****** EXERCICE 1 ****** ***Pour*** $a \in \mathsf{IR}$, ***on pose :***

$$f_a(x) = \frac{x^{a-1}}{1+x^{2a}}, \quad I(a) = \int_0^1 f_a(x)\ \mathrm{d}x, \quad J(a) = \int_1^{+\infty} f_a(x)\ \mathrm{d}x, \quad K(a) = \int_0^{+\infty} f_a(x)\ \mathrm{d}x.$$

1°) *Sans chercher à trouver la nature, ni calculer la valeur des intégrales* $I(a)$, $J(a)$, $K(a)$ **:**

a) *Disons ce qu'on peut dire des parités respectives de* $I(a)$, $J(a)$, $K(a)$, ***vues, chacune, comme fonction de la variable réelle*** a.

Chacune de ces 3 intégrales est de la forme suivante : $L(a) = \displaystyle\int_c^d f_a(x)\ \mathrm{d}x$, avec $c, d \in \overline{\mathsf{IR}}_+ = [\,0\,,\,+\infty\,]$,

et c, d ***sont 2 bornes ne dépendant pas du réel*** a. De ce fait (sachant que $a \in \mathsf{IR} \implies -a \in \mathsf{IR}$),

$$L(-a) = \int_c^d f_{-a}(x)\ \mathrm{d}x. \qquad (\textbf{\textit{E1.1}})$$

Or, $\forall\, a \in \mathsf{IR}$ et $\forall\, x \in \,]\,0\,,\,+\infty\,[$,

$$f_{-a}(x) = \frac{x^{-a-1}}{1+x^{-2a}} = \frac{x^{-a-1}}{x^{-2a}\,(1+x^{2a})} = \frac{x^{a-1}}{1+x^{2a}}\ ;\ \text{ d'où : } \boxed{f_{-a}(x) = f_a(x)}. \qquad (\textbf{\textit{E1.2}})$$

En injectant (***E1.2***) dans (***E1.1***), il vient : $\forall\, a \in \mathsf{IR}$, $L(-a) = L(a)$. (***E1.3***)

Il s'ensuit que, $\forall\, a \in \mathsf{IR}$, l'équivalence suivante est vraie (sachant que $\forall\, a \in \mathsf{IR}$, $\forall\, x \in \,]\,0\,,\,+\infty\,[$, $f_a(x) \in \mathsf{IR}$) :

$$\big(L(-a) \text{ existe dans } \mathsf{IR}\big) \iff \big(L(a) \text{ existe dans } \mathsf{IR}\big)\ ;$$

et donc l'équivalence suivante est aussi vraie (sachant que $\mathcal{D}_L = \{\,a \in \mathsf{IR}\,/\ L(a) \text{ existe dans } \mathsf{IR}\}$:

$$\big(-a \in \mathcal{D}_L\big) \iff \big(a \in \mathcal{D}_L\big). \qquad (\textbf{\textit{E1.4}})$$

Mais (***E1.3***) et (***E1.4***) $\implies$ $L(a)$ est une fonction paire de la variable réelle a.

En appliquant ce qui précède, successivement, avec $(c, d) = (0, 1)$, $(c, d) = (1, +\infty)$ et $(c, d) = (0, +\infty)$, on conclut que : $\boxed{I(a),\ J(a),\ K(a) \text{ sont 3 fonctions paires de la variable réelle } a}$.

b) *Montrons qu'on peut écrire* $I(a) = J(a)$, ***et disons ce que cela signifie dans ce contexte.***

Effectuons, dans $I(a)$, le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, i.e. $x = \dfrac{1}{t} = \varphi(t)$. On a :

1. la fonction φ définit une bijection strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\,0\,,\,+\infty\,[$ vers $]\,0\,,\,1\,[$;

2. la fonction f est continue sur $]\,0\,,\,1\,[$.

Par conséquent, le changement de variable considéré transforme $I(a)$ en une intégrale $M(a)$, de même nature et de même valeur en cas de convergence. Pour obtenir $M(a)$, notons que (compte tenu de (***E1.2***)) :

$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t, \quad \text{tandis que } \big(x \underset{>}{\longrightarrow} 0 \iff t \longrightarrow +\infty\big), \quad \text{et } \big(x = 1 \iff t = 1\big),$$

$$f_a(x) = f_a\Big(\frac{1}{t}\Big) = \frac{t^{-a+1}}{1+t^{-2a}} \implies f_a(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{t^{-a-1}}{1+t^{-2a}}\,\mathrm{d}t = -f_{-a}(t)\,\mathrm{d}t = -f_a(t)\ \mathrm{d}t\ ;$$

$$\implies M(a) = \int_{+\infty}^1 -f_a(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{+\infty}^1 f_a(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f_a(t)\ \mathrm{d}t = J(a).$$

Ainsi, on peut écrire que $I(a) = J(a)$, et cela signifie donc, dans ce contexte, que les intégrales $I(a)$ et $J(a)$ sont de même nature et ont la même valeur en cas de convergence. ***Cqfd.***

2°) a) *Selon les valeurs du réel* a, ***trouvons l'équivalent simple de*** $f_a(x)$ ***quand*** $x \underset{>}{\longrightarrow} 0$.

- **Cas 1 :** $a = 0$.

Alors $f_a(x) = f_0(x) = \dfrac{x^{-1}}{1+1} = \dfrac{x^{-1}}{2} = \dfrac{1}{2\,x} \implies f_0(x) \underset{x \underset{>}{\to} 0}{\sim} \dfrac{x^{-1}}{2} = \dfrac{1}{2\,x}$.

- **Cas 2 :** $a > 0$.

Alors $\displaystyle\lim_{x \underset{>}{\to} 0} x^{2a} = 0 \implies \lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{1}{1+x^{2a}} = 1 \implies f_a(x) \underset{x \underset{>}{\to} 0}{\sim} x^{a-1} = \frac{1}{x^{1-a}}$.

- **Cas 3 :** $a < 0$.

  On a : $a < 0 \implies -a > 0 \implies$ d'après le **Cas 2** ci-dessus, $f_{-a}(x) \underset{x \underset{>}{\to} 0}{\sim} x^{-a-1} = \dfrac{1}{x^{1+a}}$.

  Comme, d'après (***E1.2***), $f_{-a}(x) = f_a(x)$, il vient alors : $f_a(x) \underset{x \underset{>}{\to} 0}{\sim} x^{-a-1} = \dfrac{1}{x^{1+a}}$.

- • • ***Conclusion :*** $\boxed{f_a(x) \underset{x \underset{>}{\to} 0}{\sim} \begin{cases} \dfrac{x^{-1}}{2} = \dfrac{1}{2\,x} & \text{si } a = 0 \\ x^{a-1} = \dfrac{1}{x^{1-a}} & \text{si } a > 0 \\ x^{-a-1} = \dfrac{1}{x^{1+a}} & \text{si } a < 0 \end{cases}}$,

  ou, de manière plus synthétique : $\boxed{f_a(x) \underset{x \underset{>}{\to} 0}{\sim} \begin{cases} \dfrac{x^{-1}}{2} = \dfrac{1}{2\,x} & \text{si } a = 0 \\ x^{|a|-1} = \dfrac{1}{x^{1-|a|}} & \text{si } a \neq 0 \text{ (i.e. } a \in \mathrm{IR}^*) \end{cases}}$.

b) ***En utilisant un critère de convergence approprié, discutons la nature de $I(a)$ selon les valeurs du réel a.***

Il s'agit d'une ***I.I.S.*** en 0^+ (a priori).

- **Cas 1 :** $a = 0$.

  D'après **2°)a)**, on a : $f_0(x) \underset{x \underset{>}{\to} 0}{\sim} \dfrac{1}{2\,x} = \dfrac{A}{(x-0)^\alpha}$, avec $\begin{cases} A = 1/2 \in \mathrm{IR}_+^* \\ \alpha = 1 \in \mathrm{IR}. \end{cases}$

Comme $\alpha \geqslant 1$, alors, d'après la ***Règle de Riemann en*** 0^+, $I(0)$ diverge.

- **Cas 2 :** $a \in \mathrm{IR}^*$.

  Alors, d'après **2°)a)**, on a : $f_a(x) \underset{x \underset{>}{\to} 0}{\sim} x^{|a|-1} = \dfrac{1}{x^{1-|a|}} = \dfrac{A}{(x-0)^\alpha}$, avec $\begin{cases} A = 1 \in \mathrm{IR}_+^* \\ \alpha = 1 - |a| \in \mathrm{IR}. \end{cases}$

Or, $a \in \mathrm{IR}^* \implies |a| > 0 \implies 1 - |a| < 1 \implies$ d'après la ***Règle de Riemann en*** 0^+, $I(a)$ converge.

