

# Géométrie analytique (affine ou euclidienne)

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile    \*\* facile    \*\*\* difficulté moyenne    \*\*\*\* difficile    \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable    T : pour travailler et mémoriser le cours

## Exercice 1 \*\*T

Dans  $E_3$  rapporté à un repère  $(O, i, j, k)$ , on donne les points  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(3, 2, 0)$ ,  $C(2, 1, -1)$  et  $D(1, 0, 4)$ . Déterminer l'intersection des plans  $(OAB)$  et  $(OCD)$ .

[Correction ▼](#)

[005501]

## Exercice 2 \*\*T

Dans  $E_3$  rapporté à un repère  $(O, i, j, k)$ , on donne : la droite  $(D)$  dont un système d'équations paramétriques

est  $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$ , le plan  $P$  dont un système d'équations paramétriques est  $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 - 3\lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ , le plan  $P'$

dont un système d'équations paramétriques est  $\begin{cases} x = -5 - v \\ y = 3 + v + 3\eta \\ z = v + \eta \end{cases}$ , Etudier  $D \cap P$  et  $P \cap P'$

[Correction ▼](#)

[005502]

## Exercice 3 \*\*T

Matrice dans la base canonique orthonormée directe de la rotation vectorielle de  $\mathbb{R}^3$  autour de  $(1, 2, 2)$  qui transforme  $j$  en  $k$ .

[Correction ▼](#)

[005503]

## Exercice 4 \*\*T

Dans  $\mathbb{R}^3$ , espace vectoriel euclidien orienté rapporté à la base orthonormée directe  $(i, j, k)$ , déterminer l'image du plan d'équation  $x + y = 0$  par

1. la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation  $x - y + z = 0$ ,
2. la symétrie orthogonale par rapport au vecteur  $(1, 1, 1)$ ,
3. par la rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$  autour du vecteur  $(1, 1, 1)$ .

[Correction ▼](#)

[005504]

## Exercice 5 \*T

Dans  $\mathbb{R}^3$  affine, déterminer un repère de la droite  $(D)$   $\begin{cases} x - y + 2z + 7 = 0 \\ 2x + 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$ .

[Correction ▼](#)

[005505]

## Exercice 6 \*T

Dans  $\mathbb{R}^3$ , déterminer l'intersection de  $(D)$   $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 7 \end{cases}$  et  $(P) : x + 3y - 5z + 2 = 0$ .

[Correction ▼](#)

[005506]

## Exercice 7 \*\*

---

Dans  $\mathbb{R}^3$  affine, déterminer le réel  $a$  pour que les droites  $\begin{cases} x+2=-2z \\ y=3x+z \end{cases}$  et  $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=a \end{cases}$  soient coplanaires, puis déterminer une équation du plan les contenant.

[Correction ▼](#)

[005507]

---

### Exercice 8 \*\*T

Dans  $\mathbb{R}^3$ , équation du plan  $P$  parallèle à la droite  $(Oy)$  et passant par  $A(0, -1, 2)$  et  $B(-1, 2, 3)$ .

[Correction ▼](#)

[005508]

---

### Exercice 9 \*\*T

Dans  $\mathbb{R}^3$ , soient  $(D) \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-z=0 \end{cases}$  et  $(\Delta) : 6x=2y=3z$  puis  $(P) : x+3y+2z=6$ . Déterminer la projection de  $(D)$  sur  $(P)$  parallèlement à  $(\Delta)$ .

[Correction ▼](#)

[005509]

---

### Exercice 10 \*\*

Dans  $\mathbb{R}^3$ , soient  $(D) \begin{cases} x-z-a=0 \\ y+3z+1=0 \end{cases}$  et  $(D') \begin{cases} x+2y+z-2b=0 \\ 3x+3y+2z-7=0 \end{cases}$ . Vérifier que  $(D)$  et  $(D')$  ne sont pas parallèles puis trouver  $a$  et  $b$  pour que  $(D)$  et  $(D')$  soient sécantes. Former alors une équation cartésienne de leur plan.

[Correction ▼](#)

[005510]

---

### Exercice 11 \*\*

Système d'équations cartésiennes de la droite  $(\Delta)$  parallèle à la droite  $(D) : 2x=3y=6z$  et sécante aux droites  $(D_1) : x=z-4=0$  et  $(D_2) : y=z+4=0$ .

[Correction ▼](#)

[005511]

---

### Exercice 12 \*\*\*

Trouver toutes les droites sécantes aux quatre droites  $(D_1) : x-1=y=0$ ,  $(D_2) : y-1=z=0$ ,  $(D_3) : z-1=x=0$  et  $(D_4) : x=y=-6z$ .

[Correction ▼](#)

[005512]

---

### Exercice 13 \*\*T

Dans  $\mathbb{R}^3$  euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne  $A(2, -2, 0)$ ,  $B(4, 2, 6)$  et  $C(-1, -3, 0)$ . Déterminer l'orthocentre, le centre de gravité, les centres des cercles circonscrits et inscrits au triangle  $(A, B, C)$ .

[Correction ▼](#)

[005513]

---

### Exercice 14 \*\*T

Soit  $M(x, y, z)$  un point de  $\mathbb{R}^3$  rapporté à un repère orthonormé. Déterminer la distance de  $M$  à la droite  $(D) \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{cases}$ . En déduire une équation du cylindre de révolution d'axe  $(D)$  et de rayon 2.

