Chapitre 3

Intégrales généralisées, séries numériques

Nous allons étudier dans ce chapitre deux notions fortement liées les intégrales généralisées (ou impropres) et les séries.

3.1 Intégrales généralisées

3.1.1 Définitions et premières propriétés

On considère un intervalle ouvert $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On rappelle que pour $a < a' < b' < b$, $\int_{a'}^{b'} f(t)\, dt$ est bien définie pour toute fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Commençons par le cas d'une intégrale impropre aux extrémités d'un intervalle.

Définition 3.1.1. *Soit f une fonction continue sur $I =]a, b[$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, et $x_0 \in I$.*

1. *On dit que l'intégrale de f sur $[x_0, b[$ converge si la quantité $\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ admet une limite dans $\mathbb{K}$ quand $x \to b^-$ (ce qui signifie $x \to b$ avec $x < b$).*
   On note alors $\int_{x_0}^{b} f(t)\, dt = \lim\limits_{x \to b^-} \displaystyle\int_{x_0}^{b} f(t)\, dt$.
   De façon plus concise on dit que l'intégrale généralisée $\int_{x_0}^{b} f(t)\, dt$ converge en b,
2. *De même, on dit que $\int_{a}^{x_0} f(t)\, dt$ converge en a, si $\lim\limits_{x \to a^+} \displaystyle\int_{x}^{x_0} f(t)\, dt$ existe dans $\mathbb{K}$.*
3. *On dit que l'intégrale généralisée $\int_{a}^{b} f(t)\, dt$ converge si 1) et 2) sont vérifiées pour un certain $x_0 \in I$ et on pose $\int_{a}^{b} f(t)\, dt = \int_{a}^{x_0} f(t)\, dt + \int_{x_0}^{b} f(t)\, dt$.*

Quand l'intégrale généralisée ne converge pas, on dit que l'intégrale $\int_{x_0}^{b} f(t)\, dt$ (resp. $\int_{a}^{x_0} f(t)\, dt$ ou $\int_{a}^{b} f(t)\, dt$) diverge.

Un exemple fondamental : les intégrales généralisées de Riemann. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_\alpha(x) = x^\alpha$ qui est continue sur $I =]0, +\infty[$. Une primitive sur I est donnée par $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$ et $\ln x$ si $\alpha = -1$.
On a alors

— $\int_0^1 t^\alpha\, dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$, et $\int_0^1 t^\alpha\, dt = \frac{1}{\alpha+1}$;
— $\int_1^{+\infty} t^\alpha\, dt$ converge si et seulement si $\alpha < -1$, et $\int_1^{+\infty} t^\alpha\, dt = -\frac{1}{\alpha+1}$;
— $\int_0^{+\infty} t^\alpha\, dt$ est toujours divergente.

Remarque : Si $b < +\infty$ et si f se prolonge par continuité en b, à savoir $\lim_{x\to b^-} f(x)$ existe dans $\mathbb{K}$, on prend le prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f sur $[x_0, b]$ défini par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < b \\ \lim_{x\to b^-} f(x) & \text{si } x = b, \end{cases}$$

et la fonction $\tilde{f}$ est continue sur $[x_0, b]$. On obtient alors

$$\lim_{x\to b^-} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \lim_{x\to b^-} \int_{x_0}^{b} \tilde{f}(t)\, dt = \int_{x_0}^{b} \tilde{f}(t)\, dt,$$

en utilisant le fait que la primitive de $\tilde{f}$ définie sur $[x_0, b]$ est continue en b. C'est la même chose pour $\int_a^x f(x) dt$ si $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe dans $\mathbb{K}$.
En prenant l'intégrale généralisée de Riemann, on voit que c'est le cas pour $f = f_\alpha$ sur $]0,1[$ si $\alpha \geq 0$.
Le même exemple avec $-1 < \alpha < 0$ montre que l'intégrale peut converger en 0 sans que la fonction converge en 0.

