Réduction

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pour n entier relatif donné, calculer A^n par trois méthodes différentes.

Correction ▼ [005651]

Exercice 2 **

Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005652]

Exercice 3 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(A-I)^2$.
3. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$
4. Calculer A^n pour n entier naturel donné.

Correction ▼ [005653]

Exercice 4 ***

Soit f qui à P élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ associe $f(P) = (X^2-1)P' - 2nXP$.
Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ puis déterminer les valeurs et vecteurs propres de f. f est-il diagonalisable ?

Correction ▼ [005654]

Exercice 5 ***

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour P élément de E, soit $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B où $A = X^4 - 1$ et $B = X^4 - X$.
Vérifier que f est un endomorphisme de E puis déterminer $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$ et les valeurs et vecteurs propres de f.

Correction ▼ [005655]

Exercice 6 ***

Soit A une matrice rectangulaire de format (p,q) et B une matrice de format (q,p). Comparer les polynômes caractéristiques de AB et BA.

Correction ▼ [005656]

Exercice 7 *** I

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que u et v commutent et que v est nilpotent. Montrer que $\det(u+v) = \det u$.

Correction ▼ [005657]

Exercice 8 ****

Soit A une matrice carrée de format n.
Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.

Correction ▼ [005658]

Exercice 9 *** I

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie vérifiant $fg - gf = f$. Montrer que f est nilpotent.

Correction ▼ [005659]

Exercice 10 ****

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle.
Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 / \ uv - vu = \alpha u + \beta v$. Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

Correction ▼ [005660]

Exercice 11 ***

Soit $E = SL_2(\mathbb{Z}) = \{$matrices carrées de format 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant $1\}$.

1. Montrer que $(E, \times)$ est un groupe
2. Soit A un élément de E tel que $\exists p \in \mathbb{N}^* / \ A^p = I_2$. Montrer que $A^{12} = I_2$.

Correction ▼ [005661]

Exercice 12 ****

Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Correction ▼ [005662]

Exercice 13 ****

Soient A un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et M l'élément de $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ défini par blocs par $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$.
Calculer $\det M$. Déterminer les éléments propres de M puis montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Correction ▼ [005663]

Exercice 14 ***

Soient a et b deux réels tels que $|a| \neq |b|$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que les images dans le plan complexe des valeurs propres de A sont cocycliques. (Indication : pour calculer χ_A, considérer $f(x) = \begin{vmatrix} -X+x & b+x & \dots & b+x \\ a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \dots & a+x & -X+x \end{vmatrix}$.)

Correction ▼ [005664]

Exercice 15 ***I Matrices stochastiques

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \in [0,1]$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. Soit λ une valeur propre de A.
   (a) Montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel ω de $[0,1]$ tel que $|\lambda - \omega| \leqslant 1-\omega$. Conséquence géométrique ?

Correction ▼ [005665]

Exercice 16 **

Soit A une matrice antisymétrique réelle. Etudier la parité de son polynôme caractéristique.

Correction ▼ [005666]

Exercice 17 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Montrer que A est diagonalisable.

Correction ▼ [005667]

Exercice 18 ***I Déterminant circulant

1. Soit $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ (de format $n \geqslant 3$). Diagonaliser J_n.
2. En déduire la valeur de $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [005668]

Exercice 19 ***I Matrices de permutations

Pour $\sigma \in S_n$, $n \geqslant 2$, on définit la matrice P_σ par $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Calculer $\det(P_\sigma)$ pour tout $\sigma \in S_n$.
2. (a) Montrer que $\forall (\sigma,\sigma') \in S_n^2$, $P_\sigma \times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}$.

(b) On pose $G = \{P_\sigma,\ \sigma \in S_n\}$. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe isomorphe à S_n.

3. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer AP_σ.
4. Trouver les valeurs propres d'une matrice de pemutation (on pourra utiliser le résultat hors programme : toute permutation se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs en produit de cycles à supports disjoints).

Correction ▼ [005669]

Exercice 20 *** Décomposition de Dunford

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
Montrer qu'il existe un couple d'endomorphismes (d,n) et un seul tel que d est diagonalisable, n est nilpotent n et $f = d + n$.

Correction ▼ [005670]

Exercice 21 **

Trouver une matrice carrée A vérifiant $A^4 - 3A^3 + A^2 - I = 0$.

Correction ▼ [005671]

Exercice 22 **I

Calculer $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [005672]

Exercice 23 ***

Soit A une matrice carrée de format 2 telle que A^2 est diagonalisable et $\mathrm{Tr}A \neq 0$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Correction ▼ [005673]

Exercice 24 ***

$E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour f élément de E, $\varphi(f)$ est l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ (\varphi(f))(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \text{ si } x \neq 0 \text{ et } (\varphi(f))(0) = f(0).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Etudier l'injectivité et la surjectivité de φ.
3. Déterminer les éléments propres de φ.

Correction ▼ [005674]

Exercice 25 ***I

Sur E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On donne trois endomorphismes f, u et v tels qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour $k \in \{1,2,3\}$, $f^k = \lambda^k u + \mu^k v$. Montrer que f est diagonalisable.

Correction ▼ [005675]

Exercice 26 **I

Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005676]

Exercice 27 ***

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle qui commutent. Montrer que f et g sont simultanément trigonalisables.

Correction ▼ [005677]

Exercice 28 **

Soient A et B deux matrices carrées complexes de format n. Montrer que A et B n'ont pas de valeurs propres communes si et seulement si la matrice $\chi_A(B)$ est inversible.

Correction ▼ [005678]

Exercice 29 **

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et P un polynôme. Montrer que $P(f)$ est inversible si et seulement si P et χ_f sont premiers entre eux.

Correction ▼ [005679]

Exercice 30 ** (ESTP1994)

Soit $M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Peut-on trouver deux matrices distinctes semblables parmi les quatre matrices $M_{0,0}$, $M_{0,1}$, $M_{1,0}$ et $M_{1,1}$?

Correction ▼ [005680]

Exercice 31 ****

Trouver A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la comatrice de A soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005681]

Exercice 32 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ où $a_1,\dots, a_n$ sont n nombres complexes ($n \geqslant 2$). A est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [005682]

Exercice 33 ***

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. Trouver les sous espaces stables par f dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005683]

Exercice 34 ***

Résoudre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005684]

Exercice 35

Commutant de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction ▼ [005685]

Exercice 36 **

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie non nulle et F un sous-espace non nul de E stable par f. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que la restriction de f à F est un endomorphisme diagonalisable de F.

Correction ▼ [005686]

Exercice 37 **I

Soit A une matrice carrée réelle de format $n \geqslant 2$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est un entier pair.

Correction ▼ [005687]

Correction de l'exercice 1 ▲

1ère solution. $A = 2J - I_3$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $J^2 = 3J$ et plus généralement $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1}J$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque les matrices $2J$ et $-I$ commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\begin{aligned}
A^n = (2J-I)^n &= (-I)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (2J)^k (-I)^{n-k} = (-1)^n I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k 3^{k-1} (-1)^{n-k} \right) J \\
&= (-1)^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 6^k (-1)^{n-k} \right) J = (-1)^n I + \frac{1}{3}((6-1)^n - (-1)^n) J \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai quand $n = 0$.

Soit de nouveau $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
&((-1)^n I + \frac{1}{3}(5^n - (-1)^n)J) \times ((-1)^{-n} I + \frac{1}{3}(5^{-n} - (-1)^{-n})J) \\
&\qquad = I + \frac{1}{3}((-5)^n - 1 + (-5)^{-n} - 1)J + \frac{1}{9}(1 - (-5)^n - (-5)^{-n} + 1)J^2 \\
&\qquad = I + \frac{1}{3}((-5)^n - 1 + (-5)^{-n} - 1)J + \frac{3}{9}(1 - (-5)^n - (-5)^{-n} + 1)J = I,
\end{aligned}$$

et donc

$$A^{-n} = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{-n} + 2(-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} \\ 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} + 2(-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} \\ 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} - (-1)^{-n} & 5^{-n} + 2(-1)^{-n} \end{pmatrix}.$$

Finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ A^n = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n & 5^n - (-1)^n \\ 5^n - (-1)^n & 5^n - (-1)^n & 5^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.}$$

2ème solution. Puisque $\text{rg}(A+I) = 1$, $\dim(\text{Ker}(A+I)) = 2$ et -1 est valeur propre de A d'ordre au moins 2. La troisième valeur propre λ est fournie par la trace : $\lambda - 1 - 1 = 3$ et donc $\lambda = 5$. Par suite, $\chi_A = -(X+1)^2(X-5)$.

De plus, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow x+y+z = 0$ et donc $E_{-1} = \text{Vect}(e_1, e_2)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

De même, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow x = y = z$ et $E_5 = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(-1, -1, 5)$ et on a $A = PDP^{-1}$.

Calcul de P^{-1}. Soit (i, j, k) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = i - j \\ e_2 = i - k \\ e_3 = i + j + k \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} j = i - e_1 \\ k = i - e_2 \\ e_3 = i + i - e_1 + i - e_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} i = \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) \\ j = \frac{1}{3}(-2e_1 + e_2 + e_3) \\ k = \frac{1}{3}(e_1 - 2e_2 + e_3) \end{array} \right.$$

et donc $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$. Soit alors $n\in\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}A^n=PD^nP^{-1}&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-1)^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}(-1)^n&(-1)^n&5^n\\-(-1)^n&0&5^n\\0&-(-1)^n&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^n+2(-1)^n&5^n-(-1)^n&5^n-(-1)^n\\5^n-(-1)^n&5^n+2(-1)^n&5^n-(-1)^n\\5^n-(-1)^n&5^n-(-1)^n&5^n+2(-1)^n\end{pmatrix},\end{aligned}$$

et on retrouve le résultat obtenu plus haut, le calcul ayant été mené directement avec n entier relatif.

