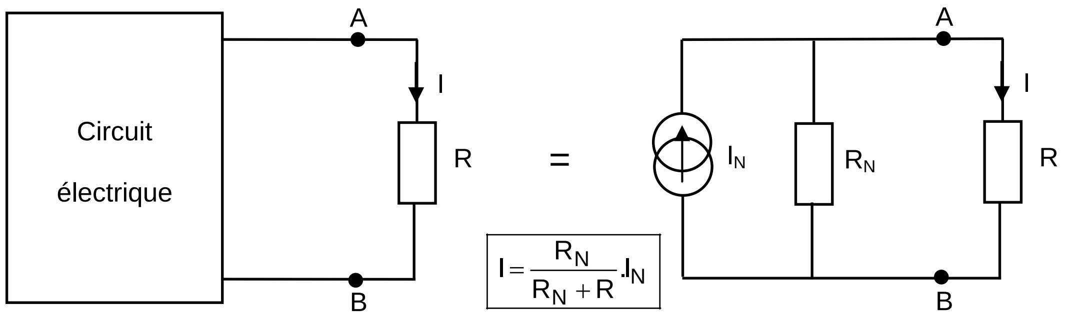
RESOLUTION PAR LA METHODE DE NORTON, MILLMAN ET KENNELY

1 - METHODE DE NORTON

1.1 - Introduction

Le théorème de Norton va nous permettre de réduire un circuit complexe en générateur de courant réel. Ce générateur possède une source de courant (I_N) en parallèle avec une résistance (R_N),



$$I = \frac{R_N}{R_N + R}.I_N$$

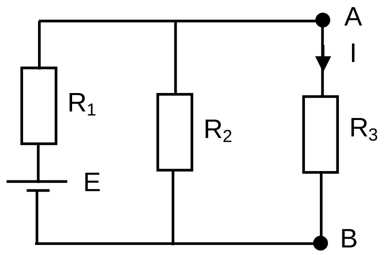
1.2 - Principe

Le courant de Norton I_N est obtenu par calcul ou par une mesure après avoir court-circuité les bornes A et B,
La résistance interne R_N s'obtient de la même façon que celle du théorème de Thevenin ($R_N = R_{Th}$),

1.3 – Applications

1.3.1 - Exercice 1

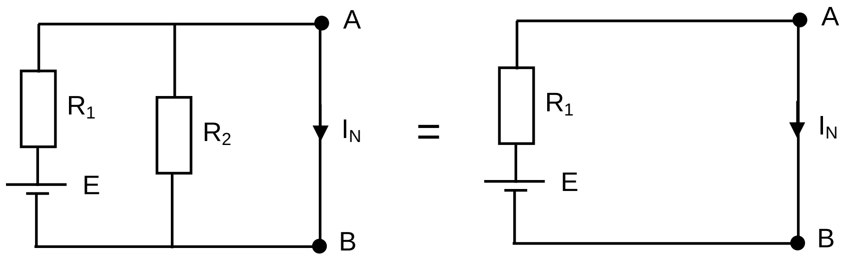
On considère le circuit électrique donné par la figure suivante :



- On donne : E = 8 V ; R_1 = 4 Ω ; R_2 = 12 Ω ; R_3 = 9 Ω
- Calculer le courant I qui traverse la résistance R_3 en appliquant le théorème de Norton,

Solution :

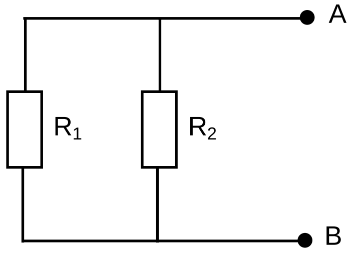
1) Calcul de I_N
On débranche la résistance R_3 et on court-circuite les bornes A et B, la configuration sera donc :



$$I_N = \frac{E}{R_1} = \frac{8}{4} = 2\text{ A}$$

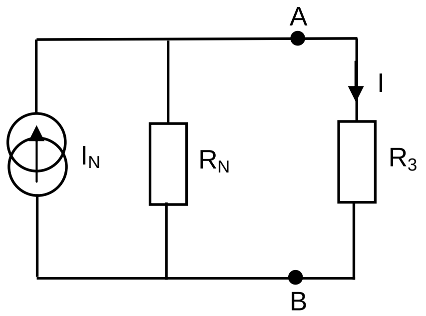
2) Calcul de R_N

R_3 étant toujours débranchée, on court-circuite E, la configuration sera donc :



$$R_{Th} = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4 \times 12}{4 + 12} = 3\,\Omega$$

