Exercice 3

Montrons que $\exists x \in E \begin{cases} f(x) \neq 0_{\mathbb{K}} \\ g(x) \neq 0_{\mathbb{K}} \end{cases}$

par hypothèse f et g sont des formes linéaires non-nulles alors, $\forall x, y \in E$, $x_1, y_1 \in E$ $\begin{cases} f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y) \\ g(x_1 + \beta y_1) = g(x_1) + \beta \cdot g(y_1) \end{cases}$

$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

1er cas: supposons $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid f = \lambda g$.

Alors tout vecteur qui n'annule pas f, n'annule pas g. De plus il en existe au moins un cas où f et g sont non nulles.

Supposons que $\forall \lambda \in \mathbb{K}^* \mid f \neq \lambda g$.

2ème cas: supposons que $\begin{cases} \ker f \not\subset \ker g \text{ et} \\ \ker g \not\subset \ker f. \end{cases}$ D'après la proposition précédente

Ainsi $\begin{cases} \exists x_1 \in \ker f \mid x_1 \notin \ker g \\ \exists x_2 \in \ker g \mid x_2 \notin \ker f. \end{cases}$

posons $x = x_1 + x_2$.

on a: $f(x) = f(x_1) + f(x_2)$

$f(x) = f(x_2)$ donc $f(x) \neq 0_{\mathbb{K}}$

et $g(x) = g(x_1) + g(x_2)$

$g(x) = g(x_1)$ donc $g(x) \neq 0_{\mathbb{K}}$

1-) proposition

... formes linéaires non nulles sur E.

~~Corollaire~~ $\ker\varphi \subseteq \ker\psi \Leftrightarrow \ker\varphi = \ker\psi$

2-) proposition.

soient $f_1, f_2, \dots, f_p, f$ $p+1$ formes linéaires

3 non nulles sur E.

$\bigcap_{i=1}^{p} \ker f_i \subseteq \ker f \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} / f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i$

Dual de E

Le Dual de E est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E Il est noté par E^*

propriétés:

si $\dim E < +\infty$, alors $\dim E^* = \dim E$

Corollaire:

soient $f_1, \dots, f_p \in E$ non nulles.

si $\bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i = \{0_E\}$, alors $(f_1 \dots f_p)$ est une famille génératrice de E^*

c'est à dire $E^* = \mathbb{K}\{f_1, \dots, f_p\}$

alors $\dim E^* \leq p \Rightarrow \dim E \leq p$ car $\dim E = \dim E^*$

~~Exerc~~

Exercice N° 05

$\mathbb{K}_n[X]$, X de degré $\leq n \in \mathbb{N}^*$

soit $\varphi \in (\mathbb{K}_n[X])^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ Tels que

$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $\varphi((X-\alpha)P) = 0_{\mathbb{K}}$ (*)

$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall P \in \mathbb{K}_n[X], \varphi(P) = \lambda P(\alpha)$

Considérons $\mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}$

$P \longrightarrow \varphi(P) = P(\alpha)$

i) Montrons que $\varphi \in (\mathbb{K}_n[X])^*$. (exercice)

ii) Montrons que φ est non nulle.

iii) Montrons que $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$

En utilisant (*)

iv) Appliquer la proposition.

Exercice N°03

1) Déterminons la forme linéaire définie par.

$f(1+x+x^2) = 0$; $f(2+x^2) = 1$; $f(1+2x+3x^2) = 4$

Soit B(1, x, x²) la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, il suffit de déterminer $f(1), f(x), f(x^2)$

on a: $\begin{cases} f(1+x+x^2) = 0 & (1) \\ f(2+x^2) = 1 & (2) \\ f(1+2x+3x^2) = 4. & (3) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow f(2) + f(x^2) = 1$ (car f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$)

$\Rightarrow f(x^2) = 1 - f(2) \Leftrightarrow \underline{f(x^2) = 1 - 2f(1)}$ (4)

~~[illegible]~~

(3) $\Rightarrow f(1) + 2f(x) + 3f(x^2) = 4$; (4) dans (3) on a:

$\Rightarrow f(1) + 2f(x) + 3(1 - 2f(1)) = 4$

$\Leftrightarrow f(1) + 2f(x) + 3 - 6f(1) = 4$

$\Leftrightarrow -5f(1) + 2f(x) = 1 \Rightarrow 2f(x) = 1 + 5f(1)$

(5) $\underline{f(x) = \frac{1}{2}(1 + 5f(1))}$

Exercice N° 01

1) Démontrons que si $x \notin \mathbb{K}L$, alors $L \cup \{x\}$ est libre

Soit L' sous famille finie de $L \cup \{x\}$

montrons que L' est libre.

