Chapitre 4

INTRODUCTION A L'OPTIQUE MATRICIELLE

I. Matrice de réfraction du dioptre sphérique

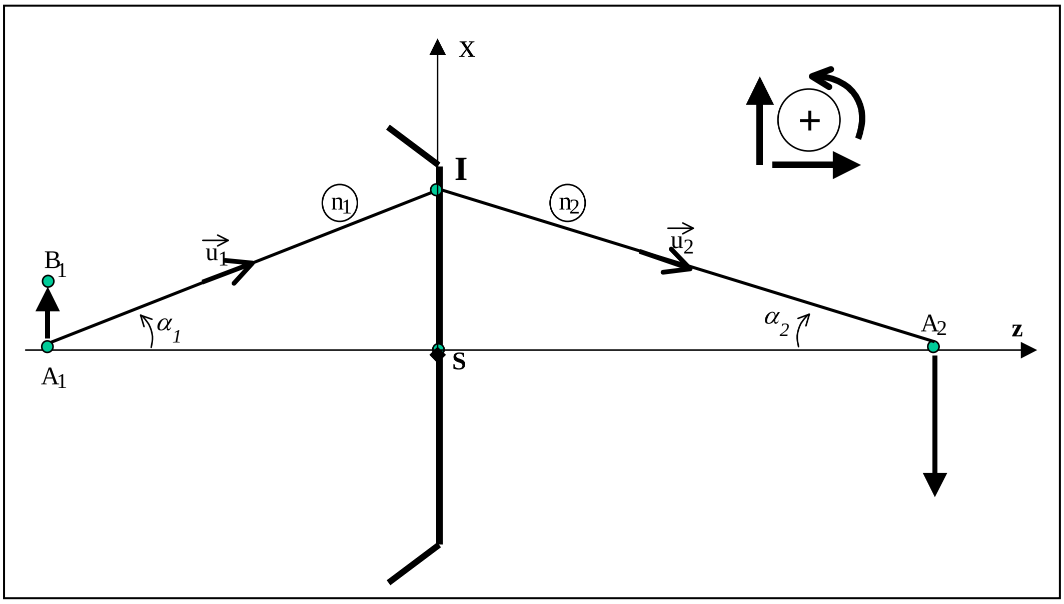
II. Matrice de translation

IV. Matrice de conjugaison du dioptre sphérique

V. Propriétés fondamentales de la matrice de conjugaison

Nous avons vu dans le chapitre précédent que lorsqu'un rayon lumineux traverse un dioptre, il subit un changement de direction. L'évolution d'un rayon lumineux de direction $\vec{u_1}$ en un rayon de direction $\vec{u_2}$ se décrit mathématiquement à l'aide d'une opération matricielle. De manière plus générale, la marche d'un rayon à travers un système peut toujours se décrire à l'aide d'une série d'opérations sur des matrices, dont quels que unes sont mentionnées ci-après.

I. Matrice de réfraction



Soit *I* le point d'intersection du rayon incident avec la surface du dioptre. Le point *I* peut être considéré comme étant situé aussi bien dans le milieu d'indice n_1 que dans celui d'indice n_2. La position du point I par rapport à l'axe optique principal (Sz) est repéré par $x_2 = x_1 = x$. D'après l'équation (3) du chapitre 3, on peut écrire que

$$\begin{cases} n_2\alpha_2 - n_1\alpha_1 = -(n_2 - n_1)\dfrac{x}{\overline{SC}} = -Vx & (1a) \\ x_2 = x_1 = x & (1b) \end{cases}$$

Ces deux équations peuvent être regroupées en une seule équation sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ n_2\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ n_1\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

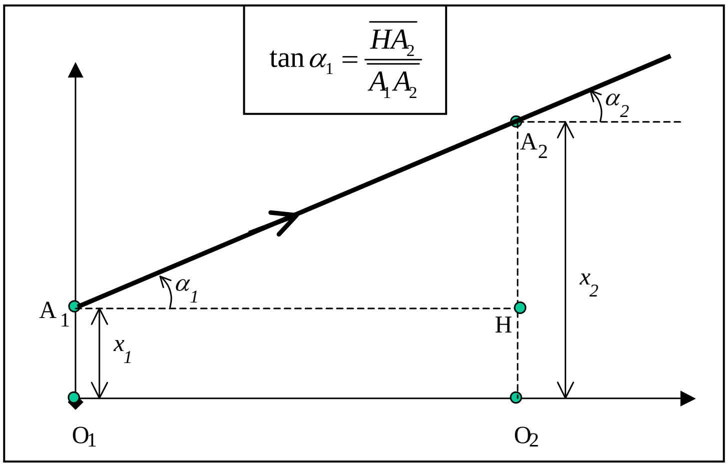
Le passage du rayon à travers le dioptre sphérique s'effectue par l'intermédiaire de la matrice suivante :

$$\boxed{R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \quad (2)}$$

Cette matrice est appelée ***matrice de réfraction du dioptre sphérique***.
On peut remarquer que son déterminant est égal à 1.

Matrice de translation

Considérons deux points A_1 et A_2 situés sur le trajet d'un rayon lumineux en ligne droite. La propagation de A_1 à A_2 correspond à une translation telle que



$$\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_1 \\ x_2 = x_1 + \overline{HA_2} = x_1 + \overline{A_1A_2}\tan\alpha_1 \approx x_1 + \overline{A_1A_2}\,\alpha_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n\alpha_2 = 0\times x_1 + \ n\alpha_1 \\ x_2 \ \ = x_1 + \dfrac{\overline{A_1A_2}}{n}\,n\alpha_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ n\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\overline{A_1A_2}}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ n\alpha_1 \end{pmatrix}$$

La matrice

$$\boxed{T\,(A_1A_2) = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\overline{A_1A_2}}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3)}$$

est appelée ***matrice de translation*** de A_1 à A_2. On peut aussi remarquer que son déterminant est égal à 1.

