - s^2 = (s+1)(1-s)$$

$$\forall j \in \{0,1,2\},\ \ R_1(a_1) = 0 \ \Longrightarrow\ \ \exists C_1 \in \mathbb{R}[x] / R_1(x) = C_1(x)\prod_{j=0}^{3}(x - a_j)$$

$$\deg R_1 \le 3 \ \Longrightarrow\ \ \deg C_1(x) = 0$$

$$R_1'(a_1) = 1 \Longrightarrow\ \ C_1(a_1 - a_0)(a_1 - a_2) = 1$$

$$\Longrightarrow\quad C_1 = \frac{1}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)}$$

$$\forall s \in [-1, 1\,], R_1(s) = -\frac{1}{h \times h} sh(s+1)h(s-1)h$$

$$= -sh(s+1)(s-1)$$

$$= sh(s+1)(1-s)$$

a) Il aurait fallu prendre $Q_{2i-2}, Q_{2i-1}\ , Q_{2i},\ R_{2i-1} \in \mathbb{R}_3[x]$ tel que :

$\forall k, j \in \{2i-2, 2i-1, 2i\}\ \ Q_k(a_j) = \delta_{kj}\ \ \ et\ Q_k'(a_{2i-1}) = 0$ alors que $\forall j \in \{2i-2, 2i-1, 2i\}$

$$R_{2i-1}(a_j) = 0\ \ R_{2i-1}'(a_{2i-1}) = 1$$

b)

$$Q_{2i-2}(x) = -\frac{1}{2h^3}(x - a_{2i-1})^2(x - a_{2i})$$

$$Q_{2i-1}(x) = -\frac{1}{h^2}(x - a_{2i-2})(x - a_{2i})$$

$$Q_{2i}(x) = \frac{1}{2h^3}(x - a_{2i-1})^2(x - a_{2i-2})$$

$$R_{2i-1}(x) = -\frac{1}{h^2}(x - a_{2i-2})(x - a_{2i-1})(x - a_{2i})$$

$\forall s \in [-1, 1]$ On a :

$$Q_{2i-2}(s) = -\frac{1}{2}s^2(s-1)$$

$$Q_{2i-1}(s) = (1-s)(s+1)$$

$$Q_{2i}(s) = \frac{1}{2}s^2(s+1)$$

$$R_{2i-1}(s) = hs(s+1)(1-s)$$

Par le changement de variable $s = \frac{x-a_{2i-1}}{h}$

c) $\forall x \in [a_{2i-2}, a_{2i}]\ \tilde{f}(x) = f(a_{2i-2})Q_{2i-2}(x) + f(a_{2i-1})Q_{2i-1}(x) + f(a_{2i})Q_{2i}(x) + f'(a_{2i-1})R_{2i-1}(x)$

a) Pour calculer $\tilde{f}(x)$pour $x \in [a,b]$, on doit d'abord repérer un intervalle de la forme $[a_{2i-2}, a_{2i}]$ contenant x, puis on évalue$pH_{a_{2i-2}a_{2i-1}a_{2i}}f$au point x.

b) Fonction : EVAL_APPROX$(x, a_{2k-2}, a_{2k-1}, a_{2k}, y_{2k-2}, y_{2k-1}, y_{2k}, y'_{2k-1}$: réel) : réel

/*Objectif : évaluer la fonction $\tilde{f}$ au point x*/

/*Données : $a_{2k-2}, a_{2k-1}, a_{2k} \in [a,b]$/ $x \in [a_{2k-2}, a_{2k}]$

$y_j = f(a_j)\ \forall j \in \{2k-2, 2k-1, 2k\}$

$y'_{2k-1} = f'(a_{2k-1})$

Le réel $x \in [a,b]$ dont on cherche l'image */

/*Résultat : $\tilde{y} \in \mathbb{R}/\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ */

variable : s, $\tilde{y}$: réel

Début /*EVAL_APPROX*/

$h \leftarrow a_{2k} - a_{2k-1}$;

$s \leftarrow (x - a_{2k-1})/h$;

$\tilde{y} \leftarrow h * s * (1 - s * s) * y'_{2k-1}$;

$\tilde{y} \leftarrow \tilde{y} + y_{2k} * 0{,}5 * s * s(1+s) + y_{2k-1} * (1 - s * s) + y_{2k-1} * 0{,}5 * s * s(1-s)$;

EVAL_ APPOX ← $\tilde{y}$;

Fin /*EVAL_APPROX */

Problème :

I-

1) $pH_{a_{2i-2}a_{2i-1}a_{2(i-1)}a_{2i}}f$ est l'unique polynôme de degré ≤ 3 qui coïncide avec la fonction f aux points a_{2i-2}, a_{2i-1} et a_{2i} et dont la dérivée première coïncide avec la dérivée première de f au point a_{2i-1}.

2) Pour calculer $\tilde{f}$sur [a, b] on a besoin de :

$$f(a_i)\ \forall i = 0(1)n$$
$$f'\ \ \forall i = 1(2)N-1$$

3) $\tilde{f}$ est une fonction polynomiale par morceaux sur [a, b]

4)

$$\forall i = 1(1)N \quad \tilde{f} = pH_{a_{2i-2}a_{2i-1}a_{2(i-1)}a_{2i}}f \quad sur\ [a_{2(i-1)}, a_{2i}]$$

$\forall k = 0\,(2)2N \tilde{f} = pH_{a_k a_{k+1} a_{k+1} a_{k+2}} f \quad sur\ [a_k, a_{k+2}]$

Soit $i \in [1(1)2N]$ impair $\Longrightarrow \exists k \in [1(1)N]/i = 2k-1$

$\lim x \to_{<} a_i \tilde{f}(x) = \lim x \to_{<} a_{2k-1} \tilde{f}_i(x)$

$$= \lim_{x \to a_{2k-1} x \in [a_{2k-2}, a_{2k-1}]} \tilde{f}(x)$$

$$= \lim_{x \to a_{2k-1} x \in [a_{2k-2}, a_{2k-1}]} (pH_{a_{2k-2} a_{2k-1} a_{2k-1} a_{2k}} f)(x)$$

$$= (pH_{a_{2k-2} a_{2k-1} a_{2k-1} a_{2k}} f)(a_{2k-1})$$
$$= f(a_{2k-1})$$

$\lim x \to_{>} a_i \tilde{f}(x) = \lim_{x \to a_{2k-1} x \in [a_{2k-1}, a_{2k}]} \tilde{f}(x)$

$$= \lim_{x \to a_{2k-1} x \in [a_{2k-1}, a_{2k}]} (pH_{a_{2k-2} a_{2k-1} a_{2k-1} a_{2k}} f)(x)$$

$$= (pH_{a_{2k-2} a_{2k-1} a_{2k-1} a_{2k}} f)(a_{2k-1})$$
$$= f(a_{2k-1}) = \lim x \to_{<} a_i \tilde{f}(x)$$

Donc f est continue en tout point a_i / i impair

Soit $i \in [1(1)2N]\ pair \ \Longrightarrow \ \exists\ k \in\ [1(1)N+1]/i = 2k-2$

Si $k = 1$ alors i=0 et on a :

$\lim_{x \to a_0} \tilde{f}(x) = \lim x \to_{<} a_0 \tilde{f}(x) = \left(pH_{a_0 a_1 a_1 a_2} f\right)(a_0) = f(a_0)$

Si k = N+1 alors i = 2N et on a

$\lim_{x \to a_{2N}} \tilde{f}(x) = \lim x \to_{<} a_{2N} \tilde{f}(x) = \left(pH_{a_{2N-2} a_{2N-1} a_{2N-1} a_{2N}} f\right)(a_{2N}) = f(a_{2N})$

$\lim x \to_{<} a_i \tilde{f}(x) = \lim x \to_{<} a_{2k-2} \tilde{f}_i(x)$

$$= \lim_{x \to a_{2k-2} x \in [a_{2k-3}, a_{2k-2}]} \tilde{f}(x)$$

$$= \lim_{x \to a_{2k-2} x \in [a_{2k-3}, a_{2k-2}]} (pH_{a_{2k-4} a_{2k-3} a_{2k-3} a_{2k-2}} f)(x)$$

$$= (pH_{a_{2k-4}a_{2k-3}a_{2k-3}a_{2k-2}}f)(a_{2k-2})$$
$$= f(a_{2k-2})$$

$$\lim x \rightarrow_{>} a_i \tilde{f}(x) = \lim_{x \to a_{2k-2} x \in [a_{2k-2}, a_{2k}]} \tilde{f}(x)$$

$$= \lim_{x \to a_{2k-2} x \in [a_{2k-2}, a_{2k}]} (pH_{a_{2k-2}a_{2k-1}a_{2k-1}a_{2k}}f)(x)$$

$$= (pH_{a_{2k-2}a_{2k-1}a_{2k-1}a_{2k}}f)(a_{2k-2})$$
$$= f(a_{2k-2}) = \lim x \rightarrow_{<} a_i \tilde{f}(x)$$

Ainsi f est continue en tout point a_i / i pair

Conclusion : $\forall i = 0(1)2N$ f est continue au point a_i.

De plus f continue sur $[a_{2i-2}, a_{2i}]$

f est donc continue sur [a, b]

5) f n'est pas dérivable sur [a, b]

ELECTRONIQUE I

« Le pessimiste voit en toute opportunité une dificulté tandis que l'optimiste voit en toute dificulté une opportunité »

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

SUJETS D'ELECTROCINETIQUE

CONTROLE CONTINU D'ELECTRONIQUE 2002-2003

QUESTIONS :

On applique une tension de 15 V entres les bornes d'une diode Zener et un courant de 20 mA la traverse. Calculer le puissance dissipée.

La puissance limite et tension d'une diode zener sont respectivement 5W et 20V. Calculer I_{Zmax}.

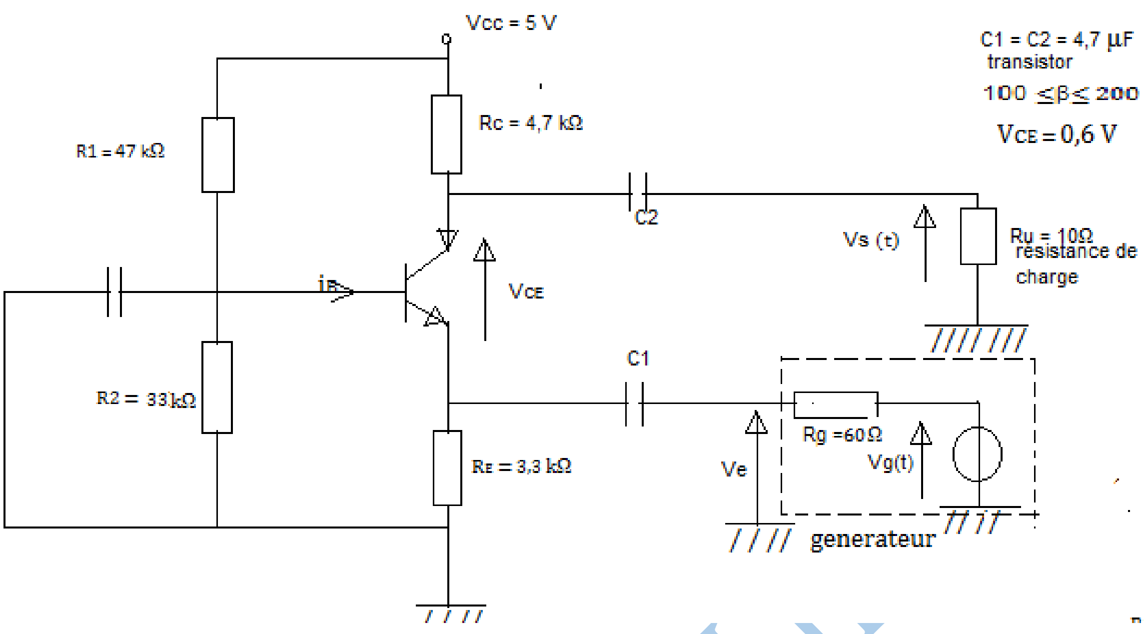
La résistance Zener d'un diode Zener est de 5Ω. Supposer que le courant de 10 à 20 mA et calculer les variations de la tension entre les bornes de la diode Zener.

Suppose qu'une variation de 2mA du courant qui traverse une diode Zener produit une variation de tension de 15mA et calculer la résistance Zener.

PROBLEME :

Amplificateur à transistor : base commune

On donne le schéma suivant



Polarisation

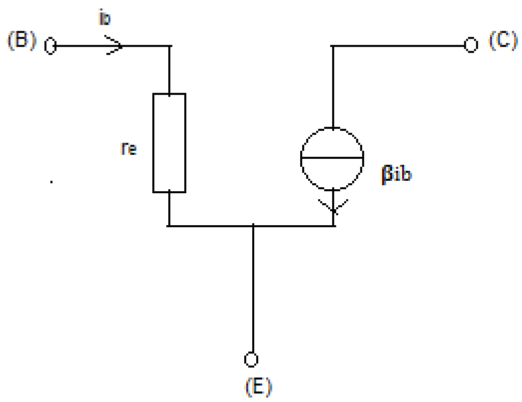
Calculer Ic_0 et Vcc_0 pour β_{min} et βmax

En déduire un condition sur les résistances pour que la polarisation soit peu dépendante des variations du β du transistor.

On adopte pour la suite, la valeur de Ic_0 relative β_{min}.

Etude petit signaux BF

On se place dans la bande passante de l'amplificateur, C_B, C_1 et C_2 sont équivalents à des courts-circuits. On adopte pour le transistor le schéma équivalent suivant :



avec $r_B = \frac{\beta V_T}{Ic_0}$

Et $V_T \approx 25$ mA à θ jonction ≈ 25°C

a. représenter le schéma équivalent petit signaux de l'amplificateur.

b. Calculer la résistance d'entrée Re = Ve/ie

c. Calculer la résistance de sortie Rs.

d. Calculer 'amplification en tension à vide A_{V0} = Vs/Ve

e. fréquence de coupure : f_{CB}. On suppose que les condensateurs c_1 et C_2 n'intervient pas pour la fréquence de coupure basse. Déterminer l'expression de f_{CB} et en déduire la valeur de C_B pour obtenir f_{CB} = 1,5 kHz

CONTRÔLE CONTINU D'ELECTRONIQUE A

EXERCICE I :

Soit le redresseur de la figure 1, la tension efficace du secondaire est de 40V

1. Calculer la tension continue de charge.
2. Calculer le courant continu de charge et en déduire le courant moyen qui parcourt chaque diode
3. Calculer la PIV de ces diodes et dire parmi les suivantes lesquelles sont utilisables

Diode	**Courant limite**	**PIV**
1N4002	1A	10^5Mv
1N914	0,05A	20V
1N1183	35A	50V
1N3070	0,1A	175V

4. Représenter sur un même graphe les courbes de la tension de secondaire et celle aux bornes de la charge

EXERCICE II :

Soit le stabilisateur Zéner de l figure 2, la diode zéner est caractérisées par V_Z=3V, I_{zmin}=5mA, I_{zmax}=433mA. La résistance $R = 5\Omega$ et la tension de source varie entre 4,5V et 5,5V.

1. En supposant que le diodes zéner est idéale écrire l'expression de la tension source V en fonction de I_z, I_L, R et V_Z
2. Sachant que quand I_L=I_{Lmax}, $I_z = I_{zmin}$ et que quand $I_L = I_{Lmin}, I_z = I_{zmax}$ réécrire l'expression de la tension source en tenant compte des variations de celle-ci.
3. En déduire les courants I_{Lmin} et I_{Lmax}.
4. Dans le cas où I_{Lmin} tends vers 0.
   - Calculer le courant zéner. Quelle est la conséquence ?
   - Quelle valeur de R_0 faut-il placer en série avec la source pur éviter les conséquences créées par un courant I_L nulle ?

EXERCICE III :

Soit le montage de la figure 3, on donne $R_0 = 2k\Omega, R_1 = 8k\Omega, R_2 = 10k\Omega, R_c = 1k\Omega,\quad V_{cc} = 5V\ \beta = 100$ on supposera les diodes parfaites (tension seuil $V_D = 0{,}7V$

1. Ecrire l'expression de la droite de charge et la représenter, on précisera sur le schéma les différentes zones de fonctionnement du transistor.
   Les tensions $V_1\ et\ V_2$ ne peuvent prendre que les valeurs 0 et 5V
2. Pour $V_1 = V_2 = 5V$,dire si les diodes sont passantes : justifier votre réponse
3. Calculer le courant I_B à l'entrée du transistor et en deduire le courant I_c
4. Calculer pour cette valeur de I_C la tension V_S
   - En tenant compte du tracé de la droite de charge dire dans quelle zone de fonctionnement se trouve le transistor et déduire de ce constat la vraie valeur de V_S.
5. On suppose maintenant que l'une des diodes est reliée à la masse. Dire si les diodes sont passantes
   - Quelle est la valeur de la tension V_0
   - En supposant que le transistor reste conducteur quelle est la valeur du courant I_1 dans la résistance R_1.
   - En déduire I_B et préciser la zone de fonctionnement du transistor. Que vaut V_S ?
6. Donner dans un tableau pour les différentes valeurs de $V_1\ et\ V_2$ les valeurs de la tensionV_S. (On normalisera cdes valeurs à l'unité).

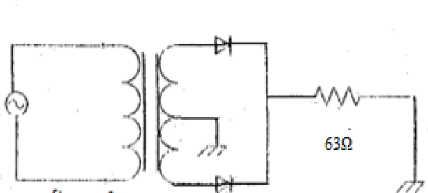


figure 1

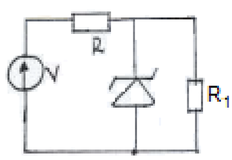


Figure 2

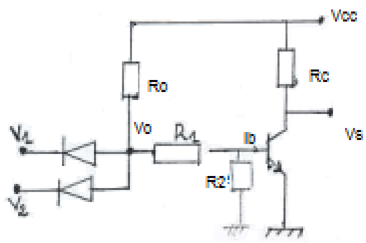


figure 3

CONTRÔLE CONTINU D'ELECTRONIQUE 2009-2010

EXERCICE I :

On suppose que la tension efficace du transformateur représenté à la figure 1 est de 40V

Représenter la forme de la tension redressée U(t) et la forme du courant $I_D(t)$ qui passe dans chaque diode.

Calculer la tension crête à crête entre les bornes de la résistance de charge.

Calculer la tension continue de charge et en déduire le courant continu de charge.

Calculer la PIV entre les bornes de chaque diode.

En déduire le courant moyen qui parcourt chaque diode.

Reprendre la question 3, pour le cas d'un redressement simple alternance. Comparer les résultats et les commenter.

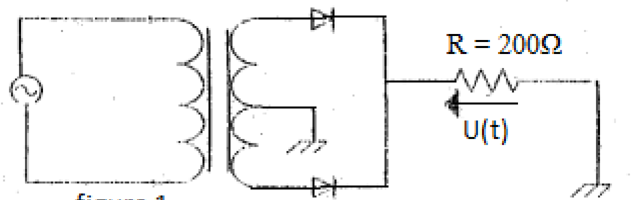


figure 1

EXERCICE II :

Dans chacun des trois circuits de la figure 2, déterminer l'état (passant ou bloqué) de la diode. Si oui déterminer le courant qui traverse la diode. Les diodes sont considérées idéales,

$V_D = 0{,}7$ V

(on pourra calculer les tensions entre les points A et C pour conclure sur l'état de la diode)

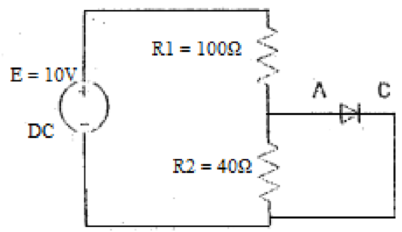


Figure 2a

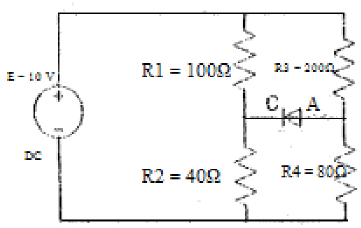


Figure 2b

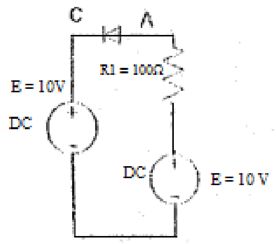


Figure 2c

EXERCICE III :

Dans le montage de la figure trios les deux transistors sont supposés identiques et possèdent le même gain β.

1. Déterminer et représenter la droite de charge statique pour un des transistors

2. Calculer le courant I_B qui entre dans la base de chaque transistor.

3. Calculer le courant I_C et en déduire les tensions V_E et V_{CE}

4. calculer la puissance dissipée dans chaque transistor

B = 100 ; $V_{\beta E} = 0,7$ V

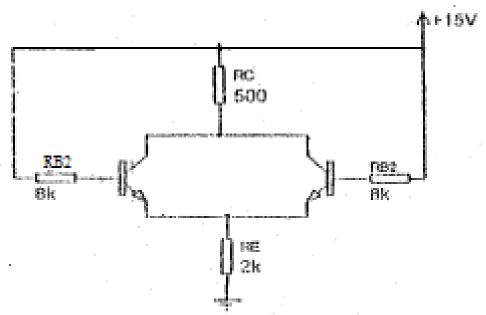
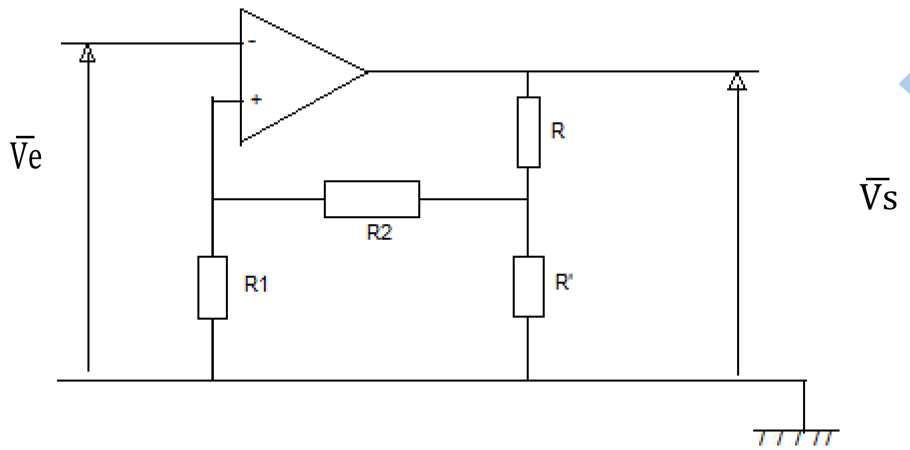


Figure 3

RATTRAPAGE D'ELECTRONIQUE 2001-2002

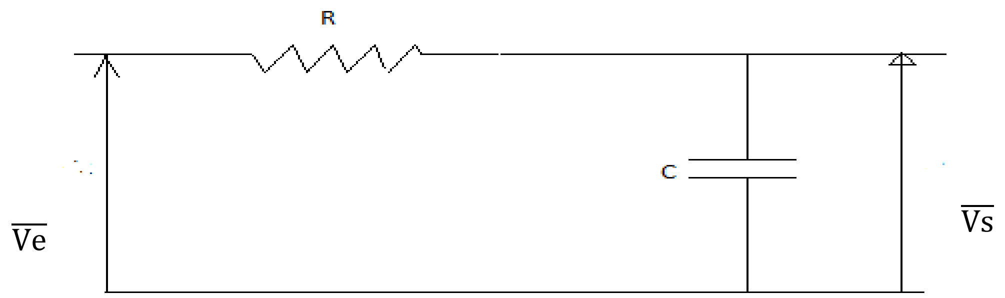
EXERCICE I :

Déterminer la fonction de transfert $\frac{V_s}{V_e}$ du circuit suivant dans lequel l'amplificateur est supposé idéal.



EXERCICE II :

Soit le filtre suivant:



a) Calculer sa fonction de transfert T(jw)
b) Donner l'allure de la courbe $20\log|T(jw)| = f(logw)$
c) Donner la matrice de transfert du filtre en fonction des éléments du montage

EXERCICE III :

Etant donné le montage émetteur commun stabilise en température ci-dessous. Le transistor est caractérisé par ses paramètres hybrides en émetteur commun : $h_{11E} = r; h_{12E} = 0; h_{21E} = \beta; h_{22E} = \frac{1}{\rho_0}$

a) Etablir le schéma équivalent du montage en régions de variations
On supposera le découpage parfait à la pulsation de travail

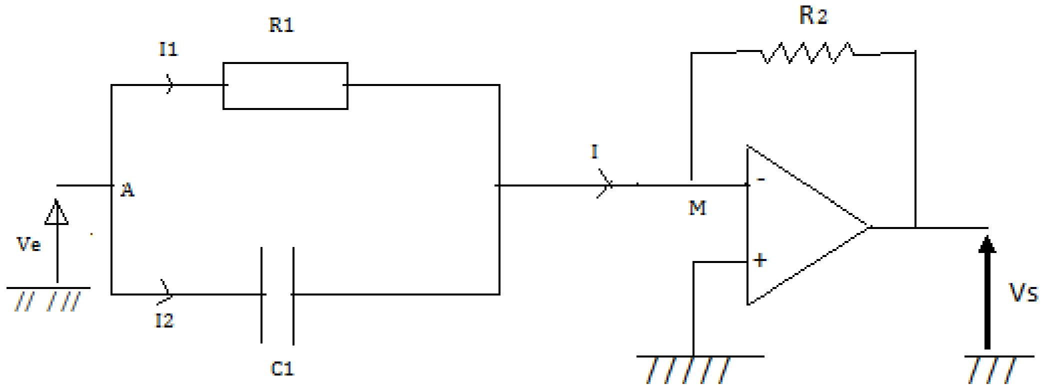
b) En déduire l'amplification en tension $A_v = \frac{v_s}{v_e}$. La résistance d'entrée $R_e = \frac{v_e}{i_e}$ et la résistance de sortie $R_s = \frac{V_s}{i_s}$ pour une attaque en tension$(R_g = 0)$
Application numérique : $r = 1k\Omega, \beta = 150, \rho_0 = 4k\Omega, R_c = 1k\Omega, R_B = 200k\Omega$

EXAMEN D'ELECTRONIQUE 2002-2003

EXERCICE I :

Répondre par vrai (V) ou faux (F) aux déclarations dans l'exercice.

Dans le montage ci-dessous l'AOP est supposé idéal.



a) on applique une tension constante à l'entrée du circuit, soit Ve = 5V. n obtient en régime statique Vs = 5V

b) En fonctionnement linéaire la transmittance isochrone est égale à :

$V_s/V_E = (R_2/R_1)(1 + jw\tau)$ avec $\tau = R_2C$

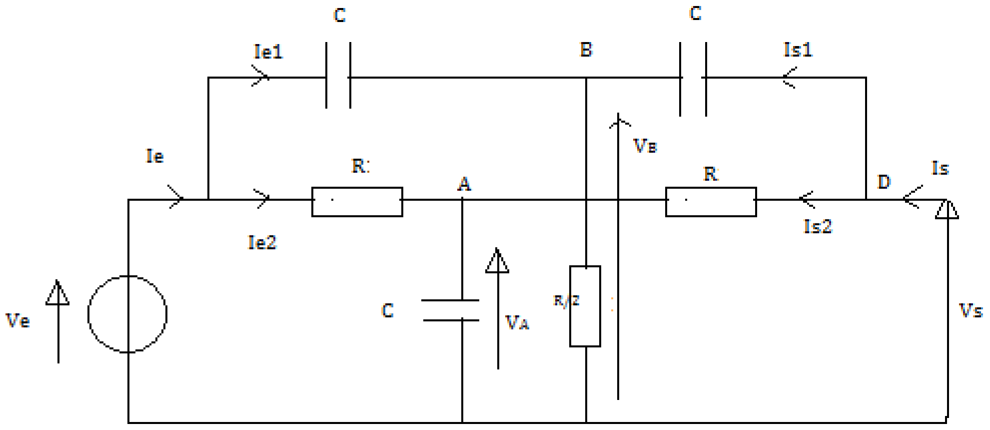
c) l'équation différentielle régissant ce circuit est $V_b(t) = -R_2C_1(dV_E/dt)$

d) La tension $V_g(t)$ est sinusoïdale de pulsation $w_1 = (1/R_1C_1)$ et d'amplitude E = 2V. La tension de sortie en régime permanent est donnée par $V_s(t) = 2\sqrt{2}\sin(w_1t - 3\pi/4)$ en volts

e) Si la fréquence du signal de l'unité est très supérieure à $(1/2\pi R_1C_1)$ alors al tension V(t) est en quadrature retard par rapport à $V_R(t)$

PROBLEME :

On considère le circuit modèle T ci-dessous



Le circuit est alimenté par une source de tension sinusoïdale. Le circuit n'est pas chargé, la sortie est à vide

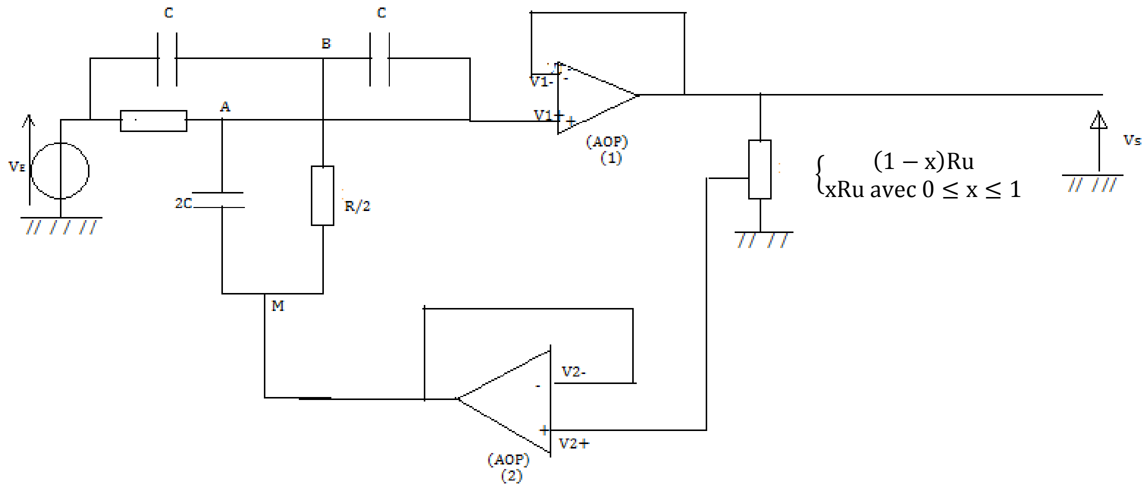
En appliquant la loi des nœuds aux points A, B, et D calculer la fonction de transfert $T(jw) = V_2/V_1$ et la mettre sous la forme canonique du rejecteur de bande

Déterminer l'expression de w_0 et la valeur de m

2) calculer les pulsation w_a et w_b avec $w_b > w_a$ telles que : $|T(jw_a)| = |T(jw_b)| = 1/\sqrt{2}$, en fonction de m et w_2 ainsi l'expression de la bande de fréquence rejectée : $B = (w_b - w_a)/2\pi$

3) On choisit $C = 10\mu F$ et $R = 1{,}6\ k\Omega$. Tracer le diagramme de Bode asymptotique et l'allure de la courbe réelle. On calculera la valeur de B

4) Pour améliorer la sélectivité du filtre, on modifie le circuit de la façon suivante :



Les A.O. sont supposés parfaits.

Calculer H(jw) = V/V et la mettre sous forme canonique du réjecteur de bande.

En déduire la nouvelle valeur de la bande réjectée. Pour x = 0,9, calculer la valeur de R_x

EXAMEN D'ELECTRONIQUE 2004-2005

EXERCICE I :

Soit un amplificateur opérationnel idéal (AOP). Etablir la relation entre V_S et V_e sous la forme $V_S = f(V_e)$

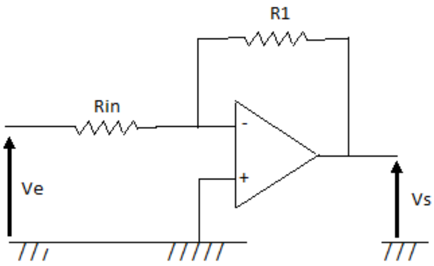


Fig I.1

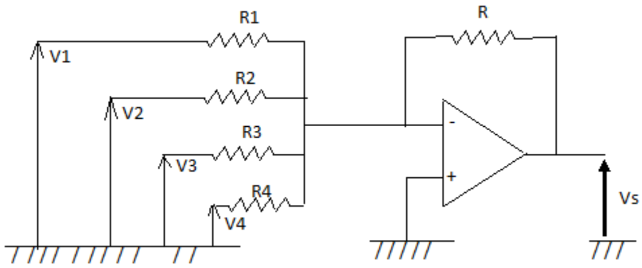


fig I.2

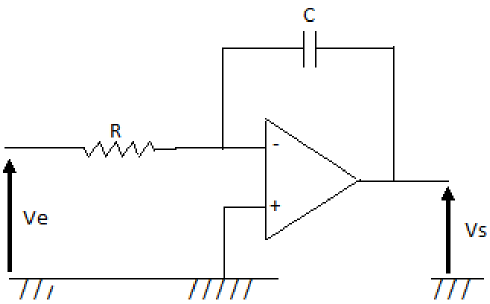


Fig I.3

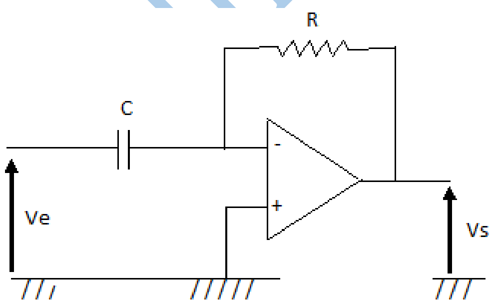
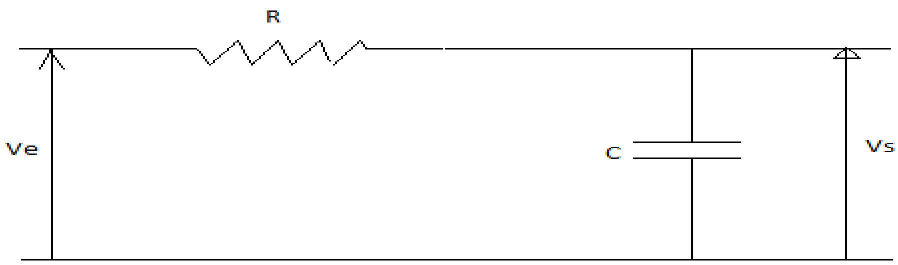


Fig I.4

EXERCICE II :

Soit le quadripôle RC ci-dessous. L'entrée est attaquée par un signal sinusoïdal V_e



En utilisant la forme complexe des impédances, établissez l'expression complexe du rapport

$\frac{V_S}{V_e} = \rho_b e^{ic_b}$, donner l'expression de ρ_t

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

EXERCICE III :

I. Dans le montage ci-dessous le courant collecteur et le courant de base sont liés par a relation $i_c = \beta_s i_b$

Avec $\beta_s \approx 60$.

On donne $U_0 = 12$ V, $R_0 = 60$ kΩ, $R_b = 60$ kΩ, $R_E = 1$ kΩ, $R_C = 1$ kΩ.

a) Donner l'équation de al droite de charge statique ;

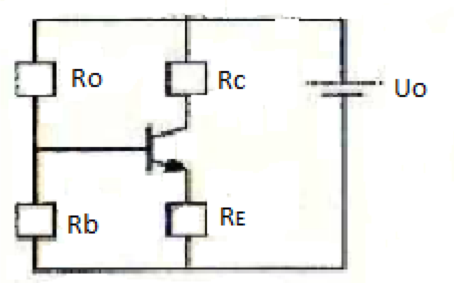
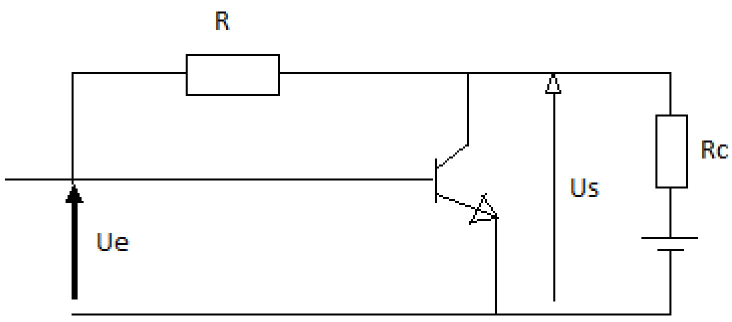


FIG III.1

II. Dans le montage amplificateur de la figure ci-dessous, le transistor est caractérisé par ses paramètres hybrides en émetteur commun : $h_{11E} = r = 1$ kΩ, $h_{12E} = 0$, $h_{21E} = \beta = 150$, $h_{22E} = 0$

On donne par ailleurs $R = 10$ kΩ, $R_C = 2$ kΩ

a) calculer l'amplification en tension $A_0 = \frac{\mu_s}{\mu_e}$ du moontage



EXAMEN D'ELECTRONIQUE 2006-2007

EXERCICE I :

Dans le Montage ci-dessous, les amplificateurs opérationnels sont considérés comme idéaux

1. Calculer les tensions V_{S1} et V_{S2} à la sortie des amplificateurs $A0_1$ et AO_{2+}.

2. Quelle fonction réalise l'amplificateur AO_1 ?

3. Calculer la tension V_S en fonction de V_{S1} et V_{S2}, puis en fonction de V_1 et V_2.

4. quelle relation doit exister entre R_e, R_0, R et R' pour que le montage représenté à la figure 1 soit un montage additionneur de tension c'est-à-dire $V_s = A(V_1 + V_2)$ où A est une constante que l'on déterminera.

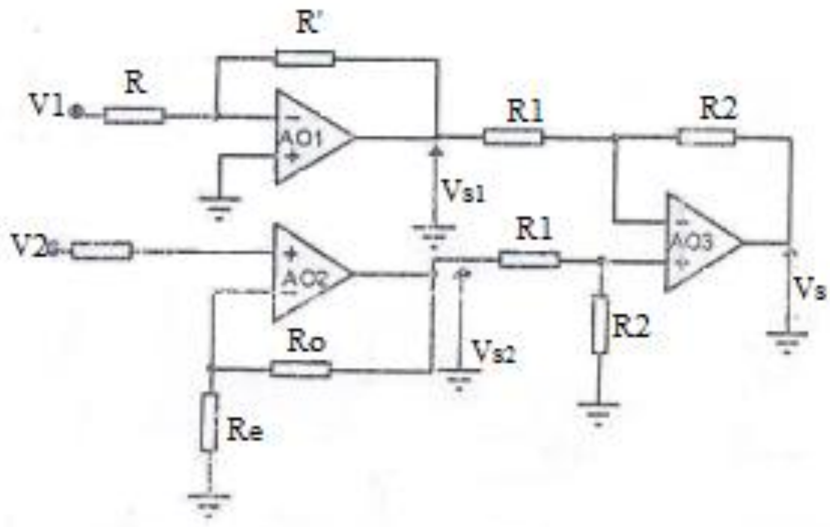


Figure 1

EXERCICE II :

1.Soit le circuit de la figure a), on donne $V_Z = 18$ V, $Z_Z = 2\Omega$, $R_S = 68\Omega$ et S = 27 V.

Calculer le courant Zener et trouver la variation de la tension de charge V_R si V_S augmente jusqu'à 40V

2. On suppose que la tension au secondaire du transformateur représenté à la figure b) est de 60 V.

a) Calculer la tension continue de charge et en déduire le courant moyen qui parcourt chaque diode.

b) Calculer la PIV entre les bornes de chaque diode.

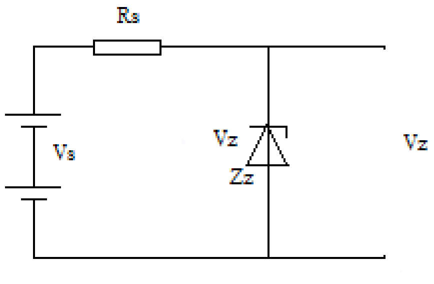


figure a)

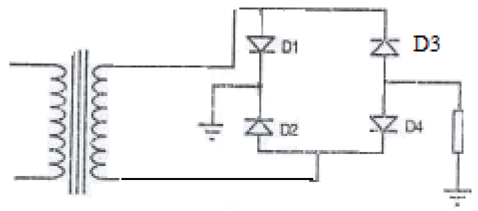


figure b)

PROBLEME :

Soit le circuit du montage représenté par la figure ci-contre

1. **Etude statique**

1) Donner l'expression de l'équation de la droite de charge et représenter la.

2) Calculer le courant I_B en fonction de R_1, R_2, R_E, R_C, V_{BE} et V_{CC} et en déduire I_C

3) Donner les expressions de la tension émetteur et collecteur par rapport à la masse

2. Etude dynamique

Le transistor est caractérisé par les paramètres hybrides h_{ij}

$h_{11E} = r$ $\quad h_{12E} = 0$ $\quad h_{21E} = \beta$ $\quad h_{22E} = \rho^{-1}$

Le montage fonctionne en régime de petits signaux et la fréquence de travail es telle que l'on peut considérer les découplages et liaisons comme parfaits.

1) Donner le schéma équivalent du circuit pour le régime de variations

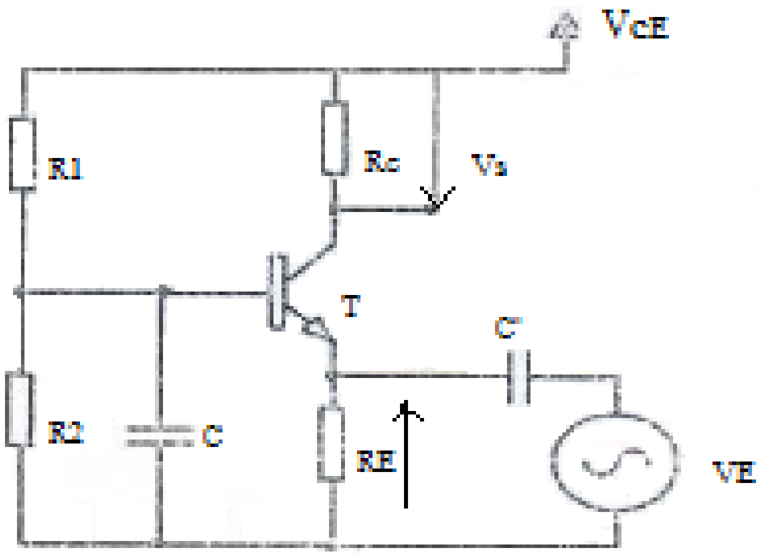
2) Préciser le type de montage du transistor T.

3) calculer le gain en tension A_V et le gain en courant A_I du montage.

4) Calculer l'impédance d'entrée du montage.

5) Donner le principe (schéma à l'appui) de la détermination de l'impédance de sortie du circuit.

Calculer l'impédance de sortie du montage pour une attaque en tension d'entrée avec un générateur de résistance interne r_g.


VcE
R1
Rc
Vs
T
C'
R2
C
RE
VE

RATTRAPAGE D'ELECTRONIQUE 2005-2006

EXERCICE I :

A- Vous disposez d'une diode 1N4001 dont la tension inverse limite de crête est de 50V et le courant limite 1A. Vous désirez réaliser le redresseur de la figure 1.

