Exo7

Trigonométrie hyperbolique

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 ***IT

Domaine de définition et calcul des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sin(\text{Arcsin}\, x)$,
2. $x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x)$,
3. $x \mapsto \cos(\text{Arccos}\, x)$,
4. $x \mapsto \text{Arccos}(\cos x)$,
5. $x \mapsto \tan(\text{Arctan}\, x)$,
6. $x \mapsto \text{Arctan}(\tan x)$.

Correction ▼ [005084]

Exercice 2 ***IT

1. Calculer $\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x$ pour x élément de $[-1,1]$.
2. Calculer $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x}$ pour x réel non nul.
3. Calculer $\cos(\text{Arctan}\, a)$ et $\sin(\text{Arctan}\, a)$ pour a réel donné.
4. Calculer, pour a et b réels tels que $ab \neq 1$, $\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b$ en fonction de $\text{Arctan}\, \frac{a+b}{1-ab}$ (on étudiera d'abord $\cos(\text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\, b)$ et on distinguera les cas $ab < 1$, $ab > 1$ et $a > 0$, $ab > 1$ et $a < 0$).

Correction ▼ [005085]

Exercice 3 *IT

Etablir pour ch, sh et th les formules d'addition, de duplication et de linéarisation.

Correction ▼ [005086]

Exercice 4 ***I

Existence et calcul de $\int_0^{\sin^2 x} \text{Arcsin}\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \text{Arccos}\sqrt{t}\, dt$.

Correction ▼ [005087]

Exercice 5 **

Simplifier les expressions suivantes :

1. $f_1(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.
2. $f_2(x) = \text{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.
3. $f_3(x) = \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2} - \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$.
4. $f_4(x) = \text{Arctan}\, \frac{1}{2x^2} - \text{Arctan}\, \frac{x}{x+1} + \text{Arctan}\, \frac{x-1}{x}$.

Correction ▼ [005088]

Exercice 6 **I

Calculer $\text{Arctan}\,\frac{1}{2}+\text{Arctan}\,\frac{1}{5}+\text{Arctan}\,\frac{1}{8}$.

Correction ▼ [005089]

Exercice 7 ***I

Calculer $u_n=\text{Arctan}\,\frac{2}{1^2}+\text{Arctan}\,\frac{2}{2^2}+...+\text{Arctan}\,\frac{2}{n^2}$ pour n entier naturel non nul donné puis déterminer $\lim_{n\to+\infty}u_n$. (Utiliser l'exercice 2 4))

Correction ▼ [005090]

Exercice 8 *

Etudier $f\ :\ x\mapsto\ln(\text{ch}\,x)-x$.

Correction ▼ [005091]

Exercice 9 ** Mines de DOUAI 1984

On considère la fonction numérique f telle que :

$$f(x)=(x^2-1)\,\text{Arctan}\,\frac{1}{2x-1},$$

et on appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f ?
2. Exprimer, sur $\mathscr{D}\setminus\{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x)=2xg(x)$.
3. Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ 2x^4-4x^3+9x^2-4x+1>0$ et en déduire le tableau de variation de g.
4. Dresser le tableau de variation de f.

Correction ▼ [005092]

Exercice 10 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\text{sh}(2+x)+\text{sh}(2+2x)+...+\text{sh}(2+100x)=0$.

Correction ▼ [005093]

Exercice 11 **I

1. Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $\text{th}\,x=\frac{2}{\text{th}(2x)}-\frac{1}{\text{th}\,x}$.
2. En déduire la valeur de $u_n=2^0\,\text{th}(2^0x)+2^1\,\text{th}(2^1x)+...+2^{n-1}\,\text{th}(2^{n-1}x)$ pour n entier naturel non nul et x réel non nul donnés puis calculer la limite de (u_n).

Correction ▼ [005094]

Exercice 12 **

Simplifier les expressions suivantes

1. $\sin(2\,\text{Arcsin}\,x)$,
2. $\cos(2\,\text{Arccos}\,x)$,
3. $\sin^2\left(\frac{\text{Arccos}\,x}{2}\right)$,
4. $\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$,
5. $\text{Argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$,
6. $\text{Argch}(2x^2-1)$,

7. $\operatorname{Argth}\left(\sqrt{\frac{\operatorname{ch}x-1}{\operatorname{ch}x+1}}\right)$,
8. $\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x}$.

Correction ▼ [005095]

Exercice 13 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\operatorname{ch}x = 2$,
2. $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arcsin}x + \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{2})$,
3. $2\operatorname{Arcsin}x = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$.

Correction ▼ [005096]

Correction de l'exercice 1 ▲

Arcsin$x$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$. Donc, $\sin(\text{Arcsin}x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$ et pour x dans $[-1,1]$, $\sin(\text{Arcsin}x) = x$.

