FICHE DE TD DE MECANIQUE DE SOLIDE

I.CALCUL VECTORIEL-TOSEUR

Objectifs :

- Différencier entre torseur symétrique et anti-symétrique;
- Décomposer un torseur (couple et glisseur) ;
- Comprendre la notion de torseur équiprojectif ;
- Déterminer les élements de réduction d'un torseur ;
- Déterminer l'axe central.

Exercice 1

Soit L une application de l'espace vectoriel (E) dans lui-même. L'espace (E) est associé à l'espace affine ζ à trois dimensions. L'application L est définie par :

$$L\,(\vec{u}(M)) = \begin{cases} \beta x - y + 4z \\ x + \beta y + \gamma z \\ -\alpha^2 x - y + \beta z \end{cases} \quad \text{avec} \quad \vec{u}(M)) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{et M un point quelconque de } \zeta.$$

1- Pour quelles valeurs des paramètres α, β et γ, l'application L est antisymétrique ?

2- Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{\Omega}$ tel que $L\,(\vec{u}(M)) = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}(M)$.

Exercice 2

Considérons les vecteurs $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{j}$, liés respectivement aux points A (1, 0, 0) et B (1, 1, 0) et les torseurs $[G_1]$ et $[G_2]$ associés aux moments de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, respectivement.

1- montrer que $[G_1]$ et $[G_2]$ sont des glisseurs.

2- On pose $[G] = [G_1] + [G_2]$.

a- Calculer la résultante $\vec{R}$ de [G] et son moment en A. En déduire la nature de [G].

b- Déterminer l'équation cartésienne de l'axe central de [G].

Exercice 3

Dans un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère un disque de centre O contenu dans le plan xOy. Le disque tourne dans le sens trigonométrique autour de Oz avec une vitesse de rotation ω.

1- Par un calcul direct, déterminer la vitesse $\vec{v}(M/R)$ d'un point M (x, y, 0) du disque.

2- Montrer que le champ $\vec{v}(M/R)$ forme un torseur et déterminer ses éléments de réduction en O.

3- De quel type de torseur s'agit- il ? Quel est son axe central ?

Exercice 4

Dans un repère orthonormé direct $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le champ de vecteurs $\vec{v}(M)$ dont les composantes sont définies en fonction des coordonnées (x, y, z) de M par :

$$\begin{vmatrix} v_x = 1 + 3y - tz \\ v_y = -3x + 2tz \\ v_z = 2 + tx - t^2 y \end{vmatrix} \qquad \text{où t est un paramètre réel.}$$

1- Calculer le vecteur $\vec{v}(M)$ au point O.

2- Pour quelles valeurs de t, ce champ est antisymétrique ?

3- Pour chaque valeur trouvée de t, déterminer les éléments de réduction du torseur (résultante et moment en O).

4- Décomposer le torseur associé à $\vec{v}(M)$ en une somme d'un couple et d'un glisseur dont on indiquera les éléments de réduction.

5- Déterminer la position de l'axe central du torseur pour $t = 0$ et $t=2$.

Exercice 5

Dans un repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé et direct, on considère les torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ dont les éléments de réduction au point O sont respectivement $\left[\vec{M}_1(O), \vec{R}_1\right]$ et $\left[\vec{M}_2(O), \vec{R}_2\right]$ définis par $\begin{cases}\vec{M}_1(O) = -a\sin\alpha\,\vec{i} - a\cos\alpha\,\vec{j} \\ \vec{R}_1 = \cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}\end{cases}$ et $\begin{cases}\vec{M}_2(O) = -a\sin\alpha\,\vec{i} + a\cos\alpha\,\vec{j} \\ \vec{R}_2 = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\end{cases}$

Où a et α sont des constantes non nulles.

1- Calculer les invariants scalaires des torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ et déduire leur(s) nature(s).

2- Calculer $\vec{M}_1(O')$ pour un point O′ de coordonnées (0, 1, 1).

3- Déterminer l'équation de l'axe central de $[T_2]$ et calculer le moment $\vec{M}_2(P)$ en un point P de cet axe.

4- Déterminer les valeurs de α pour lesquelles le torseur $[T_3] = [T_1] + [T_2]$ est un glisseur.

Exercice 6

Dans un repère $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé direct, on considère les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $D_1\begin{pmatrix} x=0 \\ z=1 \end{pmatrix}$ et $D_2\begin{pmatrix} y=0 \\ z=-1 \end{pmatrix}$.

On considère les vecteurs glissants $\vec{R}_1 = b\,\vec{j}$ et $\vec{R}_2 = a\vec{i}$ de supports respectifs D_1 et D_2, avec a et b des paramètres réels non nuls.

On définit le champ $\vec{u}(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \vec{R}_1 + \overrightarrow{MB} \wedge \vec{R}_2$. Les points A et B sont les intersections de D_1 et D_2 avec l'axe Oz, respectivement.

1- Calculer les composantes de $\vec{u}(M)$ en fonction des coordonnées (x, y, z) de M.

2- Quel est l'ensemble Δ des points M pour lesquels $\vec{u}(M)$ est colinéaire à $\vec{R}_1 + \vec{R}_2$.

3- Préciser la position de Δ par rapport à l'axe Oz.

4- Soit Q le point d'intersection de Δ avec l'axe Oz. On définit le point S tel que $\overrightarrow{QS} = \vec{u}(Q)$. Calculer les coordonnées de S et montrer que, lorsque b varie, S′ (projection de S sur le plan xOy) décrit un cercle de centre le point de coordonnées $(0, -a)$.

Exercice 9

Dans un repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère les trois glisseurs définis par les trois vecteurs :

$\vec{V}_1=(1,0,-1)$ d'origine $A=(1,0,0)$
$\vec{V}_2=(1,2,2)$ d'origine $B=(0,1,0)$
$\vec{V}_3=(\lambda,\mu,\nu)$ d'origine $C=(0,0,1)$

Soit [T] la somme des trois glisseurs.

1- Déterminer (λ,μ,ν) pour que [T] soit un couple et trouver son moment.

2- Déterminer la relation que doit lier λ,μ et ν pour que [T] soit un glisseur ?

3- Dans le cas où $(\lambda,\mu,\nu)=(-2,0,-1)$, trouver les équations de l'axe central de [T]. Que peut-on dire de la direction de l'axe central ?

Exercice 14

Considérons le repère fixe $R_o(Ox_oy_oz_o)$ et un deuxième repère R(Gxyz) lié à un solide (S). Désignons par E l'espace vectoriel associé à l'espace affine ζ lié à (S). On considère l'application L définie de l'espace vectoriel E vers lui-même qui, à $\vec{u} \in E$, fait correspondre $L(\vec{u}) = \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_{R_0}$.

1- a. Vérifier que L est une application linéaire antisymétrique.

b. Donner la forme de sa matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du repère R.

2- En déduire qu'il existe un vecteur $\vec{\Omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ tel que: $L(\vec{u}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{u}$.

II.CINEMATIQUE DU SOLIDE

Objectifs :

- Comprendre le mouvement du solide étudié (points fixes, axes de rotation …) ;
- Différencier entre vitesse linéaire et vitesse angulaire ;
- Différencier entre réferentiesl absolu, relatif et d'étude ;
- Illustrer la distinction entre vitesse absolue, relative et d'entrainement (relation de transfert) ;
- Comprendre la notion de centre instantané de rotation ;
- Savoir déterminer la condition de roulement sans glissement ;
- Savoir déterminer la base et la roulante .

Exercice 1

On considère un cube de côtés $O_1A = O_1B = O_1C = 1$, en mouvement par rapport à un repère orthonormé direct fixe, R(O, x, y, z). A tout instant, les projections des vecteurs vitesses des points A, B et C sont telles que :

$$\vec{v}(A/R)\cdot\overrightarrow{O_1B} = 2\omega \text{ et } \vec{v}(A/R)\cdot\overrightarrow{O_1C} = \omega$$

$$\vec{v}(B/R)\cdot\overrightarrow{O_1A} = \omega \text{ et } \vec{v}(B/R)\cdot\overrightarrow{O_1C} = 0$$

$$\vec{v}(C/R)\cdot\overrightarrow{O_1A} = \omega \text{ et } \vec{v}(C/R)\cdot\overrightarrow{O_1B} = \omega$$

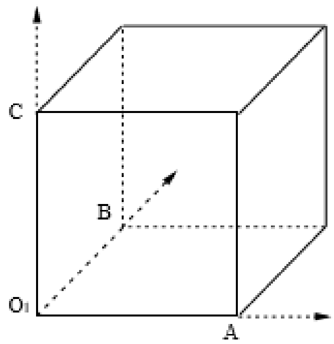


Figure 1

Soit $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un repère lié au cube dans son mouvement par rapport à R avec $\vec{i}_1 = \overrightarrow{O_1A}$, $\vec{j}_1 = \overrightarrow{O_1B}$ et $\vec{k}_1 = \overrightarrow{O_1C}$ (voir figure 1).

