Chapitre 3

DIOPTRE SPHERIQUE
DANS L' APPROXIMATION DE GAUSS

I. Tracé des rayons à l'aide des lois de Descartes

II. Relation de conjugaison du dioptre sphérique

III. Vergence du dioptre sphérique

IV. Position des foyers

V. Construction des images

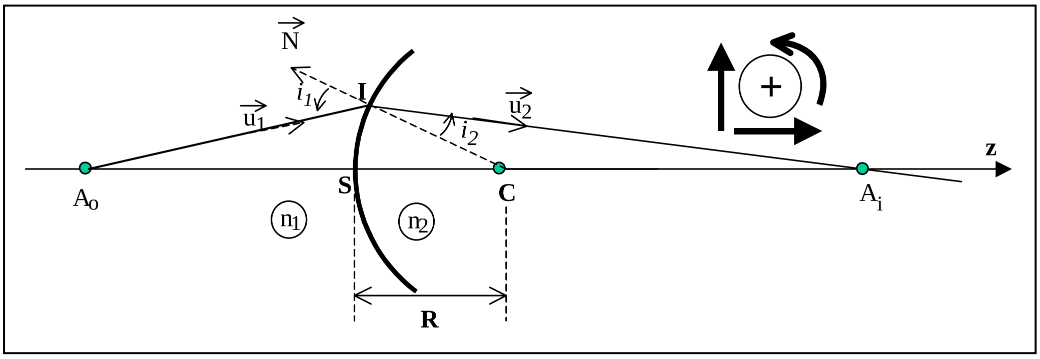
VI. Calcul du grandissement

VII. Relation de conjugaison avec origine aux foyers

VIII. Relation de conjugaison avec origine au centre de courbure

I. Tracé des rayons à l'aide des lois de Descartes

Un dioptre sphérique est une portion de surface sphérique séparant deux milieux d'indices différents, comme l'illustre schématiquement la figure ci-après, où S représente le sommet du dioptre et C son centre de courbure.



Lorsque les conditions de Gauss ne sont pas réalisées (autrement dit, les rayons ne sont pas faiblement inclinés par rapport à l'axe), il faut appliquer les lois de Snell-Descartes pour déterminer la marche des rayons à la traversée du dioptre. Les lois de Descartes relatives à la réfraction se résument dans l'expression suivante :

$$(n_1 \overrightarrow{u_1} - n_2 \overrightarrow{u_2}) = a \ \overrightarrow{N}.$$

Cette expression conduit à la relation suivante :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2,$$

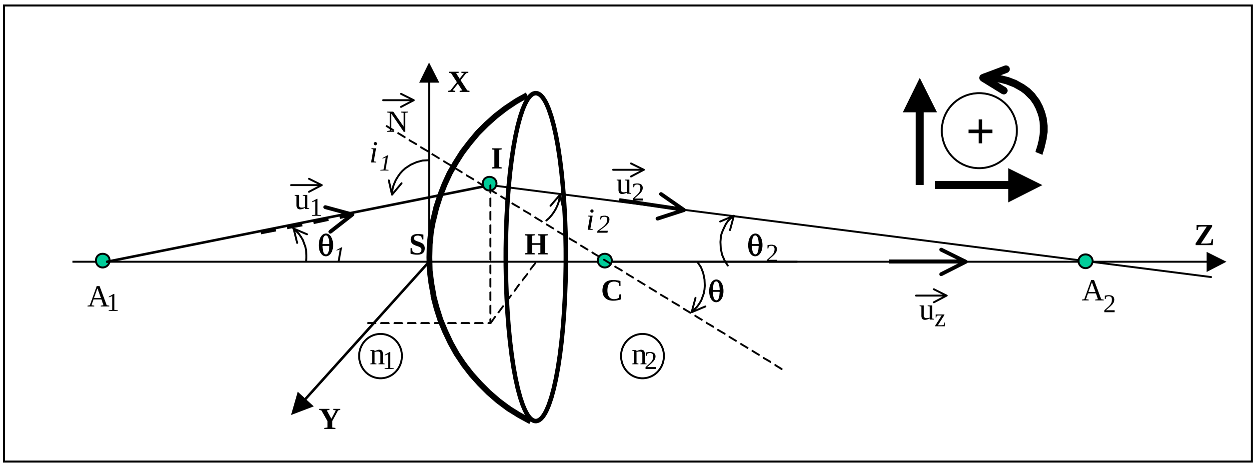
qui permet de déterminer l'angle de réfraction i_2 d'un rayon lumineux arrivant sur le dioptre avec un angle d'incidence $i_1 = (\overrightarrow{N}, \overrightarrow{u_1})$. Rappelons que l'angle d'incidence est l'angle que fait le rayon incident avec la normale $\overrightarrow{N}$ au point d'impact sur le dioptre. Ainsi, connaissant i_1, n_1 et n_2, on déduit

$$i_2 = Arc\sin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin i_1\right).$$

