UNIVERSITE DE YAOUNDE I

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE

Examen de fin du premier semestre 2017/2018

Algèbre Générale MAT 117

<u>Durée</u> :3h

Par Thomas B. BOUETOU

EXERCICE 1 (3pts)

Si α, β, γ sont les racines du $x^3 - 2x - 1 = 0$, calculer :

1- $\alpha + \beta + \gamma =$ (0.5pts)

2- $\alpha\beta + \gamma\beta + \alpha\gamma =$ (0.5pts)

3- $\alpha\beta\gamma =$ (0.5pts)

En déduire

4- $\dfrac{1-2\alpha}{1+2\alpha} + \dfrac{1-2\beta}{1+2\beta} + \dfrac{1-2\gamma}{1+2\gamma} =$ (1,5pts)

Exercice 2 (7 pts)

Soit $(G,*)$, (G',Δ) deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que pour tout sous-groupe H de G, $f(H)$ est un sous-groupe de G' puis en déduire que Imf est un sous groupe de G'. (0,75+0,25pt)
   Est-ce un sous groupe distingué de G' ? Justifie ta réponse ! (0,5pt)

2. Montrer que pour tout sous-groupe H' de G', f^{-1} (H') est un sous-groupe de G. (0,75 pt)
   En déduire que $Kerf$ est un sous groupe de G. (0,25 pt)
   Est-ce un sous groupe distingué de G ? Justifie ta réponse ! (0,5 pt)

3. Soit H et K deux sous groupes de G.
   Montrer que $H \cup K$ est un sous groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$. (1pt)

4. Soit N une partie non vide de G.
   a. Que signifie « *N est un sous groupe distingué de G* » ? (0,5 pt)
   On suppose dans la suite que N est un sous groupe distingué du groupe G.
   b. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur G par $\forall x, y \in G, \ \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y^{-1}x \in N$ est une relation d'équivalence et déterminer la classe de l'élément neutre de G. (0,5+0,5 pt)
   c. Montrer que le groupe quotient G/N est abélien si et seulement si $a^{-1}b^{-1}ab \in N, \ \forall a, b \in G$. (1,5 pts)

Problème

Partie A. (4 pts)

On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 12 & 1 & 10 & 9 & 11 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{12}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints. (1 pt)
2. Décomposer σ en produit de transpositions. (0,5 pt)
3. Quelle est la parité de σ? Justifier ! (0,5 pt)
4. Déterminer l'entier minimum n tel que $\sigma^n = \mathrm{Id}$. (0,75 pt)
5. Calculer σ^{1999}. (1,25 pt)

Partie B (2,5 pts)

Une bijection de $\{1,2,\ldots,n\}$ (dans lui-même) s'appelle une permutation. Le groupe $(\mathcal{S}_n,\circ)$ s'appelle le groupe des permutations (ou le groupe symétrique).

1. Décrire les éléments de $\mathcal{S}_3$. (1pt)
2. Montrer que la composition des application est une loi de composition interne dans $\mathcal{S}_3$. (1 pt)
3. En déduire le centre du groupe $\mathcal{S}_3$ noté $Z(\mathcal{S}_3)$. (0,5 pt)

Partie C (3,5 pts)

Let K a group and L a subset of K such that L is a not empty set ($L \neq \emptyset$). We define

$$N(L) = \{g \in K:\ gLg^{-1} = L\}$$

and

$$C(L) = \{g \in K:\ \forall a \in L,\ gag^{-1} = a\}.$$

1. Show that $N(L)$ is a subgroup of K. (1,25 pts)
2. Show that $C(L)$ is a subgroup of K. (1,25 pts)
3. Show that $C(L)$ is a normal subgroup of $N(L)$. (1 pt)

Examen Blanc d'algèbre générale **CONGES DE NOEL**

DUREE : 3 HEURES

Exercice 1 (3pts)

