CENTRE NATIONAL D'ORIENTATION ET DE PREPARATION AUX CONCOURS D'ENTREE DANS LES GRANDES ECOLES ET FACULTES DU CAMEROUN

# Préparation au Concours d'Entrée en Troisième Année de l'ENSP et FGI

## Support de Cours

# ANALYSE RÉELLE II

*Avec Intelligentsia Corporation, Il suffit d'y croire !!!*

☎ 698 222 277 / 671 839 797
**fb :** Intelligentsia Corporation
**email :** contact@intelligentsia-corporation.com

2019

*" Vous n'êtes pas un passager sur le train de la vie, vous êtes l'ingénieur. "*

**-- Elly Roselle --**

**Instructions :**

*Il est recommandé à chaque étudiant de traiter les exercices de ce recueil (du moins ceux concernés par la séance) avant chaque séance car* ***le temps ne joue pas en notre faveur****.*

# Chapitre I : DEVELOPPEMENT LIMITES

## 1. Introduction

Le développement limité(D.L) est l'expression la plus simple possible d'une fonction permettant d'en extraire toutes les propriétés nécessaires. Le D.L d'une fonction est généralement Polynomial ; mais ce n'est pas toujours le cas. Le D.L permet aussi d'étudier plus facilement le comportement asymptotique d'une fonction.

## 2. Formules de Taylor

Théorème

Soit f une fonction continue sur le segment [a ; b] et admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n ϵ IN continue alors il existe un point c ϵ] a ; b [alors il existe un point c ϵ] a ; b [ tel que

$f(b) = \sum_{k=0}^{n}(b-a)^k f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ (Formule de Taylor-Lagrange)

Lorsque n=0, on retrouve la formule des accroissements finis c'est – à – dire

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

Le dernier terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ est appelé reste de Lagrange.

Puis que c ϵ] a ; b [, on peut écrire $c = a + \theta x$ où $\theta \in ]0;1[$ . En posant $b = a + x$,

La formule devient

$f(a+x) = \sum_{k=0}^{n} x^k f^{(k)}(a) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta x)$

En prenant $a = 0$ , on retrouve la formule de Mac – Laurin

$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$

**Formule de Taylor – Lagrange avec reste intégrable**

Soit f une fonction continue sur [a ; b] et de classe $C^{n+1}$ sur]a ; b [

On peut écrire $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ on fait une intégration par partie de $\int_a^x f'(t)dt$

En utilisant $u(t) = -(x-t)$ et $v(t) = f'(t)$

$$\int_a^x f'(t)dt = [\,u(t) \quad v(t)]_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t)dt$$

$$= (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt$$

En répétant ce processus n-fois on obtient :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}_{\text{Partie régulière}} + \underbrace{\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt}_{\text{reste}}$$

**Application au Calcul approché**

La formule de Taylor-Lagrange précédente s'écrit $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n$

Où $R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(c)$

Lorsque b est proche de a $|b-a| < 1$ et $(b-a)^{n+1} \to 0 \quad (n \to +\infty)$

En posant A $=\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k\,!} f^{(k)}(a)$

On dira que A est une valeur approchée de f(b) à $R_n$ près.

En général il est possible de trouver une estimation de $R_n$, ce qui permet de préciser l'ordre de grandeur de l'erreur commise lorsqu'on remplace f(b) par A.

__Exemple :__

Ecrire par la formule de Taylor-Lagrange le D.L de $f(x) = e^x$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 et en déduire l'erreur commise en écrivant $e^{0.1} = 1.105$

__Solution__

_Le D.L de $e^x$ *dans* $]0;x[$ par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 s'écrit :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}e^c, c \in\ ]0;x[$

$$e^{0.1} = 1 + 0.1 + \frac{(0.1)^2}{2} + \frac{(0.1)^3}{6}e^c$$

$$= 1.105 + \frac{(0.1)^3}{6}e^c$$

Avec $0 < c < 0.1$ ie $0 < e^c < e^{0.1}$

$1.105 < e^{0.1} = 1.105 + \frac{(0.1)^3}{6}e^c < 1.105 + \frac{(0.1)^3}{6}e^{0.1}$

$1.105 < e^{0.1} < 1.105 + \frac{(0.1)^3}{6}e^{0.1}$

Donc $1.105 < e^{0.1} < 1.1052$

L'erreur commise en prenant $e^{0.1} \cong 1.105$ est donc inférieure à $1.1052 - 1.105$ soit $2.10^{-4}$

## Formule de Taylor-Young

Théorème :

Soit f une fonction continue sur [a ; b] et f admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n ∈ IN alors si $f^{(n+1)}(a)$ existe, il existe une fonction ε vérifiant $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ telle que $\forall x \in [a\,;b]$,

$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon(x)$ **(Formule de Taylor-Young)**

Le terme $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon(x)$ est appelé **reste de Young** qui s'écrit encore $(x-a)^{n+1}\varepsilon(x)$

Pour a= 0 on obtient la formule de **Mac - Laurin**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^{n+1}}{k!} f^{(n+1)}(0) + x^{n+1}\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

## Développements limités de quelques fonctions usuelles

Définition (fonctions « petit tau » et « grand tau »)

- On dit qu'une fonction f est un **petit tau** lorsque x tend vers a si

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x} = 0$ . On note $f(x) = o(x)\ (x \to a)$

- Une fonction f est un **grand tau** lorsque x tend vers a, si $\frac{f(x)}{x}$ est bornée au voisinage de a. On note $f(x) = O(x)\ (x \to a)$.

Définition soit f une fonction définie sur un intervalle I de IR centré en $x_0$.

