

SOMMAIRE

ANNEXES.....	7
ANNEXE 1 : FICHES DE TRAVAUX DIRIGÉS	8
<u>T.D. DE : PHY 228 STATIQUE</u> <u>THÈME : GÉNÉRALITÉS SUR LES TORSEURS</u>	8
<u>T.D. DE : PHY 228 STATIQUE</u> <u>THÈME : LES TORSEURS UTILISÉS EN MÉCANIQUE.....</u>	13
<u>T.D. DE : PHY 228 STATIQUE</u> <u>THÈME : RÔLE DES TORSEURS EN MÉCANIQUE</u>	15
<u>TD DE PHY 228</u> <u>THÈME : MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES 1^{RE} PARTIE :</u>	20
<u>TD DE PHY 228</u> <u>THÈME : MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES - 2^{EME} PARTIE :</u>	23
<u>TD DE PHY 228</u> <u>THÈME : PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (P.F.S.) - 1^{RE} PARTIE :</u>	27
<u>TD DE PHY 228</u> <u>THÈME : PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (P.F.S.) - 2^{EME} PARTIE :</u>	32
<u>TD DE PHY 228</u> <u>THÈME : STATIQUE PLANE ET SYSTÈMES TRIANGULÉS - 1^{RE} PARTIE :</u>	35
<u>TD DE PHY 228</u> <u>THÈME : STATIQUE PLANE ET SYSTÈMES TRIANGULÉS - 2^{EME} PARTIE :</u>	37
<u>TD DE PHY 228</u> <u>THÈME : HYPERSTATISME ET MOBILITÉ DES MÉCANISMES</u>	38
ANNEXE 2 : ELEMENTS DE CALCUL VECTORIEL.....	41
INTRODUCTION	41
I- ESPACES VECTORIEL ET AFFINE	41
a) Espace vectoriel	41
b) Espace affine	42
c) Autres définitions.....	43
II - OPERATIONS COURAMMENT EFFECTUÉES SUR LES VECTEURS	44
d) Produit mixte de trois vecteurs.....	48
e) Double Produit vectoriel	49
f) Quelques applications en Mécanique :	49
ANNEXE 3 : CALCUL DU MOMENT CINÉTIQUE D'UN SOLIDE.....	53
ANNEXE 4 : CALCUL DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UN SOLIDE.....	56
ANNEXE 5 : OPERATEUR D'INERTIE D'UN SOLIDE	59
I - DEFINITION ET MATRICE DE L'OPÉRATEUR D'INERTIE EN UN POINT.....	59
II - DEFINITION GÉNÉRALE DES MOMENTS ET PRODUITS D'INERTIE.....	62
III - OPÉRATEUR D'INERTIE D'UN SOLIDE AYANT DES ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE	65
IV - THÉOREME DE HUYGENS	66
ANNEXE 6 : RECUEILS DE SUJETS D'EVALUATION	69
RATTRAPAGE DE PHY 228 - JUIN 2016.....	70
EXAMEN DE PHY 228 - JUIN 2016.....	72
SUJET DE JUIN 2015	74
CONTRÔLE DU 18 AVRIL 2015	77
EXAMEN DU 12 JUIN 2014	79
CONTRÔLE DU 26 AVRIL 2014	83
EXAMEN DE JUIN 2013 - 2H.....	87
CONTRÔLE DU 11 MAI 2013	92
CRC 1 DU 01/06/13	95
CRC 2 DU 01/06/13	97
CRC 3 DU 01/06/13	98

EXAMEN DU 13 SEPTEMBRE 2012	99
EXAMEN DU 29 JUIN 2012	103
CONTRÔLE DU 30 MAI 2012	106
EXAMEN DE SEPTEMBRE 2011	108
EXAMEN DU 21 JUIN 2011	111
CONTRÔLE DU 04 JUIN 2011	114
CONTRÔLE DU 07 MAI 2011	118
EXAMEN DE JUIN 2010	120
CONTRÔLE DU 19/05/10	123
EXAMEN DU 17 JUIN 2009	125
CONTRÔLE DU 23/05/09	129

0

BIBLIOGRAPHIE

ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE

- 1°) J-D LARRALDE, Mécanique : statique . Collection des industries mécaniques, édition Masson, tome 1 et tome 2
- 2°) JOSE-PHILIPPE PEREZ, Mécanique : point matériel, solide, fluides; Ed Masson
- 3°) JEAN LOUIS FANCHON, Guide de mécanique en sciences et technologies industrielles , Ed Nathan
- 4°) YVES BREMONT, Mécanique 2 : statique, Ed ellipses
- 5°) PIERRE AGATI, Mécanique du solide en applications industrielles, Ed Dunod
- 6°) Jean-Philippe ANSERMET, Mécanique

ANNEXES

ANNEXES

ANNEXE 1 : FICHES DE TRAVAUX DIRIGÉS

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
POLYTECHNIQUE
D-MSP



UE PHY 228 STATIQUE

Niveau 2

Enseignant: P.S. NGOIHE-EKAM

T.D. de : PHY 228 Statique Thème : Généralités sur les
torseurs

Exercice 1 :

On définit un torseur comme la donnée de deux vecteurs \vec{R} et \vec{m}_p , le premier étant libre et le second lié (valeur dépendant du point P de l'espace où il est évalué), tels que, en deux points quelconque P et Q de l'espace affine & on ait : $\vec{m}_p = \vec{m}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{R}$.

Le torseur $[T]$ d'éléments de réduction \vec{R} et \vec{m}_p en un point P est noté $[T] = \vec{R} + \epsilon \vec{m}_p$ où ϵ est le nombre dual absorbant (=de puissance entière nulle si supérieure à 1).

1) Montrer que le champ des moments d'un torseur est équiprojectif. (on admettra désormais que tout champ équiprojectif est un champ de moments)

2) Déterminer, en fonction des coordonnées vectorielles respectives \vec{R}_1 , \vec{m}_{1p} , \vec{R}_2 et \vec{m}_{2p} de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$, les grandeurs suivantes :

- Produit du scalaire λ par le torseur $[T_1]$
- Produit scalaire des torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$
- Produit vectoriel des torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$
- Produit mixte des torseurs $[T_1]$, $[T_2]$ et $[T_3]$ pris dans cet ordre, où $[T_3] = \vec{R}_3 + \epsilon \vec{m}_{3p}$
- La formule suivante du double produit vectoriel est-elle vérifiée pour les torseurs $[A]$, $[B]$, $[C]$:

$$[A] \wedge ([B] \wedge [C]) = [B] \bullet ([A] \bullet [C]) - [C] \bullet ([A] \bullet [B]) ?$$

- Proposer une formule pour le produit mixte de trois torseurs $[A]$, $[B]$ et $[C]$

Exercice 2: Egalité de deux torseurs

Déterminer les conditions nécessaires pour que les deux torseurs suivants soient égaux :

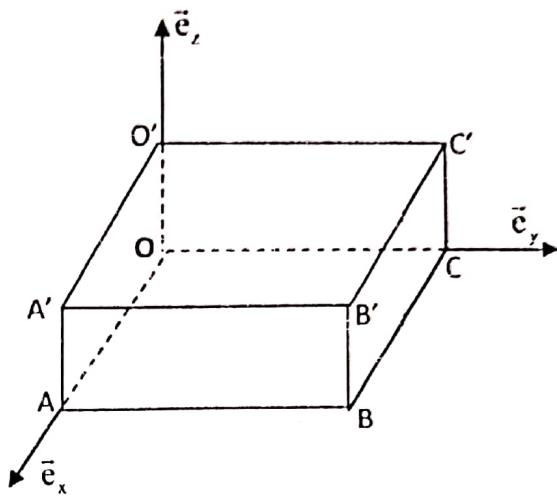
$$[T_1]_O = \begin{cases} \bar{R}_1 = 2\bar{e}_z - \bar{c}_x \\ \bar{M}_1 = \lambda \bar{c}_y \end{cases} \text{ et } [T_2]_\Lambda = \begin{cases} \bar{R}_2 = \alpha \bar{c}_x + \beta \bar{c}_y + \gamma \bar{c}_z \\ \bar{M}_2 = \lambda \bar{c}_x + \mu \bar{c}_y \end{cases} \text{ où } \Lambda(a,b,c).$$

Exercice 3 :

Soit le parallélépipède d'arêtes a , b , et c ci-contre.

Déterminer :

- les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OC'}$, $\overrightarrow{BO'}$ et $\overrightarrow{AC'}$
- les produits scalaires $\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{OB'}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{O'B}$ et les produits vectoriels $\overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{OB'}$; $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{O'B}$
- les produits mixtes $(\overrightarrow{O'C'}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OO'})$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $(\bar{c}_x, \bar{c}_y, \overrightarrow{OB})$
- l'aire des triangles $O'BC'$ et OAB
- les volumes du parallélépipède bâti sur les vecteurs \bar{e}_x , \overrightarrow{OC} et $\overrightarrow{OB'}$
- les angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{CC'})$
- $\bar{m}_0 \overrightarrow{AB}$, $\bar{m}_0 \overrightarrow{AB}$ et $\bar{m}_C \overrightarrow{AB}$
- Vérifier la formule $\bar{m}_I \bar{F} = \bar{m}_J \bar{F} + \bar{I}\bar{J} \wedge \bar{F}$ pour $\bar{F} = \overrightarrow{AB}$; $I, J \in \{O, O', C\}$



Exercice 4 :

1) Montrer que l'axe central, lieu des points de l'espace où les éléments de réductions d'un torseur sont colinéaires, est aussi le lieu où le moment du torseur est minimal (en module).

2) Montrer que l'axe central est dirigé (colinaire) par la résultante \bar{R} du torseur.

3) Montrer que le moment d'un torseur est le même (en vecteur) partout sur son axe central.

Exercice 5 : Dans un espace affine E muni d'un repère $R(O, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$, on donne les moments d'un torseur aux points O , $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$:

$$\bar{m}_0 = -2\bar{e}_x + 2(1+\lambda)\bar{e}_y; \quad \bar{m}_A = -2\bar{e}_x + (3+2\lambda)\bar{e}_y - 3\bar{e}_z$$

$$\bar{m}_B = -3\bar{e}_x + 2(1+\lambda)\bar{e}_y + (2+\lambda)\bar{e}_z; \quad \bar{m}_C = L\bar{e}_x + M\bar{e}_y + N\bar{e}_z$$

où λ, L, M et N sont inconnus, λ paramètre caractéristique du torseur.

- 1) Pour quelles valeurs de λ le champ ainsi présenté est-il un champ de moments ?

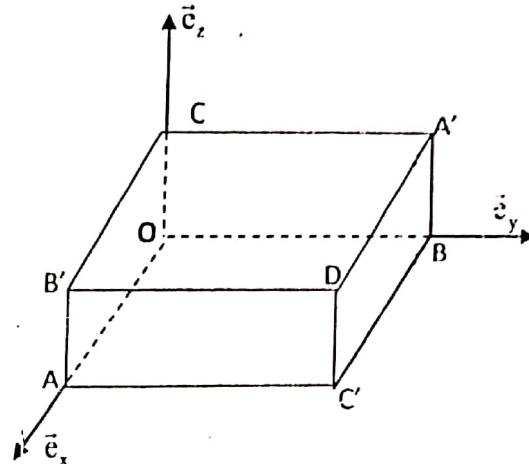
- 2) Par utilisation de l'équiprojectivité, déterminer explicitement m_c en fonction de λ
- 3) Déterminer la résultante géométrique du torseur.
- 4) Pour quelles valeurs de λ le torseur serait-il un glisseur ? c'est-à-dire existerait-il une infinité de points I tel que $[T] = \bar{R} + \epsilon \bar{O}$ en I ?
- 5) Pour quelles valeurs de λ l'axe central du torseur serait-il parallèle au plan $H(O, \vec{c}_x, \vec{c}_z)$?

Exercice 6 :

Dans l'espace affine \mathcal{E} rapporté au repère $R(O, \vec{c}_x, \vec{c}_y, \vec{e}_z)$, on considère un parallélépipède d'arêtes $OA = a$ (sur l'axe des x), $OB = b$ (sur l'axe des y) et $OC = c$ (sur l'axe des z).

Les points A' , B' , C' et D' sont les symétriques respectifs de A , B , C et O par rapport au centre Ω du parallélépipède.

On considère les deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ suivants :
 $[T_1]$ composé par les vecteurs \overline{OA} , \overline{OB} et \overline{OC}
 $[T_2]$ composé par les vecteurs \overline{OA} , \overline{AB} , \overline{BC} et \overline{DC}



- 1) Déterminer les éléments de réduction de ces torseurs au point O
- 2) En déduire les coordonnées vectorielles de ces torseurs aux points A, B, C et D
- 3) Déterminer, en chacun de ces points, les automoments et le comoment des torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$
- 4) Soit un point quelconque $M(x, y, z)$, réduire le torseur $[T_1]$ en M
- 5) En déduire le lieu (Δ) des points de l'espace où les éléments de réduction de $[T_1]$ sont colinéaires. (Δ) est appelé « axe central » du torseur $[T_1]$.
- 6) Soit I le point de (Δ) et dont les deux premières coordonnées sont 1 et 1. Quel est le pas réduit du torseur $[T_1]$ en I dans l'hypothèse $a = b = c$?
- 7) Calculer le pas réduit du torseur en un autre point de votre choix. Conclure !

Exercice 7: Définition, notations, typologie et éléments centraux d'un torseur

On considère deux vecteurs $\vec{U} = 3\vec{c}_x$ et $\vec{V} = 5\vec{c}_y$ respectivement liés aux points A(1, 2, 0) et B(2, 1, 0), dans un repère $R_I(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

- 1°) Quels sont au point O les coordonnées vectorielles du torseur $[T]$ constitué par l'ensemble de ces deux vecteurs ?
- 2°) Donner la notation duale de ce torseur en B

3°) Quelle est la dernière coordonnée plückérienne de ce torseur dans le repère $R_2(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$?

4°) Donner trois points centraux pour ce torseur ayant dans (R_1) des coordonnées qui vérifient : $X_1 = 0$, $X_2 = 4/5$ et $Y_3 = 0$

5°) Donner l'équation cartésienne dans le repère (R_1) de l'axe central de ce torseur.

6°) Déterminer pour ce torseur :

- a) le pas réduit
- b) l'automoment
- c) sa nature

9°) Déterminer tous les glisseurs perpendiculaires à ce torseur et dont les axes centraux contiennent le point O.

Exercice 8: Notations des torseurs.

On donne les Repères $R_1(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $R_2(A, \frac{\vec{e}_x - \vec{e}_z}{\sqrt{2}}, \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_z}{\sqrt{2}}, -\vec{e}_y)$ où

$\overrightarrow{OA} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$, a, b et c étant des constantes réelles positives. Soient deux torseurs

$[T_1]_{(R_1)} = (2\vec{e}_x - \vec{e}_z) + \varepsilon\vec{e}_y$ et $[T_2]_{(R_2)} = (2\vec{e}_x - \vec{e}_z) + \varepsilon\vec{e}_y$. Déterminer :

1°) – La différence des deux torseurs

2°) – L'automoment des deux torseurs

3°) – L'équation cartésienne, dans (R_1) , de l'axe central de $[T_2]$.

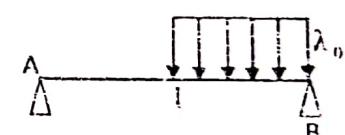
4°) – L'équation cartésienne, dans (R_2) , de l'axe central de $[T_1]$.

5°) – L'ensemble des points de l'espace affine auxquels les moments des deux torseurs sont égaux..

Exercice 9: Reprendre l'exemple de distribution continue (linéaire) d'effort sur le pont de longueur $AB=L$ et de densité linéique uniforme de charge $\lambda(x)=\lambda_0$ N/m

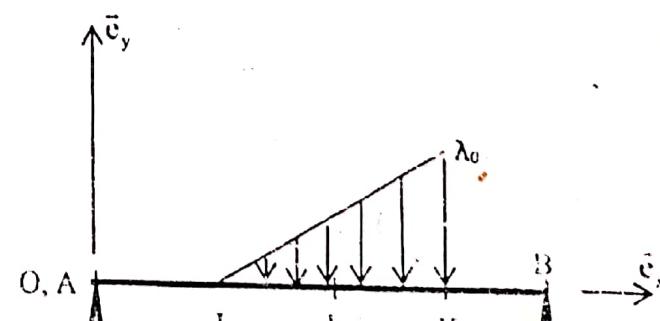
distribuée, cette fois, sur la deuxième moitié $[IB]$ du pont. Déterminer les

nouvelles réactions \bar{N}_A et \bar{N}_B des appuis de A et B sur le pont.



Exercice 10: Charge continue non uniforme sur un pont

On considère dans le référentiel $R(O=A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la distribution affine $\lambda(x)$ de charge linéaire ci-contre, sur un pont léger de longueur L et reposant sur deux appuis simples en ses extrémités A et B. I, J et K sont les milieux respectifs de $[A, B]$, $[A, I]$ et $[I, B]$. La valeur maximale de cette charge est λ_0 en N/m.



1°) – Donner la loi de distribution $\lambda = \lambda(x)$

2°) – Quels sont, au point J, les éléments de réduction du torseur $[\mathcal{T}]$ représentant cette charge.

3°) – Donner la notation plückérienne de $[\mathcal{T}]_0$.

4°) – Préciser la notation duale de ce torseur en un point quelconque P tel que $\overrightarrow{AP} = x\vec{e}_x$.

5°) – En déduire le point P^* de l'axe (AB) où le moment de $[\mathcal{F}]$ est minimum.



Enseignant: P.S. NGOIHE-EKAM

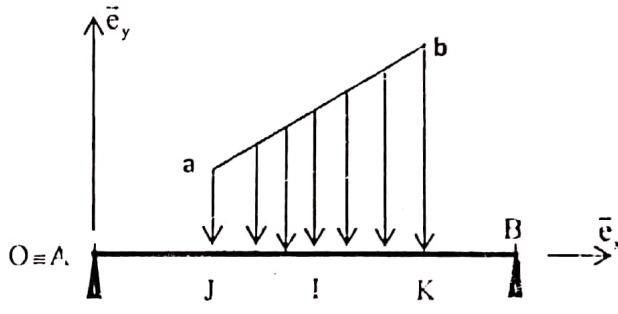
T.D. de : PHY 228 Statique torseurs utilisés en mécanique

Thème : Les

Exercice 1 : Le torseur des actions mécaniques

On considère dans le référentiel

$R(O \equiv A, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ la distribution affine $\lambda(x)$ en
N/m de charge linéaire ci-contre sur un pont léger
AB de longueur L. I, J et K sont les milieux
respectifs de [A, B], [A, I] et [I, B].



1°) Réduire en O le torseur $[F]$ représentant la charge totale sur le pont.

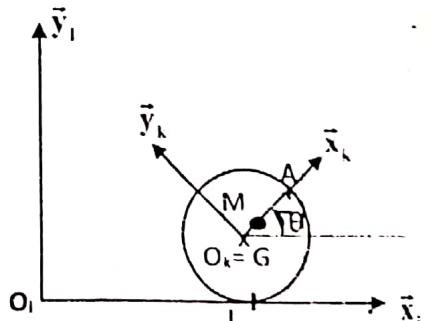
2°) En déduire son moment au point B.

3°) Déterminer pour ce torseur :

- a) L'axe central
- b) Le pas réduit
- c) L'automoment

Exercice 2 : Le torseur cinématique d'une roue

Une roue (S_k) de rayon R roule sans glisser sur un sol et se déplace à la vitesse constante V_0 par rapport au sol (vitesse du centre de masse G). La rotation de la roue autour de l'axe horizontal passant par G est repérée par l'angle θ que fait son rayon principal $[GA]$ avec son axe d'avancement. On lie à la roue le repère $R_k(O_k, \bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ et au sol le repère $R_i(O_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$.



1°) Donner l'expression du torseur cinématique de la roue au point G.

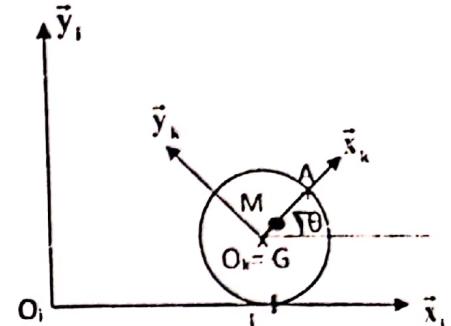
2°) En déduire ce torseur au point de contact I de la roue avec le sol.

3°) Sachant que l'absence du glissement, au point de contact I entre la roue et le sol, se traduit par une vitesse par rapport au sol nulle pour le point I de la roue, donner une expression de l'angle $\theta(t)$ en fonction de V_0 , R et t est (on supposera qu'à l'instant initial, le vecteur GA est horizontal et dans le sens du mouvement).

4°) Quelle est, en fonction du temps, la vitesse dans (R_i) d'un point M du rayon principal se trouvant à une distance x du centre G.

Exercice 3 : Le torseur cinétique d'une roue

Une roue de rayon R, d'épaisseur négligeable et de masse m, roule sans glisser sur un sol et se déplace à la vitesse constante V_0 par rapport au sol (vitesse du centre de masse G). La rotation de la roue autour de l'axe horizontal passant par G est repérée par l'angle θ que fait son rayon principal [GA] avec son axe d'avancement. On note I_G le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe de rotation. On lie à la roue le repère $R_k(O_k, \bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ et au sol le repère $R_i(O_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$.



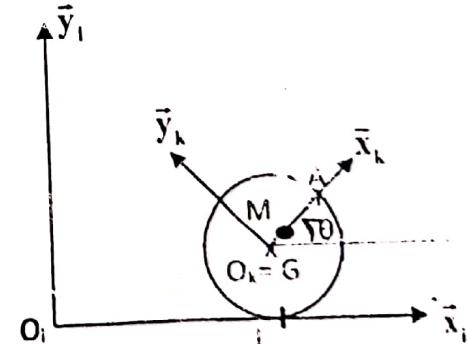
1°) Donner au point I, la résultante cinétique de la roue dans son mouvement par rapport au sol.

2°) - En tenant compte du fait que le moment cinétique d'un solide par rapport à son centre de masse G est donné par : $\vec{\sigma}_G = [I]_{G,(S)} \cdot [\vec{\Omega}_k^i]$ où $[I]_{G,(S)}$ est la matrice d'inertie du solide calculée au point G, et que puisque la roue admet un axe de révolution, sa matrice d'inertie est diagonale et admet pour termes diagonaux les moments d'inertie respectifs par rapport aux axes du repère considéré. Déterminer le moment cinétique de la roue au point G.

3°) En déduire le torseur cinétique de la roue, réduit au point I de contact avec le sol.

Exercice 4 : Le torseur dynamique d'une roue

Une roue de rayon R, d'épaisseur négligeable et de masse m, roule sans glisser sur un sol et se déplace à la vitesse constante V_0 par rapport au sol (vitesse du centre de masse G). La rotation de la roue autour de l'axe horizontal passant par G est repérée par l'angle θ que fait son rayon principal [GA] avec son axe d'avancement. On note I_G le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe de rotation. On lie à la roue le repère $R_k(O_k, \bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ et au sol le repère $R_i(O_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$.



1°) Déterminer la quantité d'accélération totale de la roue dans son mouvement par rapport au sol.

2°) - Quel est le moment dynamique de la roue au point G ?

3°) - Donner le torseur dynamique de la roue, réduit au point I de contact avec le sol.



Enseignant: P.S. NGOHE-EKAM

T.D. de : PHY 228 Statique

Rôle des torseurs en mécanique

Thème:

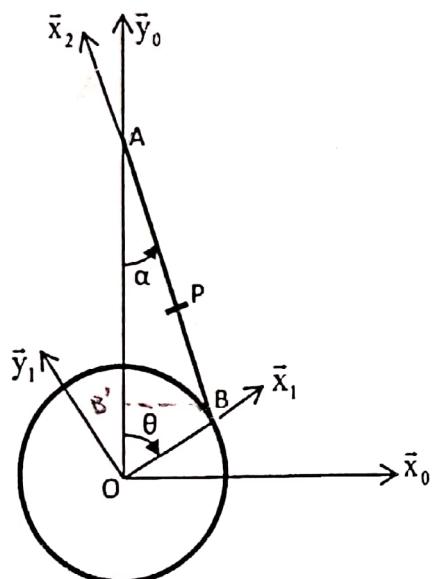
Exercice 1 : étude cinématique d'un ensemble Piston et bielle

On considère, dans un repère cartésien $R_0(O, \vec{x}_0 = \vec{c}_x, \vec{y}_0 = \vec{c}_y, \vec{z}_0 = \vec{c}_z)$ fixe, le système modélisé par une roue (S_1) de rayon R tournant à une vitesse angulaire constante $\dot{\theta}$ et une barre AB notée (S_2), de longueur L dont une extrémité est fixée à la

roue et l'autre peut glisser sur un axe passant par son centre. On définit les repères $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ tels que

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_2 = \vec{z}_0, \quad \vec{x}_1 = \frac{\overline{OB}}{\|\overline{OB}\|}, \quad \vec{x}_2 = \frac{\overline{BA}}{\|\overline{BA}\|}, \quad \vec{y}_1 = \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 \text{ et}$$

$$\vec{y}_2 = \vec{z}_2 \wedge \vec{x}_2.$$



Un point P quelconque de la barre AB est repéré par sa distance h au point A ; on note les angles orientés $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{x}_2)$ et $\theta = (\vec{y}_0, \vec{x}_1)$. Voir figure ci-contre.

1°) Déterminer le vecteur position, dans le repère (R_0) , d'un point quelconque P de la barre AB .

2°) Par dérivation directe du vecteur position $\vec{r}^0(P)$ de P dans le repère (R_0) , donner la vitesse d'un point quelconque P de la barre par rapport au repère fixe (R_0) .

3°) Soit B' le projeté de B sur l'axe (OA) . En examinant les triangles $B'BA$ et $B'BO$ dire si les relations suivantes sont vraies ou fausses :

- a) $L\sin\alpha - R\sin\theta = 0$
- b) $L\alpha\sin\alpha + R\dot{\theta}\sin\theta = 0$
- c) $L\cos\alpha - R\cos\theta = 0$
- d) $L\cos\alpha + R\cos\theta = 0$

4°) Réduire en O le torseur cinématique du mouvement de (S_1) par rapport à (S_0) .

5°) En déduire le torseur précédent, au point B .

6°) Le point B appartenant à la fois à (S_1) et (S_2), donner le torseur cinématique de (S_2) dans son mouvement par rapport à (S_1) réduit en B.

7°) Déduire de ce qui précède le torseur cinématique de (S_2) dans son mouvement par rapport à (R_0), réduit au point B.

8°) B et P appartiennent à (S_2): en examinant le torseur précédent, réduit au point P, déduire la vitesse du point P par rapport au repère fixe (R_0).

9°) Donner alors une expression de la vitesse de A par rapport au repère fixe (R_0).

10°) Déterminer une expression de la différence des vitesses $\bar{V}_2^0(P)$ et $\bar{V}_2^0(A)$ est :

11°) En considérant les points P et A de (S_2), dire lequel des vecteurs \bar{U} ci-dessous vérifie l'égalité $\bar{V}_2^0(P) = \bar{\Omega}_2^0 \wedge \bar{U}$:

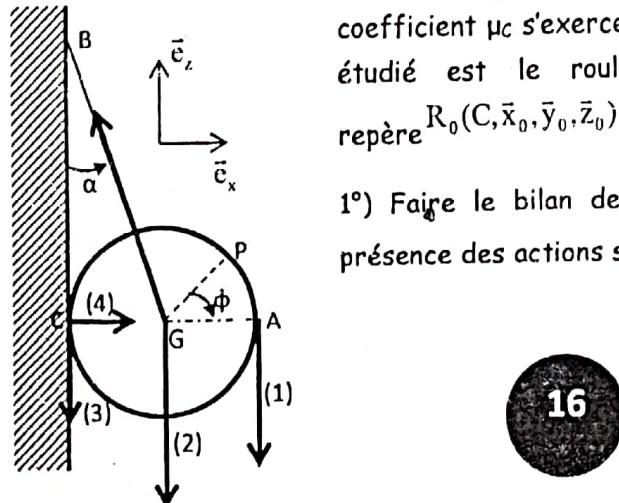
$$a) \bar{U} = \begin{bmatrix} -h \dot{\alpha} \cos \alpha \\ R \dot{\theta} \sin \theta + (L-h) \dot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_0)} \quad b) \bar{U} = \begin{bmatrix} h \dot{\alpha} \cos \alpha \\ -[R \dot{\theta} \sin \theta + (L-h) \dot{\alpha} \sin \alpha] \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_0)}$$

$$c) \bar{U} = \begin{bmatrix} L \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \theta - (L-h) \sin \alpha \\ -h \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_0)} \quad d) \bar{U} = \begin{bmatrix} -L \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \theta + (L-h) \sin \alpha \\ -h \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_0)}$$

12°) En déduire le vecteur position dans (R_0) du C.I.R. du mouvement de la barre (S_2) par rapport au repère fixe (R_0), c.à.d. le point I tel que $\forall P \in (S_2), \bar{V}_2^0(P) = \bar{\Omega}_2^0 \wedge \bar{IP}$.

Exercice 2 : Rouleau de papier hygiénique

Un rouleau à papier de rayon de base R est suspendu par deux barres rigides de longueur L orientées selon un angle α par rapport au mur. Le rouleau a une masse m et un moment d'inertie I_G par rapport à son axe de révolution. Une force verticale \bar{P} tire le rouleau de papier vers le bas et un frottement sec de coefficient μ_c s'exerce entre le papier et le mur. Le système étudié est le rouleau de papier et on définit le repère $R_0(C, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ associé aux coordonnées cartésiennes.



1°) Faire le bilan des forces extérieures en spécifiant la présence des actions suivantes : l'action de la pesanteur \bar{P} , la

réaction normale \bar{N} du mur, la tension résultante \bar{T} des barres, la force \bar{F}_r de frottement sec du papier contre le mur, et la force verticale \bar{F} sur le papier.

2°) La rotation du rouleau est repérée par l'angle ϕ que fait son rayon principal [GP] avec l'axe des x. Déterminer le torseur dynamique du rouleau dans son mouvement par rapport au mur.

3°) Donner la notation plückérienne dans (R_0), du torseur des actions extérieures appliquées au rouleau.

4°) Par application du théorème de la résultante dynamique déterminer le couple (T, N)

5°) A l'aide du théorème du moment dynamique donner l'expression de l'accélération angulaire du rouleau en fonction de la norme de la force \bar{F} , de m, de μ_c et de l'angle α .

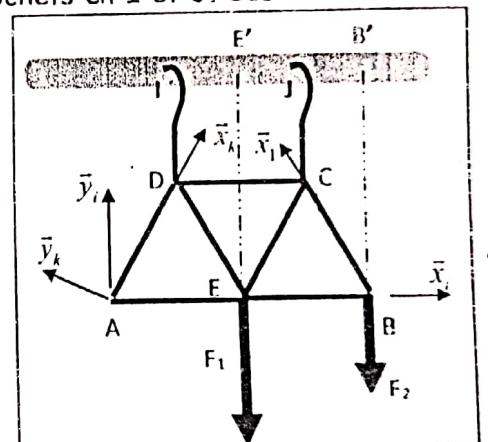
Exercice 3 : Etude de l'équilibre d'un treillis

Soit la structure ci-contre suspendue par deux crochets en I et J. Ses barres sont toutes cylindriques de diamètre et de masses négligeables ; elles ont la même longueur $L = 60$ cm. On admet qu'elles exercent des actions dirigées suivant leur axe de révolution. Aux noeuds E et B s'exercent respectivement des charges extérieures $F_1 = 3\text{kN}$ et $F_2 = 2\text{kN}$ comme le montre la figure ci-dessous.

1°) - En appliquant le PFS au noeud (point) A qu'on supposera en équilibre et par projection sur les axes du repère (R_i), donner une relation entre les résultantes géométrique des torseurs des actions des barres AD et AE au noeud A.

2°) - En isolant la structure toute entière, déterminer l'intensité de la réaction normale \bar{N} du support en I.

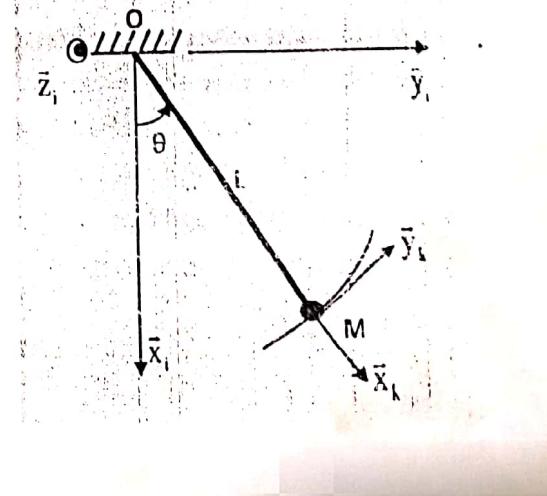
3°) - Quelle est l'intensité de la réaction normale \bar{N} du support au point J.



Exercice 4 : Considérations énergétiques :

Dans cet exercice, on essaye de donner un aperçu du rôle général joué par des torseurs en mécanique, tant pour l'étude du mouvement que pour des considérations énergétiques.

La figure ci-contre représente un pendule simple de masse m concentrée au point M, de longueur OM = L, fixé sur une potence au point O, origine du repère $R_i(O, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$; on lie le repère (R_k) au pendule dont la



rotation est matérialisée par l'angle θ . On écarte le pendule de la verticale d'une valeur θ_M et on le lâche.

1°) - Faire le bilan des actions extérieures s'exerçant sur le pendule ; en déduire le torseur des forces appliquées (on le réduira au point O, comme d'ailleurs tous les torseurs du problème).

2°) - Donner l'expression du torseur cinématique du pendule ou torseur distributeur des vitesses dont la résultante géométrique est le vecteur rotation instantanée du pendule, et son moment en un point, la vitesse en ce point.

3°) - Donner l'expression du torseur cinétique du pendule ou torseur des quantités de mouvement dont la résultante géométrique est le vecteur quantité de mouvement, et son moment en un point, le moment cinétique du pendule en ce point

4°) - Pour l'étude du mouvement du pendule, appliquer le P.F.D en terme de torseur (on utilisera notamment les moments des torseurs cinétique et des forces appliquées) pour obtenir l'équation du mouvement du pendule.

5°) - Déterminer la puissance développée par le pendule à un instant t quelconque, par utilisation de l'égalité : $P = \text{dual}([\mathcal{F}], [\gamma]) = [\mathcal{F}]^*[\gamma] = \bar{F} \cdot \bar{v}_0 + \bar{\Omega} \cdot \bar{m}_0$;

6°) - Vérifier qu'on peut bien retrouver l'énergie cinétique du pendule à l'aide de la formule : $E_C = \frac{1}{2} \text{dual}([\mathcal{D}], [\gamma]) = [\mathcal{D}]^*[\gamma] = \frac{1}{2} (\bar{p} \cdot \bar{v}_0 + \bar{\Omega} \cdot \bar{\sigma}_0)$.

