****** EXERCICE 1 ****** ***Pour*** $n \in \mathbb{N}^*$***, on pose :***

$$I_n = \int_0^{+\infty} (1 - \operatorname{th}^{2n} t)\ \mathrm{d}t, \quad J_n = \int_0^1 \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2}\ \mathrm{d}x, \quad K_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \operatorname{th}^{2n} t)\ \mathrm{d}t.$$

**1°)** ***Sans chercher à trouver la nature, ni calculer la valeur de*** $I_n$, $J_n$, $K_n$ ***:***

**a)** ***Montrons que*** $I_n = J_n$, ***et disons ce que cela signifie cette égalité dans ce contexte.***

**b)** ***Montrons que*** $J_n$ ***est une*** **intégrale définie** ***(au sens de Riemann).***

**c)** ***Montrons que*** $I_n$ ***est un réel*** $\geqslant 0$.

**2°)** ***Exprimons*** $I_n$ ***comme somme de*** $n$ ***réels*** $\geqslant 0$***, en calculant chaque terme de cette somme.***

**3°)** ***En utilisant ce qui précède :***

**a)** ***Déduisons que*** $K_n$ ***est un réel*** $\geqslant 0$.

**b)** ***Trouvons la valeur de*** $K_n$.

***FIN de l'EXERCICE 1***

****** EXERCICE 2 ****** ***Soit*** $A = \sum_{n=p+q}^{+\infty} \frac{\cos^2(\omega n - \omega q)}{5^n}$***, où*** $\omega \in \mathbb{R}$ ***et*** $p, q \in \mathbb{N}$.

**1°) *Pourquoi on dit que $A$ est une* somme infinie.**

On dit que $A$ est une somme infinie parce que c'est une somme qui comporte une infinité de termes.

**2°) *Sans chercher à calculer $A$, montrons que $A \in \mathbb{R}$.***

Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant p+q)$ : $u_n = \frac{\cos^2(\omega n - \omega q)}{5^n} \geqslant 0$. On a donc : $A = \sum_{n=p+q}^{+\infty} u_n$.

Comme la suite $(u_n)_{n \geqslant p+q}$ est ***à valeurs réelles***, alors :

***pour montrer que $A \in \mathbb{R}$, il suffit de montrer que la série numérique $\sum_{n \geqslant p+q} u_n$ est convergente.***

Commençons par le rappel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x \leqslant 1$ et $5^x > 0$. Il s'ensuit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (n \geqslant p+q), \ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{5^n}. \qquad (\textbf{\textit{E2.1}})$$

Or $\sum_{n \geqslant p+q} \frac{1}{5^n} = \sum_{n \geqslant p+q} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ est une ***série géométrique*** de raison $z = \frac{1}{5}$ / $|z| = \frac{1}{5} < 1$,

$$\Longrightarrow \text{ la série numérique } \sum_{n \geqslant p+q} \frac{1}{5^n} \text{ est convergente.} \qquad (\textbf{\textit{E2.2}})$$

Mais, d'après le ***Critère de comparaison des séries à termes*** $\geqslant 0$,

$$(\textbf{\textit{E2.1}}) \text{ et } (\textbf{\textit{E2.2}}) \Longrightarrow \text{ la série numérique } \sum_{n \geqslant p+q} u_n \text{ est convergente,}$$

$\Longrightarrow$ sa somme (totale) $A = \sum_{n=p+q}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R}$, car, de plus, $u_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant p+q)$. ***Cqfd.***

**2°) *Calculons $A$, en simplifiant le résultat autant que possible.***

Remarquons d'abord que, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant p+q)$ : $u_n = \frac{\cos^2(\omega n - \omega q)}{5^n} = \frac{\cos^2[\omega(n-q)]}{5^n}$.

Cette remarque suggère d'effectuer, dans la somme infinie $A$, le changement d'indice $k = n - q$ :

$$A = \sum_{n=p+q}^{+\infty} \frac{\cos^2[\omega(n-q)]}{5^n} = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{\cos^2(\omega k)}{5^{k+q}} = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{\cos^2(\omega k)}{5^k 5^q} = \frac{B}{5^q}, \quad \text{avec } B = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{\cos^2(\omega k)}{5^k}. \qquad (\textbf{\textit{E2.3}})$$

Ainsi, pour obtenir la valeur de $A$, il suffit de calculer d'abord celle de $B$. Or, $B = \sum_{k=p}^{+\infty} b_k$, avec :

$$\forall k \in \mathbb{N} \ (k \geqslant p), \quad b_k = \frac{\cos^2(\omega k)}{5^k} = \frac{c_k + d_k}{2}, \quad \text{avec } c_k = \frac{1}{5^k} \quad \text{et} \quad d_k = \frac{\cos(\lambda k)}{5^k}, \quad \text{où } \lambda = 2\omega. \qquad (\textbf{\textit{E2.4}})$$

D'après le raisonnement menant à (***E2.2***), $\sum_{k \geqslant p} c_k$ est une série géométrique convergente de raison $z_1 = \frac{1}{5}$,

$$\Longrightarrow C = \sum_{k=p}^{+\infty} c_k = \frac{c_p}{1 - z_1} = \frac{z_1^p}{1 - z_1} = \frac{\frac{1}{5^p}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4 \cdot 5^{p-1}}. \qquad (\textbf{\textit{E2.5}})$$

D'autre part, $\forall k \in \mathbb{N}$ $(k \geqslant p)$, $d_k = \frac{\cos(\lambda k)}{5^k} = \frac{1}{5^k} \cdot \mathbf{Re}(e^{i\lambda k}) = \mathbf{Re}\left(\frac{1}{5^k} \cdot e^{i\lambda k}\right)$ (car $\frac{1}{5^k} \in \mathbb{R}$),

$\Longrightarrow$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $(k \geqslant p)$, $d_k = \mathbf{Re}(v_k)$, où $v_k = \frac{e^{i\lambda k}}{5^k} = \frac{(e^{i\lambda})^k}{5^k} = \left(\frac{e^{i\lambda}}{5}\right)^k = z_2^k$, avec $z_2 = \frac{e^{i\lambda}}{5}$.

