République du Cameroun
Republic of Cameroun

Université de Yaoundé I

University of Yaounde I

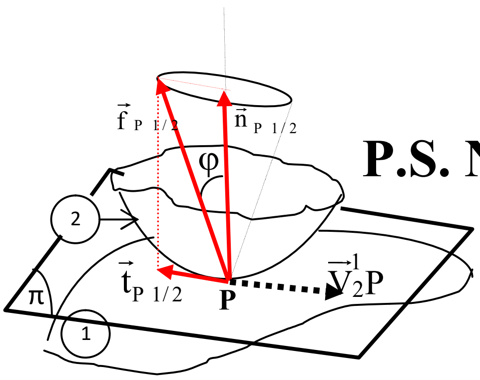
STATIQUE DU SOLIDE

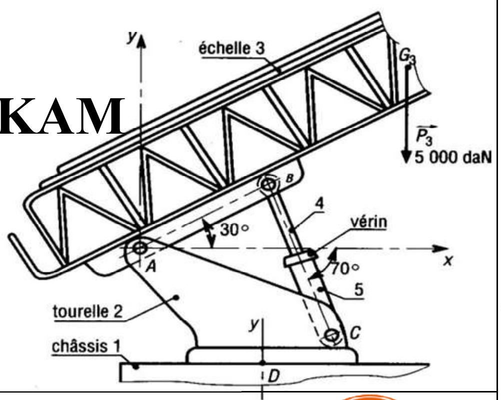
GENERALITES SUR LES TORSEURS
COURS

Ressource Pédagogique Mise en Ligne

Par

P.S. NGOHE-EKAM





Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de Yaoundé

PREAMBULE

Suite à la menace de propagation du Covid-19 (Corona virus Disease) dont le premier cas de contamination a été déclaré au mois de mars 2020 au Cameroun, des mesures sanitaires ont été édictées par monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, puis renforcées par une sortie médiatisée de monsieur le Premier Ministre (PM) du Cameroun. Le point commun de l'allocution de ces deux personnalités et relatif à l'enseignement supérieur fut la fermeture des établissements d'enseignement, dont l'Université de Yaoundé.

Monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, dans le souci que la fermeture de l'UY I ne soit pas une perche tendue aux étudiants paresseux pour se laisser aller à un certain sommeil intellectuel, instruit alors que les enseignants « mettent en ligne » leurs cours grâce au serveur du Centre Universitaire des Technologies de l'Information (CUTI) de l'UY I et que les étudiants visitent ce serveur à volonté pour télécharger les ressources pédagogiques (puisque c'est le terme le plus approprié) que les enseignants y auront déposé, ce téléchargement devant permette aux étudiants de continuer d'apprendre (à domicile) pendant la période de pseudo-confinement décrétée par monsieur le PM.

C'est ainsi que le présent document est conçu et mis en forme par l'auteur. Ce document fait partie de l'enseignement dispensé par l'auteur aux étudiants de niveau II de l'Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de l'UY I. L'auteur a valablement sectionné cet enseignement en modules qui constitueraient des chapitres de cours en présentiel. Et pour chaque module l'enseignant a produit trois documents en vue de faciliter l'apprentissage à distance :

- Des notes de cours
- Des exercices corrigés
- Des exercices non corrigés

L'idée principale du sectionnement de l'enseignement est de guider au mieux l'apprenant dans l'organisation de sa mémoire cognitive. En effet, il n'est pas bien d'exiger de l'apprenant une concentration trop longue, dépassant les six minutes reconnues par la plupart des experts en pédagogie, sans activité de restitution par exemple. L'apprenant est ainsi invité à ne pas rester trop longtemps sur les parties cours et exercices corrigés ; il peut y revenir en tant que de besoin. Cependant le traitement des exercices non corrigés étant une phase d'extériorisation de la connaissance emmagasinée, l'apprenant pourra et devrait y passer assez de temps de travail.

L'interaction de l'enseignant avec les apprenants est rendue possible grâce aux fora (plateformes d'enseignement à distance, groupe Whatsapp, liste de distribution par email, etc.) divers dans lesquels les apprenants sont invités à s'inscrire.

