Nous avons achevé le cours sur les séries numériques.

Pour être honnête, je ne me suis jamais vraiment assise pour faire une quelconque fiche ou quelque chose de la sorte, les notions étant assez éparses dans ma tête.

Ici, nous proposons une synthèse de tout élément de connaissance que nous avons pu glaner tout au long des 2 premières semaines (tant par le cours du Pr MANJIA, que par celui du Pr NDONG NGUEMA).

Avant toute chose il faut définir une série. C'est même quoi une série?

* On appelle série numérique la donnée d'un couple (U_n, S_n) où (U_n) est une suite numérique
(S_n) est la suite de somme partielle des termes de (U_n) tq:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k.$$

Dans toute la suite, il sera question essentiellement d'étudier la nature d'une série, i.e de dire si elle est cvgte ou non. De ce fait, nous établissons toute de suite un résultat important pour trancher rapide pour conclure rapidement ~~qt~~ à la cvgce d'une suite.

Propriété

Si (S_N) converge, alors $U_n \longrightarrow 0$.

Le résultat qui est très souvent utilisé est la contraposée

i.e : $U_n \not\longrightarrow 0 \Rightarrow (S_N)$ est divergente

Preuve

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = S_n - S_{n-1}$

donc si S_n converge, posons $\ell = \lim S_n$ or $\lim S_{n-1} = \lim S_n$

donc $\lim u_n = (\lim S_n) - (\lim S_{n-1})$

$= \ell - \ell$

$= 0$, d'où le résultat

N.B ① La série de terme général (u_n) est convergente ssi sa suite partielle (S_n) est convergente.

② La notion de convergence et d'absolue convergence et de semi-convergence sont abordées ici dans les intégrales généralisées.

. <u>Donnons à présent quelques exemples de séries classiques</u>

i) La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ cette série diverge car on vérifie aisément que cette suite n'est pas de Cauchy donc

ii) La série géométrique $\sum a q^n$, $a, q \in \mathbb{R}$.

$S_n = a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, elle cvge si $|q| < 1$

<u>Étudions à présent les critères de convergence d'une série numérique</u>

① 2 séries numériques $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$; on suppose que $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont de même nature.

Preuve

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = S_n - S_{n-1}$

donc si S_n converge, posons $l = \lim S_n$ or $\lim S_n = \lim S_{n-1}$

donc $\lim U_n = (\lim S_n) - (\lim S_{n-1})$

$= l - l$

$= 0$, d'où le résultat.

N.B : ① La série de terme général (U_n) est convergente ssi sa somme partielle (S_N) est convergente.

② La notion de convergence et d'absolue convergence et de semi-convergence sont abordées comme dans les intégrales généralisées.

. Donnons à présent quelques exemples de série classiques

i) La série harmonique : $\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n}$: cette série diverge car on vérifie aisément que cette suite n'est pas de Cauchy donc

ii) La série géométrique $\sum a q^n$, $a, q \in \mathbb{R}$.

$S_N = a \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$, elle converge ssi $|q| < 1$

Etudions à présent les critères de convergence de quelque série numérique

① 2 séries numériques $(\sum U_n)$ et $(\sum V_n)$; on suppose que $(\sum U_n)$ et $(\sum V_n)$ ne diffèrent que par un nombre fini de termes, $(\sum U_n)$ et $(\sum V_n)$ sont de même nature.

② La série $(\sum U_n)$ est cvgte ssi (S_N) S_N est de Cauchy.

③ Règle de changement de cran pour une série

Soit $\sum_{n\geq n_0} U_n$, une série numérique. Considérons P, un entier $> n_0$. Alors on a :

1. La série numérique $\sum_{n\geq P} U_n$ est de même nature que $\sum_{n\geq n_0} U_n$.
2. En cas de cvge, les soe de ces 2 séries sont liés par :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} U_n = \sum_{n=n_0}^{P-1} + \sum_{n=P}^{+\infty} U_n$$

Application : Notion de reste d'ordre n d'une série cvgte.

