SOMMAIRE

Épreuves Mathématiques.

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2009

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

« Le hasard et la coïncidence sont les moyens qu'a choisi Dieu pour rester anonyme » : ALBERT EINSTEIN

Exercice 1

1. Soient x, y deux réels. Montrer que l'on a les inégalités suivantes : (1pt)
   (a) $xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$
   (b) $-\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) \leq xy$
2. En déduire que $-\frac{1}{2}$ est un minorant de la fonction : (1pt)
$$r : (x, y, z) \longmapsto \frac{xy + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$
sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et montrer que c'est son minimum.
3. Trouver de même le maximum de la fonction r sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. (1pt)
4. (a) Trouver les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2pts)
   (b) Soit M une matrice symétrique réelle d'ordre 3 et f l'endomorphisme canoniquement associé à M. On rappelle qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ de vecteurs propres pour f, chacun des vecteurs propres $\overrightarrow{u_k}$ étant associé à la valeur propre λ_k. On suppose que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. On sait qu'il existe des réels non tous nuls $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que $\vec{v} = \alpha_1\overrightarrow{u_1} + \alpha_2\overrightarrow{u_2} + \alpha_3\overrightarrow{u_3}$
   Montrer que (1pt)
$$\frac{\langle f(\vec{v}), \vec{v}\rangle}{||\vec{v}||^2} = \lambda_3 + \frac{\alpha_1^2\left(\lambda_1 - \lambda_3\right)}{||\vec{v}||^2} + \frac{\alpha_2^2\left(\lambda_2 - \lambda_3\right)}{||\vec{v}||^2}$$
   où $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^3$.
   (c) En déduire que λ_3 est le maximum de la fonction r_f suivante sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ (1pt)
$$r_f : \vec{u} \longmapsto \frac{\langle f(\vec{u}), \vec{u})\rangle}{||\vec{u}||^2}$$
   (d) Déterminer de même le minimum de la fonction r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$. (1pt)

Application : On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme associé.

5. Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous espace propre f (2pts)
6. En déduire le maximum et le minimum de la fonction r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ et préciser les vecteurs en lesquelles ils sont atteints. (1pt)
7. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ par $g(x,y,z) = \dfrac{-x+y+2z}{x^2+y^2+z^2}$ et P la partie de $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ constituée des triplets (x,y,z) tels que $x+y+2z=1$. Soit $(x,y,z) \in P$ et $\vec{v} = (x,y,z)$. Monter que $g(x,y,z) = r_f(\vec{v})$.
8. En déduire que g possède un minimum et un maximum sur P, que l'on calculera et préciser les points en lesquels ils sont atteints.

Exercice 2

Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$, on note $I = [a,b[$ et soit f une fonction définie et de classe C^1 sur I, à valeurs réelles. On suppose que f et f' sont bornées sur I ($\exists C > 0, \forall t \in I, ||f(t)|| \leq C, ||f'(t)|| \leq C$).

1. Montrer qu'il existe une constante M telle que la fonction $g(t) = f(t) + Mt$ soit croissante sur I. (1pt).
2. En déduire que f possède une limite finie en b (1pt).
3. Soit t_0 un réel et (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$. On considère le système différentiel suivant :

$$(S) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + xy \\ \frac{dy}{dt} = -2y - x^2 \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

Soit $(x(t), y(t))$ une solution de (S) correspondant à $t_0 = 0$ et $I =]\alpha, \beta[$. On pose $u = x^2(t) + y^2(t)$.

   (a) Montrer que la fonction u est décroissante sur $]0, \beta[$ (0,5pt)

   (b) Montrer que $x(t)$ et $y(t)$ sont bornées ainsi que $x'(t)$ et $y'(t)$. (1pt)

   (c) En utilisant l'exercice 1), montrer que x et y admettent des limites quand $t \longrightarrow \beta$. (1pt)

On suppose dans cette partie que $I = [0, +\infty[$ et que $(x(t), y(t))$ est une solution du système (S). On pose $v(t) = (x^2(t) + y^2(t))e^{2t}$

   (a) Montrer que v est décroissante sur I. (0,5pt)

   (b) En déduire que $u(t) \leq (x_0^2(t) + y_0^2(t))\, e^{-2t}, \forall t \geq 0$. (1pt)

   (c) Montrer que $(x(t), y(t)) \longrightarrow (0,0)$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$. (1pt)

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2010

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

Première Partie

On note I l'intervalle $[0,1]$. Soit G la fonction définie sur $I\times I$ à valeurs réelles par

$$G(x,t)=\begin{cases} t(1-x) & \text{si} \quad 0\leq t\leq x\leq 1 \\ (1-t)x & \text{si} \quad 0\leq x\leq t\leq 1\end{cases}$$

On note $\mathcal{C}(I)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs réelles. Soit f un élément de $\mathcal{C}(I)$. On pose $\forall x\in I$:

$$v(x)=\int_0^1 G(x,t)f(t)dt$$

Question 1 (2pts)

Montrer que pour tout $x\in I$, $v(x)=(1-x)\int_0^x tf(t)dt+x\int_x^1(1-t)f(t)dt.$

Question 2

1. Montrer que la fonction $v\in\mathcal{C}(I)$, qu'elle est deux fois dérivables et qu'elle vérifie (3pts)

$$\begin{cases} -v''(x)=f(x) & \text{si} \quad x\in]0,1[\\ v(0)=v(1)=0 \end{cases}$$

2. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, trouver une fonction $\overline{G}$ définie sur $[a,b]\times[a,b]$, à valeurs réelles telle que pour toute fonction r définie sur $[a,b]$ deux fois dérivables telle que $r(a)=r(b)=0$, on ait

$$r(x)=-\int_a^b\overline{G}(x,t)r''(t)dt$$

Question 3

Calculer $v\left(\frac{1}{2}\right)$ dans les deux cas suivants :

1. $f(t)=\sin(k\pi t), k\in\mathbb{N}$.
2. $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2-t-1}}$

Soit F une fonction définie sur $I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant :

1. F est continue sur $I\times\mathbb{R}$.
2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(t,z)$ existe pour tout $(t,z)\in I\times\mathbb{R}$ et $\forall t\in I$, la fonction $z\longmapsto\dfrac{\partial F}{\partial z}(t,z)$ est continue de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
3. $\exists L>0$, telle que
   (a) $L<8$

(b) $\left|\frac{\partial F}{\partial z}(t,z)\right| \leq L, \forall (t,z) \in I \times \mathbb{R}$

Question 4

Montrer que $\forall t \in I$ et $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}, |F(t,z_1) - F(t,z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$ (2pts)

Soit $u_0 \in \mathcal{C}(I)$; on définit la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_n(x) = \int_0^1 G(x,t) F(t, u_{n-1}(t))\, dt \quad \text{pour} \quad n \geq 1$$

Question 5

1. Calculer les nombres m et $\overline{m}$ définis par :

   (a) $m = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} \int_0^1 |G(x,t)|\, dt$

   (b) $\overline{m} = \sup\limits_{a\leq x\leq b} \int_a^b |\overline{G}(x,t)|\, dt$

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathcal{C}(I)$

Deuxième Partie

Question 6

1. Montrer que $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, |u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq \frac{L}{8} \max\limits_{0\leq t\leq 1} |u_{n-1}(t) - u_{n-2}(t)|$.
2. Montrer que $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, |u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq \frac{L^{n-1}}{8^{n-1}} \max\limits_{0\leq t\leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|$.
3. Montrer que $\forall x \in I, \forall m, p \in \mathbb{N}, |u_{m+p}(x) - u_m(x)| \leq \frac{L^m}{8^m} \frac{1}{1-\frac{L}{8}} \max\limits_{0\leq t\leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|$.

Question 7

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme, c'est-à-dire :

   $$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], |u_m(x) - u_{m+p}(x)| \leq \epsilon$$

   et qu'elle converge uniformément vers une fonction $u \in \mathcal{C}(I)$.
2. Montrer que

   $$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |F(t,u(t)) - F(t,u_n(t))| \leq L|u(t) - u_n(t)|$$

3. En déduire que

   $$u(x) = \int_0^1 G(x,t) F(t,u(t))dt \quad \text{et que} \quad \begin{cases} -u''(x) = F(x,u(x)) & \text{pour} x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Question 8

Montrer qu'il existe une fonction w définie sur I telle que :

$$\begin{cases} -w''(x) = \cos(w(x)) & \text{pour} \quad x \in]0,1[\\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2011

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

Partie 1 : Algèbre (14 points)

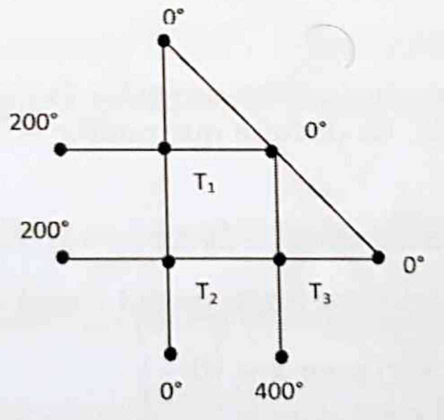
Exercice 1 On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant les relations : $\begin{cases} u_{n+1} = -v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n - w_n \\ w_{n+1} = -u_n - v_n + 2w_n \end{cases}$

avec $u_0 = v_0 = w_0 = 1$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. (a) Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés. (2pts+2pts)
   (On choisira des vecteurs dont la première composante est égale à 1).
   (b) Justifier que A est diagonalisable et la diagonaliser. (1pt+2pts)
   (c) Calculer A^n pour tout n. (2pts)
2. Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n. (2pts)

Exercice 2 Dans une grille de fils métallique, la température est maintenue fixée aux bords comme indiquée sur la figure. Quand l'équilibre thermique est atteint, la température en un point de la maille intérieure est égale à la moyenne des températures des mailles adjacentes. Par exemple, $T_2 = \dfrac{T_3 + T_1 + 200 + 0}{4}$.



Calculer la température aux trois mailles intérieures. (3pts)

Partie 2 : Probabilité (18 points)

Exercice 3 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité et déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ayant pour densité f. (1pt+1pt)
2. Soit $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. En étudiant la fonction φ, montrer qu'elle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$. Déterminer sa réciproque. (1pt+1pt+1pt)
3. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \varphi(X)$. Déterminer la fonction de répartition et la densité de Y (2pts+2pts)

Exercice 4 On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancé, la probabilité d'obtenir pile est de $\dfrac{2}{3}$ et celle d'obtenir face est $\dfrac{1}{3}$. Les lancés sont supposés indépendants et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancés nécessaires pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs. Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité $P(X = n)$.

1. Décrire les évènements $X = 2$, $X = 3$, $= 4$ et calculer p_2, p_3 et p_4. (1pt+1,5pt)
2. Montrer que $p_n = \dfrac{2}{9}p_{n-2} + \dfrac{1}{3}p_{n-1}, \forall n \geq 4$ (2pt)
3. En déduire l'expression de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. Soit $q \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ et en déduire l'espérance mathématiques $E(X)$ de la variable aléatoire X (1,5pt+2pts)

Partie 3 : Analyse (18 points)

Exercice 5 Soit la série $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n^2 + 2n} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série S. En déduire le domaine de définition D_S de S. (on étudiera la convergence de S aux bornes du domaine de définition) (1pt+2pts)
2. Déterminer le plus grand intervalle I dans lequel S est de classe C^1. Montrer que S' n'est pas définie en $\dfrac{1}{2}$ (1pt+2pts)
3. Donner le développement en série entière de $ln(1 - 2x)$ en précisant l'ensemble sur lequel ce développement est valable. En déduire que pour $x \in I, xS'(x) + 2S(x) = -\ln(1 - 2x)$ (2pts+3pts)
4. Résoudre l'équation différentielle $xy'(x) + 2y(x) = -\ln(1 - 2x)$ sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ (3pts)
   Déterminer la solution qui admet une limite quand x tend vers 0. (2pts)
5. Donner la forme explicite de $S(x)$ pour $x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2012

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

Exercice 1

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique est représentée par

$$\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de A. (1,5pt)
2. Calculer les vecteurs propres de A. On les notera $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. (1,5pt)
3. Trouver la matrice P de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. (3pts)
4. Trouver la matrice D de f dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. (3pts)
5. Quelle relation y a-t-il entre A, D et P ? (3pts)
6. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. (3pts)
7. On considère les 3 suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par la donnée de u_0, v_0, w_0 et les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$

Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n et de u_0, v_0, w_0. (4pts)

Exercice 2

On dispose de deux pièces de monnaie C_1 et C_2. C_1 est équilibrée, quand on la lance, la probabilité d'obtenir face est $\frac{1}{2}$. C_2 est pipée, quand on la lance, elle tombe sur face avec la probabilité $\frac{9}{10}$

1. On choisit l'une des deux pièces au hasard et on la lance une fois. Quelle est la probabilité qu'elle tombe sur pile ? (2pts)
2. On choisit l'une des deux pièces au hasard et on la lance une fois. Quelle est la probabilité qu'elle tombe sur face ? (2pts)
3. On choisit l'une des deux pièces au hasard et on la lance deux fois. Quelle est la probabilité qu'elle tombe exactement une fois sur pile ? (3pts)
4. On choisit l'une des deux pièces au hasard et on la lance une fois, elle tombe sur pile. Quelle est la probabilité que ce soit la pièce équilibrée ? (2pts)
5. On choisit l'une des deux pièces au hasard et on la lance deux fois, elle tombe sur pile. Quelle est la probabilité que ce soit la pièce équilibrée ? (2pts)
6. On choisit l'une des deux pièces au hasard et on la lance deux fois, elle tombe exactement une fois sur pile, puis on la lance une troisième fois. Quelle est la probabilité qu'elle tombe sur pile ? (3pts)

Exercice 3

Calculer l'intégrale $\iint_D f(x,y)dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ et $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}$ (2pts)

Exercice 4

On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2}$.

1. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq 1 - \cos u \leq \dfrac{u^2}{2}$ (2pts)
2. En déduire que la fonction $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est continue en $(0,0)$.

   (2pts)

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Soit $g :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

On pose $h = f \circ g$.

1. Montrer que h est différentiable sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles $\dfrac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de r, θ, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta))$. (2pts)
2. En déduire l'expression de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))$ et de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta))$ en fonction de r, θ, $\dfrac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)$ et de $\dfrac{\partial h}{\partial \theta}($

   (3pts)
3. En déduire les expressions de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r,\theta))$ et de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(r,\theta))$ en fonction r, θ et des dérivées partielles d'ordre un et deux de h au point (r,θ). (3pts)
4. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r,\theta)) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(r,\theta))$ en fonction r, θ et des dérivées partielles d'ordre un et deux de h au point (r,θ). (3pts)
5. Dans cette question uniquement, on suppose que h ne dépend que de r et que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. Déduire l'expression de h, puis celle de $f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. (2pts)

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2013

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

PARTIE I

On désigne par j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On considère le système (E) $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases}$ où a, b et c désignent trois nombres complexes donnés.

1. Le nombre complexe j vérifie :
   (a) $j^2=1$
   (b) $j^3-1=0$
   (c) $1+j+j^2=0$
   (d) $1-j-j^2=0$
2. Les nombres complexes x, y et z vérifiant le système (E) sont tels que :
   (a) $3y+(x+z)(1+j+j^2)=a+bj^2+cj$
   (b) $3y+(x+z)\left(1+j+j^2\right)=a+b+c$
   (c) $3y+(x+z)(1+j+j^2)=a+bj+cj^2$
   (d) $3x+(y+z)\left(1+j+j^2\right)=a+bj^2+cj$
3. Le système (E)
   (a) n'admet pas de solution
   (b) admet au moins deux solutions
   (c) admet une solution unique $x=\dfrac{a+b+c}{3}$ $\quad y=\dfrac{a+bj^2+cj}{3}$ $\quad z=\dfrac{a+bj+cj^2}{3}$
   (d) admet une solution unique $x=\dfrac{a+b+c}{3}$ $\quad y=\dfrac{a+bj+cj^2}{3}$ $\quad z=\dfrac{a+bj^2+cj}{3}$
4. Une condition nécessaire et suffisante pour que x, y, z vérifiant le système (E) soient des nombres réels est
   (a) a, b et c réels
   (b) a, b et c complexes non réels
   (c) a réel et $b=c=0$
   (d) a réel et b et c complexes conjugués car j^2 et $(-j)$ sont complexes conjugués.