[Correction ▼](#)

[005514]

---

### Exercice 15 \*\*T

Dans  $\mathbb{R}^3$  rapporté à un repère orthonormé, soient  $(D) \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{cases}$  et  $(D') \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-5z=3 \end{cases}$ . Déterminer la distance de  $(D)$  à  $(D')$  puis la perpendiculaire commune à ces deux droites.

[Correction ▼](#)

[005515]

**Exercice 16 \*\***

Montrer que les plans  $(P_1) : z - 2y = 5$ ,  $(P_2) : 2x - 3z = 0$  et  $(P_3) : 3y - x = 0$  admettent une parallèle commune. Ils définissent ainsi un prisme. Déterminer l'aire d'une section perpendiculaire.

[Correction ▼](#)

[005516]

**Exercice 17 \*T**

Angle des plans  $x + 2y + 2z = 3$  et  $x + y = 0$ .

[Correction ▼](#)

[005517]

**Exercice 18 \*\*T**

Soient  $(P_1) : 4x + 4y - 7z - 1 = 0$  et  $(P_2) : 8x - 4y + z + 7 = 0$ . Trouver une équation cartésienne des plans bissecteurs de  $(P_1)$  et  $(P_2)$ .

[Correction ▼](#)

[005518]

**Exercice 19 \*\*T**

Déterminer la perpendiculaire commune aux droites  $(D)$  et  $(D')$  :  $(D) \begin{cases} x + y - 3z + 4 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$  et  $(D') \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$ .

[Correction ▼](#)

[005519]

**Exercice 20 \*\***

Soient  $(D)$  la droite dont un système d'équations cartésiennes est  $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$  et  $(P)$  le plan d'équation cartésienne  $x + 3y + 2z = 6$ . Déterminer la projetée (orthogonale) de  $(D)$  sur  $(P)$ .

[Correction ▼](#)

[005520]

**Exercice 21 \*\*I**

Déterminer les différents angles d'un tétraèdre régulier (entre deux faces, entre deux arêtes et entre une arête et une face).

[Correction ▼](#)

[005521]

**Exercice 22 \*\*T**

Déterminer la distance de l'origine  $O$  à la droite  $(D)$  dont un système d'équations cartésiennes est  $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 2y - z = 10 \end{cases}$ .

[Correction ▼](#)

[005522]

### Correction de l'exercice 1 ▲

•  $\vec{n} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$  a pour coordonnées  $(2, -3, -4)$ . Ce vecteur n'est pas nul. Par suite, les points  $O, A$  et  $B$  ne sont pas alignés et le plan  $(OAB)$  est bien défini. C'est le plan passant par  $O$  et de vecteur normal  $\vec{n}(2, -3, -4)$ . Une équation cartésienne du plan  $(OAB)$  est donc  $2x - 3y - 4z = 0$ . •  $\vec{n}' = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$  a pour coordonnées  $(4, -9, -1)$ . Ce vecteur n'est pas nul. Par suite, les points  $O, C$  et  $D$  ne sont pas alignés et le plan  $(OCD)$  est bien défini. C'est le plan passant par  $O$  et de vecteur normal  $\vec{n}'(4, -9, -1)$ . Une équation cartésienne du plan  $(OCD)$  est donc  $4x - 9y - z = 0$ . •  $-\vec{n} \wedge \vec{n}'$  a pour coordonnées  $(33, 14, 6)$ . Ce vecteur n'est pas nul et on sait que les plans  $(OAB)$  et  $(OCD)$  sont sécants en une droite, à savoir la droite passant par  $O(0, 0, 0)$  et de vecteur directeur  $(33, 14, 6)$ . Un système d'équations cartésiennes de cette droite est 
$$\begin{cases} 2x - 3y - 4z = 0 \\ 4x - 9y - z = 0 \end{cases}.$$

### Correction de l'exercice 2 ▲

Les vecteurs  $(2, -3, 1)$  et  $(1, 2, 0)$  ne sont pas colinéaires, de sorte que  $(P)$  est bien un plan. Trouvons alors une équation cartésienne de  $(P)$

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (P) &\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 - 3\lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \lambda = z - 1 \\ x = 1 + 2(z - 1) + \mu \\ y = -1 - 3(z - 1) + 2\mu \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \lambda = z - 1 \\ \mu = x - 2z + 1 \\ y = -1 - 3(z - 1) + 2(x - 2z + 1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -2x + y + 7z - 4 = 0 \end{aligned}$$

Soit alors  $M(2 + 3t, -t, 1 + t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , un point de  $(D)$

$$M \in (P) \Leftrightarrow -2(2 + 3t) + (-t) + 7(1 + t) - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 \times t - 1 = 0.$$

Ce dernier système n'a pas de solution et donc  $(D) \cap (P) = \emptyset$ . La droite  $(D)$  est strictement parallèle au plan  $(P)$ .