1- Déterminer dans R, les vecteurs vitesses des points A, B et C. En déduire le vecteur $\vec{\Omega}(S/R)$ qui caractérise la rotation instantanée du cube par rapport à R.

2- Déterminer le vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}(S/R)$ du cube par rapport à R. En déduire les vecteurs vitesses des points A, B et C.

3- Déterminer la vitesse du point O_1 par rapport à R, $\vec{v}(O_1/R)$.

4- Déterminer l'invariant scalaire I du torseur cinématique.

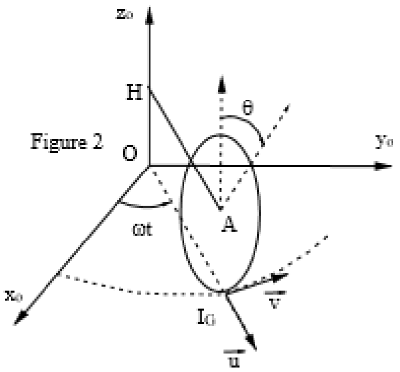
5- Calculer la vitesse $\vec{v}(M/R)$ d'un point M quelconque du cube. En déduire l'axe instantané de rotation.

Indication: *Tous les résultats doivent être exprimés dans la base de* R_1.

Exercice 2

Un cerceau (C) de centre A et de rayon a, dont le plan est perpendiculaire à x_0Oy_0, roule sans glisser sur le plan horizontal (P). L'axe du cerceau reste parallèle à l'axe (OI_G) et le point de contact I_G décrit un cercle de rayon R avec une vitesse angulaire ω constante (figure 2). L'angle variable θ caractérise la rotation propre du cerceau autour de son axe. On désigne par $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ le repère fixe, $R_1(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)$ un repère intermédiaire et par $R(O, x, y, z)$ le repère lié à (P). On suppose que le plan (P) est fixe dans R_0. Soient I_1, I_2 et I_G les points de contact entre le cerceau et le plan (P) tels que $I_1 \in (C)$, $I_2 \in (P)$ et I_G point géométrique.

Figure 2



1- Calculer la vitesse $\vec{v}(A/R_0)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(A/R_0)$ du point A dans R_0.

2- Quel est le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(C/R_0)$.

3- Donner les éléments de réduction du torseur cinématique en A. En déduire sa nature.

4- Calculer la vitesse $\vec{v}(I_1/R_0)$. En déduire la condition du roulement sans glissement.

5- Calculer les vitesses $\vec{v}(I_2/R_0)$ et $\vec{v}(I_G/R_0)$ ainsi que les accélérations $\vec{\gamma}(I_1/R_0)$, $\vec{\gamma}(I_2/R_0)$ et $\vec{\gamma}(I_G/R_0)$. Conclure.

6- Calculer la vitesse $\vec{v}(M/R_0)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(M/R_0)$du point M situé sur la périphérique du cerceau lors de son passage par le point le plus haut de (C).

7- Soit B un point appartenant à l'axe du cerceau et situé à une distance b de A. Sachant que B est lié à (C), calculer $\vec{v}(B/R_0)$. Pour quelle condition cette vitesse devient nulle.

8- En déduire l'axe central du torseur cinématique.

9- On suppose maintenant que le plan (P) tourne autour de la verticale avec une vitesse angulaire constante ω_0.

a- Calculer la vitesse $\vec{v}(A/R_0)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(A/R_0)$ en utilisant le théorème de composition des mouvements.

b- Déterminer le nouveau vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}(C/R_0)$.

Indication: *Tous les résultats doivent être exprimés dans la base* $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k}_0)$

Exercice 4

Soit $R_0(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ un repère fixe et Σ un système matériel constitué de deux solides (S_1) et (S_2) (Fig.2). (S_1) est une barre homogène OA tournant dans le plan horizontal $(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0)$ à la vitesse angulaire ω autour de l'axe $(O,\vec{k}_0)$. (S_2) est un disque homogène, de rayon R et de centre C. (S_2) est assujetti à rester dans le plan vertical $(O,\vec{i}_1,\vec{k}_0)$ et à rouler sans glisser sur (S_1). On a

$\vec{OC} = R\vec{k}_0 + x\vec{i}_1$. $R_1(O,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_0)$ et $R_2(C,\vec{i}_2,\vec{j}_1,\vec{k}_2)$ sont deux repères respectivement liés à (S_1) et (S_2). La position du système dans R_0 est repérée par les angles : $\psi = (\vec{i}_0,\vec{i}_1)$ et $\theta = (\vec{i}_1,\vec{i}_2)$.

1) Donner les vitesses de rotation $\vec{\Omega}(S_1/R_0)$ et $\vec{\Omega}(S_2/R_1)$. En déduire $\vec{\Omega}(S_2/R_0)$.
2) Calculer les vitesses $\vec{V}(I_1 \in S_1/R_0)$; $\vec{V}(I_2 \in S_2/R_0)$ et $\vec{V}(I/R_0)$. I_1 et I_2 étant les points de contact de (S_1) et (S_2) respectivement et I le point géométrique de contact. Comparer les trois vitesses.
3) Calculer les accélérations $\vec{\gamma}(I_1 \in S_1/R_0)$; $\vec{\gamma}(I_2 \in S_2/R_0)$ et $\vec{\gamma}(I/R_0)$.
4) Exprimer la condition de roulement sans glissement de (S_2) sur (S_1).
5) Peut-on dire que le mouvement de (S_2) est plan dans le repère R_0.

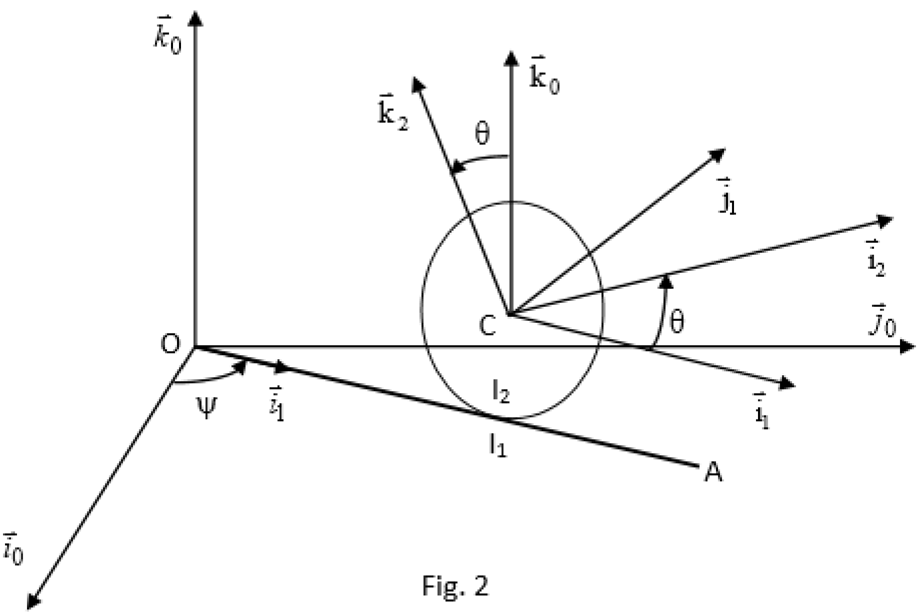


Fig. 2

Exercice 6

On considère deux disques D_1 et D_2, de rayons R_1 et R_2, en mouvement dans le plan vertical fixe xOy d'un repère R(O, x, y, z). Les deux disques sont superposés de telle sorte que leurs centres O_1 et O_2 restent sur la même verticale durant leurs mouvements (*figure 1*). On admet que les centres O_1 et O_2 ont la même vitesse [$\vec{v}(O_1/R) = \vec{v}(O_2/R) = v_0\vec{i}$]. Le contact entre D_1 et D_2 est ponctuel en H_1 ($H_1 \in D_1$) et H_2 ($H_2 \in D_2$). Le disque D_2 roule sans glisser sur D_1 et D_1 roule sans glisser sur l'axe horizontal Ox avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega}(D_1/R) = \omega\vec{k}$. On définit I_1 comme étant le point de contact instantané de D_1 avec Ox ($I_1 \in D_1$).

1- Établir la condition de roulement sans glissement de D_1 sur Ox_1 en fonction de ω, R_1 et v_0.

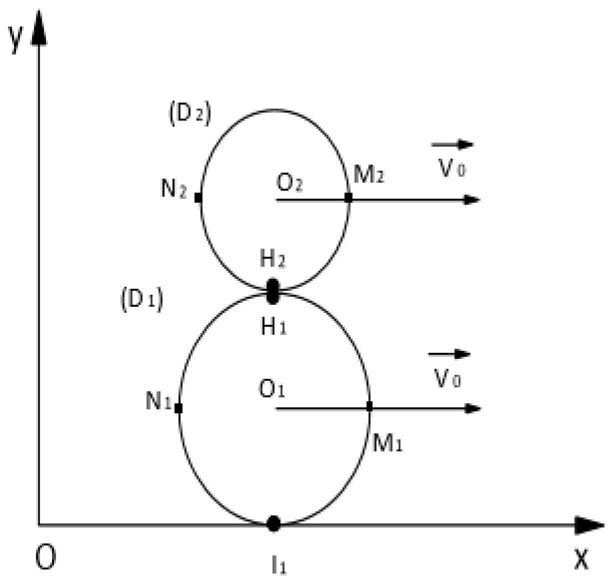
2- Sachant que le vecteur vitesse de rotation angulaire $\vec{\Omega}(D_2/\mathcal{R}) = \dot{\phi}\vec{k}$ (φ étant l'angle qui caractérise la rotation de D_2 par rapport à R), déterminer, en utilisant la condition de roulement sans glissement de D_2 sur D_1, l'expression de $\dot{\phi}$ en fonction de ω, R_1 et R_2.