(i) si $L' \subset L$ alors, L' est libre car L est libre.

(ii) supposons maintenant que $x \in L'$

supposons $L' = \{x, x_1, \dots, x_n\}$ où $x_i \in L$ $\forall i \in \{1, n\}$

si L' n'est pas libre ; alors $\exists\, \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} \alpha_x x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0_E \text{ avec} \\ \alpha_x \neq 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } \exists\, i \in \{1, \dots, n\} \mid \alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}} \end{cases}$$

si $\alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$, alors $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0_E$

ce qui contredit le fait que L soit libre.

avec au moins un $\alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ (Absurde)

donc L' est libre.

~~donc $\alpha_x \neq 0_{\mathbb{K}}$~~

~~ainsi $\forall\, \alpha_x, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\alpha_x x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \neq 0_E$~~

• si $\alpha_x \neq 0$, alors

$$x = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_x} x_i \Rightarrow x \in \mathbb{K}L \text{ (absurde car } x \notin \mathbb{K}L)$$

L' est libre

<u>Conclusion</u>: On a ainsi montré que Toute sous famille finie de $L \cup \{x\}$ est libre, ~~ainsi si $x \notin \mathbb{K}$~~

donc $L \cup \{x\}$ est libre.

Ensemble ordonné:
Ensemble dans lequel on a définit une relation d'ordre

Relation d'ordre
Relation qui est reflexive, antisymétrique et transitive.

Chaîne
Tout sous ensemble de cet ensemble.

2) Montrons que l'ensemble des familles libres de E admet au moins un élément maximal B.
il suffit de montrer que toutes chaînes de L admet au moins un majorant.

Soit $\mathcal{C}$ une chaîne de L montrons que $\mathcal{C}$ est majorée posons $M = \bigcup_{L \in \mathcal{C}} L$

i) il est évident que $A \subseteq M \quad \forall A \in \mathcal{C}$

ii) il reste à montrer que $M \in L$. c'est à dire que M est libre.

Soient $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$ alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\exists . L_i \in \mathcal{C}$. tel que $x_i \in L_i$
$\mathcal{C}$ étant une chaîne, $\exists\, i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_i \in L_i \subset L_{i_0} \; \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Ainsi, toute sous famille finie de M est libre, donc M est libre.

D'après i) et ii), M est un majorant de $\mathcal{C}$ dans L.

<u>Conclusion</u>: Toute chaîne de L est majorée donc L admet au moins un éléments maximal B (d'après le lemme de Zorn)

3) Montrons que tout élément maximal B est une base de E.

Soit β un élément maximal de L.

i) $\beta \in L$, donc β est libre

ii) Il reste à monter que β est génératrice

Supposons que β n'est pas génératrice Alors

$\mathbb{K}\beta \subsetneq E$, ie $\exists x \in E / x \notin \mathbb{K}\beta$

D'après la question 1), $\beta \cup \{x\}$ est libre ce

qui contredit la maximalité de β dans

L donc β est génératrice.

Conclusion : Tout element maximal de L

est une base de E.

pour la 1ère question on aurait pu montrer que

$\forall \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{2} \alpha_i f_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$ et soient $x, y \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1(x+y) + \alpha_2(x-y) = 0$

$\Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2)x + (\alpha_1-\alpha_2)y = 0.$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1-\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$

Ainsi (f_1, f_2) est famille libre de 2 vecteurs de E^*. or $\dim E^* = \dim E = 2$

D'où (f_1, f_2) est une base de E^*

2) b) $h(x,y) = 2x - 5y$

il faut chercher $a, b \in \mathbb{R}$ /

$h = a f_1 + b f_2.$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$h(x,y) = a f_1(x,y) + b f_2(x,y)$

$\Rightarrow 2x - 5y = a(x+y) + b(x-y)$

$\Rightarrow 2x - 5y = (a+b)x + (a-b)y.$

par identification on a :

$\begin{cases} a+b = 2 \\ a-b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{7}{2} \\ a = -\frac{3}{2} \end{cases}$

D'où on a $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$h(x,y) = -\frac{3}{2} f_1(x,y) + \frac{7}{2} f_2(x,y)$

Exercice 4

Soient f_1 et f_2 deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$ définies par :

$f_1(x,y) = x + y \; ; \; f_2(x,y) = x - y$

1) Montrons que $B = (f_1, f_2)$ est base du dual de E

$\dim E = 2$ ~~card B = 2~~, donc il ne reste plus qu'à montrer que $\det B = \det(f_1, f_2) \neq 0$.