- ***Conclusion sur la nature de*** $I(a)$ ***:*** $\boxed{(I(a) \text{ converge}) \iff (a \in \mathrm{IR}^*)}$.

c) ***Déterminons l'ensemble des nombres réels a pour lesquels $I(a)$ est une intégrale définie.***

Pour y arriver, notons d'abord que, pour tout nombre réel a fixé, la fonction $f_a(x)$ est continue en tout $x \in]\,0\,,\,1]$. Par conséquent, pour qu'elle soit intégrable, au sens de Riemann, sur $[\,0\,,\,1]$, et donc que $I(a)$ soit une ***intégrale définie au sens de Riemann***, cela va dépendre du comportement de la fonction $f_a(x)$ dans le voisinage droit du nombre réel 0, pour voir si ce dernier est bien, ou pas, une singularité dans l'intégrale $I(a)$. Compte tenu des résultats d'équivalents trouvés dans la réponse à la question **2°)a)** ci-dessus, on distingue 2 cas principaux :

- **Cas 1 :** $a = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f_0(x) \underset{x \underset{>}{\to} 0}{\sim} \dfrac{1}{2\,x} \\ \displaystyle\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \dfrac{1}{2\,x} = +\infty \end{array}\right\} \implies \lim_{x \underset{>}{\to} 0} f_0(x) = +\infty$$

$\implies$ la fonction f_0 n'est pas bornée au voisinage droit de 0 ;
$\implies$ la fonction f_0 n'est pas bornée sur $]\,0\,,\,1]$;
$\implies$ $I(0)$ n'est pas une intégrale définie au sens de Riemann.

- **Cas 2 :** $a \in \mathrm{IR}^*$.

  Ici, on a : $f_a(x) \underset{x \underset{>}{\to} 0}{\sim} x^{|a|-1} \implies \displaystyle\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f_a(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0} x^{|a|-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } |a| = 1, \\ 0 & \text{si } |a| > 1, \\ +\infty & \text{si } |a| < 1. \end{cases}$

Il s'ensuit que :

– si $|a| < 1$, i.e. $a \in]-1\,,\,1[$, alors $\lim\limits_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} f_a(x) = +\infty$, et donc même conclusion que pour $a = 0$;

– si $|a| \geqslant 1$, i.e. $a \in]-\infty\,,\,-1] \cup [1\,,\,+\infty[$, alors $\lim\limits_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} f_a(x) \in \mathrm{IR}$,

$\Longrightarrow$ la fonction f_a est bornée au voisinage de $x = 0$ dans $]0\,,\,1[$,
$\Longrightarrow$ le nombre réel $x = 0$ n'est pas une singularité dans $I(a)$,
$\Longrightarrow$ $I(a)$ est, en fait, une ***intégrale définie au sens de Riemann***.

• ***Conclusion :*** $\boxed{(\,I(a) \text{ est une intégrale définie}) \iff (\,|a| \geqslant 1), \text{ i.e. } a \in]-\infty\,,\,-1] \cup [1\,,\,+\infty[}$.

3°) *Utilisons ce qui précède pour trouver (N.B. Efficacement ! ! !) :*

a) *Le domaine de définition* $\mathcal{D}_K$ ***de*** $K(a)$ ***dans*** IR.

Pour tout $a \in \mathrm{IR}$, $K(a)$ étant une ***I.I.C.*** en 0^+ (a priori) et $+\infty$, alors $\boxed{\mathcal{D}_K = \left\{a \in \mathrm{IR} \,/\, K(a) \text{ converge}\right\}}$.

Pour étudier l'intégrale impropre $K(a)$, on part de la décomposition : $K(a) = \underbrace{\int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x}_{I(a)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} f_a(x)\,\mathrm{d}x}_{J(a)}$.

Il vient que : $\boxed{\boldsymbol{(K(a) \textit{ converge}) \iff (I(a) \textit{ et } J(a) \textit{ convergent})}}$.

Mais, d'après la réponse à la question **1°)b)**, $I(a)$ et $J(a)$ sont de même nature. Il s'ensuit donc que :

$$\boxed{\boldsymbol{(K(a) \textit{ converge}) \iff (I(a) \textit{ converge})}}.$$

De la discussion ci-dessus sur la nature de $I(a)$, on déduit alors que : $\boxed{(\,K(a) \text{ converge}) \iff (a \in \mathrm{IR}^*)}$.

• ***Conclusion :*** $\boxed{\mathcal{D}_K = \mathrm{IR}^* = \mathrm{IR} \setminus \{0\}}$.

b) *La valeur de la fonction* $K(a)$ ***pour les réels*** a ***de son domaine de définition.***

Plaçons nous donc dans le cas où $a \in \mathcal{D}_K = \mathrm{IR}^*$. Alors $I(a)$, $J(a)$ et $K(a)$ sont convergentes, donc $\in \mathrm{IR}$. Et leurs valeurs sont liées par : $K(a) = I(a) + J(a)$. Ceci, compte tenu de **1°)b)**, entraîne : $K(a) = 2\,I(a)$.

Ainsi pour trouver la valeur de $K(a)$ pour $a \in \mathrm{IR}^*$, il suffit de calculer celle de $I(a)$. De plus, on a vu, à la question **1°)a)**, que $I(a)$ est une fonction paire. Il suffit donc ici de calculer sa valeur pour les réels $a > 0$.

• • • *Calcul de* $I(a)$***, pour un réel*** $a > 0$.

Pour $a \in \mathrm{IR}^*$, $I(a)$ étant une ***I.I.S.*** en 0^+ (a priori) convergente, alors sa valeur est donnée par :

$$I(a) = \lim_{X \underset{>}{\longrightarrow} 0} F_a(X), \quad \text{avec}, \quad \forall\, X \in]0\,,\,1], \;\; F_a(X) = \int_X^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x = \int_X^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^{2a}}\,\mathrm{d}x\;;$$

Or, $a \neq 0 \implies F_a(X) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_X^1 \frac{a\,x^{a-1}}{1+x^{2a}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_X^1 \frac{(x^a)'}{1+(x^a)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_X^1 [\,\mathrm{Arctg}\,(x^a)\,]'\,\mathrm{d}x$,

$$\implies F_a(X) = \frac{1}{a}\left[\mathrm{Arctg}\,(x^a)\right]_{x=X}^{x=1} = \frac{1}{a}\left[\mathrm{Arctg}\,(1) - \mathrm{Arctg}\,(X^a)\right], \text{ i.e. } \boxed{F_a(X) = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{4} - \mathrm{Arctg}\,(X^a)\right]}\;;$$

$$\implies I(a) = \frac{1}{a}\lim_{X \underset{>}{\longrightarrow} 0}\left[\frac{\pi}{4} - \mathrm{Arctg}\,(X^a)\right] = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{4} - \lim_{X \underset{>}{\longrightarrow} 0} \mathrm{Arctg}\,(X^a)\right].$$

Or, ici : $a > 0 \implies \lim\limits_{X \underset{>}{\longrightarrow} 0} X^a = 0 \implies \lim\limits_{X \underset{>}{\longrightarrow} 0} \mathrm{Arctg}\,(X^a) = 0 \implies \boxed{\forall\, a > 0, \;\; I(a) = \dfrac{\pi}{4\,a}}$.

• • • *Déduction 1 : Valeur de* $I(a)$***, pour un réel*** $a < 0$.

D'après réponse à la question **1°)a)**, on sait que $I(a)$ est une fonction paire, donc $I(a) = I(-a)$.

Or, pour $a < 0$, on a : $-a > 0 \implies I(-a) = \dfrac{\pi}{4\,(-a)}$, d'après le calcul ci-dessus.

Les 2 observations précédentes entraînent que : $\boxed{\forall\, a < 0, \quad I(a) = \dfrac{\pi}{4\,(-a)} = -\dfrac{\pi}{4\,a}}$.

• • • ***Déduction 2 : Valeur de*** $I(a)$***, pour un réel*** $a \in \mathrm{IR}^*$***.***

On regroupe les 2 cas $a > 0$ et $a < 0$ par : $\boxed{\forall\, a \in \mathrm{IR}^*, \quad I(a) = \dfrac{\pi}{4\,|\,a\,|}}$.