3ème solution. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La division euclidienne de X^n par χ_A fournit trois réels a_n, b_n et c_n et un polynôme Q tels que $X^n=\chi_AQ+a_nX^2+b_nX+c_n$. En prenant les valeurs des membres en 5, puis la valeur des deux membres ainsi que de leurs dérivées en -1 , on obtient

$$\left\{\begin{array}{l}25a_n+5b_n+c_n=5^n\\a_n-b_n+c_n=(-1)^n\\-2a_n+b_n=n(-1)^{n-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}b_n=2a_n-n(-1)^n\\35a_n+c_n=5n(-1)^n+5^n\\-a_n+c_n=-(n-1)(-1)^n\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a_n=\frac{1}{36}(5^n+(6n-1)(-1)^n)\\c_n=\frac{1}{36}(5^n+(-30n+35)(-1)^n)\\b_n=\frac{1}{36}(2\times5^n+(-24n-2)(-1)^n)\end{array}\right..$$

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON fournit alors

$$\begin{aligned}A^n&=\frac{1}{36}\left((5^n+(6n-1)(-1)^n)A^2+2(5^n-(12n+1)(-1)^n)A+(5^n+(-30n+35)(-1)^n)I\right)\\&=\frac{1}{36}\left((5^n+(6n-1)(-1)^n)\begin{pmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{pmatrix}+2(5^n-(12n+1)(-1)^n)\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\right.\\&\left.+(5^n+(-30n+35)(-1)^n)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\\&=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}12\times5^n+24(-1)^n&12\times5^n-12(-1)^n&12\times5^n-12(-1)^n\\12\times5^n-12(-1)^n&12\times5^n+24(-1)^n&12\times5^n-12(-1)^n\\12\times5^n-12(-1)^n&12\times5^n-12(-1)^n&12\times5^n+24(-1)^n\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5^n+2(-1)^n&5^n-(-1)^n&5^n-(-1)^n\\5^n-(-1)^n&5^n+2(-1)^n&5^n-(-1)^n\\5^n-(-1)^n&5^n-(-1)^n&5^n+2(-1)^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On retrouve encore une fois le même résultat mais pour $n\in\mathbb{N}^*$ uniquement.

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit $X\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Si $X^2=A$ alors $AX=X^3=XA$ et donc X et A commutent.
A admet trois valeurs propres réelles et simples à savoir 1, 3 et 4. Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous espaces propres de A sont des droites. X commute avec A et donc laisse stable les trois droites propres de A.
Ainsi une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A est également une base de vecteurs propres de X ou encore, si P est une matrice réelle inversible telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale D_0 alors pour la même matrice P, $P^{-1}XP$ est une matrice diagonale D. De plus

$$X^2=A\Leftrightarrow PD^2P^{-1}=PD_0P^{-1}\Leftrightarrow D^2=D_0\Leftrightarrow D=\text{diag}(\pm\sqrt{3},\pm2,\pm1)$$

ce qui fournit huit solutions deux à opposées. On peut prendre $P=\begin{pmatrix}2&0&0\\-16&1&0\\5&0&1\end{pmatrix}$ puis $P^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\8&1&0\\-5/2&0&1\end{pmatrix}$.

D'où les solutions

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -16\sqrt{3}\varepsilon_1 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5\sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ -8\sqrt{3}\varepsilon_1 + 16\varepsilon_2 & 2\varepsilon_2 & 0 \\ 5(\sqrt{3}\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/2 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. $\chi_A = -(2+X)((3-X)(-1-X)+4) = -(X+2)(X^2-2X+1) = -(X+2)(X-1)^2$.
   A diagonalisable $\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A-I)) = 2 \Rightarrow \mathrm{rg}(A-I) = 1$ ce qui n'est pas . Donc A n'est pas diagonalisable. De plus, $E_{-2} = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2. $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & -36 & 9 \end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{Ker}(A-I)^2$ est le plan d'équation $4x+4y-z=0$.

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON et le théorème de décomposition des noyaux permettent d'affirmer

   $$\mathscr{M}_3(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(A+2I) \oplus \mathrm{Ker}(A-I)^2.$$

   De plus, chacun des sous-espaces $\mathrm{Ker}(A+2I)$ et $\mathrm{Ker}(A-I)^2$ étant stables par f, la matrice de f dans toute base adaptée à cette décomposition est diagonale par blocs. Enfin, $\mathrm{Ker}(A-I)$ est une droite vectorielle contenue dans le plan $\mathrm{Ker}(A-I)^2$ et en choisissant une base de $\mathrm{Ker}(A-I)^2$ dont l'un des deux vecteurs est dans $\mathrm{Ker}(A-I)$, la matrice de f aura la forme voulue.

   On a déjà choisi $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ puis on prend $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

   P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On peut déjà affirmer que $P^{-1}AP$ est de la forme $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Plus précisément

   $$Ae_3 - e_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = e_2$$

   et donc $Ae_3 = e_2 + e_3$ puis

   $$\boxed{A = PTP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $T = D+N$ où $D = \mathrm{diag}(-2,1,1)$ et $N = E_{2,3}$. On a $ND = DN$ et $N^2 = 0$. Puisque les matrices D et N commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$T^n = D^n + nD^{n-1}N = \text{diag}((-2)^n,1,1) + n\text{diag}((-2)^{n-1},1,1)E_{2,3} = \text{diag}((-2)^n,1,1) + nE_{2,3}$$
$$= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & -2 & -2n-1 \\ (-2)^n & -4 & -4n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n-8n+4 & -4(-2)^n-4n+4 & (-2)^n \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n-8n+4 & -4(-2)^n-4n+4 & (-2)^n \end{pmatrix}}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit P un élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. $f(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n+1$ et de plus, si a est le coefficient de X^{2n} dans P, le coefficient de X^{2n+1} dans $f(P)$ est $2na-2na=0$. Donc $f(P)$ est un élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$. La linéarité de f étant claire, f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.
Cherchons maintenant P polynôme non nul et λ réel tels que $f(P)=\lambda P$ ce qui équivaut à

$$\frac{P'}{P} = \frac{2nX+\lambda}{X^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+\lambda}{X-1} - \frac{-2n+\lambda}{X+1}\right).$$

En identifiant à la décomposition en éléments simples classique de $\frac{P'}{P}$ (à savoir si $P=K(X-z_1)^{\alpha_1}\dots(X-z_k)^{\alpha_k}$ avec $K\neq 0$ et les z_i deux à deux distincts, alors $\frac{P'}{P}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{X-z_i}$), on voit que nécessairement P ne peut admettre pour racines dans $\mathbb{C}$ que -1 et 1 et d'autre part que P est de degré $\frac{1}{2}(2n+\lambda+2n-\lambda)=2n$. P est donc nécessairement de la forme

$$P = aP_k \text{ avec } a\in\mathbb{R}^* \text{ et } P_k=(X-1)^k(X+1)^{2n-k} \text{ avec } k\in[\![0,2n]\!].$$

Réciproquement, chaque P_k est non nul et vérifie

$$\frac{P_k'}{P_k} = \frac{k}{X-1} + \frac{2n-k}{X+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+(2k-2n)}{X-1} + \frac{2n-(2k-2n)}{X+1}\right).$$

Donc, pour chaque $k\in[\![0,2n]\!]$, P_k est vecteur propre de f associé à la valeur propre $\lambda_k=2(k-n)$.
Ainsi, f admet $2n+1$ valeurs propres, nécessairement simples car $\dim(\mathbb{R}_{2n}[X]=2n+1)$. f est donc diagonalisable et les sous espaces propres de f sont les droites $\text{Vect}(P_k)$, $0\leqslant k\leqslant 2n$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $P=aX^3+bX^2+cX+d\in\mathbb{R}_3[X]$

$$AP-(X^4-X)P = (X-1)P = aX^4+(b-a)X^3+(c-b)X^2+(d-c)X-d =$$
$$a(X^4-X)+(b-a)X^3+(c-b)X^2+(a+d-c)X-d.$$

et donc $AP=(X^4-X)(P+a)+(b-a)X^3+(c-b)X^2+(a+d-c)X-d$ et donc $f(P)=(b-a)X^3+(c-b)X^2+(a+d-c)X-d$. Par suite, f est un endomorphisme de E et la matrice de f dans la base canonique $(1,X,X^2,X^3)$ de E est

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\1&-1&0&1\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}.$$

puis

$$\chi_A=\begin{vmatrix}-1-X&0&0&0\\1&-1-X&0&1\\0&1&-1-X&0\\0&0&1&-1-X\end{vmatrix}=(-1-X)\begin{vmatrix}-1-X&0&1\\1&-1-X&0\\0&1&-1-X\end{vmatrix}$$
$$=-(X+1)(-(X+1)^3+1)=X(X+1)(X^2+3X+3).$$

A admet quatre valeurs propres simples dans $\mathbb{C}$, deux réelles 0 et -1 et deux non réelles $-1+j$ et $-1+j^2$. χ_f n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et donc f n'est pas diagonalisable.

• Soit $P\in E$. $P\in\mathrm{Ker}f\Leftrightarrow b-a=c-b=a+d-c=-d=0\Leftrightarrow a=b=c$ et $d=0$. $\mathrm{Ker}f=\mathrm{Vect}(X^3+X^2+X)$.
• Soit $P\in E$. $P\in\mathrm{Ker}(f+Id)\Leftrightarrow b=c=a+d=0\Leftrightarrow b=c=0$ et $d=-a$. $\mathrm{Ker}(f+Id)=\mathrm{Vect}(X^3-1)$.
• $\mathrm{rg}(f)=3$ et immédiatement $\mathrm{Im}f=\mathrm{Vect}(X-1,X^2-X,X^3-X^2)$.

Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, on peut continuer :
$P\in\mathrm{Ker}(f+(1-j)Id)\Leftrightarrow b-ja=c-jb=a+d-jc=-jd=0\Leftrightarrow b=ja,\ c=j^2a$ et $d=0$.
Donc $\mathrm{Ker}(f+(1-j)Id)=\mathrm{Vect}(X^3+jX^2+j^2X)$ et en conjuguant $\mathrm{Ker}(f+(1-j^2)Id)=\mathrm{Vect}(X^3+j^2X^2+jX)$.

Remarque. $B=X(X-1)(X-j)(X-j^2)$ et on a trouvé pour base de vecteurs propres les quatre polynômes de LAGRANGE $X^3-1=(X-1)(X-j)(X-j^2)$ puis $X^3+X^2+X=X(X-j)(X-j^2)$ puis $X^3+jX^2+j^2X=X(X-1)(X-j^2)$ et enfin $X^3+j^2X^2+jX=X(X-1)(X-j)$. C'est une généralité. On peut montrer que si $E=\mathbb{C}_n[X]$ et si B a $n+1$ racines deux à deux distinctes dans $\mathbb{C}$ alors f est diagonalisable et une base de vecteurs propres est fournie par les polynômes de LAGRANGE associés aux racines de B et ceci pour un polynôme A quelconque.

Correction de l'exercice 6 ▲

Si $p=q$, le résultat est connu : $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.

Supposons par exemple $p<q$. On se ramène au cas de matrices carrées en complétant. Soient $A'=\begin{pmatrix}A\\0_{q-p,q}\end{pmatrix}$ et $B'=\begin{pmatrix}B&0_{q,q-p}\end{pmatrix}$. A' et B' sont des matrices carrées de format q et $A'B'$ et $B'A'$ ont même polynôme caractéristique.

Un calcul par blocs donne $B'A'=BA$ et $A'B'=\begin{pmatrix}A\\0_{q-p,q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B&0_{q,q-p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AB&0_{p,q-p}\\0_{q-p,p}&0_{q-p,q-p}\end{pmatrix}$. Donc $\chi_{BA}=(-X)^{q-p}\chi_{AB}$ ou encore, avec une écriture plus symétrique, $(-X)^p\chi_{BA}=(-X)^q\chi_{AB}$ ce qui vrai dans tous les cas.

$$\boxed{\forall A\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \forall B\in\mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K}),\ (-X)^p\chi_{BA}=(-X)^q\chi_{AB}.}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Si u est inversible,

$$\det(u+v)=\det u\Leftrightarrow\det u\times\det(Id+u^{-1}v)=\det u\Leftrightarrow\det(Id+u^{-1}v)=1.$$

u et v commutent et donc u^{-1} et v également car $uv=vu\Rightarrow u^{-1}uvu^{-1}=u^{-1}vuu^{-1}\Rightarrow vu^{-1}=u^{-1}v$. Mais alors, puisque v est nilpotent, l'endomorphisme $w=u^{-1}v$ l'est également car $(u^{-1}v)^p=u^{-p}v^p$).

Il reste donc à calculer $\det(Id+w)$ où w est un endomorphisme nilpotent. On remarque que $\det(Id+w)=\chi_w(-1)$. Il est connu que 0 est l'unique valeur propre d'un endomorphisme nilpotent et donc $\chi_w=(-X)^n$ puis

$$\det(Id+w) = \chi_w(-1) = (-(-1))^n = 1.$$

Le résultat est donc démontré dans le cas où u est inversible. Si u n'est pas inversible, $u+xId$ est inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de x et commute toujours avec v. Donc, pour tout x sauf peut-être pour un nombre fini, $\det(u+xId+v) = \det(u+xId)$. Ces deux polynômes coïncident en une infinité de valeurs de x et sont donc égaux. Ils prennent en particulier la même valeur en 0 ce qui refournit $\det(u+v) = \det u$.

Correction de l'exercice 8 ▲

• Si A est nilpotente, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, A^k est nilpotente et donc 0 est l'unique valeur propre dans $\mathbb{C}$ de A^k. Par suite, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.
• Réciproquement , supposons que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ et montrons alors que toutes les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ sont nulles. Ceci montrera que le polynôme caractéristique de A est $(-X)^n$ et donc que A est nilpotente d'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON.
Soient λ_1,..., λ_n les n valeurs propres (distinctes ou confondues) de A dans $\mathbb{C}$. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $S_k = \lambda_1^k + ... + \lambda_n^k$. Il s'agit de montrer que : $(\forall k \in [\![1,n]\!],\ S_k = 0) \Rightarrow (\forall j \in [\![1,n]\!],\ \lambda_j = 0)$.
1ère solution. Les S_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont tous nuls et par combinaisons linéaires de ces égalités, on en déduit que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n et s'annulant en 0, on a $P(\lambda_k) = 0$ (1). Il s'agit alors de bien choisir le polynôme P.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Soient μ_1,..., μ_p les valeurs propres deux à deux distinctes de A ($1 \leqslant p \leqslant n$). On prend $P = X\prod_{j\neq i}(X-\mu_j)$ si $p \geqslant 2$ et $P = X$ si $p = 1$. P est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n et s'annule en 0. L'égalité $P(\lambda_i) = 0$ fournit $\lambda_i = 0$ ce qu'il fallait démontrer.
2ème solution. Pour ceux qui savent que les sommes de NEWTON S_k sont liées aux fonctions élémentaires en les λ_i σ_1,..., σ_n par les formules de NEWTON :

$$\forall k \leqslant n,\ S_k - \sigma_1 S_{k-1} + ... + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0.$$

Par suite, si tous les S_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont nuls alors immédiatement tous les σ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sont nuls et donc les λ_i sont nuls car tous racines de l'équation $x^n = 0$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
f^k g - f g^k &= f^k g - f^{k-1}gf + f^{k-1}gf - f^{k-2}gf^2 + f^{k-2}gf^2 - \ldots - fgf^{k-1} + fgf^{k-1} - gf^k \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}(f^{k-i}gf^i - f^{k-i-1}gf^{i+1}) = \sum_{i=0}^{k-1} f^{k-i-1}(fg-gf)f^i = \sum_{i=0}^{k-1} f^{k-i-1}ff^i \\
&= kf^k.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{si } fg - gf = f, \text{ alors } \forall k \in \mathbb{N},\ f^k g - g f^k = kf^k \quad (*).}$$

1ère solution. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \rightarrow & \mathscr{L}(E) \\ h & \mapsto & hg - gh \end{array}$. φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(f^k) = kf^k$.
Si, pour $k \in \mathbb{N}^*$ donné, f^k n'est pas nul, f^k est valeur propre de φ associé à la valeur propre k. Par suite, si aucun des f^k n'est nul, φ admet une infinité de valeurs propres deux à deux distinctes. Ceci est impossible car $\dim(\mathscr{L}(E)) < +\infty$. Donc, f est nilpotent.
2ème solution. Les égalités $(*)$ peuvent s'écrire $P(f)g - gP(f) = fP'(f)$, $(**)$, quand P est un polynôme de la forme X^k, $k \in \mathbb{N}$. Par linéarité, les égalités $(**)$ sont vraies pour tout polynôme P.
En particulier, l'égalité $(**)$ est vraie quand P est Q_f le polynôme minimal de f et donc

$$fQ_f'(f) = Q_f(f)g - gQ_f(f) = 0.$$

Le polynôme XQ'_f est donc un polynôme annulateur de f et on en déduit que le polynôme Q_f divise le polynôme XQ'_f. Plus précisément, si $p \in \mathbb{N}^*$ est le degré de Q_f, les polynômes pQ_f ayant mêmes degrés et mêmes coefficients dominants, on en déduit que $pQ_f = XQ'_f$ ou encore que

$$\frac{Q'_f}{Q_f} = \frac{p}{X}.$$

Par identification à la décomposition en éléments simples usuelles de $\frac{Q'_f}{Q_f}$, on en déduit que $Q_f = X^p$. En particulier, $f^p = 0$ et encore une fois f est nilpotent.

