Espaces vectoriels

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 *T

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (muni de $f+g$ et $\lambda.f$ usuels) (ne pas hésiter à redémontrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel). Soit F l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'une des conditions suivantes :

1) $f(0)+f(1)=0$ 2) $f(0)=0$ 3) $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ 4) $\forall x\in[0,1],\ f(x)+f(1-x)=0$
5) $\forall x\in[0,1],\ f(x)\geq 0$ 6) $2f(0)=f(1)+3$

Dans quel cas F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Correction ▼ [005164]

Exercice 2 **T

On munit $\mathbb{R}^n$ des lois produit usuelles. Parmi les sous-ensembles suivants F de $\mathbb{R}^n$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=0\}$ 2) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=1\}$
3) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=x_2\}$ 4) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1+...+x_n=0\}$
5) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1.x_2=0\}$

Correction ▼ [005165]

Exercice 3 **

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant $A\cap B=A\cap C$, $A+B=A+C$ et $B\subset C$. Montrer que $B=C$.

Correction ▼ [005166]

Exercice 4 **T

Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles (muni des opérations usuelles). On considère les trois éléments de E suivants : $u=(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$, $v=(\cos(n\theta+a))_{n\in\mathbb{N}}$ et $w=(\cos(n\theta+b))_{n\in\mathbb{N}}$ où θ, a et b sont des réels donnés. Montrer que (u,v,w) est une famille liée.

Correction ▼ [005167]

Exercice 5 **T

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u=(1,2,-5,3)$ et $v=(2,-1,4,7)$. Déterminer λ et μ réels tels que $(\lambda,\mu,-37,-3)$ appartienne à F.

Correction ▼ [005168]

Exercice 6 **T

Montrer que $a=(1,2,3)$ et $b=(2,-1,1)$ engendrent le même sous espace de $\mathbb{R}^3$ que $c=(1,0,1)$ et $d=(0,1,1)$.

Correction ▼ [005169]

Exercice 7 **T

1. Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f((1,0,0)) = (1,1)$ puis $f((0,1,0)) = (0,1)$ et $f((0,0,1)) = (-1,1)$. Calculer $f((3,-1,4))$ et $f((x,y,z))$ en général.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}f$. En fournir une base. Donner un supplémentaire de $\mathrm{Ker}f$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\mathrm{Im}f$.

Correction ▼ [005170]

Exercice 8 **I

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un élément de $\mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $[\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{0\}]$ et $[\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2 \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}f]$ (où $f^2 = f \circ f$).
2. Par définition, un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.
   Montrer que
   $$[p \text{ projecteur} \Leftrightarrow Id - p \text{ projecteur}]$$
   puis que
   $$[p \text{ projecteur} \Rightarrow \mathrm{Im}p = \mathrm{Ker}(Id-p) \text{ et } \mathrm{Ker}p = \mathrm{Im}(Id-p) \text{ et } E = \mathrm{Ker}p \oplus \mathrm{Im}p].$$
3. Soient p et q deux projecteurs, montrer que : $[\mathrm{Ker}p = \mathrm{Ker}q \Leftrightarrow p = p\circ q \text{ et } q = q \circ p]$.
4. p et q étant deux projecteurs vérifiant $p\circ q + q \circ p = 0$, montrer que $p \circ q = q \circ p = 0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p+q$ soit un projecteur lorsque p et q le sont. Dans ce cas, déterminer $\mathrm{Im}(p+q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q)$ en fonction de $\mathrm{Ker}p$, $\mathrm{Ker}q$, $\mathrm{Im}p$ et $\mathrm{Im}q$.

Correction ▼ [005171]

Exercice 9 **

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B et C trois sous-espaces de E.

1. Montrer que : $(A\cap B) + (A \cap C) \subset A \cap (B+C)$.
2. A-t-on toujours l'égalité ?
3. Montrer que : $(A\cap B) + (A\cap C) = A \cap (B + (A\cap C))$.

Correction ▼ [005172]

Exercice 10 **T

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère $V = \{(x,y,z,t) \in E/\ x-2y = 0 \text{ et } y-2z = 0\}$ et $W = \{(x,y,z,t)\in E/\ x+z = y+t\}$.

1. Montrer que V et W sont des sous espaces vectoriels de E.
2. Donner une base de V, W et $V\cap W$.
3. Montrer que $E = V + W$.

Correction ▼ [005173]

Exercice 11 ***

Soit $f :\begin{array}{ccc} [0,+\infty[\times[0,2\pi[& \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x\cos y, x\sin y)\end{array}$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Soient a, b, α et β quatre réels. Montrer qu'il existe $(c,\gamma)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R},\ a\cos(x-\alpha)+b\cos(x-\beta) = c\cos(x-\gamma)$.
3. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $F = \{u\in E/\ \exists(a,b,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^4 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = a\cos(x-\alpha)+b\cos(2x-\beta)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

4. Déterminer $\{\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), 1, \cos^2 x, \sin^2 x\} \cap F$.
5. Montrer que $(\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x))$ est une famille libre de F.

Correction ▼ [005174]

Exercice 12 **

Soit C l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissantes sur $\mathbb{R}$.

1. C est-il un espace vectoriel (pour les opérations usuelles) ?
2. Montrer que $V = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \exists (g,h) \in C^2$ tel que $f = g - h\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Correction ▼ [005175]

Exercice 13 **

Montrer que la commutativité de la loi $+$ est une conséquence des autres axiomes de la structure d'espace vectoriel.

Correction ▼ [005176]

Exercice 14 ***

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subset (A + B) \cap (B + C) \cap (C + A).$$

Correction ▼ [005177]

Exercice 15 **IT

Soient $u = (1,1,\dots,1)$ et $F = \text{Vect}(u)$ puis $G = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 + \dots + x_n = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

Correction ▼ [005178]

Exercice 16 ****

1. Soit n un entier naturel. Montrer que si n n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
2. Soit $E = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6},\ (a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4\}$. Vérifier que E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel puis déterminer une base de E.