PARTIE II

n étant un entier naturel et α un nombre réel non nul ; on pose :

$$u_n=\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\cos nx dx \quad \text{et} \quad v_n=\int_0^{\pi} e^{\alpha x}\sin nx dx$$

5. u_n vérifie pour tout n entier naturel

(a) $u_n = \frac{1}{\alpha n}\left[e^{\alpha x}\sin nx\right]_0^{\pi}$ pour n entier strictement positif et $u_0 = \frac{e^{\alpha\pi}-1}{\alpha}$

(b) $u_n = \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\left(\cos nx - \frac{n}{\alpha}\sin \alpha x\right)\right]_0^{\pi} + \frac{n^2}{\alpha^2}u_n$

(c) $u_n = \frac{1}{n^2+\alpha^2}\left[e^{\alpha x}\left(\alpha\cos nx + n\sin nx\right)\right]_0^{\pi}$

(d) $\frac{1}{n^2-\alpha^2}\left((-1)^n e^{\alpha\pi}\alpha - \alpha\right)$

6. v_n satisfait, pour tout n entier naturel non nul

(a) $v_n = \frac{1}{\alpha n}\left[-e^{\alpha x}\cos nx\right]_0^{\pi}$

(b) $v_n = \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\left(\sin nx - \frac{n}{\alpha}\cos nx\right)\right]_0^{\pi} - \frac{n^2}{\alpha^2}v_n$

(c) $v_n = \frac{1}{n^2-\alpha^2}\left[e^{\alpha x}\left(n\cos nx - \alpha\sin nx\right)\right]_0^{\pi}$

(d) $\frac{1}{n^2+\alpha^2}\left((-1)^{n+1}ne^{\alpha\pi} + n\right)$

7. La valeur absolue de u_n est, pour tout n entier naturel, majorée par

(a) $\frac{|\alpha|}{n^2+\alpha^2}$

(b) $\frac{\frac{|\alpha|}{1+e^{\alpha\pi}}}{|n^2-\alpha^2|}$

et celle de v_n majorée par

(c) $\frac{n\left(1-e^{\alpha\pi}\right)}{n^2+\alpha^2}$

(d) $\frac{\left(1+e^{\alpha\pi}\right)}{\alpha n}$

8. La suite (v_{2k}), k entier strictement positif, est équivalente à la suite de terme général

(a) $\frac{1-e^{\alpha\pi}}{2k}$

(b) $\frac{1+e^{\alpha\pi}}{k}$

(c) $\frac{1}{2k}$

(d) $\frac{1}{k}$

9. (a) les suites (u_n) et (v_n) ne peuvent être convergentes car elles ne sont pas de signe constant

(b) les suites (u_n) et (v_n) convergent car toute suite majorée est convergente.

(c) la suite (u_n) converge vers 0.

(d) la suite (u_n) diverge car la suite de terme général $\cos nx$ n'admet pas de limite.

PARTIE III

10. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

(a) $\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos 5\theta = 16\cos^5\theta + 5\cos\theta$

(b) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

(c) $\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

(d) $\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ car $\cos\frac{\pi}{10} \leq \cos\frac{\pi}{3}$

11. Soit le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère les points $I(1,2)$, $M(2,3)$ et $M'\left(\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\right)$.

La similitude de centre I qui transforme M en M' est alors :

(a) de rapport 2

(b) d'angle $\frac{\pi}{4}$

(c) de rapport $\frac{1}{2}$

(d) d'angle $\frac{\pi}{3}$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à résoudre $\sum_{k=1}^{n} C_n^k \cos(2k\theta) = 0$ où θ est une inconnue réelle.

(a) Si θ est solution alors, $\sum_{k=1}^{n} C_n^k \sin^2(k\theta) = 2^n$

(b) $\sum_{k=1}^{n} C_n^k \cos(2k\theta) = \cos(n\theta)\left(\frac{\cos\theta}{2}\right)^n$

(c) L'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{n} + \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(d) Il n'y a pas de solution à cette équation.

13. Soit une fonction réelle f de la variable t définie par

$$\forall t > 0, f(t) = ln(1+t) + \frac{t^2}{1+t^2}$$

En utilisant f, on peut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! a_n, f(a_n) = \frac{1}{n}$$

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*})$ est une suite croissante car f^{-1} est décroissante et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puisque f^{-1} est continue en 0

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq 0$

(d) $a_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$

14. On cherche à comparer e^x avec son développement limité.

(a) $\exists \theta \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N}, e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, e^x \geq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!}$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, e^x \geq \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$

(d) $\forall x \in \mathbb{R}_-, \forall n \in \mathbb{N}, e^x \geq \sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!}$

15. Soit a et b deux fonctions réelles à valeurs strictement positives de la variable réelles x, $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $a(x) \sim_\alpha b(x)$

(a) Il existe une fonction ϵ définie sur un voisinage de α avec $\lim_{x\to\infty} \epsilon(x) = 0$ et $\ln(\alpha(x)) = \ln(b(x)) + \ln(1+\epsilon(x))$

(b) $\ln(\alpha(x)) \sim_\alpha \ln(b(x))$

(c) $\ln\left(1+\frac{x}{2}+\sin^2 x\right) \sim_0 \ln(1+x)$ car $1+\frac{x}{2}+\sin^2 x \sim_0 1+x$

(d) $\ln(|\sin x|) \sim_\alpha \ln(|x|)$ car $|\sin x| \sim_\alpha |x|$ et que $|x| \neq 1$ sur un voisinage de 0.

16. Quelques limites en utilisant des équivalents

(a) Pour $\beta \neq 0$ et α réels, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$

(b) Pour $\beta \neq 0$ et α réels, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos\alpha x}{\ln\cos\beta x} = -\frac{\alpha^2}{\beta^2}$

(c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(\tan\frac{3x}{2}\right)^{\tan(3x)} = e^{-1}$

(d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(\tan\frac{3x}{2}\right)^{\tan(3x)} = e$

17. Soit la fonction réelle f de variable réelle x définie par :

$$\forall x \neq 0, f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}} \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

(a) f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, non dérivable en 0

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{2-x}{x^3} e^{\frac{x-1}{x^2}}$

(c) Sur $[1, +\infty[$, f ne possède qu'un extremum en 2, puisque $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

(d) $f(x) = x$ admet deux et seulement deux solutions sur $\mathbb{R}$ car la droite d'équation $y =$ est tangente à la courbe représentative de f.

18. Soit la fonction réelle f de la variable réelle x définie par : $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$

(a) Au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, on a $\sqrt{x(x+2)} = x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

(b) En $+\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x+2$ comm asymptote

(c) En $-\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x+2$ comm asymptote

(d) En $-\infty$, la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = x+2$ comm asymptote et la courbe est au-dessus de son asymptote.

19. On considère P un polynôme non nul tel que $P(X^2) - P(X+1)P(X) = 0$

(a) Si a est une racine de P, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, a^{2n} est encore une racine de P

(b) Si a est une racine de P, $\forall n \in \mathbb{N}$, a^{2n} est encore une racine de P

(c) Si a est une racine de P, il existe p tel que $a = a^p$

(d) Les racines de P sont des racines de l'unité

20. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $\forall k \in [0, n], a_k \in \mathbb{Z}$

(a) Si $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ premiers entre eux et tels que $\frac{p}{q}$ est racine de P, p divise a_0 et q divise a_n

(b) Si $2X^3 - X^2 - 13X + 5$ admet une racine rationnelle, c'est nécessairement $1, 5, \frac{1}{5}$ ou $\frac{5}{2}$

(c) $2X^4 + X^2 + 5X + 5$ admet une racine rationnelle.

(d) Si $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ avec $k \in [1, n-1], a_k \in \mathbb{Z}$, alors, P possède une racine rationnelle, elle sera entière.

21. Si $c > 0$, on cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) :

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles admettant des dérivées partielles secondes. On posera $u(x,y) = x + cy$ et $v(x,y) = x - cy$. On notera $g\left(x(u,v)\right) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$

(a) $\frac{\partial g}{\delta u} = \frac{\partial f}{\delta x} + c \frac{\partial f}{\delta y}$

(b) $\frac{\partial g}{\delta u} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\delta x} - \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\delta y}$

(c) $\frac{\partial g}{\delta u} = \frac{1}{4c^2} \left[c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right]$

(d) $(x, y) \longmapsto e^x \cosh(cy) + 2$ est une solution de (E)

22. Si A est une matrice carrée à coefficients réels, on définira l'exponentielle de la matrice A comme étant $\exp(A) = \lim_{x \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ si cette limite a un sens.

(a) $\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^4 \end{pmatrix}$

(b) $\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas défini car $2 > 1$

(c) $\exp\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^3 & e^{-1} \\ e^{-1} & e^3 \end{pmatrix}$

(d) $\exp\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\right) = e^3 \begin{pmatrix} \cosh 1 & -\sinh 1 \\ -\sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$

23. On considère le lieu des points d'affixe z tels que z, z^2 et z^5 soient les affixes de trois points alignés. On note H cet ensemble de points et H_c l'ensemble de leurs affixes.

(a) $z \in H_c \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$ ou $z^3 + z^2 + z$ est imaginaire pur

(b) $\Im\left(z^3 + z^2 + z\right) = 3\left(\Re(z)\right)^2 - \left(\Im(z)\right)^2 + 2\Re(z) + 1$

(c) H est une hyperbole équilatère centrée en $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ de grand axe parallèle à l'axe des imaginaires, de demi grand axe $\sqrt{\frac{2}{3}}$

(d) H contient une hyperbole centrée en $\left(-\frac{1}{3},0\right)$ de grand axe parallèle à l'axe des imaginaires, de demi axe $\sqrt{\frac{2}{3}}$ et dont les asymptotes ont comme coefficients directeurs $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$

24. Racines multiples

(a) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}, \quad P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ possède au moins une racine multiple car $P_n' = P_{n-1}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ est unique polynôme vérifiant $P_n - P_n' = \frac{X^n}{n!}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X^n - n$ admet 1 comme racine double

(d) Si m est divisible par n, alors $\forall a \in \mathbb{C}, X^m - a^m$ est divisible par $X^n - a^n$

25. L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. L'espace associé à E est rapporté à la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit D la droite de E dont la représentation paramétrique est donnée par $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = 1+t \end{cases}$

(a) Les coordonnées du point symétrique de $M(a,b,c)$ par rapport à D sont $\left(1+\frac{a-2b+c}{6}, 1-\frac{a-2b+c}{3}, 1+\frac{a-2b+c}{6}\right)$

(b) Les coordonnées du point symétrique de $M(a,b,c)$ par rapport à D sont $\left(\frac{6-2a-2b+c}{3}, \frac{6-2a+b-2c}{3}, \frac{6-2a-2b+c}{6}\right)$

(c) La droite symétrique par rapport à D de l'axe $(z'Oz)$ a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 2-2t \\ z = 2-t \end{cases}$

(d) La droite symétrique par rapport à D de l'axe $(z'Oz)$ a pour équations cartésiennes : $\begin{cases} 6 \\ y \end{cases}$

26. Soit $n \in \mathbb{N}$, la formule de Taylor avec reste intégral permet d'écrire :

(a) Pour une fonction f, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$, dont la dérivée nième est continue sur $[a,b]$,

$$h(b) = \sum_{K=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} h^{(n)}(t)dt$$

(b) Pour une fonction f, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$, dont la dérivée nième est continue sur $[a,b]$,

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n}}{(n-1)!} h^{(n)}(t)dt$$

(c) Pour une fonction h, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$,

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^k \frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{n!} h^{(n)}(t)dt$$

(d) Pour une fonction h, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$, dont la dérivée nième est continue sur $[a,b]$,

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^k\frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{n!}h^{(n)}(t)dt$$

27. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de la moyenne appliqué au reste intégral de la question précédente permet d'écrire :

(a) Pour une fonction h, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$, $\quad \exists c \in]a,b[$,

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^k\frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}h^{(n)}(c)$$

(b) Pour une fonction h, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$, dont la dérivée nième est continue sur $[a,b]$, $\quad \exists c \in]a,b[$,

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^k\frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}h^{(n)}(c)$$

(c) Pour une fonction h, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$, $\quad \exists c \in]a,b[$,

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^k\frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \frac{(b-a)^{n}}{n!}h^{(n)}(c)$$

(d) Pour une fonction h, n fois dérivable sur un segment $[a,b]$, dont la dérivée nième est continue sur $[a,b]$, $\quad \exists c \in]a,b[$,

$$h(b) = \sum_{k=0}^{n-1}(b-a)^k\frac{h^{(k)}(a)}{k!} + \frac{(b-a)^{n}}{n!}h^{(n)}(c)$$

28. On peut déduire de la question précédente

(a) $\exists c \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}, \quad e^X = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{X^k}{k!} + \frac{X^n}{n!}e^c$

(b) $\forall X \in \mathbb{R}, \exists c \in \mathbb{R}, \quad e^X = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{X^k}{k!} + \frac{X^n}{n!}e^c$

(c) $\forall X \in \mathbb{R}, \quad e^X = \lim\limits_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$

(d) $\forall X \in \mathbb{R}, \quad e^X = \lim\limits_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k!}$ mais seulement si $|X| \leq 1$

29. On considère la fonction réelle f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \int_0^x 3^{-[t]}dt$ où $[t]$ désigne la partie entière du réel t.

(a) f est définie sur $\mathbb{R}$ car $x \longmapsto 3^{-[x]}$ admet une limite à droite et à gauche en tout point.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = 3\frac{1-3^{-n}}{2}$

(c) Pour montre que f admet une limite en $+\infty$, il est suffisant de montrer que $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(d) f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et majorée par $\frac{1}{e\ln 3}$. Donc elle admet une limite finie qui est [...] même que la limite de $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$: $\frac{3}{2}$

30. On cherche à déterminer les fonctions g de la classe C^1 sur $\mathbb{R}_+{}^*$ et vérifiant :

$$(P) \quad \forall x > 0, g'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

(a) Si g vérifie (P), alors g est de classe $C-2$ sur $\mathbb{R}_+{}^*$ et $x^2g'' = g$

(b) Comme $x > 0$, on peut poser $x = e^t$ et si $h(t) = g(x(t))$, alors, $h'' - h' + h = 0$

(c) Les fonctions $g : x \longmapsto \sqrt{x}\left[A\cos\left(\sqrt{3}\ln x\right) + B\sin\left(\sqrt{3}\ln x\right)\right]$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, vérifie (P)

(d) Comme l'équation différentielle (P) est du second ordre et homogène, l'ensemble de solutions forme un espace vectoriel de 2.