Correction de l'exercice 10 ▲

1er cas. Supposons $\alpha = \beta = 0$ et donc $uv = vu$. Puisque E est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle, u admet au moins une valeur propre que l'on note λ. Le sous-espace propre E_λ correspondant n'est pas réduit à $\{0\}$, est stable par u et d'autre part stable par v car u et v commutent. On note u' et v' les restrictions de u et v au sous-espace E_λ. u' et v' sont des endomorphismes de E_λ. De nouveau, E_λ est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie non nulle et donc v' admet au moins un vecteur propre x_0. Par construction, x_0 est un vecteur propre commun à u et v.
2ème cas. Supposons par exemple $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} uv - vu = \alpha u + \mu v &\Leftrightarrow (\alpha u + \beta v) \circ \frac{1}{\alpha} v - \frac{1}{\alpha} v \circ (\alpha u + \beta v) = \alpha u + \beta v \\ &\Leftrightarrow fg - gf = f \text{ en posant } f = \alpha u + \beta v \text{ et } g = \frac{1}{\alpha} v. \end{aligned}$$

On va chercher un vecteur propre commun à u et v dans le noyau de f. Montrons tout d'abord que $\mathrm{Ker} f$ n'est pas nul (on sait montrer que f est en fait nilpotent (exercice 9) mais on peut montrer directement une propriété un peu moins forte).
Si f est inversible, l'égalité $fg - gf = f$ fournit $(g + Id) \circ f = f \circ g$ et donc $g + Id = f \circ g \circ f^{-1}$. Par suite, g et $g + Id$ ont même polynôme caractéristique ou encore, si λ est valeur propre de g alors $\lambda + 1$ est encore valeur propre de g. Mais alors $\lambda + 2$, $\lambda + 3$... sont aussi valeurs propres de g et g a une infinité de valeurs propres deux à deux distinctes. Ceci est exclu et donc $\mathrm{Ker} f$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
Maintenant, si x est un vecteur de $\mathrm{Ker} f$, on a $f(g(x)) = g(f(x)) + f(x) = 0$ et $g(x)$ est dans $\mathrm{Ker} f$. Donc g laisse $\mathrm{Ker} f$ stable et sa restriction à $\mathrm{Ker} f$ est un endomorphisme de $\mathrm{Ker} f$ qui admet au moins une valeur propre et donc au moins un vecteur propre. Ce vecteur est bien un vecteur propre commun à f et g.
Enfin si x est vecteur propre commun à f et g alors x est vecteur propre de $v = \frac{1}{\alpha} g$ et de $u = \frac{1}{\alpha}(f - \beta v)$. x est un vecteur propre commun à u et v.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. • E contient I_2 et est inclus dans $GL_2(\mathbb{R})$.
   • Si A et B sont dans E alors AB est à coefficients entiers et $\det(AB) = \det A \det B = 1$. Donc AB est dans E.
   • Si A est dans E, $\det(A^{-1}) = 1$ et en particulier $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\mathrm{com}(A)$ est à coefficients entiers. On en déduit que A^{-1} est dans E.
   Finalement

   $$\boxed{E \text{ est un sous-groupe de } GL_2(\mathbb{R}).}$$

2. Soit A un élément de E tel qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $A^p = I_2$.
   A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car annule le polynôme à racines simples $X^p - 1$.
   A admet deux valeurs propres distinctes ou confondues qui sont des racines p-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$ et puisque A est réelle, on obtient les cas suivants :
   1er cas. Si $\mathrm{Sp} A = (1, 1)$, puisque A est diagonalisable, A est semblable à I_2 et par suite $A = I_2$. Dans ce cas, $A^{12} = I_2$.

2ème cas. Si Sp$A = (-1,-1)$, $A = -I_2$ et $A^{12} = I_2$.
3ème cas. Si Sp$A = (1,-1)$ alors A est semblable à $\text{diag}(1,-1)$ et donc $A^2 = I_2$ puis encore une fois $A^{12} = I_2$.
4ème cas. Si Sp$A = (e^{i\theta}, e^{-i\theta})$. Dans ce cas Tr$A = 2cos\theta$ est un entier ce qui impose $2\cos\theta \in \{-2,-1,0,1,2\}$. Les cas $\cos\theta = 1$ et $\cos\theta = -1$ ont déjà été étudié.
• Si $\cos\theta = 0$, Sp$A = (i,-i)$ et A est semblable à $\text{diag}(i,-i)$. Donc $A^4 = I_2$ puis $A^{12} = I_2$.
• Si $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$, Sp$A = (j, j^2)$ ou Sp$A = (-j,-j^2)$. Dans le premier cas, $A^3 = I_2$ et dans le deuxième $A^6 = I_2$.
Dans tous les cas $A^{12} = I_2$.

Correction de l'exercice 12 ▲

On montre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ le format de A.
• C'est clair pour $n = 1$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que toute matrice de format n et de trace nulle soit semblable à une matrice de diagonale nulle.
Soient A une matrice carrée de format $n+1$ et de trace nulle puis f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n+1}$ de matrice A dans la base canonique $(e_1,\dots,e_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$.
Si f est une homothétie de rapport noté k, alors $0 = \text{Tr}(f) = k(n+1)$ et donc $k = 0$ puis $f = 0$ puis $A = 0$. Dans ce cas, A est effectivement semblable à une matrice de diagonale nulle.
Sinon f n'est pas une homothétie et on sait qu'il existe un vecteur u de E tel que la famille $(u, f(u))$ soit libre (voir exercice **??**). On complète la famille libre $(u, f(u))$ en une base de E. Le coefficient ligne 1, colonne 1, de la matrice de f dans cette base est nul. Plus précisément, A est semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & & \dots & \times \\ 1 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & A' & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}.$$
Puis Tr$A' = $ Tr$A = 0$ et par hypothèse de récurrence, A' est semblable à une matrice A_1 de diagonale nulle ou encore il existe A_1 matrice carrée de format n et de diagonale nulle et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}A'Q = A_1$.
Mais alors, si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, P est inversible car $\det(P) = 1 \times \det(Q) \neq 0$ et un calcul par blocs montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ puis que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \times & \dots & & \dots & \times \\ \times & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ & & & A_1 & & \\ \vdots & & & & & \\ \times & & & & & \end{pmatrix}$ est de diagonale nulle.

Correction de l'exercice 13 ▲

$\det M = \det\begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -3A & 4A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ $(\forall k \in [\![1,n]\!], L_k \leftarrow L_k - L_{n+k})$ et donc $\det M = \det(A)\det(-3A) = (-3)^n(\det A)^2$.

$$\boxed{\det M = (-3)^n(\det A)^2.}$$

L'idée de l'étude de M qui suit vient de l'étude de la matrice de format 2, $B=\begin{pmatrix}1&4\\1&1\end{pmatrix}$.

Une diagonalisation rapide amène à $B=\begin{pmatrix}-2&2\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&2\\1&2\end{pmatrix}$. Soit alors P la matrice de format $2n$ définie par blocs par $P=\begin{pmatrix}-2I_n&2I_n\\I_n&I_n\end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre que P est inversible et que $P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-I_n&2I_n\\I_n&2I_n\end{pmatrix}$ puis que

$$P^{-1}MP=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-I_n&2I_n\\I_n&2I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&4A\\A&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2I_n&2I_n\\I_n&I_n\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}A&-2A\\3A&6A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2I_n&2I_n\\I_n&I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-A&0\\0&3A\end{pmatrix}.$$

On pose $N=\begin{pmatrix}-A&0\\0&3A\end{pmatrix}$. Puisque les matrices M et N sont semblables, M et N ont même polynôme caractéristique et de plus M est diagonalisable si et seulement si N l'est.

Cherchons les vecteurs propres Z de N sous la forme $Z=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ où X et Y sont des vecteurs colonnes de format n. Sois $\lambda\in\mathbb{C}$.

$$NZ=\lambda Z\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-A&0\\0&3A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\Leftrightarrow -AX=\lambda X \text{ et } 3AY=\lambda Y.$$

Par suite

$$Z \text{ est vecteur propre de } N \text{ associé à } \lambda\Leftrightarrow (X\neq 0 \text{ ou } Y\neq 0) \text{ et } (X\in\mathrm{Ker}(A+\lambda I) \text{ et } Y\in\mathrm{Ker}\left(A-\frac{\lambda}{3}I\right)).$$

Une discussion suivant λ s'en suit :

1er cas. Si $-\lambda$ et $\frac{\lambda}{3}$ ne sont pas valeurs propres de A alors λ n'est pas valeur propre de M.

2ème cas. Si $-\lambda$ est dans SpA et $\frac{\lambda}{3}$ n'y est pas, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix}X\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2X\\X\end{pmatrix}$ où X décrit $\mathrm{Ker}(A+\lambda I)$. La dimension de E_λ est alors $\dim(\mathrm{Ker}(A+\lambda I)$.

3ème cas. Si $-\lambda$ n'est pas dans SpA et $\frac{\lambda}{3}$ y est, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix}0\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2Y\\Y\end{pmatrix}$ où Y décrit $\mathrm{Ker}\left(A-\frac{\lambda}{3}I\right)$. La dimension de E_λ est alors $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(A-\frac{\lambda}{3}I\right)\right)$.

4ème cas. Si $-\lambda$ est dans SpA et $\frac{\lambda}{3}$ aussi, alors λ est valeur propre de M. Le sous-espace propre associé est l'ensemble des $P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2X+2Y\\X+Y\end{pmatrix}$ où X décrit $\mathrm{Ker}(A+\lambda I)$ et Y décrit $\mathrm{Ker}\left(A-\frac{\lambda}{3}I\right)$. La dimension de E_λ est alors $\dim(\mathrm{Ker}(A+\lambda I))+\dim\left(\mathrm{Ker}\left(A-\frac{\lambda}{3}I\right)\right)$.

Dans tous les cas, $\dim(E_\lambda(M))=\dim(E_{-\lambda}(A))+\dim(E_{\lambda/3}(A))$ (et en particulier $\dim(\mathrm{Ker}M)=2\dim(\mathrm{Ker}A)$).