* Enonçons à présent des critères de cvge

* Critère de Comparaison des séries à termes positifs

On donne 2 séries $\sum_{n\geq n_0} U_n$ et $\sum_{n\geq n_0} V_n$ à termes positifs vérifiant :

$0 \leq U_n \leq V_n$, alors, on a :

1. si $\sum V_n$ cvge, alors $\sum U_n$ cvge
2. si $\sum U_n$ dvge, alors $\sum V_n$ dvge

exple

Considérons les séries : $\sum U_n \cdot n^{\alpha}$ et $\sum U_n \cdot n^{\alpha+1}$, (U_n) est à termes positifs

On a : supp $\sum U_n n^{\alpha+1}$ cvge ~~et~~ et mq $\sum U_n n^{\alpha}$ cvge, $\alpha \geq 0$

Comme $\forall\ \alpha \geq 0$, $n^{\alpha+1} \geq n^{\alpha} \Rightarrow n^{\alpha+1} U_n \geq n^{\alpha} U_n$

$$\Rightarrow \sum n^{\alpha} U_n \leq \sum n^{\alpha+1} U_n$$

or Comme $\sum n^{\alpha+1} U_n$ cvge, alors $\sum n^{\alpha} U_n$ cvge.

Rmq : Le ② est la Contraposée du ①

* **Critère de Comparaison d'une série à un I.I.S en $+\infty$**

soit $\sum_{n\geq n_0} U_n$, une série numérique telle que l'on ait : $\forall n \geq n_0, (n \in \mathbb{N})$, $U_n = f(n)$, où f est une fonction d'une variable réelle, définie, décroissante et à valeurs positives sur $[n_0, +\infty[$, alors $\int_{n_0}^{+\infty} f(u)\,du$ est une intégrale I.S en $+\infty$ de même nature que la série $\sum_{n\geq n_0} U_n$.

exemple

Nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$.

Posons $U_n = \frac{1}{n \ln n}$ $(n \geq 2)$

Pour trouver la nature de la série, partons de ce qu'on a : $U_n = f(n)$ où f est la fonction de $[2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x \ln x} \geq 0$.

C'est une fonction dérivable sur $[2, +\infty[$ et de dérivée

$f'(x) = -(1 + \ln x)[f(x)]^2 \leq 0 \quad \forall x \in [2, +\infty[$.

$\Rightarrow f$ est $\searrow$ et ≥ 0 sur $[2, +\infty[$.

D'après le critère de Comparaison d'une série avec une I.I.S en $+\infty$:

La série est de même nature que $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

Cherchons la valeur de $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

$= \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x}$ en faisant un changement de variable $t = \ln x$, $I = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t}$.

$\Rightarrow I$ est de $\bar{m}$ nature J ~~[illegible]~~ $J = \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, $a = \ln 2$, $\alpha = 1$

$\Rightarrow I$ est dvgte, car J est une I.I. de Riemann en $+\infty$ $\alpha \leq 1$

②

* Critère de Comparaison d'une série à une I.I.S en $+\infty$

Soit $\sum_{n\geq n_0} U_n$, une série numérique telle que l'on ait : $\forall n \geq n_0, (n \in \mathbb{N})$, $U_n = f(n)$, où f est une fonction d'une variable réelle, définie, décroissante et à valeurs positives sur $[n_0, +\infty[$, alors $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ est une intégrale I.S en $+\infty$ de même nature que la série $\sum_{n\geq n_0} U_n$.

exemple

Nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$.

Posons $U_n = \frac{1}{n \ln n}$ $(n \geq 2)$

Pour trouver la nature de la série, partons de ce qu'on a : $U_n = f(n)$ où f est la fonction de $[2, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x \ln x} \geq 0$.

C'est une fonction dérivable sur $[2, +\infty[$ et de dérivée

$f'(x) = -(1 + \ln x)[f(x)]^2 \leq 0 \quad \forall x \in [2, +\infty[$.

$\Rightarrow f$ est $\searrow$ et ≥ 0 sur $[2, +\infty[$.