On dit que f admet un D.L polynomial à l'ordre n∈ IN au voisinage de $x_0$ sin on peut écrire

1) Lorsque $x_0$ est fini $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_0 (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0\ (x \to x_0)$

Le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_0(x-x_0)^k$ est appelé **partie régulière ou partie principale du D.L** en $x_0$ et $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ est **le reste.** Lorsque $x_0$ est infini

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + \frac{1}{x^n} \varepsilon(\frac{1}{x})$ avec $\varepsilon(\frac{1}{x}) \to 0\ (x \to x_0)$

**Remarques**

1) Les coefficients de la partie régulière dans un D.L sont données par $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$
2) Lorsque $x_0$ est fini $R_n = (x - x_0)^n \varepsilon(x) = f(x) - P(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{R_n}{(x - x_0)^n} = 0$$

On déduit que $R_n$ est sur petit tau de $x - x_0)^n$ et on note $R_n = o((x - x_0)^n)$

$$f(x) = P(x) + o((x - x_0)^n)$$





**Téléphone :** 698 222 277 / 671 839 797 **Facebook :** Intelligentsia Corporation **Email :** contact@intelligentsia-coropration.com

Lorsque $x_0$ est infini $R_n = \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x})$

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} x^n R_n = 0$$

On déduit que $R_n$ est un petit tau $\frac{1}{x^n}$ et on note $R_n = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$

**Développement limité et parité d'une fonctions**

<u>Théorème</u>

Si f est une fonction paire (respectivement impaire) qui admet un D.L au voisinage de 0, alors sa partie régulière ne contient que les puissances paires (respectivement impaire) de x.

<u>Exemple</u>

$$\operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + o(x^6)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$$

<u>Développement limité à un ordre quelconque n∈ IN</u>

Soit la fonction $(1+x)^\alpha$ où $\alpha \in$ IR elle continue en 0 et dérivable à l'ordre n∈ IN.

$$[(1+x)^\alpha]^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$[(1+x)^\alpha]^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)$$

D'où le D.L à l'ordre n au voisinage de 0 :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2\,!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n\,!} + o(x^n)$$

D'autre part :

$$(1+x)^\beta = 1 - \beta x + \beta(\beta-1)\frac{x^2}{2\,!} + \cdots + (-1)^n\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)\frac{x^n}{n\,!} + o(x^n)$$

<u>Applications</u>

1. Pour $\alpha = -1$, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
2. Pour $\beta = -1$, $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
3. Pour $\alpha = -1$, et $x^2$ à place de x

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Pour $\beta = -\frac{1}{2}$ et $x^2$ à la place de x

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + \frac{1\times3\times5\times\dots\times(2n-1)x^{2n}}{n!\,2^n} + o(x^{2n})$$

Pour $\alpha = \frac{-1}{2}$ et $x^2$ à la place de x

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1\times 3\times 5\times \ldots \times (2n-1)}{n!\, 2^n} x^{2n} + o(x^{2n})$$

## Opérations sur les développements limités

<u>Théorème</u>

Soient f et g deux fonctions admettant des D.L au même ordre dans les mêmes conditions

1) f + g admet un D.L à l'ordre n et sa partie régulière est la somme des parties régulières de D.L de f et g
   <u>Exemple</u> écrire le D.L de f(x)= $e^{2x}$ + cos x à l'ordre 4 au voisinage de 0
2) f. g admet un D.L à l'ordre n et sa partie régulière s'obtient en prenant dans le produit des deux parties régulières, les monômes de degré inférieur ou égal à n
   <u>Exemple</u> Ecrie le D.L de $f(x) = \frac{2+3x^2}{1-x^2}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0
3) fog admet un D.L à l'ordre n au voisinage de 0. Supposons$f(x) = P(x) + o(x^n)$

$g(x) = q(x) + o(x^n)$ La partie régulière des D.L de fog s'obtient en prenant dans $(poq)(x)$ tous les monômes de degré inférieur ou égal à n.

<u>Exemple</u> Ecrire le D.L de $e^{cos3x}$ l'ordre 4 au voisinage de 0

4) $\frac{f}{g}$ admet un D.L à l'ordre n au voisinage de 0 Supposons $f(x) = p(x) + o(x^n)$

$$g(x) = q(x) + o(x^n)$$

La partie régulière du D.L s'obtient en écrivant le D.L de $\frac{p(x)}{q(x)}$ à l'ordre n

<u>Exemple</u> Ecrire le D.L de $\frac{sin3x}{cos2x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0

## Obtention du D.L d'une fonction à l'aide du D.L de sa fonction dérivée.

<u>Théorème</u>

1) Si la dérivée f' de f admet un D.L à l'ordre n au voisinage de 0 alors f admet un D.L à l'ordre n+1 au voisinage de 0. Sa partie régulière est la primitive de la partie régulière du D.L de f' qui prend la valeur f(0)
2) Si f et f' admettent des D.L au voisinage de 0 alors la partie régulière du D.L de f' est nécessairement la dérivée de la partie régulière du D.L de f

<u>Exemples</u>

a) $[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1}\right] + o(x^{n+1}) + c \text{ avec } c = \ln(1-0) = 0$$

b) $(Arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$





**<u>Téléphone :</u>** 698 222 277 / 671 839 797 **<u>Facebook :</u>** Intelligentsia Corporation **<u>Email :</u>** contact@intelligentsia-coropration.com

$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$

$$\text{Arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) + c$$

avec c =Arctg 0 =0

**Développement limité généralisé ou asymptotique**

<u>Définition</u> soit une fonction f telle que $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. S'il existe un entier naturel k tel que $x^k$ f(x) admet un D.L polynomial, on dit que f admet un D.L asymptotique ou généralisée au voisinage de 0.

<u>Définition</u> soit f une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ s'il existe un entier naturel k tel que $\frac{f(x)}{x^k}$ admet un D.L généralisé ou asymptotique au voisinage de l'infini.