Comme les applications $\lambda\mapsto-\lambda$ et $\lambda\mapsto\frac{\lambda}{3}$ sont des bijections de $\mathbb{C}$ sur lui-même,

$$\begin{aligned}A \text{ est diagonalisable}&\Leftrightarrow\sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\dim(E_\lambda(A))=n\\&\Leftrightarrow\sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\dim(E_\lambda(A))+\sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\dim(E_\lambda(A))=2n\\&\Leftrightarrow\sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\dim(E_{-\lambda}(A))+\sum_{\lambda\in\mathbb{C}}\dim(E_{\lambda/3}(A))=2n\\&\Leftrightarrow M \text{ est diagonalisable.}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 14 ▲

$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & -X \end{vmatrix}$. Soit $f(x) = \begin{vmatrix} -X+x & b+x & \dots & b+x \\ a+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b+x \\ a+x & \dots & a+x & -X+x \end{vmatrix}$.

f est un polynôme en x. Par n linéarité du déterminant, $f(x)$ est somme de 2^n déterminants dont $2^n-(n+1)$ sont nuls car contiennent deux colonnes de x. Les déterminants restant contiennent au plus une colonne de x et sont donc de degré inférieur ou égal à 1 en x. f est donc une fonction affine. Il existe donc deux nombres A et B tels que $\forall x \in \mathbb{C}$, $f(x) = Ax+B$. Les égalités $f(-a) = (-X-a)^n$ et $f(-b) = (-X-b)^n$ fournissent $\left\{\begin{array}{l} -aA+B = (-X-a)^n \\ -bA+B = (-X-b)^n \end{array}\right.$ et comme $a \neq b$, les formules de CRAMER fournissent

$$\chi_A = f(0) = B = \tfrac{1}{b-a}(b(-X-a)^n - a(-X-b)^n).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Rightarrow \mathrm{ch}_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \left(\tfrac{\lambda+a}{\lambda+b}\right)^n = \tfrac{a}{b} \Rightarrow \left|\tfrac{\lambda+a}{\lambda+b}\right| = \left|\tfrac{a}{b}\right|^{1/n}.$$

Soient M le point du plan d'affixe λ, A le point du plan d'affixe $-a$ et B le point du plan d'affixe $-b$ puis $k = \left|\frac{a}{b}\right|^{1/n}$. k est un réel strictement positif et distinct de 1. On peut donc poser $I = \mathrm{bar}(A(1), B(-k))$ et $J = \mathrm{bar}(A(1), B(k))$.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\Rightarrow MA = kMB \Rightarrow MA^2 - k^2MB^2 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) = 0 \\ &\Rightarrow (1-k)\overrightarrow{MI}.(1+k)\overrightarrow{MJ} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \\ &\Rightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [I,J] \text{ (cercles d'APPOLONIUS (de Perga))}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Les hypothèses fournissent $AU = U$ où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc 1 est valeur propre de A.

2. (a) Soient λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i \Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j| \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda x_i| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\} \\ &\Rightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ |\lambda||x_i| \leqslant \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}. \end{aligned}$$

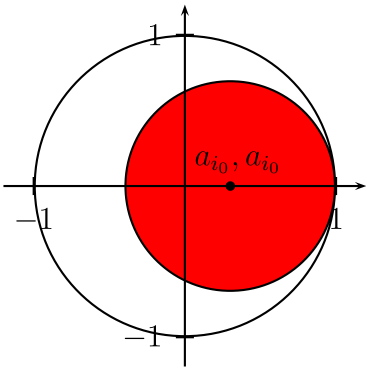
On choisit alors pour i un indice i_0 tel que $|x_{i_0}| = \mathrm{Max}\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Puisque X est non nul, on a $|x_{i_0}| > 0$. On obtient

$$|\lambda||x_{i_0}| \leqslant |x_{i_0}| \text{ et donc } |\lambda| \leqslant 1 \text{ puisque } |x_{i_0}| > 0.$$

(b) Plus précisément,

$$|\lambda - a_{i_0,i_0}||x_{i_0}| = \left|\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}|x_j| \leqslant \left(\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}\right)|x_{i_0}| = (1-a_{i_0,i_0})|x_{i_0}|$$

et donc $\forall\lambda \in \mathrm{Sp}A$, $|\lambda - a_{i_0,i_0}| \leqslant 1 - a_{i_0,i_0}$ ce qui signifie que les valeurs propres de A appartiennent au disque de centre a_{i_0,i_0} et de rayon $1 - a_{i_0,i_0}$. Ce disque est tangent intérieurement au cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1 en le point $(1,0)$.



Correction de l'exercice 16 ▲

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A est antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$. Dans ce cas

$$\chi_A = \det(A - XI) = \det({}^t(A - XI)) = \det(-A - XI) = (-1)^n\det(A + XI) = (-1)^n\chi_A(-X)$$

Ainsi, χ_A a la parité de n.

Correction de l'exercice 17 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique $(e_1,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f(e_i) = e_{n+1-i}$ et donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f^2(e_i) = e_i$. Donc f est une symétrie distincte de l'identité et en particulier $\mathrm{Sp}A = \{-1,1\}$ et f est diagonalisable. On en déduit que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. $J^n = I$. J annule le polynôme $X^n - 1$ qui est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et donc J est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

   Les valeurs propres de J sont à choisir parmi les racines n-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Vérifions que $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, ω^k est valeur propre de J.

   Soient $k \in [\![0,n-1]\!]$ et $X = (x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = \omega^k x_2 \\ \vdots \\ x_n = \omega^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega^k x_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \\ x_1 = (\omega^k)^n x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = (\omega^k)^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = (\omega^k)^{n-1} x_1 \end{array}\right.$$

   et donc

$$JX = \omega^k X \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(U_k) \text{ où } U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ (\omega^k)^2 \\ \vdots \\ (\omega^k)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

   Donc $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, ω^k est valeur propre de J. Les valeurs propres de J sont les n racines n-èmes de 1. Ces valeurs propres sont toutes simples. Le sous espace propre associé à ω^k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, est la droite vectorielle $D_k = \mathrm{Vect}(U_k)$.

Soit P la matrice de VANDERMONDE des racines n-èmes de l'unité c'est-à-dire $P = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{0\leqslant j,k\leqslant n-1}$ puis $D = \text{diag}(1,\omega,...,\omega^{n-1})$, alors on a déjà vu que $P^{-1} = \frac{1}{n}\overline{P}$ (exercice 16) et on a

$$\boxed{J = PDP^{-1} \text{ avec } D = \text{diag}(\omega^j)_{1\leqslant j\leqslant n},\ P = \left(\omega^{(j-1)(k-1)}\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} \text{ et } P^{-1} = \frac{1}{n}\overline{P} \text{ avec } \omega = e^{2i\pi/n}.}$$

Remarque. La seule connaissance de D suffit pour le 2).

2. Soit A la matrice de l'énoncé.

$$A = a_0I + a_1J + a_2J^2 + ... + a_{n-1}J^{n-1} = Q(J) \text{ où } Q = a_0 + a_1X + ... + a_{n-1}X^{n-1}.$$

D'après 1), $A = P\times Q(D)\times P^{-1}$ et donc A est semblable à la matrice $\text{diag}(Q(1),Q(\omega),...,Q(\omega^{n-1}))$. Par suite, A a même déterminant que la matrice $\text{diag}(Q(1),Q(\omega),...,Q(\omega^{n-1}))$. D'où la valeur du déterminant circulant de l'énoncé :

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} e^{2i(j-1)(k-1)\pi/n}a_j\right).}$$

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Soit $\sigma \in S_n$.

$$\det(P_\sigma) = \sum_{\sigma'\in S_n}\varepsilon(\sigma')p_{\sigma'(1),1}\dots p_{\sigma'(n),n} = \sum_{\sigma'\in S_n}\varepsilon(\sigma')\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)}\dots\delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} = \varepsilon(\sigma),$$

car $\delta_{\sigma'(1),\sigma(1)}\dots\delta_{\sigma'(n),\sigma(n)} \neq 0 \Leftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ \sigma'(i) = \sigma(i) \Leftrightarrow \sigma' = \sigma$.

$$\boxed{\forall\sigma\in S_n,\ \det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma).}$$

2. (a) Soit $(\sigma,\sigma')\in S_n^2$. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_\sigma\times P_{\sigma'}$ vaut

$$\sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)}.$$

Dans cette somme, si $k\neq\sigma'(j)$, le terme correspondant est nul et quand $k = \sigma'(j)$, le terme correspondant vaut $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$. Finalement, le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_\sigma\times P_{\sigma'}$ vaut $\delta_{i,\sigma(\sigma'(j))}$ qui est encore le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice $P_{\sigma\circ\sigma'}$.

$$\boxed{\forall(\sigma,\sigma')\in S_n^2,\ P_\sigma\times P_{\sigma'} = P_{\sigma\circ\sigma'}.}$$

(b) Montrons que G est un sous-groupe du groupe $(GL_n(\mathbb{R}),\times)$. G contient $I_n = P_{Id}$ et d'autre part, G est contenu dans $GL_n(\mathbb{R})$ d'après 1).

$$\boxed{(G,\times) \text{ est un sous-groupe de } (GL_n(\mathbb{R}),\times).}$$

3. Le coefficient ligne i, colonne j, de la matrice AP_σ vaut

$$\sum_{k=1}^n a_{i,k}\delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}.$$

Par suite, si $C_1,\dots, C_n$ désignent les colonnes de la matrice A, la matrice AP_σ est la matrice dont les colonnes sont $C_{\sigma(1)},\dots, C_{\sigma(n)}$.

$$\boxed{\text{Si } A = (C_1\dots C_n),\ AP_\sigma = (C_{\sigma(1)}\dots C_{\sigma(n)}).}$$

4. Commençons par trouver le polynôme caractéristique d'un cycle c de longueur ℓ ($1 \leqslant \ell \leqslant n$). Soit f_c l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ de matrice P_c dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f_c est $\begin{pmatrix} J_\ell & 0_{\ell,n-\ell} \\ 0_{n-\ell,\ell} & I_{n-\ell} \end{pmatrix}$ où la matrice J_ℓ est la matice de l'exercice 18. Le polynôme caractéristique χ_{P_c} de P_c est donc $(-1)^n(X-1)^{n-\ell}(X^\ell - 1)$ (voir exercice 18).
   Soit maintenant $\sigma \in S_n$. On note f_σ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ de matrice P_σ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. σ se décompose de manière unique à l'ordre près des facteurs en produit de cycles à supports disjoints, ces cycles commutant deux à deux.
   Posons donc $\sigma = c_1 \circ \ldots \circ c_p$, $p \geqslant 1$, où les c_i, $1 \leqslant i \leqslant p$, sont des cycles à supports disjoints, et notons ℓ_i la longueur du cycle c_i, $1 \leqslant i \leqslant p$. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f_σ est $\begin{pmatrix} J_{\ell_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & J_{\ell_p} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & I_k \end{pmatrix}$ où $k = n - \ell_1 - \ldots - \ell_p$ est le nombre de points fixes de σ.
   Le polynôme caratéristique cherché est donc $\chi_{P_\sigma} = (-1)^n (X^{\ell_1} - 1)\ldots(X^{\ell_p} - 1)(X-1)^{n-\ell_1-\ldots-\ell_p}$. On en déduit immédiatement les valeurs propres de P_σ.