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (P) \cap (P') &\Leftrightarrow \exists(v, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x = -5 - v \\ y = 3 + v + 3\eta \\ z = v + \eta \\ -2x + y + 7z - 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists(v, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x = -5 - v \\ y = 3 + v + 3\eta \\ z = v + \eta \\ -2(-5 - v) + (3 + v + 3\eta) + 7(v + \eta) - 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists(v, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \eta = -v - \frac{9}{10} \\ x = -5 - v \\ y = 3 + v + 3(-v - \frac{9}{10}) \\ z = v + (-v - \frac{9}{10}) \end{cases} \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = -v - 5 \\ y = -2v + \frac{3}{10} \\ z = -\frac{9}{10} \end{cases} \end{aligned}$$

$(P)$  et  $(P')$  sont donc sécants en la droite passant par le point  $(-5, \frac{3}{10}, -\frac{9}{10})$  et de vecteur directeur  $(1, 2, 0)$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

Soit  $r$  la rotation cherchée. Notons  $u$  le vecteur  $\frac{1}{3}(1, 2, 2)$  ( $u$  est unitaire) et  $\theta$  l'angle de  $r$ .  $r$  est la rotation d'angle  $\theta$  autour du vecteur unitaire  $u$ . On sait que pour tout vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}^3$

$$r(v) = (\cos \theta)v + (1 - \cos \theta)(v \cdot u)u + (\sin \theta)u \wedge v \quad (*)$$

et en particulier que  $[v, r(v), u] = \sin \theta \|v \wedge u\|^2$ . L'égalité  $r(j) = k$  fournit

$$\sin \theta \|j \wedge u\|^2 = [j, r(j), u] = [u, j, k] = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Comme  $u \wedge j = \frac{1}{3}(i + 2j + 2k) \wedge j = -\frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k$ , on a  $\|j \wedge u\|^2 = \frac{5}{9}$  et donc  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ . L'égalité  $r(j) = k$  fournit ensuite

$$k = (\cos \theta)j + (1 - \cos \theta) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}(i + 2j + 2k) + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}(i + 2j + 2k) \wedge j$$

En analysant la composante en  $i$ , on en déduit que  $\frac{2}{9}(1 - \cos \theta) - \frac{2}{5} = 0$  et donc  $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ . Ainsi, pour tout vecteur  $v = (x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ , l'égalité (\*) s'écrit

$$\begin{aligned} r(v) &= -\frac{4}{5}(x, y, z) + \frac{9}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}(x + 2y + 2z)(1, 2, 2) + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}(2z - 2y, 2x - z, -2x + y) \\ &= \frac{1}{5}(-4x + (x + 2y + 2z) + (2z - 2y), -4y + 2(x + 2y + 2z) + (2x - z), -4z + 2(x + 2y + 2z) + (-2x + y)) \\ &= \frac{1}{5}(-3x + 4z, 4x + 3z, 5y) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice cherchée est

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

#### Correction de l'exercice 4 ▲

Notons  $P$  le plan d'équation  $x + y = 0$  dans la base  $\mathcal{B} = (i, j, k)$ .  $P$  est le plan de vecteur normal  $n = i + j$ .

1. Soit  $s$  la symétrie orthogonale par rapport au plan  $P'$  d'équation  $x - y + z = 0$ .  $s(P)$  est le plan de vecteur normal  $s(n)$ . Or, le vecteur  $n$  est dans  $P'$  et donc  $s(n) = n$  puis  $s(P) = P$ .

$s(P)$  est le plan  $P$ .

2. Notons  $\sigma$  la symétrie orthogonale par rapport au vecteur  $u = (1, 1, 1)$ .  $\sigma(P)$  est le plan de vecteur normal

$$\sigma(n) = 2 \frac{n \cdot u}{\|u\|^2} u - n = 2 \frac{2}{3} (1, 1, 1) - (1, 1, 0) = \frac{1}{3} (1, 1, 4).$$

$\sigma(P)$  est le plan d'équation  $x + y + 4z = 0$ .

3. Notons  $r$  la rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$  autour du vecteur unitaire  $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ .  $r(P)$  est le plan de vecteur normal

$$\begin{aligned} r(n) &= \left( \cos \frac{\pi}{4} \right) n + \left( 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right) (n \cdot u) u + \left( \sin \frac{\pi}{4} \right) u \wedge n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0) + \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \times \frac{2}{3} (1, 1, 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} (-1, 1, 0) \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} (3 + 2(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{3}, 3 + 2(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{3}, 2(\sqrt{2} - 1)) = \frac{1}{3\sqrt{2}} (1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}, 2(\sqrt{2} - 1)) \end{aligned}$$

$r(P)$  est le plan d'équation  $(1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3})x + (1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})y + 2(\sqrt{2} - 1)z = 0$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

Puisque  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$ , on choisit d'exprimer  $x$  et  $z$  en fonction de  $y$ . Soit  $M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . D'après les formules de CRAMER, on a

$$\begin{aligned} M \in (D) &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z + 7 = 0 \\ 2x + 2y + 3z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = y - 7 \\ -2x - 3z = 2y - 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} y-7 & 2 \\ 2y-5 & -3 \end{vmatrix} \text{ et } z = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} 1 & y-7 \\ -2 & 2y-5 \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 31 - 7y \\ z = -19 + 4y \end{cases}. \end{aligned}$$

$(D)$  est la droite passant par  $A(31, 0, -19)$  dirigée par le vecteur  $u(-7, 1, 4)$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

Soit  $M(2 + \lambda, 3 - \lambda, 7)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , un point quelconque de  $(D)$ .

$$M \in (P) \Leftrightarrow (2 + \lambda) + 3(3 - \lambda) - 5 \times 7 + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 12.$$

$(P) \cap (D)$  est donc un singleton. Pour  $\lambda = 12$ , on obtient les coordonnées du point d'intersection

$$(P) \cap (D) = \{(14, -9, 7)\}.$$

### Correction de l'exercice 7 ▲

• Repère de  $(D)$ .

$$\begin{cases} x + 2 = -2z \\ y = 3x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - 2z \\ y = 3(-2 - 2z) + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - 2z \\ y = -6 - 5z \end{cases}$$

$(D)$  est la droite passant par  $A(0, -1, -1)$  et dirigée par  $u(2, 5, -1)$ . • Repère de  $(D')$ .

