

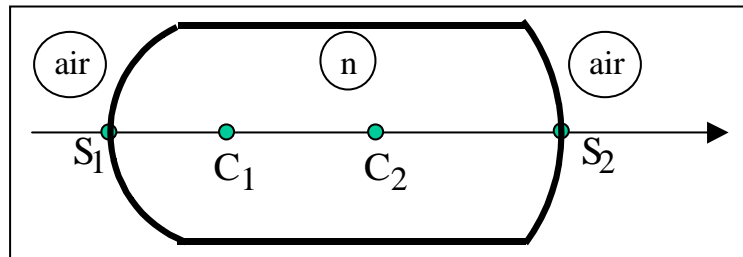
Chapitre 6

LES LENTILLES

- I. Lentilles épaisses dans l'air**
- II. Lentilles minces**
- III. Les aberrations des lentilles**

I. Lentilles épaisses dans l'air

Une *lentille épaisse* est un morceau de verre d'indice n , dont les faces d'entrée et de sortie sont constituées de surfaces (dioptries) sphériques situées à une distance non négligeable devant les rayons de courbure respectifs des deux dioptries. L'étude portera sur des lentilles placées dans l'air. Les milieux extrêmes sont donc identiques ($n_1=n_2=1$).



I.1. Matrice de transfert

$$\begin{aligned}
 T(S_1 S_2) &= R(S_2) T(\overline{S_1 S_2}) R(S_1) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{e}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } e = \overline{S_1 S_2} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 - V_1 \frac{e}{n} & \frac{e}{n} \\ -V_2 & 1 - V_2 \frac{e}{n} \end{bmatrix}, \quad \text{avec } V_1 = \frac{n-1}{\overline{S_1 C_1}} \text{ et } V_2 = \frac{1-n}{\overline{S_2 C_2}}
 \end{aligned}$$

$$V = V_1 + V_2 - V_1 V_2 \frac{e}{n} = (n-1) \left[\frac{1}{\overline{S_1 C_1}} - \frac{1}{\overline{S_2 C_2}} + \frac{e(n-1)}{n} \frac{1}{\overline{S_1 C_1}} \frac{1}{\overline{S_2 C_2}} \right] \quad (1)$$

I.2. Eléments cardinaux

* Distances focales

Distance focale image

$$f' = \frac{n_2}{V} = \frac{1}{V} \quad (2)$$

Distance focale objet

$$f = -\frac{n_1}{V} = -\frac{1}{V}. \quad (3)$$

* Plans principaux

$$\begin{cases} \overline{S_1 H_1} = f(T_{22} - 1) = \frac{eV_2}{nV} & (4a) \\ \overline{S_2 H_2} = f'(T_{11} - 1) = -\frac{eV_1}{nV} & (4b) \end{cases}$$

* Points nodaux

Les milieux extrêmes étant identiques ($n_1 = n_2 = 1$) les points principaux et points nodaux sont confondus.

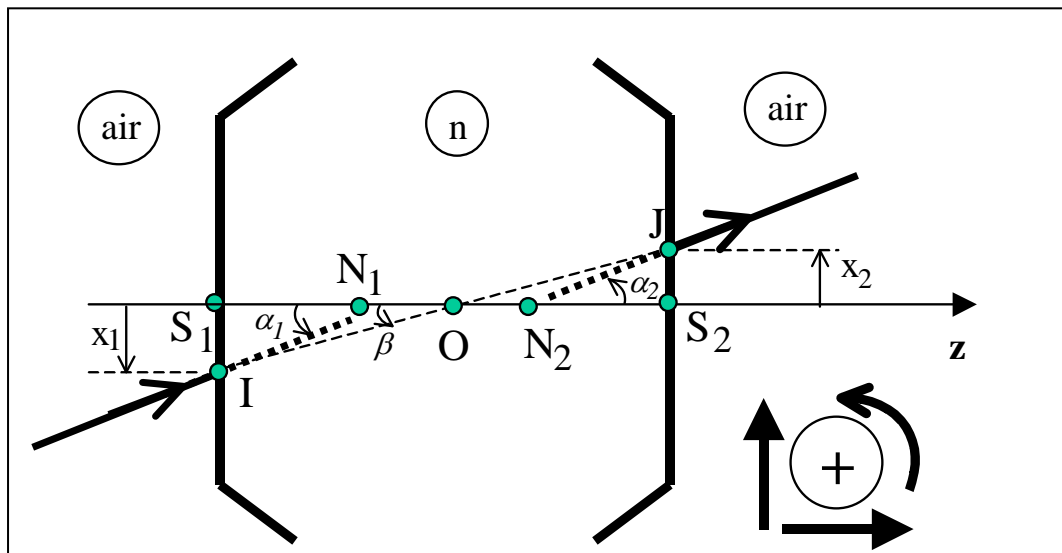
$$\begin{cases} \overline{S_1 N_1} = f(T_{22} - \frac{n_2}{n_1}) = f(T_{22} - 1) = \overline{S_1 H_1} \Rightarrow N_1 \equiv H_1 & (5a) \\ \overline{S_2 H_2} = f'(T_{11} - \frac{n_1}{n_2}) = f'(T_{11} - 1) = \overline{S_2 N_2} \Rightarrow N_2 \equiv H_2 & (5b) \end{cases}$$