$\text{Arcsin}(\sin x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. • S'il existe un entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2}+2k\pi$, alors $-\frac{\pi}{2} \leq x-2k\pi < \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\text{Arcsin}(\sin x) = \text{Arcsin}(\sin(x-2k\pi)) = x-2k\pi.$$

De plus, on a $k \leq \frac{x}{2\pi}+\frac{1}{4} < k+\frac{1}{2}$ et donc $k = E\left(\frac{x}{2\pi}+\frac{1}{4}\right)$. • S'il existe un entier relatif k tel que $\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2}+2k\pi$, alors $-\frac{\pi}{2} < \pi-x+2k\pi \leq \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\text{Arcsin}(\sin x) = \text{Arcsin}(\sin(\pi-x+2k\pi)) = \pi-x+2k\pi.$$

De plus, $k \leq \frac{x}{2\pi}-\frac{1}{4} < k+\frac{1}{2}$ et donc $k = E\left(\frac{x}{2\pi}-\frac{1}{4}\right)$.

Arccos$x$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$. Donc, $\cos(\text{Arccos}x)$ existe si et seulement si x est dans $[-1,1]$ et pour x dans $[-1,1]$, $\cos(\text{Arccos}x) = x$.

$\text{Arccos}(\cos x)$ existe pour tout réel x mais ne vaut x que si x est dans $[0,\pi]$. • S'il existe un entier relatif k tel que $2k\pi \leq x < \pi+2k\pi$, alors $\text{Arccos}(\cos x) = x-2k\pi$ avec $k = E\left(\frac{x}{2\pi}\right)$. • S'il existe un entier relatif k tel que $-\pi+2k\pi \leq x < 2k\pi$ alors $\text{Arccos}(\cos x) = \text{Arccos}(\cos(2k\pi-x)) = 2k\pi-x$ avec $k = E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)$.

Pour tout réel x, $\tan(\text{Arctan}x) = x$.

$\text{Arctan}(\tan x)$ existe si et seulement si x n'est pas dans $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ et pour ces x, il existe un entier relatif k tel que $-\frac{\pi}{2}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi$. Dans ce cas, $\text{Arctan}(\tan x) = \text{Arctan}(\tan(x-k\pi)) = x-k\pi$ avec $k = E\left(\frac{x}{\pi}+\frac{1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. **1ère solution**. Posons $f(x) = \text{Arccos}x + \text{Arcsin}x$ pour x dans $[-1,1]$. f est définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$. De plus, pour x dans $]-1,1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Donc f est constante sur $[-1,1]$ et pour x dans $[-1,1]$, $f(x) = f(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall x \in [-1,1],\ \text{Arccos}x + \text{Arcsin}x = \frac{\pi}{2}.}$$

2ème solution. Il existe un unique réel θ dans $[0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$, à savoir $\theta = \text{Arccos}x$. Mais alors,

$$\text{Arccos}x + \text{Arcsin}x = \theta + \text{Arcsin}\left(\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

(car $\frac{\pi}{2}-\theta$ est dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$).

2. **1ère solution**. Pour x réel non nul, posons $f(x) = \text{Arctan}x + \text{Arctan}\frac{1}{x}$. f est impaire. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$. f est donc constante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ (mais pas nécessairement sur $\mathbb{R}^*$). Donc, pour $x > 0$, $f(x) = f(1) = 2\,\text{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{2}$, et puisque f est impaire, pour $x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \text{Arctan}x + \text{Arctan}\frac{1}{x} = \left\{\begin{array}{l}\frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0\\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } x < 0\end{array}\right. = \frac{\pi}{2}\text{sgn}(x).}$$

2ème solution Pour x réel strictement positif donné, il existe un unique réel θ dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan\theta$ à savoir $\theta = \text{Arctan}x$. Mais alors,

$$\text{Arctan}x + \text{Arctan}\frac{1}{x} = \theta + \text{Arctan}\left(\frac{1}{\tan\theta}\right) = \theta + \text{Arctan}\left(\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)\right) = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$$

(car θ et $\frac{\pi}{2}-\theta$ sont éléments de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$).

3. $\cos^2(\text{Arctan}\,a) = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}\,a)} = \frac{1}{1+a^2}$. De plus , $\text{Arctan}\,a$ est dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et donc $\cos(\text{Arctan}\,a) > 0$. On en déduit que pour tout réel a, $\cos(\text{Arctan}\,a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ puis

$$\sin(\text{Arctan}\,a) = \cos(\text{Arctan}\,a)\tan(\text{Arctan}\,a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R},\ \cos(\text{Arctan}\,a) = \frac{1}{1+a^2} \text{ et } \sin(\text{Arctan}\,a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.}$$

4. D'après 3),

$$\cos(\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b) = \cos(\text{Arctan}\,a)\cos(\text{Arctan}\,b) - \sin(\text{Arctan}\,a)\sin(\text{Arctan}\,b) = \frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}},$$

ce qui montre déjà , puisque $ab \neq 1$, que $\cos(\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b) \neq 0$ et donc que $\tan(\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b)$ existe. On a immédiatement,

$$\tan(\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b) = \frac{a+b}{1-ab}.$$

Maintenant, $\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b$ est dans $\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$.