Pour finir, nous signalons que l'organisation actuelle de cet enseignement n'est pas vraiment une mise en ligne de cours, encore moins un MOOC, comme cela est fait dans la plupart des plateformes d'enseignement à distance. Nous essayons de faire une mise en ligne des ressources (dans le serveur de l'UY I), mais une mise en ligne suggérant une sorte de protocole d'apprentissage aux étudiants.

Yaoundé, le 21 mars 2020,

P.S. NGOHE-EKAM

Module 1 : GENERALITES SUR LES TORSEURS

A l'issue de ce module, l'apprenant devrait être capable :

- De définir correctement un torseur
- D'écrire convenablement (on parle de réduire) un torseur en un point ou dans un repère
- D'effectuer toute opération (pseudovectorielle) entre les torseurs
- De décrire la typologie générale des torseurs
- De déterminer un point central, l'axe central, le moment central et le pas réduit d'un torseur.

Sommaire

I- DEFINITIONS

On appelle ***torseur***, la donnée de deux vecteurs dont :

- le premier est libre, noté $\vec{R}$ et appelé ***résultante (***ou ***somme vectorielle,*** ou encore ***somme géométrique) du torseur***. En tant que vecteur libre, il a la même valeur en tout point de l'espace affine $\mathscr{E}$. **C'est le premier invariant du torseur**.
- le second est lié, donc prend des valeurs qui dépendent de la position P dans l'espace $\mathscr{E}$; noté $\vec{\mathscr{M}}_P$, il est et appelé ***champ des moments du torseur***.

Les deux vecteurs étant en outre liés par la relation suivante appelée la **propriété fondamentale du torseur** (d'éléments $\vec{R}$ et $\vec{\mathscr{M}}_P$) :

$$\boxed{\vec{\mathscr{M}}_P = \vec{\mathscr{M}}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{R} \qquad \forall\, P, Q \in \mathscr{E}.}$$

$\vec{R}$ et $\vec{\mathscr{M}}_P$ sont appelés **éléments de réduction du torseur au point P**

II- NOTATION DES TORSEURS

II-1 Notation vectorielle.

Un torseur [T] d'éléments de réduction $\vec{R}$ et $\vec{\mathscr{M}}_P$ en un point P est généralement noté :

$[T]_P = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{\mathscr{M}}_P \end{Bmatrix}$; c'est la **notation vectorielle** (mieux **tensorielle**) du torseur.

$\vec{R}$ et $\vec{\mathscr{M}}_P$ sont alors appelés les ***coordonnées vectorielles*** du torseur au point P.

II-2 Notation scalaire ou plückérienne.

Mais lorsque $\vec{R}$ et $\vec{\mathscr{M}}_P$ sont exprimés dans une même base $B(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ par exemple si $\vec{R} = X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y + Z\vec{e}_z$ et $\vec{m}_P = L\vec{e}_x + M\vec{e}_y + N\vec{e}_z$, on peut aussi noter le torseur de la manière suivante au point P:

$$[T]=\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{P(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{P(B)} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(P,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)}$$

X, Y, Z, L, M, et N sont les ***coordonnées scalaires du torseur*** en P dans la base (B) ; on les appelle aussi ***coordonnées plückériennes.*** On parle alors de la **notation scalaire** ou **plückérienne** du torseur.

II-3 Notation duale.

En ***notation duale***, ce torseur peut s'écrire $[T]_P = \vec{R} + \varepsilon \vec{\mathscr{M}}_P$ où ε est appelé **nombre dual absorbant** ou mieux **nilpotent**. La propriété fondamentale $\boldsymbol{\varepsilon^{n>=2} = 0}$ permet de faciliter les calculs entre torseurs.

.

III- PROPRIETES DES TORSEURS

Nous présentons, ici quelques propriétés immédiates relevant de la définition même des torseurs.