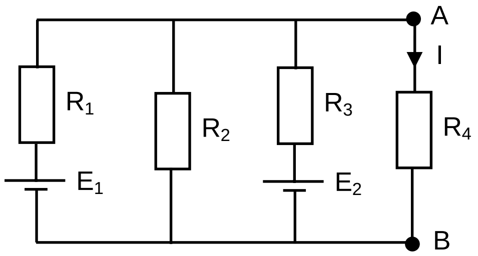
3) Calcul de I



$$I = \frac{R_N}{R_N + R_3} I_N = \frac{3}{3+9} 2 = 0{,}5\ \text{A}$$

1.3.2 - Exercice 2

On considère le circuit électrique donné par la figure suivante :

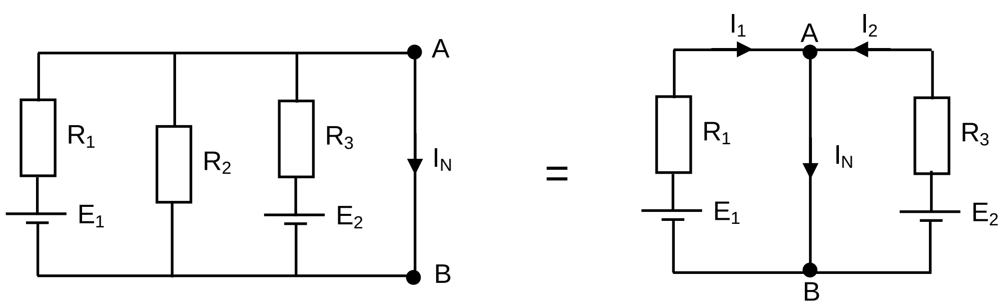


- On donne : E_1 = 10 v ; E_2 = 5 v ; $R_1 = R_3 = R_4 = 100\ \Omega$; R_2 = 50 Ω
- Calculer le courant I en appliquant le théorème de Norton,

Solution :

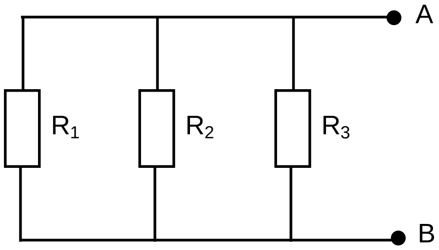
1) Calcul de I_N

On débranche la résistance R_4 et on court-circuite les bornes A et B, la configuration sera donc :



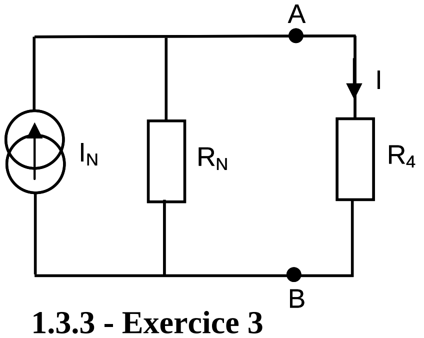
$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{E_1}{R_1} \\ I_2 = \dfrac{E_2}{R_3} \end{cases} \Rightarrow \quad I_N = I_1 + I_2 = \frac{10}{100} + \frac{5}{100} = 0{,}15\ \text{A}$$