Correction ▼ [005179]

Exercice 17 ***T

Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, étudier la liberté des familles suivantes A de vecteurs de E :

1. a, b et c étant trois réels donnés, $A = (f_a, f_b, f_c)$ où, pour tout réel x, $f_u(x) = \sin(x + u)$.
2. $A = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où, pour tout réel x, $f_n(x) = nx + n^2 + 1$.
3. $A = (x \mapsto x^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ (ici $E = (]0; +\infty[)^2$).
4. $A = (x \mapsto |x - a|)_{a \in \mathbb{R}}$.

Correction ▼ [005180]

Exercice 18 ****

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(u,v) \in (\mathscr{L}(E))^2$.

1. Montrer que $[\text{Ker} v \subset \text{Ker} u \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E) / \ u = w \circ v]$.
2. En déduire que $[v \text{ injectif} \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E) / \ w \circ v = Id_E]$.

Correction ▼ [005181]

Exercice 19 ***

Soit $E=\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

– Soit $f\ :\ \begin{array}{rcl} E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. f est-elle linéaire, injective, surjective ? Fournir un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$.

– Mêmes questions avec $g\ :\ \begin{array}{rcl} E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & \int_0^x P(t)\,dt \end{array}$.

Correction ▼ [005182]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. La fonction nulle est dans F et en particulier, $F \neq \varnothing$. Soient alors $(f,g) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
$$(\lambda f+\mu g)(0)+(\lambda f+\mu g)(1)=\lambda(f(0)+f(1))+\mu(g(0)+g(1))=0.$$
Par suite, $\lambda f+\mu g$ est dans F. On a montré que :
$$F \neq \varnothing \text{ et } \forall (f,g) \in F^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda f+\mu g \in F.$$
F est donc un sous-espace vectoriel de E.
2. Même démarche et même conclusion .
3. F ne contient pas la fonction nulle et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.
4. La fonction nulle est dans F et en particulier, $F \neq \varnothing$. Soient alors $(f,g) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Pour x élément de $[0,1]$,
$$(\lambda f+\mu g)(x)+(\lambda f+\mu g)(1-x)=\lambda(f(x)+f(1-x))+\mu(g(x)+g(1-x))=0$$
et $\lambda f+\mu g$ est dans F. F est un sous-espace vectoriel de E.
Remarque. Les graphes des fonctions considérés sont symétriques par rapport au point $(\frac{1}{2},0)$.
5. F contient la fonction constante 1 mais pas son opposé la fonction constante -1 et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.
6. F ne contient pas la fonction nulle et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E.

Correction de l'exercice 2 ▲

Dans les cas où F est un sous-espace, on a à chaque fois trois démarches possibles pour le vérifier :
- Utiliser la caractérisation d'un sous-espace vectoriel.
- Obtenir F comme noyau d'une forme linéaire ou plus généralement, comme noyau d'une application linéaire.
- Obtenir F comme sous-espace engendré par une famille de vecteurs.

Je vous détaille une seule fois les trois démarches.

1. **1ère démarche.** F contient le vecteur nul $(0,\dots,0)$ et donc $F \neq \varnothing$. Soient alors $((x_1,\dots,x_n),(x_1',\dots,x_n')) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$\lambda(x_1,\dots,x_n)+\mu(x_1',\dots,x_n')=(\lambda x_1+\mu x_1',\dots,\lambda x_n+\mu x_n')$$
avec $\lambda x_1+\mu x_1'=0$. Donc, $\lambda(x_1,\dots,x_n)+\mu(x_1',\dots,x_n') \in F$. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2ème démarche. L'application $(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_1$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est lenoyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
3ème démarche.
$$\begin{aligned} F &= \{(0,x_2,\dots,x_n),\ (x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\} = \{x_2(0,1,0,\dots,0)+\dots+x_n(0,\dots,0,1),\ (x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\} \\ &= \mathrm{Vect}((0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)). \end{aligned}$$
F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. F ne contient pas le vecteur nul et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
3. (Ici, $n \geq 2$). L'application $(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_1-x_2$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est le noyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
4. L'application $(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_1+\dots+x_n$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ et F en est le noyau. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
5. (Ici, $n \geq 2$). Les vecteurs $e_1=(1,0,\dots,0)$ et $e_2=(0,1,0\dots,0)$ sont dans F mais $e_1+e_2=(1,1,0\dots0)$ n'y est pas. F n'est donc pas un sous espace vectoriel de E.
Remarque. F est la réunion des sous-espaces $\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n/\ x_1=0\}$ et $\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n/\ x_2=0\}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Il suffit de montrer que $C \subset B$.
Soit x un élément de C. Alors $x \in A+C = A+B$ et il existe $(y,z) \in A \times B$ tel que $x = y+z$. Mais $z \in B \subset C$ et donc, puisque C est un sous-espace vectoriel de E, $y = x-z$ est dans C. Donc, $y \in A \cap C = A \cap B$ et en particulier y est dans B. Finalement, $x = y+z$ est dans B. On a montré que tout élément de C est dans B et donc que, $C \subset B$. Puisque d'autre part $B \subset C$, on a $B = C$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $u' = (\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$. On a : $u = 1.u + 0.u'$, puis $v = \cos a.u - \sin a.u'$, puis $w = \cos b.u - \sin b.u'$. Les trois vecteurs u, v et w sont donc combinaisons linéaires des deux vecteurs u et u' et constituent par suite une famille liée ($p+1$ combinaisons linéaires de p vecteurs constituent une famille liée).