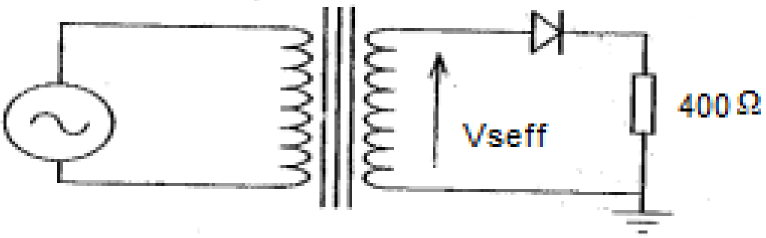


Figure 1

1) Écrire les équations que V_s doit satisfaire pour que la diode puisse être monté dans le circuit sans danger.
2) Supposer à présent que $V_{s_{eff}} = 20V$
   a) Calculer la tension moyenne
   b) Calculer le courant moyen qui circule dans la résistance de charge

B- Deux diodes du type ci-dessus sont placées dans le circuit de la figure 2

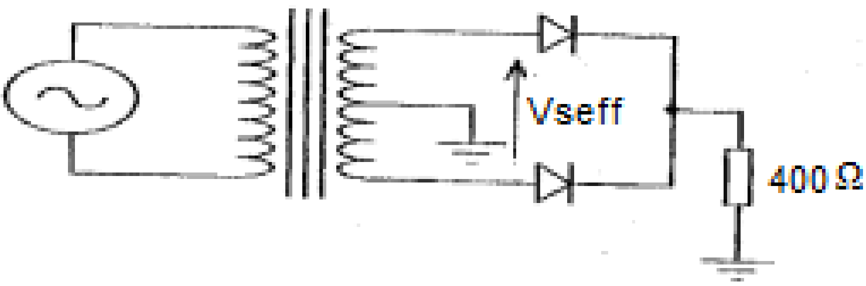
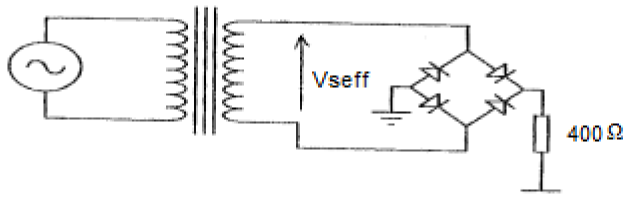


Figure 2

1) Calculer le courant continu de charge
2) Calculer la PIV entre les bornes de chaque diode
3) Calculer le courant redressé moyen qui parcourt chacune des diodes($V_{S_{eff}}$ $inchangée$).

C- Que deviendrait chacune de ces valeurs (en B-1; B-2 et B-3) si on avait plutot le circuit de la figure 3($V_{S_{eff}}$ $inchangée$).



EXERCICE II :

Soit une diode zenerD_Z. Une variation de 2mA du courant qui la traverse produit une variation de la tension de 15mV.

1) Calculer la résistance R_Z de cette diode
2) Sachant que la tension Zener de cette diode est $V_Z = 10V$. Si on veut la monter dans le circuit de la figure 4

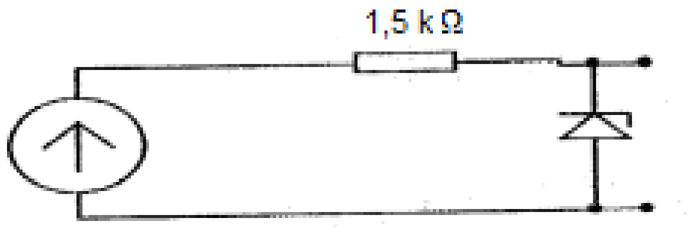
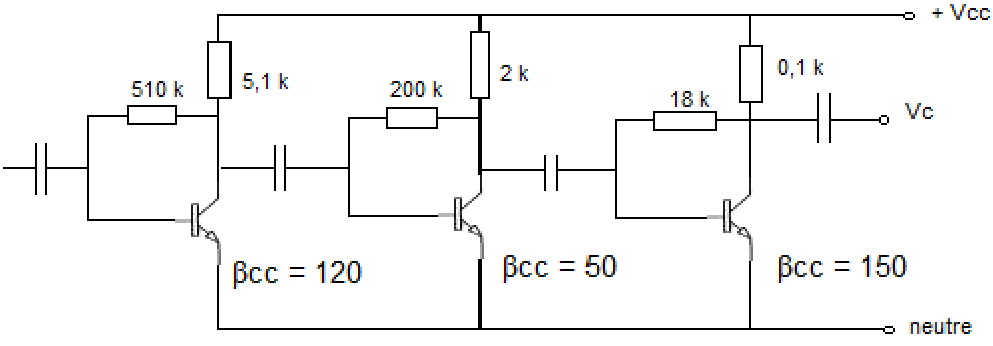


figure 4

a) Quelle doit être la valeur minimale de V_S pour que cette diode fonctionne dans la région de braquage
b) On fixe $V_S = 40V$. Calculer le courant Zener de la diode

EXERCICE III :

Soit l'amplificateur représenté par le figure 5 suivante,



1) Calculer la tension collecteur de chaque étage en supposant que $V_{cc} = 10V$
2) Calculer la puissance dissipée par chaque transistor en supposant que $V_{cc} = 15V$

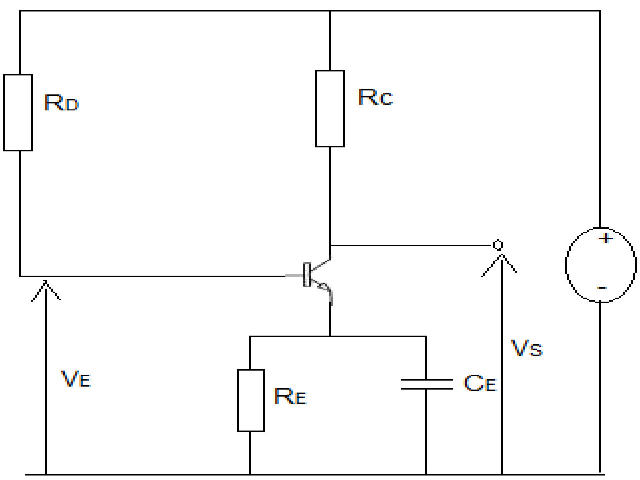
EXERCICE IV :

Soit le montage de la figure 6

Le transistor est caractérisé par ses paramètres hybrides en émetteur commun

$$h_{11E} = r; h_{12E} = 0; h_{21E} = \beta; h_{22E} = 0$$

1) Etablir le schéma équivalent en régime de variation
2) Calculer l'amplification complexe $\overline{A_v} = \frac{\overline{U_s}}{\overline{U_e}}$. On négligera 1 devant$\beta$
3) Quelle est la limite $A_{V_{\max}}$ $de\overline{A_V}$lorsque la pulsation w tend vers l'infini

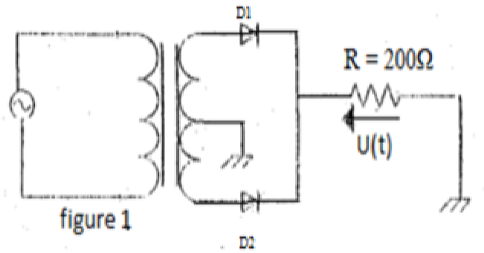


RATTRAPAGE D'ELECTRONIQUE 2008-2009

EXERCICE I :

Soit les redresseurs ci-dessous la tension efficace du secondaire est $E_{eff} = 40V$

1. Représenter sur un même graphique pour chacun des cas les courbes de la tension du secondaire du transformateur et la tension aux bornes de la charge.
2. Etablir l'expression de la tension continue de charge dans chaque cas.
3. Calculer dans chaque cas la tension continue de charge et le courant moyen qui parcourt chaque diode
4. Calculer dans la PIV de diodes.
5. En se basant sur les résultats des calculs obtenus précédemment dire en quoi ces deux circuits sont identiques et donner l'importance du redressement double alternance sur le mono alternance dans chaque cas.



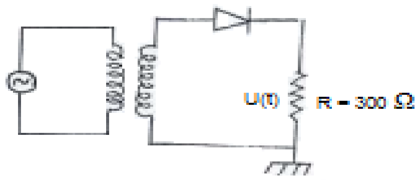


Figure 2

EXERCICE II :

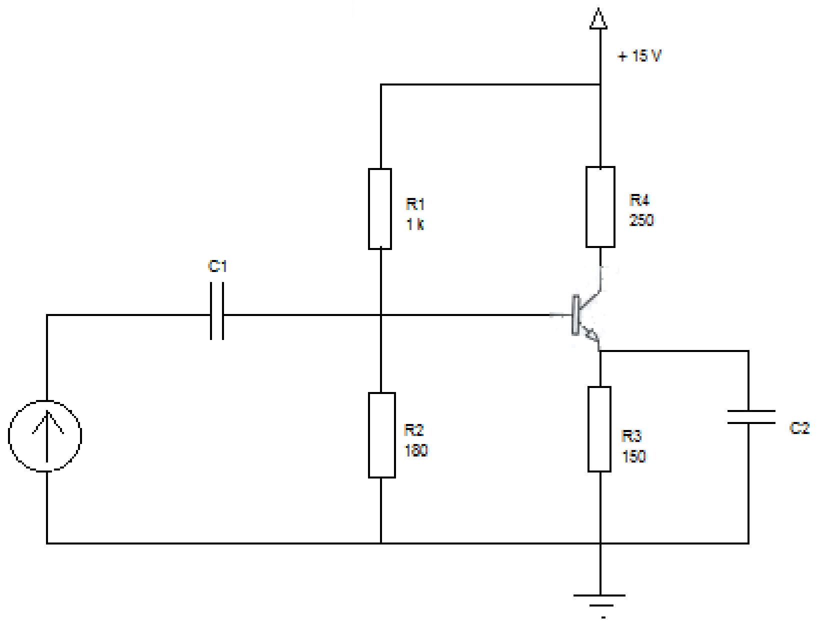
Pour chaque type de montage amplificateur opérationnels suivant; donner le schéma du montage et établir la relation entre la tension d'entrée v_e et la tension de sortie v_s.

a) Montage suiveur de tension
b) Montage inverseur de tension
c) Montage intégrateur de tension
d) Montage dérivateur de tension

EXERCICE III :

Etant donné un montage émetteur commun, le transistor est caractérisé par ses paramètres hybrides en émetteur commun. $h_{11E} = r, h_{12E} = 0, h_{21E} = \beta, h_{22E} = \frac{1}{\rho_0}$

1. Donner le schéma équivalent du circuit en régime petits signaux. On supposera les impédances des capacités négligeables à la fréquence de travail.
2. Soit le quadripôle d'entrée (E ;E') et de sortie(S ;S'). Donner les expressions littérales et définir les paramètres hybrides h_{ij} de ce quadripôle.
3. Quel est le rôle des capacités C_1 et C_2 ?
4. Calculer l'amplification en tension $A_v = \frac{U_s}{Ue}$ et l'amplification en courant $A_i = \frac{I_s}{I_e}$
5. Calculer la résistance d'entrée.
6. Donner le principe et le schéma de mesure de la résistance de sortie. Calculer cette résistance de sortie pour une attaque en tension par un générateur de résistance interne $R_g = 0$.



CONTRÔLE CONTINU D'ELECTRONIQUE 2009-2010

EXERCICE I :

On suppose que la tension efficace du transformateur représenté à la figure 1 est de 40V

Représenter la forme de la tension redressée U(t) et la forme du courant $I_D(t)$ qui passe dans chaque diode.

Calculer la tension crête à crête entre les bornes de la résistance de charge.

Calculer la tension continue de charge et en déduire le courant continu de charge.

Calculer la PIV entre les bornes de chaque diode.

En déduire le courant moyen qui parcourt chaque diode.

Reprendre la question 3, pour le cas d'un redressement simple alternance. Comparer les résultats et les commenter.

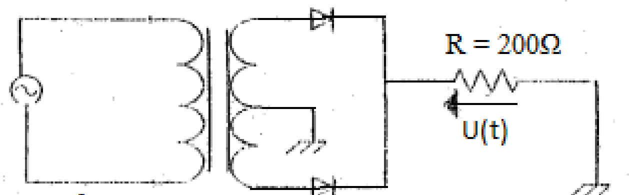


figure 1

EXERCICE II :

Dans chacun des trois circuits de la figure 2, déterminer l'état (passant ou bloqué) de la diode. Si oui déterminer le courant qui traverse la diode. Les diodes sont considérées idéales,

$V_D = 0,7$ V

(on pourra calculer les tensions entre les points A et C pour conclure sur l'état de la diode)

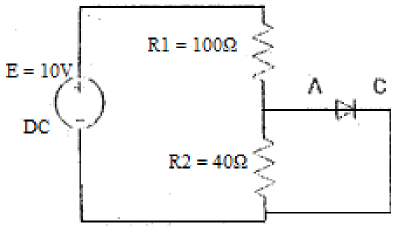


Figure 2a

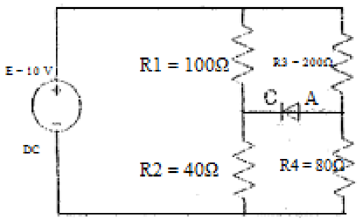


Figure 2b

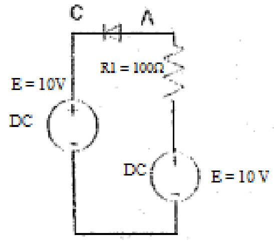


Figure 2c

EXERCICE III :

Dans le montage de la figure trios les deux transistors sont supposés identiques et possèdent le même gain β.

1. Déterminer et représenter la droite de charge statique pour un des transistors
2. Calculer le courant I_B qui entre dans la base de chaque transistor.
3. Calculer le courant I_C et en déduire les tensions V_E et V_{CE}
4. calculer la puissance dissipée dans chaque transistor

B = 100 ; $V_{\beta E} = 0,7$ V

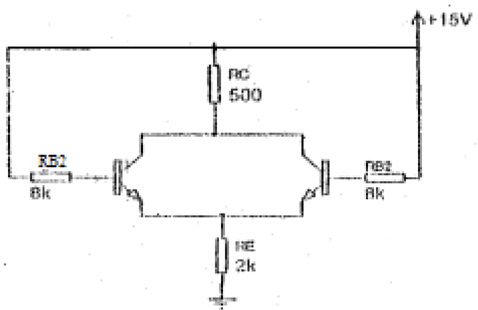


Figure 3

EXAMEN D'ELECTRONIQUE 2009-2010

EXERCICE I :

Soit un transistor à jonction en émetteur commun. Ses paramètres hybrides sont alors h11E, h12E, h21E, h22E. si le même transistor est monté en émetteur collecteur commun, ses paramètres hybrides sont alors h11C, h12C, h21C, h22C. ces paramètres deviennent h11B, h11B, h21B et h22B s'il est monté en base commune.

1. Etablir les expressions de h11C, h12C, h21C, h22C en fonction de h11E, h12E , h21E, h22E

2. Trouver les expressions de h11B, h11B, h21B et h22B en fonction de h11E, h12E, h21E, h22E

EXERCICE II :

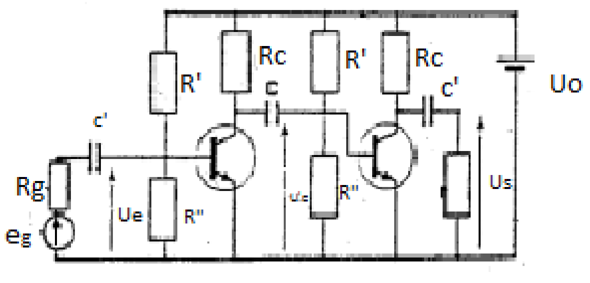
Soit l'amplificateur à deux étapes de la figure E.6.14. Les deux transistors sont identiques par leurs paramètres hybrides en émetteur commun.

H11E = r ; h12E = 0 ; h21E = β ; h22E = 0

Pour les applications numériques o, donne les valeurs suivantes : $R_C = 1\ k\Omega$; $r = 1\ k\Omega$; $\beta = 150$

C = 0,5 µF C' = 1 µF ; $R_U = 50\ \Omega$ $R_g = 50\Omega$

R' et R'' très grands n'interviendront pas dans les calculs



a) ***Domaines des fréquences moyennes – les liaisons sont parfaites.***

Etablir le schéma équivalent du montage.

Déterminer l'amplitude en tension A_{v2}, du deuxième étage.

Déterminer la résistance d'entrée R_{e2} du deuxième étage.

En déduire la résistance de charge dynamique R_{U1} du premier étage

Déterminer l'amplification en tension A_{v1}, du premier étage.

b) ***Domaine des fréquences basses. – Etablir le schéma équivalent du montage***

Déterminer l'amplification complexe en tension du deuxième étage

Déterminer l'amplification complexe en tension du premier étage

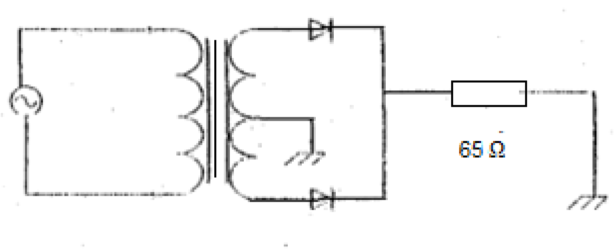
En déduire l'amplification complexe en tension du montage et la fréquence de coupure à 3dB du gain en tension.

L'ensemble est commandé par un générateur (e_g, R_g) lié par une capacité C'' = 1µF. Déterminer l'amplification composite complexe

EXAMEN D'ELECTRONIQUE B

EXERCICE I :

Soit le redresseur plein onde suivant:



1)
i) Calculer la tension continue de charge
ii) Calculer le courant limite I_0 de chaque diode
iii) Calculer la PIV limite de chaque diode
2) Calculer la PIV entre les bornes de chaque diode
3) Calculer le courant redressé moyen qui parcourt chaque diode

On donne la tension secondaire efficace:40V

On suppose que les diodes sont idéales

4) Quelles diodes parmi les suivantes peuvent être utilisées

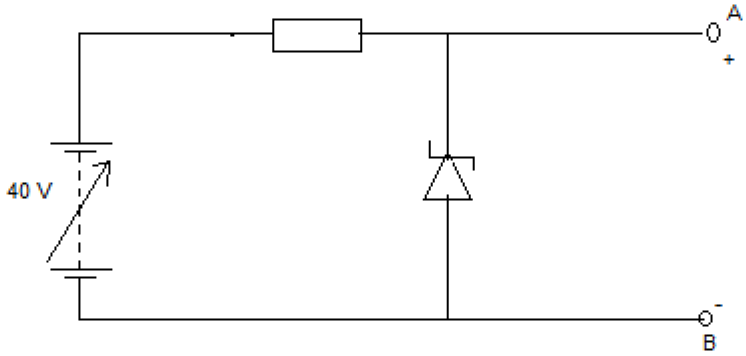
Diode	Courant limite	PIV
1N4002	$10^6 \mu A$	$10^5\ mV$
1N914	$5.10\ \mu A$	$2.10^4 mV$
IN1183	$35.10^6 \mu A$	$5.10^4 mV$
IN3070	$10^5 \mu A$	$1,75.10^3 mV$

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

EXERCICE II :

On considère le schéma de régulation suivant:



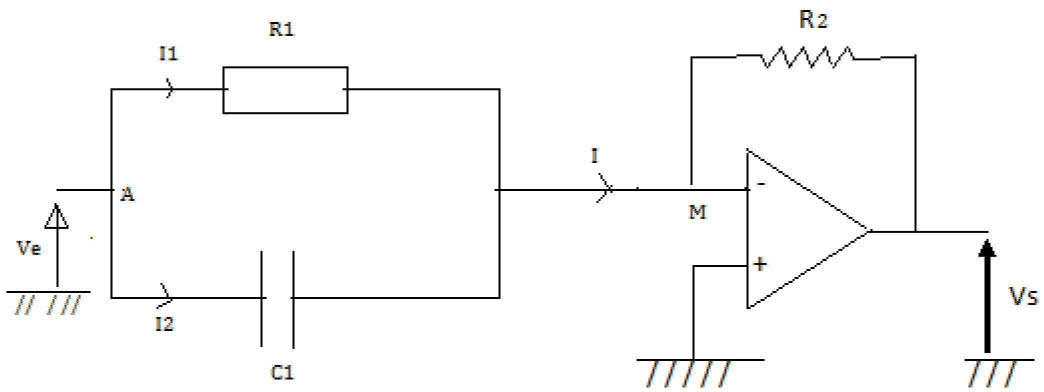
On suppose que la diode est idéale et on donne la tension V_Z de la diode Zener égale à 10V

1) Calculer le courant zener minimal et le courant maximal
2) En supposant que la diode zener a une résistance de 7Ω calculer la variation de la tension zener lorsque la tension de source varie de 20 à 40V
3) Comparer les variations de tension de sortie et d'entrée
4) Conclure
5) On branche une résistance de charge $R_L = 2K\Omega$ entre A et B.
   a) Que vaut la tension de thevenin d'attaquée de la diode zener si la tension source est de 40V.
   Indication: représenter le circuit sans diode zener et calculer $V_A - V_B$
   b) Quelle relation doit satisfaire ce régulateur pour que la diode zener fonctionne dans la région de claquage
   c) Supposer que la condition en b) soit respectée.
      c-1) Calculer le courant qui circule dans la résistance R
      c-2) Calculer le courant de charge
      c-3) En déduire le courant zener

CORRECTIONS D'ELECTROCINETIQUE

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ELECTRONIQUE 2002-2003

EXERCICE I :



a) $V_E = 5V(tensioncontinu)$: c'est un circuit ouvert⇒

$$I = \frac{V_E}{R_1} = -\frac{V_S}{R_2}(en\ R^- = R^+ = 0) \Rightarrow V_S = -\frac{R_1}{R_2}V_E$$

$$R_1 = R_2 = 1K\Omega \Rightarrow \mathrm{V_S} = -\mathrm{V_E}$$

b) Fonction linéaire

D'après le théorème de Millan on a $e^- = \frac{\frac{V_S}{R_E}+\frac{V_E}{R_1\backslash\backslash C_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1\backslash\backslash C_1}} = e^+ = 0$

$$\Rightarrow \frac{V_S}{R_2} + \frac{V_E}{\frac{\frac{R_1 1}{jC_1w}}{R_1 + \frac{1}{jc_1w}}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{V_S}{R_2} + \frac{1 + jR_1C_1w}{R_1}V_E = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{V_S}{V_E} = -\frac{R_2}{R_1}(1 + jR_1C_1w)}$$

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

c) On a $j = -\frac{V_S}{R_2}, I_{R_1} = \frac{V_E}{R_1}, I_{C_1} = C_1\frac{dV_E}{dt}$

Au nœud E, on a $I = I_{R_1} + I_{C_1}$

$$\Leftrightarrow -\frac{V_S}{R_2} = \frac{V_E}{R_1} + C_1\frac{dV_E}{dt}$$

$$\boxed{\Rightarrow V_S = -\frac{R_2}{R_1}V_E - R_1C_1\frac{dV_E}{dt}}$$

d) Au nœud E, on a on a $I = I_{R_1} + I_{C_1}$

$$\Leftrightarrow -\frac{V_S}{R_2} = \frac{V_E}{R_1} + C_1\frac{dV_E}{dt}$$

$$V_S = -\frac{R_2}{R_1}V_E - R_1C_1\frac{dV_E}{dt} = -\frac{R_2}{R_1}Esin(w_1t) - \frac{R_2C_1}{R_1C_1}\cos(w_1t) \text{ où } V_E = Esinw_1t$$

$$V_S = -2(\sin(w_1t) + \cos(w_1t)) = -2\sqrt{2}\sin\left(w_1t + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\sin\left(w_1t + \frac{5\pi}{4}\right)$$

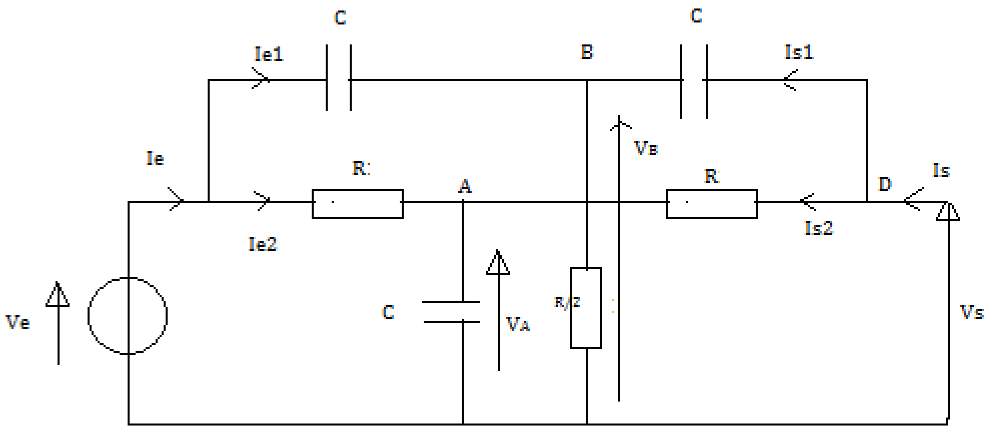
$$\boxed{V_s = 2\sqrt{2}\sin\left(w_1t + \frac{5\pi}{4}\right)}$$

e) D'après b) $Arg\left(\frac{V_S}{V_E}\right) = \pi + arctgR_1C_1w$

Or $w \gg w_1 = \frac{1}{R_1C_1}$

$$\Rightarrow Arg\left(\frac{V_S}{V_E}\right) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

PROBLEME



1) Expression de w_0 et valeur de m

Nœud D: $I_S = I_{S_1} + I_{S_2} = 0$ or pas de charge $\Rightarrow I_S = 0$

Recherche de $I_{S_1} et I_{S_2}$: Pour cela on trouve d'abord $V_1 et V_{B_1}$ puisque on a $I_{S_1} = \frac{V_S - V_B}{\frac{1}{jcw}}$ et $I_{S_2} = \frac{V_S + V_A}{R}$

Théorème de Mill man aux points (nœuds) A et B ⇒

$$\begin{cases} V_A = \dfrac{\frac{V_e}{R} + \frac{V_S}{R}}{\frac{2}{R} + 2jcw} = \dfrac{V_E + V_S}{2(1 + jRcw)} \\ V_B = \dfrac{V_e jCw + V_S jCw}{2jcw + \frac{2}{R}} = \dfrac{V_e + V_S}{2\left(1 + \frac{1}{jRcw}\right)} = \dfrac{V_e + V_S}{2(1 + jRCw)} jRCw \end{cases}$$

Alors:

$$I_{S_1} = \frac{V_S - V_R}{\frac{1}{jCw}} = jCw\left[V_S - \frac{V_e + V_S}{2(1 + jRcw)} jRcw\right]$$

$$= jCw \frac{2(1 + jRCw)V_S - jRCwV_e - jRCwV_S}{2(1 + jRCw)}$$

$$I_{S_1} = \frac{jCw}{2(1 + jRCw)}[(2 + jRCw)V_S - jRCwV_e](1)$$

$$I_{S_2} = \frac{V_S V_1}{R} = \frac{1}{R}\left[V_S - \frac{V_e + V_S}{2(1 + jRCw)}\right] = \frac{1}{2R(1 + jRCw)}[2(1 + jRCw)V_S - V_e - V_S]$$

$$I_{S_2} = \frac{1}{2R(1 + jRCw)}[(1 + 2jRCw)V_S - V_e] \qquad (2)$$

$$(1)\ et (2)\ on\ a :$$

$$I_{S_1} + I_{S_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{jCw}{2(1 + jRCw)}[(2 + jRCw)V_S - JRCwV_e] + \frac{1}{2R(1 + jRCw)}[(1 + 2jRCw)V_S - V_e]$$

$$\Leftrightarrow jCw(2 + jRCw)V_S - jCw.JRCwV_e + \frac{1}{R}(1 + 2jRCw)V_S - \frac{1}{R}V_e = 0$$

$$\Leftrightarrow [2jRCw + (jRCw)^2 + 1 + 2jRCw]V_S + [-(jRCw)^2 - 1]V_e = 0$$

D'où on a :

$$\frac{V_S}{V_e} = \frac{1 + (jRCw)^2}{1 + 4jRCw + (jRCw)^2} = T(jw)$$

$$T(jw) = \frac{1 + \left(j\frac{w}{\frac{1}{RC}}\right)^2}{1 + 2 \times 2 \times \frac{jw}{\frac{1}{RC}} + \left(j\left(\frac{w}{\frac{1}{RC}}\right)\right)^2} = \frac{\left(1 + \left(\frac{jw}{w_0}\right)^2\right)}{1 + \frac{2mjw}{w_0} + \left(j\frac{w}{w_0}\right)^2}$$

D'où par identification:

$$\boxed{w_0 = \frac{1}{RC} et\ m = 2}$$

2) Pulsation de coupure $w_a et w_b$ et bande passante $B = \frac{w_b w_a}{2\pi}$

On doit avoir $|T(jw)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\left(\frac{w}{w_0}\right)^2}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right]+\left(\frac{2mw}{w_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left[1-\left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right]^2}{\left[1-\left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right]+\left(\frac{2mw}{w_0}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\left[\frac{\frac{2mw}{w_0}}{1-\left(\frac{w}{w_0}\right)^2}\right]^2} = \frac{1}{2}$$

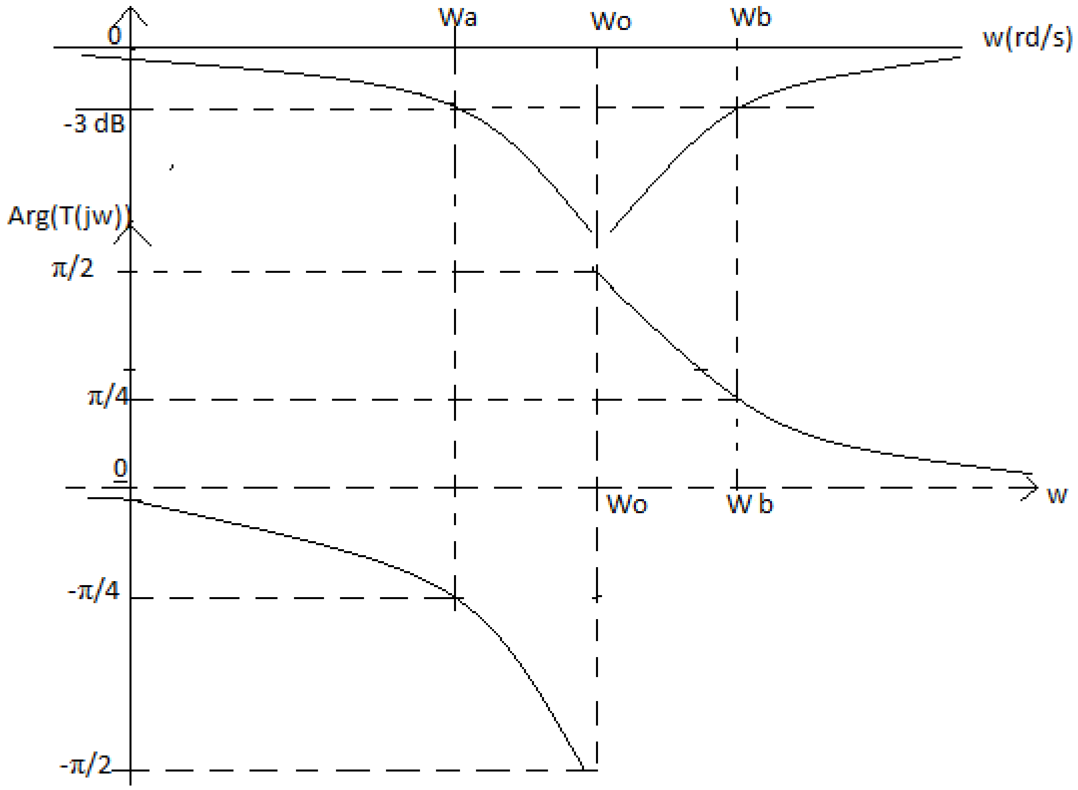
$$\Leftrightarrow \left[\frac{\frac{2mw}{w_0}}{1-\left(\frac{w}{w_0}\right)^2}\right]^2 = 2-1$$

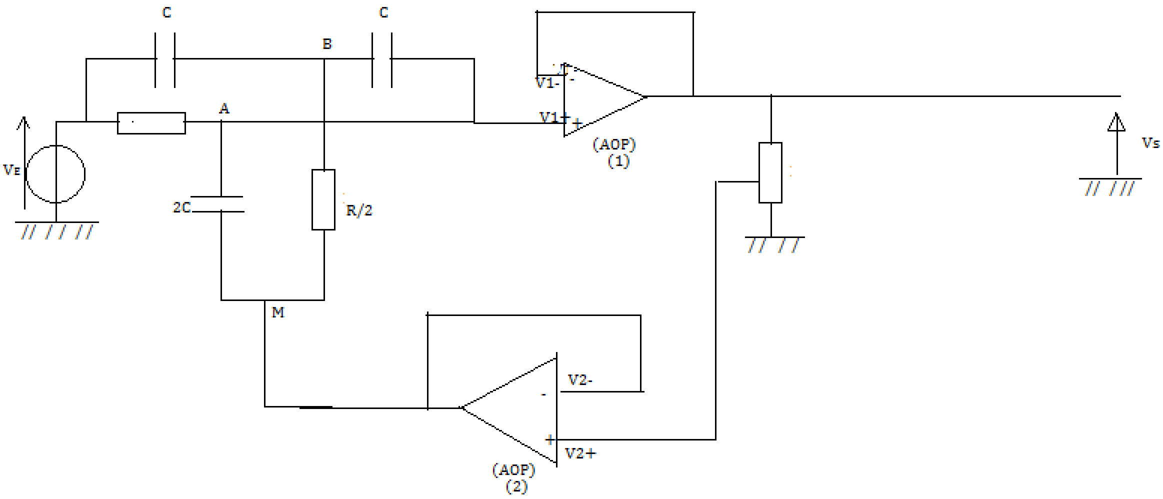
$$\Leftrightarrow \left[\frac{2mw_0 w}{w_0^2-w^2}\right]^2 - 1 = 0$$

$$\left(\frac{2mw_0 w}{w_0^2-w^2}+1\right)\left(\frac{2mw_0 w}{w_0^2-w^2}-1\right) = 0$$

$$|T(jw)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4RCw}{1-(RCw)^2}\right)^2}} \quad Arg\big(T(jw)\big) = -Arctg\left(\frac{4RCw}{1-R^2C^2w^2}\right)$$

- $si\ w \to 0 \begin{cases} |T(jw)| \to 1 \Rightarrow G_T = 20 log T \\ Arg\big(T(jw)\big) \to 0° \end{cases}$
- $si\ w = w_a, \begin{cases} |T(jw)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_T = -3dB \\ Arg\big(T(jw)\big) = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$
- $si\ w = w_b, \begin{cases} |T(jw)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_T = -3dB \\ Arg\big(T(jw)\big) = +\frac{\pi}{4} \end{cases}$
- $si\ w = w_0, \begin{cases} |T(jw)| = 0 \Rightarrow G_T \to -\infty \\ Arg\big(T(jw)\big) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} si\ w \to_< w_0 \\ +\frac{\pi}{2}\ si\ w \to_> w_0 \end{cases} \end{cases}$

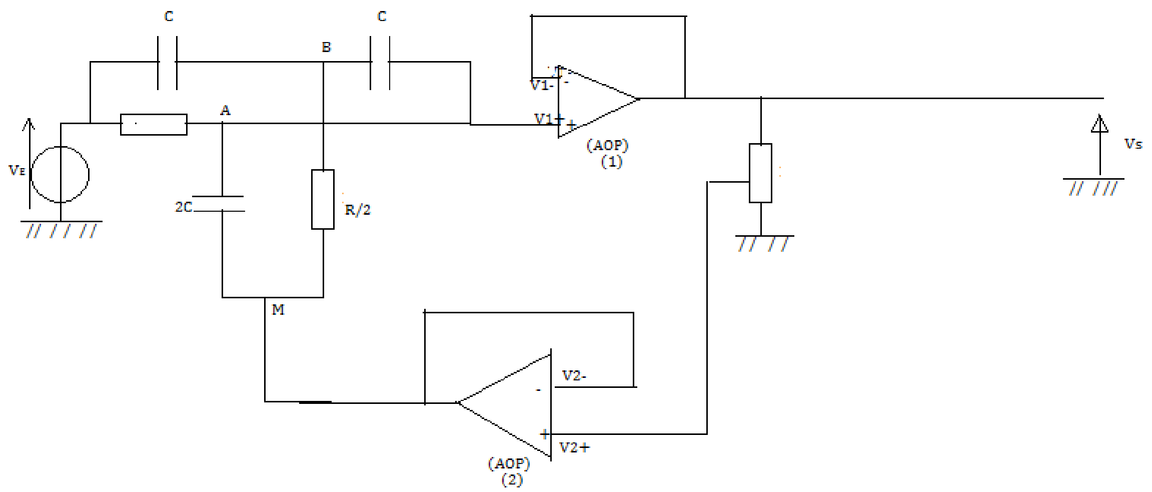




On a un suiveur de tension réalise par l'AOP (1) d'où $V_D = V_S$ et la charge place en D par rapport à la masse est infini. De meme l'AOP (2) est un suiveur ⇒

$$V_M = V = \frac{xR_0}{xR_0 + (1-x)R_0} = xV_S$$

Ainsi notre montage équivalent à:



On procède comme à la question 1) pour calculer H(jw) on a:

$$\begin{cases} I_{S_1} + I_{S_2} = 0 \\ V_1 = \dfrac{\frac{V_R}{R} + \frac{V_S}{R} + \frac{xV_S}{\frac{1}{jRCw}}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + jRCw} = \dfrac{V_E + V_S + j2xRCwV_S}{2(1+jRCw)} \\ V_B = \dfrac{V_E jCw + V_S jCw + \frac{2}{R}xV_S}{2jCw + \frac{2}{R}} = \dfrac{jRCwV_E + jCwV_S + 2xV_S}{2(1+jRCw)} \end{cases}$$

$$I_{S_1} = \frac{V_S - V_B}{\frac{1}{jCw}} = jCw\left[V_S - \frac{jRCwV_E + \ (2x + JRCw)V_S}{2(1+jRCw)}\right]$$

$$= \frac{jCw}{2(1+jRCw)}[(2 + 2jRCw - 2x - jRCw)V_S - jRCwV_E]$$

$$I_{S_2} = \frac{V_S - V_1}{R} = \frac{1}{R}\left[V_S - \frac{(V_E + V_S + 2xjRCwV_S)}{2(1+jRCw)}\right]$$

$$= \frac{1}{R}\cdot\frac{1}{2(1+JRCw)}[(2 + j2RCw - 1 - 2xjRCw)V_S - V_E]$$

Alors $I_{S_1} + I_{S_2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{jCw}{2(x+jRCw)}[(2(1-x)+JRCw)V_S - jRCwV_E] + \frac{1}{R}.\frac{1}{2(1+jRCw)}[(1+2(1-x)jRCw)V_S - V_E = 0$$

$$[jRCw.(2(1-x)+jRCw)V_S - jRCw.JRCwV_E] + \ [(1+2(1-x)jRCw)V_s - V_e] = 0$$

$$[2(1-x)jRCw + (jRCw)^2 + 1 + 2(1-x)jRCw]V_S + [-(jRCw)^2 - 1]V_E = 0$$

$$[1+4(1-x)jRCw + (jRCw)^2]V_S - [1+(jRCw)^2]V_E = 0$$

$$H(jw) = \frac{V_s}{V_E} = \frac{1+(jRCw)^2}{1+4(1-x)jRCw+(jRCw)^2}$$

Par identification avec la forme canonique du rejeteur de bande, on a:

$$\boxed{w_0 = \frac{1}{RC} \ et \ m = 2(1-x)}$$

- Expression de la bande rejectée:

$$B_x = \frac{m}{\pi}w_0 = \frac{2(1-x)}{\pi}\frac{1}{RC} = \frac{2}{\pi}.\frac{1-x}{RC}B_x = \frac{2}{\pi RC}(1-x)$$

$$AN: \quad B_x = \frac{2}{\pi RC}(1-9,9) = 3978,87Khz$$

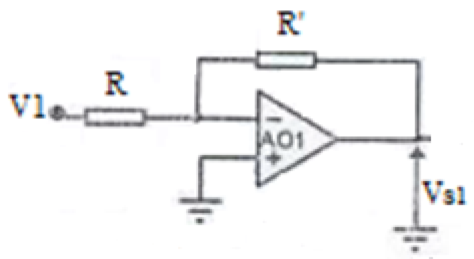
Remarque : la rejection est 10 fois plus meilleure que le montage.