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = z - 1 \\ 2x + y = z + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + a - 1 \\ y = 2 - a - 3z \end{cases}$$

$(D')$  est la droite passant par  $A'(a - 1, 2 - a, 0)$  et dirigée par  $u'(2, -3, 1)$ . • Déjà  $u$  et  $u'$  ne sont pas colinéaires et donc  $(D)$  et  $(D')$  sont ou bien sécantes en un point et dans ce cas coplanaires ou bien non coplanaires. • Le plan  $(P)$  contenant  $(D)$  et parallèle à  $(D')$  est le plan de repère  $(A, u, u')$ . Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ y+1 & 5 & -3 \\ z+1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 4(y+1) - 16(z+1) = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + 8z = -10.$$

• Enfin,  $(D)$  et  $(D')$  sont coplanaires si et seulement si  $(D')$  est contenue dans  $(P)$ . Comme  $(D')$  est déjà parallèle à  $(P)$ , on a

$$(D) \text{ et } (D') \text{ coplanaires} \Leftrightarrow A' \in (P) \Leftrightarrow -(a - 1) + 2(2 - a) = -10 \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}.$$

$(D)$  et  $(D')$  sont coplanaires si et seulement si  $a = \frac{5}{3}$  et dans ce cas, une équation du plan contenant  $(D)$  et  $(D')$  est  $-x + 2y + 8z = -10$ .

### Correction de l'exercice 8 ▲

Puisque  $P$  parallèle à la droite  $(Oy)$ , le vecteur  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  est dans  $\vec{P}$ . De même, le vecteur  $\vec{AB} = (-1, 3, 1)$  est dans  $\vec{P}$ .  $P$  est donc nécessairement le plan passant par  $A(0, -1, 2)$  et de vecteur normal  $\vec{j} \wedge \vec{AB} = (1, 0, 1)$ . Réciproquement, ce plan convient. Une équation de  $P$  est donc  $(x - 0) + (z - 2) = 0$  ou encore  $x + z = 2$ .

Une équation du plan parallèle à la droite  $(Oy)$  et passant par  $A(0, -1, 2)$  et  $B(-1, 2, 3)$  est  $x + z = 2$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

Notons  $p$  la projection sur  $(P)$  parallèlement à  $(\Delta)$ . • Déterminons un repère de  $(D)$ .

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = -x + 1 \\ 2y + z = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -3x + 2 \end{cases}$$

$(D)$  est la droite de repère  $(A, \vec{u})$  où  $A(0, -1, 2)$  et  $\vec{u}(1, 2, -3)$ . •  $(\Delta)$  est dirigée par le vecteur  $\vec{u}'(1, 3, 2)$ .  $\vec{u}$  n'est pas colinéaire à  $\vec{u}'$  et donc  $(D)$  n'est pas parallèle à  $(\Delta)$ . On en déduit que  $p(D)$  est une droite. Plus précisément,  $p(D)$  est la droite intersection du plan  $(P)$  et du plan  $(P')$  contenant  $(D)$  et parallèle à  $(\Delta)$ . Déterminons une équation de  $(P')$ . Un repère de  $(P')$  est  $(A, \vec{u}, \vec{u}')$ . Donc

$$M(x, y, z) \in (P') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z-2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 13x - 5(y+1) + (z-2) = 0 \Leftrightarrow 13x - 5y + z = 7.$$

Finalement

$p(D)$  est la droite dont un système d'équations cartésiennes est  $\begin{cases} 13x - 5y + z = 7 \\ x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$

### Correction de l'exercice 10 ▲

• Repère de  $(D)$ .

$$\begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + z \\ y = -1 - 3z \end{cases}.$$

$(D)$  est la droite passant par  $A(a, -1, 0)$  et dirigée par  $u(1, -3, 1)$ . • Repère de  $(D')$ .

$$\begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + z = 2b - x \\ 3y + 2z = 7 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4b - 7 + x \\ z = 14 - 6b - 3x \end{cases}$$

$(D')$  est la droite passant par  $A'(0, 4b - 7, -6b + 14)$  et dirigée par  $u'(1, 1, -3)$ . • Les vecteurs  $u$  et  $u'$  ne sont pas colinéaires et donc  $(D)$  et  $(D')$  ne sont pas parallèles. • Le plan  $(P)$  contenant  $(D)$  et parallèle à  $(D')$  est le plan de repère  $(A, u, u')$ . Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & 1 & 1 \\ y+1 & -3 & 1 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8(x-a) + 4(y+1) + 4z = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z = 2a - 1.$$

- Enfin,  $(D)$  et  $(D')$  sont sécantes si et seulement si  $(D')$  est contenue dans  $(P)$ . Comme  $(D')$  est déjà parallèle à  $(P)$ , on a

$$(D) \text{ et } (D') \text{ sécantes} \Leftrightarrow A' \in (P) \Leftrightarrow (4b-7) + (-6b+14) = 2a-1 \Leftrightarrow b = -a+4.$$

$(D)$  et  $(D')$  sont sécantes si et seulement si  $b = -a+4$  et dans ce cas, une équation du plan contenant  $(D)$  et  $(D')$  est  $2x+y+z=2a-1$ .

