Enoncés : V. Mayer
Corrections : A. Bodin

# Compacité

### Exercice 1

Soit $X$ un espace métrique.

1. Soit $A$ et $B$ deux compacts disjoints dans $X$. Montrer qu'ils possèdent des voisinages ouverts disjoints (commencer par le cas où $B$ est réduit à un point).
2. Soit $K$ un compact non vide de $X$ et $U$ un ouvert de $X$ contenant $K$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication :
$$d(x,K) < r \Rightarrow x \in U \ .$$

Indication ▼ Correction ▼ [002370]

### Exercice 2

Montrer qu'une suite convergente et sa limite forment un ensemble compact.

Indication ▼ Correction ▼ [002371]

### Exercice 3

Soient $K, F \subset \mathbb{R}^n$ des parties non vides, $K$ compact et $F$ fermé. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tel que $\|a-b\| = \mathrm{dist}(K,F)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002372]

### Exercice 4

Soit $E$ un espace compact et soit $(F,d)$ un espace métrique. Soit $f : E \to F$ une application localement bornée, ce qui signifie que, pour tout $y \in E$, il existe un voisinage $V_y$ de $y$ sur lequel $f$ est bornée. Montrer que $f$ est bornée sur $E$.

Correction ▼ [002373]

### Exercice 5

Soit $X$ un espace métrique.

1. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés de $X$ et soit $(x_n)_n$ une suite convergente telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \bigcap_{n\geq 0} F_n \ .$$
Donner un exemple pour lequel $\bigcap_{n\geq 0} F_n = \emptyset$.
2. Soit maintenant $(K_n)_n$ une suite décroissante de *compacts* non vides de $X$. Vérifier que $K = \bigcap_{n\geq 0} K_n$ est non vide et que tout ouvert $\Omega$ qui contient $K$ contient tous les $K_n$ à partir d'un certain rang.

Correction ▼ [002374]

### Exercice 6

Soit $X$ un espace topologique et $f : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g : x \in X \to \int_0^1 f(x,y)\,dy$ est continue.

Correction ▼ [002375]

### Exercice 7

Soit $E$ un espace normé. Si $A$ et $B$ sont deux parties de $E$, on note $A+B$ l'ensemble $\{a+b \ ; \ a \in A \text{ et } b \in B\}$.

1. Montrer que si $A$ est compact et $B$ est fermé, alors $A+B$ est fermé.
2. Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}^2$ dont la somme n'est pas fermé.

Indication ▼ Correction ▼ [002376]

## Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Elle est dite *propre* si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est compact.

1. Montrer que, si $f$ est propre, alors l'image par $f$ de tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.
2. Établir l'équivalence suivante : l'application $f$ est propre si et seulement si elle a la propriété :

$$\|f(x)\| \to \infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \to \infty\,.$$

Indication ▼ Correction ▼ [002377]

## Exercice 9

Soit $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$. On munit $E$ de la métrique $d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$. Montrer que la boule unité fermée de $E$ n'est pas compact (on pourra construire une suite dont aucune sous suite n'est de Cauchy).

Que peut-on dire de la boule unité fermée de $l^\infty$ (l'espace des suites bornées muni de la norme sup) ?

Correction ▼ [002378]

## Exercice 10

Soit $(X,d)$ un espace métrique, soit $(Y,\delta)$ un espace métrique compact et soit $f : X \to Y$ une application dont le graphe

$$G = \{(x, f(x))\, x \in X\} \subset X \times Y$$

est fermé dans $X \times Y$. Notons $p : G \to X$ et $q : G \to Y$ les restrictions des deux projections $p(x,y) = x$ et $q(x,y) = y$. Montrer que $p$ est un homéomorphisme de $G$ sur $X$. En déduire que $f$ est continue. [002379]

## Exercice 11

Soit $(X,d)$ un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y) \quad \text{pour tout } x,y \in X\ , x \neq y\,.$$

Le but ici est de montrer que $f$ a un unique point fixe $p \in X$.