Exercice 5 : Cinématique graphique

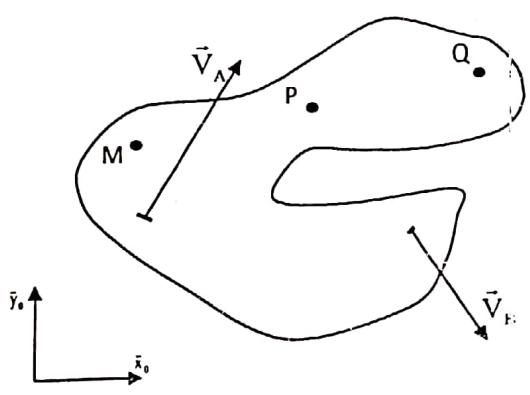
La figure ci-dessous (page suivante) est dessinée à l'échelle, autant pour les longueurs que pour les vitesses. Elle représente une plaque (S_1) en rotation autour d'un axe fixe $\Delta(I, \bar{z}_0)$ perpendiculaire à son plan. Les vitesses de deux points, A et B, respectivement de 4 et 3 m/s, y ont été représentés par leurs vecteurs.

1°) - Déterminer le point I, CIR de la plaque, dans son mouvement par rapport à la table fixe (S_0) de normale \bar{z}_0 . (On pourra utiliser l'orthogonalité des vitesses à la droite qui relie les points au CIR (bras de levier))

2°) - Tracer, sur la figure, les droites d'action des vitesses aux points M, P et Q. (on utilisera encore la propriété d'orthogonalité)

3°) - Utiliser l'équiprojectivité du champ des vitesses du solide, pour tracer les vitesses en M, P et Q.

4°) - Quels sont les valeurs numériques de ces vitesses, ainsi que leurs angles d'inclinaison par rapport à l'axe \bar{x}_0 de la table ?





Enseignant: P.S. NGOIHE-EKAM

TD de PHY 228 Thème : Modélisation des actions mécaniques 1^{ère} partie :

Action mécanique à distance de pesanteur - Le centre d'inertie

Exercice 1 : Centre d'inertie d'un secteur circulaire

1°) - Déterminer le vecteur position, dans le repère $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, du centre de gravité G du secteur circulaire d'angle 2α d'une couronne de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 , supposée homogène (Figure 1)

2°) - Vérifier le résultat obtenu dans le cas $\alpha = \pi$.

3°) - Déduire du résultat général de 1°), la position du centre de gravité de :

- a) - un demi-cercle de rayon R
- b) - un quart de cercle de rayon R
- c) - un demi-disque de centre O et de rayon R

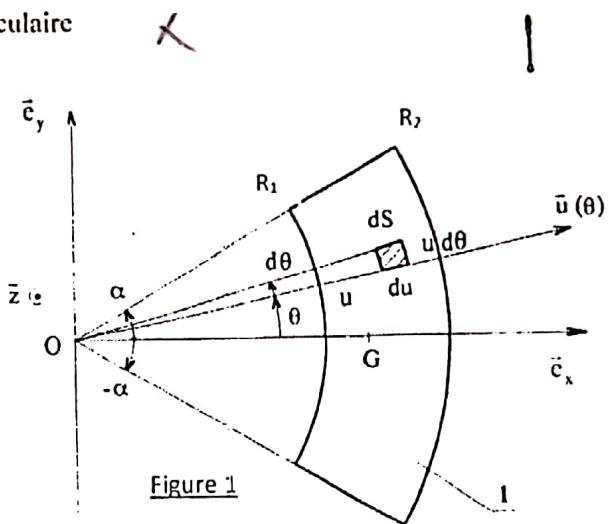


Figure 1

Exercice 2 : Utilisation du Centre d'inertie d'une courbe plane pour la détermination des surfaces de révolution.

1°) - Vérifier le premier théorème de GULDIN pour le demi-cercle de rayon R (vu en exercice 1) et pour un cylindre creux de rayon de base R et de hauteur H (surface latérale et surface totale)

2°) - Déterminer, à partir du premier théorème de GULDIN, l'aire d'un tore (anneau cylindrique) de section circulaire de rayon r (figures 3 et 4 ci-dessous)

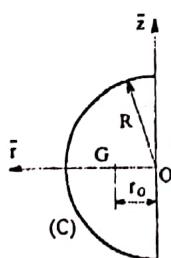


Figure 2

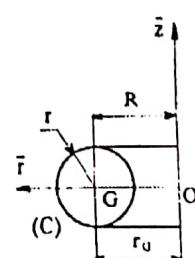


Figure 4

Exercice 3 : Utilisation du Centre d'inertie d'une surface plane pour la détermination de volumes.

1°) – Vérifier le deuxième théorème de Guldin pour un cylindre plein de rayon de base R et de hauteur H.

2°) – Déterminer, à partir du deuxième théorème de Guldin le volume :

a) - d'une sphère de rayon R

b) - d'un tore (anneau cylindrique) de rayon R et de section circulaire de rayon r

Exercice 4 : Centre d'inertie d'un cône de révolution (figure 5)

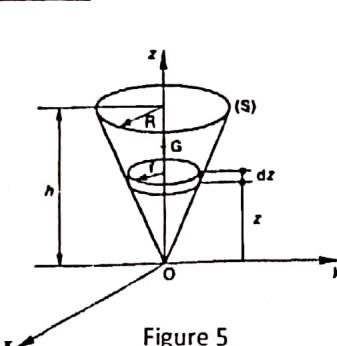


Figure 5

1°) – Déterminer le centre de surface d'un cône de révolution de hauteur H, de rayon du cercle de base R, homogène, creux et d'épaisseur négligeable, sans la base.

2°) – Déterminer le centre d'inertie d'un cône de révolution, plein et homogène, de hauteur H et de cercle de base de rayon R.

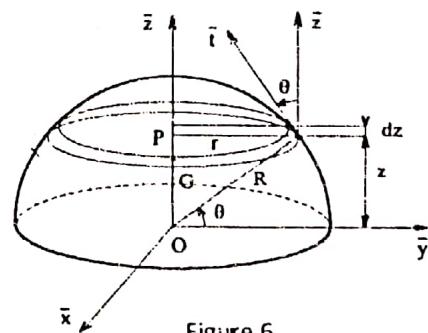


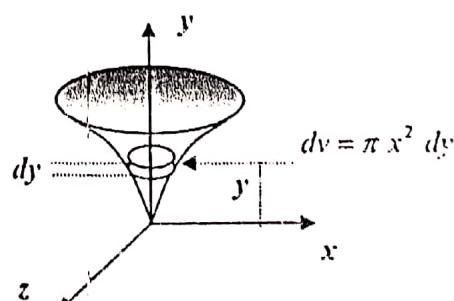
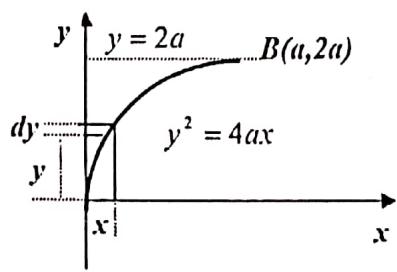
Figure 6

Exercice 5 : Centre d'inertie d'une demi-sphère

Déterminer le centre de masse d'une demi-sphère de rayon R, pleine et homogène (figure 6).

Exercice 6 :

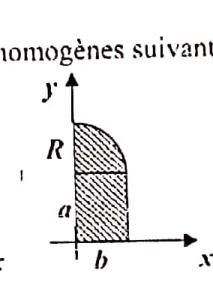
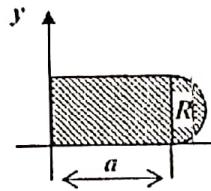
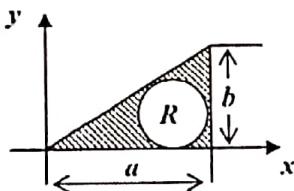
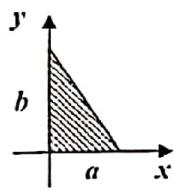
En faisant tourner la surface limitée par l'axe Oy , la courbe parabolique d'équation $y^2 = 4ax$ et la droite d'équation $y = 2a$, nous obtenons un volume, comme représenté sur la figure ci-dessus. Déterminer le centre d'inertie et le volume de ce domaine.



Exercice 7 :

X

Déterminer par le théorème de Guldin le centre d'inertie des solides homogènes suivants :





Enseignant: P.S. NGOIHE-EKAM

TD de PHY 228 Thème : Modélisation des actions mécaniques - 2^{ème} partie :

Modélisation des actions mécaniques de contact

Exercice 8 : Champ des actions mécaniques de pression s'exerçant sur un cube de Leslie

Un cube de Leslie, d'arête a , est coincé entre les plans xOy , yOz et zOx de l'espace repéré par $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ comme le montre la figure ci-contre. On le remplit aux $2/3$ par un liquide de densité d .

1°) – Réduire, en O , le torseur des forces pressantes exercées par ce liquide (S_1) sur la face (S_2) du cube incluse dans le plan d'équation $x = a$.

2°) – Déterminer un point Q où le moment de ce torseur est nul.

3°) – En déduire les équations cartésiennes de l'axe dudit torseur.

4°) – A.N. : $d = 13,6$ et $a = 10$ cm. Caractériser l'axe central de ce torseur sous la forme $\Delta(I, \vec{u})$

(On notera ρ_0 la masse volumique de l'eau et on pourra négliger la pression atmosphérique)

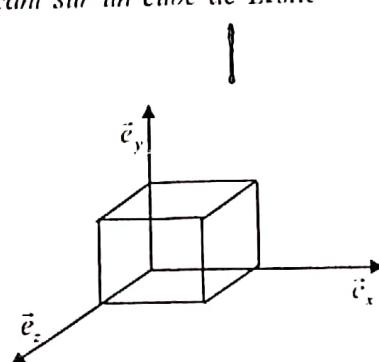


Figure 8

Exercice 9 : Limiteur de couple (ITAGA 931)

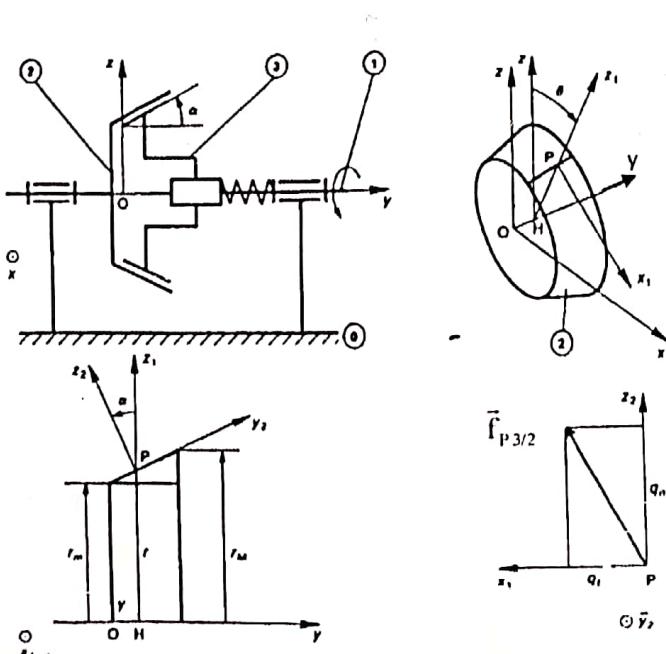


Figure 9

Soit un broyeur de paille, attelé à un tracteur agricole ; le moment du couple transmissible par le moteur est limité par un limiteur de couple à roues coniques dont le schéma cinématique est donné sur la figure ci-contre.

$R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est un repère lié au carter (0) du limiteur de couple ; la roue motrice conique (3) a une liaison glissière d'axe (O, \vec{y}) avec l'arbre moteur (1) qui a, ainsi que

la roue réceptrice conique (2), une liaison pivot d'axe (O/\bar{y}) avec le carter (0).

Soient α , r_m et r_M respectivement le demi-angle au sommet des troncs de cône, les rayons minimum et maximum des cercles de section droite de la surface conique de contact entre (2) et (3)

Soient q_n et f respectivement la pression de contact, supposée uniforme, de l'action mécanique de contact de la roue (3) sur la roue (2), et le coefficient de frottement des surfaces de contact.

On note $[\mathcal{F}_n] = \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{3/2} \\ \bar{M}_{0,3/2} \end{array} \right\}_0$ le torseur d'action mécanique de contact de (3) sur

(2), et on pose $\begin{cases} F = -\bar{y} \cdot \bar{R}_{3/2} \\ C = \bar{y} \cdot \bar{M}_{0,3/2} \end{cases}$; F représente l'effort presseur exercé axialement par la

roue (3) sur la roue (2) et C représente le moment du couple transmis par le limiteur de couple. Le but de l'étude est de déterminer le moment maximum C_M que peut transmettre ce mécanisme. Pour cela on considère les roues (2) et (3) à la limite du glissement et, dans cette hypothèse, on peut définir en tout point P de la surface de contact, le vecteur rotation instantanée de (2) par rapport à (3) sous la forme :

$$\bar{\Omega}_2^3 = \bar{\Omega}_{2/3} = \omega \bar{y} \quad \text{avec } \omega < 0.$$

1°) – Définir les paramètres permettant de décrire la position d'un point P quelconque de la surface de contact de la roue (2) par rapport au repère (R) ; préciser ensuite la direction de la normale en ce point. On pourra définir un repère $R_1(H, \bar{x}_1, \bar{y}_1 = \bar{y}, \bar{z}_1)$ t.q. $(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \alpha$ où H est la projection de P sur l'axe (O/\bar{y}) et \bar{z}_1 le vecteur unitaire de même direction et même sens que \overline{HP} , et un autre repère local $R_2(P, \bar{x}_2 = \bar{x}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ t.q. $(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \alpha$, donc le vecteur unitaire \bar{z}_2 est normal en P à la surface conique

2°) – Déterminer, dans la base du repère local (R_2), les composantes du vecteur densité surfacique $\bar{f}_{p,3/2}$ en fonction du coefficient de frottement f et de la pression de contact q_n entre (2) et (3).

3°) – Déterminer la pression de contact q_n en fonction de l'effort presseur F .

4°) – Déterminer le moment maximum C_M du couple transmissible par le limiteur de couple, en fonction de l'effort presseur F .

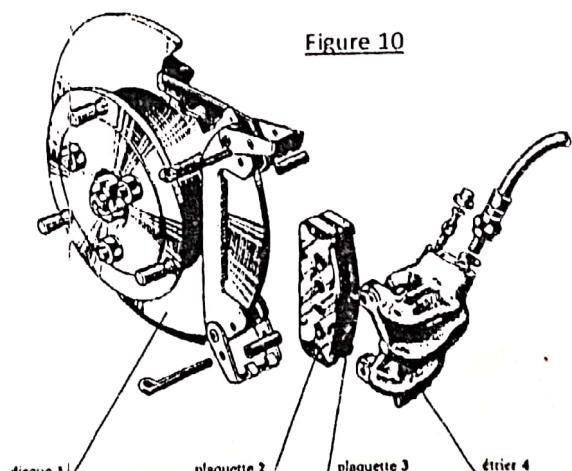


Figure 10

Exercice 10 : Frein à disque (TNOMERB 46)

Un frein à disque d'automobile est représenté sur la figure 10 ci-contre ; il est essentiellement constitué du disque (1) lié à la roue du véhicule, des plaquettes (2) et (3) serrées contre le disque (1), pendant le freinage, par un piston guidé en translation dans l'étrier (4).

Le but de l'étude est de déterminer l'action mécanique exercée par la plaquette (3) sur le disque (1) lors du freinage. Pour cela, la plaquette (3) est schématisée par une surface qui est l'intersection entre un secteur circulaire d'angle 2α et une couronne circulaire de rayon intérieur r et de rayon extérieur R (voir figure 11 ci-dessous).

Soit $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un repère tel que l'axe (O, \bar{z}) soit confondu avec l'axe de la roue ; le

plan (O, \bar{x}, \bar{y}) est placé dans le plan médian du disque d'épaisseur $2e$.

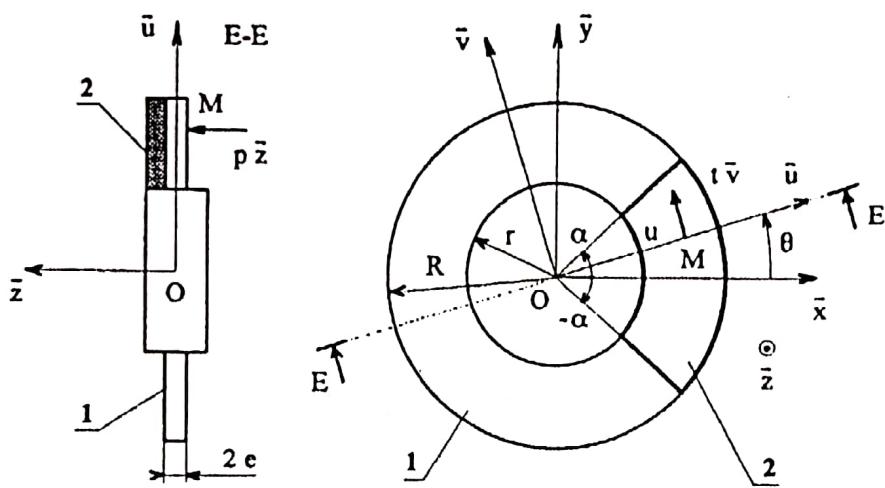


Figure 11

de forces $\bar{f}(M) = p\bar{z} + t\bar{v}$, sachant que le repère $R_1(O, \bar{u}, \bar{v}, \bar{z})$ est tel que : $\overrightarrow{OM} = u\bar{u} \pm e\bar{z}$ avec $r \leq u \leq R$ et $\theta = (\bar{x}, \bar{u})$ avec $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$, les composantes normales et tangentielle p et t sont positives.

On suppose la pression p uniforme sur la surface de contact et on note f le coefficient de frottement entre le disque (1) et la garniture de la plaquette (3)

On donne $R = 90 \text{ mm}$; $r = 60 \text{ mm}$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,35$; $p = 2 \text{ MPa}$

1°) – Déterminer, au point O, le torseur d'action mécanique de la plaquette (3) sur le disque (1), en fonction de p , f , r , R , e et α .

2°) – En déduire le torseur d'action mécanique de l'ensemble des deux plaquettes (2) et (3) sur le disque (1). Valeur numérique.

3°) – Déterminer l'axe central du torseur d'action mécanique de l'ensemble des deux plaquettes (2) et (3) sur le disque (1). Valeur numérique.

4°) – Représenter le torseur d'action mécanique de la plaquette (3) sur le disque (1) par un ensemble de deux forces, l'une associée à l'action normale et l'autre à l'action tangentielle.

c



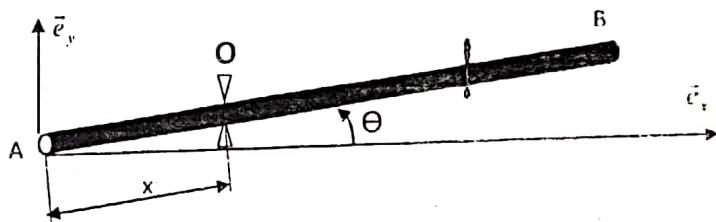
Enseignant: P.S. NGOIHE-EKAM

TD de PHY 228 Thème : Principe Fondamental de la Statique (P.F.S.) - 1^{ère} partie :

Torseurs d'action continue et discrète, application du P.F.S.

Exercice 1 : Torseur d'action exercée pour tenir une poutre inclinée

Un ouvrier O tient une barre AB, à une distance x de l'extrémité A. La barre est cylindrique de diamètre de base d , négligeable devant sa longueur L , et de masse volumique ρ . On se propose d'étudier le torseur de l'effort exercé par cet ouvrier pour maintenir la barre inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale.



1°) – Déterminer le torseur effort exercé par l'ouvrier.

2°) – Déterminer la position x_0 des mains de l'ouvrier pour laquelle le moment qu'il exerce est minimal.

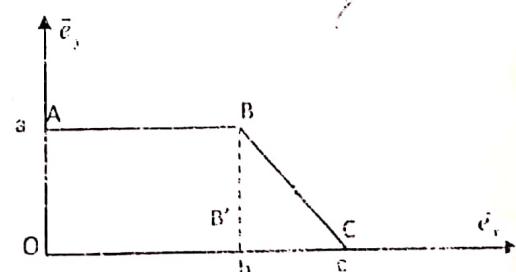
3°) – A.N.: $\theta = 90^\circ$, $\rho = 4000 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $L = 2 \text{ m}$, $d = 10 \text{ cm}$. Donner, en notation duale, le torseur exercé par l'ouvrier.

Exercice 2: Transport d'une plaque trapézoïdale

(ISTGOV 050507)

Soit une plaque trapézoïdale homogène ABCO d'épaisseur uniforme e et de masse volumique ρ , repérée dans $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ par ses sommets $A(0, a, 0)$, $B(b, a, 0)$, $C(c, 0, 0)$ et $O(0, 0, 0)$. On se propose de déterminer la charge de trois porteurs qui la soutiennent verticalement par les points O, B' et C, où B' est le projeté de B sur (OC).

1°) – Déterminer dans le repère (R) ci-dessus, les équations cartésiennes des segments [A, B] et [B, C]



2°) - Donner les expressions des actions infinitésimales de la pesanteur s'exerçant, respectivement dans les parties rectangle $\Delta B B' O$ et triangle $B C B'$, sur un volume élémentaire de largeur dx et entourant un point M d'abscisse $x + dx/2$.

3) - Donner les expressions des moments élémentaires des forces précédentes par rapport au point O .

4) - Réduire en O le torseur de l'action de la pesanteur sur la plaque toute entière.

5) - Vérifier que, pour $b = c$, on retrouve le torseur pesanteur s'exerçant uniquement sur le rectangle.

6) - On donne pour la suite : $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $a = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $c = 3 \text{ m}$ et $e = 2 \text{ mm}$.

Pour transporter cette plaque, trois personnes la maintiennent verticale en exerçant des actions verticales \bar{N}_O , $\bar{N}_{B'}$, \bar{N}_C respectivement en O , B' et C . Par réduction de torseurs, déterminer ces actions.

7) - Examiner le cas particulier où seules les personnes placées en O et C soutiennent la plaque.

Exercice 3 : Le système Vis-Ecrou (ITAGA 351)

On considère le système vis-écrou d'axe (O, \vec{x}) représenté sur la figure 1 ci-contre ; le repère galiléen $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié à la vis (1). Sur l'écrou (2) s'exerce l'action mécanique d'un corps (E) représenté par le torseur $[F_{E/2}] = \begin{Bmatrix} \bar{F} \\ \bar{C} \end{Bmatrix}_O$ avec $\begin{cases} \bar{F} = -F \vec{x} & (F > 0) \\ \bar{C} = C \vec{x} \end{cases}$

Les surfaces de liaison entre la vis (1) et l'écrou (2) sont

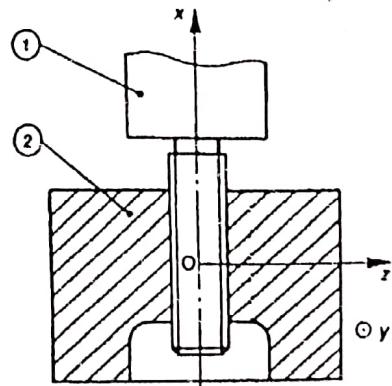
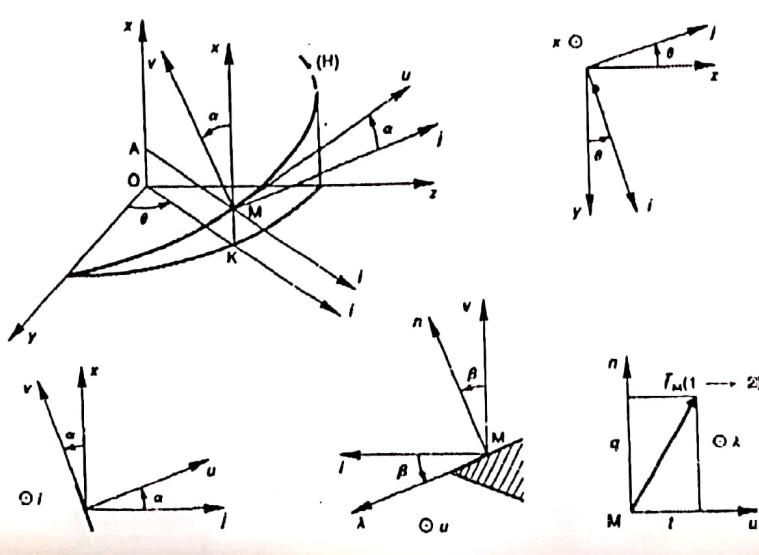


Figure 1

des surfaces hélicoïdales d'axe (O, \vec{x}), de section droite triangulaire de demi-angle au sommet β .

Au cours du mouvement de l'écrou

Figure 2

(2) par rapport à la vis (1), un point de contact M, lié à l'écrou, décrit dans (R) une hélice circulaire à droite (H), d'axe (O, \vec{x}) , de rayon r , d'inclinaison α (figure 2 ci-dessous).

On note :

- K projection du point M sur le plan (O, \vec{y}, \vec{z})

- $\vec{i} = \frac{\overline{OK}}{\|\overline{OK}\|}$ et \vec{j} un vecteur tel que la base $(\vec{x}, \vec{i}, \vec{j})$ soit orthonormée directe.

- $\theta = (\vec{y}, \vec{i})$

- \vec{u} vecteur unitaire tangent en M à l'hélice (H) et \vec{v} tel que $(\vec{i}, \vec{u}, \vec{v})$ soit orthonormée directe, de sorte qu'on a $(\vec{j}, \vec{u}) = (\vec{x}, \vec{v}) = \alpha$.

Le profil de la section droite triangulaire se trouve dans le plan (M, \vec{u}, \vec{i}) ;

On note :

- \vec{n} vecteur unitaire normal en M au filet de la vis, dirigé vers l'extérieur de la matière ; il est perpendiculaire à \vec{u} et on a $(\vec{v}, \vec{n}) = \beta$.

- $\vec{\lambda}$ le troisième vecteur t.q. la base $(\vec{u}, \vec{n}, \vec{\lambda})$ soit orthonormée directe.

- f le coefficient de frottement entre les surfaces en contact (supposé le même en tout point) et φ l'angle de frottement ($f = \tan \varphi$).

- $\tilde{f}_{M1/2}$ la densité surfacique au point M de l'action de contact de (1) sur (2) ; on pose

$$\tilde{f}_{M1/2} = q \cdot \vec{n} + t \cdot \vec{u} + t' \vec{\lambda}$$

Dans l'étude, on suppose que l'écrou est à la limite du glissement par rapport à la vis, ou que l'écrou, dynamiquement équilibré par rapport à l'axe (O, \vec{x}) , est en mouvement uniforme par rapport à la vis. Dans cette hypothèse, le vecteur vitesse de glissement au point M de (2) par rapport à (1) a pour direction \vec{u} , et les lois de Coulomb indiquent que $t' = 0$. Ainsi $\tilde{f}_{M1/2} = q \cdot \vec{n} + t \cdot \vec{u}$; le but de l'étude est de déterminer pour ce mécanisme :

- La condition d'irréversibilité, c.à.d. l'impossibilité, lorsque C est nul, d'obtenir un mouvement relatif de l'écrou par rapport à la vis, quelle que soit la valeur de F.

- La pression de contact entre les surfaces de liaison.

- La valeur du moment résultant \bar{C} pour faire tourner l'écrou dans un sens ou dans l'autre.

- Son efficacité en fonction du sens de rotation.

1°) – On suppose que $C = 0$ et $F \neq 0$. Quelle relation doit-il y avoir entre f , α et β , pour que l'écrou reste en équilibre par rapport à la vis ?

2°) – Déterminer la pression de contact q , supposée uniforme, entre les surfaces de liaison, en fonction de F .

3°) – Pour simplifier la suite de l'étude, on considère que la vis est à filet carré avec un coefficient de frottement fictif $f' = f/\cos \beta$ entre les surfaces en contact, pour que les résultats trouvés soient valables pour un filet triangulaire avec un coefficient de frottement f (on posera également $f' = \tan \varphi'$). Lorsque la relation d'irréversibilité est vérifiée, déterminer la composante du moment résultant \bar{C} du torseur d'action mécanique de (E) qui entraîne l'écrou (2) dans un mouvement uniforme par rapport à la vis :

a) dans le sens positif autour de (O, \vec{x}) ;

b) dans le sens négatif autour de (O, \vec{x}) .

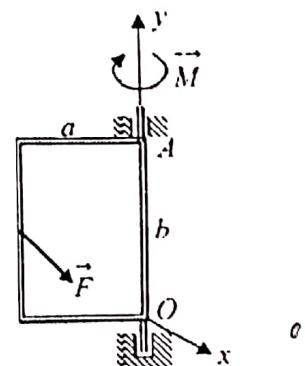
4°) – Lorsque (E) fait tourner l'écrou (2) d'un tour, le travail du moment résultant \bar{C} est $W(\bar{C}) = C \cdot 2\pi$; $C = C_1$ lorsque (E) fait tourner l'écrou dans le sens positif, et $C = C_2$ dans le sens contraire.

Le travail de la résultante générale \bar{F} est $W(\bar{F}) = -F \times 2\pi p$, où p , pas réduit de la vis, est donné par $p = r_{moy} \cdot \tan \alpha$. On définit l'efficacité d'un tel mécanisme par le

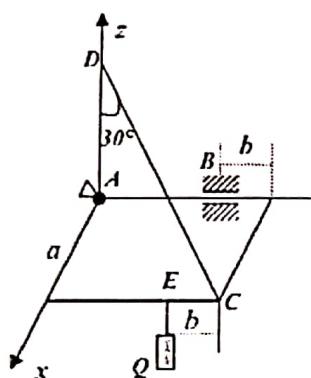
rapport $\eta = \frac{|W(\bar{F})|}{|W(\bar{C})|}$. Déterminer dans les deux cas de la question précédente l'efficacité du système vis-écrou.

Exercice 4 : Réactions des articulations d'une porte métallique

Une porte métallique rectangulaire de densité uniforme de dimensions $a \times b$, de poids P , est maintenue en position verticale par deux articulations, l'une sphérique au point O et l'autre cylindrique au point A . Une force \vec{F} est appliquée perpendiculairement au plan de la porte au point C milieu de la longueur. Afin de maintenir cette porte en position fermée, on applique un moment \bar{M} au point A . Déterminer les réactions aux niveau des articulation O et A ainsi que la force \vec{F} nécessaire pour ouvrir la porte. On donne : $a = 2m$, $b = 3m$, $BC = b/2$, $M = 400N$, $P = 800N$



Exercice 5 : Plaque carrée articulée



Un plaque carrée de coté a , de poids P est fixée à un mur à l'aide d'une articulation sphérique au point A et d'une articulation cylindrique au point B . Un câble CD inextensible et de masse négligeable maintient la plaque en position horizontale. Une charge $Q = 2P$ est suspendue au point E de la plaque. Les données sont : $b = \frac{a}{3}$; $\alpha = 30^\circ$

Déterminer les réactions des articulations en A et B ainsi que la tension dans le câble en fonction de a et P



Enseignant: P.S. NGOHE-EKAM

TD de PHY 228 Thème : Principe Fondamental de la Statique (P.F.S.) - 2^{ème} partie :

Dualité des torseurs [\mathcal{H}] et [\mathcal{V}], inconnues de liaison et composition des liaisons

Exercice 6 : Machine à poinçonner

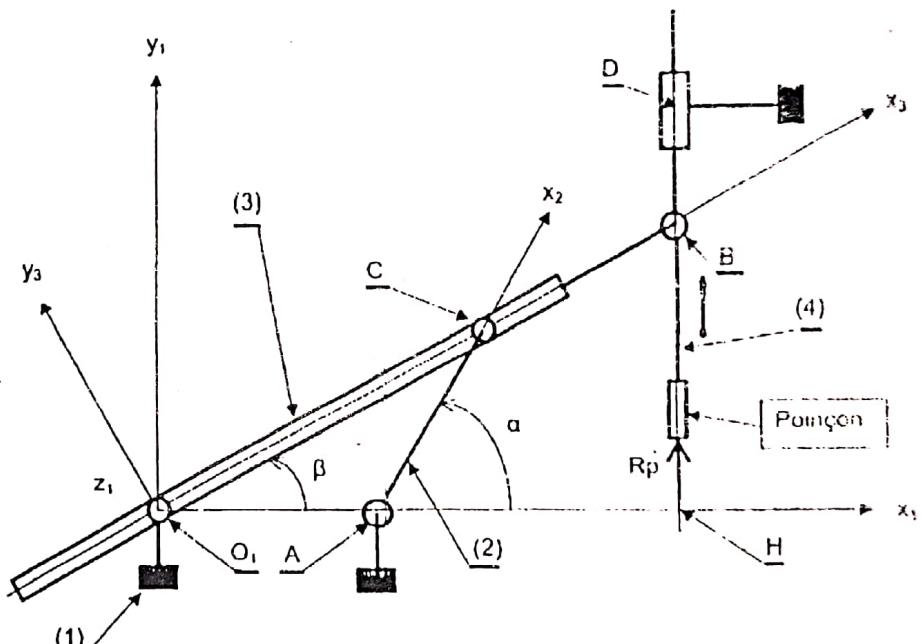
(NIWDE 921)

Un mécanisme

représentant une machine à poinçonner les tôles est constituée des éléments suivants :

- une manivelle motrice (2)
- un levier (3)
- un coulisseau (4) sur lequel est fixé le poinçon.

En A et B, les liaisons L₁₋₂ et L₃₋₄ sont des liaisons pivot d'axe \bar{z}_1 ; en C et O₁, les liaisons L₂₋₃ et L₃₋₁ sont des liaisons linéaires annulaires d'axe (O₁, \bar{x}_3) et L₄₋₁ est une liaison glissière.



On donne : O₁C = λ , O₁A = a, AC = R, O₁B = δ , O₁H = b, (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = α et (\bar{x}_1, \bar{x}_3) = β . On suppose les liaisons sans frottement ; l'effort de poinçonnage est R_p = 2 500 N.

1°) – Partant des torseurs cinématiques des mouvements relatifs des différentes pièces du mécanisme, torseurs bâtis par considération des degrés de libertés des pièces :

a) - Indiquer la forme générale des torseurs d'action de liaison suivants :

- [\mathcal{V}_{12}] exprimé en A, dans la base $B_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$
- [\mathcal{V}_{13}] exprimé en O₁, dans la base $B_3(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$

- $[\mathcal{B}_{3/3}]$ exprimé en C, dans la base $B_3(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$

- $[\mathcal{B}_{3/4}]$ exprimé en B, dans la base

$B_3(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$

- $[\mathcal{B}_{3/4}]$ exprimé en D, dans la base $B_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$

b) – Avec l'hypothèse de mécanisme plan (pas de composants d'effort perpendiculaires au plan, et pas de composants de moment autour des axes du plan), donner une expression simplifiée des torseurs précédents.