3- Déterminer géométriquement la position du centre instantané de rotation du disque D_2.

4-Représenter géométriquement les vecteurs vitesses :
$\vec{v}(M_1/\mathcal{R})$, $\vec{v}(N_1/\mathcal{R})$, $\vec{v}(M_2/\mathcal{R})$, et $\vec{v}(N_2/\mathcal{R})$;

les points M_1, M_2, N_1 et N_2 étant indiqués sur la figure 1.

5- Indiquer la base et la roulante pour chacun des deux disques D_1 et D_2.



2- Calculer les expressions des vecteurs vitesse suivants :

$\vec{v}(C/R_3)$, $\vec{v}(C/R_o)$, $\vec{v}(I \in (C)/R_3)$, $\vec{v}(I \in (C)/R_o)$, $\vec{v}(J \in (D)/R_o)$ et $\vec{v}(J \in (C)/R_0)$.

3- En déduire les vitesses de glissement de (C) par rapport à (P) et par rapport à (D).

4- **Donner les conditions de roulement sans glissement aux points de contact.**

5- On suppose maintenant que le plan (P) est en rotation autour de Oz_o avec une vitesse angulaire constante ω_0 = *constante* $\neq$ *0.*

a) Calculer $\vec{v}(I \in (C)/(P))$ et $\vec{v}(J \in (C)/(D))$.

b) En déduire les nouvelles conditions de roulement sans glissement. Comparer les résultats obtenus avec ceux de la question **4)**.

Exercice 12

Un cône de demi-angle au sommet α est en contact, suivant l'une de ses génératrices [confondue avec $(O, \vec{i}_1)$], avec le plan xOy d'un repère fixe $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le cône, dont le sommet est fixé en O, effectue une rotation d'angle φ autour de Oz et une rotation propre d'angle θ autour de son axe Ox_2 de vecteur unitaire $\vec{i}_2$ (voir figure 2). On pose OC = *a*.

1- Calculer la vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ (cône/R).

2- Soit M (0, 0, z) un point assujetti à rester sur l'axe Oz. Déterminer la condition à satisfaire pour que M soit lié au cône.

3- Calculer la vitesse d'un point I de contact (I $\in$ cône) en fonction de la distance OI.

4- Déterminer la condition de roulement sans glissement du cône et l'axe instantané de rotation (dans le cas de non glissement).

5- Calculer la vitesse du point C situé au milieu de la base du cône.

6- Soit I_G un point géométrique coïncidant avec le point de la base du cône qui est en contact avec le plan xOy. Comparer les vitesses $\vec{v}(I_G)$ et $\vec{v}(I \in \text{cône})$.

7- On suppose que le cône fait un angle variable avec le plan xOy. On pose $\Psi = (\vec{i}_1, \vec{i}_2)$, où $\vec{i}_1$ est la projection de $\vec{i}_2$ sur le plan xOy. Calculer $\vec{\Omega}$ (cône/R) et la vitesse de C.

III.GEOMETRIE DE MASSE

Objectifs :

- Déterminer la matrice d'inertie principale ;
- Savoir déterminer le repère et l'axe principal d'inertie ;
- Déterminer et différencier entre centre de masse et centre d'inertie ;
- Appliquer la notion de moment d'inertie ;
- Savoir appliquer le théorème de Guldin .

Exercice 1

Déterminer la matrice d'inertie des solides homogènes suivants:

a. Cylindre creux de rayons R_1, R_2 (rayons intérieur et extérieur) de hauteur H et de masse M.

b. Cylindre mince de rayon R et d'épaisseur faible.

c. Cône creux de rayon R et de hauteur H.

d. Quart de cercle de rayon R.

Exercice 2

Calculer le moment d'inertie :

1- d'une plaque rectangulaire homogène par rapport au côté AB.

2- d'une sphère homogène de rayon R par rapport à son centre O, en déduire la matrice d'inertie en O de la sphère.

Exercice 3

On considère le triangle rectangle homogène plein ABC d'épaisseur négligeable. On pose $\overrightarrow{AB}=2a\vec{x}$ et $\overrightarrow{BC}=2b\vec{y}$. On demande de déterminer :

1- les coordonnées dans le repère $(A,\vec{x},\ \vec{y},\vec{z})$ du centre d'inertie G du triangle ABC.

2- la matrice d'inertie de ce triangle en A sur la base $(\vec{x},\ \vec{y},\vec{z})$,

3- déduire la matrice d'inertie en G sur la base $(\vec{x},\ \vec{y},\vec{z})$.

Exercice 4

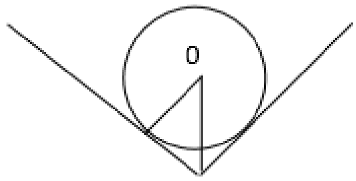
Une sphère homogène de rayon a et de centre O roule sans glisser au fond d'une cornière en forme de V majuscule, d'angle dièdre 120° et de plan bissecteur vertical (figure 3).

1- Déterminer les éléments de réduction du torseur cinématique en O.

2- Montrer que H est un C.I.R

3- Déterminer la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le dièdre.

4- Déterminer l'axe instantané de rotation.



Exercice 6

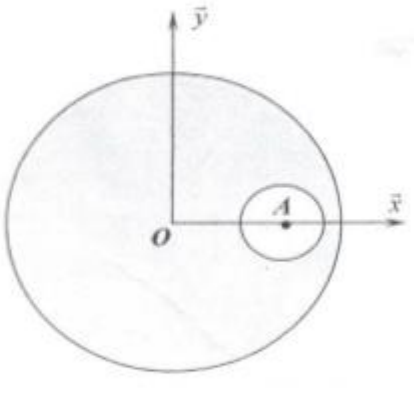
Le volant représenté figure est caractérisé par sa masse m et son rayon R. Il comporte un trou circulaire centré en A (OA = a) et de rayon r.

1- Déterminer le centre d'inertie G du volant.

2- Calculer la matrice d'inertie au point O.

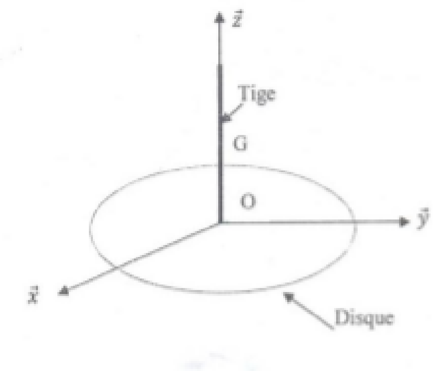
3- En déduire la matrice d'inertie au centre d'inertie G.

4- Calculer son moment d'inertie par rapport à la première bissectrice.



Exercice 8

Soit un solide (S) constitué d'un disque (D) de masse M et de rayon R et d'une tige (T) de même masse M et de longueur 2L. La tige est soudée au centre 0 du disque comme l'indique la figure suivante :



1- Déterminer de la matrice d'inertie du disque.

2- Déterminer la matrice d'inertie de la tige.

3- Déterminer la matrice d'inertie du solide (S).

Exercice 9

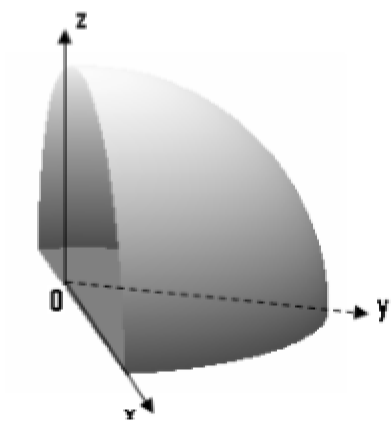
L'espace étant rapporté à un repère , on considère un quart de sphère homogène S, de centre O, de masse volumique et de rayon R.

1- Déterminer la masse de S.

2- Déterminer la position de son centre d'inertie G.

3- Déterminer en O la matrice d'inertie de S, en projection sur le repère .

4- Déterminer en G la matrice d'inertie de S, en projection sur le repère .



On considère un cube plein homogène, *C*, de côté $2a$ et de masse m et un repère R $(G, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'origine coïncide avec le centre de masse du cube. On ajoute deux masselottes identiques A et B de masse $\frac{m}{4}$ chacune sur les milieux de deux arêtes du cube diamétralement opposées (*figure 1*).