**Développement limité généralisé au voisinage de l'infini**

Un D.L au voisinage de l'infini s'écrit sous la forme

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$

Ecrire le D.L de $f(x) = e^{\frac{3}{x}}$au voisinage de l'infini :

Posons $X = \frac{1}{x}$; alors $\frac{1}{x} \to 0$ $(x \to \infty)$

Il s'agit donc d'écrire le D.L de $e^{3X}$au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} e^{3X} &= 1 + 3X + \frac{(3X)^2}{2} + \cdots + \frac{(3X)^n}{n\,!} + o(X^n) \\ &= 1 + 3X + \frac{9}{2}X^2 + \cdots + \frac{3^n}{n!} + o(X^n) \end{aligned}$$

On en déduit le D.L au voisinage de l'infini

$$e^{\frac{3}{x}} = 1 + \frac{3}{x} + \frac{9}{2}\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{3^n}{n!}\frac{1}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

# Chapitre 2: PRIMITIVES ET INTEGRALES

## 1. Tableau des primitives usuelles

| N° | Primitives usuelles |
|---|---|
| 1. | $\int u'(x)[u(x)]^{\alpha}dx = \frac{[u(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\ ;\ \alpha \neq -1\ et\ c \in IR$ |
| 2. | $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln\lvert u(x)\rvert + c\ ;\ c \in IR$ |
| 3. | $\int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}dx = Arctg(u(x)) + c\ ;\ c \in IR$ |
| 4. | $\int u'(x)sin(u(x))dx = -cos\big(u(x)\big) + c;\ c \in IR$ |
| 5. | $\int u'(x)cos(u(x))dx = sin\big(u(x)\big) + c;\ c \in IR$ |
| 6. | $\int \frac{u'(x)}{cos^2u(x)}dx = \int u'(x)\big(1+tg^2u(x)\big)dx = tg(u(x)) + c\ ;$ |
| 7. | $\int \frac{u'(x)}{sin^2u(x)}dx = -Cotgu(x) + c$ |
| 8. | $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}dx = Arcsin\, u(x) + c = -Arccos\, u(x) + c\ avec -1 < u(x) < 1$ |
| 9. | $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1+u^2(x)}}dx = Argsh\, u(x) + c$ |
| 10. | $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x)-1}}dx = Argch\, u(x) + c\ (u(x) > 1)$ |
| 11. | $\int \frac{u'(x)}{1-(u(x))^2}dx = Argth\, u(x) + c = -ArgCoth\, u(x) + c\ (-1 < u(x) < 1)$ |
| 12. | $\int u'(x)e^{u(x)}dx = e^{u(x)} + c$ |
| 13. | $\int \frac{u'(x)}{\sin u(x)}dx = \ln\left\lvert tan\left(\frac{u(x)}{2}\right)\right\rvert + c$ |
| 14. | $\int \frac{u'(x)}{\cos u(x)}dx = \ln\left\lvert tan\left(\frac{u(x)}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + c$ |





**Téléphone :** 698 222 277 / 671 839 797 **Facebook :** Intelligentsia Corporation **Email :** contact@intelligentsia-coropration.com

| | |
|---|---|
| 15. | $\int \frac{u'(x)}{sh\, u(x)} dx = ln\left\|th\frac{u(x)}{2}\right\| + c$ |
| 16. | $\int \frac{u'(x)}{ch\, u(x)} dx = 2Arctg\, e^x + c$ |
| 17. | $\int \frac{u'(x)}{u^2(x) - a^2} dx = \frac{1}{2a} ln \left\|\frac{u(x) - a}{u(x) + a}\right\| \; a \neq 0.$ |
| 18. | $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u^2(x) + h}} dx = ln\left\|u(x) + \sqrt{u^2(x) + h}\right\| \;\; h \neq 0.$ |
| 19. | $I_n = \int \frac{u'(x)}{(1 + u^2(x))^n} dx \; formule\ de\ récurrence\ 2nI_{n+1} = \frac{u(x)}{(1 + u^2(x))^n} + (2n-1).$ |

## 2. Quelques propriétés de l'intégrale

<u>Propriétés</u>

<u>P₁</u> : Soit une fonction $f: I \to IR$ admettant des primitives sur l'intervalle $I$. Soit $x_0 \in I$ ; la fonction F définie sur $I$ par $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur $I$ qui s'annule en $x_0$

<u>P₂</u> : Soient f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$. $\forall \alpha, \beta \in IR$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

<u>P₃</u> : Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$.

Si $\forall x \in [a\,;b], f(x) \geq 0\ (resp\ f(x) \leq 0), alors\ \int_a^b f(x)dx \geq 0\ (resp\ \int_a^b f(x)dx \leq 0$

<u>P₄</u>

Si $\forall x \in [a\,;b], f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq$ $\int_a^b g(x)dx\ \text{ où } f\ et\ g\ sont\ intégrables\ sur\ [a; b]$

<u>P₅</u> : (Relation de shales)

Soit f une fonction intégrable sur $[a\,;b]$ alors $\forall c \in [a\,;b]$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

<u>P₆</u> : Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

<u>P₇</u> : Soit $C([\mathbf{a}; \mathbf{b}])$ l'ensemble des fonctions continues sur[a; b]. L'application

$\phi: C^2([a; b]) \to IR. Définie\ par\ \phi(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ Est un produit scalaire. On déduit l'inégalité de **Cauchy-Schwartz**.

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b (f(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (g(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

P8 : Soit f une fonction définie sur $[-a\,;a]$.

i) Si f est une fonction paire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

ii) Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

## 3. L'inégalité de la moyenne

Définition (*valeur moyenne)*

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. On appelle *valeur moyenne* de f sur $[a;b]$, le réel

$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Théorème (1ère *Formule de la moyenne)*

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, alors il existe $c \in [a;b]$ tel que $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$

Théorème (2ième *Formule de la moyenne)*

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et g une fonction de signe constant sur $[a;b]$ . Alors il existe $\xi \in [a;b]$ tel que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

## 4. Techniques de calcul des primitives

### Intégration par partie

Soient u(x) et v(x) deux fonctions dérivables.

$\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ d'où $u'(x)v(x) = \big(u(x)v(x)\big)' - u(x)v'(x)$

D'où $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$

$u'(x)dx = du(x)\ et\ v'(x)dx = dv(x)$

D'où $\int v(x)du(x) = u(x)v(x) - \int u(x)dv(x)$

### Intégration des fractions rationnelles

**Définition**

Une fraction rationnelle s'écrit sous la forme $\frac{f}{g}\ ou\ f.g^{-1}$ où f et g sont des polynômes à coefficients réels et g non nul.

L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients réels est noté IR(x), lorsque x est la variable.

Soit r une fraction rationnelle, la forme irréductible de r est une représentation de la forme $\frac{f}{g}$ où f et g n'ont pas de facteurs commun.

**Exemple**

$\frac{x+4}{x+3}$ est une forme réduite.