1er cas. Si $ab < 1$ alors $\cos(\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b) > 0$ et donc $\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Dans ce cas, $\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b = \text{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

2ème cas. Si $ab > 1$ alors $\cos(\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b) < 0$ et donc $\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b$ est dans $\left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. Si de plus $a > 0$, $\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b > -\frac{\pi}{2}$ et donc $\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b$ est dans $\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. Dans ce cas, $\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b-\pi$ est dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et a même tangente que $\text{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab}$. Donc, $\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b = \text{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab}+\pi$. Si $a < 0$, on trouve de même $\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b = \text{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab}-\pi$.

En résumé,

$$\boxed{\text{Arctan}\,a+\text{Arctan}\,b = \begin{cases} \text{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab} \text{ si } ab < 1 \\ \text{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab}+\pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a > 0 \\ \text{Arctan}\,\frac{a+b}{1-ab}-\pi \text{ si } ab > 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}.}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \text{ch}(a+b) = \text{ch}\,a\,\text{ch}\,b+\text{sh}\,a\,\text{sh}\,b & \text{et} & \text{ch}(a-b) = \text{ch}\,a\,\text{ch}\,b-\text{sh}\,a\,\text{sh}\,b, \\ \text{sh}(a+b) = \text{sh}\,a\,\text{ch}\,b+\text{ch}\,a\,\text{sh}\,b & \text{et} & \text{sh}(a-b) = \text{sh}\,a\,\text{ch}\,b-\text{sh}\,b\,\text{ch}\,a \\ \text{th}(a+b) = \frac{\text{th}\,a+\text{th}\,b}{1+\text{th}\,a\,\text{th}\,b} & \text{et} & \text{th}(a-b) = \frac{\text{th}\,a-\text{th}\,b}{1-\text{th}\,a\,\text{th}\,b}. \end{array}}$$

Deux démonstrations :

$$\text{ch}\,a\,\text{ch}\,b+\text{sh}\,a\,\text{sh}\,b = \frac{1}{4}((e^a+e^{-a})(e^b+e^{-b})+(e^a-e^{-a})(e^b-e^{-b})) = \frac{1}{2}(e^{a+b}+e^{-a-b}) = \text{ch}(a+b).$$

$$\text{th}(a+b) = \frac{\text{sh}(a+b)}{\text{ch}(a+b)} = \frac{\text{sh}\,a\,\text{ch}\,b+\text{sh}\,b\,\text{ch}\,a}{\text{ch}\,a\,\text{ch}\,b+\text{sh}\,a\,\text{sh}\,b} = \frac{\text{th}\,a+\text{th}\,b}{1+\text{th}\,a\,\text{th}\,b}$$

après division du numérateur et du dénominateur par le nombre non nul $\text{ch}\,a\,\text{ch}\,b$. En appliquant à $a = b = x$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(2x) = \text{ch}^2 x+sh^2 x = 2ch^2 x-1 = 2sh^2 x+1,\ \text{sh}(2x) = 2\,\text{sh}\,x\,\text{ch}\,x \text{ et } \text{th}(2x) = \frac{2\,\text{th}\,x}{1+\text{th}^2 x}.}$$

En additionnant entre elles les formules d'addition, on obtient les formules de linéarisation :

$$\operatorname{ch}a\operatorname{ch}b=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b)+\operatorname{ch}(a-b)),\ \operatorname{sh}a\operatorname{sh}b=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}(a+b)-\operatorname{ch}(a-b))\text{ et }\operatorname{sh}a\operatorname{ch}b=\frac{1}{2}(\operatorname{sh}(a+b)+\operatorname{sh}(a-b)),$$

et en particulier

$$\operatorname{ch}^2 x=\frac{\operatorname{ch}(2x)+1}{2}\text{ et }\operatorname{sh}^2 x=\frac{\operatorname{ch}(2x)-1}{2}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Pour x réel, on pose $f(x)=\int_0^{\sin^2 x}\operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x}\operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt$.
La fonction $t\mapsto \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Donc, la fonction $y\mapsto\int_0^y\operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,dt$ est définie et dérivable sur $[0,1]$. De plus, $x\mapsto\sin^2 x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,1]$. Finalement, la fonction $x\mapsto\int_0^{\sin^2 x}\operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De même, la fonction $t\mapsto\operatorname{Arccos}\sqrt{t}$ est continue sur $[0,1]$. Donc, la fonction $y\mapsto\int_0^y\operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt$ est définie et dérivable sur $[0,1]$. De plus, la fonction $x\mapsto\cos^2 x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1]$. Finalement, la fonction $x\mapsto\int_0^{\cos^2 x}\operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\sin x\cos x\operatorname{Arcsin}(\sqrt{\sin^2 x})-2\sin x\cos x\operatorname{Arccos}(\sqrt{\cos^2 x})\\&=2\sin x\cos x\left(\operatorname{Arcsin}(|\sin x|)-\operatorname{Arccos}(|\cos x|)\right).\end{aligned}$$