* Foyers

$$\begin{cases} \overline{H_1 F} = f & (6a) \\ \overline{H_2 F'} = f' & (6b) \end{cases}$$

* Centre optique

Le centre optique est le point O de passage des rayons tel que les rayons incident et émergent sont parallèles, comme l'illustre la figure ci-après :



Le rayon N_2J ressort parallèlement à IN_1 . Si

$$I = \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

désignent respectivement les caractéristiques des rayons incident et émergent au *point d'entrée I* et *point de sortie J* du système, alors on a :

$$\alpha_2 = \alpha_1 .$$

D'après la figure

$$\alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = -\frac{\overline{S_1 I}}{\overline{S_1 N_1}} = -\frac{x_1}{\overline{S_1 N_1}} = -\frac{x_1 n V}{e V_2} \text{ et } \alpha_2 \approx \tan \alpha_2 = -\frac{\overline{S_2 J}}{\overline{S_2 N_2}} = -\frac{x_2}{\overline{S_2 N_2}} = \frac{x_2 n V}{e V_1} \quad (8)$$

où nous avons exploité le fait que $\overline{S_1 N_1} = \frac{e V_2}{n V}$ et $\overline{S_2 N_2} = -\frac{e V_1}{n V}$, en tenant compte des relations (4) et (5).

D'autre part,

$$J = T I = \begin{bmatrix} 1 - V_1 \frac{e}{n} & \frac{e}{n} \\ -V & 1 - V_2 \frac{e}{n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ -V & T_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = T_{11} x_1 + T_{12} \alpha_1 \\ \alpha_2 = -V x_1 + T_{22} \alpha_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (9a) \\ (9b) \end{matrix}$$

$$(9a) \rightarrow x_2 = T_{11} x_1 + T_{12} \alpha_1 = \left(1 - V_1 \frac{e}{n}\right) x_1 + \frac{e}{n} \alpha_1 = \left(1 - V_1 \frac{e}{n} - \frac{V}{V_2}\right) x_1, \text{ compte tenu de (8)}$$

Or d'après la relation (1)

$$\frac{V}{V_2} = \frac{V_1}{V_2} + 1 - \frac{e V_1}{n} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = 1 - \frac{e V_1}{n} - \left(\frac{V_1}{V_2} + 1 - \frac{e V_1}{n}\right) = -\frac{V_1}{V_2} = -\frac{\left(\frac{n-1}{\overline{S_1 C_1}}\right)}{\left(\frac{1-n}{\overline{S_2 C_2}}\right)} = \frac{\overline{S_2 C_2}}{\overline{S_1 C_1}}$$

$$\text{Par ailleurs, d'après la figure précédente } \beta \approx \tan \beta = \frac{x_1}{\overline{OS_1}} = \frac{x_2}{\overline{OS_2}} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}} .$$

Le centre optique O d'une lentille épaisse est donc donné par

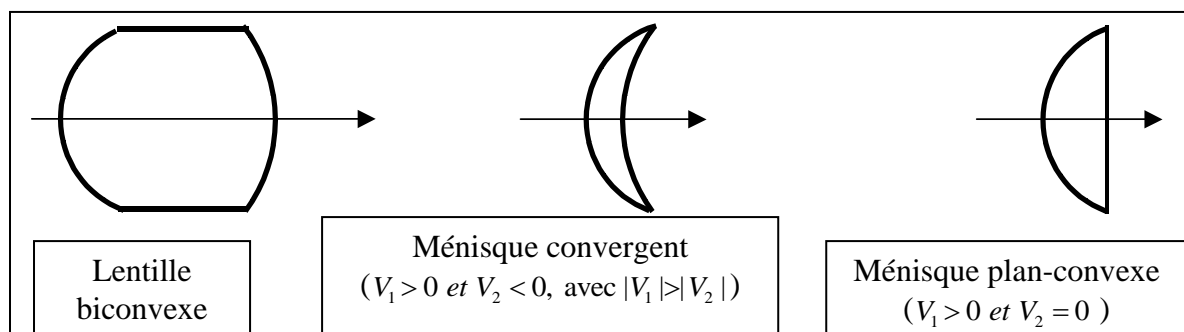
$$\frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}} = \frac{\overline{S_2 C_2}}{\overline{S_1 C_1}} . \quad (10)$$