CORRECTION DE L'EXAMEN ELECTRONIQUE 2006-2007

Exercice 1:

1) Calcul des tensions $v_{s_1} et\ v_{s_2}$ à la sortie des amplificateurs $AO_1\ ET\ AO_2$

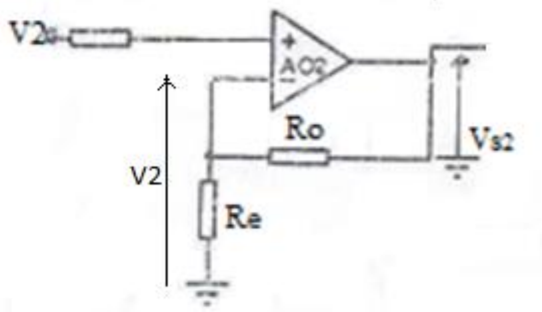
D'après Mill Mann



$$V^- = \frac{\frac{v_1}{R}+\frac{v_{s_1}}{R'}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}} = V^+ = 0$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{R}+\frac{v_{s_1}}{R'} = 0$$

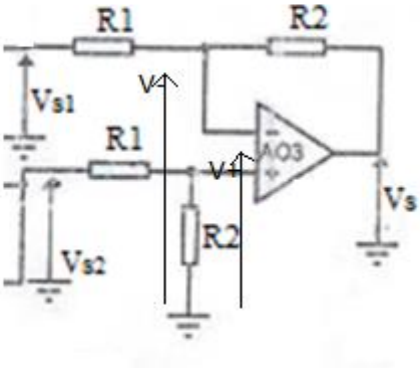
$$\boxed{v_{s_1} = -\frac{R'}{R}v_1}$$



$$v_2 = V^- = \frac{R_e}{R_e+R_2}v_{s_2}$$

$$\Leftrightarrow v_{s_2} = \frac{R_e+R_2}{R_e}V_2 = \left(1+\frac{R_2}{R_e}\right)v_2$$

2) L'AO réalise la fonction d'amplificateur inverseur
3) Calcul de $v_s = f\left(v_{s_1}, v_{s_2}\right)\ puis\ en\ f(v_1, v_2)$



$$V^{-}=\frac{\frac{v_{s_1}}{R_1}+\frac{v_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$$

$$V^{-}=\frac{v_{s_1}R_2+v_sR_1}{R_1+R_2}$$

$$V^{+}=\frac{R_2}{R_1+R_2}v_{s_2}$$

AOP ideal $V^{+}=V^{-}\Leftrightarrow v_{s_1}R_2+v_sR_1=R_2v_{s_2}\quad d'où$

$$\boxed{v_s=\frac{R_2}{R_1}\left(v_{s_2}-v_{s_1}\right)=\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{R_e+R_2}{R_e}v_2+\frac{R'}{R}v_1\right)}$$

4) Relation entre $R_e, R_0, R\ et\ R'\ pour\ que\ v_s=A(v_1+v_2)$

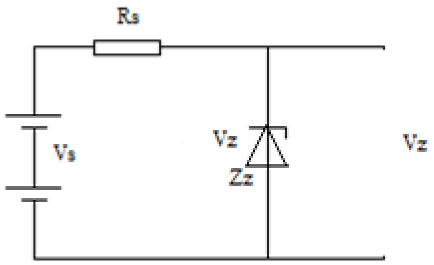
Il faut que $\frac{R_e+R_0}{R_e}=\frac{R'}{R}\Leftrightarrow R(R_e+R_0)=R'R_e$

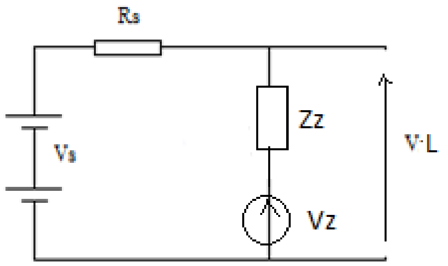
D'où $A=\frac{R_2}{R_1}\frac{R_e+R_0}{R_e}=\frac{R_2}{R_1}\frac{R'}{R}$

Exercice 2 :

Soit le circuit de la figure a)

$$v_z=18V, Z_z=2\Omega; R_s=68\Omega\ et\ v_s=27V$$





Calcul du courant zener

Dans la maille $v_s - (R_s + Z_z)I_2 - v_2 = 0$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{v_s - v_2}{R_s + Z_z} \qquad AN: I_2 = 128{,}57.10^{-3}A$$

Variation de la tension de charge $v_L\ si\ v_s \in [27{,}40V]$

$$v_L = v_z + R_2 I_2 \Leftrightarrow \Delta v_z = Z_z \Delta I_2 \quad \Delta I_2 = \frac{\Delta v_s}{R_s + Z_z} \Rightarrow \Delta v_L = \frac{Z_z}{R_s + Z_z}\Delta v_s$$

$$AN: \Delta v_L = 0{,}371\ V$$

$$v_2 = 60V; R = 400\Omega$$

Calcul de la tension continu de charge v_{cc} et le courant moyen de chaque diode i_c

$$v_{cc} = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} v_{2crete} sinwtdt$$

$$v_{cc} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} v_2\sqrt{2}\sin(wt)\, dt$$

Pour $\theta = wt \Leftrightarrow d\theta = wdt$

À $t = 0\,, \theta = 0\,,\ \ t = \frac{T}{2}\,,\ \ \theta = \frac{wT}{2} = \pi$

$$v_{cc} = \frac{2}{wT}\int_0^{\pi} v_2\sqrt{2}\sin(\theta)\, d\theta = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} v_2\sqrt{2} sin\theta d\theta$$

$$= \frac{v_2\sqrt{2}}{\pi}[-cos\theta]_0^{\pi} = \frac{2v_2\sqrt{2}}{\pi}$$

$$v_{cc} = \frac{2v_2\sqrt{2}}{\pi} \qquad AN:\ v_{cc} = 54V$$

$$I_0 = \frac{I_{cc}}{2} = \frac{v_{cc}}{2R} \quad AN: I_0 = 67{,}5mA$$

a) $PIV = v_2\sqrt{2} \qquad AN: PIV = 60\sqrt{2} = 87{,}85V$

Problème :

A- Etude statique

1) Expression de l'équation de la droite de charge

$$v_{cc} = R_E I_c + v_{ce} + R_E I_E = v_{ce} + I_e\left(R_c + R_E\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)$$

$$or\ \beta \gg 1 \Rightarrow v_{cc} = V_{ce} + (R_c + R_e)I_c$$

$$d'où\ I_c = \frac{v_{cc}}{R_c + R_E} - \frac{v_{ce}}{R_c + R_e}$$

Representation s(0, $\frac{v_{cc}}{R_c+R_E}$) , B(v_{cc},0

Calculons $I_B = f(R_1, R_2, R_E, R_C, v_{BE}, v_{cc})$

En appliquant le théorème de Thévenin entre B et M ; on a:

$$E_{th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_{cc}$$

$$R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

D'où le schéma équivalent

D'après la maille d'entrée, on a :

$$E_{th} = R_{th} I_B + V_{BE} + R_E I_E \qquad (1)$$

$$\beta \gg 1\,;\, I_E \simeq I_c = \beta I_B$$

(1) devient $E_{th} - V_{BE} = (R_{th} + \beta R_E)I_B$

$$\Rightarrow I_e = \frac{E_{th} - V_{BE}}{R_{th} + \beta R_e} = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2} v_{cc} - v_{BE}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \beta R_E}$$

$$\boxed{I_B = \frac{R_2 v_{cc} - (R_1 + R_2) v_{BE}}{R_1 R_2 + \beta R_E (R_1 + R_2)}}$$

$$\boxed{I_c = \beta I_B = \beta.\left(\frac{R_2 v_{cc} - (R_1 + R_2) v_{BE}}{R_1 R_2 + \beta R_E (R_1 + R_2)}\right)}$$

2) Tension émetteur v_E et collecteur v_c

$$v_E = R_E I_E \simeq \beta R_E I_B$$

$$v_c = v_{cc} - R_c I_c = v_{cc} - R_c \beta I_B$$

B- Etude dynamique

$$h_{11E} = r\,, h_{12E} = 0\,, h_{21E} = \beta, h_{22E} = \rho^{-1}$$

1) Schéma du circuit pour le régime de variations
2) Le transistor T est monté en BASE COMMUNE
3) Calcul du gain en tension A_v et le gain en courant A_i

$$A_v = \frac{v_s}{v_E} \qquad v_e = -ri_b$$

Par la maille : $-ri_b + pi_c - \rho\beta i_b + R_c i_c = 0$

$$(R_c + \rho)i_c = (r + \rho\beta)i_b \Leftrightarrow i_c = \frac{r + \beta\rho}{R_c + \rho} i_b$$

$$v_s = -R_c i_c = -\frac{R_c(r + \beta\rho)}{R_c + \rho} i_b$$

$$= \frac{R_c}{T}\frac{r + \beta\rho}{R_c + \beta}$$

$$A_v = \frac{i_c}{i_B}$$

En appliquant la loi des nœuds au point E, on a:

$$i_E + i_b + i_c = i_{RE} \Rightarrow i_E = i_{RE} - (i_b + i_e)$$

$$or\ i_{RE} = \frac{v_e}{r_e} = -\frac{r}{R_E} i_b$$

$$i_E = -\left(\frac{r}{R_E} + \frac{r + \beta\rho}{R_c + \rho} + 1\right) i_b$$

$$i_c = \frac{r + \beta\rho}{R_c + \rho} i_b$$

$$A_i = \frac{-\frac{r + \beta\,\rho}{R_c + \rho}}{\frac{r}{R_E} + \frac{r + \beta\,\rho}{R_c + \rho} + 1}$$

$$A_i = -\frac{R_E(r+\beta\rho)}{(r+R_e)(R_c+\rho)+R_E(r+\beta\rho)}$$

4) Impédance d'entrée du montage

$$Z_e = \frac{v_e}{i_E}; v_e = -ri_b$$

$$Z_e = \frac{r}{\frac{r}{R_e}+\frac{r+\beta\,\rho}{R_c+\rho}+1}$$

$$Z_e = \frac{rR_E(R_c+\rho)}{R_E(r+\beta\rho)+(r+R_e)(R_c+\rho)}$$

Principe de la détermination de l'impédance de sortie du circuit

Déconnecter l'impédance de sortie (si elle existe) supprimer tous les générateurs autonomes ou indépendantes connecter un générateur de tension e_0 à la sortie du circuit qui débite un courant i_0 mesuré à l'aide d'un amperemetre

Effectuer le rapport $\frac{e_0}{i_0} = Z_s$

Le nœud au point c : $i + i_0 = \frac{e_0}{R_c} \Rightarrow i_0 = \frac{e_0}{R_0} - i$ (1)

On a $R = r_g \backslash\backslash R_E \backslash\backslash r$; $Ri = ri_b \Leftrightarrow i = \frac{r}{R} i_b$ (2)

La maille on a : $e_0 + \rho\beta i_b + \rho i + ri_b = 0$

$$\left(\rho\beta + \frac{\rho r}{R} + r\right) i_b = 0 \Leftrightarrow i_b = -\frac{e_0}{\rho\left(\beta+\frac{r}{R}\right)+r} \quad (3)$$

(3) et (2) dans (1)

$$= \frac{e_0}{R_c} + \frac{r}{R}\frac{e_0}{\rho\left(\beta+\frac{r}{R}\right)+r} = \frac{1}{\frac{1}{R_c}+\frac{r}{\rho(\beta\rho+r)+Rr}}$$

$$= \frac{R_c[R(r+\rho\beta)+\rho r\,]}{r(R_c+\rho+R)+\beta\rho R}$$

CORRECTION DU CONTRÔLE CONTINU D'ELECTRONIQUE 2009-2010

EXERCICE I :

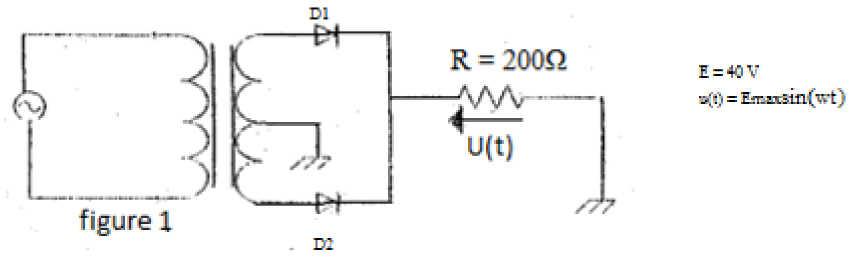
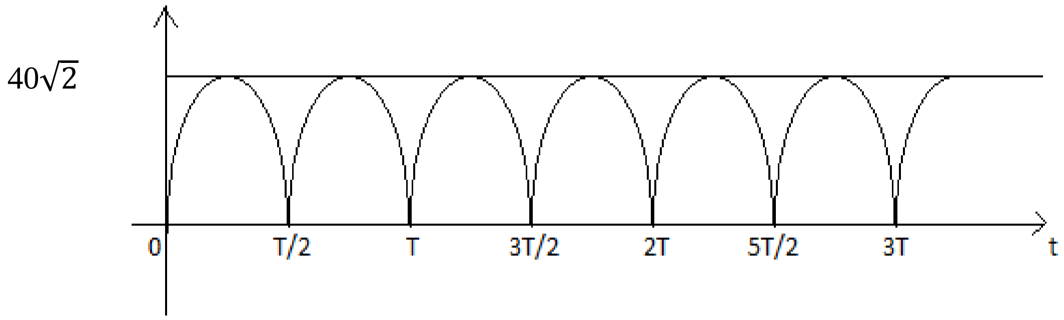
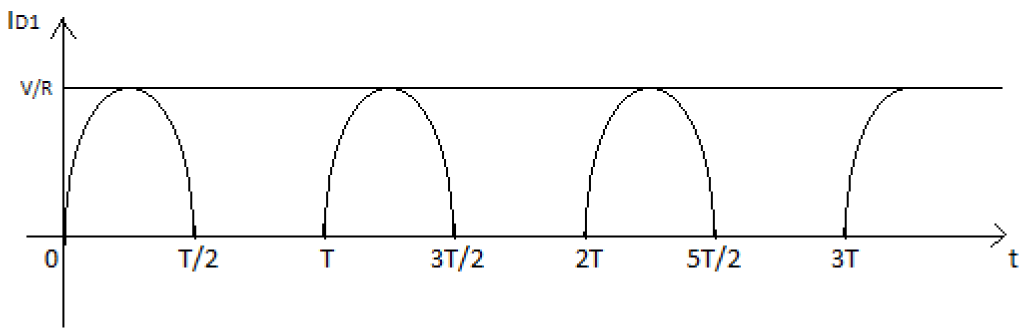


figure 1

1. forme de u(t)



*** Courant I_D dans chaque diode**



3. Tension continue de charge

$U_{Rmoy} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} E\sqrt{2}\,\sin t\,dt$

$= \frac{2E\sqrt{2}}{\pi}$

$U_{Rmoy} \simeq 0{,}90\ E$

A.N. $U_{Rmoy} = 0{,}90(40)$

$U_{Rmoy} = 36\ V$

*** Courant continu de charge**

$I_{Rmoy} = \frac{U_{Rmoy}}{R}$

$I_{Rmoy} = \frac{0{,}90\ E}{R}$

A.N. $I_{Rmoy} = \frac{0{,}90(40)}{300}$

$I_{Rmoy} = 0{,}12\ A$

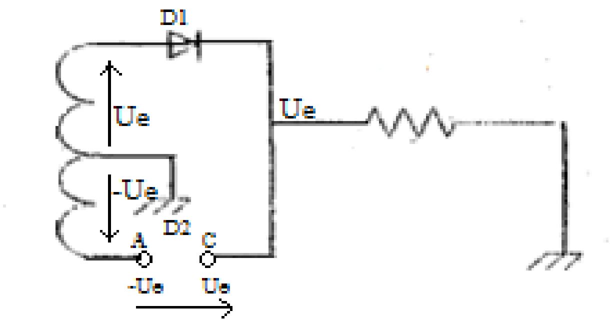
3. Tension de crête à crête : 2 E_{max}

$E_{max} = E\sqrt{2} = 40\sqrt{2} = 56{,}56\ V$

$\Longrightarrow 2\ E_{max} = 2(\ 56{,}56)$

$2\ E_{max} = 113{,}13\ V$

4. PIV



$PIV = V_{inv} = V_C - V_A$

$= U_e - (-U_e)$

$PIV = 2\ U_e$

A.N. $PIV = 2\ E\sqrt{2} = 2\ (40)\ \sqrt{2}$

PIV = 113, 13 V

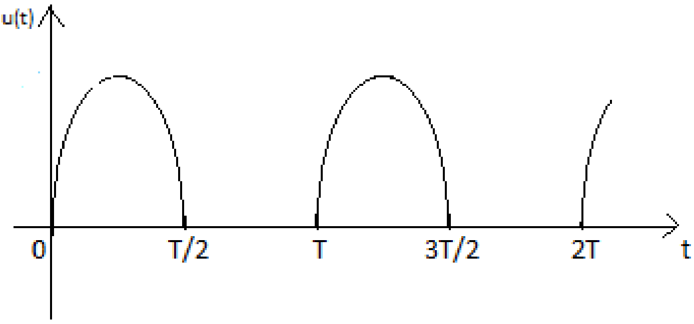
5. E_{Dmoy}

$I_{Dmoy} = \frac{I_{Rmoy}}{2}$

$\Longrightarrow I_{Dmoy} = 0,06$ A

6. Redressement simple alternance

*** Tension continue de charge.**



$U_{Rmoy} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} E\sqrt{2}\sin t\, dt$

$U_{Rmoy} = 0,45$ E

A.N $U_{Rmoy} = 0,45\ (40)$

$= 18$ V

*** courant continu de charge**

$I_{Rmoy} = \frac{U_{Rmoy}}{R}$

$I_{Rmoy} = \frac{18}{300} = 0,06$ A

7. transformation à point milieu : $U_{Rmoy} = 0,90$ E

Simple alternance : $U'_{Rmoy} = 0,45\ E = \frac{U_{Rmoy}}{2}$

$\Longrightarrow$ le redressement simple alternance fait perdre la moitié de a tension moyenne redressée (une demi-alternance du signal d'entrée est supprimée)

- De même le courant continue de charge chute de moitié

EXERCICE II :

Etat des diodes

Cas 1

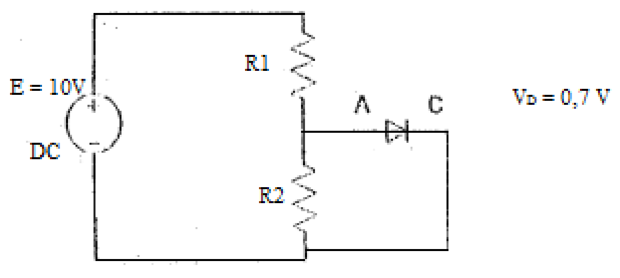


Figure 2a

D est passant si $V_{AC} = V_A - V_C > V_D = 0{,}7$ V

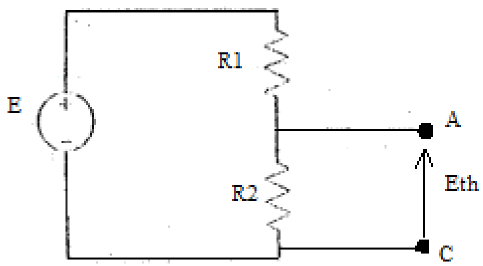
Ici , $V_{AC} = \frac{R_2}{R_1+R_2} E = \frac{40}{100+40}(10)$

$V_{AC} = 2{,}86$ V > 0,7 V

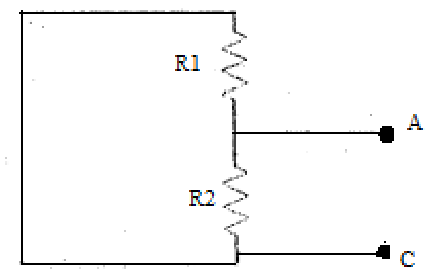
$\Rightarrow$ D est passant

- Courant de diode

Appliquons le théorème de Thevenin au circuit



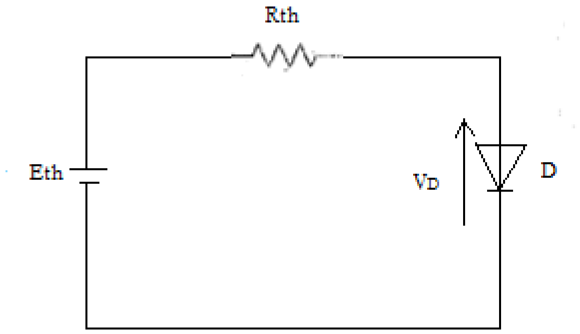
$E_{th} = \frac{R_2}{R_1+R_2} E = 2{,}86$ V



$R_{th} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$

$R_{th} = 28{,}6\ \Omega$

Finalement on obtient

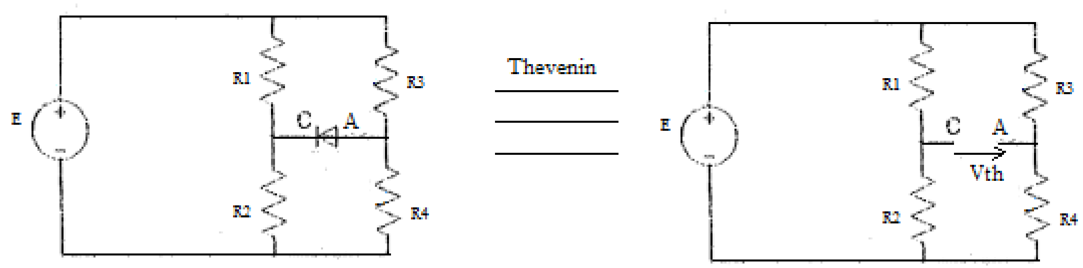


$I_D = \frac{E_{th} + V_D}{R_{th}}$

A.N. $I_D = \frac{2{,}86 - 0{,}7}{28{,}6}$

I_D = 75,5 mA

Cas 2



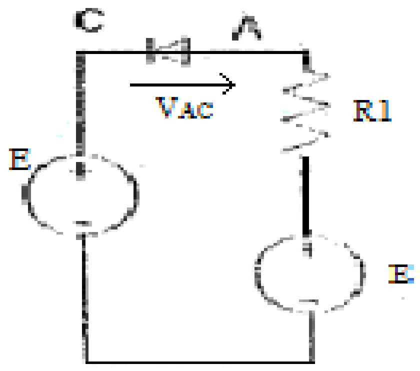
$V_{AC} = V_{th} = \frac{R_4}{R_4 + R_3}E - \frac{R_2}{R_2 + R_3}E$

$= \left(\frac{R_4}{R_4 + R_3} - \frac{R_2}{R_2 + R_3}\right)E$

$= \left(\frac{80}{280}E - \frac{40}{140}\right)E$

V_{AC} = 0 < 0,7 V $\Longrightarrow$ Diode bloquée

Cas 3



$V_{AC} = V_A - V_C$

$= E - R_1I - E$

$= -R_1I < 0$

$V_{AC} < 0{,}7$ V

EXERCICE III :

1. Droite de charge statique (Δ)

Loi des mailles

$V_{CC} - R_CI_C - V_{CE} - R_EI_E = 0$ or $I_C \simeq I_E$

$V_{CC} - (R_C + R_E)\, I_C - V_{CE} = 0$ (*)

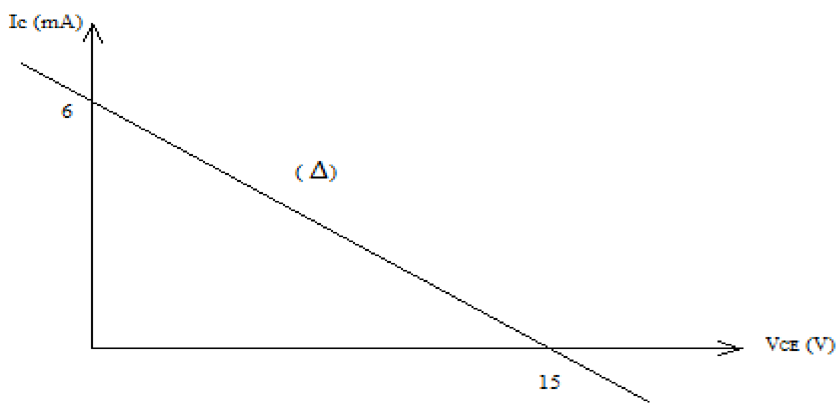
D'où (**Δ**) : $I_C = \frac{-V_{CE} + V_{cc}}{R_C + R_E}$

A.N. $I_C = \frac{-V_{CE} + 15}{500+2000}$

$I_C = \frac{-V_{CE} + 15}{2{,}5\ k}$

[Points principaux : $A\left(0, \frac{V_{cc}}{R_C + R_E}\right)$, $B\ (V_{CC}, 0)$]

Représentation



2. Courant de base IB

Loi des mailles en entrées

$V_{CC} - R_{B1}I_B - V_{BE} - R_E\ I_E = 0$ or $I_E \simeq I_C = \beta I_B$

$V_{CC} - (R_{B1} + \beta R_E)I_B - V_{BE} = 0$

$I_B = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_{B1} + \beta R_E}$

A.N. $I_B = \frac{15-0,7}{8+100x2}$

3.

$I_C = \beta I_B$

A.N.

$I_C = 100 \text{ x } 68,75 = 6,87 \text{ mA}$

* D’après (*) , $V_{CE} = V_{CC} - (R_C + R_E)\ I_C$

A.N.

$V_{CE} = 2,17 \text{ V}$

* $V_E = R_E I_C$

A.N.

$V_E = 2 \text{ x } 6,87 = 13,74 \text{ V}$

4. puissance dissipée

$P = V_{CE}I_C$

A.N. $P = 2,17 \text{ x } 6,87.10^{-3} = 14,9.10^{-3}$ W d’où

$P = 14,90$ mW

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ELECTRONIQUE 2009-2010

EXERCICE I :

1. **Etablir h11C, h12C, h21C, h22C = f(h11E, h12E, h21E, h22E)**

En montage collecteur commun, les relations E/S sont :

$$\begin{cases} v_{BC} = h11C\, i_b + h12C\; v_{EC} \\ i_B = h21C\, i_b + h22C\, v_{EC} \end{cases}$$

$$*\ \ h11C = \left(\frac{v_{BC}}{i_b}\right)_{v_{CE}=0} = \left(\frac{v_{BE} + v_{EC}}{i_b}\right)_{v_{CE}=0}$$

$$= \left(\frac{v_{BE}}{i_b}\right)_{v_{CE}=0} + \left(\frac{v_{EC}}{i_b}\right)_{v_{CE}=0}$$

<u>h11C = h11E</u>

$$*\ \ h12E = \left(\frac{v_{BC}}{v_{EC}}\right)_{i_b=0} = \left(\frac{v_{BE} + v_{EC}}{v_{EC}}\right)_{i_b=0}$$

$$= \left(\frac{v_{BE}}{v_{EC}}\right)_{i_b=0} + \left(\frac{v_{EC}}{v_{EC}}\right)_{i_b=0}$$

$$= -\left(\frac{v_{BC}}{v_{EC}}\right)_{i_b=0} + 1$$

<u>h12C = 1 – h12E</u>

$$*\ h21C = \left(\frac{i_e}{i_b}\right)_{v_{EC}=0} = \left(\frac{i_b + i_C}{i_b}\right)_{v_{EC}=0}$$

$$= 1 + \left(\frac{i_c}{i_b}\right)_{v_{EC}=0}$$

<u>h21C = 1 + h21E</u>

2. **Etablirh11B, h11B, h21B et h22B = f(h11E, h12E, h21E, h22E)**

En base commune les relations E/S sont les suivantes :

$$\begin{cases} v_{EB} = h_{11B} i_e + h_{12B} v_{CB} \\ i_C = h_{21B} i_e + h_{22B} v_{CB} \end{cases}$$

* $h_{11B} = \left(\frac{v_{BE}}{i_C}\right)_{v_{CB}=0}$

On rappelle qu'en «émetteur commun :

$$\begin{cases} v_{BE} = h_{11E} i_b + h_{12E} v_{CE} \ (*) \\ i_C = h_{21E} i_b + h_{22E} v_{CE} \ (**) \end{cases}$$

(*) dans (**) $\Rightarrow v_{BE} = h_{11E}\left(\frac{i_C - h_{22E} v_{CE}}{h_{21E}}\right) + h_{12E} v_{CE}$ or $i_c = i_e - i_b$

$$V_{BE} = \frac{h11E}{h12E}(i_e - i_b) - \left(\frac{h_{11E}h_{22E} - h_{21E}h_{12E}}{h_{21E}}\right)v_{CE}$$

$\Rightarrow h_{21E}\, v_{BE} = h_{11E} i_e - (h_{11E}\, h_{22E} - h_{21E}\, h_{12E})v_{CE} - h_{12E} v_{CE} + v_{BE}$

car $h_{11E} i_b = h_{12E} v_{CE} - v_{BE}$ par (*)

$\Rightarrow h_{21E} v_{BE} = h_{11E} i_e - (h_{11E}\, h_{22E} - h_{21E}\, h_{12E} - 1 + h_{12E}) v_{BE} \;|_{VCB=0}$

Ainsi : $v_{BE}(h_{21E}(1 - h_{12E}) + h_{11E}\, h_{22E} + (1 - h_{12E})) = h_{11} i_e$

$\Rightarrow v_{BE}((1 + h_{21E})(1 - h_{12E}) + h_{11E}\, h_{22E}) = h_{11} i_e$

$\Rightarrow \left(\frac{v_{BE}}{i_e}\right)_{v_{CB}=0} = \frac{h_{11E}}{(1 + h_{21E}) + h_{11E}h_{22E}}$ or $h_{12E} \simeq 0$

$\Rightarrow$d'où $\boxed{h11B = \frac{h_{11E}}{(1 + h_{21E}) + h_{11E}h_{22E}}}$

* $h_{22B} = \left(\frac{i_c}{v_{CB}}\right)_{i_b=0} = 0$

(**) $\Rightarrow i_c = h_{21E} i_b + h_{22E} v_{CE}$

$i_c = h_{21E}(i_e - i_c) + h_{22E} v_{CE}$

$\Rightarrow (1 + h_{21E})\, i_c = h_{22E} v_{CE} \;|_{ie=0}$

$\Rightarrow (1 + h_{21E})\, i_c = h_{22E} v_{CB} + h_{22E} v_{BE} \;|_{ie=0}$ (1)

Or (*) $\Rightarrow v_{BE} = h_{11E} i_b + h_{12E} v_{CE}$

$v_{BE} = - h_{11E} i_C + h_{12E} v_{CB} + h_{12E} v_{BE} \;|_{ic=0}$

$\Rightarrow v_{BE}(1 - h_{12E}) = - h_{11E} i_c + h_{12E} v_{CB}$

$\Rightarrow v_{BE} = -h_{11E} i_c \;|_{ie=0}$ car $h_{12E} \simeq 1$

(2) dans (1) $\Rightarrow (1 + h_{21E})\, i_c = h_{22E} v_{CB} - h_{11E}\, h_{22E} i_c$

$$\Rightarrow (1 + h_{21E} + h_{11E}\,h_{22E})\,i_c = h_{22E}v_{CB}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{i_c}{v_{CB}}\right)_{i_e=0} = \frac{h_{22E}}{1 + h_{21E} + h_{11E}h_{22E}}$$

D'où $\boxed{:\ h22B = \frac{h_{22E}}{h_{11E}h_{22E} + (1 + h_{21E})}}$

De la même façon on trouve que

$$h_{12B} = \frac{h_{11E}h_{22E}}{h_{11E}h_{22E} + (1 + h_{21E})}$$

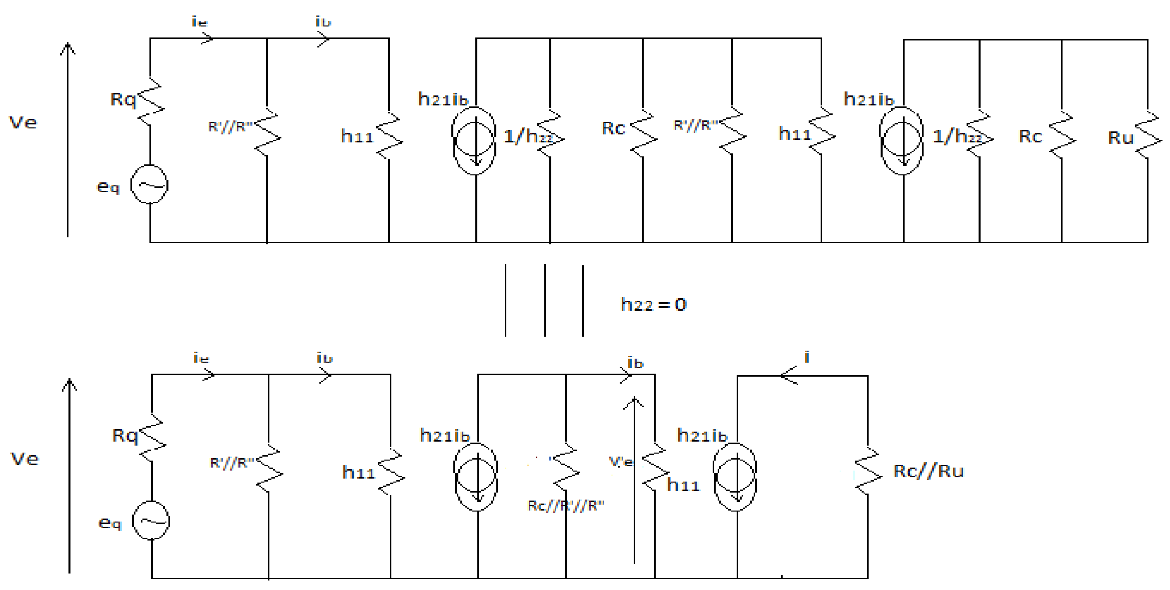
$$h_{21B} = \frac{h_{21E} + h_{11E}h_{22E}}{h_{11E}h_{22E} + (1 + h_{21E})}$$

EXERCICE II :

$h_{11} = r$, $h_{12} = 0$, $h_{21} = \beta$, $h_{22} = 0$

- Fréquences moyennes

a) Schéma équivalent du montage



b) A_{V2} = ?

$A_{V2} = \frac{V_S}{V'_e}$ or $V_S = -(R_C // R_u)\, i = -(R_C // R_u)h_{21}i_b$

$V'_e = h_{11}i_b$

Aller à la table de matière

$\Longrightarrow \quad A_{V2} = \frac{-(R_C // R_u)\,\beta}{r}$

c) R_{e2} = ?

$R_{e2} = \frac{v'_e}{i'_e} = \frac{v'_e}{i_b + h_{21} i_b}$

$R_{e2} = h_{11} // R' // R'' // R_C$

d) R_{e1} = ?

La résistance dynamique du premier étage correspond à la résistance d'entrée du second étage car les résistances sont montées en cascade.

$R_{e1} = R_{e2}$

$R_{e1} = r \ // R' // R'' // R_C$

e) A_{V1} = ?

$A_{V1} = \frac{v'_e}{v_e}$

$V'_e = -(RC//R'//R'')\, h21ib$ (on considère que le 2^e étape est déconnecté)

$V_e = h_{11} i_b$

$\Longrightarrow \ A_{V1} = \frac{-R_C // R' // R''}{h_{11}}$

f) A_{V0}= ?

$A_{V0} = \frac{U_S}{U_e}$

$\begin{cases} u'_e = A_{V1} U_e \\ U_S = A_{V2} U'_e \end{cases} \Longrightarrow U_S = A_{V2}\, A_{V1} U_e$

$A_{V0} = A_{V1}\, A_{V2}$

$A_{V0} = \frac{(R_C // R_u)\,\beta}{r} \frac{R_C // R' // R''}{h_{11}}$

$A_{V0} = \frac{(R_C // R_u // R' // R'')\,\beta}{r^2}$

-Basses fréquences

Confère cours du Dr Alain TIEUDE (polycopié)

CORRECTION DE L'EXAMEN D'ELECTRONIQUE 2009-2010

EXERCICE I :

1. **Etablir h11C, h12C, h21C, h22C = f(h11E, h12E, h21E, h22E)**

En montage collecteur commun, les relations E/S sont :

$$\begin{cases} v_{BC} = h11C\, i_b + h12C\ v_{EC} \\ i_B = h21C\, i_b + h22C\, v_{EC} \end{cases}$$

$$*\ h11C = \left(\frac{v_{BC}}{i_b}\right)_{v_{CE}=0} = \left(\frac{v_{BE} + v_{EC}}{i_b}\right)_{v_{CE}=0}$$

$$= \left(\frac{v_{BE}}{i_b}\right)_{v_{CE}=0} + \left(\frac{v_{EC}}{i_b}\right)_{v_{CE}=0}$$

h11C = h11E

$$*\ h12E = \left(\frac{v_{BC}}{v_{EC}}\right)_{i_b=0} = \left(\frac{v_{BE} + v_{EC}}{v_{EC}}\right)_{i_b=0}$$

$$= \left(\frac{v_{BE}}{v_{EC}}\right)_{i_b=0} + \left(\frac{v_{EC}}{v_{EC}}\right)_{i_b=0}$$

$$= -\left(\frac{v_{BC}}{v_{EC}}\right)_{i_b=0} + 1$$

h12C = 1 – h12E

$$*\ h21C = \left(\frac{i_e}{i_b}\right)_{v_{EC}=0} = \left(\frac{i_b + i_C}{i_b}\right)_{v_{EC}=0}$$

$$= 1 + \left(\frac{i_c}{i_b}\right)_{v_{EC}=0}$$

h21C = 1 + h21E

2. **Etablirh11B, h11B, h21B et h22B = f(h11E, h12E, h21E, h22E)**

En base commune les relations E/S sont les suivantes :

$$\begin{cases} v_{EB} = h_{11B} i_e + h_{12B} v_{CB} \\ i_C = h_{21B} i_e + h_{22B} v_{CB} \end{cases}$$

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

* $h_{11B} = \left(\frac{v_{BE}}{i_C}\right)_{v_{CB}=0}$

On rappelle qu'en «émetteur commun :

$$\begin{cases} v_{BE} = h_{11E}i_b + h_{12E}v_{CE} \; (*) \\ i_C = h_{21E}i_b + h_{22E}v_{CE} \; (**) \end{cases}$$

(*) dans (**) $\Rightarrow v_{BE} = h_{11E}\left(\frac{i_C - h_{22E}v_{CE}}{h_{21E}}\right) + h_{12E}v_{CE}$ or $i_c = i_e - i_b$

$$V_{BE} = \frac{h11E}{h12E}(i_e - i_b) - \left(\frac{h_{11E}h_{22E} - h_{21E}h_{12E}}{h_{21E}}\right)v_{CE}$$

$\Rightarrow h_{21E}\, v_{BE} = h_{11E}i_e - (h_{11E}\, h_{22E} - h_{21E}\, h_{12E})v_{CE} - h_{12E}v_{CE} + v_{BE}$

car $h_{11E}i_b = h_{12E}v_{CE} - v_{BE}$ par (*)

$\Rightarrow h_{21E}v_{BE} = h_{11E}i_e - (h_{11E}\, h_{22E} - h_{21E}\, h_{12E} - 1 + h_{12E})v_{BE}\; |_{VCB=0}$

Ainsi : $v_{BE}(h_{21E}(1 - h_{12E}) + h_{11E}\, h_{22E} + (1 - h_{12E})) = h_{11}i_e$

$\Rightarrow v_{BE}((1 + h_{21E})(1 - h_{12E}) + h_{11E}\, h_{22E}) = h_{11}i_e$

$\Rightarrow \left(\frac{v_{BE}}{i_e}\right)_{V_{CB}=0} = \frac{h_{11E}}{(1+h_{21E}) + h_{11E}h_{22E}}$ or $h_{12E} \simeq 0$

$\Rightarrow$d'où $\boxed{h11B = \frac{h_{11E}}{(1+h_{21E}) + h_{11E}h_{22E}}}$

* $h_{22B} = \left(\frac{i_c}{v_{CB}}\right)_{i_b=0} = 0$

(**) $\Rightarrow i_c = h_{21E}i_b + h_{22E}v_{CE}$

$i_c = h_{21E}(i_e - i_c) + h_{22E}v_{CE}$

$\Rightarrow (1 + h_{21E})\, i_c = h_{22E}v_{CE}\; |_{ie=0}$

$\Rightarrow (1 + h_{21E})\, i_c = h_{22E}v_{CB} + h_{22E}v_{BE}\; |_{ie=0}$ (1)

Or (*) $\Rightarrow v_{BE} = h_{11E}i_b + h_{12E}v_{CE}$

$v_{BE} = - h_{11E}i_C + h_{12E}v_{CB} + h_{12E}v_{BE}\; |_{ic=0}$

$\Rightarrow v_{BE}(1 - h_{12E}) = - h_{11E}i_c + h_{12E}v_{CB}$

$\Rightarrow v_{BE} = -h_{11E}i_c\; |_{ie=0}$ car $h_{12E} \simeq 1$

(2) dans (1) $\Rightarrow (1 + h_{21E})\, i_c = h_{22E}v_{CB} - h_{11E}\, h_{22E}i_c$

$$\Longrightarrow (1 + h_{21E} + h_{11E}\, h_{22E})\, i_c = h_{22E} v_{CB}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{i_c}{v_{CB}}\right)_{i_e=0} = \frac{h_{22E}}{1 + h_{21E} + h_{11E} h_{22E}}$$

D'où $\boxed{:\ h22B = \frac{h_{22E}}{h_{11E}h_{22E} + (1 + h_{21E})}}$

De la même façon on trouve que

$$h_{12B} = \frac{h_{11E}h_{22E}}{h_{11E}h_{22E} + (1 + h_{21E})}$$

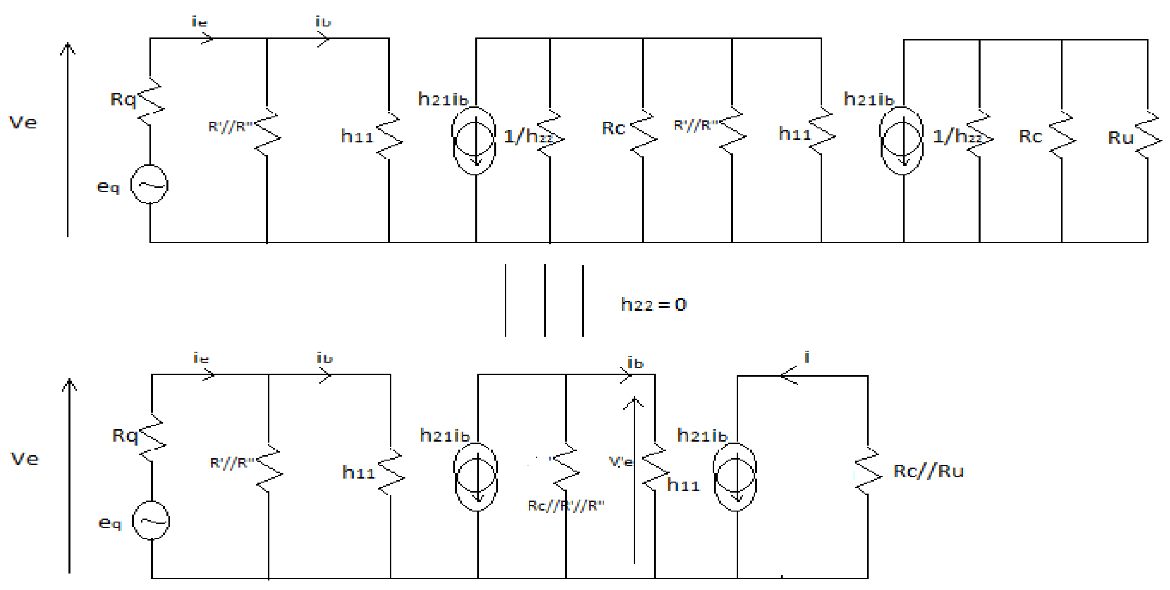
$$h_{21B} = \frac{h_{21E} + h_{11E}h_{22E}}{h_{11E}h_{22E} + (1 + h_{21E})}$$

EXERCICE II :

$h_{11} = r$, $h_{12} = 0$, $h_{21} = \beta$, $h_{22} = 0$

- Fréquences moyennes

a) Schéma équivalent du montage



b) A_{V2} = ?

$A_{V2} = \frac{V_S}{v'_e}$ or $V_S = -(R_C // R_u)\, i = -(R_C // R_u) h_{21} i_b$

$V'_e = h_{11} i_b$

$\Rightarrow \quad A_{V2} = \frac{-(R_C // R_u)\,\beta}{r}$

c) R_{e2} = ?

$R_{e2} = \frac{v'_e}{i'_e} = \frac{v'_e}{i_b + h_{21} i_b}$

$R_{e2} = h_{11} // R' // R'' // R_C$

d) R_{e1} = ?

La résistance dynamique du premier étage correspond à la résistance d'entrée du second étage car les résistances sont montées en cascade.

$R_{e1} = R_{e2}$

$R_{e1} = r \; // R' // R'' // R_C$

e) A_{V1} = ?

$A_{V1} = \frac{v'_e}{v_e}$

$V'_e =$ -(RC//R'//R'') h21ib (on considère que le 2^e étape est déconnecté)

$V_e = h_{11} i_b$

$\Rightarrow \; A_{V1} = \frac{-R_C // R' // R''}{h_{11}}$

f) A_{V0}= ?

$A_{V0} = \frac{U_S}{U_e}$

$\begin{cases} u'_e = A_{V1} U_e \\ U_S = A_{V2} U'_e \end{cases} \Rightarrow U_S = A_{V2}\, A_{V1} U_e$

$A_{V0} = A_{V1}\, A_{V2}$

$A_{V0} = \frac{(R_C // R_u)\,\beta}{r} \frac{R_C // R' // R''}{h_{11}}$

$A_{V0} = \frac{(R_C // R_u // R' // R'')\,\beta}{r^2}$

-Basses fréquences

Confère cours du Dr Alain TIEUDE (polycopié)

INFORMATIQUE

4

« ne jamais remettre à demain ce qu'on peut faire rapidement »

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

SUJETS D'INFORMATIQUE 4

CONTRÔLE CONTINU D'INFORMATIQUE 4 2009-2010

EXERCICE I :

……………………………

Instruction(s) 100 ;

Répéter

Instruction(s) 101 ;

Jusqu'à *condition 1 ;*

Instruction(s) 102 ;

……………………………

……………………………

Instruction(s) 220 ;

Tant que *Condition 2* ***Faire***

Instruction(s) 221 ;

Instruction(s) 222 ;

……………………………

Bloc 1.Bloc 2.

Une règle générale en Programmation Informatique énonce qu'il est toujours possible de convertir un bloc d'instructions contenant une boucle « **Répéter** …**jusqu'à**… » en un bloc équivalant contenant une boucle « **Tant que**… **faire** … », et vice versa. Une telle conversion nécessite généralement d'ajouter une ou des instruction(s) et/ou variable(s) supplémentaires approprié(e)s avant et/ou au sein de la boucle.

1°) Convertir ainsi le bloc d'instruction Bloc 1 en un bloc d'instructions équivalent, mais dans lequel :

La boucle « **Répéter** … **jusqu'à** … » a été remplacée par une boucle « **Tant que** … **faire** … ».

2°) Convertir le bloc d'instructions Bloc 2 en un bloc d'instructions équivalent, mais dans lequel ;

La boucle « **tant que** ... **faire** … » a été remplacée par une boucle « **Répéter**… **jusqu'à** … ».

EXERCICE II :

On pose, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$: $U_n = \frac{2^n}{(2n+1)!}$

1°) Ecrire une fonction algorithmique calculant U_n, pour n arbitraire, par une approche non récursive.

2°) Ecrire une fonction algorithmique calculant U_n, pour n arbitraire, par une approche récursive.

EXERCICE III :

On pose, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $S_n = P_n(1)$.

1°) a) Ecrire une fonction algorithmique non récursive calculant S_n, pour n $\in \mathbb{N}$ arbitraire, et s'appuyant sur la relation de récurrence évidente $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n!}$

b) L'adapter en une fonction algorithmique calculant $P_n(x)$, pour n $\in \mathbb{N}$, et pour $x \in \mathbb{R}$ arbitraires

2°) a) Ecrire une fonction algorithmique non récursive calculant S_n , pour n $\in \mathbb{N}$ arbitraire mais s'appuyant plutôt sur l'observation suivante :

$\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + (1 + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3}(1 + \ldots + \frac{1}{n-1}(1 + \frac{1}{n}) \ldots)))$

b) L'adapter à une fonction algorithmique calculant $P_n(x)$, pour n $\in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ arbitraire

EXERCICE IV :

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ suite de $\mathbb{R}$ définie par :

$a_2 = 1/3$, $a_3 = \sqrt{5}$, $a_4 = 28$, et, $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $a_{n+4} = \frac{n.a_n + a_{n+1}.\cos(a_{n+2})}{\sin(n.a_n) + \sqrt{4n^2 a_n^2 - 1}} - \frac{a_{n+3}}{2}$

1°) Ecrire une fonction algorithmique calculant a_n, pour n arbitraire, par une approche non récursive.