Proposition 3.1.2. *Si $\int_{x_0}^b f(t)\, dt$ converge en b pour un $x_0 \in I =]a, b[$, alors pour tout $x_1 \in I$, l'intégrale $\int_{x_1}^b f(t)\, dt$ converge et on a*

$$\int_{x_1}^{b} f(t)\, dt = \int_{x_1}^{x_0} f(t)\, dt + \int_{x_0}^{b} f(t)\, dt$$

En conséquence la définition de la convergence de $\int_a^b f(t)\, dt$ ne dépend pas du choix de $x_0 \in I$.

Définition 3.1.3. *Soit f une fonction continue sur $[a, c[\cup]c, b]$ avec $-\infty < a < c < b < +\infty$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\, dt$ converge en c si $\int_a^c f(t)\, dt$ et $\int_c^b f(t)\, dt$ convergent en c. On pose alors*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt.$$

Plus généralement si $I =]a, b[$ et si f est continue sur $I \setminus \{c_1, \ldots, c_N\}$ avec $c_1 < c_2 \ldots < c_N$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\, dt$ converge si on peut trouver $x_0, \ldots, x_{N+1}$ avec $c_j < x_j < c_{j+1}$ pour $j = 0, \ldots, N+1$ en posant $a = c_0$ et $b = c_{N+1}$ tels que toutes les intégrales généralisées $\int_{c_j}^{x_j} f(t)\, dt$ et $\int_{x_j}^{c_{j+1}} f(t)\, dt$ convergent.

Exemples : Pour $\alpha > -1$, l'intégrale $\int_{-1}^1 |t|^\alpha\, dt$ converge. Cela signifie que $\int_{-1}^{-\varepsilon} |t|^\alpha\, dt$ et $\int_\delta^1 |t|^\alpha\, dt$ ou la somme des deux convergent quand $\varepsilon \to 0^+$ et $\delta \to 0^+$ sans imposer de relation entre ε et δ ou d'ordre dans les limites.
⚠ La quantité $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dt}{t} + \int_\varepsilon^1 \frac{dt}{t} = [\ln|t|]_{-1}^{-\varepsilon} - [\ln|t|]_\varepsilon^1 = 0$, a une limite quand $\varepsilon \to 0^+$, mais l'intégrale diverge en 0. Regarder pour cela ce qui se passe quand on change les bornes $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ en $-\varepsilon$ et $M\varepsilon$ avec $M > 0$ (cf Exercice 3.1).

Proposition 3.1.4. *Les intégrales généralisées convergentes définies comme précédemment conservent les propriétés suivantes des intégrales :*

— *La relation de Chasles* $\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$;

— *La* $\mathbb{C}$*-linéarité : Si* $\int_a^b f(t)\,dt$ *et* $\int_a^b g(t)\,dt$ *convergent alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\int_a^b \lambda f(t) + g(t)\,dt$ *converge et vaut* $\lambda \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

— *Si* f *est continue sur* $I =]a,b[\setminus \{c_1, \dots, c_N\}$ *et* $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge, alors pour tout* $x_0 \in I$ *la fonction* $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ *est continue sur* $]a,b[$ *, dérivable sur* $]a,b[\setminus \{c_1, \dots, c_N\}$ *avec pour dérivée* $f(x)$.

— *Si* f *et* g *sont deux fonctions réelles telles que* $\int_a^b f(t)\,dt$ *et* $\int_a^b g(t)\,dt$ *convergent avec* $f \leq g$ *(c'est à dire* $f(x) \leq g(x)$ *pour tout* $x \in]a,b[$*) alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

Exemple : Si f est une fonction continue par morceaux (ex. la partie entière, faire un dessin) et alors pour $x_0 \in I$ fixé $x \to \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ définit une fonction continue, dérivable en dehors des points de discontinuité de f .

Remarque : ⚠Pour les changements de variables, les intégrations par parties il est recommandé de revenir à la définition , c'est à dire considérer $\int_{x_0}^x$, faire les calculs pour cette intégrale et passer à la limite $x \to b^-$ à la fin.

3.1.2 Critères de convergence

On a vu que la convergence des intégrales généralisées en des points intérieurs se ramenait par définition à la convergence d'intégrales généralisées aux bornes de l'intervalle. Nous nous limitons à ce cas.