I.3. Les différents types de lentilles

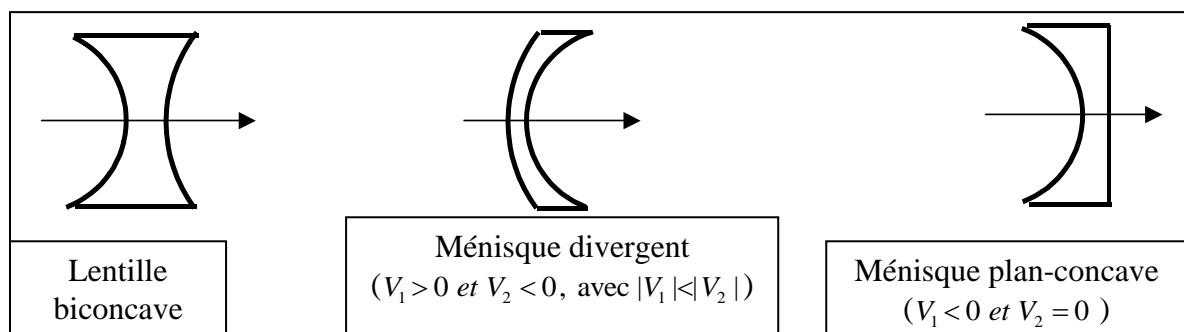
On peut associer les dioptries de différentes manières pour former une lentille. On distingue deux grands types de lentilles dépendant du signe de la vergence. Rappelons que la vergence d'une lentille épaisse s'exprime en fonction des vergences de ses deux dioptries :

$$V = V_1 + V_2 - V_1 V_2 \frac{e}{n} .$$

- Lentilles convergentes ($V > 0$)



- Lentilles divergentes ($V < 0$)



Remarques :

- les propriétés de convergence ou de divergence sont des propriétés indépendantes de la direction de propagation de la lumière.
- Les plans principaux, foyers et points nodaux sont interchangeables
- Les lentilles divergentes ont une épaisseur sur les bords plus importante qu'au centre.

II. Lentilles minces dans l'air

Une lentille est dite mince lorsque l'épaisseur de la lentille sur l'axe, e , est négligeable devant les rayons de courbure $R_1 = |\overline{S_1 C_1}|$, $R_2 = |\overline{S_2 C_2}|$, et devant leur différence $\Delta R = |R_2 - R_1|$; autrement dit $e \ll R_1, e \ll R_2$, et $e \ll |R_2 - R_1|$

$$\begin{aligned} V &= (n-1) \left[\frac{1}{\overline{S_1 C_1}} - \frac{1}{\overline{S_2 C_2}} + \frac{e(n-1)}{n} \frac{1}{\overline{S_1 C_1}} \frac{1}{\overline{S_2 C_2}} \right] \\ &= \frac{n-1}{\overline{S_1 C_1} \overline{S_2 C_2}} \left[\overline{S_2 C_2} - \overline{S_1 C_1} + \frac{e(n-1)}{n} \right] \\ \Rightarrow V &= \frac{(n-1)(\overline{S_2 C_2} - \overline{S_1 C_1})}{\overline{S_1 C_1} \overline{S_2 C_2}} \left[1 + \frac{e(n-1)}{n(\overline{S_2 C_2} - \overline{S_1 C_1})} \right] (n-1) \left[\frac{1}{\overline{S_1 C_1}} - \frac{1}{\overline{S_2 C_2}} \right] \end{aligned}$$

La vergence d'une lentille mince d'épaisseur négligeable s'écrit donc

$$V = (n-1) \left[\frac{1}{\overline{S_1 C_1}} - \frac{1}{\overline{S_2 C_2}} \right] \quad (11)$$

Les autres éléments de la matrice de transfert s'écrivent :