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2014

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

PARTIE I : Questions indépendantes

1. Soit $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ où $f(x,y) = x\cos xy$, une fonction continue dans le domaine D du plan défini par les inéquations $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq y \leq 1$. Alors :
   (a) $I = \pi$
   (b) $I = 2\pi$
   (c) $I = 1$
   (d) $I = 2$
   (e) Aucune des réponses précédentes
2. L'équation $\text{Arcsin}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + 2\,\text{Arccos}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = \pi$ admet :
   (a) 0 racine
   (b) 2 racines
   (c) 1 racine
   (d) 3 racines
   (e) Aucune des réponses précédentes
3. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $P(X=k) = \frac{\alpha}{k!}$. Alors, $E(X(X-1))$ est égal à :
   (a) αe^2
   (b) $\frac{\alpha e^2}{2}$
   (c) αe
   (d) $\frac{\alpha e}{2}$
   (e) Aucune des réponses précédentes
4. Soient f et g deux applications linéaires de $E = \mathbb{R}^3$ définies par :
$$f(x,y,z) = (2x-2y-3z, x-y-2z, -x+y+2z) \quad \text{et} \quad g(x,y,z) = (x-2y, x-y, y-z)$$
   On considère l'application $h = f \circ g$. Alors :
   (a) $\text{Ker}h = \{0_E\}$
   (b) $\text{Im}h = E$
   (c) $\dim \text{Im}h = 0$
   (d) $\dim \text{Ker}h = 1$
   (e) Aucune des réponses précédentes

5. La solution générale de l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$ avec $x > 0$ pe être obtenue par le changement de variable :
   (a) $u = \sqrt{x}y$
   (b) $u = xy$
   (c) $u = \sqrt{xy}$
   (d) $u = x^2y$
   (e) Aucune des réponses précédentes
6. $\sin(2\,\text{Arcsin}\,x)$ est égal à :
   (a) $x\cos(\text{Arcsin}\,x)$
   (b) $2x\sin(\text{Arccos}\,x)$
   (c) $2x\cos(\sin x)$
   (d) $2x\sin(\cos x)$
   (e) Aucune des réponses précédentes
7. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ où x est un réel donné est :
   (a) divergente
   (b) absolument et uniformément convergente
   (c) monotone décroissante
   (d) monotone croissante
   (e) Aucune des réponses précédentes
8. Soit $f(x,y) = x\left(y^2 - (\ln x)^2\right)$ une fonction à deux variables :
   (a) f admet pour maximum local $M = -4e^{-2}$
   (b) f admet pour minimum local $m = 4e^{-2}$
   (c) f admet un point selle
   (d) f admet pour minimum local $m = e^{-2}$
   (e) Aucune des réponses précédentes
9. On considère la forme différentielle $\omega(x,y,z) = 2zxdx - 2yzdy - (x^2 - y^2)dz$. La fonctio réelle $f(Z)$ de la variable réelle Z est un facteur intégrant pour $\omega(x,y,z)$ si elle vérifie :
   (a) $f'(Z) + f(Z) = 0$
   (b) $f''(Z) + 2f(Z) = 0$
   (c) $Zf'(Z) + 2f(Z) = 0$
   (d) $f'(Z) - 2f(Z) = 0$
   (e) Aucune des réponses précédentes
10. Soit $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$, une fonction à deux variables réelle. f admet par cons quent :
   (a) 0 point critique
   (b) 2 points critiques
   (c) 3 points critiques
   (d) 1 point critique

(e) Aucune des réponses précédentes

11. On considère la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\theta}}$, $\alpha > 0$ et $\theta > 0$. Son domaine de convergence est :
   (a) divergente si $\theta < 1$
   (b) divergente si $\alpha < 1$
   (c) convergente si $\theta < 1$
   (d) convergente si $\alpha < 1$
   (e) Aucune des réponses précédentes

12. Soient $f(x) = \left[\int_0^x e^{-t^2} dt\right]^2$ et $g(x) = \int_0^n \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$ deux fonctions définies pour $x \geq 0$. Alors :
   (a) $g(x) - f(x) = 0$
   (b) $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$
   (c) $f(x) + g(x) = 0$
   (d) $g(x) - f(x) = \frac{\pi}{4}$
   (e) Aucune des réponses précédentes

13. Soit A une matrice diagonale d'ordre n :
   (a) $\det A = tr\,(\exp A)$
   (b) $\det(\exp A^n) = \exp(trA)$
   (c) $\det(\exp A) = \exp(trA^n)$
   (d) $\det(\exp A) = \exp(trA)$
   (e) Aucune des réponses précédentes

14. Soit $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$. Alors :
   (a) $\frac{3\pi}{8}$
   (b) $\frac{3\pi}{2}$
   (c) 3π
   (d) π
   (e) Aucune des réponses précédentes

15. Soit $f(x, y)$ une fonction réelle de trois variables réelles x et y. Si $u = y + \alpha x$ et $v = y - \alpha x$ où α est une constante, alors :
   (a) $\frac{\partial f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$
   (b) $\frac{\partial f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
   (c) $\frac{\partial f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\left(\alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$
   (d) $\frac{\partial f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

(e) Aucune des réponses précédentes

16. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^4 \end{pmatrix}$ où $\alpha \neq 1$ est l'une des racines cubiques de 1. Alors :
   (a) $M^{-1}(\alpha) = M\left(\frac{1}{\alpha}\right)$
   (b) $M^2(\alpha) = M^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)$
   (c) $M^{-1}(\alpha) = M\left(\frac{1}{\alpha}\right)$
   (d) $3M^{-1}(\alpha) = M\left(\frac{1}{\alpha}\right)$
   (e) Aucune des réponses précédentes

17. Soit $z = x + iy$. On considère la transformation du plan suivante : $M(z) \longmapsto M' \left(z' = e\right.$
   Alors, le domaine du plan défini par $x \leq 0$ a pour image :
   (a) le plan défini par $y' \leq 0$
   (b) le plan défini par $x' \leq 0$
   (c) le disque de rayon $R = e$
   (d) le cercle de rayon $R = e$
   (e) Aucune des réponses précédentes

18. Soit $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$. Alors, le parallélépipède de côtés $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$
   pour volume :
   (a) 15
   (b) 25
   (c) 10
   (d) 20
   (e) Aucune des réponses précédentes

19. Soit $J_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin t}{(t^2 + x^2)^n} dt$ une fonction d'une variable réelle où $n > 1$ est nombre ent
   naturel. Alors :
   (a) $J_n(x) + 2n(n+1)J_{n+1}(x) = 0$
   (b) $J_n(x) + 2n(n+1)J_{n+1}(x) = 4n(n+1)x^2 J_{n+2}(x)$
   (c) $J_{n+1}(x) + 4n(n+1)J_{n+2}(x) = 0$
   (d) $J_{n+1}(x) + 4n(n+1)J_n(x) = 4n(n+1)x^2 J_{n+2}(x)$
   (e) Aucune des réponses précédentes

20. La fonction $g(x, y) = (ax + by + c)^2 - x^2 - y^2$ est harmonique si
   (a) $a^2 + b^2 = 2$
   (b) $a^2 + b^2 = 4$
   (c) $a = 2b$
   (d) $b = 2a$
   (e) Aucune des réponses précédentes

21. Soit $f(x,y) = x^3 + 3y - y^3 - x$ une fonction à deux variables. Alors, les points critiques de f appartiennent :
   (a) au cercle de centre $O(0,0)$ et rayon $\sqrt{2}$
   (b) à la droite d'équation $x - y = 0$
   (c) la droite d'équation $x + y = 0$
   (d) au cercle de centre $O(0,0)$ et rayon 2
   (e) Aucune des réponses précédentes

22. On considère le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}$. Alors :
   (a) $\Delta = \sum_{i<j}(x_i - x_j)(x_i^2 - x_j^2)$
   (b) $\Delta = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$
   (c) $\Delta = \prod_{i\neq j}(x_j - x_i)$
   (d) $\Delta = \sum_{i\neq j}(x_i - x_j)(x_i^2 - x_j^2)$
   (e) Aucune des réponses précédentes

23. Soit $J = \iint_V f(x,y,z)dxdydz$ où $f(x,y,z) = z$ est une fonction continue dans la sphère V de centre $O(x,y,z)$ et de rayon r. Alors :
   (a) $J = 0$
   (b) $J = 1$
   (c) $J = \pi r^3$
   (d) $J = \pi r^4$
   (e) Aucune des réponses précédentes

PARTIE II : Questions 24 à 29

Soit H un groupe fini non réduit à l'élément neutre, $Z(H)$ son centre. Soit α un automorphisme de H.

24. On veut montrer que le centre de H est stable par automorphisme de H
   (a) Il suffit de montrer que si z est un élément de $Z(H)$ et h un élément de H, alors, $h\alpha(z) = \alpha(z)h$.
   (b) Il suffit de montrer que si z est un élément de $Z(H)$ et h un élément de H, alors, $z\alpha(h) = \alpha(h)z$.
   (c) Il suffit de montrer que si z est un élément de $Z(H)$ et h un élément de H, alors $h.H = H.h$.
   (d) Il suffit de montrer que si z est un élément de $Z(H)$ et h un élément de H, alors $\alpha(zh) = \alpha(hz)$.
   (e) Aucune des réponses précédentes

25. On veut montrer qu'il existe un élément de H d'ordre un nombre premier.

(a) Si p est un nombre premier divisant l'ordre de H, alors on conclut par le théorème de Cauchy.
(b) Si p est un nombre divisant l'ordre de H, alors on conclut par le théorème de Poincaré.
(c) Si p est un nombre premier divisant l'ordre de H, alors on conclue par le théorème de Poincaré-Cauchy.
(d) Ceci ne marche que lorsque l'ordre de H est premier.
(e) Aucune des réponses précédentes

26. Soit G un groupe opérant fidèlement sur H tel que pour tout élément g de G, la permutation $h \to g.h$ est un automorphisme de H. On suppose que G opère transitivement sur $H \setminus \{1\}$. On veut montrer que tous les éléments de H, différents de 1, sont d'ordre une puissance non nulle d'un nombre premier p. Soit φ l'homomorphisme de G dans $Aut(G)$ (ensemble des automorphismes de G), associé à l'opération de G sur H.
    (a) Il suffit de vérifier que :
        — si g appartient à G, alors $x^p = (\varphi_g(h))^p = \varphi_g(h^p) = \varphi_g(1) = 1$,
        — si $x^m = 1$, alors, $\varphi_g(h^m) = 1 = \varphi_g(1)$
    (b) Il suffit de vérifier que si g appartient à G, alors $x^p = (\varphi_g(h))^p = \varphi_g(h^p) = \varphi_g(1) = 1$ bien que l'implication $(x^m = 1 \Rightarrow \varphi_g(h^m) = 1 = \varphi_g(1))$ ne soit pas vraie.
    (c) Il suffit de vérifier que si $x^m = 1$, alors, $\varphi_g(h^m) = 1 = \varphi_g(1)$ bien que l'implication (g appartient à $G \Rightarrow x^p = (\varphi_g(h))^p = \varphi_g(h^p) = \varphi_g(1) = 1$) ne soit pas vraie.
    (d) Il suffit de vérifier que si $x^m = 1$, alors, $\varphi_g(h^m) = 1 = \varphi_g(1)$ bien que l'implication (g appartient à $G \Rightarrow x^p = (\varphi_g(h))^p = \varphi_g(h^p) = \varphi_g(m) = 1$) ne soit pas vraie.
    (e) Aucune des réponses précédentes

27. On veut montrer que H est un groupe abélien. Il suffit de montrer que :
    (a) $H \subset Z(H)$
    (b) $Z(H) \subset H$
    (c) $H = Z(H)$
    (d) $H = Z(G)$
    (e) Aucune des réponses précédentes

28. On suppose qu'il existe un élément x de $H \setminus \{1\}$ d'ordre strictement supérieur à 2. Alors :
    (a) x et x^{-1} sont différents et sont les seuls éléments de $H \setminus \{1\}$.
    (b) $x = x^{-1}$
    (c) $N = \{1, x, x^{-1}$ est d'ordre 2
    (d) $N = \{1, x, x^{-1}$ est d'ordre 3
    (e) Aucune des réponses précédentes

29. On suppose que G opère transitivement sur $H \setminus \{1\}$
    (a) $H \setminus \{1\}$ possède au moins 4 éléments distincts et H est donc d'ordre supérieur ou égal à 5.
    (b) $H \setminus \{1\}$ possède exactement 4 éléments distincts et H est donc d'ordre 4.
    (c) $H \setminus \{1\}$ possède moins de 4 éléments distincts et H est donc d'ordre supérieur à 5.
    (d) $H \setminus \{1\}$ possède moins de 5 éléments distincts et H est donc d'ordre supérieur à 6.
    (e) Aucune des réponses précédentes

PARTIE III : Questions 30 à 32

A l'ouverture, le rayon boulangerie d'un magasin en libre service contient cent baguettes dont x seulement sont fraîches, les autres étant les invendus de la veille.

30. Madame N est la première cliente de la journée. Elle choisit au hasard k baguettes. On veut calculer la probabilité $p_k(m)$ que m d'entre elles soient fraîches.

    (a) Il s'agit d'une loi hypergéométrique $H(k, x, 100)$, et $p_k(m) = \dfrac{C_x^m C_{100-x}^{k-m}}{C_{100}^k}$.

    (b) $p_k(m) = \dfrac{C_x^m C_{100-x}^{k-m}}{C_{100}^k}$ mais la loi n'est pas hypergéométrique

    (c) $p_k(m) = \dfrac{C_x^m C_{100-x}^{k-m}}{C_{100}^k}$.

    (d) $p_k(m) = \dfrac{C_x^m C_{100-x}^{k-m}}{C_{100-x}^k}$.

    (e) Aucune des réponses précédentes

31. Si Madame N n'est pas la première cliente de la journée et si n baguettes ($n \leq 100 - k$) ont déjà été achetées (toutes choisie au hasard) avant son arrivée, la probabilité $p'_k(m)$ que madame N obtienne m baguettes fraîches est :

    (a) $p'_k(m) = p_k(m)$

    (b) $p'_k(m) \neq p_k(m)$

    (c) $p'_k(m)$ n'existe pas.

    (d) $p'_k(m) \leq p_k(m)$

    (e) Aucune des réponses précédentes

32. Les clients du magasin ne connaissent évidemment pas le nombre x (ils le supposent nul !). En fait, ce nombre est aléatoire : il dépend chaque jour du nombre aléatoire de baguettes vendues la veille. Pour tout entier i, on note A_i l'évènement : « i des 100 baguettes que contient le rayon à l'ouverture sont fraîches ». La probabilité $p_1(0)$ d'avoir du pain rassis quand on achète une seule baguette est :

    (a) $p_1(0) = 1 - \dfrac{1}{100}\displaystyle\sum_{i=0}^{100} ip(A_i)$

    (b) $p_1(0) = \dfrac{1}{100}\displaystyle\sum_{i=0}^{100} ip(A_i)$

    (c) $p_1(0) = 1 - \dfrac{1}{100}\displaystyle\sum_{i=3}^{100} ip(A_i)$

    (d) $p_1(0) \leq 1 - \dfrac{1}{100}\displaystyle\sum_{i=0}^{100} ip(A_i)$

    (e) Aucune des réponses précédentes

PARTIE III : Questions 33 à 36

On donne l'équation différentielle scalaire suivante : $\frac{d^2x}{dt^2} - \epsilon x + x^3 = 0$ (1), où ϵ est un nomb réel.

33. On veut déterminer les points fixes de l'équation (1) dans le plan des phases $\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$.
   (a) L'équation admet un point fixe unique $(0,0)$ si $\epsilon \leq 0$, et trois points fixes $(0,0)$, $(\pm\sqrt{\epsilon}, 0)$ si $\epsilon > 0$.
   (b) L'équation admet un point fixe unique $(0,0)$ si $\epsilon > 0$, et trois points fixes $(0,0)$, $\left(\pm\sqrt{-\epsilon}, 0\right)$ si $\epsilon \leq 0$.
   (c) L'équation admet deux points fixes $(0,0)$ et $\left(\sqrt{-\epsilon}, 0\right)$ si $\epsilon \leq 0$, et deux points fixes $(0,0)$, $(-\sqrt{\epsilon}, 0)$, si $\epsilon > 0$.
   (d) L'équation admet deux points fixes $(0,0)$ et $\left(\sqrt{-\epsilon}, 0\right)$ si $\epsilon \leq -1$, et deux points fixes $(0,0)$, $(-\sqrt{\epsilon}, 0)$, si $\epsilon > 1$.
   (e) Aucune des réponses précédentes

34. On veut déterminer la nature de chaque point fixe lorsqu'il existe.
   (a) $(0,0)$ est un point col (instable) si $\epsilon > 0$ et un point centre si $\epsilon < 0$. Les points $(\sqrt{\epsilon}, 0)$ et $(-\sqrt{\epsilon}, 0)$ sont de type centre.
   (b) $(0,0)$ est un point col (instable) si $\epsilon > 0$ et un point centre si $\epsilon < 0$. Les points $\left(\sqrt{-\epsilon}, 0\right)$ et $\left(-\sqrt{-\epsilon}, 0\right)$ sont de type centre.
   (c) $(0,0)$ est un nœud stable si $\epsilon > 0$ et un nœud instable $\epsilon \leq 0$. Le point $\left(\sqrt{-\epsilon}, 0\right)$ est de type foyer et $(-\sqrt{\epsilon}, 0)$ sont de type centre.
   (d) $(0,0)$ est un nœud stable si $\epsilon > 0$ et un nœud instable $\epsilon \leq -1$. Le point $\left(\sqrt{-\epsilon}, 0\right)$ est de type foyer et $(-\sqrt{\epsilon}, 0)$ sont de type centre.
   (e) Aucune des réponses précédentes

35. On veut étudier l'existence des solutions périodiques de (1)
   (a) L'équation admet des solutions périodiques pour toute solutions de condition initiale $(a, 0)$, avec $\epsilon < 0$.
   (b) L'équation admet des solutions périodiques pour toute solutions de condition initiale $(-a, 0)$, avec $\epsilon < 0$.
   (c) L'équation admet des solutions périodiques pour toute solutions de condition initiale $(a, 0)$, avec $\epsilon > 0$.
   (d) L'équation admet des solutions périodiques pour toute solutions de condition initiale $(a, 0)$, avec $\epsilon > 1$.
   (e) Aucune des réponses précédentes

36. On veut déterminer une expression approchée de leur période.
   (a) La période d'une solution est égale à deux fois le temps mis pour aller de $(a, 0)$ à $(-a, 0)$ soit $T = 2\left|\int_{-a}^{a}\left[\frac{(a^2-\zeta^2)(a^2+\zeta^2-2\epsilon)}{2}\right]^{-\frac{1}{2}} d\zeta\right|$
   (b) La période d'une solution est égale à deux fois le temps mis pour aller de $(a, 0)$ à $(-a, 0)$ soit $T = 2\left|\int_{-a}^{a}\left[\frac{(a^2-2\zeta^2)(a^2+\zeta^2-2\epsilon)}{2}\right]^{-\frac{1}{2}} d\zeta\right|$

(c) La période d'une solution est supérieure à deux fois le temps mis pour aller de $(a,0)$ à $(-a,0)$, soit $T = 2\left|\int_{-a}^{a}\left[\frac{(a^2-2\zeta^2)(a^2+\zeta^2-2\epsilon)}{2}\right]^{-\frac{1}{2}} d\zeta\right|$

(d) La période d'une solution est inférieure à deux fois le temps mis pour aller de $(a,0)$ à $(-a,0)$, soit $T = 2\left|\int_{-a}^{a}\left[\frac{(a^2-2\zeta^2)(a^2+\zeta^2-2\epsilon)}{2}\right]^{-\frac{1}{2}} d\zeta\right|$

(e) Aucune des réponses précédentes

PARTIE III : Questions 37 à 40

On considère la forme différentielle de $\mathbb{R}^2$ suivante $\omega = -ydx + xdy$

37. On veut montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant $\omega = df$.

(a) L'existence de f entrainerait $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$, ce qui conduit à une absurdité.