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\lambda,\mu,-37,-3) \in F \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2/\ (\lambda,\mu,-37,-3) = au+bv \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2/ \left\{\begin{array}{l} a+2b = \lambda \\ 2a-b = \mu \\ -5a+4b = -37 \\ 3a+7b = -3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2/ \left\{\begin{array}{l} a+2b = \lambda \\ 2a-b = \mu \\ a = \frac{247}{47} \\ b = -\frac{126}{47} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \frac{247}{47} + 2(-\frac{126}{47}) \\ \mu = 2\frac{247}{47} + \frac{126}{47} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -\frac{5}{47} \\ \mu = \frac{620}{47} \end{array}\right. .$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Posons $F = \text{Vect}(a,b)$ et $G = \text{Vect}(c,d)$.
Montrons que c et d sont dans F.

$$c \in F \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ c = \lambda a + \mu b \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/ \left\{\begin{array}{l} \lambda+2\mu = 1 \\ 2\lambda-\mu = 0 \\ 3\lambda+\mu = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/ \left\{\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{5} \\ \mu = \frac{2}{5} \\ 3\lambda+\mu = 1 \end{array}\right. .$$

Puisque $3.\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = 1$, le système précédent admet bien un couple (λ,μ) solution et c est dans F. Plus précisément, $c = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b$.

$$d \in F \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/\ d = \lambda a + \mu b \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/ \left\{\begin{array}{l} \lambda+2\mu = 0 \\ 2\lambda-\mu = 1 \\ 3\lambda+\mu = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2/ \left\{\begin{array}{l} \lambda = \frac{2}{5} \\ \mu = -\frac{1}{5} \\ 3\lambda+\mu = 1 \end{array}\right. .$$

Puisque $3.\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = 1$, le système précédent admet bien un couple (λ,μ) solution et d est dans F. Plus précisément, $d = \frac{2}{5}a - \frac{1}{5}b$. En résumé, $\{c,d\} \subset F$ et donc $G = \text{Vect}(c,d) \subset F$.
Montrons que a et b sont dans G mais les égalités $c = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b$ et $d = \frac{2}{5}a - \frac{1}{5}b$ fournissent $a = c+2d$ et $b = 2c-d$. Par suite, $\{a,b\} \subset G$ et donc $F = \text{Vect}(a,b) \subset G$. Finalement $F = G$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Si f existe alors nécessairement, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$f((x,y,z)) = xf((1,0,0)) + yf((0,1,0)) + zf((0,0,1)) = x(1,1) + y(0,1) + z(-1,1) = (x-z, x+y+z).$$

On en déduit l'unicité de f.
Réciproquement, f ainsi définie vérifie bien les trois égalités de l'énoncé. Il reste donc à se convaincre que f est linéaire.
Soient $((x,y,z),(x',y',z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z')) &= f((\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')) \\ &= ((\lambda x + \mu x') - (\lambda z + \mu z'), (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z')) \\ &= \lambda(x-z, x+y+z) + \mu(x'-z', x'+y'+z') \\ &= \lambda f((x,y,z)) + \mu f((x',y',z')). \end{aligned}$$

f est donc linéaire et convient. On en déduit l'existence de f. On a alors $f((3,-1,4)) = (3-4, 3-1+4) = (-1,6)$.
Remarque. La démonstration de la linéarité de f ci-dessus est en fait superflue car le cours donne l'expression générale d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

2. Détermination de $\text{Ker} f$.
Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow f((x,y,z)) = (0,0) \Leftrightarrow (x-z, x+y+z) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-z=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=x \\ y=-2x \end{array} \right.$$

Donc, $\text{Ker} f = \{(x,-2x,x),\ x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-2,1),\ x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,-2,1))$. La famille $((1,-2,1))$ engendre $\text{Ker} f$ et est libre. Donc, la famille $((1,-2,1))$ est une base de $\text{Ker} f$. Détermination de $\text{Im} f$.
Soit $(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} (x',y') \in \text{Im} f &\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ f((x,y,z)) = (x',y') \\ &\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{l} x-z=x' \\ x+y+z=y' \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{l} z=x-x' \\ y=-2x+x'+y' \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \text{le système d'inconnue } (x,y,z) \ : \left\{ \begin{array}{l} z=x-x' \\ y=-2x+x'+y' \end{array} \right. \text{ a au moins une solution.} \end{aligned}$$

Or, le triplet $(0, x'+y', -x')$ est solution et le système proposé admet une solution. Par suite, tout (x',y') de $\mathbb{R}^2$ est dans $\text{Im} f$ et finalement, $\text{Im} f = \mathbb{R}^2$.
Détermination d'un supplémentaire de $\text{Ker} f$.
Posons $e_1 = (1,-2,1)$, $e_2 = (1,0,0)$ et $e_3 = (0,1,0)$ puis $F = \text{Vect}(e_2,e_3)$ et montrons que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker} f \oplus F$.
Tout d'abord, $\text{Ker} f \cap F = \{0\}$. En effet :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \text{Ker} f \cap F &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 /\ (x,y,z) = ae_1 = be_2 + ce_3 \\ &\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{l} x=a=b \\ y=-2a=c \\ z=a=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x=y=z=0 \end{aligned}$$

Vérifions ensuite que $\text{Ker} f + F = \mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker} f + F \Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \ (x,y,z) = ae_1 + be_2 + ce_3$$
$$\Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{l} a+b = x \\ -2a+c = y \\ a = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{l} a = z \\ b = x-z \\ c = y+2z \end{array} \right.$$

Le système précédent (d'inconnue (a,b,c)) admet donc toujours une solution et on a montré que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f + F$. Finalement, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus F$ et F est un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^3$.

