Fonctions de plusieurs variables

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 ** I

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

1. $\frac{xy}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$
2. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$
3. $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ en $(0,0)$
4. $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$ en $(0,0)$
5. $\frac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$ en $(0,0)$
6. $\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$ en $(0,0)$
7. $\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(0,0,0)$
8. $\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(2,-2,0)$

Correction ▼ [005887]

Exercice 2 *** I

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Montrer que f est de classe C^1 (au moins) sur $\mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [005888]

Exercice 3 *** I

Soit $f(x,y)=\begin{cases}y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0\\ 0 \text{ si } y=0\end{cases}$.

Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe C^1. Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et sont différents.

Correction ▼ [005889]

Exercice 4 **

Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (e^x-e^y,x+y)\end{array}$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Correction ▼ [005890]

Exercice 5 ***

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que l'équation $y^{2n+1}+y-x=0$ définit implicitement une fonction φ sur $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$, $[y^{2n+1}+y-x=0\Leftrightarrow y=\varphi(x)]$.

Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\int_0^2 \varphi(t)\,dt$.

Correction ▼ [005891]

Exercice 6 ***

Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction implicitement définie sur un voisinage de 0 par l'égalité $e^{x+y}+y-1=0$.

Correction ▼ [005892]

Exercice 7 *

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que f est positivement homogène de degré r (r réel donné) si et seulement si $\forall\lambda\in]0,+\infty[$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f(\lambda x)=\lambda^r f(x)$.
Montrer pour une telle fonction l'identité d'EULER :

$$\forall x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n\ \sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=rf(x).$$

Correction ▼ [005893]

Exercice 8 ** I

Extremums des fonctions suivantes :

1. $f(x,y)=x^3+3x^2y-15x-12y$
2. $f(x,y)=-2(x-y)^2+x^4+y^4$.

Correction ▼ [005894]

Exercice 9 *** I

Soit $f\ :\ \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array}$. Montrer que f est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ et déterminer sa différentielle.

Correction ▼ [005895]

Exercice 10 *

Déterminer $\text{Max}\{|\sin z|,\ z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant 1\}$.

Correction ▼ [005896]

Exercice 11 **

Les formes différentielles suivantes sont elles exactes ? Si oui, intégrer et si non chercher un facteur intégrant.

1. $\omega=(2x+2y+e^{x+y})(dx+dy)$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $\omega=\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$ sur $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y>x\}$
3. $\omega=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}-ydy$
4. $\omega=\frac{1}{x^2y}dx-\frac{1}{xy^2}dy$ sur $(]0,+\infty[)^2$ (trouver un facteur intégrant non nul ne dépendant que de x^2+y^2).

Correction ▼ [005897]

Exercice 12 *** I

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1. $2\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=0$ en posant $u=x+y$ et $v=x+2y$.
2. $x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=0$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ en passant en polaires.
3. $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ en posant $x=u$ et $y=uv$.

Correction ▼ [005898]

Exercice 13 **

Déterminer la différentielle en tout point de $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x.y \end{array}$ et $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\wedge y \end{array}$.

Correction ▼ [005899]

Exercice 14 **

Soit $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé et $B=\{x\in E/\ \|x\|<1\}$. Montrer que $f: \begin{array}{rcl} E & \to & B \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+\|x\|} \end{array}$ est un homéomorphisme.

Correction ▼ [005900]

Exercice 15 **

$E=\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Montrer que $f: \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\|_2 \end{array}$ est différentiable sur $E\setminus\{0\}$ et préciser df. Montrer que f n'est pas différentiable en 0.

Correction ▼ [005901]

Exercice 16 ***

Maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle.

Correction ▼ [005902]

Exercice 17 *

Minimum de $f(x,y)=\sqrt{x^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}$, a réel donné.

Correction ▼ [005903]

Exercice 18 ***

Trouver une application non constante $f\ :\ ]-1,1[\to\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que l'application g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y)=f\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)$ ait un laplacien nul sur un ensemble à préciser. (On rappelle que le laplacien de g est $\Delta g=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$. Une fonction de laplacien nul est dite harmonique.)

Correction ▼ [005904]

Exercice 19 *** I

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de classe C^2 dont la différentielle en tout point est une rotation. Montrer que f est une rotation affine.

Correction ▼ [005905]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. f est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   Pour $x\neq 0$, $f(x,0)=0$. Quand x tend vers 0, le couple $(x,0)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,0)$ tend vers 0. Donc, si f a une limite réelle en 0, cette limite est nécessairement 0.
   Pour $x\neq 0$, $f(x,x)=\frac{1}{2}$. Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $\frac{1}{2}\neq 0$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   Pour $(x,y)\neq(0,0)$, $|f(x,y)|=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\frac{|xy|}{x^2+y^2}\times|xy|\leqslant\frac{1}{2}|xy|$. Comme $\frac{1}{2}|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, il en est de même de f. $f(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.
3. f est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   Pour $y\neq 0$, $f(0,y)=\frac{y^3}{y^4}=\frac{1}{y}$. Quand y tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(0,y)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(0,y)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.
4. f est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
   Pour $x\neq 0$, $f(x,x)=\frac{\sqrt{2x^2}}{2|x|\sqrt{|x|}}=\frac{1}{\sqrt{2|x|}}$.Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.
5. f est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,-x),\ x\in\mathbb{R}\}$.
   Pour $x\neq 0$, $f(x,-x+x^3)=\frac{(x+x^2-x^3)(-x+(-x+x^2)^2)}{x^3}\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{1}{x}$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(x,-x+x^3)$ tend vers $(0,0$ et $f(x,-x+x^3)$ tend vers $-\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.
6. f est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),\ x\in\mathbb{R}\}$.
   $\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}\underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim}\frac{(\sqrt{|xy|})^2}{2|y|}=\frac{|x|}{2}$ et donc f tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.
7. f est définie sur $\mathbb{R}^3$ privé du cône de révolution d'équation $x^2-y^2+z^2=0$.
   $f(x,0,0)=\frac{1}{x}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0,0)$.
8. $f(2+h,-2+k,l)=\frac{h+k}{h^2-k^2+l^2+4h+4k}=g(h,k,l)$. $g(h,0,0)$ tend vers $\frac{1}{4}$ quand h tend vers 0 et $g(0,0,l)$ tend vers $0\neq\frac{1}{4}$ quand l tend vers 0. Donc, f n'a pas de limite réelle quand (x,y,z) tend vers $(2,-2,0)$.