$\frac{x-2}{x^3-8}$ a pour forme réduite $\frac{1}{x^2+2x+4}$

**Définition**

On appelle **Pôle** d'une fraction rationnelle $r=\frac{f}{g}$, toute racine de g. Lorsqu'un réel a est une racine de g d'ordre m on dit que a est un pôle d'ordre m de r.

**Définition**

Les polynômes irréductible sur IR sont exactement les polynômes du 1èr degré et ceux du second degré ayant un discriminant négatif.

Les polynômes irréductibles conduisent aux éléments simples de premiers espèce qui sont de la forme $\frac{P(x)}{(ax+b)^n}$, où $d°P<n$ , $a\neq 0$

**Exemple** $\frac{x+3}{(x+2)^3}$

Les polynômes irréductibles du second degré conduisent aux éléments simples de deuxième espèce qui sont de la forme $\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n}$ , où $d°P<2n$ et $\Delta= b^2-4ac<0$

**Exemple** $\frac{x+3}{2+x^2}$

**Proposition** Toute fraction rationnelle r s'écrit de manière unique sous la forme $E+K$, où E est un polynôme appelé partie entière de r et K une fraction rationnelle pouvant s'écrire

$K=\frac{f}{g}$ où $d°f<d°g$

**Exemple** $\frac{x^3+2x+3}{x+5}$

$x^3+2x+3=(x+5)(x^2-5x+27)-132$

D'où $\frac{x^3+2x+3}{x+5}=x^2-5x+27-\frac{132}{x+5}$

D'où $E=x^2-5x+27$ et $K=-\frac{132}{x+5}$

### Décomposition en éléments simples et intégration

**Définition** : Un polynôme est dit **premier** s'il admet pour diviseur 1 et lui-même.

**Exemple** Polynôme du 1er degré et polynômes du second degré avec discriminant négatif.

Deux polynômes sont dits **premiers entre eux** s'ils ont pour seul diviseur 1.

**Proposition** *(Décomposition)*

Soit $\frac{f}{g}$ une fraction rationnelle telle que $d°f < d°g$.

Supposons $g = g_1 g_2 \dots g_p$ où les $g_i$ sont premiers deux à deux alors il existe une décomposition unique de $\frac{f}{g}$ en éléments simples sous la forme

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} + \dots + \frac{f_p}{g_p} \text{ où } d°f_i < d°g_i$$

**Proposition**

1) Les fractions rationnelles de la forme $\frac{a}{(x-b)^k}$ où $a$ et $b$ sont des constantes réelles et $k \in IN^*$sont des éléments de 1ere espèce relatif au pôle b
2) Les fractions rationnelles de la forme $\frac{ax+b}{(cx^2+dx+e)^k}$ où $a, b, c, d$ et $e$ sont des constantes réelles et $k \in IN^*$ sont des éléments simples de 2ième espèce lorsque $\Delta = d^2 - 4ce < 0$
3) Soit la fraction $r = \frac{P(x)}{(ax+b)^k(cx^2+dx+e)^l}$ où $d°P < 2l + k$

Décomposer r en éléments simples c'est écrire r sous la forme

$$r = \frac{a_1}{ax+b} + \frac{a_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{a_k}{(ax+b)^k} + \frac{c_1x+d_1}{cx^2+dx+e} + \frac{c_2x+d_2}{(cx^2+dx+e)^2} + \dots + \frac{c_lx+d_l}{(cx^2+dx+e)^l}$$

Où les constantes $a_i$, $c_i$ et $d_i$ sont à déterminer

**Exemple** Décomposer les fractions suivantes en éléments simples et intégrer.

1) $r_1 = \frac{x+3}{(x+2)(x+5)(x^2+x+2)}$
2) $r_2 = \frac{2x+1}{x^3+8}$
3) $r_3 = \frac{5}{x^3(x^2+1)^2}$

**Solution**

$r_1 = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+5} + \frac{cx+d}{x^2+x+2}$

$\lim_{x\to -2} (x+2)\, r_1(x) = \frac{1}{12} = a$

$\lim_{x\to -5} (x+5)\, r_1(x) = \frac{1}{33} = b$

$\Delta = 1 - 8 = (i\sqrt{7})^2 \Rightarrow x_1 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$

$x_2 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$

$\lim_{x\to x_1} (x^2+x+2) r_1 = cx_1 + d = d - \frac{c}{2} - i\frac{c\sqrt{7}}{2}$

$\lim_{x\to x_1} (x^2+x+2) r_1 = \frac{x_1+3}{(x_1+2)(x_1+5)} = \frac{23}{88} + 5i\frac{\sqrt{7}}{88}$

D'où $c = \frac{-5}{44}$ et $d = \frac{9}{44}$





**Téléphone :** 698 222 277 / 671 839 797 **Facebook :** Intelligentsia Corporation **Email :** contact@intelligentsia-coropration.com

$\int r_1 dx = \frac{1}{12}\int \frac{dx}{x+2}dx + \frac{1}{33}\int \frac{dx}{x+5} + \frac{1}{44}\int \frac{-5x+9}{x^2+x+2}dx$

$\frac{-5x+9}{x^2+x+2} = -5\frac{x+1}{x^2+x+2} + \frac{14}{x^2+x+2}$

$= -\frac{5}{2}\frac{2x+2}{x^2+x+2} + \frac{14}{x^2+x+2}$

$= -\frac{5}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+2} + \frac{23}{2}\frac{1}{x^2+x+2}$

$\frac{1}{x^2+x+2} = \frac{2\sqrt{7}}{7} + \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{1+\left[\frac{2}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{2})\right]^2}$

$$\int r_1(x)dx = \frac{1}{12}\ln|x+2| + \frac{1}{33}\ln|x+5| - \frac{5}{88}\ln(x^2+x+2) + \frac{23\sqrt{7}}{308}Arctg\left[\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + c$$

- $r_2 = \frac{2x+1}{x^3+8} = \frac{2x-1}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2-2x+4}$