La série numérique à termes complexes $\sum_{k \geqslant p} v_k$ est une ***série géométrique*** de raison $z_2$ vérifiant :

$$|\,z_2\,| = \left|\,\frac{e^{i\lambda}}{5}\,\right| = \frac{|\,e^{i\lambda}\,|}{5} = \frac{1}{5} < 1,$$

$\Longrightarrow \displaystyle\sum_{k\geqslant p} v_k$ est une série géométrique convergente et sa somme (totale) est donc donnée par :

$$V = \sum_{k=p}^{+\infty} v_k = \frac{v_p}{1-z_2} = \frac{z_2^p}{1-z_2} = \frac{\left(\dfrac{e^{i\lambda}}{5}\right)^p}{1-\dfrac{e^{i\lambda}}{5}} = \frac{1}{5^{p-1}}\cdot\frac{e^{ip\lambda}}{5-e^{i\lambda}}\ ; \qquad (\boldsymbol{E2.6})$$

$$\Longrightarrow\ D = \sum_{k=p}^{+\infty} d_k = \sum_{k=p}^{+\infty}\mathbf{Re}\,(v_k) = \mathbf{Re}\left(\sum_{k=p}^{+\infty} v_k\right) = \mathbf{Re}\,(V). \qquad (\boldsymbol{E2.7})$$

Or, on a : $\dfrac{e^{ip\lambda}}{5-e^{i\lambda}} = \dfrac{\cos(p\lambda)+i\sin(p\lambda)}{5-\cos\lambda - i\sin\lambda} = \dfrac{[\,\cos(p\lambda)+i\sin(p\lambda)\,]\cdot(5-\cos\lambda+i\sin\lambda)}{(5-\cos\lambda-i\sin\lambda)(5-\cos\lambda+i\sin\lambda)}$ ;

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ \mathbf{Re}\left(\frac{e^{ip\lambda}}{5-e^{i\lambda}}\right) &= \frac{(5-\cos\lambda)\cos(p\lambda)\ -\ (\sin\lambda)\sin(p\lambda)}{(5-\cos\lambda)^2\ +\ \sin^2\lambda}\\ &= \frac{5\cos(p\lambda)\ -\ [\ \cos\lambda\cos(p\lambda)+(\sin\lambda)\sin(p\lambda)\,]}{25-10\cos\lambda\ +\ \cos^2\lambda\ +\ \sin^2\lambda}\\ &= \frac{5\cos(p\lambda)\ -\ \cos(p\lambda-\lambda)}{25-10\cos\lambda\ +\ 1} = \frac{5\cos(p\lambda)\ -\ \cos\,[\,(p-1)\lambda\,]}{26-10\cos\lambda}. \qquad (\boldsymbol{E2.8})\end{aligned}$$

En combinant ($\boldsymbol{E2.6}$), ($\boldsymbol{E2.7}$) et ($\boldsymbol{E2.8}$), il vient :

$$D = \sum_{k=p}^{+\infty} d_k = \frac{1}{5^{p-1}}\cdot\frac{5\cos(p\lambda)\ -\ \cos\,[\,(p-1)\lambda\,]}{26-10\cos\lambda} = \frac{1}{5^{p-1}}\cdot\frac{5\cos(2p\,\omega)\ -\ \cos\,[\,2(p-1)\omega\,]}{26-10\cos(2\,\omega)}. \qquad (\boldsymbol{E2.9})$$

Compte tenu de ($\boldsymbol{E2.4}$), ($\boldsymbol{E2.5}$) et ($\boldsymbol{E2.10}$), il vient :

$$B = \sum_{k=p}^{+\infty} b_k = \frac{C+D}{2} = \frac{1}{4\cdot 5^{p-1}}\cdot\left[\frac{1}{2}\ +\ \frac{5\cos(2p\,\omega)\ -\ \cos\,[\,2(p-1)\omega\,]}{13-5\cos(2\,\omega)}\right]. \qquad (\boldsymbol{E2.10})$$

Avec cette valeur de $B$ dans ($\boldsymbol{E2.3}$), on arrive finalement à :

$$\boxed{A = \frac{1}{4\cdot 5^{p+q-1}}\cdot\left[\frac{1}{2}\ +\ \frac{5\cos(2p\,\omega)\ -\ \cos\,[\,2(p-1)\omega\,]}{13-5\cos(2\,\omega)}\right]}. \qquad (\boldsymbol{E2.11})$$

**4°) *Disons ce que signifie, en pratique, cette valeur de la somme infinie $A$ (notamment pourquoi on parle, plus précisément, de somme totale, et précisons de quoi).***

En pratique, la somme obtenue signifie que si on pouvait concrètement effectuer la ***somme de tous les termes*** de la suite $(u_n)_{n\geqslant p+q}$, avec $u_n = \dfrac{\cos^2(\,\omega n-\omega q)}{5^n}$, on obtiendrait comme résultat la valeur de la somme infinie $A$ donnée par ($\boldsymbol{E2.11}$).

On peut ainsi dire que cette valeur de $A$ représente la ***somme totale*** de tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant p+q}$.

**FIN de l'EXERCICE 2**

****** *EXERCICE 3* ******

**I** - Etudions la nature des séries :

•• $\boxed{\textit{(1)} \sum_{n\geqslant 0} \sqrt[5]{1-\operatorname{th}^6 n}}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$ : $u_n = \sqrt[5]{1-\operatorname{th}^6 n} \geqslant 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th} x < 1$).