• • • ***Déduction 3 et Conclusion :*** $\forall\, a \in \mathrm{IR}^*, \quad K(a) = 2\,I(a) \implies \boxed{\boxed{\forall\, a \in \mathrm{IR}^*, \quad K(a) = \dfrac{\pi}{2\,|\,a\,|}}}$.

• • • ***Remarque/Commentaire n°1 :***

Ceux/celles qui ont traité cette question pensent certainement l'avoir « liquidé » avec aisance, dans le cadre d'un « fax » apparemment trivial à leurs yeux. Ils/elles doivent se détromper. ***Au maximum une ou deux copies ont répondu comme il fallait à cette question.*** En effet, presque tou(te)s ceux/celles qui ont répondu à cette question l'ont fait sans tenir compte du contexte de l'énoncé, à savoir la précision imposée, et écrite en gras dans l'énoncé au début de tout le **3°)**, i.e. :

« Utiliser ce qui précède pour trouver (N.B. Efficacement ! ! !) : »

Les un(e)s et les autres ont tout simplement répondu à cette dernière question de l'Exercice comme si cette précision n'existait pas : ils/elles ont allègrement calculé $K(a)$ sans tenir compte (ou très peu) de ce qui préccédait dans l'énoncé. Ce qui est la preuve qu'ils/elles n'ont pas compris la structure globale de l'Exercice ***!!!***

C'est alors le lieu ici de préciser qu'***un énoncé d'épreuve d'examen est un cahier de charges à satisfaire*** : il faut en respecter les termes précis en répondant aux questions posées, ceci en fonction du contexte où elles sont posées.

FIN de l'EXERCICE 1

****** EXERCICE 2 ****** ***Etudions la nature des séries :***

$\boxed{\textit{(1)} \displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{\operatorname{sh}(1/n)}{\ln n}}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$: $u_n = \dfrac{\operatorname{sh}(1/n)}{\ln n} \geqslant 0$.

On sait que : $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\operatorname{sh} x \underset{x \longrightarrow 0}{\sim} x$. D'où : $\operatorname{sh} \dfrac{1}{n} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Il s'ensuit que :

$$u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \cdot \ln n} = v_n .$$

D'après, le ***Critère de comparaison des séries à termes*** $\geqslant 0$, il s'ensuit que :

$$\text{les 2 séries } \sum_{n \geqslant 2} u_n \text{ et } \sum_{n \geqslant 2} v_n \text{ sont de même nature.} \qquad (\textbf{\textit{E2.1}})$$

• • • ***Nature de la série*** $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} v_n = \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ **.**

Pour trouver la nature de la série, observons que, $\forall n \geqslant 2$ $(n \in \mathbb{N})$: $v_n = f(n)$,

où f est la fonction de $[2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in [2, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln x} \geqslant 0$.

C'est une fonction dérivable sur $[2, +\infty[$, de dérivée $f'(x) = -(1 + \ln x)\,[f(x)]^2 < 0$, $\forall x \in [2, +\infty[$,

$\Longrightarrow$ f est décroissante et $\geqslant 0$ sur l'intervalle $[2, +\infty[$ de $\mathbb{R}$,

$\Longrightarrow$ d'après le ***Critère de comparaison d'une série avec une I.I.S. en*** $+\infty$,

la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} v_n$ est de même nature que $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \ln x}$, ***I.I.S*** en $+\infty$.

Or, par changement de variable, on a : $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \ln x} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x} \underset{t = \ln x}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, sachant que

1. la fonction f est continue sur $]2, +\infty[$;

2. la fonction $\varphi(t) = e^t$ réalise une bijection strictement $\nearrow$ de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\ln 2, +\infty[$ vers $]2, +\infty[$.

Il vient que I est de même nature que $J = \displaystyle\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, avec $a = \ln 2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha = 1 \in \mathbb{R}$,

$\Longrightarrow$ I est divergente, car J est une ***I.I.S. de Riemann*** en $+\infty$, avec $\alpha \leqslant 1$.

- Conclusion sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} v_n = \sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln n}$: cette série est divergente. $(\textbf{\textit{E2.2}})$

• • • ***Conclusion :*** $(\textbf{\textit{E2.1}})$ et $(\textbf{\textit{E2.2}})$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n \geqslant 2} u_n = \sum_{n \geqslant 2} \frac{\operatorname{sh}(1/n)}{\ln n} \text{ est divergente}}$.

• • • Approche alternative pour trouver la nature de l'intégrale impropre I.

On pouvait aussi trouver la nature de I en revenant à la définition de la nature d'une ***I.I.S.*** en $+\infty$.

En effet, posons : $\forall X \in [2, +\infty[$, $F(X) = \displaystyle\int_2^X \frac{\mathrm{d}x}{x \cdot \ln x}$.

Alors on a : $F(X) = \displaystyle\int_2^X \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x} \underset{t = \ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \big[\ln t\big]_{x = \ln 2}^{x = \ln X} = \ln(\ln X) - \ln(\ln 2) = \ln\left(\frac{\ln X}{\ln 2}\right)$;

$\Longrightarrow \displaystyle\lim_{X \longrightarrow +\infty} F(X) = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\ln X}{\ln 2}\right) = +\infty \Longrightarrow I$ est divergente.

$\boxed{\textbf{(2)} \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{[\,(2\,n+1)\,!\,]^2}{(n+1)\,!\cdot(3\,n+1)\,!}}$. Posons, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$: $u_n \;=\; (-1)^n\dfrac{[\,(2\,n+1)\,!\,]^2}{(n+1)\,!\cdot(3\,n+1)\,!}$.

On remarque que, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\neq 0$. De plus, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{[\,(2\,n+3)\,!\,]^2}{(n+2)\,!\cdot(3\,n+4)\,!}\times\dfrac{(n+1)\,!\cdot(3\,n+1)\,!}{[\,(2\,n+1)\,!\,]^2}$,

$$\Longrightarrow\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left[\frac{(2\,n+3)\,!}{(2\,n+1)\,!}\right]^2\times\frac{(n+1)\,!}{(n+2)\,!}\times\frac{(3\,n+1)\,!}{(3\,n+4)\,!} = \frac{[\,(2\,n+3)(2\,n+2)\,]^2}{(n+2)(3\,n+4)(3\,n+3)(3\,n+2)},$$

$$\Longrightarrow\ \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{[\,(2\,n+3)(2\,n+2)\,]^2}{(n+2)(3\,n+4)(3\,n+3)(3\,n+2)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{[\,(2\,n)^2\,]^2}{n\cdot(3\,n)\cdot(3\,n)\cdot(3\,n)},$$

$$\Longrightarrow\ \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2^{\,2\times 2}}{3^{\,3}} = \frac{2^{\,4}}{27}\ \Longrightarrow\ \boxed{\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{16}{27}<1}.$$

$\Longrightarrow$ D'après la ***règle de d'Alembert***, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{[\,(2\,n+1)\,!\,]^2}{(n+1)\,!\cdot(3\,n+1)\,!}\ \text{converge}}$.

• • • *Remarque/Commentaire n°2 :*

Ci-dessus, on pouvait simplifier davantage l'expression $|\,u_{n+1}/u_n\,|$ en procédant comme suit :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{[\,(2\,n+3)(2\,n+2)\,]^2}{(n+2)(3\,n+4)(3\,n+3)(3\,n+2)},= \frac{4\,(n+1)\,(2\,n+3)^2}{3\,(n+2)(3\,n+4)(3\,n+2)},$$

$$\Longrightarrow\ \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{4\,(n+1)\,(2\,n+3)^2}{3\,(n+2)(3\,n+4)(3\,n+2)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{4\cdot n\cdot(2\,n)^2}{3\cdot n\cdot(3\,n)\cdot(3\,n)},$$

$$\Longrightarrow\ \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{4\cdot 2^{\,2}}{3^{\,3}} = \frac{4\cdot 4}{27}\ \Longrightarrow\ \boxed{\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{16}{27}<1}.$$

Mais cette manière de faire n'apporte strictement rien, en termes d'efficacité, par rapport à la solution proposée ci-dessus.

