Cours d'analyse réelle
Éléments d'analyse pour les Ingénieurs

Dr. TEWA Jean Jules
Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de Yaoundé
Département de Mathématiques et Sciences Physiques

Table des matières

Chapitre 1

Développements limités

Dans ce chapitre, nous cherchons à approximer les fonctions par les fonctions polynomiales au voisinage d'un point, généralement 0.

Nous écrivons les développements limités de plusieurs fonctions classiques en utilisant les formules de Taylor. Ceci nous permettra de calculer les limites des fonctions usuelles et d'en déduire leur comportement asymptotique.

1.1 Formules de Taylor

1.1.1 Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 1 *:*

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, $a < b$ et admettant des dérivées jusqu'à l'ordre $n \in \mathbb{N}$, qui sont continues sur $]a, b[$ et une dérivée d'ordre $n+1$ sur $]a, b[$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Remarque 1 *:*

1. *Cette formule est appelée* **formule de Taylor-Lagrange** *; elle se réduit à la formule des accroissements finis lorsque $n = 0$ car dans ce cas, $f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(c)$.*
2. *Le dernier terme $\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ est appelé* **reste de Lagrange**.
3. *Dans cette formule $c \in]a, b[$. On peut écrire $c = a + \theta\, x$, avec $\theta \in]0, 1[$. En posant $b = a + x$, elle s'écrit*

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{x^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta x)$$

4. En prenant $a = 0$, on obtient la **formule de Mac-Laurin** *:*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{(x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1$$

1.1.2 Formule de Taylor-Lagrange avec reste de intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et de classe C^{n+1} sur $]a, b[$. On peut écrire

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

On fait une intégration par partie de $\int_a^x f'(t)\,dt$ en utilisant $u(t) = -(x-t)$ et $v(t) = f'(t)$. On obtient $\int_a^x f'(t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^x - \int_a^x u(t)\,v'(t)\,dt$. Ce qui nous donne

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'((a) + \int_a^x (x-t)\,f''(t)\,dt$$

De façon analogue, on obtient

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'((a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\,f''(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!}\,f^{(3)}(t)\,dt$$

En le faisant k fois, on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-a)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,dt$$

C'est la **formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral**.

1.1.3 Application au calcul approché

La formule de Taylor-Lagrange précédente s'écrit

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a) + R_n$$

avec $R_n = \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(c)$.

Lorsque b est proche de a, on a $|b-a| < 1$ et $(b-a)^{n+1} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty)$. En posant $A = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(b-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a)$, on dira que A est une valeur approchée de $f(b)$ à R_n près. En général, il est possible de trouver une estimation de R_n, ce qui permet de préciser l'ordre de grandeur de l'erreur commise lorsqu'on remplace $f(b)$ par A.

Exemples :

1. La meilleure approximation du cosinus au voisinage de 0 par une fonction polynomiale de degré 0 est 1.

2. La meilleure approximation du cosinus au voisinage de 0 par une fonction polynomiale de degré 2 est $1 - \frac{x^2}{2}$.

3. La meilleure approximation du sinus au voisinage de 0 par une fonction polynomiale de degré 0 est 0.

4. La meilleure approximation du sinus au voisinage de 0 par une fonction polynomiale de degré 1 est x.

5. La meilleure approximation du sinus au voisinage de 0 par une fonction polynomiale de degré 3 est $x - \frac{x^3}{6}$.

6. Si on considère la fonction $f(x) = e^x$, son développement limité par la formule de Taylor-Lagrange au voisinage de 0 dans un intervalle de la forme $]0, x[$ est donné par $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\,e^c$, où $c \in]0, x[$. On peut donc écrire que $e^{0.1} = 1+0.1+\frac{(0.1)^2}{2!}+\frac{(0.1)^3}{3!}\,e^c$, soit $e^{0.1} = 1.105+\frac{(0.1)^3}{6}\,e^c$, où $0 < c < 0.1$. Puisque $0 < e^c < e^{0.1}$, on en déduit que $1.105 < e^{0.1} < 1.105 + \frac{(0.1)^3}{6}\,e^c$. La deuxième inégalité implique $e^{0.1}\left(1 - \frac{(0.1)^3}{6}\right) < 1.105$. D'où $e^{0.1} < 1.1052$. On peut donc écrire $1.105 < e^{0.1} < 1.1052$ et l'erreur commise en prenant $e^{0.1} \approx 1.105$ est inférieure à $1.1052 - 1.105 = 0.0002$, soit 2×10^{-4}.

1.1.4 Formule de Taylor-Young

Théorème 2 *:*

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$, $a < b$ et y admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n \in \mathbb{N}$. Alors si $f^{(n+1)}(a)$ existe, il existe une fonction ϵ vérifiant $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \epsilon(x) = 0$ telle que, $\forall x \in [a, b]$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}[f^{(n+1)}(a) + \epsilon(x)]$$

Remarque 2 *:*

1. *Cette formule est appelée* **formule de Taylor-Young**.
2. *Le terme $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\,\epsilon(x)$ s'appelle* **reste de Young**.
3. *En reformulant le dernier terme de cette formule, on obtient :*

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+(x-a)^{n+1}\,\epsilon(x)$$

4. *Pour $a = 0$, cette formule devient la formule de* **Mac-Laurin avec reste de Young** *:*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0) + x^{n+1}\,\epsilon(x)]$$

avec $\lim_{x\longrightarrow 0}\epsilon(x) = 0$

1.1.5 Développements limités de quelques fonctions usuelles au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ à un ordre donné

Définition 1 *: Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, centré en x_0. On dit que f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ au voisinage de x_0 si on peut écrire*

1. *Lorsque x_0 est fini, $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\,\varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x-x_0) \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow x_0)$.*

   Le polynôme $p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$ est appelé partie régulière ou partie principale du développement limité en x_0 et $(x-x_0)^n\,\varepsilon(x-x_0)$ le reste.
2. *Lorsque x_0 est infini, $f(x) = a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{x^n} + \dfrac{1}{x^n}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$, avec $\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right) \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow x_0)$.*
   Le polynôme $q(x) = a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{x^n}$ s'appelle partie régulière ou partie principale du développement limité au voisinage de l'infini.

Remarque 3 *: Les coefficient de la partie régulière sont donnés par $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.*

Lorsque x_0 est fini, le reste $R_n = (x-x_0)^n\,\varepsilon(x-x_0) = f(x) - p(x)$ nous permet de dire que

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\varepsilon(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{R_n}{(x-x_0)^n} = 0$$

On en déduit que R_n est un "petit tau" de $(x-x_0)^n$ et on note $R_n = o((x-x_0)^n)$. On dit que $f(x) - p(x)$ est un infiniment petit d'ordre n pour x tendant vers x_0. On écrit encore, $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$.

Lorsque x_0 est fini, le reste $R_n = \dfrac{1}{x^n}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x) - p(x)$ nous permet de dire que

$$\lim_{x\longrightarrow x_0}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\longrightarrow x_0} x^n\,R_n = 0$$

On peut donc appliquer cette formule de Mac-Laurin avec reste de Young aux fonctions usuelles afin de calculer leurs limites en des points précis. Nous obtenons le tableau suivant qui donne les développements limités au voisinage de 0 des fonctions usuelles, ainsi que les déductions de quelques limites classiques.

Fonctions	Développement de Mac-Laurin avec reste de Young	Limites
$sin(x)$	$x + x\,\epsilon(x)$	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{sin(x)}{x} = 1$
$tg(x)$	$x + x\,\epsilon(x)$	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{tg(x)}{x} = 1$
$ln(1+x)$	$x + x\,\epsilon(x)$	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{ln(1+x)}{x} = 1$
$exp(x)$	$1 + x + x\,\epsilon(x)$	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{exp(x)-1}{x} = 1$
$cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2} + x^2\,\epsilon(x)$	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1-cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

1.2 Développement limité et parité d'une fonction

Théorème 3 *:*

Le développement limité d'une fonction f lorsqu'il existe est unique.

Corollaire 1 *:*

Si f est une fonction paire (resp. impaire) qui admet un développement limité au voisinage de 0, alors sa partie régulière est un polynôme qui ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de x.

Exemple : Comme exemples de fonctions paires voir le développement des fonctions $cos(x)$, $\dfrac{1}{1+x^2}$ et comme exemples de fonctions impaire voir le développement des fonctions $sin(x)$, $tg(x)$.

1.2.1 Développements limités à un ordre $n \in \mathbb{N}$ quelconque de quelques fonctions usuelles au voisinage de 0

Définition 2 *:*

Soit f une fonction continue en $x_0 \in \mathbb{R}$. On appelle développement limité généralisé d'ordre $n \in \mathbb{N}$ quelconque d'une fonction f au voisinage d'un point x_0 l'expression

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\,\epsilon(x - x_0)$$

avec $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \cdots, n$, et $\lim_{x\longrightarrow x_0} \epsilon(x - x_0) = 0$

Fonction exponentielle

La fonction exponentielle est continue en 0, dérivable à l'ordre n, $(e^x)^{(n)} = e^x$ et $(e^x)^{(n)}(0) = 1$. Elle admet donc un développement limité généralisé à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ quelconque en ce point qui est sous la forme :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\,\epsilon(x)$$

Fonction sinus

La fonction sinus est continue en 0, dérivable à l'ordre n,
$sin^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k & si \quad n = 2k+1 \\ 0 \quad si & n = 2k \end{cases}$. Elle admet donc un développement limité généralisé à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ quelconque en ce point qui est sous la forme :

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\,\epsilon(x)$$

Fonction cosinus

La fonction cosinus est continue en 0, dérivable à l'ordre n, $cos^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 \quad si & n = 2k+1 \\ (-1)^k & si \quad n = 2k \end{cases}$. Elle admet donc un développement limité généralisé à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ quelconque en ce point qui est sous la forme :

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\,\epsilon(x)$$

Autres fonctions

Soit la fonction $(1+x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$; elle est continue en 0, dérivable à l'ordre n.

$$[(1+x)^\alpha]^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \times \cdots \times (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

et

$$[(1+x)^\alpha]^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1) \times \cdots \times (\alpha-k+1).$$

Elle admet donc un développement limité généralisé à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ quelconque en ce point qui est sous la forme :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\,\epsilon(x)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

Soit la fonction $(1-x)^\beta$ où $\beta \in \mathbb{R}$; elle est continue en 0 ; elle admed donc un développement limité généralisé à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ quelconque en ce point qui est sous la forme :

$$(1-x)^\beta = 1 - \beta x + \frac{\beta(\beta-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-n+1)}{n!}\,(-1)^n\,x^n + x^n\,\epsilon(x)$$

où $\beta \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

D'où nous avons les cas particuliers suivants :

1. Pour $\alpha = -1$, nous obtenons le développement limité généralisé suivant

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + x^n\,\epsilon(x)$$

2. Pour $\beta = -1$, nous obtenons le développement limité généralisé suivant

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + x^n\,\epsilon(x)$$

3. Pour $\alpha = -1$ et x^2 en lieu et place de x, nous obtenons le développement limité généralisé suivant

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n\,x^{2n} + x^{2n}\,\epsilon(x)$$

4. Pour $\beta = \frac{-1}{2}$ et x^2 en lieu et place de x, nous obtenons le développement limité généralisé suivant

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\,(-1)^n\,x^{2n} + x^{2n}\,\epsilon(x)$$

Soit encore

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{n!\,2^n}x^{2n} + x^{2n}\,\epsilon(x)$$

5. Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$ et x^2 en lieu et place de x, nous obtenons le développement limité généralisé suivant

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\,x^{2n} + x^{2n}\,\epsilon(x)$$

Soit encore

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + (-1)^n\,\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{n!\,2^n}x^{2n} + x^{2n}\,\epsilon(x)$$

1.2.2 Opérations sur les développements limités

Théorème 4 *:*

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités au même ordre n, dans les mêmes conditions données. Alors

1. *$f + g$ admet un développement limité à l'ordre n. Sa partie régulière est la somme des parties régulières de f et de g.*

   Exemple *: Ecrire le développement limité de $f(x) = cos(x) + sin(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.*

2. *$f.g$ admet un développement limité à l'ordre n. Sa partie régulière s'obtient en prenant dans le produit des parties régulières des développements limités de f et g, les termes de degré inférieur ou égal à n.*

   Exemple *: Ecrire le développement limité de $f(x) = cos(x) \times sin(x) = \frac{1}{2}sin(2x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.*

Théorème 5 *(fonction composée) :*

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités au même ordre n au voisinage de 0. Alors si $f(0) = 0$, la fonction $h = gof$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. Si on a $f(x) = p(x) + x^n\,\epsilon_1(x)$ et $g(x) = q(x) + x^n\,\epsilon_2(x)$ où p et q sont des polynômes de degré n et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\epsilon_1(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\epsilon_2(x) = 0$. Alors la partie régulière du développement limité de $h = gof$ s'obtient en prenant dans le polynôme $(qop)(x) = q[p(x)]$, fonction composée des parties régulières, les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exemple *: Ecrire le développement limité des fonctions $f(x) = e^{sin(x)}$ et $e^{sin(x)}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.*

Théorème 6 *(fonction quotient) :*

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités au même ordre n au voisinage de 0. Alors si $g(x) \neq 0$, la fonction $h = \frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. La partie régulière du développement limité de $h = \frac{f}{g}$ est le quotient des parties régulières, par puissance croissante jusqu'à l'ordre n.

Exemple *: Ecrire le développement limité de $f(x) = tan(x) = \dfrac{cos(x)}{sin(x)}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.*

1.3 Obtention du développement limité d'une fonction à l'aide du développement limité de sa fonction dérivée

Théorème 7 *(Dérivée et développement limité) :*

1. *Si la dérivée f' de f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0. Sa partie régulière est la primitive de la partie régulière de f' qui prend la valeur $f(0)$ en $x = 0$.*

2. *Si f et sa dérivée f' admettent des développements limités au voisinage de 0, alors la partie régulière du développement limité de f' est nécessairement la dérivée de la partie régulière du développements limités de f.*

Comme exemple, nous pouvons donner au voisinage de 0 les développements limités suivants

1. $(ln(1+x))' = \dfrac{1}{1+x}$ et d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + x^n\,\epsilon(x)$$

d'où $ln(1+x) = \displaystyle\int \frac{1}{1+x} + cst$ où $cst = f(0) = ln1 = 0.$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\,\epsilon(x)$$

2. $(ln(1-x))' = -\dfrac{1}{1-x}$ et d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + x^n\,\epsilon(x)$$

d'où $ln(1-x) = -\displaystyle\int \frac{1}{1-x} + cst$ où $cst = f(0) = ln1 = 0.$

$$ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\,\epsilon(x)$$

3. $(Arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ et d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n\,x^{2n} + x^{2n}\,\epsilon(x)$$

d'où $Arctgx = \displaystyle\int \frac{1}{1=x^2} + cst$ où $cst = f(0) = 0.$

$$Arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

4. $(Arcsinx)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\,(-1)^n\,x^{2n} + x^{2n}\,\epsilon(x)$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{n!\,2^n}x^{2n} + x^{2n}\,\epsilon(x)$$

d'où $Arcsin(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + cst$ où $cst = f(0) = 0.$

$$Arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{n!2^n(2n+1)}x^{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

5. $(Arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{n!\,2^n}x^{2n} + x^{2n}\,\epsilon(x)$$

d'où $Arccos(x) = -\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + cst$ où $cst = f(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$Arccos(x) = -x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \cdots - \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{n!2^n(2n+1)}x^{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

et on peut constater que

$$Arccos(x) + Arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

1.4 Développement limité au voisinage d'un point a quelconque

La formule à utiliser est la suivante

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+(x-a)^{n+1}\epsilon(x)$$

Il s'agit de la formule de Taylor-Young avec reste de Young. On peut toujours se ramener au voisinage de 0 en posant le changement de variable suivant :

$$X = x - a$$

Alors lorsque x tend vers a, X tend vers 0, on a donc une fonction de X et on fait un développement limité de $f(X)$ au voisinage de 0. Notre formule en fonction de X devient

$$f(X) = f(0) + f'(0)X + \frac{X^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{X^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{X^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0) + X^{n+1}\epsilon(x)$$

On revient ensuite à x par le changement de variable.

Exemple :Développement limité généralisé de la fonction $f(x) = sin(x-1)$ au voisinage de 1. On pose le changement de variable $X = x - 1$; la fonction devient $f(X) = sin(X)$ au voisinage de 0. Nous avons

$$sin(X) = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{X^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} + X^{2n+1}\,\epsilon(X)$$

et on peut revenir à la variable x par notre changement de variable $X = x - 1$ pour obtenir

$$sin(x-1) = x - 1 - \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^5}{5!} - \frac{(x-1)^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} + (x-1)^{2n+1}\,\epsilon(x-1)$$

avec $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \epsilon(x-1) = 0$.

Remarque 4 *: Lorsqu'une fonction $f(x)$ n'est pas continue en un point x_0, la partie régulière de son développement limité n'est pas un polynôme de la forme*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\,\epsilon(x)$$

comme énoncé plus haut.

1.4.1 Développement limité généralisé ou asymptotique

Définition 3 *: Soit une fonction f telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = \infty$. S'il existe un entier naturel k tel que $x^k\,f(x)$ admet un développement limité polynômial, on dit que la fonction f admet un développement limité asymptotique ou généralisé au voisinage de 0.*

Exemple *: La fonction $g(x) = \dfrac{1}{tg(x)}$ n'est pas continue en 0. Ecrivons son développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0. On sait que $(tgx)' = 1 + tg^2x$, $tg^{(2)}x = 2tgx(1 + tg^2x)$, $tg^{(3)}x = 2(1 + tg^2x) + 6tg^2x(1 + tg^2x)$ et $tg^{(4)}x = 4tgx(1 + tg^2x) + 12tgx(1 + tg^2x) + 24tg^3x(1 + tg^2x)$. Le développement limité de la fonction tangente au voisinage de 0 à l'ordre 4 nous donne*

$$tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^4\,\epsilon(x) = x\left(1 + \frac{x^2}{3} + x^3\,\epsilon(x)\right)$$

La fonction $g(x)$ peut encore s'écrire

$$g(x) = \frac{1}{tg(x)} = \frac{1}{x\left(1 + \frac{x^2}{3} + x^3\,\epsilon(x)\right)} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + x^3\,\epsilon(x)}$$

Maintenant, en posant $X = \dfrac{x^2}{3} + x^3\,\epsilon(x)$ on obtient

$$\frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + x^3\,\epsilon(x)} = \frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - \cdots + (-1)^n X^n + X^n\,\epsilon(X)$$

d'où

$$\frac{1}{1 + \frac{x^2}{3} + x^3\,\epsilon(x)} = 1 - \left(\frac{x^2}{3} + x^3\,\epsilon(x)\right) + \left(\frac{x^2}{3} + x^3\,\epsilon(x)\right)^2 - \left(\frac{x^2}{3} + x^3\,\epsilon(x)\right)^3 + \left(\frac{x^2}{3} + x^3\,\epsilon(x)\right)^4 + x^4\epsilon(x)$$

et en ne retenant que les puissances inférieures ou égales à 4 on obtient

$$\frac{1}{1+\frac{x^2}{3}+x^3\,\epsilon(x)} = 1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{9}+x^4\,\epsilon(x)$$

et le développement limité de la fonction $g(x)$ est

$$g(x) = \frac{1}{tg(x)} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{9}+x^4\,\epsilon(x)\right) = \frac{1}{x}-\frac{x}{3}+\frac{x^3}{9}+x^4\,\epsilon(x)$$

Comme nous l'avons dit, on peut remarquer que la partie régulière qui est

$$\frac{1}{x}-\frac{x}{3}+\frac{x^3}{9}$$

n'est pas un polynôme de la forme

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n$$

Définition 4 *: Soit une fonction f telle que $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$. S'il existe un entier naturel k tel que $\frac{f(x)}{x^k}$ admet un développement limité polynomial, on dit que la fonction f admet un développement limité asymptotique ou généralisé au voisinage de l'infini.*

1.5 Développement limité au voisinage de l'infini

Lorsqu'on s'intéresse à une fonction $f(x)$ au voisinage de l'infini, on peut revenir au voisinage de 0 par un changement de variable de la forme $X = \frac{1}{x}$; ainsi, lorsque x tend vers l'infini, X tend vers 0. On écrit le développement limité de la fonction $f(X)$ au voisinage de 0 et on revient à x par le changement de variable $x = \frac{1}{X}$. On obtient un développement de la forme

$$f(x) = a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}+\epsilon\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

où $a_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,\cdots,n$, et $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \epsilon\left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$ (*resp.* $\lim_{x\longrightarrow-\infty} \epsilon\left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$.

Exemple : Ecrire le développement limité généralisé de $exp\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de l'infini. On peut encore écrire $exp\left(\frac{1}{x}\right) = e^X$ où X tend vers 0. On obtient

$$e^X = 1+X+\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3!}+\cdots+\frac{X^n}{n!}+X^n\,\epsilon(X)$$

et on revient à x par le changement de variable $X = \frac{1}{x}$.

$$exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^3}{3!} + \cdots + \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{n!} + \left(\frac{1}{x}\right)^n \epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

ou encore

$$exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + \cdots + \frac{1}{n!\,x^n} + \frac{1}{x^n}\,\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

1.6 Comportement asymptotiques

1.6.1 Branches infinies des courbes $y = f(x)$

La courbe $\mathfrak{C}$ d'équation $y = f(x)$ admet une branche infinie pour $x \longrightarrow \pm\infty$. Ce qui veux dire que

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = \pm\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow\pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

1. Deux courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ sont dites asymptotes au voisinage de l'infini si

   $$\lim_{x\longrightarrow\infty}[f(x) - g(x)] = 0$$

   Lorsque le signe de la différence $f - g$ est constant, il donne la position relative des deux courbes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$. Si $f - g \geq 0$ alors $\mathfrak{C}$ est au dessus de $\mathfrak{C}'$ et si $f - g \leq 0$ alors $\mathfrak{C}$ est en dessous de $\mathfrak{C}'$.