Pour démarrer, observons que : $u_n^5 = 1-\operatorname{th}^6 n = 1-(\operatorname{th}^2 n)^3 = (1-\operatorname{th}^2 n)(1+\operatorname{th}^2 n+\operatorname{th}^4 n)$,

$$\Longrightarrow u_n^5 = \frac{1+\operatorname{th}^2 n+\operatorname{th}^4 n}{\operatorname{ch}^2 n}. \qquad \textbf{(E3.1)}$$

**••• *A partir de là, nous proposons 2 méthodes efficaces pour trouver la nature de cette série.***

• **Méthode 1 : *Critère de comparaison des séries à termes* $\geqslant 0$.**

On sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} -1 < \operatorname{th} x < 1 \implies 0 \leqslant \operatorname{th}^2 x < 1 \implies 0 \leqslant 1+\operatorname{th}^2 x+\operatorname{th}^4 x < 3, \\ \text{et} \quad \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \Big(\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}\Big)^2 = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2} \leqslant \dfrac{4}{(e^x)^2} = 4\,e^{-2x}, \end{array}\right\} \implies \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n^5 \leqslant 12\,e^{-2n}\ ;$$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n,\ \text{ avec } v_n = \sqrt[5]{12\,e^{-2n}} = \sqrt[5]{12}\cdot e^{-2n/5} = \sqrt[5]{12}\cdot(e^{-2/5})^n. \qquad \textbf{(E3.2)}$$

Or, $\sum_{n\geqslant 0} v_n = \sum_{n\geqslant 0} \sqrt[5]{12}\cdot(e^{-2/5})^n$ est une série géométrique de 1[er] terme $v_0 = \sqrt[5]{12}$ et de raison $q = e^{-2/5}$.

$$\text{Comme } |\,q\,| = e^{-2/5} < 1, \text{ alors la série géométrique } \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ est convergente.} \qquad \textbf{(E3.3)}$$

Mais, d'après le ***Critère de comparaison des séries à termes*** $\geqslant 0$,

$$\textbf{(E3.2)} \text{ et } \textbf{(E3.3)} \implies \boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} \sqrt[5]{1-\operatorname{th}^6 n} \text{ est convergente}}.$$

• **Méthode 2 : *Règle* « $\lambda\,\rho^n$ ».**

On part de :

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{th} n = 1 \implies \lim_{n\to+\infty}(1+\operatorname{th}^2 n+\operatorname{th}^4 n) = 3 \in \mathbb{R}^* \implies 1+\operatorname{th}^2 n+\operatorname{th}^4 n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3, \qquad \textbf{(E3.4)}$$

$$\operatorname{ch}^2 n = \Big(\frac{e^n+e^{-n}}{2}\Big)^2 = \frac{e^{2n}}{4}\cdot(1+e^{-2n})^2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}(1+e^{-2n})^2 = 1 \implies \operatorname{ch}^2 n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{2n}}{4}. \qquad \textbf{(E3.5)}$$

Or, **(E3.4)** et **(E3.5)** $\implies u_n^5 \underset{n\to+\infty}{\sim} 12\,e^{-2n} \implies u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[5]{12\,e^{-2n}} = \sqrt[5]{12}\cdot e^{-2n/5} = \sqrt[5]{12}\cdot(e^{-2/5})^n$,

$$\implies u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\,\rho^n, \quad \text{avec } \lambda = \sqrt[5]{12} \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \rho = e^{-2/5} \in \mathbb{R}_+.$$

Comme $\rho < 1$, alors, d'après la ***Règle*** « $\lambda\,\rho^n$ », $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} \sqrt[5]{1-\operatorname{th}^6 n} \text{ est convergente}}$.

•• $\boxed{\textit{(2)} \sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\cos(7n\pi)}{\ln n}}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n = (-1)^n \dfrac{\cos(7n\pi)}{\ln n}$.

Partant du résultat classique $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \cos(n\pi) = (-1)^n}$, il vient, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ($n \geqslant 2$), comme $7n \in \mathbb{N}$ :

$$\cos(5n\pi) = (-1)^{7n} = [\,(-1)^7\,]^n = (-1)^n \implies u_n = (-1)^n\frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{2n}}{n}, \quad \text{i.e.} \quad u_n = \frac{1}{\ln n},$$

$$\lim_{n\to+\infty} n u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty.$$

$$\implies \text{d'après la } \textbf{\textit{Règle}} \text{ « } n^\alpha u_n \text{ »}, \quad \boxed{\textbf{\textit{la série numérique}} \sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\cos(7n\pi)}{\ln n} \ \textbf{\textit{est divergente}}}.$$

$\boxed{\textit{(3)}\ \sum_{n\geqslant 0} e^{2n}\,\mathrm{sh}\,(e^{-10n/3})}$. Posons, $\forall\, n\in \mathbb{N}$ : $u_n \;=\; e^{2n}\,\mathrm{sh}\,(e^{-10n/3}) \geqslant 0$ .

***Nous examinons 2 méthodes ci-après, parmi les plus rapides et les plus efficaces.***

•• **Méthode 1 :** ***Critère des équivalents des séries à termes*** $\geqslant 0$.

Quand $n \longrightarrow +\infty$, $x = e^{-10n/3} \longrightarrow 0$, et donc $\mathrm{sh}\,x \sim x$, i.e. $\mathrm{sh}\,(e^{-10n/3}) \underset{t\longrightarrow+\infty}{\sim} e^{-10n/3}$,

$$\Longrightarrow\; u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} e^{2n}\cdot e^{-10n/3}, \quad \text{i.e. } u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} e^{-4n/3} = (e^{-4/3})^n = v_n \;; \qquad (\textbf{\textit{E3.6}})$$

$\Longrightarrow$ d'après le ***Critère des équivalents des séries à termes*** $\geqslant 0$,

$$\text{les séries } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ et } \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ sont de même nature.} \qquad (\textbf{\textit{E3.7}})$$

Or, la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n = \sum_{n\geqslant 0} [\,(e^{-4/3})^n\,]$ est une série géométrique de 1$^{\text{er}}$ terme $v_0 = 1$ et de raison $q = e^{-4/3}$.

$$\text{Comme } |\,q\,| = e^{-4/3} < 1, \text{ alors la série géométrique } \sum_{n\geqslant 0} v_n \text{ est convergente.} \qquad (\textbf{\textit{E3.8}})$$

Finalement, (***E3.7***) et (***E3.8***) $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} e^{2n}\,\mathrm{sh}\,(e^{-10n/3}) \text{ est convergente}}$.

•• **Méthode 2 :** ***Equivalent simple de*** $u_n$ ***en*** $+\infty$ ***et Règle*** « $n^\alpha u_n$ ».