• • • *Remarque/Commentaire n°3 :*

Comme le terme général de cette série contenait des factorielles, certain(e)s ont pensé à utiliser la ***formule de Stirling*** :

$$\boxed{n\,!\ \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim}\ \left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{2\pi n}}.$$

En appliquant cette formule successivement aux 3 factorielles $(2\,n+1)\,!$, $(n+1)\,!$, $(3\,n+1)\,!$, et, compte tenu des propriétés des équivalents des suites numériques au voisinage de l'infini, ils/elles ont déduit que (encore que pas toujours ...) :

$$|\,u_n\,|\ \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim}\ \frac{\left[\left(\dfrac{2\,n+1}{e}\right)^{2\,n+1}\cdot\sqrt{2\pi\,(2\,n+1)}\,\right]^2}{\left(\dfrac{n+1}{e}\right)^{n+1}\cdot\sqrt{2\pi\,(n+1)}\cdot\left(\dfrac{3\,n+1}{e}\right)^{3\,n+1}\cdot\sqrt{2\pi\,(3\,n+1)}}.$$

Mais, ensuite, il fallait simplifier le membre droit (***plutôt horrible !!!***) de cette équivalence, pour arriver à l'équivalent le plus simple de $|\,u_n\,|$. C'est faisable, mais peu aisé, avec risque élevé d'erreurs de calcul. De fait, aucun(e) de ceux/celles qui se sont lancé(e)s dans cette approche n'est arrivé(e) à bon port.

Nous insistons sur le fait que la ***règle de d'Alembert*** est, de très loin, le critère le plus efficace (et le plus sûr) pour trouver la nature de cette série. Néanmoins, pour édifier les intéressé(e)s (et les autres), nous proposons, ci-après, l'adaptation appropriée de cette approche passant par la formule de Stirling pour trouver la nature de la série concernée.

••• ***Approche alternative pour trouver la nature de la série*** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{[\,(2\,n+1)\,!\,]^2}{(n+1)\,!\cdot(3\,n+1)\,!}$ **:**

On a les faits suivants :

$$\left.\begin{array}{l}(2\,n+1)\,! \;=\; (2\,n+1)\cdot(2\,n)\,! \\ 2\,n+1 \;=\; 2\,n\Big(1+\dfrac{1}{2\,n}\Big) \;\Longrightarrow\; 2\,n+1 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} 2\,n \\ (2n)\,! \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \Big(\dfrac{2n}{e}\Big)^{2n}\cdot\sqrt{2\pi(2n)} \;=\; 4^n\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^{2n}\cdot 2\sqrt{\pi n}\end{array}\right\} \begin{array}{l}\Longrightarrow\; (2\,n+1)\,! \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} (2n)\cdot 4^n\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^{2n}\cdot 2\sqrt{\pi n} \\ \Longrightarrow\; [\,(2\,n+1)\,!\,]^2 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} (16n^2\,)\cdot 16^{\,n}\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^{4n}\cdot \pi n\;;\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}(n+1)\,! \;=\; (n+1)\cdot n\,! \\ n+1 \;=\; n\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big) \;\Longrightarrow\; n+1 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} n \\ n\,! \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \Big(\dfrac{n}{e}\Big)^{n}\cdot\sqrt{2\pi\,n}\end{array}\right\} \Longrightarrow\; (n+1)\,! \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} n\cdot\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^{n}\cdot\sqrt{2\pi\,n}\;;$$

$$\left.\begin{array}{l}(3\,n+1)\,! \;=\; (3\,n+1)\cdot(3\,n)\,! \\ 3\,n+1 \;=\; 3\,n\Big(1+\dfrac{1}{3\,n}\Big) \;\Longrightarrow\; 3\,n+1 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} 3\,n \\ (3n)\,! \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \Big(\dfrac{3n}{e}\Big)^{3n}\cdot\sqrt{2\pi(3n)} \;=\; 27^n\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^{3n}\cdot\sqrt{6\pi\,n}\end{array}\right\} \Longrightarrow\; (3\,n+1)\,! \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} (3n)\cdot 27^n\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^{3n}\cdot\sqrt{6\pi\,n}\;;$$

$$\Longrightarrow\; |\,u_n\,| \;=\; \frac{[\,(2\,n+1)\,!\,]^2}{(n+1)\,!\cdot(3\,n+1)\,!} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{(16n^2\,)\cdot 16^n\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^{4n}\cdot\pi n}{n\cdot\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^{n}\cdot\sqrt{2\pi\,n}\times(3n)\cdot 27^n\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^{3n}\cdot\sqrt{6\pi\,n}} \;=\; \frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot\Big(\frac{16}{27}\Big)^n,$$

$$\Longrightarrow\; |\,u_n\,| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{8}{3\sqrt{3}}\cdot\Big(\frac{16}{27}\Big)^n \;=\; \lambda\,\rho^n,\ \text{ avec }\ \lambda=\frac{8}{3\sqrt{3}}\in\mathbb{R}_+^*\ \text{ et }\ \rho=\frac{16}{27}\in\mathbb{R}_+\,.$$

Comme $\rho<1$, alors, d'après la ***Règle*** *« $\lambda\,\rho^n$ »* , la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}u_n$ est convergente.

$\boxed{\textit{(3)}\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}e^n\ln(\operatorname{th}n)}$. Posons, $\forall\,n\in\mathbb{N}^*$: $u_n \;=\; e^n\ln(\operatorname{th}n)\leqslant 0$, car $n>0 \;\Longrightarrow\; \operatorname{th}n\in\,]\,0\,,\,1\,[$.

On sait que : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\operatorname{th}n \;=\; 1$ et $\ln x \underset{x\longrightarrow 1}{\sim} x-1$. D'où : $\ln(\operatorname{th}n) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \operatorname{th}n-1$. (***E2.3***)

$$\text{Or, }\ \operatorname{th}n \;=\; \frac{\operatorname{sh}n}{\operatorname{ch}n} \;=\; \frac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}} \;=\; \frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}} \;\Longrightarrow\; \operatorname{th}n-1 \;=\; \frac{-2\,e^{-2n}}{1+e^{-2n}}. \qquad (\textbf{\textit{E2.4}})$$

$$\text{Comme }\ \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{1+e^{-2n}} \;=\; 1,\ \text{ alors }\ (\textbf{\textit{E2.4}}) \;\Longrightarrow\; \operatorname{th}n-1 \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} -2\,e^{-2n}. \qquad (\textbf{\textit{E2.5}})$$

Mais, (***E2.3***) et (***E2.5***) $\Longrightarrow\; \ln(\operatorname{th}n) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} -2\,e^{-2n} \;\Longrightarrow\; u_n \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} e^n\times-2\,e^{-2n} \;=\; -2\,e^{-n}$,

$$\Longrightarrow\; |\,u_n\,| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} 2\,e^{-n} \;=\; \lambda\,\rho^n,\ \text{ avec }\ \lambda=2\in\mathbb{R}_+^*\ \text{ et }\ \rho=e^{-1}.$$

Comme $\rho<1$, alors, d'après la ***Règle*** *« $\lambda\,\rho^n$ »* , $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}e^n\ln(\operatorname{th}n) \text{ est convergente}}$.

••• ***Remarque/Commentaire n°4 :***

Très peu de copies ont réussi à étudier correctement la nature de cette série numérique. Soit ! Mais il est extrêmement curieux qu'une bonne proportion des copies aient réussi à ***« démontrer »*** que cette série diverge, et ceci après avoir ***« démontré »*** que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n \;=\; +\infty$. C'est d'autant plus aberrant que $u_n\leqslant 0$ (et même $u_n<0$), $\forall\,n\in\mathbb{N}^*$, comme signalé d'entrée ci-dessus ***!!!***

$\boxed{\textit{(4)} \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n^2} e^{-(4+5i)n}}$. Posons, $\forall\, n\in \mathbb{N}^* :\ u_n = \left(1+\frac{5}{n}\right)^{n^2} e^{-(4+5i)n} \in \mathbb{C}$.

On a, $\forall\, n\in \mathbb{N}^* :\ u_n = \left(1+\frac{5}{n}\right)^{n^2}\cdot e^{-4n}\cdot e^{-5in}$, avec $\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n^2}\cdot e^{-4n}$ qui est un réel $\geqslant 0$,

$\Longrightarrow\ |\,u_n\,| = \left(1+\frac{5}{n}\right)^{n^2}\cdot e^{-4n}\cdot \left|\,e^{-5in}\right| = \left(1+\frac{5}{n}\right)^{n^2}\cdot e^{-4n}$ (car $\theta=-5\,n\in\mathbb{R} \Longrightarrow \left|\,e^{-5in}\right| = \left|\,e^{i\theta}\right| = 1$) ;

$\Longrightarrow\ \sqrt[n]{|\,u_n\,|} = |\,u_n\,|^{1/n} = \left[\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n^2}\cdot e^{-4n}\right]^{1/n} = \left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}\cdot e^{-4}$.

