Ecole Nationale Supérieure polytechnique de Yaoundé Année académique 2020/2021

Examen premier semestre de Mécanique PHY 214

(Durée : 3heures)

Connaissance du cours 6 points

a) Définitions : Axe central, Cinématique. (1pt)

b) Enoncer : *Principe fondamental de la dynamique(PFD), Théorème de l'énergie cinétique*. (2pts)

c) Calcul vectoriel (3pts)

Let us consider two nonzero vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ such that:

$$\vec{X} + \vec{B} \wedge \vec{X} = \vec{A}$$

With $\vec{X}$ being a vector to be determined.

1. Discuss the unicity of the solution to the above equation. (1pt)
2. Deduce from the previous question the general solution of the above system (2pts)

Calcul torsoriel 2 points

Exercice 1: (2pts)

On considère les points A, B, C auxquels correspondent les vecteurs $\vec{F}, \vec{G}, \vec{H}$. Ces correspondances sont définies dans le repère $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par :

$$A(0,2,1) \Rightarrow \vec{F}(1,0,-2), B(-1,1,-1) \Rightarrow \vec{G}(4,4,-3), C(2,1,3) \Rightarrow \vec{H}(1,0,3)$$

1. Déterminer la somme et le moment en $P(0,1,0)$ du torseur $\{\tau\}_P$ associé à cet ensemble de vecteurs. (1pt)
2. Déterminer l'équation paramétrique de l'axe central du torseur $\{\tau\}_p$. (1pt)

Cinématique 4 points

Exercice 2 (4pts)

Un solide rigide S_1, constitué par un cercle de rayon R_1, et de centre C_1, est en contact en I avec un second cercle rigide S_2, de rayon R_2, et de centre C_2. On appelle $R(C_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère de référence. S_1 tourne autour de l'axe C_{1z}, S_2 tourne autour d'un axe passant par C_2 et parallèle à C_{1z}. (Voir Figure 1)

α, θ et φ désignent les paramètres de position angulaire par rapport à R au point I, d'un point $P_1 \in S_1$ et d'un point $P_2 \in S_2$.

On utilise comme repère de projection $R'(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ l'axe C_{1u} passant par C_2. On appelle I_1 le point de S_1 (respectivement $I_2 \in S_2$) qui se trouvent en I à l'instant considéré.

1. Calculer le vecteur rotation $\vec{\Omega}(S_1/R), \vec{\Omega}(S_2/R)$. (0.5pt)
2. Calculer $\vec{v}(C_2/R)$. (0.5pt)
3. Calculer $\vec{v}(I \epsilon S_2/R), \vec{v}(I \epsilon S_1/R)$. (2pts)
4. En déduire la condition sur $\dot{\alpha}$ de roulement sans glissement en I de S_1 sur S_2. (1pts)

Dynamique 8 points

Problème (8pts)

On considère un système matériel composé de deux éléments (S_1) et (S_2) reliés à un système fixe (S_0) : (S_1) est constitué par un fil inextensible qui peut être schématisé par un segment OA. (S_2) est constitué par une sphère homogène de rayon R, attachée au fil en un point A de sa surface. (Voir Figure 2)

- À (S_0) est lié un repère fixe $R_0(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, ($\vec{x}_0$ suivant la verticale descendante)
- À (S_1) est lié un repère $R_1(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$, ($\overrightarrow{OA} = l\vec{x}_1$) sa masse est négligeable
- À (S_2) est lié un repère $R_2(0, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 = \vec{z}_0)$, ($\overrightarrow{AG} = R\vec{x}_2$), sa masse est M

Dans tout le problème, on ne considère que les mouvements pour lesquels les plans $0x_0y_0$ et Gx_2y_2 restent confondus. La configuration du système peut alors être déterminée par la connaissance de deux paramètres $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ et $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$. On rappelle que la matrice d'inertie de la sphère en G est :

$$[I_G(S_2)]_{R_2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}MR^2 \end{bmatrix}_{R_2}$$