1. Justifier que $f$ peut avoir au plus un point fixe.
2. Montrer que les ensembles $X_n = f^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n\geq 0} X_n$ n'est pas vide.
3. Montrer que $Y$ est un ensemble invariant, i.e. $f(Y) = Y$, et en déduire que le diamètre de cet ensemble est zero.
4. Conclure que $f$ a un unique point fixe $p \in X$ et que pour tout $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0) \to p$, lorsque $n \to \infty$.

Indication ▼ Correction ▼ [002380]

## Exercice 12

Soient $(E,d)$ un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x,y) \quad \text{pour tout } \ x,y \in E\,.$$

On se propose de montrer que $f$ est une isométrie surjective. Soient $a,b \in E$ et posons, pour $n \geq 1$, $a_n = f^n(a) = f \circ f^{n-1}(a)$ et $b_n = f^n(b)$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \geq 1$ tel que $d(a, a_k) < \varepsilon$ et $d(b, b_k) < \varepsilon$ (Considérer une valeur d'adhérence de la suite $z_n = (a_n, b_n)$).
2. En déduire que $f(E)$ est dense dans $E$ et que $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$ (Considérer la suite $u_n = d(a_n, b_n)$).

Correction ▼ [002381]

### Exercice 13

On se donne une métrique $d$ sur $X = [0, 1]$ telle que l'identité $i : (X, |.|) \to (X, d)$ soit continue (i.e. la topologie définie par $d$ est moins fine que la topologie usuelle de $X$).

1. Montrer que tout sous-ensemble de $X$ compact pour la topologie usuelle est aussi compact pour la topologie définie par $d$ ; puis montrer cette propriété pour les fermés.
2. En déduire que la topologie définie par $d$ est la topologie usuelle.

Correction ▼ [002382]

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

1. Remarquer si $U_a$ est un voisinage de $a$, alors $A \subset \bigcup_{a\in A} U_a$.
2. Raisonner par l'absurde et construire une suite $(x_n)$ dont aucun élément n'est dans $U$ et une suite $(y_n)$ de $K$. Quitte à extraire une sous-suite se débrouiller pour qu'elle converge vers la même limite.

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

Utiliser qu'un ensemble $K$ est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de $K$ on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de $K$.

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

Extraire des sous-suites...

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

On pourra utiliser la caractérisation de la fermeture par des suites.

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

1. Utiliser la caractérisation de la fermeture par des suites.
2. Remarquer que "$\|f(x)\| \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$" est équivalent à

$$\text{“}\forall M > 0 \quad \exists m > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad (x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)).''$$

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

1. ...
2. Utiliser l'exercice 4.
3. Montrer $f(Y) \subset Y$ puis $Y \subset f(Y)$.
4. Diamètre zéro implique ensemble réduit à un singleton.

---

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. (a) Si $A$ est compact et $B = \{b\}$ avec $b \notin A$. Soit $a \in A$ alors $a \neq b$ donc il existe un voisinage ouvert de $a$, $U_a$ et un voisinage ouvert de $b$, $V_a$ tels que $U_a \cap V_a = \varnothing$. Bien évidemment $A \subset \bigcup_{a\in A} U_a$. Comme $A$ est compact on peut extraire un ensemble fini $\mathscr{A} \subset A$ tel que $A \subset \bigcup_{a\in\mathscr{A}} U_a =: U^b$. Notons alors $V^b := \bigcap_{a\in\mathscr{A}} V_a$. $U^b$ est ouvert comme union d'ouverts et $V^b$ est ouvert comme intersection *finie* d'ouverts. De plus $U^b \cap V^b = \varnothing$.