$\lim_{x\to-2}(x+2)\,r_2(x) = \frac{-5}{12} = a$

$\lim_{x\to\infty} x\,r_2(x) = a+b = 0 \Longrightarrow b = \frac{5}{12}$

$r_2(0) = \frac{a}{2} + \frac{c}{4} = -\frac{1}{8} \Longrightarrow c = \frac{1}{3}$

$\int r_2(x)dx = \frac{-5}{12}\ln|x+2| + \frac{5}{24}\ln(x^2-2x+6) + \frac{\sqrt{3}}{4}Arctg\left[\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)\right] + c$

$$r_3 = \frac{5}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{dx+c}{x^2+1} + \frac{fx+g}{(x^2+1)^2}$$

$r_3(-x) = -r_3(x) \Longrightarrow b = e = g = 0 \;\; \lim_{x\to0} x^3\,r_3(x) = c = 5$

$\lim_{x\to\infty} xr_3 = a + d = 0$

$r_3(1) = a + c + \frac{d}{2} + \frac{f}{4} = \frac{5}{4} \Longrightarrow a = -10 \; et \; d = 10$

$\int r_3(x)dx = -10\ln|x| - \frac{5}{2}\frac{1}{x^2} + 5\ln(1+x^2) - \frac{5}{2}\frac{1}{1+x^2} + c$

## 5. Intégration par changement de variable

**Théorème** Soit $\Phi[a,b] \to IR$ une fonction de la classe $C^1$ strictement monotone (supposons strictement croissante), soit $f: [\Phi(a),\Phi(b)] \to IR$ une fonction continue.

Alors $\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x)dx = \int_a^b (fo\Phi)(t)\Phi'(t)dt$ où $x = \Phi(t) ie \; dx = \Phi'(t)dt$

**Exemple** Calculer

$\int \frac{e^{Arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

On pose $u(x) = Arcsinx \; d'où \; du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\int \frac{e^{Arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int u'(x)e^{u(x)}dx = e^{u(x)} + c = e^{Arcsinx} + c$

### Fonctions trigonométriques

On veut calculer une intégrale de la forme $\int \boldsymbol{f(cosx, sinx, tgx)dx}$. On peut utiliser les changements de variables suivants :

Si l'élément **différentiel** est **invariant** par le changement

i) De **x en** −**x** alors on pose $\boldsymbol{u = cosx}$
ii) De **x en** $\boldsymbol{\pi - x}$ alors on pose $\boldsymbol{u = sinx}$
iii) de **x en** $\boldsymbol{\pi + x}$ alors on pose $\boldsymbol{u = tgx \text{ ou } u = cotg}$

**Exemple** Calculer

$$\int \frac{1}{cos^4x}dx$$

$$\int sin^9xdx$$

**Solution**

Posons $u = tgx$ car $\int \frac{1}{cos^4(x+\pi)}d(x+\pi) = \int \frac{1}{cos^4x}dx$

$$\int \frac{1}{cos^4x}dx = \int \frac{1}{cos^2x} + \frac{1}{cos^2x}dx = \int (1 + tg^2x)d(tgx) = \int (1+u^2)du = tgx + \frac{1}{3}tg^3x + c$$

1) On pose $u = cosx$ car $\int sin^9(-x)d(-x) = \int sin^9xdx$

$$\int sin^9xdx = -\int sin^8xdcosx$$

$$= -\int (sin^2x)^4 d(cosx)$$

$$= -\int (1-cos^2x)^4 d(cosx)$$

$$= -\int (1-u^2)^4 du$$

$$= -cosx + \frac{4}{3}cos^3x - \frac{6}{3}cos^5x + \frac{4}{7}cos^7x - \frac{1}{9}cos^9x + c$$

On peut également essayer le changement de variable trigonométrique suivant :

$u = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ ; $d'où\ cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ; $sinx = \frac{2u}{1+u^2}\ tgx = \frac{2u}{1+u^2}$

**Exemple** : Calculer $\int \frac{dx}{1+cosx}$

Posons $u = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ ; $cosx = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ; $du = \frac{1}{2}\left(1 + tg^2\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}(1+u^2)dx$

D'où $\int \frac{dx}{1+cosx} = \int \frac{(1+u^2)du}{1+u^2}$

D'où $\int \frac{dx}{1+cosx} = u + c = \ tg\left(\frac{x}{2}\right)$ +c

### Intégration des fonctions hyperboliques

Pour calculer $\int f(chx, shx, thx, e^x)dx$ on a plusieurs possibilités :

i) On pose $u = e^x$ et on se ramène à l'intégrale d'une fonction rationnelle
ii) On peut linéariser en utilisant les formules

$ch^2x - sh^2x = 1$

$sh2x = 2chxshx$

$ch(2x) = ch^2x + sh^2x = 2ch^2x - 1 = 2sh^2x + 1$

iii) On pose $u = th\left(\frac{x}{2}\right)$

$chx = \frac{1+u^2}{1-u^2}$ ; $shx = \frac{2u}{1-u^2}$ ; $thx = \frac{2u}{1+u^2}$

<u>Exemple :</u> Calculer $\int \frac{dx}{chx}$

Si on pose $u = th\left(\frac{x}{2}\right)$ alors $dx = \frac{2du}{1-u^2}$, $chx = \frac{1+u^2}{1-u^2}$ D'où $\int \frac{dx}{chx} = \int \frac{1-u^2}{1+u^2}\frac{2du}{1-u^2} = \int \frac{2du}{1+u^2} = 2Arctgu + c = 2Arctg\left(th\left(\frac{x}{2}\right)\right)$+c. Ou encore poser $u = e^x$

$$\int \frac{dx}{chx} = \int \frac{2dx}{e^{-x}+e^x} = \int \frac{2e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{2du}{1+u^2} = 2Arctgu + c = 2Artg(e^x) + c$$

## 6. Intégrales abéliennes

### Intégrales abéliennes de première espèce

Ce sont les intégrales de la forme $I = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ **où** $R(x,y)$ est un rapport de deux polynômes en $x$ **et** $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. On pose dans ce cas $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ et on obtient l'intégrale d'une fraction rationnelle en **t**