2°) – La manivelle (2) est soumise à un couple (moteur) C_m . Déterminer l'expression des inconnues de liaison en C, en fonction de C_m , R, α et β .

N.B. : l'étudiant pourra s'exercer à déterminer les inconnues de liaison aux autres points de liaison.

Exercice 7 : Chariot transporteur mural (NIWDE 401)

Un dispositif de transport de charge est constitué de :

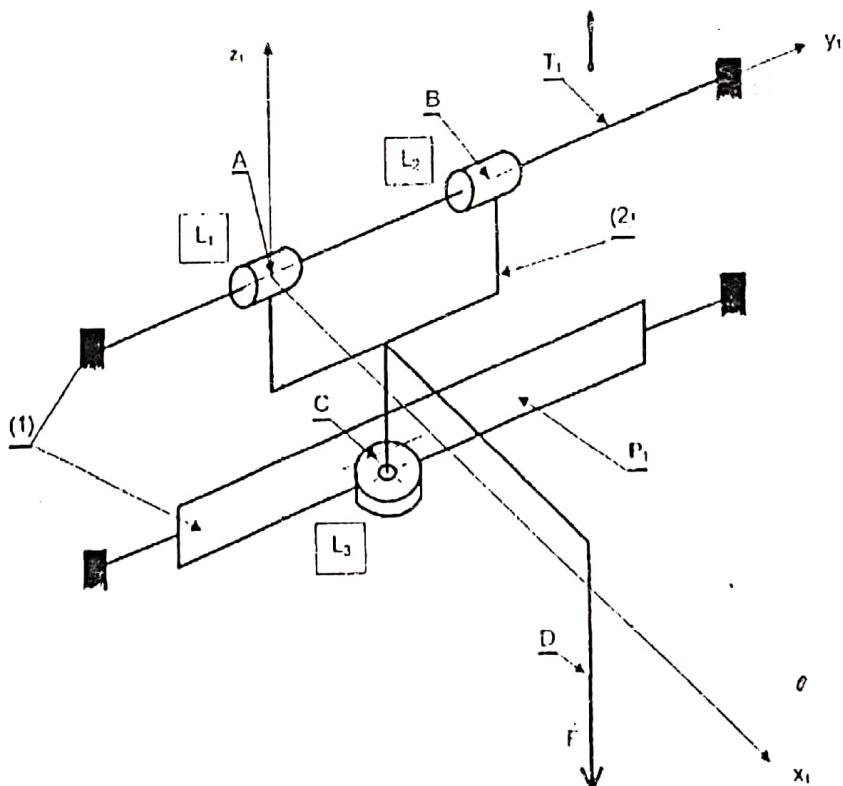
- un chariot (2) en déplacement rectiligne sur un socle mural (1)
- un socle (1) constitué d'une tige circulaire T_1 et d'un appui plan vertical P_1 .

Le chariot (2) est guidé sur le socle par :

- deux douilles à billes L_1 en A et L_2 en B, d'axe horizontal coulissant sur la tige T_1
- un roulement à rotule à billes L_3 en C d'axe vertical et en appui sur le plan P_1 .

La charge pesante appliquée en D est telle que $\vec{F} = F \cdot \bar{z}_1$; l'ensemble mobile est en translation uniforme. On néglige les effets d'inertie, tout comme le poids propre du chariot et on suppose les liaisons parfaites.

Les composantes des actions du carter sur les



roulements sont notés $X_A, Y_A, \dots, X_B, Y_B, \dots$

En vue du dimensionnement des éléments roulants, on se propose de calculer les actions des liaisons en A, B et C, en fonction de la charge F et de la position verticale z de son point d'attache D. Les diverses positions sont définies, dans la base $B_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$, par $\overrightarrow{AB} = (0, a, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0, b, c)$ et $\overrightarrow{AD} = (d, e, z)$

1°) – Modélisation des actions et composition (association) des liaisons:

a) – Proposer une modélisation (torseur cinématique) de chacun des trois contacts de (1) et (2), et donner la forme générale des torseurs d'action de liaison correspondants.

b) – Faire un graphe des liaisons et en déduire la liaison composée réalisée entre (1) et (2) ?
Est-elle isostatique ?

2°) – On suppose toutes les liaisons parfaites. Déterminer, en fonction des dimensions, de F et de z, les composantes de divers torseurs d'action de liaison. Les calculer pour $F = -3\ 000\ N$, $a = 200\ mm$, $b = 100\ mm$, $c = -300\ mm$, $d = 400\ mm$, $e = 100\ m$ et $z = -1\ m$

N.B. : les douilles à billes autorisent un jeu interne assimilable à un rotulage faible (quelques minutes d'angle).



Enseignant: P.S. NGOIHE-EKAM

TD dePHY 228 Thème : Statique plane et systèmes triangulés - 1^{ère} partie :

Résolution graphique des problèmes de Statique plane

Exercice 1 : Equilibre d'un solide soumis à l'action de plus de trois forces

Dans un jeu de kermesse, cinq groupes d'enfants tirent horizontalement sur une plaque trapézoïdale en cuivre, de masse négligeable, par des points A, B, C, D et E, avec des forces dont trois (les deux premières et la dernière) sont entièrement connues (voir figure 1), une (la troisième) entièrement inconnue et la direction d'une autre (la quatrième) est connue. L'enjeu est que la pièce demeure immobile. Déterminer les intensités de forces inconnues, ainsi que la direction et le sens de la force exercée par le troisième groupe d'enfants

(on fera une résolution entièrement graphique ; données si nécessaires : $AB = AE = BD = ED = DC = 10 \text{ cm}$)

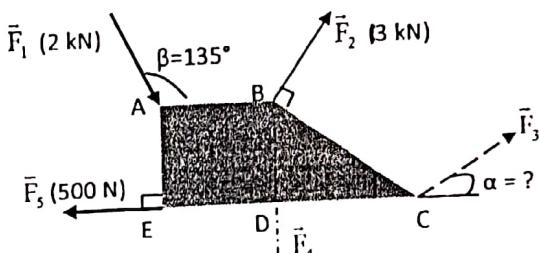


Figure 1

Exercice 2 : Echelle de pompier

Une échelle de pompier (3) partiellement représentée sur la figure 2, est articulée en A (pivot d'axe Λ, \bar{z}) sur une tourelle (2). La tourelle peut pivoter (rotation d'axe D, \bar{y}) par rapport au châssis du camion (1). Le levage est réalisé par un vérin hydraulique 4 + 5 (4 = tige, 5 = corps) articulé en B sur l'échelle et en C sur la tourelle ; les liaisons en B et C sont des liaisons rotules de centres B et C (ou des articulations de centres B et C).

L'étude est réalisée dans le plan de symétrie du dispositif ; l'ensemble est en équilibre, la tourelle est à l'arrêt et le vérin est bloqué en position. $\vec{P}_3 (5 \cdot 10^4 \text{ N})$

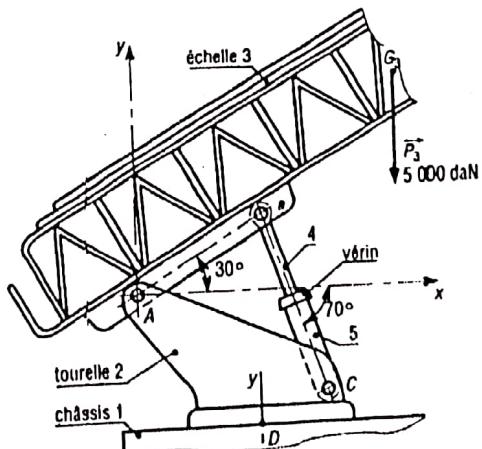


Figure 2

schématise le poids de l'échelle ; le poids du vérin est négligé.

1°) - Déterminer graphiquement les actions exercées sur les liaisons A, B et C.

2°) - Retrouver le résultat précédent par calculs

Exercice 3:

Un bombardier israélien est en phase ascensionnelle à vitesse constante suivant un angle $\alpha = 15^\circ$ sous la poussée $\vec{F} (12 \cdot 10^4 \text{ N})$ des réacteurs. \vec{R} schématise l'action de la résistance de l'air sur l'ensemble de la structure. \vec{S} est la résultante des actions de sustentation sur les ailes et \vec{A} représente la résultante des actions stabilisatrices de l'air sur l'aileron arrière. \vec{P} ($30 \cdot 10^4 \text{ N}$) est le poids de l'appareil. Déterminer \vec{A} , \vec{S} , et \vec{R} si toutes les actions sont supposées contenues dans le plan de symétrie de l'appareil

N.B. : pour ces trois exercices, la résolution sera faite de manière graphique. Toutefois, l'étudiant pourra vérifier qu'il retrouve les mêmes résultats par les calculs directs.



Enseignant: P.S. NGOHE-EKAM

TD de PHY 228 Thème : Statique plane et systèmes triangulés - 2^{ème} partie :

Résolution des systèmes triangulés

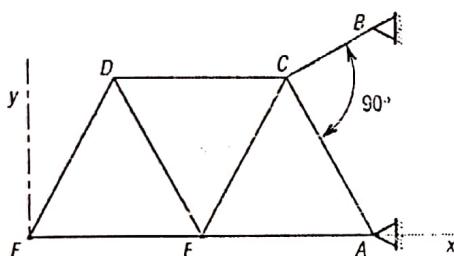


Figure 4

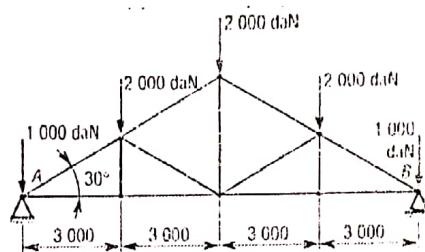


Figure 5

Exercice 4 : Structure en cantilever

La structure en cantilever, représentée sur la figure 4 ci-dessus, et de barres $AE = EF = FD = DE = DC = AC = 4$ m, est sollicitée en F et E par deux forces verticales descendantes de modules respectifs 3 et 2.10^3 N.
Déterminer les efforts dans toutes les barres, ainsi que les encastrements en A et B.

Exercice 5 : Ferme Howe

Les efforts exercés par une toiture sur une ferme de type Howe sont tous verticaux et représentés sur la figure 5 ci-dessus ; les dimensions nécessaires de la ferme sont aussi données.

Déterminer les efforts dans toutes les barres de la structure.

Exercice 6 : Pylône électrique

Un pylône servant au transport de l'énergie électrique et représenté sur la figure ci-contre subit, de la part de ces câbles, des forces verticales de 4.10^4 N aux points M et L.

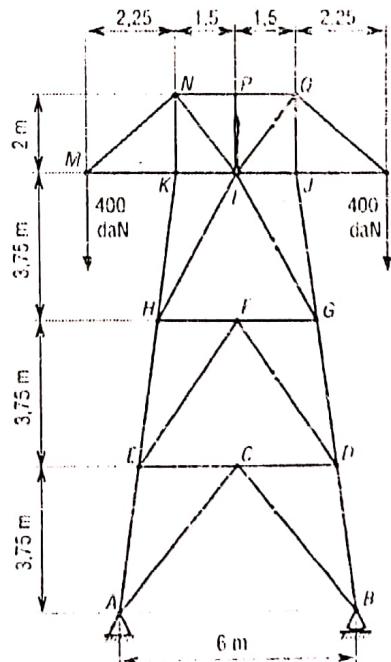


Figure 6

1°) - Déterminer les efforts exercés sur les appuis A et B.

2°) - Déterminer les efforts exercés dans toutes les barres de la structure.

N.B. : l'élève essaiera d'utiliser, pour chacun des quatre exercices de cette fiche, les différentes méthodes graphiques ('nœuds, Cremona, sections, etc.) ; il tentera aussi de retrouver les résultats par calcul direct.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
POLYTECHNIQUE
D-MSP



UE PHY 228 STATIQUE

Niveau 2

Enseignant: P.S. NGOIHE-EKAM

TD de PHY 228 Thème : Hyperstatisme et mobilité des mécanismes

Exercice 1 : Association en parallèle de liaisons

Dans le mécanisme ci-contre, on a :

- L_1 : liaison pivot glissant d'axe (O, \bar{x})

- L_2 : Liaison ponctuelle de normale (O, \bar{x}).

1°) - Dessiner le graphe des liaisons du mécanisme.

2°) - Déterminer la liaison équivalente L_{12} qui aurait le même comportement que L_1 et L_2 ainsi associées ; on notera $AB =$

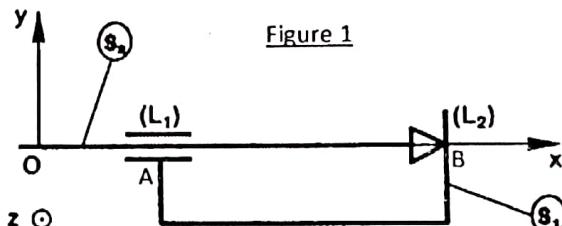


Figure 1

Exercice 2 : Association en série de liaisons

Dans le mécanisme ci-contre :

- L_1 est une liaison appui plan entre (S_0) et (S_1) de normale (O, \bar{z}).

- L_2 : est une liaison rotule de centre O, entre (S_1) et (S_2).

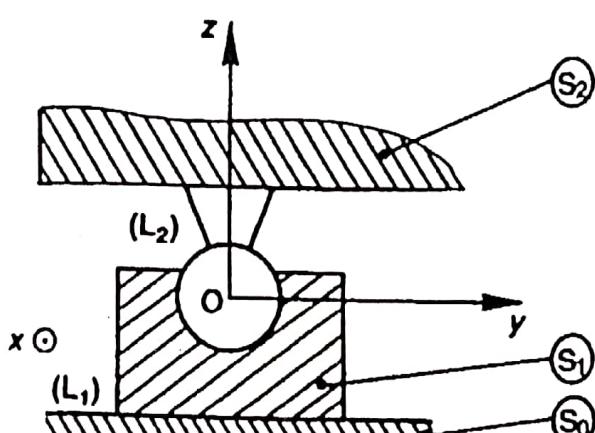


Figure 2

1°) - Dresser le graphe des liaisons de ce mécanisme

2°) - Déterminer le torseur cinématique de la liaison équivalente à L_1 et L_2 ainsi associés.

3°) - En déduire le torseur d'action mécanique transmissible.

4°) - Retrouver autrement ce dernier torseur

Exercice 3 : Mécanisme hyperstatique

Une table (S_2) est montée dans un bâti (S_1) par l'intermédiaire des liaisons :

- L_1 : linéaire annulaire d'axe (O, \bar{x}), de centre O

- L_2 : pivot de centre A et d'axe (O, \bar{x}) ; On a $OA = d$.

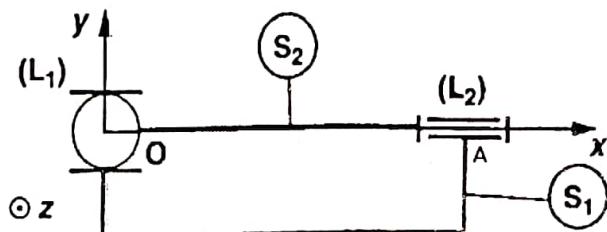


Figure 3

1°) – Déterminer le torseur d'action mécanique transmissible par la liaison équivalente à ces deux liaisons.

2°) – On suppose qu'en plus des actions mécaniques dans les liaisons, il s'exerce sur

(S_2) une action mécanique extérieure représentée par un torseur de la forme :

$$[T_e] = \begin{pmatrix} X_e & L_e \\ Y_e & M_e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}; \text{ écrire les équations algébriques déduites du PFS appliqué à } (S_2).$$

3°) – Déterminer le degré d'hyperstatisme de la liaison équivalente, ainsi que les inconnues hyperstatiques.

4°) – Pour que la liaison équivalente soit une liaison pivot isostatique d'axe (O, \bar{x}), proposer plusieurs modifications possibles de la liaison L_2 , la liaison L_1 demeurant inchangée.

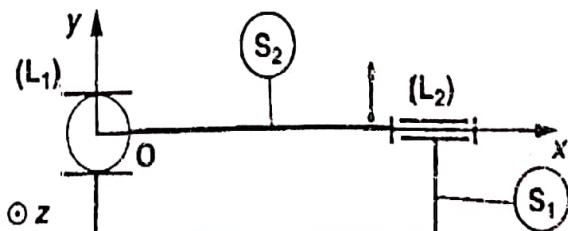
Exercice 4 : Mobilité d'un mécanisme

Retenant le mécanisme de l'exercice 3 :

1°) – Dessiner le graphe des liaisons

2°) – Ecrire la fermeture cinématique du graphe des liaisons

3°) – Déterminer le degré de mobilité de la liaison



Figure

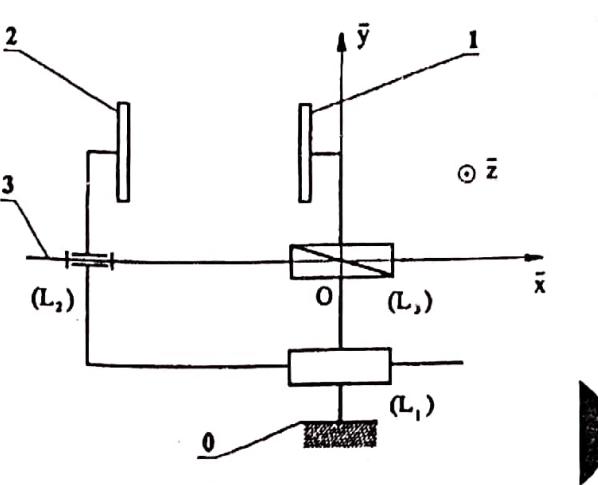


Figure 5

entre (S_1) et (S_2).

Exercice 5 : Relation entre hyperstatisme et mobilité.

La figure 5 ci-contre schématise un étau constitué de trois pièces :

- un mors fixe (S_1) lié à un support (S_0) auquel est attaché un repère galiléen $R(0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$
- un mord mobile (S_2) en liaison glissière L_1 de direction \bar{x} avec le mors fixe (S_1)
- une vis (S_3) en liaison pivot L_2 d'axe (O, \bar{x}) avec (S_2) et en liaison hélicoïdale L_3 d'axe (O, \bar{x}) avec (S_1).

A : l'étau ne serre aucune pièce.

1°) - Tracer le graphe des liaisons

2°) - Déterminer le degré d'hyperstatisme de l'étau.

3°) - Dans une construction isostatique de l'étau conservant la liaison pivot et la liaison glissière, quelle est la forme du torseur d'action mécanique transmissible de la liaison L_2 ? Proposer un schéma cinématique pour sa réalisation.

B : l'étau serre une pièce

L'étau serre une pièce (S_4) ayant la forme d'un parallélépipède rectangle ; les liaisons planes L_4 et L_5 entre la pièce et les mors sont de normale \bar{x} (figure 6 ci-dessous). La liaison L_3 à considérer est celle déterminée à la question précédente.

1°) - Tracer le graphe des liaisons du nouveau mécanisme

2°) - Déterminer le degré d'hyperstatisme du système étau-pièce. (on pourra faire usage de la formule de mobilité $h = m + 6\gamma - I_c$, liant le degré d'hyperstatisme h , le degré de mobilité m , le nombre de cycles indépendants γ et le nombre d'inconnues cinématiques I_c du mécanisme).

3°) - on veut que le contact entre les pièces et les mors soit prépondérant ; quels jeux peut-on introduire dans la liaison glissière ?

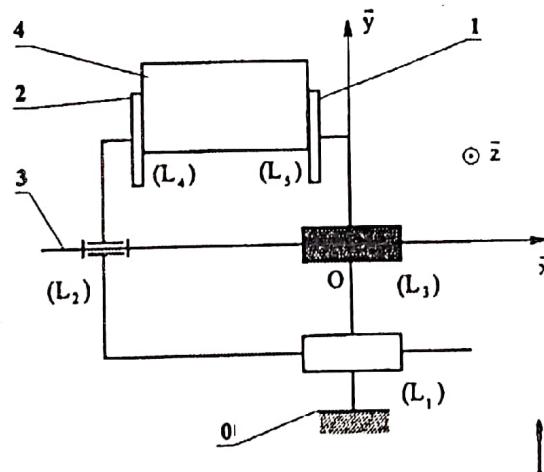


Figure 6

N.B. : l'objectif de cette étude est de localiser les inconnues hyperstatiques du mécanisme, afin d'en modifier la conception, et non de les calculer ; il est donc inutile de définir les actions mécaniques extérieures au mécanisme.

ANNEXE 2 : ELEMENTS DE CALCUL VECTORIEL

Objectifs pédagogiques :

- se remémorer des notions fondamentales sur les vecteurs
- Maîtriser les lois ou règles principales de leur manipulation

INTRODUCTION

La plupart des grandeurs physiques utilisées par l'ingénieur sont des grandeurs réelles variant avec la position où les coordonnées d'espace (on parle de **champ scalaire**, exemple le champ des pressions dans un fluide qui varie avec la profondeur), d'autres sont des grandeurs vectorielles dépendant de la position (on parle de **champ vectoriel**, exemple le champ des accélérations de la pesanteur qui varie avec l'altitude).

Il est toutefois reconnu que, lorsqu'elles sont représentées par des vecteurs plusieurs grandeurs physiques (position $\vec{r}^i(P)$, vitesse $\vec{V}_k^i(P)$, accélération $\vec{\Gamma}_c(P)$, force $\vec{A}_{p,1/2}$, etc.), peuvent être plus facilement manipulées ; pour certaines d'autres (moment $\vec{m}_{1,p}$, contraintes $\vec{\tau}_{1,p}$, etc.), leur effet n'est entièrement défini que si on en connaît au moins le point d'application, la direction, le sens et le module.

L'objectif de ce chapitre est de doter l'apprenant d'éléments fondamentaux lui permettant de définir les grandeurs vectorielles que l'ingénieur utilise fréquemment dans ses travaux et d'en maîtriser la manipulation, et d'introduire, à son intention, un type particulier d'association de vecteurs dont l'usage est fréquent en mécanique, et plus particulièrement en statique.

}

I - ESPACES VECTORIEL ET AFFINE

a) Espace vectoriel

On appelle **espace vectoriel** E **sur un corps** commutatif K, un ensemble **non vide** qui satisfait aux conditions ci-après:

1. E est un groupe commutatif pour une loi de composition interne, notée +, et désignée par "**addition vectorielle**".
2. $\forall(\alpha,\beta) \in K^2, \forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2$:

$$\begin{aligned}\alpha(\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \\ (\alpha + \beta)\vec{v} &= \alpha\vec{v} + \beta\vec{v} \\ \alpha(\beta\vec{v}) &= (\alpha\beta)\vec{v}\end{aligned}$$

1. $\vec{v} = \vec{v}$

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés vecteurs

On appelle espace vectoriel euclidien, tout espace vectoriel dans lequel est défini un produit scalaire noté " \cdot "

La base d'un espace vectoriel E désigne tout système (B) de n vecteurs \vec{e}_i de E, tous linéairement indépendants, et permettant d'exprimer tout vecteur \vec{V} de E sous la forme :

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i.$$

Si tel est bien le cas, « n » est la dimension du dit espace vectoriel.

Les coefficients x_i sont les composantes du vecteur \vec{V} dans la base B($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots$)

La base est dite orthonormée si $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker ; Il vaut zéro dans tous les cas autres que celui où $i = j$. Dans ce dernier cas, il vaut un.

b) Espace affine

On appelle espace affine associé à un espace vectoriel E, un ensemble d'éléments M_i appelés points tel que, à tout couple ordonné (M_1, M_2) de points, on puisse faire correspondre un vecteur de E, noté $\overrightarrow{M_1 M_2}$. On dit qu'un espace affine est un espace métrique, lorsqu'il est associé à un espace vectoriel euclidien.

On définit un repère pour l'espace affine \mathcal{E} en choisissant un élément quelconque 0 de \mathcal{E} comme origine, et en lui associant une base de l'espace vectoriel E. On note alors ce repère : R ($O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots$).

Au couple ordonné (O, M) , où M est un élément quelconque de \mathcal{E} , on fait alors correspondre un vecteur \overrightarrow{OM} de E. \overrightarrow{OM} est appelé vecteur position ou rayon vecteur du point M dans le repère (R) de l'espace affine \mathcal{E} .

En exprimant le vecteur position de M sous la forme $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$, on désigne par coordonnées du point M dans le repère R ($O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots$), les composantes x_i du vecteur

position de M dans la base $B(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots)$ associée à ce repère. D'autre part on a les propriétés suivantes:

- * $\overrightarrow{M_1 M_2} = -\overrightarrow{M_2 M_1} \quad \forall (M_1, M_2) \in \mathcal{E}^2$.
- * $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{M_1 N} + \overrightarrow{N M_2} \quad \forall (M_1, M_2, N) \in \mathcal{E}$ (relation de Chasles ou du point intermédiaire)
- * $\forall (O, \vec{V}) \in \mathcal{E} \times E, \exists ! M \text{ tel que } \overrightarrow{OM} = \vec{V}$

c) Autres définitions

Les scalaires sont des éléments d'un corps commutatif (puisque l'on est dans le monde physique, le monde réel, ce corps sera l'ensemble IR des réels) ; ils seront soit négatifs, soit nuls, soit positifs, et on les utilisera pour estimer les quantités diverses : longueur, volume, masse, énergie, température, intensité, charge, etc.

Un vecteur est une grandeur définie par une direction, un sens et un module (ou intensité). Un représentant de ce vecteur est en plus défini par son point d'application.

La direction ou support d'un vecteur est la droite affine qui le porte ; c'est le support de ce vecteur. Elle est généralement définie par l'écart angulaire θ mesuré entre ce support et un axe de référence. On parle aussi de ligne d'action du vecteur.

L'intensité norme ou module d'un vecteur représente la valeur de la grandeur mesurée par ce vecteur. Elle sera donc souvent accompagnée d'une unité.

Le sens d'un vecteur est son orientation (origine -- extrémité) ; il est symbolisé par une flèche.

Le point d'application d'un vecteur est le point géométrique, fixe, qui sert d'origine à un représentant de ce vecteur.

On appelle vecteur lié ou pointeur, un vecteur ayant un point d'application fixe. Lorsque le point d'application est susceptible de se déplacer (glisser) sur un support imposé, le vecteur est appelé vecteur glissant ou glisseur. On dira qu'un vecteur est libre si son point d'application est susceptible de se déplacer dans l'espace tout entier.

Remarques :

- * Un vecteur libre est un élément de la classe d'équivalence des vecteurs égaux à une équipollence près.
- * Un vecteur glissant représente des vecteurs égaux à un glissement près sur le support.
- * Un vecteur lié est caractérisé par son origine et son extrémité qui sont fixes, bien localisées dans l'espace

II - OPERATIONS COURAMMENT EFFECTUES SUR LES VECTEURS

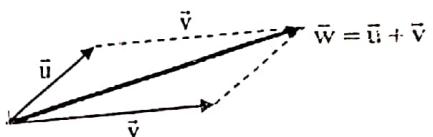
a) Addition de deux vecteurs

Définition

Deux vecteurs, représentant des grandeurs de même nature, peuvent être additionnés pour former un troisième vecteur, de même nature, appelé vecteur-somme.

Interprétation géométrique :

Le vecteur somme est la diagonale principale du parallélogramme construit par les deux vecteurs



Il s'ensuit évidemment que la somme de deux vecteurs colinéaires leur est encore colinéaire.

Formule (expression) de détermination:

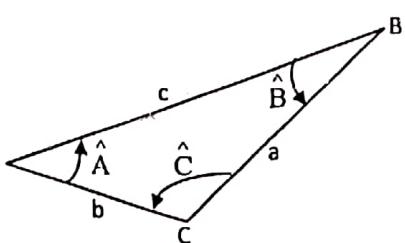
Si dans une base orthonormée $\bar{u}(u_1, u_2, u_3)$ et $\bar{v}(v_1, v_2, v_3)$, alors :

$$\bar{u} + \bar{v} = \bar{w}(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Remarques :

- On a la propriété de différentiation : $d(\bar{u} + \bar{v}) = d\bar{u} + d\bar{v}$
- Soustraire un vecteur à un autre, c'est additionner son opposé à ce dernier
- Le vecteur somme est aussi appelé "résultante géométrique" ; mais dans le cas particulier de l'addition des vecteurs forces, on parle tout simplement de "résultante"

Formules utiles pour l'addition des vecteurs:



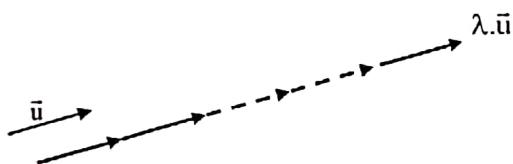
- Loi du sinus : $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$
- Relation trigonométrique dans un triangle quelconque : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

b) Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Définition

Multiplier un vecteur par un scalaire, c'est additionner ce vecteur par lui-même autant de fois. Si le scalaire est négatif, le résultat est suivi par un changement de sens.

Interprétation géométrique : La multiplication d'un vecteur par un scalaire est la reproduction de ce vecteur autant de fois (dans le sens contraire si le scalaire est < 0)



Il s'ensuit évidemment que la somme de deux vecteurs colinéaires leur est encore colinéaire.

Formule (expression) de détermination:

Si dans une base orthonormée $\bar{u}(u_1, u_2, u_3)$, alors : $\lambda.\bar{u}(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$

Remarques :

- On a la propriété de différentiation : $d(\lambda\bar{u}) = \lambda d\bar{u}$
- La multiplication d'un vecteur par un scalaire donne un vecteur de même nature, ayant la même direction, le même sens (si le scalaire est positif) ou de sens opposé (si le scalaire est négatif) et dont le module est multiplié par la valeur absolue de ce scalaire.
- Il s'en suit que la multiplication d'un vecteur par zéro donne le vecteur nul

c) Produit scalaire de deux vecteurs

Définition :

Le produit scalaire de deux éléments \bar{u} et \bar{v} de E est le scalaire noté $\bar{u} \bullet \bar{v}$ tel que :

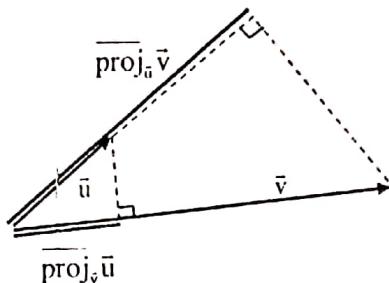
$$\boxed{\bar{u} \bullet \bar{v} = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \cos(\bar{u}, \bar{v})},$$

lorsqu'on note (\bar{u}, \bar{v}) la mesure algébrique (donc affectée d'un signe + lorsqu'effectué dans le sens trigonométrique, et négatif dans le sens contraire) de l'angle de la rotation qui permet de passer de \bar{u} à \bar{v} .

Interprétation géométrique :

Sachant que $\|\bar{v}\| \cos(\bar{u}, \bar{v})$ est la projection (orthogonale) de \bar{v} sur \bar{u} et $\|\bar{u}\| \cos(\bar{u}, \bar{v})$ que est la projection de \bar{u} sur \bar{v} , on peut encore écrire que :

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \|\bar{u}\| \overline{\text{proj}}_{\bar{u}} \bar{v} = \|\bar{v}\| \overline{\text{proj}}_{\bar{v}} \bar{u}$$



Formule (expression) de détermination:

Si dans une base orthonormée $\bar{u}(u_1, u_2, u_3)$ et $\bar{v}(v_1, v_2, v_3)$, alors : $\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

Remarque :

- On a la propriété de différentiation : $d(\bar{u} \cdot \bar{v}) = \bar{u} \cdot d\bar{v} + \bar{v} \cdot d\bar{u}$
- Deux vecteurs orthogonaux faisant un angle $(\bar{u}, \bar{v}) = \pi/2$ entre eux, il s'ensuit évidemment que leur produit scalaire est nul (puisque $\cos \pi/2 = 0$).

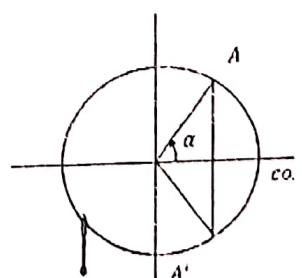
Application:

Sur un cercle trigonométrique, on considère un point A correspondant à l'angle a , et son symétrique A' par rapport à l'axe des cosinus. Au point A' correspond évidemment l'angle $-a$. Puisque le segment $[AA']$ est perpendiculaire à l'axe des cosinus (dirigé par le vecteur \vec{e}_x), on a $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{e}_x = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Or } \overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = [\cos(-a)\vec{e}_x + \sin(-a)\vec{e}_y] - [\cos(a)\vec{e}_x + \sin(a)\vec{e}_y] \\ &= [\cos(-a) - \cos(a)]\vec{e}_x + [\sin(-a) - \sin(a)]\vec{e}_y \end{aligned}$$

Et alors, de $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{e}_x = 0$ on tire $[\cos(-a) - \cos(a)] = 0$

Soit la relation trigonométrique bien connue : $\cos(-a) = \cos(a)$.



d) Produit vectoriel de deux vecteurs

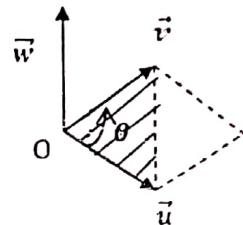
Définition :

Pour deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , pris dans cet ordre c'est le vecteur noté $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que, avec un vecteur unitaire \vec{k} permettant au trièdre $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ d'être direct (règle du tire-bouchon, règle du bonhomme d'Ampère, ou règle des trois doigts de la main droite) :

$$\boxed{\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{k}} \quad \text{où l'angle de rotation } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est toujours pris en valeur algébrique par rapport au sens trigonométrique.}$$

Interprétation géométrique :

Du fait que $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ où θ est le plus petit angle entre les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on déduit que le module de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ représente ainsi l'aire du parallélogramme défini par \vec{u} et \vec{v} , c.à.d. le double de l'aire du triangle construit sur \vec{u} et \vec{v} .