2) Calcul de R_{Th}



$$R_{Th} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = 25\,\Omega$$

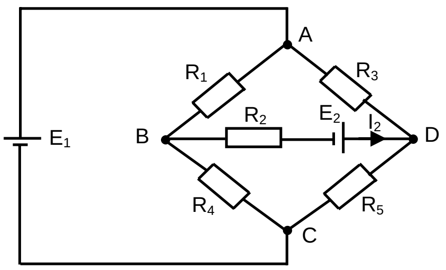
3) calcul de I_3



$$I = \frac{R_N}{R_N + R_4} I_N = 0{,}03\text{ A}$$

1.3.3 - Exercice 3

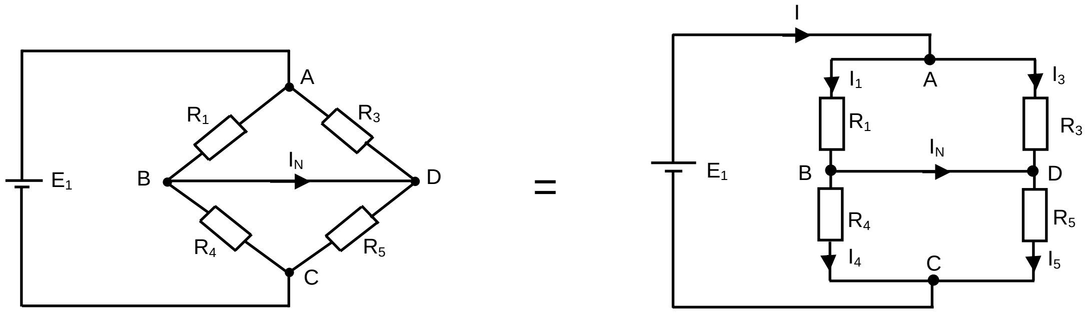
On considère le circuit électrique donné par la figure suivante :



- On donne : E_1 = 10 v ; E_2 = 2 v ; R_1 = 60 Ω ; R_3 = 120 Ω ; R_4 = 180 Ω ; R_2 = 240 Ω ; R_5 = 90 Ω
- Calculer le courant I en appliquant le théorème de Norton,

Solution :

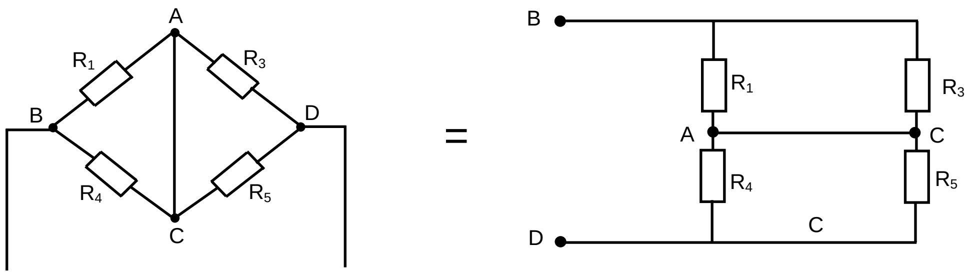
1) Calcul de I_N



$$\begin{cases} I_N = I_1 - I_4 \\ I_1 = \dfrac{R_3}{R_1+R_3} I \\ I_4 = \dfrac{R_5}{R_4+R_5} I \end{cases} \Rightarrow \quad I_N = I\left[\frac{R_3}{R_1+R_3} - \frac{R_5}{R_4+R_5}\right]$$

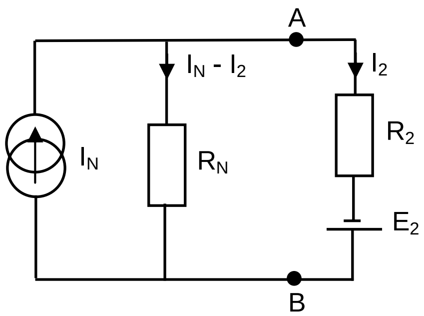
On a : $I = \dfrac{E}{R_{eq}}$ avec : $R_{eq} = \dfrac{R_3}{R_1+R_3} + \dfrac{R_5}{R_4+R_5}$ $\Rightarrow$ $I_N = \dfrac{E}{R_{eq}}\left[\dfrac{R_3}{R_1+R_3} - \dfrac{R_5}{R_4+R_5}\right] = 0{,}04\text{ A}$

2) Calcul de R_{Th}



$$R_{Th} = \frac{R_1.R_4}{R_1+R_4} + \frac{R_3.R_5}{R_3+R_5} = 96{,}42\,\Omega$$

3) calcul de I_2

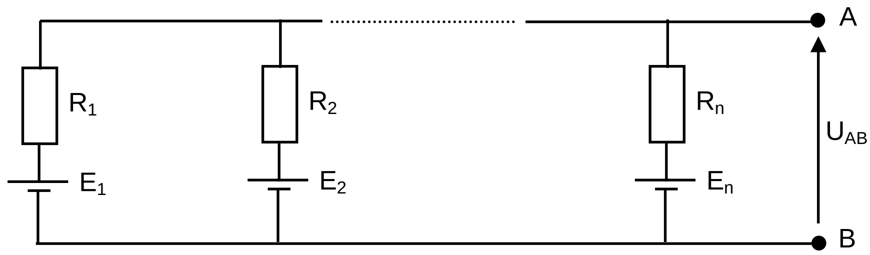


$$\begin{cases} E_2 + R_N\left(I_N - I_2\right) - R_2 I_2 = 0 \\ I_2 = \dfrac{R_N I_N + E_2}{R_N + R_2} = 17{,}4\,\text{mA} \end{cases}$$

