COURS DE DEUG 2ième niveau

OPTIQUE GEOMETRIQUE

OPTIQUE ONDULATOIRE

MECANIQUE ONDULATOIRE

Chapitre 1

PRINCIPE DE FERMAT ET SES CONSEQUENCES

I. Introduction historique

II. Chemin optique, indice de réfraction

III. Principe de Fermat

IV. Lois de Snell-Descartes

V. Théorème de Malus

I. Introduction historique

De toutes les disciplines des sciences physiques, l'**Optique** est sans doute l'une des plus importantes au point de vue de la diversité de ses aspects fondamentaux et de ses applications concrètes dans la vie de tous les jours. Cette discipline s'intéresse aux phénomènes physiques liés à la propagation des ondes électromagnétiques. Les premiers développement de l'optique sont très anciens. La notion de **rayon lumineux** et les **lois de la réflexion** remontent à l'antiquité. Mais à cette époque, les scientifiques étaient encore convaincus que pour voir des objets, l'œil humain émet des rayons lumineux sur ces objets. Depuis 965 on sait que l'œil humain n'émet pas de rayons lumineux, et donc, ne peut voir des objets que lorsqu'ils sont éclairés par des sources de lumière. Parmi les développements les plus marquants de l'optique on peut noter les réalisations suivantes:

- En 1590, on commence à fabriquer des lunettes pour corriger la vue, mais les verres utilisés à cette époque sont de mauvaise qualité.
- En 1609 Galilée met au point la première lunette astronomique.
- En 1611 on construit les premiers microscopes.
- En 1621 les lois de la réfractions sont établies par Snell, puis Descartes (1637).
- En 1672 Newton construit le premier télescope.
- En 1801Young démontre les effets d'interférence, et la nature ondulatoire de la lumière.
- En 1870 Maxwell démontre le caractère électromagnétique de la lumière, et prédit l'existence d'ondes électromagnétiques non visibles par l'œil humain (qui seront expérimentalement mises en évidence par Hertz).
- En 1905 Einstein introduit la notion de photon, qui lui permet d'interpréter l'effet photoélectrique.
- L'invention du laser (1960), la fibre optique, figurent parmi les développements récents les plus spectaculaires de l'optique moderne.

II. Chemin optique, indice de réfraction

*Dans le vide, la vitesse de propagation des ondes lumineuse est $c=3.10^8$m/s. Les matériaux diélectriques sont caractérisés par ***l'indice de réfraction*** qu'ils acquièrent lors qu'ils sont traversés par une onde. L'indice n d'un matériau diélectrique détermine la vitesse de propagation v de la lumière dans ce milieu

$$\boxed{n = c / v}$$

*Par définition, le ***chemin optique*** est une distance, qui correspond à la durée de propagation multipliée par c. Le chemin optique élémentaire s'écrit

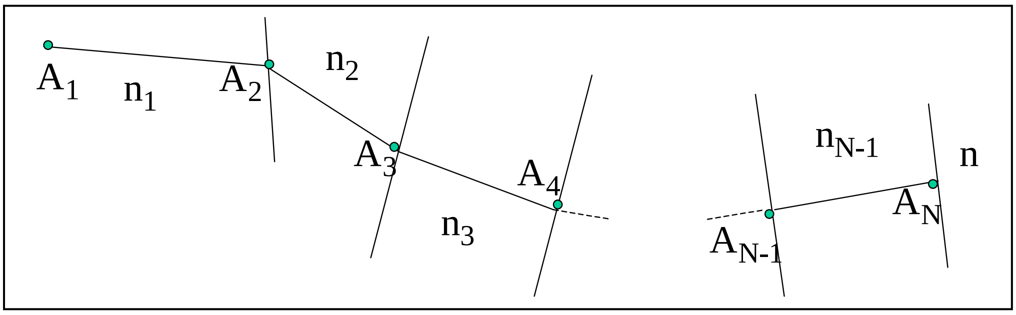
$$dL = c\,dt = c\ ds / v\,,$$

où ds désigne la distance curviligne parcourue par la lumière pendant la durée dt à la vitesse v. Sachant que $v=c/n$, on a

$$\boxed{dL = n\,ds \qquad (1)}$$

Remarques :