Correction de l'exercice 2 ▲

• f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
• f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
• **Continuité en** $(0,0)$**.** Pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\frac{|xy||x^2-y^2|}{x^2+y^2}\leqslant|xy|\times\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=|xy|.$$

Comme $|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, on a donc $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}}f(x,y)=f(0,0)$.

On en déduit que f est continue en $(0,0)$ et finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$f \text{ est de classe } C^0 \text{ au moins sur } \mathbb{R}^2.$$

• **Dérivées partielles d'ordre** 1 **sur** $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$**.** f est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

D'autre part, pour $(x,y)\neq(0,0)$ $f(x,y)=-f(y,x)$. Donc pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

• **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0,$$

et donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Ainsi, f admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

• **Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{|y||x^4+4x^2y^2-y^4|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y|\frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y|\frac{2x^4+4x^2y^2+2y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$, on en déduit que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et finalement sur $\mathbb{R}^2$. Il en est de même de la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on a montré que

$$\boxed{f \text{ est au moins de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

On pose $D = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$ puis $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus D$.
• f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
• f est de classe C^1 sur Ω en vertu de théorèmes généraux et pour $(x,y) \in \Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

• Etudions la continuité de f en $(0,0)$. Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \begin{cases} y^2\left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant \begin{cases} y^2 \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant y^2.$$

Comme y^2 tend vers 0 quand (x,y) tend vers 0, $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$ et donc f est continue en $(0,0)$ puis

$$f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0} = \frac{0-0}{x-x_0} = 0.$$

Donc $\frac{f(x,x_0)-f(x_0,0)}{x-x_0}$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0$. Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}.$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $y \neq 0$,

$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0} = \frac{y^2\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)}{y} = y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right).$$

On en déduit que $\left|\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}\right| \leqslant |y|$ puis que $\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}$ tend vers 0 quand y tend vers 0. Par suite, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = 0$. Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}.$$

• Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\right| = \begin{cases} |y|\left|\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant |y|.$$

Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $|y|$ tend vers 0 et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ quand (x,y) tend vers $(x_0,0)$. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est donc continue en $(x_0,0)$ et finalement

$$\text{la fonction } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.$$

• Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0,0)$, x_0 réel donné. Supposons tout d'abord $x_0 = 0$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| = \begin{cases} \left|2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant 2|y| + |x|.$$

Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $|x|+2|y|$ tend vers 0 et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.
Supposons maintenant $x_0 \neq 0$. Pour $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) = 2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right) - x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$. Quand y tend vers 0, $2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)$ tend vers 0 car $\left|2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)\right|$ et $x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$ n'a pas de limite réelle car $x_0 \neq 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$ n'a pas de limite quand y tend vers 0 et la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(x_0,0)$ si $x_0 \neq 0$. On a montré que

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \Omega \cup \{(0,0)\}.$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0.$$

Donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$.
• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Pour $y \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \frac{y\cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y} = 1.$$

Donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tend vers 1 quand y tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$. On a montré que $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont différents. D'après le théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur $\Omega \cup \{(0,0)\}$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\varphi(x,y)=(z,t) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^x-e^y=z \\ x+y=t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=t-x \\ e^x-e^{t-x}=z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=t-x \\ (e^x)^2-ze^x-e^t=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=t-x \\ e^x=z-\sqrt{z^2+4e^t} \text{ ou } e^x=z+\sqrt{z^2+4e^t} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^x=z+\sqrt{z^2+4e^t} \\ y=t-x \end{array}\right. \quad (\text{car } z-\sqrt{z^2+4e^t}<z-\sqrt{z^2}=z-|z|\leqslant 0)$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\ln(z+\sqrt{z^2+4e^t}) \\ y=t-\ln(z+\sqrt{z^2+4e^t}) \end{array}\right. \quad (\text{car } z+\sqrt{z^2+4e^t}>z+\sqrt{z^2}=z+|z|\geqslant 0).$$

Ainsi, tout élément $(z,t)\in\mathbb{R}^2$ a un antécédent et un seul dans $\mathbb{R}^2$ par φ et donc φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

La fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de jacobien $J_\varphi(x,y)=\begin{vmatrix} e^x & -e^y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=e^x+e^y$. Le jacobien de φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. En résumé, φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et le jacobien de φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. On sait alors que

$$\boxed{\varphi \text{ est un } C^1\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R}^2 \text{ sur lui-même.}}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $f_x : y\mapsto y^{2n+1}+y-x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{y\to-\infty} f_x(y), \lim_{y\to+\infty} f_x(y)[=\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f_x(y)=0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\varphi(x)$.