Formule (expression) de détermination:

Si dans un repère orthonormé $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, alors $\vec{w}(w_1, w_2, w_3)$ avec :

$$w_1 = v_3 u_2 - u_3 v_2, \quad w_2 = v_1 u_3 - u_1 v_3 \text{ et } w_3 = v_2 u_1 - u_2 v_1$$

c.à.d. que :
$$\boxed{\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}$$

Remarque:

- On a la propriété de différentiation : $d(\vec{u} \wedge \vec{v}) = d\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge d\vec{v}$
- Deux vecteurs parallèles entre eux ont un produit vectoriel nul du fait que $\sin(k\pi) = 0$

Application :

Pour les points A et A' du cercle trigonométrique considéré plus haut, en exprimant le fait que le point P, milieu du segment [A A'] appartient à l'axe des cosinus dirigé par \vec{e}_x , c.à.d. que le vecteur \overrightarrow{OP} est parallèle à l'axe des cosinus, on a

$$\vec{0} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{e}_x = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ OP_x & OP_y & OP_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -OP_y \cdot \vec{e}_x, \text{ c.à.d. } \frac{1}{2} [\sin(-\alpha) + \sin(\alpha)] = OP_y = 0. \text{ D'où l'on tire la relation bien connue : } \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

d) Produit mixte de trois vecteurs

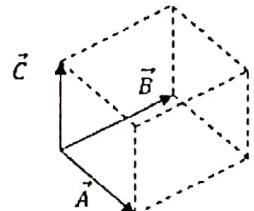
Définition :

Le produit mixte de trois vecteurs \vec{A}, \vec{B} et \vec{C} , pris dans cet ordre, est le scalaire :

$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C})$$

Interprétation géométrique :

Le produit mixte définit, en module, la capacité (volume) du parallélépipède construit sur les trois vecteurs considérés



Formule (expression) de détermination:

Si dans une base orthonormée : $\vec{A}(A_1, A_2, A_3)$, $\vec{B}(B_1, B_2, B_3)$ et $\vec{C}(C_1, C_2, C_3)$, on montre alors que le produit mixte est obtenu grâce au déterminant suivant :

$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

Remarques:

- Si trois vecteurs sont coplanaires, leur produit mixte est nul, du fait que le volume qu'ils définissent soit nul

- On montre que $\vec{A} \bullet (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) \bullet \vec{C}$; il s'en suit une possibilité de permutation circulaire des vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$; d'où la notation conventionnelle $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$. On a donc :

$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (\vec{C}, \vec{A}, \vec{B}) = (\vec{B}, \vec{C}, \vec{A})$$

- On a aussi la propriété de différentiation :

$$d(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = (d\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) + (\vec{A}, d\vec{B}, \vec{C}) + (\vec{A}, \vec{B}, d\vec{C})$$

c) Double Produit vectoriel

Définition :

Le double produit vectoriel de trois vecteurs \vec{A}, \vec{B} et \vec{C} pris dans cet ordre, c'est la grandeur vectorielle : $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$.

Remarque:

On montre que: $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \bullet \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \bullet \vec{B})$

d) Quelques applications en Mécanique :

f-I) Les composantes d'un vecteur dans une base

* **Définition :**

Dans la base orthonormée (B) constituée de n vecteurs \vec{e}_i de E, les composantes d'un vecteur quelconque \vec{V} sont les scalaires x_i tels que $\vec{V} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$. Ce sont les projections, sur les axes de base $\Delta_i(O, \vec{e}_i)$, $i = 1, n$. On peut alors écrire, par définition du produit scalaire : $\vec{V} \bullet \vec{e}_i = \|\vec{e}_i\| \times \overline{\text{proj}}_{\vec{e}_i} \vec{V}$, d'où l'on tire que $x_i = \overline{\text{proj}}_{\vec{e}_i} \vec{V} = \vec{V} \bullet \vec{e}_i$. Ainsi, les composantes d'un vecteur dans une base orthonormée directe sont les produits scalaires respectifs de ce vecteur par les vecteurs de la base.

D'autre part, $\vec{V} \bullet \vec{e}_i = \|\vec{V}\| \bullet \|\vec{e}_i\| \times \cos(\vec{V}, \vec{e}_i)$, c.à.d. $\cos(\vec{V}, \vec{e}_i) = \frac{\vec{V} \bullet \vec{e}_i}{\|\vec{V}\| \bullet \|\vec{e}_i\|} = \frac{\vec{V} \bullet \vec{e}_i}{\|\vec{V}\|} \bullet \vec{e}_i = \vec{u} \bullet \vec{e}_i$ où

\vec{u} est le vecteur unitaire de même direction et même sens que \vec{V} . Ainsi, si on désigne par $0_x = (\vec{V}, \vec{e}_x)$, $0_y = (\vec{V}, \vec{e}_y)$ et $0_z = (\vec{V}, \vec{e}_z)$ les angles respectivement faits par le vecteur \vec{V} avec les axes (O, \vec{e}_i) , $i = 1, 3$ on appelle cosinus directeur du vecteur \vec{V} dans la base B(\vec{e}_i), les scalaires $\alpha = \cos 0_x$, $\beta = \cos 0_y$, $\gamma = \cos 0_z$. Ces trois scalaires vérifient : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

* **Décomposition d'un vecteur :**

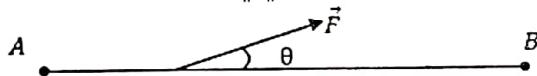
C'est l'opération inverse de la sommation (ou composition) de n vecteurs. Si le vecteur \vec{V} est projeté sur des axes $\Delta_i(\vec{e}_i)$, $i = 1, n$ linéairement indépendants d'un espace vectoriel de dimension n , on sait que $\vec{V} = \sum_{i=1}^n (\vec{V} \bullet \vec{e}_i) \vec{e}_i$ car $\vec{V} \bullet \vec{e}_i = \text{proj}_{\vec{e}_i} \vec{V}$; le vecteur \vec{V} est ainsi la somme de n vecteurs $\vec{V}_i = (\vec{V} \bullet \vec{e}_i) \vec{e}_i$. On dit alors qu'on a décomposé \vec{V} en n vecteurs; les \vec{V}_i sont appelés les différentes composantes du vecteur \vec{V} dans les directions $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Le cas très particulier où $(\vec{e}_i)_{i=1,n}$ est une base orthonormée de E , est bien connu.

2) Le travail d'une force \vec{F} sur un déplacement élémentaire \vec{dl}

Le travail d'une force \vec{F} sur un déplacement élémentaire \vec{dl} est le produit scalaire $\delta W = \vec{F} \bullet \vec{dl}$ de cette force par le déplacement.

Si la force garde un angle constant θ avec la direction du déplacement (de longueur totale L), le travail effectué par la force est $W = \|\vec{F}\|L \cos\theta$.



Ceci exprime le fait que seule la composante $F \cos\theta$ de la force dans la direction du déplacement effectue le travail. La composante ($F \sin\theta$) perpendiculaire au déplacement n'effectue aucun travail.

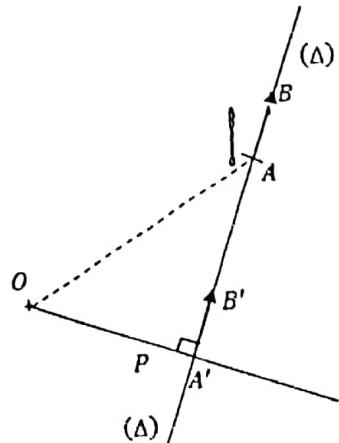
f-3) Le moment d'un vecteur \overrightarrow{AB} lié en A

Soit un vecteur de représentant \overrightarrow{AB} (origine A et extrémité B); le moment de \overrightarrow{AB} , par rapport à un point quelconque O de l'espace affine est, par définition, la grandeur vectorielle: $\vec{m}_O \overrightarrow{AB} = \vec{m}(\overrightarrow{AB}, O) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$

Remarque: le moment d'un vecteur glissant par rapport à un point est indépendant de la position du vecteur sur son support.

En effet, soit P le projeté (orthogonal) de O sur la droite (Δ) engendrée par \overrightarrow{AB} . (Δ) est dit être le support du glisseur \overrightarrow{AB} . (Δ) est par ailleurs appelé droite ou ligne d'action du vecteur \overrightarrow{AB}

On a alors:



$$\begin{aligned}
 \vec{m}_o \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) \wedge \overrightarrow{AB} \\
 &= \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{AB} \\
 &= \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB} \\
 &= \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{AB}.
 \end{aligned}$$

(\overrightarrow{OP} est le bras de levier du vecteur glissant \overrightarrow{AB} , par rapport à O).

f-4) moment d'un vecteur \overrightarrow{AB} par rapport à un axe (Δ) orienté par un vecteur

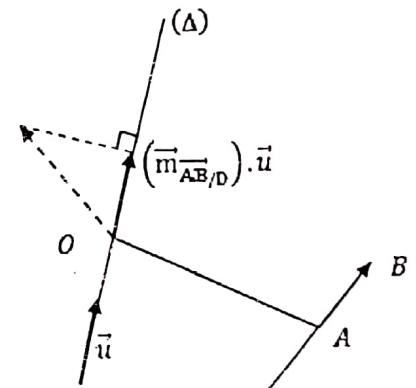
On définit le moment d'un vecteur \overrightarrow{AB} par rapport à un axe (Δ)

orienté par un vecteur \vec{u} comme étant le scalaire $\vec{m}_{\Delta, O} \overrightarrow{AB}$
représentant la projection, sur (Δ) , du moment

de \overrightarrow{AB} par rapport à un point quelconque O de (Δ) :

$$\vec{m}_{\Delta(O, \vec{u})} \overrightarrow{AB} = \text{proj}_{(\Delta)} \vec{m}_O(\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \vec{u})$$

c'est un scalaire représentant le produit mixte $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \vec{u})$



f-5) La distance d'un point P par rapport à une droite

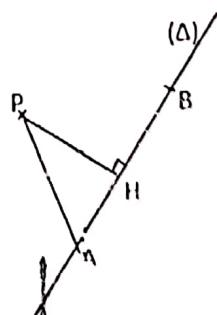
$$d = d(P/(\Delta)) = \|\overrightarrow{PH}\|.$$

Si on connaît deux points A et B de la droite (Δ) ,

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AP}\| \cdot |\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP})|$$

En considérant le triangle API d'hypoténuse AP, on peut écrire

$$\|\overrightarrow{PH}\| = \|\overrightarrow{AP}\| \cdot |\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP})|$$



$$\text{D'où alors : } d = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

Ainsi, produit vectoriel et produit scalaire interviennent dans la détermination de la distance d'un point par rapport à une droite.

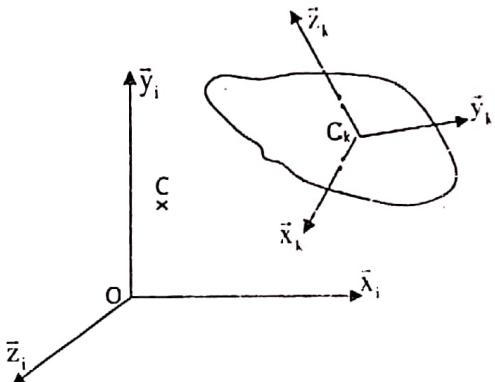
ANNEXE 3 : CALCUL DU MOMENT CINETIQUE D'UN SOLIDE

Soient $R_i(O, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ un référentiel galiléen et $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ un référentiel lié au solide (S) . Le moment cinétique élémentaire, du point courant $M \in (S)$ de vitesse \vec{V}_M et entouré d'une masse infinitésimale dm , en un point quelconque C est donné par : $d\vec{\sigma}_C = \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}_M^i dm$.

Pour tout le solide on aura : $\vec{\sigma}_C = \int_{M \in (S)} \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}_M^i dm$;

avec $\vec{V}_M = \vec{V}_{O_k} + \overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k$ on aura :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_C &= \int_{(S)} \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}_{O_k} dm + \int_{(S)} \overrightarrow{CM} \wedge (\overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i) dm, \\ &= \int_{(S)} \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}_{O_k} dm + \int_{(S)} (\overrightarrow{CO_k} + \overrightarrow{O_k M}) \wedge (\overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i) dm \\ &= \int_{(S)} \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}_{O_k} dm + \int_{(S)} \overrightarrow{CO_k} \wedge (\overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i) dm + \int_{(S)} \overrightarrow{O_k M} \wedge (\overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i) dm \end{aligned}$$



On explicite les trois intégrales :

$$\vec{I}_1 = \int_{(S)} \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}_{O_k} dm = \left(\int_{(S)} \overrightarrow{CM} dm \right) \wedge \vec{V}_{O_k} = m \overrightarrow{CG} \wedge \vec{V}_{O_k} \quad \rightarrow \vec{I}_1 = m \overrightarrow{CG} \wedge \vec{V}_{O_k}$$

$$\vec{I}_2 = \int_{M \in (S)} \overrightarrow{CO_k} \wedge (\overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i) dm = \int_{(S)} \overrightarrow{CO_k} \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M}) dm = \overrightarrow{CO_k} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \int_{(S)} \overrightarrow{O_k M} dm \right)$$

$$\overrightarrow{CO_k} \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge m \overrightarrow{O_k G}) \rightarrow \vec{I}_2 = m \overrightarrow{CO_k} \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k G})$$

$$\vec{I}_3 = \int_{(S)} \overrightarrow{O_k M} \wedge (\overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i) dm = \int_{(S)} \overrightarrow{O_k M} \wedge (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M}) dm$$

$$\rightarrow \vec{I}_3 = \int_{(S)} \left[\vec{\Omega}_k^i (\overrightarrow{O_k M})^2 - \overrightarrow{O_k M} (\overrightarrow{O_k M} \cdot \vec{\Omega}_k^i) \right] dm$$

$$= \int_{(S)} (\overrightarrow{O_k M})^2 \bar{\Omega}_k^i dm - \int_{(S)} (\overrightarrow{O_k M} \cdot \bar{\Omega}_k^i) \overrightarrow{O_k M} dm$$

Si dans (R_k) le point courant M a les coordonnées (x, y, z) et que $\bar{\Omega}_k^i$ a les composantes p, q et r dans la base de (R_k) on a :

$$\overrightarrow{O_k M}^2 \bar{\Omega}_k^i = (x^2 + y^2 + z^2)(p\bar{x}_k + q\bar{y}_k + r\bar{z}_k), \quad \overrightarrow{O_k M} \cdot \bar{\Omega}_k^i = px + qy + rz \text{ et}$$

$$(\overrightarrow{O_k M} \cdot \bar{\Omega}_k^i) \cdot \overrightarrow{O_k M} = (px + qy + rz)(x\bar{x}_k + y\bar{y}_k + z\bar{z}_k). \text{ Alors :}$$

$$\bar{I}_3 = \int_{(S)} [(x^2 + y^2 + z^2)(p\bar{x}_k + q\bar{y}_k + r\bar{z}_k) - (px + qy + rz)(x\bar{x}_k + y\bar{y}_k + z\bar{z}_k)] dm$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_3 &= \left(\int_{(S)} (y^2 + z^2)p dm - q \int_{(S)} xy dm - r \int_{(S)} xz dm \right) \bar{x}_k + \left(\int_{(S)} (x^2 + z^2)q dm - r \int_{(S)} yz dm - p \int_{(S)} xy dm \right) \bar{y}_k \\ &\quad + \left(\int_{(S)} (x^2 + y^2)r dm - p \int_{(S)} xz dm - q \int_{(S)} yz dm \right) \bar{z}_k \end{aligned}$$

$$\text{C'est-à-dire } \bar{I}_3 = (Ap - Fq - Er)\bar{x}_k + (Bq - Dr - Fp)\bar{y}_k + (Cr - Ef - Dq)\bar{z}_k$$

$$= \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}; \text{ soit donc : } \bar{I}_3 = [I]_{O_k, (S)} \cdot [\bar{\Omega}_k^i]$$

La somme des trois intégrales conduit ainsi à :

$$\bar{\sigma}_c = mCG \wedge \vec{V}_{O_k} + mCO_k \wedge (\bar{\Omega}_k^i \wedge O_k G) + [I]_{O_k, (S)} [\bar{\Omega}_k^i]$$

Remarques :

Il s'agit ici d'examiner le moment cinétique dans certains cas particuliers des plus fréquents

(1) – Cas où O_k est confondu avec G :

$$\overrightarrow{O_k G} = \vec{0} \rightarrow \bar{\sigma}_c = [I]_{G, (S)} [\bar{\Omega}_k^i] + \overrightarrow{CG} \wedge m\vec{V}_G$$

Soit encore :

$$\bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}_G + \overrightarrow{CG} \wedge m\vec{V}_G;$$

C'est le théorème de Koenig pour le moment cinétique.

(2) – Cas où O_k est fixe et confondu avec G

$$\bar{\sigma}_C = [I]_{G,(S)} \left[\bar{\Omega}_k^i \right]$$

(3) – Cas où C est confondu avec O_k et G

$$\bar{\sigma}_C = [I]_{G,(S)} \left[\bar{\Omega}_k^i \right]$$

ANNEXE 4 : CALCUL DE L'ENERGIE CINETIQUE D'UN SOLIDE

Soient $R_i(O_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ un référentiel quelconque et $R_k(O_k, \bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ un référentiel lié au solide (S) :

Pour le point courant $M \in (S)$: $dE_C = \frac{1}{2} \vec{V}_M \cdot (\vec{V}_M dm)$ pour le point courant $M \in (S)$.

$$\Rightarrow 2E_C = \int_{(S)} \vec{V}_M \cdot (\vec{V}_M dm)$$

or $\vec{V}_M = \vec{V}_{O_0} + \overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i$ (Formule Fondamentale de la Cinématique du Solide)

$$\Rightarrow \vec{V}_M \cdot \vec{V}_M = (\vec{V}_{O_0} + \overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i) \wedge (\vec{V}_{O_0} + \overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i)$$

$$= (\vec{V}_{O_k})^2 + 2\vec{V}_{O_k} \cdot (\overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i) + (\overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i)^2$$

$$2E_C = \int_{(S)} (\vec{V}_{O_k})^2 dm + 2 \int_{(S)} \vec{V}_{O_k} \cdot (\overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i) dm + \int_{(S)} (\overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i)^2 dm$$

On explicite les trois intégrales :

$$I_1 = \int_{M \in (S)} (\vec{V}_{O_k})^2 dm = (\vec{V}_{O_k})^2 \int_{M \in (S)} dm = m (\vec{V}_{O_k})^2 = I_1$$

$$I_2 = 2 \int_{(S)} \vec{V}_{O_k} \cdot (\overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i) dm = 2 \int_{(S)} \vec{V}_{O_k} \cdot (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M}) dm = 2 \vec{V}_{O_k} \cdot \int_{(S)} (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M}) dm$$

$$= 2 \vec{V}_{O_k} \cdot \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \int_{(S)} \overrightarrow{O_k M} dm \right) = 2 \vec{V}_{O_k} \cdot \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge m \cdot \overrightarrow{O_k G} \right) ; \text{ C'est dire } I_2 = 2m \vec{V}_{O_k} \cdot (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k G})$$

$$I_3 = \int_{(S)} (\overrightarrow{MO_k} \wedge \vec{\Omega}_k^i)^2 dm = \int_{(S)} (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M})^2 dm$$

Si on pose $\overrightarrow{O_k M} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{(R_k)}$ et $\vec{\Omega}_k^i = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{(R_k)}$; on aura :

$$\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} = \begin{vmatrix} \bar{x}_k & \bar{y}_k & \bar{z}_k \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} qz - ry \\ rx - pz \\ py - qx \end{bmatrix}_{(R_k)} ; \text{ et donc :}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M})^2 &= (qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2 \\
&= p^2(y^2 + z^2) + q^2(x^2 + z^2) + r^2(x^2 + y^2) - 2pqxy - 2qrzy - 2rpxz \\
\rightarrow I_3 &= p^2 \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm + q^2 \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm + r^2 \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm \\
&\quad - 2pq \int_{(S)} xy dm - 2qr \int_{(S)} yz dm - 2rp \int_{(S)} xz dm \\
&= Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Epr - 2Fpq
\end{aligned}$$

Ainsi, $I_3 = [\vec{\Omega}_k^i] \cdot ([I]_{O_k, S} \cdot [\vec{\Omega}_k^i])$ où $[I]_{O_k, (S)}$ est la matrice d'inertie en O_k du solide (S) .

Il vient donc finalement :

$$E_C = \frac{1}{2} m (\vec{V}_{O_k})^2 + m \vec{V}_{O_k} \cdot (\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k G}) + \frac{1}{2} [\vec{\Omega}_k^i] ([I]_{O_k, (S)} \cdot [\vec{\Omega}_k^i])$$

C'est l'expression de l'énergie cinétique, dans le cas le plus général, pour un solide (S) de masse m , lié à un référentiel $R_k(O, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ de centre d'inertie G et de matrice d'inertie en O_k , $[I]_{O_k, (S)}$.

Remarques :

Il s'agit ici d'examiner l'expression de l'énergie cinétique dans les cas particuliers suivants :

(1) - Cas où le solide (S) est en translation dans (R_i)

Dans ce cas : $\vec{\Omega}_k^i = \vec{0}$ et $\forall M \in (S)$, $\vec{V}_M = \vec{V}_G$, donc $\vec{v}_{O_k} = \vec{V}_G$. On a alors :

$$E_C = \frac{1}{2} m (\vec{V}_G)^2;$$

C'est une expression déjà rencontrée depuis le secondaire

(2) - Cas où le solide (S) effectue une rotation autour d'un point fixe O_k .

Considérer $\vec{V}_{O_k} = \vec{0}$ entraîne directement :

$$E_C = \frac{1}{2} [\vec{\Omega}_k^i] \cdot ([I]_{O_k, S} \cdot [\vec{\Omega}_k^i])$$

(3) - Cas où le solide (S) effectue une rotation autour de l'axe $\vec{z}_i = \vec{z}_k$

On a donc : $\vec{\Omega}_k^i = \omega \vec{z}_k$ et avec O_k appartenant à l'axe de rotation, $\vec{V}_{O_k} = \vec{0}$. Il vient ainsi :

$$E_C = \frac{1}{2} [\bar{\Omega}_k^i] \cdot ([I]_{O_k, S} \cdot [\bar{\Omega}_k^i])$$

Par ailleurs, $[I]_{O_k, S} \cdot [\bar{\Omega}_k^i] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E\omega \\ -D\omega \\ C\omega \end{bmatrix}$; alors :

$$[\bar{\Omega}_k^i] \cdot ([I]_{O_k, S} \cdot [\bar{\Omega}_k^i]) = [0 \ 0 \ \omega] \cdot \begin{bmatrix} -E\omega \\ -D\omega \\ C\omega \end{bmatrix} = C\omega^2 ; \text{ Où } C = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = I_{(O_k, z_k)} \text{ moment}$$

d'inertie de (S) par rapport à l'axe (O_k, \bar{z}_k) . Il vient finalement :

$$E_C = \frac{1}{2} I_{(O_k, z_k)} \cdot \omega^2$$

où ω est la vitesse angulaire du solide autour de l'axe (O_k, \bar{z}_k) .

(4) - Cas où le point O_k est le centre de gravité du solide (S) : $\overrightarrow{O_k G} = \vec{0}$

Et donc : $E_C = \frac{1}{2} m (\bar{V}_{O_k})^2 + m \bar{V}_{O_k} \cdot (\bar{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k G}) + \frac{1}{2} [\bar{\Omega}_k^i] ([I]_{O_k, (S)} \cdot [\bar{\Omega}_k^i])$ conduit à :

$$E_C = \frac{1}{2} m (\bar{V}_G)^2 + \frac{1}{2} [\bar{\Omega}_k^i] ([I]_{G, S} \cdot [\bar{\Omega}_k^i])$$

On retrouve encore le théorème de Koenig pour l'énergie cinétique ; Dans cette expression, $[I]_{G, (S)}$ est la matrice centrale d'inertie de (S) au point G.

Nota : le théorème de Koenig ci-dessus est d'un emploi très fréquent dans le calcul de l'énergie cinétique d'un solide.

ANNEXE 5 : OPERATEUR D'INERTIE D'UN SOLIDE

I - DEFINITION ET MATRICE DE L'OPERATEUR D'INERTIE EN UN POINT

a) Définition de l'opérateur d'inertie en un point

On appelle opérateur d'inertie en un point O du solide(S), l'application linéaire :

$$E \rightarrow E$$
$$\vec{W} \mapsto \int_{M \in (S)} OM \wedge (\vec{W} \wedge OM) dm$$

b) Matrice de l'opérateur d'inertie en un point

C'est la matrice $[I]_{O,(S)}$ telle que l'image que donne cet opérateur d'un vecteur \vec{W} , soit obtenue en faisant le produit de $[I]_{O,(S)}$ par le tableau des composantes de \vec{W} ; c'est-à-dire telle que : $\forall \vec{W}, \int_{M \in (S)} OM \wedge (\vec{W} \wedge OM) dm = [I]_{O,(S)} \cdot [\vec{W}]$ où $[\vec{W}]$ est le tableau unicolonne constitué par des composantes du vecteur \vec{W} .

On la détermine de la manière suivante :

Soit le repère $R_k(O, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ lié à (S); un point courant M du solide y a pour coordonnées (x, y, z) et soient $\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$ les composantes de \vec{W} dans ce repère. On a :

$$OM \wedge (\vec{W} \wedge OM) = \vec{W}(OM \cdot OM) - OM(OM \cdot \vec{W})$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2) \times \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} - (xp + yq + zr) \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} (x^2 + y^2 + z^2)p \\ (x^2 + y^2 + z^2)q \\ (x^2 + y^2 + z^2)r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^2p + yxq + zxq \\ xyq + y^2q + yzr \\ xzp + yzq + z^2r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y^2 + z^2)p - xyq - xzr \\ -xyq + (x^2 + z^2)q - yzr \\ -xzp - yzq + (x^2 + y^2)r \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\
\text{Ainsi : } O\vec{M} \wedge (\vec{W} \wedge O\vec{M}) dm &= \begin{bmatrix} (y^2 + z^2)dm & -xydm & -xzdm \\ -xydm & (x^2 + z^2)dm & -yzdm \\ -xzdm & -yzdm & (x^2 + y^2)dm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\
\text{Et donc : } \int_{M \in (S)} O\vec{M} \wedge (\vec{W} \wedge O\vec{M}) dm &= \begin{bmatrix} \int_{(S)} (y^2 + z^2)dm & \int_{(S)} -xydm & \int_{(S)} -xzdm \\ \int_{(S)} -xydm & \int_{(S)} (x^2 + z^2)dm & \int_{(S)} -yzdm \\ \int_{(S)} -xzdm & \int_{(S)} -yzdm & \int_{(S)} (x^2 + y^2)dm \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Il vient donc que la matrice de l'opérateur d'inertie en un point O du solide (S), définie dans le repère $R_k(O, \bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ lié au solide (S), est :

$$[I]_{O,(S)} = \begin{bmatrix} \int_{(S)} (y^2 + z^2)dm & \int_{(S)} -xydm & \int_{(S)} -xzdm \\ \int_{(S)} -xydm & \int_{(S)} (x^2 + z^2)dm & \int_{(S)} -yzdm \\ \int_{(S)} -xzdm & \int_{(S)} -yzdm & \int_{(S)} (x^2 + y^2)dm \end{bmatrix}$$

Remarques :

(1) - La matrice de l'opérateur d'inertie est souvent appelée **matrice d'inertie**, ou encore **tenseur d'inertie**.

(2) - On accède à cette matrice en écrivant verticalement les composantes des transformées des vecteurs de base par cet opérateur.

(3) - Un cas intéressant à voir plus tard (théorème de Huygens notamment) est celui où le point courant M du solide est figé en G(a, b, c) point fixe.

Alors $x = C^{te} = a$, $y = C^{te} = b$ et $z = C^{te} = c$.

Les termes à intégrer sont alors des constantes qui sortent de l'intégrale et $\int_{(S)} dm = m$ (masse du solide). On peut alors écrire :

$$\int_{(S)} \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{OG}) dm = \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{OG}) \int_{(S)} dm = m \cdot \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{OG}) = m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & c^2 + b^2 \end{bmatrix} [\vec{W}]$$

c) Signification des termes de la matrice d'inertie d'un solide en un point

La matrice $[I]_{O,(S)}$ est une matrice symétrique que l'usage veut que l'on présente sous

la forme :

$$[I]_{O,(S)} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix};$$

Les termes A, B, C, ... portent les appellations suivantes :

$A = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm \equiv$ moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (O, \vec{x}_k) ;

$B = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm \equiv$ moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (O, \vec{y}_k) ;

$C = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm \equiv$ moment d'inertie de (S) par rapport à l'axe (O, \vec{z}_k) ;

$D = \int yz dm \equiv$ produit d'inertie de (S) par rapport au plan $(O, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$;

$E = \int xz dm \equiv$ produit d'inertie de (S) par rapport au plan $(O, \vec{x}_k, \vec{z}_k)$;

$F = \int xy dm \equiv$ produit d'inertie de (S) par rapport au plan $(O, \vec{x}_k, \vec{y}_k)$;

c) Remarques :

(1) - Ces moments et produits d'inertie sont parfois notés :

$$I_{xx} = A = I_{11}; I_{yy} = B = I_{22}; I_{zz} = C = I_{33}; I_{yz} = D = I_{23}; I_{xz} = E = I_{13} \text{ et } I_{xy} = F = I_{12}$$

(2) - $[I]_{O,(S)}$ étant une matrice réelle et symétrique, on démontre en Algèbre qu'elle possède trois valeurs propres réelles distinctes et donc trois directions (vecteurs) propres réelles et orthogonales entre elles.

Les valeurs propres λ de $[I]_{O,(S)}$, solutions de l'équation algébrique $\det([I]_{O,(S)} - \lambda I_{3x3}) = 0$ sont les moments d'inertie principaux; les vecteurs propres associés au point de référence O constituent les axes principaux d'inertie (dirigées selon tout vecteur \vec{u} tel que $[I]_{O,(S)} [\vec{u}] = \lambda [\vec{u}]$); la base orthonormée associée à ces vecteurs propres constitue, avec le point O, un repère principal d'inertie (à ne pas confondre avec un référentiel d'inertie).

Si le point de référence O est pris au centre d'inertie G du solide, on parle d'axes centraux d'inertie et de repère central principal d'inertie.

Rapportée aux axes principaux d'inertie, la matrice d'inertie est diagonale :

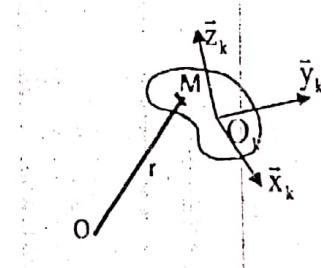
$$[I]_{O,(S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \text{ et le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque dirigé par un vecteur unitaire } \vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \text{ est } I_\Delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2$$

$$\text{vecteur unitaire } \vec{u} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \text{ est } I_\Delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2$$

II - DEFINITION GENERALE DES MOMENTS ET PRODUITS D'INERTIE

a) Moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un point O

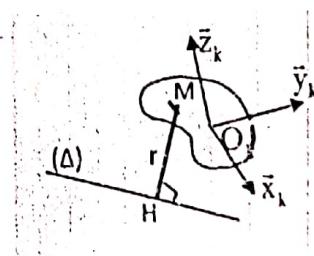
C'est le scalaire $\sigma_{O,(S)}$ tel que $\sigma_{O,(S)} = \int_{M \in (S)} r^2 dm = \int_{M \in (S)} \overline{OM}^2 dm$ où r est la distance du point courant M du solide par rapport au point de référence O.



b) Moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe $\Delta(O, \vec{u})$

Définition :

C'est le scalaire I_Δ tel que $I_\Delta = \int_{M \in (S)} r^2 dm = \int_{M \in (S)} \overline{HM}^2 dm$ où r est la distance du point courant M du solide par rapport à la droite (Δ) .



Détermination :

Soit dans le repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ lié au solide (S), le point courant M(x, y, z) de (S) sur $\Delta(O, \vec{u})$ avec $\vec{u} = \alpha \vec{x}_k + \beta \vec{y}_k + \gamma \vec{z}_k$ unitaire, c.à.d. tel que : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

$$\overline{HM}^2 = \overline{O_k M}^2 - \overline{O_k H}^2 \text{ et } \overline{O_k H} = \overline{O_k M} \cdot \vec{u} = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

$$\Rightarrow \overline{HM}^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 ; \text{ et comme } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 , \text{ on a encore :}$$

$$\begin{aligned}\widehat{HM}^2 &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \\ &= \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(x^2 + z^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}I_{\Delta} &= \alpha^2 \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm + \beta^2 \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm + \gamma^2 \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm - 2\alpha\beta \int_{(S)} xy dm - 2\beta\gamma \int_{(S)} yz dm - 2\gamma\alpha \int_{(S)} zx dm \\ \rightarrow I_{\Delta} &= \alpha^2 A + \beta^2 B + \gamma^2 C - 2\alpha\beta F - 2\beta\gamma D - 2\gamma\alpha E\end{aligned}$$

Qu'on peut écrire sous la forme vectorielle suivante : $I_{\Delta} = [\alpha \quad \beta \quad \gamma] \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$

qui est le produit contracté : $I_{\Delta(O, \vec{u})} = ' \begin{bmatrix} \vec{u} \end{bmatrix} \cdot [I]_{O,(S)} \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \end{bmatrix}$

c) **Produit d'inertie d'un solide (S) par rapport à deux axes $\Delta(O, \vec{u})$ et $\Delta'(O, \vec{u}')$ perpendiculaires**

Définition :

On appelle **Produit d'inertie d'un solide (S) par rapport aux axes perpendiculaires $\Delta(O, \vec{u})$ et $\Delta'(O, \vec{u}')$** , le scalaire :

$$I_{\Delta\Delta'} = \int_{M \in (S)} (\overline{OM} \cdot \vec{u}) \times (\overline{OM} \cdot \vec{u}') dm$$

On parle aussi de **produit d'inertie par rapport au plan $\mathcal{P}(O, \vec{u}, \vec{u}')$** .

Détermination :

Soient dans le repère $R_k(O_k, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ lié au solide (S) :

- le point courant M(x, y, z) de (S),
- les vecteurs $\vec{u} = \alpha \vec{x}_k + \beta \vec{y}_k + \gamma \vec{z}_k$, et $\vec{u}' = \alpha' \vec{x}_k + \beta' \vec{y}_k + \gamma' \vec{z}_k$ unitaires, c.à.d. tels que : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ et $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$, et perpendiculaire, c.à.d. tels que : $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } (\overline{OP} \cdot \vec{u}) \cdot (\overline{OP} \cdot \vec{u}') &= (\alpha x + \beta y + \gamma z)(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z) \\ &= \alpha\alpha' x^2 + \beta\beta' y^2 + \gamma\gamma' z^2 + xy(\alpha\beta' + \beta\alpha') + yz(\beta\gamma' + \gamma\beta') + zx(\alpha\gamma' + \gamma\alpha') \\ \text{et comme : } \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0, \text{ on a} \\ \text{encore : } (\overline{OP} \cdot \vec{u}) \cdot (\overline{OP} \cdot \vec{u}') &= -(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')(x^2 + y^2 + z^2) + \alpha\alpha' x^2 + \beta\beta' y^2 + \gamma\gamma' z^2 + xy(\alpha\beta' + \beta\alpha') \\ &\quad + yz(\beta\gamma' + \gamma\beta') + zx(\alpha\gamma' + \gamma\alpha')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\alpha\alpha'(y^2 + z^2) - \beta\beta'(x^2 + z^2) - \gamma\gamma'(x^2 + y^2) + (\alpha\beta' + \beta\alpha')xy \\
 &\quad + (\beta\gamma' + \gamma\beta')yz + (\gamma\alpha' + \alpha\gamma')zx \\
 \rightarrow I_{\Delta'} &= -\alpha\alpha'A - \beta\beta'B - \gamma\gamma'C + (\alpha\beta' + \beta\alpha')F + (\beta\gamma' + \gamma\beta')D + (\gamma\alpha' + \alpha\gamma')E \\
 \text{Qui se met sous la forme matricielle : } I_{\Delta'} &= -[\alpha' \quad \beta' \quad \gamma'] \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}; \text{ d'où la} \\
 \text{forme contractée : } I_{\Delta(O,\vec{u})\Delta(O,\vec{u}')} &= -[\vec{u}'] \cdot [I]_{O,(S)} \cdot [\vec{u}]
 \end{aligned}$$

Où $[\vec{u}]$ est le tableau unicolonne des composantes de \vec{u} dans (R_k) et $[\vec{u}]'$ le transposée de $[\vec{u}]$, c'est-à-dire le tableau uniligne des composantes de \vec{u} .

d) Remarques :

(1) - Théorème de Huygens

Soit (Δ_G) un axe passant par le centre de masse G de (S) : pour tout axe (Δ) parallèle à (Δ_G) on montre l'égalité :

$$I_{(\Delta)} = I_{(\Delta_G)} + md^2$$

où d est la distance séparant (Δ) et (Δ_G) .

