

Espaces vectoriels de dimension finie

1 Base

Exercice 1

Montrer que les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ forment une base de \mathbb{R}^3 . Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

[Correction ▼](#)

[000979]

Exercice 2

1. Montrer que les vecteurs $x_1 = (0, 1, 1)$, $x_2 = (1, 0, 1)$ et $x_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de \mathbb{R}^3 . Trouver dans cette base les composantes du vecteur $x = (1, 1, 1)$.
2. Donner, dans \mathbb{R}^3 , un exemple de famille libre, qui n'est pas génératrice.
3. Donner, dans \mathbb{R}^3 , un exemple de famille génératrice, mais qui n'est pas libre.

[Correction ▼](#)

[000981]

Exercice 3

Vrai ou faux ? On désigne par E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

1. Si les vecteurs x, y, z sont deux à deux non colinéaires, alors la famille x, y, z est libre.
2. Soit x_1, x_2, \dots, x_p une famille de vecteurs. Si aucun n'est une combinaison linéaire des autres, la famille est libre.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000985]

Exercice 4

Dans \mathbb{R}^3 , les vecteurs suivants forment-ils une base ? Sinon décrire le sous-espace qu'ils engendrent.

1. $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (-1, 1, -1)$.
2. $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (1, 8, 13)$.
3. $v_1 = (1, 2, -3), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 10, -11)$.

[Correction ▼](#)

[000987]

Exercice 5

1. Montrer qu'on peut écrire le polynôme $F = 3X - X^2 + 8X^3$ sous la forme $F = a + b(1 - X) + c(X - X^2) + d(X^2 - X^3)$ (calculer a, b, c, d réels), et aussi sous la forme $F = \alpha + \beta(1 + X) + \gamma(1 + X + X^2) + \delta(1 + X + X^2 + X^3)$ (calculer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels).
2. Soit \mathcal{P}_3 l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 . Vérifier que les ensembles suivants sont des bases de \mathcal{P}_3 : $B_1 = \{1, X, X^2, X^3\}$, $B_2 = \{1, 1 - X, X - X^2, X^2 - X^3\}$, $B_3 = \{1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3\}$.

Exercice 6

Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de \mathbb{R}^3 .

Correction ▼

[000996]

Exercice 7

1. Montrer que les vecteurs $\mathbf{w}_1 = (1, -1, i)$, $\mathbf{w}_2 = (-1, i, 1)$, $\mathbf{w}_3 = (i, 1, -1)$ forment une base de \mathbb{C}^3 .
2. Calculer les composantes de $\mathbf{w} = (1 + i, 1 - i, i)$ dans cette base.

Correction ▼

[001006]

2 Dimension

Exercice 8

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces de E , montrer que : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Indication ▼

Correction ▼

[001015]

Exercice 9

Montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

Indication ▼

Correction ▼

[001016]

Exercice 10

On considère, dans \mathbb{R}^4 , les vecteurs : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soient E l'espace vectoriel engendré par e_1, e_2, e_3 et F celui engendré par e_4, e_5 . Calculer les dimensions respectives de E , F , $E \cap F$, $E + F$.

Correction ▼

[001019]

Exercice 11

Soient E et F de dimensions finies et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.
2. En déduire que $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$.

Correction ▼

[001027]

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Faux.
 2. Vrai.
-

Indication pour l'exercice 8 ▲

Partir d'une base de $F \cap G$ et compléter cette base

Indication pour l'exercice 9 ▲

On peut utiliser des familles libres.

Correction de l'exercice 1 ▲

$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0$ donc la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de \mathbb{R}^3 .

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans \mathcal{B} sont donc $(1/3, -1/3, 1/3)$.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ses coordonnées dans \mathcal{B} sont donc $(1/3, -1/3, -2/3)$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc ses coordonnées dans \mathcal{B} sont $(2/3, -2/3, -1/3)$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Le vecteur $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$. Donc dans la base (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de x sont $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
 2. Par exemple la famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ est libre dans \mathbb{R}^3 mais pas génératrice.
 3. La famille $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ est génératrice dans \mathbb{R}^3 mais pas libre.
-

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Faux. Par exemple dans \mathbb{R}^3 , $x = (1, 0, 0)$, $y = (0, 1, 0)$, $z = (1, 1, 0)$.
 2. Vrai. Soit une combinaison linéaire nulle $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$. Supposons qu'un des coefficients est non nul : par exemple $\lambda_1 \neq 0$. Alors on écrit $x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x_2 - \dots - \frac{\lambda_p}{\lambda_1}x_p$. Donc x_1 est une combinaison linéaire de $\{x_2, \dots, x_p\}$. Ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé, donc tous les coefficients sont nuls. Donc $\{x_1, \dots, x_p\}$ est une famille libre.
-

Correction de l'exercice 4 ▲

1. C'est une base.
 2. Ce n'est pas une base : $v_3 = 4v_1 - v_2$. Donc l'espace $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.
 3. Ce n'est pas une base : $v_3 = 5v_1 - 4v_2$. Donc l'espace $\text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}(v_1, v_2)$.
-

Correction de l'exercice 5 ▲

1. On trouve $a = 10, b = -10, c = -7, d = -8$. Puis $\alpha = -3, \beta = 4, \gamma = -9, \delta = 8$.
 2. Plus généralement on montre qu'une famille de polynômes $\{P_k\}_{k=1, \dots, n}$ avec $\deg P_i = i$ forme une base de l'espace vectoriel \mathcal{P}_n de polynômes de degré $\leq n$.
-

Correction de l'exercice 6 ▲

C'est une base pour $t \neq \pm 1$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. C'est bien une base.