2°) Ecrire une fonction algorithmique calculant a_n, pour n arbitraire, par une approche récursive, mais efficace.

3°) On peut voir a_n comme le terme générale d'une série. Ecrire une procédure algorithmique calculant les sommes partielles de cette série jusqu'à un rang N arbitraire, et les stocker dans uns fichier sur le disque.

RATTRAPAGE D'INFORMATIQUE 4 2009-2010

EXERCICE I :

Donner le résultat affiché par MATLAB à l'exécution de chacune des commandes du tableau suivant lorsqu'elle est légale, ou signaler son illégalité dans le cas contraire (en écrivant : ***K. O*** !!!) :

N°	*Commandes*	*Résultats*
1.	B = [0 -1 ; 2 3]	
2.	C = repmat(B, 1, 3)	
3.	A= [6 :-1 :1 ; 1.2 :0.3 :2.8 ; C]	
4.	A(2, 5)	
5.	A(5, 2)	
6.	u= diag(A)	
7.	diag(u)	
8.	A([2 1 3 3 1],[4 4 2])	
9.	u([1 1 1], :)	
10.	fliplr(A)	
11.	flipud(A)	
12.	A*A	
13.	P = (1 <= A)&(A<= 2)	
14.	P*A	
15.	fix(A)	
16.	A((1 <= A)&(A <= 2)) = NaN ; A	

EXERCICE II :

1°) Ecrire une fonction anonyme MATLAB, qu'on appellera newF, qui prend en entrée un argument n, supposé être un entier naturel, et renvoie comme résultat la somme $\sum_{k=0}^{n} \sin \frac{1}{\cos(k^2)}$

2°) Comment exécute-t-on votre fonction sur la ligne de commande de MATLAB ?

EXERCICE III :

On pose : $I=\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{x^2}{2}\,dx$, $u_n=\frac{(-1/4)^n}{(2n+1).(2n+1)!}$, $S=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $d_n=\frac{a_n}{b_n}$

1°) Démonter que : a) $S\in\mathbb{R}$; b) $I=S$.

2°) Démonter que $U_n = d_n$, où la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie une relation de récurrence par division et $(b_n)_{n\geq 0}$ satisfait une relation de récurrence par addition.

3°) Construire une méthode numérique pour calculer une approximation e J de I telle que

$|I-J| < \varepsilon$.

4°) Ecrire une fonction MATLAB, mettant cette méthode numérique en œuvre.

EXERCICE IV :

1°) Ecrire une fonction MATLAB, appelée SOLVE_CHOLESKY, effectuent la phase de résolution de la méthode de Cholesky. **N.B**. *Sans utiliser une commande et/ou fonction de MATLAB résolvant un système linéaire.*

2°) Mais une seule commende MATLAB suffirait pour faire ce même travail. Ecrire une telle commande

CONTROLE CONTINU D'INFORMATIQUE IV 2012-2013

NB : Présenter les algorithmes sous forme de fonction ou procédure. Il n'est pas nécessaire de préciser l'objectif de l'algorithme.

Exercice 1 (3.5pts) Connaissances du Cours

1) Qu'est ce que la complexité d'un algorithme ?
2) Dans l'analyse de la complexité en temps d'un algorithme quelles sont les opérations qui sont généralement prises en compte ? donner un exemple dans le cas des algorithmes de tri.
3) Dans l'étude de la complexité des algorithmes, on utilise souvent les notations O, Ω, Θ. Donner leurs définitions.
4) Quelles sont les différents types de complexités généralement rencontrés ?
5) Pour trier un tableau de taille n quelconque. Peut-on faire mieux qu'un algorithme de complexité (OnLogn) ?
6) Citer deux algorithmes permettant de trier les tableaux de taille n en O(nLogn) dans le cas moyen.

Exercice 2 (3,5 pts) Connaissances de Matlab

1. On considère les matrices A et B suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -7 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Décrire ce que font les instructions Matlab suivantes :

      A*B ; A./B ; cos(A) ; exp(A) ; A+1 ;B(:,2).

   b) Donner le résultat obtenu à la suite de l'application de chacune des instructions Matlab suivantes:

      a)v= [7 2 4 1] ; b) w=A(v) ; c) B(:,1)*A(1, :) ; d) B(1, :)*A(:,3)

2. Ecrire une fonction Matlab permettant d'évaluer l'expression:

$$\frac{\left((\sin(\exp(x^3)) + 1)\sqrt{\sqrt{x} + 1}\right)}{\arctan(x^2) + \left(\ln\left(\sqrt{|x|} + 1\right)\right)^{\frac{4}{3}}}$$

   Où l'argument x peut-être un scalaire, un vecteur ou une matrice.

Exercice 3 (7.5pts)

On considère le polynôme défini par : $P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \ avec \ a_n \neq 0$

1. Définir un type axillaire pour représenter les polynômes (On admettra que les polynômes manipulés ont un dégré inférieur à une valeur prédéfinie **Nmax**)
2. Décrire la méthode de Horner et écrire son algorithme pour évaluer P en point t_0. On donnera le nombre d'opérations élémentaires.
3. Ecrire une version efficace de l'algorithme précédent pour évaluer un polynôme pair. Quel est le gain obtenu en termes d'opérations arithmétiques élémentaires.
4. Concevoir et écrire un algorithme pour effectuer le produit de deux polynômes P et Q de dégré n et m respectivement. Quel est le coût de cet algorithme.
5. Adapter l'algorithme précédent au cas où !
   a) Pet Q sont pairs
   b) Pet Q sont impairs
   c) Pest pair et Q est impair

   On donnera dans chaque cas le coût numérique

Exercice 4 (2.5 pts)

On considère une matrice carrée A d'ordre n et un vecteur de taille n. on suppose qu'il existe un type **Matrice** et un type **Vecteur** permettant de représenter les matrices carrées et les vecteurs.

1. Concevoir et écrire un algorithme permettant d'effectuer le produit Ab.
2. On suppose maintenant que la matrice A est triangulaire inférieure. En prenant en compte la structure particulière de A. Donner uen version efficace de l'algorithme précédent pur le calcul de Ab.
3. Déterminer le coût numérique de cet algorithme.

Exercice 5 (4pts)

on se propose de calculer une valeur approchée de

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$$

1. En utilisant la série entière de la fonction cosinus développée en 0, montrer que $I = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
2. Etablir la relation de récurrence vérifiée par $(a_n)_{n\geq 0}$
3. Donner une majoration du reste d'ordre N de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

4. Concevoir et écrire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de I avec une incertitude absolue$<\epsilon$

EXAMEN D'INFORMATIQUE 4 2009-2010

EXERCICE I :

Donner le résultat affiché par MATLAB à l'exécution de chacune des commandes du tableau suivant lorsqu'elle est légale, ou signaler son illégalité dans le cas contraire (en écrivant : ***K. O*** !!!) :

N°	*Commandes*	*Résultats*
1.	U = 0.2 :0.3 :1.9	
2.	U(1,5)	
3.	U(5,1)	
4.	diag(diag(u))	
5.	U([1 1 1], :)	
6.	fliplr(u)	
7.	U*U	
8.	U<0.8	
9.	fix(U)	
10.	U(U > 0.8) = NaN ; U	
11.	U(5,1) = NaN ; u	
12.	flipud(U)	

EXERCICE II :

N.B. LES PARTIES I A IV SONT INDEPENDANTES

I – Ecrire un script MATLAB pour tracer un cercle de centre 0 et de rayon 5, en rouge et en pointillés. De plus s'arranger pour l'épaisseur du trait soit de 5.

II- Ecrire une fonction anonyme MATLAB, qu'on appellera SumInvSq qui prend en entrée un argument n, supposé être un entier ≥ 1, et renvoie comme résultat la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

III- Ecrire une fonction MATLAB qui, étant donné une matrice M, aura pour effet de remplacer toutes les lignes d'indice impair de M par la somme de la première et la dernière ligne

IV- Dans MATLAB si A est une matrice dire quel sera l'effet de l'instruction :

A(max(isnan(A')), :)= [ ]

EXERCICE III :

On pose : $I = \int_0^1 \sin x^2\, dx$, $u_n = \frac{(-1)^n}{(4n+3).(2n+1)!}$, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $d_n = \frac{a_n}{b_n}$

1°) Démonter que : a) $I \in \mathbb{R}$; b) $I = S$.

2°) Démonter que $U_n = d_n$, où la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie une relation de récurrence par division et $(b_n)_{n\geq 0}$ satisfait une relation de récurrence par addition.

3°) Construire une méthode numérique pour calculer une approximation e J de I telle que

$|I - J| < \varepsilon$.

4°) a) Ecrire une fonction MATLAB, mettant cette méthode numérique en œuvre.

b) Comment exécute-on votre fonction depuis la ligne de commande de MATLAB ?

EXERCICE IV :

Procédure FACTO_CHOLESKY(**A : matrice ; var L ; matrice**) ;

(* Objectif : factorisation de la matrice de CHOLESKY de la matrice A *)

(* Paramètre(s) entrant(s) : A, matrice réelles S.D.P *)

(* Paramètre(s) sortant(s) : L, matrice inf-triangulaire à diagonale > 0 telle que A = L^tL *)

Variable : i, j, k : **entier** ;

(* Corps de la procédure***)**

Début*(* FACTO_CHOLESKY*)*

(* Calcul de la colonne I de l amatrice L *)

$L[1, 1] \leftarrow \sqrt{A[1,1]}$;

Pour i= 2(1)n **faire** L[i, 1] ← A[i, 1]/L[1, 1] ;

(* Calcul des colonnes 2 à n de la matrice L*)

Pour $j = 2(1)n$ **faire**

Début

$$L[j,j] \leftarrow \sqrt{A[j,j] - \sum_{k=1}^{j-1} L[j,k]^2} \ ;$$

Pour $i = j + 1(1)\ n$ **faire** $L[i,j] \leftarrow \left(A[i,j] - \sum_{k=1}^{j-1} L[i,k]\,.\,L[j,k]\right) / \ L[j,i]$;

Fin

Fin : *(*FACTO_CHOLESKY *)*

Ci-dessus est donnée une procédure algorithmique en L.E.A. effectuant la factorisation de Cholesky d'une matrice **A** réelle symétrique et définie positive (en abrégé S.D.P. dans une suite) donnée en entrée, i.e. calculant les coefficients utiles de la matrice **L**, inf-triangulaire et à diagonale > 0 telle que : **A = L^tL**. cette procédure fait appel au type matrice et à la constante n censés avoir été définis dans la partie **Déclaration** du programme.

1°) a) Ecrire une fonction MATLAB appelée CHOLESKY, et résolvant par la méthode de Cholesky, un système de Cramer **A.X = b**dont A est S.D.P.

Cette fonction MATLAB devra comporter (et appeler dans son corps) 2 sous-fonctions :

- Une pour effectuer la phase de factorisation de la méthode, appelée FACT_CHOLESKY ;

- et une pour effectuer la phase de résolution de la méthode.

N.B cette fonction renvoie comme résultat, à la fois le vecteur-solution **X** et la matric**e L.**

b) Quel devra être le nom du fichier physique sur le disque contenant votre fonction ?

2°) a) Ecrire un script MATLAB qui crée une S.D.P. d'ordre n = 100.

b) Comment exécute-t-on votre script sur la ligne de commande de MATLAB ?

3°) a) Ecrire un script MATLAB pour tester votre fonction CHOLESKY successivement sur :

1. un 1er système linéaire de taille n = 100, et dont vous connaissez la solution ;
2. un 2ème système linaire de taille n = 100, et dont vous ne connaissez pas la solution.

b) Comment exécute-t-on votre script sur la ligne de commande de MATLAB ?

4°) a) Quel est l'intérêt de renvoyer aussi la matrice la matrice **L** parmi les résultats de la fonction CHOLESKY ?

a) Cependant, exploiter cette information pourrait exiger des réajustements structurels à votre fonction écrite ci-dessus. Lesquels et pourquoi ? (***Brièvement : explique rseulement les grandes lignes.).***

CORRECTIONS D'INFORMATIQUE

CORRECTION DU CONTRÔLE CONTINU DE L'INFORMATIQUE 4 2011-2012

EXERCICE I :

1) ***Complexité***

C'est le cout en temps et en espace mémoire d'un algorithme.

2) ***Opérations prises en compte :***

Affectations

Comparaisons

Opérations arithmétiques élémentaires

Exemple :

Pour le tri sélection, on a $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaison, n-1 déplacements, o opérations arithmétiques élémentaires.

3) ***Peut-on faire mieux qu'un O(nlogn) pour trier ?***

Non ?

4) ***Deux algorithmes en O(nlogn) dans le cas moyen :***

Tri fusion,

Tri rapide,

5) ***Qu'est-ce qu'un algorithme récursif ?***

C'est un sous-programme qui s'appelle lui-même de façon directe ou indirecte.

Types de récursivité :

- La récursivité simple ou linéaire
- La récursivité mutuelle ou croisée

EXERCICE II :

1)

b) Décrire de que font les instructions suivantes :

Posons $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,2,3}$ $B = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1,2,3}$

$3 * A = \left(3 \times a_{ij}\right)_{i,j=1,2,3}$ $A * B$ produit matriciel de A et B

$A./B = \left(\frac{a_{ij}}{b_{ij}}\right)_{i,j=1,2,3}$ $\cos(A) = \left(\cos(a_{ij})\right)_{i,j=1,2,3}$

$\exp(A) = (e^{a_{ij}})_{i,j=1,2,3}$ $A + 1 = \left(a_{ij} + 1\right)_{i,j=1,2,3}$

$B(:,2) = (b_{i2})_{i=1,2,3}$

c) Résultats obtenus

a) `v=[1 2 4 7]` ⇒ `v=(1,2,4,7)`

b) `w=A(v)` ⇒ `w=(1,-4,-1,7)`

c) `B(v)=abs(B(v))` ⇒ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) `B( :,1)*A(1, :)` ⇒ $ans = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 14 \\ 7 & -7 & 99 \\ 5 & -5 & 35 \end{pmatrix}$

e) `B(3, :)*A( :,2)` ⇒ $ans = 3$

2) Instructions MATLAB permettant de :

(a) Créer un vecteur (-5,-4,…,4,5)

```
Vecteur =(-5 :1 :5)
```

(b) Créer un vecteur (-500,-499,…,499,500)

```
vecteur=(-500 :1 :500)
```

(c) Vecteur 0,π à 20 valeurs contantes

`vecteur=`$linespace(0, pi, 20)$

(d) Vecteur tel que $v_{2i} = \cos(u_{2i})$ et $v_{2i+1} = \cos(u_{2i+1})$

```
v(1 : 2 : 20) = cos(u(1 : 2 : 20))
v(2 : 2 : 20) = cos(u(2 : 2 : 20))
```

EXERCICE III :

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \ \ avec\ a_n \neq 0$$

1) Deux algorithmes pour évaluer P en un point *x*

**** Approche simple :**

```
Procédure EVAL_POLY_1(t : réel, var Y : réel, P : polynôme, n :
entier)
(*Objectif :                                    *)
(*Données :    n : entier, le rang de P,
          t: réel
          P : polynôme, tableau de réel*)
(*Résultats : Y = P(t): réel *)
Variables locales :
     Xn : réel ;(* contient les puissances de t *)
     i : entier ;(* le compteur *)
Début (* EVAL_POLY_1 *)
     Y ← P(1)+t*P(2);   (*y= a0 + a1 t *) ;
     Xn ← t;
     Pour i= 2(1)n faire
          Xn ← Xn * t;
          Y ← y + P(i+1)* xn  ;
     finpour
Fin (* EVAL_POLY_1 *)
```

*****Cout :**

1 (+), 1 (x)

Pour $i = 2(1)n, on\ a$

2(x), 1(+)

Soit n-1 [2(x),1(+)]

Bilan : $(2n-1)(\times), n(+)$

$3n - 1\ O.v.f$

Soit

**** Approche Hörner :**

```
Procédure       EVAL_POLY_2(t : réel, var y : réel, P : polynôme, n :
entier)
(* Objectif :                                           *)
(* Données :    n : entier le rang de p
                P : polynôme tableau des réels contenant les aᵢ
                t: réel le point où on calcule P *)
(* Résultats : y : réel tel que Y = P(t) *)
Variables locales
                   i : entier ;
Début (*EVAL_POLY_2*)
                Y ← P(n+1); (* y = aₙ *)
                pour i = n-1(-1)0 faire
                   Y ← P(i+1) + t*Y ;
                finpour
Fin(*EVAL_POLY_2*)
```

*****Cout :**

Pour i=n-1(-1)0 on a

1(+), 1(x)

Soit n(+) n(x) donc $\boxed{2n \;\; ovf}$

2) $\boldsymbol{P(t) = b_0 + (t - t_0)(b_n t^{n-1} + b_{n-1} t^{n-2} + \cdots + b_1)}$

(a) **Déterminer $b_i = f(a_i)$, une relation de récurrence :**

On a :
$$\begin{aligned} P(t) &= b_0 + b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_1 t - b_n t_0 t^{n-1} - b_{n-1} t_0 t^{n-2} - \cdots - b_1 t_0 \\ &= (b_0 - b_1 t_0) + (b_1 - b_2 t_0)t + \cdots + (b_{n-1} - b_n t_0)t^{n-1} + b_n t^n \\ &= a_0 + a_1 t + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Ainsi, on a: $\begin{cases} a_0 = b_0 - b_1 t_0 \\ a_1 = b_1 - b_2 t_0 \\ \dots\dots \\ a_k = b_k - b_{k+1} t_0 \\ \dots\dots \\ a_n = b_n \end{cases}$

D'où $\boxed{\begin{cases} b_n = a_n \\ b_i = a_i + b_{i+1} t_0,\ \forall i = 0(1)n-1 \end{cases}}$

(b) **Algo de calcul de p(t₀)**

Pour $= t_0$, on a $p(t_0) = b_0$.

Calculer $P(t_0)$ revient à calculer b_0

```
Procédure         EVAL_POLY_3(t : réel, var y : réel, P : polynôme, n :
entier)
(* Objectif :                                               *)
(* Données :      n : entier le rang de p
                  P : polynôme tableau des réels contenant les aᵢ
                  t: réel le point où on calcule P *)
(* Résultats : y : réel tel que Y = P(t) *)
Variables locales
                     i : entier ;
Début (*EVAL_POLY_2*)
                  Y ← P(n+1); (* y = aₙ *)
                  pour i = n-1(-1)0 faire
                     Y ← P(i+1) + t*Y ;
                  finpour
Fin(*EVAL_POLY_3*)
```

*****Cout :** n(x) et n(+), soit $\boxed{2n\ ovf}$

EXERCICE IV :

On veut calculer $I = \int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}} dx$

1-montrer que $\boldsymbol{I = \sum_{(n=0)}^{+\infty} a_n}$

Lorsque $x \to 0, -\frac{x^2}{2} \to 0$

d'où de développement de la fonction e^x au voisinnage de 0 peut être ramené par la fonction $e^{\frac{-x^2}{2}}$ au voisinnage de 0.

On a : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{-x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^n 1}{n!}$

donc $I = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{-x^2}{2}\right)^n 1}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!} \int_0^1 (-x^2)^n dx \quad \Rightarrow \quad I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_0^1 x^{2n} dx$

or $\int_0^1 x^{2n} dx = \left[\frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$

d'où $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n.n!.(2n+1)}$ donc $\boxed{a_n = \frac{(-1)^n}{2^n.n!.(2n+1)}}$

2) Etablir une relation de récurrence vérifiée par $\boldsymbol{(a_n)_{n\geq 0}}$

$$a_0 = 1, \ a_1 = -\frac{1}{6} a_2 = \frac{1}{40}$$

$$\forall n \geq 0, a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!\,(2(n+1)+1)} = -\frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)!\,(2n+3)}$$
$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!\,(2n+1)} \times \frac{(2n+1)\times(-1)}{(2n+3)\times 2(n+1)}$$
$$= a_n \times -\frac{2n+1}{(2n+2)(2n+3)}$$

En conclusion

$$\boxed{a_0 = 1, \forall n \geq 0, a_{n+1} = -\frac{2n+1}{(2n+2)(2n+3)} a_n}$$

3) Majoration du reste d'ordre N de $\boldsymbol{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n}$***:***

On a : $|a_n| = \frac{1}{2^n n!(2n+1)} \longrightarrow 0$

D'où $(a_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 d'après le critère des séries alternées.

Ainsi $\forall n \geq 0, a_n \leq |a_n + 1| = R_N$

Ainsi $\boxed{R_N = \frac{1}{2^{N+1}(N+1)\,!(2N+3)}}$

4) Algorithme qui approche I avec une incertitude $< \epsilon$

```
Procédure APPROX_I(ϵ:réel, var S : réel )
(*Objectif : trouver une valeur approchée de S à ϵ près *)
(* Donnée : ϵ : réel ; la valeur de l'incertitude *)
(* Résultats : S : réel, S est tel que I ∈]s − ϵ,s + ϵ[ *)
Variables locales :
          i, n: entier ;
          An1, An, Fn, Dn, In, Tol :réels
Début (* APPROX_I *)
     (* Initialisation *)
     n ← 0 ;          (* n = 0 *)
     An ← 1 ;         (* An = an *)
     S ← An ;
     Fn ← 1 ;         (* Fn = n! = 1 *)
     Dn ← 2 ;         (* Dn = 2^(N+1) = 2 *)
     In ← 3 ;         (* In = 2N + 3 = 3 *)
     Tol ← 1/(Fn*Dn*In) ;
     An1 ← 1          (* An1 = an+1 *)
     Tant que (tol ≥ ϵ ou i < ilim ) faire
          (* On fixe un nombre max de calcul à faire pour ilim *)
          n ← n+1 ;            (* n vaut n+1 *)
          An ← An1 ;            (* an ← an+1 *)
          An1 ← An1*(-(2*(n-1)+1))/((2*(n-1)+2)*(2*(n-1)+3));
     (*on peut simplifier en faisant:
          An1 ← An1 *(-(2*n-1))/((2*n)*(2*n+1)) ; *)
          S ← S + An1 ;
          Fn ← Fn*(n+1) ;
```

```
          Dn ← Dn * 2 ;
          In ← In + 2 ;
          Tol ← 1/(Fn*Dn*In) ;
     Fintantque
     (* Si i ≥ ilim, alors on n'a pas pu avec le nombre d'itérations
     fixé atteindre la précision voulue*)
Fin (*APPROX_I*)
```

CORRECTION D'EXAMEN DE L'INFORMATIQUE 4 2011-2012

EXERCICE I : CONNAISSANCE DU COURS

1. **Définitions des notations O, Ω Θ**

$$O(f) = \{g: \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, g(n) \leq c.f(n)\}$$

$$\Omega(f) = \{g: \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, g(n) \geq c.f(n)\}$$

$$\Theta(f) = \{g: \exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)\}$$

2. **Types de complexités rencontrés**

- Constante : $C_n = O(1)$
- Logarithmique : $C_n = O(\log n)$
- Linéaire : $C_n = O(n)$
- Quasi-linéaire : $C_n = O(n \log n)$
- Quadratique : $C_n = O(n^2)$
- Cubique : $C_n = O(n^3)$
- Polynomiale : $C_n = O(n^k), k > 1$
- Exponentielle, lorsqu'il existe $a > 1$ tel que : $C_n = \Omega(a^n)$

3.

a. **Déterminer C(1), puis C(n) en fonction de C(n-1)**

b. **Déduire C(n) en fonction de n**

EXERCICE II : MATLAB

1. **Donner les valeurs finales de $u, v, w, a, b, c, d, e, f$; après exécution par Matlab des instructions suivantes :**

```
u =
```

```
      1       3       5       7       9
v =
     -2      -4      -6      -8     -10
w =
      1      -2       3      -4       5      -6       7      -8       9     -10
a =
      1       3       5       7       9      -2      -4      -6      -8     -10
      1      -2       3      -4       5      -6       7      -8       9     -10
      0       0       0       0       0       0       0       0       0       0
      2       2       2       2       2       2       2       2       2       2
b =
      1       2       5       7       2       2      -4      -6      -8     -10
      1      -2       3      -4       5      -6       7      -8       9     -10
      0       0       0       0       0       0       0       0       0       0
      2       3       2       2       7      -2       2       2       2       2
c =
      1       3       5       7       9
      3       9      15      21      27
      5      15      25      35      45
      7      21      35      49      63
      9      27      45      63      81
d =
      1       3      -4       7
e =
      1       0       0       0
      0       3       0       0
      0       0      -4       0
      0       0       0       7
f =
      1
      3
     -4
      7
```

2. *Donner les instructions Matlab efficaces permettant d'effectuer les sommes suivantes*

a) $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^3}$: `Sum(1./((1 :100).^3))`

b) $\sum_{k=400}^{10000} \frac{1}{\sin(k^2)}$: `sum(1./sin((400:10000).^2))`

c) $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^k}$:

```
s=1;
for k=2:20
    s=s+1/k^k;
end
```

3. *Suite d'instructions efficace Matlab permettant de construire une matrice:*

```
A(1,1)=1 ;
for k=1(1)n
    A(k,k)=1/(k^k) ;
    A(k-1,k)=1/((n-k+1)^3) ;
    A(k,k-1)=1/((k-1)^2) ;
end
```

EXERCICE III

On se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^{\pi} f(x)dx$ ***où*** $f(x) = \frac{x-\sin(x)}{x^3}$

1. ***En utilisant la série entière de la fonction sinus développée en 0, montrer que*** $I = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Dans un voisinage de 0, la fonction sinus admet la décomposition en série entière suivante :

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n . x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Longrightarrow x - \sin(x) = x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Longrightarrow f(x) = \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+3)!}$$

Or I est une I.I.S en 0^+ et $[0,\pi]$ est un intervalle proche de 0. La fonction f admet donc la décomposition en série entière précédente, et on peut écrire que :

$$I = \int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+3)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} \int_0^{\pi} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} \times \frac{\pi^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Avec $\boxed{a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} \times \frac{\pi^{2n+1}}{2n+1}}$

2. ***Relation vérifiée par*** $(a_n)_{n\geq 0}$

$$\forall n \geq 0, a_{n+1} = -1 \times \frac{(-1)^n}{(2n+5)!} \frac{\pi . \pi^{2n+1}}{2n+3} = -1 . \frac{\pi}{(2n+4)(2n+5)} \times \frac{2n+1}{2n+1} \times \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} \frac{\pi^{2n+1}}{2n+3}$$

$$a_{n+1} = -1 . \frac{\pi}{(2n+4)(2n+5)} \times \frac{2n+1}{2n+3} . \frac{(-1)^n}{(2n+3)!} \frac{\pi^{2n+1}}{2n+1} = \frac{-\pi\,(2n+1)}{(2n+3)(2n+4)(2n+5)} a_n$$

Donc, au final $\boxed{a_{n+1} = \frac{-\pi\,(2n+1)}{(2n+3)(2n+4)(2n+5)} a_n \quad \forall n \geq 0}$

3. ***Majoration du reste d'ordre N de la série*** $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

La série a_n est une série alternée, et de plus $|a_n| = \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)!} \rightarrow\searrow\rightarrow 0$, donc a_n converge d'après le critère des séries alternées, et de ce fait, nous avons :

$$\boxed{\forall N \geq 0, \quad R_N = \sum_{N+1}^{+\infty} a_n \leq |a_{N+1}| = \frac{\pi^{2N+3}}{(2N+3)(2N+5)!}}$$

4. ***Concevoir et écrire une fonction algorithmique permettant d'avoir I avec une incertitude absolue < ε***

```
Procédure APPROX_I (ϵ:réel, var S : réel)
(*Objectif : trouver une valeur approchée de S à ϵ près *)
(* Donnée : ϵ :réel ; la valeur de l'incertitude *)
(* Résultats : S : réel, S est tel que I ∈]s − ϵ,s + ϵ[ *)
Constante :
          Pi = 3,14159 ;
          Pi2= Pi*2 ;
Variables locales :
          i, n: entier ;
          An1, An, Fn, Dn, Pn, Tol :réels
Début (* APPROX_I *)
    (* Initialisation *)
    n ← 0 ;                   (* n = 0 *)
    An ← Pi/6 ;         (* An = aₙ *)
    S ← An ;
    Fn ← 120 ;                (* Fn = (2n + 5)! = 5! = 120 *)
    Dn ← 3 ;                  (* Dn = 2n + 3 = 3 *)
    Pn ← Pi*Pi2 ;             (* Pn = π^(2n + 3) = π³ *)
    Tol ← Pn/(Fn*Dn) ;
    An1 ← An ;                (* An1 = aₙ₊₁ *)
    Tant que (tol ≥ ϵ ou i < i_lim ) faire
          (* On fixe un nombre max de calcul à faire pour i_lim *)
          n ← n+1 ;           (* n vaut n+1 *)
          An ← An1 ;          (* aₙ ← aₙ₊₁ *)
          An1 ← An1*(-Pi*(2*n-1)/(2*n+1)*(2*n+2)*(2*n+3));
          S ← S + An1 ;
          Fn ← Fn*(5+n)*(n+6) ;
          Dn ← Dn + 2*n ;
          Pn ← Pn*Pi2 ;
          Tol ← Pn/(Fn*Dn) ;
    Fintantque
    (* Si i ≥ i_lim, alors on n'a pas pu avec le nombre d'itérations fixé
    atteindre la précision voulue*)
Fin (*APPROX_I*)
```

EXERCICE IV :

1. ***Montrer que les matrices L et U peuvent avoir la forme suivante***

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \beta_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \beta_n \end{pmatrix}$$

On a :

$$L.U=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\ \alpha_1&1&0&\ddots&\vdots\\ 0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\ 0&\cdots&0&\alpha_{n-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1&b_1&0&\cdots&0\\ 0&\beta_2&b_2&\ddots&\vdots\\ 0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&b_{n-1}\\ 0&\cdots&0&0&\beta_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\beta_1&b_1&0&\cdots&0\\ \alpha_1\beta_1&\alpha_1b_1+\beta_2&b_2&\ddots&\vdots\\ 0&\alpha_2\beta_2&\ddots&\ddots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&b_{n-1}\\ 0&\cdots&0&\alpha_{n-1}\beta_{n-1}&\alpha_{n-1}b_{n-1}+\beta_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1&b_1&0&\cdots&0\\ c_1&a_2&b_2&\ddots&\vdots\\ 0&c_2&a_3&\ddots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&b_{n-1}\\ 0&\cdots&0&c_{n-1}&a_n\end{pmatrix}$$

Donc les matrices L et U peuvent être de cette forme

2. ***Déterminer les coefficients $\alpha_i(1\le i\le n-1)$ et $\beta_i(1\le i\le n)$ en fonction des $a_i(1\le i\le n), b_i$ et $c_i(1\le i\le n-1)$***

On a $\beta_1=a_1$; $\alpha_i\beta_i=c_i$; $a_i=\alpha_{i-1}b_{i-1}+\beta_i$ $\forall i=2(1)n(0)$

Donc $\alpha_i=\frac{c_i}{\beta_i}$ $\forall i=1(1)n$ (1)

Or,

$$a_i=\alpha_{i-1}b_{i-1}+\beta_i \quad i=2(1)n$$
$$=\frac{c_{i-1}}{\beta_{i-1}}b_{i-1}+\beta_i \ , \quad i=2(1)n$$

$$\Longrightarrow \boxed{\beta_1=a_1} \text{ et } \boxed{\begin{cases}\beta_i=a_i-\dfrac{c_{i-1}b_{i-1}}{\beta_{i-1}} & \forall\, i=2(1)n\\ \alpha_i=\dfrac{c_i}{\beta_i} & \forall\, i=1(1)n-1;\end{cases}}$$

3. ***Procédure algorithmique permettant de déterminer les coefficients de L et U***

```
Procédure Coefficients (A, B, C : vecteurs, var Alpha, Beta : vecteurs, n :entier) ;
(* objectif : déterminer les coefficients des matrices L et U
(* données : A, B, C : vecteurs, qui sont des tableaux de réels contenant
dans leur partie utile les éléments utiles de la matrice
             n : entier contenant le rang de la matrice A. A*)
(* résultats : Alpha, Beta : vecteurs, qui sont des tableaux de réels
    contenant dans leurs parties utiles les éléments des          matrices
L et U issus de la factorisation LU*)
Variables locales :
    i : entier ;
Début (* Coefficients *)
    Beta(1)← A(1) ;
    Alpha(1)← C(1)/Beta(1) ;
    Pour i=2(1)n-1 faire
          Beta(i)← A(i)-(C(i-1)*B(i-1))/Beta(i-1);
          Alpha(i) ← C(i)/Beta(i);
    Finpour
    Beta(n) ← A(n)-(C(n-1)*B(n-1))/Beta(n-1);
Fin (* Coefficients *);
```

4. Coût numérique de cette méthode

$2(\div)$, $1(\times)$ $1(+)$

Dans la boucle pour :

$1(+)$, $1(\times)$ $2(\div)$

Cout total :

$(n-2+1)(+)$, $(n-2+1)(\times)$, $(2(n-2)+2)(\div)$

Soit $\boxed{(4n-4)\text{opérations arithmétique élémentaires}}$

5. Procédure de résolution du système $Ax = b$

Pour résoudre ce système, on a : $Ax = b \Longrightarrow L.Ux = b \Longrightarrow L.y = b$ avec $U.x = y$

Il convient donc d'abord de trouver y avant d'en déduire x en résolvant le système $U.x = y$

```
Procédure Resolution (A,B,C : vecteur, var X : vecteur, n : entier)
(* objectif : résoudre le système A.X=B par la méthode LU en tenant compte
    de la configuration particulière de A*)
(* données : A,B,C : vecteurs, tableaux de réels constituant les éléments      de
la matrice A, B étant le vecteur seconde-membre du système*)
(* résultats : X : vecteur solution du système*)
Variables locales :
    Alpha, Beta, Y: vecteur (*Y est un vecteur intermédiaire*)
    i : entier ;
Début (* Resolution *)
    Coefficients(A,B,C,Alpha,Beta,n) ;
    (* on résout L.Y=B *)
    Y(1)=B(1) ;
    Pour i=2(1)n faire
          Y(i)← B(i)-Alpha(i-1)*Y(i-1) ;
```

```
    Finpour
    (* on résout U.X = Y *)
    X(n) ← Y(n)/Beta(n) ;
    Pour i=(n-1)(1)1 faire
          X(i) ← (Y(i) - B(i)*X(i+1))/Beta(i)
    Finpour
Fin (* Resolution *)
```

6. Coût numérique total de résolution du système

$1(\div)$

Dans les boucle pour : (n-1)fois

$1(+),\quad 1(\times),\quad 1(+),\quad 1(\div),\quad 1(\times), \Longrightarrow\ 2(+),\quad 2(\times),\quad 1(\div)$

Pour un bilan de $2(n-1)(+),\ 2(n-1)(\times),\ n\,(\div)$

Soit un total de $\boxed{5n-5 \text{ opérations arithmétiques élémentaires}}$

7. Concevoir et écrire une procédure algorithmique efficace pour résoudre le système

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a})\boldsymbol{A^2x = c} \\ (\boldsymbol{b})\boldsymbol{A^4x = d} \end{cases}$$

Pour le système (a), il suffit de décomposer le système de la manière suivante :

$A^2x = c \Longrightarrow A(A.x) = c, \Longrightarrow L.U(L.U.x) = c$ système qu'on résout de la manière précédente, en prenant soin de ne pas faire des instructions inutiles ou inutilement supplémentaires.

Pour le système (b): $A^4x = d$, il suffit de décomposer le système de la manière suivante :

$A^4.x = d \Longrightarrow A^2\left(A^2.x\right) = d$, et on le résout en procédant de la même manière que précédemment, mais deux fois.

CORRECTION DE CONTROLE CONTINU D'INFORMATIQUE 4 2012-2013

Exercice 1 :

1- La complexité d'un algorithme est le coût en temps et en espace lié à l'exécution de cet algorithme.
2- Opération pris en compte : Affectations, comparaisons, opérations arithmétiques élémentaires. pour les algorithmes de Tri : Comparaison, déplacements.
3- Définitions

$$O(f) = \{g|\exists c \in \mathbb{R}_+^*, \text{à partir d'un certain rang} : g \leq cf\}$$
$$\Omega(f) = \{g|\exists c \in \mathbb{R}_+^*, \text{à partir d'un certain rang} : f \leq g\,c\}$$
$$\theta(f) = \{g|\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*, \text{à partir d'un certain rang} : c_1 f \leq g \leq c_2 f\}$$

4- Types de complexités
- Constante O(1)
- Logarithmique O(logn)
- Linéaire O(n)
- Quasi linéaire O(nlogn)
- Quadratique o(n^2)
- Cubique $O(n^3)$
- Exponentielle : $O(a^n), a > 1$.

5- On ne peut faire mieux que O(nlogn)
6- Algorithme de tri en 0(nlogn) : Tri fusion, Tri rapide.

Exercice 2

1- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -7 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Descriptions :

$A \times B$:Produit matriciel de A et B

A./B : Renvoi la matrice D=$[D_{ij}]_{3*3}$, D_{ij}=A(i,j)/B(i ,j) ;

CosA : Renvoi la matrice D=$[D_{ij}]_{3*3}$, D_{ij}=cos(A(i,j)) ;

expA : Renvoi la matrice D=$[D_{ij}]_{3*3}$, D_{ij}=exp(A(i,j)) ;

A+1 : Renvoi la matrice D=$[D_{ij}]_{3*3}$, D_{ij}= A(i,j) + 1 ;

B(:2) : Renvoi la deuxième colonne de B.

b) Résultats obtenu :
   a) V=(7 2 4 1)
   b) W = (7 -7 3 1)
   c) $ans = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -14 \\ 5 & 15 & 35 \\ 6 & 18 & 42 \end{pmatrix}$
   d) $ans = (-2 - 2 - 4)\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -36$

2- Fonction Matlab

```
fonction [y]=calcul (x)
%Objectif : evaluer l'expression donnée en x
if (x~=0)
      a=sqrt(abs(x))+1 ;
       b=(sin(exp(x.13))+1).*sqrt(a) ;
        c=atan(x.12)+(ln(a)).1(4/3) ;
        y=b./c ;
    end
End
```

Exercice 3 :

1) Type : polynôme :
   constante : Nmax = 100 ;
   type : polynôme = Enregistrement
      coeff : tableau [1…max] de réels
      degre : Entier
   FinEnregistrement
2) Méthode de Homer :
   Analyse :
   $$P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n = a_0 + t(a_1 + t(a_2 + \cdots + t(a_n) \ldots))$$
   Initialisation :
   $y = a_n$
   $n-1 : y = a_n t + a_{n-1} = y \times t + a_{n-1}$
   $n-k : y = y \times t + a_{n-k}$
   .
   .
   .
   1 $y = y \times t + a_1$
   0 $y = y \times t + a_0$

Algorithme :

fonction : Evaluer_Hor (P :polynôme, t : réel) : réel

variables : y :réel

k, n : Entier

Début :

$n \leftarrow P.degre;$

$y \leftarrow P.coeff(n+1);$

pour k=n(-1)1 faire

$y \leftarrow y * t + P.coeff(k);$

fpour

Evalue_Hor← y ;

fin

Nombre d'opérations :

$C(n) = \sum_{i=1}^{n}\big(1(\times) + 1(+)\big) = 2n\ ovfs$

3)Cas du polynôme pair :

$P(t) = a_0 + a_2t^2 + \cdots + a_{2n}t^{2n} = a_0 + t^2(a_2 + t^2(a_4 + \cdots + t^2(a_{2n})\ldots))$

n $y = a_{2n}$

.

.

.

$k : y = y \times t^2 + a_{2k}$

.

.

.

0 $y = y \times t^2 + a_0$

fonction : Evaluer_Hor (P :polynôme, t : réel) : réel

variables : x, y :réel

k, n : Entier

Début :

$n \leftarrow P.degre\ /\ 2;$

$y \leftarrow P.coeff(P.degre + 1);$

$x \leftarrow t * t;$

pour k=n(-1)1 faire

$y \leftarrow y * x + P.coeff(2 * k - 1);$

fpour

Evalue_Hor← y ;

fin

Exercice 4 :

1) Algorithme de produit_Mat :

Analyse

$$A = [a_{ij}]_{1\le i,j\le n} \qquad b = (b_i)_{1\le i\le n}$$

$$Ab = (c_i)_{1\le i\le n} \quad \text{où } c_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_k$$

Fonction : Produit_Mat(A : Matrice, n : Entier, b : Vecteur) : Vecteur

Variables : i, k : entier

c : vecteur

Début :

pour i=1(1)n faire

$C(i) \leftarrow 0;$

pour k=1(1)n faire

$C(i) \leftarrow C(i) + A(i,k) * b(k);$

fpour

fpour

produit_Mat← c ;

Fin

2) Algorithme de Produit_Mat1 :

Analyse :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

à la ligne i : $a_{ik} = \begin{cases} 0 \; si \; k > i \\ a_{ik} \neq 0 \; sinon \end{cases}$

D'où $Ab = (c_i)_{1\le i\le n}$ où $c_i = \sum_{k=1}^{i} a_{ik} b_k$

// l'ecriture de l'algorithme est évidente : Il suffit de

//remplacer dans le 1) n par i (faire en exercice) . pour la 2ème boucle pour.