(b) L'existence de f entrainerait $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x$, ce qui conduit à une absurdité.

(c) L'existence de f entrainerait $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x$, ce qui conduit à une absurdité.

(d) L'existence de f entrainerait $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq -y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x$, ce qui conduit à une absurdité.

(e) Aucune des réponses précédentes

Soient $u_1 = \left\{(r,\theta)/r > 0, \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\right\}, \quad u_2 = \{(x,y), x \neq 0 \text{ ou } y > 0\}$ et $\varphi : u_1 \to u_2$, $(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calculer $\varphi * \omega$.

(a) $\varphi * \omega = r\cos\theta\,(\sin\theta dr + r\cos\theta dr) - r\sin\theta\,(\cos\theta dr - r\sin\theta dr)$

(b) $\varphi * \omega = 2r\cos\theta\,(\sin\theta dr + r\cos\theta dr) - 2r\sin\theta\,(\cos\theta dr - r\sin\theta dr)$

(c) $\varphi * \omega = -r^2 d\theta$

(d) $\varphi * \omega = -r^2 d\omega$

(e) Aucune des réponses précédentes

38. Soit h une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe une application f de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que sur U, $\frac{\omega}{h} = df$.

(a) L'application h vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) - 2h(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in U$$

(b) L'application h vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$x\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) - 2h(x,y) = 3, \quad \forall (x,y) \in U$$

(c) L'application h vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$y\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) - 2h(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in U$$

(d) L'application h vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$y\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + 2x\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) - 3h(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in U$$

(e) Aucune des réponses précédentes

39. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $g(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy$. Soit U le sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ tel que $U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\right\}$.

(a) La forme différentielle $\dfrac{\omega}{g}$ est de classe C^1 sur U, vérifie l'équation $x\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) - 2h(x,y) = 0$ et les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $\dfrac{\omega}{g} = df$ sont de la forme $f(x,y) = -\operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{x}{y}\right) + cste$

(b) La forme différentielle $\dfrac{\omega}{g}$ est de classe C^2 sur U, vérifie l'équation $x\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) - 2h(x,y) = 0$ et les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $\dfrac{\omega}{g} = df$ sont de la forme $f(x,y) = -x\operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{x}{y}\right) + cste$

(c) La forme différentielle $\dfrac{\omega}{g}$ est de classe C^1 sur U, vérifie l'équation $x\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) - 2h(x,y) = 0$ et les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $\dfrac{\omega}{g} = df$ sont de la forme $f(x,y) = -x\operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{x}{y}\right) - y\operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{x}{y}\right) + cste$

(d) La forme différentielle $\dfrac{\omega}{g}$ est de classe C^1 sur U, vérifie l'équation $x\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) - 2h(x,y) = 0$ et les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $\dfrac{\omega}{g} = df$ sont de la forme $f(x,y) = -x\operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{y}{x}\right) - y\operatorname{Arctan}\left(1 + \frac{x}{y}\right) + cste$

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2015

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 (Questions 1 à 5)

1. Soit P une probabilité sur l'univers $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. On définit sur Ω deux variables aléatoires réelles par $X(k) = \frac{1}{24}(k^2 - 2k)(-k^2 + 8k + 17) + 1$, $Y(k) = k^2(5k^2 - 17)$. La v.a X suit une loi binomiale : $X \to B(2, \frac{1}{2})$ et Y une loi uniforme $Y \to U(-12, 0, 12)$. On note $p_k = p(k), k \in \Omega$

   (a) **Q1**. Calculer p_{-1}, p_0

   i. $p(X = 2) = p_{-1} = \frac{1}{4}$, $p(Y = 0) = p_0 = \frac{1}{3}$

   ii. $p(X = 2) = p_{-1} = \frac{1}{2}$, $p(Y = 0) = p_0 = \frac{1}{5}$

   iii. $p(X = 2) = p_{-1} = \frac{1}{2}$, $p(Y = 0) = p_0 = \frac{1}{8}$

   iv. $p(X = 2) = p_{-1} = \frac{1}{2}$, $p(Y = 0) = p_0 = \frac{1}{7}$

   (b) **Q2**. En déduire p_1, p_2

   i. $p_1 = \frac{1}{7}, p_2 = \frac{1}{6}$

   ii. $p_1 = \frac{1}{7}, p_2 = \frac{1}{4}$

   iii. $p_1 = \frac{1}{12}, p_2 = \frac{1}{6}$

   iv. $p_1 = \frac{1}{7}, p_2 = \frac{1}{8}$

   (c) **Q3**. Calculer la moyenne m de la loi de probabilité P

   i. $m = -\frac{1}{9}$

   ii. $m = -\frac{1}{4}$

   iii. $m = -\frac{1}{5}$

   iv. $m = -\frac{1}{6}$

2. Soit la variable aléatoire S suivant une loi binomiale de paramètres n, a : $S \to B(n, a)$.

   (a) **Q4**. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $U = S(S-1)$

   i. $E(U) = n^2(n-1)a^2$

   ii. $E(U) = n(n-1)a^2$

   iii. $E(U) = n(n^2-1)a^2$

   iv. $E(U) = n(n-1)a$

   (b) **Q5**. En déduire l'espérance mathématique de la variable aléatoire $V = S^2$

   i. $E(U) = (na)^2 + n^2a(1-a)$

   ii. $E(U) = (na)^2 + na(1-a^2)$

   iii. $E(U) = (na)^2 + na(1-a)$

   iv. $E(U) = na^2 + na(1-a)$

Exercice 2 (Questions 6 à 10)

Soit une fonction F définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \leq -2, \\ a(x-b)^2 \; si \; x \in]-2,0[, \\ cx+d \; si \; x \in]0,1[, \\ e \; si \; x > 1 \end{cases}$$

1. **Q6**. Etablir toutes les conditions que doivent vérifiées les constantes a,b,c,d,e pour que F [...] la fonction de répartition d'une variable aléatoire absolue X
   (a) $e = 1, c \geq 0, a \geq 0, a(b-2)^2 = 0, d = ab^2, c+d = 1$
   (b) $e = 1, c \geq 0, a \geq 0, a(b-2)^2 = 0, 2d = ab^2, c+d = 1$
   (c) $e = 1, c \geq 0, a \geq 0, a(b-2)^2 = 0, 2d = ab^2, 2c+d = 1$
   (d) $e = 1, c \geq 0, a \geq 0, a(b-2)^2 = 0, 2d = ab^2, c+2d = 1$
   (e) Aucune des réponses précédentes
2. **Q7**. On suppose que F est la fonction de répartition de X, une variable aléatoire réelle abs[...] ment continue (et donc que les conditions établies à la questions précédentes sont vérifi[...]. On suppose que $p(X \leq -1) = 0$. En déduire les valeurs des réels a,b,c,d,e.
   (a) $a = 2$, b quelconque, $c = 1, d = 0, e = 1$
   (b) $a = 2$, b quelconque, $c = 1, d = 3, e = 1$
   (c) $a = 0$, b quelconque, $c = 1, d = 0, e = 1$
   (d) $a = 2, b = 4, c = 1, d = 0, e = 1$
   (e) Aucune des réponses précédentes
3. **Q8**. A quelle loi classique la fonction ainsi obtenue correspond elle ? Justifier.
   (a) La fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,2]$
   (b) La fonction de répartition d'une loi Binomiale
   (c) La fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1]$
   (d) La fonction de répartition d'une loi exponentielle sur $[0,1]$
   (e) Aucune des réponses précédentes
4. **Q9**. On suppose maintenant que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire con[...] nue (et donc que les conditions établies à la première question sont vérifiées). On suppose plus que $p\left(Y \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{5}{8}$. En déduire dans ce cas les valeurs des réels a,b,c,d,e
   (a) $a = \frac{1}{8}, b = 2, c = d\frac{1}{3}, e = 1$
   (b) $a = \frac{1}{8}, b = 4, c = d\frac{1}{3}, e = 1$
   (c) $a = \frac{1}{3}, b = 4, c = d\frac{1}{3}, e = 1$
   (d) $a = \frac{1}{8}, b = 2, c = d\frac{1}{2}, e = 1$
   (e) Aucune des réponses précédentes
5. **Q10**. Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ et la variance $V(Y)$
   (a) $E(Y) = -\frac{1}{6}, V(Y) = \frac{1}{14}$
   (b) $E(Y) = -\frac{1}{12}, V(Y) = \frac{71}{144}$
   (c) $E(Y) = -\frac{1}{5}, V(Y) = \frac{7}{4}$
   (d) $E(Y) = -\frac{1}{2}, V(Y) = \frac{1}{84}$
   (e) Aucune des réponses précédentes

Exercice 3 (Questions 11 à 14)

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}c$ une fonction entière et $a \in \mathbb{C}$, où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes

1. **Q11**. Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$ et la variance $V(Y)$
   (a) $za(z-a)^2$ est identiquement nulle, la fonction $g : za\frac{f(z)}{(z-a)^2}$ est un élément du corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$
   (b) $za(z-a)^2$ n'est pas identiquement nulle, la fonction $g : za\frac{f(z)}{(z-a)^2}$ est un élément du corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$
   (c) $za(z-a)^2$ n'est pas identiquement nulle, la fonction $g : za\frac{f(z)}{(z-a)^2}$ est un élément du corps des fonctions intégrables sur $\mathbb{C}$
   (d) $za(z-a)^2$ n'est pas identiquement nulle, la fonction $g : za\frac{f(z)}{(z-a)^2}$ est un élément du corps des fonctions dérivables sur $\mathbb{C}$
   (e) Aucune des réponses précédentes
2. **Q12**. Déterminer le résidu de g en ses pôles
   (a) a est un pôle de g, son résidu est donc $f'(a)$
   (b) a est un pôle de g, son résidu est donc $f''(a)$
   (c) a est un pôle de g, son résidu est donc $\frac{f'(a)}{2}$
   (d) a est un pôle de g, son résidu est donc $f'(a)$
   (e) Aucune des réponses précédentes
3. **Q13**. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $R > |a|$. En majorant $|\int_{\gamma_R} g(z)\,dz|$ où γ_R est le cercle de centre O et de rayon R, donner le lien avec la démonstration du théorème de Liouville.
   (a) M est un majorant de $|f|$ et pour tout $a \in \mathbb{C}$, pour tout $R > |a|$, $|f''(a)| \leq R\frac{M}{(R-|a|)^2}$. En faisant tendre R vers l'infini, on trouve $f''(a) = 0$. Puisque cela a lieu pour tout a, la fonction f est nulle sur l'ouvert connexe C
   (b) M est un majorant de $|f|$ et pour tout $a \in \mathbb{C}$, pour tout $R > |a|$, $|f''(a)| \leq R\frac{M}{(R^2-|a|)^2}$. En faisant tendre R vers l'infini, on trouve $f''(a) = 0$. Puisque cela a lieu pour tout a, la fonction f est nulle sur l'ouvert connexe C
   (c) M est un majorant de $|f|$ et pour tout $a \in \mathbb{C}$, pour tout $R > |a|$, $|f'(a)| \leq R\frac{M}{(R-|a|)^2}$. En faisant tendre R vers l'infini, on trouve $f'(a) = 0$. Puisque cela a lieu pour tout a, la fonction f est nulle sur l'ouvert connexe C
   (d)
   (e) M est un majorant de $|f|$ et pour tout $a \in \mathbb{C}$, pour tout $R > |a|$, $|f'(a)| \leq R\frac{M}{(R^2-|a|)^2}$. En faisant tendre R vers l'infini, on trouve $f'(a) = 0$. Puisque cela a lieu pour tout a, la fonction f est nulle sur l'ouvert connexe C
   (f) Aucune des réponses précédentes
4. **Q14**. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(t-a)^2}\,dt$
   (a) Pour $x \geq 0$ on a $I(x,a) = 2i\pi f''(a) = -2\pi x e^{-iax}$ si $\Im(a) > 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) < 0$. Par un changement de variable de t en $-t$, on trouve $I(x,a) = I(-x,-a)$. Donc si $x \leq 0$, on a $I(x,a) = 2\pi x e^{iax}$ si$\Im(a) < 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) > 0$
   (b) Pour $x \geq 0$ on a $I(x,a) = 2i\pi f''(a) = -2\pi x e^{-iax}$ si $\Im(a) > 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) < 0$. Par un changement de variable de t en $-t$, on trouve $I(x,a) = I(-x,-a)$. Donc si $x \leq 0$, on a $I(x,a) = 2\pi x e^{iax}$ si$\Im(a) > 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) < 0$

(c) Pour $x \geq 0$ on a $I(x,a) = 2i\pi f''(a) = -2\pi x e^{-iax}$ si $\Im(a) < 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) >$
Par un changement de variable de t en $-t$, on trouve $I(x,a) = I(-x,-a)$. Donc si $x \leq$
on a $I(x,a) = 2\pi x e^{iax}$ si$\Im(a) < 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) > 0$

(d) Pour $x \geq 0$ on a $I(x,a) = 2i\pi f'(a) = -2\pi x e^{-iax}$ si $\Im(a) > 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) <$
Par un changement de variable de t en $-t$, on trouve $I(x,a) = I(-x,-a)$. Donc si $x \leq$
on a $I(x,a) = 2\pi x e^{iax}$ si$\Im(a) < 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) > 0$

(e) Aucune des réponses précédentes

5. **Q14**. Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(t-a)^2}\,dt$

(a) Pour $x \geq 0$ on a $I(x,a) = 2i\pi f''(a) = -2\pi x e^{-iax}$ si $\Im(a) > 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) <$
Par un changement de variable de t en $-t$, on trouve $I(x,a) = I(-x,-a)$. Donc si $x \leq$
on a $I(x,a) = 2\pi x e^{iax}$ si$\Im(a) < 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) > 0$

(b) Pour $x \geq 0$ on a $I(x,a) = 2i\pi f''(a) = -2\pi x e^{-iax}$ si $\Im(a) > 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) <$
Par un changement de variable de t en $-t$, on trouve $I(x,a) = I(-x,-a)$. Donc si $x \leq$
on a $I(x,a) = 2\pi x e^{iax}$ si$\Im(a) > 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) < 0$

(c) Pour $x \geq 0$ on a $I(x,a) = 2i\pi f''(a) = -2\pi x e^{-iax}$ si $\Im(a) < 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) >$
Par un changement de variable de t en $-t$, on trouve $I(x,a) = I(-x,-a)$. Donc si $x \leq$
on a $I(x,a) = 2\pi x e^{iax}$ si$\Im(a) < 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) > 0$