On note alors que f est π-pérodique et paire. Pour x élément de $[0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x)=2\sin x\cos x(x-x)=0$. f est donc constante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et pour x élément de $[0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{1/2}\operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,dt+\int_0^{1/2}\operatorname{Arccos}\sqrt{t}dt=\int_0^{1/2}\frac{\pi}{2}\,dt=\frac{\pi}{4}$. Mais alors, par parité et π-périodicité,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \int_0^{\sin^2 x}\operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\,dt+\int_0^{\cos^2 x}\operatorname{Arccos}\sqrt{t}\,dt=\frac{\pi}{4}.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. **1ère solution.** Pour tout réel x, $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|$ et donc $-1<\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}<1$. Ainsi f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, impaire, et pour tout réel x,

$$f_1'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2}x\frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{1}{1+x^2}=\operatorname{Arctan}'(x).$$

Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $f_1(x)=\operatorname{Arctan}x+C$. $x=0$ fournit $C=0$ et donc,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\operatorname{Arctan}x.}$$

2ème solution. Pour x réel donné, posons $\theta=\operatorname{Arctan}x$. θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $x=\tan\theta$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}&=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\sqrt{\cos^2\theta}\tan\theta=\cos\theta\tan\theta\ (\text{car }\cos\theta>0)\\&=\sin\theta\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \operatorname{Arcsin}(\sin\theta) = \theta \text{ (car } \theta \text{ est dans } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ ) \\ &= \operatorname{Arctan} x. \end{aligned}$$

2. **1ère solution.** Pour tout réel x, $-1 < -1 + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq -1+2 = 1$ (avec égalité si et seulement si $x = 0$). f_2 est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout réel x non nul,

$$f_2'(x) = \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{4x}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \frac{2\varepsilon}{1+x^2}$$

où ε est le signe de x. Donc il existe une constante réelle C telle que pour tout réel positif x, $f_2(x) = 2\operatorname{Arctan} x + C$ (y compris $x = 0$ puisque f est continue en 0).
$x = 0$ fournit $C = 0$ et donc, pour tout réel positif x, $f_2(x) = 2\operatorname{Arctan} x$. Par parité,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\operatorname{Arctan}|x|.}$$

2ème solution. Soit $x \in \mathbb{R}$ puis $\theta = \operatorname{Arctan} x$. θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan\theta$.

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos^2\theta(1-\tan^2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta).$$

Donc

$$f_2(x) = \operatorname{Arccos}(\cos(2\theta)) = \begin{cases} 2\theta \text{ si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ -2\theta \text{ si } \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right] \end{cases} = \begin{cases} 2\operatorname{Arctan} x \text{ si } x \geq 0 \\ -2\operatorname{Arctan} x \text{ si } x \leq 0 \end{cases} = 2\operatorname{Arctan}|x|.$$

3. La fonction $x \mapsto \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2}$ est définie et continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $[-1,1]\setminus\{0\}$ car pour x élément de $[-1,1]$, $1-x^2$ est élément de $[0,1]$ et vaut 1 si et seulement si x vaut 0. $\frac{1-x}{1+x}$ est défini et positif si et seulement si x est dans $]-1,1]$, et nul si et seulement si $x = 1$. f_3 est donc définie et continue sur $]-1,1]$, dérivable sur $]-1,0[\cup]0,1[$. Pour x dans $]-1,0[\cup]0,1[$, on note ε le signe de x et on a :

$$f_3'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} - \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si x est dans $]0,1[$, $f_3'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (-\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin})'(x)$. Donc, il existe un réel C tel que, pour tout x de $[0,1]$ (par continuité) $f_3(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x + C$. $x = 1$ fournit $C = \frac{\pi}{4}$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ f_3(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x = \frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x.}$$

Si x est dans $]-1,0[$, $f_3'(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\frac{3}{2}\operatorname{Arcsin})'(x)$. Donc il existe un réel C' tel que, pour tout x de $]-1,0]$ (par continuité) $f_3(x) = \frac{3}{2}\operatorname{Arcsin} x + C'$. $x = 0$ fournit $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = C'$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in]-1,0],\ f_3(x) = \frac{3}{2}\operatorname{Arcsin} x + \frac{\pi}{4}.}$$