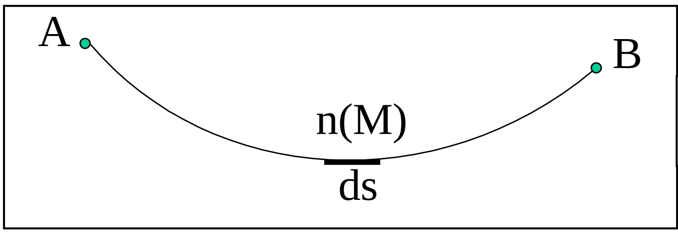
- La distance curviligne représente le trajet géométrique effectivement parcouru par l'onde dans le milieu.
- Cas d'une propagation dans différents milieux



Ici l'indice est constant dans chaque milieu et varie brutalement au passage d'un milieu à l'autre. Le chemin optique total est la somme des chemins optiques intermédiaires :

$$\boxed{L(A_1A_N) = n_1(A_1A_2) + n_2(A_2A_3) + \cdots + n_{N-1}(A_{N-1}A_N)}$$

Lorsque l'indice varie continûment le long d'un trajet AB, le chemin optique se met sous la forme suivante

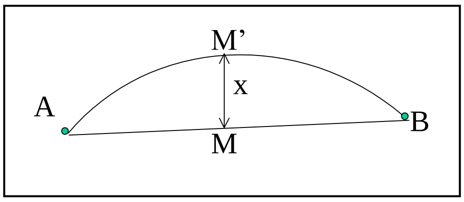


$$\boxed{L(AB) = \int_A^B n(M)\,ds = c(t_B - t_A) \qquad (2)}$$

III. Principe de Fermat

Enoncé : ***Entre deux points A et B atteints par la lumière, le chemin optique le long du trajet effectivement suivi par la lumière est stationnaire.***

Envisageons deux trajets C (AMB) et C' (AM'B) pour aller de A à B. Soit x un paramètre permettant de définir le trajet C'. Si x varie de dx le chemin optique associé au trajet C' passera de $L(x)$ à $L(x+dx)$, tel que



$$L(x+dx) = L(x) + \frac{\partial L}{\partial x}dx + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}dx^2 + \cdots$$

Le principe de principe de Fermat postule que, de tous les trajets qui lui sont offerts pour aller de A à B, la lumière suivra uniquement le (ou les) trajet(s) $L(x_0)$ pour lequel

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{x=x_0} = 0 \qquad (3)$$

Dans cette situation

$$L(x_0 + dx) = L(x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right)_{x_0} dx^2 + \cdots$$

En d'autres termes, si x varie de dx, le chemin optique ne variera qu'au second ordre au voisinage d'un chemin optique stationnaire.

La relation (3) signifie que la lumière suivra le trajet pour lequel $L(x_0)$ qui est un extremum de la fonction $L(x)$. Au voisinage de x_0, L ne varie que très peu. On peut donc re-écrire le principe de Fermat au voisinage de x_0 de la manière suivante :

$$\boxed{L = cste \qquad (4a)}$$

Ce qui équivaut à

$$\boxed{\delta L = 0 \qquad (4b)}$$

Conséquence du principe de Fermat

*** Propagation rectiligne dans milieu homogène**

Dans un milieu homogène [n(M)=cste] le chemin optique entre deux points A et B s'écrit

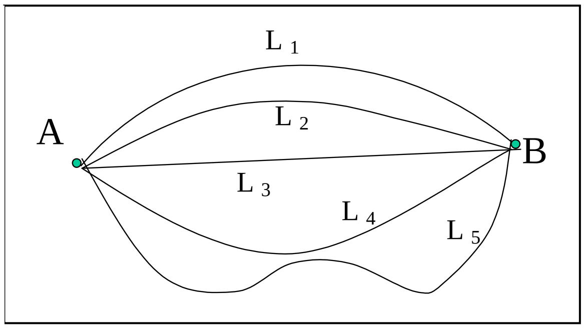
$$L(AB) = \int_A^B n\,ds = n\;(s_B - s_A) = n\,s_A s_B$$

Le minimum de L correspond à la droite AB.

$$L(AB) = n\,AB$$

où AB représente la longueur du segment de droite reliant les points A et B.