(d) Pour $x \geq 0$ on a $I(x,a) = 2i\pi f'(a) = -2\pi x e^{-iax}$ si $\Im(a) > 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) <$
Par un changement de variable de t en $-t$, on trouve $I(x,a) = I(-x,-a)$. Donc si $x \leq$
on a $I(x,a) = 2\pi x e^{iax}$ si$\Im(a) < 0$ et $I(x,a) = 0$ si $\Im(a) > 0$

(e) Aucune des réponses précédentes

Exercice 4(Questions 15 à 17)

Soit $F(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \ln(1 + x^2 - 2x\cos\theta)\,d\theta$

6. **Q15**. Montrer que F est continue, dérivable sur $]-1,1[$ et calculer $F'(x)$

(a) La fonction de deux variables $f(\theta, x) = \ln(1 + x^2 - 2x\cos\theta)$ est continue sur le rectang
Δ défini par les inégalités : $|\theta| < \pi, |x| < 1$ car le terme $1 + x^2 - 2x\cos\theta$ est positif et n
s'annule pas sur cet intervalle. De plus, la dérivée partielle de f par rapport a x vaut
$\frac{\partial}{\partial x} f(\theta, x) = \frac{2(x^2 - \cos\theta)}{1 + x^2 - 2x^2\cos\theta}$. Cette fonction est également continue sur Δ. La fonction F e
donc dérivable sur $]-1,1[$ et

$$F'(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial}{\partial x} f(\theta, x)\,d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2(x^2 - \cos\theta)}{1 + x^2 - 2x^2\cos\theta}\,d\theta$$

(b) La fonction de deux variables $f(\theta, x) = \ln(1 + x^2 - 2x\cos\theta)$ est continue sur le rectang
Δ défini par les inégalités : $|\theta| < \pi, |x| < 1$ car le terme $1 + x^2 - 2x\cos\theta$ est positif et n
s'annule pas sur cet intervalle. De plus, la dérivée partielle de f par rapport a x vaut
$\frac{\partial}{\partial x} f(\theta, x) = \frac{2(x - \cos\theta)}{1 + x^2 - 2x\cos\theta}$. Cette fonction est également continue sur Δ. La fonction F e
donc dérivable sur $]-1,1[$ et

$$F'(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial}{\partial x} f(\theta, x)\,d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2(x - \cos\theta)}{1 + x^2 - 2x\cos\theta}\,d\theta$$

(c) La fonction de deux variables $f(\theta, x) = \ln(1 + x^2 - 2x\cos\theta)$ est continue sur le rectang
Δ défini par les inégalités : $|\theta| < \pi, |x| < 1$ car le terme $1 + x^2 - 2x\cos\theta$ est positif et n

s'annule pas sur cet intervalle. De plus, la dérivée partielle de f par rapport a x vaut : $\frac{\partial}{\partial x} f(\theta, x) = \frac{2(x-\cos\theta)}{1+x^2-2x\cos\theta}$. Cette fonction est également continue sur Δ. La fonction F est donc dérivable sur $]-1,1[$ et

$$F'(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\theta, x)\, d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2(x-\cos\theta)}{1+x^2-2x\cos\theta}\, d\theta$$

(d) La fonction de deux variables $f(\theta, x) = \ln(1+x^2-2x\cos\theta)$ est continue sur le rectangle Δ défini par les inégalités : $|\theta| < \pi, |x| < 1$ car le terme $1+x^2-2x\cos\theta$ est positif et ne s'annule pas sur cet intervalle. De plus, la dérivée partielle de f par rapport a x vaut : $\frac{\partial}{\partial x} f(\theta, x) = \frac{2(x-\cos\theta)}{1+x^2-2x\cos\theta}$. Cette fonction est également continue sur Δ. La fonction F est donc dérivable sur $]-1,1[$ et

$$F'(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\theta, x)\, d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2(x-\cos\theta)}{1+x^2-2x\cos\theta}\, d\theta$$

(e) Aucune des réponses précédentes

7. **Q16**. Calculer F' sur $]-1,1[$ et vérifier que $F'(x) = 0$ pour $x \neq 0$. Par continuité on obtient $F'(x) = 0$ pour tout $x \in]-1,1[$

(a) On suppose $|x| < 1$. Le changement de variable $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ donne

$$F'(x) = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{(x+1)^2(x-1)}{2x^2}\frac{1}{t^2(x+1)^2+(x-1)^2} - \frac{x-1}{2x^2}\frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

D'où

$$F'(x) = \frac{4\pi}{x+1}\left(1 + \frac{(x+1)^2(x-1)}{2x^2}\frac{1}{(x+1)^2}\frac{1+x}{1-x} - \frac{x-1}{2x^2}\right) = \frac{4\pi}{x+1}\left(1 - \frac{x+1}{2x^2} - \frac{x-1}{2x^2}\right)$$

Donc $F'(x) = 0$ pour $x \neq 0$. Par continuité on obtient $F'(x) = 0$ pour tout $x \in]-1,1[$

(b) On suppose $|x| < 1$. Le changement de variable $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ donne

$$F'(x) = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{(x+1)^2(x-1)}{2t}\frac{1}{t^2(x+1)^2+(x-1)^2} - \frac{x-1}{2t}\frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

D'où

$$F'(x) = \frac{4\pi}{x+1}\left(1 + \frac{(x+1)^2(x-1)}{2t}\frac{1}{(x+1)^2}\frac{1+x}{1-x} - \frac{x-1}{2t}\right) = \frac{4\pi}{x+1}\left(1 - \frac{x+1}{2t} - \frac{x-1}{2t}\right)$$

Donc $F'(x) = 0$ pour $x \neq 0$. Par continuité on obtient $F'(x) = 0$ pour tout $x \in]-1,1[$

(c) On suppose $|x| < 1$. Le changement de variable $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ donne

$$F'(x) = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{(x+1)^2(x-1)}{2x}\frac{1}{t^2(x+1)^2+(x-1)^2} - \frac{x-1}{2x}\frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

D'où

$$F'(x) = \frac{4\pi}{x+1}\left(1 + \frac{(x+1)^2(x-1)}{2x}\frac{1}{(x+1)^2}\frac{1+x}{1-x} - \frac{x-1}{2x}\right) = \frac{4\pi}{x+1}\left(1 - \frac{x+1}{2x} - \frac{x-1}{2x}\right)$$

Donc $F'(x) = 0$ pour $x \neq 0$. Par continuité on obtient $F'(x) = 0$ pour tout $x \in]-1,1[$

(d) On suppose $|x| < 1$. Le changement de variable $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ donne

$$F'(x) = 4\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{(x+1)^2(x-1)}{2x}\frac{1}{t^2(x+1)^2+(x-1)^2} - \frac{x-1}{2x}\frac{1}{1+t^2}\right)$$

D'où

$$F'(x) = \frac{4\pi}{x^2+1}\left(1 + \frac{(x+1)^2(x-1)}{2x}\frac{1}{(x+1)^2}\frac{1+x}{1-x} - \frac{x-1}{2x}\right) = \frac{4\pi}{x^2+1}\left(1 - \frac{x+1}{2x} -\right.$$

Donc $F'(x) = 0$ pour $x \neq 0$. Par continuité on obtient $F'(x) = 0$ pour tout $x \in]-1,1[$

(e) Aucune des réponses précédentes

8. **Q17**. En déduire la valeur de F sur l'intervalle $]-1,1[$
   (a) La fonction F est donc constante et par suite $F(x) = F(0) = 0$
   (b) La fonction F est donc constante et par suite $F'(x) = F'(0) = 1$
   (c) La fonction F est donc constante et par suite $F''(x) = F''(0) = 0$
   (d) La fonction F est donc constante et par suite $F(x) = F(0) = 1$
   (e) Aucune des réponses précédentes

Exercice 5(Questions 18 à 22)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f(x) = \int_0^{\pi} \sqrt{|1 - x\cos t|}\, dt$

1. **Q18** Vérifier que f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$
   (a) La fonction $\varphi(t,x) = \sqrt{|1-x\cos t|}$ est continue sur $[0,\pi]$, donc intégrable pour $t \in [0,\pi$
   (b) La fonction $\varphi(t,x) = \sqrt{|1-x\cos t|}$ est continue sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}$, donc intégrable pou $t \in [0,\pi]$
   (c) La fonction $\varphi(t,x) = \sqrt{|1-x\cos t|}$ est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, donc intégrable pour $t \in [0,\frac{\pi}{2}$
   (d) La fonction $\varphi(t,x) = \sqrt{|1-x\cos t|}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc intégrable pour $t \in \mathbb{R}^2$
   (e) Aucune des réponses précédentes
2. **Q19** Vérifier que f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$
   (a) La fonction $\varphi(t,x) = \sqrt{|1-x\cos t|}$ est continue sur $[0,\pi]$, donc intégrable pour $t \in$ $[0,\pi]$. Sa primitive $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
   (b) La fonction $\varphi(t,x) = \sqrt{|1-x\cos t|}$ est continue sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}$, donc intégrable pour $t \in [0,\pi]$. Sa primitive $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
   (c) La fonction $\varphi(t,x) = \sqrt{|1-x\cos t|}$ est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, donc intégrable pour $t \in$ $[0,\frac{\pi}{2}]$. Sa primitive $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
   (d) La fonction $\varphi(t,x) = \sqrt{|1-x\cos t|}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc intégrable pour $t \in \mathbb{R}^2$. Sa primitive $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
   (e) Aucune des réponses précédentes
3. **Q20** Montrer que f est une fonction paire de x
   (a) On calcule $f(-x)$ en posant $u = \pi - t$.

$$f(-x) = \int_0^{\pi}\sqrt{|1+x\cos t|}\,dt = -\int_{\pi}^{0}\sqrt{|1-x\cos u|}\,du = -\int_0^{\pi}\sqrt{|1-x\cos u|}\,du = f(x)$$

(b) On calcule $f(-x)$ en posant $u = \pi - t$.

$$f(-x) = \int_0^\pi \sqrt{|1 + x\cos t|}\, dt = -\int_\pi^0 \sqrt{|1 + x\cos u|}\, du = -\int_0^\pi \sqrt{|1 - x\cos u|}\, du = f(x)$$

(c) On calcule $f(-x)$ en posant $u = \pi - t$.

$$f(-x) = \int_0^\pi \sqrt{|1 + x\cos t|}\, dt = -\int_\pi^0 \sqrt{|1 - x\cos u|}\, du = -\int_0^\pi \sqrt{|1 - x\cos u|}\, d(-u) = f(x)$$

(d) On calcule $f(-x)$ en posant $u = \pi - t$.

$$f(-x) = \int_0^\pi \sqrt{|1 + x\cos t|}\, dt = -\int_\pi^0 \sqrt{|-1 - x\cos u|}\, du = -\int_0^\pi \sqrt{|1 - x\cos u|}\, du = f(x)$$

(e) Aucune des réponses précédentes

4. **Q21** On pose $R(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2\sin t}{\sqrt{|1-x\cos t|}}\right)$. Montrer que f est deux fois dérivable pour $|x| < 1$ et qu'elle vérifie la relation $4x(x^2-1)f''(x) + 4(x^2-1)f'(x) - xf(x) = \int_0^\pi R(t,x)\, dt$

(a) La fonction $\varphi(t,x)$ est 2 fois continûment dérivable en x sur $[0,\pi]\times]-1,1[$. Donc f est bien deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \int_0^\pi \frac{-\cos t}{\sqrt{1-x\cos t}}\, dt$ et $f''(x) = \int_0^\pi \frac{-(\cos t)^2}{4(1-x\cos t)^{\frac{3}{4}}}\, dt$.
On peut alors calculer $4x(x^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x) + 4(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) - x\varphi(t,x) = \frac{-x(\cos^2 t+1)+2\cos t}{(1-x\cos t)^{\frac{3}{4}}}$.
Or on vérifie que $R(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\sin t}{\sqrt{1-x\cos t}}\right) = \frac{-x(\cos^2 t+1)+2\cos t}{(1-x\cos t)^{\frac{3}{4}}}$. D'où l'égalité $4x(x^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x) + 4(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) - x\varphi(t,x) = R(t,x)$ qui implique bien l'égalité cherchée par intégration en t sur $[0,\pi]$.

(b) La fonction $\varphi(t,x)$ est 2 fois continûment dérivable en x sur $[0,\pi]\times]-1,1[$. Donc f est bien deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \int_0^\pi \frac{-\cos t}{\sqrt{1-x\cos t}}\, dt$ et $f''(x) = \int_0^\pi \frac{-(\cos t)^2}{4(1-x\cos t)^{\frac{3}{2}}}\, dt$.
On peut alors calculer $4x(x^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x) + 4(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) - x\varphi(t,x) = \frac{-x(\cos^2 t+1)+2\cos t}{(1-x\cos t)^{\frac{3}{2}}}$.
Or on vérifie que $R(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\sin t}{\sqrt{1-x\cos t}}\right) = \frac{-x(\cos^2 t+1)+2\cos t}{(1-x\cos t)^{\frac{3}{2}}}$. D'où l'égalité $4x(x^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x) + 4(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) - x\varphi(t,x) = R(t,x)$ qui implique bien l'égalité cherchée par intégration en t sur $[0,\pi]$.

(c) La fonction $\varphi(t,x)$ est 2 fois continûment dérivable en x sur $[0,\pi]\times]-1,1[$. Donc f est bien deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \int_0^\pi \frac{-\cos t}{\sqrt{1-x\cos t}}\, dt$ et $f''(x) = \int_0^\pi \frac{-(\cos t)^2}{4(1-x\cos t)^{\frac{3}{2}}}\, dt$.
On peut alors calculer $4x(x^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x) + 4(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) - x\varphi(t,x) = \frac{-x^2(\cos^2 t+1)+2\cos^2 t}{(1-x\cos t)^{\frac{3}{2}}}$.
Or on vérifie que $R(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\sin t}{\sqrt{1-x\cos t}}\right) = \frac{-x^2(\cos^2 t+1)+2\cos^2 t}{(1-x\cos t)^{\frac{3}{2}}}$. D'où l'égalité $4x(x^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x) + 4(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) - x\varphi(t,x) = R(t,x)$ qui implique bien l'égalité cherchée par intégration en t sur $[0,\pi]$.

(d) La fonction $\varphi(t,x)$ est 2 fois continûment dérivable en x sur $[0,\pi]\times]-1,1[$. Donc f est bien deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \int_0^\pi \frac{-\cos t}{\sqrt{1-x\cos t}}\, dt$ et $f''(x) = \int_0^\pi \frac{-(\cos t)^2}{4(1-x\cos t)^{\frac{3}{2}}}\, dt$.
On peut alors calculer $4x(x^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x) + 4(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) - x\varphi(t,x) = \frac{-x^2(\cos^2 t+1)+2\cos^2 t}{(1-x\cos t)^{\frac{3}{4}}}$.
Or on vérifie que $R(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2\sin t}{\sqrt{1-x\cos t}}\right) = \frac{-x^2(\cos^2 t+1)+2\cos^2 t}{(1-x\cos t)^{\frac{3}{4}}}$. D'où l'égalité $4x(x^2-1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(t,x) + 4(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) - x\varphi(t,x) = R(t,x)$ qui implique bien l'égalité cherchée par intégration en t sur $[0,\pi]$.