Mais ce calcul n'est relatif qu'à un seul rayon. La détermination de l'image d'un objet étendu par cette méthode est très longue, car il faut répéter ce type de calcul pour un grand nombre de rayons issus de tous les points de l'objet. Cette technique est surtout utilisée lorsque l'on veut simuler la trajectoire des rayons dans des instruments travaillant avec des grands angles d'ouverture tels que les appareils photo « grand angle ». Pour une bonne majorité de systèmes optiques, cette technique est superflue. On préfère généralement se placer dans les conditions de l'approximation de Gauss, en utilisant des rayons faiblement inclinés par rapport à l'axe optique.

II. Relation de conjugaison du dioptre sphérique

On considère le système schématisé dans la figure ci-après :



Dans le repère (S,X,Y,Z) on a

$$\theta_1 = (\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{u_1}) \qquad \theta_2 = (\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{u_2}) \qquad \theta = (\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{N})$$

$$I = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ \overline{SH} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \Leftarrow \boxed{\begin{matrix}\text{Direction}\\ \text{du rayon}\\ \text{incident}\end{matrix}} \qquad \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \Leftarrow \boxed{\begin{matrix}\text{Direction}\\ \text{du rayon}\\ \text{émergent}\end{matrix}} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{SC} \end{pmatrix} \Leftarrow \boxed{\begin{matrix}\text{Centre de}\\ \text{courbure}\end{matrix}}$$

$i_1 = (\overrightarrow{N}, \overrightarrow{u_1})$ et $i_2 = (\overrightarrow{N}, \overrightarrow{u_2})$ représentent les angles d'incidence et de réfraction. D'après la figure, $i_1 > 0$, $i_2 > 0$, $\theta_1 > 0$, $\theta_2 < 0$, $\theta < 0$. La loi de Snell-Descartes relative à la réfraction s'écrit :

$$(n_1 \overrightarrow{u_1} - n_2 \overrightarrow{u_2}) = a \ \overrightarrow{N} \quad \Rightarrow$$

$$a = (n_1 \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{N} - n_2 \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{N}) = n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2$$

Au premier ordre, on a $a = n_1 - n_2$, car les angles i_1 *et* i_2 sont en réalité très petits en raison de la faible inclinaison des rayons lumineux. Dans la figure ci-dessus, tous les angles ont été fortement grossis dans un souci de clarté de la figure. Ainsi, avec $a = n_1 - n_2$, on a :

$$n_1 \overrightarrow{u_1} - n_2 \overrightarrow{u_2} = (n_1 - n_2) \ \overrightarrow{N} = (n_1 - n_2) \ \frac{\overrightarrow{IC}}{IC} = (n_1 - n_2) \ \frac{\overrightarrow{IC}}{SC} \qquad \Rightarrow$$

$$n_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} - n_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \begin{pmatrix} -X \\ -Y \\ \overline{SC} - \overline{SH} \end{pmatrix} \approx \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \begin{pmatrix} -X \\ -Y \\ \overline{SC} \end{pmatrix} = (n_1 - n_2) \begin{pmatrix} -X / \overline{SC} \\ -Y / \overline{SC} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