On démarre comme dans la **Méthode 1**, jusqu'à (***E3.6***). Mais après, on bifurque plutôt comme suit :

$$(\textbf{\textit{E3.6}}) \;\Longrightarrow\; n^5 u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} n^5 e^{-4n/3}. \qquad (\textbf{\textit{E3.9}})$$

D'après les propriétés de croissance comparée dans les limites, on sait que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^5 e^{-4n/3} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{-4n/3} = 0 \;\Longrightarrow\; \lim_{n\longrightarrow+\infty} n^5 e^{-4n/3} = 0. \qquad (\textbf{\textit{E3.10}})$$

Or, (***E3.9***) et (***E3.10***) $\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0 \Longrightarrow \exists\,\alpha > 1\ (\alpha = 5)\,/\, \lim_{n\longrightarrow+\infty} n^\alpha u_n = 0$,

$\Longrightarrow$ d'après la ***Règle*** « $n^\alpha u_n$ », $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} e^{2n}\,\mathrm{sh}\,(e^{-10n/3}) \text{ est convergente}}$. ***Cqfd.***

> ••• ***Remarque/Commentaire n° 1-Exo3 :***
> Dans la ***Méthode 2*** ci-dessus, toute puissance $\alpha > 1$ permettait de conclure.

•• $\boxed{\textit{(4)}\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sin(5n)}}$. Posons, $\forall\, n\in \mathbb{N}^*$ : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sin(5n)}$.

Partons de ce que : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\dfrac{1}{1+x}$ , avec $x = \dfrac{\sin(5n)}{\sqrt{n}}$.

On sait que quand $n \longrightarrow +\infty$, $x \longrightarrow 0$ (car $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ et $\sin(5n)$ est bornée). D'où, quand $n \longrightarrow +\infty$ :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2) = 1 - \frac{\sin(5n)}{\sqrt{n}} + O\Big(\frac{\sin(5n)}{\sqrt{n}}\Big)^2 = 1 - \frac{\sin(5n)}{\sqrt{n}} + O\Big(\frac{\sin^2(5n)}{n}\Big),$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow\; u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\Big[1 - \frac{\sin(5n)}{\sqrt{n}} + O\Big(\frac{\sin^2(5n)}{n}\Big)\Big] \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n\sin(5n)}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot O\Big(\frac{\sin^2(5n)}{n}\Big) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n\sin(5n)}{n} + O\Big(\frac{(-1)^n\sin^2(5n)}{n^{3/2}}\Big) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n\sin(5n)}{n} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big) \quad (\text{car } (-1)^n\sin^2(5n) \text{ est bornée})
\end{aligned}$$

$$\text{et donc } \boxed{u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{\sin[\,n(5+\pi)\,]}{n} + O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)}, \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty.. \qquad (\textbf{\textit{E3.11}})$$

• ***Nature de la série*** $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ ***, avec*** $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)$.

C'est une série alternée, car $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0$. De plus, $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \searrow 0$ ;

$\Longrightarrow$ d'après le ***Critère des séries alternées***, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ est convergente}}$. (***E3.12***)

• ***Nature de la série*** $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ ***, avec*** $b_n = \frac{\sin[n(5+\pi)]}{n}$.

On observe que $b_n = \gamma_n \sin(n\theta)$, avec : $\gamma_n = \frac{1}{n} \searrow 0$ et $\theta = 5+\pi \in \mathbb{R}\setminus(2\pi\mathbb{Z})$ ;

$\Longrightarrow$ d'après le ***Critère des séries trigonométriques***, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} b_n \text{ est convergente}}$. (***E3.13***)

• ***Nature de la série*** $\sum_{n\geqslant 1} c_n$ ***, avec*** $c_n = O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)$.

$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une ***série de Riemann*** convergente, car de la forme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = 3/2 > 1$. Etant à termes $\geqslant 0$, elle donc aussi absolument convergente. Puisque $c_n = O\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\Big)$ quand $n \longrightarrow +\infty$, il s'ensuit :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} c_n \text{ est aussi absolument convergente, et donc convergente}}. \qquad (\textbf{\textit{E3.14}})$$

• ***Conclusion :*** (***E3.11***) à (***E3.14***) $\Longrightarrow$ $\boxed{\textbf{\textit{La série numérique}} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sin(5n)} \textbf{\textit{ est convergente}}}$

.

**II** - Disons si $\int_0^{+\infty} e^{-it^3}\, dt$ et la série $\sum_{n\geqslant 0} e^{-in^3}$ sont de même nature.

•• ***Nature de la série*** $\sum_{n\geqslant 0} e^{-in^3}$ . Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$ : $u_n = e^{-in^3} \in \mathbb{C}$.

On a, $\forall n \in \mathbb{N}$ : $|u_n| = \left|e^{-in^3}\right| = 1$ (car $e^{-in^3} = e^{i\theta}$, et $\theta = -n^3 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \left|e^{i\theta}\right| = 1$) ;

$\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} |u_n| = 1 \Longrightarrow |u_n| \not\longrightarrow 0 \Longrightarrow \boxed{u_n \not\longrightarrow 0}$, $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} e^{-in^3} \text{ est divergente}}$.

•• ***Nature de l'intégrale*** $I = \int_0^{+\infty} e^{-it^3}\, dt$ . Posons, $\forall t \in [0, +\infty[$ : $f(t) = e^{-it^3} \in \mathbb{C}$.

Par la ***Règle du changement de cran***, $I$ est de même nature que $J = \int_1^{+\infty} f(t)\, dt$.
Etudions la nature de $J$, autre ***I.I.S.*** en $+\infty$. Pour cela, partons de :

$$\forall t \in [1, +\infty[,\ f(t) = \frac{1}{3t^2} \cdot 3t^2\, e^{-it^3}.$$

$\Longrightarrow \forall t \in [1, +\infty[,\ f(t) = g(t)\cdot\varphi(t)$, avec $g(t) = \frac{1}{3t^2}$ et $\varphi(t) = 3t^2\, e^{it^3}$. (***E3.15***)

Or,

– la fonction $g$ est décroissante et $\geqslant 0$ sur $[1, +\infty[$, avec $\lim_{t\longrightarrow+\infty} g(t) = 0$ ; (***E3.16***)

– la fonction $\varphi$ est continue sur $[1, +\infty[$, de primitive $F(t) = -\frac{1}{i}\, e^{it^3}$ bornée. (***E3.17***)

En effet, $|F(t)| = \frac{1}{|i|}\left|e^{it^3}\right| = 1$ (car $t^3 \in \mathbb{R}$) $\Longrightarrow \exists M = 1 \in \mathbb{R}_+ /\ \forall t \in [1, +\infty[,\ |F(t)| \leqslant M$.