La fonction $f : (x,y)\mapsto y^{2n+1}+y-x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et de plus, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(2n+1)y^{2n}+1\neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction φ implicitement définie par l'égalité $f(x,y)=0$ est dérivable en tout réel x et de plus, en dérivant l'égalité $\forall x\in\mathbb{R}$, $(\varphi(x))^{2n+1}+\varphi(x)-x=0$, on obtient $\forall x\in\mathbb{R}$, $(2n+1)\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n}+\varphi'(x)-1=0$ et donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi'(x)=\frac{1}{(2n+1)(\varphi(x))^{2n}+1}.$$

Montrons par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, la fonction φ est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- C'est vrai pour $p=1$.
- Soit $p\geqslant 1$. Supposons que la fonction φ soit p fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $\varphi'=\frac{1}{(2n+1)\varphi^{2n}+1}$ est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit

que la fonction φ est $p+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a montré par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, la fonction φ est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc que

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Calculons maintenant $I=\int_0^2 \varphi(t)\,dt$. On note tout d'abord que, puisque $0^{2n+1}+0-0=0$, on a $\varphi(0)=0$ et puisque $1^{2n+1}+1-2=0$, on a $\varphi(2)=1$.

Maintenant, pour tout réel x de $[0,2]$, on a $\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}+\varphi'(x)\varphi(x)-x\varphi'(x)=0$ (en multipliant par $\varphi'(x)$ les deux membres de l'égalité définissant $\varphi(x)$) et en intégrant sur le segment $[0,2]$, on obtient

$$\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx + \int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\,dx - \int_0^2 x\varphi'(x)\,dx = 0\ (*).$$

Or, $\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx = \left[\frac{(\varphi(x))^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^2 = \frac{1}{2n+2}$. De même, $\int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\,dx = \left[\frac{(\varphi(x))^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}$ et donc $\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx + \int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2n+2}$. D'autre part, puisque les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \varphi(x)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,2]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$-\int_0^2 x\varphi'(x)\,dx = [-x\varphi(x)]_0^2 + \int_0^2 \varphi(x)\,dx = -2 + I.$$

L'égalité $(*)$ s'écrit donc $\frac{n+2}{2n+2} - 2 + I = 0$ et on obtient $I = \frac{3n+2}{2n+2}$.

$$\boxed{\int_0^2 \varphi(x)\,dx = \frac{3n+2}{2n+2}.}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_x : y \mapsto e^{x+y} + y - 1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{y\to-\infty} f_x(y), \lim_{y\to+\infty} f_x(y)[= \mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f_x(y) = 0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\varphi(x)$.
La fonction $f : (x,y) \mapsto e^{x+y} + y - 1$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et de plus, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x+y} + 1 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction φ implicitement définie par l'égalité $f(x,y) = 0$ est dérivable en tout réel x et de plus, en dérivant l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x+\varphi(x)} + \varphi(x) - 1 = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)} + \varphi'(x) = 0$ ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -\frac{e^{x+\varphi(x)}}{e^{x+\varphi(x)}+1}\ (*).$$

On en déduit par récurrence que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier admet en 0 un développement limité d'ordre 3. Déterminons ce développement limité.
1ère solution. Puisque $e^{0+0} + 0 - 1 = 0$, on a $\varphi(0) = 0$. L'égalité $(*)$ fournit alors $\varphi'(0) = -\frac{1}{2}$ et on peut poser $\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}x + ax^2 + bx^3 + o(x^3)$. On obtient

$$\begin{aligned}
e^{x+\varphi(x)} &\underset{x\to 0}{=} e^{\frac{x}{2}+ax^2+bx^3+o(x^3)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(\frac{x}{2} + ax^2 + bx^3\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + ax^2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \left(a + \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(b + \frac{a}{2} + \frac{1}{48}\right)x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

L'égalité $e^{x+\varphi(x)} + \varphi(x) - 1 = 0$ fournit alors $a + \frac{1}{8} + a = 0$ et $b + \frac{a}{2} + \frac{1}{48} + b = 0$ ou encore $a = -\frac{1}{16}$ et $b = \frac{1}{192}$.
2ème solution. On a déjà $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$. En dérivant l'égalité $(*)$, on obtient

$$\varphi''(x) = -\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)}+1) - (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)})}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2} = -\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2},$$

et donc $\frac{\varphi''(0)}{2} = -\frac{\frac{1}{2}}{2\times 2^2} = -\frac{1}{16}$. De même,

$$\varphi^{(3)}(x) = -\varphi''(x)\frac{e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2} - (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}\frac{(1+\varphi'(x))}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2} + (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}\frac{2(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^3},$$

et donc $\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\times\frac{1/2}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{192}$. La formule de TAYLOR-YOUNG refournit alors

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{384} + o(x^3).}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

On dérive par rapport à λ les deux membres de l'égalité $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$ et on obtient

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda > 0,\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) = r\lambda^{r-1} f(x),$$

et pour $\lambda = 1$, on obtient

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = r f(x).$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) est un point critique de f.

$$df_{(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 + 6xy - 15 = 0 \\ 3x^2 - 12 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{1}{4} \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -\frac{1}{4} \end{array} \right. .$$

Réciproquement, $r = 6x + 6y$, $t = 0$ et $s = 6x$ puis $rt - s^2 = -36x^2$. Ainsi, $(rt - s^2)\left(2, \frac{1}{4}\right) = (rt - s^2)\left(-2, -\frac{1}{4}\right) = -144 < 0$ et f n'admet pas d'extremum local en $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ ou $\left(-2, -\frac{1}{4}\right)$.