Correction de l'exercice 20 ▲

Posons $\chi_f = \prod_{k=1}^{p}(\lambda_k - X)^{\alpha_k}$ où λ_1,..., λ_p sont les valeurs propres deux à deux distinctes de f.
Soit $E'_k = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k Id)^{\alpha_k}$ le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre λ_k, $1 \leqslant k \leqslant p$. D'après le théorème de décomposition des noyaux, $E = E'_1 \oplus \ldots \oplus E'_p$. De plus, si f_k est la restriction de f à E'_k alors f_k est un endomorphisme de E'_k (car f et $(f - \lambda_k Id)^{\alpha_k}$ commutent).
On note que $(f_k - \lambda_k)^{\alpha_k} = 0$ et donc λ_k est l'unique valeur propre de f_k car toute valeur propre de f_k est racine du polynôme annulateur $(X - \lambda_k)^{\alpha_k}$.
Existence de d et n. On définit d par ses restrictions d_k aux E'_k, $1 \leqslant k \leqslant p$: d_k est l'homothétie de rapport λ_k. Puis on définit n par $n = f - d$.
d est diagonalisable car toute base de E adaptée à la décomposition $E = E'_1 \oplus \ldots \oplus E'_p$ est une base de vecteurs propres de d. De plus, $f = d + n$.
Soit n_k la restriction de n à E'_k. On a $n_k = f_k - \lambda_k Id_{E'_k}$ et par définition de E'_k, $n_k^{\alpha_k} = 0$. Mais alors, si on pose $\alpha = \mathrm{Max}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$, on a $n_k^\alpha = 0$ pour tout k de $\{1, \ldots, p\}$ et donc $n^\alpha = 0$. Ainsi, n est nilpotent. Enfin, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, n_k commute avec d_k car d_k est une homothétie et donc $nd = dn$.
Unicité de d et n. Supposons que $f = d + n$ avec d diagonalisable, n nilpotent et $nd = dn$.
d commute avec n et donc avec f car $df = d^2 + dn = d^2 + nd = fd$. Mais alors, $n = f - d$ commute également avec f. d et n laissent donc stables les sous-espaces caractéristiques E'_k, $1 \leqslant k \leqslant p$ de f. Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note d_k et n_k les restrictions de d et n à E'_k.
Soient $k \in [\![1, p]\!]$ puis μ une valeur propre de d_k. D'après l'exercice 7,

$$\det(f_k - \mu Id) = \det(d_k - \mu Id + n) = \det(d_k - \mu Id) = 0,$$

car $d_k - \mu Id$ n'est pas inversible. On en déduit que $f_k - \mu Id$ n'est pas inversible et donc que μ est valeur propre de f_k. Puisque λ_k est l'unique valeur propre de f_k, on a donc $\mu = \lambda_k$. Ainsi, λ_k est l'unique valeur propre de d_k et puisque d_k est diagonalisable (voir l'exercice 36), on a nécessairement $d_k = \lambda_k Id_{E'_k}$ puis $n_k = f_k - \lambda_k Id_{E'_k}$.
Ceci montre l'unicité de d et n.

Correction de l'exercice 21 ▲

On cherche une matrice A de format 4 dont le polynôme caractéristique est $X^4 - 3X^3 + X^2 - 1$. La matrice compagnon $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ convient (voir l'exercice **??**) et le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre que $A^4 - 3A^3 + A^2 - I_4 = 0$.

Correction de l'exercice 22 ▲

Soit A la matrice de l'énoncé. $\det A$ est le produit des valeurs propres de A.
• Si $b = 0$, $\det A = a^n$.
• Si $b \neq 0$, $\text{rg}(A-(a-b)I) = 1$ ou encore $\dim(\text{Ker}(A-(a-b)I)) = n-1$. Par suite, $a-b$ est valeur propre d'ordre $n-1$ au moins. On obtient la valeur propre manquante λ par la trace de A : $(n-1)(a-b)+\lambda = na$ et donc $\lambda = a+(n-1)b$. Finalement $\det A = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$ ce qui reste vrai quand $b = 0$.

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b).}$$

Correction de l'exercice 23 ▲

A est de format 2 et donc, soit a deux valeurs propres distinctes et est dans ce cas diagonalisable dans $\mathbb{C}$, soit a une valeur propre double λ non nulle car $\text{Tr}A = 2\lambda \neq 0$.
Dans ce dernier cas, A^2 est diagonalisable et est donc est semblable à $\text{diag}(\lambda^2,\lambda^2) = \lambda^2 I$. Par suite, $A^2 = \lambda^2 I$. Ainsi, A annule le polynôme $X^2-\lambda^2 = (X-\lambda)(X+\lambda)$ qui est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Dans ce cas aussi, A est diagonalisable.

Correction de l'exercice 24 ▲

1. Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $(\varphi(f))(x) = \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$.
F est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, F étant dérivable en 0
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}(\varphi(f))(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = f(0) = (\varphi(f))(0).$$
Finalement $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, φ est une application de E dans E. La linéarité de φ est claire et finalement
$$\boxed{\varphi \in \mathscr{L}(C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})).}$$

2. Si f est dans $\text{Ker}(\varphi)$ alors $f(0) = 0$ et pour tout x non nul, $\int_0^x f(t)\,dt = 0$. Par dérivation on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = 0$ ce qui reste vrai pour $x = 0$ et donc $f = 0$. Finalement $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.
φ n'est pas surjective car pour toute $f \in E$, $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. Mais alors par exemple, l'application $g\ :\ x \mapsto |x-1|$ est dans E mais n'est pas dans $\text{Im}(\varphi)$.
$$\boxed{\varphi \text{ est injective et n'est pas surjective.}}$$

3. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et f continue sur $\mathbb{R}$ et non nulle telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi(f))(x) = \lambda f(x)$. D'après la question précédente, 0 n'est pas valeur propre de φ et donc nécessairement $\lambda \neq 0$.
Pour $x = 0$, nécessairement $f(0) = \lambda f(0)$ et donc ou bien $\lambda = 1$ ou bien $f(0) = 0$.
On doit avoir pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{\lambda x}\int_0^x f(t)\,dt$. f est nécessairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\int_0^x f(t)\,dt = \lambda x f(x)$ et par dérivation, on obtient pour $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f(x) = \lambda(xf'(x)+f(x)).$$
Soit I l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\forall x\in I,\ f(x)=\lambda(xf'(x)+f(x)) &\Rightarrow \forall x\in I,\ f'(x)+\frac{\lambda-1}{\lambda x}f(x)=0\\ &\Rightarrow \forall x\in I,\ e^{\frac{(\lambda-1)\ln|x|}{\lambda}}f'(x)+\frac{\lambda-1}{\lambda x}e^{\frac{(\lambda-1)\ln|x|}{\lambda}}f(x)=0\\ &\Rightarrow \forall x\in I,\ \left(|x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}f\right)'(x)=0\\ &\Rightarrow \exists K\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ |x|^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}f(x)=K\Rightarrow \exists K\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ f(x)=K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.\end{aligned}$$

1er cas. Si $\lambda\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ alors $\frac{1-\lambda}{\lambda}<0$ et donc $\lim_{x\to 0}|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}=+\infty$. La fonction $x\mapsto K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ ne peut donc être la restriction à I d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ que dans le cas $K=0$. Ceci fournit $f_{/]-\infty,0[}=0$, $f_{/]0,+\infty[}=0$ et $f(0)=0$ par continuité en 0. Dons f est nécessairement nulle et λ n'est pas valeur propre de φ dans ce cas.

2ème cas. Si $\lambda=1$, les restriction de f à $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ sont constantes et donc, par continuité de f en 0, f est constante sur $\mathbb{R}$. Réciproquement, les fonctions constantes f vérifient bien $\varphi(f)=f$. Ainsi, 1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est constitué des fonctions constantes.

3ème cas. Si $\lambda\in]0,1[$, nécessairement $\exists(K_1,K_2)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\left\{\begin{array}{l}K_1x^{\frac{1}{\lambda}-1}\text{ si }x\geq 0\\ K_2(-x)^{\frac{1}{\lambda}-1}\text{ si }x<0\end{array}\right.$. f ainsi définie est bien continue sur $\mathbb{R}$. Calculons alors $\varphi(f)$.