Or, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n} = e^5 \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{|\,u_n\,|} = e^5\cdot e^{-4} \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{|\,u_n\,|} = e > 1}$.

$\Longrightarrow$ D'après la ***règle de Cauchy***, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n^2} e^{-(4+5i)n} \text{ diverge}}$.

$\boxed{\textit{(5)} \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{\sqrt{n}} e^{-(4+5i)\sqrt{n}}}$. Posons, $\forall\, n\in \mathbb{N}^* :\ u_n = n^{\sqrt{n}} e^{-(4+5i)\sqrt{n}} \in \mathbb{C}$.

On a, $\forall\, n\in \mathbb{N}^* :\ u_n = n^{\sqrt{n}}\cdot e^{-4\sqrt{n}}\cdot e^{-5i\sqrt{n}}$, avec $n^{\sqrt{n}}\cdot e^{-4\sqrt{n}}$ qui est un réel $\geqslant 0$,

$\Longrightarrow\ |\,u_n\,| = n^{\sqrt{n}}\cdot e^{-4\sqrt{n}}\cdot\left|\,e^{-5i\sqrt{n}}\right| = n^{\sqrt{n}}\cdot e^{-4\sqrt{n}}$ (car $\theta=-5\sqrt{n}\in\mathbb{R} \Longrightarrow \left|\,e^{-5i\sqrt{n}}\right| = \left|\,e^{i\theta}\right| = 1$) ;

$\Longrightarrow\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}|\,u_n\,| = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^{\sqrt{n}}\cdot e^{-4\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{n}{e^4}\right)^{\sqrt{n}} = +\infty \Longrightarrow |\,u_n\,| \not\longrightarrow 0$,

$\Longrightarrow \boxed{u_n \not\longrightarrow 0} \Longrightarrow \boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{\sqrt{n}} e^{-(4+5i)\sqrt{n}} \text{ diverge}}$.

$\boxed{\textit{(6)} \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{\sqrt{n}} e^{-(4+5i)n}}$. Posons, $\forall\, n\in \mathbb{N}^* :\ u_n = n^{\sqrt{n}} e^{-(4+5i)n} \in \mathbb{C}$.

On a, $\forall\, n\in \mathbb{N}^* :\ u_n = n^{\sqrt{n}}\cdot e^{-4n}\cdot e^{-5in}$, avec $n^{\sqrt{n}}\cdot e^{-4n}$ qui est un réel $\geqslant 0$,

$\Longrightarrow\ |\,u_n\,| = n^{\sqrt{n}}\cdot e^{-4n}\cdot\left|\,e^{-5in}\right| = n^{\sqrt{n}}\cdot e^{-4n}$, car $\left|\,e^{i\theta}\right| = 1$, comme vu pour la série ***(4)*** ;

$\Longrightarrow\ \sqrt[n]{|\,u_n\,|} = |\,u_n\,|^{1/n} = \left(n^{\sqrt{n}}\cdot e^{-4n}\right)^{1/n} = n^{1/\sqrt{n}}\cdot e^{-4}$.

Or, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\ln\left(n^{1/\sqrt{n}}\right) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n^{1/\sqrt{n}} = e^0 = 1, \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{|\,u_n\,|} = e^{-4} < 1}$.

$\Longrightarrow$ D'après la ***règle de Cauchy***, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^{\sqrt{n}} e^{-(4+5i)n} \text{ converge}}$.

••• ***Remarque/Commentaire n°5 :***

Les 3 séries ***(4)***, ***(5)*** et ***(6)***, ci-dessus, sont bien ***à termes complexes***.

Elles ne sont pas à termes réels $\geqslant 0$ comme lu dans certaines copies.

La manière de traiter les séries à termes complexes (ou à termes réels quelconques) est explicitement détaillé dans le document de Cours remis sur les séries.

FIN de l'EXERCICE 2

****** EXERCICE 3 ******

On pose : $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$, et $C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+5)}$.

1°) *Sans calculer ni A, ni B, ni C, montrons que A, B et $C \in \mathrm{IR}$.*

Pour répondre à cette question, 2 approches possibles (et efficaces) étaient les suivantes :

• • ***Approche 1.***

Posons, $\forall n \in \mathrm{IN}$: $a_n = \frac{1}{2n+1}$ et $u_n = (-1)^n a_n$.

Alors, comme $u_n \in \mathrm{IR}$ ($\forall n \in \mathrm{IN}$), pour montrer que la somme infinie $A \in \mathrm{IR}$, il suffit de montrer que la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente. Pour cela, observons d'abord que :

$$\big(\forall n \in \mathrm{IN},\ u_n = (-1)^n a_n,\ \text{ avec } a_n \geqslant 0\big) \implies \sum_{n \geqslant 0} u_n \text{ est une } \textbf{\textit{série alternée}}. \qquad (\textbf{\textit{E3.1}})$$

De plus, son terme général u_n vérifie : $|\, u_n \,| = a_n \xrightarrow{\searrow} 0$. (***E3.2***)

Or, d'après le ***Critère des séries alternées***, (***E3.1***) et (***E3.2***) $\implies$ la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente.

$\implies$ $A \in \mathrm{IR}$.

Le même raisonnement marche avec $a_n = \frac{1}{2n+3}$ et $a_n = \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$.

D'où aussi : $B, C \in \mathrm{IR}$. ***Cqfd.***

• • ***Approche 2.***

Posons, $\forall n \in \mathrm{IN}$: $a_n = \frac{1}{2n+1}$, $b_n = \frac{1}{2n+3}$, $c_n = \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$,

$$u_n = (-1)^n a_n, \quad v_n = (-1)^n b_n, \quad w_n = (-1)^n c_n.$$

Alors, comme $u_n, v_n, w_n \in \mathrm{IR}$ ($\forall n \in \mathrm{IN}$), pour montrer que les 3 sommes infinies A, B, $C \in \mathrm{IR}$, il suffit de montrer que les 3 séries $\sum_{n \geqslant 0} u_n$, $\sum_{n \geqslant 0} v_n$, $\sum_{n \geqslant 0} w_n$ sont convergentes. Pour cela, observons d'abord que :

$$\forall n \in \mathrm{IN}, \quad a_n \geqslant 0, \quad b_n \geqslant 0, \quad c_n \geqslant 0.$$

Il s'ensuit que $\sum_{n \geqslant 0} u_n$, $\sum_{n \geqslant 0} v_n$, $\sum_{n \geqslant 0} w_n$ ***sont 3 séries alternées***. (***E3.3***)

De plus, leurs termes généraux respectifs vérifient :

$$|\, u_n \,| = a_n \xrightarrow{\searrow} 0, \quad |\, v_n \,| = b_n \xrightarrow{\searrow} 0, \quad |\, w_n \,| = c_n \xrightarrow{\searrow} 0. \qquad (\textbf{\textit{E3.4}})$$

Mais, d'après le ***Critère des séries alternées***,

$$(\textbf{\textit{E3.3}}) \text{ et } (\textbf{\textit{E3.4}}) \implies \text{les 3 séries } \sum_{n \geqslant 0} u_n,\ \sum_{n \geqslant 0} v_n,\ \sum_{n \geqslant 0} w_n \text{ sont convergentes.}$$

$\implies$ A, B, $C \in \mathrm{IR}$. ***Cqfd.***

• • • ***Remarque/Commentaire n°6 :***

Pour cette question, l'énoncé recommandait : « **N.B.** ***Soyez efficace !!!*** ».

L'efficacité ici consistait à constater que, pour les 3 séries dont A, B, C sont les sommes, leurs termes généraux respectifs ont la même structure de suite alternée et dont la valeur absolue tend (trivialement) vers 0 en décroissant. Par conséquent, l'étude de ces 3 sommes infinies pouvait se faire rapidement (et efficacement) :

1. soit en étudiant l'une de ces 3 sommes infinies, et signaler, ensuite, que le même raisonnement est valable pour les 2 autres sommes infinies (***Approche 1***) ;
2. soit de manière regroupée pour les 3 sommes infinies, sans qu'on ait besoin de le faire séparément, pour chacune des 3, de manière essentiellement répétitive (***Approche 2***).