   (b) Maintenant $B$ est compact. Pour chaque $b \in B$ le point précédent nous fournit $U^b$ et $V^b$ disjoints qui sont des voisinages ouverts respectifs de $A$ et $b$. On a $B \subset \bigcup_{b\in B} V^b$. On extrait un ensemble fini $\mathscr{B}$ de telle sorte que $B \subset \bigcup_{b\in\mathscr{B}} V^b =: V'$. $V'$ est un voisinage ouvert de $B$. Et si $U' := \bigcap_{b\in\mathscr{B}} U^b$ alors $U'$ est un ouvert contenant $A$, et $U' \cap V' = \varnothing$.

2. Supposons que ce ne soit pas vrai alors

$$\forall r > 0 \quad \exists x \in X \qquad (d(x,K) < r) \text{ et } x \notin U.$$

   En prenant $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ nous obtenons une suite $(x_n)$ tel que $d(x_n,K) < \frac{1}{n}$ et $x_n \notin U$. Comme $d(x_n,K) < \frac{1}{n}$ alors il existe $y_n \in K$ tel que $d(x_n,y_n) < \frac{1}{n}$. Nous avons une suite $(y_n)$ dans $K$ compact donc on peut en extraire une sous-suite $y_{\phi(n)}$ qui converge ; notons $\ell$ sa limite, alors $\ell \in K$ car $K$ est compact.
   Regardons la suite extraite $(x_{\phi(n)})$, montrons quelle converge également vers $\ell$ :

$$d(x_{\phi(n)},\ell) \leq d(x_{\phi(n)},y_{\phi(n)}) + d(y_{\phi(n)},\ell)$$

   Les deux termes à droite de l'inégalité tendent vers 0, donc $(x_{\phi(n)})$ tend vers $\ell$. Soit $F = X \setminus U$ alors $F$ est une fermé (car $U$ est ouvert) et $(x_{\phi(n)}) \in F$ donc la limite $\ell$ est dans $F$ également. Donc $\ell \notin U$ et comme $K \subset U$ alors $\ell \notin K$. Nous avons montrer deux choses contradictoires $\ell \in K$ et $\ell \notin K$ ce qui prouve le résultat demandé.

---

## Correction de l'exercice 2 ▲

Nous allons utiliser le fait qu'un ensemble $K$ est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de $K$ on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de $K$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et soit $\ell$ sa limite. Notons

$$K = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}.$$

Soit $(v_n)$ une suite d'éléments de $K$. Si $(v_n)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut extraire une sous-suite constante, donc convergente. Sinon $(v_n)$ prend une infinité de valeurs. Nous allons construire une suite convergente$(w_n)$ extraite de $(v_n)$. Soit $w_0$ le premier des $(v_0,v_1,v_2,\ldots)$ qui appartient à $\{u_0,u_1,\ldots\}$. Soit $w_1$ le premier des $(v_1,v_2,\ldots)$ qui appartient à $\{u_1,u_2,\ldots\}$... Soit $w_n$ le premier des $(v_n,v_{n+1},\ldots)$ qui appartient à $\{u_n,u_{n+1},\ldots\}$. Alors $(w_n)$ est une suite-extraite de $(v_n)$ et par construction $(w_n)$ converge vers la limite de $(u_n)$, donc vers $\ell \in K$.

---

## Correction de l'exercice 3 ▲

1. Notons $\ell = \mathrm{dist}(K,F)$. Alors il existe $(x_n)$ suite d'éléments de $K$ et $(y_n)$ suite d'éléments de $F$ telles que $\|x_n - y_n\| \to \ell$. Comme $K$ est compact alors on peut extraire de $(x_n)$ une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge dans $K$. Notons $a \in K$ cette limite Alors la suite extraite $(y_{\phi(n)})$ est bornée car

$$\|y_{\phi(n)}\| \leq \|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\| + \|x_{\phi(n)}\|.$$

   La suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge est donc bornée, et la suite $(\|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\|)$ qui converge dans $\mathbb{R}$ (vers $\ell$) est bornée également. Donc la suite $(y_{\phi(n)})$ est bornée on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(y_{\phi\circ\psi(n)})$. De plus comme $F$ est fermé alors cette suite converge vers $b \in F$. La suite $(x_{\phi\circ\psi(n)})$ extraite de $(x_{\phi(n)})$ converge vers $a \in K$. Et comme nous avons extrait deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ on a toujours $\|x_{\phi\circ\psi(n)} - y_{\phi\circ\psi(n)}\| \to \ell$. A la limite nous obtenons $\|a - b\| = \ell$ avec $a \in K$ et $b \in F$.