1- Calculer les vecteurs rotations : $\vec{\Omega}(S_1/R_0)$ et $\vec{\Omega}(S_2/R_0)$. (0.5pt)
2- Calculer $\vec{V}(A/R_0)$ et $\vec{V}(G/R_0)$. (1pt)
3- Calculer $\vec{a}(A/R_0)$ ainsi que $\vec{a}(G/R_0)$. (1pt)
4- Calculer le moment cinétique de la sphère (S_2) en G : $\sigma_G(S_2/R_0)$. (1pt)
5- Calculer le moment cinétique de la sphère (S_2) en A : $\vec{\sigma}_A(S_2/R_0)$. (1pt)
6- Calculer le moment dynamique de la sphère (S_2) en A : $\vec{\delta}_A(S_2/R_0)$. (1pt)
7- Appliquer le principe fondamental de la dynamique (***PFD***) à (S_2) et écrire l'équation du mouvement. (1.5pts)
8- Retrouver le résultat de la question précédente (question 7) en appliquant le théorème de l'énergie cinétique. (1pt)

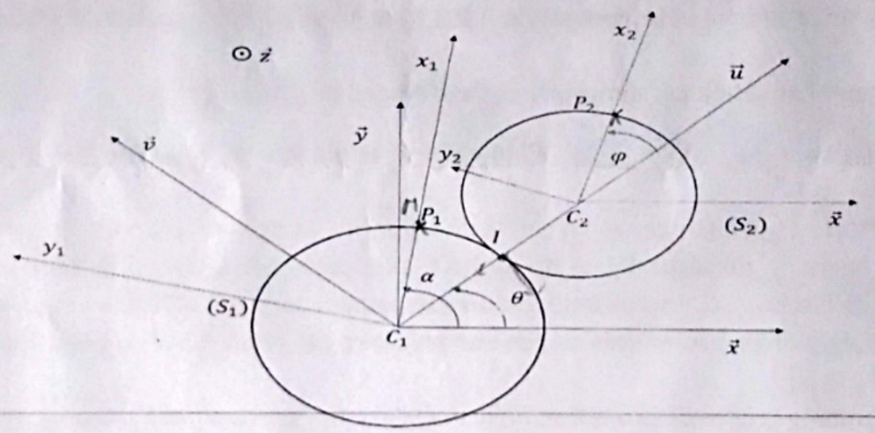


Figure 1

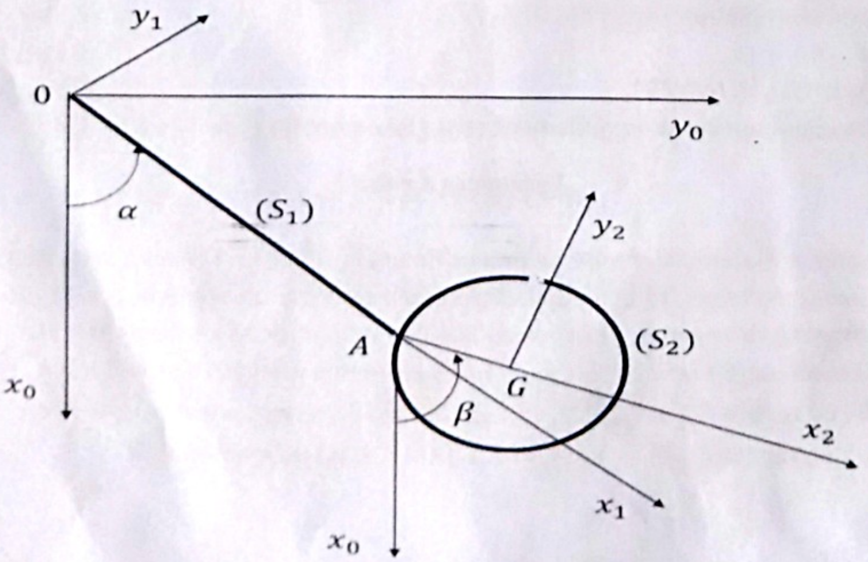


Figure 2

ESSAIE DE CORRECTION DE L'UE MECANIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE

CONNAISSANCE DU COURS

a) Définition

Axe central : est l'ensemble des points P où $\vec{M}_P$ est colinéaire à $\vec{S}$.

Cinématique : Partie de la Mecanique qui étudie les mouvements des Corps dans leur rapport avec le temps indépendamment des causes de ces mouvements.

b) Enoncer :

PFD : Dans un repère galiléen, le torseur des forces extérieures agissant sur un ensemble materiel (S) est égal au torseur dynamique.

$\{\mathcal{D}_{S_1/R_0}\}_A = \{F_{ext} \to S_1\}_A$ si R_0 est galiléen.