Mais (***E3.15***)-(***E3.16***)-(***E3.17***) $\Longrightarrow$ $J$ converge, d'après le ***Critère d'Abel***.

- ***Conclusion :*** $J$ converge $\Longrightarrow$ $\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it^3}\ \mathrm{d}t \ \ \textbf{\textit{converge}}}$.

•• ***Conclusion :*** $\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-it^3}\ \mathrm{d}t \ \text{ et la série } \sum_{n \geqslant 0} e^{-in^3} \text{ ne sont pas de même nature}}$.

**FIN de l'EXERCICE 3**

****** EXERCICE 4 ******

On pose : $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $I = \int_0^8 \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x}\,dx$, $W = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-8)^k}{(2k)! \cdot k}$, $T = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$.

**1°) *Sans chercher à calculer ni $F(x)$, ni $I$, ni $W$ :***

**a) *Montrons que $W \in \mathbb{R}$.***

Posons, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ : $w_k = \frac{(-8)^k}{(2k)! \cdot k}$. On a ainsi : $W = \sum_{k=1}^{+\infty} w_k$.

Comme la suite $(w_k)_{k \geqslant 1}$ est ***à valeurs réelles***, alors :

***pour montrer que $W \in \mathbb{R}$, il suffit de montrer que la série numérique $\sum_{k \geqslant 1} w_k$ est convergente.***

**•• Méthode 1 : *Règle de d'Alembert.***

Puisque $w_k \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, alors on peut écrire : $\left|\frac{w_{k+1}}{w_k}\right| = \frac{|w_{k+1}|}{|w_k|} = \frac{8^{k+1}}{[2(k+1)]! \cdot (k+1)} \times \frac{(2k)! \cdot k}{8^k}$,

$$\Longrightarrow \left|\frac{w_{k+1}}{w_k}\right| = \frac{8^{k+1}}{8^k} \times \frac{(2k)!}{[2(k+1)]!} \times \frac{k}{k+1} = \frac{4k}{(2k+1)(k+1)^2},$$

$$\Longrightarrow \lim_{k \to +\infty} \left|\frac{w_{k+1}}{w_k}\right| = \lim_{k \to +\infty} \frac{4k}{(2k+1)(k+1)^2} = \lim_{k \to +\infty} \frac{4k}{2k \cdot k^2} \Longrightarrow \lim_{k \to +\infty} \left|\frac{w_{k+1}}{w_k}\right| = 0 < 1,$$

$\Longrightarrow$ D'après la ***Règle de d'Alembert***, la série $\sum_{k \geqslant 1} w_k$ converge.

$\Longrightarrow$ sa somme (totale) $W = \sum_{k=1}^{+\infty} w_k \in \mathbb{R}$, car, de plus, $w_k \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. ***Cqfd.***

**•• Méthode 2 : *Critère des séries alternées.***

On a : $\left(\forall k \in \mathbb{N}^*\ w_k = (-1)^k \cdot a_k, \text{ avec } a_k = \frac{8^k}{(2k)! \cdot k} > 0\right) \Longrightarrow \sum_{k \geqslant 1} w_k$ est une série alternée. (***E4.1***)

De plus, $\left|\frac{w_{k+1}}{w_k}\right| = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{4k}{(2k+1)(k+1)^2} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2}{(k+1)^2} \leqslant 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leqslant 1$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ;

$\Longrightarrow$ $(|w_k|)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une série décroissante de nombres réels. (***E4.2***)

D'autre part, $\left(\forall k \in \mathbb{N}^*, \left|\frac{w_{k+1}}{w_k}\right| \leqslant \frac{1}{2}\right) \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, |w_{k+1}| \leqslant \frac{|w_k|}{2}$,

$\Longrightarrow$ par récurrence, il vient : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $|w_k| \leqslant \frac{|w_1|}{2^{k-1}}$, $\Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant |w_k| \leqslant \frac{4}{2^{k-1}}$ ; (***E4.3***)

(***E4.3***) et $\lim_{k \to +\infty} \frac{4}{2^{k-1}} = 0 \Longrightarrow \lim_{k \to +\infty} |w_k| = 0$. (***E4.4***)

Finalement, d'après le ***Critère des séries alternées***, (***E4.1***), (***E4.2***) et (***E4.4***) $\Longrightarrow$ la série $\sum_{k \geqslant 1} w_k$ converge.

$\Longrightarrow$ sa somme (totale) $W = \sum_{k=1}^{+\infty} w_k \in \mathbb{R}$, car, de plus, $w_k \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$. ***Cqfd.***

**••• *Remarque/Commentaire n°1-Exo4 :***

Le fait que $\lim_{k \to +\infty} |w_k| = 0$ pouvait aussi s'établir en passant par la ***formule de Stirling***.

En effet, d'après celle ci, $(2k)! \underset{k \to +\infty}{\sim} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} \cdot \sqrt{2\pi(2k)} = 2 \cdot \left(\frac{4k^2}{e^2}\right)^k \cdot \sqrt{\pi k}$ ;

$$\Longrightarrow |w_k| = \frac{8^k}{(2k)! \cdot k} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{8^k}{2 \cdot \left(\frac{4k^2}{e^2}\right)^k \cdot \sqrt{\pi k} \cdot k} = \frac{1}{2\sqrt{\pi} \cdot k^{3/2}} \cdot \left(\frac{2e^2}{k^2}\right)^k.$$

Comme $\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi} \cdot k^{3/2}} \cdot \left(\frac{2e^2}{k^2}\right)^k = 0$, il s'ensuit qu'on a aussi : $\lim_{k \to +\infty} |w_k| = 0$.

**b) *Montrons que $I$ est une intégrale définie (au sens de Riemann).***

Posons, $\forall x \in ]0\,,\,8]$ : $f(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x}\,) - 1}{x}$. On a donc : $I = \displaystyle\int_0^8 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A première vue, $I$ est une ***I.I.S.*** en $0^+$, car $f$ est continue sur $]0\,,\,10]$ et non définie en $x = 0$.