Ce résultat sur lequel on revient plus loin relie le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque à celui par rapport à un axe qui lui est parallèle et qui passe par le centre d'inertie.

(2) - Rayon de giration

Avec la connaissance du moment d'inertie I_{Δ_G} par rapport à un axe contenant le centre d'inertie, on définit le rayon de giration du solide (S) par le scalaire a_0 tel que :

$$I_{(\Delta_G)} = ma_0^2$$

Où m est la masse du solide (S) .

(3) - Ellipsoïde d'inertie

L'ensemble des points P de l'espace tels que $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{\sqrt{I_\Delta}}\vec{u}$ est la quadrique d'équation

cartésienne : $[X \quad Y \quad Z] \cdot [I]_{O,(S)} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = 1$; cette quadrique est généralement une ellipsoïde qu'on dénomme « ellipsoïde d'inertie » du solide (S) relativement au (point de référence) O.

(4) - Ellipsoïde central d'inertie

Si le point de référence pour le calcul du tenseur d'inertie est le centre d'inertie G, la matrice $[I]_{O,(S)}$ est diagonale et l'ellipsoïde précédent porte l'appellation d'**ellipsoïde central d'inertie** dont l'équation est : $AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$.

III - OPERATEUR D'INERTIE D'UN SOLIDE AYANT DES ELEMENTS DE SYMETRIE

a) Le solide admet un plan de symétrie

Supposons que $(O, \vec{x}_k, \vec{y}_k)$ ce plan de symétrie pour le solide. Deux points M et M' symétriques par rapport à ce plan ont des coordonnées M(x,y,z) et M'(x,y,-z). Les produits d'inertie $E = I_{xz} = \int_{(S)} xz dm$ et $F = I_{yz} = \int_{(S)} yz dm$ s'annulent de manière triviale si on associe les points deux à deux symétriques.

On généralise : « les produits d'inertie du solide par rapport aux deux plans perpendiculaires au plan de symétrie sont nuls ».

La matrice d'inertie a donc la forme :

$$[I]_{O,(S)} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \text{ si le plan de symétrie est } (O, \vec{x}_k, \vec{y}_k)$$

b) Le solide admet deux plans de symétrie

Ces deux plans sont forcément perpendiculaires. On choisit alors un repère formé de la droite commune aux deux plans et des axes de ces plans perpendiculaires à cette droite. Dans ce repère, tous les produits d'inertie sont nuls. La matrice d'inertie est une matrice diagonale :

$$[I] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

Remarque : Puisque la matrice d'inertie est une matrice diagonale, le repère considéré est un **repère principal d'inertie**.

c) Le solide a un axe de révolution

Supposons (O, \vec{z}_k) cet axe de révolution ; tous les plans contenant cet axe sont des plans de symétrie, en particulier les plans $(O, \vec{x}_k, \vec{z}_k)$ et $(O, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$. Il vient donc encore que la

matrice de l'opérateur d'inertie est diagonale :

$$[I] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}.$$

En plus, à cause de la révolution (autour de \vec{z}_k dans le cas particulier), les deux autres axes (O, \vec{x}_k) et (O, \vec{y}_k) dans notre cas jouent le même rôle : $\int_{(S)} x^2 dm = \int_{(S)} y^2 dm$; et donc :

$$A = B = \frac{C}{2} + \int_{(S)} z^2 dm$$

IV - THEOREME DE HUYGENS

Il est parfois intéressant de passer de l'opérateur d'inertie en un point quelconque O du solide, à l'opérateur d'inertie au centre d'inertie G du solide et vice-versa. C'est l'utilité du théorème de Huygens.

$R_k(O, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ est un repère lié au solide (S) . Soit $G(a, b, c)$ le centre d'inertie de (S) . On a $\overrightarrow{OG} = a\vec{x}_k + b\vec{y}_k + c\vec{z}_k$.

L'image d'un vecteur quelconque \vec{W} , par l'opérateur d'inertie en O est :

$$\begin{aligned} [I]_{O,(S)} \times [\vec{W}] &= \int_{M \in (S)} \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{OM}) dm ; \text{ or } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM} \\ &= \int_{M \in (S)} \overrightarrow{OG} \wedge [\vec{W} \wedge (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM})] dm + \int_{M \in (S)} \overrightarrow{GM} \wedge [\vec{W} \wedge (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM})] dm \\ &= \int_{M \in (S)} \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{OG}) dm + \int_{M \in (S)} \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{GM}) dm \\ &\quad + \int_{M \in (S)} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{OG}) dm + \int_{M \in (S)} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{GM}) dm. \end{aligned}$$

La première intégrale :

$$\int_{M \in (S)} \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{OG}) dm = m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \times [\vec{W}] ; \text{ on l'a déjà vu ;}$$

La deuxième intégrale :

$$\begin{aligned}
 \int_{M \in S} \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{GM}) dm &= \overrightarrow{OG} \wedge \left(\vec{W} \wedge \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} dm \right) \text{ car } O, G \text{ et } \vec{W} \text{ ne dépendent pas} \\
 &\text{du point courant } M \text{ de } (S) \\
 &= \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{W} \wedge \vec{0}) \text{ car } \int_{M \in S} \overrightarrow{GM} dm = \vec{0} \text{ (définition du centre} \\
 &\text{d'inertie)} \\
 &\rightarrow \int_{M \in S} \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{GM}) dm = \vec{0} \quad \forall \vec{W} \in E ;
 \end{aligned}$$

La troisième intégrale, tout comme pour la deuxième :

$$\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{OG}) dm = \left(\int_{(S)} \overrightarrow{GM} dm \right) \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{OG}) = \vec{0} \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{OG}) = \vec{0} ;$$

La quatrième intégrale :

$$\int_{M \in S} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{W} \wedge \overrightarrow{GM}) dm = [I]_{G,(S)} [\vec{W}] \text{ par définition de l'opérateur d'inertie en un} \\
 \text{point } G \text{ du solide } (S).$$

$$\text{Il devient donc : } [I]_{O,(S)} \times [\vec{W}] = [I]_{G,(S)} \times [\vec{W}] + m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \times [\vec{W}]$$

C'est-à-dire :

$$[I]_{O,(S)} = [I]_{G,(S)} + m \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{bmatrix}. \text{ C'est le théorème de Huygens}$$

Remarques :

(1) Les moments d'inertie de (S) par rapport aux axes issus de O et de G vérifient :

$$I_{xx,O} = I_{xx,G} + m(b^2 + c^2)$$

$$I_{yy,O} = I_{yy,G} + m(a^2 + c^2)$$

$$I_{zz,O} = I_{zz,G} + m(a^2 + b^2)$$

Ainsi, les moments d'inertie minimaux sont ceux par rapport aux axes passant par le centre d'inertie.

(2) $b^2 + c^2$ est bien la distance du point G à l'axe des x ; c'est la distance entre les axes parallèles (O_k, \vec{x}_k) et (G, \vec{x}_k) ; de même $a^2 + c^2$ est la distance entre les axes parallèles (O_k, \vec{y}_k) et (G, \vec{y}_k) et $a^2 + b^2$ celle entre les axes parallèles (O_k, \vec{z}_k) et (G, \vec{z}_k) . Les calculs ci-dessus constituent ainsi une démonstration généralisée de l'expression $I_{(\Delta)} = I_{(\Delta_0)} + md^2$ vue plus haut pour le théorème de Huygens.

*ANNEXE 6 : RECUEILS DE SUJETS
D'EVALUATION*

Rattrapage de PHY 228 - juin 2016, 2h

DMSP - ENSP

RATTRAPAGE de PHY228 - Statique - 2h
Sujet proposé par P.S. NGOHE-EKAM, Juin 2016

10 pts

IN° d'ANONYMAT ici, SVP

1^{er} PARTIE Rôle et expression des torseurs

Un pendule pesant est constitué d'une barre cylindrique homogène de masse M , de longueur $OA = L$, dont l'extrémité A porte une masse m . L'autre extrémité O est fixée sur l'arbre d'un moteur qui, produisant un couple C_m , imprime au pendule une rotation continue de période T_0 autour de l'axe horizontal $\Delta(O, \bar{z}_k)$. La réaction de l'axe est notée \bar{R} et on considère que C_m varie avec l'angle θ que fait le pendule avec la verticale descendante \bar{x}_k . Cocher d'une croix votre choix, dans le tableau des réponses situé à la fin de l'énoncé ; cocher d) si aucune proposition n'est vraie.

1^{er}) Le centre de gravité G du pendule étudié est tel que $\overline{OG} = \lambda \bar{x}_k$ avec λ égale :

- a) $\frac{M-2m}{M+m}$ b) $\frac{M+2m}{M+m} \cdot L$ c) $\frac{M-2m}{M+m} \cdot \frac{L}{2}$

2^{er}) Le torseur cinématique au point O du pendule ainsi constitué est :

- a) $\frac{2\pi}{T_0} \bar{z}_k$ b) $\frac{2\pi}{T_0} \left(\bar{z}_k - \varepsilon \frac{L}{2} \bar{y}_k \right)$ c) nul

3^{er}) Le torseur cinématique de ce pendule au point G est : a) nul b) $\frac{2\pi}{T_0} \left(\bar{z}_k - \varepsilon \frac{L}{2} \bar{y}_k \right)$ c) $\frac{2\pi}{T_0} \bar{z}_k + \varepsilon \bar{0}$

4^{er}) Le torseur cinétique du pendule au point O est : a) $\frac{2\pi}{T_0} \left[(M+4m) \frac{L}{2} \bar{y}_k + \varepsilon (M+4m) \left(\frac{L}{2} \right)^2 \bar{z}_k \right]$

b) $\frac{2\pi}{T_0} \left[(M+2m) \frac{L}{2} \bar{y}_k + \varepsilon (M+2m) \left(\frac{L}{2} \right)^2 \bar{z}_k \right]$ c) $\frac{2\pi}{T_0} \left[(M+2m) \frac{L}{2} \bar{y}_k + \varepsilon (M+4m) \left(\frac{L}{2} \right)^2 \bar{z}_k \right]$

5^{er}) Le torseur dynamique du pendule au point O est :

- a) nul b) $\frac{4\pi^2}{T_0^2} \frac{L}{2} (M+2m) \bar{x}_k + \varepsilon (M+2m) \frac{L}{2} g \bar{z}_k$ c) $\frac{4\pi^2}{T_0^2} \frac{L}{2} (M+2m) \bar{x}_k + \varepsilon \bar{0}$

6^{er}) L'action mécanique du moteur sur le pendule peut être modélisée en G de la manière suivante :

- a) $\frac{2\pi}{T_0} \bar{z}_k + \varepsilon \bar{0}$ b) $\varepsilon C_m \bar{z}_k$ c) $\frac{2\pi}{T_0} \bar{z}_k + \varepsilon \frac{L}{2} C_m \bar{z}_k$

7^{er}) Le torseur résultant des actions extérieures au pendule (moteur, pesanteur et réaction de l'axe) est :

- a) nul b) $[\bar{R} + (M+m)g \bar{x}_k] + \varepsilon \left[\left[C_m + (M+2m) \frac{L}{2} \right] g \sin \theta \right] \bar{z}_k$

c) $[-R + (M+m)g] \bar{x}_k + \varepsilon \left[\left[C_m - (M+m) \frac{L}{2} \right] g \sin \theta \right] \bar{z}_k$

8^{er}) L'application du PFD donne la loi $C_m = C_m(\theta)$ suivante :

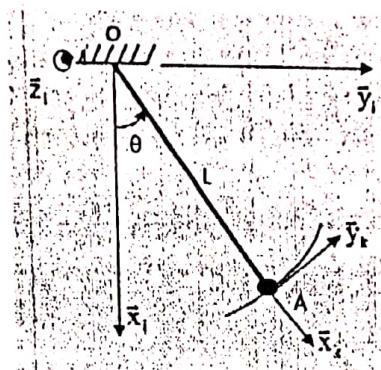
- a) $C_m(0) = (M+m)g \frac{L}{2} \cos \theta$ b) $C_m(0) = (M+2m)g \frac{L}{2} \sin \theta$ c) $C_m(0) = (M+2m)gL \sin \theta$

9^{er}) Le couple développé par le moteur est maximum à la position θ (rad) égale :

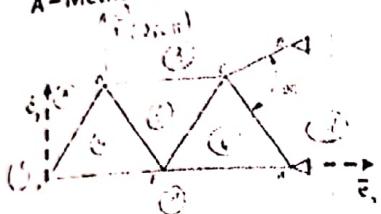
- a) zéro b) $\pi/2$ c) $\pi/4$

10^{er}) A cette position, la réaction de \bar{R} l'axe est :

- a) nulle b) $\begin{bmatrix} (M+m)g \\ (\frac{2\pi}{T_0})^2 (M+2m) \frac{L}{2} \\ 0 \end{bmatrix}_{(ki)}$ c) $\begin{bmatrix} (M+m)g \\ (\frac{2\pi}{T_0})^2 (M+2m)L \\ 0 \end{bmatrix}_{(ki)}$



2^e PARTIE : statique graphique
A - Méthode de Cremona



7 pts

10 pts

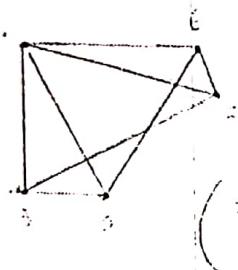
Dans la structure en cantilever, représentée sur la figure ci-contre, on a : $AE = EF = FD = DE = DC = AC = 2 \text{ m}$; Une force verticale ascendante de 250 N est placée en D.

- 1^o) - Tracer le Cremona (tout entier) de cette structure supposée en équilibre. Nota : 10 N \rightarrow 1 mm
2^o) - Remplir le tableau des efforts suivant. (1 pt par ligne juste)

3 pts

1^o) - CREMONA ICI

Sur une feuille vierge, tracer le diagramme de Cremona de la structure.



(S'assurer d'abord de l'allure au brouillon !!!)

2^o) Tableau des efforts ici

Effort	Direction	Sens	Module (N)
CE/C	↓	D \rightarrow C	250
AE/A	↓	D \rightarrow A	250
En A	↓	C \rightarrow D	250
En B	↑	D \rightarrow B	250

Tableau des réponses de la 1^{re} partie

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a				X						
b						X		X	X	
c					X					
d	X	X	X				X			

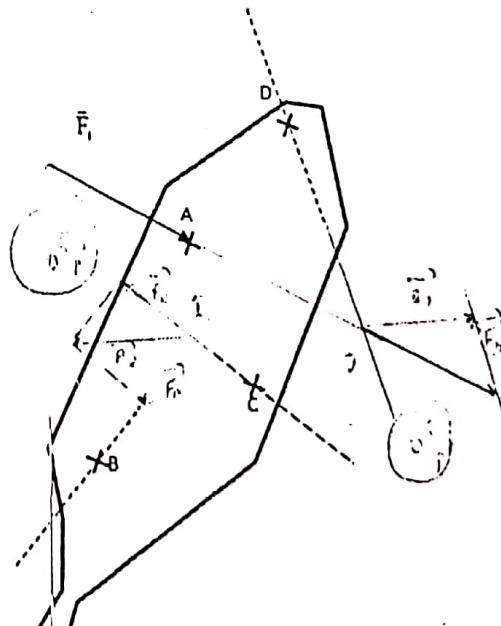
N.B. : Les réponses marquées ailleurs ne sont pas valables

+1 par bonne réponse et -1/2 par réponse fausse.

B - Méthode de Culmann 3 pts

Un bateau pirate est immobilisé en mer par l'action de quatre forces horizontales de directions et points d'application connus ; voir figure. La force \bar{F}_1 a pour module 560 kN. On demande de déterminer les trois autres forces. On fera le tracé sur la figure ci-contre (1 pt) et on notera les résultats dans le tableau ci-dessous (2 pts).

Force en	Direction B(°)	Sens	Module (kN)
A	151	D \rightarrow A	560
B	120	D \rightarrow B	260
C	45	D \rightarrow C	320
D	110	D \rightarrow D	210



POUR CETTE REPRISE INTEGRALE DU SUJET DE LA SESSION NORMALE, LA NOTE MAXIMALE ENVISAGEABLE EST DE 14/20

Examen de PHY 228 - juin 2016, 2h

DMSP - ENSP

Examen de PHY228 - Statique - Durée 2h
Sujet proposé par P.S. NGOHE-EKAM, juin 2016

N° d'ANONYMAT ici, SVP

1^{er} PARTIE Rôle et expression des torseurs

10 pts

Un pendule pesant est constitué d'une barre cylindrique homogène de masse M , de longueur $OA = L$, dont l'extrémité A porte une masse m . L'autre extrémité O est fixée sur l'arbre d'un moteur qui, produisant un couple C_m , imprime au pendule une rotation continue de période T_0 autour de l'axe horizontal $A(O, \bar{z}_k)$. La réaction de l'axe est notée \bar{R} et on considère que C_m varie avec l'angle θ que fait le pendule avec la verticale descendante \bar{x}_i . Cocher d'une croix votre choix, dans le tableau des réponses situé à la fin de l'énoncé ; cocher d) si aucune proposition n'est vraie.

1^{er}) Le centre de gravité G du pendule étudié est tel que $OG = \lambda \bar{x}_k$

avec λ égale :

a) $\frac{M+2m}{M+m}$ b) $\frac{M+2m}{M+m} \cdot L$ c) $\frac{M+2m}{M+m} \cdot \frac{L}{2}$

2^{er}) Le torseur cinématique au point O du pendule ainsi constitué est :

a) $\frac{2\pi}{T_0} \bar{z}_i + \varepsilon \bar{0}$ b) $\frac{2\pi}{T_0} \left(\bar{z}_k - \varepsilon \frac{L}{2} \bar{y}_k \right)$ c) nul

3^{er}) Le torseur cinématique de ce pendule au point G est : a) nul b) $\frac{2\pi}{T_0} \left(\bar{z}_k - \varepsilon \frac{L}{2} \bar{y}_k \right)$ c) $\frac{2\pi}{T_0} \bar{z}_k + \varepsilon \bar{0}$

4^{er}) Le torseur cinétique du pendule au point O est : a) $\frac{2\pi}{T_0} \left[(M+2m) \frac{L}{2} \bar{y}_k + \varepsilon (M+2m) \left(\frac{L}{2} \right)^2 \bar{z}_k \right]$

b) $\frac{2\pi}{T_0} \left[(M+4m) \frac{L}{2} \bar{y}_k + \varepsilon (M+4m) \left(\frac{L}{2} \right)^2 \bar{z}_k \right]$ c) $\frac{2\pi}{T_0} \left[(M+2m) \frac{L}{2} \bar{y}_k + \varepsilon (M+4m) \left(\frac{L}{2} \right)^2 \bar{z}_k \right]$

5^{er}) Le torseur dynamique du pendule au point O est : a) $\frac{4\pi^2}{T_0^2} \frac{L}{2} (M+2m) \bar{x}_k + \varepsilon \bar{0}$ b) nul
c) $\frac{4\pi^2}{T_0^2} \frac{L}{2} (M+2m) \bar{x}_k + \varepsilon (M+2m) \frac{L}{2} g \bar{z}_k$

6^{er}) L'action mécanique du moteur sur le pendule peut être modélisée en C_m de la manière suivante :

a) $\varepsilon C_m \bar{z}_k$ b) $\frac{2\pi}{T_0} \bar{z}_k + \varepsilon \frac{L}{2} C_m \bar{z}_k$ c) $\frac{2\pi}{T_0} \bar{z}_k + \varepsilon \bar{0}$

7^{er}) Le torseur résultant des actions extérieures au pendule (moteur, pesanteur et réaction de l'axe) est :

a) $[-R + (M+m)g] \bar{x}_i + \varepsilon \left[\left(C_m - (M+m) \frac{L}{2} \right) g \sin \theta \right] \bar{z}_i$
b) $[R + (M+m)g \bar{x}_i] + \varepsilon \left[\left(C_m + (M+2m) \frac{L}{2} \right) g \sin \theta \right] \bar{z}_i$ c) nul

(d)

8^{er}) L'application du PFD donne la loi $C_m = C_m(\theta)$ suivante :

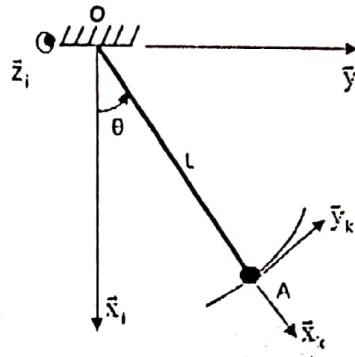
a) $C_m(0) = (M+m)g \frac{L}{2} \cos \theta$ b) $C_m(0) = (M+2m)g L \sin \theta$ c) $C_m(0) = (M+2m)g \frac{L}{2} \sin \theta$

9^{er}) Le couple développé par le moteur est maximum à la position θ égale

a) zéro b) $\pi/4$ c) $\pi/2$

10^{er}) A cette position, la réaction de R l'axe est :

a) $\begin{bmatrix} (M+m)g \\ (\frac{2\pi}{T_0})^2 (M+2m) \frac{L}{2} \\ 0 \end{bmatrix}_{(R)} \quad$ b) nulle c) $\begin{bmatrix} (M+m)g \\ (\frac{2\pi}{T_0})^2 (M+2m) L \\ 0 \end{bmatrix}_{(R)}$

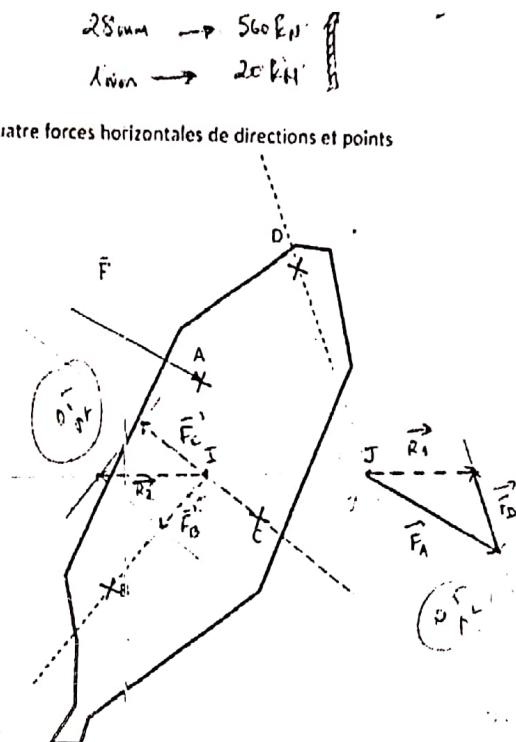


2^{me} PARTIE : Statique graphique 10 pts

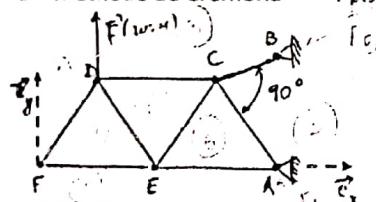
A - Méthode de Culmann 3 pts

Un bateau pirate est immobilisé en mer par l'action de quatre forces horizontales de directions et points d'application connus ; voir figure. La force \vec{F}_1 a pour module 560 kN. On demande de déterminer les trois autres forces. On fera le tracé sur la figure ci-contre (2pts) et on notera les résultats dans le tableau ci-dessous (2 pts).

Force en	Direction O(·)	Sens	Module (kN)
A	15°	H → B	560
B	50	H → B	260
C	149	D → G	300
D	110	B → H	300



B - Méthode de Cremona 7 pts



Dans la structure en cantilever, représentée sur la figure ci-contre, on a : $AE = EF = FD = DE = DC = AC = 2 \text{ m}$: Une force verticale ascendante de 20 N est placée en D.

- 1^o) - Tracer le Cremona (tout entier) de cette structure supposée en équilibre. Nota : 10 N -----> 1 mm 3 pts
- 2^o) - Déterminer les efforts 4 pts

2^{me}) - EFFORTS

Effort	Direction	Sens	Module (N)
CE/C	1360°	B → H	360
AE/A	110°	D → G	360
En A	13170°	G → D	360
En B	2030°	D → G	360

Tableau des réponses de la 1^{re} partie

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a		X								
b										
c	X			X				X		
d			X				X		X	

N.B. : Les réponses marquées ailleurs ne sont pas valables

+1 par bonne réponse et -1/2 par réponse fausse.

(S'assurer d'abord de l'allure au brouillon !!!)

1^{re} PARTIE Rôle et expression des torseurs

Un pendule double de longueur AB = L comporte, à ses extrémités, deux masselottes M₁ et M₂ de masses respectives m₁ et m₂; le poids de la barre AB est négligé devant celui des masselottes et cette barre est munie de plusieurs trous d'accrochage, qui permettent l'étude du pendule en fonction de la distance x = OA à laquelle la barre a été accrochée par rapport à l'extrémité A. Voir schéma ci-contre. L'introduction du crochet en O induit un couple C_r constant résistant aux balancements du pendule, lorsqu'ils existent ; C_r > 0. Cocher d'une croix dans le tableau des réponses situé à la fin de l'énoncé ; cocher d) si aucune proposition n'est vraie

A – Etude cinématique

Un dispositif imprime au pendule une rotation continue de période T₀ autour de l'axe horizontal Δ(O, \vec{z}_k).

1^o) Le torseur cinématique du pendule ainsi constitué, au point O, est :

- a) nul b) $\frac{2\pi}{T_0} \vec{z}_k$ c) $\frac{2\pi}{T_0} (\vec{z}_k - \varepsilon x \vec{y}_k)$

2^o) Le torseur cinématique de ce pendule au point A est : a) nul b) $\frac{2\pi}{T_0} \vec{z}_k$ c)

$$\frac{2\pi}{T_0} (\vec{z}_k - \varepsilon x \vec{y}_k)$$

3^o) Le torseur cinétique du pendule au point B est : a) $\frac{2\pi}{T_0} (m_1 L x \vec{z}_k + \varepsilon [-m_1 x + m_2 (L-x)] \vec{y}_k)$

$$b) \frac{2\pi}{T_0} ([-m_1 x + m_2 (L-x)] \vec{y}_k + \varepsilon m_1 L x \vec{z}_k) \quad c) \frac{2\pi}{T_0} (m_1 L x \vec{z}_k + \varepsilon [-m_1 x^2 + m_2 (L-x)^2] \vec{y}_k)$$

4^o) Le torseur cinétique du pendule au point O est : a)

$$b) \frac{2\pi}{T_0} ([-m_1 x + m_2 (L-x)] \vec{y}_k + \varepsilon [m_1 x^2 + m_2 (L-x)^2] \vec{z}_k) \quad b)$$

$$c) \frac{2\pi}{T_0} (m_1 L x \vec{z}_k + \varepsilon [m_1 x^2 + m_2 (L-x)^2] \vec{y}_k) \quad c) \text{nul}$$

5^o) Le torseur dynamique du pendule au point O est : a) nul b)

$$4\pi^2 \frac{1}{T_0^2} [-m_1 x + m_2 (L-x)] \vec{x}_k + \varepsilon \vec{0}$$

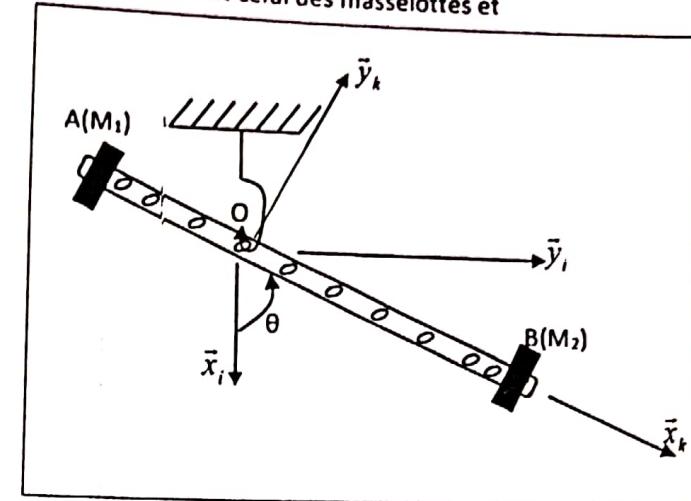
$$c) (m_1 + m_2)g(\cos \theta \vec{x}_k - \sin \theta \vec{y}_k) + \varepsilon ([m_1 x - m_2 (L-x)] g \sin \theta) \vec{z}_k$$

B – Etude dynamique

Le pendule est abandonné à lui-même, sans impulsion, à une position θ_M , B étant à gauche ; le couple résistant existe toujours et la rotation n'est plus uniforme.

6^o) Le torseur résultant des actions extérieures au pendule est :

- a) nul b) $(m_1 + m_2)g(\cos \theta \vec{x}_k + \sin \theta \vec{y}_k) + \varepsilon ([m_1 x - m_2 (L-x)] g \sin \theta) \vec{z}_k$



c) $(m_1 + m_2)g(\cos\theta \ddot{x}_k - \sin\theta \ddot{y}_k) + \epsilon(m_1x + m_2(L-x))g \sin\theta \ddot{z}_k$

7°) - Le torseur dynamique du pendule en O est : a) $\ddot{O} \ddot{y}_k - \ddot{O} \ddot{x}_k [-m_1x + m_2(L-x)] + \epsilon \ddot{O}$

b) $\ddot{O} \ddot{x}_k [-m_1x + m_2(L-x)] + \epsilon \ddot{O} \quad c) \ddot{O} \ddot{y}_k [-m_1x + m_2(L-x)] + \epsilon \ddot{O}$

8°) - L'équation différentielle du mouvement de ce pendule est : a)

$$\ddot{\theta} + \frac{m_2x - m_1(L-x)}{m_1^2 + m_2^2} g \sin\theta = \frac{C_r}{m_1^2 + m_2^2}$$

$$b) \ddot{\theta} + \frac{m_2x - m_1(L-x)}{m_1^2 x + m_2^2 (L-x)} g \sin\theta = \frac{C_r}{m_1^2 + m_2^2} \quad c)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{m_2x - m_1(L-x)}{m_1^2 x + m_2^2 (L-x)} g \sin\theta = \frac{C_r}{m_1^2 x + m_2^2 (L-x)}$$

C - Etude statique et considérations énergétiques

9°) - De l'équation différentielle, on déduit une position X_0 du crochet pour laquelle l'équilibre n'est pas possible ; X_0 égale :

a) $-C_r$ b) $\frac{m_2}{m_1 + m_2} L$ c) $\frac{(L-x)^2}{x}$

10°) - L'énergie cinétique du pendule au passage par la verticale est de la forme $\lambda \dot{\theta}^2$ avec λ égale :

a) $-C_r$ b) $\frac{m_2}{m_1 + m_2} L$ c) $\frac{(L-x)^2}{x}$

11°) La puissance développée par les actions extérieures au pendule au moment du passage par la verticale est de la forme $\mu \dot{\theta}$ avec μ égale : a) $-C_r$ b) $\frac{m_2}{m_1 + m_2} L$ c) $\frac{(L-x)^2}{x}$

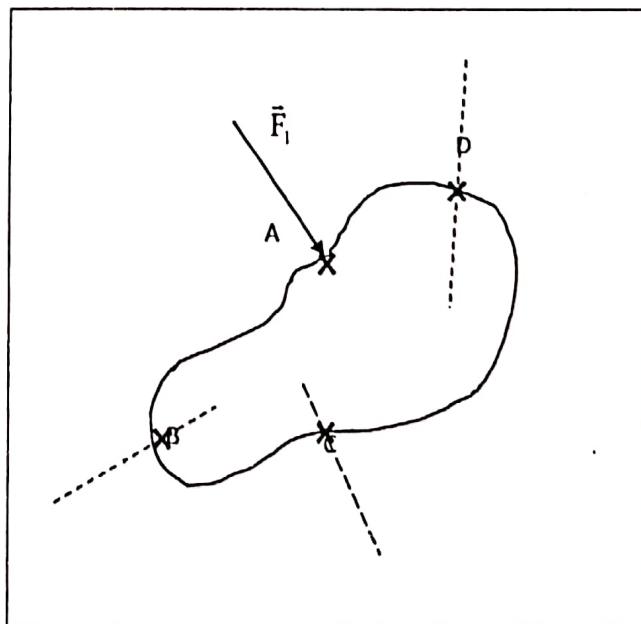
12°) - Lorsque le crochet est placé à la position X_0 ci-dessus, la puissance développée par les actions extérieures est à tout moment de la forme $\eta \dot{\theta}$ avec η égale : a) $-C_r$ b) $\frac{m_2}{m_1 + m_2} L$

c) $\frac{(L-x)^2}{x}$

2^{me} PARTIE : Statique graphique 8 pts

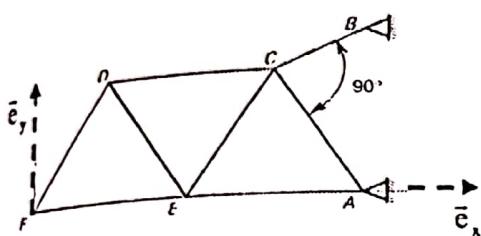
A - Méthode de Cullman 4 pts

Un solide est soumis à quatre forces de directions et points d'application connus ; voir figure. La force \vec{F}_1 a pour module 44 kN. On demande de déterminer les trois autres forces. On fera le tracé sur la figure ci-contre (2pts) et on notera les résultats dans le tableau ci-dessous (2 pts).



Force en	Direction (Angle $\theta(^{\circ})$ avec axe des $x>0$)	Sens	Module (kN)
A	-	-	
B	-	-	
C	-	-	
D	-	-	

B - Méthode du cremona



4 pts

Dans la structure en cantilever, représentée sur la figure ci-contre, on a : $AE = EF = FD = DE = DC = AC = 5 \text{ m}$; Une force verticale descendante de 2 kN est placée en F.

1°) – Tracer le cremona (tout entier) de cette structure supposée en équilibre. Nota : 1 kN -----> 1 cm

2 pts

2°) – Déterminer les efforts aux articulations en A et B. 2 pts

2°) - EFFORTS AUX ARTICULATIONS ICI

1°) - CREMONA ICI

Effort en	Direction (Angle $\theta(^{\circ})$ avec axe des $x>0$)	Sens	Module (kN)
A			
B			

Tableau des réponses de la 1^{ère} partie

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a												
b												
c												
d												

(S'assurer d'abord de l'allure au brouillon !!!)

