E.N.S.P. .... *Niveau II/Année 2017-18, Semestre 1* .... ND/NG

*** U.E. MAT 217 « *Séries et Intégrales généralisées* » ***

***** Examen final (*3H 00mn*) *****

1. **DOCUMENTS INTERDITS / CALCULATRICES AUTORISEES, SAUF LES PROGRAMMABLES.**
2. **Le correcteur appréciera le SOIN apporté à la REDACTION et à la PRESENTATION du devoir.**
3. **Toute réponse doit être justifiée, mais éviter des explications INUTILEMENT KILOMETRIQUES.**
4. **L'objectif ici ne doit pas être de chercher à traiter à tout prix toute l'épreuve, en sprintant inconsidérément et en bâclant. Mais, plutôt, d'en couvrir une part significative de manière convaincante.**

**** *EXERCICE 1* (7,5 POINTS) ****

Pour $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, on pose :

$$u_n = \frac{1}{2n+1}, \quad f_n(t) = 1 - \operatorname{th}^{2n} t, \quad \varphi_n(t) = \frac{f_n(t)}{f_1(t)}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t, \quad J = \int_0^{+\infty} f_1(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1°) Trouver la nature de I_0 et, en cas de convergence, préciser sa valeur.

N.B. ***Dans toute la suite, on se place dans le cas où*** $n \in \mathbb{N}^*$, ***i.e.*** n ***est un entier*** $\geqslant 1$.

2°) Exprimer $\varphi_n(t)$ comme somme de n fonctions *bornées* (et *2 à 2 distinctes*) de la variable t sur $\mathbb{R}$.

3°) a) Montrer qu'il existe $C_n \in \mathbb{R}^*$ (*à préciser*) tel que l'on ait : $f_n(t) \sim C_n f_1(t)$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

b) Utiliser ce résultat pour en déduire l'*équivalent simple* de $f_n(t)$ quand $t \longrightarrow +\infty$.

4°) a) Sans chercher à calculer I_n, montrer que I_n est un réel $\geqslant 0$.

b) En déduire que si g est une fonction bornée sur $]\,0\,, +\infty\,[$, alors l'intégrale J est convergente.

5°) Exprimer I_n sous forme de somme de n réels $\geqslant 0$, mais en calculant chaque terme de cette somme.

6°) a) Trouver la nature de la série de terme général u_n et de rang de départ $n = 0$.

b) En déduire la limite de I_n quand $n \longrightarrow +\infty$. Intuitivement, cette limite était prévisible. Pourquoi ?

**** *EXERCICE 2* (3 POINTS) ****

Soit $A = \displaystyle\sum_{n=p+q}^{+\infty} \frac{\cos(\omega n - \omega q)}{5^n}$, où $\omega \in \mathbb{R}$ et $p, q \in \mathbb{N}$.

1°) Sans chercher à calculer A, montrer que $A \in \mathbb{R}$.

2°) Calculer A (**N.B.** ***En simplifiant le résultat autant que possible***).

**** *EXERCICE 3* (6 POINTS) ****

Etudier la nature des séries : *(1)* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{\cos(5n\pi)}{n}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\operatorname{Arctg} n}{\sqrt[3]{\operatorname{sh}(2n)}}$; *(3)* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (\operatorname{sh} n - \operatorname{ch} n)$; *(4)* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (1 - \operatorname{th} n) \cdot \operatorname{ch}^2 n$; *(5)* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + \cos n}$; *(6)* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} e^{-3in^2}$.

**** *EXERCICE 4* (7 POINTS) ****

On pose : $$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)\,!}, \quad I = \int_0^{10} \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{x}\,) - 1}{x}\,\mathrm{d}x, \quad W = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{10^k}{(2k)\,! \cdot k}, \quad T = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n.$$

1°) Sans chercher à calculer ni $F(x)$, ni I, ni W :

a) Montrer que $W \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que I est une *intégrale définie* (au sens de Riemann).

c) Trouver le domaine de définition $\mathcal{D}_F$ de la fonction F dans $\mathbb{C}$.

2°) a) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x = F(x)$.

b) En déduire que $I = W$. **N.B.** *Admettre que permuter les symboles intégral et somme infinie est valide ici.*

c) Utiliser ce résultat pour calculer une approximation de I avec une *incertitude absolue* $< 10^{-10}$.

d) Quelle difficulté aurait posée une tentative de calcul direct de I ?

3°) On rappelle qu'une *série entière* est une série de la forme T, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique. Montrer alors que $F(x)$ est la somme d'une série entière, en précisant les coefficients a_n appropriés. **N.B.** On donnera d'abord a_0, a_1, a_2, a_3, avant d'extrapoler le cas général pour n quelconque dans $\mathbb{N}$.

FIN