$\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum local sur } \mathbb{R}^2.}$

2. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si f admet un extremum local en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) est un point critique de f. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4(x-y) + 4x^3 = 0 \\ 4(x-y) + 4y^3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^3 + y^3 = 0 \\ -4(x-y) + 4x^3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in \left\{(0,0), \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)\right\}.$$

Réciproquement, f est plus précisément de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et

$r(x,y)t(x,y) - s^2(x,y) = (-4 + 12x^2)(-4 + 12y^2) - (4)^2 = -48x^2 - 48y^2 + 144x^2y^2 = 48(3x^2y^2 - x^2 - y^2)$

• $(rt - s^2)\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 48(12 - 2 - 2) > 0$. Donc f admet un extremum local en $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. Plus précisément, puisque $r\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 2 \times 12 - 4 = 20 > 0$, f admet un minimum local en $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. De plus, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x,y) - f\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) &= -2(x-y)^2 + x^4 + y^4 - 8 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8 \\ &\geqslant x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 2(x^2 + y^2) + 8 = (x^4 - 4x^2 + 4) + (y^4 - 4y^2 + 4) = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

et $f\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ est un minimum global.

• Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x, -y) = f(x, y)$ et donc f admet aussi un minimum global en $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ égal à 8.

• $f(0,0) = 0$. Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = 2x^4 > 0$ et donc f prend des valeurs strictement supérieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Pour $x \in \left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[\setminus \{0\}$, $f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$ et f prend des valeurs strictement inférieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Finalement, f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

$$\boxed{f \text{ admet un minimum global égal à 8, atteint en } \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right).}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\ \|$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On sait que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc pour $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de norme suffisamment petite, $A+H \in GL_n(\mathbb{R})$. Pour un tel H

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} = (A+H)^{-1}(I_n - (A+H)A^{-1}) = -(A+H)^{-1}HA^{-1}$$

puis

$$\begin{aligned}(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} &= -(A+H)^{-1}HA^{-1} + A^{-1}HA^{-1} = (A+H)^{-1}(-HA^{-1} + (A+H)A^{-1}HA^{-1}) \\ &= (A+H)^{-1}HA^{-1}HA^{-1}.\end{aligned}$$

Par suite, $\left\|f(A+H) - f(A) + A^{-1}HA^{-1}\right\| = \left\|(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\right\| \leqslant \left\|(A+H)^{-1}\right\| \left\|A^{-1}\right\|^2 \|H\|^2$.
Maintenant, la formule $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}{}^t(\text{com}(M))$, valable pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, et la continuité du déterminant montre que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\left\|(A+H)^{-1}\right\|$ tend vers $\left\|A^{-1}\right\|$ quand H tend vers 0. Par suite,

$$\lim_{H\to 0} \left\|(A+H)^{-1}\right\| \left\|A^{-1}\right\|^2 \|H\| = 0 \text{ et donc } \lim_{H\to 0} \frac{1}{\|H\|} \left\|(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\right\| = 0.$$

Comme l'application $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ est linéaire, c'est la différentielle de f en A.

$$\boxed{\forall A \in GL_n(\mathbb{R}),\ \forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ df_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Pour tout complexe z tel que $|z| \leqslant 1$,

$$|\sin(z)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sh}(|z|) \leqslant \text{sh}\, 1,$$

l'égalité étant obtenue effectivement pour $z = i$ car $|\sin(i)| = \left|\frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i}\right| = \frac{e - e^{-1}}{2} = \text{sh}(1)$.

$$\boxed{\text{Max}\{|\sin z|,\ z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1\} = \text{sh}(1).}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $P(x,y) = 2x + 2y + e^{x+y} = Q(x,y)$. Les fonctions P et Q sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Donc, d'après le théorème de SCHWARZ, ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ et comme $\frac{\partial P}{\partial y} = 2 + e^{x+y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, la forme différentielle ω est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$.
Soit f une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} df = \omega &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y + e^{x+y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y + e^{x+y} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) /\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{l} f(x,y) = x^2 + 2xy + e^{x+y} + g(y) \\ 2x + e^{x+y} + g'(y) = 2x + 2y + e^{x+y} \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{l} f(x,y) = x^2 + 2xy + e^{x+y} + g(y) \\ g(y) = y^2 + \lambda \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} /\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ f(x,y) = (x+y)^2 + e^{x+y} + \lambda. \end{aligned}$$

Les primitives de ω sur $\mathbb{R}^2$ sont les fonctions de la forme $(x,y)\mapsto (x+y)^2+e^{x+y}+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Remarque. On pouvait aussi remarquer immédiatement que si $f(x,y)=(x+y)^2+e^{x+y}$ alors $df=\omega$.