Dans un milieu homogène les rayons lumineux se propagent en ligne droite



*** Retour inverse de la lumière**

Considérons dans un milieu homogène, un rayon lumineux curviligne passant par deux points A et B. Le chemin optique de A à B s'écrit

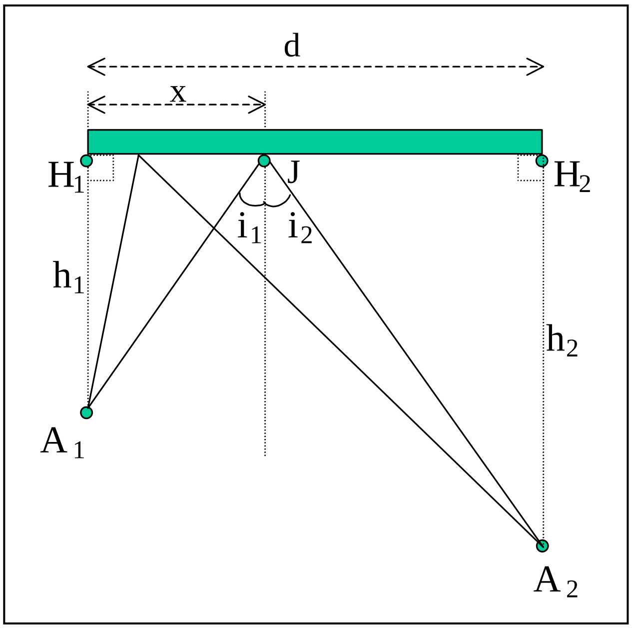
$$\begin{aligned} L(AB) &= \int_A^B n(s)\,ds = \int_B^A n(-s)(-ds) \\ &= \int_B^A n(s')\,ds' \quad (s' \textit{ désigne l'abscisse curviline orienté de } B \textit{ vers } A) \\ &= L(BA) \end{aligned}$$

Comme L(AB) est stationnaire, L(BA) l'est aussi.

L**e chemin optique suivi par la lumière ne dépend pas du sens de parcours du trajet.**

Exemple d'application du principe de Fermat

Soient A_1 et A_2 deux points situés dans un milieu d'indice n, où est placé un miroir comme l'illustre la figure ci-contre. On considère un rayon lumineux issu de A_1 et qui passe par A_2 après réflexion sur le miroir. Soit J le point de réflexion du rayon sur le miroir. Il existe en fait une multitude de points J définissant chacun un trajet possible du rayon lumineux. Mais la lumière ne passera que par un seul point (disons J_0), pour lequel le chemin optique est stationnaire. Nous allons déterminer ce point en appliquant le principe de Fermat.



Le chemin optique passant par un point J quelconque s'écrit :

$$L = n(A_1J) + n(JA_2)$$

On pose $H_1J = x,\ H_1H_2 = d,\ \Rightarrow\ JH_2 = d - x$,
où x est un paramètre définissant un trajet possible qui s'offre au rayon lumineux pour aller de A_1 à A_2.

$$A_1J = \sqrt{h_1^2 + x^2} \quad et \quad JA_2 = \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2} \quad \Rightarrow$$

$$L = L(x) = n\left(\sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}\right)$$

D'après le principe de Fermat, la lumière suivra un trajet pour lequel le chemin optique est stationnaire.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} + \frac{2(x-d)}{\sqrt{h_2^2 + (x-d)^2}}\right] = 0 \ \Rightarrow\ \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{h_2^2 + (x-d)^2}}$$

$$\Rightarrow x^2\left[h_2^2 + (d-x)^2\right] = (x-d)^2\left[h_1^2 + x^2\right]$$

$$\Rightarrow x = h_1 d/(h_2 + h_1) \ ou \ x = -h_1 d/(h_2 - h_1)$$

Seule la solution $x = h_1 d/(h_2 + h_1) = x_0 < d$ est acceptable.

$$tg(i_1) = (x_0 / h_1) = d/(h_2 + h_1)$$

$$tg(i_2) = (d - x_0)/h_2 = \frac{d - h_1 d/(h_2 + h_1)}{h_2} = d/(h_2 + h_1) = tg(i_1)$$

Le chemin optique stationnaire correspond au point *J=J(x₀)* pour lequel $i_1 = i_2$. On retrouve ici la loi de Descartes pour la réflexion sur un dioptre.

IV. **Lois de Snell-Descartes**

Elles expriment le changement de direction, par réflexion ou réfraction, d'un rayon lumineux à la traversée d'un dioptre. Nous allons établir ces lois à partir de la différentielle d'un chemin optique.