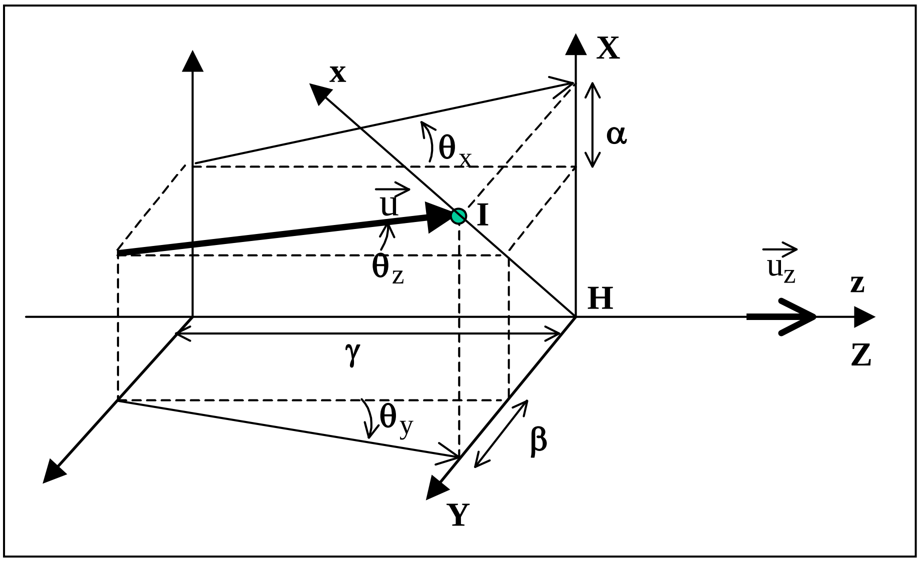
Ici, l'approximation de Gauss (rayons peu inclinés par rapport à l'axe) implique que

.

$$\boxed{\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_z} = \gamma_1 \approx 1, \ \ et \ \ \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_z} = \gamma_2 \approx 1.}$$

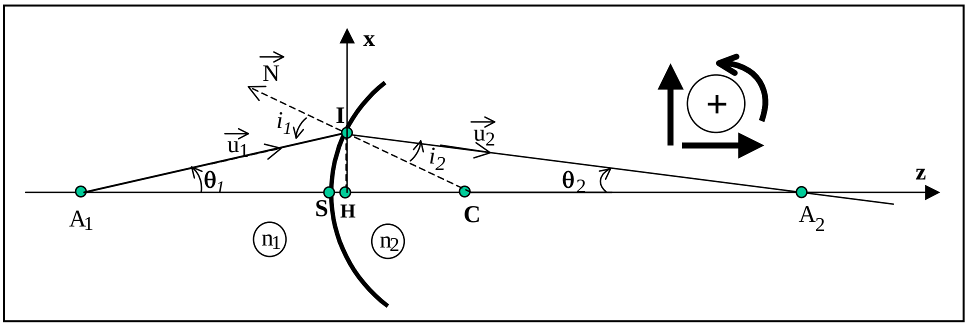
Dans cette situation le système d'équation (1) se réduit aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases} n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2 = -(n_1 - n_2)\dfrac{X}{\overline{\overline{SC}}} & (2a) \\ n_1\beta_1 - n_2\beta_2 = -(n_1 - n_2)\dfrac{Y}{\overline{\overline{SC}}} & (2b) \end{cases}$$



$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Du fait de la symétrie de révolution autour de l'axe Sz on peut se contenter d'examiner le problème dans le plan (méridien) défini par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\ et\ \overrightarrow{u_z}$. Cela revient à repérer le point d'impact *I* (du rayon incident sur le dioptre) par sa distance par rapport l'axe optique, que nous noterons x=HI. Dans ce plan (contenant l'axe HI) les vecteurs $\overrightarrow{u_1}\ et\ \overrightarrow{u_2}$ sont repérés par leurs angles inclinaison respectifs, $\theta_1\ et\ \theta_2$, par rapport à l'axe optique repéré par $\overrightarrow{u_z}$.



Ainsi, dans ce plan méridien (contenant l'axe optique), les équations (2a) et (2b) se réduisent à la seule équation qui suit :

$$n_1\theta_1 - n_2\theta_2 = -(n_1 - n_2)\frac{x}{\overline{\overline{SC}}}. \qquad (3)$$

* Par ailleurs, les rayons étant faiblement inclinés par rapport à l'axe optique, les angles θ_1 *et* θ_2 sont très petits. On peut donc confondre leur sinus et leur tangentes :

$$\tan\theta_1 = \frac{\overline{HI}}{\overline{A_1H}} \approx \sin\theta_1 = \frac{\overline{HI}}{\overline{A_1I}} \approx \theta_1 \quad , \qquad \tan\theta_2 = \frac{\overline{HI}}{\overline{A_2H}} \approx \sin\theta_2 = \frac{\overline{HI}}{\overline{A_2I}} \approx \theta_2 .$$

Ici on doit faire très attention aux signes des angles ; $\theta_1 > 0 \quad et \quad \theta_2 < 0$.