2. La forme différentielle ω est de classe C^1 sur $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y>x\}$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ car convexe. Donc, d'après le théorème de SCHWARZ, ω est exacte sur Ω si et seulement si ω est fermée sur Ω.
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x-y}+y\frac{1}{(x-y)^2}\right)=-\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{2y}{(x-y)^3}=-\frac{x+y}{(x-y)^3}=\frac{x+y}{(y-x)^3}$.
$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{(x-y)^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{y-x}-x\frac{1}{(y-x)^2}\right)=\frac{1}{(y-x)^2}+\frac{2x}{(y-x)^3}=\frac{x+y}{(y-x)^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right)$.
Donc ω est exacte sur l'ouvert Ω. Soit f une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
df=\omega &\Leftrightarrow \forall (x,y)\in\Omega,\ \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{y}{(x-y)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{(x-y)^2}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (x,y)\in\Omega,\ \left\{\begin{array}{l} f(x,y)=\frac{y}{x-y}+g(y)\\ \frac{x}{(x-y)^2}+g'(y)=\frac{x}{(x-y)^2}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall (x,y)\in\Omega,\ f(x,y)=\frac{y}{x-y}+\lambda.
\end{aligned}$$

Les primitives de ω sur Ω sont les fonctions de la forme $(x,y)\mapsto\frac{y}{x-y}+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

3. ω est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas étoilé. On se place dorénavant sur $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),\ x\in]-\infty,0]\}$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Sur Ω, ω est exacte si et seulement si ω est fermée d'après le théorème de SCHWARZ.
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}-y\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Donc ω est exacte sur Ω. Soit f une application de classe C^1 sur Ω.

$$\begin{aligned}
df=\omega &\Leftrightarrow \forall (x,y)\in\Omega,\ \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}-y\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (x,y)\in\Omega,\ \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+g(y)\\ \frac{y}{x^2+y^2}+g'(y)=\frac{y}{x^2+y^2}-y\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall (x,y)\in\Omega,\ f(x,y)=\frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2)-y^2)+\lambda.
\end{aligned}$$

Les primitives de ω sur Ω sont les fonctions de la forme $(x,y)\mapsto\frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2)-y^2)+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
Les fonctions précédentes sont encore des primitives de ω sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et donc ω est exacte sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

4. ω est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Donc ω est exacte sur $]0,+\infty[^2$ si et seulement si ω est fermée sur $]0,+\infty[^2$ d'après le théorème de SCHWARZ.
$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}\right)=\frac{1}{x^2y^2}$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right)=-\frac{1}{x^2y^2}$. Donc $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}\right)\neq\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right)$ et ω n'est pas exacte sur $]0,+\infty[^2$.
On cherche un facteur intégrant de la forme $h\ :\ (x,y)\mapsto g(x^2+y^2)$ où g est une fonction non nulle de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}g(x^2+y^2)\right)=\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)-\frac{2}{y^2}g'(x^2+y^2)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}g(x^2+y^2)\right)=-\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)+\frac{2}{x^2}g'(x^2+y^2)$.

$$\begin{aligned}
h\omega \text{ est exacte sur }]0,+\infty[^2 &\Leftrightarrow \forall (x,y)\in]0,+\infty[^2,\ \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)-\frac{2}{y^2}g'(x^2+y^2)=-\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)+\frac{2}{x^2}g'(x^2+y^2)\\
&\Leftrightarrow \forall (x,y)\in]0,+\infty[^2,\ \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2)-\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}g'(x^2+y^2)=0\\
&\Leftrightarrow \forall t>0,\ -tg'(t)+g(t)=0\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t>0,\ g(t)=\lambda t.
\end{aligned}$$

La forme différentielle $(x^2+y^2)\omega$ est exacte sur $]0,+\infty[^2$. De plus,

$$d\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\right)dy=(x^2+y^2)\omega.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Posons $f(x,y)=g(u,v)$ où $u=x+y$ et $v=x+2y$. L'application $(x,y)\mapsto(x+y,x+2y)=(u,v)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et en particulier un C^1-difféormorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(g(u,v))=\frac{\partial u}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\times\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}$$
De même, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}+2\frac{\partial g}{\partial v}$ et donc
$$2\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=2\frac{\partial g}{\partial u}+2\frac{\partial g}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}-2\frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial u}.$$
Par suite, $2\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=0\Leftrightarrow\frac{\partial g}{\partial u}=0\Leftrightarrow\exists h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v)=h(v)\Leftrightarrow\exists h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=h(x+2y)$.
$$\boxed{\text{Les solutions sont les } (x,y)\mapsto h(x+2y) \text{ où } h\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$
Par exemple, la fonction $(x,y)\mapsto\cos\sqrt{(x+2y)^2+1}$ est solution.
2. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Posons $f(x,y)=g(r,\theta)$ où $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. L'application $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)=(x,y)$ est un C^1-difféormorphisme de $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. De plus,
$$\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}(f(x,y))=\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$
et
$$\frac{\partial g}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}(f(x,y))=\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial f}{\partial y}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}.$$
Donc
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=0\Leftrightarrow\frac{\partial g}{\partial\theta}=0&\Leftrightarrow\exists h_1\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall(r,\theta)\in]0,+\infty[\times[0,2\pi[,\ g(r,\theta)=h_1(r)\\&\Leftrightarrow\exists h_1\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y)=h_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\\&\Leftrightarrow\exists h\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y)=h(x^2+y^2).\end{aligned}$$
$$\boxed{\text{Les solutions sont les } (x,y)\mapsto h(x^2+y^2) \text{ où } h\in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}).}$$
3. Soit f une fonction de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. D'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.
Soit $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R}&\rightarrow&]0,+\infty[\times\mathbb{R}\\(u,v)&\mapsto&(u,uv)=(x,y)\end{array}$. Donc si on pose $f(x,y)=g(u,v)$, on a $g=f\circ\varphi$.
Soit $(x,y,u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.
$$\varphi(u,v)=(x,y)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}u=x\\uv=y\end{array}\right.\ \left\{\begin{array}{l}u=x\\v=\frac{y}{x}\end{array}\right..$$
Ainsi, φ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur lui-même et sa réciproque est l'application
$$\varphi^{-1}\ :\ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R}&\rightarrow&]0,+\infty[\times\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&(x,\frac{y}{x})=(u,v)\end{array}.$$
De plus, φ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et son jacobien

$$J_\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. On sait alors que φ est un C^2-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui-même.