TEC : La dérivée par rapport au temps t de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide (S) est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures.

$$\frac{d}{dt} T(S/R) = P(\bar{S} \to S/R)$$

c) Calcul Vectoriel

1) Discutons l'unicité de la solution !

Supposons $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ deux solutions alors on a :

$$\begin{cases} \vec{x}_1 + \vec{B} \wedge \vec{x}_1 = \vec{A} & ① \\ \vec{x}_2 + \vec{B} \wedge \vec{x}_2 = A & ② \end{cases}$$

$① - ② \Rightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{B} \wedge \vec{x}_1 - \vec{B} \wedge \vec{x}_2 = \vec{0}$

$\Rightarrow (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) + \vec{B} \wedge (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{B} \wedge (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = -(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$

donc $(\vec{x_1}-\vec{x_2}) \perp (\vec{x_1}-\vec{x_2}) \Rightarrow \vec{x_2}-\vec{x_2}=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{x_1}=\vec{x_2}$

D'où la solution à cette équation est unique

2) Déduisons en la solution générale : $\vec{X}+\vec{B}\wedge\vec{X}=\vec{A}$ (E)

$\vec{X}+\vec{B}\wedge\vec{X}=\vec{A} \Rightarrow \vec{B}\wedge\vec{X}+\vec{B}\wedge\vec{B}\wedge\vec{X}=\vec{B}\wedge\vec{A}$

$\Rightarrow \vec{B}\wedge\vec{X}+\vec{B}(\vec{B}\cdot\vec{x})-\vec{x}(\vec{B}\cdot\vec{B})=\vec{B}\wedge\vec{A}$

or d'après (E), $\vec{B}\wedge\vec{X}=\vec{A}-\vec{X}$ et $\vec{B}\cdot\vec{X}+\vec{B}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{X})=\vec{B}\cdot\vec{A}$

$\Rightarrow \vec{B}\wedge\vec{X}=\vec{A}-\vec{X}$ et $\vec{B}\cdot\vec{X}=\vec{A}\cdot\vec{B}$

d'où $\vec{A}-\vec{X}+\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{B})-\vec{X}(\vec{B}^2)=-\vec{A}\wedge\vec{B}$

$\Rightarrow (-1-\vec{B}^2)\vec{X}=-\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}-\vec{A}\wedge\vec{B}$

$$\boxed{\text{Ainsi } \vec{X}=\frac{\vec{A}+(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}+\vec{A}\wedge\vec{B}}{1+\vec{B}^2}}$$

CALCUL TORSORIEL :

Exercice 1 :

1- *Somme

$\vec{S}=\vec{F}+\vec{G}+\vec{H}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\4\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=(6,4,-2) \Rightarrow \vec{S}(6,4,-2)$

*Moment en p :

$\vec{M_p}=\vec{M}_p(\vec{F})+\vec{M}_p(\vec{G})+\vec{M}_p(\vec{H})$

$$= \vec{PA} \wedge \vec{F} + \vec{PB} \wedge \vec{G} + \vec{PC} \wedge \vec{H}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \\ -1 & -3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-2\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}) + (4\vec{x} - 7\vec{y} - 4\vec{z}) + (0\vec{x} - 3\vec{y} + 0\vec{z})$$

$$\vec{M}_P = 2\vec{x} - 9\vec{y} - 5\vec{z}$$

$$\text{donc } \vec{M}_P \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

2) Equation paramétrique du torseur :

(Δ) est la droite passant par P_0 et dirigée par $\vec{S}$ tel que

$$\vec{PP_0} = \frac{\vec{S} \wedge \vec{M}_P}{\|\vec{S}\|^2}$$

$$\vec{S} \wedge \vec{M}_P = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & -9 \\ -2 & -5 \\ 6 & 2 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} = -38\vec{x} + 26\vec{y} - 62\vec{z} \quad \text{et } \|\vec{S}\|^2 = 6^2 + 4^2 + 2^2 = 56$$

$$\vec{PP_0} = \frac{-38\vec{x} + 26\vec{y} - 62\vec{z}}{56} = \frac{-19\vec{x} + 13\vec{y} - 31\vec{z}}{28} \Rightarrow \begin{cases} x_0 - 0 = -\frac{19}{28} \\ y_0 - 1 = \frac{13}{28} \\ z_0 - 0 = -\frac{31}{28} \end{cases}$$