Vérifions enfin que F est isomorphe à $\mathrm{Im} f$. Mais, $F = \{(x,y,0),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,0) & \mapsto & (x,y) \end{array}$ est clairement un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im} f (= \mathbb{R}^2)$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. On a toujours $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$.
   En effet, si x est un vecteur de $\mathrm{Ker} f$, alors $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ (car f est linéaire) et x est dans $\mathrm{Ker} f^2$.
   Montrons alors que : $[\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}]$. Supposons que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$ et montrons que $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.
   Soit $x \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$. Alors, d'une part f(x) = 0 et d'autre part, il existe y élément de E tel que $x = f(y)$. Mais alors, $f^2(y) = f(x) = 0$ et $y \in \mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$. Donc, $x = f(y) = 0$. On a montré que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \Rightarrow \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.
   Supposons que $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$ et montrons que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   Soit $x \in \mathrm{Ker} f^2$. Alors $f(f(x)) = 0$ et donc $f(x) \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$. Donc, $f(x) = 0$ et x est dans $\mathrm{Ker} f$. On a ainsi montré que $\mathrm{Ker} f^2 \subset \mathrm{Ker} f$ et, puisque l'on a toujours $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$, on a finalement $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$. On a montré que $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
   On a toujours $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$. En effet : $y \in \mathrm{Im} f^2 \Rightarrow \exists x \in E / \ y = f^2(x) = f(f(x)) \Rightarrow y \in \mathrm{Im} f$.
   Supposons que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$ et montrons que $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = E$. Soit $x \in E$. Puisque $f(x) \in \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$, il existe $t \in E$ tel que $f(x) = f^2(t)$. Soit alors $z = f(t)$ et $y = x - f(t)$. On a bien $x = y + z$ et $z \in \mathrm{Im} f$. De plus, $f(y) = f(x) - f(f(t)) = 0$ et y est bien élément de $\mathrm{Ker} f$. On a donc montré que $E = \mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f$.
   Supposons que $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im} f = E$ et montrons que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
   Soit $x \in E$. Il existe $(y,z) \in \mathrm{Ker} f \times \mathrm{Im} f$ tel que $x = y + z$. Mais alors $f(x) = f(z) \in \mathrm{Im} f^2$ car z est dans $\mathrm{Im} f$. Ainsi, pour tout x de E, $f(x)$ est dans $\mathrm{Im} f^2$ ce qui montre que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$ et comme on a toujours $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$, on a montré que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2. $Id - p$ projecteur $\Leftrightarrow (Id-p)^2 = Id - p \Leftrightarrow Id - 2p + p^2 = Id - p \Leftrightarrow p^2 = p \Leftrightarrow p$ projecteur.
   Soit x un élément de E. $x \in \mathrm{Im} p \Rightarrow \exists y \in E / \ x = p(y)$. Mais alors $p(x) = p^2(y) = p(y) = x$. Donc, $\forall x \in E,\ (x \in \mathrm{Im} p \Rightarrow p(x) = x)$.
   Réciproquement, si $p(x) = x$ alors bien sûr, x est dans $\mathrm{Im} p$.
   Finalement, pour tout vecteur x de E, $x \in \mathrm{Im} p \Leftrightarrow p(x) = x \Leftrightarrow (Id-p)(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(Id-p)$. On a montré que $\mathrm{Im} p = \mathrm{Ker}(Id-p)$.
   En appliquant ce qui précède à $Id - p$ qui est également un projecteur, on obtient $\mathrm{Im}(Id-p) = \mathrm{Ker}(Id-(Id-p)) = \mathrm{Ker} p$.
   Enfin, puisque $p^2 = p$ et donc en particulier que $\mathrm{Ker} p = \mathrm{Ker} p^2$ et $\mathrm{Im} p = \mathrm{Im} p^2$, le 1) montre que $E = \mathrm{Ker} p \oplus \mathrm{Im} p$.
3.

$$p = p \circ q \text{ et } q = q \circ p \Leftrightarrow p \circ (Id - q) = 0 \text{ et } q \circ (Id - p) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(Id-q) \subset \mathrm{Ker} p \text{ et } \mathrm{Im}(Id-p) \subset \mathrm{Ker} q$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Ker} q \subset \mathrm{Ker} p \text{ et } \mathrm{Ker} p \subset \mathrm{Ker} q \text{ (d'après 2))}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{Ker} p = \mathrm{Ker} q.$$

4. $p\circ q+q\circ p=0\Rightarrow p\circ q=(p\circ p)\circ q=p\circ(p\circ q)=-p\circ(q\circ p)$ et de même, $q\circ p=q\circ p\circ p=-p\circ q\circ p$. En particulier, $p\circ q=q\circ p$ et donc $0=p\circ q+q\circ p=2p\circ q=2q\circ p$ puis $p\circ q=q\circ p=0$.
La réciproque est immédiate.
$p+q$ projecteur $\Leftrightarrow(p+q)^2=p+q\Leftrightarrow p^2+pq+qp+q^2=p+q\Leftrightarrow pq+qp=0\Leftrightarrow pq=qp=0$ (d'après ci-dessus). Ensuite, $\text{Im}(p+q)=\{p(x)+q(x),\ x\in E\}\subset\{p(x)+q(y),\ (x,y)\in E^2\}=\text{Im}p+\text{Im}q$.
Réciproquement, soit z un élément de $\text{Im}p+\text{Im}q$. Il existe deux vecteurs x et y de E tels que $z=p(x)+q(y)$. Mais alors, $p(z)=p^2(x)+pq(y)=p(x)$ et $q(z)=qp(x)+q^2(y)=q(y)$ et donc