1- Déterminer la matrice d'inertie du cube en G, II(G, *C*).

2- Déterminer les matrices d'inertie en G des deux masselottes, II(G, A) et II(G, B).

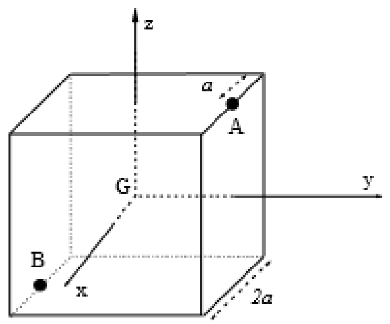
3- En déduire la matrice d'inertie en G, II(G, S), du système formé par le cube et les deux masselottes.

4- Le repère R est-il un repère principal d'inertie? Admet-il un axe principal d'inertie? Justifier votre réponse.

5- Trouver un repère principal d'inertie pour (S).

6- Diagonaliser la matrice et retrouver le repère principal d'inertie.

7- Déterminer la matrice principale d'inertie.



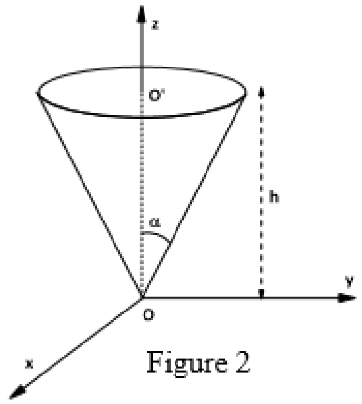


Figure 2

Exercice 13

On considère un solide (C) représentant un cylindre creux, homogène, de masse m, de rayon R, de centre de masse G et de hauteur h (Figure 5).

1- Déterminer la matrice d'inertie, II(G, C), en G du cylindre creux. En déduire la matrice d'inertie II(O, C).

2- L'opérateur d'inertie du cylindre peut-il devenir sphérique ? Justifier votre réponse.

3- Sur la périphérie du cylindre on soude une masselotte A de masse $\frac{m}{4}$, située sur l'axe Gy.

Le système constitué par le cylindre creux et la masselotte A forme un solide (S).

a) Donner la matrice d'inertie en O de A, II(O, A). En déduire II(O, S).

b) Trouver II(G, S).

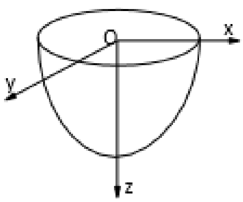


Figure 3

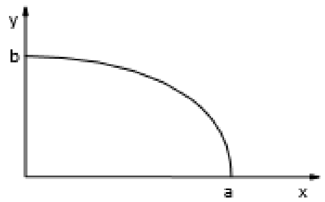


Figure 4

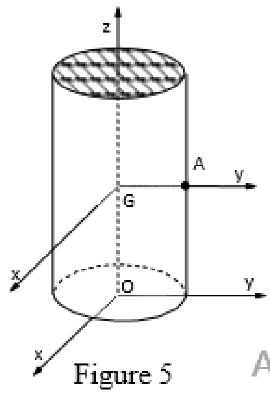


Figure 5

IV.CINETIQUE DU SOLIDE

Objectifs :

- Développer la notion du Torseur cinétique (quantité de mouvement, moment cinétique) ;
- Développer la notion du Torseur dynamique (quantité d'accélération, moment dynamique) ;
- Assimiler la notion de référentiel barycentrique ;
- Appliquer le théorème de Koenig ;

Exercice 1

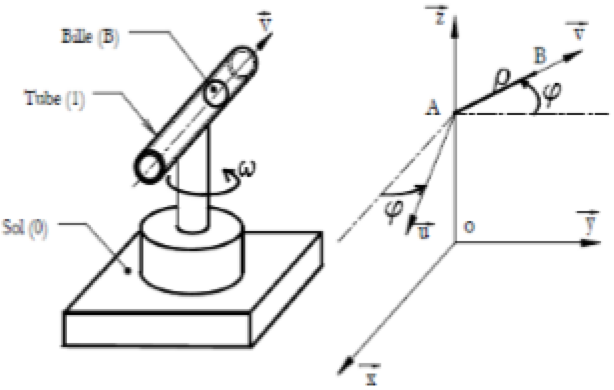
On défini par :

R_0 (O, x, y, z) Un repère de référence Lié au sol .

R_1 (A, u, v, z) un repère lié au tube.

Point B caractérise la bille.

ω : Vitesse angulaire du repère R_1/R_0



La bille glisse dans le tube à la vitesse $\vec{V}$ et Le tube tourne à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$

1- Calculons la vitesse $\vec{V}(B/R_0)$.

2- Accélération de $\vec{\gamma}(B/R_0)$.

Exercice 2

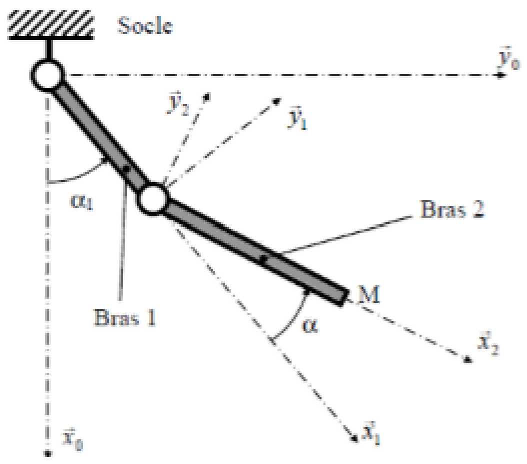
Considérons un robot constitué d'un socle **0** et de deux bras 1 et 2. (Voir figure)

Soit les repères :

$R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ repère fixe lié au socle **0**.

$R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$ repère lié au bras 1.

$R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$ repère lié au bras 2.



On donne : $\overrightarrow{OO_1} = l_1\vec{x}_1$, $\overrightarrow{O_1M} = l_2\vec{x}_2$

1- Calculer $\vec{\omega}(R_1/R_0)$ et $\vec{\omega}(R_2/R_0)$.

2- Calculer $\vec{V}(M/R_0)$ par composition des vitesses.

3- Calculer $\vec{\gamma}(M/R_0)$.

Exercice 3

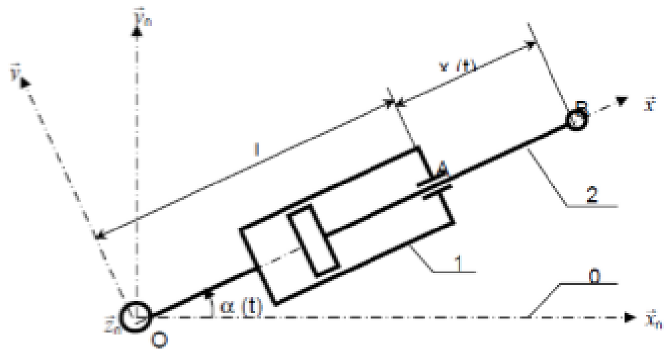
On considère le mouvement d'un vérin hydraulique composé d'un corps **1** de longueur constante L et d'une tige mobile **2**. La course de **2** par rapport à **1** est définie par $\overrightarrow{AB} = x(t)\vec{x}$.

La rotation du vérin est définie par l'angle $\alpha(t)$ porté par $\vec{z}_0$.

On appelle : $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère fixe lié au bâti **0**.

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ le repère mobile lié au vérin.

$\overrightarrow{OB} = (L + x(t))\vec{x}$ avec L : Constante



1- Quelles sont les composantes dans R du vecteur rotation $\vec{\omega}(R/R_0)$?

2- Exprimez dans R les composantes des vitesses $\vec{V}(B/R_1)$ et $\vec{V}(B/R_0)$

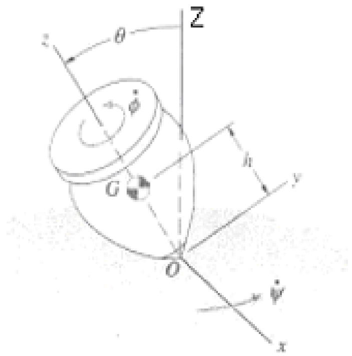
3- Exprimez dans R les composantes des accélérations $\vec{\gamma}(B/R_1)$ et $\vec{\gamma}(B/R_0)$

Exercice 4

Le point O de la toupie est considéré fixe. L'axe x reste parallèle au sol et tourne autour de Z avec une vitesse angulaire constante . La toupie tourne autour de l'axe z avec une vitesse angulaire constante . Voir figure 1.

1- Calculer les vecteurs vitesse et accélération angulaires de la toupie.

2- Calculer la vitesse du centre de masse G de la toupie.