2. Remarque : si $K$ était supposé fermé mais pas compact alors le résultat précédent pourrait être faux. Par exemple pour $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1 \text{ et } y \geq 0\}$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$ nous avons $d(K,F) = 0$ mais $K \cap F = \varnothing$.

---

**Correction de l'exercice 4 ▲**

Comme $E$ est compact et $E \subset \bigcup_{y \in E} V_y$ il existe un ensemble fini $\mathscr{Y} \subset E$ tel que $E \subset \bigcup_{y \in \mathscr{Y}} V_y$. Sur chaque voisinage $V_y$, $f$ est bornée par une constante $M_y$. Notons $M = \max_{y \in \mathscr{Y}} M_y$. Alors $f$ est bornée sur $E$ par $M$. En effet pour un élément quelconque $x \in E$, il existe $y \in \mathscr{Y}$ tel que $y \subset V_y$ donc $f(x)$ est bornée par $M_y$ donc par $M$.

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

1. Soit $x = \lim x_n$. Soit $N \in \mathbb{N}$ ; montrons que $x$ est dans $F_N$. On a $x_N \in F_N$, $x_{N+1} \in F_{N+1} \subset F_N$, $x_{N+2} \in F_{N+2} \subset F_{N+1} \subset F_N$, etc. Donc pour tout $n \geq N$ alors $x_n \in F_N$. Comme $F_N$ est fermé, alors la limite $x$ est aussi dans $F_N$. Ceci étant vrai quelque soit $N$, alors $x \in \bigcap_N F_N$.

   Pour construire un exemple comme demandé il est nécessaire que de toute suite on ne puisse pas extraire de sous-suite convergente. Prenons par exemple dans $\mathbb{R}$, $F_n = [n, +\infty[$, alors $\bigcap_n F_n = \varnothing$.
2. (a) Pour chaque $n$ on prend $x_n \in K_n$, alors pour tout $n$, $x_n \in K_0$ qui est compact donc on peut extraire une sous-suite convergente. Si $x$ est la limite de cette sous-suite alors $x \in K$. Donc $K$ est non vide.

   (b) Par l'absurde supposons que c'est faux, alors

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N \quad \exists x_n \in K_n \text{ tel que } x_n \notin \Omega.$$

   De la suite $(x_n)$, on peut extraire une sous-suite $x_{\phi(n)}$ qui converge vers $x \in K$. Or $x_n \in X \setminus \Omega$ qui est fermé donc $x \in X \setminus \Omega$. Comme $K \subset \Omega$ alors $x \notin K$ ce qui est contradictoire.

---

**Correction de l'exercice 6 ▲**

Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$.

1. Pour tout $y \in [0,1]$ $f$ est continue en $(x,y)$ donc il existe un $U(y)$ voisinage de $x$ et $[a(y), b(y)]$ voisinage de $y$ tel que pour $(x', y') \in U(y) \times [a(y), b(y)]$ on ait $|f(x,y) - f(x',y')| \leq \varepsilon$.
2. Comme $[0,1] \subset \bigcup_{y \in [0,1]} [a(y), b(y)]$ et que $[0,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$ il existe un ensemble fini $\mathscr{Y}$ tel que $[0,1] \subset \bigcup_{y \in \mathscr{Y}} [a(y), b(y)]$. De plus quitte à réduire les intervalles ont peut supposer qu'il sont disjoints et quitte à les réordonner on peut supposer que ce recouvrement s'écrit :

$$[0,1] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \ldots [t_k, 1].$$

3. Notons $U = \bigcap_{y \in \mathscr{Y}} U(y)$, c'est un voisinage de $x$ car l'intersection est finie. Pour $x' \in U$ nous avons