IV.1. Différentielle d'un chemin optique rectiligne

La longueur d'un segment AB s'écrit aussi $AB = \vec{u}.\overrightarrow{AB}$, où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire porté par le rayon dans le sens A vers B. On a donc

$$\boxed{L(AB) = n\,AB = n\,\vec{u}.\overrightarrow{AB}\,.}$$

Si on impose des déplacements élémentaires $\overrightarrow{dA}$ *et* $\overrightarrow{dB}$ en A et B, la variation du chemin optique s'écrit

$$dL(AB) = n\,d(AB) = n\,d(\vec{u}.\overrightarrow{AB}) = n\,\overrightarrow{AB}.d\vec{u} + n\vec{u}.d\overrightarrow{AB}$$

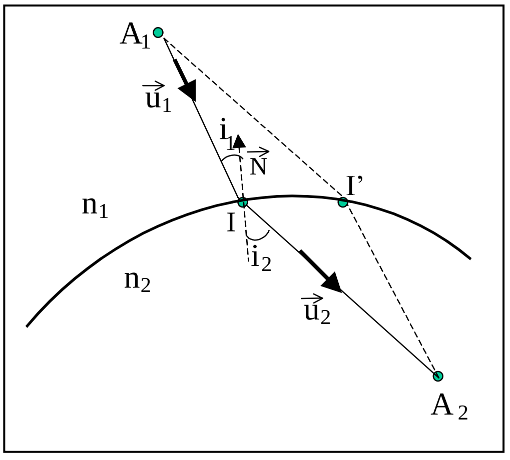
$$= n\,AB\,\vec{u}.d\vec{u} + n\vec{u}.(d\vec{B} - d\vec{A})$$

$\vec{u}$ étant un vecteur unitaire $\vec{u}.\vec{u} = u^2 = 1 \;\Rightarrow\; 2\vec{u}.\overrightarrow{du} = 0 \;\Rightarrow$

$$\boxed{dL(AB) = n\vec{u}.(d\vec{B} - d\vec{A}) \qquad (5)}$$

IV.2. Expression de la loi de Snell-Déscartes

Considérons un dioptre séparant deux milieux d'indices n_1 et n_2, et deux points A_1 et A_2, situés respectivement dans les milieux d'indice n_1 et n_2.



Le chemin optique de A_1 à A_2 s'écrit

$$L(A_1A_2) = n_1(A_1I) + n_2(IA_2)\,.$$

Une petite déformation de la trajectoire suivant $A_1I'A_2$ entraîne une variation du chemin optique

$$\delta L = \delta(n_1A_1I) + \delta(n_2IA_2)$$

$$= n_1\vec{u_1}.(d\vec{I} - d\vec{A_1}) + n_2\vec{u_2}.(d\vec{A_2} - d\vec{I})$$

$$= (n_1\vec{u_1} - n_2\vec{u_2}).\overrightarrow{dI} \qquad (car\ d\vec{A_1} = d\vec{A_2} = 0)$$

$$= (n_1\vec{u_1} - n_2\vec{u_2}).\overrightarrow{II'}$$

D'après le principe de Fermat, une petite déformation du trajet du rayon au voisinage du chemin optique stationnaire ne provoque au premier ordre aucune variation du chemin optique. Donc

$$\delta L = 0 \Rightarrow (n_1\vec{u_1} - n_2\vec{u_2}) \;\perp\; \overrightarrow{II'}$$

Le vecteur $n_1\vec{u_1} - n_2\vec{u_2}$ est donc colinéaire au vecteur unitaire normal au dioptre en I :

$$\boxed{(n_1\vec{u_1} - n_2\vec{u_2}) = a\;\vec{N} \qquad (6)}$$

où a est un réel quelconque non nul.

Les lois de Snell-Descartes se déduisent de l'équation (6).

Lois de la réfraction

- L'équation (6) montre que les vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, et $\vec{N}$ sont dans le même plan. Autrement dit, le rayon réfracté (parallèle à $\vec{u_2}$) est contenu dans le plan d'incidence formé par le rayon incident (parallèle à $\vec{u_1}$) et la normale au point d'impact du rayon sur le dioptre. C'est la **première loi de Descartes**.