Puisque $g = f\circ\varphi$ et que φ est un C^2-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui-même, f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ si et seulement si g est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}\right) + \left(\frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial v} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Ensuite,

$$\begin{aligned} x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2y\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} + 2y\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial v} - \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{2y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ &= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \forall(u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists h\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall(u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = h(v) \\ &\quad \exists(h,k)\in(C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall(u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ g(u,v) = uh(v)+k(v) \\ &\quad \exists(h,k)\in(C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall(x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ f(x,y) = xh(xy)+k(xy). \end{aligned}$$

Les fonctions solutions sont les $(x,y)\mapsto xh(xy)+k(xy)$ où h et k sont deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 13 ▲

On munit $(\mathbb{R}^3)^2$ de la norme définie par $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $\|(x,y)\| = \text{Max}\{\|h\|_2, \|k\|_2\}$.

- Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}^3)^2$. Pour $(h,k)\in(\mathbb{R}^3)^2$,

$$f((a,b)+(h,h)) = (a+h).(b+k) = a.b + a.h + b.k + h.k,$$

et donc $f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) = (a.h+b.k)+h.k$. Maintenant l'application $L\ :\ (h,k)\mapsto a.h+b.k$ est linéaire et de plus, pour $(h,k)\neq(0,0)$,

$$|f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) - L((h,k))| = |h.k| \leqslant \|h\|_2\|k\|_2 \leqslant \|(h,k)\|^2,$$

et donc $\frac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) - L((h,k))| \leqslant \|(h,k)\|$ puis

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) - L((h,k))| = 0.$$

Puisque l'application $(h,k)\mapsto a.h+b.k$ est linéaire, on en déduit que f est différentiable en (a,b) et que $\forall(h,k)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $df_{(a,b)}(h,k) = a.h+b.k$.

La démarche est analogue pour le produit vectoriel :

$$\frac{1}{\|(h,k)\|}\|(a+h)\wedge(b+k) - a\wedge b - a\wedge h - b\wedge k\|_2 = \frac{\|h\wedge k\|_2}{\|(h,k)\|} \leqslant \frac{\|h\|_2\|k\|_2}{\|(h,k)\|} \leqslant \|(h,k)\|.$$

Puisque l'application $(h,k) \mapsto a\wedge h + b\wedge k$ est linéaire, on en déduit que g est différentiable en (a,b) et que $\forall (h,k) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $dg_{(a,b)}(h,k) = a\wedge h + b\wedge k$.

Correction de l'exercice 14 ▲

• Pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < \frac{\|x\|+1}{\|x\|+1} = 1$. Donc f est bien une application de E dans B.

• Si $y = 0$, pour $x \in E$, $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1+\|x\|}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Soit alors $y \in B\setminus\{0\}$. Pour $x \in E$,

$$f(x) = y \Rightarrow x = (1+\|x\|)y \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}/\ x = \lambda y.$$

Donc un éventuel antécédent de y est nécessairement de la forme λy, $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda y) = \frac{\lambda}{1+|\lambda|\|y\|}y$ et donc

$$\begin{aligned} f(\lambda y) = y &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{1+|\lambda|\|y\|} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1+|\lambda|\|y\| \\ &\Leftrightarrow (\lambda \geqslant 0 \text{ et } (1-\|y\|)\lambda = 1) \text{ ou } (\lambda < 0 \text{ et } (1+\|y\|)\lambda = 1) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1-\|y\|} \text{ (car } \|y\| < 1). \end{aligned}$$

Dans tous les cas, y admet un antécédent par f et un seul à savoir $x = \frac{1}{1-\|y\|}y$. Ainsi,

$$f \text{ est bijective et } \forall x \in B,\ f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|}x.$$

• On sait que l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Donc l'application $x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^2$. L'application $x \mapsto \frac{1}{1-\|x\|}$ est continue sur B pour les mêmes raisons. Donc les applications f et f^{-1} sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et B respectivement et on a montré que

$$\boxed{\text{l'application } f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & B \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+\|x\|} \end{array} \text{ est un homéomorphisme.}}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

1ère solution. Pour $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour tout $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

On en déduit que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et pour $x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et $h \in \mathbb{R}^n$

$$df_x(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i = \frac{1}{\|x\|_2}\sum_{i=1}^n x_ih_i = \frac{x|h}{\|x\|_2}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ \forall h \in \mathbb{R}^n,\ df_x(h) = \frac{x|h}{\|x\|_2}.}$$

2 ème solution. Soit $x \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Pour $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x+h\|_2 - \|x\|_2 = \frac{(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(\|x+h\|_2+\|x\|_2)}{\|x+h\|_2+\|x\|_2} = \frac{2(x|h)+\|h\|_2^2}{\|x+h\|_2+\|x\|_2},$$

puis

$$\|x+h\|_2-\|x\|_2-\frac{x|h}{\|x\|_2}=\frac{2(x|h)+\|h\|_2^2}{\|x+h\|_2+\|x\|_2}-\frac{x|h}{\|x\|_2}=\frac{-(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)+\|x\|_2\|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}.$$