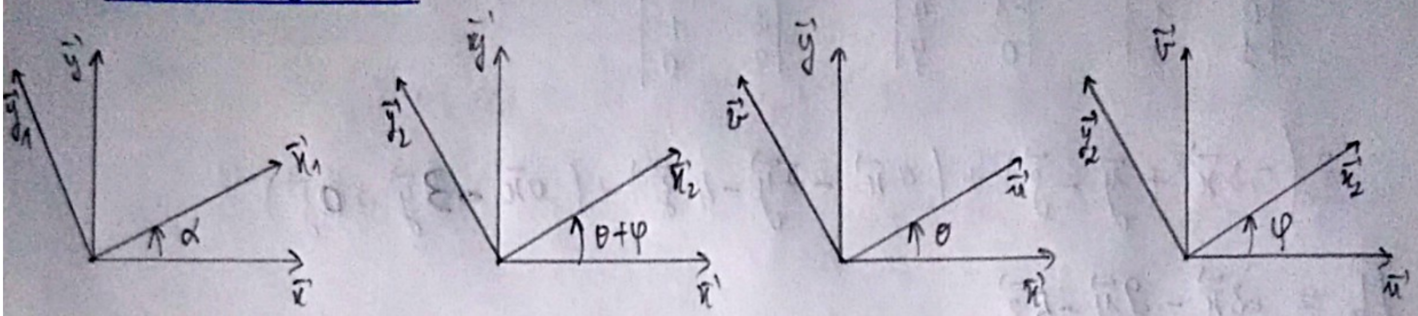
Ainsi $P_0\left(-\frac{19}{28}, \frac{41}{28}, -\frac{31}{28}\right)$ or (Δ) : $\begin{cases} x = x_0 + \lambda x_{\vec{S}} \\ y = y_0 + \lambda y_{\vec{S}} \\ z = z_0 + \lambda z_{\vec{S}} \end{cases}$

$$\boxed{\text{Ainsi } (\Delta) : \begin{cases} x = -\frac{19}{28} + 6\lambda \\ y = \frac{41}{28} + 4\lambda \\ z = -\frac{31}{28} - 2\lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})}$$

CINEMATIQUE

Exercice 2:

Schématisation



1) Calculons $\vec{\Omega}(S_1/R)$ et $\vec{\Omega}(S_2/R)$

$\vec{\Omega}(S_1/R) = \vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\alpha}\,\vec{x}\wedge\vec{y} = \dot{\alpha}\,\vec{z}$ $\qquad$ $\underline{\vec{\Omega}(S_1/R) = \dot{\alpha}\,\vec{z}}$

$\vec{\Omega}(S_2/R) = \vec{\Omega}(R_2/R) = (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\vec{x}'\wedge\vec{y}'$ $\qquad$ $\underline{\vec{\Omega}(S_2/R) = (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\vec{z}}$

2) Calculons $\vec{V}(G_2/R)$:

$$\vec{V}(G_2/R) = \vec{V}(G_1/R) + \vec{G_2G_1}\wedge\vec{\Omega}(R'/R) = \vec{0} + [-(R_1+R_2)\vec{u}]\wedge\dot{\theta}\,\vec{x}\wedge\vec{y}$$

$$= -\dot{\theta}(R_1+R_2)\,\vec{u}\wedge\vec{z}$$

$$\boxed{\vec{V}(G_2/R) = \dot{\theta}(R_1+R_2)\,\vec{v}}$$

3) Calculons $\vec{V}(I\in S_2/R)$ et $\vec{V}(I\in S_1/R)$:

- $\vec{V}(I\in S_2/R)$:

Soit M un point de S_2 défini par $\vec{G_2M} = R_2\vec{x}_2$

On a : $\vec{V}(M\in S_2/R) = \vec{V}(G_2/R) + \vec{MG_2}\wedge\vec{\Omega}(R_2/R)$

$$= \dot{\theta}(R_1+R_2)\,\vec{v} - R_2\vec{x}_2\wedge(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\vec{z}$$

$= \dot{\theta}(R_1+R_2)\vec{u} + (\dot{\theta}+\dot{\varphi}) R_2 \vec{y_2}$

or à $M = I_2$ on a : $\vec{y_2} = -\vec{u}$

donc $\vec{V}(I \in S_2/R) = \vec{V}(I_2/R) = \dot{\theta}(R_1+R_2)\vec{u} - (\dot{\theta}+\dot{\varphi})R_2\vec{u}$