4. f_4 est dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ et pour x élément de $\mathscr{D}$, on a :

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= -\frac{1}{x^3}\frac{1}{1+\frac{1}{4x^4}} - \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{x-(x-1)}{x^2}\frac{1}{1+\frac{(x-1)^2}{x^2}} \\ &= -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+1+2x} + \frac{1}{2x^2+1-2x} = -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{(2x^2+1)^2-4x^2} = 0. \end{aligned}$$

f_4 est donc constante sur chacun des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$. Pour $x>0$, $f(x)=f(1)=0$. Pour $-1<x<0$, $f(x)=\lim\limits_{\substack{t\to-1\\ t>-1}} f(t)=\text{Arctan}\,\frac{1}{2}-(-\frac{\pi}{2})+\text{Arctan}\,2=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$. Pour $x<-1$, $f(x)=\lim_{t\to-\infty} f(t)=0$ et donc

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\},\ f_4(x)=\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\\ \pi \text{ si } x\in]-1,0[\end{array}\right..}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

$0\leq \text{Arctan}\,\frac{1}{2}+\text{Arctan}\,\frac{1}{5}<\text{Arctan}\,1+\text{Arctan}\,1=\frac{\pi}{2}$ et

$$\tan\left(\text{Arctan}\,\frac{1}{2}+\text{Arctan}\,\frac{1}{5}\right)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\frac{7}{9}.$$

Comme $\text{Arctan}\,\frac{1}{2}+\text{Arctan}\,\frac{1}{5}\in[0,\frac{\pi}{2}[$, on a donc $\text{Arctan}\,\frac{1}{2}+\text{Arctan}\,\frac{1}{5}=\text{Arctan}\,\frac{7}{9}$. De même, $\text{Arctan}\,\frac{7}{9}+\text{Arctan}\,\frac{1}{8}\in[0,\frac{\pi}{2}[$ et

$$\tan\left(\text{Arctan}\,\frac{7}{9}+\text{Arctan}\,\frac{1}{8}\right)=\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}}=\frac{65}{65}=1,$$

et donc $\text{Arctan}\,\frac{7}{9}+\text{Arctan}\,\frac{1}{8}=\text{Arctan}\,1=\frac{\pi}{4}$. Finalement,

$$\boxed{\text{Arctan}\,\frac{1}{2}+\text{Arctan}\,\frac{1}{5}+\text{Arctan}\,\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}.}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

(On va retrouver le résultat de l'exercice 2 dans un cas particulier)
Soient a et b deux réels positifs. Alors, $\text{Arctan}\,a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\text{Arctan}\,b\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc, $\text{Arctan}\,a-\text{Arctan}\,b\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. De plus,

$$\tan(\text{Arctan}\,a-\text{Arctan}\,b)=\frac{\tan(\text{Arctan}\,a)-\tan(\text{Arctan}\,b)}{1+\tan(\text{Arctan}\,a)\tan(\text{Arctan}\,b)}=\frac{a-b}{1+ab},$$

et donc, puisque $\text{Arctan}\,a-\text{Arctan}\,b\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,

$$\boxed{\forall a\geq 0,\ \forall b\geq 0,\ \text{Arctan}\,a-\text{Arctan}\,b=\text{Arctan}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).}$$

Soit alors k un entier naturel non nul. $\text{Arctan}\,\frac{2}{k^2}=\text{Arctan}\,\frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)}=\text{Arctan}(k+1)-\text{Arctan}(k-1)$ (puisque $k-1$ et $k+1$ sont positifs). Par suite, si n est un entier naturel non nul donné,

$$\begin{aligned}u_n&=\sum_{k=1}^{n}\text{Arctan}\,\frac{2}{k^2}=\sum_{k=1}^{n}(\text{Arctan}(k+1)-\text{Arctan}(k-1))=\sum_{k=2}^{n+1}\text{Arctan}\,k-\sum_{k=0}^{n-1}\text{Arctan}\,k\\&=\text{Arctan}(n+1)+\text{Arctan}\,n-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

La limite de u_n vaut donc $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{3\pi}{4}.}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

• Pour tout réel x, $\text{ch}\,x>0$. Donc f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$f'(x) = \operatorname{sh} x \frac{1}{\operatorname{ch} x} - 1 = \operatorname{th} x - 1 < 0.$$