III-1 Equiprojectivité du champ des moments

$$\boxed{\vec{\mathscr{M}}_P.\overrightarrow{PQ} = \vec{\mathscr{M}}_Q.\overrightarrow{PQ} \qquad \forall (P,Q) \in \mathscr{E}^2}.$$

Nota : . T*out champ vectoriel équiprojectif est le champ des moments d'un torseur.*

III-2 Somme de deux torseurs

$$\left.\begin{array}{l} [T_1]=\begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{\mathscr{M}}_{1P} \end{Bmatrix} \\ [T_2]=\begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{\mathscr{M}}_{2P} \end{Bmatrix} \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{[T_1]+[T_2]=[T]\begin{Bmatrix} \vec{R}_1+\vec{R}_2=\vec{R} \\ \vec{\mathscr{M}}_{1P}+\vec{\mathscr{M}}_{2P}=\vec{\mathscr{M}}_P \end{Bmatrix}}$$

; C'est un torseur, le torseur somme.

III-3 Egalité de deux torseurs

$$[T_1]=\begin{Bmatrix}\vec{R}_1\\ \vec{\mathcal{M}}_{1,P}\end{Bmatrix}\ [T_2]=\begin{Bmatrix}\vec{R}_2\\ \vec{\mathcal{M}}_{2,P}\end{Bmatrix}\ \text{alors :}\ \boxed{[T_1]=[T_2]\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{R}_1=\vec{R}_2\\ \exists O\quad t.q.\quad \vec{\mathcal{M}}_{1,O}=\vec{\mathcal{M}}_{2,O}\end{cases}}$$

IV- OPERATIONS SUR LES TORSEURS

Dans une expression duale de la forme générale a + ε.b, a est dit ***partie réelle*** et b est appelée **partie duale** du **nombre dual a + ε.b** $\Rightarrow$ la résultante $\vec{R}$ est la partie réelle du torseur et le moment $\vec{\mathcal{M}}$ sa partie duale.

La propriété fondamentale des nombres duaux, à savoir $\varepsilon^2 = 0$ (et par là $\varepsilon^n = 0$, n>1) permet d'effectuer, avec aisance, quantité d'opérations sur les torseurs.

IV-1 Addition de deux torseurs en un point P

$$\left.\begin{matrix}[T_1]=\vec{R}_1+\varepsilon\vec{\mathcal{M}}_1\\ [T_2]=\vec{R}_2+\varepsilon\vec{\mathcal{M}}_2\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{[T_1]+[T_2]=\left(\vec{R}_1+\vec{R}_2\right)+\varepsilon\left(\vec{\mathcal{M}}_1+\vec{\mathcal{M}}_2\right)}$$

; c'est encore un torseur, **le torseur somme**.

IV-2 Multiplication d'un torseur par un scalaire

$$k.[T]=k\left(\vec{R}+\varepsilon.\vec{\mathcal{M}}\right)=k\vec{R}+\varepsilon k.\vec{\mathcal{M}}\Rightarrow\boxed{k[T]=k\vec{R}+\varepsilon k.\vec{\mathcal{M}}}$$

; c'est encore un torseur.

IV-3 Produit scalaire de deux torseurs

$$[T_1].[T_2]=\left(\vec{R}_1+\varepsilon\vec{\mathcal{M}}_1\right).\left(\vec{R}_2+\varepsilon\vec{\mathcal{M}}_2\right)=\vec{R}_1.\vec{R}_2+\varepsilon\vec{R}_1.\vec{\mathcal{M}}_2+\varepsilon\vec{\mathcal{M}}_1.\vec{R}_2+\varepsilon^2\vec{\mathcal{M}}_1\vec{\mathcal{M}}_2$$

$$\varepsilon^2=0\rightarrow\boxed{[T_1].[T_2]=\vec{R}_1.\vec{R}_2+\varepsilon\left(\vec{R}_1.\vec{\mathcal{M}}_2+\vec{R}_2.\vec{\mathcal{M}}_1\right)}$$

; c'est un nombre dual.

On obtient ainsi un scalaire dual. Si ce scalaire est nul, on a deux **torseurs orthogonaux**.

Remarque :

(1) La partie duale $\vec{R}_1.\vec{m}_2+\vec{R}_2\vec{m}_1$ est le **comoment des torseurs** $[T_1]$ et $[T_2]$. On l'appelle aussi souvent **produit torsoriel** de $[T_1]$ et $[T_2]$, ou tout simplement **produit des torseurs** $[T_1]$ et $[T_2]$; il est alors noté $[T_1] * [T_2]$.