$= (R_1\dot{\theta} + R_2\dot{\theta} - R_2\dot{\theta} - R_2\dot{\varphi})\vec{u}$

$$\boxed{\text{D'où } \vec{V}(I \in S_2/R) = (R_1\dot{\theta} - R_2\dot{\varphi})\vec{u}}$$

• $\vec{V}(I \in S_1/R)$:

Soit M un point de S_1 défini par $\vec{G_1M} = R_1\vec{x_1}$

alors $\vec{V}(M \in S_1/R) = \vec{V}(G_1/R) + \vec{MG_1} \wedge \vec{\Omega}(R_1/R)$

$= \vec{0} + (-R_1\vec{x_1}) \wedge \dot{\alpha}\vec{z} = -\dot{\alpha}R_1 \vec{x_1} \wedge \vec{z} = +\dot{\alpha}R_1 \vec{y_1}$

or à $M = I_1$ on a : $\vec{y_1} = \vec{u}$

d'où $\vec{V}(I \in S_1/R) = \vec{V}(I_1/R) = \dot{\alpha}R_1\vec{u}$

$$\boxed{\text{Ainsi } \vec{V}(I \in S_1/R) = \dot{\alpha}R_1\vec{u}}$$

4) Condition sur $\dot{\alpha}$ de roulement sans glissement en I de S_1/S_2 :

$\vec{V}(I S_1/S_2) = \vec{V}(I \in S_1/R) - \vec{V}(I \in S_2/R)$

$= \dot{\alpha}R_1\vec{u} - (R_1\dot{\theta} - R_2\dot{\varphi})\vec{u} = (R_1\dot{\alpha} - R_1\dot{\theta} + R_2\dot{\varphi})\vec{u}$

S_1 roule sans glisser sur S_2 si $\vec{V}(I \in S_1/S_2) = \vec{0}$

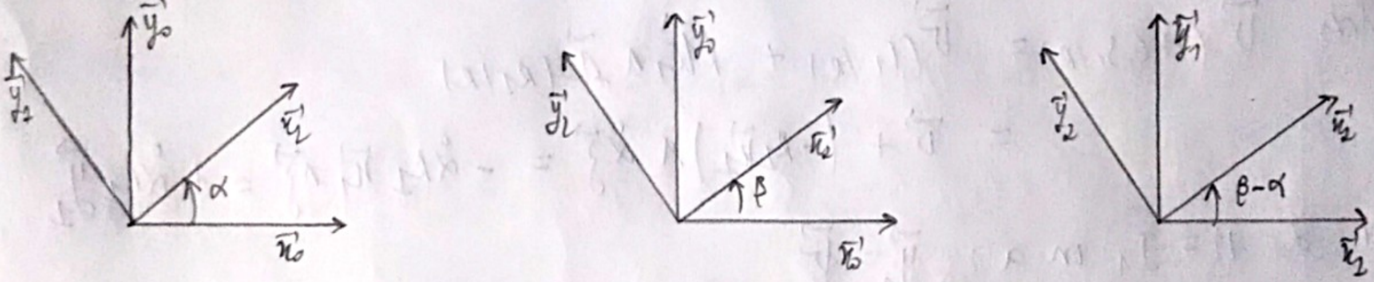
$$\Rightarrow R_1\dot{\alpha} - R_1\dot{\theta} + R_2\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\alpha} = \frac{R_1\dot{\theta} - R_2\dot{\varphi}}{R_1}$$

$$\boxed{\text{donc } \dot{\alpha} = \dot{\theta} - \frac{R_2}{R_1}\dot{\varphi}}$$

Dynamique

problème:

schématisation:



1) Calculons les vecteurs $\vec{\Omega}(S_1/R_0)$ et $\vec{\Omega}(S_2/R_0)$

$\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\alpha}\,\vec{x_0}\wedge\vec{y_0} = \dot{\alpha}\vec{z_0}$ $\qquad$ $\underline{\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \dot{\alpha}\vec{z_0} = \dot{\alpha}\vec{z_1}}$

$\vec{\Omega}(S_2/R_0) = \vec{\Omega}(R_2/R_0) = \dot{\beta}\,\vec{x_0}\wedge\vec{y_0} = \dot{\beta}\vec{z_0}$ $\qquad$ $\underline{\vec{\Omega}(S_2/R_0) = \dot{\beta}\vec{z_0} = \dot{\beta}\vec{z_2}}$

