(1)

DR-
ING. BOLZONARA
FRANCK RAOUL
699859522 | 697796967

TRAVAUX dirigés de probabilité (1)

Exercice 1

a) Définir expérience aléatoire, espace d'états, résultat possible de l'expérience.

b-) Donner 4 exemples d'expérience aléatoire et ~~de~~ espaces d'états associés.

c-) Définir évènement aléatoire et donner quelques exemples (03).

Exercice 2

Les yeux bandés, vous manipulez 7 fiches où sont écrites les lettres E, E, T, B, R, L, I.
Quelle est la probabilité que vous écriviez le mot LIBERTE

Exercice 3

On tire au hasard 04 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité pour que parmi ces 04 cartes, il y ait exactement 2 rois?

Exercice 4

On lance trois dés parfaitement équilibrés. Montrer que la probabilité que la somme des points amenés dépasse dix est égale à la probabilité que cette somme ne dépasse pas dix.

Exercice 5 : problème du chevalier de Méré

Ce personnage marquant de la cour de Louis XIV qui "avait très bon esprit, mais n'était pas très bon géomètre" était un joueur impénitent, toujours à la recherche de règles cachées lui permettant d'avoir un avantage sur ses adversaires. Voici deux de ses règles

a-) Il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un 6 en lançant un dé 4 fois de suite.

b-) Il est avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un double-six en lançant deux dés 24 fois de suite.

Traduisez en probabilité a-) et b-) puis interprétez.

Exercice 6

On suppose un lancé de deux dés bien équilibrés.

1-) Définir l'espace d'états

2-) Définir la variable aléatoire "la somme des résultats des deux dés"

3-) Calculer $P_X(\{2,4\})$, $P_X(\{1,2,4\})$ et $P_X(\{3,4\})$

Exercice 7

Un individu est tiré au hasard dans une population où l'on trouve une proportion de 10^{-4} de séropositifs. On lui fait passer un test de détection de la séropositivité. Par ailleurs, des expérimentations antérieures ont permis de savoir que les probabilités d'avoir un résultat positif lors de l'application du test si l'individu est séropositif, ou s'il ne l'est pas sont respectivement égales à 0,99 (c'est la sensibilité du test) et à 0,001 (0,999 = 1 − 0,001 est la spécificité du test). Sachant que le test donne un résultat positif, quelle est la probabilité pour que l'individu soit effectivement séropositif?

Exercice 8

On classe les gérants de portefeuilles en deux catégories, les biens informés et les autres. Lorsqu'un gérant bien informé achète une valeur boursière pour son client, on peut montrer par une étude préalable que la probabilité que le cours de cette valeur monte est de 0,8. Si le gérant est mal informé, la probabilité que le cours descende est de 0,6. On sait par ailleurs que si l'on choisit au hasard un gérant de portefeuille, il y a une chance sur 10 que celui-ci soit un gérant bien informé. Un client choisit au hasard un gérant dans l'annuaire, et lui demande d'acheter une valeur. Sachant que le cours de cette valeur est monté, cherchons la probabilité pour que le gérant soit mal informé.

Exercice 9

1-) On lance 3 fois un dé. Si A_i est un évènement qui ne dépend que du $i^{ème}$ lancé, alors A_1, A_2, A_3 peuvent être qualifiés de?

2-) On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes. Les évènements $A = \{$la carte est une dame$\}$; $B = \{$la carte est un cœur$\}$ sont-ils indépendants.

Exercice 10

un appareil téléphonique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de 04 chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que des valeurs 0 et 1 (exemple; 1011)

1-) combien l'appareil peut-il fabriquer de codes distincts ?

2-) on supposera dans ce qui suit que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.
Soit X la V.a représentant le nombre de chiffre 1 figurant dans ce code.
Déterminer la loi de probabilité de X et calculer sa moyenne.

3-) une imprimante a été choisie au hasard dans une série. À la suite d'études antérieures, on a observé 5 cas possibles. Dans le cas E_0, l'imprimante n'écrit que des 0, quel que soit le code émit par l'appareil.
Pour chaque élément n de l'ensemble $\{1,2,3\}$ dans le cas E_n l'imprimante écrit correctement les n premiers caractères du code et n'écrit ensuite que des 0. par exemple, lorsque E_2 survient, tous les codes commençant par 01 sont imprimés 0100.
Dans le cas E_4, l'imprimante fonctionne correctement. L'état de l'imprimante sera donc considéré comme le résultat d'une épreuve aléatoire ayant 5 issues possibles E_0, E_1, E_2, E_3, E_4. On admet que, pour chaque élément $n \in \{1,2,3\}$, $P(E_n) = 32 \cdot 10^{-3}$.
le code émit par l'appareil est indépendant de l'état de l'imprimante.

a-) Calculer $P(E_4)$. pour la suite, C désigne l'événement « le code imprimé est identique à celui émis par l'appareil ».

b-) on suppose que E_0 se produit. Quelle est la probabilité $P_{E_0}(C)$ que le code imprimé soit quand même que l'appareil a envoyé ?
En déduire $P(C \cap E_0)$.

c-) Déterminer de même $P_{E_n}(C)$ puis $P(C \cap E_n)$. $n \in \{1,2,3,4\}$. En déduire $P(C)$.

d-) Si le code imprimé est exactement celui émis par l'appareil, quelle est la probabilité que E_2 se soit produit ?