Proposition 3.1.5. ***(Cas des fonctions positives)*** *Soit* $I =]a,b[$ *avec* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *. Si* f *est une fonction continue et positive ou nulle sur* I *, alors pour tout* $x_0 \in I$ *les limites* $\lim_{x \to b^-} \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ *et* $\lim_{x' \to a^+} \int_{x'}^{x_0} f(t)\,dt$ *existent dans* $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *. Nous notons alors* $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x' \to a^+} \int_{x'}^{x_0} f(t)\,dt + \lim_{x \to b^-} \int_{x_0}^x f(t)\,dt$.

En résumé , pour une fonction positive ou nulle (resp. négative ou nulle) , l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$ est toujours définie dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (resp. $\mathbb{R}_- \cup \{-\infty\}$). ⚠ On dit que cette intégrale converge seulement si cette limite est finie.

Remarque : Pour deux fonctions positives on peut toujours écrire $(f \leq g) \Rightarrow (\int_a^b f(t) \leq \int_a^b g(t)\,dt)$ même si une des deux limites est $+\infty$.

⚠Il est faux de déduire $\int_a^b f(t) \leq \int_a^b g(t)\,dt$ de $f \leq g$ en général. Prenons par exemple $I =]1, +\infty[$, $g(t) = 1$ et $f(t) = \sin(t)$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ vaut $+\infty$ et l'inégalité $f(t) \leq g(t)$ assure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t) - f(t)\,dt$ a un sens au moins dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (en fait c'est $+\infty$) . Mais on ne peut pas écrire $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \leq \int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ car $\int_1^x \sin(t)\,dt = \cos(1) - \cos(x)$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$.

Règle : Chaque fois qu'on écrit une intégrale, il faut se demander le sens qu'elle a, intégrale convergente ou intégrale de fonction positive (resp. négative) dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (resp.

$\mathbb{R}_- \cup \{-\infty\})$.

Un autre exemple classique à connaître : les intégrales de Bertrand. On considère la fonction $f_{\alpha,\beta}(x) = x^\alpha |\log x|^\beta$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ ou $[2, +\infty[$avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

— L'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} t^\alpha |\log t|^\beta \, dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$ ou ($\alpha = -1$ et $\beta < -1$) .

— L'intégrale $\int_2^{+\infty} t^\alpha |\log t|^\beta \, dt$ converge si et seulement si $\alpha < -1$ ou ($\alpha = -1$ et $\beta < -1$) .

Remarque : La fonction $f_{\alpha,\beta}(x) = x^\alpha |\log(x)|^\beta$ est continue sur $]0, +\infty[$ pour $\beta \geq 0$. En revanche pour $\beta < 00$, il faut regarder l'intégrale généralisée en 1 : En posant $x = 1 + u$ et $|\log(1 + u)| \sim u$ au voisinage de 1 on voit que l'intégrale $\int_{1/2}^2 f_{\alpha,\beta}(t) \, dt$ converge pour $\beta > -1$ et diverge pour $\beta \leq -1$

Proposition 3.1.6. ***(Critère de Cauchy)*** *Pour $x_0 \in I =]a, b[$ et f continue sur I, l'intégrale généralisée $\int_{x_0}^b f(t) \, dt$ converge si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c_\varepsilon \in I, \forall x, x' \in I, \big(x, x' \geq c_\varepsilon\big) \Rightarrow \left(\left| \int_x^{x'} f(t) \, dt \right| \leq \varepsilon \right).$$

Définition 3.1.7. *Pour une fonction f continue sur $I =]a, b[$ et $x_0 \in I$, on dit que l'intégrale $\int_{x_0}^b f(t) \, dt$ est absolument convergente, ou encore que la fonction f est intégrable sur $[x_0, b[$, si $\int_{x_0}^b |f(t)| \, dt < +\infty$*

Proposition 3.1.8. *Une intégrale absolument convergente converge. De plus on a dans ce cas $|\int_{x_0}^b f(t) \, dt| \leq \int_{x_0}^b |f(t)| \, dt < +\infty$.*

Remarque : En pratique pour vérifier que l'intégrale $\int_{x_0}^b f(t) \, dt$ est absolument convergente il suffit de trouver une fonction $g \geq |f|$ telle que $\int_{x_0}^b g(t) \, dt < +\infty$. Exemple : L'intégrale complexe $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{(1+t)t} \, dt$ est absolument convergente car $|\frac{e^{it}}{(1+t)t}| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1 < +\infty$.
⚠Encore une fois si l'intégrale n'est pas absolument convergente, il faut s'assurer que l'intégrale $\int_{x_0}^b f(t) \, dt$ converge avant d'écrire $|\int_{x_0}^b f(t) \, dt| \leq \int_{x_0}^b |f(t)| \, dt = +\infty$.