Contrôle du 18 avril 2015



Sujet proposé par P.S. NGOHE-EKAM

Nom, Prénoms et Classe ici : _____

Première partie : Questions Binaires (QB).

Répondre par **1** (pour OUI) et par **0** (pour FAUX) dans le tableau ci-dessous. **Nota :** Toute autre forme de réponse ne sera pas considérée. Une réponse juste vaut +1/2 point et une réponse fausse vaut -1/2 point.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1°) – Il suffit d'avoir $\bar{R}_1 \cdot \bar{R}_2 = 0$ pour que les deux torseurs $\bar{R}_1 + \varepsilon \bar{m}_{1,P}$ et $\bar{R}_1 + \varepsilon \bar{m}_{2,P}$ soient orthogonaux.

2°) – Produit scalaire et produit torsoriel désignent la même opération.

3°) – Le comment de deux torseurs ne varie pas quel que soit la base où chacun des torseurs est écrit.

4°) – L'angle entre deux torseurs couple peut être identifié à l'angle entre leurs résultantes géométriques respectives.

5°) – La différentielle d'un torseur est toujours le torseur dont les éléments de réduction sont les différentielles du torseur de départ.

6°) – Si un point matériel est en équilibre sous l'action de trois torseurs dont deux (exactement) sont orthogonaux, le troisième est nécessairement (c.à.d. : obligatoirement) nul.

7°) – Si un point matériel est en équilibre sous l'action de trois torseurs non perpendiculaires dont deux (exactement) sont colinéaires, le troisième est nécessairement non nul.

8°) – Si un point matériel est en équilibre sous l'action de trois torseurs dont deux (exactement) sont colinéaires, le troisième est nécessairement nul.

9°) – Si un point matériel est en équilibre sous l'action de trois torseurs non perpendiculaires dont deux (exactement) sont colinéaires, les torseurs colinéaires sont nécessairement égaux.

10°) – Si un point matériel est en équilibre sous l'action de quatre torseurs colinéaires deux à deux, ces quatre torseurs sont nécessairement égaux.

Deuxième : Questions à choix multiples (QCM).

Répondre en cochant avec une croix (c.à.d. : X) les cases du tableau ci-dessous qui correspondent à vos réponses ; si aucune proposition ne vous semble exacte, cocher la case d). **Nota :** Les réponses

marquées ailleurs que sur ce tableau ne seront pas considérées. Une réponse juste donne +1 point et une réponse fausse enlève 1/2 point.

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a																				
b																				
c																				
d																				



Examen du 12 juin 2014 de PHY 223 STAT

Sujet prononcé par P.S. NGOHF-FKAM

N° d'ANONYMAT ICI, SVP
QUE - 2h

Cocher d'une croix « X » dans le tableau ci-dessous là où les cases correspondant aux réponses exactes. Cocher la case d) si aucune proposition n'est vraie. +1 point par réponse exacte et -1/2 point par réponse fausse.

NOTA : LES REPONSES PORTEES AILLEURS QUE SUR CE TABLEAU NE SERONT PAS PRISES EN COMPTE – TOUTES LES 3 PAGES DE L’ENONCE SERONT GLISSEES DANS LE CAHIER DE COMPOSITION JUSTE APRES LA PAGE DE GARDE – L’ENSEIGNANT VERIFIERA JUSQU’AU BRIOUILLON POUR S’ASSURER QUE LE CANDIDAT A BEL ET BIEN RESOLU LES QUESTIONS POSEES

Exercice 1 : Les torseurs en notation plückérienne

On considère deux repères $R_1(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $R_2(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de l'espace affine \mathcal{E} et

les deux torseurs suivants, donnés par leur coordonnées plückériennes : $[T_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{(R_2)} \quad \text{avec } \overline{OA} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix}_{(R_1)}$$

1°) – Le lieu des points A pour lesquels ces deux torseurs sont le double l'un de l'autre est :

- a) l'espace affine & tout entier b) un plan c) une droite

2°) - Le lieu des points A pour lesquels ces deux torseurs ont un comoment nul est donné dans (R_1) par :

- a) l'espace affine \mathcal{E} tout entier b) le plan : $y = 0$ c) la droite : $\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 0 \end{cases}$

3°) Le lieu des points A pour lesquels ces deux torseurs sont orthogonaux est donné dans (R_1) par :

a) l'espace affine de tout entier

b) le plan : $y = 0$

c) la droite : $\begin{cases} x = z_A - 1 \\ y = 0 \end{cases}$

4°) L'axe central (Δ_1) de $[T_1]$ est donné dans (R_i) par :

a) $\begin{cases} x = z_A - 1 \\ y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = z \\ y = y_A \end{cases}$

c) $x - z + 1 = 0$

5°) Le lieu des points A pour lesquels ces deux torseurs ont le même axe central est :

a) vide

b) un singleton

d) une droite

Exercice 2 : La statique par les torseurs

Les barres de la structure en treillis ci-contre suspendue par deux crochets en I et J

sont toutes cylindriques de diamètre et de masses négligeables ; elles ont la même longueur $L = 60$ cm (sauf évidemment les barres AB, GB, CD et ED). On admet qu'elles exercent des actions dirigées suivant leur axe de révolution. Des charges extérieures $F_1 = 30$ kN et $F_2 = 60$ kN sont exercées respectivement en E et F comme le montre la figure ci-contre.

6°) En appliquant le PFS au nœud (point) G qu'on supposera en équilibre et par projection sur les axes du repère (R_i) , on trouve que les torseurs des actions des barres GB et GF au nœud G ont des résultantes géométriques de modules :

- a) nuls b) égaux c) double l'un de l'autre

7°) En isolant la structure toute entière, la réaction normale $\bar{N}_i = N_i \bar{y}_i$ du support en I a une intensité de (kN) :

- a) 80 b) 40 c) 20

8°) Et la réaction normale \bar{N}_j au point J vaut (kN) : a) 80 b) 40 c) 20

9°) Cette réaction est dirigée :

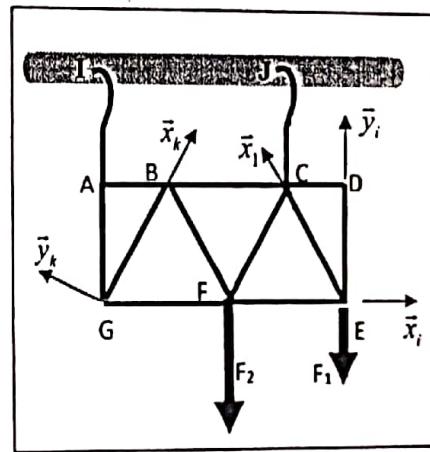
- a) Vers le haut b) Vers la bas c) Vers la droite

10°) L'étude de l'équilibre du point A donne pour action de la barre BA sur le nœud A, le torseur :

a) $[T_{BA/A}]_A = N_i \bar{y}_i + \epsilon \bar{0}$

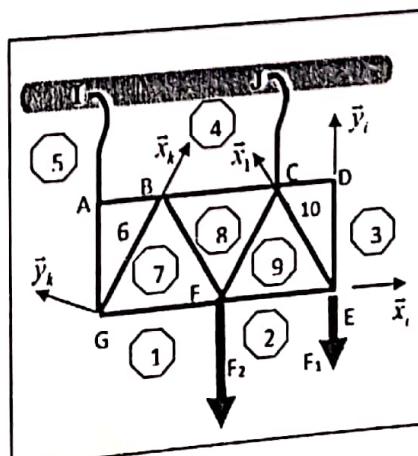
b) $[T_{BA/A}]_A = N_j \bar{y}_i + \epsilon \bar{0}$

c) $[T_{BA/A}]_A = \epsilon \bar{0}$



Exercice 3 : Statique graphique

Soit la structure ci-contre, identique à la précédente, mais dans laquelle les zones pour crémona ont été marquées et devront être respectées.



A - Méthode des nœuds :

11°) - Tracer ci-dessous à l'échelle 1 kN → 1 mm, le dynamique des forces intervenant pour l'équilibre du nœud E

×E

• • 9

12 et 13°) - Tracer ci-dessous le dynamique de l'équilibre du nœud C à l'échelle : 2 kN → 1 mm

×C

14°) - On déduit des dynamiques précédents que l'action de la barre FE sur E est un glisseur de résultante (kN) :

- a) 57,5 b) 17,5 c) 11,5

15°) - Que celle de barre BC sur C est un glisseur de résultante (kN) :

- a) 57,5 b) 17,5 c) 11,5

16°) - Et celle de la barre CF (kN) :

- a) 57,5 b) 17,5 c) 11,5

17 à 20°) - Tracer (note sur 4 points), ci-dessous, le crémona correspondant au zonage indiqué sur la figure ci-haut. Nota : le point 2 marqué ci-dessous est à respecter. Echelle : 1 mm → 1 kN



Contrôle du 26 avril 2014

de PHY 228STATIQUE - 2h

Sujet proposé par P.S. NGOHE-EKAMI

Nom, Prénoms et Classe ici :

Cocher dans le tableau ci-dessous la ou les cases correspondant aux réponses exactes.
Cocher la case d) si aucune proposition n'est vraie. +1 point par réponse exacte et -1/2 point par réponse fausse.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a																				
b	-	.	z																	
c																				
d																				

NOTE : LES REPONSES PORTEES AILLEURS QUE SUR CE TABLEAU NE SERONT PAS PRISES EN COMPTE – TOUTES LES 3 PAGES DE L'ENONCE SERONT GLISSEES DANS LE CAHIER DE COMPO

Exercice 1 : Application du théorème de Guldin

Soit le solide plat de la figure 1. En supposant une répartition surfacique de masse de densité σ :

1°) – L'élément de surface (surface infinitésimale) hachuré sur cette figure a pour masse (on néglige l'infiniment petit d'ordre 2) : a) $h\left(\frac{x}{b} + 1\right)\sigma dx$

b) $\sigma dx dy$

c) $\sigma \frac{h}{b} dx dy$

2°) – L'intégration de cette masse infinitésimale donne pour masse totale du solide considéré :

a) $\sigma \frac{hb}{2}$

b) σhb

c) $\sigma h^2 b^2$

3°) – L'abscisse X_G du centre de gravité G du solide peut être obtenu grâce à l'intégrale :

a) $\frac{1}{\int_{x=0}^b dx} \int_{x=0}^b x dx$

b) $\frac{2}{b} \int_{x=0}^b (1 - \frac{x}{b}) x dx$

c) $\frac{h}{b} \int_{x=0}^b (1 - \frac{x}{b}) x dx$

4°) – L'application du 2^{me} théorème de Guldin permet d'obtenir pour volume d'un cône de rayon de

base R et de demi-angle au sommet α , l'expression : a) $\frac{\pi R^3}{3 \tan \alpha}$

b)

$\frac{\pi R^3}{3} \tan \alpha$

c) $\pi R^3 \tan \alpha$

Exercice 2 : Maîtrise des torseurs

On donne les Repères $R_1(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $R_2(A, \frac{\vec{e}_x - \vec{e}_z}{\sqrt{2}}, \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_z}{\sqrt{2}}, -\vec{e}_y)$ où A effectue un mouvement uniforme de vitesse unitaire en direction des $x > 0$ à partir de l'origine de (R_1) . Soient les deux torseurs suivants : $[T_1]_{(R_1)} = (2\vec{e}_x - \vec{e}_z) + \varepsilon\vec{e}_y$ et $[T_2]_{(R_2)} = (2\vec{e}_x - \vec{e}_z) + \varepsilon\vec{e}_y$

5°) - La différence des deux torseurs à l'instant $t=1s$ est : a) nulle b) $\varepsilon\vec{e}_y$ c) $\vec{e}_x - \varepsilon^2\vec{e}_y$

6°) - Le moment des deux torseurs à $t=1s$ est : a) nul b) 3
d) $\varepsilon^2\vec{e}_y$

7°) - Le point I^* suivant appartient à l'axe central de $[T_2]$ à $t=1s$: a) $I^*(2/5; 0; 6/5)$ b) $I^*(0; 6/5; 2/5)$
c) $I^*(6/5; 0; 2/5)$

8°) - L'équation cartésienne, dans (R_1) , de l'axe central de $[T_2]$ à $t=1s$ est :

a) $2x + z - 2 = y = 0$ b) $x + 2z - 2 = y = 0$ c) $-y + 2z + 2 = x = 0$

9°) - L'ensemble des points P de l'espace affiné auxquels les moments des deux torseurs sont égaux à $t=1s$ est :

a) Vide b) un singleton d) une droite affine

10°) - Aux instants t suivants, les deux torseurs sont égaux : a) Aucun b) $t = 0$
c) $t = 0$ et $t = \sqrt{3}$

Exercice 3: Etude des liaisons du membre supérieur gauche du corps humain

La figure 2 représente le membre supérieur gauche d'un être humain de colonne vertébrale (S_0) supposée fixe. Sa main (S_5) a pour centre de masse G. On donne les distances $AB = L_1 = 20$ cm ; $BC = L_2 = 30$ cm, $CD = L_3 = 40$ cm et $DG = X_0 = 5$ cm. On indiquera une liaison par la lettre « L » et les indices des pièces qu'elle lie en commençant par l'indice inférieur.

A – Identification des liaisons : En observant les degrés de libertés sur votre propre corps, la liaison :

11°) - L_{01} est une liaison : a) Ponctuelle b) Pivot c) rotule

12°) - L_{12} est une liaison : a) Ponctuelle b) Pivot c) rotule

13°) - La liaison L_{2-34} équivalente au point C est une liaison : a) Plâne b) Pivot c) rotule

14°) - La liaison L_{34-5} équivalente au point D est une liaison : a) Plâne b) Pivot c) rotule

B – Etude cinématique et dynamique du mécanisme :

On suppose qu'entre l'omoplate et la colonne vertébrale on a un certain jeu qui autorise un rotule. On fait maintenant l'hypothèse du mécanisme plan ; et on oriente le repère fixe (R_0) dans le sens habituel tourné de 90° avec l'axe (A, \vec{z}_0) sortant du plan de la figure. Il est lié à l'omoplate. L'orientation angulaire (dans le sens trigonométrique) d'un solide (S_j) par rapport à son précédent (S_i)

sera donnée par l'angle θ_{ij} entre leurs deux plus grands axes. Tous les plus grands axes des solides seront dénommés leur axe local des x et un solide quelconque (S_k) sera lié au repère (R_k).

15°) – Le torseur d'action mécanique imposé par L_{01} est de la forme :

- a) $X_A \vec{x}_0 + Y_A \vec{y}_0 + \varepsilon N_A \vec{z}_0$
- b) $X_A \vec{x}_0 + Z_A \vec{z}_0 + \varepsilon M_A \vec{y}_0$
- c) $Y_A \vec{y}_0 + Z_A \vec{z}_0 + \varepsilon L_A \vec{x}_0$

16°) – Et celui imposé par L_{34-5} : a) $X_D \vec{x}_3 + Y_D \vec{y}_3 + \varepsilon \vec{0}$

$$c) Y_D \vec{y}_3 + Z_D \vec{z}_3 + \varepsilon L_D \vec{x}_3$$

17°) – Désormais, tous les plus petits angles entre deux axes osseux valent 30° et on néglige l'action de la pesanteur sur les os, sur la chair et sur tous les accessoires des articulations. La main porte une charge $m_0 = 20 \text{ kg}$ appliquée très près du point G. On suppose en plus que les accessoires (tels les tendons, les muscles, etc.) du poignet exercent en D une résultante $R_0 = 100 \text{ N}$ colinéaire à l'axe DG. On en déduit que le torseur d'action mécanique de la liaison L_{34-5} est :

- a) $-50\sqrt{3}\vec{x}_4 + 150\sqrt{3}\vec{y}_4 + \varepsilon \vec{0}$
- b) $-50\sqrt{3}\vec{x}_4 + 50\sqrt{3}\vec{y}_4 - \varepsilon 150\vec{z}_4$
- c) $-150\sqrt{3}\vec{x}_4 + 50\sqrt{3}\vec{y}_4 + \varepsilon \vec{0}$

18°) – Et que le moment du torseur d'action des accessoires du poignet, réduit en D, est :

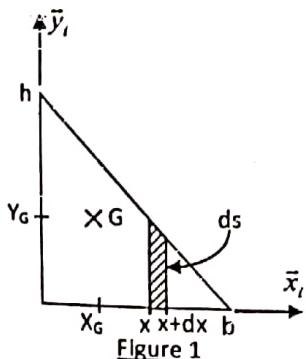
- a) nul
- b) $-5\sqrt{3}\vec{z}_4$
- c) $-50\sqrt{3}\vec{z}_4$

19°) – En isolant tout le bras, on obtient pour torseur d'action mécanique de la colonne vertébrale sur l'omoplate :

- a) $200\vec{x}_0 - \varepsilon 40\vec{z}_0$
- b) $100\vec{x}_0 - \varepsilon 25\sqrt{3}\vec{z}_0$
- c) $200\vec{x}_0 - \varepsilon(40 + 25\sqrt{3})\vec{z}_0$

20°) – On en déduit que les accessoires de l'épaule exercent en B un torseur de moment :

- a) $(40 + 25\sqrt{3})\vec{z}_0$
- b) $25\sqrt{3}\vec{z}_0$
- c) $(20 + 25\sqrt{3})\vec{z}_0$



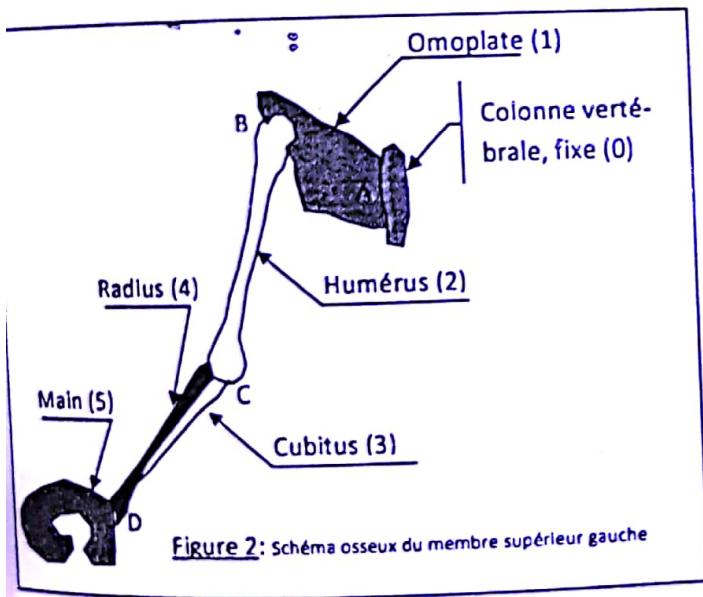


Figure 2: Schéma osseux du membre supérieur gauche

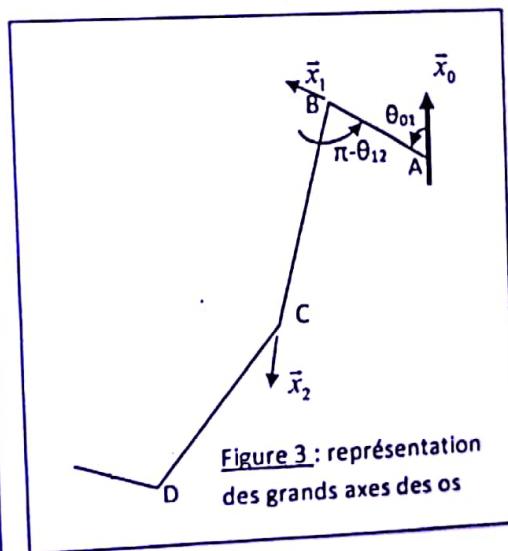
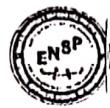


Figure 3 : représentation
des grands axes des os

LE CANDIDAT N'OMETTRA PAS DE GLISSEZ
TOUTES LES 3 PAGES DE L'ENONCE DANS SON
CAHIER DE COMPOSITION AU RISQUE DE SE
VOIR AFFECTER LA NOTE NULLE



Enseignant: P.S. NGOHE-EKAM Examen de juin 2013 - 2h

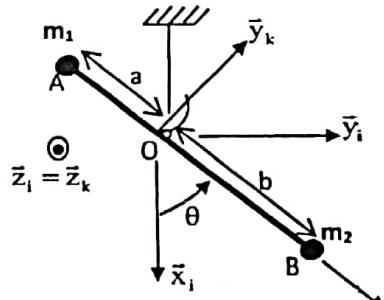
Recommandations : L'étudiant remettra obligatoirement le présent énoncé à l'intérieur de son cahier de composition

Sujet 3

Première partie : QCM sur le rôle des torseurs en mécanique 10 pts

Cocher d'une croix « X », dans le tableau de réponses ci-dessous, les cases des lettres correspondant à votre choix ; si aucune proposition n'est bonne, cocher la case « d ». 1 pt par réponse juste et -1/2 pt par réponse fausse. Le référentiel fixe (R_i) a pour origine O et pour base $B_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$. On lit au pendule la base $B_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										



Soit le pendule ci-contre constitué d'une barre AB de longueur L, de masse m, aux extrémités de laquelle sont fixées deux masselottes de masses respectives m_1 et m_2 ; un trou en O, placé à une distance b de m_2 permet au pendule d'osciller grâce à un crochet dont l'action sera un glisseur contenu dans le plan de la figure. On repère la position de la barre par l'angle θ que fait la barre avec la verticale (voir schéma).

1°) – Le torseur des forces appliquées au pendule est :

a)
$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m)g + X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & (m_1 + m_2 + m)g \sin \theta \end{bmatrix}_{(B_i)}$$

b)
$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m)g & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & (m_1 + m_2 + m)g \sin \theta \end{bmatrix}_{(B_i)}$$
 c) nul

2°) – Le torseur cinématique du pendule en O est :

a) $\begin{bmatrix} 0 & -m_1 a \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & -m_1 a \dot{\theta} \cos \theta \\ \vdots & 0 \end{bmatrix}_{(B_i)}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & 0 \end{bmatrix}_{(B_i)}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & m_2 b \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & m_2 b \dot{\theta} \cos \theta \\ \vdots & 0 \end{bmatrix}_{(B_i)}$

3°) Le torseur cinétique du pendule en O est :

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (m_1 a + m_2 b + m \frac{b-a}{2}) \dot{\theta} & 0 \\ \dot{0} & (m_1 a^2 + m_2 b^2 + m \frac{(b-a)^2}{2}) \dot{\theta} \end{bmatrix}_{(B_i)}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & m_2 b \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & m_2 b \dot{\theta} \cos \theta \\ \vdots & 0 \end{bmatrix}_{(B_i)}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (m_1 a + m_2 b + m \frac{b-a}{2}) \dot{\theta} & 0 \\ \dot{0} & (m_1 a^2 + m_2 b^2 + m \frac{(b-a)^2}{2}) \dot{\theta} \end{bmatrix}_{(B_k)}$

Sujet 3

4°) L'équation du mouvement du pendule est :

a) $[m_1 a^2 + m_2 b^2 + m \frac{(b-a)^2}{2}] \ddot{\theta} - [m_1 a + m_2 b + m \frac{(b-a)}{2}] g \sin \theta = 0$

b) $[m_1 a^2 + m_2 b^2 + m \frac{(b-a)^2}{2}] \ddot{\theta} + [m_1 a + m_2 b + m \frac{(b-a)}{2}] g \sin \theta = 0$

c) $[m_1 a^2 + m_2 b^2 + m \frac{(b-a)^2}{2}] \ddot{\theta} + [m_1 a + m_2 b + m \frac{(b-a)}{2}] \sin \theta = 0$

5°) Les positions pour lesquelles le pendule a une accélération nulle sont :

- a) $\pi/2$ b) π c) 0

6°) Les rapports $\frac{a}{b}$ pour lesquels on peut avoir l'équilibre du pendule sont :

- a) 1 b) $\frac{m_2}{m_1}$ c) $\frac{m_1}{m_2}$

7°) La puissance développée par le pendule à un instant quelconque est :

a) $\frac{2m_2 + m}{2m_1 + m} (a+b) g \dot{\theta}$ b) $\frac{2m_1 + m}{2m_2 + m} (a+b) g \dot{\theta}$ c) $\frac{2m + m_1}{2m + m_2} (b-a) g \dot{\theta}$

8°) L'énergie cinétique du pendule à un instant quelconque est :

a) $\frac{2m_2 + m}{2m_1 + m} (a^2 + b^2) \dot{\theta}^2$ b) $\frac{2m_1 + m}{2m_2 + m} (a^2 + b^2) \dot{\theta}^2$ c) $\frac{1}{2} \left[m_1^2 + m_2^2 + m \frac{(b-a)^2}{2} \right] \dot{\theta}^2$

9°) Le travail des forces extérieures pour aller de la position $\theta = 0$ à la position θ_0 est :

a) $\frac{2m_2 + m}{2m_1 + m}(a+b)g\theta_0 b)$ b) $\frac{2m_1 + m}{2m_2 + m}(a+b)g\theta_0$ c) $\frac{1}{2} \left[m_1^2 + m_2^2 + m \frac{(b-a)^2}{2} \right] \theta_0$

10°) La réaction du crochet, à un instant quelconque est :

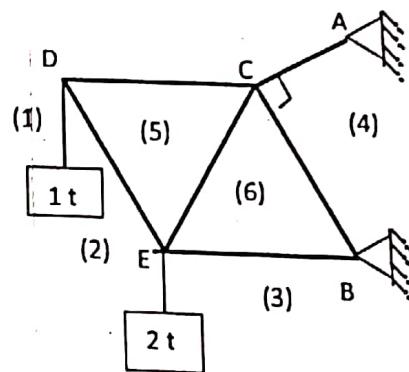
a) $\begin{bmatrix} -(m_1 + m_2 + m)g \\ m \frac{b-a}{2} g \\ 0 \end{bmatrix}_{(B_1)}$ b) $\begin{bmatrix} -(m_1 + m_2 + m)g \\ [m_1 a + m_2 b + m \frac{b-a}{2}] g \\ 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -(m_1 + m_2 + m)g \\ [m_1 a + m_2 b + m \frac{b-a}{2}] \\ 0 \end{bmatrix}$

Deuxième partie : Statique graphique 10 pts

Une structure en cantilever de dimensions $BC = CD = DE = EC = EB = 1 \text{ m}$ supporte deux charges de 1 et $3 \cdot 10^3 \text{ kg}$, comme l'indique la figure ci-contre.

1°) Tracer, en respectant le point « 1 » marqué sur la feuille 2 et-jointe, le cremona de ce cantilever : on prendra l'échelle $2 \text{ mm} \rightarrow 10^3 \text{ N}$ 4pts

2°) Déterminer, par la méthode des nœuds, les différentes actions des barres sur les nœuds. On respectera absolument les points marqués sur la feuille 3, et on utilisera pour échelle : $1 \text{ mm} \rightarrow 10^3 \text{ N}$. Les réponses à la question 2 seront reportées dans le tableau ci-dessous :



N°	Action de la barre	Sur le nœud	Direction (°) % axe des x	Sens	Module (kN)	Traction du nœud	Compression du nœud	Note
1	AC	A						Sur 1/4
2	DE	E						
3	DE	D						
4	CE	E						
5	BC	C						
6	AC	C						
7	DC	C						
8	DC	D						
9	EB	B						
10	BC	B						
11	CE	C						
12	EB	E						

13	Encastrement en A					
14	Encastrement en B					

Notation : 1/4 point par ligne entièrement juste (donc 3,5 pts pour ce tableau), 0 point si la ligne n'est pas entièrement juste, et 2,5 points pour un tracé graphique juste, précis et clair.

Sujet 3

FEUILLE 2: PARTIE RESERVEE POUR LE TRACE DU CREMONA

1
X

FEUILLE 3 RESERVEE POUR LA RESOLUTION PAR LA METHODE DES NŒUDS

Sujet 3

C
X

A
X

B
D
O

E
X

B
X

D
X

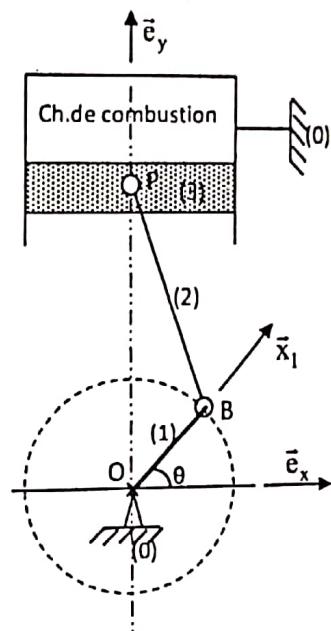


Recommandations : L'étudiant remettra obligatoirement le présent énoncé à l'intérieur de son cahier de composition

Première partie : QCM sur les torseurs cinématiques imposés par les liaisons

Cocher d'une croix « X », dans le tableau de réponses ci-dessous, les cases des lettres correspondant à votre choix ; si aucune proposition n'est bonne, cocher la case « d »

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a										
b										
c										
d										



Le système ci-contre, manivelle (S_1) de longueur d - bielle (S_2) de longueur L - piston (S_3) de diamètre D , représente un moteur à explosion à 4 temps : le cylindre et les paliers, fixes par rapport au bloc moteur, constituent le solide (S_0). L'arbre moteur (vilebrequin), horizontal, passant par O , est solidaire à la manivelle et en liaison pivot avec le palier. On néglige tous les frottements, et on privilégiera la base $B(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ dans la présentation des résultats.

1°) La liaison en P entre le piston et la bielle est une liaison :

- a) rotule b) pivot c) sphère-cylindre

2°) La liaison en B entre la bielle et la manivelle est une liaison :

- a) rotule b) pivot c) sphère-cylindre

3°) La liaison entre le cylindre et le piston est une liaison :

- a) Annulaire linéaire b) linéaire rectiligne c) pivot glissant

4°) La liaison en O entre la manivelle et le palier est une liaison :

- a) Annulaire linéaire b) linéaire rectiligne c) pivot glissant

5°) - Dans la suite, on suppose que le vilebrequin (enraînant les roues) de la voiture fait N trs/min.
On peut alors écrire :

a) $\theta = 2\pi N$

b) $\theta = 2\pi N + \theta_0$

c) $\theta = 120\pi N + \theta_0$

6°) - Au regard du graphe des liaisons du mécanisme, les liaisons :

a) L₀₁ et L₁₂ sont en parallèle

b) L₁₂ et L₂₃ sont en série

c) L₀₁ et L₀₃ sont en parallèle

7°) - Le torseur cinématique du mouvement de la manivelle par rapport au bloc moteur est :

$$a) [\mathcal{V}_1^0]_B = \omega_{01} \begin{bmatrix} 0 & -d \sin \theta \\ 0 & d \cos \theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{(B)}$$

$$b) [\mathcal{V}_1^0]_B = \begin{bmatrix} 0 & -d \sin \theta \\ 0 & d \cos \theta \\ \omega_{01} & 0 \end{bmatrix}_{(B)}$$

$$c) [\mathcal{V}_1^0]_B = \begin{bmatrix} 0 & -d \cos \theta \\ 0 & -d \sin \theta \\ \omega_{01} & 0 \end{bmatrix}_{(B)}$$

8°) - Le torseur cinématique du mouvement du piston par rapport à la manivelle est de la forme :

$$a) [\mathcal{V}_3^1]_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{13} & 0 \end{bmatrix}_{(B)}$$

$$b) [\mathcal{V}_3^1]_P = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{L^2 - d^2 \cos^2 \theta} \\ 0 & 0 \\ \omega_{12} + \omega_{23} & 0 \end{bmatrix}_{(B)}$$

$$c) [\mathcal{V}_3^1]_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -d \cos \theta \\ \omega_{12} + \omega_{23} & 0 \end{bmatrix}_{(B)}$$

9°) - Le torseur cinématique du mouvement du piston par rapport au bloc moteur est :

$$a) [\mathcal{V}_3^0]_B = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{01} d \sin \theta + \omega_{23} \sqrt{L^2 - d^2 \cos^2 \theta} \\ 0 & -(\omega_{12} + \omega_{23}) d \cos \theta \\ \omega_{12} + \omega_{23} & 0 \end{bmatrix}_{(B)}$$

$$b) [\mathcal{V}_3^0]_B = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{12} \sqrt{L^2 - d^2 \cos^2 \theta} \\ 0 & -\omega_{12} d \cos \theta \\ \omega_{12} + \omega_{23} & 0 \end{bmatrix}_{(B)}$$

$$c) [\mathcal{V}_3^0]_B = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{01} d \sin \theta + \omega_{23} \sqrt{L^2 - d^2 \cos^2 \theta} \\ 0 & (\omega_{01} + \omega_{23}) d \cos \theta \\ \omega_{01} + \omega_{12} + \omega_{23} & 0 \end{bmatrix}_{(B)}$$

10°) - Le piston subit un mouvement de translation de vitesse $V_0 \vec{e}_y$. On déduit que :

$$a) \omega_{01} = -\frac{V_0}{d \cos \theta}$$

$$b) \frac{\omega_{12}}{\omega_{23}} = \frac{\sqrt{L^2 - d^2 \cos^2 \theta}}{d \sin \theta}$$

$$c) \frac{\omega_{01}}{\omega_{23}} = \frac{\sqrt{L^2 - d^2 \cos^2 \theta}}{d \sin \theta}$$

Deuxième partie : Résolution graphique des structures en treillis, par la méthode des noeuds

On considère le cantilever ci-contre, sollicité en F et E par deux forces verticales descendantes de modules respectifs 1 et $2 \cdot 10^3$ N. Déterminer les actions de toutes les barres sur les noeuds A, C, D, E et F. On donne $AE = EF = FD = DE = DC = AC = 5$ m. Nota : la résolution de cet exercice noté aussi sur dix points et dont on reportera les résultats sur le tableau ci-après se fera essentiellement de manière graphique sur la page suivante où les points (noeuds) ont été placés et devraient être respectés. On prendra pour échelle des forces : 1 kN \rightarrow 2 cm

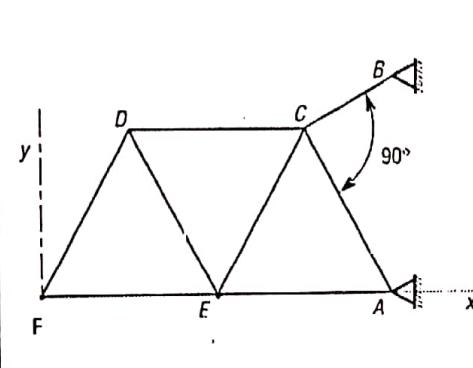


Figure 1

N°	Action de (barre)	Sur (noeud)	Direction (angle θ avec l'axe des x>0)	Sens	Module
1	AE	A			
2	AE	E			
3		D			
4	FE	E			
5		F			
6	DF	F			
7		D			
8	DC	C			
9		A			
10	AC	C			
11		E			
12	EC	E			
13		D			
14	DE	E			

FEUILLE DE FORMAT A4 POUR LA RESOLUTION GRAPHIQUE (METHODE DES NŒUDS)

C
X

A
X

E
X

B
D
X

D
X

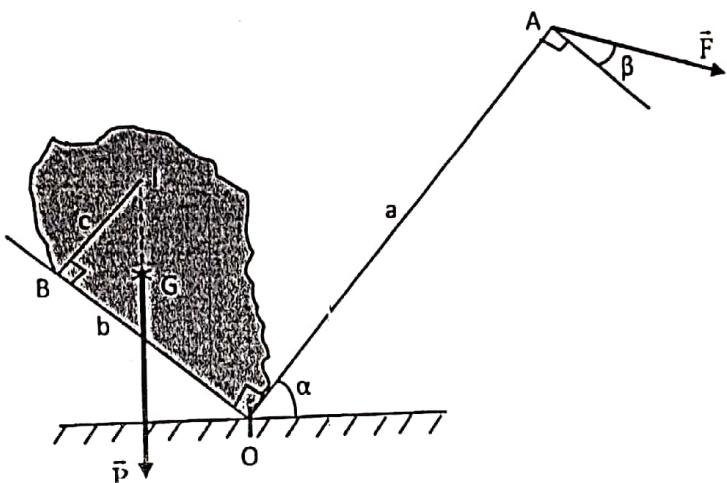
F
X



Un ouvrier tient un porte-charge AOB,
comme l'indique la figure ci-contre, en
y exerçant une force \vec{F} faisant un angle
 β avec les supports de manches

On donne : Angle ($\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$) = $\frac{\pi}{2}$; $\alpha = 30^\circ$; $OA = a$; $OB = b$; $BI = c$

On demande de calculer le coefficient
de frottement avec le sol en O



ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
POLYTECHNIQUE
D-MSP

Nom, prénom et classe :



UE PHY 228 STATIQUE

CRC 2 du 01/06/13. Durée : 10'

Questions de cours

Q1) - Enoncer le 2^{ème} théorème de Guldin

Q2) - Quel est le rôle du théorème de Guldin ?