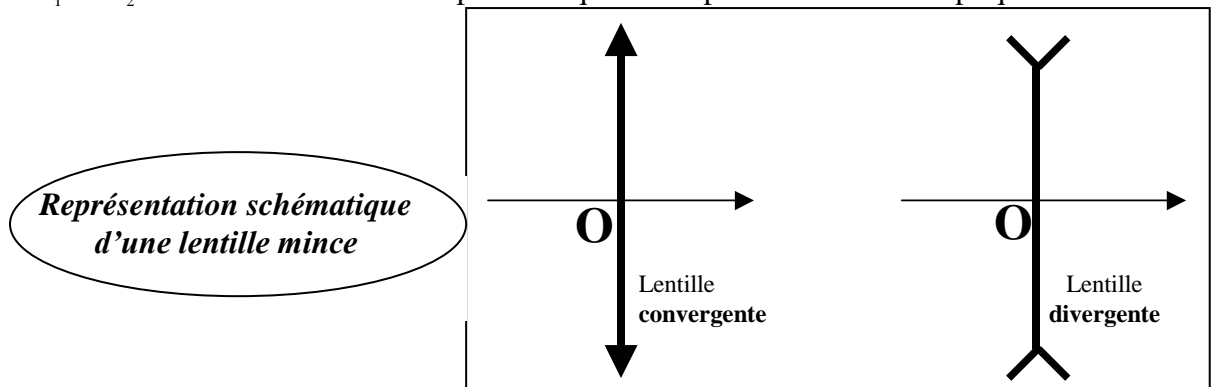
$$\begin{aligned} T_{11} &= 1 - \frac{eV_1}{n} = 1 - \frac{e}{n} \left(\frac{n-1}{\overline{S_1 C_1}} \right) \approx 1 \\ T_{22} &= 1 - \frac{eV_2}{n} = 1 - \frac{e}{n} \left(\frac{1-n}{\overline{S_2 C_2}} \right) \approx 1 \end{aligned}$$

Remarque : Pour une lentille mince, on peut confondre les sommets S_1 et S_2 avec le centre optique O. Cela signifie que $T_{12} = e/n \approx 0$.

Dans ces conditions, la matrice de transfert de la lentille mince s'écrit :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Il résulte de cette matrice que les points nodaux, points principaux, le centre optique, les sommets S_1 et S_2 sont confondus avec un point unique correspondant au centre optique.



III. Les aberrations des lentilles

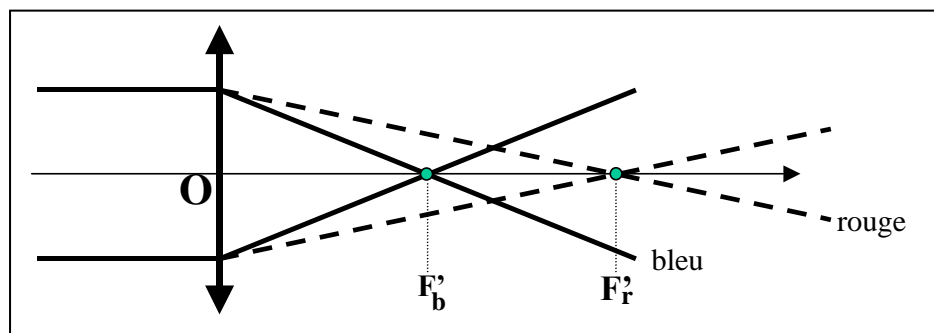
III.1. Les aberrations chromatiques

L'indice de tout milieu transparent, verre organique ou minéral, constituant les instruments, varie avec la fréquence des radiations utilisées et par conséquent avec la longueur d'onde :

$$n = n(\lambda)$$

Cette dépendance est nommée **dispersion**. Cette propriété permet de décomposer une lumière poly-chromatique en ses composantes monochromatiques. Chaque composante va fournir d'un même objet une image spécifique altérant l'image globale.

De ce fait l'instrument présente une aberration chromatique plus ou moins importante. Imaginons une lentille mince convergente en verre ordinaire, éclairée par un faisceau de lumière blanche, parallèle à l'axe optique. La figure ci après illustre le comportement des radiations après passage dans la lentille pour les deux radiations extrêmes, le bleu avec $\lambda = 0,4\mu m$ et le rouge avec $\lambda = 0,8\mu m$. L'écart entre les foyers est largement exagéré par souci de clarté de la figure.



On observe plusieurs foyers colorés. Pour un verre ordinaire $n(\lambda_b) > n(\lambda_r)$, le foyer bleu est le plus proche de la lentille. Dans le plan de front passant par F'_b on observe une tache centrale bleue bordée de rouge, tandis que, dans le plan de front passant par F'_r on observe une tache rouge bordée de bleu. Entre les deux taches on observe un mélange des couleurs.