3.1.3 Intégrales semiconvergentes

Définition 3.1.9. *Pour f continue sur $I =]a, b[$ et $x_0 \in I$ on dit que l'intégrale $\int_{x_0}^b f(t) \, dt$ est semiconvergente si elle converge mais n'est pas absolument convergente.*

Un exemple : L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ est semiconvergente.

Proposition 3.1.10. ***Règle d'Abel :*** *Soit $I =]a, b[$ et $x_0 \in I$. On suppose la fonction f continûment dérivable sur I, réelle et décroissante sur $[x_0, b[$ et telle que* $\lim_{x \to b^-} = 0$. *On suppose la fonction g continue et telle qu'il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\forall x, y \in [x_0, b[, \quad \left| \int_x^y g(t) \, dt \right| \leq M.$$

Alors l'intégrale $\int_{x_0}^b f(t) g(t) \, dt$ converge.

Exemple : $\int_1^{+\infty} f(t)e^{it}\ dt$ converge pour toute fonction $\mathscr{C}^1$, f, décroissante telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$.

3.2 Séries numériques

3.2.1 Séries et opérations

Définition 3.2.1. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle série de terme général a_n la suite de $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$, $\left((a_n, \sum_{k=0}^n a_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. La quantité $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ est appelée somme partielle d'indice n.*

Notation. On note parfois simplement $\sum a_n$ la série de terme général a_n. Notation qu'il ne faut pas confondre à $\sum_{k=0}^\infty a_k$ à laquelle nous allons donner un autre sens. Une autre notation utilisée est $[a_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : En fait il suffit de connaître les a_n pour connaître la série. Inversement si on connaît les sommes partielles, on peut tout retrouver avec $a_n = S_n - S_{n-1}$, avec la convention $S_{-1} = 0$. La définition insiste sur le fait qu'il faut considérer en même temps les termes et les sommes partielles.

Définition 3.2.2. *Opérations sur les séries : On considère deux séries de terme général a_n et b_n.*

Troncature *La série de terme général a_{n_0+n} est appelée série déduite de $(a_n, \sum_{k=0}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ par troncature à n_0. Pour les sommes partielles cela revient à annuler les premiers termes d'indice $< n_0$.*

Combinaison linéaire *Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), la combinaison linéaire de coefficients α et β est la série de terme général $\alpha a_n + \beta b_n$ et de somme partielle :*

$$\sum_{k=0}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha\left(\sum_{k=0}^n a_k\right) + \beta\left(\sum_{k=0}^n b_k\right).$$

Produit *La série produit est la série de terme général*

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k_1+k_2=n} a_{k_1} b_{k_2}.$$

Remarque : Pour la série produit, la somme partielle $\sum_{n=0}^N c_n = \sum_{n=0}^N \sum_{k_1+k_2=n} a_{k_1} b_{k_2} = \sum_{k_1+k_2\le N} a_{k_1} b_{k_2}$ n'est pas égal au produit des sommes partielles $(\sum_{k_1=0}^N a_{k_1})(\sum_{k_2=0}^N b_{k_2})$ (faire un dessin).

3.2.2 Séries bornées et convergentes

Définition 3.2.3. *On dit qu'une série est bornée si la suite des sommes partielles est bornée.*

Proposition 3.2.4. *La suite des termes d'une série bornée est bornée.*

Remarque : En revanche, la série n'est pas forcément bornée quand la suite des termes est bornée. Exemple : $a_n = 1$, $S_n = n$.

Définition 3.2.5. *On dit qu'une série converge (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) si la suite des sommes partielles converge (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Remarque : On utilise la même notation si la limite est $\pm\infty$ ou ∞ sans dire pour autant qu'elle converge.