2. On cherche $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $aw_1 + bw_2 + c_3w_3 = w$. Il s'agit donc de résoudre le système :

$$\begin{cases} a - b + ic &= 1 + i \\ -a + ib + c &= 1 - i \\ ia + b - c &= i \end{cases}$$

On trouve $a = 0, b = \frac{1}{2}(1 - i), c = \frac{1}{2}(1 - 3i)$. Donc les coordonnées de w dans la base (w_1, w_2, w_3) sont $(0, \frac{1}{2}(1 - i), \frac{1}{2}(1 - 3i))$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E donc est de dimension finie. Soit (e_1, \dots, e_k) une base de $F \cap G$ avec $k = \dim F \cap G$.

(e_1, \dots, e_k) est une famille libre dans F donc on peut la compléter en une base de F par le théorème de la base incomplète. Soit donc (f_1, \dots, f_ℓ) des vecteurs de F tels que $(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell)$ soit une base de F . Nous savons que $k + \ell = \dim F$. Remarquons que les vecteurs f_i sont dans $F \setminus G$.

Nous repartons de la famille (e_1, \dots, e_k) mais cette fois nous la complétons en une base de G : soit donc (g_1, \dots, g_m) des vecteurs de G tels que $(e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_m)$ soit une base de G . Nous savons que $k + m = \dim G$. Remarquons que les vecteurs g_i sont dans $G \setminus F$.

2. Montrons que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell, g_1, \dots, g_m)$ est une base de $F + G$.

C'est une famille génératrice car $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell) \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$ et $G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, g_1, \dots, g_m) \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$. Donc $F + G \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$.

C'est une famille libre : soit une combinaison linéaire nulle :

$$a_1e_1 + \dots + a_ke_k + b_1f_1 + \dots + b_\ell f_\ell + c_1g_1 + \dots + c_mg_m = 0.$$

Notons $e = a_1e_1 + \dots + a_ke_k, f = b_1f_1 + \dots + b_\ell f_\ell, g = c_1g_1 + \dots + c_mg_m$. Donc la combinaison linéaire devient :

$$e + f + g = 0.$$

Donc $g = -e - f$, or e et f sont dans F donc g appartient à F . Or les vecteurs g_i ne sont pas dans F . Donc $g = c_1g_1 + \dots + c_mg_m$ est nécessairement le vecteur nul. Nous obtenons $c_1g_1 + \dots + c_mg_m = 0$ c'est donc une combinaison linéaire nulle pour la famille libre (g_1, \dots, g_m) . Donc tous les coefficients c_1, \dots, c_m sont nuls.

Le reste de l'équation devient $a_1e_1 + \dots + a_ke_k + b_1f_1 + \dots + b_\ell f_\ell = 0$, or $(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_\ell)$ est une base de F donc tous les coefficients $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_\ell$ sont nuls.

Bilan : tous les coefficients sont nuls donc la famille est libre. Comme elle était génératrice, c'est une base.

3. Puisque \mathcal{B} est une base de $F + G$ alors la dimension de $F + G$ est le nombre de vecteurs de la base \mathcal{B} :

$$\dim(F + G) = k + \ell + m.$$

Or $k = \dim F \cap G, \ell = \dim F - k, m = \dim G - k$, donc

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel. Supposons que F ne soit pas de dimension finie, alors il existe $v_1, \dots, v_{n+1}, n + 1$ vecteurs de F linéairement indépendants dans F . Mais il sont aussi linéairement indépendants dans E . Donc la dimension de E est au moins $n + 1$. Contradiction.

Deux remarques :

– En fait on a même montrer que la dimension de F est plus petite que la dimension de E .

- On a utiliser le résultat suivant : si E admet une famille libre à k éléments alors la dimension de E est plus grande que k (ou est infini). Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème de la base incomplète.

Correction de l'exercice 10 ▲

E est engendré par trois vecteurs et F est engendré par deux vecteurs. Donc $\dim(E) \leq 3$ et $\dim(F) \leq 2$.

Clairement e_4 et e_5 ne sont pas liés donc $\dim(F) \geq 2$ c'est à dire $\dim(F) = 2$. Enfin, $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

0. La famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est donc libre, soit $\dim(E) \geq 3$ i.e. $\dim(E) = 3$.

$E \cap F \subset F$ donc $\dim(E \cap F) \leq 2$. De plus : $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$. Comme $E + F \subset \mathbb{R}^4$, on a $\dim(E + F) \leq 4$ d'où on tire l'inégalité $1 \geq \dim(E \cap F)$. Donc soit $\dim(E \cap F) = 1$ soit $\dim(E \cap F) = 2$.

Supposons que $\dim(E \cap F)$ soit égale à 2. Comme $E \cap F \subset F$ on aurait dans ce cas $E \cap F = F$. En particulier il existerait $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $e_4 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. On vérifie aisément que ce n'est pas le cas, donc que $\dim(E \cap F)$ n'est pas égale à 2.

On peut donc conclure : $\dim(E \cap F) = 1$ puis $\dim(E + F) = 4$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Par la formule $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$, on sait que $\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G)$. Pour $F = \text{Im } u$ et $G = \text{Im } v$ on obtient : $\dim(\text{Im } u + \text{Im } v) \leq \dim \text{Im } u + \dim \text{Im } v$. Or $\text{Im } u + \text{Im } v = \text{Im}(u + v)$. Donc $\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.
2. On applique la formule précédente à $u + v$ et $-v$: $\text{rg}((u + v) + (-v)) \leq \text{rg}(u + v) + \text{rg}(-v)$, or $\text{rg}(-v) = \text{rg}(v)$ donc $\text{rg}(u) \leq \text{rg}(u + v) + \text{rg}(v)$. Soit $\text{rg}(u) - \text{rg}(v) \leq \text{rg}(u + v)$. On recommence en échangeant u et v pour obtenir : $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$.