   Exemple : les courbes des fonctions $x \longmapsto x^3$ et $x \longmapsto x^3 + \dfrac{1}{x^2}$ sont asymptotes.

2. si $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ avec a fini, alors $\mathfrak{C}$ admet une direction asymptotique $y = a\,x$. Si de plus $\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x) - a\,x) = b$, avec b fini, alors $(D) : y = a\,x + b$ est asymptote à $\mathfrak{C}$. La droite (D) est oblique si $a \neq 0$, horizontale si $a = 0$. Pour connaître la position relative de $\mathfrak{C}$ et (D), il faut étudier le signe de $f(x) - (a\,x + b)$.

3. Si $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, alors $\mathfrak{C}$ admet l'axe des ordonnées comme direction asymptotique.

4. Si $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors $\mathfrak{C}$ admet l'axe des abscisses comme direction asymptotique.

1.7 Exercices

1.7.1 Exercice

Soit f une application de classe C^2 sur un intervalle I, et a un point de I.

1. Calculer $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$.

2. On suppose que 0 est un point de l'intervalle I. Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}$.

3. Soit φ la fonction définie par
$$\varphi \,:\, I\backslash\{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
Montrer qu'on peut prolonger φ en une fonction de classe C^1 sur I.

1.7.2 Exercice

Ecrire les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre n indiqué, au voisinage du point a.

1. $e^x\,Arctg(x)$, $n=5$, $a=0$;
2. $e^{cos(x)}$, $n=5$, $a=0$;
3. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $n=3$, $a=0$;
4. $ln(1+sh(x))$, $n=4$, $a=0$;
5. $e^{\sqrt{ch(x)}}$, $n=3$, $a=0$;
6. $Arctg\left(\dfrac{2(1-x)}{1+4x}\right)$, $n=8$, $a=0$;
7. $ln(2+x+\sqrt{1+x})$, $n=3$, $a=0$;
8. $ln(\alpha\, cos(x)+\beta\, sin(x))$, $n=4$, $a=0$, $\alpha>0$, $\beta>0$;
9. $\dfrac{Arctg(x)-x}{sin(x)-x}$, $n=4$, $a=0$;
10. $ln\left(tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$, $n=4$, $a=0$;
11. $\dfrac{e^x\,th(x)}{ch(x)}$, $n=5$, $a=0$;
12. Calculer l'intégrale $\int_x^{x^2} \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$, $n=10$, $a=0$.

1.7.3 Exercice

Ecrire les développements limités généralisés des fonctions suivantes à l'ordre n indiqué, au voisinage du point a.

1. $\dfrac{1}{x+x^2}$, $n=5$, $a=+\infty$;
2. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $n=5$, $a=+\infty$;
3. $e^{\frac{1}{x}}\,Arctg(x)$, $n=4$, $a=+\infty$;
4. $\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}$, $n=4$, $a=+\infty$;
5. $x\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$, $n=4$, $a=+\infty$;
6. $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}\,e^{\frac{x}{x-1}}$, $n=3$, $a=+\infty$;

7. $x\,ln(1+x)-(x+1)ln(x)$, $n=4$, $a=+\infty$;
8. Montrer que la fonction numérique d'une variable réelle $f(x)=x\,e^{x^2}$ admet une fonction réciproque g dans un voisinage de 0 et écrire le développement limité à l'ordre 6 de g au voisinage de $y_0=f(0)$.
9. Montrer que la fonction numérique d'une variable réelle $f(x)=1+x-x^2$ admet une fonction réciproque g dans un voisinage de 0 et écrire le développement limité à l'ordre 6 de g au voisinage de $y_0=f(0)$.

1.7.4 Exercice

Calculer les limites des fonctions suivantes au point a indiqué.

1. $x-x^2\,ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, en $a=+\infty$;
2. $x\left[\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{a\,x}\right]$, en $a=+\infty$;
3. $\left(\dfrac{tg(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, en $a=0$;
4. $\dfrac{1}{x}(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1})$, en $a=+\infty$;
5. $\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$, en $a=1$;
6. $\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{1-\sqrt{3x-5}}$, en $a=2$;
7. $\dfrac{Arctg(x)-sin(x)}{tg(x)-Arcsin(x)}$, en $a=0$;
8. $\dfrac{1}{sin^2(x)}-\dfrac{1}{sh^2(x)}$, en $a=0$;
9. $\dfrac{e^{x^2}-cos(x)}{x^2}$, en $a=0$;
10. $\dfrac{cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$, en $a=0$;
11. $\dfrac{e^x-x-cos(x)}{x^2}$, en $a=0$;
12. $\dfrac{x^3\,Arctg(x)-x^4}{cos(x^2)-1}$, en $a=0$;
13. $\dfrac{(1^x+2^x+3^x+\cdots+n^x)^{\frac{1}{x}}}{n}$, où $n\in\mathbb{N}$, en $a=0$;
14. $\dfrac{2tg(x)-sh(2x)}{(1-cos(3x))Arctg(x)}$, en $a=0$;
15. $\dfrac{1}{ln(cos(x))}+\dfrac{2}{sin^2(x)}$, en $a=0$;
16. $\dfrac{1}{sin^2(x)}-\dfrac{1}{x^2}$, en $a=0$;
17. $\left(\dfrac{sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, en $a=0$.

1.7.5 Exercice

Soit la fonction $f(x) = x+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+a\,x+b+\dfrac{c}{x}$. Déterminer les réels a, b et c tels que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x\,f(x) = 0$.

1.7.6 Exercice

Trouver un équivalent simple de chacune des fonctions suivantes :

1. $\sqrt{x} - sin(x)$, au voisinage de 0 ;
2. $sh(sin(x)) - sin(sh(x))$, au voisinage de 0 ;
3. $ch(sin(x)) - cos(sh(x))$, au voisinage de 0 ;
4. $\left(\dfrac{sh(x)}{x}\right)^{sin(x)} - \left(\dfrac{sin(x)}{x}\right)^{sh(x)}$, au voisinage de 0 ;
5. $(1 + sin(x))^x - (1 + x)^{sin(x)}$, au voisinage de 0 ;
6. $Arctg(sin(x)) - sin(Arctg(x))$, au voisinage de 0.

1.7.7 Exercice

Soit une fonction f de classe C^3 au voisinage d'un réel a. Calculer la limite suivante

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)}{h^3}.$$

1.7.8 Exercice

Soit un réel a et une application f de classe C^2 de $]a,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que les fonctions f et f'' sont bornées et on pose

$$M_0 = \sup_{x>a} |f(x)|, \quad M_2 = \sup_{x>a} |f''(x)|.$$

1. En appliquant la formule de Taylor en x et $x + 2h$, montrer que
$$\forall x > a,\, \forall h > 0, \quad |f'(x+h)| \leq h\,M_2 + \frac{1}{h}\,M_0.$$
2. En déduire que f' est bornée sur $]a,+\infty[$.
3. Soit $g\ :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, une application de classe C^2 à dérivée seconde bornée telle que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} g(x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} g'(x) = 0$.

1.7.9 Exercice

Soient deux réels a et b tels que $a < b$. Soit f une fonction de classe C^3, de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un point c de $]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f^{(3)}(c).$$

(On pourra utiliser la formule de Taylor-Lagrange en a, $\dfrac{a+b}{2}$, b).

1.7.10 Exercice

1. Ecrire le développement limité à l'ordre trois au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \dfrac{cos(x) - 1}{x(e^x - 1)}$.

2. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite numérique

$$u_n = n \frac{cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{x\left(exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)} - \frac{1}{2}.$$

3. Soit la fonction $g(x) = \sqrt{1 - x^2}\, Arcsin(x)$. Ecrire le développement limité de la fonction $g(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

4. En déduire la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite numérique

$$v_n = n^5 \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\, Arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3}.$$

Chapitre 2

Primitives et intégrales

2.1 Introduction

La théorie de l'intégration est importante dans bien des applications des mathématiques notamment parce qu'elle est à l'origine de l'analyse de Fourier (acoustique, analyse d'images) et du calcul des probabilités (finance, génétique). Par exemple, un professionnel qui calcule le prix d'un produit financier qu'il est en train de négocier, calcule généralement une espérance mathématique, c'est-à-dire une intégrale.

2.2 Définition d'une intégrale

2.2.1 Sommes de Riemann et intégrales

L'intégrale d'une fonction positive $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'aire de la région du plan S délimitée par l'axe des abscisses, le graphe de f et les deux segments verticaux $x = a$ et $x = b$:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Le calcul de cette aire est facile pour des fonctions particulières comme les fonctions constantes, car dans ce cas, S est un rectangle dont l'aire est le produit $(b - a)f(a)$, et plus généralement pour des fonctions qu'on appelle constantes par morceaux ou en escalier.

On dit qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision (x_i) de $[a, b]$ (c'est-à-dire une suite (x_i) de $n + 1$ éléments de $[a, b]$ telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$) telle que f soit constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Les valeurs prises par f aux points x_i ne sont pas spécifiées. Pour une fonction en escalier qui prend la valeur c_i sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ de la subdivision, l'aire de S (et donc l'intégrale de la fonction) vaut simplement $\mathcal{A} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} c_i(x_{i+1} - x_i)$.

Pour une fonction quelconque, si elle peut être suffisamment bien approchée par une suite de fonctions en escalier, on prend pour intégrale la limite des intégrales de ces fonctions en escalier. On peut choisir pour simplifier des fonctions en escalier régulières (construites sur un découpage en intervalles de même longueur et prenant comme valeur sur les intervalles la valeur de f à leur extrémité gauche) ; on obtient ainsi les sommes de Riemann régulières à gauche :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right). \tag{2.1}$$

Propriété 1 *: Lorsque f est continue et définie sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$, la suite de sommes de Riemann (2.1) converge et sa limite, notée $\int_a^b f(x)\,dx$, est l'intégrale de f sur $[a, b]$.*

Que se passe-t-il si f n'est pas continue ou si l'on veut calculer son intégrale sur un intervalle non fermé ou non borné ? Le défaut de continuité n'est généralement pas un problème s'il s'agit d'une discontinuité "sage" (par exemple une discontinuité telle que la limite à gauche et la limite à droite existent mais ne sont pas égales : c'est le cas des fonctions en escalier aux points de la subdivision) mais il peut le devenir dans des cas pathologiques rares (comme par exemple l'indicatrice de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ sur $[a, b]$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Pour cette fonction, si l'on veut avoir $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour des fonctions g et h en escalier, il faudra que $g(x) \leq 0$ et $h(x) \geq 1$ pour tout $x \in [a, b]$!). Lorsque l'intervalle sur lequel on intègre n'est pas fermé ou pas borné, on dispose d'une généralisation de la théorie (les intégrales s'appellent alors des intégrales impropres ou généralisées) qui sera étudiée ultérieurement. En attendant, on doit rester sur ses gardes car il y a des situations "ordinaires" où surgissent des cas de non intégrabilité : la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ par exemple n'est ni intégrable sur $]0, 1]$, ni sur $[1, +\infty[$.

Calcul d'aires

Le calcul d'aires au moyen de sommes de rectangles comme les sommes de Riemann existait depuis l'antiquité mais il a fallu attendre l'invention du calcul différentiel et intégral par Leibniz et Newton au 17e siècle pour que l'on réalise que ce calcul avait un lien avec l'opération inverse de la dérivation, c'est-à-dire le calcul de primitives.

Rappelons qu'une fonction $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si F est dérivable et vérifie $F' = f$. On sait qu'une fonction f qui a une primitive en a une infinité qui diffèrent les unes des autres par des constantes (pourquoi ?). A noter que les primitives sont appelées antiderivatives en anglais. Le théorème qui fait le lien entre dérivées et primitives s'appelle le théorème fondamental de l'analyse :

Désignons par $\mathcal{A}$ l'aire sous la courbe de f entre les droites $x = a$ et $x = b$. Découpons l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de longueur $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. On a $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$. Quel que soit i, $x_{i+1} - x_i = \Delta x$.

On désigne alors par $\mathcal{A}^-$ la somme des aires de tous les rectangles rouges sous la courbe de f :

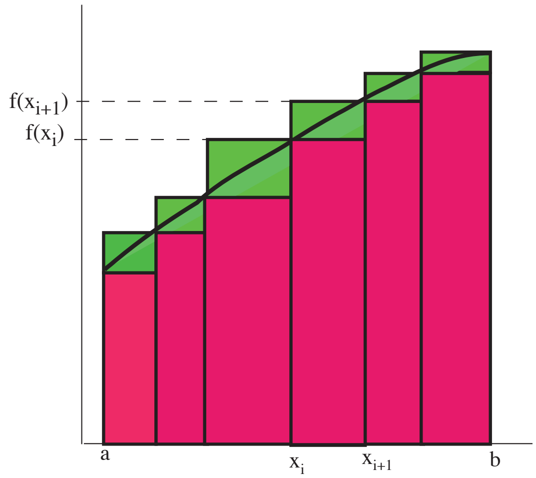

FIGURE 2.1 – Les différents rectangles permettant le calcul des aires

$$\mathcal{A}^- = f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_i)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i).$$

On désigne également par $\mathcal{A}^+$ la somme des aires de tous les rectangles avec la partie verte prise en compte :

$$\mathcal{A}^+ = f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_i)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x + f(b)\Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})(x_{i+1} - x_i).$$

Il est clair que $\mathcal{A}^+ > \mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}^+$ est d'autant plus proche de $\mathcal{A}$ que Δx est petit.

Par conséquent, $\mathcal{A}^- < \mathcal{A} < \mathcal{A}^+$ et on définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par

$$\mathcal{A} = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \mathcal{A}^- = \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \mathcal{A}^+ = \int_a^b f(x)\, dx$$

Remarque 5 *: dx désigne Δx infiniment petit : $dx = \lim_{x_i \longrightarrow x_{i+1}} \Delta x$.*

Remarque 6 *: Le cas des fonctions en escalier rentre dans les sommes de Riemann. Soit f une fonction en escalier définie à partir de la subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$. On suppose $f(x) = c_i$, $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le nombre réel noté $I(f)$ et défini par $I(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_{i+1} - x_i)$. On note aussi $I(f) = \int_a^b f(t)\, dt$.*

2.2.2 Cas des fonctions continues

On considère un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

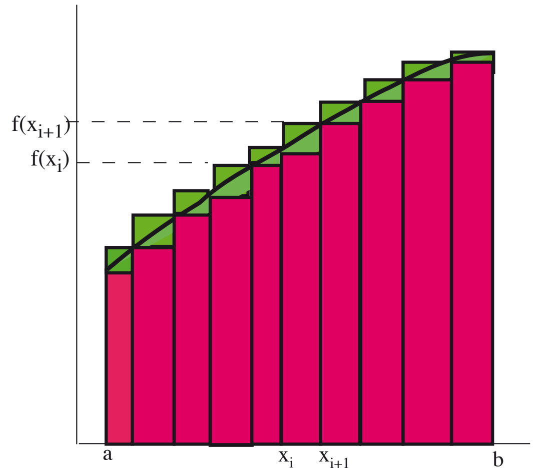

FIGURE 2.2 – Les différents rectangles permettant le calcul des aires, avec la longueur de classe plus petite.

Propriété 2 *: (fonction intégrable)*

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b]$.

1. *Il existe deux suites de fonctions en escaliers g_n et h_n telles que*
   - $\forall x \in [a, b]$, $g_n(x) \leq f(x) \leq h_n(x)$.
   - *Les suites $I(g_n)$ et $I(h_n)$ sont convergentes et ont même limite.*
2. *Si les suites (u_n) et (v_n) sont deux autres suites de fonctions en escaliers vérifiant le premier volet (1) de cette propriété, alors la limite commune de $I(g_n)$ et $I(h_n)$ est la même que celle de $I(u_n)$ et $I(v_n)$.*

Remarque 7 *: Il existe des fonctions non continues mais intégrables. Il suffit que cette propriété 2 soit vérifiée.*

2.3 Primitives usuelles

Etant donnée une fonction f, il s'agit de déterminer toutes les fonctions F telles que $F' = f$. On convient de noter : $\int f(x)dx$ une primitive générique de f. Cette intégrale sans bornes d'intégration est appelée intégrale indéfinie de f. Intégrer f c'est chercher toutes les primitives de f. Voici quelques primitives usuelles, avec $u(x)$ une fonction de x :

Primitives	Primitives
$\int u'(x)\ u(x)^{\alpha}\,dx = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$	$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = Log\lvert u(x)\rvert + c$
$\int u'(x)\,cos(u(x))\,dx = sin(u(x)) + c$	$\int u'(x)\,sin(u(x))\,dx = -u'(x)\,cos(u(x)) + c$
$\int \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}\,dx = Arctg(u(x)) + c$	$\int \frac{u'(x)}{cos^2(u(x))}\,dx = tg(u(x)) + c$
$\int \frac{u'(x)}{sin^2(u(x))}\,dx = -cotg(u(x)) + c$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}\,dx = Arcsin(u(x)) + c$
$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}\,dx = -Arccos(u(x)) + c$	$\int u'(x)\,e^{u(x)}\,dx = e^{u(x)} + c$
$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u(x)^2}} = Argsh(u(x)) + c$	$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)^2-1}} = Argch(u(x)) + c$
$\int \frac{u'(x)}{1-u(x)^2} = Argth(u(x)) + c$	$\int -\frac{u'(x)}{1-u(x)^2} = Argcoth(u(x)) + c$

2.3.1 Quelques propriétés de l'intégrale

Propriété 3 *:*

1. *Soient une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant des primitives sur l'intervalle I et $x_0 \in I$. La fonction F définie sur I par l'intégrale $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.*

2. *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^b (\alpha\, f + \beta\, g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

3. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ (rep. $f(x) \leq 0$), alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ (rep. $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$).*

4. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.*

5. *Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\forall c \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. (Relation de Chasles)*

6. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors on a : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.*

7. *Notons $\mathcal{C}([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$. L'application $\Phi : \mathcal{C}([a,b])^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(f,g) = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ est un produit scalaire. On en déduit l'inégalité de Cauchy-Swartz*

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leq \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Propriété 4 *: Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-a;a]$.*

1. *Si f est une fonction paire, alors*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

2. *Si f est une fonction impaire, alors*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

2.3.2 Inégalité de la moyenne

Définition 5 *: (Valeur moyenne)*

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a < b$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$, le réel

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Théorème 8 *: (Théorème de la moyenne)*

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a < b$. Il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$$

Preuve : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$; alors f est bornée sur $[a,b]$ et il existe deux réels m et M (borne inférieure et supérieure de f sur $[a,b]$) tels que $\forall x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$. D'où $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$ et $m \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq M$. D'après le théorème des valeurs intermédiares, $\exists c \in [a,b]$, $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Propriété 5 *: (Inégalité de la moyenne)*

Soit f une fonction admettant des primitives sur $[a,b]$.

1. *Si $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.*
2. *Si $|f| \leq M$, alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M\,|b-a|$.*

2.4 Techniques de calcul des primitives

2.4.1 Intégration par parties

Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions dérivables. On déduit de la formule $(u(x)v(x))' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$ la formule :

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

appelée formule d'intégration par parties.

Puisque $du(x) = u'(x)\,dx$ et $dv(x) = v'(x)\,dx$, on peut encore l'écrire sous la forme

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du \tag{2.2}$$

Exemple : Calculer $\int Log(x)dx$. On pose $dv = 1$ et $u(x) = Log(x)$. D'où $v(x) = x$ et $du = \frac{1}{x}dx$. La formule (2.2) devient

$$\begin{aligned}\int u\,dv &= u\,v - \int v\,du\\ &= xLog(x) - \int dx\\ &= xLog(x) - x + c\end{aligned}$$

$$I = \int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = Argsh(x) + \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

D'autre part,

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int x\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = x\sqrt{x^2+1} - \underbrace{\int \sqrt{x^2+1}dx}_{I} + c$$

Donc $I = \dfrac{1}{2}(Argsh(x) + x\sqrt{x^2+1}) + c$.

2.4.2 Intégration des fractions rationnelles

Définition 6 *:*

Une fraction rationnelle s'écrit sous la forme $\dfrac{f}{g}$ *ou* $f.g^{-1}$ *où* f *et* g *sont des polynômes à coefficients réels et* g *non nul. L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients réel est noté* $\mathbb{R}(x)$*.*

Soient $\dfrac{f}{g}$ et $\dfrac{h}{l}$ deux fractions rationnelles. Alors

$$\frac{f}{g} = \frac{h}{l} \Longleftrightarrow f.l = g.h$$

Soit r une fraction rationnelle, **la forme irréductible** de r est une représentation de la forme $\frac{f}{g}$ où f et g n'ont pas de facteurs communs. Lorsque $\dfrac{f}{g}$ est une forme irréductible ou réduite de r, alors toutes les expressions de r sont du type $\frac{h.f}{h.g}$ où h est un polynôme non nul.