$\det B = \det(f_1, f_2)$

$= \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, on peut donc dire que suite au fait que $\operatorname{card} B = 2$ et $\det B \neq 0$, $B = (f_1, f_2)$ est une base du dual de E.

2) Exprimons les formes linéaires suivantes dans la Base $B = (f_1, f_2)$

· $\cancel{g(x,y) = y}$.

$\cancel{\Leftrightarrow g(x,y) = x - x + y}$

$\cancel{= x - (x-y)}$

$g(x,y) = y$

$= \frac{1}{2} 2y$

$= \frac{1}{2}[x + y - x + y]$

$= \frac{1}{2}[x + y - (x-y)]$

$g(x,y) = \frac{1}{2} f_1(x,y) - \frac{1}{2} f_2(x,y)$

· $h(x,y) = 2x - 5y$

$= \cancel{2x - 3y - 2y}$

$h(x,y) = 2(x-y) - 3y$

Exercice 7

2) Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts.

montrons que φ_{a_i}, $i=0,1,\dots,n$ est une base de E^*

montrons que la famille $\varphi_{(a_i)}$ est génératrice de E^*, nous pouvons donc montrer que $\bigcap_{i=0}^{n} \ker \varphi_{a_i} = \{0_E\}$

On a $\forall P \in E$, $P \in \ker \varphi_{a_i}$ si et seulement si $\varphi_{a_i}(P) = \varphi_{(a_i)} = 0$

$\exists Q \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que

$Q[X] = (X - a_i)(Q(X))$

on a $0_E \in \bigcap_{i=0}^{n} \ker \varphi_{a_i}$ car $\forall a_i \in \mathbb{C}$

$0_E(a_i) = 0$.

mq 0_E est unique dans $\bigcap_{i=0}^{n} \ker \varphi_{a_i}$

Supposons $\exists P \in E$, $P \neq 0_E$ tel que

$P \in \bigcap_{i=0}^{n} \ker \varphi_{a_i}$.

$P \in \bigcap_{i=0}^{n} \ker \varphi_{a_i} \Rightarrow P$ a don $(n+1)$ racines distinctes (les $(a_i)_{i=1,\dots,n}$)

Ce qui contredit le fait que <u>$\mathbb{C}$ soit un corps algé</u> <u>briquement clos</u> d'où

$\bigcap_{i=0}^{n} \ker \varphi_{a_i} = \{0_E\}$, Notre famille $\varphi_{(a_i)}$ est génératrice de plus $\dim = \mathrm{Card}\{\varphi_{a_i}\}$ ainsi une base de E^*

Exercice 7

~~1-) Montrons qu'il existe~~ $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que pour ~~Tout $P \in E$, $\varphi(P) = \lambda P(\alpha)$~~

1-) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$, pour tout $a \in \mathbb{C}$, on définit l'application φ_a par:

$\forall P \in E, \varphi_a(P) = P(a)$

montrons que $\varphi_a \in E^*$

Soit $a \in \mathbb{C}$, $\forall P, Q \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$

on a; $\varphi_a(P + \alpha Q) = (P + \alpha Q)(a)$

$= P(a) + \alpha Q(a)$

$= \varphi(P) + \alpha \varphi(Q)$

D'où $\varphi_a(P + \alpha Q) = \varphi_a(P) + \alpha \varphi_a(Q)$

ainsi $\varphi_a \in E^*$

2-) Montrons que $(\varphi_{a_i})_{i=0}^{n-1}$ est une base de E^*

Soit $(\alpha_i)_{i=0}^{n} \in (\mathbb{C}^{n+1})$ /

$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_{a_i}(P) = 0$ $\forall P \in E$

montrons que $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 \dots = \alpha_n = 0$.

* Trouvons sa préduale.

Trouvons la famille (P_i), $P_i \in E$ $\forall j \in \{0, 1, \dots, n\}$ tel que $i = \overline{0,n}$

$$\varphi_{a_i}(P_j) = P_j(a_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (1)$$

Posons la famille P_j $_{j=\overline{0,n}}$ définie par :

$$P_j[X] = \frac{\prod_{k \neq j} (X - a_k)}{\prod_{k \neq j} (a_j - a_k)}$$

montrons qu'elle vérifie (1).