(2) On montre que $[T_1] * [T_2]$ est un invariant pour les deux torseurs c.à.d. qu'il est indépendant du point P où les deux torseurs ont été réduits.

Ainsi, pour le calcul de leur comoment, les torseurs peuvent être réduits tous les deux en n'importe quel point commun.

IV-4 Produit torsoriel de deux torseurs

C'est l'application qui, à deux torseurs, associe leur comoment :

$[T_1],[T_2] \rightarrow [T_1]*[T_2]$ tel que : $\boxed{[T_1]*[T_2] = \vec{R}_1.\vec{\mathscr{M}}_2 + \vec{R}_2.\vec{\mathscr{M}}_1}$

Remarque :

- on appelle **automoment** d'un torseur d'éléments de réduction $\vec{R}$ et $\vec{\mathscr{M}}_P$, la moitié du comoment de ce torseur avec lui-même, c.à.d. le produit $\vec{R}.\vec{\mathscr{M}}_P$

IV-5 Produit vectoriel de deux torseurs

C'est l'application qui, à deux torseurs associe la grandeur :

$\boxed{\left(\vec{R}_1 + \varepsilon\vec{\mathscr{M}}_1\right) \wedge \left(\vec{R}_2 + \varepsilon\vec{\mathscr{M}}_2\right) = \vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2 + \varepsilon\left(\vec{R}_1 \wedge \vec{\mathscr{M}}_2 - \vec{R}_2 \wedge \vec{\mathscr{M}}_1\right)}$; c'est encore un torseur.

- Lorsque le produit vectoriel est nul, les **torseurs** sont dits **parallèles**.
- On montre que le produit vectoriel de deux torseurs est orthogonal à chacun d'eux.

IV-6 Différentielle d'un torseur

$$\boxed{d\left(\vec{R} + \varepsilon\vec{\mathscr{M}}_P\right) = d\vec{R} + \varepsilon d\vec{\mathscr{M}}_P};$$

C'est encore un torseur, le torseur différentielle.

IV-7 Le carré d'un torseur

C'est le torseur : $\boxed{[T]^2 = [T].[T] = \vec{R}^2 + \varepsilon 2\vec{R}.\vec{\mathscr{M}}}$

V- TYPOLOGIE DE TORSEURS PARTICULIERS

V-1 Le torseur nul :

C'est le torseur $[0]=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_{\forall P} \rightarrow [T]=\vec{0}+\varepsilon.\vec{0}=\varepsilon\vec{0}$ en notation duale (N.B. : on ne peut omettre ε dans cette écriture, au risque de confondre le torseur nul au vecteur nul qui est une grandeur d'une nature toute autre).

V-2 Le torseur à moment ou torseur couple :

C'est un torseur de résultante nulle. $[T]=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{\mathscr{M}}_P\end{Bmatrix}_{\forall P} \Rightarrow [T]=\varepsilon\vec{\mathscr{M}}_P$ en notation duale

Remarque **:**

le couple est représenté uniquement par son moment en un point quelconque. Ce torseur a la même écriture en tout point de l'espace.

V-3 Le torseur à résultante ou torseur glisseur :

C'est un torseur pour lequel il existe au moins un point P_0de l'espace où le moment est nul. $[T]=\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \exists P_0 \text{ t.q. } \quad \vec{\mathscr{M}}_{P_0}=\vec{0}\end{Bmatrix} \Rightarrow \exists P_0 \text{t.q.} \quad \text{en} \quad P_0 \quad [T]=\vec{R}+\varepsilon\vec{0}$ en notation duale

Remarque **:** ***le moment d'un glisseur est toujours perpendiculaire à sa résultante (non nulle***).

Nota : Un torseur qui n'est ni nul, ni un couple, ni un glisseur, est un torseur quelconque.

VI- ELEMENTS CENTRAUX D'UN TORSEUR

VI-1 Définitions

Point central d'un torseur : point quelconque P de l'espace affine $\mathscr{E}$, où les éléments de réduction de ce torseur sont colinéaires : P / $\overrightarrow{\mathscr{M}_P} \wedge \vec{R}=\vec{0}$

Axe central d'un torseur : lieu des points centraux de ce torseur : $(\Delta)=\{P\in\mathscr{E} \,/\, \vec{\mathscr{M}}_P \wedge \vec{R}=\vec{0}\}$

Moment central du torseur : valeur commune du moment des points centraux

Remarques :

(1) $\overrightarrow{\mathscr{M}_P} \wedge \vec{R}=\vec{0}$ avec $\vec{R}\neq\vec{0} \rightarrow \vec{\mathscr{M}}_P=\lambda\vec{R}$; λ est le ***pas réduit*** du torseur en P.