* D'autre part, le point S (sommet du dioptre) étant très voisin de H, on peut confondre ces deux points dans les expressions ci-dessus ;

$$\overline{A_1H} \approx \overline{A_1S} \ et \ \overline{A_2H} \approx \overline{A_2S} \ ,$$

qui prennent alors la forme suivante :

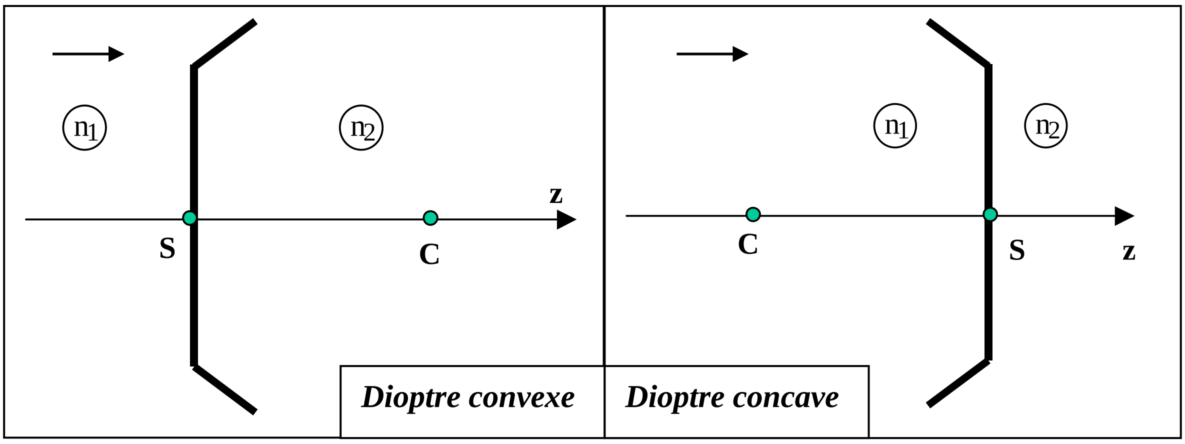
$$\theta_1 \approx \frac{\overline{HI}}{\overline{A_1S}} = \frac{x}{\overline{A_1S}} \quad et \quad \theta_2 \approx \frac{\overline{HI}}{\overline{A_2S}} = \frac{x}{\overline{A_2S}} \quad . \qquad (4)$$

En invoquant les relations (4), la relation (3) se met sous la forme suivante :

$$\boxed{\frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \qquad (5)}$$

La relation (5) constitue la ***relation de conjugaison*** du dioptre sphérique ***avec origine au sommet. Cette relation permet de déterminer la position d'une image (*** $\overline{SA_2}$) lorsqu'on connaît celle de l'objet ($\overline{SA_1}$) et les caractéristiques du dioptre. La quantité algébrique $\overline{SC}$ correspond au ***rayon de courbure du dioptre***.

Le dioptre sphérique utilisé dans l'approximation de Gauss est symbolisé de la manière suivante :



III. Vergence du dioptre sphérique

Le sens de propagation de la lumière est choisi du milieu d'indice n_1 vers le milieu d'indice n_2. Par définition, la ***vergence d'un dioptre sphérique*** est la quantité

$$\boxed{V = \frac{n_2 - n_1}{\overline{SC}}. \qquad (6)}$$

Elle s'évalue en **dioptries**, notées δ (ou metre^{-1})

Si $V>0$ le ***dioptre*** est ***convergent,*** et pour $V<0$ le ***dioptre*** est ***divergent.***

Remarque :