2) Calculons $\vec{V}(A/R_0)$ et $\vec{V}(G/R_0)$

• $\vec{V}(A/R_0) = \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{OA} = \dot{\alpha}\vec{z_1} \wedge l\vec{x_1} = \dot{\alpha}l\,\vec{z_1}\wedge\vec{x_1} = \dot{\alpha}l\vec{y_1}$

$$\boxed{\text{donc } \vec{V}(A/R_0) = l\dot{\alpha}\vec{y_1}}$$

• $\vec{V}(G/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{GA} \wedge \vec{\Omega}(S_2/R_0) = l\dot{\alpha}\vec{y_1} - R\vec{x_2} \wedge \dot{\beta}\vec{z_2}$

$= l\dot{\alpha}\vec{y_1} - R\dot{\beta}\,\vec{x_2}\wedge\vec{z_2}$

$= l\dot{\alpha}\vec{y_1} + R\dot{\beta}\vec{y_2}$

$$\boxed{\text{d'où } \vec{V}(G/R_0) = l\dot{\alpha}\vec{y_1} + R\dot{\beta}\vec{y_2}}$$

3) Calculons $\vec{a}(A/R_0)$ et $\vec{a}(G/R_0)$:

• $\vec{a}(A/R_0) = \dfrac{d}{dt}\vec{V}(A/R_0)\Big|_{R_0} = \dfrac{d}{dt}\left(l\dot{\alpha}\vec{y_1}\right)\Big|_{R_0} = l\ddot{\alpha}\vec{y_1} + l\dot{\alpha}\dfrac{d\vec{y_1}}{dt}\Big|_{R_0}$

$= l\ddot{\alpha}\vec{y_1} + l\dot{\alpha}\,\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{y_1}$

$= l\ddot{\alpha}\vec{y_1} + l\dot{\alpha}\left(\dot{\alpha}\vec{z_1}\right)\wedge\vec{y_1}$

$= l\ddot{\alpha}\vec{y_1} - l\dot{\alpha}^2\vec{x_1}$

$$\boxed{\text{d'où } \vec{a}(A/R_0) = l\ddot{\alpha}\vec{y_1} - l\dot{\alpha}^2\vec{x_1}}$$

• $\vec{a}(G/R_0) = \dfrac{d}{dt}\vec{V}(G/R_0)\Big|_{R_0} = \dfrac{d}{dt}\left(l\dot{\alpha}\vec{y_1} + R\dot{\beta}\vec{y_2}\right)\Big|_{R_0}$

$= \dfrac{d}{dt}\left(l\dot{\alpha}\vec{y_1}\right) + \dfrac{d}{dt}\left(R\dot{\beta}\vec{y_2}\right)\Big|_{R_0}$

or $\frac{d}{dt}(l\dot{\alpha}\vec{y_1})\Big|_{R_0} = l\ddot{\alpha}\,\vec{y_1} - l\dot{\alpha}^2\,\vec{x_1}$

et $\frac{d}{dt}(R\dot{\beta}\vec{y_2})\Big|_{R_0} = R\ddot{\beta}\,\vec{y_2} + R\dot{\beta}\,\frac{d}{dt}\vec{y_2}\Big|_{R_0} = R\ddot{\beta}\vec{y_2} + R\dot{\beta}\left(\dot{\beta}\vec{z_2}\right)\wedge\vec{y_2}$

$= R\ddot{\beta}\vec{y_2} - R\dot{\beta}^2\vec{x_2}$

$$\boxed{\text{d'où } \vec{a}(G/R_0) = l\ddot{\alpha}\vec{y_1} - l\dot{\alpha}^2\vec{x_1} + R\ddot{\beta}\vec{y_2} - R\dot{\beta}^2\vec{x_2}}$$

4) Calculons le moment cinétique de (S_2) en G :

$$\vec{\sigma}_{G(S_2/R_0)} = \left[I_G(S_2)\right]_{R_2}\vec{\Omega}_{(R_2/R_0)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = A\dot{\beta}\vec{z_2} \quad \text{où } A = \frac{2}{5}MR^2$$

$$\boxed{\text{donc } \vec{\sigma}_{G}(S_2/R_0) = \frac{2}{5}MR^2\dot{\beta}\,\vec{z_2}}$$

