Université de Yaoundé 1 Ecole Nationale Supérieure Polytechnique (2020-2021)

UE : Analyse dans les Espaces Vectoriels de Dimensions Finies (MAT 226) Fiche de TD N°1(proposé par **Pr E.TAKOU**)

Exercice 1

1) Soit $d : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$

   a) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b) Déterminer la boule de $\mathbb{R}_+^*$ de centre 1 et de rayon r pour la distance d.

   c) Déterminer la boule de $\mathbb{R}_+^*$ de centre 1 et de rayon $\frac{1}{2}$ pour la distance d.

   d) Les parties]0, 1[et]1, +∞[sont elles bornées pour cette distance

2) Soit $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\delta(x, y) = |e^x - e^y|$

   a) Montrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}$

   b) Décrire la boule B(0, 1) relativement à δ.

3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. on définit de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$ les applications d_∞, d_S et d_e par les relations

   $d_\infty(x, y) = \mathrm{Sup}_{1 \leq i \leq p}|x_i - y_i|$, $d_S(x, y) = \sum_{i=0}^{p} |x_i - y_i|$ et $d_e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=0}^{p}(x_i - y_i)^2}$

   a) Montrer que d_∞, d_S et d_e sont des distances.

   b) Représenter les boules unités centrées en l'origine pour ces distances dans les cas p =1 et p =2.

   c) Montrer que d_∞, d_S et d_e sont des distances uniformément équivalentes.

   d) Illustrer graphiquement ces situations dans le cas p = 2.

4) Dire si chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert ou non:

   A = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < |x - 2| < 1\}$, B = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 0, |y| \leq 1\}$ et $\mathbb{Q}^2$

5) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $||(x,y)|| = Sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2}$. Montrer que ||.|| est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle uniformément équivalente à la norme euclidienne ?

6) Soit d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Pour x, y $\in$ $\mathbb{R}^2$, on pose

   $$\delta(x, y) = \begin{cases} d(x,y) \ si \ x, y \ et \ 0 \ sont \ align\acute{e}s \\ d(x,0) + d(0,y) \quad sinon \end{cases}$$

   a) Montrer que δ est une distance.

   b) Soit $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. On pose $r = \frac{1}{2}d(x,0)$. Dessiner les boules $B_\delta(x, r)$ et $B_\delta(x, 3r)$.

   c) Quelle réalité concrète la distance δ modélise-t-elle ?

7) Soit (E, d) un espace métrique.

   a) Montrer que d' définie par $d'(x, y) = \sqrt{d(x,y)}$ est une distance sur E.

   b) Enoncer des conditions suffisantes sur $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ pour que $(x, y) \mapsto f(d(x, y))$ soit une distance.

   c) Montrer que d'' définie par $d''(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ est une distance sur E.

   d) Les distances d et d'' sont-elles uniformément équivalentes ?

e) Les distances d et d'' sont-elles topologiquement équivalentes ?

f) On suppose E = $\mathbb{R}$. Construire $B_{d''}(0, r)$.

8) On définit l'application d de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}_+$ par

$$d(z_1, z_2) = \begin{cases} 0 \text{ si } z_1 = z_2 \\ |z_1 - z_2| \text{ si les points d'affixes } z_1, z_2 \text{ et l'origine sont alignés} \\ |z_1| + |z_2| \text{ si les points d'affixes } z_1, z_2 \text{ et l'origine ne sont pas alignés} \end{cases}$$

a) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{C}$.

b) Représenter dans le plan complexe les boules ouvertes $B(1, \frac{1}{2})$ et $B(\frac{1}{2}, 1)$

9) Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur [0, 1]. Pour f ∈ E, on pose :

$||f||_\infty = \text{Sup}\{|f(x)|, x \in [0,1]\}$ et $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$

a) Vérifier que $||.||_\infty$ et $||.||_1$ sont deux normes sur E e

b) Soit $f \in E$. Comparer $||f||_1$ et $||f||_\infty$

c) On définit la suite (f_n) d'éléments de E par $f_n(x) = x^n$.

(i) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $||f_n||_\infty$ et $||f_n||_1$.

(ii) Prouver que $||.||_\infty$ et $||.||_1$ ne sont pas deux normes uniformément équivalentes.

Exercice 2

Soient (E, d) une espace métrique, A et B deux parties de E.

1) Rappeler les définitions de point adhérent, point intérieur et point d'accumulation.
2) Montrer que $A \subset B$ entraine $\bar{A} \subset \bar{B}$ et $\overset{o}{A} \subset \overset{o}{B}$
3) Montrer que $\bar{A}$ et A' sont des fermés de E, que $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A et que $\bar{A}$ = A∪A'.
4) Montrer que A est fermé si et seulement $\bar{A}$ = A.
5) Montrer que $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
6) Montrer que $\overset{o}{A}$ est ouvert et est le plus grand ouvert contenu dans A.
7) Montrer que A est ouvert si et seulement si A = $\overset{o}{A}$
8) Montrer que : $\overset{o}{\overset{o}{A}} = \overset{o}{A}$, $\overset{o}{\widehat{A \cap B}} = \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$, $\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \subset \overset{o}{\widehat{A \cup B}}$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
9) Montrer que $C_E^{\bar{A}} = \overset{o}{C_E^A}$ et $C_E^{\overset{o}{A}} = \overline{C_E^A}$, Fr($\bar{A}$) ⊂ Fr(A), Fr($\overset{o}{A}$) ⊂ Fr(A), Fr(A) = $\bar{A} \cap \overline{C_E^A}$; Fr(A∪B) ⊂ Fr(A)∪Fr(B).
10) On suppose que E est un espace vectoriel normé et A un sous espace vectoriel.
    a) Montrer que $\bar{A}$ est un sous espace vectoriel de E.
    b) Montrer que si $\overset{o}{A} \neq \emptyset$, alors on a A = E.