Alors pour montrer que $I$ est une intégrale définie au sens de Riemann, il suffit de montrer que la singularité finie qu'elle semble avoir en $x = 0$ n'en est, en réalité, pas une. Pour cela, il faut montrer que $f$ est bornée au voisinage droit de 0. Une condition suffisante pour cela est que $f$ admette une ***limite finie*** à droite en $x = 0$. Or, effectivement, on a, quand $x \longrightarrow 0$ $(x > 0)$ : $u = \sqrt{x} \longrightarrow 0$,

$$\Longrightarrow \ \cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + O(u^4) \ \Longrightarrow \ \cos\sqrt{x} = 1 - \frac{(\sqrt{x})^2}{2} + O(\sqrt{x})^4, \ \text{ i.e. } \ \cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2),$$

$$\Longrightarrow \ \cos\sqrt{x} - 1 = -\frac{x}{2} + O(x^2) \ \Longrightarrow \ f(x) = \frac{-\dfrac{x}{2} + O(x^2)}{x} = -\frac{x}{2x} + O\Big(\frac{x^2}{x}\Big) = -\frac{1}{2} + O(x),$$

$$\Longrightarrow \ \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ >}} \Big[-\frac{1}{2} + O(x)\Big] \Longrightarrow \lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ >}} f(x) = -\frac{1}{2} \in \mathrm{IR}.$$

Ayant une limite finie à droite en 0, on déduit que $f$ est bornée au voisinage droit de 0 ;

$\Longrightarrow$ 0 n'est pas une singularité dans $I$ $\Longrightarrow$ $I$ est une intégrale définie au sens de Riemann. ***Cqfd.***

> • • • ***Remarque/Commentaire n° 2-Exo4 :***
>
> Après avoir calculé $\displaystyle\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ >}} f(x) = -\frac{1}{2} \in \mathrm{IR}$, on pouvait alternativement poursuivre en disant qu'alors on peut prolonger la fonction $f$ par continuité à droite en 0 en posant $f(0) = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $I$ est aussi l'intégrale d'une ***fonction continue sur l'intervalle fermé borné*** $[0\,,\,10]$, et donc une intégrale définie au sens de Riemann.

**c) *Trouvons le domaine de définition $\mathcal{D}_F$ de la fonction $F$ dans $\mathbb{C}$.***

Pour $x \in \mathbb{C}$, fixé, posons, $\forall k \in \mathrm{IN}$ : $u_k = (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)\,!} \in \mathbb{C}$.

Notons alors que $\mathcal{D}_F = \Big\{x \in \mathbb{C} \,/\, F(x) \text{ existe dans } \mathbb{C}\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{C} \,/\, \text{la série } \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} u_k \text{ converge}\Big\}$.

Déterminer $\mathcal{D}_F$ revient ainsi à mener une discussion sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} u_k$ selon les valeurs de $x$ dans $\mathbb{C}$. Il s'agit donc d'une série à termes complexes. Compte tenu de la forme de son terme général $u_k$, le plus naturel est de penser à utiliser la *Règle de d'Alembert*. Cependant, ceci n'est pas possible pour $x = 0$, car alors $u_k = 0$, $\forall k \geqslant 1$, et donc le rapport $u_{k+1}/u_k$ n'a pas de sens. De ce fait, nous distinguerons 2 cas :

• ***Cas 1 :*** $x = 0$.

Alors on a : $u_0 = 1$ et, $\forall k \in \mathrm{IN}^*$, $u_k = 0$ ;

$\Longrightarrow$ la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} u_k$ converge en tant que série à termes nuls à partir d'un certain rang, $\Longrightarrow$ $0 \in \mathcal{D}_F$.

• ***Cas 2 :*** $x \in \mathbb{C}^*$.

Alors, $\forall k \in \mathrm{IN}$, $u_k \neq 0$ et donc on peut écrire : $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{(-1)^{k+1}x^{2(k+1)}}{[\,2(k+1)\,]\,!} \times \dfrac{(2k)\,!}{(-1)^k x^{2k}} = \dfrac{-x^2}{(2k+2)(2k+1)}$,

$$\Longrightarrow \ \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{-x^2}{(2k+2)(2k+1)}\right| = \frac{|\,x\,|^2}{(2k+2)(2k+1)}, \quad \text{car } \ \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} \ \text{ est un réel} \geqslant 0\ ,$$

$$\Longrightarrow \lim_{k \longrightarrow +\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{|\,x\,|^2}{(2k+2)(2k+1)} = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{|\,x\,|^2}{(2k)(2k)} \Longrightarrow \lim_{k \longrightarrow +\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = 0 < 1,$$

$\Longrightarrow$ D'après la ***Règle de d'Alembert***, la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} u_k$ converge, $\Longrightarrow$ $x \in \mathcal{D}_F$.

• • ***Conclusion :*** $\boxed{\mathcal{D}_F = \mathbb{C}}$.

**2°) a) *Montrons que :*** $\forall x \in \mathrm{IR}$, $\cos x = F(x)$.

D'après la ***formule d'Euler***, on sait que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos x \ =\ \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

Or, il a été vu en Classe que : $\forall\, x \in \mathbb{C},\ e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,!}$. Ainsi, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, comme $ix \in \mathbb{C}$ et $-ix \in \mathbb{C}$, alors :

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n\,!} \qquad \text{et} \qquad e^{-ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ix)^n}{n\,!},$$

$$\Longrightarrow\ 2\cos x \ =\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n\,!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ix)^n}{n\,!} \ =\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n + (-ix)^n}{n\,!} \ =\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[\,1 + (-1)^n\,] \cdot i^n \cdot x^n}{n\,!}. \qquad (\boldsymbol{E4.5})$$

Par ailleurs, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, on a : $1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si}\ \ n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si}\ \ n \text{ est impair.} \end{cases}$

De ce fait, $(\boldsymbol{E4.5}) \ \Longrightarrow\ 2\cos x = \displaystyle\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{2\, i^n x^n}{n\,!} \ \Longrightarrow\ \cos x \ =\ \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n\,!} \ =\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{2k} x^{2k}}{(2k)\,!}).$

Or, $i^2 = -1 \ \Longrightarrow\ \forall\, k \in \mathbb{N},\ i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$. D'où : $\cos x \ =\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)\,!}) \ =\ F(x)$. ***Cqfd.***

**b)** ***Déduisons que*** $I = W$ ***(permuter les symboles intégral et somme infinie est valide ici).***

Posons encore, $\forall\, x \in \,]\,0\,,\,8\,]$ : $f(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x}\,) - 1}{x}$. On a donc : $I = \displaystyle\int_0^8 f(x)\ \mathrm{d}x$.