3) Coût numérique

* Produit_Mat

$$C(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\big(1(\times)+1(+)\big)=2n^2\ ovfs$$

* Produit_Mat1

$$C(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\big(1(\times)+1(+)\big)=\sum_{i=1}^{i}2i=\frac{2\big((n+1)n\big)}{2}=(n+1)n\ \ ovfs$$

Exercice 5 :

$I=\int_0^{\pi}\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt$

1- Montrons que $I=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$

$\forall\, t\in\mathbb{R}\quad cost=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}$

Donc $\forall\, t\in\mathbb{R}^*,\ \ \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n-\frac{1}{2}}}{(2n)!}$ En posant $b_n(t)=(-1)^n\frac{t^{2n-\frac{1}{2}}}{(2n)!}$

On a : $\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(t)$

$$\left|\frac{b_{n+1}(t)}{b_n(t)}\right|=\left|\frac{t^2}{2(2n+1)(n+1)}\right|=\frac{t^2}{2(2n+1)(n+1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0<1\ \ t\in\mathbb{R}^*$$

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ or $[0,\pi]\subset\mathbb{R}$

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$ converge uniformément sur $[0,\pi]$; de plus $b_n(t)$ est l'intégrale sur $[0,\pi]$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration terme à terme des series entières :

$$S(x)=\int_0^{\pi}\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt=\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n-\frac{1}{2}}}{(2n)!}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\left(2n+\frac{1}{2}\right)}\left[t^{2n+\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi}$$

Posons $a_n=\frac{(-1)^n\pi^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!\left(2n+\frac{1}{2}\right)}\qquad\forall n\in\mathbb{N}$

On a $I=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$

2- Relation de Récurrence :

soit $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \frac{(-1)^n \pi^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!\left(2n+\frac{1}{2}\right)}$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = -\frac{\pi^2\left(2n-\frac{3}{2}\right)}{(2n)(2n-1)\left(2n+\frac{1}{2}\right)}$

3-

Reste d'ordre N :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\pi^2}{(2n+1)(2n+2)\left(2n+\frac{5}{2}\right)}\left(2n+\frac{1}{2}\right) = r_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} |r_N| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\pi^2}{8}\frac{n}{n^3} = 0 < 1$$

Donc $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge d'après le critère de d'Alembert et :

$$|R_N| = \left|I - \sum_{n=0}^{N} a_n\right| \leq \frac{|a_{N+1}|}{1-r_N}$$

$$|R_N| \leq \frac{\pi^{2n+\frac{5}{2}}}{(2n+2)!\left(2n+\frac{5}{2}\right)} \frac{1}{1-\frac{\pi^2}{(2n+1)(2n+2)\left(2n+\frac{5}{2}\right)}\left(2n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$|R_N| \leq \frac{\pi^{2n+\frac{5}{2}}}{2(2n)!\left(2n+\frac{1}{2}\right)} \quad pour\ N \geq 1$$

Donc on a : $|R_N| \leq \pi^2 |a_N|$ $\quad pour\ N \geq 1$

4- Conception :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^* \ |R_N| \leq \pi^2 |a_N| \qquad s_0 = a_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\pi}$$

$$a_N = -\frac{\pi^2\left(2N-\frac{3}{2}\right)}{(2N)(2N-1)\left(2N+\frac{1}{2}\right)} a_{N-1}$$

Faire

$a_n = -\frac{\pi^2\left(2n-\frac{3}{2}\right)}{(2n)(2n-1)\left(2n+\frac{1}{2}\right)} a_{n-1}$;

$R_n = \pi^2 |a_n|$;

$S_n = S_{n-1} + a_n$;

$n \leftarrow 1 + n$;

Tantque $(R_n > \mathcal{E})$

Algorithme :

Fonction : $calcul\_I\ (prec : réel ; Nitermax : réel) : réel$
(* Objectif : calculer I a une precision près*)
(* Données : prec : réel répresentant la précision désirée et Nitermax : Entier représentant le nombre maximal d'ittérations *)
(*résultat : I à prec près*)
variables : R, S, a : réel
n : Entier

Début :

$n \leftarrow 1$;

$a \leftarrow$2sqrt(π) ;

$S \leftarrow a$;

faire :

$a \leftarrow -((-\pi 12 * (2 * n - 3/2))/((2 * n) * (2 * n - 1) * (2 * n + 1/2))) * a$;

$R \leftarrow \pi 12 * abs(a)$;

$S \leftarrow S + a$;

$n \leftarrow n + 1$;

tantque $(R > prec)\ et\ (n \leq Nitermax)$;

SI $(n \geq Nitermax)\ alors$

Ecrire(''Le calcul de I à cette précision est impossible avec centre d'ittération maximal'') ;

sinon

$calcul\_I \leftarrow S$;

fsi

Fin

Nombre d'opérations :

Version non efficace : $C_1(n) = 4n \ ovfs$

Version efficace : $C_2(n) = 2n + 1 \ ovfs$

Donc $C = 4n - 2n - 1 = 2n - 1 \quad ovfs$

5- Algorithme de produit :

$P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad\qquad Q = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$

$P \times Q = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$ où $c_i = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{i-k}$

fonction : Produit-poly (P : polynôme, Q : polynôme) : polynôme
variables : i, j, m : Entier
R: polynôme
Début : (* De Produit_Poly *)
$n \leftarrow P.degre + Q.degre;$
pour i=1(1)P. degre + 1 faire
pour j=1(1)Q. degre + 1 faire
$R.coeff(i + j - 1) \leftarrow P.coeff(i) * Q.coeff(j) + R.coeff(i + j - 1);$

fpour
fpour

R.degre← n ;
Produit_Poly← R ;

fin

6- Adaptation
a) P et Q sont pairs :

$P = \sum_{i=0}^{n} a_{2i} x^{2i} \qquad\qquad Q = \sum_{i=0}^{m} b_{2i} x^{2i}$

$P \times Q = \sum_{i=0}^{n+m} c_{2i} x^{2i}$ où $c_{2i} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} b_{2(i-k)}$

// la suite est évidente. Il suffit de réadapter le code du 4°)

b) P et Q sont impairs

$P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i+1} \qquad\qquad Q = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{2i+1}$

$P \times Q = \sum_{i=0}^{n+m+1} c_{2i} x^{2i}$ où $c_{2i} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} b_{2(i-k)-1}$

// suite en exercice

c) P pair et Q impair

$P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{2i}$ $\quad Q = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{2i+1}$

$P \times Q = \sum_{i=0}^{n+m} c_{2i+1} x^{2i+1}$ où $c_{2i+1} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} b_{2(i-k)+1}$

// suite en exercice

CORRECTION DU CONTRÔLE CONTINU DE STATIQUE 2011-2012

EXERCICE I :

1. Action de pesanteur sous forme de glisseur

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{L_1}{2}\overrightarrow{x_k} = \frac{L_1}{2}(\cos\theta\,\overrightarrow{x_\iota} + \sin\theta\,\overrightarrow{y_\iota})$$

$$\overrightarrow{OG_2} = \left(L_1 + \frac{L_2}{2}\right)\overrightarrow{x_k} = (L_1 + \frac{L_2}{2})(cos\,\theta\,\overrightarrow{x_\iota} + sin\,\theta\,\overrightarrow{y_\iota})$$

$$\overrightarrow{OG_3} = \left(L_1 + L_2 + \frac{L_3}{2}\right)(cos\,\theta\,\overrightarrow{x_\iota} + sin\,\theta\,\overrightarrow{y_\iota})$$

- Poids d'une barre

$\overrightarrow{F_\iota} = m_i\vec{g}\ \ \forall\, i = 1,2,3 \rightarrow\ \ \overrightarrow{F_\iota} = -m_i g\overrightarrow{y_\iota} = -\rho_i V_i g.\overrightarrow{y_\iota}$

D'où les actions de pesanteurs suivantes

$$\boxed{[T_1]_{G_1} = \begin{cases}\overrightarrow{F_1} = -a^2\rho_1 L_1 g.\overrightarrow{y_\iota}\\ \overrightarrow{m_1}_{G_1} = \vec{0}\end{cases}\quad \text{avec}\overrightarrow{OG_1} = \frac{L_1}{2}(cos\,\theta\,\overrightarrow{x_\iota} + sin\,\theta\,\overrightarrow{y_\iota})}$$

$$[T_2]_{G_2} = \begin{cases}\overrightarrow{F_2} = -a^2\rho_2 L_2 g.\overrightarrow{y_\iota}\\ \overrightarrow{m_2}_{G_2} = \vec{0}\end{cases}\quad \text{avec}\overrightarrow{OG_2} = \left(L_1 + \frac{L_2}{2}\right)(cos\,\theta\,\overrightarrow{x_\iota} + sin\,\theta\,\overrightarrow{y_\iota})$$

$$[T_3]_{G_3} = \begin{cases}\overrightarrow{F_3} = -a^2\rho_3 L_3 g.\overrightarrow{y_\iota}\\ \overrightarrow{m_3}_{G_3} = \vec{0}\end{cases}\quad \text{avec}\overrightarrow{OG_3} = \left(L_1 + L_2 + \frac{L_3}{2}\right)(cos\,\theta\,\overrightarrow{x_\iota} + sin\,\theta\,\overrightarrow{y_\iota})$$

2. Torseur d'effort exercé par l'ouvrier $[\mathfrak{F}]$

Le **P.F.S** nous donne : $[\mathfrak{F}]_0 + [T_1]_0 + [T_2]_0 + [T_3]_0 = [0]$

$$\overrightarrow{OG_\iota} = X_i(cos\,\theta\,\overrightarrow{x_\iota} + sin\,\theta\,\overrightarrow{y_\iota})$$

$$\overrightarrow{F_\iota} = F_i\overrightarrow{y_\iota}\overrightarrow{m_\iota}_O = \begin{vmatrix}\overrightarrow{x_\iota} & \overrightarrow{y_\iota} & \overrightarrow{z_\iota}\\ X_i cos\theta & X_i\sin\theta & 0\\ 0 & F_i & 0\end{vmatrix} = -F_i\begin{vmatrix}\overrightarrow{x_\iota} & \overrightarrow{y_\iota}\\ X_i\cos\theta & 0\end{vmatrix} = F_i X_i\cos\theta\,\overrightarrow{z_\iota}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{m_1}_O = -\frac{a^2 g\rho_1 L_1 L_1}{2}\cos\theta\,\vec{z_\iota}$$

$$\overrightarrow{m_2}_O = -a^2 g\rho_2 L_2\left(L_1+\frac{L_2}{2}\right)\cos\theta\,\vec{z_\iota}$$

$$\overrightarrow{m_3}_O = -a^2 g\,\rho_3 L_3\left(L_1+L_2+\frac{L_3}{3}\right)\vec{z_\iota}$$

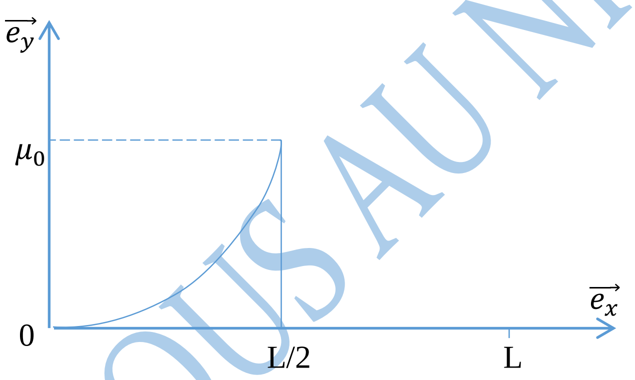
Donc $\boxed{[\mathfrak{F}]_O = \begin{cases}\vec{F} = a^2 g(\rho_1 L_1+\rho_2 L_2+\rho_3 L_3)\vec{y_\iota}\\ \vec{m}_O = a^2 g.\cos\theta\left(\rho_1 L_1+\frac{L_1}{2}+\rho_2 L_2\left(L_1+\frac{L_2}{2}\right)+\ \rho_3 L_3\left(L_1+L_2+\frac{L_3}{2}\right)\right)\vec{z_\iota}\end{cases}}$

3. Déduction de la position θ_0 du moindre effort de l'ouvrier

$$[\mathfrak{F}]_O = \begin{cases}\vec{F}\text{est indépendant de } \theta\\ \vec{m}_O = K.\cos\theta\,\vec{z_\iota}\text{avec } 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

Effet moindre : $\rightarrow \vec{m}_O = \vec{0} \rightarrow \cos\theta = 0$ $\boxed{\theta_0 \in \left\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}}$

EXERCICE II :PONT CHARGE DE MANIERE NON UNIFORME



1. Action infinitésimale de pesanteur à un point M / $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e_x}$

La parabole a pour équation $y = ax^2$ car de somment $O(0{,}0)$ et dans le plan $z = 0$

En plus, pour $x = \frac{1}{2}$ on a $y = \mu_0 \Longrightarrow \mu_0 = a\frac{L^2}{4} \Longrightarrow a = \frac{4\mu_0}{L^2}$

D'où l'équation de la parabole :

$$\boxed{\mu(x) = \frac{4\mu_0}{L^2}x^2}$$

$\overrightarrow{dP}(x) = \mu(x)dx\,.g(-\vec{e_y})$ avec $\mu(x) = \frac{4\mu_0}{L^2}x^2$ on en déduit :

$$\boxed{\begin{cases} d[\mathfrak{F}_g]_M = \begin{cases} \overrightarrow{dP} = -\dfrac{4\mu_0}{L^2} g.x^2 dx\,\overrightarrow{e_y} \\ \vec{0} \end{cases} \\ d[\mathfrak{F}_g] = [0] \text{avec} \dfrac{L}{2} < x \leq L. \end{cases}}$$

2. Réduction en O du torseur global de la pesanteur :

$$d[\mathfrak{F}_g]_M = \begin{cases} \overrightarrow{dP} = -\frac{4\mu_0}{L^2} g.x^2 dx\overrightarrow{e_y} \\ \vec{0} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dP} = -\frac{4\mu_0}{L^2} g.x^2 dx\overrightarrow{e_z} \qquad 0 \leq x \leq L/2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \vec{P} = \int_{x=0}^{\frac{L}{2}} \overrightarrow{dP} = -4\mu_0.\frac{g}{L^2}\left(\frac{1}{3}x^3\right)_0^{\frac{L}{2}}.\overrightarrow{e_y}$$

$$= -\frac{4\mu_0 g}{L^2}.\frac{1}{3}\left(\frac{L}{3}\right)^3 \overrightarrow{e_y} = -\frac{1}{6}\mu_0.gL\,\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{m_O} = \int_{x=0}^{\frac{L}{2}} d\overrightarrow{m_O} = -\frac{4\mu_0 g}{L^2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\frac{L}{2}}\overrightarrow{e_z}$$

$$= -\frac{4\mu_0 g}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{16}.L^4\overrightarrow{e_z}$$

$$= -\frac{1}{16}\mu_0 g L^2\overrightarrow{e_z}$$

$$\boxed{[\mathfrak{F}_g]_O = \begin{cases} \vec{P} = -\dfrac{1}{6}\mu_0 gL\,\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{m_O} = -\dfrac{1}{16}\mu_0 gL^2\overrightarrow{e_z} \end{cases}}$$

3.

$$[\mathfrak{F}_g]_O = -10^3\left(8\,\overrightarrow{e_y} + \varepsilon 30\overrightarrow{e_z}\right)$$

$$[\mathfrak{F}_O]_O = N_0\overrightarrow{e_y} + \varepsilon\vec{0},$$

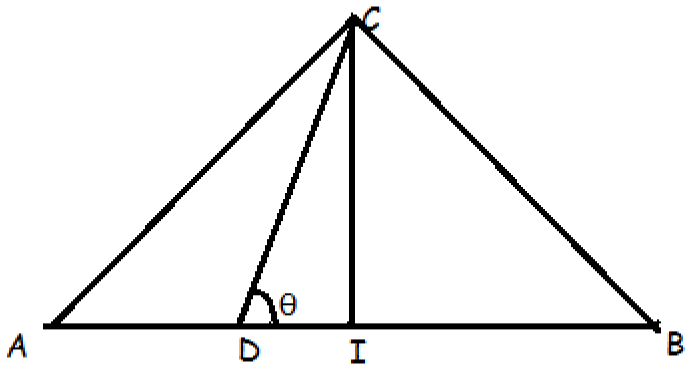
$[\mathfrak{F}_A]_A = N_A\overrightarrow{e_y} + \varepsilon\vec{0}$ $\qquad [\mathfrak{F}_A]_O = N_A\overrightarrow{e_y} + \varepsilon\, L\overrightarrow{e_x} \wedge N_A\overrightarrow{e_y}$

$$= N_A\overrightarrow{e_y} + \varepsilon L N_A\overrightarrow{e_z}$$

Le **P.F.S** nous donne : $[\mathfrak{F}_A]_O + [\mathfrak{F}_O]_O = -[\mathfrak{F}_g]_O$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_A + N_O = 8.10^3 \\ L.N_A = 30.10^3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \overrightarrow{N_A} = 3000\,\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{N_O} = 5000\,\overrightarrow{e_y} \end{matrix}}$$

EXERCICE III :



On a : $\tan\alpha = \frac{IC}{AI} \Rightarrow IC = AI\tan\alpha,$

$$\tan\theta = \frac{IC}{DI} \Rightarrow IC = DI\tan\theta$$

$\tan\theta = \frac{IC}{DI}\tan\alpha$ Donc

$$\boxed{\theta = \arctan\left(\frac{AI}{DI}\tan\alpha\right)} \boxed{\theta \cong 63{,}5}$$

2. Actions extérieures en A et B

$$\overrightarrow{R_B} = N_B\overrightarrow{e_y}\overrightarrow{R_A} = X\overrightarrow{e_x} + Y\overrightarrow{e_y}$$

$$\vec{F} = -F.\cos\theta\,\overrightarrow{e_x} - F.\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$$

Le **T.R.S** appliqué nous donne : $(X - F.\cos\theta)\overrightarrow{e_x} + (N_B + Y - F.\sin\theta)\overrightarrow{e_y} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} X - F.\cos\theta = 0 \quad (1) \\ Y + N_B - F.\sin\theta = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Le **T.M.S** en A nous donne : $\overrightarrow{AD} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{AB} \wedge N_B\overrightarrow{e_y} = \vec{0}$

$$\Rightarrow AB.N_B - AD.F.\sin\theta = 0 \quad (3) \qquad \Rightarrow N_B = \frac{AD}{AB}.F.\sin\theta\,, X = F.cos\theta, Y = \left(1 - \frac{AD}{Ab}\right).F.\sin\theta$$

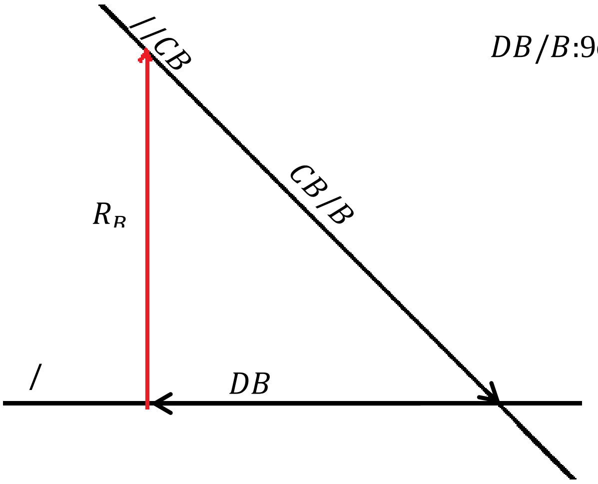
$$\mathrm{Tan}\,\theta_{R_A} = \frac{Y}{X} = \left(1 - \frac{AD}{AB}\right)\tan\theta = 1{,}5 \;\Rightarrow \theta_{R_A} = 56{,}3°$$

La partie graphique avec le Cremona (l'échelle n'est pas respectée !!)

<u>Au nœud B :</u> Echelle : 1 cm → 1kN

AD/A : 1,7 cm → 8,5 kN

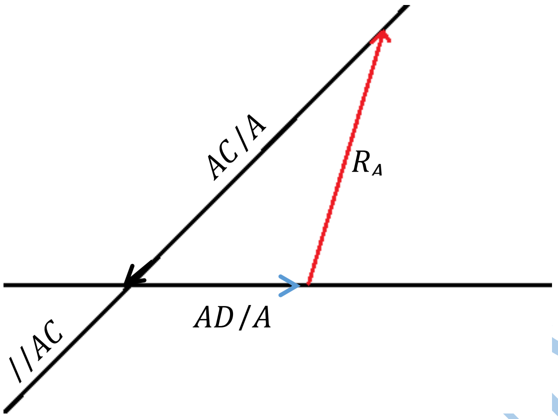
AC/A : 7,5 cm → 37,5 kN



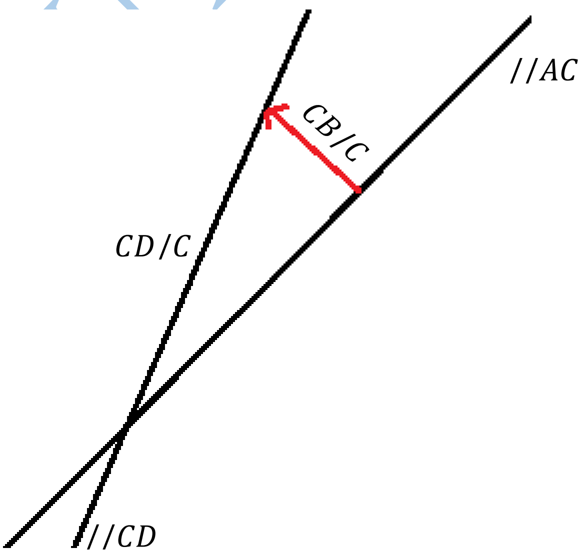
DB/B:9cm → 9kN

Rq : On vérifie ici que
$AC/A \cong AC/C$

Au nœud A : Echelle : 1 cm → 5kN



Au nœud C : Echelle : 1 cm → 4kN



Au nœud D : Il faut vérifier que :
$AD/D \cong BD/D$: 8,5 kN≅ 9kN
$CD/C \cong F$ 39,6 kN ≅ 40 kN.

CORRECTION DE L'EXAM DE STATIQUE 2011-2012

EXERCICE I :

1-

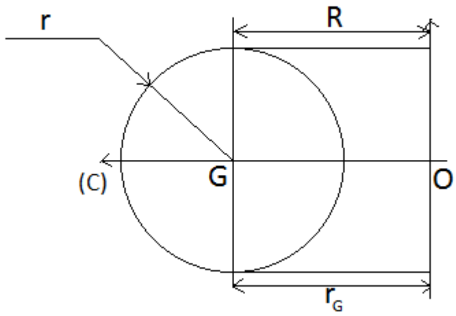
- ***Enonce du 1er théorème de Guldin***

L'aire de la surface engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie

- ***Enoncé du 2nd théorème de Guldin***

La mesure du volume engendré par une courbe plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égale au produit de l'aire de cette surface par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie

2- Calcul de l'aire du tore donné :



$$A_T = Périmètre(c)xPérimètre(\mathcal{C}_{(O,r_G)})$$

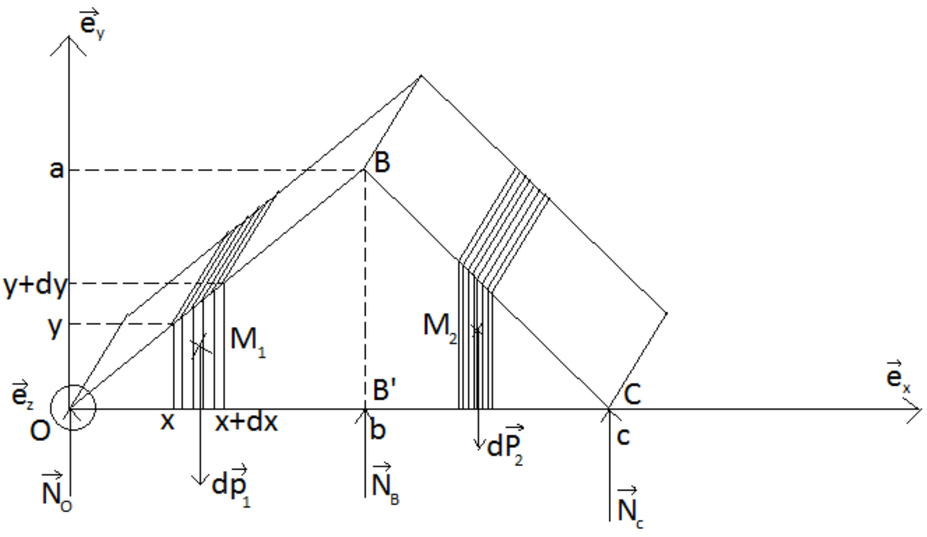
AN: $A_T = 2\pi r \times 2\pi R = 4\pi^2 rR$ $\boxed{A_T = 4\pi^2 rR}$

- Calcul du volume du tore donné:

$$V_T = Aire(c) \times Périmètre\left(\mathcal{C}_{(O,r_G)}\right) \boxed{V_T = 2\pi^2 r^2 R}$$
$$= \pi r^2 \times 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$$

EXERCICE II :

Épaisseur : e masse volumique : ρ



1) Expression des actions infinitésimales de la pesanteur dans OBB' et BB'C

- ***Dans la partie OBB' :***

En $M_1\left(x+\frac{dx}{2}, y_1, \frac{e}{2}\right)$ $\quad 0 \leq x \leq b d\vec{p}_1 = m_1\vec{g} = (\rho dV_1)\vec{g} = -g\rho dV_1\vec{e}_y$

dV_1 volume du pavé trapézoïdale élémentaire

$$dV_1 = e.\frac{(y+y+dy)\times dx}{2}$$
$$= \frac{e}{2}dx(2y+dy)$$

Pour $0 \leq x \leq b \quad y = \frac{a}{b}x \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{a}{b}dx$ donc

$$dV_1 = \frac{e}{2}dx\left(\frac{2a}{B}x + \frac{a}{b}dx\right)_{(dx)^2 \to 0}$$
$$= \frac{ae}{b}xdx + \frac{ae}{2b}(dx)^2$$

$$dV_1 = \frac{ae}{b}xdx \quad \Rightarrow \quad d\vec{p}_1 = -\frac{\rho gae}{b}xdx\vec{e}_y$$

$$\boxed{\begin{array}{c} M_1\left(x+\frac{dx}{2},y_1,\frac{e}{2}\right)\quad 0\le x\le b \\ d\vec{p}_1=-\frac{\rho g a e}{b}xdx\vec{e}_y \end{array}}$$

- ***Dans la partie BB'C :***

$$en\ M_2\left(x+\frac{dx}{2},y_2,\frac{e}{2}\right)\ b<x\le c$$

$d\vec{p}_2=(\rho dV_2)\vec{g}=-\rho g dV_2\vec{e}_y$ de même $\begin{aligned} dV_2 &= \frac{e((y+y+dy).dx)}{2} \\ &= \frac{e}{2}dx(2y+dy)=edx\left(y+\frac{dy}{2}\right)\end{aligned}$

Or pour $b<x\le c\quad y=\frac{a}{b-c}(x-c)\quad\Rightarrow\quad dy=\frac{a}{b-c}dx$

Donc
$$\begin{aligned} dV_2 &= edx\left(\frac{a(x-c)}{b-c}+\frac{a}{2(b-c)}dx\right) \\ &= e\left(\frac{a(x-c)}{b-c}dx+\frac{a}{2(b-c)}(dx)^2\right)(dx)^2\to 0 \\ &= \frac{ae(x-c)}{b-c}dx\Rightarrow\quad d\vec{p}_2=-\frac{\rho g a e(x-c)}{b-c}dx\vec{e}_y \end{aligned}$$

Donc en

$$\boxed{\begin{array}{c} M_2\left(x+\frac{dx}{2},y_2,\frac{e}{2}\right)\quad b<x\le c \\ d\vec{p}_2=-\frac{\rho g a e}{b-c}(x-c)dx\vec{e}_y \end{array}}$$

2) Expression du torseur de pesanteur de la plaque OBC en O :

- ***Torseur de pesanteur de la plaque OBB' en G_1 son centre d'inertie.***

  - ***Coordonnées de G_1 centre d'inertie de OBB' :***

Comme la plaque est homogène et triangulaire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG_1} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB'}+\frac{e}{2}\vec{e}_z \\ &= \frac{1}{3}(b\vec{e}_x+a\vec{e}_y)+\frac{1}{3}(b\vec{e}_x)+\frac{e}{2}\vec{e}_z \\ &= \frac{2}{3}b\vec{e}_x+\frac{1}{3}a\vec{e}_y+\frac{e}{2}\vec{e}_z\end{aligned}$$

$$G_1\left(\frac{2b}{3},\frac{a}{3},\frac{e}{2}\right)$$

$$[T_{g_1}]_{G_1} = \begin{Bmatrix} \int_{M\in OBB'} d\vec{p}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \qquad \int_{M\in OBB'} d\vec{p}_1 = -\frac{\rho gae}{b}\int_0^b xdx\,\vec{e}_y = -\frac{\rho gabe}{2}\vec{e}_y$$

$$[T_{g_1}]_{G_1} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\rho gabe}{2}\vec{e}_y \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- ***Torseur de pesanteur de la plaque BB'C en G_2 son centre d'inertie :***
  - ***Coordonnées de G_2 centre d'inertie de BB'C :***

$$\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OB'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{B'B} + \frac{1}{3}\overrightarrow{B'C} + \frac{e}{2}\vec{e}_z$$
$$= b\vec{e}_x + \frac{1}{3}(a\vec{e}_y) + \frac{1}{3}(c-b)\vec{e}_x + \frac{e}{2}\vec{e}_z$$
$$= \frac{2b}{3}\vec{e}_x + \frac{c}{3}\vec{e}_x + \frac{a}{3}\vec{e}_y + \frac{e}{2}\vec{e}_z$$

$$G_2\left(\frac{2b+c}{3};\frac{a}{3};\frac{e}{2}\right)$$

$$[T_{g_2}]_{G_2} = \begin{Bmatrix} \int_{M\in BB'C} d\vec{p}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \qquad \int_{M\in BB'C} d\vec{p}_2 = -\frac{\rho gae}{b-c}\vec{e}_y\int_b^c (x-c)dx = -\frac{\rho gae}{b-c}\left[\frac{1}{2}(x-c)^2\right]_b^c \vec{e}_y = \frac{\rho gae}{2}(b-c)\vec{e}_y$$

$$[T_{g_2}]_{G_2} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\rho gae(c-b)}{2}\vec{e}_y \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$[T_g]_O = [T_{g_1}]_O + [T_{g_2}]_O$$

$$\vec{m}_{1,O} = \vec{m}_{1,G_1} + \overrightarrow{OG_1}\wedge\left(-\frac{\rho gabe}{2}\vec{e}_y\right)$$

Posons $P_1 = -\frac{\rho gabe}{2}$

$$\vec{m}_{1,O} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{2b}{3} & \frac{a}{3} & \frac{e}{2} \\ 0 & p_1 & 0 \end{vmatrix} = -P_1\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_z \\ \frac{2b}{3} & \frac{e}{2} \end{vmatrix} = \left(\frac{2b}{3}\vec{e}_z - \frac{e}{2}\vec{e}_x\right)P_1$$

Posons $P_2 = -\frac{\rho gae(c-b)}{2}$

$$\vec{m}_{2,O}=\vec{m}_{2,G_2}+\overrightarrow{OG_2}\wedge P_2\vec{e}_y=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{2b+c}{3} & \frac{a}{3} & \frac{e}{2}\\ 0 & P_2 & 0\end{vmatrix}=-P_2\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_z\\ \frac{2b+c}{3} & \frac{e}{2}\end{vmatrix}=\left(\frac{2b+c}{3}\vec{e}_z-\frac{e}{2}\vec{e}_x\right)P_2$$

$$[T_g]_O=\begin{Bmatrix}P_1\vec{e}_y\\ \left(\frac{2b}{3}\vec{e}_z-\frac{e}{2}\vec{e}_x\right)P_1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_2\vec{e}_y\\ \left(\frac{2b+c}{3}\vec{e}_z-\frac{e}{2}\vec{e}_x\right)P_2\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}(P_1+P_2)\vec{e}_y\\ -\frac{e}{2}(P_1+P_2)\vec{e}_x+\left(\frac{2b}{3}P_1+\frac{2b+c}{3}P_2\right)\vec{e}_z\end{Bmatrix}$$

$$P_1+P_2=-\frac{\rho gaeb}{2}-\frac{\rho gae(c-b)}{2}$$

$$=-\frac{\rho gae}{2}(b+c-b)=-\frac{\rho gace}{2}$$

$$\frac{2b}{3}P_1+\frac{2b+c}{3}P_2=-\frac{2\rho gab^2e}{6}-\frac{\rho gae(c-b)(2b+c)}{6}$$

$$=-\frac{\rho gae}{6}[2b^2+(c-b)(2b+c)]$$

$$=-\frac{\rho gae}{6}(bc+c^2)=-\frac{\rho gace}{6}(b+c)$$

Donc $$\boxed{[T_g]_O=\begin{Bmatrix}-\frac{\rho gaec}{2}\vec{e}_y\\ \frac{\rho gace^2}{4}\vec{e}_x-\frac{\rho gace}{6}(b+c)\vec{e}_z\end{Bmatrix}}$$

3) Calcul de N_0, N_B et N_C :

Torseur appliqué à la plaque entière :

$$[T_g]_{O'},[T_O]_O=N_O\vec{e}_y+\epsilon\vec{0},[T_1]_{B'}=N_B\vec{e}_y+\epsilon\vec{0},$$

$$[T_2]_c=N_c\vec{e}_y+\epsilon\vec{0}$$

P.F.S. sur la plaque entière $\Leftrightarrow$

$$[T_g]_O+[T_O]_O+[T_1]_O+[T_2]_O=[0]_O \quad (1)$$

$$[T_1]_O=\begin{cases}N_B\vec{e}_y\\ \vec{0}+\overrightarrow{OB'}\wedge N_B\vec{e}_y=b\vec{e}_x\wedge N_B\vec{e}_y=bN_B\vec{e}_z\end{cases}$$

$$[T_2]_O=\begin{cases}N_c\vec{e}_y\\ \vec{0}+\overrightarrow{OC}\wedge N_c\vec{e}_y=c\vec{e}_x\wedge N_c\vec{e}_y=cN_c\vec{e}_z\end{cases}$$

Posons $Y = -\frac{\rho gace}{2}$; $L = \frac{\rho gace^2}{4}$; $N = -\frac{\rho gace(b+c)}{6}$

$$(1) \Rightarrow \begin{Bmatrix} N_O\vec{e}_y \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_B\vec{e}_y \\ bN_B\vec{e}_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_C\vec{e}_y \\ cN_C\vec{e}_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Y\vec{e}_y \\ L\vec{e}_x + N\vec{e}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_O + N_B + N_C = -Y \\ bN_B + cN_C = -N \\ L \approx 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (S) \begin{cases} 0N_O + bN_B + cN_C = -N \\ 1N_O + 1N_B + 1N_C = -Y \end{cases} \Rightarrow \ hyperstatisme$$

Soit le mineur non nul $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -b \neq 0 \Rightarrow$ hyperstatisme de dégré 1

$$(S) \Rightarrow \begin{cases} bN_B = -N - cN_C (2) \\ N_O + N_B = -Y \quad (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow N_B = \frac{-N - cN_C}{6} = \frac{\rho gace(b+c)}{6b} - \frac{c}{b}N_C$$

$$\boxed{\vec{N}_B + \left[\frac{\rho gace(b+c)}{6b} - \frac{c}{b}N_C\right]\vec{e}_y}$$

$$(3) \Rightarrow \begin{aligned} N_O &= -Y - N_B \\ &= \frac{\rho gace}{2} - \frac{\rho gace}{6b}(b+c) + \frac{c}{b}N_C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{N}_O = +\left[\frac{\rho gace}{2} - \frac{\rho gace}{6b}(b+c) + \frac{c}{b}N_C\right]\vec{e}_y}$$

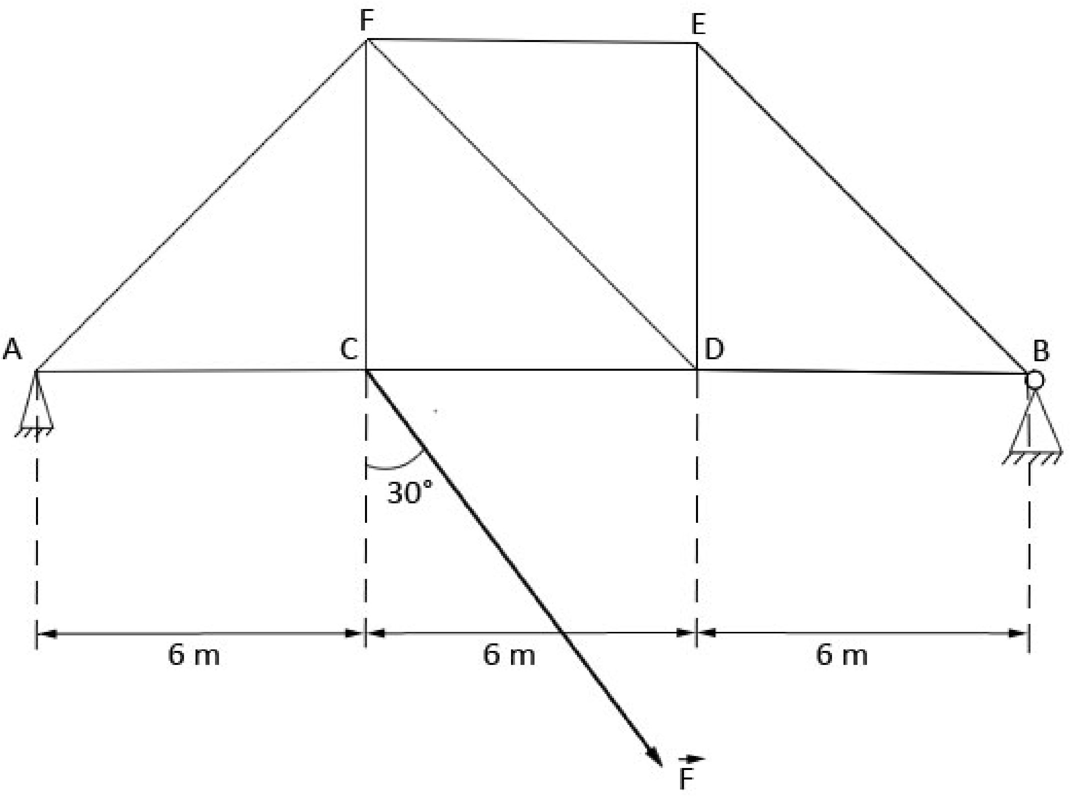
$$\boxed{N_c = N_c\vec{e}_y}$$

4) Si seul les personnes en O et B' portent la plaque alors $N_c = 0$

i.e $\boxed{\begin{aligned} \vec{N}_B &= \frac{\rho gace}{6b}(b+c)\vec{e}_y \\ \vec{N}_O &= \left[\frac{\rho gace}{2} - \frac{\rho gace}{6b}(b+c)\right]\vec{e}_y \end{aligned}}$

EXERCICE III :

Appui simple en A. F=18kN.



1. **Déterminons $\vec{N}_A$ et $\vec{N}_B$ dans** $\left(\frac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|}, \frac{\overrightarrow{CF}}{\|\overrightarrow{CF}\|}\right)\vec{e}_z = \frac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|} \wedge \frac{\overrightarrow{CF}}{\|\overrightarrow{CF}\|}$

$$[T_1]_A = \begin{Bmatrix} \vec{N}_A \\ \vec{0} \end{Bmatrix},\ [T_2]_B = \begin{Bmatrix} \vec{N}_B \\ \vec{0} \end{Bmatrix},\ [T_3]_C = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ avec } \vec{N}_A = N_A\vec{e}_y;\ \vec{N}_B = N_{B_x}\vec{e}_x + N_{B_y}\vec{e}_y$$

$$P.F.S. \Leftrightarrow\ [T_1]_A + [T_2]_A + [T_3]_A = [0]_A \quad (1)$$

$$[T_2]_A = \begin{cases} N_{B_x}\vec{e}_x + N_{B_y}\vec{e}_y \\ \vec{0} + \overrightarrow{AB} \wedge \left(N_{B_x}\vec{e}_x + N_{B_y}\vec{e}_y\right) = AB.N_{B_y}\vec{e}_z \end{cases}$$

$$[T_3]_A = \begin{cases} F.\sin 30°\,\vec{e}_x - F.\cos 30°\,\vec{e}_y \\ \vec{0} + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F} = -AC.F.\cos 30°\,\vec{e}_z \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{Bmatrix} N_A\vec{e}_y \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{B_x}\vec{e}_x + N_{B_y}\vec{e}_y \\ ABN_{B_y}\vec{e}_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F.\sin 30°\,\vec{e}_x - F.\cos 30°\,\vec{e}_y \\ -AC.F.\cos 30°\,\vec{e}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_A + N_{B_y} = F\cos 30° \quad (2) \\ N_{B_x} = -F.\sin 30° \ (3) \\ AB.N_{B_y} = AC.F.\cos 30° \ (4) \end{cases}$$

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

$$(4) \Rightarrow N_{B_y} = \frac{AC}{AB}.F.\cos 30° \quad (5)$$

$$(3)et\ (5) \Rightarrow \boxed{\vec{N}_B = -F.\sin 30°\,\vec{e}_x + \frac{AC}{AB}F.\cos 30°\,\vec{e}_y}$$

$$AN: \boxed{\vec{N}_B = (-9\vec{e}_x + 5{,}196\vec{e}_y)kN}$$

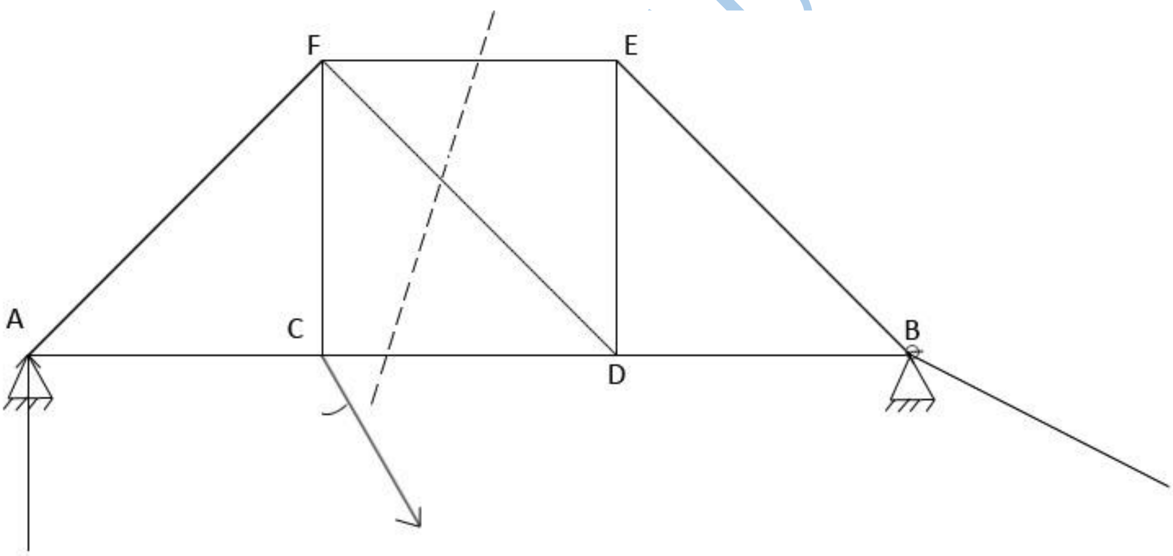
$$(2) \Rightarrow N_A = F.\cos 30° - N_{B_y} = F.\cos 30° - \frac{AC}{AB}F.\cos 30°$$

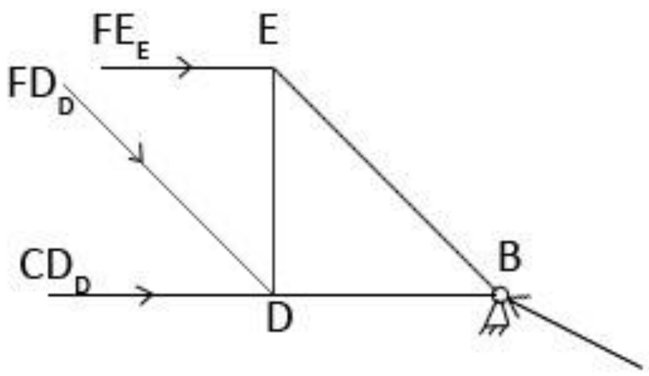
$$\boxed{\vec{N}_A = \left(1 - \frac{AC}{AB}\right)F\cos 30°\vec{e}_y}$$

$$AN: \boxed{\vec{N}_A = 10{,}39\ kN\ \vec{e}_y}$$

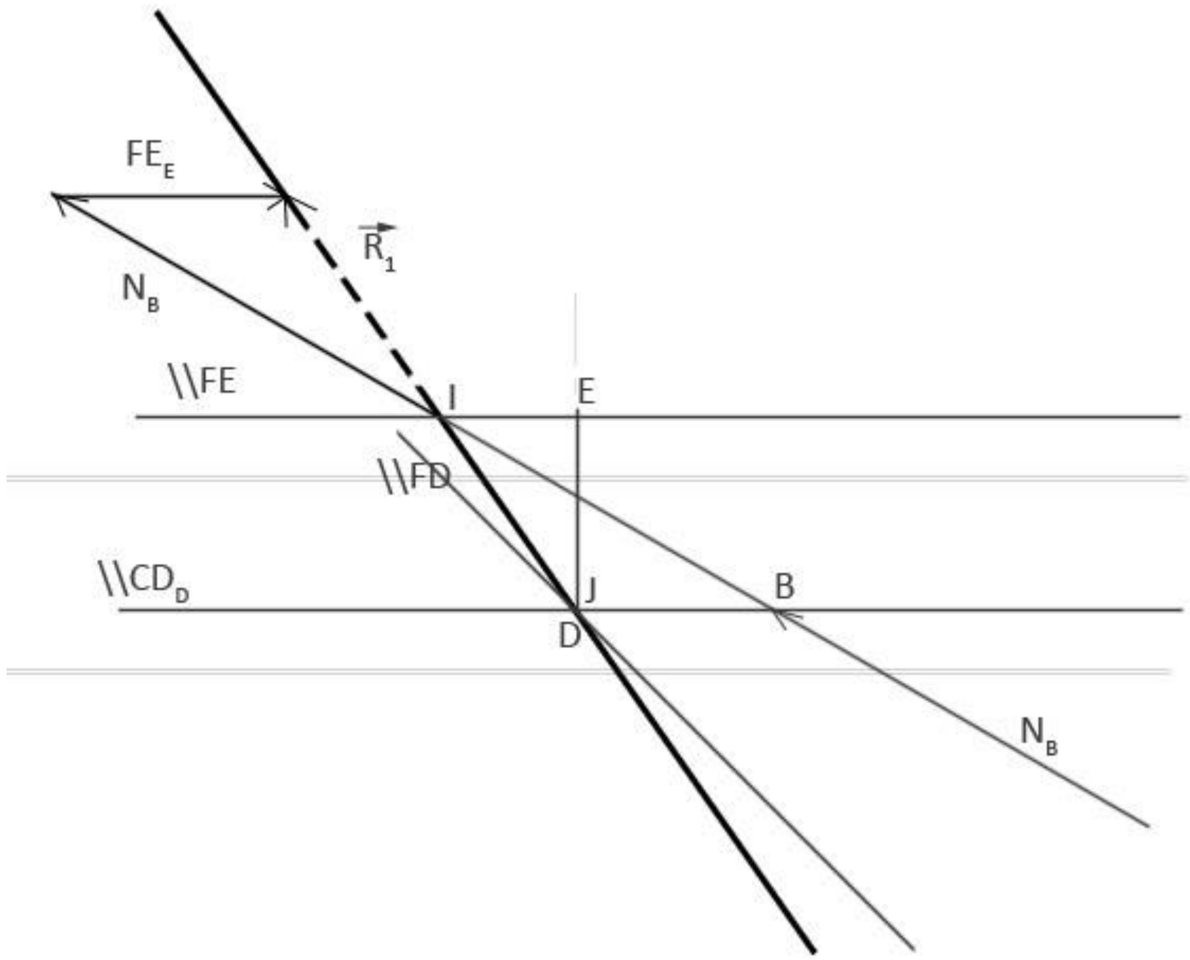
2. *Déterminons l'action dans la barre FE par la méthode de Ritter :*