- La vergence s'exprime en fonction de quantités algébriques, $\Delta n = n_2 - n_1$ *et* $\overline{SC}$, dont les signes respectifs dépendent du sens de propagation de la lumière et des caractéristiques du dioptre. Mais la vergence V elle-même ne dépend pas du sens de propagation de la lumière. La vergence est une propriété intrinsèque du dioptre.
- Le dioptre plan peut être considéré comme un dioptre sphérique de rayon de courbure infini ($|\overline{SC}| = \infty \Rightarrow V = 0$). Sa relation de conjugaison se déduit donc immédiatement de celle du dioptre sphérique en faisant $\overline{SC} = \infty$ dans la relation (5) ; ce qui conduit à :

$$\boxed{\frac{n_2}{\overline{SA_2}} = \frac{n_1}{\overline{SA_1}} \qquad (7)}$$

IV. Position des foyers

VI.1. Foyer image

On désigne par ***foyer image F'*** l'endroit où se forme l'image d'un objet situé à l'infini :

$$A_1 \equiv \infty \;\Rightarrow\; A_2 \equiv F'$$

$$\frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \;\Rightarrow -\frac{n_2}{\overline{SF'}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} = -V \;\Rightarrow\; \overline{SF'} = \frac{n_2}{V}$$

La ***distance focale image*** du dioptre sphérique est définie par

$$\boxed{f' = \overline{SF'} = \frac{n_2}{V}.}$$

VI.2. Foyer objet

On désigne par ***foyer objet F*** le point situé sur l'axe principal du système, où l'on doit placer l'objet pour que son image se forme à l'infini : $A_1 \equiv F \;\Rightarrow\; A_2 \equiv \infty$

$$\frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} = \frac{n_1 - n_2}{\overline{SC}} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{\overline{SF}} = -V \quad \Rightarrow \quad \overline{SF} = -\frac{n_1}{V}$$

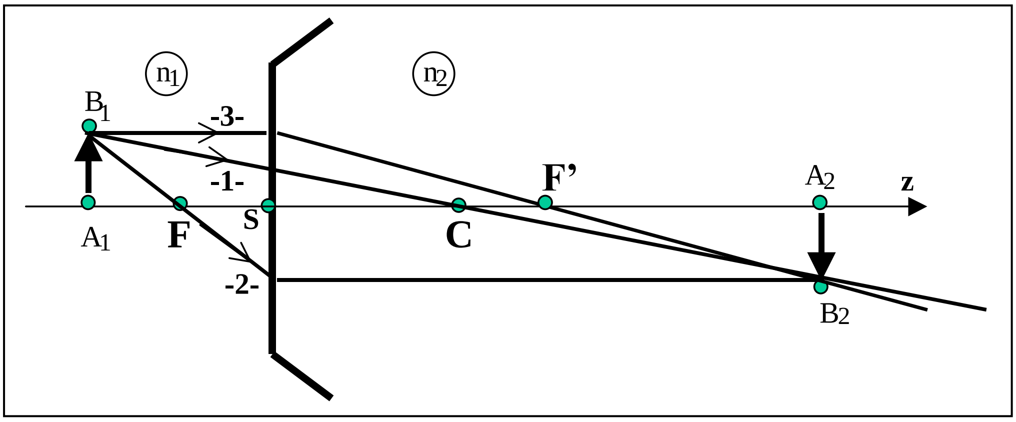
La ***distance focale objet*** du dioptre sphérique est définie par

$$\boxed{f = \overline{SF} = -\frac{n_1}{V}\,.}$$

Rem : *f* et *f'* sont des quantités algébriques liées par la relation $f' = -\frac{n_2}{n_1} f$

V. Construction des images

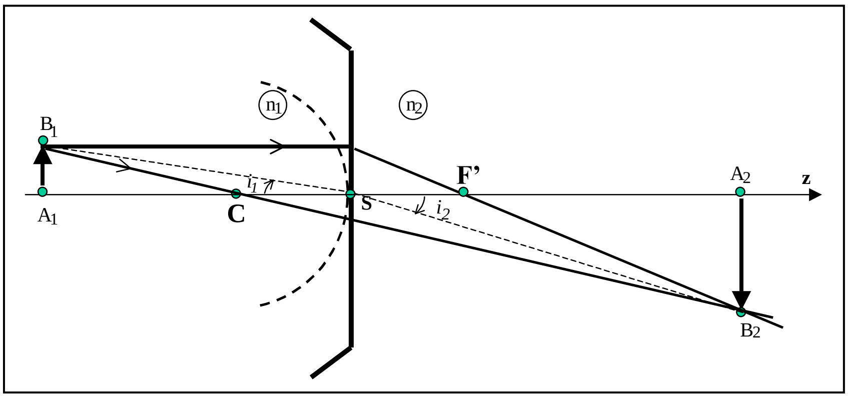
Pour construire l'image d'un objet, il suffit de construire la marche de deux rayons remarquables parmi les cas suivants :