2 - THEOREME DE MILLMANN

2.1 - Introduction

Ce théorème très pratique permet de déterminer la différence de potentiel aux bornes de plusieurs branches en parallèle (U_{AB}),



2.2 - Principe

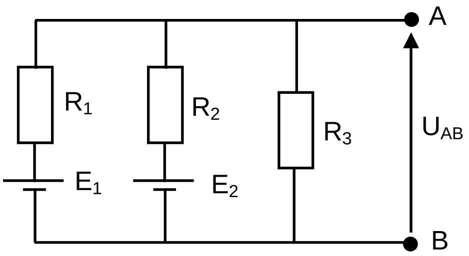
$$U_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{Ei}{Ri}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Ri}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E_i . Y_i}{\sum_{i=1}^{n} Y_i} \qquad \text{Avec :} \begin{cases} i : \text{numéro de la branche} \\ Y : \text{admittance de la branhe} \end{cases}$$

Remarque :
Si dans une branche, il n'y a pas de générateur, on considère que la f.e.m correspondante est nulle,

2.3 – Applications

2.3.1 - Exercice 1

On considère le circuit électrique donné par la figure suivante :



- On donne : $E_1 = 5$ v ; $E_2 = 20$ v ; $R_1 = 5\ \Omega$; $R_2 = R_3 = 10\ \Omega$
- Calculer U_{AB},

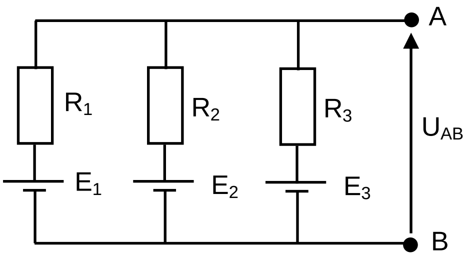
Solution :

Calcul de U_{AB} :

$$U_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\frac{0}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{5}{5}+\frac{20}{10}+0}{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}} = 7{,}5\ \text{V}$$

2.3.2 - Exercice 2

On considère le circuit électrique donné par la figure suivante :



- On donne : $E_1 = 5$ v ; $E_2 = 20$ v ; $E_3 = 4$ V ; $R_1 = R_3 = 2\ \Omega$; $R_3 = 1\ \Omega$
- Calculer U_{AB},

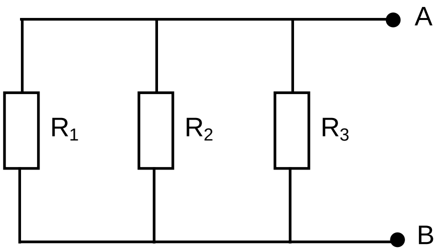
Solution :

1) Calcul de U_{AB}

$$U_{AB} = \frac{-\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}-\frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{-2+\frac{5}{1}-\frac{4}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}} = 0{,}75\ \text{V}$$

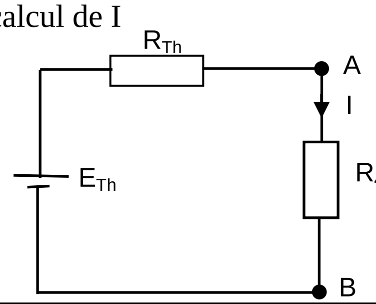
2) Calcul de I dans R_4

- Calcul de E_{Th} : on remarque que $E_{Th} = U_{AB} = 0{,}75$ V
- Calcul de R_{Th}