De **1°)a)**, on déduit qu'on peut prolonger la fonction $f$ par continuité à droite en $0$ en posant : $f(0) = -\dfrac{1}{2}$.
Maintenant, de **2°)a)** ci-dessus, il vient, $\forall\, x \in \,]\,0\,,\,8\,]$ :

$$\cos(\sqrt{x}\,) = F(\sqrt{x}\,) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(\sqrt{x}\,)^{2k}}{(2k)\,!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(2k)\,!} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(2k)\,!},$$

$$\Longrightarrow\ \cos(\sqrt{x}\,) - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(2k)\,!} \ \Longrightarrow\ f(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(2k)\,!} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k-1}}{(2k)\,!}.$$

On vérifie aisément que cette expression étant aussi valable pour $x = 0$. D'où :

$$I = \int_0^8 \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k-1}}{(2k)\,!} \right] \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \int_0^8 (-1)^k \frac{x^{k-1}}{(2k)\,!}\ \mathrm{d}x \right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{(2k)\,!} \int_0^8 x^{k-1}\ \mathrm{d}x \right], \qquad (\boldsymbol{E4.6})$$

l'avant-dernière égalité découlant de ce que l'énoncé nous a dit d'admettre qu'il est valide ici de permuter les symboles intégral et somme infinie, et la dernière de la linéarité de l'intégrale définie au sens de Riemann.

Or, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^8 x^{k-1}\ \mathrm{d}x = \left[ \frac{x^k}{k} \right]_{x\,=\,0}^{x\,=\,8} = \frac{8^k}{k}$, ce qui, injecté dans $(\boldsymbol{E4.6})$, entraîne :

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{(-1)^k}{(2k)\,!} \cdot \frac{8^k}{k} \right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-8)^k}{(2k)\,! \cdot k} = W. \ \textbf{\textit{Cqfd.}}$$

**c)** ***Utilisons ce dernier résultat pour calculer une approximation de*** $I$ ***à*** $10^{-8}$ ***près.***

D'après la question précédente, il suffit de calculer une approximation de la somme infinie $W$ avec une incertitude absolue $< \mathit{Tol} = 10^{-8}$. Or, rappelons que : $W = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} w_k$, avec $w_k \ =\ \dfrac{(-8)^k}{(2k)\,! \cdot k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

Pour obtenir une valeur approchée de $W$ à $\mathit{Tol} = 10^{-8}$ près, il suffit de considérer une somme partielle $S_N \ =\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} w_k$, pour un rang $N$ (à trouver et aussi petit que possible) vérifiant :

$$|\, W \ -\ S_N \,| < \mathit{Tol}. \qquad (\boldsymbol{E4.7})$$

Or, $W \ -\ S_N \ =\ \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} w_k - \sum_{k=1}^{N} w_k \ =\ \sum_{n=N+1}^{+\infty} w_k \ =\ R_N$. Ainsi, $(\boldsymbol{E4.7}) \ \Longleftrightarrow\ |\, R_N \,| < \mathit{Tol}$.

Pour trouver un rang $N$ (aussi petit que possible) vérifiant $|R_N| < Tol$, nous allons exhiber une suite auxiliaire $(\rho_N)$, ***plus maniable***, convergente vers 0 et vérifiant : $\forall N \in \mathsf{IN}^*$, $R_N \leqslant \rho_N$. Une fois une telle suite trouvée, tout rang $N$ satisfaisant $\rho_N < Tol$ vérifiera aussi $R_N < Tol$.

Il y a, au moins, 2 manières possibles de trouver une suite $(\rho_N)$ appropriée, dépendant de la manière dont la convergence de la série $\sum_{k \geqslant 0} w_k$ (dont $W$ est la somme) a été prouvée en répondant à la question **1°)a)**.

**• • Approche 1 pour trouver une suite $(\rho_N)$ appropriée : *Règle de d'Alembert.***

En **1°)a)**, on a vu que la série $\sum_{k \geqslant 0} w_k$ converge d'après la ***Règle de d'Alembert***, avec :

$$\forall k \in \mathsf{IN}^*, \quad \left|\frac{w_{k+1}}{w_k}\right| = \frac{4k}{(2k+1)(k+1)^2} \;;$$

$$\Longrightarrow \forall k \in \mathsf{IN}^*, \quad \left|\frac{w_{k+1}}{w_k}\right| \leqslant \frac{4(k+1)}{(2k+1)(k+1)^2} = \frac{4}{(2k+1)(k+1)}, \quad \text{qui} \searrow 0 \;;$$

$$\Longrightarrow \forall N \in \mathsf{IN}^*, \; \forall k \geqslant N+1 \; (k \in \mathsf{IN}), \quad \left|\frac{w_{k+1}}{w_k}\right| \leqslant r_N, \quad \text{où } r_N = \frac{4}{(2N+3)(N+2)} \in [0\,,1[\;;$$

$$\Longrightarrow \forall N \in \mathsf{IN}^*, \quad |R_N| \leqslant \frac{|w_{N+1}|}{1-r_N}, \quad \text{i.e.} \quad \boxed{|R_N| \leqslant \rho_N, \quad \text{avec } \rho_N = \frac{|w_{N+1}|}{1-r_N}}.$$

Ainsi, pour que $|R_N| < Tol$, il suffit que $\rho_N = \dfrac{|w_{N+1}|}{1-r_N} < Tol$. D'où le tableau de calculs suivant :

| $N$ | $u_N$ | $\rho_N$ | $S_N$ | $\rho_N < 10^{-8}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $-4$ | $1,82$ | $-4$ | *FAUX* |
| 2 | $1,333\,333\,333\,333$ | $2,77 \times 10^{-1}$ | $-2,666\,666\,666\,667$ | *FAUX* |
| 3 | $-2,370\,370\,370\,370 \times 10^{-1}$ | $2,79 \times 10^{-2}$ | $-2,903\,703\,703\,704$ | *FAUX* |
| 4 | $2,539\,682\,539\,683 \times 10^{-2}$ | $1,92 \times 10^{-3}$ | $-2,878\,306\,878\,307$ | *FAUX* |
| 5 | $-1,805\,996\,472\,663 \times 10^{-3}$ | $9,54 \times 10^{-5}$ | $-2,880\,112\,874\,780$ | *FAUX* |
| 6 | $9,121\,194\,306\,379 \times 10^{-5}$ | $3,56 \times 10^{-6}$ | $-2,880\,021\,662\,836$ | *FAUX* |
| 7 | $-3,436\,556\,724\,539 \times 10^{-6}$ | $1,03 \times 10^{-7}$ | $-2,880\,025\,099\,393$ | *FAUX* |
| 8 | $1,002\,329\,044\,657 \times 10^{-7}$ | $2,38 \times 10^{-9}$ | $-2,880\,024\,999\,160$ | *VRAI* |