### Correction de l'exercice 11 ▲

- $(\Delta)$  est parallèle à  $(D)$  si et seulement si  $(\Delta)$  est dirigée par le vecteur  $u(3,2,1)$  ou encore  $(\Delta)$  admet un système d'équations paramétriques de la forme  $\begin{cases} x = a+3\lambda \\ y = b+2\lambda \\ z = c+\lambda \end{cases}$ . Ensuite,  $(\Delta)$  est sécante à  $(D_1)$  si et seulement si on peut choisir le point  $(a,b,c)$  sur  $(D_1)$  ou encore si et seulement si  $(\Delta)$  admet un système d'équations paramétriques de la forme  $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = b+2\lambda \\ z = 4+\lambda \end{cases}$ . Enfin,

$$(\Delta) \text{ et } (D_2) \text{ sécantes} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / b+2\lambda = 4+\lambda+4 = 0 \Leftrightarrow b+2 \times (-8) = 0 \Leftrightarrow b = 16.$$

Ceci démontre l'existence et l'unicité de  $(\Delta)$  : un système d'équations paramétriques de  $(\delta)$  est  $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 16+2\lambda \\ z = 4+\lambda \end{cases}$ .

Un système d'équations cartésiennes de  $(\Delta)$  est  $\begin{cases} x = 3(z-4) \\ y = 16+2(z-4) \end{cases}$  ou encore

$$(\Delta) : \begin{cases} x-3z+12=0 \\ y-2z-8=0 \end{cases}.$$

### Correction de l'exercice 12 ▲

Notons  $(\Delta)$  une éventuelle droite solution. •  $(\Delta)$  est sécante à  $(D_1)$  et  $(D_2)$  si et seulement si  $(\Delta)$  passe par un point de la forme  $(1,0,a)$  et par un point de la forme  $(b,1,0)$  ou encore si et seulement si  $(\Delta)$  passe par un point de la forme  $(1,0,a)$  et est dirigée par un vecteur de la forme  $(b-1,1,-a)$ . Ainsi,  $(\Delta)$  est sécante à  $(D_1)$

et  $(D_2)$  si et seulement si  $(\Delta)$  admet un système d'équations paramétriques de la forme  $\begin{cases} x = 1+\lambda(b-1) \\ y = \lambda \\ z = a-\lambda a \end{cases}$

ou encore un système d'équations cartésiennes de la forme  $\begin{cases} x-(b-1)y=1 \\ ay+z=a \end{cases}$ .

- Ensuite,  $(\Delta)$  et  $(D_3)$  sécantes  $\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} / \begin{cases} -(b-1)y=1 \\ ay+1=a \end{cases} \Leftrightarrow b \neq 1 \text{ et } -\frac{a}{b-1}+1=a \Leftrightarrow b \neq 0 \text{ et } b \neq 1 \text{ et } a=1-\frac{1}{b}$ . En résumé, les droites sécantes à  $(D_1)$ ,  $(D_2)$  et  $(D_3)$  sont les droites dont un système d'équations cartésiennes est

$$\begin{cases} x-(b-1)y=1 \\ (1-\frac{1}{b})y+z=1-\frac{1}{b} \end{cases}, b \notin \{0,1\}.$$

Enfin,



$$\begin{aligned}
(\Delta) \text{ et } (D) \text{ sécantes} &\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x - (b-1)y = 1 \\ (1 - \frac{1}{b})y + z = 1 - \frac{1}{b} \\ x = y = -6z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} -6z + 6(b-1)z = 1 \\ -6(1 - \frac{1}{b})z + z = 1 - \frac{1}{b} \\ x = y = -6z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow b \notin \{0, 1, 2\} \text{ et } -6\left(1 - \frac{1}{b}\right) \frac{1}{6(b-2)} + \frac{1}{6(b-2)} = 1 - \frac{1}{b} \\
&\Leftrightarrow b \notin \{0, 1, 2\} \text{ et } -6(b-1) + b = 6(b-1)(b-2) \Leftrightarrow b \notin \{0, 1, 2\} \text{ et } 6b^2 - 13b + 6 = 0 \\
&\Leftrightarrow b \in \left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right\}.
\end{aligned}$$

Les droites solutions sont  $(\Delta_1) : \begin{cases} 3x + y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$  et  $(\Delta_2) : \begin{cases} 2x - y = 2 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$ .

### Correction de l'exercice 13 ▲

- Déterminons le centre de gravité  $G$ .