<u>**Exemple :**</u> Calculer $I = \int \sqrt[3]{\frac{x+3}{x+1}}dx$

On pose $t = \sqrt[3]{\frac{x+3}{x+1}}$ $d'où\ t^3 = \frac{x+3}{x+1}$

D'où $x = \frac{3-t^3}{t^3-1}$ $et\ dx = \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}dt$

$$I = \int t\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}dt = \frac{2t}{t^3-1} - 2\int\frac{dt}{t^3-1}$$

$$\frac{1}{t^3-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{t-1} + \frac{-1/_3 t - 2/_3}{1+t+t^2}$$

$$\frac{-1/_3 t - 2/_3}{1+t+t^2} = -\frac{1}{6}\frac{2t+1}{1+t+t^2} + \frac{-2/_3}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

D'où $I = \frac{2t}{t^3-1} + \frac{1}{3}\ln(1+t+t^2) - \frac{2}{3}\ln|t-1| + \frac{2\sqrt{3}}{3} Arctg\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

### Intégrales abéliennes de deuxième espèce

Ce sont les intégrales de la forme $\boldsymbol{I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx}$ **où** $\boldsymbol{R(x,y)}$ est le rapport de deux polynômes en $\boldsymbol{x}$ ***et*** $\boldsymbol{y = \sqrt{ax^2+bx+c}}$ On met le polynôme $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ sous forme canonique

On suppose que $\boldsymbol{a = \pm 1}$

i) Si $\boldsymbol{ax^2+bx+c = (x+\alpha)^2+\beta^2}$ *alors on pose* $\boldsymbol{x-\alpha = \beta chu}$

ii) Si $\boldsymbol{ax^2+bx+c = -(x-\alpha)^2-\beta^2}$ *alors on pose* $\boldsymbol{x-\alpha = \beta cosu}$ *ou* $\boldsymbol{x-\alpha = \beta sinu}$

<u>Exemple</u> Calculer $I = \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+2x+6}}$

$-4x^2+2x+6 = 4\left[-\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2\right]$

On pose $x - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}cosu\,;dx = -\frac{5}{4}sinu\,du$

Donc $I = \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2+2x+6}} = \int \frac{-\frac{5}{4}sinu\,du}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}cosu\right)^2}}$ $avec\ 0 < u < \pi$

D'où $I = -\frac{1}{2}\int \frac{sinu}{|sinu|}du = \frac{-1}{2}u + c = -\frac{1}{2}Arccos\left[\frac{4}{5}\left(x-\frac{1}{4}\right)\right] + c$

<u>Remarque</u> D'une manière générale, pour calculer
$\int R\left(x, \sqrt[n]{P(x)}\right)dx$ où $P(x) est\ polynôme\ on\ pose\ t = \frac{y}{x}$ où $y = \sqrt[n]{P(x)}$

# Chapitre 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## 1. Généralités

- On appelle **Equation Différentielle** (ordinaire) d'ordre n$\in IN^*$, une relation de la forme $F\left(x, y', y'', \ldots \; , y^{(n)}\right) = 0$ entre une fonction inconnue y(x) de la variable x et certaines de ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n.
- On appelle **solution exacte de l'équation différentielle,** ou tout simplement **solution** toute fonction $\Phi: x \mapsto \Phi(x)$ continue et n-fois dérivable telle que

$$F\left(x, \Phi'(x), \Phi''(x), \ldots \; , \Phi^{(n)}(x)\right) = 0$$

- **Intégrer une équation différentielle** c'est déterminer toutes ses solutions
- Le graphe ou la courbe représentative d'une solution de l'équation est appelé **conique ou courbe de l'équation**
- **L'ordre d'une équation différentielle** est l'ordre de la plus haute dérivée figurant explicitement dans l'équation.
- Les équations différentielles **linéaires** sont caractérisées par le fait que la fonction inconnue et ses dérivées apparaissent au plus à la puissance 1, et en particulier ne contient pas les termes du genre $y^p, yy', y^{(n)}y^{(m)}$ , ni de fonction g(y). Les équations linéaires d'ordre n sont en général de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)}(x) = \Phi(x)$ avec $a_k(x) \neq 0$. Lorsque $a_k(x)$ sont constantes, l'équation est dite à coefficients constants. L'équation est homogène si $\Phi(x) = 0$

## 2. Equations différentielles du premier ordre

### Equations différentielles à variables séparables

Une équation différentielle du premier ordre est à variables séparables si elle peut se mettre sous la forme $g(y)y' = f(x)$, où g et f sont des fonctions

<u>Exemple</u>

$y' \ln(1 + y^2) = 2x$ ; $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$ Sont des équations à variables séparables.

$$g(y)y' = f(x) \Leftrightarrow g(y) = \frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow g(y)dy = f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow G(y) = F(x) + K$$

Où G est une primitive de g et F une primitive de f ; K une constante arbitraire

<u>Exemple</u> Intégrer





**<u>Téléphone :</u>** 698 222 277 / 671 839 797 **<u>Facebook :</u>** Intelligentsia Corporation **<u>Email :</u>** contact@intelligentsia-coropration.com

1. $y^2y' = x^2$
2. $y'lny = e^x$

Solution

1. $y^2\frac{dy}{dx} = x^2 \Leftrightarrow y^2dy = x^2dx$

$\Leftrightarrow \int y^2dy = \int x^2dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + K$ (K$\in IR$)

D'où $y = \sqrt[3]{x^3 + C}$

2. $lny\frac{dy}{dx} = e^x \Leftrightarrow lnydy = e^x dx$

$\Leftrightarrow \int lny\,dy = \int e^x\ dx$

$\Leftrightarrow ylny - y = e^x + c$

## Equation différentielles de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Pour résoudre on pose $t = \frac{y}{x}$

D'où $y = tx\ et\ dy = tdx + xdt$

D'où $y'(x)dx = tdx + xdt\ car\ dy = y'(x)dx\ (y = y(x))$

D'où $f\left(\frac{y}{x}\right)dx = tdx + xdt$

D'où $f(t)dx = tdx + xdt$

On obtient l'équation à variables séparables $\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{f(t)-t}$ on résout et on déduit y(x)

**Exemple**

$$2(1 + y^2) = 3ycos^2(2x)y'$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1$$