Proposition 3.2.6. *Si la série de terme général a_n converge alors* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemple : La réciproque est fausse. L'exemple classique est celui de la série harmonique de terme général $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. En prenant $n = 2^p$, on a

$$\sum_{k=1}^{2^p-1} \frac{1}{k} = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{2^{j+1}} \geq \frac{p}{2} \overset{p\to\infty}{\to} +\infty .$$

Définition 3.2.7. *Si la série de terme général a_n converge, on appelle reste au rang n le nombre*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - S_n .$$

Proposition 3.2.8. *Si la série converge la suite des restes a pour limite* 0.

Exemple : La série géométrique de raison ϱ est la série de terme général $a_n = \varrho^n$. Comme la somme partielle vaut

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k = \frac{1-\varrho^{n+1}}{1-\varrho} \quad (S_n = n+1 \text{ si } \varrho = 1),$$

la série converge si et seulement si $|\varrho| < 1$. Si la série converge $\sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k = 1/(1-\varrho)$.

Exemple : Série téléscopique. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La série de terme général $a_n = u_{n+1} - u_n$ converge si et seulement si la suite converge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on a $\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} - u_n = \lim_{n\to\infty} u_n - u_0$, en vertu de :

$$u_{n+1} - u_0 = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k .$$

3.2.3 Séries positives

Théorème 3.2.9. *Une série de terme général $a_n \geq 0$ vérifie :*

- *Soit la série est bornée et alors elle converge avec $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}_+$.*
- *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.*

On a de plus l'équivalence

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0\right) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0)\,.$$

Remarque : En conséquence la somme d'une série positive est toujours définie dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Exemple : On a déjà vu (en TD) un exemple de série positive avec l'écriture décimale des réels positifs : $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k 10^{-k}$.

Proposition 3.2.10. *Principe de comparaison. Pour deux séries positives de terme général a_n et b_n et telle que $a_n \leq b_n$, l'inégalité suivante est valable dans $\overline{\mathbb{R}_+}$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,.$$

Proposition 3.2.11. *Le comportement de la somme et de la série produit de deux séries de termes $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$ est donné par*

$$\begin{array}{ll} (\textit{somme}) & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) \\ (\textit{produit}) & \displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right). \end{array}$$

avec la convention $0 \times +\infty = 0$ si l'une des deux séries est identiquement nulle.

Les deux propositions suivantes disent que pour une série positive, la somme ne dépend pas de la façon dont on ordonne et regroupe les calculs.

Proposition 3.2.12. *Associativité. Si $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers telle que $n_0 = 0$ et de limite $+\infty$, les séries positives de terme général $a_m \geq 0$ et $\sigma_m = \sum_{n=n_m}^{n_{m+1}-1} a_n$ ont même somme :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=n_m}^{n_{m+1}-1} a_n\right) \quad \textit{dans}\ \overline{\mathbb{R}_+}, \quad (a_n \geq 0)\,.$$