(e) Aucune des réponses précédentes

5. **Q22**. En déduire que f vérifie une équation différentielle de second ordre que l'on précisera
   (a) Puisque $\int_0^{\pi} R(t,x)\,dt = \left[\frac{2\sin t}{\sqrt{1-\cos t}}\right]_0^{\pi} = 0$, on en déduit bien que f vérifie l'équation différentielle $4x(x^2-1)f''(x)+4(x^2-1)f'(x)-xf(x)=0$
   (b) Puisque $\int_0^{\pi} R(t,x)\,dt = \left[\frac{2\sin t}{\sqrt{-1-\cos^2 t}}\right]_0^{\pi} = 0$, on en déduit bien que f vérifie l'équation différentielle $4x(x^2-1)f''(x)+4(x^2-1)f'(x)-xf(x)=0$
   (c) Puisque $\int_0^{\pi} R(t,x)\,dt = \left[\frac{2\sin t}{\sqrt{-1-\cos t}}\right]_0^{\pi} = 0$, on en déduit bien que f vérifie l'équation différentielle $4x(x^2-1)f''(x)+4(x^2-1)f'(x)-xf(x)=0$
   (d) Puisque $\int_0^{\pi} R(t,x)\,dt = \left[\frac{2\sin^2 t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\right]_0^{\pi} = 0$, on en déduit bien que f vérifie l'équation différentielle $4x(x^2-1)f''(x)+4(x^2-1)f'(x)-xf(x)=0$
   (e) Aucune des réponses précédentes

Exercice 6 (Questions 23 à 26)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}\,dt$

1. **Q23**. Vérifier que f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$
   (a) La fonction $\varphi(t,x) = e^{-x\sin t}$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, donc intégrable sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et sa primitive $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
   (b) La fonction $\varphi(t,x) = e^{-x\sin t}$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times\mathbb{R}$, donc intégrable sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et sa primitive $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
   (c) La fonction $\varphi(t,x) = e^{-x\sin t}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc intégrable sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \right.$ et sa primitive $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
   (d) La fonction $\varphi(t,x) = e^{-x\sin t}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc intégrable sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{4}, \right.$ et sa primitive $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
   (e) Aucune des réponses précédentes

2. **Q24**.Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}\sin t\,dt$
   (a) La fonction $\varphi(t,x)$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, avec $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) = \sin t e^{-x\sin t}$. Donc f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}\sin t\,dt$
   (b) La fonction $\varphi(t,x)$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, avec $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) = \sin t e^{-x\sin t}$. Donc f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}\sin t\,dt$
   (c) La fonction $\varphi(t,x)$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times\mathbb{R}$, avec $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) = -\sin t e^{-x\sin t}$. Donc f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}\sin t\,dt$
   (d) La fonction $\varphi(t,x)$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, avec $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x) = \sin^2 t e^{-x\sin t}$. Donc f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}\sin^2 t\,dt$
   (e) Aucune des réponses précédentes

3. **Q25**.Montrer que f est deux dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie une équation différentielle que l'on précisera

(a) La fonction $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x)$ est continûment dérivable en x sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times\mathbb{R}$. Donc f est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f''(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x\sin^2 t e^{x\sin t}\,dt$. On intègre par parties l'intégrale définissant f', en posant $u=e^{-x\sin t}$, $du=x\cos te^{-x\sin t}$, $dv=-\sin t$, $v=\cos t$, et on obtient $f'(x)=0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x(1-\sin^2 t)e^{-x\sin t}\,dt=xf(x)-xf''(x)$

(b) La fonction $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x)$ est continûment dérivable en x sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Donc f est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f''(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 te^{x\sin t}\,dt$. On intègre par parties l'intégrale définissant f', en posant $u=e^{-x\sin t}$, $du=x\cos te^{-x\sin t}$, $dv=-\sin t$, $v=\cos t$, et on obtient $f'(x)=0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x^2(1-\sin^2 t)e^{-x\sin t}\,dt=x^2f(x)-xf''(x)$

(c) La fonction $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x)$ est continûment dérivable en x sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Donc f est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f''(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 te^{x\sin t}\,dt$. On intègre par parties l'intégrale définissant f', en posant $u=e^{-x\sin t}$, $du=x\cos te^{-x\sin t}$, $dv=-\sin t$, $v=\cos t$, et on obtient $f'(x)=0+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x^2(1-\sin^2 t)e^{-x\sin t}\,dt=2x^2f(x)-xf''(x)$

(d) La fonction $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x)$ est continûment dérivable en x sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Donc f est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f''(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} xt\sin^2 te^{x\sin t}\,dt$. On intègre par parties l'intégrale définissant f', en posant $u=e^{-x\sin t}$, $du=x\cos te^{-x\sin t}$, $dv=-\sin t$, $v=\cos t$, et on obtient $f'(x)=0+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x^2(1-\sin^2 t)te^{-x\sin t}\,dt=x^2f(x)-xf''(x)$

(e) Aucune des réponses précédentes

4. **Q26**. En posant $g(x)=\int_0^{\pi} e^{-x\cos t}\,dt$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction g et en déduire une relation entre f et g.

(a) En suivant les mêmes étapes, on trouve que g vérifie l'équation différentielle : $x^2g''(x)-xg'(x)-x^2g(x)=0$. On en déduit que $f=g$

(b) En suivant les mêmes étapes, on trouve que g vérifie l'équation différentielle : $x^2g''(x)-xg'(x)-x^2g(x)=0$. On en déduit que $f>g$

(c) En suivant les mêmes étapes, on trouve que g vérifie l'équation différentielle : $x^2g''(x)-g'(x)-xg(x)=0$. On en déduit que $f<g$

(d) En suivant les mêmes étapes, on trouve que g vérifie l'équation différentielle : $xg''(x)-g'(x)-xg(x)=0$. On en déduit que $f=g$

(e) Aucune des réponses précédentes

Exercice 7 (Questions 27 à 37)

Soit a un réel strictement positif. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on désigne par u_n la fonction définie pour $x\in[0,+\infty[$ par $u_n=nx^ae^{-nx^2}$

1. **Q27**. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln u_n(x)$ pour $x>0$

(a) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln u_n(x)=-x^3$

(b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln u_n(x)=-\frac{1}{2}x^2$

(c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln u_n(x)=-x^2$

(d) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln u_n(x)=-x^4$

(e) Aucune des réponses précédentes

2. **Q28**. Déduire de la question précédente que pour tout $a > 0$, la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
   (a) Pour $x > 0$ fixé, la série à termes positifs $(u_n(x))$ vérifie $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = e^{x^2} < 1$. On peut donc appliquer le critère de Cauchy : la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge
   (b) Pour $x > 0$ fixé, la série à termes positifs $(u_n(x))$ vérifie $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = xe^{x^2} < 1$. On peut donc appliquer le critère de Cauchy : la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge
   (c) Pour $x > 0$ fixé, la série à termes positifs $(u_n(x))$ vérifie $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = e^{-x^2} < 1$. On peut donc appliquer le critère de Cauchy : la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge
   (d) Pour $x > 0$ fixé, la série à termes positifs $(u_n(x))$ vérifie $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = -x^2e^{-x^2} < 1$. On peut donc appliquer le critère de Cauchy : la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge
   (e) Aucune des réponses précédentes
3. **Q29**. Pour $|z| < 1$, calculer $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$
   (a) Pour $z < 1$, $\frac{z^2}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$
   (b) Pour $z < 1$, $\frac{z}{(1-z^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$
   (c) Pour $z < 1$, $\frac{2-z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$
   (d) Pour $z < 1$, $\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$
   (e) Aucune des réponses précédentes
4. **Q30**. En faisant un changement de variable, en déduire la somme $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
   (a) Posons $z = e^{-x^2}$. On en déduit que pour $x > 0$, $x^a \frac{-e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = s(x)$
   (b) Posons $z = e^{-x^2}$. On en déduit que pour $x > 0$, $x^a \frac{2-e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = s(x)$
   (c) Posons $z = e^{-x^2}$. On en déduit que pour $x > 0$, $x^a \frac{e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = s(x)$
   (d) Posons $z = e^{-x^2}$. On en déduit que pour $x > 0$, $x^{1-a} \frac{e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n = s(x)$
   (e) Aucune des réponses précédentes
5. **Q31**. Calculer $\sup_{x\in[0,+\infty[} u_n(x)$
   (a) Etudions le maximum de (u_n) sur $]0, +\infty[$: $u_n'(x) = n^2x^{a-1}e^{-nx^2}(a - 2nx^2)$. Donc $u_n'(x) = 0 \iff x = x_n = \sqrt{\frac{a}{2n}}$. (u_n) admet donc un maximum au point x_n et $u_n(x_n) = \frac{a^{\frac{a}{2}}}{2^{\frac{a}{2}}n^{\frac{a}{2}-1}}e^{-\frac{a}{2}} = \frac{A}{n^{\frac{a}{2}-1}}$
   (b) Etudions le maximum de u_n sur $]0, +\infty[$: $u_n'(x) = nx^{a-1}e^{-nx^2}(a - 2nx^2)$. Donc $u_n'(x) = 0 \iff x = x_n = \sqrt{\frac{a}{2n}}$. (u_n) admet donc un maximum au point x_n et $u_n(x_n) = \frac{a^{\frac{a}{2}}}{2^{\frac{a}{2}}n^{\frac{a}{2}-1}}e^{-\frac{a}{2}} = \frac{A}{n^{\frac{a}{2}-1}}$
   (c) Etudions le maximum de (u_n) sur $]0, +\infty[$: $u_n'(x) = nx^{a-1}e^{-nx^2}(a - 2n^2x^2)$. Donc $u_n'(x) = 0 \iff x = x_n = \sqrt{\frac{a}{2n^2}}$. (u_n) admet donc un maximum au point x_n et $u_n(x_n) = \frac{a^{\frac{a}{2}}}{2^{\frac{a}{2}}n^{\frac{a}{2}-1}}e^{-\frac{a}{2}} = \frac{A}{n^{\frac{a}{2}-1}}$

(d) Etudions le maximum de (u_n) sur $]0,+\infty[$: $u_n'(x) = nx^{a-1}e^{-nx^2}(3a-2nx^2)$. Donc $u_n'(x) = 0 \iff x = x_n = \sqrt{\frac{a}{2n}}$. (u_n) admet donc un maximum au point x_n et $u_n(x_n) = \frac{a^{\frac{a}{2}}}{2^{\frac{a}{2}}n^{\frac{a}{2}-1}}e^{-\frac{a}{2}} = \frac{A}{n^{\frac{a}{2}-1}}$

(e) Aucune des réponses précédentes

6. **Q32**. En déduire que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $a > 4$.

(a) La série numérique de terme général $\frac{A}{n^{\frac{a}{2}-1}}$ converge si et seulement si $\frac{a}{2} - 1 > 1$; c'est à dire $a > 4$ et on a le résultat.

(b) La série numérique de terme général $\frac{A}{n^{\frac{3a}{2}-1}}$ converge si et seulement si $\frac{3a}{2} - 1 > 1$; c'est à dire $a > 4$ et on a le résultat.

(c) La série numérique de terme général $\frac{nA}{n^{\frac{a}{2}-1}}$ converge si et seulement si $\frac{a}{2} - 1 > 1$; c'est à dire $a > 4$ et on a le résultat.

(d) La série numérique de terme général $\frac{n^2A}{n^{\frac{a}{2}-1}}$ converge si et seulement si $\frac{a}{2} - 1 > 1$; c'est à dire $a > 4$ et on a le résultat.

(e) Aucune des réponses précédentes

7. **Q33**. Soit $a = 4$. On cherche à montrer que dans ce cas, la série de fonctions $u_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$. Trouver un réel $C > 0$ tel que $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq C$, avec $x_N = \sqrt{\frac{2}{N}}$

(a) Pour $a = 4$, la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge normalement sur $]0,+\infty[$. Pour $N \leq n \leq 2N, u_n(x_n) \geq n\left(\frac{2}{N}\right)^2 e^{-\frac{2n}{N}} \geq \frac{4^2}{N}e^{-4}$. D'où $\sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq 4^2e^{-4} = C$

(b) Pour $a = 4$, la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge normalement sur $]0,+\infty[$. Pour $N \leq n \leq 2N, u_n(x_n) \geq n\left(\frac{2}{N}\right)^2 e^{-\frac{2n}{N}} \geq \frac{4}{N}e^{-4}$. D'où $\sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq 4e^{-4} = C$

(c) Pour $a = 4$, la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge normalement sur $]0,+\infty[$. Pour $N \leq n \leq 2N, u_n(x_n) \geq n^2\left(\frac{2}{N^2}\right)^2 e^{-\frac{2n}{N}} \geq \frac{4}{N}e^{-4^N}$. D'où $\sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq 4e^{-4^N} = C$

(d) Pour $a = 4$, la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge normalement sur $]0,+\infty[$. Pour $N \leq n \leq 2N, u_n(x_n) \geq n\left(\frac{2}{N}\right)^2 e^{-\frac{2n}{N}} \geq \frac{4}{N}e^{-4N}$. D'où $\sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq 4e^{-4N} = C$

(e) Aucune des réponses précédentes

8. **Q34**. Dans les mêmes hypothèses qu'à la question 32, en déduire que $\sup_{x\in]0,+\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $N \to +\infty$

(a) On en déduit que $\sup_{x\in]0,+\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x) \leq \sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \leq C$ et donc $\sup_{x\in]0,+\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $N \to +\infty$

(b) On en déduit que $\sup_{x\in]0,+\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x) \geq \sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq C$ et donc $\sup_{x\in]0,+\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $N \to +\infty$

(c) On en déduit que $\sup_{x\in]0,+\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x) \geq \sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N^2) \geq C$ et donc $\sup_{x\in]0,+\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $N \to +\infty$

(d) On en déduit que $\sup_{x\in]0,+\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x) \geq \sum_{n=N}^{2N} u_n^2(x_N) \geq C$ et donc $\sup_{x\in]0,+\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $N \to +\infty$

(e) Aucune des réponses précédentes

9. **Q35**. Quelle conclusion peut-on tirer de ces deux dernières questions ?
   (a) La série de fonction de terme général $u_n(x)$ ne vérifie pas le critère de Cauchy uniforme et donc ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$
   (b) La série de fonction de terme général $u_n(x)$ vérifie le critère de Cauchy uniforme mais ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$
   (c) La série de fonction de terme général $u_n(x)$ ne vérifie pas le critère de Cauchy uniforme mais converge uniformément sur $]0, +\infty[$
   (d) La série de fonction de terme général $u_n(x)$ vérifie le critère de Cauchy uniforme et donc converge uniformément sur $]0, +\infty[$
   (e) Aucune des réponses précédentes
10. **Q36**. On suppose toujours $a = 4$. Calculer $\lim_{x \to 0^+} s(x)$
    (a) On remarque que $-(1 - e^{-x^2}) \approx x^4$ quand $x \to 0$. Donc $s(x) \approx e^{-x^2} \approx 1$ quand $x \to 0$
    (b) On remarque que $(1 - e^{-x^2}) \approx x^4$ quand $x \to 0$. Donc $s(x) \approx e^{-x^2} \approx 1$ quand $x \to 0$
    (c) On remarque que $-(1 - e^{-x^2}) \approx x^4$ quand $x \to 0$. Donc $s(x) \approx -e^{-x^2} \approx -1$ quand $x \to 0$
    (d) On remarque que $(1 - e^{-x^2}) \approx x^4$ quand $x \to 0$. Donc $s(x) \approx -e^{-x^2} \approx -1$ quand $x \to 0$
    (e) Aucune des réponses précédentes
11. **Q37**. Retrouver la conclusion de la question précédente
    (a) Comme $S(0) > 0$, la somme de la série de fonctions de terme général $nx^4e^{-nx^2}$ est discontinue sur $[0, +\infty[$ et par suite la convergence ne peut pas être uniforme sur cet intervalle
    (b) Comme $S(0) > 0$, la somme de la série de fonctions de terme général $-nx^4e^{-nx^2}$ est discontinue sur $[0, +\infty[$ et par suite la convergence ne peut pas être uniforme sur cet intervalle.
    (c) Comme $S(0) = 0$, la somme de la série de fonctions de terme général $nx^4e^{-nx^2}$ est discontinue sur $[0, +\infty[$ et par suite la convergence ne peut pas être uniforme sur cet intervalle
    (d) Comme $S(0) = 0$, la somme de la série de fonctions de terme général $nx^4e^{nx^2}$ est discontinue sur $[0, +\infty[$ et par suite la convergence ne peut pas être uniforme sur cet intervalle
    (e) Aucune des réponses précédentes

Exercice 8 : Questions indépendantes (de 38 à 50)

1. **Q38.** Soit $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ la somme de la série numérique de terme général $U_n = \frac{1}{4n^2-1}$. Alors
   (a) $S = 2$
   (b) $S = 1$
   (c) $S = \frac{1}{2}$
   (d) $S = \frac{1}{4}$
   (e) Aucune des réponses précédentes
2. **Q39**. Le théorème des accroissements fini appliqué à $f(t) = \text{Arcsin}\, t$ sur l'intervalle $[0, x]$ permet d'établir que :
   (a) $\text{Arcsin}\, x > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ si $0 < x < 1$
   (b) $\text{Arcsin}\, x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ si $0 < x < 1$

(c) $\operatorname{Arcsin} x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ si $x > 0$

(d) $\operatorname{Arcsin} x > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ si $x > 0$