$$z=p(x)+p(y)=p(z)+q(z)=(p+q)(z)\in\text{Im}(p+q).$$

Donc, $\text{Im}p+\text{Im}q\subset\text{Im}(p+q)$ et finalement, $\text{Im}(p+q)=\text{Im}p+\text{Im}q$.
$\text{Ker}p\cap\text{Ker}q=\{x\in E/\ p(x)=q(x)=0\}\subset\{x\in E/\ p(x)+q(x)=0\}=\text{Ker}(p+q)$.
Réciproquement, si x est élément de $\text{Ker}(p+q)$ alors $p(x)+q(x)=0$. Par suite, $p(x)=p^2(x)+pq(x)=p(p(x)+q(x))=p(0)=0$ et $q(x)=qp(x)+q^2(x)=q(0)=0$. Donc, $p(x)=q(x)=0$ et $x\in\text{Ker}p\cap\text{Ker}q$. Finalement, $\text{Ker}(p+q)=\text{Ker}p\cap\text{Ker}q$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Soit $x\in E$.
$x\in(A\cap B)+(A\cap C)\Rightarrow\exists y\in A\cap B,\ \exists z\in A\cap C/\ x=y+z$.
y et z sont dans A et donc $x=y+z$ est dans A car A est un sous-espace vectoriel de E.
Puis y est dans B et z est dans C et donc $x=y+z$ est dans $B+C$. Finalement,

$$\forall x\in E,\ [x\in(A\cap B)+(A\cap C)\Rightarrow x\in A\cap(B+C)].$$

Autre démarche.
$(A\cap B\subset B$ et $A\cap C\subset C)\Rightarrow(A\cap B)+(A\cap C)\subset B+C$ puis $(A\cap B\subset A$ et $A\cap C\subset A\Rightarrow(A\cap B)+(A\cap C)\subset A+A=A$, et finalement $(A\cap B)+(A\cap C)\subset A\cap(B+C)$.
2. Si on essaie de démontrer l'inclusion contraire, le raisonnement coince car la somme $y+z$ peut être dans A sans que ni y, ni z ne soient dans A.
Contre-exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $A=\mathbb{R}.(1,0)=\{(x,0),\ x\in\mathbb{R}\}$, $B=\mathbb{R}.(0,1)$ et $C=\mathbb{R}.(1,1)$.
$B+C=\mathbb{R}^2$ et $A\cap(B+C)=A$ mais $A\cap B=\{0\}$ et $A\cap C=\{0\}$ et donc $(A\cap B)+(A\cap C)=\{0\}\neq A\cap(B+C)$.
3. $A\cap B\subset B\Rightarrow(A\cap B)+(A\cap C)\subset B+(A\cap C)$ mais aussi $(A\cap B)+(A\cap C)\subset A+A=A$. Donc, $(A\cap B)+(A\cap C)\subset A\cap(B+(A\cap C))$.
Inversement, soit $x\in A\cap(B+(A\cap C))$ alors $x=y+z$ où y est dans B et z est dans $A\cap C$. Mais alors, x et z sont dans A et donc $y=x-z$ est dans A et même plus précisément dans $A\cap B$. Donc, $x\in(A\cap B)+(A\cap C)$.
Donc, $A\cap(B+(A\cap C))\subset(A\cap B)+(A\cap C)$ et finalement, $A\cap(B+(A\cap C))=(A\cap B)+(A\cap C)$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Pour $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, on pose $f((x,y,z,t))=x-2y$, $g((x,y,z,t))=y-2z$ et $h((x,y,z,t))=x-y+z-t$. f, g et h sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$. Donc, $V=\text{Ker}f\cap\text{Ker}g$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et $W=\text{Ker}h$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t)\in V\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2y\\ y=2z\end{array}\right.\Leftrightarrow\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=4z\\ y=2z\end{array}\right..$$

Donc, $V=\{(4z,2z,z,t),\ (z,t)\in\mathbb{R}^2\}=\text{Vect}(e_1,e_2)$ où $e_1=(4,2,1,0)$ et $e_2=(0,0,0,1)$. Montrons alors que (e_1,e_2) est libre. Soit $(z,t)\in\mathbb{R}^2$.

$$ze_1 + te_2 = 0 \Rightarrow (4z, 2z, z, t) = (0,0,0,0) \Rightarrow z = t = 0.$$

Donc, (e_1, e_2) est une base de V.

Pour $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $(x,y,z,t) \in W \Leftrightarrow t = x - y + z$. Donc, $W = \{(x,y,z,x-y+z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(e'_1, e'_2, e'_3)$ où $e'_1 = (1,0,0,1)$, $e'_2 = (0,1,0,-1)$ et $e'_3 = (0,0,1,1)$.

Montrons alors que (e'_1, e'_2, e'_3) est libre. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$xe'_1 + ye'_2 + ze'_3 = 0 \Rightarrow (x,y,z,x-y+z) = (0,0,0,0) \Rightarrow x = y = z = 0.$$

Donc, (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de W. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t) \in V \cap W \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y \\ y = 2z \\ x - y + z - t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4z \\ y = 2z \\ t = 3z \end{array}\right. .$$

Donc, $V \cap W = \{(4z, 2z, z, 3z),\ z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(e)$ où $e = (4,2,1,3)$. De plus, e étant non nul, la famille (e) est libre et est donc une base de $V \cap W$.

3. Soit $u = (x,y,z,t)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$.

   On cherche $v = (4\alpha, 2\alpha, \alpha, \beta) \in V$ et $w = (a, b, c, a-b+c) \in W$ tels que $u = v + w$.

$$u = v + w \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4\alpha + a = x \\ 2\alpha + b = y \\ \alpha + c = z \\ \beta + a - b + c = t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = x - 4\alpha \\ b = y - 2\alpha \\ c = z - \alpha \\ \beta = -x + y - z + t - 3\alpha \end{array}\right. .$$

   et $\alpha = 0$, $\beta = -x + y - z + t$, $a = x$, $b = y$ et $c = z$ conviennent. Donc, $\forall u \in \mathbb{R}^4$, $\exists (v,w) \in V \times W /\ u = v + w$. On a montré que $\mathbb{R}^4 = V + W$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Pour tout (y, y') élément de $[0, 2\pi[^2$, $f((0,y)) = f((0,y'))$ et f n'est pas injective.