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(x')| &= \left| \int_0^1 f(x,y)dy - \int_0^1 f(x',y)dy \right| \\
&\leq \int_0^1 |f(x,y) - f(x',y)| dy \\
&\leq \int_0^{t_1} |f(x,y) - f(x',y)| dy + \int_{t_1}^{t_2} \cdots + \int_{t_k}^1 |f(x,y) - f(x',y)| dy \\
&\leq \varepsilon(t_1 - 0) + \varepsilon(t_2 - t_1) + \cdots + \varepsilon(1 - t_k) \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

   Donc $g$ est continue.

---

**Correction de l'exercice 7 ▲**

1. Pour montrer que $A+B$ est fermé, nous allons montrer que toute suite de $A+B$ qui converge, converge vers un élément de $A+B$. Soit $(x_n)$ un suite de $A+B$ qui converge vers $x \in E$. Alors il existe $a_n \in A$ et $b_n \in B$ tel que $x_n = a_n + b_n$. Comme $A$ est compact on peut extraire une sous-suite $(a_{\phi(n)})$ qui converge vers $a \in A$. Alors $b_{\phi(n)} = x_{\phi(n)} - a_{\phi(n)}$ est convergente vers $x-a$. Notons $b = x-a$ comme $B$ est fermé alors $b \in B$. Maintenant $x = a+b$ donc $x \in A+B$.
2. Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 1 \text{ et } x \geq 0\}$ , soit $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0 \text{ et } x \geq 0\}$. Alors $F+G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\} \cup \{0\} \times [0,+\infty[$ qui n'est pas un fermé (ni un ouvert).

---

**Correction de l'exercice 8 ▲**

1. Supposons $f$ propre et soit $F$ un fermé. Montrons que $f(F)$ est un fermé. Soit $(y_n)$ une suite de $f(F)$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Notons $K$ l'union de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et de $\{y\}$. Alors $K$ est compact. Comme $y_n \in f(F)$, il existe $x_n \in F$ tel que $f(x_n) = y_n$. En fait $x_n \in f^{-1}(K)$ qui est compact car $f$ est propre. Donc de $(x_n)$ on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$, on note $x$ la limite de cette sous-suite. Comme $x_{\phi(n)} \in F$ et que $F$ est fermé alors $x \in F$. Comme $f$ est continue alors $y_{\phi(n)} = f(x_{\phi(n)})$ tend vers $f(x)$, or $y_{\phi(n)}$ tend aussi vers $y$. Par unicité de la limite $y = f(x)$. Donc $y \in f(F)$ et $f(F)$ est fermé.
2. Dire $\|f(x)\| \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$ est équivalent à
$$\forall M > 0 \quad \exists m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)).$$
   (a) Supposons $f$ propre, soit $M > 0$. Alors $B(0,M)$ est un compact (nous sommes dans $\mathbb{R}^n$) donc $f^{-1}(B(0,M))$ est compact donc borné, c'est-à-dire qu'il existe $m > 0$ tel que $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Donc si $x \notin B(0,m)$ alors $f(x) \notin B(0,M)$.
   (b) Réciproquement, soit $K$ un compact de $\mathbb{R}^n$. Comme $f$ est continue et que $K$ est fermé alors $f^{-1}(K)$ est un fermé. Reste à montrer que $f^{-1}(K)$ est borné. Comme $K$ est compact alors il existe $M > 0$ tel que $K \subset B(0,M)$, par hypothèse il existe $m > 0$ tel que si $x \notin B(0,m)$ alors $f(x) \notin B(0,M)$, ce qui s'écrit aussi par contraposition : "si $f(x) \in B(0,M)$ alors $x \in B(0,m)$", donc $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Or $K \subset B(0,M)$ donc $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Donc $f^{-1}(K)$ est borné donc compact.

