Groupe B

Résumé de cours : séries entières, Séries de Fourier

Série entière - rayon de convergence

- On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum_n a_n z^n$ où (a_n) est une suite de nombres complexes et où $z \in \mathbb{C}$. L'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série converge s'appelle le **domaine de convergence** de la série entière.

- **Lemme d'Abel :** Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < |z_0|$, la série $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente.

- On appelle **rayon de convergence** de la série entière

$$R = \sup\{\rho \geq 0;\ (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

- **Proposition :** Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
  - si $|z| < R$, la série $\sum_n a_n z^n$ converge absolument;
  - si $|z| > R$, la série $\sum_n a_n z^n$ diverge grossièrement (son terme général ne tend pas vers 0);
  - si $|z| = R$, alors on ne peut pas conclure en général.

- Le disque ouvert $D(0, R)$ est alors appelé **disque ouvert de convergence** de la série entière.

- **Corollaire (convergence normale) :** Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit $r \in]0, R[$. Alors la série $\sum_n a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $D(0, r)$. En particulier, la somme de la série entière est continue sur son disque ouvert de convergence.

- Pour calculer le rayon de convergence d'une série entière, on utilise souvent la règle de d'Alembert pour les séries dont l'énoncé est le suivant :

  Règle de d'Alembert : Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. Si u_{n+1}/u_n tend vers ℓ, alors
  - si $\ell > 1$, la série $\sum_n u_n$ diverge grossièrement;
  - si $\ell < 1$, la série $\sum_n u_n$ converge absolument.

  Lorsqu'on applique cette règle à une série entière $\sum_n a_n z^n$ en posant $u_n = |a_n z^n|$, on obtient que si $|a_{n+1}|/|a_n|$ converge vers ℓ, alors le rayon de convergence de la série entière est $1/\ell$.

Opérations sur les séries entières

On considère $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

- **Comparaison des rayons de convergence** : Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$. En particulier, si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.
- **Rayon de convergence de la série dérivée** : Le rayon de convergence de $\sum_n n a_n z^n$ est égal au rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$.

- **Somme de deux séries entières** : Le rayon de convergence de la série somme $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors

$$\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n \geq 0} a_n z^n + \sum_{n \geq 0} b_n z^n.$$

- On appelle **série entière produit** de $\sum_n a_n z^n$ et de $\sum_n b_n z^n$ la série entière $\sum_n c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

- **Proposition :** Le rayon de convergence R de la série produit $\sum_n c_n z^n$ de $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < \min(R_a, R_b)$, alors

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n = \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n \right).$$

Cas de la variable réelle

On s'intéresse désormais au cas où la variable ne peut plus prendre que des valeurs réelles, et nous noterons désormais les séries entières $\sum_n a_n x^n$. On s'intéresse à la régularité de la série entière à l'intérieur de son intervalle de convergence $]-R, R[$.

- **Théorème (intégration d'une série entière)** : Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit F une primitive de f. Alors, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$F(x) = F(0) + \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

- **Théorème (dérivation terme à terme)** : Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. De plus, pour tout $x \in]-R, R[$ et tout $k \geq 0$, on a

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

- **Théorème (expression des coefficients d'une série entière)** : Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors, pour tout $n \geq 0$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

- **Corollaire :** Si $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout $n \geq 0$, $a_n = b_n$.

Cas de la variable complexe

- **Théorème (dérivabilité de la variable complexe)** : Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors, pour tout $z_0 \in D(0, R)$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \sum_{n\geq 1} n a_n z_0^{n-1}$$

Développements en série entière

- Soit I un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est développable en série entière en 0 s'il existe $r > 0$ et une suite (a_n) tels que, pour tout $x \in]-r, r[$, on ait $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
- Une combinaison linéaire de fonctions développables en série entière est développable en série entière. Il en est de même de la dérivée ou d'une primitive d'une fonction développable en série entière.
- **Corollaire** : Soit I un intervalle contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est développable en série entière en 0, alors il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in]-r, r[$,

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Développements en séries entières usuels

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}, \ R = +\infty$$

$$\cos x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ R = +\infty$$

$$\sin x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ R = +\infty$$

$$\cosh x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ R = +\infty$$

$$\sinh x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ R = +\infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \ R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \ R = 1$$

$$\arctan(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \ R = 1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \ R = 1$$

Séries de Fourier

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et 2π-périodique.

- On appelle **coefficients de Fourier exponentiels** de f la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

On appelle **coefficients de Fourier trigonométriques** de f les deux suites $(a_n(f))_{n\geq 0}$ et $(b_n(f))_{n\geq 1}$ définies par

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt,\ n \geq 1$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt),\ n \geq 1.$$

- On appelle série **de Fourier** de f la série de fonctions

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int} = a_0(f) + \sum_{n\geq 1} (a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)).$$

Les sommes partielles de cette série seront notées

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt} = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)).$$

Théorèmes de convergence ponctuelle

- **Théorème de Jordan-Dirichlet :** Soit f une fonction C^1 par morceaux et 2π-périodique. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_n(f)(x)$ converge vers

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

où $f(x+0)$ (resp. $f(x-0)$) désigne la limite à droite (à gauche) de f en x.

- **Théorème de convergence normale** : Soit f une fonction C^1 et 2π-périodique. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.

Théorèmes de convergence en moyenne de Césaro

- **Théorème de Féjer** : Soit f une fonction continue et 2π-périodique. Alors les moyennes de Cesaro de la série de Fourier de f convergent uniformément vers f.

Autrement dit, si on note

$$C_n(f) = \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_n(f)}{n+1}$$

alors

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - C_n(f)\|_\infty = 0.$$

- **Corollaire (théorème de Weierstrass)** : Les polynômes trigonométriques sont denses dans l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques : pour toute fonction fcontinue et 2π-périodique, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que

$$\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Théorèmes de convergence en moyenne quadratique

- On définit un produit scalaire sur l'espace E des fonctions continues 2π-périodiques par

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Les fonctions (e^{inx}) forment une suite orthonormée pour ce produit scalaire. Nous noterons $\|\cdot\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire (norme de la convergence en moyenne quadratique).

- Notons P_n l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n, $P_n = \mathrm{vect}(e^{int};\ n \in \mathbb{Z})$. Si $f \in E$, alors $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur P_n. Par conséquent,

$$\|f - S_n(f)\|_2 = \inf\{\|f - P\|_2;\ P \in P_n\}.$$

- **Théorème de Parseval** : Si f est continue par morceaux et 2π-périodique, alors

$$\|f - S_n(f)\|_2 \to 0.$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \\ &= |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right).\end{aligned}$$