3. En déduire qu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^n P(t)dt = \sum_{i=0}^{n} a_i P\left(\frac{i}{n}\right).$$

Exercice 9.

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique (e_0, e_1, e_2, e_3), où $e_0 = 1, e_1 = X, e_2 = X^2, e_3 = X^3$. Soit F la partie de E définie par :

$$P \in F \iff P(1) = 0 \text{ et } P''(0) = 0.$$

1. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F.
2. Montrer que
$$\forall \phi \in E^*,\ \phi \in F^{\perp} \iff \phi(e_0) = \phi(e_1) = \phi(e_3).$$
3. Soient les formes linéaires
$$\begin{aligned} \phi_0 &= e_2^* \\ \phi_1 &= e_0^* + e_1^* + e_3^* \\ \phi_2 &= e_1^* - e_2^* \\ \phi_3 &= e_2^* - e_3^* \end{aligned}$$
Vérifier que $(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ est une base de E^* et déterminer sa base préduale.

Exercice 10.

On désigne par (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$:

$$e_0 = 1;\ e_1 = X;\ e_1 = X^2.$$

1. Déterminer la base duale (e_0^*, e_1^*, e_2^*) associée.

Soient a, b, c trois complexes distincts. On pose

$$P_1 = (X - b)(X - c),\ P_2 = (X - a)(X - c),\ P_3 = (X - a)(X - b).$$

2. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$ et trouver les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{C}_2[X]$ dans cette base.
3. Déterminer la base duale (P_1^*, P_2^*, P_3^*) de (P_1, P_2, P_3).
4. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}_2[X]$ défini par :
$$\forall P \in \mathbb{C}_2[X], u(P) = XP' + P.$$
Déterminer la transposée ${}^t u$ de u.

Exercice 11.

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $f_0, f_1, \ldots, f_n$ des formes linéaires sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E := \mathbb{K}_n[X]$ définiées par

$$f_i(P) = P(a_i),\ \forall P \in E.$$

1. Montrer que la famille $\gamma^* = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une base du dual E^* de E. Noter Q la matrice de passage de la base duale canonique à γ^*.

2. Montrer que la famille $\gamma = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ définie par

$$P_j(X) = \prod_{i \neq j} \frac{X - a_i}{a_j - a_i}$$

est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ de base duale γ^*.

3. En déduire l'inverse de la matrice de Vandermonde

$$V(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & a_0^1 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

pour $n = 3$.

Exercice 12.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

1. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   i) H est un hyperplan de E.
   ii) Pour tout vevcteur $v \in E$, $v \notin H$, E est somme directe de H et de $\mathbb{K}\{v\}$.
2. Soit f une forme linéaire non identiquement nulle sur E. Montrer que son noyau est un hyperplan de E.
3. Soit H un hyperplan de E. Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle f sur E telle que $H = Ker(f)$. On dit alors que $f(x) = 0$ est l'équation de H.
4. Considérer le cas où $E = \mathbb{R}^3$. Qu'est-ce qu'un hyperplan? Trouver la forme linéaire un hyperplan donné.

Exercice 13.

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall f \in E^*, \ f(e_1) = f(e_2) = \ldots = f(e_n) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Montrer que B est une base de E.

Exercice 14.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $l_1, \ldots, l_n$ des formes linéaires sur E.

1. Montrer que $l_1, \ldots, l_n$ engendrent E^* si et seulement si $\bigcap_{i=1}^{n} ker\ l_i = \{0_E\}$.

2. Quel lien y a-t-il entre la dimension du sous-espace engendré par $l_1, \dots, l_n$ et celle de $\bigcap_{i=1}^{n} ker\ l_i$?

Indication : Montrer que $\left(\bigcap_{i=1} Ker(l_i)\right)^{\perp} = \mathbb{K}\{l_i\}_{i=1}^{n}$ ou $(\mathbb{K}\{l_i\}_{i=1}^{n})^{\circ} = \bigcap_{i=1} Ker(l_i)$.

Exercice 15.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie. Montrer que $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont des formes linéaires sur E, alors

1. $\cap_{i=1}^{n} Ker\varphi_i \neq \{0_E\}$.
2. $\cap_{i=1}^{n} Ker\varphi_i$ est de co-dimension finie.