Maintenant, on sait que l'application $x\mapsto\|x\|_2$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. On en déduit que $\frac{1}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}\underset{h\to0}{\sim}\frac{1}{2\|x\|_2^2}$ et aussi que $\|x+h\|_2-\|x\|_2$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Ensuite, puisque $|(x|h)|\leqslant\|x\|_2\|h\|_2$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ), on a $x|h\underset{h\to0}{=}O(\|h\|_2)$ puis $(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)\underset{h\to0}{=}o(\|h\|_2)$.
Finalement, $\frac{-(\|x+h\|_2-\|x\|_2)(x|h)+\|x\|_2\|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2+\|x\|_2)\|x\|_2}\underset{h\to0}{=}o(\|h\|_2)$ et donc

$$\|x+h\|_2\underset{h\to0}{=}\|x\|_2+\frac{x|h}{\|x\|_2}+o(\|h\|_2).$$

Puisque l'application $h\mapsto\frac{x|h}{\|x\|_2}$ est linéaire, on a redémontré que f est différentiable en tout x de $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et que $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $\forall h\in\mathbb{R}^n$, $df_x(h)=\frac{x|h}{\|x\|_2}$.
Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une forme linéaire.

$$\frac{1}{\|h\|_2}(\|0+h\|_2-\|0\|_2-L(h))=1-L\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right).$$

Supposons que cette expression tende vers 0 quand h tend vers 0. Pour u vecteur non nul donné et t réel non nul, l'expression $1-L\left(\frac{tu}{\|tu\|_2}\right)=1-\frac{t}{|t|}L\left(\frac{u}{\|u\|_2}\right)$ tend donc vers 0 quand t tend vers 0. Mais si t tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient $L(u)=\|u\|_2$ et si t tend vers 0 par valeurs inférieures, on obtient $L(u)=-\|u\|_2$ ce qui est impossible car $u\neq0$. Donc f n'est pas différentiable en 0.

Correction de l'exercice 16 ▲

On pose $BC=a$, $CA=b$ et $AB=c$ et on note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC. Soit M un point intérieur au triangle ABC. On note I, J et K les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. On pose $u=$ aire de MBC, $v=$ aire de MCA et $w=$ aire de MAB. On a

$$d(M,(BC))\times d(M,(CA))\times d(M,(AB))=MI\times MJ\times MK=\frac{2u}{a}\times\frac{2v}{b}\times\frac{2w}{c}=\frac{8}{abc}uv(\mathscr{A}-u-v).$$

Il s'agit alors de trouver le maximum de la fonction $f\ :\ (u,v)\mapsto uv(\mathscr{A}-u-v)$ sur le domaine

$$T=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u\geqslant0,\ v\geqslant0\text{ et }u+v\leqslant\mathscr{A}\right\}.$$

T est un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet :
- $\forall(u,v)\in T^2$, $\|(u,v)\|_1=u+v\leqslant\mathscr{A}$ et donc T est bornée.
- Les applications $\varphi_1\ :\ (u,v)\mapsto u$, $\varphi_2\ :\ (u,v)\mapsto v$ et $\varphi_3\ :\ (u,v)\mapsto u+v$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant que formes
linéaires sur un espace de dimension finie. Donc les ensembles $P_1=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u\geqslant0\}=\varphi_1^{-1}([0,+\infty[)$, $P_2=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ v\geqslant0\}=\varphi_2^{-1}([0,+\infty[)$ et $P_3=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u+v\leqslant0\}=\varphi_3^{-1}(]-\infty,0])$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$
en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. On en déduit que $T=P_1\cap P_2\cap P_3$ est un
fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathbb{R}^2$.
Puisque T est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, T est un compact de $\mathbb{R}^2$ puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie et d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.
f est continue sur le compact T à valeurs dans $\mathbb{R}$ en tant que polynôme à plusieurs variables et donc f admet un maximum sur T.
Pour tout (u,v) appartenant à la frontière de T, on a $f(u,v)=0$. Comme f est strictement positive sur $\overset{\circ}{T}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u>0,\ v>0\text{ et }u+v<0\}$, f admet son maximum dans $\overset{\circ}{T}$. Puisque f est de classe C^1 sur $\overset{\circ}{T}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si f admet un maximum en $(u_0,v_0)\in\overset{\circ}{T}$, (u_0,v_0) est nécessairement un point critique de f.
Soit $(u,v)\in\overset{\circ}{T}$.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)=0\\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}v(\mathscr{A}-2u-v)=0\\ u(\mathscr{A}-u-2v)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2u+v=\mathscr{A}\\ u+2v=\mathscr{A}\end{array}\right.\Leftrightarrow u=v=\frac{\mathscr{A}}{3}.$$

Puisque f admet un point critique et un seul à savoir $(u_0,v_0)=\left(\frac{\mathscr{A}}{3},\frac{\mathscr{A}}{3}\right)$, f admet son maximum en ce point et ce maximum vaut $f(u_0,v_0)=\frac{\mathscr{A}^3}{27}$. Le maximum du produit des distances d'un point M intérieur au triangle ABC aux cotés de ce triangle est donc $\frac{8\mathscr{A}^3}{27abc}$.
Remarque. On peut démontrer que pour tout point M intérieur au triangle ABC, on a $M=\text{bar}\left((A,\text{aire de }MBC),(B,\text{aire de }M\right.$
Si maintenant M est le point en lequel on réalise le maximum, les trois aires sont égales et donc le maximum est atteint en G l'isobarycentre du triangle ABC.