Exercice 7

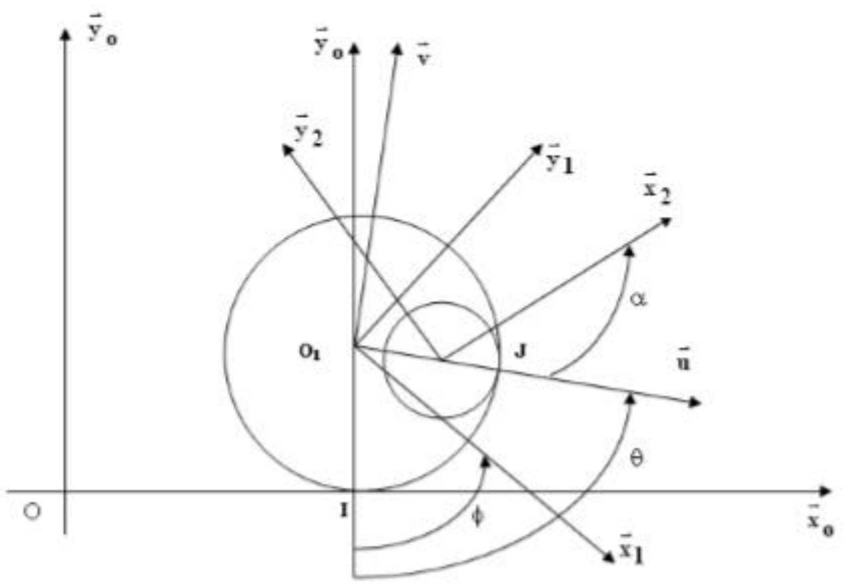
On considère un repère $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ avec $\vec{y}_0$ un axe vertical ascendant. Un cerceau (C) de centre O_1 de rayon R et un disque (D) de centre O_2 et de rayon $r < R$, sont en mouvement

dans le plan $(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0)$. Le cerceau et le disque sont restreints aux liaisons suivantes : (C) roule sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$ et (D) roule à l'intérieur de (C). Soient I le point de contact de (C) avec $(O,\vec{x}_0)$ et J le point de contact de (D) avec (C). Les repères $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1)$ et $R_2(O,\vec{x}_2,\vec{y}_2)$ sont liés au cerceau et au disque respectivement. La position du système étudié est repéré dans R_o par l'abscisse de O_1 qu'on note par x, et par les angles $\dot{\phi}$, θ et α mesurées autour de $\vec{z}_0$.

1- Calculer, pour les points géométriques I et J , $\vec{V}(I/R_0)$, $\vec{V}(J/R_0)$.

2- Calculer la vitesse de glissement de (D) sur (C) en J.

3- En déduire pour les points géométriques I et J : $\vec{V}(I/C)$, $\vec{V}(J/C)$ et $\vec{V}(J/D)$.



Exercice 9

On considère un disque (D_1) de masse m_1, de rayon R_1 et de centre O et un cerceau (C) de même centre O et de rayon R_2 ($R_2 = \frac{3}{2}R_1$). Entre ces deux solides, on dispose un deuxième disque (D_2) de rayon r (à exprimer en fonction de R_1) et de masse m_2. On désignera par I_1 le point de contact entre (D_1) et (D_2) et par I_2 le point de contact entre (C) et (D_2) (*figure 1*). On admet que le roulement de (D_2) sur (D_1) et (C) est sans glissement. On désigne par R_0(O, $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$) un repère fixe dont $\vec{k}_0$ est perpendiculaire au plan vertical $(\vec{i}_0, \vec{j}_0)$ contenant les disques et le cerceau, et par R (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0$) un repère en rotation autour de Oz_0 et dont l'axe Ox passe constamment par le centre de masse G du disque (D_2). L'angle θ caractérise la rotation du repère R par rapport à R_0. On donne $\vec{\Omega}(D_1/R_0) = \omega\vec{k}_0$ et $\vec{\Omega}(C/R_0) = 2\omega\vec{k}_0$ (ω est une constante positive).

1- Calculer $\vec{v}(I_1 \in D_1/R_0)$. En déduire $\vec{v}(I_1 \in D_2/R_0)$.

2- Calculer $\vec{v}(I_2 \in C/R_0)$. En déduire $\vec{v}(I_2 \in D_2/R_0)$.

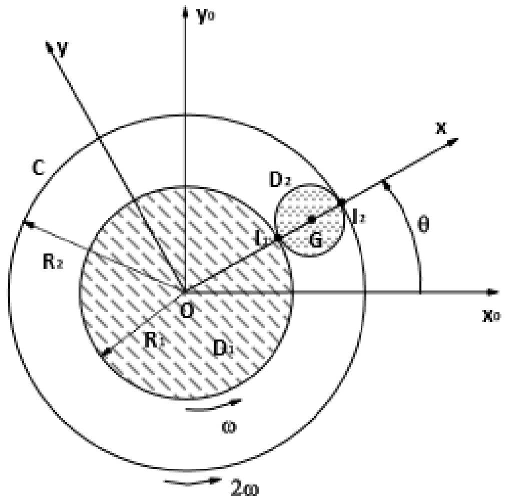
3- En utilisant la relation de transfert du torseur cinématique pour (D_2), déterminer $\vec{\Omega}(D_2/R_0)$ (on posera $\vec{\Omega}(D_2/R_0) = \alpha\vec{k}_0$ et on déterminera α en fonction de ω).

4- Calculer l'invariant scalaire I du torseur cinématique pour (D_2). En déduire la nature de ce torseur.

5- Déterminer, géométriquement et par calcul, la position du centre instantané de rotation I pour le disque (D_2).

6- Déterminer, sans calcul, la base et la roulante pour (D_2).

7- Déterminer la vitesse $\vec{v}(G/R_0)$. En déduire $\vec{\Omega}(R/R_0)$ (on remarquera que les points O et G sont fixes dans R).



8- Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}(O, D_1/R_0)$.

9- Calculer $\vec{\sigma}(G, D_2/R_0)$ et $\vec{\sigma}(O, D_2/R_0)$.

10- Calculer les énergies cinétiques $E_C(D_1/R_0)$ et $E_C(D_2/R_0)$.

Exercice 11

On reprendra l'exercice N° 2 du chapitre II (exercice des deux barres en mouvement dans un plan vertical).

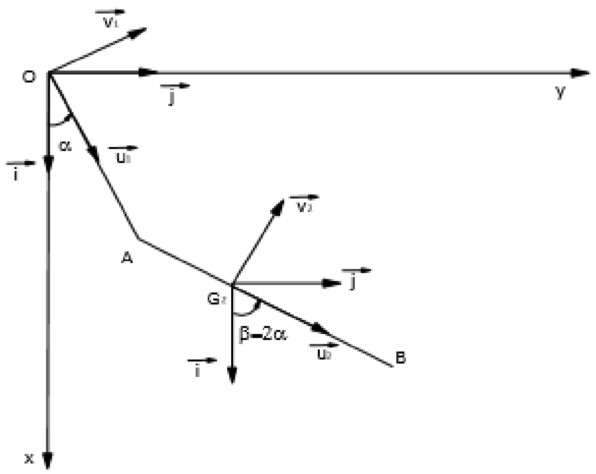
1- Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}(G_2, AB/R_G)$. En déduire $\vec{\sigma}(O, AB/R)$.

2- Donner le moment cinétique $\vec{\sigma}(O, OA/R)$. En déduire $\vec{\sigma}(O, S/R)$.

3- Calculer le moment dynamique $\vec{\delta}(G_2, AB/R)$. En déduire $\vec{\delta}(O, AB/R)$.

4- Calculer $\vec{\delta}(O, OA/R)$. En déduire $\vec{\delta}(O, S/R)$.

5- Déterminer les énergies cinétiques $E_C(AB/R_G)$ et $E_C(OA/R)$. En déduire $E_C(S/R)$.



V.DYNAMIQUE DU SOLIDE.

Objectifs :

- Introduire la notion de référentiel galiléen ;
- Appliquer le principe fondamental de la dynamique ;
- Appliquer les théorèmes généraux;
- Assimiler les notion de fonction de forces ,de potentiel et de la puissance;
- S'entrainer à la résolution des équations différentielles du mouvement ;

Exercice 1 : Mouvement d'un disque sur un tapis roulant incliné

Un disque homogène, de masse m, de rayon r, de centre G, est posé sans vitesse initiale sur un tapis roulant. Ce tapis, incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, se déplace à la vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}_0$ $(v_0 > 0)$ suivant l'axe Ox_0 d'un référentiel terrestre $R_O(O, x_0y_0z_0)$, orthonormé et direct. On suppose que les forces de contact en I admettent pour résultante $\vec{R} = \vec{T} + N\,\vec{j}_0$ $(N > 0)$ où $|T| = f\,N$; avec f désignant le coefficient de frottement. On pose $\overrightarrow{OG} = x_c\vec{i}_0 + r\vec{j}_0$.

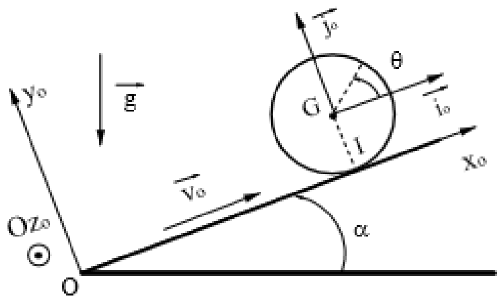
1- Calculer la vitesse de glissement $\vec{v}_g(S_1/S_2)$ du disque (S_1) sur le tapis (S_2). En déduire la vitesse de glissement initiale $\vec{v}_{g0}(S_1/S_2)$ du disque sur le tapis.