Exemples : $\dfrac{1}{x+1}$ est une forme réduite ; $\dfrac{x-2}{x^3-8}$ a pour forme réduite $\dfrac{1}{x^2+2x+4}$.

Soit $r = \dfrac{f}{g}$ une fraction rationnelle. On appelle pôle de r toute racine de g. Lorsqu'un réel a est une racine de g d'ordre m, on dit que a est un pôle d'ordre m de r.

Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont exactement les polynômes du premier degré conduisant aux fractions appelées **éléments simples de première espèce**, et ceux se ramenant au second degré dont le discriminant est strictement négatif conduisant aux fractions appelées **éléments simples de deuxième espèce**.

Proposition 1 *:*

1. *Si une fraction rationnelle r admet une représentation $\dfrac{f}{g}$ telle que $\partial^\circ f < \partial^\circ g$, alors toute autre représentation $\dfrac{h}{l}$ est telle que $\partial^\circ h < \partial^\circ l$*
2. *Toute fraction rationnelle r s'écrit de manière unique sous la forme $E + K$, où E est un polynôme appelé partie entière de r et K pouvant s'écrire $\dfrac{f}{g}$ avec $\partial^\circ f < \partial^\circ g$.*

Exemple : $r = \dfrac{x^3+x+1}{x+2}$ est une fraction rationnelle. r peut encore s'écrire $r = x^2 - 2x + 5 + \dfrac{-9}{x+2}$; sous cette forme on voit que $E(x) = x^2 - 2x + 5$ est la partie entière de r.

Décomposition en éléments simples et intégration

Proposition 2 *:*

Soit $\dfrac{f}{g}$ une fraction rationnelle telle que $\partial^\circ f < \partial^\circ g$. Supposons $g = g_1\, g_2$, avec g_1 et g_2 premiers entre eux (pas de facteur commun). Il existe une décomposition unique

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}$$

telle que $\partial^\circ f_1 < \partial^\circ g_1$ et $\partial^\circ f_2 < \partial^\circ g_2$.

Proposition 3 *:*

Soit $\dfrac{f}{g}$ une fraction rationnelle telle que $\partial^\circ f < \partial^\circ g$. Supposons $g = g_1\, g_2 \cdots g_p$, avec $g_1, g_2, \cdots g_p$ premiers entre eux deux à deux. Il existe une décomposition unique

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} + \cdots + \frac{f_p}{g_p}$$

telle que $\partial^\circ f_1 < \partial^\circ g_1, \partial^\circ f_2 < \partial^\circ g_2, \cdots, \partial^\circ f_p < \partial^\circ g_p$.

1. Les fractions rationnelles de la forme $\dfrac{a}{(x-b)^k}$ où a, b sont des constantes réelles et $k \in \mathbb{N}^*$ sont les **éléments simples de première espèce relatifs au pôle** b.
2. Les fractions rationnelles de la forme $\dfrac{ax+b}{(cx^2+dx+e)^k}$ où a, b, c, d, e sont des constantes réelles et $k \in \mathbb{N}^*$ sont les **éléments simples de deuxième espèce** lorsque le discriminant $\Delta = d^2 - 4\,c\,e < 0$.

On décompose une fraction $R = \dfrac{p(x)}{(a\,x+b)^k(c\,x^2+d\,x+e)^l}$, où $d^\circ p(x) < 2l+k$ en la mettant sous la forme

$$\frac{p(x)}{(a\,x+b)^k(c\,x^2+d\,x+e)^l} = \frac{a_1}{a\,x+b}\,\frac{a_2}{(a\,x+b)^2}\cdots\frac{a_k}{(a\,x+b)^k}\,\frac{c_1\,x+d_1}{c\,x^2+d\,x+e}\,\frac{c_2\,x+d_2}{(c\,x^2+d\,x+e)^2}\cdots\frac{c_l\,x+d_l}{(c\,x^2+d\,x+e)^l}$$

où toutes les constantes sont à déterminer.

Exemple : Décomposer en éléments simples et intégrer les fractions rationnelles suivantes :

1. $r = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x^2+x+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{cx+d}{x^2+x+1}$.
2. $$\frac{x-1}{x^3+8} = \frac{x-1}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b\,x+c}{x^2-2x+4} = \frac{-\frac{1}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}\,x}{x^2-2x+4}$$

   D'où

   $$\frac{x^4+8}{x^3+8} = x - 8\left(\frac{-\frac{1}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}\,x}{x^2-2x+4}\right) = x + \frac{2}{x+2} - \frac{2\,x}{x^2-2x+4}$$
3. $$\frac{1}{x^3(x^2+1)^2} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

2.4.3 Intégration par changement de variable

Théorème 9 *:*

Soit $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, strictement monotone (supposons croissante) et $f : [\phi(a),\phi(b)] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[\phi(a),\phi(b)]$. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b [(fo\phi)(t)]\phi'(t)dt$$

avec $x = \phi(t)$ et $dx = \phi'(t)\,dt$.

On peut utiliser ce changement de variable pour calculer les primitives, mais il faut toujours revenir à la variable initiale à la fin.

Exemples :

1. $\int \dfrac{e^{Arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \displaystyle\int e^u\,du$ car en posant $u(x) = Arcsin(x)$, on $du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. D'où $\int e^u\,du = e^u + c = e^{Arcsin(x)} + c$
2. $I = \int x\,cos(x^2+2)\,dx = \frac{1}{2}\int cos(u)\,du$; car en posant $u = x^2+2$, $du = 2x\,dx$; donc $I = -\frac{1}{2}sin(u) + c = -\frac{1}{2}\,sin(x^2+2) + c$.

2.4.4 Quelques critères de changement de variable pour certaines fonctions

Intégration des fonctions trigonométriques

Soit g une fonction telle que $g(x) = f(cos(x), sin(x), tan(x))$. On veut calculer l'intégrale $\int f(cos(x), sin(x), tan(x))dx$. On peut utiliser les changements de variables suivants. Si l'élément différentiel $f(cos(x), sin(x), tan(x))dx$ est invariant par le changement :

1. de x en $-x$, alors on pose $u = cos(x)$.
2. de x en $\pi - x$, alors on pose $u = sin(x)$.
3. de x en $\pi + x$, alors on pose $u = tan(x)$ ou $u = cotan(x)$.

Exemple : Calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int \frac{1}{cos^4(x)}dx$ et $\int sin^9(x)\, dx$.
$\dfrac{dx}{cos^4(x)} = \dfrac{d(x+\pi)}{cos^4(x+\pi)}$. L'élément différentiel est invariant par $x \longmapsto \pi + x$, on pose $u = tan(x)$.

$$\int \frac{dx}{cos^4(x)} = \int \frac{1}{cos^2(x)}\frac{dx}{cos^2(x)} = \int (1+tan^2(x))\frac{dx}{cos^2(x)} = \int (1+u^2)du = u+\frac{u^3}{3}+c = tan(x)+\frac{tan(x)^3}{3}+c$$

$sin^9(-x)\, d(-x) = sin^9(x)\, dx$; l'élément différentiel est invariant par $x \longmapsto -x$. On pose $u = cos(x)$.
$\int sin^9(x)dx = \int sin^8(x)\, sin(x)\, dx = \int (1-cos^2(x))^4\, sin(x)\, dx = -\int (1-u^2)du.$

Sinon, essayer d'une manière générale le changement suivant $u = tg(\frac{x}{2})$. On sait dans ce cas que $sin(x) = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $cos(x) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ et $tan(x) = \dfrac{2u}{1-u^2}$.

Exemple : Calculer $\int \dfrac{1}{1+cos(x)}dx$.

Intégration des fonctions hyperboliques

Pour calculer l'intégrale $\int f(sh(x), ch(x), th(x), e^x)dx$, on a plusieurs possibilités.

• On peut poser $u = e^x$ et se ramener à l'intégrale d'une fraction rationnelle en u.

• On peut également linéariser en utilisant les formules $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, $sh(2x) = 2sh(x)\, ch(x)$, $ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x) = 2ch^2(x) - 1 = 2sh^2(x) + 1$.

• On peut d'une manière générale poser $u = th(\dfrac{x}{2})$, d'où $\dfrac{x}{2} = Argth(u)$ et $dx = \dfrac{2du}{1-u^2}$. On sait dans ce cas que $sh(x) = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $ch(x) = \dfrac{1+u^2}{1-u^2}$ et $th(x) = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

Exemple : Calculer de deux manières $\int \dfrac{1}{ch(x)}dx$.

1. On pose $u = th(\dfrac{x}{2})$, d'où $\dfrac{x}{2} = Argth(u)$ et $dx = \dfrac{2du}{1-u^2}$. Dans ce cas,

$$\int \frac{1}{ch(x)}dx = \int \frac{2du}{1-u^2}\frac{1-u^2}{1+u^2}du = 2\int \frac{du}{1+u^2} = 2Arctg(u) + c = 2Arctg(th(\frac{x}{2})) + c.$$

2. On sait que $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Dans ce cas,

$$\int \frac{1}{ch(x)} dx = 2 \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 2 \int \frac{e^x\, dx}{e^{2x}+1} = 2 \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2+1} = 2Arctg(e^x) + c.$$

2.4.5 Intégrales abéliennes

Intégrales abéliennes de première espèce

Ce sont les intégrales de la forme $I = \displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}\right) dx$, où $R(x,y)$ est un rapport de deux polynômes en x et $y = \sqrt[n]{\dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}}$. On pose dans ce cas $t = \sqrt[n]{\dfrac{a\,x+b}{c\,x+d}}$ et I se ramène au calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle en t.

Exemple : Calculer $I = \int \sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x+1}} dx$. On pose dans ce cas $u = \sqrt[3]{\dfrac{x+3}{x+1}}$, d'où $x = \dfrac{3-u^3}{u^3-1}$ et $dx = \dfrac{-6\,u^2}{(u^3-1)^2} du$.

$$\int u dx = \int u \frac{-6\,u^2}{(u^3-1)^2} du = u \frac{3-u^3}{u^3-1} - \int \frac{3-u^3}{u^3-1} du$$

Intégrales abéliennes de deuxième espèce

Ce sont des intégrales de la forme $\displaystyle\int R(x, \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}) dx$, où $R(x,y)$ est le rapport de deux polynômes en x et $y = a\,x^2+b\,x+c$. Dans ce cas, on met $a\,x^2+b\,x+c$ sous la forme canonique. On suppose $a = \pm 1$.

1. $a\,x^2+b\,x+c = (x-\alpha)^2 - \beta^2$, alors on pose $x - \alpha = \beta\, ch(u)$.
2. $a\,x^2+b\,x+c = (x-\alpha)^2 + \beta^2$, alors on pose $x - \alpha = \beta\, sh(u)$.
3. $a\,x^2+b\,x+c = -(x-\alpha)^2 + \beta^2$, alors on pose $x - \alpha = \beta\, cos(u)$ ou $x - \alpha = \beta\, sin(u)$.

Les deux premiers cas mènent à une fraction rationnelle en $ch(u)$, $sh(u)$. Le troisième cas mène à une fraction rationnelle en $cos(u)$ et $sin(u)$.

Exemple : Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+2x+6}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+2x+6}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{5}{4})^2 - (x-\frac{1}{4})^2}}$$

Donc $\alpha = \frac{1}{4}$ et $\beta = \frac{5}{4}$. On pose $x - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} sin(u)$, avec $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$. D'où

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+2x+6}} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{5}{4}cos(u)du}{\sqrt{(\frac{5}{4})^2 - (\frac{5}{4})^2 sin^2(u)}} = \frac{1}{2} \int du = \frac{1}{2}u + c = \frac{1}{2} Arcsin\left[\frac{1}{5}(4x-1)\right] + c$$

Calculer les intégrales suivantes : $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $\int \sqrt[6]{\frac{x}{x-1}}$, $\int \sqrt{x^2+x+1}$, $\int \sqrt{1-x^2}$, $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+5}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$.

Remarque 8 *: Pour calculer* $\int R(x, \sqrt[n]{p(x)})dx$, *où* $p(x)$ *est un polynôme, on pose en général* $t = \frac{y}{x}$.

Exemple : Calculer $\int \sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}dx$ et $\int \sqrt{2x^2-x+3}\,dx$.

2.5 Intégrales impropres

Le but de cette partie est de généraliser la notion d'intégration à un intervalle autre qu'un segment, c'est-à-dire à une fonction continue par morceaux sur un intervalle non borné ou sur un intervalle (semi-) ouvert.

On veut par exemple donner un sens au calcul $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = [Arcsin(t)]_{-1}^{1} = \pi$. Le problème ici est que la fonction $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ne peut être prolongée en une fonction continue par morceaux sur $[-1,1]$ car elle n'est pas bornée.

Graphiquement, on calcule l'aire de la partie (non bornée) du plan délimitée par la courbe d'équation $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et les droites d'équations $x=-1$, $x=1$ et $y=0$.

Autre exemple, on va justifier l'existence d'une intégrale sur l'intervalle $[0,+\infty[$ de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$. Pour $x \geq 0$,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = [Arctan(t)]_0^x = Arctan(x) \longrightarrow \frac{\pi}{2} \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

On écrira donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$ $(resp.]-\infty,a])$, où $a \in \mathbb{R}$. $\forall x \in [a,+\infty[$ $(resp.]-\infty,a])$, f est intégrable sur le segment $[a,x[$ $(resp.]x,a])$. On peut alors définir une fonction

$$F : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R};\ x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$(resp.\, F :]-\infty,a] \longrightarrow \mathbb{R};\ x \longmapsto F(x) = \int_x^a f(t)dt$$

Définition 7 *:*

Soit f *une fonction continue sur l'intervalle* $[a,+\infty[$ $(resp.]-\infty,a])$, *où* $a \in \mathbb{R}$. *On définit*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

$$(resp. \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \int_{x}^{a} f(t)dt)$$

Définition 8 *:*

Le symbole $I = \int_a^{+\infty} f(t)dt$ (resp. $\int_{-\infty}^{a} f(t)dt$) est appelé intégrale impropre ou intégrale généralisée de f sur l'intervalle $[a, +\infty[$ (resp.$]-\infty, a]$).

1. *On dit que l'intégrale I converge ou qu'elle existe si la limite existe et est finie.*
2. *On dit qu'elle diverge lorsque la limite n'existe pas ou alors lorsqu'elle existe mais est infinie.*

2.5.1 Quelques exemples

Exemple 1 : Soit f une fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$. Pour $x \geq 1$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = 1 - \frac{1}{x} \longrightarrow 1 \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

Donc l'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ est convergente et on écrit $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^2}dt = 1$.

Exemple 2 : Soit g une fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(t) = \dfrac{1}{t}$. Pour $x \geq 1$,

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = ln(x) \longrightarrow +\infty \quad (x \longrightarrow +\infty)$$

Donc l'intégrale de g sur $[1, +\infty[$ est divergente.

Exemple 3 : Considérons la fonction cosinus sur $\mathbb{R}_+$. On a pour tout $x \geq 0$, $\int_0^x cos(t)\,dt = sin(x)$ qui n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} cos(t)\,dt$ n'a pas de sens.

Exemple 4 : Soit h la fonction définie sur $]0, 1]$ par $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Pour $0 < x \leq 1$,

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2 - 2\sqrt{x} \longrightarrow 2 \quad (x \longrightarrow 0)$$

Donc, l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{t}}dt$ existe et vaut 2.

2.5.2 Cas où il y a un problème aux deux bornes

Il s'agit ici du cas des intégrales doublement impropres.

Définition 9 *: Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$; soit $c \in]a, b[$.*

On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente lorsque les deux intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent.

Lorsque c'est le cas, on note $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$. Sinon on dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est divergente.

Exemple : On a déjà montré que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente. Pour $x \in]0,1]$, on a

$$\int_x^1 \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{x} - 1 \longrightarrow +\infty \quad (x \longrightarrow 0)$$

Donc $\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt$ diverge. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est divergente.

Remarque 9 *: Le calcul de l'intégrale ne dépend pas du point c.*

On remarquera par exemple que $\int_{-x}^{x} sin(t)dt \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow +\infty)$, pourtant $\int_{-\infty}^{+\infty} sin(t)dt$ n'a pas de sens puisque $\int_0^{+\infty} sin(t)dt$ diverge.

2.5.3 Intégrales faussement impropres

On est sur un intervalle de la forme $[a,b[$, où $-\infty < a < b < +\infty$.

Propriété 6 *:*

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. si f admet une limite finie en b, alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge. On dit dans ce cas que l'intégrale est faussement impropre (ou mal écrite) en b.

Remarque 10 *:*

- *Il n'y a pas d'intégrales faussement impropres en $\pm\infty$. C'est une notion réservée à une borne finie.*
- *Si f est seulement continue par morceaux sur $[a,b[$ (et non pas continue), il faut rajouter comme hypothèse que son prolongement $\tilde{f}$ en b soit continue par morceaux sur $[a,b]$, ce qui n'est pas automatique.*

Exemple : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(t)}{t}dt$ est faussement impropre en 0, donc convergente. En effet,

$$\frac{sin(t)}{t} \longrightarrow 1 \quad (t \longrightarrow 0)$$

Théorème 10 *: (Critère de Riemann)*

1. *L'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha \gg 1$.*
2. *L'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha \ll 1$.*

Remarque 11 *:*

1. *Si $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$ et si $\alpha < 1$, $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$.*
   Il n'est pas indispensable de les retenir car elles se retrouvent très facilement.
2. *On notera que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est toujours divergente car les conditions $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$ sont incompatibles.*

Théorème 11 *:*

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\, t}dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Pour tout polynôme p non nul, $\int_0^{+\infty} p(t)\, e^{-\alpha\, t}dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Théorème 12 *: (Critère de comparaison)*

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. On suppose que $\forall t \in [a, b[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$.

1. *Si l'intégrale $\int_a^b g(t)\, dt$ est convergente, alors $\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente et $0 \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt$.*
2. *Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\, dt$ diverge.*

Remarque 12 *:*

Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente. Une intégrale peut être convergente sans être absolument convergente.

Exemple : Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sin^2(t)}{1+t^2}\, dt$ est convergente.

On sait que $0 \leq \dfrac{sin^2(t)}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Corollaire 2 *:*

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $[a, b[$.

1. *On suppose que $f = O(g)$ en b. Si l'intégrale $\int_a^b g(t)\, dt$ est convergente, alors $\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ est divergente, alors $\int_a^b g(t)\, dt$ est divergente.*
2. *On suppose que $f = o(g)$ en b. Si l'intégrale $\int_a^b g(t)\, dt$ est convergente, alors $\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ est divergente, alors $\int_a^b g(t)\, dt$ est divergente.*

Preuve : Si $f = O(g)$ en b, alors il existe un réel $M > 0$ et un voisinage de b sur lequel $0 \leq f(t) \leq M\, g(t)$. On peut donc appliquer le critère de comparaison sur ce voisinage.

Pour le deuxième volet, $f = o(g)$ en b implique $f = O(g)$ en b.

2.5.4 Les intégrales de Bertrand

Il s'agit des intégrales de la forme $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha\, (ln\, t)^\beta}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

• Si $\alpha > 1$. On considère un réel γ tel que $1 < \gamma < \alpha$; ce réel existe car on peut prendre $\gamma = \frac{1+\alpha}{2}$. La croissance comparée des fonction logarithme et puissance s'écrit :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0, \frac{(ln\, t)^a}{t^b} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow +\infty), ie\ (ln\, t)^a = o(t^b) \quad (t \longrightarrow +\infty).$$

On en déduit donc que

$$\frac{\frac{1}{t^{\alpha}(ln\, t)^{\beta}}}{\frac{1}{t^{\gamma}}} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow +\infty), ie\ \frac{1}{t^{\alpha}(ln\, t)^{\beta}} = o\left(\frac{1}{t^{\gamma}}\right) \quad (t \longrightarrow +\infty).$$

Puisque $\gamma > 1$, l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\gamma}}$ est convergente, et puisqu'il s'agit de fonctions positives, on peut appliquer le corollaire précédent pour conclure que $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}\,(ln\, t)^{\beta}}$ converge.

• Si $\alpha < 1$. On choisit de même un réel γ tel que $\alpha < \gamma < 1$ et on peut écrire

$$\frac{\frac{1}{t^{\gamma}}}{\frac{1}{t^{\alpha}(ln\, t)^{\beta}}} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow +\infty), ie\ \frac{1}{t^{\gamma}} = o\left(\frac{1}{t^{\alpha}(ln\, t)^{\beta}}\right) \quad (t \longrightarrow +\infty).$$

L'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\gamma}}$ est divergente car $\gamma < 1$, les fonctions considérées étant positives, on peut conclure que $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}\,(ln\, t)^{\beta}}$ diverge.

• Si $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. Une primitive de $\frac{1}{t\, ln\, t}$ est $ln(ln\, t)$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc l'intégrale diverge dans ce cas.

• Si $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$. Une primitive de $\frac{1}{t\,(ln\, t)^{\beta}}$ est $\frac{(ln\, t)^{1-\beta}}{1-\beta}$ qui tend vers 0 en $+\infty$ lorsque $\beta > 1$ et vers $+\infty$ lorsque $\beta < 1$. On conclut que

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}\,(ln\, t)^{\beta}} \quad \text{converge} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha = 1 \quad et \quad \beta > 1 \end{cases}$$

Théorème 13 *: (Critère d'équivalence)*

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$. On suppose que $f(t) \sim g(t)$ en b et que f garde un signe constant au voisinage de b. Alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ ont la même nature.