$\forall i, j \in \{0, \dots, n\}$

$$\varphi_{a_i}(P_j) = P_j(a_i) = \frac{\prod_{k \neq j} (a_i - a_k)}{\prod_{k \neq j} (a_j - a_k)} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq i \\ 1, & \text{si } j = i \end{cases}$$

donc la famille des $(P_j)_{j=\overline{0,n}}$ est la base préduale associée à $(\varphi_{a_i})_{i=\overline{0,n}}$

* Montrons que $\exists (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}$ tel que $\forall p \in E$, $\int_0^1 p(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i p(a_i)$

On définit f tel que $\forall p \in E$, $f(p) = \int_0^1 p(t)\,dt$. Montrons que

* f est une forme linéaire.

Soient $p, q \in E$ et $\beta \in \mathbb{C}$ mq $f(p + \beta q) = f(p) + \beta f(q)$

$$f(p + \beta q) = \int_0^1 [p + \beta q](t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (p(t)\,dt + \beta q(t)\,dt) = \int_0^1 p(t)\,dt + \beta \int_0^1 q(t)\,dt$$

$$= f(p) + \beta f(q).$$

* mq f est non nulle

mq $\exists p \in E$ tel que $f(p) \neq 0$

Posons $p = X^2 + 1$.

$$\int_0^1 (t^2+1)\,dt = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \neq 0$$

donc f est nulle.

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_{a_i}(p) = 0 \quad \forall p \in E$$

En particulier pour $p = 1$

et pour $p = n$.

$$* \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi(a_i) = 0 \quad \forall p \in E$$

En particulier pour $p = 1$

$$* \sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 = 0$$

f est donc une forme linéaire non nulle, de plus $(\varphi_{a_i})_{i=\overline{0,n}}$ est une base de E^* donc $\exists! (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}_n$ tel que

$$f = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi_{a_i}$$

donc $\forall p \in E$, on a :

$$f(p) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi_{a_i}(p)$$

$$\int_0^1 p(t) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i p(a_i) \text{ car } \varphi_{a_i}(p) = p(a_i),$$

Donnons les valeurs λ_i ; on a $(\varphi_{a_i})_{i=\overline{0,n}}$ une base de E^* et sa base préduale associée $(P_j)_{j=\overline{0,n}}$ et f une forme linéaire de E^* alors ~~Exercice~~ $f = \sum_{i=0}^{n} \langle P_i, f \rangle \varphi_{a_i}$, donc $p \in E$,

$$f(p) = \sum_{i=0}^{n} \langle P_i, f \rangle \varphi_{a_i}(p) \; ; \; f(p) = \sum_{i=0}^{n} [f(P_i)] \varphi_{a_i}(p) \quad (1)$$

$$f(p) = \int_0^1 p(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i p(a_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \varphi_{a_i}(p) \quad (2)$$

par identification, $\forall i \in \{0, 1, \dots\}$ $f(P_i) = \lambda_i$

$$\lambda_i = \int_0^1 P_i(t)\,dt$$

Exercice 8 :

$$\phi(P) = \int_0^1 p(t)\,dt \quad \forall p \in \mathbb{R}_n[X]$$

1) Montrons que ϕ est une forme linéaire

Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$; $\alpha \in \mathbb{R}$,

montrons que $\phi(P + \alpha Q) = \phi(P) + \alpha \phi(Q)$

On a : $\phi(P + \alpha Q) = \int_0^1 (P + \alpha Q)(t)\,dt$

$$= \int_0^1 P(t)\,dt + \alpha \int_0^1 Q(t)\,dt$$

$$= \phi(P) + \alpha \phi(P).$$

2) $i \in \{0, \dots, n\}$ soit $\phi_i \in \mathbb{R}_n[X]$ /

$$\phi_i(P) = P(i)$$

… un Corps commu
…ébriquement clos:
…ome de degré
…net au Plus n
…tinctes.

Exercice 9

2) Montrons que

$\forall \phi \in E^* \quad \phi \in F^\perp \Leftrightarrow \phi(e_0) = \phi(e_1) = \phi(e_3)$

$F^\perp = \{ f \in E^* / \forall P \in F,\ f(P) = 0 \}$

* soit $\phi \in F^\perp$

on a: $\phi \in F^\perp \Leftrightarrow \forall P \in F \quad \phi(P) = 0$.

$\Leftrightarrow \phi(P_1) = 0$ et $\phi(P_3) = 0$.

$\Leftrightarrow -\phi(e_0) + \phi(e_1) = 0$ et $-\phi(e_0) + \phi(e_3) = 0$

$\Leftrightarrow \phi(e_0) = \phi(e_1)$ et $\phi(e_0) = \phi(e_3)$

$\Leftrightarrow \underline{\phi(e_0) = \phi(e_1) = \phi(e_3)}$