En particulier, rechercher une méthode de démonstration différente pour chacune des 3 sommes infinies A, B, C (comme cela s'est lu dans beaucoup de copies) était, dans ce contexte, ***assez grossièrement inefficace.***

••• ***Remarque/Commentaire n° 7 :***

Au vu de ce qui s'est lu dans un certain nombre non négligeable de copies, il apparaît indispensable de répéter ceci encore une fois : ***le Critère des séries alternées ne permet pas de démontrer la convergence absolue d'une série (ni sa non convergence absolue) !!!***

Les intéressé(e)s sont invité(e)s à lire plus attentivement leur document de Cours. En effet, ils y constateront que les expressions ***« convergence absolue »*** et ***« converge absolument »*** n'apparaissent nulle part dans le Théorème énonçant le ***Critère des séries alternées***. Et pour cause : la convergence absolue n'intervient pas du tout dans la démonstration de ce Théorème. Par conséquent, ***le Critère des séries alternées n'a rien à voir avec la convergence absolue (ou la non convergence absolue) d'une série !!!***

Ce critère de convergence se contente d'énoncer des hypothèses suffisantes pour qu'une série alternée soit convergente (mais ne permet pas de dire s'il y a convergence absolue ou pas).

La manière de raisonner de ces copies sur cette question était d'autant plus aberrante qu'il est trivial de voir (par la ***règle de Riemann***) que les 2 séries notées, ci-dessus, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ ***ne sont pas absolument convergentes***.

Etant, néanmoins, convergentes, ces 2 séries sont donc plutôt ***semi-convergentes !!!***

Et, en fait, une utilité auxiliaire du ***Critère des séries alternées*** est justement qu'il fournit le moyen le plus facile et le plus rapide de construire des séries semi-convergentes.

2°) ***On admet que :*** $A = \dfrac{\pi}{4}$***. Déduisons, successivement, les valeurs de*** B ***et*** C***.***

••• **Déduction 1 :** ***Valeur de*** $B = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$.

$$B = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)+1} \underset{k=n+1}{=} -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = -(A-1) \implies \boxed{B = 1-A}, \implies \boxed{B = 1-\frac{\pi}{4}}.$$

••• **Déduction 2 :** ***Valeur de*** $C = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+5)}$.

Il y avait, au moins, 2 approches possibles pour calculer la valeur de C***.***

•• **Calcul de** C **:** ***Approche 1.***

Ici, on part de l'observation suivante :

$$C = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{[2(n+1)+1]\cdot[2(n+1)+3]} \underset{k=n+1}{=} -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$= -\left(E-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - E, \quad \text{avec } E = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)}. \qquad (\textbf{\textit{E3.5}})$$

Ensuite, on a la *décomposition en éléments simples* : $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+3}\right)$;

$$\implies E = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) = \frac{A-B}{2} = A - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \qquad (\textbf{\textit{E3.6}})$$

Finalement,

$$(\textbf{\textit{E3.5}}) \text{ et } (\textbf{\textit{E3.6}}) \implies C = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \implies \boxed{C = \frac{5}{6} - \frac{\pi}{4}}.$$

•• **Calcul de** C **:** ***Approche 2.***

Ici, on commence plutôt directement par la *décomposition en éléments simples* :

$$\frac{1}{(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\right) ;$$

$$\Longrightarrow\ C = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5}\Big) = \frac{B-D}{2}, \quad \text{avec } D = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+5}, \qquad (\textbf{\textit{E3.7}})$$

où $D \in \mathbb{R}$, pour les mêmes raisons que A, B et C.

On pouvait, ensuite, procéder de 2 manières différentes, pour calculer D et déduire C :

- **Manipulation de D et déduction de C : *Approche 1.***

$$D = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)+3} \underset{k=n+1}{=} -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+3} = -\Big(B - \frac{1}{3}\Big) \Longrightarrow D = \frac{1}{3} - B\ ; \qquad (\textbf{\textit{E3.8}})$$

$$(\textbf{\textit{E3.7}}) \text{ et } (\textbf{\textit{E3.8}}) \Longrightarrow C = \frac{1}{2}\Big(B + B - \frac{1}{3}\Big) \Longrightarrow \boxed{C = B - \frac{1}{6}} \Longrightarrow \boxed{\boxed{C = \frac{5}{6} - \frac{\pi}{4}}}.$$

- **Manipulation de D et déduction de C : *Approche 2.***

$$D = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{2(n+2)+1} \underset{k=n+2}{=} \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = A - \Big(1 - \frac{1}{3}\Big) \Longrightarrow D = A - \frac{2}{3}\ ; \qquad (\textbf{\textit{E3.9}})$$

$$(\textbf{\textit{E3.7}}) \text{ et } (\textbf{\textit{E3.9}}) \Longrightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}\Big(B - A + \frac{2}{3}\Big)} \Longrightarrow C = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\Big), \text{ i.e. } \boxed{\boxed{C = \frac{5}{6} - \frac{\pi}{4}}}.$$

FIN de l'EXERCICE 3

****** *EXERCICE 4* ******

I - 1°) ***Rappelons les définitions et notations respectives d'une série convergente et de sa somme.*** **N.B.** ***Telles que données en Cours !***

Soit (u_n), une suite numérique, i.e. une ***suite de nombres réels ou complexes***.

1. La série numérique de terme général u_n, $\boxed{\text{notée } \sum_{n \geqslant n_0} u_n}$, est dite ***convergente*** lorsqu'on a :

$$\boxed{\lim_{N \longrightarrow +\infty} S_N = \ell \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \quad \text{où } S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n, \ \forall N \in \mathbb{N} / \ N \geqslant n_0}.$$

2. Lorsque c'est le cas, la ***somme*** de la série convergente $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$, $\boxed{\text{notée } \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n}$, est le nombre réel ou complexe donné par : $\boxed{\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \ell = \lim_{N \longrightarrow +\infty} S_N}$.

2°) ***En utilisant ces définitions, démontrons que :***

a) ***Si une série*** $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ ***converge absolument, alors*** $\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$.

Supposons qu'une série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge absolument, i.e. la série $\sum_{n \geqslant n_0} |u_n|$ converge. Alors :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n| = \lim_{N \longrightarrow +\infty} T_N \in \mathbb{R}_+, \quad \text{avec } T_N = \sum_{n=n_0}^{N} |u_n|, \ \forall N \in \mathbb{N} / \ N \geqslant n_0. \qquad (\textbf{\textit{E4.I.1}})$$

Mais comme la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est aussi convergente. Il s'ensuit que :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \longrightarrow +\infty} S_N \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \quad \text{avec } S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n, \ \forall N \in \mathbb{N} / \ N \geqslant n_0. \qquad (\textbf{\textit{E4.I.2}})$$

Or, d'après l'***Inégalité triangulaire (généralisée)*** pour les sommes finies, on sait que, $\forall N \in \mathbb{N} / \ N \geqslant n_0$:

$$\left| \sum_{n=n_0}^{N} u_n \right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} |u_n|, \quad \text{i.e. } |S_N| \leqslant T_N. \qquad (\textbf{\textit{E4.I.3}})$$

Mais $(\textbf{\textit{E4.I.2}}) \implies \lim_{N \longrightarrow +\infty} |S_N|$ existe et $\lim_{N \longrightarrow +\infty} |S_N| = \left| \lim_{N \longrightarrow +\infty} S_N \right|$. $\qquad (\textbf{\textit{E4.I.4}})$

Comme, de plus, $(\textbf{\textit{E4.I.1}}) \implies \lim_{N \longrightarrow +\infty} T_N$ existe, alors, d'après le ***Théorème de Comparaison des limites de suites réelles*** :

$$(\textbf{\textit{E4.I.3}}) \implies \lim_{N \longrightarrow +\infty} |S_N| \leqslant \lim_{N \longrightarrow +\infty} T_N. \qquad (\textbf{\textit{E4.I.5}})$$

Compte tenu de $(\textbf{\textit{E4.I.1}})$, $(\textbf{\textit{E4.I.2}})$ et $(\textbf{\textit{E4.I.4}})$, on a : $(\textbf{\textit{E4.I.5}}) \iff \left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$. ***Cqfd.***

> • • • ***Remarque/Commentaire n°8 :***
> La 1ère inégalité dans $(\textbf{\textit{E4.I.3}})$ est bien l'***Inégalité triangulaire (généralisée)***, et non l'***Inégalité de Cauchy-Schwarz*** comme lu dans beaucoup de copies ***!!!***
> L'adjectif ***« généralisée »*** utilisé ici vient de ce que l'***Inégalité triangulaire***, au sens strict, correspond au cas $N = 2$. Pour $N \geqslant 3$, il s'agit de sa généralisation.
> Mais, pour simplifier le langage, même dans le cas $N \geqslant 3$, on continue de parler de l' ***« Inégalité triangulaire »*** , sans ajouter la précision ***« généralisée »*** .

b) ***Si*** $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ ***et*** $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ ***sont 2 séries convergentes, à termes réels et vérifiant :***

$$\forall n \geqslant n_0 \ (n \in \mathrm{IN}), \quad u_n \leqslant v_n, \qquad (\boldsymbol{E4.I.6})$$

alors $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ **.**

Supposons que $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ sont 2 séries convergentes, à termes réels et vérifiant (***E4.I.6***).