Preuve : On suppose $f = O(g)$ en b et $g = O(f)$ en b. De plus, $f(t) \sim g(t)$ en b signifie qu'il existe une fonction $\epsilon\ :\ [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui tend vers 0 en b et qu'il existe un voisinage de b sur lequel on a $f(t) = g(t)(1 + \epsilon(t))$. Ainsi, f et g ont le même signe (qui est constant) au voisinage de b. On peut donc appliquer deux fois le corollaire précédent pour conclure que les deux intégrales ont la même nature.

Remarque 13 *:*

1. *On vérifie indifféremment que f ou g a un signe constant au voisinage de b puisque, comme c'est expliqué dans la preuve, deux fonctions équivalentes en b ont le même signe sur un voisinage de b. On écrira $f(t) \sim g(t) \geq 0$ en b ou bien $0 \leq f(t) \sim g(t)$ en b même lorsque la positivité est évidente.*

2. *Le théorème tombe bien évidemment en défaut si on supprime l'hypothèse sur le signe. Par exemple si on pose* $f(t) = \dfrac{sin(t)}{\sqrt{t}}$ *pour* $t \geq 1$ *et* $g(t) = ln(1 + f(t))$*, on prouve facilement que* $f(t) \sim g(t)$ *en* $+\infty$*,* $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ *converge et* $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ *diverge.*

Exemple : Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{[ln(1+t)]^\beta}dt$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Il suffit de remarquer que $\dfrac{t^\alpha}{[ln(1+t)]^\beta} \sim \dfrac{1}{t^{\beta-\alpha}} \geq 0 \quad (t \longrightarrow 0^+)$ et donc l'intégrale étudiée a la même nature que l'intégrale de Riemann $\int \dfrac{dt}{t^{\beta-\alpha}}$ qui converge si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.

Théorème 14 *: Toute intégrale absolument convergente est convergente.*

Proof : (Hors programme)

On commence par prouver le résultat lorsque la fonction f est à valeurs réelles. On suppose donc que $\int_a^b |f(x)|\, dx$ converge. On a l'encadrement suivant $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, ce qui implique $0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$. On peut appliquer le critère de comparaison pour déduire que $\int_a^b (f(x) + |f(x)|)dx$ est convergente. On peut par linéarité déduire que $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b [(f(x)+|f(x)|)-|f(x)|]dx$ est convergente. On peut donc conclure en remarquant que l'expression sous l'intégrale $(f(x) + |f(x)|) - |f(x)| = f(x)$.

Si maintenant la fonction f est à valeurs complexes, on va montrer que les intégrales $\int_a^b \mathcal{R}e(f(x))dx$ et $\int_a^b \mathcal{I}m(f(x))dx$ sont toutes deux convergentes. On a l'encadrement $0 \leq |\mathcal{R}e(f(x))| \leq |f(x)|$ et on déduit du critère de comparaison que $\int_a^b |\mathcal{R}e(f(x))|dx$ est convergente. Ainsi l'intégrale $\int_a^b \mathcal{R}e(f(x))dx$ est absolument convergente et par conséquent convergente (d'après ce qui précède, puisqu'elle est à valeurs réelles). On procède de la même façon pour la partie imaginaire.

Remarque 14 *: La réciproque du théorème est fausse car il existe des intégrales qui sont convergentes sans être absolument convergentes : on dit qu'elles sont semi-convergentes. Un exemple de ce type d'intégrale est étudié ci-dessous.*

Exemple : Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t^\alpha}\, dt$ pour $\alpha > 0$.

1. Supposons $\alpha > 1$. On a alors

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \left|\frac{sin(t)}{t^\alpha}\right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$$

De plus, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}$ est convergente car $\alpha > 1$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t^\alpha}\, dt$ est absolument convergente et donc convergente.

2. Supposons $0 < \alpha \leq 1$. On utilise une intégration par parties. Puisque $\dfrac{-cos(t)}{t^\alpha} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow +\infty)$, l'intégrale étudiée a la même nature que $\int_1^{+\infty} \dfrac{cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt$ qui est absolument convergente (donc

convergente). En effet,

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \left| \frac{cos(t)}{t^{\alpha+1}} \right| \leq \frac{1}{t^{\alpha+1}}$$

et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ est convergente car $\alpha + 1 > 1$.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t^\alpha} dt$ pour $\alpha > 0$ est convergente.

3. Montrons que cette intégrale n'est pas absolument convergente lorsque $0 < \alpha \leq 1$. Il s'agit de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|sin(t)|}{t^\alpha} dt$ est divergente.

   On utilise la minoration suivante : $|sin(t)| \geq sin^2(t)$. On a donc

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \frac{sin^2(t)}{t^\alpha} \leq \frac{|sin(t)|}{t^\alpha}.$$

   Il suffit donc de démontrer d'après le critère de comparaison que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{sin^2(t)}{t^\alpha} dt$ est divergente. Or on a $\dfrac{sin^2(t)}{t^\alpha} = \dfrac{1}{2t^\alpha} - \dfrac{cos(2t)}{2t^\alpha}$. On étudie donc la nature des deux intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^\alpha} dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{cos(2t)}{2t^\alpha} dt$. La première est divergente d'après le critère de Riemann car $\alpha < 1$. La seconde est convergente comme le montre une intégration par parties identique à la précédente. On déduit par linéarité que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{sin^2(t)}{t^\alpha} dt$ est divergente et donc que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|sin(t)|}{t^\alpha} dt$ est divergente.

   La conclusion générale est donc que

$$0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t^\alpha} dt \quad \text{est semi-convergente (convergente mais pas absolument convergente)}$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t^\alpha} dt \quad \text{est absolument convergente}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt$, qui est faussement impropre en 0, est semi-convergente et de nombreuses méthodes permettent de prouver qu'elle vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

2.6 Méthodes de calcul approché des intégrales

Lorsque la primitive de $f(x)$ ne peut pas être calculée de façon simple, ou que cela demande des calculs trop long, on est amené à calculer $\int_a^b f(x)dx$ de manière approchée à l'aide d'une méthode numérique. Nous présentons ici les méthodes graphique les plus classiques.

Soit f une fonction positive et intégrable sur un intervalle $[a, b]$ et C_f sa courbe représentative. On cherche une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$.

L'idée de départ, commune aux méthodes graphiques qui vont nous intéresser, est que l'on partage l'intervalle d'intégration $[a, b]$ en n intervalles égaux $[x_k, x_{k+1}]$ de longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$, avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.

Les points A_k ont pour coordonnées $(x_k, f(x_k))$, les points B_k ont pour coordonnées $(x_k, 0)$. On désigne par g_k une approximation de la fonction f sur les intervalles $[x_k, x_{k+1}]$.

Ainsi on peut décomposer $\int_a^b f(x)dx$ en $\sum\limits_{k=0}^{n-1} I_k$ avec $I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx$. On prend alors comme valeur approchée de I_k : $J_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(x)\, dx$. Le choix de la fonction g_k conduit à l'une des trois méthodes présentées ci-dessous.

2.6.1 Méthode des rectangles

On prend comme fonction g_k, la fonction constante $f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$ qui correspond à la valeur de f au point milieu de l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$.

Ainsi,

$$J_k = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)\int_{x_k}^{x_{k+1}} dx = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)(x_{k+1} - x_k) = hf\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

La valeur approchée de I est alors donnée par

$$I \approx J = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

Lorsque f est une fonction en escaliers qui associe c_k sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, on obtient : $\int_a^b f(x)\, dx \approx \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k$.

Propriété 7 *:*

Si f est dérivable sur $[a, b]$ et f' est bornée sur $[a, b]$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} c_k\right| \leq C\,\frac{b-a}{n}$$

où

$$C = \frac{1}{2}(b-a)\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

.

2.6.2 Méthode des trapèzes

On prend comme fonction g_k la fonction affine égale à f aux points extrêmes de l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$; on approche donc f par la fonction affine par intervalle définie par :

$$g(x) = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{b-a} n(x - x_k) + f(x_{k+1})$$

Graphiquement, cela revient à considérer des trapèzes au lieu des rectangles dans le cas précédent. J_k est alors égale à l'aire du trapèze $A_k B_k B_{k+1} A_{k+1}$.

Ainsi, $J_k = \frac{h}{2}[f(x_k) + f(x_{k+1})]$, ce qui conduit à l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{2n} (f(x_k) + f(x_{k+1}))$$

ou encore

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx J = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right]$$

Propriété 8 *:*

Soit f une fonction trois fois dérivable sur $[a, b]$, telle que $f^{(3)}$ est une fonction bornée sur $[a, b]$. Alors on a

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{2n} (f(x_k) + f(x_{k+1})) \right| \leq C \left(\frac{b-a}{n} \right)^2$$

où

$$C = \frac{1}{2} \left[(b-a) \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)| + (b-a)^2 \sup_{x \in [a,b]} |f^{(3)}(x)| \right]$$

.

Il existe de nombreuses autres méthodes : méthode du point milieu, méthode de Simpson et bien d'autres.

Un exemple en démographie

L'évolution de la taille de la population du Botswana ces 25 dernières années est représentée à l'aide des données ci-dessous.

Temps (année)	Nombre d'habitants (millions)
1975	0.755
1980	0.901
1985	1.078
1990	1.285
1995	1.6

La fonction exponentielle permet de décrire cette évolution et on obtient la relation suivante $P(t) = 0.7835\, e^{0.0291\, t}$. Si l'on désigne par P la taille de la population du Botswana et par t l'année ($t = 0$ correspondant à 1975).

On peut ainsi calculer le temps de doublement de la population, c'est à dire la valeur θ de t telle que $P(t+\theta) = 2P(t)$.

$$\begin{aligned} P(t+\theta) = 2P(t) \quad &\Leftrightarrow 0.7835\, e^{0.0291\,(t+\theta)} = 2 \times 0.7835\, e^{0.0291\, t} \\ &\Leftrightarrow e^{0.0291\,\theta} = 2 \\ &\Leftrightarrow \theta \approx 24 \quad annees \end{aligned}$$

Supposons qu'en 2001, certains habitants craignent cette augmentation massive de la population prévue d'ici 25 ans ; en effet, selon l'équation précédente, la taille de la population aura doublée par rapport à celle de 2001 en 2025 pour passer à 3.2 millions d'habitants.

On peut raisonnablement imaginer que ces habitants vont alors chercher à émigrer vers d'autres pays. L'intégrale du taux d'émigration sur 25 ans est égale à l'émigration totale pendant cette période.

Si on suppose qu'un quart de la population de 2001 (soit 0.4 millions d'habitants) va émigrer ces 25 prochaines années, et si on suppose que le taux d'émigration a va augmenter de façon linéaire pendant cette période, il vient : $\int_0^{25} a\, t\, dt = \dfrac{1.6}{4}$.

Nous en déduisons que le taux d'émigration a est $a = 0.0128$, exprimé en millions d'habitants par an.

Un exemple en médecine

Considérons la fonction f définie sur $[0; 20]$ par $f(t) = 3\, e^{-0.1\, t}$. La fonction f relie la quantité d'un certain médicament dans le sang au temps t, pendant les $20h$ qui suivent l'injection.

On peut calculer la quantité moyenne de médicament présente dans le sang pendant les 10 premières heures.

$$\mu = \frac{1}{10} \int_0^{10} f(t)\, dt = 3(1 - e^{-1}) \approx 1.8964u$$

2.7 Exercices

2.7.1 Exercice

Soient f et g deux fonctions intégrables sur un intervalle $[a, b]$, $a < b$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (f et g ne sont pas forcément continues).

1. On considère la fonction suivante $\varphi(\lambda) = \displaystyle\int_a^b [f(x) + \lambda\, g(x)]^2 dx$, définie sur $\mathbb{R}$. Utiliser cette fonction

pour démontrer l'inégalité de Schwarz

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right)\left(\int_a^b [g(x)]^2\,dx\right).$$

2. Déduire de cette inégalité l'équivalence suivante :

$$\left(\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right) = 0.$$

3. On suppose maintenant que les fonctions f et g sont continues sur l'intervalle $[a,b]$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité dans l'inégalité dite de Schwartz.

2.7.2 Exercice

On note $C^+([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues et strictement positives sur $[a,b]$, $a < b$. On pose

$$\forall f \in C^+([a,b]),\ \varphi(f) = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)$$

1. Utiliser la fonction $f_\alpha(x) = e^{\alpha\,x}$ pour illustrer le fait que φ n'est pas une fonction majorée sur $C^+([a,b])$. Déterminer une autre fonction qui illustre cela.
2. Montrer que la fonction φ admet une borne inférieure sur $C^+([a,b])$ qu'on notera m (on ne cherchera pas à calculer m).
3. En utilisant l'inégalité de Schwarz, montrer que $m \geq (b-a)^2$ et en déduire que $m = (b-a)^2$.
4. Caractériser toutes les fonctions de $C^+([a,b])$ pour lesquelles $\varphi(f) = m$.

2.7.3 Exercice

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a,b]$, $a < b$, avec f continue et g intégrable de signe constant sur $[a,b]$.

1. Démontrer qu'il existe deux réels m et M tels que $m \leq M$ et $f([a,b]) = [m, M]$.
2. Utiliser la question précédente pour établir la première formule de la moyenne

$$\exists \xi \in [a,b] \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. On suppose que la fonction g est de signe constant positif sur $[a,b]$. Démontrer la deuxième formule de la moyenne

$$\exists \xi \in [a,b] \qquad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

On distinguera deux cas $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ et $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$.

4. On suppose que la fonction g est de signe constant négatif sur $[a,b]$. Étendre le résultat obtenu à la question précédente.

5. Que doit-on changer dans chacune des deux formules de la moyenne lorsque les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre inverse de l'ordre naturel ? Lorsque les bornes de l'intégrale sont égales ?.

6. Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, b]$, $a < b$, avec f continue et g monotone et de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que

$$\exists \xi \in [a,b] \quad \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(\xi)[g(b) - g(a)].$$

7. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. On pose

$$u_n = \int_0^1 x(x-1)(x-2)(x-3) \times \cdots \times (x-n+1)dx.$$

Montrer en vous servant des questions précédentes que

$$\exists \xi \in [a,b] \quad u_n = (-1)^{n+1} \frac{(n-1-\xi)(n-2-\xi)(n-2-\xi) \times \cdots \times (3-\xi)(2-\xi)}{6}.$$

8. En déduire que $u_n = o(n!)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

2.7.4 Exercice

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, continue. On pose $F(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt$.

1. Montrer que la fonction F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer sa fonction dérivée F'.

2. Montrer que si la fonction f admet une limite L en $+\infty$, alors F admet la même limite en $+\infty$ (on distinguera le cas où la limite L est finie du cas infini).

3. On suppose que $f(t) = |t|$. Déterminer F et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

2.7.5 Exercice

Soit la fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soient deux réels fixés a et b. On pose $F(x) = \int_a^b f(x+t)cos(t)\, dt$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, b]$ et calculer sa fonction dérivée F'.

2.7.6 Exercice

Soit f une fonction continue et croissante sur $[a, b]$, $a < b$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $F(x) = \int_a^b f(t)\, dt$ l'unique primitive de f qui s'annule au point a. Montrer que

$$\forall x, y \in [a,b], \quad F\left[\frac{x+y}{2}\right] \leq \frac{F(x) + F(y)}{2}.$$

2.7.7 Exercice

On désire écrire la formule de Taylor avec reste intégral. Pour cela, on considère une fonction f de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Calculer de manière successive et par partie l'intégrale $F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)\, dt$, $\forall x_0 \in I$ et en déduire la formule de Taylor avec reste intégral.

2.7.8 Exercice

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\int_0^{\pi} x\, f(sin(x))dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(sin(x))dx$.
2. On pose $I = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x\, sin(x)}{1 + cos^2(x)} dx$. Déduire de la première question que $I = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ et calculer I.

2.7.9 Exercice

On pose $I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$, et pour tout entier naturel n non nul.

1. Établir une relation de récurrence entre $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$.
2. Initialiser la suite.

2.7.10 Exercice

On pose $A_n(x) = \int_0^x \frac{t^n\, dt}{\sqrt{t^2 + a^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, a un réel non nul et n entier naturel.

1. Montrer que

$$\forall n \geq 2,\, n\, A_n(x) = x^{n-1}\sqrt{x^2 + a^2} - (n-1)a^2\, A_{n-2}$$

   et initialiser la suite.
2. Montrer que $A_{2n+1}(x) = \int_0^{x^2} u^n\, d\left(\sqrt{u + a^2}\right)$ et en déduire A_{2n+1} sous forme de somme ($\sum$).

2.7.11 Exercice

On désire calculer les intégrales suivantes. On pourra effectuer si nécessaire un changement de variable simplificateur, en écrivant la fonction g sous le signe intégral sous la forme $g(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$.

1. $\int_0^x \frac{sh(t)}{1 + ch^2(t)}\, dt\,;$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cos(t)}{1 + sin(t) + cos(2t)}\, dt\,;$
3. $\int \frac{cos^3(t) + cos^5(t)}{sin^2(t) + sin^4(t)}\, dt\,;$
4. $\int \frac{sin(t) + sin^3(t)}{cos(2t)}\, dt\,;$

5. $\displaystyle\int_2^4 \frac{t^5}{\sqrt{t^4-4}}\,dt\,;$
6. $\displaystyle\int \frac{cos(\sqrt{t})+sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}\,sin(2\sqrt{t})}\,dt\,;$
7. $\displaystyle\int \sqrt{a+tg^2(t)}\,dt$, où a est un réel strictement positif ;
8. $\displaystyle\int \frac{2t-1}{t(t+1)^2(t^2+t+1)^2}\,dt\,;$
9. $\displaystyle\int \frac{t\,e^t}{\sqrt{1+e^t}}\,dt\,;$
10. $\displaystyle\int ch^3(t)\,dt$, $\int cos^7(t)\,dt\,;$
11. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t+1}+(t+1)^{\frac{1}{3}}}\,dt\,;$
12. $\displaystyle\int \frac{dt}{cos^n(t)}\,dt$, où n est un entier naturel quelconque ;
13. $\displaystyle\int \frac{dt}{ch^n(t)}\,dt$, où n est un entier naturel quelconque ;

2.7.12 Exercice

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, périodique de période $T > 0$ et continue sur $\mathbb{R}$. On donne les trois assertions suivantes :

- Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont T-périodiques ;
- $\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt = 0\,;$
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_0^T f(t)\,dt = 0$.

1. Montrer que les trois assertions précédentes sont équivalentes.
2. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et F_0 la restriction de F à l'intervalle $[0, T[$. Comment peut-on déduire F ailleurs sur $\mathbb{R}$ à partir de F_0 ?
3. On suppose que la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, mais non identiquement nulle. Montrer qu'aucune primitive de f sur $\mathbb{R}$ n'est T-périodique.

2.7.13 Exercice

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{cos(x)+sin(x)}\,dx; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{cos(\theta)}\,dx.$$

1. Montrer que $I = J\sqrt{2}$ (on ne calculera ni I, ni J dans cette question).
2. En déduire la valeur de I et celle de J.

2.7.14 Exercice

Étudier la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t\,x}\,dt$; où α est un réel non nul et positif, x un réel positif ;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{\sqrt{t^5+t+1}}\,dt$;
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt$;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3t-1}{t(4t^2+1)}\,dt$;
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t\sqrt{1-ln^2(t)}}\,dt$;
6. $\displaystyle\int_0^1 Arctg\left(\frac{1}{t}\right)\,dt$;
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,e^{\frac{1}{t}}\,dt$;
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2}\,dt$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2}\,dt$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{sin(t)}{t}\,dt$.

2.7.15 Exercice

1. Montrer que la fonction Gamma définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$ est convergente quel que soit le réel x non nul et positif.
2. Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathcal{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

2.7.16 Exercice

Étudier pour tout réel α la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^1 |ln(t)|^{\alpha}\,dt$.

2.7.17 Exercice

1. Montrer en utilisant un changement de variable que

$$K = \int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}\,du$$

2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}\,du$ et en déduire la valeur de l'intégrale de départ K.

2.7.18 Exercice

Soit f une fonction continue sur $I =]a, +\infty[$, décroissante et minorée. On désigne par F la primitive de f sur I qui s'annule en $b \in I$.

1. Montrer que $\forall x \in I$, $F(x) = \displaystyle\int_b^x f(t)\,dt$.

2. Déduire de la question précédente que pour tout entier naturel n, on a

   - $f(b+n+1) \leq F(b+n+1) - F(b+n) \leq f(b+n)$;
   - $f(b+1) + f(b+2) + \cdots + f(b+n+1) \leq F(b+n+1) \leq f(b) + f(b+1) + \cdots + f(b+n)$;

3. On pose $u_n = f(b) + f(b+1) + \cdots + f(b+n)$ et $v_n = u_n - F(b+n)$.

   - Montrer que la suite v_n est décroissante ;
   - Montrer que pour tout entier naturel n, $f(b+n+1) \leq v_n \leq f(b)$.

2.7.19 Exercice

Soit l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)\, dx$.

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. Déterminer les valeurs de I_{2n} et I_{2n+1}.
3. En déduire la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)\, dx$.

2.7.20 Exercice

Calculer à l'aide de changements de variable les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}} dx$; $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{6}} dx$; $\displaystyle\int \sqrt{x^2+x+1}\, dx$; $\displaystyle\int \frac{(x^4+x^3)^{\frac{1}{4}}}{x^2}\, dx$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\, dx$; $\displaystyle\int \frac{sin(x)}{1-cos(x)}\, dx$; $\displaystyle\int \frac{x\, sin(x)}{3+sin^2(x)}\, dx$; $\displaystyle\int (1+x^2)^{\frac{3}{2}}\, dx$.