Exercice 16.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.

1. Montrer que $E^{*} = F^{\perp} \oplus G^{\perp}$.

Exercice 5.

Considérer le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de l'interminée X de degrés $\leq n$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé à l'avance. Soient φ une forme linéaire sur E et $\alpha\mathbb{K}$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on a $\varphi((X-a)P) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $P \in E$, $\varphi(P) = \lambda P(\alpha)$.

Exercice 6.

Dans les questions suivantes, f_1, f_2, f_3 sont des formes linéaires sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.

1.
$$f_1(x,y,z) = x+y+z, \ f_2(x,y,z) = x-y+z, \ f_3(x,y,z) = x+z.$$
Exprimer ces vecteurs dans la base duale $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

2.
$$f_1(x,y,z) = x+2y-3z, \ f_2(x,y,z) = 5x-3y, \ f_3(x,y,z) = 2x-y-z.$$
Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de E^* et déterminer la base de E associée.

Exercice 7.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$. Pour tout $a \in \mathbb{C}$, on définit l'application φ_a par :
$$\forall P \in E, \ \varphi_a(P) = P(a).$$
Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\varphi_a \in E^*$.

2. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille φ_{a_i}, $i = 0, 1, \ldots, n$ est une base de E^* et déterminer sa base préduale.

3. Montrer qu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $P \in E$,
$$\int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i),$$
puis donner la valeur des λ_i sous la forme d'une intégrale.

Exercice 8.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degré $\leq n$. Soit ϕ l'application définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\phi(P) = \int_0^1 P(t)dt, \ \forall P \in \mathbb{R}_n[X].$$

1. Montrer que ϕ est une forme linéaire.

2. Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, soit ϕ_i l'application définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par :
$$\phi_i(P) = P\left(\frac{i}{n}\right).$$
Montrer que $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, ϕ_i est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ et que $(\phi_i)_{i=0}^n$ est une base du dual de $\mathbb{R}_n[X]$.

ENSP
Dpt de MSP
2020-2021

MAT218 : Algèbre multiliéaire - Courbes et Surfaces
Fiche de TD n° 1. : Espace dual

Exercice 1.
Rappel : Une famille $(v_i)_{i\in I}$ est dite libre

Cas I fini : toute combinaison linéaire finie nulle est à coefficients tous nuls;

Cas I infini : toute sous-famille finie est libre.

1. Soit L une famille libre de E et $x \in E$. Montrer que si $x \notin \mathbb{K}L$, alors $F \cup \{x\}$ est libre.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}$ des familles libres de E admet au moins un élément maximal B.
   Rappel du Lemme de Zorn : Si toute chaîne d'un ensemble ordonné est majorée, alors l'ensemble ordonné possède au moins un élément maximal.
3. En déduire que B est une base de E.

Exercice 2.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fine.

1. Soient f et g deux formes linéaires non nulles. Montrer qu'il existe au moins un vecteur $u \in E$ tel que $f(u) \neq 0$ et $g(u) \neq 0$.
2. On suppose qu'il existe p formes linéaires non nulles f_i, $i = 1, \cdots, p$ telles que :
   $$\forall x \in E, \text{ si } \forall i = 1, \cdots, p \ f_i(x) = 0, \text{ alors } x = 0.$$
   Montrer que $dim\,(E) \leq p$.

Exercice 3.

1. Déterminer la forme linéaire f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ telle que :
   $$f\left(1 + X + X^2\right) = 0;\ f\left(2 + X^2\right) = 1;\ f\left(1 + 2X + 3X^2\right) = 4.$$
2. Donner une base du noyaux de f

Exercice 4.
Soient f_1 et f_2 deux formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$ définies par :
$$f_1(x, y) = x + y \text{ et } f_2(x, y) = x - y.$$

1. Montrer que $\beta = (f_1, f_2)$ ets une base de du dual de E.
2. Exprimer les formes linéaires suivantes dans la base β :
   $$g(x, y) = y;\ h(x, y) = 2x - 5y.$$