Exercice 3

1) On rappelle que d : $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ définie par $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ est une distance sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose $x_n = \sqrt{n}$.
   a) La suite $(x_n)_{n \in N^*}$ est-elle de Cauchy pour cette distance ?
   b) La suite $(x_n)_{n \in N^*}$ est-elle convergente pour cette distance ?
2) On rappelle que $\delta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\delta(x, y) = |e^x - e^y|$ est une distance sur $\mathbb{R}$. On pose $y_n = -n$.
   a) La suite $(y_n)_{n \in N}$ est-elle de Cauchy pour δ ?
   b) La suite $(y_n)_{n \in N}$ est-elle convergente pour δ ?
3) Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace métrique (E, d). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{u_p, p \geq n\}$.
   a) Rappeler la définition d'une valeur d'adhérence de (u_n) et montrer que a est une valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$.
   b) Montrer que a est valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si a est limite d'une sous-suite de (u_n)
   c) Montrer que si (u_n) converge vers a ; alors a est la seule valeur d'adhérence de (u_n).
   d) Par un contre-exemple, montrer que la réciproque de c) n'est pas vraie.
4) Montrer que dans un espace métrique (E,d) toute suite convergente est bornée et toute suite de Cauchy est bornée.
5) Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E,d) munie de la distance induite d_A.
   a) Montrer que si (A, d_A) est complet, alors A est une partie fermée de (E, d).
   b) Montrer que di (E,d) est complet et A fermée dans (E,d) ; alors (A,d_A) est complet.
6) Soit E un ensemble non vide. Soit l'ensemble $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ des applications définies de E vers $\mathbb{R}$ et qui sont bornées. Pour $f \in \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$, on pose $||f|| = Sup_{t \in E}|f(t)|$.
   a) Vérifier que $||.||$ est une norme sur $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$.
   b) Montrer que $(\mathcal{B}(E, \mathbb{R}), ||.||)$ est un espace de Banach.

Exercice 4

1) Soit (E,d) et (F, δ) deux espaces métriques et $f : E \mapsto F$ une application.
   a) Montrer que les assertions ci-dessous sont équivalentes :
   (i) f est une application continue.
   (ii) L'image réciproque par f d'un ouvert de (F, δ) est un ouvert de (E,d)
   (iii) L'image réciproque par f d'un fermé de (F, δ) est un fermé de (E,d)

(iv) Pour toute partie A de E, on a $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

b) Montrer que si f est continue, le graphe G = {(x, f(x)), x ∈E} est fermé dans ExF.

2) Soit (E,d) un espace métrique.

a) Montrer que d : ExE → $\mathbb{R}$ est une application uniformément continue.

b) Soit A une partie non vide de E. Montrer que Φ_A définie de E vers $\mathbb{R}$ par $\Phi_A(x) = Inf_{y\in A} d(x,y)$ est uniformément continue.

Exercice 5

1) Soit (E, d) un espace métrique. Montrer qu'une suite convergente et sa limite forment une partie compacte de E.

a) Montrer qu'une réunion finie de parties compactes est compacte. Est-ce le cas pour une réunion quelconque de parties compactes ?

b) Montrer que s'ile existe r > 0 tel que $\forall x \in E$, B'(x, r) est compact, alors (E,d) est complet.

c) On suppose que E est un espace vectoriel normé. Soient A une partie compacte et B une partie fermée de A. Montrer que A + B = {a + b, a ∈ A et b ∈ B} est une partie fermée.

2) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et (e_1, ..., e_p) une base de E. Pour x = $\sum_{i=1}^{p} x_i e_i$. On pose ||x|| = $\sum_{i=1}^{p} |x_i|$. Soit ϱ une norme sur E.

a) Montrer que ||.|| est une norme sur E.

b) Montrer que ϱ est une application continue.

c) Montrer que S = {x ∈ E, ϱ (x) = 1} est une partie compacte de (E, ||.||).

d) Montrer que : ∃ c_1 ; c_2 ∈ $\mathbb{R}^*_+$ telles que c_1||x|| ≤ ϱ (x) ≤ c_2||x|| pour tout x ∈ E.

e) En déduire que deux normes quelconques ϱ_1 et ϱ_2 sur E sont équivalentes.

3) Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies. Montrer que toute application linéaire f : E → F est continue.

Exercice 6

1) Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E, d). Montrer que tout chemin joignant un point de l'intérieur de A à un point de l'extérieur de A rencontre la frontière de A.(c'est le théorème de passage des douanes).

2) On suppose que E est un espace vectoriel normé.

a) Rappeler la définition d'une partie convexe et d'une partie connexe par arcs.

b) Montrer que toute boule est convexe.

c) Montrer que toute réunion croissante de parties convexes est convexe.

d) Montrer que toute partie convexe est connexe. La réciproque est-elle vraie ?

3) Soit Ω ⊂ $\mathbb{R}^3$ un domaine (c.-à-d. un ouvert connexe). Une ligne brisée de $\mathbb{R}^3$ d'origine a et d'extrémité b est la réunion d'une suite $([a_i, b_i])_{1\le i\le p}$ de segments tels que a_1 = a, b_p = b et $a_{i+1} = b_i \quad \forall i = 1, \dots, p-1$.

a) Montrer que Ω est connexe par ligne brisée. C-est à dire que deux points quelconques de Ω peuvent être joints par une ligne brisée incluse dans Ω.

b) Soit $L \subset \Omega$ une ligne brisée. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\{x \in \mathbb{R}^3, d(x, L) < r\} \subset \Omega$

c) Soit D une droite de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\Omega \backslash D$ est un domaine.