D'après la relation (2), la distance focale est donnée par $f' = \overline{OF'} = 1/V$, avec

$$V(\lambda) = [n(\lambda) - 1] \left[\frac{1}{S_1 C_1} - \frac{1}{S_2 C_2} \right] \quad [\text{compte tenu de (11)}]$$

La distance focale est donc liée à l'indice par la relation :

$$[n(\lambda) - 1] f' = \frac{\overline{S_1 C_1} \overline{S_2 C_2}}{\overline{S_1 C_1} - \overline{S_2 C_2}} = cste. \quad (12)$$

Cette relation montre que le coefficient $[n(\lambda) - 1] f'$ est indépendant de la longueur d'onde

Une bonne approximation de la dépendance de n vis-à-vis de la longueur d'onde est donnée par la loi de Cauchy :

$$n(\lambda) = n_0 + \frac{b}{\lambda^2} \quad (13)$$

On en déduit les variations suivantes :

$$\lambda \uparrow \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} \downarrow \Rightarrow n \downarrow \Rightarrow \frac{1}{f'} \downarrow \Rightarrow f' \uparrow$$

Autrement dit :

$$\lambda_r > \lambda_b \Rightarrow n_r < n_b \Rightarrow f'_r > f'_b$$

Examinons de manière plus générale la variation df' induite par une variation d'indice dn . Pour cela nous allons exploiter le fait que le produit $(n-1)f'$ est un coefficient qui ne dépend que de la nature et la géométrie du matériau. Ce coefficient étant indépendant de la longueur d'onde, on peut donc écrire, pour une variation de la longueur d'onde et une lentille de géométrie donnée, que

$$\frac{d(n-1)}{n-1} + \frac{df'}{f'} = 0 \Rightarrow \frac{dn}{n-1} = -\frac{df'}{f'}$$

La quantité

$$\frac{dn}{n-1} \approx \frac{\Delta n}{n-1} = -\frac{n_{\text{sup}} - n_{\text{inf}}}{n_{\text{moy}} - 1} = K = \frac{1}{A} \quad (14)$$

désigne le **pouvoir dispersif** du matériau. K est indépendant de l'instrument réalisé. Son inverse, noté A désigne la **constringence**. Plus cette quantité est faible, plus le matériau est dispersif.

Quelques exemples :

Flint (silicate de K et de Pb) $A \approx 30-40$ $n \approx 1.55$

Crown (silicate de K et de Ca) $A \approx 55-60$ $n \approx 1.65$

Le crown est moins dispersif, c'est toutefois un matériau plus onéreux.

III.2. Achromatisme

L'achromatisme consiste à rechercher les conditions de la réduction de l'aberration chromatique.

Prenons deux associations de lentilles :

1) Cas de deux lentilles minces distantes de e .

La matrice de transfert est

$$T(ES) = T(L_2) \overline{T(L_1 L_2)} T(L_1) = \begin{bmatrix} 1 - eV_1 & e \\ -V_1 - V_2 + eV_1V_2 & 1 - eV_2 \end{bmatrix}.$$

Soit df' la variation de distance focale correspondant à une variation $d\lambda$ de la longueur d'onde.

Comme

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} - \frac{e}{f_1' f_2'}$$

On obtient

$$\frac{df'}{f'^2} = -\frac{df_1'}{f_1'^2} - \frac{df_2'}{f_2'^2} + \frac{e}{f_1' f_2'} \left[\frac{df_1'}{f_1'} + \frac{df_2'}{f_2'} \right]$$

L'achromatisme est réalisé lorsque $df' = 0$ donc lorsque

$$0 = \frac{1}{A_1 f_1'} + \frac{1}{A_2 f_2'} - \frac{e}{f_1' f_2'} \left[\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} \right]$$

Cette relation conduit à :

$$e = \frac{A_1 f_1' + A_2 f_2'}{A_1 + A_2}. \quad (15)$$

Envisageons les lentilles réalisées avec le même matériau : $A_1 = A_2$. Le doublet sera achromatique si la distance entre les lentilles vérifie :

$$e = \frac{f_1' + f_2'}{2}.$$

Cette association est utilisée pour les oculaires.

Attention: L'achromat est performant uniquement en ce qui concerne les deux radiations prises pour la détermination des constringences.

2) Cas de deux lentilles accolées : $e = 0$

Pour réaliser la condition $df' = 0$, la relation (15) implique que les lentilles soient de vergence opposée.

III.3. Les aberrations géométriques

Ces aberrations proviennent de l'utilisation des instruments en dehors des conditions de Gauss.

Pour éviter les rayons marginaux on utilise un diaphragme ou bien des lentilles de dimensions réduites ce qui présente également l'avantage d'en diminuer le prix.

Un autre moyen de réduction des aberrations géométrique consiste à orienter les faces de la lentille de telle sorte que la face la plus bombée soit du côté des rayons les plus inclinés.