VI. Matrice de conjugaison du dioptre sphérique

Soient deux points A_1 *et* A_2 conjugués par le dioptre de sommet S pris comme origine des distances.

Le rayon lumineux se propage de A_1 *et* A_2 en passant par le point I situé sur le dioptre.

$$A_1 \xrightarrow{T\,(\overline{A_1I_1})} I_1 \xrightarrow{R(I)} I_2 \xrightarrow{T\,(\overline{I_2A_2})} A_2$$

$$\Rightarrow A_2 = T\,(\overline{I_2A_2})\,I_2 = T\,(\overline{I_2A_2})R(I)\ I_1 = T\,(\overline{I_2A_2})R(I)\ T\,(\overline{A_1I_1})A_1$$

$$\Rightarrow A_2 = M\ A_1$$

$$avec\ M = T\,(\overline{IA_2})\,R(I)T\,(\overline{A_1I}) \approx T\,(\overline{SA_2})\,R(S)T\,(\overline{A_1S})$$

Si on pose $z_1 = \overline{SA_1}$ *et* $z_2 = \overline{SA_2}$ on obtient

$$M(A_1A_2)=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\overline{SA_2}}{n_2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -V & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\overline{A_1S}}{n_1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{z_2}{n_2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -V & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{-z_1}{n_1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \dfrac{z_2}{n_2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{-z_1}{n_1}\\ -V & \dfrac{Vz_1}{n_1}+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-\dfrac{Vz_2}{n_2} & \dfrac{z_2}{n_2}-\dfrac{z_1}{n_1}+\dfrac{V\,z_1}{n_1}\dfrac{z_2}{n_2}\\ -V & \dfrac{V\,z_1}{n_1}+1\end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Si on pose $x_1=\overline{O_1A_1}$ *et* $x_2=\overline{O_2A_2}$ on obtient pour le couple de points A_1 *et* A_2 les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_2=\left(1-\dfrac{Vz_2}{n_2}\right)x_1+\left(\dfrac{z_2}{n_2}-\dfrac{z_1}{n_1}+\dfrac{V\,z_1}{n_1}\dfrac{z_2}{n_2}\right)n_1\alpha_1\\ n_2\alpha_2=-V\,x_1+\left(\dfrac{V\,z_1}{n_1}+1\right)n_1\alpha_1\end{cases}$$

Remarque : L'abscisse x_2 donnant la position du point A_2 doit être indépendante du rayon incident, et donc de son inclinaison α_1 ; cela impose que :

$$\frac{z_2}{n_2}-\frac{z_1}{n_1}+\frac{V\,z_1}{n_1}\frac{z_2}{n_2}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{n_1}{z_1}-\frac{n_2}{z_2}=-V\,. \qquad (5)}$$

On retrouve ici la relation de conjugaison établie au chapitre précédent pour le dioptre sphérique.

VII. Propriétés fondamentales de la matrice de conjugaison

Soit

$$\boxed{M(A_1A_2)=\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix} \qquad (6)}$$

la matrice de conjugaison correspondant à un couple de points conjugués A_1 *et* A_2. Quels que soient le nombre de réfractions et translations subies par le rayon avant d'atteindre le point A_2 la matrice de conjugaison a nécessairement les caractéristiques suivantes :

(i) le terme M_{12} doit être nul, car cela assure une indépendance de la position de l'image vis-à-vis du trajet des rayons incidents (stigmatisme). Ainsi, la relation

$$\boxed{M_{12}=0 \qquad (7)}$$

conduit à la relation de conjugaison.

(ii) D'après l'expression (6),

$$n_2\alpha_2 = M_{21}\, x_1 + M_{22}\, n_1\alpha_1$$

Pour $\alpha_1 = 0$ on a $n_2\alpha_2 = M_{21}\, x_1 = -V\, x_1$ [compte tenu de (4)].

D'une manière générale

$$\boxed{M_{21} = -V \qquad (8)}$$

(iii) Pour $x_1 = 0$ on a $n_2\alpha_2 = M_{22}\, n_1\alpha_1 \;\Rightarrow\; G_a = \alpha_2 / \alpha_1 = M_{22}\,(n_1 / n_2) = cste \Rightarrow$

$$\boxed{M_{22} = (n_2 / n_1) G_a \qquad (9)}$$

(iv) D'après l'expression (6),

$$x_2 = M_{11}\, x_1 + M_{12}\, n_1\alpha_1$$

Pour $\alpha_1 = 0$ on a $x_2 = M_{11}\, x_1 \Rightarrow M_{11} = x_2 / x_1 = G_t \Rightarrow$.

$$\boxed{M_{11} = G_t \qquad (10)}$$

(iiiii) Le déterminant de la matrice M vaut 1 :

$$\boxed{M_{11}\, M_{22} - M_{12}\, M_{21} = 1 \qquad (11)}$$

$$M_{11}\, M_{22} - M_{12}\, M_{21} = 1 \;\Rightarrow\; M_{11}\, M_{22} = 1 \;\; (car\;\; M_{12} = 0) \;\;\Rightarrow$$

$$M_{22} = \frac{1}{M_{11}} = \frac{1}{G_t} = \frac{n_2}{n_1} G_a .$$

Ainsi donc, la matrice de conjugaison a nécessairement la forme suivante :

$$\boxed{M = \begin{bmatrix} G_t & 0 \\ -V & G_a \dfrac{n_2}{n_1} \end{bmatrix} \qquad (13)}$$