Correction de l'exercice 17 ▲

Soient A et B les points du plan de coordonnées respectives $(0,a)$ et $(a,0)$ dans un certain repère $\mathscr{R}$ orthonormé. Soit M un point du plan de coordonnées (x,y) dans $\mathscr{R}$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)=\left\|\overrightarrow{MA}\right\|_2+\left\|\overrightarrow{MB}\right\|_2=MA+MB\geqslant AB \text{ avec égalité si et seulement si } M\in[AB].$$

Donc f admet un minimum global égal à $AB=a\sqrt{2}$ atteint en tout couple (x,y) de la forme $(\lambda a,(1-\lambda)a)$, $\lambda\in[0,1]$.

Correction de l'exercice 18 ▲

Puisque la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=-2\frac{\sin(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)&=-4\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)+4\frac{\sin^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)\\&=-4\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)+4\frac{1-\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right).\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-2\frac{\cos(2x)\operatorname{sh}(2y)}{\operatorname{ch}^2(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)&=-2\cos(2x)\frac{2\operatorname{ch}^3(2y)-4\operatorname{sh}^2(2y)\operatorname{ch}(2y)}{\operatorname{ch}^4(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)+4\frac{\cos^2(2x)\operatorname{sh}^2(2y)}{\operatorname{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)\\&=-4\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}^3(2y)}(-\operatorname{ch}^2(2y)+2)f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)+4\frac{\cos^2(2x)(\operatorname{ch}^2(2y)-1)}{\operatorname{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right).\end{aligned}$$

Donc, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\operatorname{ch}^2(2y)}{4}\Delta g(x,y)=-2\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)+\left(1-\frac{\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)}\right)f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right).$$

Maintenant, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $-1\leqslant\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\leqslant 1$ et d'autre part, l'expression $\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2\times)}=\cos(2x)$ décrit $[-1,1]$ quand x décrit $\mathbb{R}$. Donc $\left\{\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2\times)},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=[-1,1]$. Par suite,

$$\forall (x,y)\ \mathbb{R}^2,\ \Delta g(x,y)=0 \Leftrightarrow \forall t\in[-1,1],\ (1-t^2)f''(t)-2tf'(t)=0.$$

On cherche une application f de classe C^2 sur $]-1,1[$. Or $\left|\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right|=1\Leftrightarrow|\cos(2x)|=\operatorname{ch}(2y)\Leftrightarrow|\cos(2x)|=\operatorname{ch}(2y)=1\Leftrightarrow y=0$ et $x\in\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\ \mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(\frac{k\pi}{2},0\right),\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \Delta g(x,y)=0 &\Leftrightarrow \forall t\in]-1,1[,\ (1-t^2)f''(t)-2tf'(t)=0\\ &\Leftrightarrow \forall t\in]-1,1[,\ ((1-t^2)f')'(t)=0\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in]-1,1[,\ f'(t)=\frac{\lambda}{1-t^2}\\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall t\in]-1,1[,\ f(t)=\lambda\operatorname{Argth}t+\mu.\end{aligned}$$

De plus, f n'est pas constante si et seulement si $\mu=0$.

$$\boxed{\text{L'application } t\mapsto \operatorname{Argth}t \text{ convient.}}$$

Correction de l'exercice 19 ▲

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. La matrice jacobienne de f en (x,y) s'écrit $\begin{pmatrix}c(x,y) & -s(x,y)\\ s(x,y) & c(x,y)\end{pmatrix}$ où c et s sont deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $c^2+s^2=1$ $(*)$. Il s'agit dans un premier temps de vérifier que les fonctions c et s sont constantes sur $\mathbb{R}^2$.
Puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$. Ceci s'écrit encore $\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}-s\\ c\end{pmatrix}$ ou enfin

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\partial s}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial c}{\partial x}(x,y)\end{pmatrix}\ (**).$$

En dérivant $(*)$ par rapport à x ou à y, on obtient les égalités $c\frac{\partial c}{\partial x}+s\frac{\partial s}{\partial x}=0$ et $c\frac{\partial c}{\partial y}+s\frac{\partial s}{\partial y}=0$. Ceci montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial x}\\ \frac{\partial s}{\partial x}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial y}\\ \frac{\partial s}{\partial y}\end{pmatrix}$ sont orthogonaux au vecteur non nul $\begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}$ et sont donc colinéaires.
Mais l'égalité $(**)$ montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial x}\\ \frac{\partial s}{\partial x}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial y}\\ \frac{\partial s}{\partial y}\end{pmatrix}$ sont aussi orthogonaux l'un à l'autre.
Finalement, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, les deux vecteurs $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial s}{\partial x}(x,y)\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\frac{\partial c}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}$ sont nuls. On en déduit que les deux applications c et s sont constantes sur $\mathbb{R}^2$ et donc, il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne de f en (x,y) est $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.
Soit g la rotation d'angle θ prenant la même valeur que f en $(0,0)$. f et g ont mêmes différentielles en tout point et coïncident en un point. Donc $f=g$ et f est une rotation affine.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Soit } f\ :\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \text{ de classe } C^2 \text{ dont la différentielle en tout point est une rotation.}\\ \text{Alors } f \text{ est une rotation affine.}\end{array}}$$