$(\varphi(f))(0)=f(0)=0$ puis si $x>0$,

$$(\varphi(f))(x)=\tfrac{1}{x}\textstyle\int_0^x K_1t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\,dt=\tfrac{\lambda K_1}{x}x^{\frac{1}{\lambda}}=\lambda K_1x^{\frac{1}{\lambda}-1}=\lambda f(x)$$

et de même si $x<0$. Enfin, $(\varphi(f))(0)=0=\lambda f(0)$. Finalement $\varphi(f)=\lambda f$. λ est donc valeur propre de φ ($K_1=K_2=1$ fournit une fonction non nulle) et le sous-espace propre associé à λ est de dimension 2. Une base de ce sous-espace est (f_1,f_2) où $\forall x\in\mathbb{R},\ f_1(x)=\left\{\begin{array}{l}x^{\frac{1}{\lambda}-1}\text{ si }x\geq 0\\ 0\text{ si }x<0\end{array}\right.$ et $f_2(x)=\left\{\begin{array}{l}0\text{ si }x\geq 0\\ (-x)^{\frac{1}{\lambda}-1}\text{ si }x<0\end{array}\right.$.

Finalement

$$\boxed{\mathrm{Sp}(\varphi)=]0,1].}$$

Correction de l'exercice 25 ▲

Trouvons un polynôme scindé à racines simples annulant f.
Le polynôme $P=X(X-\lambda)(X-\mu)=X^3-(\lambda+\mu)X^2+\lambda\mu X$ est annulateur de f. En effet,

$$\begin{aligned}P(f)&=f^3-(\lambda+\mu)f^2+\lambda\mu f=(\lambda^3-(\lambda+\mu)\lambda^2+(\lambda\mu)\lambda)u+(\mu^3-(\lambda+\mu)\mu^2+(\lambda\mu)\mu)v\\ &=P(\lambda)u+P(\mu)v=0.\end{aligned}$$

• Si λ et μ sont distincts et non nuls, P est un polynôme scindé à racines simples annulateur de f et donc f est diagonalisable.
• Si $\lambda=\mu=0$, alors $f=0$ et donc f est diagonalisable.
• Si par exemple $\lambda\neq 0$ et $\mu=0$, $f^2=\lambda^2u=\lambda f$ et et le polynôme $P=X(X-\lambda)$ est scindé à racines simples et annulateur de f. Dans ce cas aussi f est diagonalisable.
• Enfin si $\lambda=\mu\neq 0$, $f^2=\lambda^2(u+v)=\lambda f$ et de nouveau $P=X(X-\lambda)$ est scindé à racines simples et annulateur de f.
Dans tous les cas, f est diagonalisable.

Correction de l'exercice 26 ▲

Posons $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. On a $N^2=E_{1,3}$ et $N^3=0$. Si $X\in\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ est une matrice carrée vérifiant $X^2=N$, alors $X^6=0$. Donc X est nilpotente et, puisque X est de format 3, on sait que $X^3=0$. Mais alors $N^2=X^4=0$ ce qui n'est pas . L'équation proposée n'a pas de solution.

Correction de l'exercice 27 ▲

Montrons le résultat par récurrence sur $n=\dim E\geqslant 1$.
• Si $n=1$, c'est clair.
• Soit $n\geqslant 1$. Supposons que deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace de dimension n qui commutent soient simultanément trigonalisables.
Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ tels que $fg=gf$.
f et g ont au moins un vecteur propre en commun. En effet, f admet au moins une valeur propre λ. Soit E_λ le sous-espace propre de f associé à λ. g commute avec f et donc laisse stable E_λ. La restriction de g à E_λ est un endomorphisme de E_λ qui est de dimension finie non nulle. Cette restriction admet donc une valeur propre et donc un vecteur propre. Ce vecteur est un vecteur propre commun à f et g.
Commençons à construire une base de trigonalisation simultanée de f et g. Soit x un vecteur propre commun à f et g. On complète la famille libre (x) en une base $\mathscr{B}=(x,\dots)$ de E. Dans la base $\mathscr{B}$, les matrices M et N de f et g s'écrivent respectivement $M=\begin{pmatrix}\lambda&\times\\0&M_1\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}\mu&\times\\0&N_1\end{pmatrix}$ où M_1 et N_1 sont de format n.
Un calcul par blocs montre que M_1 et N_1 commutent ou encore si f_1 et g_1 sont les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ de matrices M_1 et N_1 dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, f_1 et g_1 commutent. Par hypothèse de récurrence, f_1 et g_1 sont simultanément trigonalisables. Donc il existe une matrice inversible de format n P_1 et deux matrices triangulaires supérieures de format n T_1 et T_1' telles que $P_1^{-1}M_1P_1=T_1$ et $P_1^{-1}N_1P_1=T_1'$.
Soit $P=\begin{pmatrix}1&0\\0&P_1\end{pmatrix}$. P est inversible de format $n+1$ car $\det P=\det P_1\neq 0$ et un calcul par blocs montre que $P^{-1}MP$ et $P^{-1}NP$ sont triangulaires supérieures.
P est donc la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à une base de trigonalisation simultanée de f et g.

Correction de l'exercice 28 ▲

Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ la famille des valeurs propres de A. On a donc $\chi_A=(\lambda_1-X)\dots(\lambda_n-X)$.

$$\begin{aligned}\chi_A(B)\text{ inversible}&\Leftrightarrow(B-\lambda_1I)\dots(B-\lambda_nI)\text{ inversible}\\&\Leftrightarrow\forall k\in[\![1,n]\!],\ B-\lambda_kI\text{ inversible (car }\det((B-\lambda_1I)\dots(B-\lambda_nI))=\det(B-\lambda_1I)\times\dots\times\det(B-\lambda_nI))\\&\Leftrightarrow\forall k\in[\![1,n]\!],\ \lambda_k\text{ n'est pas valeur propre de }B\\&\Leftrightarrow\mathrm{Sp}A\cap\mathrm{Sp}B=\varnothing.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 29 ▲

Si P et χ_f sont premiers entre eux, d'après le théorème de BÉZOUT, il existe deux polynômes U et V tels que $UP+V\chi_f=1$. En prenant la valeur en f et puisque que $\chi_f(f)=0$, on obtient $P(f)\circ U(f)=U(f)\circ P(f)=Id$. $P(f)$ est donc un automorphisme de E.
Réciproquement, si P et χ_f ne sont pas premiers entre eux, P et χ_f ont une racine commune λ dans $\mathbb{C}$. Soit A est la matrice de f dans une base donnée (si $\mathbb{K}$ n'est pas $\mathbb{C}$ l'utilisation de la matrice est indispensable). On a $P(A)=(A-\lambda I)Q(A)$ pour un certain polynôme Q. La matrice $A-\lambda I$ n'est pas inversible car λ est valeur propre de A et donc $P(A)$ n'est pas inversible ($\det(P(A))=\det(A-\lambda I)\det Q(A)=0$).

Correction de l'exercice 30 ▲

$\mathrm{rg}(M_{a,b}-I)=1$, si $a=b=0$, 2 si l'un des deux nombres a ou b est nul et l'autre pas et 3 si a et b ne sont pas nuls. Donc $M_{0,0}$ n'est semblable à aucune des trois autres matrices et de même pour $M_{1,1}$.

Il reste à savoir si les matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$ sont semblables.
$(M_{1,0}-I)^2 = (E_{1,2}+E_{2,3})^2 = E_{1,3} \neq 0$ et $(M_{0,1}-I)^2 = (E_{1,2}+E_{3,4})^2 = 0$. Donc les matrices $M_{1,0}$ et $M_{0,1}$ ne sont pas semblables.

Correction de l'exercice 31 ▲

Soit B la matrice de l'énoncé. $\text{rg}B = 1$ et si A existe, nécessairement $\text{rg}A = n-1$ (exercice **??**).
Une matrice de rang 1 admet l'écriture générale U^tV où U et V sont des vecteurs colonnes non nuls. Ici $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
Si A existe, A doit déjà vérifier $A^ttB = {}^tBA = 0$ ou encore $AV^tU = 0$ (1) et $V^tUA = 0$ (2). En multipliant les deux membres de l'égalité (1) par U à droite puis en simplifiant par le réel non nul ${}^tUU = \|U\|_2^2$, on obtient $AV = 0$. Ceci montre que la première colonne de A est nulle (les $n-1$ dernières devant alors former une famille libre).
De même, en multipliant les deux membres de l'égalité (2) par ${}^tV$ à gauche, on obtient ${}^tUA = 0$ et donc les colonnes de la matrice A sont orthogonales à U (pour le produit scalaire usuel) ce qui invite franchement à considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \dots & \dots & -n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui convient.

Correction de l'exercice 32 ▲

(Si les a_k sont réels, la matrice A est symétrique réelle et les redoublants savent que la matrice A est diagonalisable.)
Si tous les a_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sont nuls la matrice A est diagonalisable car diagonale.
On suppose dorénavant que l'un au moins des a_k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, est non nul. Dans ce cas, $\text{rg}A = 2$.
0 est valeur propre d'ordre $n-2$ au moins. Soient λ et μ les deux dernières valeurs propres. On a

$$\lambda + \mu = \text{Tr}A = a_n \text{ et } \lambda^2 + \mu^2 = \text{Tr}(A^2) = \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2.$$

λ et μ sont solutions du système $\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = a_n \\ \lambda^2 + \mu^2 = 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2 \end{array}\right.$ qui équivaut au système $\left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = a_n \\ \lambda^2 + \mu^2 = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \end{array}\right.$ (S).
On a alors les situations suivantes :
• Si λ et μ sont distincts et non nuls, A est diagonalisable car l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant.
• Si λ ou μ est nul, A n'est pas diagonalisable car l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est différent de $n-2$, la dimension du noyau de A.
• Si $\lambda = \mu \neq 0$, A est diagonalisable si et seulement si $\text{rg}(A-\lambda I) = n-2$ mais on peut noter que si λ n'est pas nul, on a toujours $\text{rg}(A-\lambda I) = n-1$ en considérant la matrice extraite formée des n-1 premières lignes et colonnes.
En résumé, la matrice A est diagonalisable si et seulement si le système (S) admet deux solutions distinctes et non nulles.
Mais λ et μ sont solutions du système (S) si et seulement si λ et μ sont les racines de l'équation (E) : $X^2 - a_nX - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$. Par suite, A est diagonalisable si et seulement si $\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 = 0$ et $\Delta = a_n^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \neq 0$.