Q3)

- a) Définir « liaison prismatique »
- b) Donner une représentation technique de cette liaison



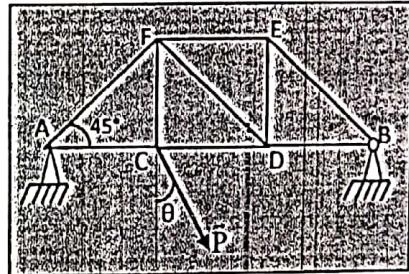
1°) -

- a) Définir « statique »
- b) Enoncer le théorème de la résultante statique
- c) Enoncer le théorème des actions mutuelles

2°) - Soit la structure ci-contre en appui simple en A et articulée en B; elle est soumise à une charge $P = 25 \text{ kN}$ faisant un angle $\theta = 30^\circ$ avec la verticale descendante. On donne : $AC = CD = DB = 5 \text{ m}$.

1°) - Déterminer les actions des appuis A et B, sur la structure.

2°) - Déterminer, par méthode graphique, l'action de l'appui B sur la barre EB.





Nom, prénom et classe :

Enseignant: P.S.
NGOHE-EKAM

UE PHY 228 STATIQUE

Examen du 13 septembre 2012
2h

Recommandations : Remplir le tableau ci-dessous en cochant d'une croix « X » la ou les cases correspondant à vos réponses. Une réponse juste vaut 1 point et une réponse fausse enlève 1/2. Cocher d) quand aucune proposition donnée n'est juste.

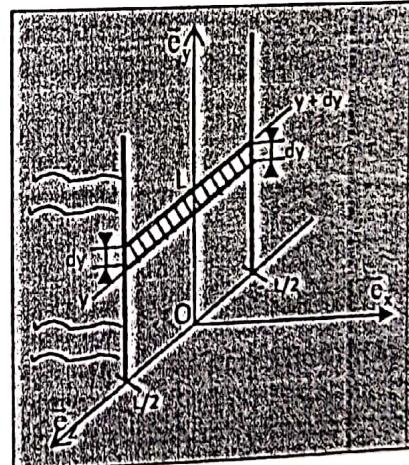
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a																				
b																				
c																				
d																				

Exercice 1: Modélisation des actions mécaniques

Un barrage hydroélectrique est constitué d'une paroi verticale de hauteur h et de largeur L . Il est rempli à un taux τ % (hauteur H de l'eau vérifie : $H = \tau \cdot h$). Le repère $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ a son premier plan dans le plan de symétrie du barrage, et le troisième plan au niveau du sol. On négligera, à chaque fois, les infiniment petits d'ordre supérieur.

1°) – La loi fondamentale de l'hydrostatique permet d'écrire entre un point A à la surface libre du fluide et un point M à une altitude y la relation :

$$a) p_A - p_M = \rho_0 g h \quad b) p_A - p_M = -\rho_0 g h \quad c) \\ p_A - p_M = \rho_0 g (H - y)$$



2°) – Sur la surface élémentaire hachurée ci-contre, l'action pressante élémentaire de l'eau est de la forme :

$$a) \overline{df} = [p_M + \rho_0 g (h - y)] L dy \vec{e}_x \quad b)$$

$$c) \overline{df} = [p_A + \rho_0 g (h - y)] L dy \vec{e}_x$$

3°) – Son moment en O est :

$$\overline{df} = [p_A + \rho_0 g (H - y)] L dy \vec{e}_x$$

a) $-L[p_M + p_0g(h-y)]ydy\bar{e}_z$ b) $L[p_A + p_0g(H-y)]ydy\bar{e}_z$

$$L[p_A + p_0g(h-y)]ydy\bar{e}_z$$

4°) La modélisation globale de l'action de l'eau sur ce barrage est représentée par (P_{stat} négligé) :

a) $\frac{p_0gLH^2}{2}\bar{e}_x - \varepsilon \frac{1}{6}p_0gLH^3\bar{e}_z$ b) $\frac{p_0gLH^2}{2}\bar{e}_y - \varepsilon \frac{1}{6}p_0gLH^3\bar{e}_z$ c)

$$\frac{p_0gLH^2}{2}\bar{e}_y - \varepsilon \frac{1}{6}p_0gLH^3\bar{e}_x$$

5°) La hauteur critique où l'effet global de torsion du barrage est minimale est :

a) $\frac{2h}{3}$ b) $\frac{2h^2}{3H}$ c) $\frac{2H^2}{3h}$

Exercice 2: Les torseurs cinématiques et d'actions mécaniques imposés par des liaisons

6°) Le torseur cinématique d'une sphère (S_1) roulant et glissant sur un plan incliné (S_0) est noté :

a) $[T_0^1]$ b) $[E_1^0]$ c) $[E_0^1]$

7°) Dans un référentiel $R(O, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$, ses éléments de réduction en un point quelconque P sont notés :

a) $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_0^1 \\ \bar{V}_0^1(P) \end{array} \right\}_Q$ b) $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_1^0 \\ \bar{V}_1^0(0) \end{array} \right\}_P$ c) : $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_0^1 \\ \bar{V}_0^1(P) \end{array} \right\}_P$

8°) Le torseur cinématique d'une liaison hélicoïdale de pas cinématique p entre deux pièces (1) et (2) est toujours de la forme :

a) $[T_2^1] = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega} = \omega \bar{z} \\ \bar{V}_Q = p\omega \bar{z} \end{array} \right\}_{Q \in \text{axe}}$ b) $[T_2^1] = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega} = p\omega \bar{z} \\ \bar{V}_Q = \omega \bar{z} \end{array} \right\}_{Q \in \text{axe}}$ c) $[T_2^1] = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega} = p\omega \bar{z} \\ \bar{V}_Q = p\omega \bar{z} \end{array} \right\}_{Q \in \text{axe}}$

9°) L'association en série d'une liaison prismatique avec une liaison pivot glissant de même axe donne une :

a) liaison pivot glissant de même axe b) liaison hélicoïdale de même axe c) liaison encastrement

10°) Avec \bar{z} cet axe commun aux deux liaisons, le torseur d'action mécanique résultant est de la forme :

a) $\begin{cases} \bar{R} \text{ tel que } \bar{m}_P \cdot \bar{z} + p \cdot \bar{R} \cdot \bar{z} = 0 \\ \bar{m}_P \end{cases}$

$\begin{cases} \bar{R} \\ \bar{m}_P \end{cases} \forall P \in (S_2)$

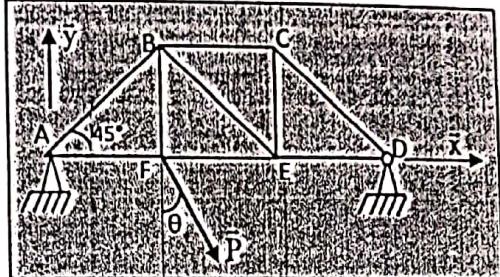
b) $\begin{cases} \bar{R} = X\bar{x} + Y\bar{y} \\ \bar{m}_P = L\bar{x} + M\bar{y} \quad \forall P \in \text{l'axe} \end{cases}$

c)

Exercice 3: Soit le treillis ci-contre en appui simple en A et en liaison rotule en D, soumis à une charge $P = 50$ kN faisant un angle $\theta = 30^\circ$ avec la verticale descendante. On donne les égalités: $AF = FE = EC = ED = 5$ m.

11°) - L'action de l'appui en A, sur la structure, est d'environ:

- a) 7,2 kN b) 14,4 kN c) 28,8 kN



12°) - L'action de l'appui en D, sur la structure, a pour module :

- a) 7,2 kN b) 14,4 kN c) 28,8 kN

13°) - L'action de la barre DE_D a les caractéristiques suivantes :

- a) (5,4 kN ; C) b) (10,8 kN ; C) c) (21,6 kN ; T)

14°) - L'action exercée dans la barre FE est (en newtons) :

- a) 1,1 kN b) 2,2 kN c) 4,4 kN

15°) - L'action de la barre BE_B a les caractéristiques suivantes

- a) (5,3 kN ; 135°) b) (10,6 kN ; 135°) c) (21,2 kN ; -45°)

16°) - L'action de la barre AF_F a les caractéristiques suivantes :

- a) (7,2 kN ; C) b) (14,4 kN ; T) c) (28,8 kN ; T)

17°) - L'action de la barre BF_B a les caractéristiques suivantes :

- a) (5,4 kN ; T) b) (10,9 kN ; C) c) (21,8 kN ; T)

18°) - L'action de la barre CE_E a les caractéristiques suivantes :

- a) (0 N ; 0°) b) (7,4 kN ; 90°) c) (14,8 kN ; 0°)

19°) - L'action de la barre CB_C a les caractéristiques suivantes :

- a) (7,0 kN ; T) b) (7,0 kN ; C) c) (14,0 kN ; C)

20°) - L'action de la barre CD_D a les caractéristiques suivantes :

a) (5,2 kN ; C)

b) (10,4 kN ; T)

c) (20,8 kN ; C)

Remarque: dans les caractéristiques des actions mécaniques des barres, les sollicitations Compression et Traction sont respectivement représentées par "C" et "T".

NE PAS OUBLIER DE REMETTRE CET ENONCE

Tableau de réponse :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a			X						X											
b		X								X			X							
c											X	X		X	X				X	X
d	X	X		X	X	X	X								X		X	X		



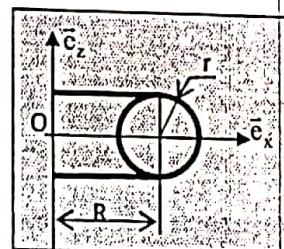
Recommandations :

- Les résultats et conclusions sont à encadrer, au risque de ne pas être appréciés par le correcteur.
- L'étudiant remettra obligatoirement le présent énoncé à l'intérieur de son cahier de composition

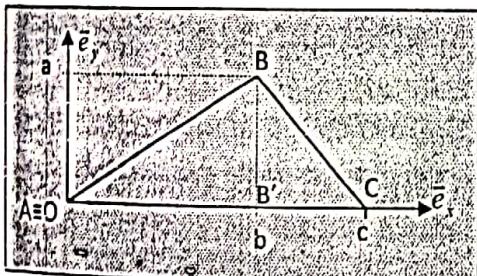
Exercice 1 : Modélisation des actions mécaniques 4 pts

1°) – Enoncer le premier et le deuxième théorèmes de Guldin 2 pts

2°) – En déduire l'aire et le volume d'un tore (anneau cylindrique) de rayon R et de section circulaire de rayon r. 2 pts



Exercice 2 : PFS – Transport d'une plaque triangulaire 6 pts



Soit une plaque triangulaire homogène ABC d'épaisseur uniforme e et de masse volumique ρ , repérée dans $R(O, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ par ses sommets $A(0,0,0)$, $B(b,a,0)$, $C(c,0,0)$. On se propose de déterminer la charge de trois porteurs qui la soutiennent verticalement par les points A , B' et C , où B' est le projeté de B sur (AC) .

1°) – Donner les expressions des actions infinitésimales de la pesanteur s'exerçant, respectivement dans les parties ABB' et BCB' , sur un volume élémentaire de largeur dx et entourant un point M d'abscisse $x + dx/2$. 1 pt

2°) – En déduire la réduction en O du torseur de l'action de la pesanteur sur la plaque tout entière. 2 pts

3°) – On donne pour la suite : $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $a = 1 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $c = 3 \text{ m}$ et $e = 2 \text{ cm}$.

Pour transporter cette plaque, trois personnes la maintiennent verticale en exerçant des actions verticales \bar{N}_A , \bar{N}_B , \bar{N}_C respectivement en A , B' et C . Par réduction de torseurs, déterminez ces actions. 2 pts

10	CD	C				
11	FD	F				
12	FD	D				
13	FE	F				
14	FE	E				
15	ED	E				
16	ED	D				
17	DB	D				
18	DB	B				
19	EB	E				
20	EB	B				

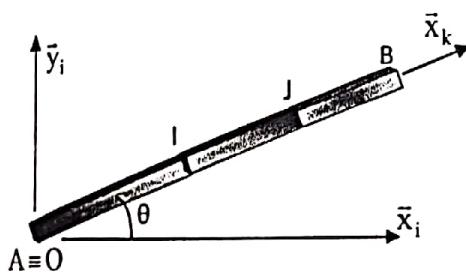
(Notation du tableau : 1/3 point par ligne entièrement juste)

Recommandations :

- Les résultats et conclusions sont à encadrer, au risque de ne pas être appréciés par le correcteur.
- L'étudiant remettra obligatoirement le présent énoncé à l'intérieur de son cahier de composition

Exercice 1: Ouvrier transportant une barre non homogène

5 pts



Une barre parallélépipédique AB de base carrée (côté a) et de longueur L , a trois parties AI, IJ et JB, dont les caractéristiques physiques (masse volumique du matériau et longueur) sont respectivement (ρ_1, L_1) , (ρ_2, L_2) et (ρ_3, L_3) . Un ouvrier la tient inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale. La barre est constamment dans le plan vertical $(0, \bar{x}_i, \bar{y}_i)$ (voir figure ci-contre).

1°) - Exprimer, sous forme de glisseurs, les actions de pesanteur s'exerçant sur chacune des trois parties de la barre. 1,5 pt

2°) - Déterminer le torseur de l'effort exercé par l'ouvrier. 1,5 pt

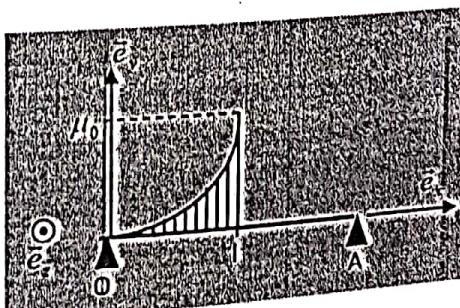
3°) - En déduire la position θ_0 où l'effort de l'ouvrier est moindre 2 pts

N.B.: Tous les vecteurs de cet exercice seront exprimés dans $R_i(O, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$.

Exercice 2: Pont chargé de manière non uniforme

6 pts

Soit la distribution de masse linéique de profil parabolique (de sommet O) ci-contre, sur un pont [OA] de milieu I, de masse propre négligeable et d'appuis simples O et A. On donne en unités S.I. : $OA = L$, $Y_0 = \mu_0$.



1°) - Quelle est la densité linéique de masse $\mu(x)$? 1 pt

1°) - Donner l'expression de l'action infinitésimale (torseur glisseur) de pesanteur s'exerçant en un point M d'abscisse x quelconque sur le pont. 1 pt

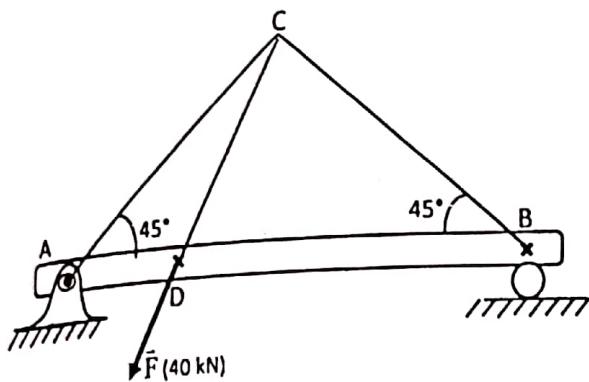
2°) - Réduire en O le torseur de l'action de pesanteur sur le pont. 2 pts

3') - A.N. : $L = 10 \text{ m}$, $\mu_0 = 480 \text{ kg/m}$ et $g = 10 \text{ m/s}^2$. Calculer les actions mécaniques des appuis du pont. 2 pts

Exercice 3 : Treillis à 5 barres, Statique graphique

10 pts

Un ponton AB repose sur un appui simple en B et un appui en liaison pivot avec le sol en A, selon le schéma ci-contre. On donne : $AB=4 \text{ m}$, $AD=1 \text{ m}$ et $F=40 \text{ kN}$



1°) - Calculer l'angle θ . 1 pt

2°) - Déterminer par calcul (P.F.S.) les actions extérieures au pont, en A et B. (Résultat à reporter sur le tableau joint)

3°) - En utilisant la méthode graphique des nœuds, déterminer les actions des différentes barres du pont.

N.B. : On présentera les résultats de cet exercice dans le tableau suivant (voir verso) qu'on remplira sur la feuille de l'énoncé. Le tableau recopié vaudra la note zéro !!!

LE CANDIDAT NE VERRA PAS DE RENDRE LE SUJET AVEC SA COPIE D'EXAMEN

N° ordre	Effort	Direction (angle avec l'axe des $x>0$)	Sens	Intensité	Sollicitation	
					Compression	Traction
	Action de l'appui en A					
2	Action de l'appui en B					
	Action de la barre	Sur le nœud				
3	AD	A				
4	AD	D				
5	DB	D				
6	- DB	B				
7	AC	A				
8	AC	C				
9	DC	D				
10	DC	C				
11	BC	B				
12	BC	C				

(Notation : 3/4 point par ligne du tableau entièrement juste)



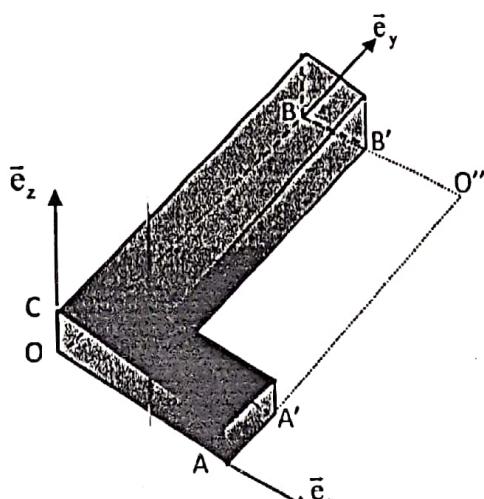
Recommendations :

- Les résultats et conclusions sont à encadrer, au risque de ne pas être appréciés par le correcteur.
- L'étudiant remettra obligatoirement le présent énoncé à l'intérieur de son cahier de composition

Exercice 1 : Centre de gravité d'une équerre incomplète

8 pts

L'équerre (incomplète) de maçon homogène ci-contre, de masse volumique ρ , d'épaisseur uniforme $OC = e$, de base $OA = a$, de hauteur $OB = b$, et de largeur $AA' = BB' = l$ (L minuscule) peut être modélisée par deux solides imaginaires : (S_1) constitué par le bloc initiallement plein de base $OAO''B$ et (S_2) constitué par la partie évidée de base $A'O''B'O'$. (S_1) subit une action attractive envers la Terre et (S_2) une action répulsive d'avec la Terre. L'espace affine est repéré par $R(O, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$, où (O, \bar{e}_z) est la verticale ascendante.



1')-Donner, dans le repère (R), les coordonnées des points G_1 et G_2 , centre de masse de (S_1) et (S_2) respectivement. 2 pts

2')-En déduire les coordonnées du centre de masse G de l'équerre incomplète. 2 pts

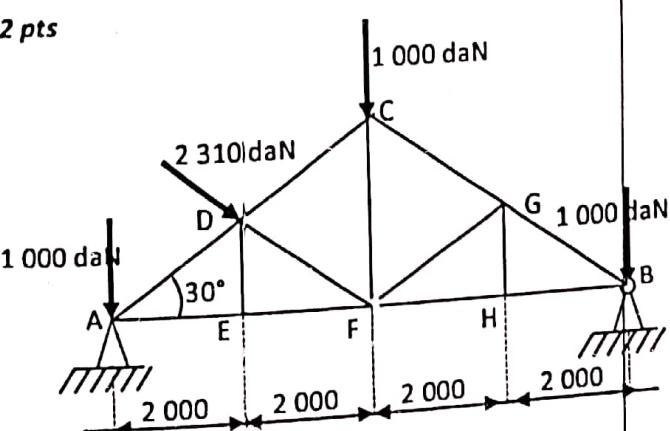
3')-A.N. : Déterminer G dans le cas particulier où $a = b = 3l = 30 \text{ cm}$; $e = 5 \text{ cm}$; $\rho = 1800 \text{ g/m}^3$. 4 pts

Exercice 2 : Statique graphique

12 pts

Une ferme de type Howe est sollicitée par des efforts représentés sur la figure ci-contre ; les dimensions nécessaires de la ferme sont aussi données, en millimètres.

1') - Déterminer, par calcul, les efforts exercés par cette ferme sur les linteaux représentés par l'appui simple en A et la



liaison rotule en B. 1 pt

2°) Déterminer, par Cremona, les efforts dans toutes les barres de la structure.

9 pts

N.B. : on laissera apparaître (traits fins) les éléments de construction du Cremona et on présentera les résultats sous la forme d'un tableau spécifiant l'effort, sa direction, son sens, son module et sa sollicitation.

Notation : Pour les résultats de cet exercice, remplir le tableau du verso (une ligne entièrement juste compte 1/3 de point ; un élément faux dans une ligne donne directement zéro à cette ligne) ; 02 points sont réservés à la clarté dans le tracé du Cremona.

LE CANDIDAT RENDRA LE SUJET AVEC SA COPIE D'EXAMEN

N° ordre	Effort		Direction (angle avec l'axe des $x>0$)	Sens	Intensité	Sollicitation	
	Action de la	Sur le				Compression	Traction
1	Action de l'appui en A						
2	Action de l'appui en B						
3	AE	A					
4	AE	E					
5	AD	A					
6	AD	D					
7	EF	E					
8	EF	F					
9	DE	D					
10	DE	E					
11	DF	D					
12	DF	F					
13	DC	D					
14	DG	C					
15	CF	C					
16	CF	F					
17	CG	C					
18	CG	G					
19	FG	F					
20	FG	G					

	FH	F				
21	FH	H				
22	GH	G				
23	GH	H				
24	HB	H				
25	HB	B				
26	GB	B / G				
27/28						



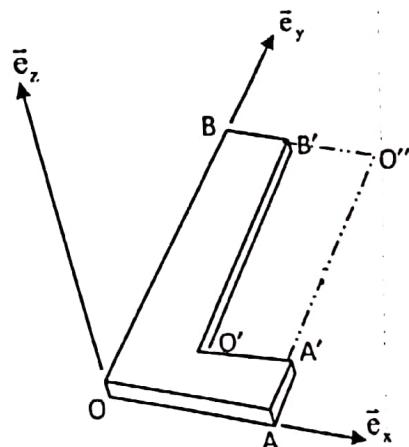
Recommandations :

- Les résultats et conclusions sont à encadrer, au risque de ne pas être appréciés par le correcteur.
- L'étudiant remettra obligatoirement le présent énoncé à l'intérieur de son cahier de composition

Exercice : Torseurs de pesanteur et d'apesanteur

8 pts

Dans l'équerre de maçon ci-contre, de masse volumique ρ , on donne $A=a$, $OB=b$, $AA'=BB'=l$ (l minuscule), épaisseur $e \ll a, b$, et l . On indique par 1 l'action de la pesanteur sur la plaque initialement pleine $OAO''B$ et par 2 celle de l'apesanteur sur la partie évidée $A'O''B'O'$. On travaillera dans $R(O, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$



1°) - Donner dans (R) , les coordonnées des points O, O', O'', A, A', B , et B' , tous pris dans le plan xOy . 1 pt

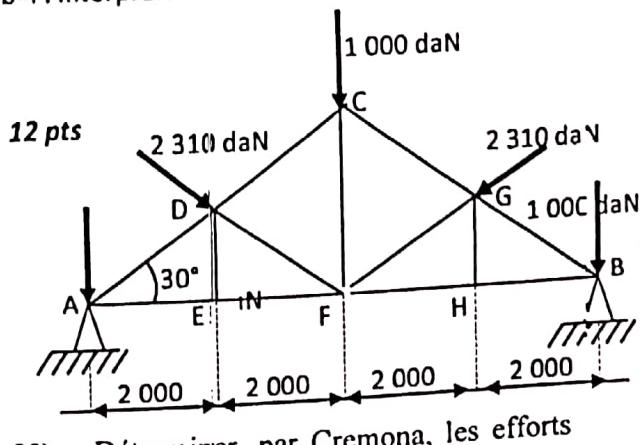
2°) - Réduisez les torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ en O .
pts

3°) - En déduire la réduction en O du torseur de pesanteur sur l'équerre de maçon 1 pts

4°) - a) Donner les équations cartésiennes de l'axe central (Δ) de ce torseur. 1 pt

b) En déduire les coordonnées du centre de masse G de l'équerre $OAA'O'B'B$. 1 pt

5°) - Déterminer G dans le cas particulier où $a=b=l$. Interprétation. 1 + 1 pts



Exercice 2 : Statique graphique

Une ferme de type Howe est sollicitée par des efforts représentés sur la figure ci-contre ; les dimensions nécessaires de la ferme sont aussi données, en millimètres.

1°) - Déterminer, par calcul, les efforts exercés par cette ferme sur les linteaux

représentés par les appuis simples en A et B. 1 pt

dans toutes les barres de la structure (on remarquera la symétrie géométrique et de charge, pour ne tracer que la moitié du Cremona, puis on déduira par symétrie les actions correspondant à l'autre moitié). 9 pts

N.B. : on laissera apparaître (traits fins) les éléments de construction du Cremona et on présentera les résultats sous la forme d'un tableau spécifiant l'effort, sa direction, son sens, son module et sa sollicitation.

Notation : Pour les résultats de cet exercice, remplir le tableau du verso (une ligne entièrement juste compte 1/3 de point ; un élément faux dans une ligne donne directement zéro à cette ligne) ; 02 points sont réservés à la clarté dans le tracé du Cremona.

LE CANDIDAT NE METTRA PAS DE RENDRE LE SUJET AVEC SA COPIE D'EXAMEN

N° ordre	Effort		Direction (angle avec l'axe des $x>0$)	Sens	Intensité	Sollicitation	
						Compression	Traction
1	Action de l'appui en A						
2	Action de l'appui en B						
	Action de la barre	Sur le nœud					
3	AE	A					
4	AE	E					
5	AD	A					
6	AD	D					
7	EF	E					
8	EF	F					
9	DE	D					
10	DE	E					
11	DF	D					
12	DF	F					
13	DC	D					
14	DC	C					
15	CF	C					
16	CF	F					
17	CG	C					
18	CG	G					
19	FG	F					
20	FG	G					
21	FH	F					
22	FH	H					
23	GH	G					
24	GH	H					
25	HB	H					
26	HB	B					
27/28	GB	B / G					



NOM et Prénoms :

Classe (+groupe)

Recommandations :

- L'épreuve consiste en vingt (20) questions à choix de réponse multiples. L'étudiant remplira le tableau ci-dessous en cochant d'une croix (X) la réponse qu'il trouve la plus convenable à chaque question. Si aucune réponse proposée ne correspond, cocher la case e du tableau.

. Une réponse juste donne un (+01) point et une réponse fausse en enlève un demi (-1/2).

. L'étudiant inscrira donc son nom sur cette feuille qu'il remettra obligatoirement à la fin de l'épreuve

Tableau de réponses :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a																				
b																				
c																				
d																				
e																				

Exercice 1: Torseurs cinématique d'un solide

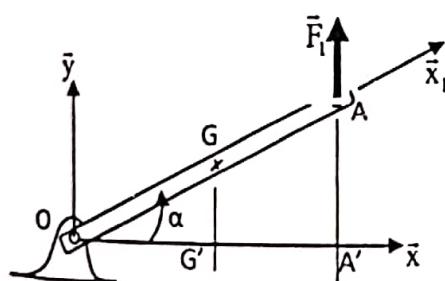


Figure 1

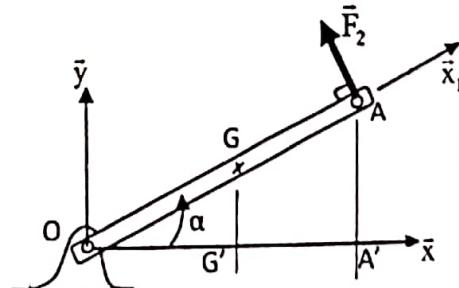


Figure 2

Une barre (S_1) de longueur $OA = L = 20 \text{ cm}$ et de masse $m = 5 \text{ kg}$ est articulée, sans frottement, en O par rapport à un socle (S_0). Un ouvrier devrait lever de la position horizontale à la position verticale, en la faisant tourner autour de l'axe horizontal $\Delta(O, \bar{z})$ à la vitesse constante de $N \text{ tr/s}$.

1°) L'ouvrier peut y arriver sans trop d'effort (trop de travail) :

a) En exerçant sur la barge une force verticale \vec{F}_1 force horizontale

c) En exerçant plutôt une

b) En exerçant plutôt une force \vec{F}_2 qui lui est perpendiculaire

d) Le travail de l'ouvrier est le même

2°) - Le torseur cinématique de la barre OA au point G est :

a) $[\mathcal{V}_1^2]_G = 2\pi N \bar{z} + \epsilon 2\pi L (\sin \alpha \bar{x} + \cos \alpha \bar{y})$ b) $[\mathcal{V}_1^2]_G = 2\pi N \bar{z} + \epsilon 2\pi L \sin \alpha \bar{x}$

c) $[\mathcal{V}_1^2]_G = \epsilon 2\pi L (-\sin \alpha \bar{x} + \cos \alpha \bar{y})$ d) Aucune des trois réponses précédentes

3°) - Pendant la montée de la barre, la puissance \mathcal{P}_g développée par le poids (action de la pesanteur g sur S_1) de la barre à une position quelconque est :

a) $\mathcal{P}_g = -mg \frac{\dot{L}\alpha}{2}$ b) $\mathcal{P}_g = -mg L \dot{\alpha} \sin \alpha$ c) $\mathcal{P}_g = -mg \frac{L\dot{\alpha}}{2} \cos \alpha$ d) $\mathcal{P}_g = -mg \frac{L\dot{\alpha}}{2} \sin \alpha$

4°) - On en déduit alors, en joules, le travail du poids pendant toute la levée :

- a) 4,9 b) -9,8 c) 8,9 d) aucune des trois valeurs précédentes

5°) - La puissance développée (en watts) par le poids, au début du mouvement de montée est d'environ :

- a) -6,2 b) 49 c) -4,9 d) aucune des trois valeurs précédentes

Exercice 2 : Théorème du moment statique

On considère toujours l'ouvrier de l'exercice précédent.

6°) - La force verticale \bar{F}_1 qu'il exerce a une intensité de :

- a) 9,8 b) 24,5 c) 12,3 d) 42,9

7°) - En newtons, les composantes X et Y de l'action du socle sur la barre, en O sont :

- a) (0 ; 9,5) b) (0 ; 24,5) c) (9,5 ; 42,9) d) (12,25 ; 42,9)

8°) - Comme sur la figure 2, l'ouvrier exerce maintenant une force \bar{F}_2 perpendiculaire à la barre.

Lorsque la barre est à une position α de 60° , le module F_2 de cette force est :

- a) 9,8 b) 24,5 c) 12,3 d) 42,9

9°) - Les composantes X' et Y' de cette force valent en newtons :

- a) (0 ; 9,5) b) (0 ; 24,5) c) (9,5 ; 42,9) d) (12,25 ; 42,9)

10°) - A la fin de l'opération de montée, l'ouvrier aura effectué un travail en joules de :

- a) 6,2 b) -49 c) 4,9 d) aucune des trois valeurs précédentes

Exercice 3 :

- a) $\frac{mg}{\theta_0} \cdot (1 - \cos\theta_0)$ b) $mg(1 - \frac{1 - \cos\theta_0}{\theta_0 \tan\theta_0})$ c) $-\frac{mg}{(1 - \cos\theta_0)}$ d) $\frac{mg}{\theta_0} \cdot \frac{(1 - \cos\theta_0)}{\sin\theta_0}$

18°) - La première coordonnée plückérienne du torseur $[F_{0/1}]_O$ est :

- a) $\frac{mg}{\theta_0} \cdot (1 - \cos\theta_0)$ b) $mg(1 - \frac{1 - \cos\theta_0}{\theta_0 \tan\theta_0})$ c) $-\frac{mg}{(1 - \cos\theta_0)}$ d) $\frac{mg}{\theta_0} \cdot \frac{(1 - \cos\theta_0)}{\sin\theta_0}$

18°) - La troisième coordonnée plückérienne du torseur $[F_{0/1}]_O$ est :

- a) $\frac{mg}{\theta_0} \cdot (1 - \cos\theta_0)$ b) $mg(1 - \frac{1 - \cos\theta_0}{\theta_0 \tan\theta_0})$ c) $-\frac{mg}{(1 - \cos\theta_0)}$ d) 0

18°) - La sixième coordonnée plückérienne du torseur $[F_{0/1}]_O$ est :

- a) $\frac{mg}{\theta_0} \cdot (1 - \cos\theta_0)$ b) $mg(1 - \frac{1 - \cos\theta_0}{\theta_0 \tan\theta_0})$ c) $-\frac{mg}{(1 - \cos\theta_0)}$ d) 0

19°) - Pour le triplet $(m, R, \theta_0) = (2 \text{ kg}, 1\text{m}, 180^\circ)$, les coordonnées du point G dans $R(O, \vec{c}_x, \vec{c}_y, \vec{c}_z)$ sont :

- a) $(\pi; 1; 0)$ b) $(2\pi; 1; 0)$ c) $(2\pi; 1; 0)$ d) $(2\pi; 1; 0)$

20°) - Et la première coordonnée plückérienne du torseur $[F_{0/1}]_O$ est :

- a) $\frac{4\pi}{10}$ b) $\frac{4}{10\pi}$ c) $\frac{4}{\pi}$ d) $\frac{40}{2\pi}$

LE CANDIDAT NE METTRA PAS DE RENDRE LE SUJET AVEC SA COPIE D'EXAMEN

Tableau de réponses :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a				X						X				X		X				
b					X	X									X			X		
c			X				X		X		X				X			X		
D	X	X	X	X										X			X			
E								X			X							X		X

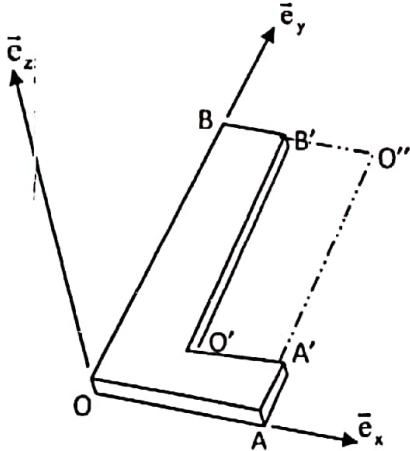


Recommandations :

- Les résultats et conclusions sont à encadrer, au risque de ne pas être appréciés par le correcteur.
- L'étudiant remettra obligatoirement le présent énoncé à l'intérieur de son cahier de composition

Exercice : Torseurs de pesanteur et d'apesanteur 7 pts

Dans l'équerre de maçon ci-contre, de masse volumique ρ , on donne $OA=a$, $OB=b$, $AA'=BB'=l$ (L minuscule), épaisseur $e \ll a, b$, et l . On indice par 1 l'action de la pesanteur sur la plaque initialement pleine $OAO'B$ et par 2 celle de l'apesanteur sur la partie évidée $A'O'B'O'$.