2- Appliquer le principe fondamental de la dynamique au disque en mouvement dans R_O et trouver trois équations algébriques en projetant les deux équations vectorielles résultant du P.F.D. dans la base $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$. On prendra les éléments de réduction des deux torseurs en question au point G.

3- Retrouver, en utilisant le théorème de l'énergie cinétique, deux équations algébriques de la question 2).

4- Trouver, en fonction de g, f, et α, la dérivée par rapport au temps de la vitesse de glissement.

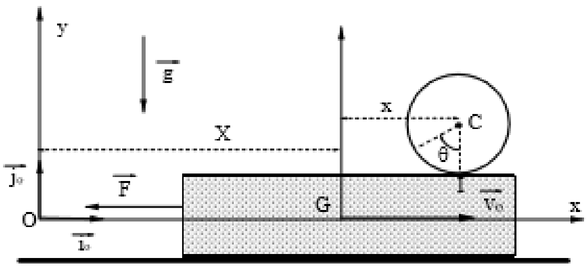
5- Utiliser les résultats de la question 4) pour décrire l'évolution de la vitesse de glissement du disque sur le tapis roulant.



Exercice 2 : Mouvement d'un cylindre sur un plateau

On considère le système matériel composé d'un plateau (P) et d'un cylindre (C). Le plateau, de masse m est animé d'un mouvement rectiligne horizontal et uniforme de vitesse $\vec{v}_0$. Le cylindre (C), placé sur le plateau (P), est homogène, de masse m_1, de rayon a et son axe est perpendiculaire au vecteur vitesse $\vec{v}_0$. Le cylindre est initialement immobile par rapport au plateau.

A l'instant $t = 0$, on applique au plateau une force $\vec{F}$ de freinage constante. La résultante des forces de réaction du plateau sur le cylindre est $\vec{R} = \vec{T} + N\vec{j}_0$ ($N > 0$). Le coefficient de frottement de glissement du plateau sur le cylindre est f. On désigne par $R_O(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ le repère fixe et par $R_G(G, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ un repère lié au plateau. Le centre C du cylindre est repéré, par rapport à R_G, par $x = \overline{KI}$ avec $I \equiv K$ en $x = 0$ à l'instant initial $(t = 0)$. La rotation du cylindre est repérée par l'angle θ tel que $\theta = 0$ à $t = 0$. Le mouvement de (P) par rapport au repère R_O est repéré par $X = \overline{OG}$ avec $X = 0$ pour $t = 0$ et $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}_0$.



A- Cas du roulement sans glissement du cylindre sur le plateau

1- a) Faites un schéma montrant les différentes forces agissant sur le système.

b) Préciser la condition de roulement sans glissement du cylindre sur le plateau.

2- En appliquant le P.F.D. dans le repère R_O au cylindre seul, puis au plateau seul, donner les équations différentielles qui régissent le mouvement du système.

3- Trouver la relation liant $\ddot{x}$ et $\ddot{X}$. En déduire que $x(t) = \dfrac{Ft^2}{3m + m_1}$.

4- Exprimer $X(t)$ en fonction de F, v_0, m, m_1 et t. Trouver l'instant t_a correspondant à l'arrêt du plateau.

5- Sachant que le plateau restera immobile pour $t \geq t_a$, donner les valeurs de la force de frottement T et de $\vec{v}(C/R_O)$.

6- Quelle est la nature du mouvement du cylindre pour $t \geq t_a$.

B- Cas du roulement avec glissement du cylindre sur le plateau

1- Donner l'expression de la force de frottement T.

2- Exprimer la vitesse de glissement, $\vec{v}_g(C/P)$, du cylindre (C) par rapport au plan (P) en fonction de m, m_1, F, f, g et t (g est l'accélération de la gravité).

3- Trouver, en fonction de m, m_1, F, f et g, l'instant t_1 correspondant à l'arrêt du plateau.

4- Pour $t \geq t_1$ le plateau restera immobile.

a) Déterminer $\vec{v}(C/R_O)$ en fonction m, m_1, F, f, g, v_0 et t.
b) Trouver, en fonction de f, g et v_0, l'instant t_2 où la vitesse de glissement s'annule.

5- Pour $t > t_2$, déterminer $\vec{v}(C/R_O)$ et préciser la nature du mouvement du cylindre.

Exercice 3

On considère un système matériel (Σ) constitué de deux solides (S_1) et (S_2). Le solide (S_1) est une barre AB de longueur 2ℓ, de milieu G et de masse m_1 et le solide (S_2) est un disque homogène de centre C, de rayon r et de masse m_2. Le système (Σ) est en mouvement dans un repère galiléen $R_O(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ de sorte que l'extrémité A de (S_1) glisse sans frottement l'axe Ox_0. Le solide (S_1) est en contacte ponctuel avec (S_2) en J et le coefficient de frottement f entre (S_1) et (S_2) est tel que (S_1) glisse sur (S_2). Le solide (S_1) est repéré dans R_O par l'abscisse x_A de A et par l'angle φ, quant au solide (S_2), il est repéré dans R_O par l'abscisse x_c de C et par l'angle θ. On applique sur (S_2) un couple $\vec{\Gamma}=-\Gamma\vec{k}_0$ $(\Gamma>0)$.

On définit $R_1(A,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_0)$ et $R_2(C,\vec{i}_2,\vec{j}_2,\vec{k}_0)$ comme étant deux repères liés à (S_1) et (S_2), respectivement. On désignera par $\vec{R}_A$ la réaction de l'axe Ox_0 sur (S_1), $\vec{R}_J=T_J\vec{i}_1+N_J\vec{j}_1$ la réaction de (S_2) sur (S_1) et $\vec{R}_I=T_I\vec{i}_1+N_I\vec{j}_1$ la réaction de l'axe Ox_0 sur (S_2).

1-a) Exprimer, dans la base $(\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ les vecteurs $\vec{\Omega}(S_1/R_O)$, $\vec{\Omega}(S_2/R_O)$, $\vec{v}(C/R_O)$, $\vec{v}(G/R_O)$, $\vec{\gamma}(C/R_O)$ et $\vec{\gamma}(G/R_O)$.

1- b) Donner la condition de roulement sans glissement de (S_2) sur l'axe (Ox_0).

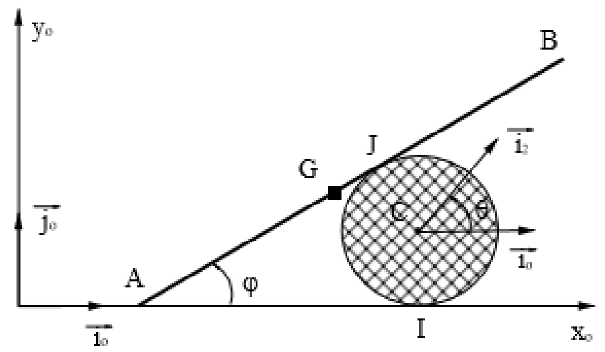
2- On admet que le contact en J entre (S_1) et (S_2) est tel que le triangle (AIJ) est isocèle et que $tg\frac{\varphi}{2}=\frac{r}{x_C-x_A}$. Montrer que la vitesse de glissement de (S_1) sur (S_2) est $\vec{v}_g(S_1/S_2)=\left[(x_A-x_C)\cos\varphi-r\theta\right]\vec{i}_1$.

3- Calculer les moments cinétiques et dynamiques suivants : $\vec{\sigma}(A,S_1/R_0)$, $\vec{\sigma}(I,S_2/R_0)$, $\vec{\delta}(A,S_1/R_0)$ et $\vec{\delta}(I,S_2/R_0)$

4- Calculer les énergies cinétiques $E_C(S_1/R_0)$ et $E_C(S_2/R_0)$

5- Equations de mouvement du système (Σ) pour déterminer les inconnus x_A, x_C, φ, θ, R_A, T_J, T_I, N_I (question à rajouter)

6- Appliquer le P.F.D. à (S_1) seul puis à (S_2) seul et déduire le nombre d'équations algébriques obtenues.



Deux poulies doubles (P) et (P′), mobiles sans frottement autour d'axes horizontaux Ox et O′x′, sont reliées par une courroie sans masse. Le transfert de mouvement entre les deux poulies se fait sans glissement. La poulie (P) a un moment d'inertie J, un rayon externe R et un rayon interne αR ($\alpha < 1$). Elle supporte un corps (M) de masse m par un fil inextensible et sans masse. La poulie (P′), de moment J′, a un rayon externe R et un rayon interne $\alpha' R$ ($\alpha' < 1$) et supporte également un corps (M′) de masse m′ via un fil inextensible et sans masse. On désigne par R(O, xyz) le repère fixe.