- En multipliant vectoriellement l'équation (6) par $\vec{N}$ on obtient

$$(n_1 \vec{u_1} \wedge \vec{N} - n_2 \vec{u_2} \wedge \vec{N}) = a\ \vec{N} \wedge \vec{N} = 0$$

$$\Rightarrow \quad n_1 |\vec{u_1}||\vec{N}| \sin(i_1) = n_2 |\vec{u_2}||\vec{N}| \sin(i_2) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)}$$

C'est la **deuxième loi de réfraction**

Lois de la réflexion

Pour obtenir les lois de la réflexion, il suffit de suivre la même démarche que ci-dessus mais en plaçant le point A_2 dans le milieu d'indice n_1. Dans ce cas l'équation (6) se met sous la forme suivante

$$\boxed{n_1(\vec{u_1} - \vec{u_2}) = a\ \vec{N} \qquad (7)}$$

- L'équation (7) montre que les vecteurs $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, et $\vec{N}$ sont dans le même plan. Autrement dit, **le rayon réfléchi** (parallèle à $\vec{u_2}$) **est contenu dans le plan d'incidence** formé par $\vec{u_1}$ et $\vec{N}$. C'est la **première loi de la réflexion**.

- En multipliant vectoriellement l'équation (7) par $\vec{N}$ on obtient

$$n_1(\vec{u_1} \wedge \vec{N} - \vec{u_2} \wedge \vec{N}) = a\ \vec{N} \wedge \vec{N} = 0$$

$$\Rightarrow |\sin(i_1)| = |\sin(i_2)|$$

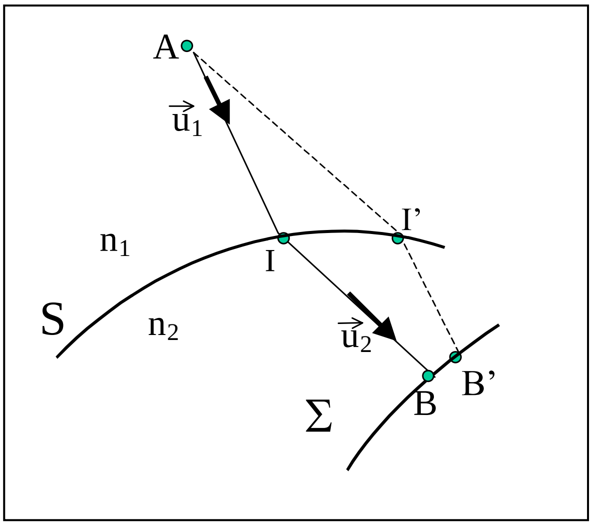
$$\boxed{|i_1| = |i_2|}$$

L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence : C'est la **deuxième loi de la réflexion**

V. Théorème de Malus

Ce théorème traduit la propriété d'orthogonalité des rayons lumineux et des surfaces d'onde, après réfraction ou réflexion dans un milieu isotrope.

Considérons un rayon lumineux issu de A (situé dans un milieu d'indice n_1), qui atteint le point B du milieu n_2 situé sur la surface d'onde Σ, en passant le point I situé sur le dioptre S. Un rayon lumineux voisin du 1[er], issu de A, atteint B' situé sur Σ, en passant le point I' situé sur S.



Le chemin optique de A à B s'écrit

$$L = n_1 AI + n_2 IB\ .$$

La petite modification du trajet lumineux de (AIB) à $(AI'B')$, entraîne une variation du chemin optique

$$\begin{aligned} dL &= d(n_1 AI) + d(n_2 IB) \\ &= n_1\,\vec{u_1}.(\vec{dI} - \vec{dA}) + n_2\,\vec{u_2}.(\vec{dB} - d\vec{I}) \\ &= (n_1\,\vec{u_1} - n_2\,\vec{u_2}).\vec{dI} + n_2\,\vec{u_2}.\vec{dB} \quad (car\ \ \vec{dA} = 0) \end{aligned}$$

Comme $(n_1\,\vec{u_1} - n_2\,\vec{u_2}) = a\ \vec{N}$ et que $\vec{dI} = \vec{II'}\ \ et\ \ \vec{II'} \perp \vec{N}$ on a

$$dL = n_2\,\vec{u_2}.\vec{dB}$$

Or Σ est une surface d'onde. De même, le point A peut être assimilé à une surface d'onde ponctuelle. Par conséquent le chemin optique entre ces deux surfaces d'onde est le même, et donc dL=0. Il en résulte que $\vec{u_2}.\vec{dB} = 0$, et donc que $\vec{dB} = \vec{BB'}$ est normal à $\vec{u_2}$. Comme B et B' sont deux points voisins appartenant à Σ, $\vec{u_2}$ est perpendiculaire à Σ. D'où le théorème de Malus :

Dans les milieux isotropes les rayons lumineux sont normaux aux surfaces d'onde. Tous les rayons partant d'une surface d'onde Σ et atteignant une autre surface d'onde Σ' parcourent exactement le même chemin optique.