1. Soit E un ensemble non vide et X et Y une partition de E. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \theta : \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \\ A & \longmapsto & (A \cap X, A \cap Y) \end{array}$$

est une bijection. **(1,5 pts)**

2. Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que
   f est bijective si et seulement si $\forall A \subset X, f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$. **(1,5 pts)**

Exercice 2 (4 pts)

1. Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p. Montrer que G est cyclique et donner la liste des générateurs de G. **(1 pt)**
2. Soit G un groupe, H et K deux sous groupes de G.
   Montrer que $H \cup K$ est un sous groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$. **(1pt)**
   Donner un exemple qui démontre que la réunion de deux sous groupes n'est pas toujours un sous groupe. **(0,5 pt)**
3. si N est un sous groupe normal du groupe G, montrer que le groupe quotient G/N est abélien si et seulement si $a^{-1}b^{-1}ab \in N, \ \forall a, b \in G$. **(1,5 pts)**
4.

Exercice 3 (4pts)

I– Soit $(G,*)$, $(G',\top)$ deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

a) Montrer que pour tout sous-groupe H de G, $f(H)$ est un sous-groupe de $(G',\top)$. **(0,75 pt)**

b) Montrer que pour tout sous-groupe H' de G', f^{-1} (H') est un sous-groupe de $(G,*)$. **(0,75 pt)**

II– Dans la suite, on suppose que G est un groupe noté multiplicativement. Pour $a \in G$, on note τ_a l'application de G vers G définie *par* $\tau_a(x) = axa^{-1}$.

a) Montrer que τ_a est un morphisme du groupe $(G,\times)$ dans lui-même. **(0,75 pt)**

b) Vérifier que $\forall a, b \in G, \ \tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$ **(0,25 pt)**

c) Montrer que τ_a est bijective et déterminer son application réciproque. **(0,75 pt)**

d) En déduire que $T = \{\tau_a | \, a \in G\}$ muni du produit de composition est un groupe. (0,75 pt)

Problème

Partie A. (4,5 pts)

Soit $(G,*)$, (G',Δ) deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1. Que signifie « f est un morphisme » ? (0,25 pt)
2. Montrer que $\text{Ker}f$ est un sous groupe distingué de G. (0,5 pt)
3. Montrer que $\text{Im}f$ est un sous groupe de G'. (0,5 pt)
4. Montrer que f est injective si et seulement si $Kerf = \{e\}$ où e est l'élément neutre de G. (0,75 pt)
5. Montrer que f est surjective si et seulement si $Imf = G'$. (0,5 pt)
6. On considère l'application $\overline{f} : G/Kerf \to G'$ définie par $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$.
   a. Montrer que $\overline{f}$ est bien définie. (0,25 pt)
   b. Montrer que $\overline{f}$ est un morphisme de groupe. (0,25)
   c. Montrer que $Im(\overline{f})=Im(f)$. (0,5 pt)
   d. Montrer que $\overline{f}$ est injective. (0,5)
   e. En déduire que $G/Kerf \cong Imf$. (0,5 pt)

Partie B (2,5 pts)

Soit a et b deux éléments d'un groupe $(G;\cdot)$.

1. Montrer que a et bab^{-1} ont le même ordre. (0,75 pt)
2. On suppose ab d'ordre fini égal à n. Que dire de ba ? (0,75 pt)
3. On suppose a d'ordre fini égal à n. Pour $k \in \mathbb{Z}$, quel est l'ordre de a^k? (1 pt)

Partie C (3pts)

On considère la permutation $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{10}$

1. Ecrire s sous forme de produit de cycles à supports disjoints. (1 pt)
2. Décomposer chacun des cycles en produit de transpositions puis en déduire une décomposition en transpositions de la permutation s. (1 pt)
3. Trouver la signature de s. (0,5 pt)
4. s est-elle une permutation impaire ? Justifier ! (0,5 pt)

UNIVERSITE DE YAOUNDE I **ECOLE NATIONALE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE**