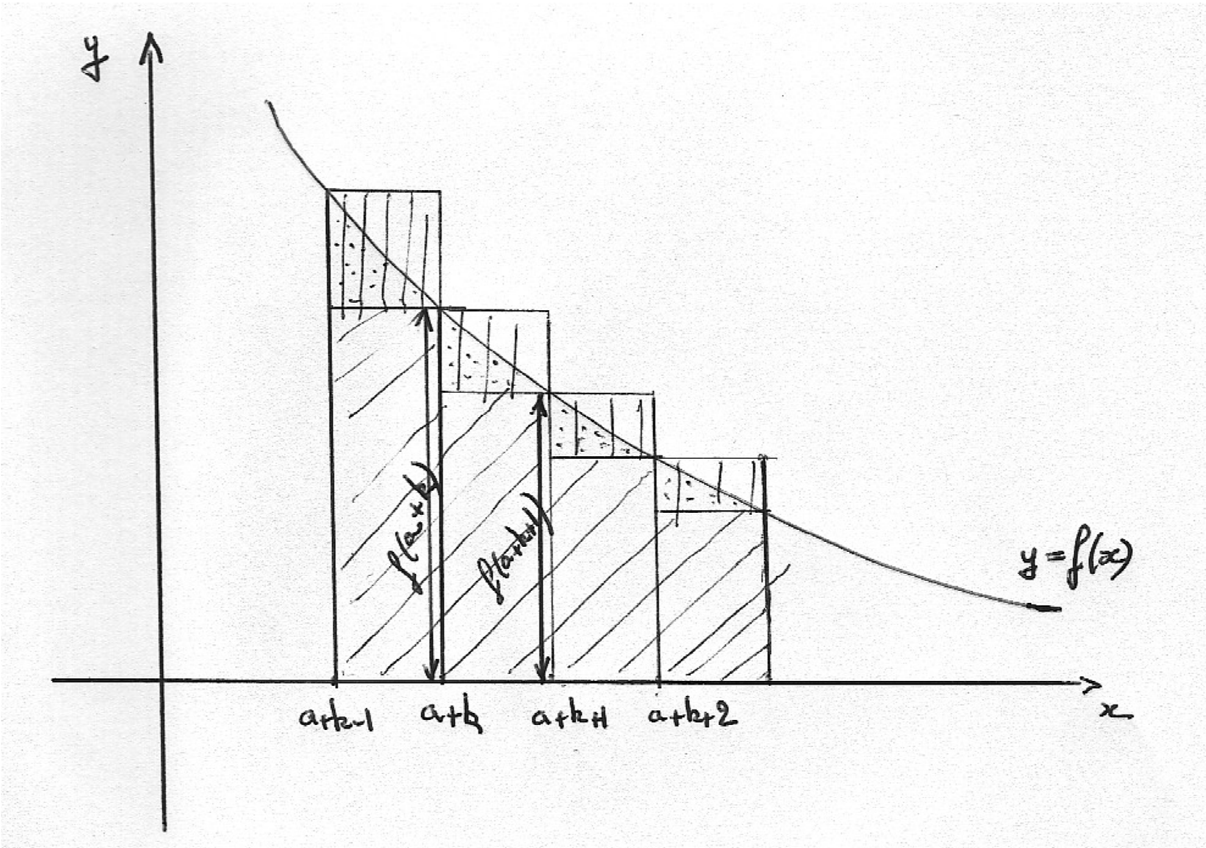
Proposition 3.2.13. *Commutativité. Si p est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ (permutation de $\mathbb{N}$), alors les séries positives de terme général $a_n \geq 0$ et $a_{p(n)}$ ont même somme.*

3.2.4 Comparaison intégrale et série

Le résultat suivant donne un moyen simple d'étudier des séries positives.

Proposition 3.2.14. *Soit f une fonction continue, positive ou nulle et décroissante sur $[a,+\infty[$. Les inégalités suivantes ont lieu dans $\overline{\mathbb{R}_+}$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(a+k) \leq \int_a^{\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{\infty} f(a+k).$$



Application

Définition 3.2.15. *On appelle série de Riemann une série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}^*$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*
On appelle série de Bertrand une série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, $n \geq 2$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.2.16. *La série de Riemann de terme $\frac{1}{n^\alpha}$, $n > 0$, converge si et seulement si $\alpha > 1$.*
La série de Bertrand de terme $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

3.2.5 Série absolument convergente

Définition 3.2.17. *On dit qu'une série de terme général a_n, réelle ou complexe, est absolument convergente si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Théorème 3.2.18. *Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, toute série absolument convergente converge. On a de plus*

$$\forall N \in \mathbb{N}, |R_N| = |\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|$$

Remarque : Pour une série positive convergence et absolue convergence signifie la même chose.

Principes de comparaison

Proposition 3.2.19. *Pour deux séries numériques de terme général a_n et b_n telles que $a_n = O(b_n)$, alors la série $\sum a_n$ est absolument convergente dès que $\sum b_n$ l'est.*

Corollaire 3.2.20. *Si les termes généraux sont équivalents $a_n \sim b_n$, alors la série $\sum a_n$ converge absolument si et seulement si $\sum b_n$ converge absolument.*

Exemple : Toute série $\sum a_n$ telle que $a_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha > 1$ est absolument convergente. Même chose si $a_n = O(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n})$, avec $\alpha > 1$, ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$) est absolument convergente.