5) Moment cinétique de (S_2) en A :

$$\vec{\sigma}_{A}(S_2/R_0) = \vec{\sigma}_{G}(S_2/R_0) + \vec{AG}\wedge M\vec{V}(G/R_0) = \vec{\sigma}_{G}(S_2/R_0) + M\vec{AG}\wedge\vec{V}(G/R_0)$$

$\vec{AG} = R\vec{x_2}$

$\vec{V}(G/R_0) = l\dot{\alpha}\vec{y_1} + R\dot{\beta}\vec{y_2} = l\dot{\alpha}\left[\sin(\beta-\alpha)\vec{x_2} + \cos(\beta-\alpha)\vec{y_2}\right] + R\dot{\beta}\vec{y_2}$

$= l\dot{\alpha}\sin(\beta-\alpha)\vec{x_2} + \left[l\dot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) + R\dot{\beta}\right]\vec{y_2}$

donc $\vec{AG} \wedge \vec{V}(G/R_0) = R\vec{x}_2 \wedge \left[l\dot{\alpha}\sin(\beta-\alpha)\vec{x}_2 + [l\dot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) + R\dot{\beta}]\vec{y}_2 \right]$

$$= R\left[l\dot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) + R\dot{\beta} \right]\vec{z}_2$$

Ainsi $\vec{\sigma}_A(S_2/R_0) = \frac{2}{5}MR^2\dot{\beta}\vec{z}_2 + MRl\dot{\alpha}\cos(\beta-\alpha)\vec{z}_2 + MR^2\dot{\beta}\vec{z}_2$ or $\vec{z}_2 = \vec{z}_0$

$$\boxed{\text{donc } \vec{\sigma}_A(S_2/R_0) = \left[\frac{7}{5}MR^2\dot{\beta} + MRl\dot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) \right]\vec{z}_0}$$

6) Moment dynamique de (S_2) en A :

$$\vec{\delta}_A(S_2/R_0) = \frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(S_2/R_0)\Big|_{R_0} + M\vec{V}(A/R_0) \wedge \vec{V}(G/R_0)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_A(S_2/R_0)\Big|_{R_0} = \left[\frac{7}{5}MR^2\ddot{\beta} + MRl\ddot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) - MRl\dot{\alpha}(\dot{\beta}-\dot{\alpha})\sin(\beta-\alpha) \right]\vec{z}_0$$

$$\vec{V}(A/R_0) = l\dot{\alpha}\vec{y}_1 = l\dot{\alpha}\left[\sin(\beta-\alpha)\vec{x}_2 + \cos(\beta-\alpha)\vec{y}_2 \right]$$

$$\vec{V}(G/R_0) = l\dot{\alpha}\vec{y}_1 + R\dot{\beta}\vec{y}_2$$

donc $\vec{V}(A/R_0) \wedge \vec{V}(G/R_0) = Rl\dot{\alpha}\dot{\beta}\,\vec{y}_1 \wedge \vec{y}_2 = Rl\dot{\alpha}\dot{\beta}\left(\sin(\beta-\alpha)\vec{x}_2 + \cos(\beta-\alpha)\vec{y}_2 \right) \wedge \vec{y}_2$

$$= Rl\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\beta-\alpha)\vec{z}_2$$

d'où $\vec{\delta}_A(S_2/R_0) = \left[\frac{7}{5}MR^2\ddot{\beta} + MRl\ddot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) - MRl\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\beta-\alpha) + MRl\dot{\alpha}^2\sin(\beta-\alpha) + MRl\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\beta-\alpha) \right]\vec{z}_2$

$$\boxed{\text{Ainsi } \vec{\delta}_{A}(S_2/R_0) = \left[\frac{7}{5}MR^2\ddot{\beta} + MRl\ddot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) + MRl\dot{\alpha}^2\sin(\beta-\alpha)\right]\vec{z}_2}$$

7) Equation du mouvement de S_2 :

• $\{\vec{P}\}_A = \begin{Bmatrix} Mg\vec{x}_0 \\ \vec{AG}\wedge\vec{P} \end{Bmatrix}_A$ or $\vec{x}_0 = \cos\beta\,\vec{x}_2 - \sin\beta\,\vec{y}_2$

donc $\vec{AG}\wedge\vec{P} = R\vec{x}_2 \wedge Mg\vec{x}_0$

$= R\vec{x}_2 \wedge Mg(\cos\beta\,\vec{x}_2 - \sin\beta\,\vec{y}_2)$

$= -MRg\sin\beta\,\vec{z}_2$

d'où $\{\vec{P}\}_A = \begin{Bmatrix} Mg(\cos\beta\,\vec{x}_2 - \sin\beta\,\vec{y}_2) \\ -MRg\sin\beta\,\vec{z}_2 \end{Bmatrix}$