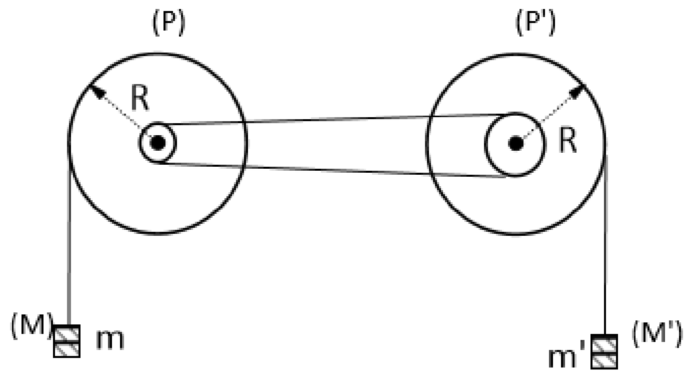
1- En utilisant la condition de roulement sans glissement de la courroie sur les deux poulies, trouver la relations liant les vitesses $\vec{v}(M/R)$ et $\vec{v}(M'/R)$.

2- Déterminer, en fonction des données, l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ du corps (M) en utilisant le théorème de l'énergie cinétique pour le système en entier (les deux poulies + les deux corps).

3- Retrouver ce résultat en utilisant le théorème du centre de masse pour les corps (M) et (M') et le théorème du moment cinétique en O pour (P) et en O' pour (P').

4- Trouver la différence de tension (T-T′) entre les deux brins de la courroie.

5- Déterminer numériquement $\vec{\gamma}(M/R)$ et T-T′. On donne $\alpha = 1/3$, $\alpha' = 1/2$, g = 9.8 N·kg^{-1}, $R = 20cm$, $J = J' = 0.02 kg.m^2$ et $m = m' = 200g$.



Exercice 7

Système sphère + cale en équilibre sur un plan incliné

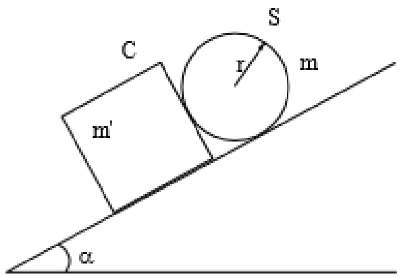
On considère un système (Σ) formé d'une sphère (S) s'appuyant sur une cale (C). Le système (Σ) = (S) + (C) est posé sur un plan incliné d'angle α (voir figure). La sphère est homogène de masse m, de rayon r et d'axe horizontal. La cale (C) a la forme d'un cube de masse m′. On désignera par $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ la réaction du plan incliné sur la sphère, par $\vec{R}' = \vec{N}' + \vec{T}'$ la réaction du plan incliné sur la cale et par $\vec{R}'' = \vec{N}'' + \vec{T}''$ la réaction de la cale sur la sphère. ***On étudiera le système en l'absence de mouvement***.

1- Faites un schéma sur lequel on reportera les différentes forces agissant sur (S) et sur (C).

2- En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la sphère, établir trois équations reliant les composantes de $\vec{R}$, $\vec{R}''$ et le poids $m\vec{g}$.

3- En déduire une relation entre T et T″ (modules de $\vec{T}$ et $\vec{T}''$).

4- En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la cale, établir trois autres équations reliant les composantes de $\vec{R}'$, $\vec{R}''$ et le poids $m'\vec{g}$.



5- En déduire une relation entre T′ et T″.

6- En appliquant le théorème de centre de masse au système (Σ) = (S) + (C), trouver deux autres équations entre les composantes de $\vec{R}$, $\vec{R}'$ $m\vec{g}$ et $m'\vec{g}$.

7- En déduire les relations suivantes : $T = \frac{m+m'}{2} g \sin\alpha$, $N = mg\cos\alpha - \frac{m+m'}{2} g \sin\alpha$,

$N' = m'g\cos\alpha + \frac{m+m'}{2} g\sin\alpha$ et $N'' = \frac{m-m'}{2} g\sin\alpha$.

Exercice 14:

On considère un solide constitué d'une tige AG horizontale, de masse négligeable, solidaire d'un disque homogène de centre G, de rayon r et de masse m. La tige est confondue avec l'axe du disque et son extrémité A est fixée sur l'axe Oz_0. Le disque est vertical et reste en contact avec le plan horizontal x_0Oy_0 d'un repère Galiléen $R_0(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$. On désignera par $R_1(G,\vec{u},\vec{v},\vec{k}_0)$ un repère intermédiaire et $R\,(G,\vec{u},\vec{j},\vec{k})$ un repère lié au solide. Le mouvement du solide est étudié par rapport au repère R_0. On donne $AG=OI=\ell$ et on suppose que les actions de contact en A et I ((le contact est ponctuel en ces points) ont pour résultantes, respectivement, $\vec{R}_A=R_1\vec{u}+R_2\vec{v}+R_3\vec{k}_0$ et $\vec{R}_I=T\vec{v}+N\vec{k}_0$. $\vec{g}=-g\vec{k}_0$ est l'accélération de la pesanteur. Exprimer touts les résultats dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{k}_0)$.

1) Déterminer les éléments de réduction du torseur des actions de contact de la tige sur le disque au point G.
2) Calculer les éléments de réduction du torseur cinématique en G et en A.
3) Donner les matrices d'inertie du solide en G et en A.
4) Calculer les éléments de réduction du torseur cinétique en G et en A.
5) Calculer l'énergie cinétique du solide.
6) Appliquer le P.F.D. au solide dans le repère R_0 et déduire.
   toutes les équations algébriques régissant son mouvement.

7) Calculer la vitesse de glissement du disque sur le plan x_0Oy_0 et
   monter que cette vitesse finira par s'annuler.

8) Calculer la puissance des forces extérieures appliquées au solide.
9) Calculer les composantes des actions de contact sur le solide dans
   le cas d'un roulement sans glissement (on prendra $\dot{\psi}=\omega_1$ à t=0).

8) Calculer la puissance des forces extérieures appliquées au solide.
9) Calculer les composantes des actions de contact sur le solide dans
   le cas d'un roulement sans glissement (on prendra $\dot{\psi}=\omega_1$ à t=0).

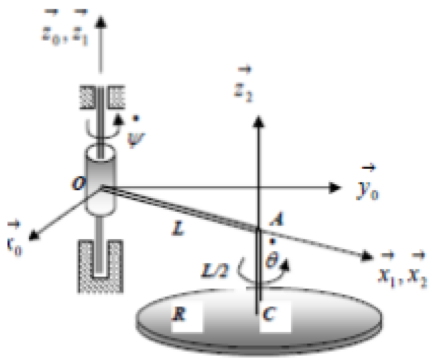
10) Chercher une condition sur $\dot{\psi}$ et $\dot{\theta}$ pour que le disque se déplace
    sans toucher le plan x_0Oy_0 (la condition de roulement sans glissement n'est plus valable).

Exercice 19

Une machine de ponçage des sols est composée d'un bras *OAC* de masse négligeable tel que *OA=L*, *AC=L/2* et d'un disque de rayon *R* et de masse *M* . Le bras est en mouvement de rotation par rapport au bâti fixe avec une vitesse de rotation . Le disque tourne autour du bras *AC* avec une vitesse de rotation On prendra comme repère de projection.

Déterminer :

1) Vitesse de rotation instantanée du disque
2) Vitesse et accélération absolues du point *C*
3) Le torseur cinétique du disque en *O* ;
4) Le torseur dynamique du disque en *O* ;
5) L'énergie cinétique du système



VI.LIAISONS-FORCES DE LIAISON

Objectifs :

- Savoir déterminer la nature de liaisons ;
- Différencier entre liaisons unilatérales et liaisons bilatérales;
- Comprendre la notion de liaison holomone;
- S'entrainer à l'application des lois de Coulomb.

Exercice 3

Une sphère homogène S_1, de masse m, de centre de masse G et de rayon *a*, est placée initialement dans une position d'équilibre instable au sommet d'une demi-sphère S_2, de centre O et de rayon r ($r > a$). On admet que le contact entre S_1 et S_2 est ponctuel et on désignera par *f* le coefficient de frottement. Le mouvement de S_1 sera étudié par rapport au repère fixe $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ et la position de G est repérée par l'angle $\theta = (Oy_0, OG)$. En déplaçant légèrement la sphère S_1 de sa position d'équilibre instable, celle-ci commence par **rouler sans glisser** sur S_2 (Figure 2).

On prendra $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k}_0)$ comme base de projection.

1- Calculer $\vec{v}(G/R_0)$ en fonction de $\dot{\theta}$, *a* et r.

2- On pose $\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \omega \vec{k}_0$. Déterminer ω en fonction de $\dot{\theta}$, *a* et r.

3- calculer l'énergie cinétique $E_C(S_1/R_0)$.

4- Calculer les puissances des forces agissant S_1 dans R_0, $P(F_{ext} \to S_1/R_0)$.

5- En déduire les expressions de $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ en fonction de g, r, *a* et θ.

6- En appliquant le théorème du centre de masse, déterminer les expressions des composante normale, N, et tangentielle, T, de la réaction de S_2 sur S_1.