Examen de fin du premier semestre 2018/2019

Algèbre Générale MAT 117

<u>Durée</u> :3h

Par Thomas B. BOUETOU

Exercice 1 (3pts)

$$\begin{cases} log_2\,(10-2^y) = 4-y \\ log_2\,\dfrac{x+3y-4}{3y-x} = log_2\,(x-1) - log_2\,(3-x) \end{cases}$$

Exercice 2 (4,5 pts)

I. On considère la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 9 & 11 & 4 & 3 & 10 & 12 & 8 & 5 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{12}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints. **(0,5 pt)**
2. Décomposer σ en produit de transpositions. **(0,5 pt)**
3. Calculer la signature de σ puis en déduire sa parité. **(0,5 pt)**
4. Déterminer l'entier minimum n tel que $\sigma^n = \text{Id}$. **(0,25 pt)**
5. Calculer σ^{2027}. **(0,75pt)**
6. Trouver une permutation de $\mathfrak{S}_{12}$ d'ordre 14. **(0,25 pt)**

II. Soit $G\ =]-1;1[$. Pour $x, y \in G,$ on définit la loi $*$ par $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$

a. Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans G. **(1 pt)**

b. Monter que $(G,*)$ est un groupe abélien. **(0,75 pt)**

Exercice 3 (4,5pts)

I. Soit $f: X \to Y$ une application.

1. Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall A \subset X,\ \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$. **(1 pt)**
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \subset X,\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. **(1 pt)**
3. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \subset X, f^{-1}(f(A)) = A$ **(1 pt)**

II. Soit $h: E \to I$ une application surjective. On pose $\forall i \in I, A_i = f^{-1}(\{i\})$. Montrer que les A_i sont non vides, deux à deux disjoints et réunion égale à E. **(1,5 pts)**

Problème (8pts)

Partie A. (3 pts)

I. Soit K un ensemble non vide.

1. Que signifie « $(K, +, \times)$ est un anneau » ? Quand dit-on qu'il est intègre? **(0,5 pt)**
2. Que signifie « I est un idéal de l'anneau K » ? Qu'est ce qu'un idéal bilatère? un idéal premier ? idéal principal ? idéal maximal ? **(1,25pts)**
3. Montrer qu'un anneau $(K, +, \times)$ n'a pas de diviseurs de zéro si, et seulement si, tous ses éléments non nuls sont réguliers **(0,75 pt)**

II. Soient A un anneau commutatif et e un élément idempotent de A c'est-à-dire que e vérifie la relation $e^2 = e$. Montrer que l'ensemble $J = \{x \in A, \quad xe = 0\}$ est un idéal de A. **(0,5 pt)**

Partie B (5 pts)

I. Let H be a subgroup of G and N a normal subgroup of G.

1. Show that the product $HN = \{hn \ / \ h \in H, \ n \in N\}$ is a subgroup of G. **(0,5 pt)**
2. Show that the intersection $H \cap N$ is a subgroup of H and also a normal subgroup of H. **(0,75 pt)**
3. Show that N is a normal subgroup of HN. **(0,75 pt)**
4. Show that an element of the quotient group HN/N can be written as hN where $h \in H$. **(0,5 pt)**
5. Show that

$$\begin{aligned} \alpha : H &\longrightarrow HN/N \\ h &\longmapsto h.N \end{aligned}$$

is an epimorphism, and $Ker(\alpha) = H \cap N$ **(0,75 pt)**

6. Show that if $f : G \longrightarrow K$ is a homomorphism from G to a group K, then the quotient $G/Ker(f)$ is isomorphic to $f(G)$ with the isomorphism given by

$$\begin{aligned} \tilde{f} : G/Ker(f) &\longrightarrow f(G) \\ g.Ker(f) &\longmapsto f(g) \end{aligned}$$

(1 pt)

7. Using question 5) and 6), show that there is an isomorphism between the quotient groups HN/N and $H/ H \cap N$. **(0,75 pt)**