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}(2, -2, 0) + \frac{1}{3}(4, 2, 6) + \frac{1}{3}(-1, -3, 0) = \left(\frac{5}{3}, -1, 2\right).$$

- Déterminons le centre du cercle circonscrit  $O$ . Une équation du plan  $(ABC)$  est  $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -3 \\ y+2 & 4 & -1 \\ z & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$  ou encore  $6(x-2) - 18(y+2) + 10z = 0$  ou enfin  $3x - 9y + 5z = 24$ . Posons alors  $O(a, b, c)$ . Ensuite,  $OA = OB \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b+2)^2 + c^2 = (a-4)^2 + (b-2)^2 + (c-6)^2 \Leftrightarrow 4a + 8b + 12c = 48 \Leftrightarrow a + 2b + 3c = 16$  et  $OA = OC \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b+2)^2 + c^2 = (a+1)^2 + (b+3)^2 + c^2 \Leftrightarrow -6a - 2b = 2 \Leftrightarrow 3a + b = -1$ . D'où le système

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 3a - 9b + 5c = 24 \\ a + 2b + 3c = 16 \\ 3a + b = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 1 \\ 3a - 9(-3a - 1) + 5c = 24 \\ a + 2(-3a - 1) + 3c = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 1 \\ 6a + c = 3 \\ -5a + 3c = 18 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 1 \\ c = 3 - 6a \\ -5a + 3(3 - 6a) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{9}{23} \\ b = \frac{4}{23} \\ c = \frac{123}{23} \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc  $O\left(-\frac{9}{23}, \frac{4}{23}, \frac{123}{23}\right)$ . • Déterminons l'orthocentre  $H$ . D'après la relation d'EULER,

$$H = O + 3\overrightarrow{OG} = \left(-\frac{9}{23}, \frac{4}{23}, \frac{123}{23}\right) + 3\left(-\frac{9}{23} - \frac{5}{3}, \frac{4}{23} + 1, \frac{123}{23} - 2\right) = \left(-\frac{151}{23}, \frac{85}{23}, \frac{354}{23}\right).$$

- Déterminons le centre du cercle inscrit  $I$ . On sait que  $I = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$  où  $a = BC = \sqrt{5^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{86}$ ,  $b = AC = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{10}$  et  $c = AB = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{54}$ . Donc

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\sqrt{86}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}A + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}B + \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}C \\
&= \left( \frac{2\sqrt{86} + 4\sqrt{10} - \sqrt{54}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}, \frac{-2\sqrt{86} + 2\sqrt{10} - 3\sqrt{54}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}}, \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86} + \sqrt{10} + \sqrt{54}} \right).
\end{aligned}$$

Dans  $\mathbb{R}^3$  euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne  $A(2, -2, 0)$ ,  $B(4, 2, 6)$  et  $C(-1, -3, 0)$ . Déterminer l'orthocentre, le centre de gravité, les centres des cercles circonscrits et inscrits au triangle  $(A, B, C)$ .

$$G\left(\frac{5}{3}, -1, 2\right), O\left(-\frac{9}{23}, \frac{4}{23}, \frac{123}{23}\right) \text{ et } H\left(-\frac{151}{23}, \frac{85}{23}, \frac{354}{23}\right) \text{ puis}$$

$$I\left(\frac{2\sqrt{86}+4\sqrt{10}-\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}, \frac{-2\sqrt{86}+2\sqrt{10}-3\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}, \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}\right).$$

### Correction de l'exercice 14 ▲

- Déterminons un repère de  $(D)$ .

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1-z \\ 2x+y=2-5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-4z \\ y=-4+3z \end{cases}.$$

Un repère de  $(D)$  est  $(A, \vec{u})$  où  $A(3, -4, 0)$  et  $\vec{u}(-4, 3, 1)$ . • Soit  $M(x, y, z)$  un point du plan. On sait que

$$d(A, (D)) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{(y-3z+4)^2 + (x+4z-3)^2 + (3x+4y+7)^2}}{\sqrt{26}}$$

- Notons  $\mathcal{C}$  le cylindre de révolution d'axe  $(D)$  et de rayon 2.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow d(A, (D)) = 2 \Leftrightarrow (y-3z+4)^2 + (x+4z-3)^2 + (3x+4y+7)^2 = 104$$

$$\text{Une équation cartésienne du cylindre de révolution d'axe } (D) \text{ et de rayon 2 est} \\ (y-3z+4)^2 + (x+4z-3)^2 + (3x+4y+7)^2 = 104.$$

### Correction de l'exercice 15 ▲

- Déterminons un repère de  $(D)$ .

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z-1 \\ 2x+y=-5z+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4z+3 \\ y=3z-4 \end{cases}$$

Un repère de  $(D)$  est  $(A, \vec{u})$  où  $A(3, -4, 0)$  et  $\vec{u}(-4, 3, 1)$ . • Déterminons un repère de  $(D')$ .

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-5z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z+2 \\ 2x+y=5z+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6z+1 \\ y=-7z+1 \end{cases}$$

Un repère de  $(D')$  est  $(A', \vec{u}')$  où  $A'(1, 1, 0)$  et  $\vec{u}'(6, -7, 1)$ . •  $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ .