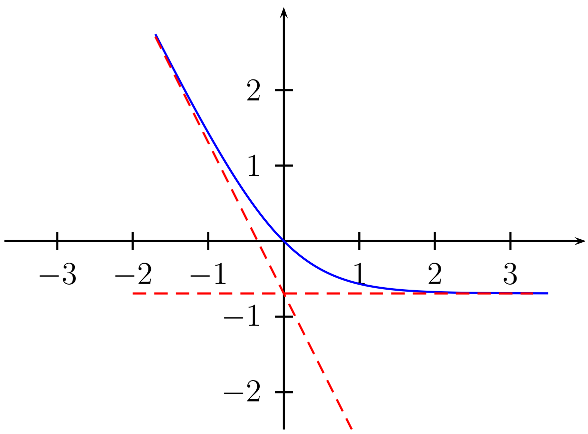
f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. • Etude en $-\infty$. $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$ et donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Cherchons une éventuelle droite asymptote.

$$f(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} - x = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 - x = \ln(e^{-x}) - x - \ln 2 + \ln(1 + e^{2x}) = -2x - \ln 2 + \ln(1 + e^{2x}).$$

Donc, $f(x) - (-2x - \ln 2) = \ln(1 + e^{2x})$. Or, d'une part $\lim_{x \to -\infty} \ln(1 + e^{2x}) = 0$ et donc la droite (D) d'équation $y = -2x - \ln 2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $-\infty$ et d'autre part, pour tout réel x, $\ln(1 + e^{2x}) > 0$ et la courbe représentative de f est strictement au dessus de (D) sur $\mathbb{R}$. • Etude en $+\infty$.

$$f(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} - x = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 - x = \ln(e^x) - x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}) = -\ln 2 + \ln(1 + e^{-2x})$$

et f tend vers $-\ln 2$ quand x tend vers $+\infty$. • Graphe.



Correction de l'exercice 9 ▲

1. f est définie et dérivable sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
2. Pour x élément de $\mathscr{D}$,

$$f'(x) = 2x \operatorname{Arctan} \frac{1}{2x-1} + (x^2 - 1) \frac{-2}{(2x-1)^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{(2x-1)^2}} = 2x \operatorname{Arctan} \frac{1}{2x-1} - \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1}.$$

De plus, pour x non nul : $f'(x) = 2xg(x)$ où $g(x) = \operatorname{Arctan} \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$.

3. Pour x élément de $\mathscr{D} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{2x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{2} \frac{2x(2x^3 - 2x^2 + x) - (x^2 - 1)(6x^2 - 4x + 1)}{x^2(2x^2 - 2x + 1)^2} \\ &= \frac{-2x^2(2x^2 - 2x + 1) + 2x^4 - 7x^2 + 4x - 1}{2x^2(2x^2 - 2x + 1)^2} = -\frac{2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1}{2x^2(x^2 - 2x + 1)^2}. \end{aligned}$$

Maintenant,

$$2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 = 2x^2(x-1)^2 + 7x^2 - 4x + 1 = 2x^2(x-1)^2 + 7\left(x - \frac{2}{7}\right)^2 + \frac{3}{7} > 0.$$

Donc, g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. En $+\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement positive sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Quand x tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures, g tend vers $-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2} < 0$ et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $g(x)$ tend vers $+\infty$. Donc g s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $]0, \frac{1}{2}[$ en un certain réel x_0 de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. g est de plus strictement négative sur $\left]x_0, \frac{1}{2}\right[$ et strictement positive sur $]0, x_0[$. Quand x tend vers $-\infty$, $g(x)$ tend vers 0. Donc g est strictement négative sur $]-\infty,0[$. Enfin, puisque $f'(x)=2xg(x)$ pour $x\neq 0$, on a les résultats suivants : sur $]-\infty,0[$, $f'>0$, sur $]0,x_0[$, $f'>0$, sur $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$, $f'<0$, sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f'>0$. Comme $f'(0)=1>0$, on a donc : sur $]-\infty,x_0[$, $f'>0$, sur $\left]x_0,\frac{1}{2}\right[$, $f'<0$ et sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $f'>0$. f est strictement croissante sur $]-\infty,x_0]$ et sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ et est strictement décroissante sur $\left[x_0,\frac{1}{2}\right[$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit x un réel.

$$S=\sum_{k=1}^{100}\mathrm{sh}(2+kx)=\frac{1}{2}\left(e^2\sum_{k=1}^{100}e^{kx}-e^{-2}\sum_{k=1}^{100}e^{-kx}\right).$$