---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

1. Soit $f_n$ la fonction affine suivante $f_n(t) = 0$ pour $t \in [0, \frac{1}{n+1}]$ et pour $t \in [\frac{1}{n}, 1]$. Sur $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ on définit une "dent" qui vaut 0 aux extrémités et 1 au milieu du segment. Alors si $B$ dénote la boule unité fermée (centrée en la fonction nulle), nous avons $d_\infty(f_n, 0) = \sup |f_n(t)| = 1$ donc $f_n \in B$. Par contre si $p \neq q$ alors $d(f_p, f_q) = 1$ donc la suite $(f_n)$ et toute sous-suite ne sont pas de Cauchy. Si $B$ était compact alors on pourrait extraire une sous-suite convergente donc de Cauchy. Contradiction.
2. Notons $x^n = (0,0,\ldots,0,1,0,0,\ldots)$ la suite de $l^\infty$ (le 1 est à la $n$-ième place). Alors $x^n$ est dans la boule unité fermée $B$ centrée en 0. De plus si $p \neq q$, alors $d_\infty(x^p, x^q) = 1$. Donc toute sous-suite extraite de $(x_n)$ n'est pas de Cauchy donc ne peut pas converger. Donc $B$ n'est pas compact.

---

**Correction de l'exercice 11 ▲**

1. Si $f$ a deux points fixes $x \neq y$, alors $d(x,y) = d(f(x), f(y)) < d(x,y)$. Ce qui est absurde. Donc $f$ a au plus un point fixe.
2. $f$ est continue et $X$ compact donc $X_1 = f(X)$ est compact, par récurrence si $X_{n-1}$ est compact alors $X_n = f(X_{n-1})$ est compact. De plus $f : X \to X$, donc $f(X) \subset X$ soit $X_1 \subset X$, puis $f(X_1) \subset f(X)$ soit $X_2 \subset X_1$, etc. Par récurrence $X_n \subset X_{n-1} \subset \cdots \subset X_1 \subset X$. Comme chaque $X_n$ est non vide alors $Y$ n'est pas vide (voir l'exercice 4).
3. Montrons d'abord que $f(Y) \subset Y$. Si $y \in Y$, alors pour tout $n \geq 0$ on a $y \in X_n$ donc $f(y) \in f(X_n) = X_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$. Donc pour tout $n > 0$, $f(y) \in X_n$, or $f(y) \in X_0 = X$. Donc $f(y) \in Y$.

Réciproquement montrons $Y \subset f(Y)$. Soit $y \in Y$, pour chaque $n \geq 0$, $y \in X_{n+1} = f(X_n)$. Donc il existe $x_n \in X_n$ tel que $y = f(x_n)$. Nous avons construit $(x_n)$ une suite d'élément de $X$ compact, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$. Notons $x$ la limite, par l'exercice 4, $x \in Y$. Alors $y = f(x_{\phi(n)})$ pour tout $n$ et $f$ est continue donc à la limite $y = f(x)$. Donc $y \in f(Y)$.

Soit $y \neq y' \in Y$ tel que $d(y,y') = \operatorname{diam} Y > 0$. Comme $Y = f(Y)$ alors il existe $x, x' \in Y$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Or $d(y,y') = d(f(x), f(x')) < d(x,x')$. On a trouvé deux élements de $Y$ tel $d(x,x')$ est strictement plus grand que le diamètre de $Y$ ce qui est absurde. Donc $y = y'$ et le diamètre est zéro.

4. Comme le diamètre est zéro alors $Y$ est composé d'un seul point $\{p\}$ et comme $f(Y) = Y$ alors $f(p) = p$. Donc $p$ a un point fixe et nous savons que c'est le seul. Par la construction de $Y$ pour tout point $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0)$ converge vers $p$.