Puisque  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  ne sont pas colinéaires, les droites  $(D)$  et  $(D')$  ne sont parallèles. Ceci assure l'unicité de la perpendiculaire commune à  $(D)$  et  $(D')$ . • On sait que la distance  $d$  de  $(D)$  à  $(D')$  est donnée par

$$d = \frac{\text{abs}([\vec{AA'}, \vec{u}, \vec{u'}])}{\|\vec{u} \wedge \vec{u'}\|},$$

$$\text{avec } [\vec{AA'}, \vec{u}, \vec{u'}] = \begin{vmatrix} -2 & -4 & 6 \\ 5 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \times (-2) + 10 \times 5 = 30 \text{ et donc } d = \frac{30}{10\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$$d((D), (D')) = \sqrt{3}.$$

- Un système d'équations de la perpendiculaire commune est  $\begin{cases} [\vec{AM}, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u'}] = 0 \\ [\vec{A'M}, \vec{u'}, \vec{u} \wedge \vec{u'}] = 0 \end{cases}$ . Or,

$$\frac{1}{10} [\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u}'] = \begin{vmatrix} x-3 & -4 & 1 \\ y+4 & 3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-3) + 5(y+4) - 7z = 2x + 5y - 7z + 14,$$

et

$$\frac{1}{10} [\overrightarrow{A'M}, \vec{u}', \vec{u} \wedge \vec{u}'] = \begin{vmatrix} x-1 & 6 & 1 \\ y-1 & -7 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8(x-1) - 5(y-1) + 13z = -8x - 5y + 13z + 13.$$

Donc

un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à  $(D)$  et  $(D')$  est

$$\begin{cases} 2x + 5y - 7z = -14 \\ 8x + 5y - 13z = 13 \end{cases}.$$

### Correction de l'exercice 16 ▲

$$\vec{u} \in \vec{P}_1 \cap \vec{P}_2 \cap \vec{P}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2y = 0 \\ 2x - 3z = 0 \\ 3y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ z = 2y \end{cases}. \text{ Ainsi, les plans } (P_1), (P_2) \text{ et } (P_3) \text{ sont tous trois parallèles}$$

à la droite affine  $(D)$  d'équations  $\begin{cases} x = 3y \\ z = 2y \end{cases}$ . Ces plans définissent donc un prisme. Déterminons alors l'aire d'une section droite. Le plan  $(P)$  d'équation  $3x + y + 2z = 0$  est perpendiculaire à la droite  $(D)$ . Son intersection avec les plans  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  et  $(P_3)$  définit donc une section droite du prisme. • Soit  $M(x, y, z)$  un point de l'espace.

$$M \in (P_1) \cap (P_2) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2y = 5 \\ 2x - 3z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{z-5}{2} \\ x = \frac{3z}{2} \\ \frac{9}{2}z + \frac{z-5}{2} + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{5}{14} \\ y = -\frac{65}{28} \\ x = \frac{15}{28} \end{cases}$$

Notons  $A\left(\frac{15}{28}, -\frac{65}{28}, \frac{5}{14}\right)$ . • Soit  $M(x, y, z)$  un point de l'espace.

$$M \in (P_1) \cap (P_3) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2y = 5 \\ 3y - x = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y + 5 \\ x = 3y \\ 9y + y + 2(2y + 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{7} \\ x = -\frac{15}{7} \\ z = \frac{25}{7} \end{cases}$$

Notons  $B\left(-\frac{15}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{25}{7}\right)$ .

• Soit  $M(x, y, z)$  un point de l'espace.

$$M \in (P_2) \cap (P_3) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ 3y - x = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Une section droite est  $OAB$  où  $A\left(\frac{15}{28}, -\frac{65}{28}, \frac{5}{14}\right)$  et  $B\left(-\frac{15}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{25}{7}\right)$ . De plus

$$\begin{aligned} \text{aire de}(OAB) &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\| = \frac{1}{2} \times \frac{5}{28} \times \frac{5}{7} \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \times \frac{5}{28} \times \frac{5}{7} \sqrt{63^2 + 21^2 + 42^2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5}{28} \times \frac{5}{7} \times 21 \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{75}{4\sqrt{14}} \end{aligned}$$

L'aire d'une section droite est  $\frac{75}{4\sqrt{14}}$ .

### Correction de l'exercice 17 ▲

Soient  $(P)$  le plan d'équation  $x + 2y + 2z = 3$  et  $(P')$  le plan d'équation  $x + y = 0$ . L'angle entre  $(P)$  et  $(P')$  est l'angle entre les vecteurs normaux  $\vec{n}(1, 2, 2)$  et  $\vec{n}'(1, 1, 0)$  :

$$\left(\widehat{\vec{n}, \vec{n}'}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{\|\vec{n}\| \|\vec{n}'\|}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

### Correction de l'exercice 18 ▲

Soit  $M(x, y, z)$  un point de l'espace. On a

$$d(M, (P_1)) = \frac{|4x+4y-7z-1|}{\sqrt{4^2+4^2+7^2}} = \frac{|4x+4y-7z-1|}{9} \text{ et } d(M, (P_2)) = \frac{|8x-4y+z+7|}{\sqrt{8^2+4^2+1^2}} = \frac{|8x-4y+z+7|}{9}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} d(M, (P_1)) = d(M, (P_2)) &\Leftrightarrow |4x+4y-7z-1| = |8x-4y+z+7| \Leftrightarrow (4x+4y-7z-1)^2 = (8x-4y+z+7)^2 \\ &\Leftrightarrow ((4x+4y-7z-1) - (8x-4y+z+7))((4x+4y-7z-1) + (8x-4y+z+7)) = 0 \\ &\Leftrightarrow (-4x+8y-8z-8)(12x-6z+6) = 0 \Leftrightarrow x-2y+2z+2 = 0 \text{ ou } 2x-z+1 = 0. \end{aligned}$$

Les plans bissecteurs de  $(P_1)$  et  $(P_2)$  admettent pour équation cartésienne  $x-2y+2z+2=0$  et  $2x-z+1=0$ .