7- Trouver la limite θ_g de θ à partir de laquelle S_1 commence à glisser sur S_2.

8- Trouver la limite θ_D de θ à partir de laquelle S_1 ne reste plus en contact avec S_2.

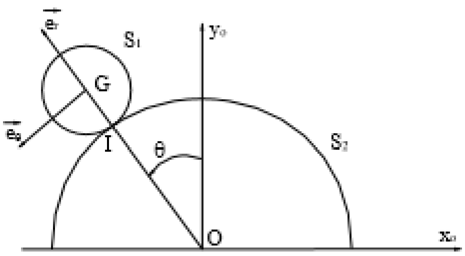
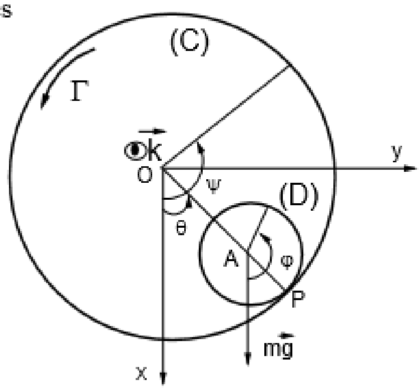


Figure 2

Exercice 4

Le système matériel (S), mobile dans le plan vertical fixe (xOy) (Ox vertical descendant), comporte un cerceau (C) rigide, de centre O, de moment d'inertie I par rapport à l'axe Oz et un disque (D) de masse m, de moment d'inertie J par rapport à l'axe Az, parallèle à Oz, passant par son centre d'inertie A. Le cerceau peut tourner sans frottement en O (point de contact) autour de l'axe Oz et le disque demeure en contact ponctuel en P à l'intérieur de (C). On admet que le frottement de contact entre (C) et (D) est suffisant pour assurer le roulement du disque sans glissement et on néglige le couple de résistance au roulement.

On pose OA = a et AP = b. Le mouvement de (S) est défini par les paramètres ψ, θ et φ tels que:



ψ : angle d'un rayon matériel de (C) avec Ox,

θ : angle de OP avec Ox,

φ : angle d'un rayon matériel de (D) avec Ax.

On désignera par N et T respectivement les composantes normale et tangentielle de la réaction de (C) sur (D).

1- Écrire la condition de roulement sans glissement en P.

2- Exprimer, en fonction des paramètres $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$:

a) Le moment cinétique de (D) par rapport à Az,

b) Le moment cinétique de (D) par rapport à Oz,

c) le moment cinétique de (S) par rapport à Oz.

3- En plus des forces de liaisons et des poids, le système est soumis à un couple d'axe Oz et d'intensité □ appliqué à (C). Donner les équations différentielles du mouvement du système (S) en appliquant :

a) Le théorème du moment cinétique à (S) en O.

b) Le théorème du moment cinétique à (D) en A.

c) Le théorème du centre de masse à (D).

4- On suppose que le couple Γ agit de sorte que $\Psi = 0, \forall t$.

a) Donner une équation différentielle du second ordre pour $\theta(t)$.

b) Déterminer $\theta(t)$ pour les petits mouvements en θ .

c) Déterminer l'expression de Γ en fonction de θ.

Exercice 6

On considère une plaque, P, homogène de forme rectangulaire, de masse m, de largeur $2a$ et de longueur 2b $(b=\sqrt{3}\cdot a)$ en rotation autour d'une des deux diagonales à la vitesse angulaire ω constante (Figure 3). On désigne par $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère lié à la plaque et par $R_0(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ un repère fixe tel que $\vec{\Omega}(P/R_0)=\omega\vec{j}_0$. Le rectangle est supporté par deux paliers sans frottement : un palier P sans butée et un palier à butée P'. On donne OP = OP' = $4a$.

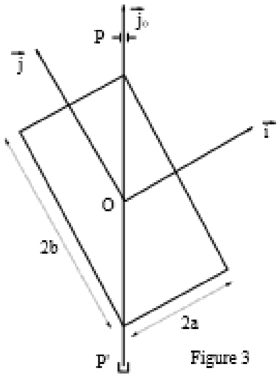


Figure 3

1- Déterminer la matrice d'inertie en O de la plaque, $I\!I(O, P)$.

2- Est-ce que l'équilibrage statique est réalisé pour la plaque ? Justifier la réponse.

3- Calculer le moment cinétique de la plaque en O, $\vec{\sigma}(O,P/R_0)$. Conclure quant à l'équilibrage dynamique de la plaque.

4- Déterminer les composantes des réactions $\vec{R}$ et $\vec{R}'$ du système sur les deux paliers.

Exercice 1 :Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe

On considère un cylindre creux (C), homogène, de rayon r, de hauteur h, de centre d'inertie G et de masse m. Soit $R(G, xyz)$ le repère lié au cylindre de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sorte que le vecteur $\vec{k}$ soit porté par l'axe de révolution du solide. Le cylindre tourne autour de l'axe Gz_0, de vecteur directeur $\vec{k}_0$, du repère fixe $R_0(G, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ avec une vitesse angulaire uniforme ω. L'axe Gz_0 est contenu dans le plan yGz et fait un angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ avec l'axe Gy (voir figure 1).

N.B. : Tous les résultats doivent être exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ liée au solide.

1- Est-ce que l'équilibrage statique est réalisé pour le cylindre ? Justifier votre réponse.

2- Déterminer la matrice d'inertie en G, II(G, C), du cylindre.

3- Déterminer le moment cinétique en G, $\vec{\sigma}(G, C/R_0)$.

4- Trouver une relation entre r et h pour que l'équilibrage dynamique soit réalisé.

5- On ferme le cylindre par un disque (D) homogène de rayon r et de masse m comme indiqué sur la figure 2.

5.1 Déterminer la position du centre de masse G′ du système (S) formé par le cylindre et le disque.

5.2 Est-ce que l'équilibrage statique est réalisé ? Justifier votre réponse.

5.3 Déterminer l'accélération $\vec{\gamma}(G'/R_0)$ du centre de masse G′ du système (S).

5.4 On admet que le système (S) est soumis, en plus de son poids, aux réactions :

$\vec{R}_1 = R_{1x}\vec{i} + R_{1y}\vec{j} + R_{1z}\vec{k}$ et $\vec{R}_2 = R_{2x}\vec{i} + R_{2y}\vec{j} + R_{2z}\vec{k}$.

5.4.1 Appliquer le théorème du centre de masse et déduire trois équations algébriques.

5.4.2 Déduire des trois équations précédentes les composantes des réactions qui ne dépendent pas de la vitesse angulaire ω.

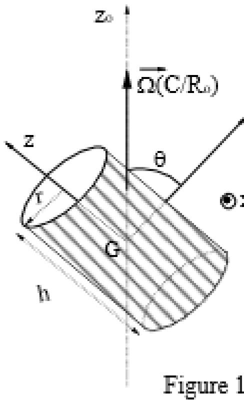


Figure 1

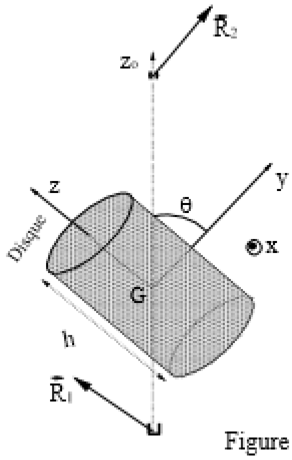
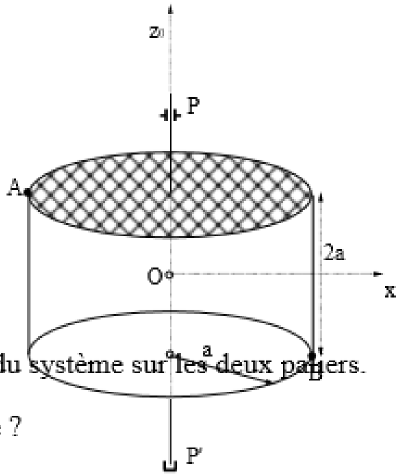


Figure 2

Exercice 2

On considère un système formé par un cylindre homogène de masse M, de hauteur $2a$, de rayon a et deux masselottes A et B de masse m chacune, disposées comme indiqué sur la figure. Le système tourne autour de l'axe vertical Oz_0, à la vitesse angulaire constante ω. Il est supporté par deux paliers sans frottement : P et un palier à butée P'. On désigne par $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ le repère fixe et par $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}_0)$ le repère lié au système tel que A et B sont dans le plan $(\vec{i}, \vec{k}_0)$. On donne $OP = OP' = 2a$



1- Donner la matrice d'inertie du système II(O, S).

2- Montrer qu'on a l'équilibrage statique

3- Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}(O, S/R_0)$

4- A-t-on l'équilibrage dynamique?

5- Déterminer les composantes des réactions $\vec{R}$ et $\vec{R}'$ du système sur les deux paliers.

6- A quel conditions aura-t-on l'équilibrage dynamique ?