Echelle : 1cm ↔ 1,5kN





D'après Culman $\vec{R}_1 = \vec{N}_B + \overrightarrow{FE_E}$

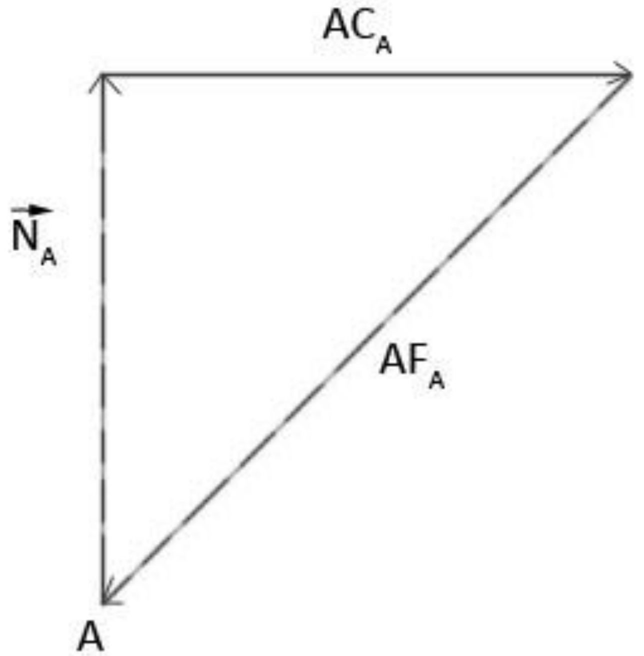


$\|FE_E\| = 5{,}55\ kN$ $\boxed{FE_E = 5{,}55\ kN}$

3. ***Déterminons l'action dans CD en utilisant la méthode des nœuds :***

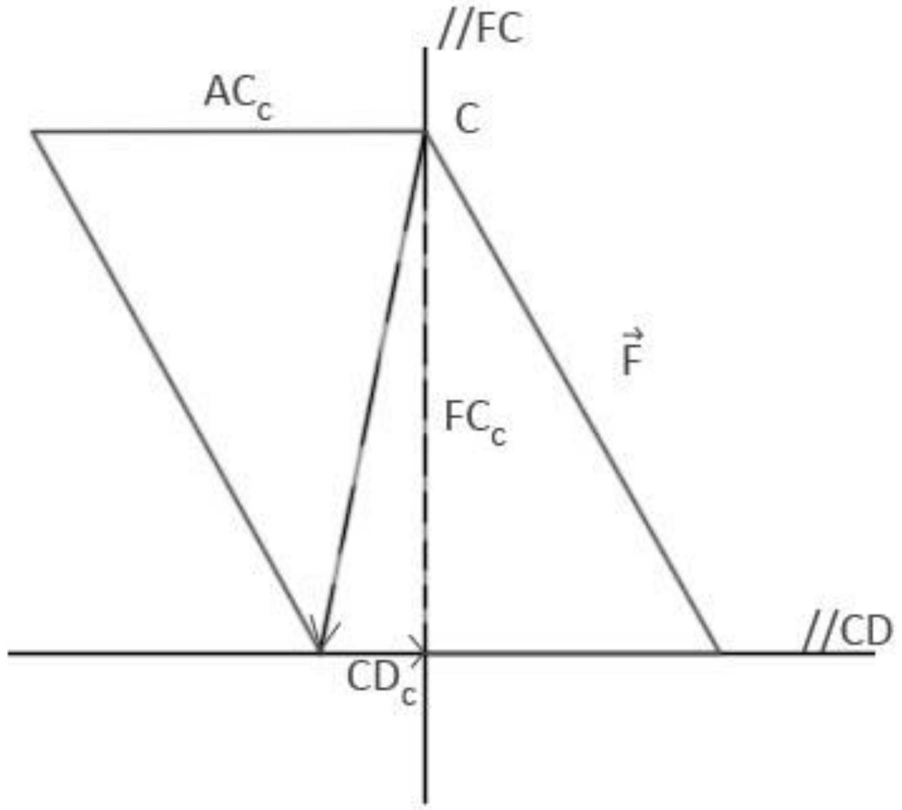
Echelle : 1cm ↔ 1,5 kN

Au Nœud A :

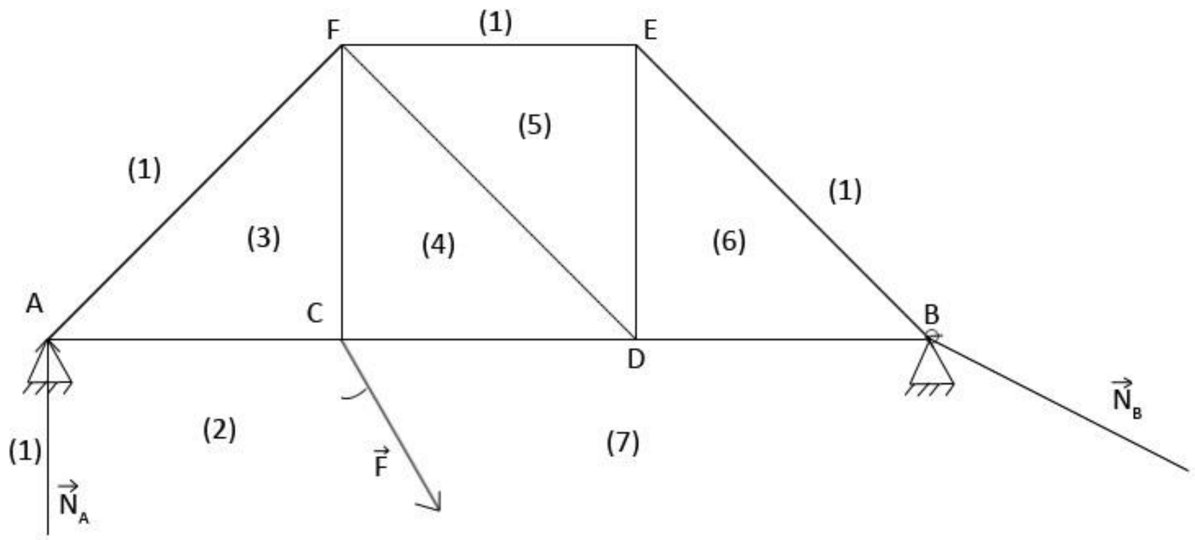


Au Nœud C : échelle 1cm ↔ 2kN

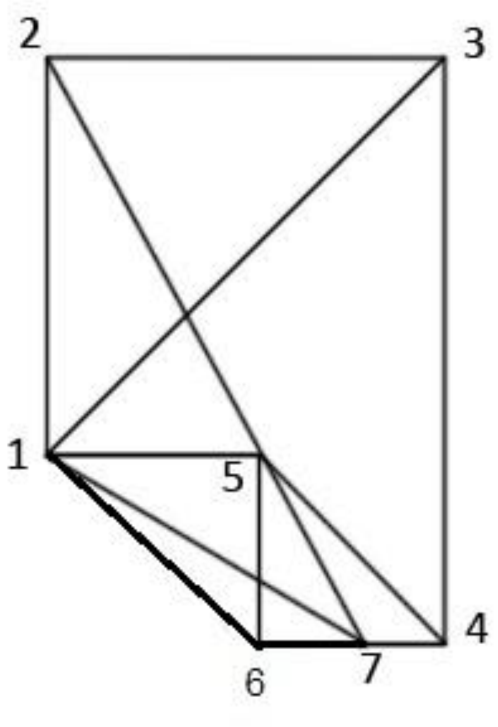
$$||CD_C|| = 2{,}8\,kN \boxed{CD_C = (2{,}8\,kN)\vec{e}_x}$$



Résolution du treillis par méthode de Cremona :



<u>Echelle</u> : 1 cm↔ 2kN



Le tableau de résultat se remplit par lecture simple du Cremona ci-dessus. L'échelle étant

1cm $\leftrightarrow$ 2 kN Exemple : $\left||FD|\right| = \left||\overrightarrow{4-5}|\right| = longueur\ de$ 4 à 5.

THERMODYNAMIQUE

« pour faire des grandes choses il ne faut pas etre un genie, il ne faut pas être au dessus des hommes, mais il faut saisi toute les opportunités mises à ta disposition »

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

SUJETS DE THERMODYNAMIQUE

CONTRÔLE CONTINU DE THERMODYNAMIQUE 2008 - 2009

EXERCICE I :

Une mole de gaz parfait diatomique ($C_p = \frac{7}{2}nR$; $C_v = \frac{5}{2}nR$) dans les conditions normales de pression ($P_o = 1\ atm, T_o = 273K$) et de pression subit une suite de transformations supposées réversibles :

- $A \rightarrow B$: chauffage à pression constante jusqu'à doubler de volume,
- $B \rightarrow C$: détente adiabatique jusqu'à tripler le volume initial.
- $C \rightarrow D$: Refroidissement à volume constant
- $D \rightarrow A$: Compression adiabatique jusqu'à retrouver l'état initial.

1) Donner en fonction de P_o et V_o coordonnées du point initial A, les coordonnées des points B,C,D dans l'espace (P,V)
2) Représenter sur in diagramme de Clapeyron, le cycle de transformations.
3) Ce cycle est t'il celui d'un moteur ou d'un réfrigérateur? Justifier très brièvement la réponse.
4) Calculer le rendement de cette machine.

EXERCICE II :

On introduit dans une enceinte rigide de volume V_o=2 litres, maintenue à la pression atmosphérique, thermostatée à 100°C :1g de glace (eau solide) à 0oC.
Données à P_o=1atm :chaleur massique de l'eau liquide C=4,2Kj/K/° ; chaleur latente de vaporisation de l'eau à 100°C Lv=2257 Kj/Kg ;chaleur latente de fusion de la glace à 0°C Lf=334 Kj/Kg ; volume massique du liquide Vf=1l/Kg.

1) Calculer l'état final
2) Calculer l'entropie créée.

PROBLEME :

Un cylindre rigide calorifugé est divisé en deux compartiments (1) et (2) contenants chacun un gaz parfait diatomique.la paroi séparatrice, calorifugée, initialement maintenue fixe, peut glisser sans frottements. Une résistance X traversant le compartiment (1) permet, pendant le transformation, d'y maintenir la température T_{11} constante.

A l'instant initial, on ferme l'interrupteur et on libère simultanément la paroi séparatrice. Un courant i traverse la résistance. L'équilibre final est atteint au bout d'un temps t.

1) Calculer la température de finale T_{22} dans le compartiment (2).
2)

a- La transformation est supposée réversible : calculer les coordonnées finales P_{22} P_{12} V_{22} V_{12}

b- La transformation est irréversible

b1/ montrer que le travail échangé par (1) est, en valeur absolue, égal à la chaleur reçue par le système (1)+(2)

b2/calculer les coordonnées thermodynamiques finales P_{22}, P_{12}, V_{22}, V_{12}

b3/calculer l'entropie créée pendant la transformation.

Données : $T_{11}=T_{21}=300K$; $n_1=0,3$ mol ; $n_2=0,05$ mol ; $V_{11}=1l$; $V_{21}=0,6l$; $X=2\Omega$; $i=5A$; $t=2S$; $R=8,3$ J/mol/K

EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE 2008-2009

EXERCICE I:

1.Écrire l'expression de la différentielle de l'énergie libre F en fonction des différentielles de l'entropie dS et du volume dV pour la transformation réversible isotherme d'un gaz où les seuls travaux sont ceux des forces de pressions et en déduire que $\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P$

2. En déduire l'expression de la fonction énergie libre en fonction des variables d'état V et T pour un gaz de Berthelot dont on rappelle l'équation d'état : $\left(P + \frac{a}{TV^2}\right)(V - b)$=RT

3.Écrire la différentielle de l'entropie de ce gaz pour une transformation isotherme. On rappelle ℓ= T$\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$

4. Retrouver à l'aide de la question 3 l'expression de la fonction énergie libre établie à la question 2

EXERCICE II:

1.Écrire en fonction des coefficients calorimétriques Cv, ℓ et des différentielles dT et dV, la différentielle de l'enthalpie. Les seules forces en présence sont celles de pression.

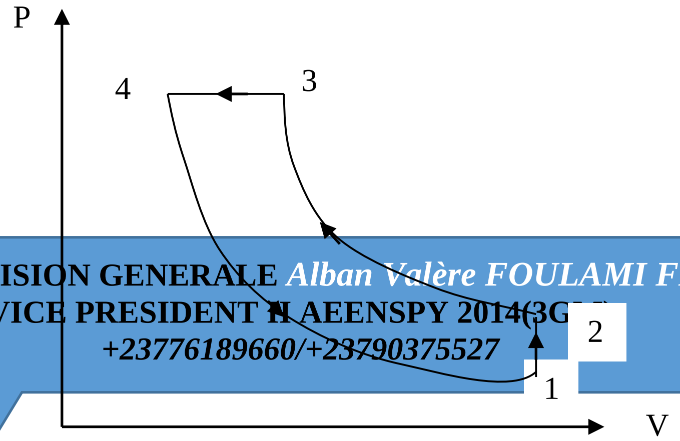
2. Calculer la variation de température qui accompagne la détente isenthalpique (détente de Joule-Kelvin ou Joule-Thomson) d'une mole de gaz d'équation d'état :

$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V)$=RT. On rappelle que ℓ= T$\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$. Commentez ce résultat.

A.N : a=0.14 SI ; Cv=29J/mole/K ; V1=50 litres ; V2=75litres

EXERCICE III:

On veut calculer la performance de la machine thermique dont le cycle idéal est décrit dans le diagramme ci-dessous :



Les transformations 2-3 et 4-1 sont des adiabatiques, 3-4une isobare et 1-2 une isochore.

-Quelle est la nature de cette machine ?

-Établir l'expression de la performance de la machine

-Calculer les chaleurs échangées sur les différents trajets en précisant si elles sont reçues ou cédées par le système

-En déduire la performance de la machine.

A.N ; γ=1,4 ; T1=300K ; T3=400K ;V1=5litres ;V4=3litres

EXERCICE IV:

Dans une enceinte calorifugée, on introduit : de la vapeur d'eau à 100°C, de l'eau liquide à 40°C et de la glace à -5°C.Les masses respectives sont les suivantes : m_{vap}=100g ; m_{eau}=200g ; m_{gla}=400g.

Quel est l'état final ?

Calculer la variation d'entropie du système.

Données : C_{eau}=4,18KJ /Kg/° ; C_{gla}=2,1KJ/kg/° ;L_{vap}=2250KJ/kg ; L_{fusion}=336KJ/Kg

EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE DE 2009-2010

EXERCICE I : Etude du cycle d'un moteur

Le cycle d'un moteur à gaz parfait diatomique comprend les transformations réversibles suivantes : une isochore AB, une adiabatique BC et une isotherme CA. Les pressions extrêmes du cycle sont P_o=8atm et P_B=4atm. La température du système au point C est 350K et son volume V_C=1litre.

1. Calculer les coordonnées thermodynamiques non indiquées pour les points A et B

2. Calculer les travaux échangés sur les trois trajets

3. Tracer le diagramme entropique du cycle de transformations et en déduire, graphiquement (de façon approximative), la chaleur échangée pendant le cycle puis celle prise à la source chaude

4. Déduire des questions 2 et 3 le rendement de la machine

EXERCICE II : Création d'entropie et travail maximal récupérable

1. Soit une transformation isotherme reliant deux états d'équilibre, montrer que :

$\frac{W_{irrev}-W_{rev}}{T}=\sigma$ où W_{irrev} et W_{rev} sont respectivement les travaux qu'il faudrait échanger de façon irréversible et de façon réversible pour passer d'un état à l'autre, T la température du système et σ l'entropie créée.

2. On voudrait faire passer une mole de gaz parfait de constante γ de l'état (To,Po) à l'état (Ts,Po) avec To>Ts. Ce gaz ne peut échanger qu'avec une source à la température Ts.

Proposer (justifier la proposition) une opération permettant de récupérer le travail maximal de refroidissement. Calculer ce travail.

3. Calculer la variation de l'énergie libre du système et conclure.

EXERCICE III: Calcul de l'état final

Il fait très chaud et vous avez soif ! 1litre d'eau à 10°C environ vous conviendrait parfaitement. A la boutique du coin vous pouvez acheter autant de glace (eau solide) que vous voulez, les robinets du campus vous offrent de l'eau liquide.

Vous disposez d’un récipient calorifugé de capacité calorifique Cr dans lequel vous comptez effectuer votre mélange et d’une balance.

1. Donnez les masses de glace et d’eau liquide utilisées.

2. Calculer l’entropie créée. Cette transformation est-elle réversible ?

Données :L_f(0°C)=333,4Kj/kg ; C_l=4,2Kj/kg/° ;C_r=0,5Kj/° ;V_l=1kg/litre. (Respectivement, à la pression atmosphérique : chaleur latente de la glace ; chaleur massique de l’eau liquide ; capacité calorifique du récipient et volume massique de l’eau liquide.)

NB: IL revient à vous d’estimer les températures initiales des différents éléments.

EXERCICE IV: Performance d’une machine thermique

Un cycle de Carnot est parcouru par de l’eau. A la source chaude (T_2), il y a condensation totale de la vapeur saturante. Le système a cédé de la chaleur Q_2. Le liquide non saturant obtenu subit une détente adiabatique puis se vaporise au contact de la source froide (T_1) où le système a pris de la chaleur Q_1. Une compression adiabatique de la vapeur saturante ramène le système à l’état initial.

1. Représenter le cycle de transformations dans un digramme (P,V) puis dans un diagramme (T,S) (y superposer la courbe de saturation)

2. Établir, pour ce cycle, le théorème de Clausius

3. Définir puis établir, en s’appuyant sur le premier et second principe de la thermodynamique, l’efficacité de cette machine qui peut faire office de réfrigérateur et de pompe à chaleur, en fonction des températures T_1 et de T_2

CONTRÔLE CONTINU DE THERMODYNAMIQUE 2009-2010

.

EXERCICE I: Détente isotherme d'un gaz de Van der Waals

On considère un gaz de Van der Waals dont on rappelle l'équation d'état :

$\left(P+\frac{A}{V^2}\right)(V-B)$=nRT

A et B constantes

Partie A

1. Calculer le travail et la chaleur échangés avec l'extérieur pendant une détente isotherme réversible de ce gaz et en déduire la variation de l'énergie interne

2. Calculer le travail et la chaleur échangés pendant la détente isotherme irréversible de ce même gaz.

A.N : Etat initial (T_1=300K ; V_1=2litres ; P_1=3atm)

Etat final (V_2=4litres)

$A=10^{-3}$USI ; $B=10^{-4}$ USI ; gaz monoatomique

On utilisera la loi $\ell = T\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$ permettant de calculer le coefficient calorimétrique de tout fluide

Partie B

1. Etablir l'expression de la différentielle de l'énergie interne d'un gaz de Van der Waals

2. En tenant compte de la définition des coefficients calorimétrique ℓ et h , déduire de **1.** la relation entre ℓ et h

3. Établir l'équation différentielle de l'adiabatique de ce gaz

4. En supposant l'attraction mutuelle des molécules négligeables, en déduire l'équation de l'adiabatique réversible de ce gaz en coordonnées (P,V)

EXERCICE II: Détente isobare d'un gaz parfait

Un récipient rigide, isolé thermiquement est percé d'un petit trou. Il contient 10 moles d'air (capacité thermique $Cp=29{,}12\ J.K^{-1}.mol^{-1}$) sous la pression atmosphérique Po et à la température extérieure (atmosphère) To= 398K. L'air dans le récipient est chauffé de façon réversible jusqu'à une température Tf = 310K ; au cours de cette opération une partie de l'air s'échappe dans l'atmosphère, permettant ainsi à la pression de rester constante. Calculer :

-La quantité de chaleur reçue dans le récipient

-Le nombre de moles d'air sorti de l'enceinte à la fin de l'opération

-Le travail échangé par le système pendant la détente

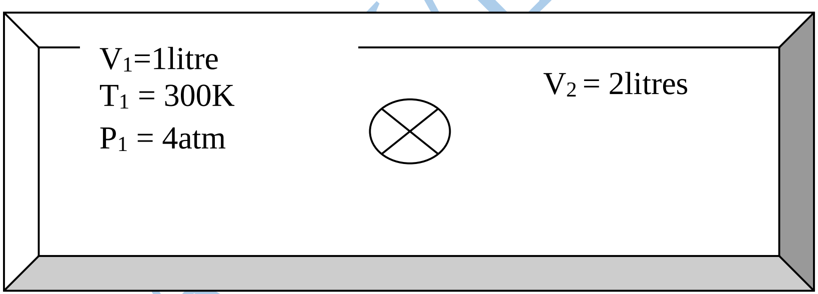
-La variation de l'énergie interne du système

-Déduire des résultats précédents, la chaleur cédée par le système à l'atmosphère

EXERCICE II: Etude du transvasement d'un gaz parfait

Un cylindre rigide et calorifugé comprend 2 compartiments séparés par une paroi thermiquement isolante immobile et sur laquelle est monté un robinet. Le compartiment 1 contient un gaz parfait monoatomique et le compartiment 2 est vide. A l'instant initial, le robinet est à peine entrouvert et le gaz passe lentement et partiellement dans le compartiment 2.

Etat initial



Calculer l'état final (V_1' ; T_1' ; P_1' ; V_2' ; T_2' ; P_2')

EXERCICE V:

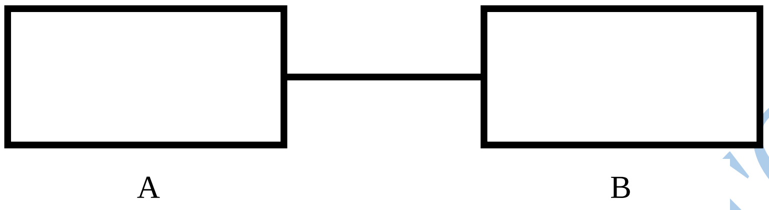
Deux cylindres rigides A et B de même volume Vo=1litre sont reliés par une valve ainsi que l'indique le schéma ci-contre. A contient un gaz parfait diatomique à la température To=300K et à la pression Po=1atm. B est initialement vide. Les cylindres sont thermiquement isolés de l'extérieur et isolés l'un de l'autre.

Aller à la table de matière

La valve est entrouverte (à peine ouverte).

On suppose que le gaz resté dans le cylindre A à la fin de la transformation, a subi une détente réversible .Calculer les paramètres T_A, T_B, P_A, P_B, n_A, n_B

Etat initial



CONTROLE CONTINU DE THERMODYNAMIQUE 2012-2013

Exercice 1 :

Un gaz réel a pour équation d'état :
PV=RTexp(1+$\frac{A}{V}$)

1) Ecrire la différentielle de l'énergie interne de ce gaz
2) Ecrire l'équation de l'adiabatique réversible de ce gaz.

On rappelle que $l = T\ \frac{\partial P}{\partial T})_V$

Exercice 2 :

L'étude expérimentale d'un gaz fournit les expressions des coefficients thermoélastiques suivantes :

$\alpha = \frac{a}{aT+bP}\ et\ \chi = \frac{1}{P} - \frac{b}{aT+bP}$

On rappelle que :$\alpha = \frac{1}{v}\frac{\partial V}{\partial T})_P$ et $\chi = -\frac{1}{v}\frac{\partial V}{\partial P})_T$

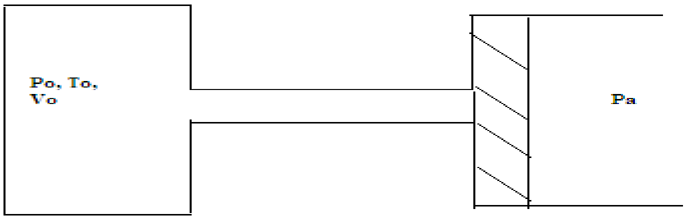
Déterminer l'équation d'état de ce gaz.

Exercice 3 :

On place une mole de gaz parfait dans les conditions $P_0 et\ T_0$ dans un récipient de volume V_0 adéquat. Ce récipient fermé par un robinet débouche sur un autre cylindre fermé par un piston sur lequel s'exerce la pression atmosphérique P_a. Le piston est plaqué contre le robinet à l'état initial. Les deux récipients en contact thermique et l'ensemble des récipients est thermiquement isolé de l'extérieur. On ouvre le robinet et le gaz se détend en refoulant le piston vers la droite jusqu'à ce que s'établisse l'équilibre.

Quel est le travail échangé avec l'extérieur ?.

Quelle est la variation d'énergie interne du gaz.



Exercice 4 :

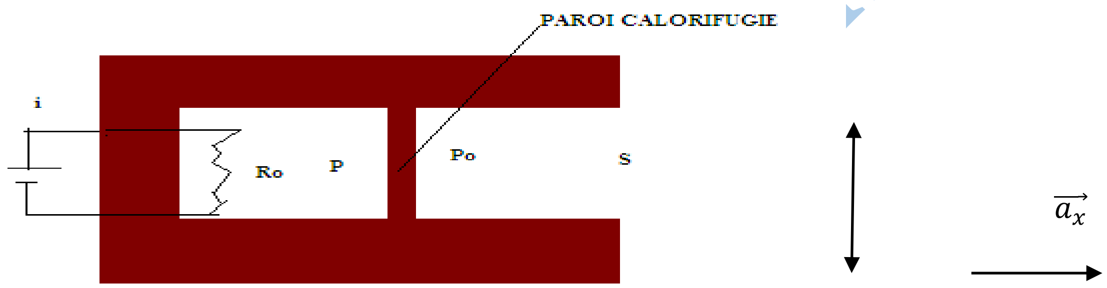
Une mole de gaz parfait de constante γ, pris à la température T_1, effectue de manière réversible le cycle marqué par les points Mi(Ti,Pi,Vi)

- M_1M_2 compression adiabatique
- M_2M_3échauffement isobare de V_2à V_3
- M_3M_1, refroidissement isochore

1. Représenter sur un diagramme de Clapeyron, le cycle de transformations
2. Calculer, en fonction de γ, R, x, T_L,les travaux et les chaleurs échangées pendant le cycle $x = \frac{V_1}{V_2}$
3. Dire sur quel trajet a lieu l'échange avec la source chaude
4. le rendement $\mathscr{R} = -\frac{W}{Q_2}$ où Q_2 est la chaleur échangée avec la source chaude
5. A.N. x=3 ; gaz parfait diatomique ; $T_1 = 320K; R = 8{,}31J/mole/K$

EXAMEN DE THERMODYNAQUE 2012-3013

1. partant de l'expression générale des différentielles dS de l'entropie et dU de l'énergie interne en coordonnées (dT, dV), démontrer la relation de Clapeyron $l = \frac{T\partial P}{\partial T})_{.V}$ valable pour toute substance.
2. Ecrire l'équation de l'adiabatique réversible (loi de Laplace) pour un gaz parfait dont la constante γ varie avec la température selon la loi $\gamma = \gamma_0 + aT$
3. Un gaz parfait de constante γ est contenu dans un cylindre, de section intérieure S, adiabate et fermé par un piston calorifugé pouvant glisser sans frottement. Une résistance R0 de capacité calorifique négligeable γ est introduite.



A l'instant initial on fait passer le courant i et le gaz se détend contre la pression P0 de l'atmosphère. L'opération est supposée quasi-statique (ceci suppose P=Pext=P0)
3.1.Ecrire la variation élémentaire dU de l'énergie interne

3.2.Calculer la vitesse $v = \frac{dx}{dt}$ et le déplacement du piston.

A.N.

4. un réservoir contentant 2m3 d'air sous haute pression, P1=30 bars, à $\theta_1 = 15$°C perd de l'air par une fissure due à l'usure. Lorsqu'on s'en aperçoit, la pression est tombée à 25 bars et la température dans le réservoir est celle de l'atmosphère $\theta_2 = 25°C$. La pression atmosphérique est $Pa = 1atm$. calculer:

- la chaleur échangée par l'air initialement contenu dans le réservoir

La variation d'entropie de l'air resté dans le réservoir

La variation de l'entropie de l'air qui s'est échappé

La variation d'entropieσ de l'univers

Quelle aurait été la valeur de σ si on n'avait pas stoppé le processus en cours ?

1. Un cycle Diesel est constitué de 2 adiabatiques, d'une isochore et d'une isobare. Tous les processus supposés réversibles, sont représentés dans le diagramme de Clapeyron ci-après :

Calculer l'efficacité de la machine selon la fonction qui pourrait lui être assignée

CORRECTIONS DE THERMODYNAMIQUE

CORRECTION DE L'EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE 2008-2009

EXERCICE I:

1. Expression de la différentielle de l'énergie en fonction de dS et dV

On a :

dF= dU - TdS

= δQ – δW - TdS

=CvdT +ldV – PdV – TdS

Or dT=0 car la transformation est isotherme

➔ dF = -TdS + (l-P)dV

Déduisons que $\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P$

On a : $\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -T\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T + (l - P)$

$= -T\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + (T\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P)$

$\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P$

2. Expression de F en fonction de V et T où $\left(P + \frac{a}{TV^2}\right)(V - b) = RT$

On a: dF = $\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV + \left.\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT$

= -PdV- $\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T - \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$ or dT=

$=\left(\frac{a}{TV^2}-\frac{RT}{V-b}\right)dV$

➔ F = $-\frac{a}{TV^2}$ – RTln(V-b) +Fo

3. Différentielle de l'entropie dS

On a: dS $=\frac{\delta Q}{T}$

$=\frac{CvdT+ldV}{T}$ or dT=0

➔ dS = $\frac{ldV}{T}=\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV$ or P = $\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{TV^2}$

➔ $\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V=\frac{RT}{V-b}+\frac{a}{T^2V^2}$

Donc dS= $\left(\frac{RT}{V-b}+\frac{a}{T^2V^2}\right)$ dV

4. Retrouvons alors F établie en 2

dF = -TdS + (l-P) dV

$= -\left(\frac{RT}{V-b}+\frac{a}{TV^2}\right)dV+T\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V-\left(\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{TV^2}\right)dV$

$=-\left(\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{TV^2}\right)dV$

➔ $F=-\frac{a}{TV}-RTln(V-b)+Fo$

EXERCICE II:

1.Écrivons la différentielle de l'enthalpie en fonction de Cv, l, dT et dV

H = U + PV

➔dH = dU + PdV + VdP

$=\delta Q+\delta W+PdV+VdP$

=CvdT + ldV – PdV + PdV + VdP

=CvdT + ldV + VdP

Or dP = $\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT+\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV$

➔dH = CvdT + ldV + V[$\frac{\partial P}{\partial T}\Big)_V dT + \frac{\partial P}{\partial V}\Big)_T dV$]

= [Cv+$V\frac{\partial P}{\partial T}\Big)_V$]$dT$ + [l+$V\frac{\partial P}{\partial V}\Big)_T$]$dV$

2. Calculons ΔT pour dH = 0

On donne : (P+$\frac{a}{V^2}$)$V = RT$ et [ℓ +V$\frac{\partial P}{\partial V}\Big)_T$]

Donc $P = \frac{RT}{V} - \frac{a}{V^2}$

$$\frac{\partial P}{\partial T}\Big)_V = \frac{R}{T}$$

$$\frac{\partial P}{\partial V}\Big)_T = -\frac{RT}{V^2} + \frac{2a}{V^3}$$

➔dH= (Cv+R)dT + ($\frac{RT}{V} + \frac{2a}{V^2} - \frac{RT}{V}$) dV

= (Cv+R)dT + $\frac{2a}{V^2}$ dV

Or dH=0 ➔(Cv+R)$dT = -\frac{2a}{V^2}$ dV

➔ dT = $-\frac{2a}{(Cv+R)V^2}$ dV

➔$\int_{T2}^{T1}$ dT =$\frac{2a}{(Cv+R)}\int_{V1}^{V2}\frac{-dV}{V^2}$

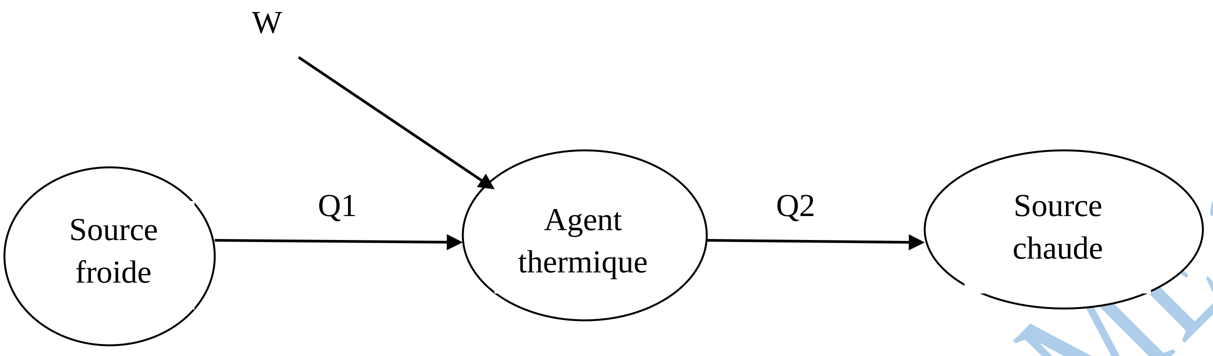
➔ (T2$-T1$) =$\frac{2a}{(Cv+R)}(\frac{1}{V2} - \frac{1}{V1})$

ΔT < 0 ➔ lors d'une détente isenthalpique, le gaz se refroidit

EXERCICE III:

1. Nature de la machine : machine frigorifique ou pompe à chaleur

- Expression de la performance de la machine considérée



- ε=$\frac{Objectif}{Moyens} = \frac{Q2}{-(Q1+Q2)}$

➢ Calcul des chaleurs échangées sur différents trajets en précisant si elles sont reçues ou cédées par le système

Q₂₃ = Q₄₁ = o car transformation adiabatique

- Calculons Q12 (V=cte)

$\delta Q12 = CvdT + \ell$dV or dV = 0

➔ $\delta Q12 = CvdT$ ➔ $\delta Q12 = Cv\Delta$T = Cv (T2-T1)

Or $T_2V_2^{\gamma-2} = T_3V_3^{\gamma-1}$ or $V_2 = V_1$ de plus,P_4V_4= nRT_4 et P_3V_3= nRT_3

➔$\frac{V4}{V3} = \frac{T4}{T3}$

Aussi, $T_4V_4^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}$➔$T_4 = T_1\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1}$

➔$V_3 = \frac{T_3 * V_4}{T_4}$

➔$V_3 = T_3 * V_4 \frac{1}{T_1\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1}}$

Donc $T_2 = T_3\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1}$

$$= \frac{T_3}{V_1^{\gamma-1}}\left(\frac{T_3 * V_4}{T_1\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1}}\right)^{\gamma-1}$$

➔ $Q_{12} = Cv\left[\frac{T_3}{V_1{}^{\gamma-1}}\left(\left(\frac{T_3 * V_4}{T_1\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1}}\right)\right) - T_1\right]$

δQ_{34} = CpdT + hdP or dP = 0

➔ δQ_{34} = CpdT

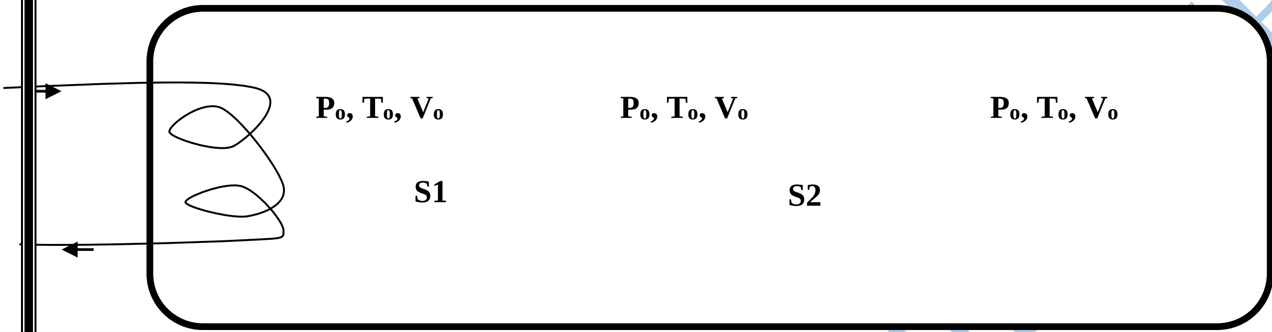
➔ δQ_{34} = CpΔT = Cp $(T_4 - T_3)$

= Cp $\left[T_1\left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1} - T_3\right]$

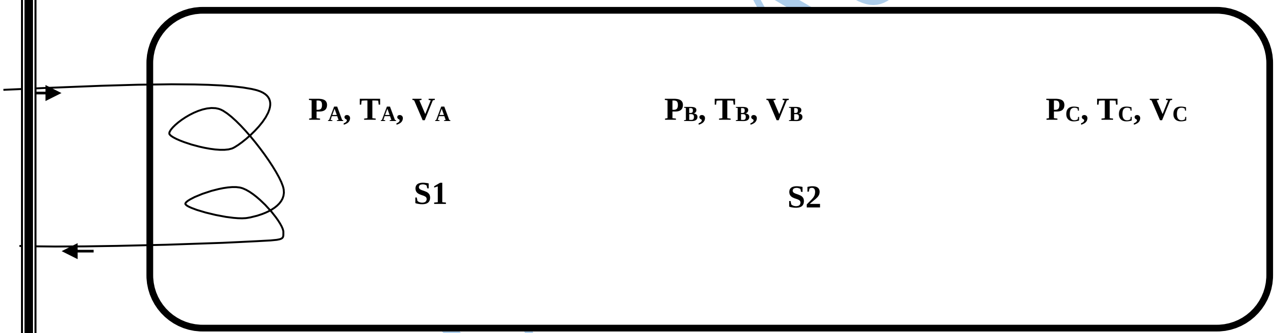
CORRECTION DE L'EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE A

EXERCICEI

État initial



État d'équilibre



On fait passer un courant i dans la résistance après l'instant t le système retrouve l'équilibre.