$$R_{Th} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = 0{,}5\ \Omega$$

3) calcul de I

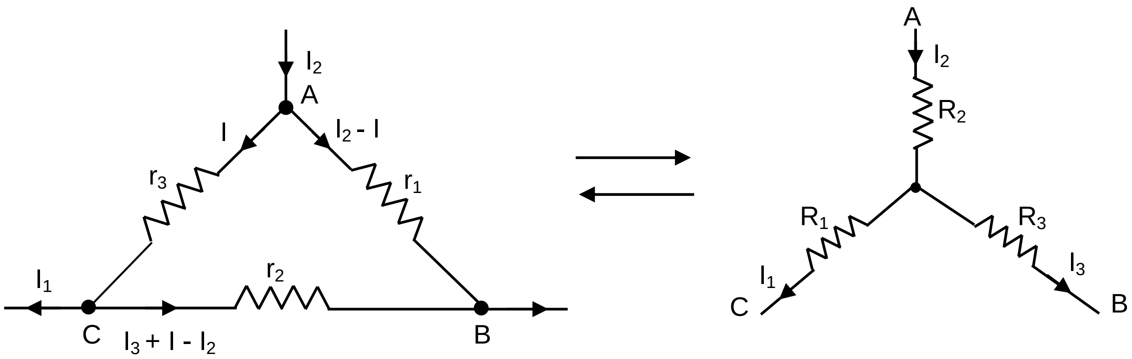


$$I = \frac{E_{Th}}{R_{Th}+R_4} = 0{,}3\ \text{A}$$

3 - TRANSFORMATION DE KENNELY

3.1 – Introduction

- C'est une transformation sur un réseau passif de résistances qui est souvent utile pour simplifier un réseau,
- Elle permet de transformer une étoile en triangle et réciproquement,



3.2 - Démonstration

On démontre cette identité en utilisant le théorème de superposition,

Intensité supposée nulle	Résistance entre	dans l'étoile (Y)	Dans le triangle (Δ)
I_1	A - B	$R_2 + R_3$	$\frac{r_1 (r_2 + r_3)}{r_1 + r_2 + r_3}$
I_2	A - C	$R_2 + R_1$	$\frac{r_3 (r_1 + r_2)}{r_1 + r_2 + r_3}$
I_3	B - C	$R_1 + R_3$	$\frac{r_2 (r_1 + r_3)}{r_1 + r_2 + r_3}$

- En superposant ces trois régimes permanents, on obtient le régime permanent le plus général,
- Pour avoir les mêmes intensités et les mêmes d.d.p dans les deux montages, il faut que les résistances entre les nœuds soient les mêmes dans les deux montages,

- Soient :

$$\begin{cases} R_2 + R_3 = \dfrac{r_1 \,.\, (r_2 + r_3)}{r_1 + r_2 + r_3} & (1) \\[2ex] R_2 + R_1 = \dfrac{r_2 \,.\, (r_1 + r_3)}{r_1 + r_2 + r_3} & (2) \\[2ex] R_1 + R_3 = \dfrac{r_3 \,.\, (r_1 + r_2)}{r_1 + r_2 + r_3} & (3) \end{cases}$$

Calcul de R_1 :

$$(2)-(1) \quad \Rightarrow \quad R_1 - R_3 = \frac{r_2.r_3 + r_1.r_2 - r_1.r_2 - r_1.r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{r_3.(r_2 - r_1)}{r_1 + r_2 + r_3}$$

$$((2)-(1)) + (3) \quad \Rightarrow \quad 2.R_1 = \frac{r_2.r_3 - r_1.r_3 + r_1.r_3 + r_2.r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{r_2.r_3}{r_1 + r_2 + r_3}$$

Donc :

$$\begin{cases} R_1 = \dfrac{r_2.r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \\ R_2 = \dfrac{r_1.r_3}{r_1 + r_2 + r_3} \\ R_3 = \dfrac{r_1.r_2}{r_1 + r_2 + r_3} \end{cases}$$

Et réciproquement :

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{R_1.R_2 + R_2.R_3 + R_1.R_3}{R_1} \\ r_2 = \dfrac{R_1.R_2 + R_2.R_3 + R_1.R_3}{R_2} \\ r_3 = \dfrac{R_1.R_2 + R_2.R_3 + R_1.R_3}{R_3} \end{cases}$$

3.3 - Exercice d'application :

Déterminer la résistance équivalente R_T du dipôle AD du réseau suivant en utilisant les règles de conversion de réseaux.

R1 = 2Ω
R2 = 4Ω
R3 = 6Ω
R4 = 5Ω
R5 = 4Ω