Solution

*1)* $3ycos^2(2x)\frac{dy}{dx} = 2(1 + y^2)$

*D'où* $\frac{3ydy}{1+y^2} = \frac{2dx}{cos^2(2x)}$

$\Rightarrow \int \frac{3y\,dy}{1+y^2} = \int \frac{2dx}{cos^2(2x)}$

$\Longrightarrow \frac{3}{2}\ln(1 + y^2) = tg(2x) + K$

2) $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{f(t)-t}\ avec\ f(t) = t^2 + t + 1$

$d'où\ \frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+t^2}$

$d'o\grave{u}\ \ln|x| = \mathrm{Arctgt} + K$

$d'o\grave{u}\ \ln|x| = Arctg\left(\frac{y}{x}\right) + K$

**Equation de la forme : $y' + f(x)y = g(x)$**

$f$L'équation homogène associée est $y' + f(x)y = 0$

$\frac{dy}{y} = -(x)dx$

$d'o\grave{u}\ \int \frac{dy}{y} = \int -f(x)dx$

D'où $\ln|y| = -F(x) + K$ où F est une primitive de f

D'où $y = \lambda e^{-F(x)}$

Donc $y_1 = \lambda e^{-F(x)}$est la solution générale de l'équation homogène associée.

Soit $y_p$ une solution particulière de l'équation avec second membre $y' + f(x)y = g(x)$

**Théorème**

La solution générale de l'équation avec second membre $y' + f(x) = g(x)\ est$

$$y(x) = y_1(x) + y_p(x)$$

**Recherche d'une solution particulière**

La méthode la plus utilisée est celle dite de la variation de la constante

On suppose $\lambda = \lambda(x)\ et\ que\ y = \lambda(x)e^{-F(x)}$ vérifie l'équation avec second membre

$y' = \lambda' e^{-F(x)} - \lambda(x)f(x)c$

$$\begin{aligned} y' + f(x)y = g(x) &\Leftrightarrow \lambda' e^{-F(x)} - \lambda f(x)e^{-F(x)} + f(x)\lambda e^{-F(x)} = g(x) \\ &\Leftrightarrow \lambda' e^{-F(x)} = g(x) \\ &\Leftrightarrow \lambda(x) = \int g(x)e^{F(x)}dx + K \end{aligned}$$

La solution devient

$y = \lambda e^{-F(x)} = (K + \int g(x)e^{F(x)}dx)e^{-F(x)}$

$y = Ke^{-F(x)} + e^{-F(x)} \int g(x)e^{F(x)}dx$

**Exemple** intégrer les équations

1) $y'\sqrt{1-x^2} + y = 3$
2) $x^2\,y' + y = e^{\frac{1}{x}}$

## 2. Equation de Bernoulli

Il s'agit des équations de la forme $a(x)y' + b(x)y = f(x)y^{\alpha}$ où $\alpha \in IR, a(x), b(x) et\ f(x)$ des fonctions données

- Lorsque $= \mathbf{0}$ , on trouve $a(x)y' + b(x)y = f(x)$ $ie$ $y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{f(x)}{g(x)}$ qui est une équation linéaire qu'on sait résoudre
- Lorsque $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}$, on retrouve $a(x)y' + \big(b(x) - f(x)\big)y$ qui est une équation sans second membre qu'on sait résoudre
- Lorsque $\boldsymbol{\alpha \neq 1}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{\alpha \neq 1}$

On divise l'équation par $y^{\alpha}$ . On obtient $a(x)\frac{y'}{y^{\alpha}} + b(x)y^{1-\alpha} = f(x)$

On pose $\boldsymbol{z = y^{1-\alpha}}$. On obtient l'équation $a(x)\frac{z'}{1-\alpha} + b(x)z = f(x)$ qui est linéaire en z (on sait résoudre)

### Equation de Riccati

Il s'agit des équations de la forme $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ où $a(x), b(x)$ $et$ $c(x)$ des fonctions données. On suppose qu'une solution particulière $y_p(x)$ est connue, on pose alors $z = y - y_p$ et on obtient l'équation $z' - \left(2y_p a(x) + b(x)\right)z = a(x)z^2$qui est une équation de Bernoulli en z avec $\alpha = 2$

## 3. Equations différentielles du second ordre

Ce sont les équations de la forme $F(x, y, y', y'') = 0$

### Equation pouvant se ramener au 1erordre

Si y ne figure pas dans l'équation du second ordre, on pose z=y' et on obtient une équation du premier ordre en z

**Exemple** intégrer $2y'' + \frac{1}{x}y' = x + 3$

### Equations différentielles linéaires du second ordre

Ce sont les équations pouvant se mettre sous la forme $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$ Où a(x), b(x), c(x) et f(x) sont des fonctions données ; f est appelée second membre. L'équation homogène associée est $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$

**Théorème** la solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

**Remarque :** si $Y_1(x) et$ $Y_2(x)$sont des solutions indépendantes de l'équation sans second membre alors la solution générale de l'équation sans second membre s'écrit $y = Y_1(x) + Y_2(x)$

**Méthode de Laplace**

Cette méthode permet de trouver une deuxième solution de l'équation sans 2nd membre lorsqu'on connait une :

Si y(x) est solution de $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$

∃Toujours une solution $y_2$ linéairement indépendante de $y_1$ et de la forme

$y_2 = k(x)y_1(x)$ où $k$ vérifie l'équation $a(x)\left(2k'y'_1 + k''y_1\right) + b(x)k'^{y_1} = 0$

**Exemple** Intégrer l'équation $2x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$

1) On vérifie que $y_1 = x$ est solution particulière de l'équation
2) Cherchons une deuxième solution indépendante de $y_1 = x$ sous la forme $y_2 = k(x)y_1$

D'après la Méthode de Laplace, k est solution de l'équation

$2x^3k'' + x^2k' = 0$

$d'où \frac{k''}{k'} = \frac{-1}{2x}$

$d'où\ k' = \frac{c_1}{\sqrt{x}}$

$d'où\ k(x) = c_1\sqrt{x} + c_2$

$donc\ y = \left(c_1\sqrt{x} + c_2\right)x = c_2x + c_1x\sqrt{x}$

**Méthode de variation des constantes**

**Propriété**

La solution générale de l'équation sans second membre $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ est de la forme $y = c_1y_1 + c_2y_2$ où $c_1 et\ c_2$ sont des constantes alors la solution générale de l'équation avec second membre $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$ se met sous la forme