Correction de l'exercice 33 ▲

1. $\chi_A = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & -1 \\ 1 & 1-X & 1 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)(X^2-2X) - (2-X) + (2-X) = -X(X-1)(X-2).$

On est dans le cas d'une matrice diagonalisable avec 3 valeurs propres simples.

Recherche des droites stables. Dans chacun des cas, les droites stables sont les droites engendrées par des vecteurs propres. On obtient immédiatement les 3 droites stables : $E_0 = \text{Vect}(e1)$ où $e_1 = (1,-1,0)$, $E_1 = \text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = (1,-1,-1)$ et $E_2 = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = (0,1,1)$.

Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. La restriction de f à P est un endomorphisme de P et on sait de plus que le polynôme caractéristique de $f_{/P}$ divise celui de f. $f_{/P}$ est diagonalisable car f l'est car on dispose d'un polynôme scindé à racines simples annulant f et donc $f_{/P}$. On en déduit que P est engendré par deux vecteurs propres indépendants de $f_{/P}$ qui sont encore vecteurs propres de f. On obtient trois plans stables : $P_1 = \text{Vect}(e_2,e_3)$, $P_2 = \text{Vect}(e_1,e_3)$ et $P_3 = \text{Vect}(e_1,e_2)$.

2. $\chi_A = \begin{vmatrix} 2-X & 2 & 1 \\ 1 & 3-X & 1 \\ 1 & 2 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-5X+4) - (-2X+2) + (X-1) = (1-X)((X-2)(X-4)-2-1) = (1-X)(X^2+6X-5) = -(X-1)^2(X-5)$. Puis E_1 est le plan d'équation $x+2y+z=0$ et $E_5 = \text{Vect}((1,1,1))$.

   On est toujours dans le cas diagonalisable mais avec une valeur propre double.

   Les droites stables sont $E_5 = \text{Vect}((1,1,1))$ et n'importe quelle droite contenue dans E_1. Une telle droite est engendrée par un vecteur de la forme $(x,y,-x-2y)$ avec $(x,y) \neq (0,0)$.

   Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. f est diagonalisable et donc $f_{/P}$ est un endomorphisme diagonalisable de P. Par suite, P est engendré par deux vecteurs propres indépendants de f. On retrouve le plan propre de f d'équation $x+2y+z=0$ et les plans engendrés par $(1,1,1)$ et un vecteur quelconque non nul du plan d'équation $x+2y+z=0$. L'équation générale d'un tel plan est $(-a-3b)x+(2a+2b)y+(b-a)z=0$ où $(a,b) \neq (0,0)$.

3. $\chi_A = \begin{vmatrix} 6-X & -6 & 5 \\ -4 & -1-X & 10 \\ 7 & -6 & 4-X \end{vmatrix} = (6-X)(X^2-3X+56)+4(6X+6)+7(5X-55) = -X^3+9X^2-15X-25 = -(X+1)(X^2-10X+25) = -(X+1)(X-5)^2$.

   $E_{-1} = \text{Vect}(10,15,4)$ et $E_5 = \text{Vect}((1,1,1))$. On est dans le cas où A admet une valeur propre simple et une double mais n'est pas diagonalisable. Les droites stables par f sont les deux droites propres.

   Recherche des plans stables. Soit P un plan stable par f. Le polynôme caractéristique de $f_{/P}$ est unitaire et divise celui de f. Ce polynôme caractéristique est donc soit $(X-1)(X-5)$ soit $(X-5)^2$.

   Dans le premier cas, $f_{/P}$ est diagonalisable et P est nécessairement le plan $\text{Vect}((10,15,4))+\text{Vect}((1,1,1))$ c'est-à-dire le plan d'équation $11x-6y-5z=0$.

   Dans le deuxième cas, $\chi_{f_{/P}} = (X-5)^2$ et 5 est l'unique valeur propre de $f_{/P}$. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre que $(f_{/P}-5Id)^2 = 0$ et donc P est contenu dans $\text{Ker}(f-5Id)^2$. $\text{Ker}(f-5Id)^2$ est le plan d'équation $x=z$ qui est bien sûr stable par f car $(f-5Id)^2$ commute avec f.

Correction de l'exercice 34 ▲

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. A est de rang 1 et donc admet deux valeurs propres égales à 0 . $\text{Tr}A = 0$ et donc la troisième valeur propre est encore 0. Donc $\chi_A = -X^3$. A est nilpotente et le calcul donne $A^2 = 0$. Ainsi, si X est une matrice telle que $X^2 = A$ alors X est nilpotente et donc $X^3 = 0$.

Réduction de A. $A^2 = 0$. Donc $\text{ImA} \subset \text{Ker}A$. Soit e_3 un vecteur non dans $\text{Ker}A$ puis $e_2 = Ae_3$. (e_2) est une base de $\text{Im}A$ que l'on complète en (e_1,e_2) base de $\text{Ker}A$.

(e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ car si $ae_1+be_2+ce_3 = 0$ alors $A(ae_1+be_2+ce_3) = 0$ c'est-à-dire $ce_2 = 0$ et donc $c = 0$. Puis $a = b = 0$ car la famille (e_1,e_2) est libre.

Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ à la base (e_1,e_2,e_3) alors $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On voit peut prendre $P=\begin{pmatrix}3&-7&0\\-1&-14&0\\0&-7&1\end{pmatrix}$.

Si $X^2=A$, X commute avec A et donc X laisse stable $\mathrm{Im}A$ et $\mathrm{Ker}A$. On en déduit que Xe_2 est colinéaire à e_2 et Xe_1 est dans $\mathrm{Vect}(e_1,e_2)$. Donc $P^{-1}XP$ est de la forme $\begin{pmatrix}a&0&d\\b&c&e\\0&0&f\end{pmatrix}$. De plus, X est nilpotente de polynôme caractéristique $(a-\lambda)(c-\lambda)(f-\lambda)$. On a donc nécessairement $a=c=f=0$. $P^{-1}XP$ est de la forme $\begin{pmatrix}0&0&b\\a&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Enfin, $X^2=A\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&b\\a&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow ab=1$.

Les matrices X solutions sont les matrices de la forme $P\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{a}\\a&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}$ où a est non nul et b quelconque.

On trouve $P^{-1}=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}14&-7&0\\-1&-3&0\\-7&-21&49\end{pmatrix}$ puis

$$\begin{aligned}X&=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}3&-7&0\\-1&-14&0\\0&-7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{a}\\a&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&-7&0\\-1&-3&0\\-7&-21&49\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{49}\begin{pmatrix}-7a&0&\frac{3}{a}-7b\\-14&0&-\frac{1}{a}-14b\\-7a&0&-7b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14&-7&0\\-1&-3&0\\-7&-21&49\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2a-\frac{3}{7a}+b&a-\frac{9}{7a}+3b&\frac{3}{a}-7b\\-4a+\frac{1}{7a}+2b1&2a+\frac{3}{7a}+6b&-\frac{1}{a}-14b\\-2a+b&a+3b&-7b\end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 35 ▲

Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&2&1\\2&2&3\end{pmatrix}$. $\chi_A=\begin{vmatrix}1-X&0&-1\\1&2-X&1\\2&2&3-X\end{vmatrix}=(1-X)(X^2-5X+4)-(-2+2X)=(1-X)(X^2-5X+4+2)=-(X-1)(X-2)(X-3)$.

A est à valeurs propres réelles et simples. A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les sous-espaces propres sont des droites.

Si M est une matrice qui commute avec A, M laisse stable ces droites et donc si P est une matrice inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale alors la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale. Réciproquement une telle matrice commute avec A.

$$C(A)=\{P\mathrm{diag}(a,b,c)P^{-1},\ (a,b,c)\in\mathbb{C}^3\}.$$

On trouve $C(A)=\left\{\begin{pmatrix}2b-c&-a+2b-c&\frac{a-c}{2}\\-b+c&a-b+c&(-a+c)/2\\2c-2b&-2b+c&c\end{pmatrix},\ (a,b,c)\in\mathbb{C}^3\right\}$. On peut vérifier que $C(A)=\mathrm{Vect}(I,A,A^2)$.

Correction de l'exercice 36 ▲

F est stable par f et donc $f_{/F}$ est un endomorphisme de F. f est diagonalisable et donc il existe un polynôme P, scindé à racines simples, tel que $P(f) = 0$. Mais alors $P(f_{/F}) = 0$ et on a trouvé un polynôme scindé à racines simples annulateur de $f_{/F}$. Donc $f_{/F}$ est diagonalisable.

Correction de l'exercice 37 ▲

Soit $P = X^3 + X^2 + X = X(X-j)(X-j^2)$. P est à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de A. Donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont à choisir dans $\{0, j, j^2\}$. Le polynôme caractéristique de A est de la forme $(-1)^n X^\alpha (X-j)^\beta (X-j^2)^\gamma$ avec $\alpha+\beta+\gamma = n$. De plus, A est réelle et on sait que j et $j^2 = \overline{j}$ ont même ordre de multiplicité ou encore $\gamma = \beta$.
Puisque A est diagonalisable, l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant et donc

$$\mathrm{rg}(A) = n - \dim(\mathrm{Ker}A) = n - \alpha = 2\beta.$$

On a montré que $\mathrm{rg}A$ est un entier pair.