---

**Correction de l'exercice 12 ▲**

1. Comme $E \times E$ est compact alors de la suite $(a_n, b_n)$ on peut extraire une sous-suite $(a_{\phi(n)}, b_{\phi(n)})$ qui converge vers $(a_\infty, b_\infty)$. Soit $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq n$ alors $d(a_{\phi(k)}, a_\infty) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(b_{\phi(k)}, b_\infty) < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc en particulier $d(a_{\phi(n+1)}, a_{\phi(n)}) \leq d(a_{\phi(n+1)}, a_\infty) + d(a_\infty, a_{\phi(n)}) < \varepsilon$. La propriété pour $f$ s'écrit ici $d(a_k, b_{k'}) \leq d(a_{k+1}, b_{k'+1}) \geq$. Donc $d(a_{\phi(n+1)-\phi(n)}, a_0) \leq d(a_{\phi(n+1)-\phi(n)+1}, a_1) \leq \ldots \leq d(a_{\phi(n+1)-1}, a_{\phi(n)-1}) \leq d(a_{\phi(n+1)}, a_{\phi(n)}) < \varepsilon$. Donc pour $k = \phi(n+1) - \phi(n)$, sachant que $a_0 = a$ alors $d(a_k, a) < \varepsilon$. Même chose avec $(b_n)$.
2. (a) Soit $a \in E$ et $\varepsilon > 0$ alors il existe $k \geq 1$ tel que $a_k = f^k(a) \in f(E)$ avec $d(a, a_k) < \varepsilon$. Donc $f(E)$ est dense dans $E$.

   (b) Soit $u_n = d(a_n, b_n)$. Alors par la propriété pour $f$, $(u_n)$ est une suite croissante de $\mathbb{R}$. Comme $E$ est compact alors son diamètre est borné, donc $(u_n)$ est majorée. La suite $(u_n)$ est croissante et majorée donc converge vers $u$.

   Maintenant $u_n - u_0 \geq 0$ et
   $$0 \leq u_n - u_0 = d(a_n, b_n) - d(a,b) \leq d(a_n, a) + d(a,b) + d(b, b_n) - d(a,b) = d(a_n, a) + d(b_n, b).$$
   Donc $u_n$ tend vers $u_0$. Comme $(u_n)$ est croissante alors $u_n = u_0$ pour tout $n$. En particulier $u_1 = u_0$ donc $d(a_1, b_1) = d(a_0, b_0)$ soit $d(f(a), f(b)) = d(a,b)$. Donc $f$ est une isométrie.

   (c) $f$ est une isométrie donc continue (elle est 1 lipschitzienne !). $E$ est compact donc $f(E)$ est compact donc fermé or $f(E)$ est dense donc $f(E) = E$. Donc $f$ est surjective

---

**Correction de l'exercice 13 ▲**

Dire que $i : (X, |.|) \to (X, d)$ est continue c'est exactement dire que tout ensemble $U$ ouvert pour $d$ est ouvert pour $|.|$ (car $i^{-1}(U) = U$).

1. Soit $K$ un compact pour $|.|$. Soit $U_i$, $i \in I$ tels que $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ et tels que $U_i$ soient des ouverts pour $d$. Alors les $U_i$ sont aussi des ouverts pour la topologie définie par $|.|$. Comme $K$ est compact pour $|.|$ alors on peut extraire un ensemble fini $J \subset I$ tel que $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. Donc $K$ est aussi compact pour $d$.

   Si $F$ est un fermé pour $|.|$ alors $F \subset [0,1]$ est compact pour $|.|$ Donc compact pour $d$, donc fermé pour $d$.
2. Si $U$ est un ouvert pour $d$ alors $U$ est un ouvert pour $|.|$. Car $i$ est continue. Réciproquement si $U$ est un ouvert pour $|.|$ alors $F = X \setminus U$ est un fermé pour $|.|$ donc $F$ est un fermé pour $d$ par la question précédente, donc $U = X \setminus F$ est un ouvert pour $d$. Conclusion les ouverts pour $|.|$ et $d$ sont les mêmes donc $|.|$ et $d$ définissent la même topologie.

---