2.7.21 Exercice

Décomposer en éléments simples les factions rationnelles suivantes et en déduire une primitive de chacune d'elles :

1. $r_1 = \dfrac{2x+3}{x^2-4}$; $r_2 = \dfrac{x^2-1}{x^3+4x^2+5x}$; $r_3 = \dfrac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$; $r_4 = \dfrac{1}{x^4+x^2+1}$.
2. $r_5 = \dfrac{x^6+1}{x^2(x^2+2)}$; $r_6 = \dfrac{x^4+1}{x^2(x^2+3)}$; $r_7 = \dfrac{x^4+8}{x^3+8}$; $r_8 = \dfrac{7}{(x^2+2)^3}$.

Chapitre 3

Equations différentielles

3.1 Introduction

La notion d'équation différentielle apparaît chez les mathématiciens à la fin du $XVII$ème siècle. Encouragé par Huygens à étudier les mathématiques, Leibniz sera l'inventeur en 1686, en même temps que Newton, du calcul différentiel et intégral.

A cette époque, les équations différentielles s'introduisent en mathématique par le biais de problèmes d'origine mécanique ou géométrique, comme par exemple : le mouvement du pendule circulaire, le problème du mouvement de deux corps s'attirant mutuellement suivant la loi de la gravitation Newtonnienne, le problème de l'étude de mouvements de corps élastiques (tiges, ressorts, cordes vibrantes), le problème de l'équation de la courbe (appelée chaînette) décrivant la forme prise par une corde, suspendue aux deux extrémités et soumise à son propre poids ; beaucoup pensaient à tord que c'était une parabole, mais ce problème fût résolu en 1691 par Bernouilli.

Vers 1700, beaucoup de ces problèmes étaient déjà partiellement ou totalement résolus et quelques méthodes de résolution mises au point. Ensuite, les mathématiciens se sont progressivement intéressés à des classes de plus en plus larges d'équations différentielles.

Assez curieusement, les **équations différentielles linéaires à coefficients constants sans second membre**, qui apparaissent maintenant comme les plus simples, ne furent résolues qu'en 1739 par Euler. Il ne faut pas oublier que pour les mathématiciens de cette époque, le maniement de la fonction exponentielle n'était pas encore familier.

Les mathématiciens s'attachent au calcul effectif d'une solution, à l'aide de ce que nous appelons maintenant les fonctions élémentaires.

Vers 1870, Fuchs, puis Poincaré, vont inaugurer un nouveau champ de recherche. Le calcul effectif des solutions est la plupart du temps impossible, mais on peut chercher à déduire de l'examen a priori de l'équation les propriétés des solutions.

Enfin, le développement moderne des moyens de calcul ajoute à cette panoplie la possibilité de calculer numériquement, dans un temps raisonnable, des solutions approchées très précises d'équations différentielles ou d'explorer les propriétés que l'on peut attendre des solutions.

Dès le début du XXème siècle, les équations différentielles ont trouvé de nombreuses applications dans les Sciences de la Vie, lorsqu'est apparue la nécessité de relier le sujet biologique réel et la représentation qu'on se donne à travers un objet mathématique, que l'on appelle un **modèle mathématique**. Par exemple en démographie, les équations différentielles sont utilisées pour décrire l'évolution de la taille de la population d'un pays qui présente les caractéristiques suivantes : par an, le taux de renouvellement de la population est de 20 pour 1000 habitants, et le taux de mortalité est de 15 pour 1000 habitants.

Soit $N(t)$ la taille de la population l'année t, exprimée en milliers d'habitants. La variation annuelle de la taille de la population peut être quantifiée à l'aide de la quantité $\frac{dN(t)}{dt}$. Ainsi, on peut écrire par le jeu d'une balance entre renouvellement naturel et mortalité :

$$\frac{dN(t)}{dt} = a\,N(t) - b\,N(t) = r\,N(t)$$

avec a le taux de renouvellement de la population, $a = \frac{20}{1000}$ (soit 20 pour 1000), b le taux de mortalité de la population, $b = \frac{15}{1000}$ (soit 15 pour 1000), r le taux d'accroissement absolu ou intrinsèque de la population, $r = \frac{5}{1000}$ (soit 5 pour 1000). Pour connaître l'évolution de $N(t)$ en fonction de t, on résout l'équation différentielle à variables séparables $\frac{dN(t)}{dt} = r\,N(t)$. On obtient $N(t) = k\,e^{r\,t}$.

3.2 Généralités

On appelle équation différentielle (ordinaire) d'ordre $n \in \mathbb{N}*$, une relation de la forme

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

entre une fonction inconnue $y(x)$ de la variable indépendante x et certaines de ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n, y', y'', $\cdots, y^{(n)}$, $y^{(n)}$ devant effectivement figurer dans l'équation.

On appelle solution exacte de l'équation différentielle ou tout simplement solution de l'équation différentielle toute fonction $\phi\,:\,x \longrightarrow \phi(x)$, continue et n fois dérivable telle que $F(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots, \phi^{(n)}(x)) = 0$.

Intégrer une équation différentielle c'est déterminer toutes ses solutions.

Le graphe ou la courbe représentative d'une solution de l'équation est appelé **chronique ou courbe intégrale** de l'équation.

L'équation différentielle la plus simple est l'équation $y' = \phi(x)$.

Remarque 15 *: • Les solutions de cette équation sont les primitives de la fonction ϕ ; mais si pour une fonction ϕ continue nous savons que ces primitives existent, nous ne pouvons pas toujours en donner une expression simple à l'aide de fonctions élémentaires.*

• Une équation différentielle admet une infinité de solutions (c'est le cas en particulier de l'équation $y' = \phi(x)$). Pour trouver une solution particulière du problème étudié,, il faut tenir compte des **conditions particulières ou conditions initiales** *que doit satisfaire la solution. Ainsi, pour une équation du premier ordre, la condition initiale sera en général que la solution f prend la valeur y_0 en x_0 : $f(x_0) = y_0$.*

Définition 10 *:*

L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la plus haute dérivée figurant explicitement dans l'équation.

Définition 11 *:*

Les équations différentielles linéaires sont caractérisées par le fait que la fonction inconnue et ses dérivées apparaissent au plus à la puissance un (en particulier, une équation linéaire ne contient pas de terme du genre y^p, $y\,y'$, $y^{(n)}\,y^{(m)}$, ni de fonction $\alpha(y)$, etc). Les équations linéaires d'ordre n sont en général sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)}(x) = \phi(x), \quad \textit{avec} \quad a_n \neq 0$$

Lorsque les coefficients $a_k(x)$ sont des constantes, on parle alors d'équation à coefficients constants. L'équation devient homogène si $\phi(x) = 0$.

Définition 12 *:*

Une équation différentielle est dite homogène si la fonction $y(x)$ et ses dérivées figurent dans tous les termes à la puissance un. Dans le cas contraire, l'équation est dite inhomogène.

Exemple : Les équations $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ et $y^{(3)} + y = 0$ sont linéaires et homogènes, alors que $y^{(6)} + e^x\, y' + y - ln(x) = 0$ est une équation linéaire mais non homogène.

On place souvent au second membre le terme indépendant de $y(x)$, justifiant les appellations traditionnelles **équation avec ou sans second membre**, parfois commodes mais au fond sans grande utilité.

Définition 13 *: Une équation différentielle qui n'est pas linéaire est dite non linéaire. Dans ce cas, elle est caractérisée par le fait que la fonction inconnue et ses dérivées apparaissent dans des monômes de la forme $(y^{(n)})^i\,(y^{(m)})^j$, ou dans des fonctions, sans aucune restriction.*

Exemple : Les équations différentielles $x^5\,(y'')^2+\frac{1}{x}y'+y=\pi$, $ln(y')-5y=0$ et $y'\,y^{(4)}+\frac{3}{y^2}ch(x)=x$ sont non linéaires, alors que $y^{(6)}+e^x\,y'+y-ln(x)=0$ est une équation linéaire mais non homogène.

Pour les équations différentielles linéaires, l'ensemble des solutions peut être muni d'une structure d'espace vectoriel, ce qui permet d'énoncer de nombreux théorèmes concernant notamment l'existence et l'unicité des solutions. Pour les équations non linéaires, la situation est nettement plus difficile, moins confortable. Ces équation contiennent une richesse incommensurable, et engendrent parfois des solutions présentant une extrême variabilité par rapport à de changements a priori anodins. Afin de marquer cette différence, prenons l'exemple qui suit.

Exemple : On considère l'équation linéaire $f'(x)+\frac{1}{x-1}f(x)=0$. L'intégration immédiate de cette équation nous donne la solution $f(x)=\dfrac{f(0)}{1-x}$, où $f(0)$ est la valeur prescrite à l'avance. C'est un simple facteur qui ne change rien à la forme de la solution, et notamment n'affecte pas ses singularités (un pôle simple est $x=1$).

Par contre, soit l'équation non-linéaire $f'(x)=f^2(x)$. La solution pour $f(0)=1$ est $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

Ainsi, pour $f(0)=1$ dans les deux cas, les deux équations ont exactement la même solution. Pourtant la considération de l'équation $f'(x)=f^2(x)$ ne permet nullement de soupçonner que $x=1$ est un point remarquable : un pôle apparaît spontanément dans la solution, que l'on n'aurait pas deviné en regardant l'équation (on parle ici de singularité spontanée).

Choisissons une autre condition initiale, par exemple $f(0)=2$; la solution est alors $f(x)=\dfrac{2}{1-2x}$; elle a encore un pôle, mais il est maintenant $x=\frac{1}{2}$. Ce simple changement de condition initiale a profondément modifié la solution.

3.3 Equation différentielles du premier ordre

Ce sont des équations de la forme $F(x,y,y')=0$. Il n'y a pas de méthode générale pour résoudre les équations différentielles du premier ordre. Pour certaines familles d'entre elles il y a des méthodes (variables séparables, homogènes, différentielle totale, etc...). Lorsque l'équation est sous la forme $y'=f(x,y)$ où f est une fonction donnée de deux variables, on dit qu'elle est sous forme résolue en y'.

On appelle problème de Cauchy pour une équation différentielle, la recherche d'une solution $\phi: x\longrightarrow\phi(x)$ de l'équation vérifiant la condition donnée à l'avance : $\phi(x_0)=y_0$ où x_0 et y_0 sont donnés. Pour des raisons d'application, cette condition est appelée condition initiale.

3.3.1 Interprétation graphique

Dans le cas où l'équation se met sous la forme résolue en y,

$$(E) \quad y' = f(x, y),$$

une fonction y est solution de (E) si en tout point de coordonnées $(x, y(x))$, la tangente à la courbe représentative de y a pour pente $f(x, y(x))$.

En chaque point (x, y) où la fonction f est définie, sa valeur donne la pente que doit avoir une solution passant par ce point.

Définition 14 *:*

On appelle isocline de coefficient α de l'équation (E) l'ensemble I_α des points M du plan pour lesquels les solutions de (E) ont une tangente de pente α en M.

3.3.2 Équations différentielles à variables séparables

Définition 15 *: Une équation différentielle du premier ordre est à variables séparables si elle peut se mettre sous la forme $g(y)\, y' = f(x)$, où g et f sont des fonctions.*

Exemple : $y'\, ln(1 + y^2) = 2x$ et $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$ sont deux équations à variables séparables.

Dans la pratique, on pose les calculs comme ceci :

$$\begin{aligned} g(y)\, y' = f(x) \quad & \Leftrightarrow g(y)\, \tfrac{dy}{dx} = f(x) \\ & \Leftrightarrow g(y)\, dy = f(x)\, dx \\ & \Leftrightarrow \textstyle\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx \\ & G(y) = F(x) + K \end{aligned}$$

où G est une primitive de g, F est une primitive de f et K une constante réelle et arbitraire.

Lorsqu'on utilise cette notation pratique, il faut bien remarquer que les y qui étaient des fonctions deviennent des variables dans l'intégrale et on les interprète comme des fonctions après l'intégration.

Exemple : Résoudre $y^2\, y' = x^2$. La méthode précédente nous permet d'écrire $y^2\, dy = x^2\, dx$ et en intégrant, nous avons $\frac{1}{3}\, y^3 = \frac{1}{3}\, x^3 + K$. On obtient donc la solution générale $y(x) = \sqrt[3]{x^3 + C}$.

Exemple : Résoudre $y'\, ln(y) = ex$. La méthode précédente nous permet d'écrire $ln(y)\, dy = e^x\, dx$ et en intégrant, nous avons $y\, ln(y) - y = e^x + K$. On obtient donc la solution générale $y(x) = \sqrt[3]{x^3 + C}$.

On remarque que l'on ne trouve pas une expression pour y mais une relation (fonctionnelle) entre x et y.

Définition 16 *: Soit (E) une équation différentielle ; on appelle intégrale première de (E) une fonction F telle que pour toute solution y de (E), il existe une constante K telle que $F(x, y(x)) = K$.*

On appelle intégrale première absolue une intégrale première F qui est telle que toute fonction dérivable qui vérifie $F(x, y(x)) = K$ est une solution de (E).

Propriété 9 *: Soient G une primitive de g, F une primitive de f et y une fonction dérivable ; y est solution de (E) si et seulement si $G(y(x)) = F(x) + K$, où K est une constante arbitraire.*

Preuve : Supposons $G(y(x)) = F(x) + K$. Alors $G'(f(x))\, f'(x) = f(x)$. Donc f est bien solution de (E).

Supposons maintenant que y est solution de (E). $g(y(x))\, y'(x) = f(x)$ équivaut à $\int g(y(x))\, y'(x)\, dx = \int f(x)\, dx$. Donc $G(y(x)) = F(x) + K$.

Cette propriété permet donc de déterminer une intégrale première absolue de (E). Ce sont les fonctions pour lesquelles les solutions sont constantes sur les lignes de niveaux. Et les lignes de niveaux, définissent des solutions.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle $x\, dx + y\, dy = 0$. En intégrant, on obtient $x^2 + y^2 = K$. Les solutions sont données par $y = \pm\sqrt{K - x^2}$.

On peut remarquer que sous la forme $x\, dx + y\, dy = 0$, le x et le y jouent des rôles analogues, les cercles centrés en l'origine définissent des intégrales premières de l'équation. En effet si on paramétrise ces cercles par $x(t) = R\, cos(t)$ et $y(t) = R\, sin(t)$, on obtient alors $dx = -R\, sin(t)\, dt$ et $dy = R\, cos(t)\, dt$. On a bien $x\, dx + y\, dy = 0$.

Nous avons également les équations différentielles homogènes qui, après résolution peuvent se mettre sous la forme : $y' = f(\frac{y}{x})$. Pour l'intégrer on pose $t = \dfrac{y}{x}$; en différentiant $y = t\, x$, on a $dy = t\, dx + x\, dt$; d'où $y'\, dx = t\, dx + x\, dt$ (car $dy = y'\, dx$) ; d'où $f(\frac{y}{x})dx = t\, dx + x\, dt$ et on obtient

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t}$$

qui est une équation à variables séparables. Son intégration donne une représentation paramétrique des courbes intégrales.

Exemple :

1. Résoudre l'équation $2(1 + y^2) = 3y\, cos^2(2x)\, y'$; cette équation se met sous la forme $y' = \frac{2(1+y^2)}{3y\, cos^2(2x)}$; d'où $\dfrac{3y}{1 + y^2}\, dy = \dfrac{2}{cos^2(2x)}\, dx$; en passant aux primitives on a :

$$\frac{3}{2}\, Log(1 + y^2) = tg(2x) + C.$$

On obtient ainsi l'équation des courbes intégrales sous la forme implicite $\frac{3}{2}\, Log(1+y^2) - tg(2x) + C' = 0$.

2. Résoudre $y' = (\frac{y}{x})^2 + \frac{y}{x} + 1$; cette équation est sous la forme $y' = f(\frac{y}{x})$ avec $f(z) = z^2 + z + 1$. Pour résoudre on pose $\frac{y}{x} = t$ et on obtient l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t) - t},$$

ce qui équivaut à $\frac{dx}{x} = \dfrac{dt}{t^2 + 1}$; d'où $Logx = Arctgt + C$; ainsi, $x = \lambda\, e^{Arctgt}$ et donc $y = t\,x = t\,\lambda\, e^{Arctg(t)}$; d'où on obtient ainsi l'équation des courbes intégrales sous la forme implicite $y\,x - \lambda\, y\, e^{Arctg\frac{y}{x}} = 0$ (on a remplacé t par $\frac{y}{x}$) comme précédemment.

Le premier cas ce sont **les équations de la forme $K(x, y, y') = 0$, ne contenant pas soit x soit** y.

- Si on a $K(x, y') = 0$ (y n'y figure pas), alors on pose $x = \phi(t)$, $y' = \psi(t)$; on a alors

$$\begin{cases} dx = \phi'(t)dt \\ dy = \psi(t)dx = \psi(t)\phi'(t)dt \end{cases}$$

D'où $y(t) = \int \psi(t)\phi'(t)dt$; on obtient donc une représentation paramétrique des courbes intégrales.

- Si on a $K(y, y') = 0$ (x n'y figure pas), alors on pose $y = \phi(t)$, $y' = \psi(t)$; on a alors

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = \phi'(t)\frac{dx}{dy}.$$

Donc

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\phi'(t)}{\frac{dy}{dx}} = \frac{\phi'(t)}{y'} = \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}$$

et $dx = \dfrac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt$. On obtient donc $x(t) = \int \frac{\phi'(t)}{\psi(t)}dt$. On obtient une représentation paramétrique de des courbes intégrales.

Exemple :

1. Résoudre l'équation $x^2\, y' - 6 = 0$. Cette équation est équivalente à $\frac{dy}{dx} = -\frac{6}{x^2}$; d'où $y = \int -\frac{6}{x^2}\, dx = \frac{6}{x} + \lambda$.
2. Résoudre l'équation $5\, y' + cos(x)\, sin(x) = 0$. Cette équation est équivalente à $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{cos(x)\, sin(x)}{5}$; d'où $y = \int -\dfrac{2}{5}\, sin(2x)\, dx = \dfrac{2}{5}\, cos(2x) + \lambda$.

Si on a une équation différentielle linéaire du premier ordre, elle se met sous la forme :

$$y' + f(x)\, y = g(x).$$

L'équation $y' + f(x)\, y = 0$ est appelée équation homogène ou sans second membre. Si $g(x) \neq 0$, on parle d'équation différentielle linéaire avec second membre. Dans ce cas, le second membre est $g(x)$. On résout cette équation comme suit :

$$\begin{aligned} y' + f(x)\,y = 0 \quad &\Leftrightarrow \tfrac{dy}{y} = -f(x)\,dx \\ &\Leftrightarrow ln(y) = -F(x) + C \\ &\Leftrightarrow y = K\,e^{-F(x)} \end{aligned}$$

Donc pour intégrer une équation différentielle avec second membre, on intègre d'abord l'équation sans second membre pour obtenir la solution $y_1 = K\,e^{-F(x)}$. On achève la résolution de l'équation avec second membre en déterminant une solution particulière y_p de l'équation avec second membre.

Soit y_1 la solution générale de l'équation sans second membre et y_p une solution particulière de l'équation avec second membre. Alors $y = y_1 + y_p$ est une solution de l'équation avec second membre.

Théorème 15 *: La solution générale y de l'équation avec second membre s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_p de cette équation, la solution générale y_1 de l'équation homogène, c'est à dire $y = y_1 + y_p = K\,e^{-F(x)} + y_p$.*

3.3.3 Recherche d'une solution particulière

Soit $y = K\,e^{-F(x)} + y_p$. Montrons qu'une telle fonction est bien solution de l'équation $y' + f(x)\,y = g(x)$. Par ailleurs, $y'(x) = -K\,f(x)\,e^{-F(x)} + y_p'$, donc :

$$\begin{aligned} y' + f(x)\,y \quad &= -K\,f(x)\,e^{-F(x)} + y_p' + f(x)[K\,e^{-F(x)} + y_p] \\ &= -K\,f(x)\,e^{-F(x)} + K\,f(x)\,e^{-F(x)} + y_p' + f(x)\,y_p \\ &= y_p' + f(x)\,y_p \\ &= g(x) \end{aligned}$$

D'où y est bien une solution de l'équation avec second membre. Cette méthode repose entièrement sur la connaissance de y_p qui n'est pas toujours facile à obtenir.

La méthode de variation de la constante est par contre beaucoup plus générale. On utilise cette technique lorsqu'on ne peut pas trouver la solution particulière de l'équation avec second membre. On résout dans ce cas l'équation sans second membre qui fournit $y_1 = K\,e^{-F(x)}$. On prend alors comme fonction inconnue $\dfrac{y}{y_1}$, ce qui revient à faire de K, qui était constante pour l'équation sans second membre, une fonction inconnue de l'équation avec second membre.

Autrement dit, **on fait varier la constante** en posant $y = K(x)\,e^{-F(x)}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} y' + f(x)\,y = g(x) \quad &\Leftrightarrow K'(x)\,e^{-F(x)} - f(x)\,K(x)\,e^{-F(x)} + f(x)\,K(x)\,e^{-F(x)} = g(x) \\ &\Leftrightarrow K'(x)\,e^{-F(x)} = g(x) \\ &\Leftrightarrow K'(x) = g(x)\,e^{F(x)} \end{aligned}$$

Ainsi, par intégration et sous réserve de pouvoir calculer une primitive de $g(x)\, e^{F(x)}$, on obtient $K(x) = \int g(x)\, e^{F(x)}\, dx$.