   Montrons que f est surjective.

   Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$.
   - Si $X = Y = 0$, $f((0,0)) = (0,0)$.
   - Si $X = 0$ et $Y > 0$, $f((Y, \frac{\pi}{2})) = (0,Y)$ avec $(Y, \frac{\pi}{2})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X = 0$ et $Y < 0$, $f((-Y, \frac{3\pi}{2})) = (0,Y)$ avec $(-Y, \frac{3\pi}{2})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X > 0$ et $Y \geq 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \text{Arctan}\,\frac{Y}{X})) = (X,Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, \text{Arctan}\,\frac{Y}{X})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X < 0$ et $Y \geq 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \pi + \text{Arctan}\,\frac{Y}{X})) = (X,Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, \pi + \text{Arctan}\,\frac{Y}{X})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X > 0$ et $Y < 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, 2\pi + \text{Arctan}\,\frac{Y}{X})) = (X,Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, 2\pi + \text{Arctan}\,\frac{Y}{X})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.
   - Si $X < 0$ et $Y < 0$, $f((\sqrt{X^2+Y^2}, \pi + \text{Arctan}\,\frac{Y}{X})) = (X,Y)$ avec $(\sqrt{X^2+Y^2}, \pi + \text{Arctan}\,\frac{Y}{X})$ élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$.

2. Pour tout réel x, on a $a\cos(x-\alpha) + b\cos(x-\beta) = (a\cos\alpha + b\cos\beta)\cos x + (a\sin\alpha + b\sin\beta)\sin x$.

   D'après 1), f est surjective et il existe (c,γ) élément de $[0,+\infty[\times[0,2\pi[$ tel que $a\cos\alpha + b\cos\beta = c\cos\gamma$ et $a\sin\alpha + b\sin\beta = c\sin\gamma$. Donc,

$$\exists (c,\gamma) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[/\ \forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x-\alpha) + b\cos(x-\beta) = c(\cos x cos\gamma + \sin x \sin\gamma) = c\cos(x-\gamma).$$

3. F est non vide car contient l'application nulle et est contenu dans E. De plus, pour x réel,

$$\begin{aligned}
a\cos(x-\alpha)+b\cos(2x-\beta)+a'\cos(x-\alpha')+b'\cos(2x-\beta')\\
&= a\cos(x-\alpha)+a'\cos(x-\alpha')+b\cos(2x-\beta)+b'\cos(2x-\beta')\\
&= a''cos(x-\alpha'')+b''\cos(2x-\beta''),
\end{aligned}$$

pour un certain $(a',b'',\alpha'',\beta'')$ (d'après 2)). F est un sous-espace vectoriel de E.

4. Pour tout réel x, $\cos x = 1.\cos(x-0)+0.\cos(2x-0)$ et $x \mapsto \cos x$ est élément de F.
Pour tout réel x, $\sin x = 1.\cos(x-\frac{\pi}{2})+0.\cos(2x-0)$ et $x \mapsto \sin x$ est élément de F.
Pour tout réel x, $\cos(2x) = 0.\cos(x-0)+1.\cos(2x-0)$ et $x \mapsto \cos(2x)$ est élément de F.
Pour tout réel x, $\sin(2x) = 0.\cos(x-0)+1.\cos(2x-\frac{\pi}{2})$ et $x \mapsto \sin(2x)$ est élément de F.
D'autre part, pour tout réel x, $\cos(2x) = 2\cos^2 x-1 = 1-2\sin^2 x$ et donc,

$$x \mapsto 1 \in F \Leftrightarrow x \mapsto \cos^2 x \in F \Leftrightarrow x \mapsto \sin^2 x \in F.$$

Montrons alors que $1 \notin F$.
On suppose qu'il existe $(a,b,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x-\alpha)+b\cos(2x-\beta) = 1.$$

En dérivant deux fois, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -a\cos(x-\alpha)-4b\cos(2x-\beta) = 0,$$

et donc en additionnant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -3b\cos(2x-\beta) = 1,$$

ce qui est impossible (pour $x = \frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$, on trouve 0). Donc, aucune des trois dernières fonctions n'est dans F.

5. On a vu que $(x \mapsto \cos x,\ x \mapsto \sin x,\ x \mapsto \cos(2x),\ x \mapsto \sin(2x))$ est une famille d'éléments de F. Montrons que cette famille est libre.
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.
Supposons que $\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos x+b\sin x+c\cos(2x)+d\sin(2x) = 0$. En dérivant deux fois, on obtient $\forall x \in \mathbb{R},\ -a\cos x-b\sin x-4c\cos(2x)-4d\sin(2x) = 0$ et en additionnant : $\forall x \in \mathbb{R},\ -3c\cos(2x)-3d\sin(2x) = 0$. Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} a\cos x+b\sin x = 0\\ c\cos(2x)+d\sin(2x) = 0 \end{array}\right. .$$

$x = 0$ fournit $a = c = 0$ puis $x = \frac{\pi}{4}$ fournit $b = d = 0$. Donc, $(x \mapsto \cos x,\ x \mapsto \sin x,\ x \mapsto \cos(2x),\ x \mapsto \sin(2x))$ est une famille libre d'éléments de F.

Correction de l'exercice 12 ▲

1. C contient l'identité de $\mathbb{R}$, mais ne contient pas son opposé. Donc, C n'est pas un espace vectoriel.
2. Montrons que V est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. V est déjà non vide car contient la fonction nulle $(0 = 0-0)$.
Soit $(f_1,f_2) \in V^2$. Il existe $(g_1,g_2,h_1,h_2) \in C^4$ tel que $f_1 = g_1-h_1$ et $f_2 = g_2-h_2$. Mais alors, $f_1+f_2 = (g_1+g_2)-(h_1+h_2)$. Or, une somme de fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, et donc, g_1+g_2 et h_1+h_2 sont des éléments de C ou encore f_1+f_2 est dans V.
Soit $f \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $(g,h) \in V^2$ tel que $f = g-h$ et donc $\lambda f = \lambda g-\lambda h$.