(e) Aucune des réponses précédentes

3. **Q40**. Soit $E = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$

(a) f n'est pas injective

(b) $\ker f = \{0_E\}$

(c) f est bijective

(d) $\ker f = \{0_{\mathbb{R}}\}$

(e) Aucune des réponses précédentes

4. **Q41**. Soit f une fonction périodique de période $T = \pi$ et définie par $f(x) = \cos x, 0 < x < \pi$. Alors la série de Fourier de f a pour expression :

(a) $S(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2-1} \cos 2nx$

(b) $S(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos 2nx$

(c) $S(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} \sin 2nx$

(d) $S(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nx$

(e) Aucune des réponses précédentes

5. **Q42**. Soit $J = \iint_V f(x,y,z)\, dxdydz$ où $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ est une fonction continue dans la sphère V de centre $O(x,y,z)$ et de rayon r. Alors

(a) $J = \pi^2 r^3$

(b) $J = \pi^4 r$

(c) $J = \pi^3 r^2$

(d) $J = \pi r^4$

(e) Aucune des réponses précédentes

6. **Q43**. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ où $z = x + iy \neq 0$ est un nombre complexe, a pour domaine de convergence :

(a) Le demi plan $x > 0$

(b) Le disque ouvert de centre $O(0,0)$ et de rayon 1

(c) Le demi plan $y > 0$

(d) Le disque fermé de centre $O(0,0)$ et de rayon 1

(e) Aucune des réponses précédentes

7. **Q44**. Soit $K = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$

(a) $K = 0$

(b) $K = 1$

(c) $K = \pi$

(d) $K = 2\pi$

(e) Aucune des réponses précédentes

8. **Q45**. f étant l'application de la question 4, alors :

(a) f est surjective
(b) $Imf = \{0_E\}$
(c) f est bijective
(d) $Imf \neq \mathbb{R}$
(e) Aucune des réponses précédentes

9. **Q46**. Soit $M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ Alors :
   (a) M est diagonalisable
   (b) M admet trois valeurs propres distinctes
   (c) M n'est pas diagonalisable
   (d) M n'est pas inversible
   (e) Aucune des réponses précédentes

10. **Q47**. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ab} \\ a & 1 & \frac{1}{b} \\ ab & b & 1 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Alors
    (a) $\dim \ker f = 1$ et $\dim Imf = 2$
    (b) $\dim \ker f = 3$ et $\dim Imf = 0$
    (c) $\dim \ker f = 0$ et $\dim Imf = 3$
    (d) $\dim \ker f = 2$ et $\dim Imf = 1$
    (e) Aucune des réponses précédentes

11. **Q48**. Soit f une fonction périodique de période $T = \ pi$ et définie par $f(x) = \sin(x), 0 \leq x$ π. Alors la série de Fourier de f est :
    (a) $S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nx$
    (b) $S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2-1} \cos 2nx$
    (c) $S(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nx$
    (d) $S(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4n^2-1} \cos 2nx$
    (e) Aucune des réponses précédentes

12. **Q49**. $\lim_{x \to 0} \frac{2x - \sin x - \tan x}{x(1+\cos x) - 2\tan x}$ est égal à :
    (a) $\frac{1}{2\pi}$
    (b) $\frac{\pi}{22}$
    (c) $\frac{1}{7}$
    (d) $\frac{1}{6}$
    (e) Aucune des réponses précédentes

13. **Q50**. Soit $J = \int_C \frac{z}{(z-\imath)(z-3)} dz$ où z est un nombre complexe et C le cercle d'équation $|z| =$
    Alors :
    (a) $J = \frac{2\pi}{3-\imath}$
    (b) $J = \frac{3\pi}{3-\imath}$
    (c) $J = \frac{\pi}{3-\imath}$
    (d) $J = \frac{4\pi}{3-\imath}$
    (e) Aucune des réponses précédentes

Première Épreuve Type De MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

Questions à choix multiples

Instructions : L'épreuve comporte essentiellement 40 questions à choix multiples. Pour chacune d'elles, quatre réponses (probables) sont proposées mais au plus deux sont vraies. En absence de réponse juste, reporter e) sur la copie. Si une seule proposition est correcte, reporter la lettre correspondant à celle-ci. Si deux le sont, les reporter toutes les deux. Les résultats devront être présentés sous forme de tableau

Notation : Toute réponse juste à un QCM rapporte 2,5 points ; toute réponse fausse fait perdre 2 points ; l'absence de réponse fait gagner 0 point.

Exercice 1 ***Fonctions trigonométriques réciproques***

On considère la fonction de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

.

1. (a) f est définie sur $]-1,1[$.
   (b) f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.
   (c) f est paire car composée de deux fonctions impaires et paire.
   (d) f est impaire car la somme de deux fonction impaires est impaire.
2. (a) f est bornée.
   (b) f est prolongeable par continuité en 1.
   (c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.
   (d) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
3. (a) Pour $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, on pose $\varphi = \operatorname{Arctan} x$.
   (b) Si $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\operatorname{Arcsin}(\sin u) = \pi + u$.
   (c) Si $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\operatorname{Arctan}(\tan u) = -u$.
   (d) Si $x \in [0,1[$, $f(x) = 0$.
4. Sur $]1,+\infty[$, on a :
   (a) f est dérivable sur $[1,+\infty[$.
   (b) $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$.
   (c) $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$.
   (d) $f(x) = \pi - 2\operatorname{Arctan} x$.

Exercice 2 ***Dérivées n^{eme} et prolongement de fonctions***

5. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : x \mapsto x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$$

(a) f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et se prolonge par continuité en 0.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_1'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ et $f_2''(x) = -\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$.

(c) $\forall n \geq 2, f_{n+1}' = nf_n + f_{n-1}$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$ (attention : c'est le même n).

6. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = x^x \text{ et } f(0) = 1$$

(a) f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, continue et dérivable en 0.

On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = f(x) + f(x)\log x$ (1) et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\log)^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$

En dérivant n fois (1) et en utilisant la formule de Leibniz, on obtient :

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(-1)^{n-k-1}}{x^{n-k}}f^{(k)}(x)$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k}a_k\right) + a_n\right]$.

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = a \text{ où } a \text{ est un réel fixé} \end{cases}$$

(a) f est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, donc $f'(0) = 0$ et f est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Pour que f soit continue en 0, il faut poser :

(b) $a = 1$

(c) $a = 0$

On suppose dans la suite de cette question et dans la question suivante que a prend la valeur qui rend f continue.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = x^{-3n}e^{-\frac{1}{x^2}}P_n(x)$, où P_n est un polynôme.

8. On utilise la fonction f de la question précédente. On définit la suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\begin{cases} P_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1}(x) = (2-3nx^2)P_n(x) + x^3P_n'(x) \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

(a) $P_n(0) = 2^n$.

(b) $P_n(0) = 2n$.

(c) $f^{(n)}(x) \sim_0 x^{-3n}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

(d) $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$, donc on montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f \text{ est } C^n \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice 3 ***Convexité***

9. (a) La fonction e^x est strictement convexe sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x < e^x$.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad 1 + x \leq e^x < \dfrac{1}{1-x}$.
   (c) $\forall x \in]0,1[, \quad 1 + x < e^x < \dfrac{1}{1-x}$.
   (d) $\forall y > 1, \log\left(\dfrac{y+1}{y}\right) < \dfrac{1}{y} < \log\left(\dfrac{y}{y-1}\right)$.
10. Pour $n \geq 2$ et $k \geq 1$ fixés, on pose : $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{(k-1)n} \frac{1}{n+p}$. On note L la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$, si elle existe.
   (a) $\dfrac{k+1}{kn} < u_n < \dfrac{k+1}{n}$ donc $L = 0$.
   (b) $\log\left(\dfrac{1+kn}{n}\right) < u_n < \log\left(\dfrac{kn}{n-1}\right)$.
   (c) $L = \dfrac{\log k}{2}$
   (d) $disL = +\infty$
11. Soit f une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{N}$, non constante et telle que f, f' et f'' soient positives sur $\mathbb{R}$.
   (a) Certaines fonctions f n'ont pas de limité en $-\infty$.
   (b) f et f' admettent des limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
   (d) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
12. On utilise la fonction f de la question précédente. Soit

$$\varphi : \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(0)}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^*$$

   (a) φ est croissante sur $\mathbb{R}_+{}^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-{}^*$.
   En utilisant l'inégalité des accroissements finis, on montre que :
   (b) $\forall x < 0, f'(x) \leq \varphi(x)$, donc $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0$.
   (c) $\forall x > 0, \varphi(x) \leq f'(x) \leq \dfrac{f(2x) - f(x)}{x}$.
   (d) $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ si et seulement si $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite finie en $+\infty$.

Exercice 4 ***Calcul d'une somme***

Soient les fonctions de variable réelle :

$$f : x \mapsto \text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}\, x$$

$$g : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

13. (a) $\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad -\frac{\pi}{2} < g(x) < 0.$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\pi < f(x) < 0.$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < f(x) < \pi.$
   (d) $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 < f(x) < \frac{\pi}{2}.$
14. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan[f(x)] = \tan[g(x)].$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) - \pi.$
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = g(x).$
   (d) $\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad f(x) = g(x) + \pi$
15. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit : $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right).$
   (a) $S_n = \operatorname{Arctan}(n).$
   (b) $S_n = \operatorname{Arctan}(n) - 1.$
   (c) $S_n = \operatorname{Arctan}(n+1).$
   (d) $S_n = \operatorname{Arctan}(n-1).$

Exercice 5 ***Accroissements finis***

On désigne par a un réel strictement positif, et par f_a la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_a(x) = x.$
On note l_a cette solution.

16. Le réel l_a vérifie :
   (a) $\forall a \in]0, +\infty[, l_a < a < l_a + \frac{l_a^2}{2}.$
   (b) De l'étude de $g : x \mapsto xe^x$, on peut déduire que la fonction qui à a associe l_a est décroissante sur $[0, +\infty[$.
   (c) On a $\log(l_a) \leq l_a - 1$, ce qui permet de montrer que $\lim_{a \to +\infty} l_a = +\infty.$
   (d) $l_a \sim \log(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.
17. Si pour un réel strictement positif a et un réel positif ou nul u_0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l_a lorsque n tend vers $+\infty$, alors :
   (a) $u_{n-1} - u_n \sim l_a(u_n - u_{n-1})$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) $|u_{n+1} - l_a| \sim l_a |u_n - l_a|$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) il existe un entier k tel que $|u_{n+1} - u_n| = l_a^{n-k} |u_{k+1} - u_k|$ pour $n > k$.
   (d) $l_a \leq 1$ ou bien $u_0 = l_a$.
18. Soient x et y deux réels vérifiant $0 \leq x < y \leq a$.
   (a) $0 < f_a(x) - f_a(y) < f_a(x)(y - x).$
   (b) $0 < f_a(x) - f_a(y) < (y - x)\left(\frac{a}{e}\right).$
   (c) $|f_a(x) - l_a| < |f_a(y) - l_a|.$
   (d) $|f_a(x) - l_a| < a\,|x - l_a|.$
19. Dans le cas où $a < 1$, pour tout u_0 strictement positif :
   (a) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a^n$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (c) il existe un entier k tel que $(u_n)_{n>k}$ soit monotone, et $\forall n > k, u_n \in [0, a]$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l_a| \leq a^{n+1}$.

Exercice 6 ***Sous-espaces vectoriels***

20. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace E.
   (a) Si $F \subset G$, alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
   Supposons l'existence d'un $x \in F$ et $x \notin G$, alors :
   (b) $\forall g \in G$, ($F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \Rightarrow x + g \in F$.
   (c) Si l'assertion B est vraie, $F \cup G$ ne peut être un sous-espace vectoriel de E.
   (d) $F \cup G$ ne peut être un sous-espace vectoriel de E que si $F \subset G$.
21. Soit, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$u = (1,2,3,0), v = (0,-1,2,-2), w = (3,7,7,2), t = (1,2,3,1)$$

   Soit $F = Vect(u,v,w)$ le sous-espace vectoriel engendré par (u,v,w) et $H = \mathbb{R}t$ la droite dirigée par t. Soient

$$G = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 / a + b - d = 0\right\}$$

$$K = \{(\alpha, -\alpha + 3\beta, 3\beta, 2\alpha - 2\beta) / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

   (a) F et G sont des sous-espaces vectoriels de dimension 3.
   (b) $G \cup H$ est un sous-espace vectoriel.
   (c) H est un supplémentaire de G.
   (d) K est un sous-espace vectoriel de dimension 2, et $F + K = \mathbb{R}^4$.
22. Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de I dans $\mathbb{R}$.
   (a) $(\cosh x, \sinh x)$ est une famille liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   (b) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad (\cosh x, \sinh x, e^{ax})$ est une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}, \left(1, \log x, (\log x)^2, \cdots, (\log x)^n\right)$ est une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+{}^*, \mathbb{R})$.
   (d) $\left(1, \text{Arctan}\, x, \text{Arctan}\, \dfrac{1}{x}\right)$ est une famille liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$
23. Soient H et K deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel E de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de K, et $a \in H$.
   (a) $\dim\left(Vect(e_1 + a, \ldots, e_k + a)\right) < k$.
   (b) $Vect(e_1 + a, \ldots, e_k + a)$ est supplémentaire à H.
   (c) $Vect(e_1 + a, \ldots, e_k + a) = K$.
   (d) On peut montrer ici que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet au moins deux supplémentaires.

Exercice 7 ***Fonction définie par morceaux***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [0, +\infty[, f(x) = 2x - \log(\sinh x + 1) \\ \text{si } x \in]-\infty, 0[, f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1-x} \end{cases}$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (xOy).

24. (a) f n'est pas continue en 0.
(b) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et à droite en 0.
(c) f n'est pas dérivable à gauche en 0.
(d) f est dérivable à droite et à gauche en 0, donc f est dérivable en 0.

25. (a) Sur $]-\infty, 0]$, $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 2x - 2$.
Sur $[0, +\infty[$:
(b) $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{\sinh x + 1}$
(c) $f'(x) = \dfrac{e^x - 3e^{-x} + 4}{2(\sinh x + 1)}$
(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = 0$ donc (Ox) est asymptote à $\mathcal{C}$.

26. (a) Il existe un réel b et une fonction ϵ tel que, pour $x > 0$:

$$\log(\sinh x + 1) = x + b + \epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} \epsilon(x) = 0$$

Dans le cas où l'assertion précédente est jugée exacte,
(b) $b = 0$.
(c) $b = \log 2$.
(d) La droite d'équation $y = x - \log 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

27. La courbe $\mathcal{C}$ est représentée par :

Soit H un groupe fini non réduit à l'élément neutre, $Z(H)$ son centre. Soit α un automorphisme de H.

28. On veut montrer que le centre de H est stable par automorphisme de H
(a) Il suffit de montrer que si z est un élément de $Z(H)$ et h un élément de H, alors, $h\alpha(z) = \alpha(z)h$.
(b) Il suffit de montrer que si z est un élément de $Z(H)$ et h un élément de H, alors, $z\alpha(h) = \alpha(h)z$.
(c) Il suffit de montrer que si z est un élément de $Z(H)$ et h un élément de H, alors $h.H = H.h$.
(d) Il suffit de montrer que si z est un élément de $Z(H)$ et h un élément de H, alors $\alpha(zh) = \alpha(hz)$.

29. On veut montrer qu'il existe un élément de H d'ordre un nombre premier.
(a) Si p est un nombre premier divisant l'ordre de H, alors on conclut par le théorème de Cauchy.
(b) Si p est un nombre divisant l'ordre de H, alors on conclut par le théorème de Poincaré.
(c) Si p est un nombre premier divisant l'ordre de H, alors on conclue par le théorème de Poincaré-Cauchy.
(d) Ceci ne marche que lorsque l'ordre de H est premier.