Comme la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge et est à termes réels, alors on a :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \longrightarrow +\infty} S_N \in \mathrm{IR}, \quad \text{avec} \quad S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n, \ \forall N \in \mathrm{IN} / \ N \geqslant n_0 . \qquad (\boldsymbol{E4.I.7})$$

De même, la série $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ étant convergente et à termes réels, on a :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n = \lim_{N \longrightarrow +\infty} T_N \in \mathrm{IR}, \quad \text{avec} \quad T_N = \sum_{n=n_0}^{N} v_n, \ \forall N \in \mathrm{IN} / \ N \geqslant n_0 . \qquad (\boldsymbol{E4.I.8})$$

Or, $\forall N \in \mathrm{IN} / \ N \geqslant n_0$, par sommation membre à membre de (***E4.I.6***) du rang $n = n_0$ jusqu'au rang $n = N$, il vient (***propriété des sommes finies***) :

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{N} v_n, \quad \text{i.e.} \quad S_N \leqslant T_N. \qquad (\boldsymbol{E4.I.9})$$

Mais, d'après le ***Théorème de Comparaison des limites de suites réelles***,

(***E4.I.7***), (***E4.I.8***) et (***E4.I.9***) $\Longrightarrow \lim_{N \longrightarrow +\infty} S_N \leqslant \lim_{N \longrightarrow +\infty} T_N$, i.e. $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$. ***Cqfd.***

II - ***On suppose ici que*** $\forall n \geqslant n_0 \ (n \in \mathrm{IN}), \ u_n = a_n b_n$ **,**

où $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ ***et*** $(b_n)_{n \geqslant n_0}$ ***sont 2 suites numériques vérifiant :***

(i) $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ ***est une suite décroissante de nombres réels*** $\geqslant 0$ **;**

(ii) $(b_n)_{n \geqslant n_0}$ ***est une suite géométrique (à termes dans*** IR ***ou*** $\mathbb{C}$***) de raison*** $q / \ |q| < 1$**.**

• ***Démontrons alors successivement que*** :

1°) ***La série*** $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ ***est absolument convergente.***

Il s'agit de démontrer que la série numérique $\sum_{n \geqslant n_0} |u_n|$, à termes réels $\geqslant 0$, est convergente.

Pour cela, partons de ce que : $\forall n \in \mathrm{IN} / \ n \geqslant n_0, \ |u_n| = |a_n b_n| = a_n |b_n|$, $\qquad$ (***E4.II.1***)

la dernière égalité venant de ce que, par hypothèse ***(i)***, les a_n sont des réels $\geqslant 0$.

Mais, d'autre part, toujours par l'hypothèse ***(i)***, $(a_n)_{n \geqslant n_0}$ est une suite décroissante de nombres réels ;

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathrm{IN} / \ n \geqslant n_0, \ a_n \leqslant a_{n_0} ; \qquad (\boldsymbol{E4.II.2})$$

$$(\boldsymbol{E4.II.1}) \ \text{et} \ (\boldsymbol{E4.II.2}) \Longrightarrow \forall n \in \mathrm{IN} / \ n \geqslant n_0, \ 0 \leqslant |u_n| \leqslant a_{n_0} |b_n|. \qquad (\boldsymbol{E4.II.3})$$

Or, ***(ii)*** $\Longrightarrow$ $(|b_n|)_{n \geqslant n_0}$ est une suite géométrique (à termes réels $\geqslant 0$) de raison $q_1 = |q| \in [0, 1[$,

$\Longrightarrow \sum_{n \geqslant n_0} |b_n|$ est une ***série géométrique convergente (de raison*** $|q| \in [0, 1[$***)***. $\qquad$ (***E4.II.4***)

$\Longrightarrow \sum_{n \geqslant n_0} a_{n_0} |b_n|$ est une série (géométrique) convergente (car $\lambda = a_{n_0}$ *constante réelle*). $\qquad$ (***E4.II.5***)

Finalement, par le ***Critère de comparaison des séries à termes positifs***,

(***E4.II.3***) et (***E4.II.5***) $\Longrightarrow \sum_{n \geqslant n_0} |u_n|$ est une série convergente ;

$\Longrightarrow$ la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ est absolument convergente. ***Cqfd.***

2°) *Son reste d'ordre N (où $(N \in \mathbb{N} /\ N \geqslant n_0)$ vérifie :* $|R_N| \leqslant \dfrac{|u_{N+1}|}{1-|q|}$.

Par définition, R_N est donné, $\forall N \in \mathbb{N}/\ N \geqslant n_0$, par : $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$;

$$\Longrightarrow |R_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n|, \qquad (\textbf{\textit{E4.II.6}})$$

la dernière inégalité venant de l'utilisation de $\boxed{\text{I}}$ **-2°)a)**, et est justifiée par le fait que, par la ***Règle du Changement du rang de départ dans une série***,

$$\boxed{\text{II}}\ \textbf{-1°)} \Longrightarrow \sum_{n \geqslant N+1} u_n \text{ est ausssi une série absolument convergente.} \qquad (\textbf{\textit{E4.II.7}})$$

Maintenant, pour les mêmes raisons que celles ayant conduit à (***E4.II.3***) et (***E4.II.5***), mais avec le rang de départ n_0 remplacé par $N+1$, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}/\ n \geqslant N+1,\ |u_n| \leqslant a_{N+1}|b_n| \ ; \qquad (\textbf{\textit{E4.II.8}})$$

$$\text{et } \sum_{n \geqslant n_0} a_{N+1}|b_n| \text{ est une série convergente.} \qquad (\textbf{\textit{E4.II.9}})$$

Grâce à $\boxed{\text{I}}$ **-2°)b)**, on déduit, de (***E4.II.6***) à (***E4.II.9***), que : $|R_N| \leqslant \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_{N+1}|b_n|$. (***E4.II.10***)

Or, toujours par la ***Règle du Changement du rang de départ dans une série***, (***E4.II.4***) implique :
$\displaystyle\sum_{n \geqslant N+1} a_{N+1}|b_n|$ est une série géométrique convergente de raison $|q| \in [0, 1[$ et de 1^er terme $a_{N+1}|b_{N+1}|$.

$$\Longrightarrow \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_{N+1}|b_n| = \frac{a_{N+1}|b_{N+1}|}{1-|q|} = \frac{|a_{N+1}b_{N+1}|}{1-|q|} = \frac{|u_{N+1}|}{1-|q|}, \qquad (\textbf{\textit{E4.II.11}})$$

la 2^ème égalité ci-dessus provenant du fait que ***(i)*** $\Longrightarrow$ a_{N+1} est un réel $\geqslant 0$. Finalement,

$$(\textbf{\textit{E4.II.10}}) \text{ et } (\textbf{\textit{E4.II.11}}) \Longrightarrow |R_N| \leqslant \frac{|u_{N+1}|}{1-|q|}. \ \textbf{\textit{Cqfd.}}$$

$\boxed{\text{III}}$ **- 1°) *Utilisons le*** $\boxed{\text{II}}$ ***pour calculer, à 5×10^{-10} près, la valeur de la somme infinie*** $T = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-3)^n e^{-(n+1)^2}$. **N.B. *Ne donnons que les chiffres sûrement corrects dans T.***

On a : $T = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, avec $u_n = (-3)^n e^{-(n+1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pour obtenir une valeur approchée de T à $Tol = 5 \times 10^{-10}$ près, il suffit de considérer une somme partielle $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$, pour un rang N (à trouver et aussi petit que possible) vérifiant :

$$|T - S_N| < Tol. \qquad (\textbf{\textit{E4.III.1}})$$

Or, $T - S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n = R_N$. Ainsi :

$$(\textbf{\textit{E4.III.1}}) \iff |R_N| < Tol. \qquad (\textbf{\textit{E4.III.2}})$$

Pour trouver un rang N (aussi petit que possible) vérifiant (***E4.III.2***), nous allons utiliser le $\boxed{\text{II}}$, comme exigé par l'énoncé. Pour cela, nous devons préalablement mettre en évidence 2 suites numériques $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$ satisfaisant ***(i)*** et ***(ii)***, avec le rang de départ $n_0 = 0$, mais la raison q à préciser, et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a_n b_n. \qquad (\textbf{\textit{E4.III.3}})$$