- un rayon incident passant par le centre de courbure C n'est pas dévié (-1-)
- un rayon passant par le foyer objet F est réfracté parallèlement à l'axe (-2-)
- un rayon parallèle à l'axe émerge de manière à passer par le foyer image F' (-3-)
- Tout faisceau de rayons incidents parallèles convergent en un point, dit foyer ***image secondaire.*** Ce point appartient au plan focal image, et est obtenu en prenant l'intersection de ce plan avec le rayon non dévié passant par le centre de courbure.

VI. Calcul du grandissement

VI.1. Grandissement transversal



$n_1 > n_2 \;\; et \;\; \overline{SC} < 0$

$\Rightarrow \;\; V > 0$

$\tan i_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{SA_1}}$ &

$\tan i_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{SA_2}}$

$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ (Descartes)

Par définition le ***grandissement transversal*** s'écrit

Par définition le ***grandissement transversal*** s'écrit

$$\boxed{G_t = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}.}$$

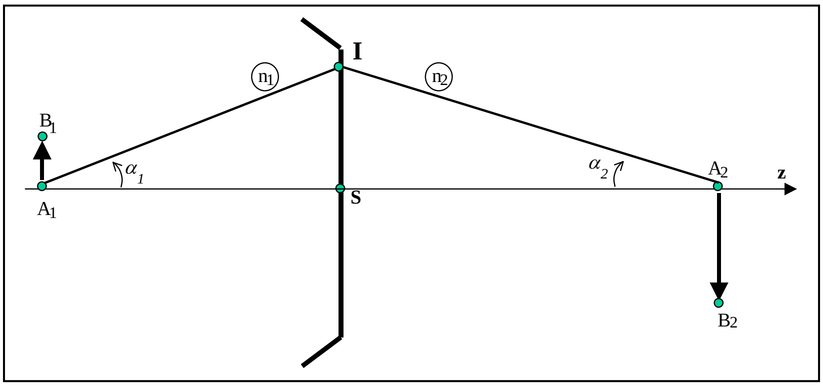
Pour des rayons peu inclinés, les angles i_1 *et* i_2 sont si petits qu'on peut confondre les sinus avec les tangentes, $\sin i_1 \approx \tan i_1 \approx i_1$. Dans cette situation, la loi de Descartes pour la réfraction peut se mettre sous la forme suivante :

$$n_1\, i_1 \approx n_2\, i_2 \Rightarrow$$

$$n_1 \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{SA_1}} = n_2 \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{SA_2}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{G_t = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{n_1}{n_2}\frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}} \qquad (8)}$$

VI.2. Grandissement angulaire



$$\tan\alpha_1 = \frac{\overline{SI}}{\overline{A_1S}} \approx \alpha_1 \qquad \&$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{\overline{SI}}{\overline{A_2S}} \approx \alpha_2$$

Par définition le ***grandissement angulaire*** s'écrit

$$\boxed{G_a = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} \qquad (9)}$$

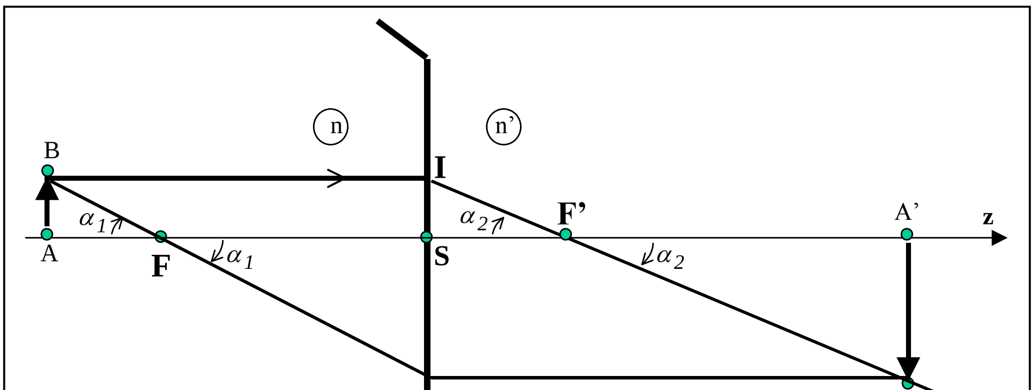
Remarque : En tenant compte de la relation (8), on peut écrire que

$$G_a = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \frac{n_1}{n_2}\frac{1}{G_t} \Rightarrow \quad \boxed{G_a G_t = n_1 / n_2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{n_1}{n_2} \quad \Rightarrow n_2\,\alpha_2\,\overline{A_2B_2} = n_1\,\alpha_1\,\overline{A_1B_1}}$$

On retrouve la relation des sinus d'Abbe pour des angles petits.