- Calcul des variables P, T, V de chaque compartiment
  Dans le compartiment 3 on a une adiabatique réversible donc

$P_C {V_C}^{\gamma} = P_o {V_o}^{\gamma} \gamma = 5/3$

$\rightarrow V_C = \left(\frac{P_o}{P_C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_o$

A.N : $V_C = \left(\frac{1}{1.5}\right)^{\frac{3}{5}} * 1 = 0{,}784l$

$T_C V_C{}^{\gamma-1} = T_o V_o{}^{\gamma-1} \rightarrow T_C = \left(\frac{V_o}{V_C}\right)^{\gamma-1} T_o$

$\rightarrow T_C = \frac{V_o{}^{\gamma-1}}{\left(\frac{P_o}{P_C}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} V_o{}^{\gamma-1}} T_o = \left(\frac{P_C}{P_o}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} T_o$

$\rightarrow T_C = \left(\frac{P_C}{P_o}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} T_o$

L'équilibre mécanique $\rightarrow P_B = P_C$

Entre les compartiments A et B il y a équilibre mécanique et thermique

$\rightarrow \begin{cases} P_A = P_B \\ T_A = T_B \end{cases} \rightarrow V_A = V_B$

De plus, $V_A + V_B + V_C = 3V_o$

$\rightarrow 2V_A = 3V_o - V_C$

$\rightarrow V_A = (3/2)\, V_o - \left(\frac{1}{2}\right) V_C$

$\rightarrow V_A = (3/2) V_o - \left(\frac{P_o}{P_C}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{V_o}{2}\right)$

$\rightarrow V_A = V_B = \frac{V_o}{2}\left[3 - \left(\frac{P_o}{P_C}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]$

$P_A V_A = nRT_A = \frac{P_o * V_o}{T_o} T_A$

$\rightarrow T_A = \frac{P_A V_A}{P_o V_o} T_o = \left(\frac{P_C}{P_o}\right) \frac{\frac{V_o}{2}\left[3 - \left(\frac{P_o}{P_C}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]}{V_o} T_o$

$\rightarrow T_A = T_B = \left(\frac{P_C}{2P_o}\right)\left[3 - \left(\frac{P_o}{P_C}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right] T_o$

A.N: $P_A = 1{,}5 atm;\ V_A = 1{,}11 l;\ T_A = 498{,}5 K$

$P_B = 1{,}5 atm\ ;\ V_B = 1{,}11 l\ ;\ T_B = 498{,}5 K$

$P_C = 1{,}5 atm;\ V_C = 0{,}72 l;\ T_C = 352{,}82 K$

CORRECTION DE L'EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE 2011-2012

EXERCICE I :

Calcul de l'entropie créée :

$dS = \frac{\delta Q}{T}$

$dS_{univers}$ = dSsource + dSgaz

dSsource = $\frac{\delta Qsource}{T0}$

dSgaz = $\frac{CvdT+ldv}{T}$

= $\frac{ldv}{T}$ car dT=0

= $\frac{pdv}{T}$ car gaz parfait

= $\frac{nR}{v}$dv = $\frac{PoVo}{T0} \cdot \frac{dv}{v}$

ΔSunivers = $\frac{Qsource}{T0} + \frac{PoVo}{T0} \cdot ln\left(\frac{V1}{V0}\right)$

ΔSunivers = $\frac{-mLv}{T0} + \frac{PoVo}{T0} \cdot ln\left(\frac{V1}{V0}\right)$

$\boxed{\Delta S_{univers} = 0{,}136 \text{ J/K}}$

EXERCICE II :

- ***Calcul de W***

W = $|Q_{chaude}| - Q_{froide}$ = 2500-1750 = 750 j

$\boxed{W = 750 \text{ J}}$

- ***Calcul de l'éfficacité***

$\xi p = |Q_{chaude}|/W$ = 2500/750 = 3,33

$\boxed{\xi p = 3{,}33}$

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

PROBLEME :

1) Travail échangé

diatomique ϒ = 7/5 on prend V2 = 18 litres

$W_{1\text{-}m} = \mathcal{A}$(A1-Am-Vm-V1)

$= -(V_1-V_m)(P_1+P_m)/2$

$= -4 \times 10^{-3} \times 1{,}013 \times 10^5 \times 4$

$= -1620{,}8$j

$\delta W_{m\text{-}2} = -pdv = \frac{-nRTm}{V} \cdot dv$

$= -PmVm \cdot \left(\frac{dv}{v}\right)$

$W_{m\text{-}2} = -PmVm \cdot ln\left(\frac{V2}{Vm}\right) = -36 \times 1{,}013 \times 10^2 \times ln\left(\frac{18}{6}\right)$

$W_{m\text{-}2} = -4006{,}419$ j

$W_{1\text{-}2} = W_{1\text{-}m} + W_{m\text{-}2}$

$= -1620{,}8$ j + $-4006{,}419$ j

$\boxed{W1\text{-}2 = -5627{,}219 \text{ j}}$

2) Déduction de la chaleur échangée:

$\Delta u = Cv\Delta T = W_{1\text{-}2} + Q$

$Q = Cv\Delta T - W_{1\text{-}2}$

$= \frac{5}{2}nR\Delta T - W_{1\text{-}2}$

$= \frac{5}{2}(PmVm - P1V1) - W_{1\text{-}2}$

$= \frac{5}{2}(6 \times 6 - 2 \times 2) \times 1{,}013 \times 10^5 \times 10^{-3} + 5627{,}219$

$\boxed{Q = 13731{,}219 \text{ j}}$

3) Variation d'entropie $\Delta S_{1\text{-}2}$ du gaz

$dS = dS_{1\text{-}m} + dS_{m\text{-}2}$

$= \frac{\delta Q1-m}{T} + \frac{\delta Qm-2}{Tm}$

$= \frac{\delta Q1-m}{T} + \frac{\delta Qm-2}{Tm}$

$= \frac{CvdT1+PdV1-m}{T1} + \frac{CvdTm-2+Pdv}{T}$

(or $dT_{m\text{-}2}$=0)

$= Cv\frac{dT1}{T1} + nR\frac{dV1-m}{V1-m} + nR\frac{dVm-2}{Vm-2}$

$= nR\left(\frac{5}{2}\frac{dT1}{T1} + \frac{dV1-m}{V1-m} + \frac{dVm-2}{Vm-2}\right)$

$= \frac{P1V1}{T1}\left(\frac{5}{2}\frac{dT1}{T1} + \frac{dV1-m}{V1-m} + \frac{dVm-2}{Vm-2}\right)$

ΔS1-2 = $\frac{P1V1}{T1}\left(\frac{5}{2}ln\left(\frac{Tm}{T1}\right) + ln\left(\frac{Vm}{V1}\right) + ln\left(\frac{V2}{Vm}\right)\right)$

$\boxed{\Delta S1\text{-}2 = 10{,}386 j \cdot K^{-1}}$

4) expression de T en fonction de V

PV = nRT = $\frac{P1V1}{T1}T$

d'où T = $\frac{T1}{P1V1}PV$

or P = aV + b ; en faisant P – P1 = $\left(\frac{Pm-P1}{Vm-V1}\right)(V - V1)$

$$P = \left(\frac{Pm-P1}{Vm-V1}\right)V - \underbrace{\left(\frac{Pm-P1}{Vm-V1}\right)V1 + P1}_{0}$$

on trouve b = 0

Soit P = $\left(\frac{Pm-P1}{Vm-V1}\right)V = 1{,}013 \times 10^8 V$

$\boxed{T = 7{,}5 \times 10^7 V^2}$

5) expression de T en fonction de S sur A1-Am

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{CvdT + ldV}{T} = \frac{CvdT + pdV}{T} = nR\left(\frac{5}{2}\frac{dT}{T} + \frac{dV}{V}\right)$$

S – S1 = $nR\left(\frac{5}{2}ln\left(\frac{T}{T1}\right) + ln\left(\frac{V}{V1}\right)\right)$

or T =$7{,}5 \times 10^7 V^2$ ie V = $\sqrt{\frac{T}{7{,}5\times10^7}}$ et S1 = $0J.K^{-1}$

S = $\frac{P1V1}{T1}\left(\frac{5}{2}ln\left(\frac{T}{T1}\right) + \frac{1}{2}ln\left(\frac{T}{7{,}5\times10^7}\right) - ln(V1)\right)$

S = $\frac{P1V1}{T1}\left(3ln(T) - \frac{5}{2}ln(T1) - \frac{1}{2}ln(7{,}5\times10^7) - ln(V1)\right)$

Soit alors T = $e^{\frac{1}{3}\left(\frac{T1}{P1V1}S + \frac{5}{2}ln(T1) + \frac{1}{2}ln(7{,}5\times10^7) + ln(V1)\right)}$

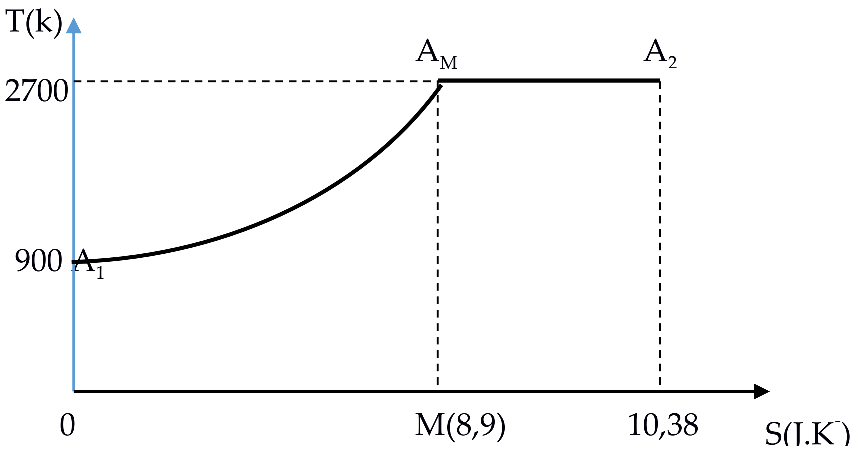
$\boxed{T = e^{\left(\frac{S}{4} + 5{,}703782475\right)}}$

6) diagramme entropique T= f(S)

Sur A1-Am, on a T = $e^{\left(\frac{S}{4} + 5{,}703782475\right)}$

Sur Am-A2, T = cte (isotherme) : T = T(Am) = Tm =$7{,}5 \times 10^7 {V_m}^2 = 7{,}5 \times 10^7 \times 36 \times 10^{-6} = 2700K$

D'où le graphe suivant :


T(k)
2700
900
A_1
A_M
A_2
0
M(8,9)
10,38
S(J.K⁻)

CORRECTION DU CONTROLE CONTINU DE THEMODYNAMIQUE 2012-2013

Exercice I

1) Différentielle de l'énergie interne du gaz

On a dU = $\delta Q + \delta W$

Or $\delta W = -Pdv \;\; et \;\; \delta Q = C_v dT + ldv$

On calcule l par la formule $l = T\frac{\partial P}{\partial T})_v$; d'après l'énoncé on a $P = \frac{R}{V}\exp\left(1 + \frac{A}{V}\right)T$

On trouve donc $l = \frac{R}{V}\exp\left(1 + \frac{A}{V}\right)T$ = P

D'où dU = $C_v dT$

2) Equation de l'adiabatique réversible du gaz parfait

On a $\delta Q = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_v dT = -ldv \\ C_p dT = -hdp \end{cases} \Rightarrow \frac{C_p}{C_v} = \frac{h}{l}\frac{dp}{dv}$

Or on a d'après le cours $l = h\frac{\partial P}{\partial v})_T$

Donc $\frac{h}{l} = \frac{1}{\frac{\partial P}{\partial v})_T}$. Avec l'expression de P on obtient $\frac{h}{l} = -\frac{V^2}{P(A+V)}$

Il en découle $\frac{dP}{P}$ = -$\gamma\frac{A+V}{V^2}dV$ d'où l'équation de l'adiabatique reversible de ce gaz parfait

$\frac{PV^\gamma}{\exp(\frac{\gamma}{V})} = cste$. On constate bien que lorsque le volume tend vers l'infini on retrouve bien l'équation de l'adiabatique réversible d'un gaz parfait.

Exercice II

On a $\alpha = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T})_P$. a pression constante on peut écrire $\frac{dV}{VdT} = \frac{a}{aT+bP}$ donc $\frac{dV}{V} = \frac{adT}{aT+bP}$

D'où $\ln(v) = \ln(aT + bP) + C(p)$ *ce qui est équivalent à* $V = K(P)(aT + bP)$

De même on a $\chi = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P})_T = \frac{1}{P} - \frac{b}{aT+bP}$ et en utilisant l'expression de V ci-dessus, on peut écrire

$$\frac{\partial V}{\partial P})_T = \frac{\partial K(P)}{\partial P})_T (aT + bP) + bK(P) = \frac{\partial K(P)}{\partial P})_T \frac{V}{K(P)} + bK(P)$$

On obtient donc $-\frac{1}{P} = \frac{\partial K(P)}{\partial P})_T \frac{1}{K(P)}$; à température constante, on peut écrire

$-\frac{1}{P} = \frac{dK(P)}{dP}\frac{1}{dP}$ Ce qui conduit à $K(P) = \frac{A}{P}. A\ étant\ un\ réel$. finalement l'équation du gaz parfait peut s'écrire $\ln(V)) = \ln(aT + bP) + \frac{A}{P}; A\ étant\ un\ réel$

Exercice III

Etat initial : les variables d'état dans l'état initial sont Po , To, Vo , no

Etat final : les variables d'état sont :

- Dans le compartiment 1 P1, T1, Vo, n1
- Dans le compartiment 2 P1, T1, V2, n2

En effet à l'équilibre il est évident de voir que la pression dans les deux compartiments est la même. De plus les deux compartiments ne sont pas isolés thermiquement donc à l'équilibre on a également la même température dans les deux compartiments.

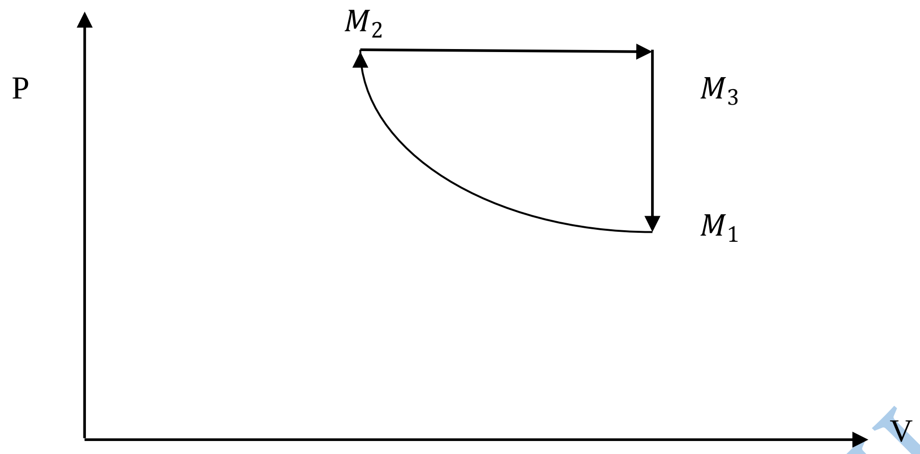
Avant de commencer, bien noter que la transformation est irréversible. En effet la détente sera brutale. Essayez pour voir.

On a un cinq inconnues. On cherchera donc à établir cinq équations

- Conservation de la quantité de matière : $n_o = n_1 + n_2$
- Equation des gaz parfaits dans le récipient 1 à l'équilibre : $P_1V_o = n_1R\,T_1$
- Equation des gaz parfaits dans le récipient 2 à l'équilibre $P_1V_2 = n_2R\,T_1$
- Equilibre mécanique $P_1 = P_a$
- La transformation étant adiabatique on Q = 0 et donc $\Delta U = W$
  Avec $W = -P_a(V_o + V_2 - V_o)$ et $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = n_1C_v(T_1 - T_o) + n_2C_v(T_1 - T_o) = n_OC_v(T_1 - T_o)$.
  En résolvant le système des cinq équations à cinq inconnues ci-dessus on trouve
  $T_1 = \frac{\frac{P_aV_o}{n_OC_v} + T_o}{1 + \frac{R}{C_v}}$; La transformation étant adiabatique $\Delta U = W = n_OC_v(T_1 - T_o)$

Exercice IV

1) Représentation du cycle sur le diagramme de Clapeyron



2) Travaux et chaleurs échangés pendant le cycle

- Sur le trajet M_1M_2

La compression étant adiabatique, on a $Q_1 = 0$;

On a $\Delta U = Q + W$ $donc$ $W = \Delta U = c_v(T_2 - T_1)$ mais l'équation de l'adiabatique reversible permet d'écrire $T_1{V_1}^{\gamma} = T_2{V_2}^{\gamma} \Rightarrow T_2 = T_1x^{\gamma}$ donc $W_1 = c_vT_1(x^{\gamma-1} - 1)$ avec $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$

- Sur le trajet M_2M_3

On a P = cste $\Rightarrow$ $Q_2 = c_p(T_3 - T_2)$ or on a $P_3V_3 = R\,T_3 \Rightarrow P_2V_1 = R\,T_3$

$\Rightarrow P_2V_2 = R\,T_2 \Rightarrow T_3 = xT_2$

Donc $Q_2 = c_pT_1x^{\gamma-1}(x-1)$ avec $c_p = \frac{R\gamma}{\gamma-1}$

On a $W_2 = \Delta U_2 - Q_2 = c_v(T_3 - T_2) - c_p(T_3 - T_2) = (c_v - c_p)(T_3 - T_2) = -RT_1x^{\gamma-1}(x-1)$

- Sur le trajet M_3M_1
  La transformation étant isochore, on a dv = 0 $\Rightarrow W_3 = 0$ et ensuite on a
  $Q = \Delta U = c_v(T_1 - T_3) = -c_vT_1(x^{\gamma} - 1)$

3) l'échange avec la source chaude a lieu sur le trajet M_2M_3 (en effet l'énoncé dit qu'il s'agit d'un échauffement ! qu'est ce qu'on pouvait attendre de mieux

4) Calcul du rendement
   On a $R = \frac{W}{Q_2}$ or d'après le premier principe de la thermodynamique on $W = -Q_{cycle} = -(Q_1 + Q_2 + Q_3) = -(Q_2 + Q_3)$ donc R = 1 + $\frac{Q_3}{Q_2}$ or $\frac{Q_3}{Q_2} = \frac{-c_vT_1(x^{\gamma}-1)}{c_pT_1x^{\gamma-1}(x-1)} = -\frac{x^{\gamma}-1}{\gamma x^{\gamma-1}(x-1)}$

Donc $R = \ 1 - \frac{x^{\gamma} - 1}{\gamma x^{\gamma-1}(x-1)}$

CORRECTION D'EXAMEN DE THERMODYNAMIQUE 2012-2013

Exercice I :

Partant de l'exception générale des différentielles dS de l'entropie et dU de l'énergie interne en coordonnées (dT, dV), démontrons la relation de Clapeyron :

$I = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$, Valable pour toute substance.

Exercice II :

Ecrivons l'équation de l'adiabatique réversible pour un gaz parfait dont la constante varie avec la température selon la loi : $\gamma = \gamma_0 + \alpha T$

On sait que : $\delta Q = C_V dT + PdV$

Or transformation adiabatique $\Rightarrow \delta Q = \frac{nR}{\gamma - 1} dT + \frac{nRT}{V} dV = 0$

$$\Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{1}{(\gamma - 1)T} dT = -\frac{1}{(\gamma_0 - 1 + \alpha T)T} dT = \frac{1}{\gamma_0 - 1}\left(\frac{\alpha}{\gamma_0 - 1 + \alpha T} - \frac{1}{T}\right) dT$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{V}{C}\right) = \frac{1}{\gamma_0 - 1}(\ln(\gamma_0 - 1 + \alpha T) - \ln(T)) = \frac{1}{\gamma_0 - 1}\ln\left(\frac{\gamma_0 - 1 + \alpha T}{T}\right)$$

$$\Rightarrow V = C\left(\frac{\gamma_0 - 1 + \alpha T}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma_0 - 1}}$$

$$\Rightarrow V^{\gamma_0 - 1} = C\left(\frac{\gamma_0 - 1 + \alpha T}{T}\right), \text{où } C = C^{te}$$

Exercice III :

Ecrivons la variation élémentaire de l'énergie interne :

$$dU = \delta W + \delta Q \; avec \; \delta Q = \delta W_e = R_0 i^2 dt$$

Et $\delta W = -P_{ext} dV = -P_0 dV = -P_0 S dx$

$$D'où \; dU = -P_0 S dx + R_0 i^2 dt \; (1)$$

Calculons la vitesse $V = \frac{dx}{dt}$ de deplacement du piston :

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

$(1) \Longrightarrow dU = -P_0 v dt + R_0 i^2 dt = C_p dT = \frac{\gamma n R}{\gamma - 1} dT = \frac{\gamma}{\gamma-1} d(P_0 V) = \frac{\gamma P_0 S}{\gamma - 1} dx = \frac{\gamma P_0 S v}{\gamma - 1} dt$

Car transformation quasi-statique : $P = P_0 = C^{te}$

Ainsi, $\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} + 1\right) P_0 S v = R_0 i^2 D'$ où $v = \frac{\gamma-1}{2\gamma-1} \frac{R_0 i^2}{P_0 S}$

$$AN : v = 1{,}974.10^{-3} m/s$$

Exercice IV :

Calculons la chaleur échangée par l'air initialement contenu dans le réservoir :

Déterminons les quantités de matières n, n_1 *et* n_2 *ainsi que le volume* V_2 qui se sont échappé du réservoir.

Etat initial : $P_1 V_1 = n R T_1 \Longrightarrow n = \frac{P_1 V_1}{R T_1}$;

Etat final, $P_2 V_1 = n_1 R T_2 \Longrightarrow n_1 = \frac{P_2 V_1}{R T_2}$;

$$n_2 = n - n_1 = \frac{P_1 V_1}{R T_1} - \frac{P_2 V_1}{R T_2} \text{ ;}$$

$$P_a V_2 = n_2 R T_2 \Longrightarrow V_2 = \frac{n_2 R T_2}{P_a}$$

Variation de l'énergie interne :

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = C_V (T_2 - T_1) + C_P (T_2 - T_1) = (C_V + C_P)(T_2 - T_1) = \frac{R}{\gamma - 1}(n_1 + \gamma n_2)(T_2 - T_1)$$

$= W + Q \Longrightarrow Q = \frac{R}{\gamma-1}(n_1 + \gamma n_2)(T_2 - T_1) - W$ $or, W = -P_a(V_1 + V_2 - V_1) = -P_a V_2$

D'où $Q = \frac{R}{\gamma-1}(n_1 + \gamma n_2)(T_2 - T_1) + P_a V_2$

Calculons la variation d'entropie de l'air reste dans le réservoir :

On a $dS_1 = \frac{\delta Q_1}{T} = C_V \frac{dT}{T}$ car $V = C^{te}$ Donc $\Delta S_1 = \frac{n_1 R}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

Calculons la variation d'entropie de l'air qui s'est échappé :

$$dS_2 = \frac{\delta Q_2}{T} = C_P \frac{dT}{T} \quad car\ P = C^{te}$$

$$\Delta S_2 = \gamma \frac{n_2 R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Variation de l'entropie de l'univers :

$$\sigma = \Delta S_2 + \Delta S_1$$

Exercice V :

Calculons l'efficacité de la machine selon la fonction qui lui pourrait être assignée.

Pour cela, déterminons les chaleurs reçues de la source froide et cédée à la source chaude :

Sur les adiabatiques BC et DA, Q = 0 ; donc les chaleurs ne proviennent que des transformations isochore AB et isobare CD.

Isobare CD :

On a : $Q_2 = C_P(T_D - T_C) = \frac{\gamma}{\gamma-1}\,(P_2V_D - P_2V_C)$

Or transformation adiabatique sur BC $\Longrightarrow P_2V_C^{\gamma} = P_1V_0^{\gamma}$

$$\Longrightarrow V_C = V_0\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_0\left(\frac{2}{3,25}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

De même, transformation adiabatique sur DA $\Longrightarrow V_D = V_0\left(\frac{1}{3,25}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

D'où $Q_2 = -\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(2^{\frac{1}{\gamma}} - 1\right)\left(\frac{1}{3,25}\right)^{\frac{1}{\gamma}-1} P_0V_0 = \; -2,0675P_0V_0 < 0\;(Chaleur\ cedée)$

Isochore AB :

On a : $Q_1 = C_V(T_B - T_A) = \frac{1}{\gamma-1}\,(P_1V_0 - P_0V_0) = \frac{P_0V_0}{\gamma-1} = -0,566P_0V_0 < 0$

D'après le 1er principe de thermodynamique, $W_{cycle} = -Q_{cycle} = 0,566P_0V_0 > 0$

- Si on a une machine frigorifique, l'efficacité est :

$$\mathcal{E}_{ref} = \frac{Q_1}{W_{cycle}} = \frac{1,5015}{0,566} = 2,653$$

- Si on a plutôt une pompe à chaleur, l'efficacité est :

$$\mathcal{E}_{pompe} = \frac{|Q_2|}{W_{cycle}} = \frac{2{,}0675}{0{,}566} = 3{,}653$$

CORRECTION FICHE DE TD I DE THERMODYNAMIQUE

EXERCICE I :

$f(P,V,T) = PV - nRT = 0$

1) Dérivées partielles

a) $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ $P = \frac{nR}{v}T$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial\left(\frac{nR}{V}T\right)}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V}$$

b) $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$ $T = \frac{PV}{nR}$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{V}{nR}$$

c) $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ $P = \frac{nRT}{v}$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{nRT}{V^2} = -\frac{P}{V}$$

d) $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ $V = \frac{nRT}{P}$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{nRT}{P^2} = -\frac{V}{P}$$

e) $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{P}$

f) $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \frac{P}{nR}$

2) Comparaison des expressions :

❖

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{nR}{V} \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{V}{nR}$$

Donc $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V}$

❖ $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{P}{V}$ et $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{V}{P}$

Donc $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}$

❖ $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{nR}{P} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \frac{P}{nR}$

Donc $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P}$

Ainsi $\left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)_Z = \frac{1}{\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)_Z}$

3) Calculons : $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right) * \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right) * \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)$

On a $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right) * \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right) * \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right) = \frac{V}{nR} \times \frac{P}{nR} \times -\frac{V}{P}$

$$= -\frac{V^2}{(nR)^2}$$

$$= -\left(\frac{V}{nR}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) * \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right) * \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right) = \frac{nR}{V} \times \frac{P}{nR} \times -\frac{V}{P} = -1$$

4) Comparaisons:

a) $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right) * \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right) = -\left(-\frac{\partial P}{\partial T}\right)$

b) $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right) * \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)$

c) $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right) * \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right) = -\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)$

OPTIQUE GEOMETRIQUE

« qui veut aller loin menage sa monture »

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

SUJETS D'OPTIQUE GEOMETRIQUE

EXAMEN D'OPTIQUE GEOMETRIQUE 2005- 2006

EXERCICE I :

Soit une lentille épaisse concave d'indice dans l'air. Les rayons de courbures de ses deux faces $\overline{S_1C_1} = \overline{S_2C_2} = 0$ et son épaisseur est $\overline{S_1C_1} = 12\ cm$.

Tous les schémas seront faits sur papier millimétré, l'échelle ¼ selon l'axe de la lentille l'échelle 2 pour la hauteur des objets et images.

A- 1) Déterminer la vergence de chacun des dioptres. Déterminer les positions de leu foyers $F_1, F'_1, F_2\ et\ F'_2$ puis des foyers F et F' de la lentille
2) Où se trouve l'image d'un objet en F_1 ?
3) On place devant la lentille, 8cm devant S_1un objet AB de hauteur 0,5cm. Déterminer la position de son image $A'B'$en construisant géométriquement les images successives de ABà travers chacun des dioptres.

B- 1) Déterminer la matrice de transfert de la lentille, en fonction des vergences V_1et V_2des dioptres, de n et de $\overline{S_1S_2}$. calculer numériquement ses coefficients.
2) En déduire la vergence de la lentille et ses distances focales objet et image.
3) A partir de la matrice de transfert, déterminer la position et la grandeur de l'image $A'B'$de l'objet défini au A-3).
4) Déterminer partir de la matrice de transfert les autres éléments cardinaux de la lentille.

C- 1) Su un schéma où figurent les deux dioptres, leur centres et leur foyers, tracer la marche du rayon incident parallèle l'axe et celle d'un rayon émergent parallèle à l'axe.

RATTRAPAGE D'OPTIQUE GEOMETRIQUE 2005-2006

EXERCICE I :

Un miroir sphérique concave de très faible ouverture, de sommet S et de rayon R=1.5cm, permet de projeter une bougie sur un mur placé à la distance d = 2 cm de la bougie.

1. La position du miroir (on calculera la distance D entre le miroir et le mur) ;
2. Le grandissement linéaire (transversal) et le grandissement angulaire ;
3. Faire un schéma à l'échelle indiquant la position du foyer et la construction de l'image obtenue à l'aide de trois rayons particuliers.

EXERCICE II :

On considère une lentille demi – boule de rayon r = 4.5cm et l'indice, plongée dans l'air.

1. Si l'on veut utiliser cette lentille pour focaliser un faisceau de lumière parallèle, doit-on présenter au faisceau la face bombée ou la face plane pour réaliser au mieux les conditions de stigmatisme approché. On retiendra dans la suite de l'exercice la meilleure solution.
2. 1. Calculer la matrice de transfert de cette lentille. En déduire la position des foyers en s'appuyant sur les considérations géométriques.

2 2. En utilisant les formules de conjugaison des dioptres, déduire les foyers de la lentille.

2 3. Vérifier vos résultats par le cheminement de rayons bien choisis à travers les dioptres (faire un schéma très soigné sur un papier millimétré, à l'échelle ½).

3 On considère maintenant un système plus complexe : une autre lentille demi-double de rayon identique R=4.5cm, mais d'indice différent, n=1.4 eest accolée à la précédente pour constituer une boule de rayon R = 4.5 cm.

Calculer la matrice de transfert du système et en déduire les foyers ;

EXAMEN D'OPTIQUE 2009-2010

EXERCICE I :œil et instrument d'optique

Définir les notions ci-après : ouverture, diamètre d'ouverture, profondeur de champ, champ angulaire , résolution, mise au point.

Les éléments ci-dessus sont les constituants de l'œil ou de l'appareil photographique : ensemble dioptres et cristallin, objectif, diaphragme, iris, ouverture, mise au point, pupille, rétine, accommodation, film photographique

Sur un tableau à deux colonnes, faites le groupement des éléments constituant l'œil ou l'appareil photographique et établir leur correspondance

EXERCICE II :

Soit une lentille biconvexe de rayons R et 2R, d'indice n=$\frac{3}{2}$, d'épaisseur R et soient S_1, S_2 les points d'intersection de la lentille avec l'axe principal

Calculer la position des foyers de chacun des dioptres;

Déterminer la position du centre optique O de la lentille ;

Placer les dioptres, leurs centres et leurs foyers sur un schéma. Par une construction géométrique, retrouver les positions des points principaux. Faire un pour chaque point principal

Sur un autre schéma, placer S_1, S_2 les foyers de la lentille et les deux palans principaux. Par construction géométrique retrouver la position de l'image A'B' de l'objet AB situé 8cm devant la lentille

EXERCICE III: ensemble lentille épaisse et miroir

On considère une lentille L plan-convexe dont la matrice de transfert est, en unités S.I

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{0.04}{3} \\ -25 & 1 \end{bmatrix}$$

On la retourne et on place derrière L un miroir M de telle sorte que l'ensemble forme un système centré

Le miroir est plan et place à 2cm de la face de sortie de L. donner les caractéristiques du miroir équivalent à l'ensemble.

SUPERVISION GENERALE ***Alban Valère FOULAMI FEH***
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

Aller à la table de matière

Quelle devrait etre la nature du miroir (vergence, rayon de courbure) pour que l'ensemble (LM) soit afocal ? dans ce cas, calculer les grandissements transversal, angulaire et longitudinal et construire le trajet d'un rayon lumineux qui arrive sur la lentille parallèlement à l'axe optique. Où se forme l'image que donne l'ensemble réel placé à 1cm de la face d'entrée?

EPREUVE D'EXAMEN OPTIQUE 2012-2013

Exercice 1

Déterminer la matrice de transfert d'une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n séparant les milieux objet d'indice $n_1$et image d'indice n_2.

Exercice 2

Soit un dioptre sphérique concave de sommet S et de centre de courbure C, séparant les milieux d'indices $n_1 et\ n_2$

a) Déterminer les points nodaux et les points principaux de ce dioptre

Exercice 3

On considère un objet lumineux A situé entre deux miroirs plans M_1 et M_2distants de $\overline{M_1M_2} = e$ à une distance $p = \overline{AM_2}et$ à une distance $(e - p) = \overline{M_1A}$ de M_1. Déterminer la position des images successives de A dans les miroirs M_1 et M_2

Exercice 4

On considère une lentille boule d'indice n=1,5 de rayon R=50 cm plongée dans l'air. Etablir la relation de conjugaison de ce système centré avec origine aux points nodaux.

Exercice 5

Un système optique centré d'axe xx'est utilisé dans les conditions de Gauss. La marche de deux rayons lumineux MII'M et NJJ'N' est représenté sur la figure ci-dessous.

1. Déterminer la matrice de changement de direction $[T_1T_2]$ $sachant\ que\ \overline{T_1T_2} = 100mm, \overline{HT_1} = \overline{HI} = 200mm, \overline{HM} = -30mm, \overline{T_2M'} = -200mm, \overline{JT_1} = \overline{T_2J'} = 3mm, \overline{T_2I'} = 10mm\ et\ \overline{NT_1} = \overline{T_2N'} = 1000mm$. Calculer le déterminant de cette matrice. Quelle conclusion peut-on tirer ?

ce système est une lentille épaisse d'indice n délimitée par deux dioptre sphériques dont les sommets coïncident avec les plans T_1 etT_2, et de rayons de coubure respectivement R_1et R_2.

2. Déterminer n, R_1et R_2.
3. Placer sur un schéma les foyers images $F_1'et\ F_2'$, les centres de coubures $C_1\ et\ C_2$ et les sommets S_1et S_2 des deux dioptres et construire l'image d'un objet AB placé à 15 cm en avant de S_1.

CORRECTIONS D'OPTIQUE GEOMETRIQUE

CORRECTION DU CONTROLE CONTINU D'OPTIQUE 2011-2012

EXERCICE I :

Questions de cours

Définir Système optique

Succession de milieux transparents et homogènes séparés par des dioptres ou des miroirs

5 exemples

- La loupe
- Les lentilles
- Le miroir
- Le télescope
- L'appareil photo
- La lunette astronomique

3 principes de l'optique géométrique

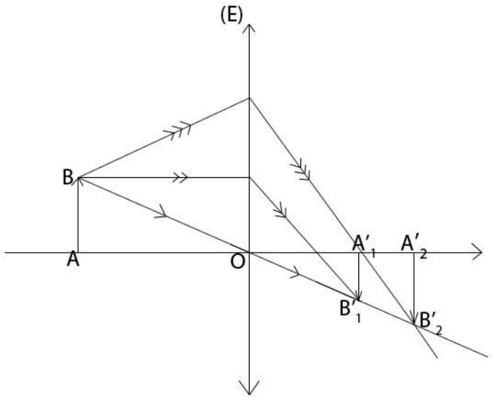
Principe de Fermat :
Entre deux points A et B atteints par la lumière, le chemin optique le long du trajet effectivement suivi est stationnaire.
Propagation rectiligne de la lumière :
Dans un milieu homogène, les rayons lumineux se propagent en ligne droite.
Retour inverse de la lumière :
Le chemin optique suivi par la lumière ne dépend pas du sens de parcours du trajet.

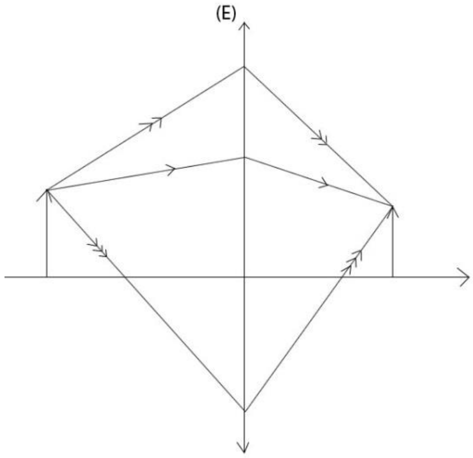
Le seul rayon lumineux qui n'est pas dévié par un dioptre sphérique est le rayon qui passe par son centre de courbure.
Un rayon lumineux qui arrive parallèlement à l'axe optique d'un D.S. est dévié vers le point focal image.

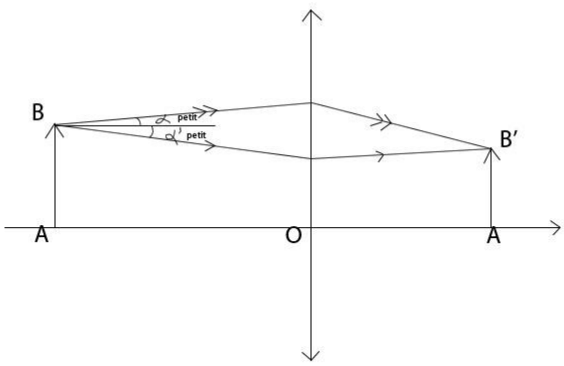
Approximation de Gauss :

- Les rayons incidents sont proches de l'axe optique
- Les rayons incidents sont peu inclinés par rapport à l'axe optique

Différence entre stigmatisme, astigmatisme et stigmatisme approché :



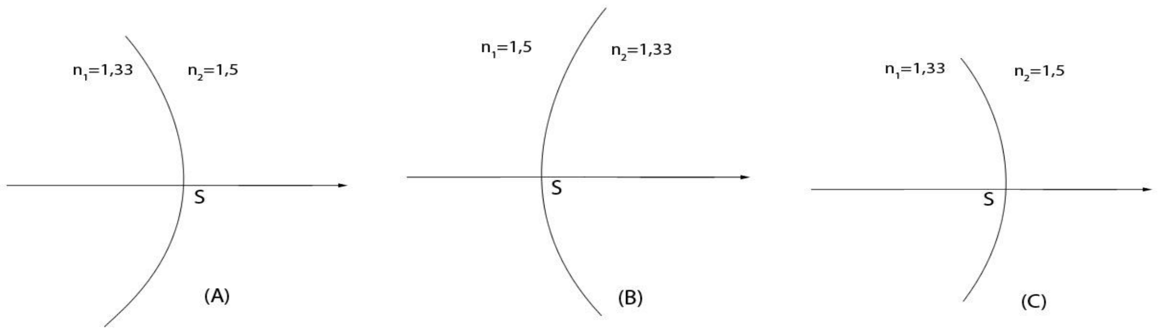




Stigmatisme : C'est lorsque tous les rayons lumineux issus d'un même point traversant un système optique (E) convergent en un même point, alors astigmatisme c'est lorsque ces rayons ne convergent pas en un même point. D'autre part on parle de stigmatisme approché lorsque pour atteindre un stigmatisme dans les 3 dimensions de l'espace, on considère les approximations de Gauss.

EXERCICE I :

La vergence et les distances focales



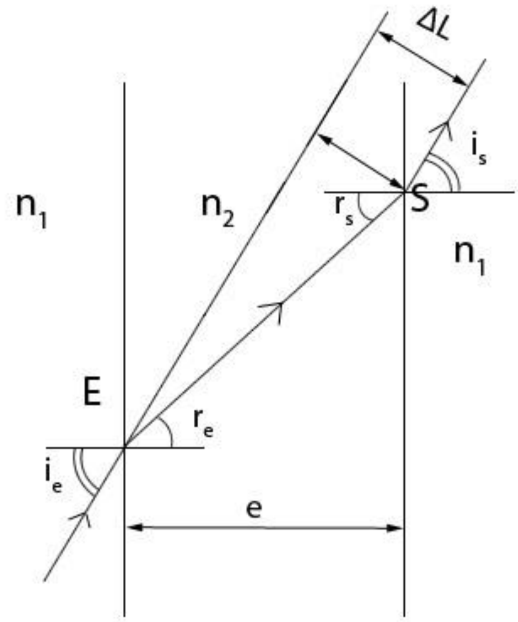
$\overline{SC} = -6cm$ $\overline{SC} = 6cm$ $\overline{SC} = 3cm$

$$\overline{SC} = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}} \text{ , } f = -\frac{n_1}{V} \text{ , } f' = \frac{n_2}{V}$$

D'où on a :

- En A, $V = -0{,}028\ cm^{-1}$ $f = 46{,}94$ $f' = 52{,}94$ $V = -2{,}83\ \delta$
- En B, $V = -0{,}023cm^{-1}$ $f = 52{,}94$ $f' = 46{,}94$ $V = -2{,}83\ \delta$
- En C, $V = 0{,}57cm\hat{}(-1))$ $f = -23{,}47$ $f' = 26{,}47$ $V = 5{,}57\ \delta$

EXERCICE II :



Montrer que la lumière n'est pas déviée :

Il s'agit pour nous de montrer que la direction de propagation de la lumière ne change pas à la traversée de la vitre, autrement dit que $i_e = i_s$.

- Snell-Descarte en E et S nous donne :

$$\begin{cases} n_1 \sin i_e = n_2 \sin r_e \\ n_1 \sin i_s = n_2 \sin r_s \end{cases} \quad \text{or } \ r_e = r_s \Rightarrow n_1 \sin i_e = n_2 \sin r_e = n_2 \sin r_s = n_1 \sin i_s$$

$$\Rightarrow \sin i_e = \sin i_s \quad \Rightarrow \quad i_e = i_s \text{ (conclure)}$$

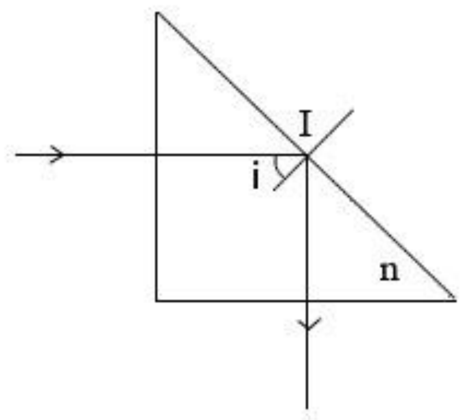
- Pour le décalage maximal

Notons le ΔL, pour un dioptre tel que $n_2 > n_1$, le décalage est maximal pour $i_e = 90°$ et dans ce cas, il vaut e or $n_1 = 1, n_2 = n_{vitre} \Rightarrow n_2 > n_1$ d'où $\Delta L_{\max} = e = 1cm$

(*pour exercice, retrouver cela par calcul*)

EXERCICE III :

1) Relation sur n



Pour qu'il y ai réflexion totale, il faut que $i > i_{\lim}$ pour $i_{\lim}$ on a $r = 90°$ et Snell-Descarte donne $n sin\, i_{\lim} = 1 \sin r = 1 \Rightarrow i_{\lim} = arsin\,(\frac{1}{n})$

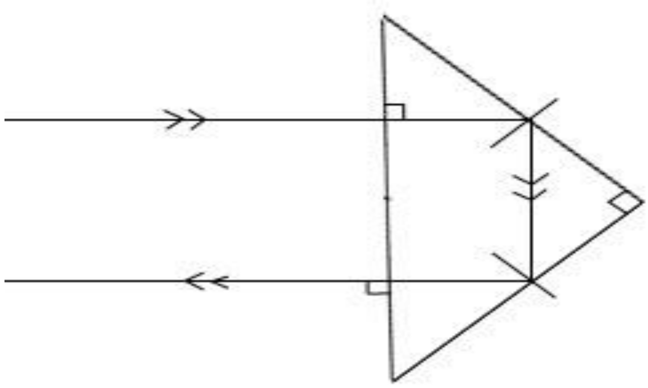
Or pour qu'il y ai réflexion totale, ou que $= 45°$, il faut que $i_{\lim} < 45° \Rightarrow \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) < 45°$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < \sin 45° \Rightarrow \quad \boxed{n > \frac{1}{\sin 45°}}$$

2) Renvoi en sens inverse

SUPERVISION GENERALE *Alban Valère FOULAMI FEH*
VICE PRESIDENT II AEENSPY 2014(3GM)
+23776189660/+23790375527

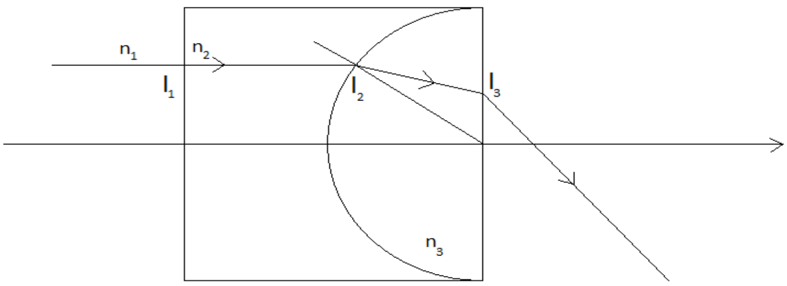
Aller à la table de matière



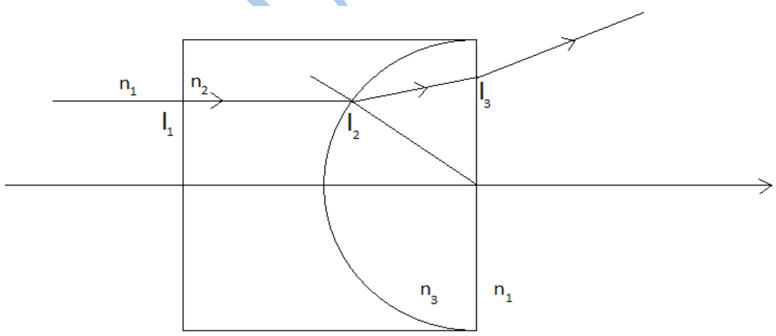
EXERCICE IV :

1) trajet du rayon lumineux

- $n_3 > n_2 > n_1$



- $n_2 > n_3 > n_1$



Justification :

Basée principalement sur les lois de Descartes sur la réfraction, elles nous permettent de déduire :

- $\boldsymbol{n_3 > n_2 > n_1}$

En I_2, $n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3$

$$n_3 > n_2 \quad \Rightarrow \quad i_2 > i_3$$

(1) Donc le rayon se rapproche de la normale

En I_3, $n_3 \sin i_3 = n_1 \sin i_1$

$$n_3 > n_1 \quad \Rightarrow \quad i_1 > i_3$$

(2) Le rayon s'éloigne de la normale

- $\boldsymbol{n_2 > n_3 > n_1}$

En I_2, $n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3$

$$n_2 > n_3 \quad \Rightarrow \quad i_3 > i_2$$

(3) Donc le rayon s'éloigne de la normale

En I_3, $n_3 \sin i_3 = n_1 \sin i_1$

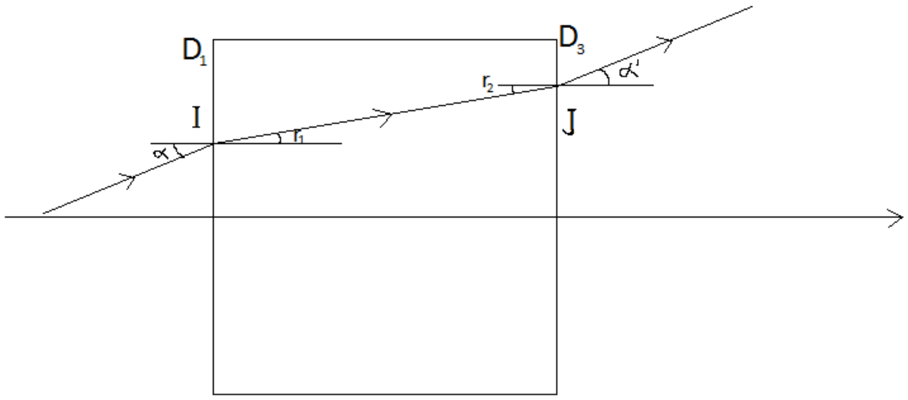
$$n_3 > n_1 \quad \Rightarrow \quad i_1 > i_3$$

(4) Le rayon s'éloigne de la normale

<u>(1), (2), (3) et (4) justifient les constructions.</u>

2) $\boldsymbol{n_3 = n_2 = n = \frac{u}{3}}$, $\boldsymbol{n_1 = 1}(*\ \boldsymbol{onn'aplusdedioptrespherique}\ *)$

a) Trajet et angle de sortie



L'angle de sortie. $\boxed{\alpha' = \alpha}$

Car : en I et J, sachant que $r_1 = r_2$, en appliquant la 2e loi de Descarte sur la réfraction, on a :

$\sin\alpha = n\sin r_1,\ \ n\sin r_2 = \sin\alpha' \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = n\sin r_1 = n\sin r_2 = \sin\alpha'$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = \alpha'}$

b) *Par les relations de conjugaison, calculer la position de l'image*

Le dioptre plan étant sphérique de vergence nulle, on a :

$A \xrightarrow{(D_1)} A_1 \xrightarrow{(D_3)} A'$ tel que : $\begin{cases} \frac{n}{\overline{S_1A_1}} - \frac{1}{\overline{S_1A}} = 0 & (a) \\ \frac{1}{\overline{S_3A'}} - \frac{n}{\overline{S_3A_1'}} = 0 & (b) \end{cases}$

(a) $\Rightarrow \frac{n}{\overline{S_1A_1}} = \frac{1}{\overline{S_1A}} \quad \Rightarrow \quad n\overline{S_1A} = \overline{S_1A_1} \quad (a')$

(b) $\Rightarrow \frac{1}{\overline{S_3A'}} = \frac{n}{\overline{S_3A_1}} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_3A_1} = n\overline{S_3A'} (b')$

Or $\overline{S_1S_3} = \overline{S_1A_1} + \overline{A_1S_3} = \overline{S_1A_1} - \overline{S_3A_1}$ d'où $\overline{S_1S_3} = n\overline{S_1A} - n\overline{S_3A'} = n(\overline{S_1A} - \overline{S_3A'})$

Ainsi $\boxed{\overline{S_3A'} = -\frac{\overline{S_1S_3}}{n} + \overline{S_1A}}$

Déduire $\overline{AA'}$

$$\overline{S_1S_3} = \overline{S_1S_3} + \overline{S_3A} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_1A} - \overline{S_3A'} = \overline{S_1S_3} + \overline{S_3A} - \overline{S_3A'}$$
$$= \overline{S_1S_3} + \overline{S_3A} + \overline{A'S_3}$$
$$= \overline{S_1S_3} + \overline{A'A}$$
$$= \overline{S_1S_3} - \overline{AA'}$$

D'où $\overline{S_1S_3} = n(\overline{S_1S_3} - \overline{AA'}) \quad \Rightarrow \boxed{\overline{AA'} = \overline{S_1S_3}(n-1)}$

Nature de A' : <u>Virtuelle.</u>

Application numérique

$\overline{S_1S_3} = 4cm \quad \overline{AA'} = 4 \times \left(\frac{4}{3} - 1\right) = 4\left(\frac{1}{3}\right) \boxed{\overline{AA'} = 1{,}33\ cm}$

CORRECTION DE L'EXAMEN D'OPTIQUE 2011-2012

EXERCICE I :

Ouverture : on appelle ouverture d'un appareil photographique le diamètre D de la pupille d'entrée de l'objectif.