Si $x=0$ alors directement $S=100\,\mathrm{sh}\,2\neq 0$. Si $x\neq 0$ alors $e^x\neq 1$ et $e^{-x}\neq 1$. Dans ce cas,

$$S=\frac{1}{2}\left(e^2e^x\frac{1-e^{100x}}{1-e^x}-e^{-2}e^{-x}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^{-x}}\right)=\frac{1}{2}\left(e^2e^x\frac{1-e^{100x}}{1-e^x}+e^{-2}\frac{1-e^{-100x}}{1-e^x}\right).$$

après multiplication du numérateur et du dénominateur de la deuxième fraction par e^x. Pour $x\neq 0$, on a donc :

$$\begin{aligned}S=0&\Leftrightarrow e^{x+2}(1-e^{100x})+e^{-2}(1-e^{-100x})=0\Leftrightarrow e^{x+2}(1-e^{100x})+e^{-2-100x}(e^{100x}-1)=0\\&\Leftrightarrow(1-e^{100x})(e^{x+2}-e^{-100x-2})=0\Leftrightarrow e^{x+2}=e^{-100x-2}\ (\text{car } x\neq 0)\\&\Leftrightarrow x+2=-100x-2\Leftrightarrow x=-\frac{4}{101}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\frac{4}{101}\right\}.}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

On a vu au 3 que pour tout réel x, $\mathrm{th}(2x)=\frac{2\,\mathrm{th}\,x}{1+\mathrm{th}^2x}$ ce qui s'écrit pour x non nul : $\frac{1+\mathrm{th}^2x}{\mathrm{th}\,x}=\frac{2}{\mathrm{th}(2x)}$ ou encore $\mathrm{th}\,x+\frac{1}{\mathrm{th}\,x}=\frac{2}{\mathrm{th}(2x)}$ ou finalement

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \mathrm{th}\,x=\frac{2}{\mathrm{th}(2x)}-\frac{1}{\mathrm{th}\,x}.}$$

Soient n un entier naturel non nul et x un réel non nul. D'après ce qui précède,

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}2^k\,\mathrm{th}(2^kx)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+1}}{\mathrm{th}(2^{k+1}x)}-\frac{2^k}{\mathrm{th}(2^kx)}\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{\mathrm{th}(2^kx)}-\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{\mathrm{th}(2^kx)}=\frac{2^{n+1}}{\mathrm{th}(2^{n+1}x)}-\frac{1}{\mathrm{th}\,x}.$$

Ensuite, pour $x>0$, $\mathrm{th}(2^{n+1}x)$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Donc u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x>0$ et vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si $x<0$.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin(2\,\mathrm{Arcsin}\,x)=2\sin(\mathrm{Arcsin}\,x)\cos(\mathrm{Arcsin}\,x)=2x\sqrt{1-x^2}$.
2. Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\cos(2\,\mathrm{Arccos}\,x)=2\cos^2(\mathrm{Arccos}\,x)-1=2x^2-1$.
3. Pour tout réel x de $[-1,1]$, $\sin^2(\frac{1}{2}\,\mathrm{Arccos}\,x)=\frac{1}{2}(1-\cos(\mathrm{Arccos}\,x))=\frac{1-x}{2}$.
4. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|=\mathrm{Max}\{x,-x\}.$$

Donc, $\sqrt{x^2+1}+x>0$ et $\sqrt{x^2+1}-x>0$. L'expression proposée existe pour tout réel x. De plus,

$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\left((\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)\right)=\ln(x^2+1-x^2)=\ln 1=0.$$

5. L'expression proposée est définie sur $\mathbb{R}^*$ et impaire. Soit alors $x>0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)&=\ln\left(\frac{x^2-1}{2x}+\sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(2x)^2}+1}\right)=\ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2+1+4x^2})\right)\\&=\ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+\sqrt{(x^2+1)^2})\right)=\ln\left(\frac{1}{2x}(x^2-1+x^2+1)\right)=\ln x\end{aligned}$$

Par imparité, si $x<0$, $\mathrm{Argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)=-\ln(-x)$. En résumé, en notant ε le signe de x,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \mathrm{Argsh}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)=\varepsilon\ln|x|.}$$

6. L'expression proposée existe si et seulement si $2x^2-1\in[1,+\infty[$ ou encore $x^2\in[1,+\infty[$ ou enfin $x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$. Cette expression est paire. Soit donc $x\in[1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Argch}(2x^2-1)&=\ln(2x^2-1+\sqrt{(2x^2-1)^2-1})=\ln(2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1})=\ln\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\right)\\&=2\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=2\,\mathrm{Argch}\,x\end{aligned}$$

Par parité, on en déduit que

$$\boxed{\forall x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[,\ \mathrm{Argch}(2x^2-1)=2\,\mathrm{Argch}\,|x|.}$$

7. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Argth}\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,x-1}{\mathrm{ch}\,x+1}}\text{ existe}&\Leftrightarrow\mathrm{ch}\,x+1\neq0\text{ et }\frac{\mathrm{ch}\,x-1}{\mathrm{ch}\,x+1}\geq0\text{ et }\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,x-1}{\mathrm{ch}\,x+1}}\in]-1,1[\\&\Leftrightarrow\frac{\mathrm{ch}\,x-1}{\mathrm{ch}\,x+1}\in[0,1[\end{aligned}$$