Finalement, la solution générale de l'équation s'écrit :

$$y(x) = e^{-F(x)} \int g(x)\, e^{F(x)}\, dx$$

Exemple :

1. Résoudre l'équation $\sqrt{1-x^2}\, y' + y = 3$. On résout d'abord $\sqrt{1-x^2}\, y' + y = 0$; ce qui nous donne $\sqrt{1-x^2}\, dy = -y\, dx$, c'est à dire $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$; d'où $ln(y) = Arccos(x) + C$, c'est à dire que la solution générale de l'équation homogène sans second membre est $y_1 = \lambda\, e^{Arccos(x)}$. Pour une solution particulière, on prend exactement $y_p = 3$ alors on obtient comme solution de l'équation avec second membre

$$y = \lambda\, e^{Arccos(x)} + 3$$

2. Résoudre $x^2\, y' + y = e^{\frac{1}{x}}$; en considérant l'équation homogène sans second membre on a $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{-dx}{x^2}$ d'où $y_1 = \lambda\, e^{\frac{1}{x}}$. La solution particulière n'est plus évidente à trouver ; dans ce cas, on applique la méthode de variation de la constante λ en supposant qu'elle dépend du temps ie $\lambda = \lambda(t)$. On a alors $\lambda = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$. D'où la solution

$$\begin{aligned} y &= \lambda(x)\, e^{\frac{1}{x}} \\ &= (-\tfrac{1}{x} + C)\, e^{\frac{1}{x}} \\ &= -\tfrac{1}{x}\, e^{\frac{1}{x}} + C\, e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

La fonction $y_p(x) = -\frac{1}{x}\, e^{\frac{1}{x}}$ est une solution particulière qui n'était pas évidente à trouver.

On a également des équations différentielles du premier ordre se ramenant à une équation linéaire.

1. L'**équation de Bernoulli** est une équation pouvant se mettre sous la forme :

$$a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x)\, y^{\alpha},\ \ \alpha \in \mathbb{R}$$

où a, b, f sont des fonctions données. Lorsque $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, l'équation est linéaire. Si $\alpha \neq 1$, on divise l'équation par y^{α} et on pose $z = y^{1-\alpha}$. On obtient dans ce cas l'équation

$$a(x) \frac{z'}{1-\alpha} + b(x) z = f(x)$$

qui est linéaire en z.

2. L'**équation de Riccati** s'écrit sous la forme :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

où a, b, c sont des fonctions données. Si on connaît au préalable une solution particulière y_p, on pose $z = y - y_p$ et on obtient $z' - (2\, y_p\, a(x) + b(x))\, z = a(x)\, z^2$ qui est une équation de Bernoulli en z avec $\alpha = 2$.

3.4 Introduction aux équations aux dérivées partielles

3.4.1 Rappels et mises en garde

Soit f une fonction de deux variables, définie sur une partie U de $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ représente la dérivée de la fonction $x \longmapsto f(x, y_0)$ au point x_0. Dans la pratique cela revient à calculer la dérivée de f par rapport à x en considérant y comme une constante.

Exemple : Si $f(x, y) = ln(x^2 + y^2)$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$.

Si $F(x, y)$, $g(x, y)$ et $h(x, y)$ sont des fonctions de deux variables alors

$$\frac{\partial F(g(x,y), h(x,y))}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F(g(x,y), h(x,y))}{\partial x}(x, y)\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F(g(x,y), h(x,y))}{\partial x}(x, y)\frac{\partial h}{\partial x}(x, y)$$

Remarque 16 *: Résoudre l'équation aux dérivées partielles (ou EDP)*

$$(E) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

revient à déterminer toutes les fonctions dont la dérivée par rapport à x est nulle. On voit que toutes les fonctions qui ne dépendent que de y sont solutions. On la résout ainsi : pour un y_0 fixé la fonction $x \longmapsto f(x, y_0)$ a une dérivée nulle, elle est donc constante, finalement f ne dépend que de y_0 et donc f est de la forme : $f(x, y) = K(y)$. Réciproquement les fonctions de la forme $f(x, y) = K(y)$ vérifient bien (E).

Remarque 17 *: La fonction d'une variable définie par $f(x) = 1$ si $x \in [-2; -1]$ et $f(x) = 2$ si $x \in [1; 2]$ est une fonction dérivable de dérivée nulle, et elle n'est pas constante. Ceci peut arriver lorsque l'on résout des équations aux dérivées partielles aussi simple que (E). Ceci n'est plus possible si l'on travaille sur une partie convexe de $\mathbb{R}^2$. Dans la suite du cours nous ne nous préoccuperons plus de ce genre de problèmes qui peuvent exister.*

3.4.2 EDP linéaires d'ordre 1 à coefficients constants

Définition 17 *: Ce sont les équations aux dérivées partielles de la forme*

$$(E) \quad \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} = h(x, y, f)$$

où α et β sont des réels.

Quelques cas particuliers

1.
$$(E) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Les solutions sont les fonctions $f(x, y) = K(y)$ où K est une fonction quelconque d'une variable. Si l'on veut se limiter aux solutions de classe C^1, il faut prendre K quelconque de classe C^1.

2.
$$(E) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = h(x, y).$$

En intégrant par rapport à x on trouve que les solutions sont les fonctions de la forme

$$f(x, y) = \int^x h(x, y)\, dx + K(y)$$

où K est une fonction quelconque.

Exemple : Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{3x\,y}$. En intégrant par rapport à x on trouve que les solutions sont les fonctions de la forme

$$f(x, y) = \frac{1}{3y} e^{3x\,y} + K(y)$$

Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f(x, y)\, e^{3x\,y}$. On peut également l'écrire sous la forme $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f} = e^{3x\,y}$.

On fixe y et en intégrant par rapport à x on trouve que les solutions sont les fonctions de la forme $ln\,|f(x, y)| = \dfrac{1}{3y} e^{3x\,y} + K(y)$. D'où $f(x, y) = H(y)\, e^{\frac{1}{3y} e^{3x\,y}}$.

3. **Pour le cas général**, On se ramène par un changement de variable linéaire au cas $\dfrac{\partial f}{\partial x} = h(x, y, f)$.

Pour cela, il suffit de poser

$$\begin{cases} X = a\,x + b\,y \\ Y = c\,x + d\,y \end{cases}$$

et $f(x, y) = F(X, Y) = F(a\,x + b\,y, c\,x + d\,y)$; on a alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial Y}\dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial X}\, a + \dfrac{\partial F}{\partial Y}\, c \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial X}\dfrac{\partial X}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial Y}\dfrac{\partial Y}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial X}\, b + \dfrac{\partial F}{\partial Y}\, d \end{cases}$$

(E) est donc équivalente à l'équation

$$\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial X}\, a + \frac{\partial F}{\partial Y}\, c\right) + \beta\left(\frac{\partial F}{\partial X}\, b + \frac{\partial F}{\partial Y}\, d\right) = h(x, y, f)$$

qui s'écrit encore

$$(a\,\alpha + b\,\beta)\frac{\partial F}{\partial X} + (c\,\alpha + d\,\beta)\frac{\partial F}{\partial Y} = h(x, y, f)$$

Il suffit alors de choisir a, b, c et d tels que le coefficient de $\dfrac{\partial F}{\partial Y}$ soit nul.

Exemple : Résoudre $(E)\quad 2\dfrac{\partial f}{\partial x} + 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = f$.

On commence par poser

$$\begin{cases} X = a\,x + b\,y \\ Y = c\,x + d\,y \end{cases}$$

et $f(x, y) = F(X, Y) = 3F(a\,x + b\,y, c\,x + d\,y)$; on a alors

$$(2\,a + 3\,b)\frac{\partial F}{\partial X} + (2\,c + 3\,d)\frac{\partial F}{\partial Y} = F$$

Posons $d = -2$, $c = 3$, $a = -1$ et $b = 1$; on a alors $\dfrac{\partial F}{\partial X} = 3\,F$ et donc $F(X, Y) = K(Y)\,e^{3\,X}$, où K est une fonction quelconque, finalement en remplaçant X et Y on obtient : $f(x, y) = K(3\,x - 2\,y)\,e^{3(-x+y)}$. Par exemple, les fonctions $e^{3(-x+y)}$ et $(3\,x - 2\,y)\,e^{3x-2y}\,e^{3(-x+y)} = (3\,x - 2\,y)\,e^{y}$ sont solutions de l'équation (E) respectivement pour $K(u) = 1$ et $K(u) = u\,e^{u}$.

3.4.3 EDP linéaires d'ordre 1, changement de variable

Remarque 18 *: Il existe une méthode générale, qui dépasse le niveau de ce cours pour trouver de bons changements de variables lorsque les coefficients ne sont pas constants*

$$(E)\quad \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} = h(x, y, f)$$

où α et β sont des fonctions de x, y et f.

Exemple : Résoudre, en faisant un changement de variables polaires l'EDP

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = y\,f$$

On pose

$$\begin{cases} x = r\,cos(\theta) \\ y = r\,sin(\theta) \end{cases}$$

et $F(r, \theta) = f(x, y)$, on a alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial f}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = cos(\theta)\dfrac{\partial F}{\partial X} + sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = -r\,sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\,cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

d'où l'on déduit facilement par la méthode de Cramer par exemple :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=cos(\theta)\dfrac{\partial F}{\partial r}-\dfrac{1}{r}sin(\theta)\dfrac{\partial F}{\partial \theta}\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial y}=sin(\theta)\dfrac{\partial F}{\partial r}+\dfrac{1}{r}cos(\theta)\dfrac{\partial F}{\partial \theta}\end{array}\right.$$

ce qui en remplaçant dans l'équation de départ donne :

$$cos(\theta)\left(r\,cos(\theta)\frac{\partial F}{\partial r}-sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)+sin(\theta)\left(r\,sin(\theta)\frac{\partial F}{\partial r}+cos(\theta)\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)$$

ce qui donne $r\,\dfrac{\partial F}{\partial r}=r\,F\,sin(\theta)$. Soit encore $\dfrac{\frac{\partial F}{\partial r}}{F}=sin(\theta)$ qui s'intègre en $ln\,|F(r,\theta)|=r\,sin(\theta)+K(\theta)$ finalement puisque $\theta=Arccos\left(\dfrac{y}{x}\right)$, les solutions sont les fonctions $(f(x,y)=K\left(\dfrac{y}{x}\right)\,e^{y}$, où K est une fonction dérivable quelconque. On vérifie facilement que ces fonctions sont bien des solutions de l'EDP.

3.4.4 Méthode des caractéristiques

Propriété 10 *: Si f est solution de l'équation aux dérivées partielles*

$$(E)\quad \frac{\partial f}{\partial x}+\beta(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

et Y une solution de $\dfrac{\partial Y}{\partial x}(x,y)=\beta(x,y)$, alors $f(x,Y(x,y))$ est une fonction de y, et ne dépend pas de x.

Preuve :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,Y(x,y))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,Y(x,y))\frac{\partial Y}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,Y(x,y))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,Y(x,y))\,\beta(x,y)$$

Théorème 16 *: Soit P le problème suivant*

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\beta(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}=0\\[2ex] f(0,y)=u_0(y)\end{array}\right.$$

où β et u_0 sont des fonctions données et f l'inconnue. On note P^* le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial Y}{\partial x}=\beta(x,y)\\[2ex] Y(0,y)=y\end{array}\right.$$

alors si Y^* est la solution de P^*, et u une solution de P, alors $u(x,Y^*(x,y))=u(0,y)$. De plus pour tout x fixé la fonction $Y_x^*\,:\,y\longmapsto Y^*(x,y)$ est strictement croissante et pour toute fonction k, $koY^{*-1}_{\ x}$ est solution de P.

Preuve : Le début correspond à la proposition précédente. La croissance de Y_x^* se montre ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y_x^*}{\partial y}\right) = \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, Y_x^*(x,y))\frac{\partial Y_x^*}{\partial y}$$

On en déduit que $\dfrac{\partial Y_x^*}{\partial y} = K(y)exp\left(\displaystyle\int_0^x \frac{\partial \beta}{\partial y}(s, Y(s,y))ds\right)$, or $\dfrac{\partial Y_0}{\partial y} = 1$, donc $K(y) = 1$ et $\dfrac{\partial Y_x^*}{\partial y} > 0$. Pour la fin ce n'est pas tout à fait évident, notons $f(x,y) = k\left(Y_x^{*-1}(y)\right)$. On peut également remarquer que $Y^*(x, Y_x^{*-1}(y)) = y$ et dériver cette égalité par rapport à x et à y, il reste alors à calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

3.4.5 Equations aux dérivées partielles linéaires d'ordre deux

Définition 18 *: Ce sont les EDP de la forme*

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + D\frac{\partial f}{\partial x} + E\frac{\partial f}{\partial y} = K(x,y,f)$$

où A, B, C, D, E et K sont des fonctions de x, y et f.

Quelques exemples fondamentaux

1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = h(x,y)$. En intégrant une première fois par rapport à la variable x on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \displaystyle\int^x h(x,y)dx + K(y)$. Ce qui en intégrant une deuxième fois donne $f(x,y) = \int^x \int^x h(x,y)dx\,dx + K(y)\,x + L(y)$ où K et L sont des fonctions quelconques. Réciproquement si l'on dérive deux fois la fonction définie par la formule précédente par rapport à x on obtient bien l'équation différentielle de départ.

   Exemple : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = x\,y^2$. En intégrant une première fois on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}x^2\,y^2 + C_1(y)$. En intégrant une seconde fois on obtient $f(x,y) = \dfrac{1}{6}x^3\,y^2 + c_1(y)\,x + C_2(y)$.

2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = h(x,y)$. En intégrant une fois par rapport à x et une fois par rapport à y on obtient

   $$f(x,y) = \int^x \int^y h(x,y)\,dy\,dx + K(y) + L(x)$$

   où K et L sont des fonctions quelconques. La réciproque permet de conclure, les fonctions K et L doivent être dérivables sinon il faut faire attention à l'ordre de dérivation, (ce genre de problème sort de l'objectif de ce cours).

Propriété 11 *: 1. Si $K = 0$ les solutions S forment un espace vectoriel.*

2. Si K est une fonction de x et y uniquement, alors les solutions forment un espace affine de direction S.

Cas des coefficients constants, sans second membre

Notons D_x l'opérateur de dérivation par rapport à la variable x, et D_y l'opérateur de dérivation par rapport à la variable y. On remarque que ces deux opérateurs commutent, car pour une fonction f deux fois différentiables on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Première méthode : on peut essayer d'écrire l'équation aux dérivées partielles à l'aide d'une opérateur différentiel et de factoriser cet opérateur pour se ramener à des EDP d'ordre 1.

Exemple : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\,y$. Cette équation peut aussi s'écrire $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = x\,y$ ou encore $(D_x^2 - D_y^2)f = x\,y$.

Or comme D_x et D_y commutent il est clair que $D_x^2 - D_y^2 = (D_x - D_y)(D_x + D_y)$ et l'équation s'écrit donc $(D_x - D_y)(D_x + D_y)f = x\,y$. Notons $g = (D_x + D_y)f$. Pour résoudre (E) : $(D_x - D_y)g = x\,y$, il suffit de faire un changement de variables, comme dans le paragraphe précédent. En posant

$$\begin{cases} X = x \\ Y = x + y \\ G(X,Y) = g(x,y) \end{cases}$$

(E) donne $\dfrac{\partial G}{\partial X} = X(Y - X) = X\,Y - X^2$, ce qui en intégrant donne

$$G(X,Y) = \frac{1}{2}X^2\,Y - \frac{1}{3}X^3 + C(Y)$$

et en revenant aux variables de base on obtient $g(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2(x+y) - \dfrac{1}{3}x^3 + C(x+y)$; il nous reste donc à résoudre l'EDP

$$(D_x + D_y)f = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\,y + C(x+y)$$

On fait un second changement de variables $U = x$ et $V = x - y$ qui nous ramène à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial U} = \frac{2}{3}U^3 - \frac{1}{2}U^2\,V + C(2U - V)$$

qui s'intègre en

$$F = \frac{1}{6}U^4 - \frac{1}{2}U^3\,V + C_1(2U - V) + C_2(V)$$

ce qui donne en repassant dans les variables de base

$$f = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^3(x-y) + C_1(x+y) + C_2(x-y) = \frac{1}{6}x^3\,y + C_1(x+y) + C_2(x-y)$$

Un calcul immédiat montre que ces fonctions sont bien solutions de l'EDP

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = x\,y + C_1''(x+y) + C_2''(x-y) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = C_1''(x+y) + C_2''(x-y) \end{cases}$$

Deuxième méthode : Cette méthode est équivalente à la première lorsque il n'y a pas de dérivée partielle première dans l'EDP ($D = E = 0$), on fait un unique changement de variable pour ne garder qu'une dérivée seconde croisée $\dfrac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}$.

Exemple : On reprend l'exemple précédent $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\,y$. On fait le changement de variables

$$\begin{cases} Z = a\,x + b\,y \\ T = c\,x + d\,y \end{cases}$$

et l'on pose $f(x, y) = F(Z, T)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial Z^2} + 2a\,c \dfrac{\partial^2 F}{\partial Z \partial T} + c^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial T^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = b^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial Z^2} + 2b\,d \dfrac{\partial^2 F}{\partial Z \partial T} + d^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial T^2} \end{cases}$$

L'équation donne donc

$$(a^2 - b^2) \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} + 2(a\,c - b\,d) \frac{\partial^2 F}{\partial Z \partial T} + (c^2 - d^2) \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$$

si l'on choisit $a = b = 1$ et $c = -d = 1$ on n'a plus qu'une seule dérivées seconde.

Remarque 19 *: on pourrait avoir envie de prendre $a = b = c = d = 1$, cela n'amène à rien car ce n'est pas un changement de variable, en effet on aurait alors $Z = T$, les calculs n'ont pas de sens.*

L'équation devient

$$4 \frac{\partial^2 F}{\partial Z \partial T} = \frac{1}{2}(Z + T) \frac{1}{2}(Z - T) = \frac{1}{4}(Z^2 - T^2)$$

que l'on intègre en

$$F = \frac{1}{48}(Z^3\,T - Z\,T^3) + C_1(T) + C_2(T)$$

d'où en revenant aux variables de base

$$f = \frac{1}{48}(x^2 - y^2)((x^2 + 2x\,y + y^2) - (x^2 - 2x\,y + y^2)) + C_1(x - y) + C_2(x + y)$$

d'où

$$f = \frac{1}{12}(x^3\,y - x\,y^3) + C_1(x - y) + C_2(x + y)$$

Remarque 20 *: On ne trouve pas les solutions que l'on avait trouvées lors de la résolution précédente, en fait c'est juste l'écriture qui change, en effet*

$$\frac{1}{6} x^3\,y = \frac{1}{12}(x^3\,y - x\,y^3) + \frac{(x + y)^4 - (x - y)^4}{96}$$

Remarque 21 *: Cette méthode est opérationnelle pour les équations de la forme*

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = K(x, y, f)$$

lorsque le polynôme (dit caractéristique de l'équation) $A\,X^2 + B\,X + C$ *possède deux racines réelles distinctes.*

Les autres cas sont bien plus difficiles à résoudre.

Troisième méthode : série de Fourier

Cette méthode s'utilise entre autres lorsque le polynôme caractéristique ne possède pas de racine réelle, on se contentera d'un exemple : l'équation de la chaleur.

$$(E) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$T(x,t)$ représente la température à l'instant t et au point d'abscisse x dans une barre de fer de longueur l. On se donne la condition initiale suivante : $(CI) \quad T(x,0) = \phi(x)$. On connaît la température de la barre en chacun de ses points à l'instant 0. Ainsi que des conditions aux limites : $(CL) \quad T(0,t) = T(l,t) = 0$ la température de la barre à ses extrémités est nulle.

1. On cherche les solutions de (E) de la forme $T(x,t) = U(x)\,V(t)$.
2. On ne conserve que les solutions, non nulles, bornées lorsque t croit vers l'infini.
3. On regarde ce que les conditions aux bords (CI) imposent comme conditions aux constantes d'intégrations.
4. On cherche une solution du problème sous forme de somme de solutions trouvées précédemment, en écrivant la condition initiale (CI) à l'aide d'une série de Fourier.