Théorème 3.2.21. *Critère de d'Alembert. Si $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, alors la série $\sum a_n$ est absolument convergente si $L < 1$ et ne converge pas si $L > 1$*
Critère de Cauchy. Si $\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = L$ alors la série $\sum a_n$ est absolument convergente si $L < 1$ et ne converge pas si $L > 1$.

Opérations sur les séries absolument convergentes

Proposition 3.2.22. *Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la combinaison linéaire ou la série produit de deux séries absolument convergentes est absolument convergente. On a de plus les formules*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) + \beta \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Les résultats suivants permettent de regrouper les calculs comme on veut si la série converge absolument.

Proposition 3.2.23. ***Associativité.*** *Si $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers telle que $n_0 = 0$ et de limite $+\infty$ et si la série de terme général a_m est absolument convergente alors la série $\sigma_m = \sum_{n=n_m}^{n_{m+1}-1} a_n$ est absolument convergente et de même somme.*
Commutativité. *Si p est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ (permutation de $\mathbb{N}$), alors la série de terme général a_n est absolument convergente si et seulement si la série de terme général $a_{p(n)}$ l'est. Dans l'affirmative les deux séries ont même somme.*

Résumé : On a le droit de faire les même choses avec les séries absolument convergentes qu'avec les séries positives.

3.2.6 Séries semi-convergentes

Définition 3.2.24. *On dit qu'une série de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est semi-convergente si elle converge mais n'est pas absolument convergente.*

Définition 3.2.25. *On dit qu'une série de terme général $a_n \in \mathbb{R}$ est alternée si $a_n = (-1)^n |a_n|$ (ou $a_n = (-1)^{n+1} |a_n|$).*

Théorème 3.2.26. *Une série alternée de terme général a_n et telle que la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et de limite nulle, converge. De plus le reste $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n$ vérifie alors $|R_N| \leq |a_{N+1}|$ et a le même signe que a_{N+1}.*

Exemple : La série de terme général $(-1)^n n^{-1}$ est semi-convergente.
⚠On n'a pas le droit de regrouper les termes ou de permuter les termes d'une série semi-convergente.

Exemple : On reprend l'exemple ci-dessus avec $a_n = (-1)^n n^{-1}$ pour $n \geq 1$. On réordonne les terme, en alternant des paquets assez gros de termes positifs avec un seul terme négatif. Pour $n = 2p$ on a $a_{2p} = \frac{1}{2p}$ et pour $n = 2p+1$, $a_{2p+1} = -\frac{1}{2n+1}$. On sait que pour tout $p_0 \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=p_0}^{+\infty} \frac{1}{2p} = +\infty$. Ainsi il existe $p_0' \geq p_0$ tel que $\sum_{p=p_0}^{p_0'} \frac{1}{2p} \geq 2$. Par récurrence on construit une suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{p=p_k}^{p_{k+1}-1} \frac{1}{2p} \geq 2.$$

On regroupe les termes en paquets indexés par k donnés par

$$u_k = \left(\sum_{p=p_k}^{p_{k+1}-1} \frac{1}{2p} \right) - \frac{1}{2k+1}.$$

La série de terme général $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fait apparaître chaque $\frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$ une et une seule fois. Mais

$$u_k \geq 2 - \frac{1}{2k+1} \geq 1,$$

dit que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 et $\sum u_k$ diverge.

Remarque : De la même façon la série produit de deux séries semi-convergentes peut ne pas converger. La seule opération permise est la combinaison linéaire.

La règle d'Abel repose sur une intégration par partie discrète qui permet de montrer que certaines séries convergent. Pour une suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on note $(U'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par

$$U'_k = U_{k+1} - U_k = \frac{U_{k+1} - U_k}{1}.$$

Lemme 3.2.27. *Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes. On a la formule*

$$\sum_{k=1}^{K} U'_k V_k = [U_{K+1} V_K - U_1 V_0] - \sum_{k=1}^{K} U_k V'_{k-1}$$

Théorème 3.2.28. *Règle d'Abel. Si une série de terme général a_n est bornée et si la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle, alors la série de terme général $a_n b_n$ converge.*