Mais, d'une part, $\frac{\mathrm{ch}\,x-1}{\mathrm{ch}\,x+1}\geq0$ et d'autre part, $\frac{\mathrm{ch}\,x-1}{\mathrm{ch}\,x+1}=\frac{\mathrm{ch}\,x+1-2}{\mathrm{ch}\,x+1}=1-\frac{2}{\mathrm{ch}\,x+1}<1$. L'expression proposée existe donc pour tout réel x et est paire. Ensuite, pour x réel positif, on a

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,x-1}{\mathrm{ch}\,x+1}}}{1-\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,x-1}{\mathrm{ch}\,x+1}}}&=\frac{\sqrt{\mathrm{ch}\,x+1}+\sqrt{\mathrm{ch}\,x-1}}{\sqrt{\mathrm{ch}\,x+1}-\sqrt{\mathrm{ch}\,x-1}}=\frac{(\sqrt{\mathrm{ch}\,x+1}+\sqrt{\mathrm{ch}\,x-1})^2}{(\mathrm{ch}\,x+1)-(\mathrm{ch}\,x-1)}=\frac{2\,\mathrm{ch}\,x+2\sqrt{\mathrm{ch}^2x-1}}{2}\\&=\mathrm{ch}\,x+\sqrt{\mathrm{sh}^2x}=\mathrm{ch}\,x+|\,\mathrm{sh}\,x|=\mathrm{ch}\,x+\mathrm{sh}\,x=e^x\end{aligned}$$

Par suite, x étant toujours positif,

$$\mathrm{Argth}\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,x-1}{\mathrm{ch}\,x+1}}=\frac{1}{2}\ln(e^x)=\frac{x}{2}.$$

Par parité, on a alors

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{Argth}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\,x-1}{\mathrm{ch}\,x+1}}\right)=\frac{|x|}{2}.}$$

(Remarque. Pour 5), 6) et 7), on peut aussi dériver chaque expression)

8. Pour $x > 0$,

$$\frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x} = \frac{1}{2x}\left(x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. $\operatorname{ch} x = 2 \Leftrightarrow x = \pm\operatorname{Argch} 2 = \pm\ln(2+\sqrt{2^2-1}) = \pm\ln(2+\sqrt{3})$. Les solutions sont $\ln(2+\sqrt{3})$ et $-\ln(2+\sqrt{3})$ (ou encore $\ln(2-\sqrt{3})$ car $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$).
2. Une solution est nécessairement dans $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Soit donc $x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{2}) &\Rightarrow \sin(\operatorname{Arcsin}(2x)) = \sin(\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{2}))\\ &\Leftrightarrow 2x = x\sqrt{1-(x\sqrt{2})^2}+x\sqrt{2}\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \sqrt{1-2x^2}+\sqrt{2-2x^2} = 2\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1-2x^2+2-2x^2+2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 4\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 2\sqrt{(1-2x^2)(2-2x^2)} = 1+4x^2\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 4(4x^4-6x^2+2) = (4x^2+1)^2\\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 32x^2 = 7 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{7}{32}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{7}{32}}\end{aligned}$$

Réciproquement, pour chacun des ces trois nombres x, la seule implication écrite est une équivalence si x est dans $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ (ce qui est le cas puisque $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{32}}\right)^2 = \frac{14}{64} \leq \frac{16}{64} = (\frac{1}{2})^2$) et $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{2})$ est dans $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Mais,

$$0 \leq \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}}+\operatorname{Arcsin}(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) = \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}}+\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{16}} \leq 2\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{8}{16}} = 2\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

et donc $\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{7}{32}}+\operatorname{Arcsin}(\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2} \in [0,\frac{\pi}{2}]$. De même, par parité, $\operatorname{Arcsin}(-\sqrt{\frac{7}{32}})+\operatorname{Arcsin}(-\sqrt{\frac{7}{32}}\sqrt{2}) \in [-\frac{\pi}{2},0]$ ce qui achève la résolution.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{0, \frac{\sqrt{14}}{8}, -\frac{\sqrt{14}}{8}\right\}.}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\operatorname{Arcsin} x$ existe si et seulement si $x \in [-1,1]$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \text{ existe} &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1]\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \in [0,1] \Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^2(1-x^2) \leq 1\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 4x^4-4x^2+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } (2x^2-1)^2 \geq 0\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1]\end{aligned}$$

Pour $x \in [-1,1]$, $\sin(2\operatorname{Arcsin}(x)) = 2\sin(\operatorname{Arcsin} x)\cos(\operatorname{Arcsin} x) = 2x\sqrt{1-x^2} = \sin(\operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}))$, et de plus,
$\operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}) \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Par suite,

$$\begin{aligned}x \text{ solution} &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } 2\operatorname{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\\ &\Leftrightarrow x \in [-1,1] \text{ et } \operatorname{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right].\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].}$$