1. (E) équivaut à l'équation $U\,V' = a^2 U''\,V$ qui s'écrit encore

$$\frac{V'}{V} = a^2\,\frac{U''}{U}$$

Le membre de gauche de l'égalité est une fonction de t et le membre de droite est une fonction de x, chacune des parties est donc une constante que je note K. On s'est ramené au système

$$\begin{cases} V' = a^2\,K\,V \\ U'' = K\,U \end{cases}$$

qui se résout facilement suivant le signe de K.

$$\begin{cases} V = C\,e^{K\,t} \\ \\ U = C_1\,e^{\sqrt{K}\,a\,x} + C_2\,e^{-\sqrt{K}\,a\,x} \quad \text{ou} \quad U = C_1\,cos\left(\dfrac{\sqrt{-K}}{a}x\right) + C_2\,sin\left(\dfrac{-\sqrt{-K}}{a}x\right) \end{cases}$$

2. V doit être borné lorsque t tend vers l'infini, K est donc négatif, notons $K = -k^2$. Les solutions sont donc :

$$\begin{cases} V = C\, e^{-k^2\, t} \\ U = C_1\, cos\left(\dfrac{k\, x}{a}\right) + C_2\, sin\left(\dfrac{k\, x}{a}\right) \end{cases}$$

3. $T(0,t) = U(0)\, V(t) = C\, e^{-k^2\, t}\, C_1$, si C est nulle on a la solution nulle donc $C \neq 0$ et $C_1 = 0$.
$T(l,t) = U(l)\, V(t) = C\, e^{k\, t}\, C_2\, sin\left(\dfrac{k\, l}{a}\right)$, si $C_2 = 0$ on a la solution nulle donc $sin\left(\dfrac{k\, l}{a}\right)$ doit être nul, il faut donc que

$$k = \frac{\pi\, n\, a}{l}$$

avec n un entier. On a donc des solutions de la forme

$$T(x,t) = C\, e^{-\dfrac{\pi^2\, n^2\, a^2\, t}{l^2}}\, sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{l}\right)$$

4. On cherche une solution au problème global de la forme

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, e^{-\dfrac{\pi^2\, n^2\, a^2\, t}{l^2}}\, sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{l}\right)$$

Les conditions aux bords (CB) sont clairement vérifiées. Écrivons la condition initiale (CI) à l'aide pour la fonction ψ. On obtient

$$\psi(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{l}\right)$$

comme on peut choisir les C_n, il suffit de les choisir de tel sorte que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n\, sin\left(\dfrac{\pi\, n\, x}{l}\right) = \phi(x)$.
Soit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\, sin\left(\dfrac{\pi\, n\, x}{l}\right)$ la série de Fourier de la fonction, $2\, l$ périodique, impaire, égale à ϕ sur $[0, l]$ et posons :

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, e^{-\dfrac{\pi^2\, n^2\, a^2\, t}{l^2}}\, sin\left(\frac{\pi\, n\, x}{l}\right)$$

On a donc $\psi(x,0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\, sin\left(\dfrac{2\pi\, n\, x}{l}\right) = \phi(x)$ (D'après le théorème de Dirichlet) . Enfin on admet que la condition (E) est vérifiée par ψ, voir le cours sur les séries de fonctions (ceci est un peu long à faire).

On a résolu dans un cas particulier l'équation de la chaleur.

3.5 Equations différentielles du second ordre

Ce sont les équations différentielles de la forme :

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

On dit que l'équation est résolue en y'' si l'on peut écrire $y'' = f(x, y, y')$, où f est une fonction donnée de trois variables. Moyennant certaines hypothèse sur f, le problème de Cauchy, qui consiste à déterminer une solution $\phi : x \longrightarrow \phi(x)$ de l'équation vérifiant les conditions données à l'avance : $\phi(x_0) = y_0; \phi'(x_0) = y_1$, où x_0, y_0 et y_1 sont donnés. On appelle solution générale de l'équation une solution $\phi : x \longrightarrow \phi(x, \lambda, \mu)$, dépendant de deux constantes arbitraires λ et μ. On peut obtenir des solutions exactes pour quelques types d'équations. La méthode numérique est essentielle lorsqu'on ne peut pas les avoir ; on cherche alors une solution approchée.

3.5.1 Equations du second ordre pouvant se ramener à une équation du premier ordre

1. Si l'équation est du type $K(x, y', y'') = 0$ (c'est à dire que y n'apparaît pas), en posant $z = y'$, elle s'écrit $K(x, z, z') = 0$ qui est une équation du premier ordre en z. Sa résolution nous donne z qui fournit y par intégration.

   Exemple : Résoudre $2y" + \frac{1}{x}y' = x + 3$. on aura en posant $z = y'$ l'équation $2z' + \frac{1}{x}z = x + 3$ et l'équation homogène sans second membre nous donne $2\frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x}$; d'où $ln(z) = ln\left(\frac{\lambda}{\sqrt{x}}\right)$, c'est à dire $z = y' = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}$ et pour la solution particulière, on fait varier la constante λ et on a $d\lambda = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}dx + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx$, d'où $\lambda = \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + C$; donc $z = y' = \frac{1}{5}x^2 + x + \frac{C}{\sqrt{x}}$, c'est à dire $y = \frac{1}{15}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2C\sqrt{x} = y_1 + y_p$.

2. Si l'équation est du type $K(y, y', y'') = 0$ (c'est à dire que x n'apparaît pas), on pose $y' = z(y)$; d'où

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}y' = \frac{dz}{dy}z.$$

   L'équation $K(y, y', y'') = 0$ s'écrit $K\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0$ qui est une équation du premier ordre en z, considérée comme fonction de y. En considérant x comme une fonction de y on aura

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{z(y)}$$

d'où $dx = \dfrac{dy}{z(y)}$ et on obtient x comme fonction de y par intégration.

3. Si l'équation peut se mettre sous la forme $K\left(x, \dfrac{y'}{y}, \dfrac{y''}{y'}\right) = 0$, on pose $z = \dfrac{y'}{y}$, d'où $z' = \dfrac{y''}{y} - z^2$. On obtient donc la forme $K(x, z, z' + z^2) = 0$ qui est une équation du premier ordre en z. Sa résolution fournie y par intégration.

3.5.2 Equations différentielles linéaires du second ordre

Ce sont les équations qui peuvent se mettre sous la forme

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \ \ a \neq 0,$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions données sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. La fonction f est appelée second membre de l'équation. Si les fonctions $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont constantes, on dit qu'on a une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation homogène sans second membre associée est

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

Théorème 17 *: La solution générale y de l'équation avec second membre s'obtient en ajoutant à une solution particulière y_0 de l'équation, la solution générale Y de l'équation sans second membre, ($y = y_0 + Y$)*

Remarque 22 *:*

1. *La résolution de l'équation avec second membre consiste à la résolution de l'équation sans second membre et à la recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre.*
2. *Si Y_1 et Y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation sans second membre, alors la solution générale y de cette équation sans second membre est*

$$y = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$$

où α_1 et α_2 sont des constantes.

3. *Il n'existe pas de méthode générale de résolution de ces équations différentielles. Par contre il existe une méthode pour trouver une deuxième solution lorsqu'on connaît déjà une solution. Cette méthode est celle de Laplace.*

La méthode de Laplace

Cette méthode permet de trouver une deuxième solution de l'équation sans second membre, lorsqu'on en connaît une.

Si y_1 est une solution de l'équation $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$, il existe toujours une solution y_2 linéairement indépendante de y_1 qui est de la forme $y_2(t) = k(t)\, y_1(t)$, le calcul de k se ramenant à la résolution d'une équation du premier ordre.

Preuve : $y_2' = k\, y_1' + k'\, y_1$ et $y_2'' = k\, y_1'' + 2k'\, y_1' + k''\, y_1$. On peut donc dire que y_2 est solution de $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ si et seulement si

$$a(x)(k\, y_1'' + 2k'\, y_1' + k''\, y_1) + b(x)(k\, y_1' + k'\, y_1) + c(x)\,(k\, y_1) = 0$$

ce qui équivaut à

$$a(x)(2k'\, y_1' + k''\, y_1) + b(x)(k'\, y_1) = 0$$

car y_1 est solution de l'équation également. On s'est bien ramené à une équation linéaire du premier ordre en k'.

Remarque 23 *: En fait on a démontrer plus que ce qui est annoncé, on a démontrer que si il existait une solution non nulle à l'équation différentielle sans second membre, alors on pouvait se ramener à une équation du premier ordre, les solutions formant alors un espace vectoriel de dimension deux, admettant* y_1, y_2 *pour base.*

Exemple : Résoudre l'équation $2x^2\, y'' - 3x\, y' + 3y = 0$.

On remarque que $y_1(x) = x$ est solution, on cherche alors une solution de la forme $y_2(x) = k(x)y_1(x)$. On a alors $y_2' = k'\, y_1 + k\, y_1'$ et $y_2'' = k''\, y_1 + 2k'\, y_1' + k\, y_1''$. Comme y_1 est solution de l'équation, les trois termes $k''\, y_1$, $k'\, y_1'$, $k\, y_1''$ s'éliminent et il reste :

$$2x^2(k'' y_1 + 2k'\, y_1') - 3x(k'\, y_1) = 0,$$

soit $2x^3\, k'' + (4x^2 - 3x^2)k' = 0$ dont on tire $\dfrac{k''}{k'} = -\dfrac{1}{2x}$, qui s'intègre en $k' = \dfrac{c}{\sqrt{x}}$ que l'on intègre de nouveau en : $k = c_1\sqrt{x} + c_2$ et finalement les solutions sont les fonctions $y(x) = c_1\, x\sqrt{x} + c_2\, x$.

La méthode de variation des constantes

Propriété 12 *: Si la solution générale de l'équation différentielle sans second membre* $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ *est de la forme* $y = C_1\, y_1 + C_2\, y_2$ *avec* C_1 *et* C_2 *des constantes, alors les solutions de l'équation différentielle avec second membre* $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$ *peuvent se mettre sous la forme* $z(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$ *où* C_1 *et* C_2 *sont liés par la relation* $C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0$.

Déterminer les fonctions C_1 et C_2 se ramène à la résolution de deux équations différentielles linéaires du premier ordre.

Proof : $z' = C_1'\,y_1 + C_1\,y_1' + C_2'\,y_2 + C_2\,y_2' = C_1\,y_1' + C_2\,y_2'$. On peut alors calculer la dérivée seconde $z'' = C_1'\,y_1' + C_1\,y_1'' + C_2'\,y_2' + C_2\,y_2''$. La fonction z est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$a(x)(C_1'\,y_1' + C_1\,y_1'' + C_2'\,y_2' + C_2\,y_2'') + b(x)(C_1\,y_1' + C_2\,y_2') + c(x)(C_1\,y_1 + C_2\,y_2) = f(x)$$

En utilisant le fait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation sans second membre on se ramène à l'équation $a(x)(C_1'\,y_1' + C_2'\,y_2') = f(x)$.

Pour déterminer C_1 et C_2 il suffit donc de résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} C_1'\,y_1 + C_2'\,y_2 = 0 \\ \\ C_1'\,y_1' + C_2'\,y_2' = \dfrac{f(x)}{a} \end{cases}$$

On obtient C_1' et C_2' qui nous permettent d'avoir C_1 et C_2.

Le déterminant $y_1\,y_2' - y_1'\,y_2$ du système s'appelle le wronskien ou déterminant de Wronsky.

Exemple : Résoudre l'équation $y'' + y = tan(x)$. Les solutions de l'équation sans second membre sont les fonctions $C_1\,cos(x) + C_2\,sin(x)$ avec C_1 et C_2 des réels. On cherche donc à résoudre le système :

$$\begin{cases} C_1'\,cos(x) + C_2'\,sin(x) = 0 \\ \\ -C_1'\,sin(x) + C_2'\,cos(x) = tan(x) \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{sin^2(x)}{cos(x)} \\ \\ C_2'(x) = sin(x) \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} C_1(x) = sin(x) + \dfrac{1}{2}\,ln\left|\dfrac{1+sin(x)}{1-sin(x)}\right| + K_1 \\ \\ C_2'(x) = -cos(x) + K_2 \end{cases}$$

Le résultat final est donc

$$y(x) = \left(sin(x) + \frac{1}{2}\,ln\left|\frac{1+sin(x)}{1-sin(x)}\right| + K_1\right)cos(x) + (-cos(x) + K_2)sin(x)$$

Soit

$$y(x) = \frac{1}{2}\,ln\left|\frac{1+sin(x)}{1-sin(x)}\right|cos(x) + K_1\,cos(x) + K_2\,sin(x)$$

3.6 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Il s'agit d'une équation de la forme

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x), a \neq 0$$

où a,b et c sont des constantes réelles et f une fonction donnée. L'équation homogène associée est

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$$

On peut toujours résoudre cette équation homogène en cherchant les solutions sous la forme $Y = e^{rx}$; on remarque que r est la racine de l'équation du second degré $a\,r^2 + b\,r + c = 0$ appelée équation caractéristique associée à l'équation homogène.

Théorème 18 *1. l'équation homogène admet toujours deux solutions indépendantes y_1 et y_2 dont les expressions dépendent des racines de l'équation caractéristique. L'équation homogène sans second membre admet donc des solutions de la forme $y = C_1\,y_1 + C_2\,y_2$.*

2. – *si $\Delta = b^2 - 4\,a\,c > 0$ et si r_1 et r_2 sont les racines réelle distinctes de l'équation caractéristique, deux solutions indépendantes de l'équation homogène sont $y_1 = e^{r_1\,x}$ et $y_2 = e^{r_2\,x}$. Toutes les solutions de l'équation sans second membre s'écrivent sous la forme : $y(x) = C_1\,e^{r_1\,x} + C_2\,e^{r_2\,x}$, où C_1 et C_2 sont des réels quelconques.*

– *si $\Delta = b^2 - 4\,a\,c < 0$ et si $r_1 = u + iv$ et $r_2 = \bar{r}_1$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique, deux solutions indépendantes de l'équation homogène sont $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$. Toutes les solutions de l'équation sans second membre s'écrivent sous la forme : $y(x) = e^{u\,x}(C_1\,cos(v\,x) + C_2\,sin(v\,x))$, où C_1 et C_2 sont des réels quelconques.*

– *si $\Delta = b^2 - 4\,a\,c = 0$ et si r est la racine réelle double de l'équation caractéristique, deux solutions indépendantes de l'équation homogène sont $y_1 = e^{r\,x}$ et $y_2 = x\,e^{r\,x}$. Toutes les solutions de l'équation sans second membre s'écrivent sous la forme : $y(x) = (C_1 + C_2\,x)e^{r\,x}$, où C_1 et C_2 sont des réels quelconques.*

Exemple :

1. Résoudre l'équation $y" + 2y' - 3y = 0$; on a l'équation caractéristique $r^2 + 2r - 3 = 0$; d'où les deux racines $r_1 = 1$, $r_2 = -3$ et deux solutions indépendantes sont $y_1 = e^x$ et $y_2 = e^{-3x}$. Toutes les solutions de l'équation sans second membre s'écrivent sous la forme : $y(x) = C_1\,e^x + C_2\,e^{-3\,x}$, où C_1 et C_2 sont des réels quelconques.

2. Résoudre l'équation $y" - 4y' + 4y = 0$; on a l'équation caractéristique $r^2 - 4r + 4 = 0$; d'où la racine double $r = 2$ et deux solutions indépendantes de l'équation homogène sont $y_1 = e^{2\,x}$ et $y_2 = x\,e^{2\,x}$. Toutes les solutions de l'équation sans second membre s'écrivent sous la forme : $y(x) = (C_1 + C_2\,x)e^{2\,x}$, où C_1 et C_2 sont des réels quelconques.

3. Résoudre l'équation $y" + y' + 2y = 0$; on a l'équation caractéristique $r^2 + r + 2 = 0$; d'où les deux racines $r_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$ et deux solutions indépendantes de l'équation homogène sont $y_1 = e^{r_1\,x}$ et $y_2 = e^{r_2\,x}$. Toutes les solutions de l'équation sans second membre s'écrivent sous la forme : $y(x) = e^{\frac{-1}{2}\,x}\left(C_1\,cos\left(x\,\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right) + C_2\,sin\left(x\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)\right)$, où C_1 et C_2 sont des réels quelconques.

Remarque 24 *1. Dans le cas où $\Delta = b^2 - 4\,a\,c < 0$ et si $r = u + iv$, $y(x)$ s'écrit alors $y(x) = e^{u\,x}(C_1\,cos(v\,x) + C_2\,sin(v\,x)$, avec C_1 et C_2 des constantes réelles ou aussi $y(x) = A\,e^{u\,x}cos(v\,x + \phi)$, avec A, ϕ, u et v des constantes réelles. A est l'amplitude et ϕ la phase.*

2. le théorème n'est plus valable si un seul des trois coefficients a, b, c n'est plus constant.

Intégration complète de l'équation du second ordre avec coefficients constants et second membre

L'équation est de la forme $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x)$. La solution générale $y(x)$ de l'équation homogène étant connue, on cherche une solution particulière $y_0(x)$ de l'équation avec second membre et la solution générale de l'équation avec second membre est alors $Y(x) = y(x) + y_0(x)$.

1. Si la fonction f est un polynôme P de degré n, si c est non nul, on cherche y_0 sous forme d'un polynôme de même degré que P. Si $c = 0$, on pose $z = y'$ et on a $a\,z' + b\,z = P$, on cherche une solution particulière z_0 et on prend comme y_0 une primitive simple de z_0.
2. Si la fonction f est de la forme $f(x) = e^{\alpha x}\,p(x)$, p un polynôme, on pose $y = e^{\alpha x}z$. On dérive et on reporte dans l'équation avec second membre. On simplifie par $e^{\alpha x}$ et on retrouve une équation en z, où f est de la forme $cos(\alpha x)\,P(x)$ ou $sin(\alpha x)\,P(x)$.
3. Si la fonction f est de la forme $f(x) = e^{\alpha x}\,g(x)$, où g est une fonction donnée, on pose $y = e^{\alpha x}z$. On dérive et on reporte dans l'équation avec second membre. On simplifie par $e^{\alpha x}$ et on retrouve une équation en z, on cherche une solution particulière simple z_0 et on a $y_0 = e^{\alpha x}\,z_0$.

Dans le tableau suivant, $P(x)$ est un polynôme, w, α, β et k sont des nombres réels. D'autre part, $Q(x)$ est un polynôme de même degré que $P(x)$ à déterminer, et A, B, $\cdots$ sont des constantes réelles à déterminer. L'équation caractéristique est

$$(EC) \quad a\,r^2 + b\,r + c = 0$$

Second membre $f(x)$	Solution particulière $y_p(x)$
$f(x) = k = cste$	$y_p(x) = A = cste$
$f(x) = P(x)$	$\begin{cases} y_p(x) = Q(x) \text{ si } c \neq 0, \\ y_p(x) = x\,Q(x) \text{ si } c = 0 \text{ et } b \neq 0, \\ y_p(x) = x^2\,Q(x) \text{ si } c = b = 0. \end{cases}$
$f(x) = \alpha\, e^{k\,x}$	$\begin{cases} y_p(x) = A\,e^{k\,x} \text{ si k pas racine de (EC) } k \neq r_1, k \neq r_2, \\ y_p(x) = A\,x\,e^{k\,x} \text{ si k racine simple de (EC) } r_1 \neq r_2, k = r_1 (ou\, r_2), \\ y_p(x) = A\,x^2\,e^{k\,x} \text{ si k racine double de (EC) } r_1 = r_2 = r = k. \end{cases}$
$f(x) = \alpha\, cos(\omega\, x)$ $+\beta\, sin(\omega\, x)$	$\begin{cases} y_p(x) = A\,cos(\omega\,x) + B\,sin(\omega\,x) \text{ si } (i\omega) \text{ pas racine de (EC)}, \\ y_p(x) = x[A\,cos(\omega\,x) + B\,sin(\omega\,x)] \text{ si } (i\omega) \text{ racine de (EC)}. \end{cases}$
$f(x) = P(x)\,e^{k\,x}$	$\begin{cases} y_p(x) = Q(x)\,e^{k\,x} \text{ si k pas racine de (EC) } k \neq r_1, k \neq r_2, \\ y_p(x) = x\,Q(x)\,e^{k\,x} \text{ si k racine simple de (EC) } r_1 \neq r_2, k = r_1 (ou\, r_2), \\ y_p(x) = x^2\,Q(x)\,e^{k\,x} \text{ si k racine double de (EC) } r_1 = r_2 = r = k. \end{cases}$
$f(x) = e^{k\,x}\,\alpha\, cos(\omega\, x)$ $+e^{k\,x}\beta\, sin(\omega\, x)$	$\begin{cases} y_p(x) = e^{k\,x}[A\,cos(\omega\,x) + B\,sin(\omega\,x)] \text{ si } (k + i\omega) \text{ pas racine de (EC)}, \\ y_p(x) = x\,e^{k\,x}\,[A\,cos(\omega\,x) + B\,sin(\omega\,x)] \text{ si } (k + i\omega) \text{ racine de (EC)}. \end{cases}$

Exemples :

1. Résoudre l'équation $y" + 2y' - 3y = x^2 + 1$; la solution de l'équation homogène est $y(x) = C_1\, e^x + C_2 e^{-3x}$; on cherche la solution particulière sous la forme $y_0 = a\,x^2 + b\,x + c$ et on a la condition $-3\,a = 1$; $6\,a - 3\,b = 0$; $2\,b - 3\,c = 1$; d'où $a = \frac{-1}{3}$; $b = \frac{-2}{3}$; $c = \frac{-7}{9}$. La solution de l'équation est donc $Y(x) = y(x) + y_0 = C_1\, e^x + C_2\, e^{-3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{7}{9}$.
2. Résoudre l'équation $y" - 3y = x^2 + 1$.
3. Résoudre l'équation $y" + 2y' = x^2 + 1$.
4. Résoudre l'équation $y" = x^2 + 1$.
5. Résoudre l'équation $y" + 2y' - 3y = e^{3x}(x^2 - 1)$; la solution de l'équation homogène est $y(x) = C_1\, e^x + C_2\, e^{-3x}$; on pose $y = e^{3x} z$ et en dérivant, on voit que la nouvelle équation en z est $z" + 8z' + 12z = x^2 - 1$; on cherche la solution particulière sous la forme $y_0 = a\,x^2 + b\,x + c$ et on donne la solution de l'équation comme dans le cas précédent.
6. Résoudre l'équation $y" + 2y' - 3y = e^{3x}(cos 3x)$.
7. Résoudre l'équation $y" + 2y' - 3y = 7$.
8. Résoudre l'équation $y" + 2y' - 3y = 2cos(3x) - 5sin(2x)$.