(2) DR. ING. BOLZONARA FRANCK RAOUL
699859522 / 697796967

Travaux dirigés de probabilité (2)

Exercice 1

Un nombre est choisi au hasard entre 1 et 10, et nous devons deviner ce nombre en posant des questions auxquelles il ne sera répondu que par oui ou par non. Calculer l'espérance mathématique du nombre N de questions nécessaires dans les cas suivants :

- la $i^{ème}$ question est du type "Est-ce i ?" i étant égal à $1, 2, \ldots, 10$
- Avec chaque question, nous essayons d'éliminer à peu près la moitié des réponses possibles avec le protocole suivant : est-ce ≤ 5, ≤ 2 (resp. ≤ 7), ≤ 4 (resp. ≤ 9).

Exercice 2

Supposons que A soit un événement aléatoire et définissons la variable aléatoire X de la manière suivante : $X(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $X(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$.

1-) Comment nomme t-on cette variable aléatoire.

2-) Calculer son espérance mathématique et interprétez.

Exercice 3 un jeu de loto

Le joueur coche 6 numéros sur une grille qui en comporte 49. Les 6 numéros gagnants sont déterminés par tirage au sort. Soit N le nombre de numéros gagnants de la grille. Pour mise de 2 Euros, on reçoit le gain $G = g(N)$ suivant :

n numéros gagnants	gain $g(n)$	probabilité
6	2 132 885 E	$7{,}2 \cdot 10^{-8}$
5	3 575 E	$7{,}8 \cdot 10^{-5}$
4	94 E	$9{,}7 \cdot 10^{-4}$
3	11 E	$7{,}8 \cdot 10^{-2}$

Déterminer le gain moyen et interprétez.

Exercice 4

Aux Jeux olympiques de Vancouver (2010), 86 médailles ~~d'or~~ ont été mises en jeu. Nous faisons l'hypothèse que le nombre de médailles remportées par le pays est proportionnel à sa population. Sachant que la population du monde est de 6000×10^6 habitants et que celle de France 60×10^6 habitants, soit X la variable aléatoire dénombrant le nombre de médailles prévues pour la France.

1-) Déterminer la loi de X

2-) déterminer $E(X)$

3-) calculer $P(X \leq 3)$ (la probabilité pour que le nombre de médailles soit inférieur à 3).

Exercice 5

Admettons que le nombre d'erreurs Y par page d'un document suive une loi de Poisson de paramètre $\frac{1}{2}$. Calculons la probabilité qu'il y ait au moins une erreur dans une page donnée.

Exercice 6

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une V.a qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1-) Déterminer λ pour que $P(X > 6) = 0{,}3$.

2-) À quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?

3-) Calculer la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années

4-) Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des premières années, quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de 6 ans ?

5-) On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années. Peut-on dire que c'est du bon matériel ? Justifier.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x^2/2}$ si $x > 0$ et 0 ailleurs.

1-) Vérifier que f est une densité de proba.

2-) Mq $Y = X^2$ est une V.a continue dont on précise la densité. Reconnaître la loi de Y et $E(Y)$

3-) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

TD 2

Exercice 1

- Soit A_k l'évènement "le nombre $k \in \{1, \dots, 10\}$ a été choisi". Alors

$$P(N=k) = P(N=k \mid A_k)\, P(A_k) = \frac{1}{10}$$

et $E(N) = \sum_{k=1}^{10} k\, P(N=k) = \frac{11}{2}$

- $E(N) = 3 \times \frac{6}{10} + 4 \times \frac{4}{10} = \frac{17}{5}$

Exercice 2

1-) $X = 1_A$ fonction indicatrice de A

2-) $E(X) = E(1_A) = 1 \times p(A) + 0 \times p(\overline{A}) = p(A)$

ce qui donne le lien entre la proba d'un évènement et l'espérance d'une v.a.

Exercice 3

$E(G) = \sum_n g(n)\, P(N=n) = 11 \times 7{,}8 \cdot 10^{-2} + 94 \times 9{,}7 \cdot 10^{-4} + 3575 \times 7{,}8 \cdot 10^{-5} + 2132885 \times 7{,}2 \cdot 10^{-8} = 1{,}16\,€$

le lecteur pourra vérifier que l'écart-type vaut 572. Ainsi le bénéfice moyen du joueur, qui vaut $E(G) - 2 = -0{,}84$, est négatif, et le jeu est défavorable au joueur. La grande valeur de l'écart-type vient de ce que parfois (mais très rarement), le jeu peut rapporter beaucoup.

Exercice 4

$X \rightsquigarrow B(86, p)$ $\quad p = \frac{\text{population France}}{\text{population monde}} \simeq \frac{60 \times 10^6}{6000 \times 10^6} = 0{,}01.$

$E(X) = 86 \times 0{,}01 = 0{,}86.$

$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

avec $P(X=k) = \binom{86}{k} (0{,}01)^k (0{,}99)^{86-k}$

$P(X \leq 3) = 0{,}9889.$

Exercice 5

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - e^{-1/2} \simeq 0{,}39.$