Pour y arriver, remarquons que, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = (-3)^n e^{-(n+1)^2} = (-3)^n e^{-(n^2+2n+1)} = e^{-n^2-1} \cdot \left(-3e^{-2}\right)^n$,

$$\Longrightarrow u_n = a_n b_n, \quad \text{avec } a_n = e^{-n^2-1} \text{ et } b_n = \left(-3e^{-2}\right)^n.$$

Les 2 suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$, ainsi définies, vérifient bien (***E4.III.3***), ainsi que ***(i)*** et ***(ii)***, avec le rang de départ $n_0 = 0$ et la raison $q = -3e^{-2}$, car $|q| = 3e^{-2} \simeq 0.406 < 1$. Il s'ensuit, d'après **II -2°)** :

$$|R_N| \leqslant \frac{|u_{N+1}|}{1-|q|}, \quad \text{i.e.} \quad |R_N| \leqslant \rho_N, \quad \text{avec} \quad \boxed{\rho_N = \frac{|u_{N+1}|}{1-3e^{-2}}}. \qquad (\textbf{\textit{E4.III.4}})$$

De (***E4.III.2***) et (***E4.III.4***), il vient que, pour qu'un rang N vérifie (***E4.III.1***), il suffit que

$$\rho_N = \frac{|u_{N+1}|}{1-3e^{-2}} < Tol, \quad \text{i.e.} \quad |u_{N+1}| < \varepsilon, \quad \text{avec} \quad \varepsilon = Tol\cdot(1-3e^{-2}) \simeq 2,97\times 10^{-10}. \qquad (\textbf{\textit{E4.III.5}})$$

• • • *A partir de là, 2 approches étaient utilisables pour trouver le bon rang N.*

• • Méthode 1 pour trouver N : *Recherche itérative à partir du rang $N = 0$.*

En calculant les termes successifs de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, on obtient le tableau de calculs suivant :

N	u_N	$\lvert u_{N+1}\rvert$	S_N	$\lvert u_{N+1}\rvert < 2,97\times 10^{-10}$
0	$3,67\,879\,441\,171\times 10^{-1}$	$5,49\times 10^{-2}$	$0,367\,879\,441\,171$	*FAUX*
1	$-5,49\,469\,166\,662\times 10^{-2}$	$1,11\times 10^{-3}$	$0,312\,932\,524\,505$	*FAUX*
2	$1,11\,068\,823\,678\times 10^{-3}$	$3,04\times 10^{-6}$	$0,314\,043\,212\,742$	*FAUX*
3	$-3,03\,844\,971\,742\times 10^{-6}$	$1,12\times 10^{-9}$	$0,314\,040\,174\,292$	*FAUX*
4	$1,12\,492\,345\,306\times 10^{-9}$	$5,63\times 10^{-14}$	$0,314\,040\,175\,417$	*VRAI*

Ceci montre que (***E4.III.5***) est vérifié pour la première fois au rang $\boxed{N=4}$, et qu'alors on a :

$\boxed{S_N = S_4 \simeq 0,314\,040\,175\,417}$, qui est donc une valeur approchée de T à 5×10^{-10} près.

• • • *Remarque/Commentaire n° 9* :
Si on n'avait pas vu l'équivalence logique $\rho_N < Tol \iff |u_{N+1}| < \varepsilon$, au lieu du tableau numérique ci-dessus, alors on pouvait dresser plutôt le tableau numérique analogue suivant :

N	u_N	ρ_N	S_N	$\rho_N < 5\times 10^{-10}$
0	$3,67\,879\,441\,171\times 10^{-1}$	$9,25\times 10^{-2}$	$0,367\,879\,441\,171$	*FAUX*
1	$-5,49\,469\,166\,662\times 10^{-2}$	$1,87\times 10^{-3}$	$0,312\,932\,524\,505$	*FAUX*
2	$1,11\,068\,823\,678\times 10^{-3}$	$5,12\times 10^{-6}$	$0,314\,043\,212\,742$	*FAUX*
3	$-3,03\,844\,971\,742\times 10^{-6}$	$1,89\times 10^{-9}$	$0,314\,040\,174\,292$	*FAUX*
4	$1,12\,492\,345\,306\times 10^{-9}$	$9,49\times 10^{-14}$	$0,314\,040\,175\,417$	*VRAI*

• • Méthode 2 pour trouver N : *Calcul analytique.*

Pour trouver le plus petit le rang N vérifiant $|u_{N+1}| < \varepsilon$, observons que, pour $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$|u_n| < \varepsilon \iff 3^n e^{-(n+1)^2} < \varepsilon \iff n\cdot\ln 3 - (n+1)^2 < \ln\varepsilon \iff (n+1)^2 - n\cdot\ln 3 > -\ln\varepsilon$$

$$\iff n^2 + (2-\ln 3)\,n + 1 > -\ln\varepsilon \iff \left(n+1-\frac{\ln 3}{2}\right)^2 - \left(1-\frac{\ln 3}{2}\right)^2 + 1 > -\ln\varepsilon$$

$$\iff n+1-\frac{\ln 3}{2} > \sqrt{\left(1-\frac{\ln 3}{2}\right)^2 - 1 - \ln\varepsilon} \iff n > \frac{\ln 3}{2} - 1 + \sqrt{\left(1-\frac{\ln 3}{2}\right)^2 - 1 - \ln\varepsilon}.$$

Par conséquent, $|u_{N+1}| < \varepsilon \iff N > c_0$, avec $c_0 = \dfrac{\ln 3}{2} - 2 + \sqrt{\left(1-\dfrac{\ln 3}{2}\right)^2 - 1 - \ln\varepsilon} \simeq 3{,}15$;

$\Longrightarrow$ (***E4.III.5***) est vérifié pour la première fois au rang $\boxed{N=4}$. On calcule alors $S_N = S_4$. D'où :

$\boxed{S_N = S_4 \simeq 0,314\,040\,175\,417}$, qui est donc une valeur approchée de T à 5×10^{-10} près.

• • • ***Remarque/Commentaire n° 10 :***
Ci-dessus, la **Méthode 1** pour trouver N est la plus générale. Par contre, la **Méthode 2** ne s'applique que pour les majorations de $|R_N|$ permettant un calcul analytique « à la main » du bon rang N. La vérité est que cela n'arrive pas souvent. La méthode itérative (voire algorithmique) s'impose presque toujours.

• • • ***Remarque/Commentaire n° 11 :***
On peut, certainement, trouver diverses autres majorations « simples » de $|R_N|$ par d'autres autres approches que celle utilisée dans cette question. Cependant, l'énoncé était clair : il était demandé de répondre à la question en utilisant le **II**. D'où notre solution ci-dessus.

Toute autre approche était ***hors-sujet !!!***

En effet, ***un énoncé d'épreuve d'examen est un cahier de charges à satisfaire*** : il faut en respecter les termes précis en répondant aux questions posées.

2°) ***Donnons une valeur approchée de l'incertitude relative sur cette approximation de T.***

Notons $\widetilde{T}$, la valeur approchée de T calculée ci-dessus, i.e. $\widetilde{T} = S_4$. Par définition, l'incertitude relative qui lui est associée est :

$$|\,\varepsilon_{\widetilde{T}}\,| = \left|\frac{T-\widetilde{T}}{T}\right| = \left|\frac{T-S_4}{T}\right| = \left|\frac{R_4}{T}\right|, \implies |\,\varepsilon_{\widetilde{T}}\,| \approx \left|\frac{R_4}{\widetilde{T}}\right| = \left|\frac{R_4}{S_4}\right|. \qquad (\textbf{\textit{E4.III.6}})$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} 3e^{-2n-3} = 0 < 1,$

$\displaystyle\implies \sum_{n\geqslant 0} u_n$ est une ***série asymptotiquement géométrique*** de raison $r = 0$,

$\displaystyle\implies$ une approximation de R_4 est donnée par $\dfrac{u_5}{1-0} = u_5$.

En insérant cette approximation dans (***E4.III.6***), il vient : $\displaystyle |\,\varepsilon_{\widetilde{T}}\,| \approx \left|\frac{u_5}{S_4}\right| \simeq \left|\frac{-5,63\,644\,047\,749\times 10^{-14}}{0,314\,040\,175\,417}\right|,$

$$\implies \boxed{|\,\varepsilon_{\widetilde{T}}\,| \approx 1.79\times 10^{-13}}.$$

FIN de l'EXERCICE 4

FIN