1°) - Donner les coordonnées des points O , O' , O'' , A , A' , B , et B' . 1 pt

2°) - Réduisez les torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$ en O

2 pts

3°) - Par exploitation de l'axe central du torseur résultant $[T]=[T_1]+[T_2]$, déterminer la position du centre de masse G de l'équerre incomplète $OAA'O'B'B$. 2 pts

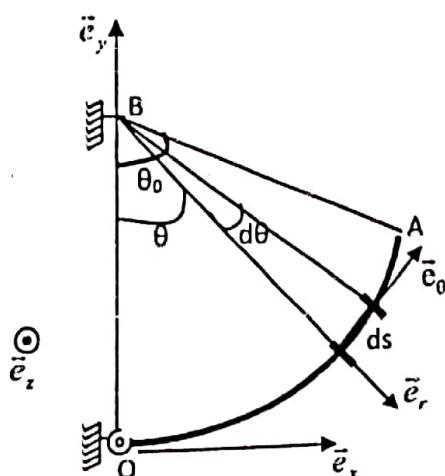
4°) - Déterminer G dans le cas particulier où $a=b=l$. Interprétation. 1 + 1 pts

Problème : Torseur d'action continue 13 pts

Rappels: -Le vecteur position du centre de masse G d'un système matériel (S) est donné dans un référentiel $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\int_{(S)} dm} \times \int_{(S)} \overrightarrow{OP} \cdot dm$$

- Un mécanisme plan de normale \bar{x} , n'admet aucune translation possible suivant \bar{x} (les torseurs d'action mécanique n'ont donc aucune composante dans la



direction \vec{x}) mais des rotations possibles uniquement autour de \vec{x} (les moments sont colinéaires à \vec{x})

On appelle inconnues de liaison, les coordonnées plückériennes X, Y, Z, L, M, N du torseur d'action mécanique imposé par une liaison.

Un arc de cercle $O\hat{A}$, de rayon R , de largeur et épaisseur négligeables, et d'angle au sommet θ_0 , a sa masse m distribuée (de toute évidence) sur la circonférence. L'arc, désigné par (S_1) est maintenu, tangent en O à l'axe horizontal (O, \vec{e}_x) , grâce à un fil tendu AB , passant par son centre de courbure B situé sur la verticale (O, \vec{e}_y) . Le référentiel $R_0(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est lié au mur vertical désigné par (S_0) , et on désigne successivement par (S_2) et (S_g) , le fil AB et la terre (action de pesanteur). Une liaison rotule en O autorise un mouvement de l'arc par rapport au mur.

Les données du problème sont m , R et θ_0 .

1^o) – Donner l'expression de la densité linéique de masse $\lambda(s)$, sur cette circonférence. (on rappellera, en passant, l'unité de cette grandeur). 1 pt

2^o) – Donner l'expression de la masse élém dm entourant un point P , d'abscisse curviligne s sur cet arc. 1 pt

3^o) – Par utilisation de la définition rappelée ci-dessus, déterminer le centre de masse G de l'arc (S_1) . On examinera ensuite le cas particulier où $\theta_0 = \pi$ 1,5 pt + 1 pt

4^o) – Donner une expression des torseurs suivants en notation duale : a) $[\mathcal{H}_{g/1}]_G$ b) $[\mathcal{H}_{g/1}]_O$. 0,5+1 pt

5^o) – a) A partir du torseur cinématique de la liaison en O , donner une expression du torseur $[\mathcal{H}_1]_O$. 1 pt

b) Avec l'hypothèse de mécanisme plan, donner une expression plus simple de $[\mathcal{H}_1]_O$. 1 pt

6^o) – Donner en fonction de T , R et θ_0 , le torseur $[\mathcal{H}_1]_O$ 1 pt

7^o) – Déterminer donc (P.F.S.) les inconnues du problème (tension T du fil et inconnues de liaison). 2 pts

4^o) – A.N. : Pour un arc en quart de cercle de rayon 1 m et de masse 1 kg, calculer ces inconnues. 2 pts

ECRIBBANT MON ETAT PAS DE RENDRE LE SUJET AVEC SA COPIE D'EXAMEN



Recommandations: Les résultats et conclusions sont à encadrer, au risque de ne pas être appréciés par le correcteur; L'étudiant remettra obligatoirement le présent énoncé à l'intérieur de son cahier de composition

Exercice 1: Torseur d'action continue

10 pts

Un arc de cercle \hat{AB} , de rayon R , de largeur et épaisseur négligeables, et d'angle au sommet θ_0 , a sa masse m distribuée (de toute évidence) sur la circonference. L'arc est, à tout moment, tangent en A, à l'axe horizontal (A, \vec{e}_x).

A-Torseur de l'action mécanique de pesanteur

1°)- Donner l'expression de la densité linéique $\lambda(s)$ de masse, sur cette circonference. (on appellera, en passant, l'unité de cette grandeur). 1 pt

2°)- Donner l'expression du torseur $d[\mathcal{T}]$ de l'action infinitésimale de pesanteur s'exerçant en un point d'abscisse curviligne s quelconque de cet arc. 1 pt

3°)- Réduire en A le torseur $[\mathcal{T}]$ de l'action globale de pesanteur sur cet arc. 1 pts

4°)- Déterminer (équations cartésiennes dans $R_o(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$) l'axe central de ce torseur 1 pt

5°)- En déduire la position angulaire θ_G du centre de masse de cet arc. 1 pt

B-Liaisons entre solides

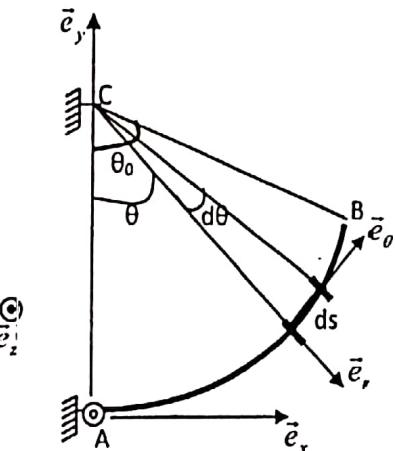
L'arc ci-dessus, appelé (S_1) dans la suite, est maintenu dans cette position grâce à un fil tendu AC, noté (S_2) et une liaison pivot d'axe (A, \vec{e}_z). La tension (module) du fil est notée T ; C est le centre de courbure de l'arc.

1°)- Réduire, en O, le torseur $[\mathcal{T}]$ de l'action du fil tendu sur l'arc. 1 pt

2°)- Partant du torseur cinématique du mouvement de (S_1) par rapport au mur vertical noté (S_0) , donner la forme générale du torseur $[\mathcal{T}_{(S_0)}]$ de l'action mécanique du mur sur l'arc en A. 1 pt

3°)- Avec l'hypothèse du mécanisme plan, déterminer les inconnues du problèmes (la tension T du fil et les inconnues de liaison) 1,5 pts

4°)- ΔN : Pour un arc en quart de cercle de rayon 1 m et de masse 1 kg, calculer ces inconnues. 1,5 pt



Exercice 2 : Statique graphique

10 pts

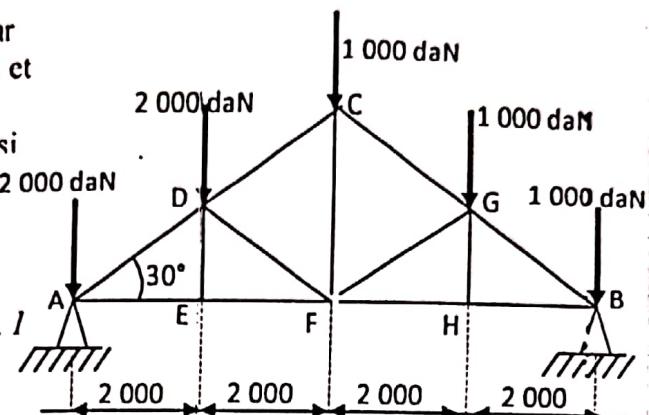
Les efforts exercés par une toiture sur une ferme de type Howe sont tous verticaux et représentés sur la figure ci-contre ; les dimensions nécessaires de la ferme sont aussi données, en millimètres.

1^o) - Déterminer, par calcul, les efforts exercés par cette ferme sur les linteaux représentés par les appuis simples en A et B. 1 pt

2^o) - Déterminer, par Cremona, les efforts dans toutes les barres de la structure. 9 pts

N.B. : on laissera apparaître (traits fins) les éléments de construction du Cremona et on présentera les résultats sous la forme d'un tableau spécifiant l'effort, sa direction, son sens, son module et sa sollicitation.

Pour les résultats de cet exercice, remplir le tableau du verso



LE CANDIDAT N'OBLIGERA PAS DE RENDRE LE SUJET AVEC SA COPIE D'EXAMEN

N° ordre	Effort		Direction (angle avec l'axe des $x>0$)	Sens	Intensité	Sollicitation	
						Compression	Traction
1	Action de l'appui en A						
2	Action de l'appui en B						
	Action de la	Sur le					
3	AE	A					
4	AE	E					
5	AD	A					
6	AD	D					
7	EF	E					
8	EF	F					
9	DE	D					
10	DE	E					
11	DF	D					
12	DF	F					
13	DC	D					
14	DC	C					
15	CF	C					
16	CF	F					
17	CG	C					
18	CG	G					
19	FG	F					
20	FG	G					
21	FH	F					
22	FH	H					
23	GH	G					
24	GH	H					
25	HB	H					
26	HB	B					
27/28	GB	B / G					

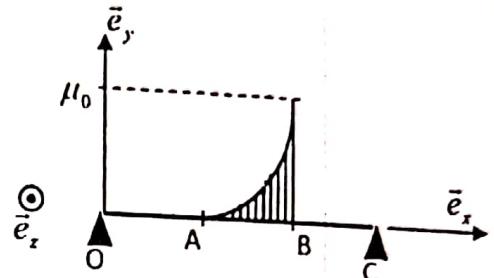


Recommendations: Les résultats et conclusions sont à encadrer, au risque de ne pas être appréciés par le correcteur; L'étudiant remettra obligatoirement le présent énoncé à l'intérieur de son cahier de composition

Exercice 1: Torseur d'action continue

10 pts

Soit la distribution de masse linéaire de profil parabolique (de sommet A) ci-contre, sur un pont d'appuis simples O et C et de masse propre négligeable. On donne en unités S.I. : OC = L, $x_A = a$, $x_B = b$ et $y_B = \mu_0$.



1°) - Donner l'expression de l'action infinitésimale de pesanteur s'exerçant en un point d'abscisse x quelconque sur le pont. 2 pts

2°) - Réduire en O le torseur de l'action de pesanteur sur le pont. 2 pts

3°) - Déterminer l'axe central (équations cartésiennes) de ce torseur 2 pts

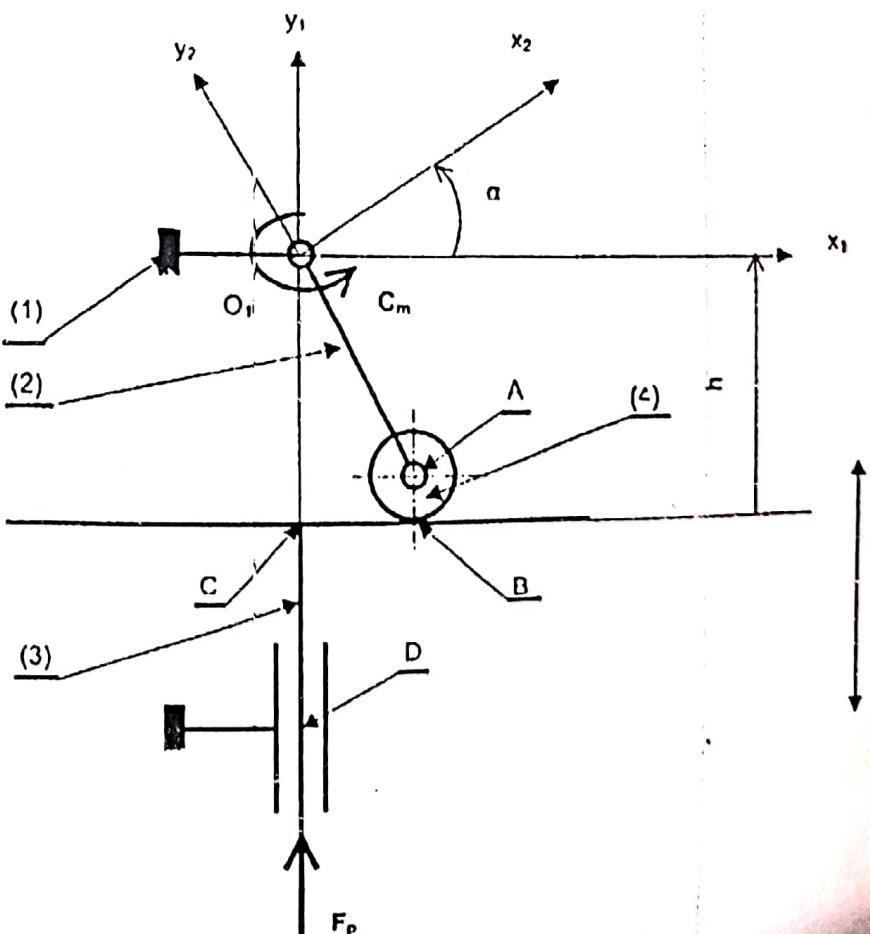
4°) - Calculer les actions mécaniques des appuis du pont. A.N. : L = 20 m, b = 2a = 10 m, $\mu_0 = 1000 \text{ kg}$ 4 pts

Exercice 2: Torseur d'action

transmissible et relation entrée sortie de mécanisme 10 pts

Un mécanisme de transformation de mouvement est représenté par le schéma ci-contre. Il est utilisé par une pompe volumétrique dont le piston (3) est animé d'un mouvement de translation alternative. L'arbre d'entrée (2) possède une partie excentrée en A sur laquelle est monté un galet (4) destiné à réduire les effets du frottement au niveau du contact en B.

Les dimensions caractéristiques du mécanisme sont : $O_1A = e$, $AB = r$ et les paramètres



géométriques variables sont les grandeurs algébriques $\alpha = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ et $O_1C = h(\alpha)$.

L'arbre moteur est soumis au couple C_m et le piston à l'effort F_p de pression. On suppose les liaisons sans frottement, et on néglige les effets d'inertie et de pesanteur.

1^o - Donner l'expression des torseurs d'action de liaison suivants :

a) liaison pivot $L_{2/1}$ en O_1 0,5 pt

b) contact linéaire rectiligne $L_{3/4}$ en B 0,5 pt

c) liaison pivot glissant $L_{3/1}$ en C 0,5 pt

2^o - En supposant que le problème est plan, donner les nouvelles formes des torseurs précédents. 1,5 pt

3^o - Relation entrée-sortie

a) Déterminer les équations d'équilibre de l'ensemble (2) + (4) 1 pt

b) Déterminer les équations d'équilibre du solide (3) 1 pt

c) Donner l'expression des différentes composantes des torseurs d'action de liaison en fonction de F_p , e et α .

d) Déduire de ce qui précède, la relation entre le couple moteur et l'effort de pression. 1 pt

4^o - Le piston ayant un diamètre $d = 16$ mm et l'excentricité étant de $e = 4$ mm, calculer le couple moteur nécessaire pour assurer un bon fonctionnement à une pression de 150 bars.

1 pt

5^o - Donner la notation duale du torseur $[F_{1/3}]$ exprimé au point D tel que $O_1D = H$.

1 pt



Recommendations:

- Chaque étudiant a droit à un seul exemplaire de ce sujet qu'il remettra d'ailleurs inséré dans son cahier de composition.
- Les réponses aux QCM (exercice 3) consisteront uniquement à cocher les cases correspondantes, sur cette feuille.

Exercice 1: Pylône électrique

(4 pts)

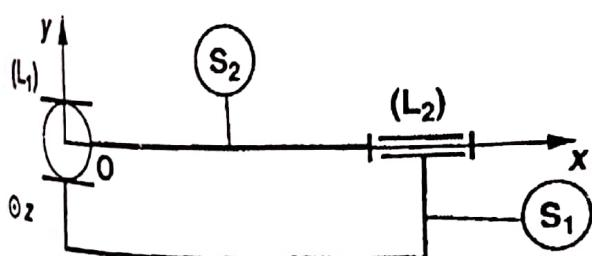
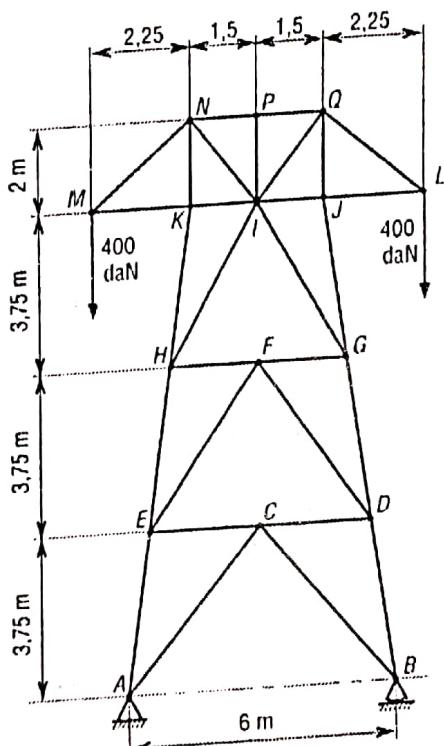
Un pylône servant au transport de l'énergie électrique et représenté sur la figure ci-contre subit, de la part de ces câbles, des forces verticales de 4.10^4 N aux points M et L.

Déterminer les efforts exercés dans les barres CB et DB. (on présentera le résultat sous forme d'un tableau explicitant toutes les caractéristiques de ces efforts).

Exercice 2: Hyperstatisme et mobilité de mécanisme (6 pts)

Comme indiqué sur le schéma ci-dessous, une table (S_1) est montée dans un bâti (S_2) par l'intermédiaire des liaisons :

- L_1 : linéaire annulaire d'axe (O, \bar{x}), de centre O
- L_2 : pivot d'axe (O, \bar{x}).



On suppose qu'en plus des actions mécaniques dans les liaisons, il s'exerce sur (S2) une action mécanique extérieure représentée par un torseur de la forme : $[F_e] = \begin{Bmatrix} X_e & L_e \\ 0 & 0 \\ 0 & N_e \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$;

1°) - Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce dispositif (on utilisera la méthode du déterminant principal)

2°) - Pour que la liaison équivalente aux deux liaisons précédentes soit une liaison pivot isostatique d'axe (O, \bar{x}), la liaison L_1 demeurant inchangée, proposer deux modifications possibles de la liaison L_2 dont l'une sera une liaison rotule de centre A, tel que $\overline{OA} = \lambda \bar{x}$.

Exercice 3 : Questions à choix multiples (10 pts)

L'étudiant cochera dans la case correspondant à la réponse qu'il estime bonne pour la question posée. Une réponse juste compte pour +1 point et une réponse fausse enlève 1/2 point.

Question 1 : En notation duale, un torseur s'écrit $[T] = \bar{e}_y$, dans le repère $R(O, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$;

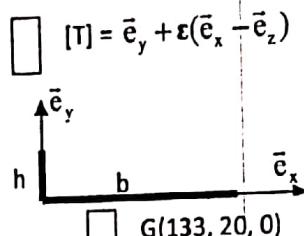
dans le repère $R'(A, \bar{e}_v, \bar{e}_z, \bar{e}_x)$ avec $A(1,1,1)$, ce torseur s'écrira :

$[T] = \bar{e}_x + \bar{e}_y + \varepsilon \bar{e}_z$ $[T] = \bar{e}_x - \bar{e}_z$ $[T] = \bar{e}_y + \varepsilon(\bar{e}_x + \bar{e}_y + \bar{e}_z)$

$[T] = \bar{e}_y + \varepsilon(\bar{e}_x - \bar{e}_z)$

Question 2 : Une équerre incomplète d'épaisseur et largeur négligeables devant la base $b = 6 \text{ m}$ et la hauteur $h = 60 \text{ cm}$ a son centre de masse donné par (en cm) :

$G(67, 20, 0)$ $G(77, 7, 0)$ $G(67, 40, 0)$



$G(133, 20, 0)$

Question 3 : L'adhérence au point P entre deux solides (S_1) et (S_2) se traduit par le fait que :

$\bar{V}_1^!P = \bar{0}$ $\bar{V}_2^!P \neq \bar{0}$ $\bar{V}_2^!P$ est dans le plan tangent $\bar{V}_2^!P$ est normal au plan tangent

Question 4 : Lors d'un contact ponctuel entre deux solides (S_1) et (S_2), l'effort normal et le moment de pivotement sont toujours :

Au moins l'un unitaire Au moins l'un nul perpendiculaires colinéaires

Question 5 : Pour qu'un solide soumis à trois forces soit en équilibre, il est nécessaire que ces forces soient :

Au moins l'une nulle Orthoradiales parallèles coplanaires

Question 6 : Deux liaisons en série entre deux solides (S_1) et (S_2) sont toujours telles que

- | | | | |
|---|--|---|---|
| <input type="checkbox"/> Leurs torseurs cinématiques sont égaux | <input type="checkbox"/> Leurs torseurs d'actions mécaniques transmissibles sont égaux | <input type="checkbox"/> Leurs torseurs cinématique et d'actions mécaniques transmissibles sont égaux | <input type="checkbox"/> Leurs torseurs cinématique et d'actions mécaniques transmissibles sont orthogonaux |
|---|--|---|---|

Question 7 : Une liaison plane de normale \bar{e}_y est en série avec une liaison rotule de centre O, entre un solide (S_2) en mouvement par rapport à (S_1) auquel est lié $R(O, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$. Cette association est équivalente à une :

- | | | | |
|---|---|---|--|
| <input type="checkbox"/> Liaison ponctuelle de normale $(0, \bar{e}_y)$ | <input type="checkbox"/> Liaison pivot d'axe $(0, \bar{e}_y)$ | <input type="checkbox"/> Liaison pivot d'axe $(0, \bar{e}_x)$ | <input type="checkbox"/> Liaison pivot glissant d'axe $(0, \bar{e}_x)$ |
|---|---|---|--|

Question 8 : Une structure triangulée reposant sur deux appuis fixes et contenant b barres et n noeuds est hyperstatique lorsque :

b < 2n - 3 b > 2n - 3 b < 2n - 4 b > 2n - 4

Question 9 : Lorsqu'un nœud d'une structure en équilibre est sollicité par 3 barres dont 2 sont colinéaires :

Les efforts dans les barres colinéaires sont toujours opposés

Les efforts dans les barres colinéaires sont toujours nuls

L'effort dans la 3^{ème} barre est toujours nul

Aucun des trois choix précédents

Question 10 : Un arbre monté sur un bâti par l'intermédiaire de deux liaisons pivot glissant d'axes (O, \vec{e}_x) et (O', \vec{e}_x) , avec $\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{e}_x = \vec{0}$, est de degré de mobilité :

 0 1 2 Aucun des 3 choix précédents

* Rédaction claire et concise, avec résultats encadrés est exigée

* Ne pas oublier de glisser cette feuille, à la fin de l'épreuve, dans votre cahier de composition

TOUTE TENTATIVE SE SORTIR AVEC UN EXEMPLAIRE DE CE SUJET SERA SANCTIONNÉE PAR LA NOTE NULLE AVEC TRADUCTION EVENTUELLE AU CONSEIL DE DISCIPLINE !!!

Solution des QCM (Exercice 3) : _____

N.B. : Les réponses proposées sont identifiées, en ordre, par les lettres a, b, c et d, respectivement

Q.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Rép.	d	b	a	d	d	b	a	d	d	b	



Recommandations :

1 - Pour les deux exercices ci-dessous, l'étudiant présentera les résultats finaux sous la forme de tableau indiquant pour chaque effort le sens (orientation), la sollicitation du nœud (traction, compression) et le module avec la direction (angle avec l'axe x)

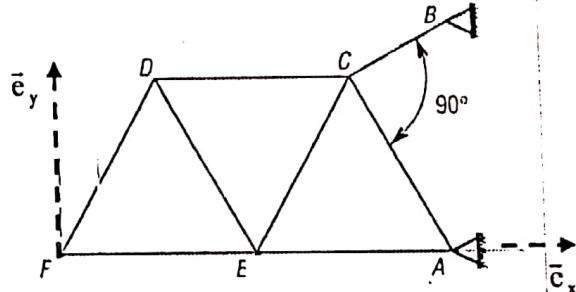
2 - Le candidat remettra obligatoirement cette feuille, où il devra effectuer sa résolution graphique

Exercice 1 : Résolution graphique d'un cantilever (10 pts)

Dans la structure en cantilever, représentée sur la figure ci-contre, on a : AE = EF = FD = DE = DC = AC = 4 m, et deux forces verticales descendantes en F et E de modules respectifs 3 et $2 \cdot 10^3$ N.

- 1°) - Déterminer les efforts dans toutes les barres.
- 2°) - Déterminer les efforts aux articulations en A et B

(On sera essentiellement, dans cet exercice, une résolution graphique sur le papier millimétré ci-dessous)



Exercice 2 : Résolution d'un cantilever par calcul direct (10 pts)

Reprendre l'exercice n°1 ci-dessus et retrouver les résultats par calculs.

Inserer le papier mm ici avant photocopie

Exercice 3 : Torseur d'action exercée pour tenir une poutre

Un ouvrier O tient une barre AB, à une distance x de l'extrémité A. La barre est cylindrique de diamètre de base d , négligeable devant sa longueur L , et de masse volumique ρ . On propose d'étudier le torseur de l'effort exercé par cet ouvrier pour maintenir la barre toujours horizontale.



1°) – Réduisez en O, les torseurs de la pesanteur s'exerçant respectivement sur les parties OA et OB de la barre (indices 1 et 2 respectivement)

2°) – En déduire le torseur effort exercé par l'ouvrier.

3°) – Déterminer la position x_0 des mains de l'ouvrier pour laquelle le moment qu'il exerce est minimal.

4°) – Reprendre les mêmes questions en supposant que l'ouvrier doit maintenir la barre inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale.

5°) – A.N.: $\theta = 90^\circ$, $\rho = 4000 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $L = 2 \text{ m}$, $d = 10 \text{ cm}$. Donner, en notation duale, le torseur exercé par l'ouvrier.

Exercice 4 : Le système Vis-Ecrou (ITAGA 351)

On considère le système vis-écrou d'axe (O, \bar{x}) représenté sur la figure 1 ci-contre ; le repère galiléen $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est lié à la vis (1). Sur l'écrou (2) s'exerce l'action mécanique d'un corps (E) représenté par

$$\text{le torseur } [\bar{F}_{E/2}] = \begin{Bmatrix} \bar{F} \\ \bar{C} \end{Bmatrix}_0 \text{ avec } \begin{cases} \bar{F} = -F \bar{x} ; (F > 0) \\ \bar{C} = C \bar{x} \end{cases}$$

Les surfaces de liaison entre la vis (1) et l'écrou (2) sont des surfaces hélicoïdales d'axe (O, \bar{x}) , de section droite triangulaire de demi-angle au sommet β .

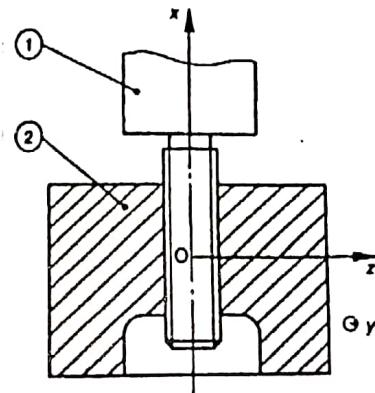
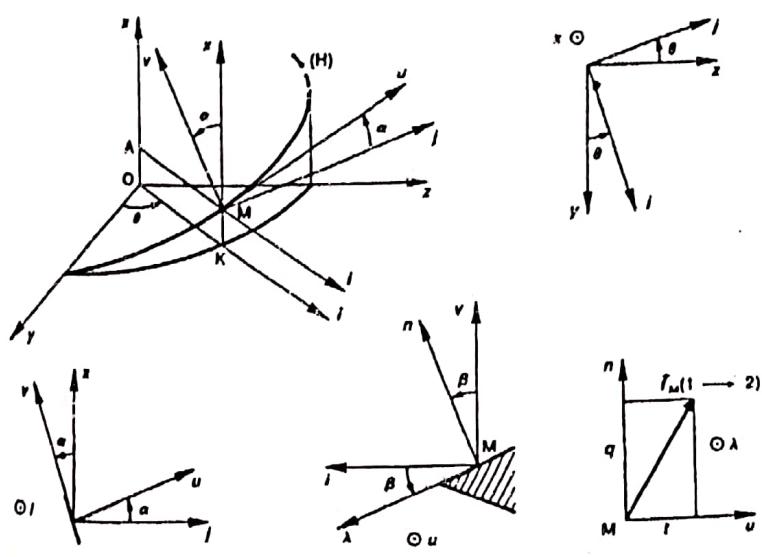


Figure 1



Au cours du mouvement de l'écrou (2) par rapport à la vis (1), un point de contact M, lié à l'écrou, décrit dans (R) une hélice circulaire à droite (H), d'axe (O, \bar{x}) , de rayon r , d'inclinaison α (figure 2 ci-dessous).

Figure 2

On note :

- K projection du point M sur le plan (O, \bar{x}, \bar{y})

- $\bar{i} = \frac{\overrightarrow{OK}}{\|\overrightarrow{OK}\|}$ et \bar{j} un vecteur tel que la base $(\bar{x}, \bar{i}, \bar{j})$ soit orthonormée directe.

- $\theta = (\bar{y}, \bar{i})$

- \bar{u} vecteur unitaire tangent en M à l'hélice (H) et \bar{v} tel que $(\bar{i}, \bar{u}, \bar{v})$ soit orthonormée directe, de sorte qu'on a $(\bar{j}, \bar{u}) = (\bar{x}, \bar{v}) = \alpha$.

Le profil de la section droite triangulaire se trouve dans le plan (M, \bar{u}, \bar{i}) ;

On note :

- \bar{n} vecteur unitaire normal en M au filet de la vis, dirigé vers l'extérieur de la matière ; il est perpendiculaire à \bar{u} et on a $(\bar{v}, \bar{n}) = \beta$.

- $\bar{\lambda}$ le troisième vecteur t.q. la base $(\bar{u}, \bar{n}, \bar{\lambda})$ soit orthonormée directe.

- f le coefficient de frottement entre les surfaces en contact (supposé le même en tout point) et φ l'angle de frottement ($f = \tan \varphi$).

- $\bar{f}_{M1/2}$ la densité surfacique au point M de l'action de contact de (1) sur (2) ; on pose

$$\bar{f}_{M1/2} = q \cdot \bar{n} + t \cdot \bar{u} + t' \bar{\lambda}$$

Dans l'étude, on suppose que l'écrou est à la limite du glissement par rapport à la vis, ou que l'écrou, dynamiquement équilibré par rapport à l'axe (O, \bar{x}) , est en mouvement uniforme par rapport à la vis. Dans cette hypothèse, le vecteur vitesse de glissement au point M de (2) par rapport à (1) a pour direction \bar{u} , et les lois de Coulomb indiquent que $t' = 0$. Ainsi $\bar{f}_{M1/2} = q \cdot \bar{n} + t \cdot \bar{u}$; le but de l'étude est de déterminer pour ce mécanisme :

- La condition d'irréversibilité, c.à.d. l'impossibilité, lorsque C est nul, d'obtenir un mouvement relatif de l'écrou par rapport à la vis, quelle que soit la valeur de F.

- La pression de contact entre les surfaces de liaison.

- La valeur du moment résultant \bar{C} pour faire tourner l'écrou dans un sens ou dans l'autre.

- Son efficacité en fonction du sens de rotation.

1°) - On suppose que $C = 0$ et $F \neq 0$. Quelle relation doit-il y avoir entre f , α et β , pour que l'écrou reste en équilibre par rapport à la vis ?

2°) - Déterminer la pression de contact q , supposée uniforme, entre les surfaces de liaison, en fonction de F.

3°) – Pour simplifier la suite de l'étude, on considère que la vis est à filet carré avec un coefficient de frottement fictif $f' = f/\cos \beta$ entre les surfaces en contact, pour que les résultats trouvés soient valables pour un filet triangulaire avec un coefficient de frottement f (on posera également $f' = \tan \varphi'$). Lorsque la relation d'irréversibilité est vérifiée, déterminer la composante du moment résultant \bar{C} du torseur d'action mécanique de (E) qui entraîne l'écrou (2) dans un mouvement uniforme par rapport à la vis :

a) dans le sens positif autour de (O, \vec{x}) ;

b) dans le sens négatif autour de (O, \vec{x}) .

4°) – Lorsque (E) fait tourner l'écrou (2) d'un tour, le travail du moment résultant \bar{C} est $W(\bar{C}) = C \cdot 2\pi$; $C = C_1$ lorsque (E) fait tourner l'écrou dans le sens positif, et $C = C_2$ dans le sens contraire.

Le travail de la résultante générale \bar{F} est $W(\bar{F}) = -F \times 2\pi p$, où p , pas réduit de la vis, est donné par $p = r_{moy} \cdot \tan \alpha$. On définit l'efficacité d'un tel mécanisme par le rapport

$\eta = \frac{|W(\bar{F})|}{|W(\bar{C})|}$. Déterminer dans les deux cas de la question précédente l'efficacité du système vis-écrou.