VI-2 Détermination analytique de l’axe central d’un torseur

L’axe central passe par le point particulier I* et est colinéaire à la résultante $\vec{R}$ **,** avec $\boxed{\overrightarrow{PI^*} = \dfrac{\vec{R} \wedge \vec{\mathscr{M}}_P}{\vec{R}^2}}$ **quel que soit le point P où la torseur est connu;**

On note alors : $\Delta(I^*, \vec{R})$.

<u>Remarque</u> : Détermination du pas réduit du torseur

La formule de détermination la plus simple du **pas réduit du torseur** est la suivante :

$$\boxed{\lambda = \frac{\vec{R}.\vec{\mathscr{M}}_P}{\vec{R}^2} \quad \forall P}$$

VI-3 Propriétés

(1) - L’axe central est colinéaire à la résultante du torseur. Ce résultat est issu de la discussion précédente.

(2) – Le moment est partout égal sur l’axe central.

(3) - En tout point de l’axe central, la norme du moment du torseur est minimale.

(4) - L’axe central d’un glisseur est le lieu des points où le moment est nul (en tant que valeur minimale).Un glisseur $[T] = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}_A = \vec{0} \end{Bmatrix}$ est alors représenté uniquement par $(\vec{R}, A)$ ou $(A, \vec{R})$.

VII- TORSEURS ASSOCIES A DES CHAMPS DE VECTEURS

VII-1 Torseur associé à un champ discret fini de vecteurs

Pour tout ensemble fini de n vecteurs $\vec{V}(M_i)$ définis en n points M_i, on peut définir un torseur en un point quelconque O de l’espace $\mathscr{E}$ par :

- La résultante géométrique $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}(M_i)$
- Le moment en O : $\vec{\mathscr{M}}_0 = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{V}(M_i)$

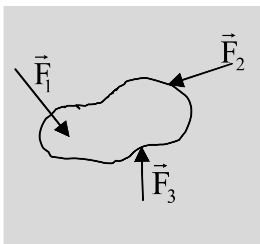


Figure 1:Répartition discrète d'effort

C'est le cas par exemple du torseur des forces discrètes appliquées à un solide.

VII-2 Torseur associé à un champ continu de vecteurs

Un champ continu est caractérisé par une densité vectorielle, vecteur infiniment petit, qui dépend du point M où on se trouve. Pour recouvrir tout le champ, on a un nombre infini de vecteurs infiniment petit $d\vec{V}(M)$.

b - 1) Si la densité vectorielle est linéaire, on définit le torseur par :

$$\vec{R} = \int_{\Gamma} d\vec{V}(M) \text{ où } d\vec{V}(M) = \mu \overrightarrow{dl} \; ; \; \mu \equiv \text{densité linéique } \mu = \mu(x)$$

$$\text{et } \mathscr{M}_0 = \int_{\Gamma} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{V}(M)$$

b - 2) Si on a une distribution surfacique de vecteurs, avec une densité surfacique σ tel que le vecteur infinitésimal $d\vec{V}(M) = \sigma \overrightarrow{dS}$, $\sigma = \sigma(x, y)$, et $\overrightarrow{dS}$ l'élément de surface entourant le point M, alors le torseur est caractérisé par :

$$\vec{R} = \iint_{(\Sigma)} d\vec{V}(M)$$

$$\mathscr{M}_0 = \iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{V}(M)$$

b - 3) Avec une répartition volumique de densité ρ, le vecteur élémentaire est $d\vec{V}(M) = \rho \overrightarrow{d\tau}$, $\rho = \rho(x, y, z)$ et le torseur est caractérisé par :

$$\vec{R} = \iiint_{(V)} d\vec{V}(M)$$

$$\mathscr{M}_0 = \iiint_{(V)} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{V}(M)$$