$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ où $c_1 et\ c_2$ Sont des fonctions de x vérifiant le système

$$\begin{cases} c'_1y_1 + c'_2y_2 = 0 \\ c'_1y'_1 + c'_2y'_2 = \frac{f(x)}{a(x)} \end{cases}$$

Le déterminant de ce système $\boldsymbol{y_1y'_2 - y'_1y_2}$ s'appelle **Wronskien ou déterminant de Wronski**

**Exemple** Intégrer l'équation $y'' + y = tgx$

Les solutions indépendantes de $y'' + y = 0$ sont $y_1 = cosx\ et\ y_2 = sinx$

$y = c_1cosx + c_2sinx\ est\ solution\ de\ y'' + y = 0$

Par variations des constantes $c_1(x) = c_1(x)\ et\ c_2 = c_2(x)$

On obtient le système

$$\begin{cases} cosx\ c'_1 + sinx\ c'_2 = 0 \\ -sinx\ c'_1 + cosx\ c'_2 = tgx \end{cases}$$

$$\begin{cases} c'_1(x) = \dfrac{-sin^2(x)}{cosx} \\ c'_2(x) = sinx \end{cases}$$

$$\begin{cases} c'_1(x) = -\dfrac{1 - cos^2(x)}{cosx} = cosx - \dfrac{1}{cosx} \\ c'_2(x) \qquad = sinx \end{cases}$$

$c_1(x) = sinx - \int \frac{cosx}{cos^2(x)} dx$

$= sinx - \int \frac{cosx}{1 - sin^2(x)} dx$

$= sinx - \int \frac{cosx}{(1 - sinx)(1 + sinx)} dx$

$d'où\ \ c_1(x) = sinx + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1 + sinx}{1 - sinx}\right| + K_1$

$c_2(x) = -cosx + K_2$

Donc $y(x) = K_1 cosx + K_2 sinx + \frac{1}{2} cosx \ln \left|\frac{1+sinx}{1-sinx}\right|$

**Equation différentielle du second ordre à coefficients constants**

L'équation est de la forme $ay'' + by' + cy = f(x)$ où $a \neq 0$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $ay'' + by' + cy = 0$

On cherche les solutions de cette équation sous forme $y = e^{rx}$ où r est réel.

$y' = re^{rx}$ ; $y'' = r^2 e^{rx}$

$y = e^{rx}$ *est solution de* $ay'' + by' + cy = 0$ *ssi* $ar^2 + br + c = 0$ $(EC)$ Qui est l'équation Caractéristique de $ay'' + by' + cy = 0$

La résolution de (EC) nous donne les solutions générales

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$

1) Si $\Delta > 0$, alors (EC) admet deux solutions distinctes $r_1$ et $r_2$. Les solutions indépendantes de l'équation sont $e^{r_1 x}$ *et* $e^{r_2 x}$ . La solution générale est donc $y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
2) Si $\Delta = 0$ alors (EC) admet une racine double r. Les solutions indépendantes de l'équation sont $e^{rx}$ *et* $xe^{rx}$ la solution générale est donc $y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} = (c_1 + c_2 x) e^{rx}$
3) Si $\Delta < 0$, alors (EC) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = u + iv$ *et* $r_2 = \overline{r_1}$ Les solutions indépendantes sont $e^{ux} cosvx$ est $e^{vx} sinvx$. La solution générale est donc $y = e^{ux}(c_1 cosvx + c_2 sinvx) = e^{ux} Acos(vx + \emptyset)$

<u>**Exemple**</u> Intégrer

1) $y'' + 2y' - 3y = 0$
2) $y'' - 4y' + 4y = 0$
3) $y'' + y' + 2y = 0$

Considérons l'équation $ay'' + by' + cy = f(x)$

On suppose que P(x) et Q(x) soient des polynômes de même degré w,$\alpha, \beta$ *et* $k$ sont des constantes

(EC) : $ar^2 + br + c = 0$

<table>
<tr><th>Second membre</th><th>Solution particulière</th></tr>
<tr><td>$f(x) = k = cte$</td><td>$y_p = A = cte$</td></tr>
<tr><td>$f(x) = P(x)$</td><td>$y_p(x) = Q(x) si\ c \neq 0$<br>$y_p(x) = xQ(x) si\ c = 0\ et\ b \neq 0$<br>$y_p(x) = x^2Q(x) si\ b = c = 0$</td></tr>
<tr><td>$f(x) = \alpha e^{kx}$</td><td>$y_p(x) = Ae^{kx}\ si\ k \neq r_1 et\ k \neq r_2$<br>$y_p(x) = Axe^{kx}\ si\ r_1 \neq r_2\ et\ k = r_1\ ou\ k = r_2$<br>$y_p(x) = Ax^2e^{kx}\ si\ r_1 = r_2$</td></tr>
<tr><td>$f(x) = \alpha coswx + \beta sinwx$</td><td>$y_p(x) = Acoswx + Bsinwx$<br>$si\ (iw) n'est\ pas\ racine\ (EC)$<br>$y_p(x) = x[Acoswx + Bsinwx] si\ (iw)$ est racine de (EC)</td></tr>
<tr><td>$f(x) = P(x)e^{kx}$</td><td>$y_p(x) = Q(x)e^{kx}\ si\ k \neq r_1\ et\ k \neq r_2$<br>$y_p(x) = xQ(x)e^{kx} si\ r_1 \neq r_2\ et\ k = r_1\ ou\ k = r_2$<br>$y_p(x) = x^2Q(x)e^{kx} si\ k = r_1 = r_2$</td></tr>
<tr><td>$f(x) = e^{kx}$</td><td>$y_p(x) = e^{kx}[Acoswx + Bsinwx]$<br>$si\ (k + iw) n'est\ pas\ racine\ de\ (EC)$<br>$y_p(x) = e^{kx}x[Acoswx + Bsinwx]$<br>si $(k + iw) est\ racine\ de\ (EC)$</td></tr>
</table>