D'après le critère de comparaison d'une série avec une I.I.S en $+\infty$:

La série est de même nature que $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

Cherchons la valeur de $I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

$= \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x}$ en faisant un changement de variable $t = \ln x$, $I = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t}$.

$\Rightarrow I$ est de $\overline{m}$ nature J ~~[illegible]~~ $J = \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, $a = \ln 2$, $\alpha = 1$

$\Rightarrow I$ est dvgte, car J est une I.I. de Riemann en $+\infty$ $\alpha \leq 1$

clusion : $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ est dvgte.

* Une série de Riemann est une série du type : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

elle converge si $\alpha > 1$ et diverge dans le cas contraire.

* La série harmonique est la série de Riemann pour $\alpha = 1$

* Critère d'équivalence

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries numériques à termes positifs.

On a : si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors ces séries sont de m̅ nature.

expl :

Considérons la série de terme général u_n définie par

$u_n = \frac{2n-1}{n^3 - 4n}$ $(n \geq 3)$.

On a : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$ or $\sum_{n\geq 3} \frac{2}{n^2}$ est une série

de Riemann, qui est cvgte donc la série $\sum u_n$ est convergte

* Critère de d'Alembert

ici, on s'interesse à la nature d'une suite à travers

l'étude du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to L < 1$, alors il y'a cvgce

- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to L > 1$, dvgce

- si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, cas incertain.

exemple : la série de terme : $\frac{n!}{n^n}$. $\frac{(-1)^n}{a_n}$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1).n^n}{(n+1)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} =$$

$$U_n = \frac{n!}{2^n} \quad ; \quad \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n!}$$

$$= \frac{n+1}{2}$$

On a : $\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} \to +\infty$ donc la série $\sum U_n$ est dvgte

* Critère d'Abel

il s'applique aux série : $\sum (-1)^n a_n$ où (a_n) est $\searrow$ et tend vers 0. Dans ce cas, la série cvge

exple : $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n}$. On a : $\sum (-1)^n a_n$, où $a_n = \frac{1}{n}$

On a : (a_n) est décroissante car $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$

$a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\lim \frac{1}{n} = 0$

d'où d'après le critère d'Abel, $\sum (-1)^n a_n$ Converge

* Critère de Cauchy

Soit $\sum U_n$ une série numérique.

Utilisation $\to$ si les critères précédents ne fonctionnent pas si la série est sous la forme $\sum (U_n)^n$

on calcule la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n)^{1/n} = \ell$

- $\ell < 1 \Rightarrow \sum U_n$ cvge
- $\ell > 1 \Rightarrow \sum U_n$ dvge
- $\ell = 1$: Cas incertain

<u>exemple</u>

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(n+1)^2}{n^n}$, avec $U_n = \frac{(n+1)^2}{n^n}$

$$U_n = \frac{(n+1)^2}{n^n} = \frac{n^2+2n+1}{n^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^n}$$

$$\left(\frac{n^2}{n^n}\right)^{1/n} = \left(n^{2-n}\right)^{1/n} = n^{\frac{2-n}{n}} = n^{\frac{2}{n}} . n^{-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{n}} . n^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{2}{n}\ln n}$$

$$= 0 \text{ car } \begin{cases} \lim \frac{1}{n} = 0 \\ \lim e^{\frac{2\ln n}{n}} = \lim e^{2} = e^{2} \end{cases}$$

et donc $\lim \sqrt[n]{U_n} = 0 < 1$ donc la série $\sum U_n$ est cvgte.

* <u>Théorème : Comparaison logarithmique</u>

Soit $\sum U_n$ et $\sum V_n$ 2 séries à termes strictement positifs.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{V_{n+1}}{V_n}$, alors, on a :

1) $\sum V_n$ cvge $\Rightarrow \sum U_n$ cvge
2) $\sum U_n$ dvge $\Rightarrow \sum V_n$ dvge.

<u>Application</u> [exercice 7 (TD)] !!!