Profondeur de champ : on appelle profondeur de champ la distance qui sépare deux points extrêmes A_0' et A_0'' de l'axe optique dont les images sont vues nettement sur le film photographique.

Champ angulaire : c'est la portion conique de l'espace objet dont l'objectif photographique donne une image nette.

Mise au point : C'est une opération qui consiste à amener l'image A'B' entre les limite de vision distincte de l'œil (P.R. et P .P. de l'œil).

Cercle oculaire : Image mn à travers l'oculaire de la première face MN de l'objectif.

Matrice de transfert : C'est une matrice qui permet de comprendre le comportement d'un rayon lumineux à l'intérieur d'un système optique.

Presbytie : On parle de presbytie quand l'amplitude d'accommodation devient inférieure à 4 dioptries.

Lentille : C'est un système optique constitué de 2 dioptres.

Résolution : C'est l'expression de la précision avec laquelle un appareil photographique peut donner une image d'un objet.

EXERCICE II :

1. Calcul des distances focales de chacun des dioptres

Formule générale :

$$\boxed{\begin{array}{ll} f' = \overline{SF'} = \dfrac{n_2}{V} & V = \dfrac{n_2 - n_1}{\overline{SC}} \\ f = \overline{SF} = -\dfrac{n_1}{V} & \end{array}}$$

- ***Dioptre 1 :***

$$n_1 = 1, n_2 = n = 1{,}5, S = S_1, V_1 = \frac{n-1}{\overline{S_1C_1}}$$

AN : $f_1' = 1,5 \times \frac{10\times10^{-2}}{1,5-1} = 30\ cm$ $\boxed{f_1' = 30\ cm}$

$f_1 = -1 \times 10 \times \frac{10^{-2}}{1,5-1} = -20cm$ $\boxed{f_1 = -20\ cm}$

- ***Dioptre 2 :***

$$n_1 = n = 1,5,\ \ n_2 = 1,\ \ V_2 = \frac{1-1,5}{\overline{S_2C_2}}$$

AN: $f_2' = 1 \times \frac{-20\times10^{-2}}{1-1,5} = 40\ cm$ $\boxed{f_2' = 40\ cm}$

$f_2 = -1,5 \times -20 \times \frac{10^{-2}}{1-1,5} = -60\ cm$ $\boxed{f_2 = -60\ cm}$

2. ***Position des points nodaux et du centre optique pour chaque dioptre :***

- ***Points nodaux :***

Formule générale :

$$\boxed{\begin{matrix} \overline{SN_2} = f'T_{11} + f \\ \overline{EN_1} = fT_{22} - f' \end{matrix}}$$

- ***Dioptre 1 :***

$\overline{S_1N_1^1} = f_1 - f_1'$ Car T_{22}=1 AN: $\overline{S_1N_1} = 20 - 30 = -10\ cm$ $\boxed{\overline{S_1N_1^1} = -10\ cm}$

$\overline{S_1N_2^1} = f_1' + f_1 = 10\ cm$ $\boxed{\overline{S_1N_2^1} = 10\ cm}$

- ***Dioptre 2:***

$\overline{S_2N_1^2} = f_2 - f_2'$ AN: $\overline{S_2N_1^2} = -60 - 40 = -100\ cm$ $\boxed{\overline{S_2N_1^2} = -100\ cm}$

$\overline{S_2N_2^2} = f_2' + f_2 = 40 - 60 = -20\ cm$ $\boxed{\overline{S_2N_2^2} = -20\ cm}$

- ***Centre optique :***

Pour chaque dioptre $O_i = S_i, i \in \{1,2\}$

$$\boxed{\begin{matrix} O_1 = S_1 \\ O_2 = S_2 \end{matrix}}$$

3. ***Position des foyers F et F', des points principaux H et H' et des points nodaux N et N' du système***

- ***Foyers F et F' :***

Soit AB un objet placé à l'infini, déterminons son image à travers notre système optique :

$\overline{S_1A} = -\infty$,

Formule de conjugaison appliquée au dioptre 1 :

$$-\frac{1}{\overline{S_1A}} + \frac{1{,}5}{\overline{S_1A_1}} = \frac{1{,}5-1}{\overline{S_1C_1}} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_1A_1} = \frac{1}{\frac{0{,}5}{\overline{S_1C_1}} + \frac{1}{\overline{S_1A}}} \times 1{,}5 = \frac{1{,}5}{\frac{0{,}5}{10.10^{-2}}} = \frac{15}{0{,}5} \times 10^{-2} = 30\ cm$$

Formule de conjugaison appliquée au dioptre 2 :

$-\frac{1{,}5}{\overline{S_2A_1}} + \frac{1}{\overline{S_2A'}} = \frac{1-1{,}5}{\overline{S_2C_2}}$ Or $\overline{S_2A_1} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1A_1} = -50 + 30 = -20\ cm$

$\Rightarrow \overline{S_2A'} = -20 \times 10^{-2} = -20\ cm$

Donc

$$\boxed{\overline{S_2F'} = -20\ cm}$$

Considérons à présent un objet tel que son image se trouve à l'infini:

Si l'image se forme à l'infini, cela suppose que l'image intermédiaire donnée par le dioptre 1 s'est formée sur le foyer objet du 2e dioptre donc $\overline{S_1A_1} = \overline{S_1F_2}$

En utilisant la relation de conjugaison sur le deuxième dioptre nous obtenons donc :

$-\frac{1}{\overline{S_1A}} + \frac{1{,}5}{\overline{S_1F_2}} = \frac{1{,}5-1}{\overline{S_1C_1}} \quad \Rightarrow \overline{S_1A} = \overline{S_1F} = \frac{1}{\frac{1{,}5}{\overline{S_1F_2}} - \frac{1{,}5-1}{\overline{S_1C_1}}}$ or $\overline{S_1F_2} = \overline{S_1S_2} + \overline{S_2F_2} = 50 - 60 = -10\ cm$

Donc $\overline{S_1F} = 10 \times \frac{10^{-2}}{2} = 5\ cm$

$$\boxed{\overline{S_1F} = -5\ cm}$$

- ***Points principaux H et H' :***

Etant donné que nous sommes en présence de deux dioptre séparant un milieu d'indice n :

Nous utiliserons la matrice suivante démontrée en cours :

$$T(S_1S_2) = \begin{bmatrix} \frac{(1-V_1)\overline{S_1S_2}}{n} & \frac{\overline{S_1S_2}}{n} \\ V_2\left(\frac{V_1\overline{S_1S_2}}{n} - 1\right) + V_1 & 1 - \frac{V_2\overline{S_1S_2}}{n} \end{bmatrix}$$

$\overline{S_1H} = \frac{eV_2}{nV}\overline{S_2H'} = -\frac{eV_1}{nV}$ avec $V = (n-1)\left[\frac{1}{\overline{S_1C_1}} - \frac{1}{\overline{S_2C_2}} + \frac{e(n-1)}{n}.\frac{1}{\overline{S_1C_1}}.\frac{1}{\overline{S_2C_2}}\right]$

AN : $V = \frac{20}{3}\delta,\ V_1 = 5\delta, V_2 = 2{,}5\ \delta\ \overline{S_1H} = (50.10^{-2}).\frac{2{,}5}{\frac{1{,}5.20}{3}} = 12{,}5\ cm$ $\underline{\underline{\overline{S_1H} = 12{,}5\ cm}}$

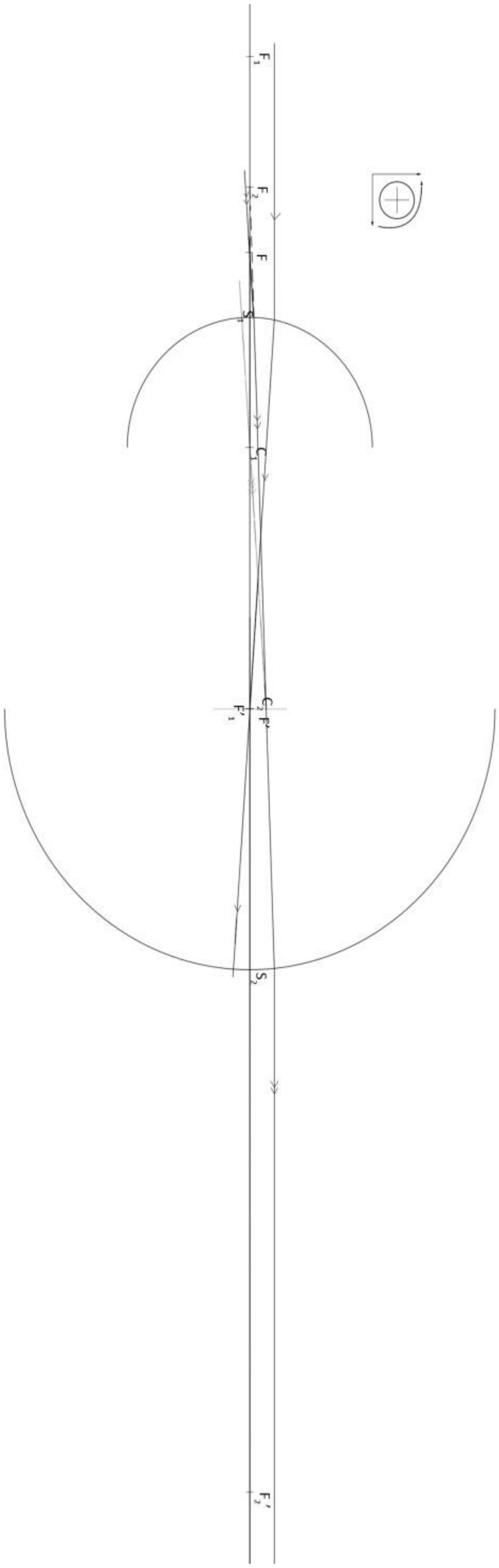
$\overline{S_2H'} = -50.10^{-2}.\frac{5}{\frac{1{,}5.20}{3}} = -25\ cm$ $\underline{\underline{\overline{S_2H'} = -25\ cm}}$

- ***Points nodaux :***

$$\boxed{N = H, N' = H'}$$

4. ***Détermination graphique des positions de F, F', H et H' :***

   - ***Détermination graphique de F et F'***



- ***Détermination graphique de H et H'***

5. $\boldsymbol{AB = 2\ cm \quad \overline{S_1A} = -25\ cm}$

- ***Position $\overline{H'A'}$ de l'image $A'B'$***

On a : $\frac{n_2}{\overline{HA}} - \frac{n_1}{\overline{H'A'}} = V$ or $\quad V = \frac{20}{3}\delta,\ n_2 = 1\ et\ n_1 = 1,\ \overline{HA} = \overline{HS_1} + \overline{S_1A} = -12{,}5 - 25 = -37{,}5$

Donc $\overline{H'A'} = \frac{n_1}{\frac{n_2}{\overline{HA}} - V} = \frac{1}{\frac{1}{-37{,}5.10^{-2}} - \frac{20}{3}} = -10{,}7\ cm$ $\underline{\underline{\overline{H'A'} = -10{,}7\ cm}}$

- ***Détermination graphique de l'image A'B' :***

Faites-le (voir cours)

- ***Valeur numérique du grandissement γ***

$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{S_1A_1}}{1{,}5\times\overline{S_1A}}$ or d'après la formule de conjugaison, $\overline{S_1A_1} = \frac{1{,}5}{\frac{0{,}5}{\overline{S_1C_1}} + \frac{1}{\overline{S_1A}}} = 150\ cm$

$\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{1{,}5\overline{S_2A'}}{\overline{S_2A_1}}$ et $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \gamma_1 \times \gamma_2$

$or\ \gamma_1 = \frac{150}{1{,}5\times -25} = -4$ et $\gamma_2 = 1{,}5 \times \frac{\overline{S_2H'} + \overline{H'A'}}{\overline{S_2S_1} + \overline{S_1A_1}} = 1{,}5 \times \frac{-25-10{,}7}{-50+150} = -0{,}5355$

Donc $\gamma = -4 \times -0{,}5355 = 2{,}142$ $\boxed{\gamma = 2{,}142}$

CORRECTION DU CONTROLE CONTINU D'OPTIQUE 2012-2013

Exercice 1

2) Il est clair que

$$n = 1{,}5, \qquad \mathcal{R}_1 = 50cm, \qquad \mathcal{R}_2 = -50cm$$

3) construction voir (fig 2)

On sait que $\overline{T_1T_2} = \overline{s_1s_2} = 10cm$

Et $\mathcal{R}_1 = \overline{s_1c_1} \Longrightarrow \overline{s_1c_1} = 50cm$

De même $\overline{s_2c_2} = -50cm$

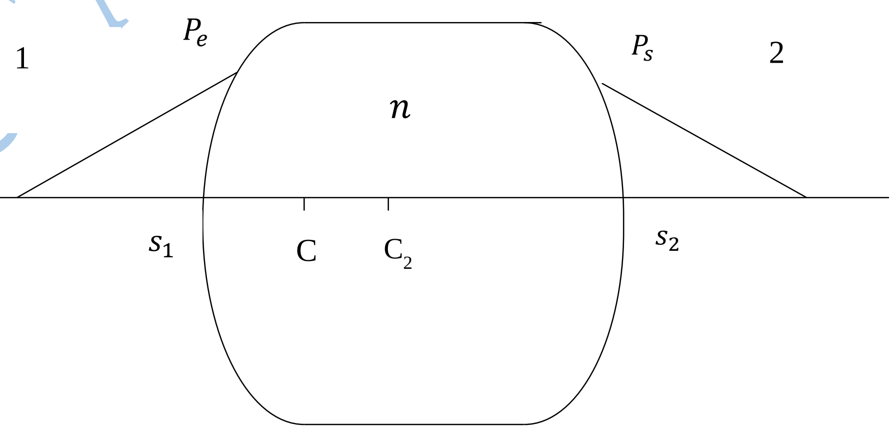
D'autre part,

- Le point $\begin{cases} N \equiv F_1 \\ N' \equiv F_2' \end{cases}$

  Cherchons F_1'

  On a $\overline{s_1F_1'} = \overline{T_1F_1{}'} = \frac{n}{n-1}\overline{s_1c_1} = \frac{n}{n-1}\mathcal{R}_1$

  Donc $\begin{cases} \overline{s_1F_1{}'} = 300cm \\ \overline{S_2F_2'} = \overline{T_2N'} = 100cm \end{cases}$



Aller à la table de matière

Exercice 2

$\boldsymbol{n = 1,5} \quad \boldsymbol{\overline{s_1c_1} = 10cm, \overline{s_2c_2} = -20cm, \overline{s_1s_2} = 50cm}$

1) Calculons

a) Les distances focales f_1' et f_1 du 1^{ier} $droptre$

On a : $v_1 = \frac{n-1}{\overline{s_1c_1}}$ et $\begin{cases} f_1 = -1/v_1 \\ f_1' = n/v_1 \end{cases}$

Donc $f_1 = \frac{\overline{s_1c_1}}{1-n}$ et $f_1' = \frac{n\overline{s_1c_1}}{n-1}$

AN : $f_1 = -20cm$ et $f_1' = 30cm$

b) Les distances focales $f_2'et$ f_2 du deuxième droptre.

Ona $v_2 = \frac{1-n}{\overline{s_2c_2}}$

$f_2 = -\frac{n}{v_2}$ et $f_2' = 1/v_2$

$donc$ $f_2 = \frac{n}{n-1}\overline{s_2c_2}$ et $f_2' = \frac{1}{1-n}\overline{s_2c_2}$

AN $f_2 = -60cm$ $f_2' = 40cm$

c) Les positions des points nodaux et du centre optique pour chaque droptre

1^{ier}*dioptre* (D_1)

Centre optique C₁ : / $\overline{s_1c_1} = 10cm$

Points nodaux :

Matrice de Transfert : $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_1 & 1 \end{pmatrix}$

- Point nodal objet : N_{11}

On a :

$$\overline{s_1N_{11}} = f_1(T_{22} - n)$$

or $T_{22} = 1 \Longrightarrow \overline{s_1N_{11}} = 10cm$ donc $N_{11} = c_1$

- Point Nodal image : N_{12}

On a :

$\overline{s_1N_{12}} = f_1'\left(T_{11} - \frac{1}{n}\right)$ or $T_{11} = 1 \Longrightarrow$ donc $\overline{s_1N_{12}} = 10cm \Longrightarrow N_{12} = c_1$

Donc $N_{11} = N_{12} = c_1$

$2^{ième}$*dioptre* (D_2)

Centre optique : C_2 telle que $\overline{s_2c_2} = -20cm$

Points Nodaux.

Matrice de transfert $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v_2 & 1 \end{pmatrix}$

Il est clair comme précédemment que

$N_{21} = N_{22} = c_2$ où
$N_{21} \rightarrow point\ nodal\ objet$
$N_{22} \rightarrow point\ nodal\ image$

2)a) calculons les positions des foyers F et P des points principaux $H\ et\ H'$

Déterminons la matrice de Transfert $T(s_1 s_2)$ du système formé des 2 dioptres on a :

$\overline{s_1} \rightarrow s_1^+ \rightarrow s_2^- \rightarrow s_2^+$
$\mathcal{R}(s_1) \equiv \overline{s_1} \rightarrow s_1^+$
$\mathcal{C}(\overline{s_1 s_2}) \equiv s_1^+ \rightarrow s_2^-$
$\mathcal{R}(s_2) \equiv s_2^- \rightarrow s_2^+$

Donc

$P_s = \mathcal{R}(s_2)\mathcal{C}(\overline{s_1 s_2})\mathcal{R}(s_1)P_e$
$P_s = T(s_1 s_2)P_e$

Donc $T(s_1 s_2) = \mathcal{R}(s_2)\mathcal{C}(\overline{s_1 s_2})\mathcal{R}(s_1)$

Or $(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\nu_2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C}(\overline{s_1 s_2}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\overline{s_1 s_2}}{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{R}(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\nu_1 & 1 \end{pmatrix}$

$donc\ T(s_1 s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\nu_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{\overline{s_1 s_2}}{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\nu_1 & 1 \end{pmatrix}$

$$T(s_1 s_2) = \begin{bmatrix} 1 - \nu_1 \frac{\overline{s_1 s_2}}{n} & \frac{\overline{s_1 s_2}}{n} \\ -\left(\nu_1 + \nu_2 - \nu_1\nu_2 \frac{\overline{s_1 s_2}}{n}\right) & 1 - \nu_2 \frac{\overline{s_1 s_2}}{n} \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} \nu = \\ \nu_1 = 2{,}5\delta \\ \nu_2 = 5\delta \end{cases}$ $\quad T_1 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$

On a :

$\overline{s_1 F} = fT_{22}\ or\ f = \frac{1}{T_{21}}, T_{21} = -\nu$

Donc $\overline{s_1 F} = \frac{T_{22}}{T_{21}}$

$\Rightarrow \boxed{\overline{s_1 F} = \frac{\frac{\nu_2 \overline{s_1 s_2}}{n} - 1}{\nu}}$

AN $\overline{s_1 F} = -5cm$

$\overline{s_1F} = f'T_{11} = -\frac{T_{11}}{T_{21}}$

$\Longrightarrow \boxed{\overline{s_2F} = \frac{1-\frac{v_1\overline{s_1s_2}}{n}}{v}}$

AN $\overline{s_2F} = -20cm$

- Points principaux H et H'

On a $\overline{s_1H} = f(T_{22}-1)$

$\Longrightarrow \overline{s_1H} = \frac{T_{22}-1}{T_{21}}$

$donc\ \overline{s_1H} = \frac{\frac{v_2\overline{s_1s_2}}{n}}{v}$

AN $\overline{s_1H} = 25cm$

$\overline{s_2H'} = -\frac{(T_{11}-1)}{T_{21}} = \frac{1-T_{11}}{T_{21}}$

$ie\ \overline{s_2H'} = -\frac{v_1\frac{\overline{s_1s_2}}{n}}{v}$

AN $\overline{s_2H'} = -50cm$

Conclusion F,F', H et H' sont tels que

$s_1F = -5cm,\quad s_2F' = -20cm\ ,\quad \overline{s_1H} = 25cm,\quad \overline{s_2H'} = -50cm$

Question supplémentaire : position de N et N'

On a $\overline{s_1N} = f(T_{22}-1) = \overline{s_2H}$

Donc N = H

$\overline{s_2N'} = f'(T_{11}-1) = \overline{s_2H'} \rightarrow N' = h'$

Conclusion : $N \equiv H\ et\ N' \equiv H'$

3) $\overline{s_1A} = -25cm.$

a) Calcul de $\overline{H'A'}$

Relation de conjugaison avec origine aux points principaux :

$\frac{n_2}{\overline{H'A'}} - \frac{n_1}{\overline{HA}} = v(1)$

Avec $\begin{cases} v = v_1 + v_2 - \frac{v_1v_2\overline{s_1s_2}}{n} \\ v = \frac{10}{3}\delta \end{cases}$

$(1) \Longrightarrow \overline{H'A'} = \frac{n_2\overline{HA}}{n_1+v\overline{HA}}$

$n_1 = 1 \; et \; n_2 = 1 \; \; et \; \overline{HA} = \overline{HS_1} + \overline{S_1A}$

Donc

$$\overline{H'A'} = \frac{\overline{HS_1} + \overline{S_1A}}{1 + \nu(\overline{HS_1} + \overline{S_1A})}$$

AN : $\overline{H'A'} = 75cm$

b) Déterminons graphiquement l'image $A'B'$ (voir fig 1.2)

→ Valeur numérique du grandissement

→ Graphiquement, on mesure

$$\overline{A'B'} = 3cm$$

Ainsi $G_t = \frac{\overline{A'B'}}{AB} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

Donc $\boxed{G_t = -1{,}5}$

→ par calcul

$\boxed{G_t = \frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}}}$ **AN** $G_t = \frac{7{,}5}{-5} = -1{,}5$

Donc $\boxed{G_t = -1{,}5}$

4) Déterminons graphiquement F et F' H et H'

(voir figure 1.1)

CORRECTION D'EXAMEN D'OPTIQUE 2012-2013

Exercice I

On a : $p_s = \mathcal{R}(S)\mathfrak{T}(ES)\mathcal{R}(E)p_e = T(ES)p_e$

Donc : $T(ES) = \mathcal{R}(S)\mathfrak{T}(ES)\mathcal{R}(E)$

$$\begin{cases} \mathcal{R}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad car\ V_2 = 0\ (dioptre\ plan) \\ \mathcal{R}(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad car\ V_1 = 0\ (dioptre\ plan) \\ \mathfrak{T}(ES) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$T(ES) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc $T(ES) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice II :

a- Déterminons les points principaux et les points nodaux

La matrice de transfert du dioptre est $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\mathcal{R}}(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix}$ $avec\ V = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}$

- Points principaux :
  On sait que :

$$\overline{SH} = \mathcal{F}(T_{22} - 1)\ \ or\ T_{22} = 1$$
$$\Rightarrow \overline{SH} = 0\ c'est-à-dire\quad H = S$$

$\overline{SH'} = \mathcal{F}'(T_{11} - 1)$ $or\ T_{11} = 1$ $\Rightarrow$ $\overline{SH'} = 0$ $c'est-à-dire\ H' = S$

<u>Conclusion</u> : H=H' =S

- points nodaux
  On a :

$\overline{SN} = \mathcal{F}\left(T_{22} - \frac{n_2}{n_1}\right)$ $\quad or\ \mathcal{F} = \frac{n_1}{n_1 - n_2}\overline{SC}$

$$\Rightarrow \overline{SN} = \frac{n_1}{n_1 - n_2}\overline{SC}\left(1 - \frac{n_2}{n_1}\right)$$

$$\overline{SN} = \overline{SC}$$

$\overline{SN'} = \mathcal{F}'\left(T_{11} - \frac{n_1}{n_2}\right)$ $\quad or\ \mathcal{F} = \frac{n_2}{n_2 - n_1}\overline{SC}$

$$\Rightarrow \overline{SN'} = \frac{n_2}{n_2 - n_1}\overline{SC}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

$$\overline{SN'} = \overline{SC}$$

Donc N=N′ =C

Exercice III :

Déterminons les positions des images successives de A dans ces miroirs $M_1\ \ et\ M_2$
Soit A_1 l'image de A par rapport à M_1 et A_2 l'image finale par rapport à M_2
On a alors : $\overline{M_1A_1} = (p - e)$ $\quad car\ \overline{M_1A_1} = -\overline{M_1A}$
Ainsi, $\overline{M_2A_1} = \overline{M_2M_1} + \overline{M_1A_1}$

$$\Rightarrow \overline{M_2A_1} = -e + p - e = p - 2e$$

Conclusion : $\overline{M_1A_1} = p - e$ et $\overline{M_2A_1} = x - p$

Exercice IV :

Relation de conjugaison avec origine aux points nodaux

Etape 1 Déterminons les points nodaux
Matrice de transfert :

$$T(S_1S_2) = \mathcal{R}(S_2)\mathfrak{T}(\overline{S_1S_2})\mathcal{R}(S_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\overline{S_1S_2}}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - V_1\frac{\overline{S_1S_2}}{n} & \frac{\overline{S_1S_2}}{n} \\ -\left(V_1 + V_2 - V_1V_2\frac{\overline{S_1S_2}}{n}\right) & 1 - V_2\frac{\overline{S_1S_2}}{n} \end{bmatrix}$$

On a :

$$V_1 = \frac{n - 1}{\overline{S_1C}} = \frac{1{,}5 - 1}{50 \times 10^{-2}} \qquad soit\ V_1 = 1\delta$$

$$V_2 = \frac{1-n}{\overline{S_2C}} = \frac{1-1{,}5}{-50\times 10^{-2}} \qquad soit\ V_2 = 1\delta$$

$$1 - V_1\frac{\overline{S_1S_2}}{n} = 1 - V_2\frac{\overline{S_1S_2}}{n} = 1 - 1*\frac{2*0{,}5}{1{,}5} = \frac{1}{3} \quad et \quad V_1 + V_2 - V_1V_2\frac{\overline{S_1S_2}}{n} = -\frac{4}{3}$$

D'où

$$T(S_1S_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- points nodaux

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\overline{S_1N} = f(T_{22}-1) \qquad or \quad f = -\frac{1}{V} = \frac{1}{T_{21}}$$

$$\rightarrow \overline{S_1N} = \frac{T_{22}-1}{T_{21}} \qquad ; AN: \overline{S_1N} = \frac{\frac{1}{3}-1}{-\frac{4}{3}} = 50\ cm$$

$$d'où\ N \equiv C$$

$$\overline{S_2N'} = f'^{(T_{11}-1)} = -\frac{1}{T_{21}}(T_{11}-1) \ ; AN:\ \overline{S_2N'} = \frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{4}{3}} = -50\ cm$$

$$donc\ N' \equiv C$$

<u>Conclusion</u> : $N \equiv N' \equiv C$

Matrice de transfert avec origine aux points nodaux :

On a $T(NN') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \quad avec\ V = \frac{4}{3}$

$$\rightarrow T(NN') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice de conjugaison :

Soient A et A' deux points conjugués par le système,

On a $A \rightarrow N \rightarrow N' \rightarrow A'$

Donc $$M(AA') = \mathcal{T}(\overline{N'A'})T(NN')\mathcal{T}(\overline{NA})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \overline{N'A'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \overline{AN} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{4}{3}\overline{N'A'} & \overline{N'A'} + \overline{AN}\left(1 - \frac{4}{3}\overline{N'A'}\right) \\ -\frac{4}{3} & 1 - \frac{4}{3}\overline{AN} \end{bmatrix}$$

Or $m_{12} = 0$ $\quad car\ A\ et\ A'\ sont\ conjugués$

$$\leftrightarrow \overline{N'A'} + \overline{AN}\left(1 - \frac{4}{3}\overline{N'A'}\right) = 0$$

$$\leftrightarrow \overline{N'A'} = \overline{NA}\left(1 - \frac{4}{3}\overline{N'A'}\right)$$

$$\leftrightarrow \overline{N'A'} = \overline{NA} - \frac{4}{3}\overline{N'A'} * \overline{NA}$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{\overline{N'A'}} - \frac{4}{3} = \frac{1}{\overline{NA}}$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{\overline{N'A'}} - \frac{1}{\overline{NA}} = \frac{4}{3}$$

Conclusion la relation de conjugaison s'écrit : $\frac{1}{\overline{N'A'}} - \frac{1}{\overline{NA}} = \frac{4}{3}$ $;avec\ \ N' \equiv N \equiv C$

Exercice V :

Matrice de changement de direction :

Il est clair que :

$$[T_1T_2] = \begin{bmatrix} \frac{14}{15} & \frac{1}{15} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad et\ \det[T_1T_2] = \frac{2}{5}$$

Déterminons $n, R_1 et\ \ R_2$

Deuxième loi de descartes :$sini_1 = n * sini_2$

$$or\ sini_1 \approx i_1 \approx tani_1; de\ même\ pour\ i_2.$$

Ainsi, $sini_1 = \frac{\overline{MH}}{\overline{HT_1}} = \frac{30}{200} = \frac{3}{20}$ $\quad et \quad sini_2 = \frac{\overline{T_2I}}{\overline{T_1T_2}} = \frac{1}{10}$

$$d'où \quad n = \frac{sini_1}{sini_2} = \frac{3}{2}$$

Donc $n = 1{,}5$

$$R_1 et\ R_2 = ??$$

Il est clair que N est le foyer objet du premier dioptre (voir figure)

$$\overline{T_1N} = f_1 = \frac{R_1}{1-n} \quad \rightarrow \quad R_1 = (1-n)\overline{T_1N}$$

$$AN: \quad R_1 = (1-1{,}5) * (-1000)$$

$$R_1 = 50\ cm$$

De même, N' est le foyer image du deuxième dioptre (voir figure)

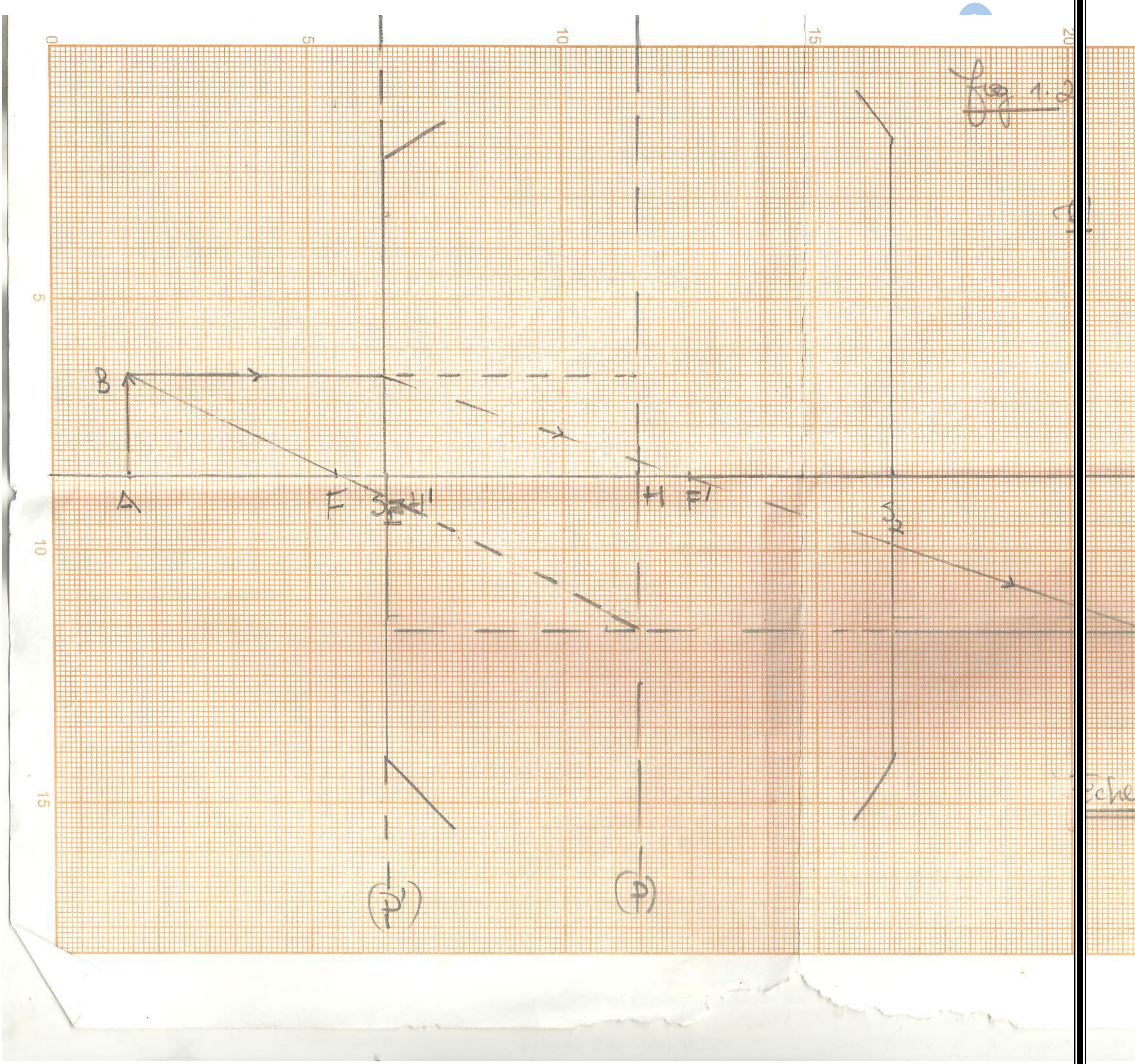
$$\rightarrow \overline{T_2N'} = f_2' = \frac{nR_2}{1-n} \quad \rightarrow \quad R_2 = (1-n)\overline{T_2N'}$$

$$AN: \quad R_2 = (1-1{,}5) * 1000$$

$$R_2 = -50\ cm$$

Conclusion :$n = 1{,}5 \quad ; \quad R_1 = 50\ cm \quad et \quad R_2 = -50\ cm$

SCHEMAS D'OPTIQUE 2013-2014



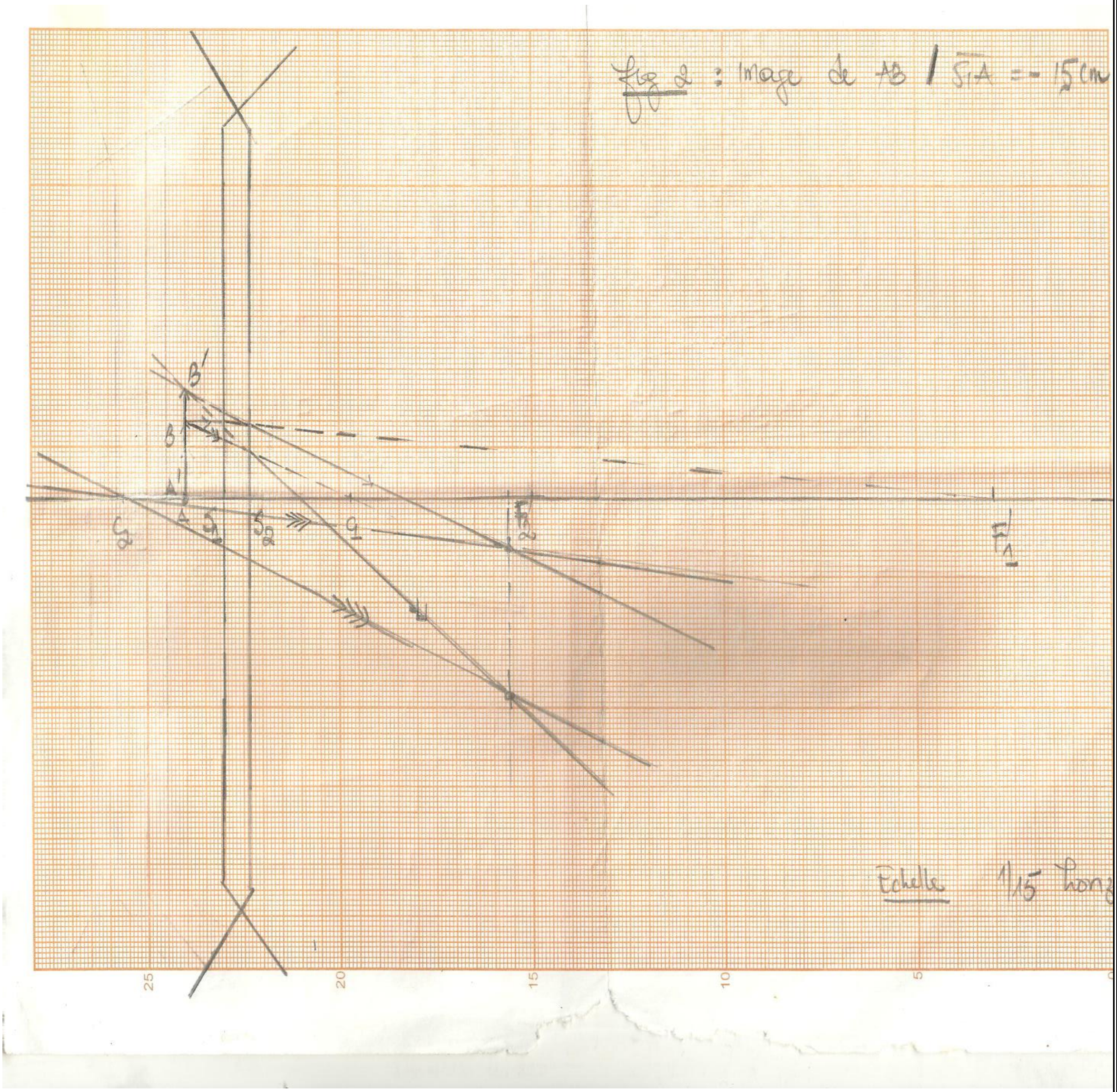


fig 2 : Image de AB / $\overline{S_1A}$ = - 15cm
B'
B
A'
A
C2
S1
S2
C1
F2
F'1
Echelle 1/15 horiz
25
20
15
10
5

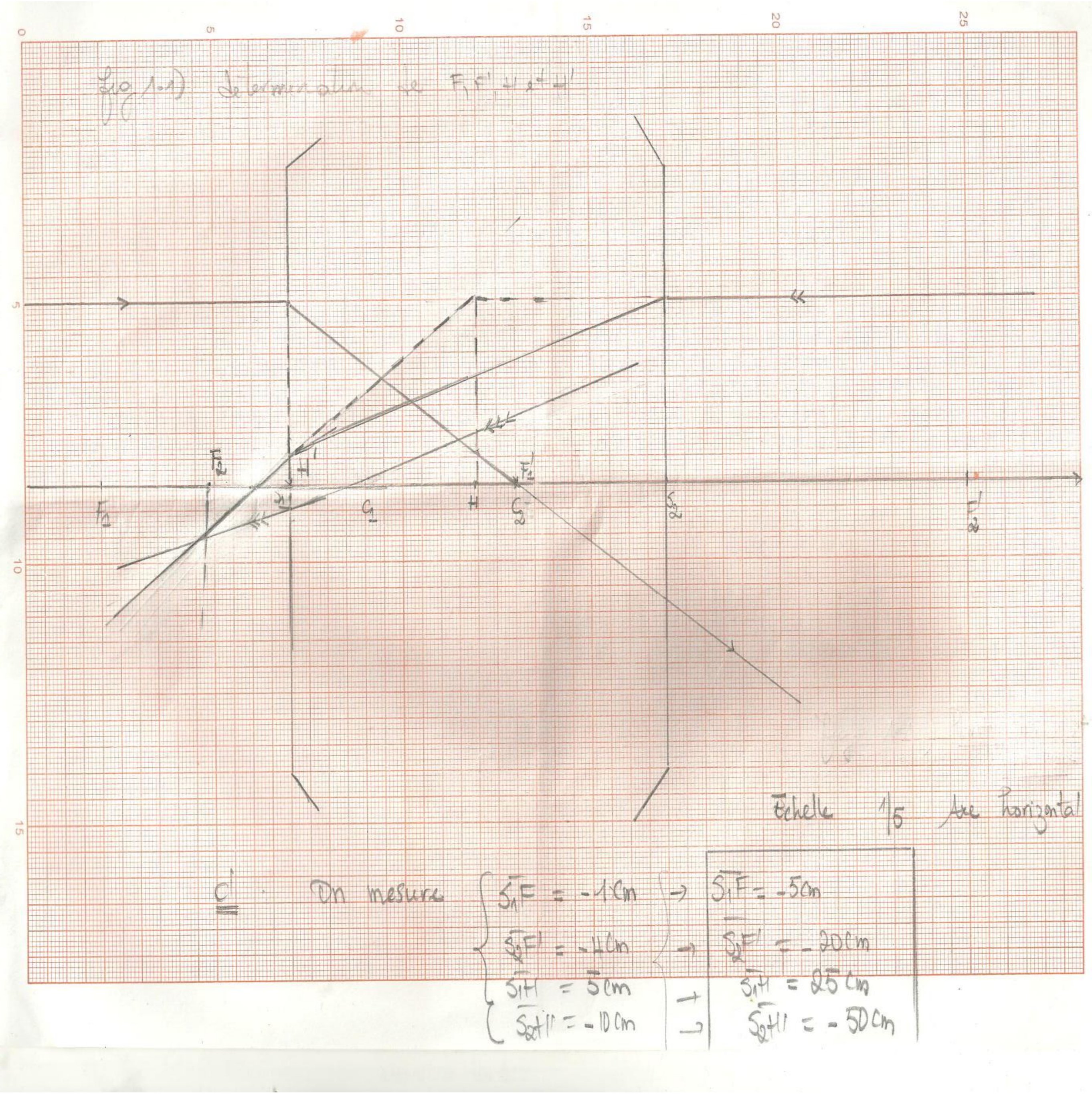


fig 1-1) Détermination de F, F', H et H'
F1
F2
H'
H
G1
G2
F'1
S2
F'2
Echelle 1/5 Axe horizontal
c' On mesure
S1F = -1 cm
S2F' = -4 cm
S1H = 5 cm
S2H' = -10 cm
S1F = -5 cm
S2F' = -20 cm
S1H = 25 cm
S2H' = -50 cm