• $\{\vec{T}\}_A = \begin{Bmatrix} -T\vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} -T[\cos(\beta-\alpha)\,\vec{x}_2 - \sin(\beta-\alpha)\,\vec{y}_2] \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$

• $\{\mathcal{D}_{A\,\bar{S}_2\to S_2}\} = \begin{Bmatrix} M\vec{a}(G/R_0) \\ \vec{\delta}_A(S_2/R_0) \end{Bmatrix}$

$\vec{a}(G/R_0) = l\ddot{\alpha}\vec{y}_1 - l\dot{\alpha}^2\vec{x}_1 + R\ddot{\beta}\vec{y}_2 - R\dot{\beta}^2\vec{x}_2$

$= l\ddot{\alpha}\left[\sin(\beta-\alpha)\,\vec{x}_2 + \cos(\beta-\alpha)\,\vec{y}_2\right] - l\dot{\alpha}^2\left[\cos(\beta-\alpha)\,\vec{x}_2 - \sin(\beta-\alpha)\,\vec{y}_2\right]$

$+ R\ddot{\beta}\vec{y}_2 - R\dot{\beta}^2\vec{x}_2$

$$\vec{a}(G/R_0) = \left|\begin{array}{l} l\ddot{\alpha}\sin(\beta-\alpha) - l\dot{\alpha}^2\cos(\beta-\alpha) - R\dot{\beta}^2 \\ l\ddot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) + l\dot{\alpha}^2\sin(\beta-\alpha) + R\ddot{\beta} \\ 0 \end{array}\right.$$

D'après le PFD on a :

$$\{\vec{F}_{ext}\}_A = \{\mathcal{D}_A\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Mg\cos\beta - T\cos(\beta-\alpha) = Ml\ddot{\alpha}\sin(\beta-\alpha) - Ml\dot{\alpha}^2\cos(\beta-\alpha) - MR\dot{\beta}^2 & (1) \\ -Mg\sin\beta + T\sin(\beta-\alpha) = Ml\ddot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) + Ml\dot{\alpha}^2\sin(\beta-\alpha) + MR\ddot{\beta} & (2) \\ -MRg\sin\beta = \frac{7}{5}MR^2\ddot{\beta} + MRl\ddot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) + MRl\dot{\alpha}^2\sin(\beta-\alpha) & (3) \end{cases}$$

$\sin(\beta-\alpha)$ (1) + $\cos(\beta-\alpha)$ (2)

$$\Rightarrow Mg\left(\cos\beta\sin(\beta-\alpha) - \sin\beta\cos(\beta-\alpha)\right) = Ml\ddot{\alpha}\sin^2(\beta-\alpha) + Ml\ddot{\alpha}\cos^2(\beta-\alpha)$$
$$- MR\dot{\beta}^2\sin(\beta-\alpha) + MR\ddot{\beta}\cos(\beta-\alpha)$$

$$\Rightarrow Mg\sin(\beta-\alpha-\beta) = Ml\ddot{\alpha} - MR\dot{\beta}^2\sin(\beta-\alpha) + MR\ddot{\beta}\cos(\beta-\alpha)$$

$$\Rightarrow -g\sin\alpha = l\ddot{\alpha} - R\dot{\beta}^2\sin(\beta-\alpha) + R\ddot{\beta}\cos(\beta-\alpha) \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow -g\sin\beta = \frac{7}{5}R\ddot{\beta} + l\ddot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) + l\dot{\alpha}^2\sin(\beta-\alpha) \quad (5)$$

(4) et (5) $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{cases} -g\sin\alpha = l\ddot{\alpha} - R\dot{\beta}^2\sin(\beta-\alpha) + R\ddot{\beta}\cos(\beta-\alpha) \\ -g\sin\beta = \frac{7}{5}R\ddot{\beta} + l\ddot{\alpha}\cos(\beta-\alpha) + l\dot{\alpha}^2\sin(\beta-\alpha) \end{cases}}$$