VII. Relation de conjugaison avec origine aux foyers



$$\tan\alpha_1 = -\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{SJ}}{\overline{FS}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{FS}} \;\Rightarrow\; \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = G_t$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{F'A'}} = -\frac{\overline{SI}}{\overline{SF'}} = -\frac{\overline{AB}}{\overline{SF'}} \;\Rightarrow\; \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{-\overline{SF'}} = G_t$$

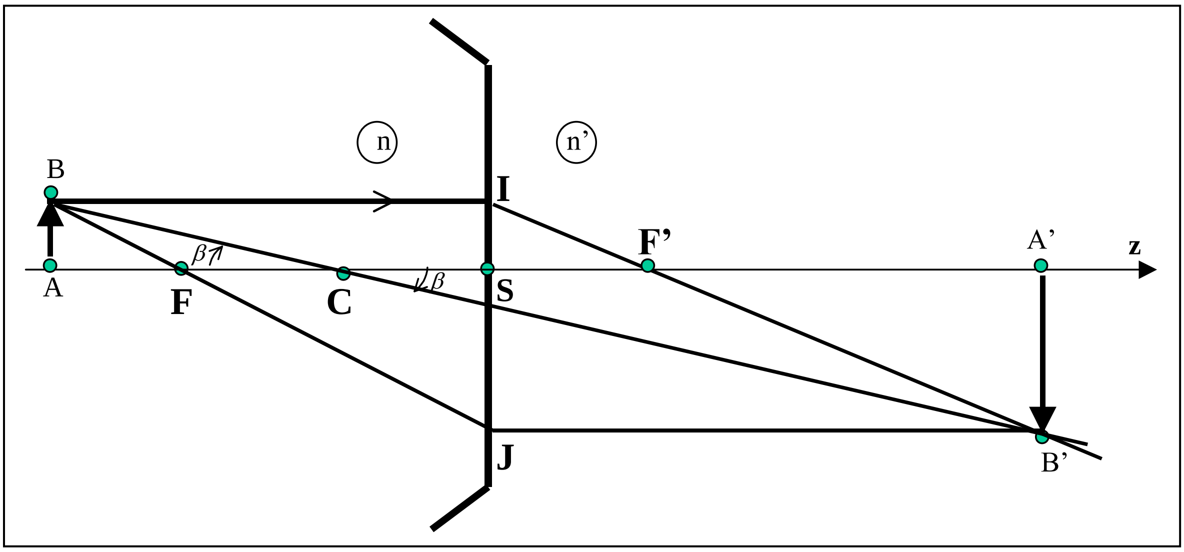
$$\Rightarrow\; \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{SF'}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{FA}\;\overline{F'A'} = \overline{FS}\;\overline{F'S'} = f\,f'. \qquad (10)}$$

Relation de conjugaison du dioptre sphérique ***avec origines aux foyers.***

$$\boxed{G_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'S}}}$$

VIII. Relation de conjugaison avec origine au centre de courbure



$$\tan\beta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} \;\Rightarrow\; \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = G_t = \frac{n}{n'}\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{n}{n'}\frac{\overline{SC}+\overline{CA'}}{\overline{SC}+\overline{CA}}$$

$$\Rightarrow\; n'\,\overline{CA'}(\overline{SC}+\overline{CA}) = n\,\overline{CA}(\overline{SC}+\overline{CA'})$$

En divisant les deux membres par $\overline{CA}\,\overline{CA'}\,\overline{CS}$ on obtient la relation suivante :

$$\frac{n}{\overline{CA}} - \frac{n'}{\overline{CA'}} = \frac{n-n'}{\overline{CS}} \qquad (11)$$

Relation de conjugaison du dioptre sphérique ***avec origine au centre de courbure.***

$$G_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}.$$