Si $\lambda \geq 0$, λg et λh sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et λf est dans V.
Si $\lambda < 0$, on écrit $\lambda f = (-\lambda h) - (-\lambda g)$, et puisque $-\lambda g$ et $-\lambda h$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$, λf est encore dans V. V est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 13 ▲

Soit $(x,y) \in E^2$.
$(1+1).(x+y) = 1.(x+y)+1.(x+y) = (x+y)+(x+y) = x+y+x+y$ mais aussi $(1+1).(x+y) = (1+1).x+(1+1).y = x+x+y+y$.
Enfin, $(E,+)$ étant un groupe, tout élément est régulier et en particulier x est régulier à gauche et y est régulier à droite. On a montré que pour tout couple (x,y) élément de E^2, $x+y = y+x$.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soit $F = (A\cap B)+(A\cap C)+(B\cap C)$.
$F \subset A+A+B = A+B$ puis $F \subset A+C+C = A+C$ puis $F \subset B+C+C = B+C$ et finalement $F \subset (A+B)\cap(A+C)\cap(B+C)$.

Correction de l'exercice 15 ▲

$F = \text{Vect}(u)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, car est le noyau de la forme linéaire $(x_1,...,x_n) \mapsto x_1 + ... + x_n$.
Soit $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$x - \lambda u \in G \Leftrightarrow (x_1-\lambda,...,x_n-\lambda) \in G \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}(x_k-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \exists! \lambda \in \mathbb{R}/\ x-\lambda u \in G,$$

et donc,

$$\mathbb{R}^n = F \oplus G.$$

Le projeté sur F parallèlement à G d'un vecteur $x = (x_1,...,x_n)$ est

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.u = (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,...,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k)$$

et le projeté du même vecteur sur G parallèlement à F est

$$x - (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k).u = (x_1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,...,x_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k).$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Soit n un entier naturel supèrieur ou égal à 2.
Si $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, il existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ ou encore tel que $n.b^2 = a^2$. Mais alors, par unicité de la décomposition d'un entier naturel supèrieur ou égal à 2 en facteurs premiers, tous les facteurs premiers de n ont un exposant pair ce qui signifie exactement que n est un carré parfait.
Si $n = 0$ ou $n = 1$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ et n est d'autre part un carré parfait. On a montré que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow n \text{ est un carré parfait})$$
ou encore par contraposition
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \text{ n'est pas un carré parfait} \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q}).$$

2. D'après 1), $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels.
$E = \text{Vect}_{\mathbb{Q}}(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ et donc, E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ en est une famille génératrice.
Montrons que cette famille est $\mathbb{Q}$-libre.
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4$.

$$\begin{aligned} a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0 &\Rightarrow (a+d\sqrt{6})^2 = (-b\sqrt{2}-c\sqrt{3})^2 \Rightarrow a^2+2ad\sqrt{6}+6d^2 = 2b^2+2bc\sqrt{6}+3c^2 \\ &\Rightarrow a^2-2b^2-3c^2+6d^2 = 2(-ad+bc)\sqrt{6} \end{aligned}$$

Puisque $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, on obtient $a^2-2b^2-3c^2+6d^2 = 2(-ad+bc) = 0$ (car si $bc-ad \neq 0$, $\sqrt{6} = \frac{a^2-2b^2-3c^2+6d^2}{2(-ad+bc)} \in \mathbb{Q}$) ou encore,

$$\left\{\begin{array}{l} a^2-3c^2 = 2b^2-6d^2 \quad (1) \\ ad = bc \quad (2) \end{array}\right. .$$

De même,

$$\begin{aligned} a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0 &\Rightarrow (a+c\sqrt{3})^2 = (-b\sqrt{2}-d\sqrt{6})^2 \Rightarrow (a^2+2ac\sqrt{3}+3c^2 = 2b^2+4bd\sqrt{3}+6d^2 \\ &\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2+3c^2 = 2b^2+6d^2 \quad (3) \\ ac = 2bd \quad (4) \end{array}\right. . \end{aligned}$$