3.7 Mise en équation différentielle ou modélisation

Il s'agit là d'une grande question qui fait l'objet de débats philosophiques sans fins. Ce qui suit est une position qui n'est certes pas universelle mais qui est néanmoins partagée, entre autres, par beaucoup d'ingénieurs et d'automaticiens. On considère un processus ou un phénomène dont on veut rendre compte ; nous entendons par là un objet réel, non formalisé. On peut par exemple s'intéresser à son fonctionnement

ou bien à son évolution dans le temps. On établit à partir de diverses données, en faisant un certain nombre d'hypothèses, un certain nombre d'expressions mathématiques qui constituent le modèle. Le processus qui consiste à construire les équations en relation avec le comportement dynamique du phénomène s'appelle « Modélisation Mathématique ».
On attend du modèle qu'il puisse permettre de décrire et de prédire le comportement du système lorsque ce dernier est soumis à des influences externes. On doit pouvoir raisonner, calculer et tirer des conclusions à partir du modèle qui s'avéreront vraies pour le système réel.
Cette construction répond à un but qui doit être clairement explicité, pour plusieurs raisons.

Tout d'abord il s'agit d'une démarche interdisciplinaire ; en conséquence les objectifs doivent être clairs pour tous les intervenants.

Ensuite si la nature du modèle et les méthodes utilisées sont fortement influencées par la nature de l'objet investigué, il n'en reste pas moins que la complexité de la description mathématique dépendra des objets recherchés.

En outre, l'objet réel et son modèle mathématique sont de natures différentes. Pour diverses raisons, le modèle est généralement une représentation imparfaite, incomplète de l'objet : soit par manque de connaissances, soit du fait d'une simplification délibérée pour des raisons pratiques, soit les deux à la fois. Le modèle est généralement un compromis entre les retombées espérées et les moyens nécessaires à mettre en oeuvre (temps, expérimentations, moyens de calculs, possibilités techniques). Nous obtenons donc un modèle du système réel, plus ou moins satisfaisant compte tenu des objectifs et des moyens disponibles.

On part donc des données initiales obtenues sur le terrain, mais aussi de connaissances a priori, provenant d'un corpus de loi (mécanique, physique, chimie, biologie$\cdots$). On parlera de **modèles phénoménologiques** (pour les modèles de connaissances). Par ailleurs on peut avoir un **modèle de comportements** construit à partir de données. Le modèle final pouvant être obtenu par une agrégation de modèles partiels phénoménologiques et de comportement. L'élaboration du modèle relie des variables choisies qui représentent en un certain sens l'état du système et des paramètres qui caractérisent leur relation. Ces paramètres doivent être identifiés. Autrement dit, on leur attribue des valeurs du mieux que l'on peut. Il existe des algorithmes pour cela ou on en invente.

Une fois le modèle établit, on résout numériquement ou analytiquement les équations du modèle pour calculer les grandeurs mesurables. Ensuite, on confronte avec l'expérience. Cela signifie que l'on compare avec les résultats donnés par le modèle et ceux donnés par le système réel. Comparer signifie que l'on s'est donné un critère. On ajuste alors la structure du modèle (reconception) et /ou on ajuste les paramètres jusqu'à ce que l'on soit satisfait : le modèle a atteint son but.

3.7.1 Champs de gradient et champs de rotationnel

On considère le champ de vecteurs $\vec{u} = (4x+y)\vec{i} + 2xy\vec{j} + 4z\vec{k}$ où x, y, z sont des réels non tous nuls quelconques. L'objectif dans un premier temps est de déterminer les constantes de telle sorte que le vecteur $\vec{u}$ soit un champs de gradient ; il s'agit de déterminer un potentiel scalaire $f(x,y,z)$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{grad}\, f(x,y,z)$. Ensuite il faudra déterminer les vecteurs $\vec{u}$ tels que $\vec{v} = \overrightarrow{rot}\,\vec{u}$.

1. Déterminer $\overrightarrow{rot}\,\vec{u}$ en fonction de x, y et z, et vérifier que $div\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{u}) = 0$ quel que soient x, y, z.
2. α, β, γ étant trois paramètres réels, on considère le champ de vecteurs $\vec{u} = (x+2y+\alpha z)\vec{i} + (\beta x - 3y - z)\vec{j} + (4x+\gamma y+2z)\vec{k}$ où x, y et z sont quelconques non tous nuls.

   Déterminer α, β, γ pour que $\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \vec{O}$
3. Montrer que dans ce cas, il existe une fonction scalaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dépendant de x, y, z telle que $\vec{u} = \overrightarrow{grad}\, f$ et calculer la fonction scalaire f. Cette fonction est-t-elle unique ? sinon déterminer une autre fonction différente de la première et vérifiant la même relation.
4. Soit le vecteur $\vec{v} = (\alpha x + y)\vec{i} + (\beta y + z)\vec{j} + (\gamma z + x)\vec{k}$ où x, y, z sont des réels quelconque non tous nuls.

   Déterminer un exemple de triplet (α, β, γ) tel que $div\,\vec{v} = 0$. Ce triplet est-t-il unique ? Sinon déterminer un autre triplet vérifiant la même relation.
5. Montrer que dans chacun des cas, il existe un champ de vecteur $\vec{F}$ dans $\mathbb{R}^3$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{rot}\,\vec{F}$ et calculer $\vec{F}$. Le vecteur $\vec{F}$ ainsi obtenu est-t-il unique ? Sinon déterminer un autre vérifiant la même relation.

Solution : Rappelons que pour un vecteur $\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} + u_3\,\vec{k}$, les composantes du rotationnel sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_3}{\partial y} - \dfrac{\partial u_2}{\partial z} \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial z} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial x} - \dfrac{\partial u_1}{\partial y}. \end{cases}$$

1. Puisque $\vec{u} = (4x+y)\vec{i} + 2xy\vec{j} + 4z\vec{k} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} + u_3\,\vec{k}$, on en déduit

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \begin{cases} \dfrac{\partial u_3}{\partial y} - \dfrac{\partial u_2}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial z} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial x} - \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = 2y - 1. \end{cases}$$

On peut donc vérifier que vérifier que $div\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \vec{w}) = \dfrac{\partial w_1}{\partial x} + \dfrac{\partial w_2}{\partial y} + \dfrac{\partial w_3}{\partial z} = 0$ quel que soient x, y, z.

2. α, β, γ étant trois paramètres réels, on considère le champ de vecteurs $\vec{u} = (x + 2y + \alpha z)\vec{i} + (\beta x - 3y - z)\vec{j} + (4x + \gamma y + 2z)\vec{k} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j} + u_3\,\vec{k}$ où x, y et z sont quelconques non tous nuls.

   Déterminons α, β, γ pour que $\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \vec{O}$.

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{u} = \begin{cases} \dfrac{\partial u_3}{\partial y} - \dfrac{\partial u_2}{\partial z} = \gamma + 1 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial z} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x} = \alpha - 4 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial x} - \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \beta - 2 = 0. \end{cases}$$

   D'où $\alpha = 4$, $\beta = 2$ et $\gamma = -1$.

3. Montrons que dans ce cas, il existe une infinité de fonctions scalaires $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dépendant de x, y, z telles que $\vec{u} = \overrightarrow{grad}\, f$ et calculer ces fonctions scalaires f. L'existence vient du fait que $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad}\, f = 0$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{grad}\, f \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x,y,z)}{\partial x} = x + 2y + 4z, \quad (1) \\[2ex] \dfrac{f(x,y,z)}{\partial y} = 2x - 3y - z, \quad (2) \\[2ex] \dfrac{f(x,y,z)}{\partial z} = 4x - y + 2z \quad (3). \end{cases}$$

   L'équation (1) nous donne $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz + g(y,z)$. En dérivant cette expression de f afin qu'elle vérifie l'équation (2), on obtient $2x + \dfrac{g(y,z)}{\partial y} = 2x - 3y - z$, d'où $\dfrac{g(y,z)}{\partial y} = -3y - z$. Cette équation nous donne $g(y,z) = -\dfrac{3}{2}y^2 - yz + h(z)$. En reportant dans l'expression précédente de f, on obtient $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz - \dfrac{3}{2}y^2 - yz + h(z)$. En dérivant cette expression de f afin qu'elle vérifie l'équation (3), on obtient $4x - y + \dfrac{h(z)}{\partial z} = 4x - y + 2z$, d'où $\dfrac{h(z)}{\partial z} = 2z$. Cette équation nous donne $h(z) = z^2 + c$, où c est une constante réelle. L'expression définitive de f est donc : $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2xy + 4xz - \dfrac{3}{2}y^2 - yz + z^2 + c$. Cette expression montre que f n'est pas unique car elle dépend d'une constante. Il y en a donc une infinité.

4. Soit le vecteur $\vec{v} = (\alpha x + y)\vec{i} + (\beta y + z)\vec{j} + (\gamma z + x)\vec{k}$ où x, y, et z sont des réels quelconque non tous nuls.

   Déterminons un exemple de triplet (α, β, γ) tel que $div\,\vec{v} = 0$. $div\,\vec{v} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial v_3}{\partial z} = \alpha + \beta + \gamma = 0$. On a donc une infinité de triplets vérifiant cette équation : exemples $(0,0,0)$, $(-1,1,0)$, $(-2,1,1)$, ...

5. Montrons que dans chacun des cas, il existe un champ de vecteur $\vec{F}$ dans $\mathbb{R}^3$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{rot}\,\vec{F}$ et calculer $\vec{F} = F_1\,\vec{i} + F_2\,\vec{j} + F_3\,\vec{k}$. L'existence vient du fait que $div\,\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = 0$. Pour le triplet $(-2, 1, 1)$,

$$\vec{v} = \overrightarrow{rot}\,\vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial y} - \dfrac{\partial F_2}{\partial z} = -2x + y, \\[2ex] \dfrac{\partial F_1}{\partial z} - \dfrac{\partial F_3}{\partial x} = y + z, \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = x + z. \end{cases}$$

On voudrait que le vecteur $\vec{F}$ soit dans le plan $(\vec{i}, \vec{j})$. Dans ce cas, $F_3 = 0$ et le système devient

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial F_2}{\partial z} = -2x + y, \\[2ex] \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = y + z, \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = x + z. \end{cases}$$

Les deux premières équations nous donnent $F_1(x, y, z) = y\,z + \dfrac{1}{2}z^2 + c_1(x, y)$ et $F_2(x, y, z) = 2x\,z - yz + c_2(x, y)$. En reportant ces expressions dans la troisième équation du système, on obtient $2z + \dfrac{\partial c_2(x, y)}{\partial x} - z - \dfrac{\partial c_1(x, y)}{\partial y} = x + z$; d'où $\dfrac{\partial c_2(x, y)}{\partial x} - \dfrac{\partial c_1(x, y)}{\partial y} = x$. Il faut donc faire le choix des fonctions $c_1(x, y)$ et $c_2(x, y)$ tel que cette équation soit vérifiée. On fait le choix de l'un et on déduit l'autre. Prenons par exemple $c_1(x, y) = x + y$; alors $\dfrac{\partial c_2(x, y)}{\partial x} = x + 1$. D'où $c_2(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + K$, où K est une constante réelle. On a donc en définitive $F_1(x, y, z) = y\,z + \dfrac{1}{2}z^2 + x + y$, $F_2(x, y, z) = 2x\,z - yz + \dfrac{1}{2}x^2 + x + K$ et $F_3 = 0$.

3.7.2 Les mélanges

La modélisation par les équations différentielles est très souvent utilisés lorsqu'il s'agit des mélanges. Il s'agit de mélanges de toute nature devant être homogène par la suite, contenu dans des récipients de toute nature ayant un débit d'approvisionnement et un débit d'évacuation.

Exemple 1 : Un réservoir d'une capacité de 1000 gallons contient à l'instant initiale $t = 0$, 500 gallons d'une saumure contenant 50 livres de sel. À $t = 0$, de l'eau pure est ajoutée à un débit de 20 gal/min et la solution obtenue est évacuée avec un débit de 10 gal/min. Soit $x(t)$ la quantité d'eau à un instant t quelconque dans le réservoir, et $y(t)$ la quantité de sel dans le réservoir à un instant t quelconque.

Remarque : 1 livre=453,6 grammes et 1 gallon=3,8 litres (USA)=4,5 litres (GB).

1. Écrire l'équation de la variation de la quantité d'eau $x(t)$ en fonction du temps.
2. Déterminer le temps t_f au bout duquel le réservoir se remplit.

3. Écrire l'équation de la variation de la quantité de sel $y(t)$ en fonction du temps.

4. Déterminer la quantité de sel qu'il y aura dans le réservoir quand il commencera à déborder.

Solution :

1. Soit $x(t)$ la quantité d'eau à un instant t quelconque dans le réservoir : $x(0) = 50$ gal. Au bout d'une minute, il y a un ajout de 20 gal d'eau et une diminution de 10 gal d'eau. La variation de la quantité d'eau dans le réservoir est $\dfrac{dx(t)}{dt}$. On obtient donc $\dfrac{dx(t)}{dt} = 20 - 10 = 10$ (car 20 gallons entrent et 10 gallons sortent). D'où $x(t) = 10\,t + c$ et puisque $x(0) = 500$, on obtient $x(t) = 10\,t + 500$.

2. Lorsque le réservoir commence à déborder, il est plein et $x(t) = 1000$ gallons. On obtient donc $x(t) = 10\,t + 500 = 1000$, d'où $t_f = 50$.

3. La variation de sel à un instant quelconque est $y'(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$. Après une minute, il n'y a que de l'eau pure qui entre dans le réservoir ; donc pas d'entrée de sel. Dans le même temps, il sort du réservoir $10\dfrac{y(t)}{x(t)}$ car un débit de 10 gallons sort du réservoir et ce débit contient la proportion $10\dfrac{y(t)}{x(t)}$ de sel. On obtient donc l'équation
$$\frac{dy(t)}{dt} = -10\frac{y(t)}{x(t)} = -10\frac{y(t)}{10\,t + 500}.$$

4. L'intégration de cette équation nous donne $y(t) = \dfrac{K}{t + 50}$. Puisque à $t = 0$ la quantité de sel est celle contenue dans la saumure, soit $y(0) = 50$ livres, on obtient $y(t) = \dfrac{2500}{t + 50}$. Lorsque le réservoir commence à déborder, $t = t_f = 50$ et la quantité de sel est de $y(t_f) = \dfrac{2500}{t_f + 50} = \dfrac{2500}{100} = 25$ livres.

Exemple 2 : Au temps $t = 0$, un réservoir contient 4 lb de sel dissous dans 100 gal d'eau. Supposons qu'une saumure contenant 2 lb de sel par gallon d'eau s'écoule dans le réservoir à un débit de 5 gal/min et que la solution obtenue s'échappe du réservoir aussi avec un débit de 5 gal/min. La solution est conservée uniforme par un mélangeur. Quelle est la quantité de sel dans le réservoir après 10 min ($t = 10$) ?

Solution : Soit $y(t)$ la quantité de sel (en livres) au temps t. Commençons par trouver une expression de $\dfrac{dy}{dt}$, la vitesse de variation de la quantité de sel au temps t. On sait que 10 lb de sel pénètrent chaque minute dans le réservoir car on a 2 livres par gallon et le débit est de 5 gal/min, et $5\dfrac{y(t)}{100}$ en sortent car à tout instant il y a 100 gallons d'eau dans le réservoir. On a donc $\dfrac{dy}{dt} = 10 - \dfrac{y(t)}{20}$. D'où l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{y(t)}{20} = 10$ qui est linéaire d'ordre 1. La solution au temps t quelconque est $y(t) = 200 + C\,exp\left(-\dfrac{t}{20}\right)$. On a aussi la condition initiale $y(0) = 4$. Cette condition implique $4 = 200 + C$ et $C = -196$. Donc, $y(t) = 200 - 196\,exp\left(-\dfrac{t}{20}\right)$. Ainsi, après 10 minutes, la quantité de sel sera $y(10) = 200 - 196\,exp\left(-\dfrac{10}{20}\right) = 81,1\,lb$.

3.7.3 La démographie

Afin de justifier l'étude des équations différentielles, des exemples en démographie peuvent être considérés. Soit $N(t)$ le nombre d'individus dans un espace donné à un instant t quelconque. A l'instant $t+T$, le nombre d'individus est $N(t+T)$ tel que $N(t+T)-N(t)$ est le nombre d'individus qui se sont rajoutés à la population ou qui ont disparu de la population pendant l'intervalle de temps T. En considérant que cette variation est de la forme $r\,T\,N(t)$, où r est la croissance intrinsèque de la population, on obtient $N(t+T)-N(t) = r\,T\,N(t)$. D'où $\dfrac{N(t+T)-N(t)}{T} = r\,N(t)$. On a donc $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} \dfrac{N(t+T)-N(t)}{T} = \dfrac{dN(t)}{dt} = r\,N(t)$. La solution générale est donc $N(t) = \lambda\, e^{r\,t}$, où λ est une constante. Si à l'instant t_0 la population totale est N_0, alors $(N(t_0 = N_0)$ et $\lambda = N_0\, e^{r\,t_0}$. La solution devient donc $N(t) = N_0\, e^{r\,(t-t_0)}$. On discute en suite en fonction de la croissance intrinsèque $r = n - m$, où n est le taux de natalité et m le taux de mortalité.

1. Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} N(t) = +\infty$. Il y a donc croissance exponentielle de la population.
2. Si $r = 0$, alors $N(t) = N_0$. La population est tout le temps constante. Le nombre de décès est compensé par le nombre de naissance. Ce cas n'est tout de même pas très réaliste dès que la population est grande.
3. Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} N(t) = 0$. Il y a donc décroissance de la population qui finit par disparaître si rien n'est fait.

L'évolution de la taille de la population du Botswana ces 25 dernières années est représentée à l'aide des données ci-dessous.

Temps (année)	Nombre d'habitants (millions)
1975	0.755
1980	0.901
1985	1.078
1990	1.285
1995	1.6

La fonction exponentielle permet de décrire cette évolution et on obtient la relation suivante $P(t) = 0.7835\, e^{0.0291\,t}$. Si l'on désigne par P la taille de la population du Botswana et par t l'année ($t = 0$ correspondant à 1975).

On peut ainsi calculer le temps de doublement de la population, c'est à dire la valeur θ de t telle que $P(t+\theta) = 2P(t)$.

$$\begin{aligned} P(t+\theta) = 2P(t) \quad & \Leftrightarrow 0.7835\, e^{0.0291\,(t+\theta)} = 2 \times 0.7835\, e^{0.0291\, t} \\ & \Leftrightarrow e^{0.0291\,\theta} = 2 \\ & \Leftrightarrow \theta \approx 24 \quad \text{années} \end{aligned}$$

Supposons qu'en 2001, certains habitants craignent cette augmentation massive de la population prévue d'ici 25 ans ; en effet, selon l'équation précédente, la taille de la population aura doublée par rapport à celle de 2001 en 2025 pour passer à 3.2 millions d'habitants.

On peut raisonnablement imaginer que ces habitants vont alors chercher à émigrer vers d'autres pays. L'intégrale du taux d'émigration sur 25 ans est égale à l'émigration totale pendant cette période.

Si on suppose qu'un quart de la population de 2001 (soit 0.4 millions d'habitants) va émigrer ces 25 prochaines années, et si on suppose que le taux d'émigration a va augmenter de façon linéaire pendant cette période, il vient : $\int_0^{25} a\,t\,dt = \dfrac{1.6}{4}$.

Nous en déduisons que le taux d'émigration a est $a = 0.0128$, exprimé en millions d'habitants par an.

Un exemple en médecine

Considérons la fonction f définie sur $[0;20]$ par $f(t) = 3\,e^{-0.1\,t}$. La fonction f relie la quantité d'un certain médicament dans le sang au temps t, pendant les $20h$ qui suivent l'injection.

On peut calculer la quantité moyenne de médicament présente dans le sang pendant les 10 premières heures.

$$\mu = \frac{1}{10}\int_0^{10} f(t)\,dt = 3(1-e^{-1}) \approx 1.8964u$$

3.8 Exercices

3.8.1 Exercice

Au temps $t = 0$, un réservoir contient 4 lb de sel dissous dans 100 gal d'eau. Supposons qu'une saumure contenant 2 lb de sel par gallon d'eau s'écoule dans le réservoir à un débit de 5 gal/min et que la solution obtenue s'échappe du réservoir aussi avec un débit de 5 gal/min. La solution est conservée uniforme par un mélangeur. Quelle est la quantité de sel dans le réservoir après 10 min $(t = 10)$?

1. Intégrer les équations différentielles du premier ordre suivantes :
   (a) $xy' + y^3 = 1$
   (b) $xy'y + 2xy^2 = -y^4$
   (c) $y' = e^{(x+y)}$
   (d) $(x^2+4)y' + xy = 2$

(e) $xe^{x+y} = yy'$

(f) $xy' + y = tg(x) + xe^x$

(g) $y'(x - 2y) = (2y - 3x)$ (on posera $y = tx$)

2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y" + 2y' - 15y = 0$

(b) $y" - 8y' + 16y = 0$

(c) $y" + 4y' + 8y = xe^{3x} + sin(x) + x^2$

(d) $y" - 6y' = sin(x)$

(e) $y" + 2y' + 5y = e^{-x}cos(x)$

(f) $y" + y = 2xe^{2x}$

(g)

$$\begin{cases} y" + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} y' = -xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$