Ceci montre que $\rho_N < Tol = 10^{-8}$ est vérifié pour la première fois au rang $\boxed{N=8}$, et qu'alors on a :
$\boxed{S_N = S_8 \simeq -2,880\,024\,999}$, qui est donc une valeur approchée de $W$, et donc aussi de $I$, à $10^{-8}$ près.

**• • • *Remarque/Commentaire n° 3-Exo4* :**
L'inégalité $k \leqslant k+1$ utilisée pour déduire une majoration simple et décroissante de $\left|\dfrac{w_{k+1}}{w_k}\right|$ ci-dessus est intéressante ici parce qu'elle n'est pas brutale du fait que $k \sim k+1$ quand $k \longrightarrow +\infty$.

**• • • *Remarque/Commentaire n° 4-Exo4* :**
Une approche alternative, un peu plus subtile mais pas vraiment plus efficace, consistait à remarquer que :

$$\forall k \in \mathsf{IN}^*, \quad \left|\frac{w_{k+1}}{w_k}\right| = \frac{4k}{(2k+1)(k+1)^2} = \frac{4 \cdot 2k}{2(2k+1)(k+1)^2} \;;$$

$$\Longrightarrow \forall k \in \mathsf{IN}^*, \quad \left|\frac{w_{k+1}}{w_k}\right| \leqslant \frac{4(2k+1)}{2(2k+1)(k+1)^2} = \frac{4}{2(k+1)^2}, \quad \text{qui} \searrow 0 \;;$$

$$\Longrightarrow \forall N \in \mathsf{IN}, \; \forall k \geqslant N+1 \; (k \in \mathsf{IN}), \quad \left|\frac{w_{k+1}}{w_k}\right| \leqslant r_N, \quad \text{où } r_N = \frac{4}{2(N+2)^2} \in [0\,,1[\;;$$

$$\Longrightarrow \forall N \in \mathsf{IN}, \quad R_N \leqslant \frac{|w_{N+1}|}{1-r_N}, \quad \text{i.e.} \quad \boxed{R_N \leqslant \rho_N, \quad \text{avec } \rho_N = \frac{|w_{N+1}|}{1-r_N}}.$$

**• • Approche 2 pour trouver une suite $(\rho_N)$ appropriée : *Critère des séries alternées.***

Ayant vu, en **1°)a)**, que la série $\sum_{k \geqslant 0} w_k$ converge d'après le ***Critère des séries alternées***, il s'ensuit :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \ |R_N| \leqslant |w_{N+1}|, \quad \Longrightarrow \boxed{|R_N| \leqslant \rho_N, \quad \text{avec } \rho_N = |w_{N+1}|}.$$

Ainsi, pour que $|R_N| < Tol$, il suffit que $\rho_N = |w_{N+1}| < Tol$. D'où le tableau de calculs suivant :

| $N$ | $u_N$ | $\rho_N$ | $S_N$ | $\rho_N < 10^{-8}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $-4$ | $1,33$ | $-4$ | *FAUX* |
| 2 | $1,333\,333\,333\,333$ | $2,37 \times 10^{-1}$ | $-2,666\,666\,666\,667$ | *FAUX* |
| 3 | $-2,370\,370\,370\,370 \times 10^{-1}$ | $2,54 \times 10^{-2}$ | $-2,903\,703\,703\,704$ | *FAUX* |
| 4 | $2,539\,682\,539\,683 \times 10^{-2}$ | $1,81 \times 10^{-3}$ | $-2,878\,306\,878\,307$ | *FAUX* |
| 5 | $-1,805\,996\,472\,663 \times 10^{-3}$ | $9,12 \times 10^{-5}$ | $-2,880\,112\,874\,780$ | *FAUX* |
| 6 | $9,121\,194\,306\,379 \times 10^{-5}$ | $3,44 \times 10^{-6}$ | $-2,880\,021\,662\,836$ | *FAUX* |
| 7 | $-3,436\,556\,724\,539 \times 10^{-6}$ | $1,01 \times 10^{-7}$ | $-2,880\,025\,099\,393$ | *FAUX* |
| 8 | $1,002\,329\,044\,657 \times 10^{-7}$ | $2,33 \times 10^{-9}$ | $-2,880\,024\,999\,160$ | *VRAI* |

Ceci montre que $\rho_N < Tol = 10^{-8}$ est vérifié pour la première fois au rang $\boxed{N = 8}$, et qu'alors on a :

$\boxed{S_N = S_8 \simeq -2,880\,024\,999}$, qui est donc une valeur approchée de $W$, et donc aussi de $I$, à $10^{-8}$ près.

**3°) *Une série entière est une série de la forme $T$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique. Montrons alors que $F(x)$ est la somme d'une série entière, en précisant les coefficients $a_n$ appropriés, en donnant d'abord $a_0, a_1, a_2, a_3$, avant d'extrapoler pour $n$ quelconque.***

La fonction $F(x)$ est la somme de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$.

Or, on peut écrire $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$,

avec $\boxed{a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -\dfrac{1}{2!},\ a_3 = 0}$,

et, plus généralement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n/2}}{n!} & \text{si } n \text{ est } \textit{pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est } \textit{impair} \end{cases}}$ ;

ou encore : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} & \text{si } n = 2k, \text{ avec } k \textit{ entier pair} \\ -\dfrac{1}{n!} & \text{si } n = 2k, \text{ avec } k \textit{ entier impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est un } \textit{entier impair.} \end{cases}}$

***FIN de l'EXERCICE 4***

***FIN***