### Correction de l'exercice 19 ▲

• Déterminons un repère de  $(D)$ .

$$\begin{cases} x+y-3z+4=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-3z=-x-4 \\ z=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5x-1 \\ z=2x+1 \end{cases}$$

Un repère de  $(D)$  est  $(A, \vec{u})$  où  $A(0, -1, 1)$  et  $\vec{u}(1, 5, 2)$ . • Puisque un système d'équations de  $(D')$  est

$$\begin{cases} x=z-1 \\ y=z-1 \end{cases}, \text{ un repère de } (D') \text{ est } (A', \vec{u}') \text{ où } A'(-1, -1, 0) \text{ et } \vec{u}'(1, 1, 1). \bullet \vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \neq \vec{0}. \text{ Puisque } \vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ ne sont pas colinéaires, les droites } (D) \text{ et } (D') \text{ ne sont parallèles. Ceci assure}$$

l'unicité de la perpendiculaire commune à  $(D)$  et  $(D')$ .

• Un système d'équations de la perpendiculaire commune est  $\begin{cases} [\vec{AM}, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u}'] = 0 \\ [\vec{A'M}, \vec{u}', \vec{u} \wedge \vec{u}'] = 0 \end{cases}$ . Or,

$$[\vec{AM}, \vec{u}, \vec{u} \wedge \vec{u}'] = \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y+1 & 5 & 1 \\ z-1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -22x + 10(y+1) - 14(z-1) = -22x + 10y - 14z + 24,$$

et

$$[\vec{A'M}, \vec{u}', \vec{u} \wedge \vec{u}'] = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 3 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z & 1 & -4 \end{vmatrix} = -5(x+1) + 7(y+1) - 2z = -5x + 7y - 2z + 2.$$

Donc

un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à  $(D)$  et  $(D')$  est

$$\begin{cases} 11x - 5y + 7z = 12 \\ 5x - 7y + 2z = 2 \end{cases}.$$

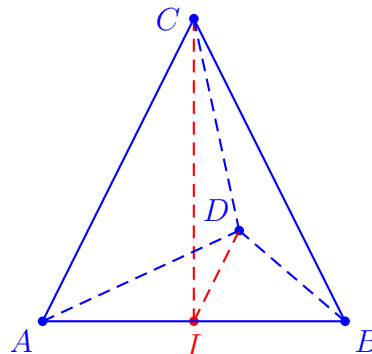
### Correction de l'exercice 20 ▲

Notons  $p$  la projection orthogonale sur  $(P)$ . Un repère de  $(D)$  est  $(A, \vec{u})$  où  $A(0, -1, 2)$  et  $\vec{u}(1, 2, -3)$ . Un vecteur normal à  $(P)$  est  $\vec{n}(1, 3, 2)$ .  $\vec{u}$  et  $\vec{n}$  ne sont pas colinéaires et donc  $p(D)$  est une droite du plan  $(P)$ . Plus précisément,  $p(D)$  est l'intersection du plan  $(P)$  et du plan  $(P')$  contenant  $(D)$  et perpendiculaire à  $(P)$ . Un repère de  $(P')$  est  $(A, \vec{u}, \vec{n})$ . Donc

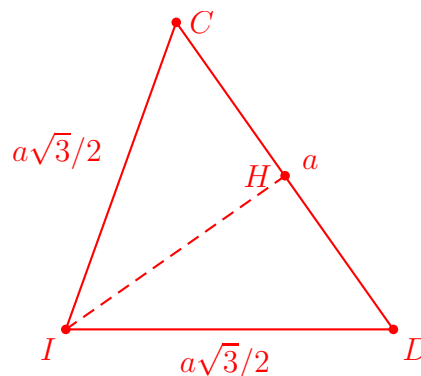
$$M(x, y, z) \in (P') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z-2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 13x - 5(y+1) + (z-2) = 0 \Leftrightarrow 13x - 5y + z = 7.$$

La projetée orthogonale de  $(D)$  sur  $(P)$  est la droite d'équations  $\begin{cases} 13x - 5y + z = 7 \\ x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$ .

### Correction de l'exercice 21 ▲



**Angle entre deux arêtes.** Les faces du tétraèdre  $ABCD$  sont des triangles équilatéraux et donc l'angle entre deux arêtes est  $60^\circ$ .



**Angle entre une arête et une face.** C'est l'angle  $\widehat{CDI}$  de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CDI} = \text{Arccos}\left(\frac{HD}{DI}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{a/2}{a\sqrt{3}/2}\right) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54,7\dots^\circ.$$

**Angle entre deux faces.** C'est l'angle  $\widehat{CID}$  de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CID} = \pi - 2\widehat{CDI} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 70,5\dots^\circ.$$


---

### Correction de l'exercice 22 ▲

---

Déterminons un repère de  $(D)$ .

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + 2y - z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = y \\ y + 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{10}{3} \\ z = x - \frac{10}{3} \end{cases}.$$

Un repère de  $(D)$  est  $(A, \vec{u})$  où  $A\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, 0\right)$  et  $\vec{u}(1, 0, 1)$ . On sait alors que

$$d(O, (D)) = \frac{\|\vec{AO} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{10}{3} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{10}{\sqrt{6}}.$$

$d(O, (D)) = \frac{10}{\sqrt{6}}.$