(puisque $\sqrt{3}$ est irrationnel). En additionnant et en retranchant (1) et (3), on obtient $a^2 = 2b^2$ et $c^2 = 2d^2$.Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, on ne peut avoir $b \neq 0$ (car alors $\sqrt{2} = \pm\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$) ou $d \neq 0$. Donc, $b = d = 0$ puis $a = c = 0$. Finalement, la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est $\mathbb{Q}$-libre et est donc une base de E.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Notons respectivement g et h, les fonctions sinus et cosinus.
$f_a = \cos a.g + \sin a.h$, $f_b = \cos b.g + \sin b.h$ et $f_c = \cos c.g + \sin c.h$. Donc, f_a, f_b et f_c sont trois combinaisons linéaires des deux fonctions g et h et constituent donc une famille liée ($p+1$ combinaisons linéaires de p vecteurs donnés constituent une famille liée).
2. f_0, f_1 et f_2 sont trois combinaisons linéaires des deux fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$. Donc, la famille (f_0, f_1, f_2) est une famille liée puis la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est liée en tant que sur-famille d'une famille liée.
3. Pour α réel donné et $x > 0$, posons $f_\alpha(x) = x^\alpha$.
Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, puis $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 < ... < \alpha_n$. Soit encore $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{\alpha_k} = 0 \Rightarrow \forall x \in]0;+\infty[,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k} = 0 \Rightarrow \forall x \in]0;+\infty[,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k-\alpha_n} = 0,$$
(en divisant les deux membres par x^{α_n}). Dans cette dernière égalité, on fait tendre x vers $+\infty$ et on obtient $\lambda_n = 0$. Puis, par récurrence descendante, $\lambda_{n-1} = ... = \lambda_1 = 0$. On a montré que toute sous-famille finie de la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre et donc, la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.
4. Pour a réel donné et x réel, posons $f_a(x) = |x-a|$. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2, puis a_1,...,a_n, n réels deux à deux distincts. Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{a_k} = 0$.
S'il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$ alors,
$$f_{a_i} = -\frac{1}{\lambda_i}\sum_{k\neq i} \lambda_k f_{a_k}.$$
Mais cette dernière égalité est impossible car f_{a_i} n'est pas dérivable en a_i alors que $-\frac{1}{\lambda_i}\sum_{k\neq i} \lambda_k f_{a_k}$ l'est. Donc, tous les λ_i sont nuls.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. $\Leftarrow$ Soit $(u,v)((\mathscr{L}(E))^2$. On suppose qu'il existe $w\in\mathscr{L}(E)$ tel que $u=w\circ v$. Soit x un élément de Ker$v$. Alors $v(x)=0$ et donc $u(x)=w(v(x))=w(0)=0$. Mais alors, x est dans Ker$u$. Donc Ker$v\subset Keru$.
   $\Rightarrow$ Supposons que Ker$v\subset$ Ker$u$. On cherche à définir w, élément de $\mathscr{L}(E)$ tel que $w\circ v=u$. Il faut définir précisément w sur Imv car sur $E\setminus$ Imv, on a aucune autre contrainte que la linéarité.
   Soit y un élément de Imv. (Il existe x élément de E tel que $y=v(x)$. On a alors envie de poser $w(y)=u(x)$ mais le problème est que y, élément de Imv donné peut avoir plusieurs antécédents x, x'... et on peut avoir $u(x)\neq u(x')$ de sorte que l'on n'aurait même pas défini une application w.)

   Soient x et x' deux éléments de E tels que $v(x)=v(x')=y$ alors $v(x-x')=0$ et donc $x-x'\in$ Ker$v\subset$ Ker$u$. Par suite, $u(x-x')=0$ ou encore $u(x)=u(x')$. En résumé, pour y élément donné de Imv, il existe x élément de E tel que $v(x)=y$. On pose alors $w(y)=u(x)$ en notant que $w(y)$ est bien uniquement défini, car ne dépend pas du choix de l'antécédent x de y par v. w n'est pas encore défini sur E tout entier. Notons F un supplémentaire quelconque de Imv dans E (l'existence de F est admise).

   Soit X un élément de E. Il existe deux vecteurs y et z, de Imv et F respectivement, tels que $X=y+z$. On pose alors $w(X)=u(x)$ où x est un antécédent quelconque de y par v (on a pris pour restriction de w à F l'application nulle). w ainsi définie est une application de E dans E car, pour X donné y est uniquement défini puis $u(x)$ est uniquement défini (mais pas nécessairement x).

   Soit x un élément de E et $y=v(x)$. $w(v(x))=w(y)=w(y+0)=u(x)$ (car 1)y est dans Imv 2)0 est dans F 3) x est un antécédent de y par v) et donc $w\circ v=u$.

   Montrons que w est linéaire. Soient, avec les notations précédentes, $X_1=y_1+z_1$ et $X_2=y_2+z_2$ ...

   $$\begin{aligned} w(X_1+X_2)&=w((y_1+y_2)+(z_1+z_2))=u(x_1+x_2)\quad(\text{car } y_1+y_2=v(x_1)+v(x_2)=v(x_1+x2))\\ &=u(x_1)+u(x_2)=w(X_1)+w(X_2)\end{aligned}$$

   et

   $$w(\lambda X)=w(\lambda y+\lambda z)=u(\lambda x)=\lambda u(x)=\lambda w(X).$$

2. On applique 1) à $u=Id$.

   $$v \text{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker}v=\{0\}\Leftrightarrow \text{Ker}v=\text{Ker}Id\Leftrightarrow \exists w\in\mathscr{L}(E)/\ w\circ v=Id.$$

Correction de l'exercice 19 ▲

1. $\forall P\in E$, $f(P)=P'$ est un polynôme et donc f est une application de E vers E.
   $\forall(P,Q)\in E^2$, $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $f(\lambda P+\mu Q)=(\lambda P+\mu Q)'=\lambda P'+\mu Q'=\lambda f(P)+\mu f(Q)$ et f est un endomorphisme de E.

   Soit $P\in E$. $P\in$ Ker$f\Leftrightarrow P'=0\Leftrightarrow P$ est constant. Ker$f$ n'est pas nul et f n'est pas injective.

   Soient $Q\in E$ puis P le polynôme défini par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=\int_0^x Q(t)\,dt$. P est bien un polynôme tel que $f(P)=Q$. f est surjective.

   Soit $F=\{P\in E/\ P(0)=0\}$. F est un sous espace de E en tant que noyau de la forme linéaire $P\mapsto P(0)$. Ker$f\cap F=\{0\}$ car si un polynôme est constant et s'annule en 0, ce polynôme est nul. Enfin, si P est un polynôme quelconque, $P=P(0)+(P-P(0))$ et P s'écrit bien comme la somme d'un polynôme constant et d'un polynôme s'annulant en 0. Finalement $E=$ Ker$f\oplus F$.

2. On montre facilement que g est un endomorphisme de E.
   $P\in$ Ker$g\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$, $\int_0^x P(t)\,dt=0\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=0$ (en dérivant). Donc, Ker$g=\{0\}$ et donc g est injective.

   Si P est dans Img alors $P(0)=0$ ce qui montre que g n'est pas surjective. De plus, si $P(0)=0$ alors $\int_0^x P'(t)\,dt=P(x)-P(0)=P(x)$ ce qui montre que $P=g(P')$ est dans Img et donc que Im$g=\{P\in E/\ P(0)=0\}$.