30. Soit G un groupe opérant fidèlement sur H tel que pour tout élément g de G, la permutation $h \to g.h$ est un automorphisme de H. On suppose que G opère transitivement sur $H \setminus \{1\}$. On veut montrer que tous les éléments de H, différents de 1, sont d'ordre une puissance non nulle d'un nombre premier p. Soit φ l'homomorphisme de G dans $Aut(G)$ (ensemble des automorphismes de G), associé à l'opération de G sur H.
   (a) Il suffit de vérifier que :
      — si g appartient à G, alors $x^p = (\varphi_g(h))^p = \varphi_g(h^p) = \varphi_g(1) = 1$,
      — si $x^m = 1$, alors, $\varphi_g(h^m) = 1 = \varphi_g(1)$
   (b) Il suffit de vérifier que si g appartient à G, alors $x^p = (\varphi_g(h))^p = \varphi_g(h^p) = \varphi_g(1) = 1$, bien que l'implication $(x^m = 1 \Rightarrow \varphi_g(h^m) = 1 = \varphi_g(1))$ ne soit pas vraie.
   (c) Il suffit de vérifier que si $x^m = 1$, alors, $\varphi_g(h^m) = 1 = \varphi_g(1)$ bien que l'implication (g appartient à G $\Rightarrow x^p = (\varphi_g(h))^p = \varphi_g(h^p) = \varphi_g(1) = 1$) ne soit pas vraie.
   (d) Il suffit de vérifier que si $x^m = 1$, alors, $\varphi_g(h^m) = 1 = \varphi_g(1)$ bien que l'implication (g appartient à G $\Rightarrow x^p = (\varphi_g(h))^p = \varphi_g(h^p) = \varphi_g(m) = 1$) ne soit pas vraie.

31. On veut montrer que H est un groupe abélien. Il suffit de montrer que :
   (a) $H \subset Z(H)$
   (b) $Z(H) \subset H$
   (c) $H = Z(H)$
   (d) $H = Z(G)$

32. On suppose qu'il existe un élément x de $H \setminus \{1\}$ d'ordre strictement supérieur à 2. Alors :
   (a) x et x^{-1} sont différents et sont les seuls éléments de $H \setminus \{1\}$.
   (b) $x = x^{-1}$
   (c) $N = \{1, x, x^{-1}\}$ est d'ordre 2
   (d) $N = \{1, x, x^{-1}\}$ est d'ordre 3

33. On suppose que G opère transitivement sur $H \setminus \{1\}$
   (a) $H \setminus \{1\}$ possède au moins 4 éléments distincts et H est donc d'ordre supérieur ou égal à 5.
   (b) $H \setminus \{1\}$ possède exactement 4 éléments distincts et H est donc d'ordre 4.
   (c) $H \setminus \{1\}$ possède moins de 4 éléments distincts et H est donc d'ordre supérieur à 5.
   (d) $H \setminus \{1\}$ possède moins de 5 éléments distincts et H est donc d'ordre supérieur à 6.

Exercice 8 ***Questions indépendantes***

34. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^4 \end{pmatrix}$ où $\alpha \neq 1$ est l'une des racines cubiques de 1. Alors :
   (a) $M^{-1}(\alpha) = M\left(\frac{1}{\alpha}\right)$
   (b) $M^2(\alpha) = M^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)$
   (c) $M^{-1}(\alpha) = M\left(\frac{1}{\alpha}\right)$
   (d) $3M^{-1}(\alpha) = M\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

35. Soit $z = x + iy$. On considère la transformation du plan suivante : $M(z) \longmapsto M'(z' = e$
Alors, le domaine du plan défini par $x \leq 0$ a pour image :
   (a) le plan défini par $y' \leq 0$
   (b) le plan défini par $x' \leq 0$
   (c) le disque de rayon $R = e$
   (d) le cercle de rayon $R = e$
36. Soit $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$. Alors, le parallélépipède de côtés $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ pour volume :
   (a) 15
   (b) 25
   (c) 10
   (d) 20
37. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n \geq n_0}$ une suite décroissante vérifiant $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, la séri $\sum a_n \cos(n\theta)$ est
   a) convergente b) à termes positifs
   c) divergente d) de nature inconnue
38. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite à termes non tous positifs, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs telle que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to +\infty$. Alors,
   (a) $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ est convergente ;
   (b) $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geq n_0} v_n$ sont de même nature d'après le critère des équivalents.
   (c) On ne peut appliquer le critère des équivalents car (u_n) est à termes non tous positifs.
   (d) $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geq n_0} v_n$ sont de natures différentes.
39. Leo (dit l'analyste) dit à son ami Avogadro : "Choisit $\alpha \in [-15, 8]$ et étudie la nature de l'intégrale $I = \sum\limits_{0}^{+\infty} (\sinh x - x)^{\alpha} dx$". A plusieurs reprises (sans la connaissance du choix d'Avogadro), Leo prédit avec succès la nature de I. En fait, il part du calcul de la probabilité que I converge. Et vous donc pouvez-vous calculer cette probabilité ? Elle vaut :
   a) $\frac{2}{69}$ b) $\frac{1}{690}$ c) $\frac{7}{6900}$ d) 1.
40. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Définissons la fonction T_n sur $[-1, 1]$ par $\forall x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$.
   (a) T_n est une fraction rationnelle qui ne coïncide avec aucun polynôme ;
   (b) T_n est un polynôme ;
   (c) T_n est une fonction trigonométrique ;
   (d) $T_n(x) = \dfrac{\sin((n+1) \operatorname{Arccos} x)}{\sin(\operatorname{Arccos} x)} \forall x \in [-1, 1]$

Bonne prestation
Par LEONEL FOFE, votre serviteur

Deuxième Épreuve Type De MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

Questions à choix multiples

Instructions : L'épreuve comporte essentiellement 40 questions à choix multiples. Pour chacune d'elles, quatre réponses (probables) sont proposées mais au plus une est vraies. En absence de réponse juste, reporter e) sur la copie. Reporter la lettre correspondant à la réponse juste dans le cas contraire.

Notation : Toute réponse juste à un QCM rapporte 2,5 points ; toute réponse fausse fait perdre 1 point ; l'absence de réponse fait gagner 0 point.

Exercice 1 ***Les espaces métriques***

On pose $E =]0, +\infty[$; on note d la distance usuelle de E, δ l'application définie sur $4 \times E$ par $\delta(x, y) = |\log x - \log y|$. On admet que cette application définit une distance sur E. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des inverses des entiers naturels non nuls.

1. (a) $B_\delta(1, 1) = [e^{-2}, e]$.
   (b) $B_\delta(1, \frac{1}{2}) = \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, \sqrt{e}\right]$
   (c) $B_d(1, 0) = \emptyset$
   (d) $B_d(0, 1) = \emptyset$
2. La suite (u_n)
   (a) est de Cauchy dans (E, d) et dans (E, δ).
   (b) est de Cauchy dans (E, d) mais pas dans (E, δ).
   (c) n'est pas de Cauchy dans (E, d), mais l'est dans (E, δ).
   (d) n'est de Cauchy ni dans (E, d), ni dans (E, δ).
3. (a) (E, d) et (E, δ) sont complets.
   (b) (E, d) est complet, mais (E, δ) ne l'est pas.
   (c) (E, d) n'est pas complet, mais (E, δ) l'est.
   (d) Aucun des espaces métriques (E, d) et (E, δ) n'est complet.

Exercice 2 ***Recherche des extrémums d'une fonction***

On se propose de rechercher les extrémums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$(x, y) \mapsto \sin x \sin y \sin(x + y)$$

4. Si f présente un maximum en (x, y), alors, elle présente un minimum en :
   (a) $(x + \pi, y)$
   (b) $(x, y + \pi)$
   (c) $(-x, y)$
   (d) $(-x, -y)$
5. On peut se limiter à rechercher les extrémums de f sur (donner le « plus petit ensemble ») :
   (a) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   (b) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(c) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

(d) $\left[-\frac{\pi}{2},0\right] \times \left[-\frac{\pi}{2},0\right]$.

6. f présente un minimum relatif strict en :

(a) $\left(\frac{5\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right)$

(b) $\left(\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{3}\right)$

(c) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(d) $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$

7. f admet un maximum de valeur :

(a) $\frac{\sqrt[3]{e}}{3}$

(b) $\frac{3\sqrt{2}}{7}$

(c) $\frac{\sqrt{e}}{3}$

(d) $\frac{1}{2}$

Exercice 3 ***Étude de l'équilibre d'un système différentiel***

On se propose d'étudier l'équilibre du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + \sin\left(x(t) - y(t)\right) \\ y'(t) = e^{x(t)} - 1 \end{cases}$$

8. (a) Ce système n'admet pas d'équilibre

(b) Ce système admet une infinité de points d'équilibres et devient le système ci-après lorsqu'il est regarder à la loupe :

$$\begin{cases} X'(t) = \left(1 + 3\,(-1))^{k}\right) X(t) + (-1)^{k}\, Y(t) \\ Y'(t) = X(t) \end{cases}$$

(c) Ce système admet exactement deux points d'équilibre.

(d) $(0,0)$ est unique point d'équilibre du système différentiel.

9. Le système différentiel précédent admet

(a) des points cols uniquement

(b) des points cols et des foyers stables uniquement

(c) des points cols et des foyers instables uniquement

(d) des points cols et des nœuds uniquement.

Exercice 4 ***Une application voilée des fonctions***

f est une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[0,1]$ et vérifiant $f(0) = f(1)$.

10. Alors, si n est un entier naturel non nul, l'équation $f(x+a) = f(x)$ (où on a posé $a = \frac{1}{n}$)

(a) n'admet pas de solution

(b) admet au moins une solution

(c) admet des solutions pour certaines valeurs de n.

(d) n'admet des solutions que pour certaines valeurs de n et pour certaines fonctions f.

11. La fonction f définie sur $[0,1]$ par $x \mapsto \left|\sin \frac{\pi x}{a}\right| - x\left|\sin \frac{\pi}{a}\right|$ permet de mettre en évidence le fait que :

(a) L'équation $f(x+a) = f(x)$ peut ne pas admettre des solutions lorsque a n'est pas inverse d'un entier naturel non nul.

(b) L'équation $f(x+a) = f(x)$ n'admet jamais des solutions.

(c) L'équation $f(x+a) = f(x)$ admet toujours exactement une solution.

(d) L'équation $f(x+a) = f(x)$ admet toujours exactement deux solutions.

12. On considère un cycliste qui parcourt $20km$ en une heure.

(a) Il existe au moins un intervalle de temps de durée $45mn$ pendant lequel il a parcouru $15km$.

(b) La fonction $t \mapsto \left|\sin \frac{4\pi t}{3}\right| - \frac{t\sqrt{3}}{2}$ permet de mettre en évidence le fait qu'il n'existe aucun intervalle de durée $3min$ pendant lequel il a parcouru $1km$.

(c) Il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru $10km$

(d) Il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru $20km$

Exercice 5 ***Stabilité d'un système différentiel - le retour***

AVOGADRO met en œuvre un pendule avec frottement dont il souhaite étudier la stabilité. Après avoir montré que son mouvement est régi par le l'équation différentielle $\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + a\sin\theta = 0$, il vous confie le problème.

13. (a)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -a\sin(x(t)) + \alpha y(t) \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = a\sin(x(t)) - \alpha y(t) \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = -a\sin(x(t)) - \alpha y(t) \end{cases}$$

(d)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t) \\ \dot{y}(t) = a\sin(x(t)) + \alpha y(t) \end{cases}$$

14. Aux points d'équilibres, la positon est

(a) un multiple entier de π et l'équilibre est un centre.

(b) un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$ et l'équilibre est un foyer.

(c) un multiple entier de $\frac{\pi}{3}$ et l'équilibre est un nœud.

(d) un multiple entier de $\frac{\pi}{4}$ et l'équilibre est un col.

Exercice 6 ***Lancé d'une pièce de monnaie***

On lance n fois une pièce de monnaie et on considère les évènements suivants. E_n : «on observe au moins trois piles ou trois faces consécutifs» (p_n sa probabilité), A : «les deux premiers jets donnent deux résultats différents», B : «les deux premiers jets donnent deux résultats identiques mais différents du résultat du troisième jet» et enfin C : «les trois premiers jets donnent trois résultats identiques».

15. (a) $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$.

    (b) $P(A \cap B) \neq P(B \cap C)$ et $P(B \cap C) \neq P(A \cap B)$.

    (c) $A \cup B \cup C$ donne l'univers.

    (d) $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

16. On démontre que P_n vérifie la récurrence suivante :

    (a) $P_n = \frac{1}{4}(P_{n-1} + P_{n-2}) + \frac{1}{2}$

    (b) $P_n = \frac{1}{4}P_{n-1} + \frac{1}{2}P_{n-2} + \frac{1}{2}$

    (c) $P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2}P_{n-2} + \frac{1}{4}$

    (d) $P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}P_{n-2} + \frac{1}{4}$

17. (a) $P_n = 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}}\left((3+4\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n - (3-4\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n\right)$

    (b) $P_n = 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}}\left((3+4\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n - (3-4\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right)$

    (c) $P_n = 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}}\left((3+4\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - (3-4\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n+1}\right)$

    (d) $P_n = 1 - \frac{1}{2\sqrt{5}}\left((3+4\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - (3-4\sqrt{5})\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n\right)$

Exercice 7 ***Questions indépendantes***

18. $(E, ||.||)$ et $(F, |.|)$ sont deux $\mathbb{K} - ev$ normés, D une partie non vide de E, $\mathcal{F}(D, F)$ l'ensemble des applications de E dans F. On se propose de comparer les propriétés suivantes :

    i) f est lipschitzienne sur A ;

    ii) f est uniformément continue sur A ;

    iii) f est continue sur A ;

    iv) f est contractante sur A.

    (a) $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv)$

(b) $i) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i)$
(c) $iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow i) \Rightarrow ii)$
(d) $iv) \Rightarrow i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$

19. Si E et F sont deux ensembles et f une application bijective de E sur F, et de bijection réciproque continue, alors, f est un :
   (a) difféomorphisme
   (b) homéomorphisme
   (c) homomorphisme
   (d) isomorphisme

20. Soit $(E, || \, ||)$ un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On pose, pour tout x dans E,
$$||x||_1 = ||f(x)||$$
Alors,
   (a) $|| \, ||_1$ est une norme sur E
   (b) $|| \, ||_1$ est une norme sur E si et seulement si f est un isomorphisme
   (c) $|| \, ||_1$ est une norme si et seulement si f est un isomorphisme.
   (d) $|| \, ||_1$ est une norme si et seulement si $Imf = E$.

21. Soit n un entier naturel et $a_0, a_1, \cdots, a_k$ des réels deux à deux distincts. Rappelons que $\mathbb{R}_n[X]$ renvoie à l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$ et considérons l'application $|| \, ||_k : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_+$ définie par $||P||_k = \sum_{i=0}^{k} |P(a_i)|$. $|| \, ||_k$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si :
   (a) $k = n$
   (b) $k \geqslant n$
   (c) $k \leqslant n$
   (d) $k = n + 1$

22. f étant une fonction numérique de la variable réelle, l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par
$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|$$
   (a) est une distance car l'application valeur absolue définie une distance.
   (b) est une distance si et seulement si f est surjective.
   (c) est une distance lorsque l'application f est $1 - Lipschitzienne$.
   (d) est une distance si et seulement si f est injective.

23. Considérons la double intégrale
$$\iint_{\Delta} (x+y) dxdy avec \Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x} + \sqrt{y} \geqslant 1, \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geqslant 1 \right\}$$
. Cette intégrale vaut :
   (a) $\frac{1}{3}$
   (b) $\frac{2}{3}$
   (c) 1

(d) $\frac{4}{3}$

24. On considère l'intégrale triple $\iiint_D z dxdydz$ avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \leq 1\}$. Cette intégrale vaut :
   (a) $\frac{1}{1680}$
   (b) $\frac{1}{840}$
   (c) $\frac{1}{420}$
   (d) $\frac{1}{210}$

25. On considère la forme différentielle ω définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\omega = (y^3 - 6xy^2)\,dx + (3xy^2 - 6x^2y)\,dy$$

Soit $I = [AB]$, segment de $\mathbb{R}^2$, $A(1,2)$, $B(3,4)$ et Γ un des demi-cercles de diamètre $[AB]$. On a :
   (a) $\int_I \omega = 238 = \int_\Gamma \omega$
   (b) $\int_I \omega = 238$ et $\int_\Gamma \omega = -238$
   (c) $\int_I \omega = -238$ et $\int_\Gamma \omega = 238$
   (d) $\int_I \omega = -238 = \int_\Gamma \omega$

26. Le centre d'inertie de la plaque homogène de support $\Delta = \{(x^2+y^2)^2 + y^2 - x^2 \leqslant 0, x \geqslant 0\}$ est :
   (a) $G\left(0, \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$
   (b) $G\left(0, \frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)$
   (c) $G\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8}, 0\right)$
   (d) $G\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{16}, 0\right)$

27. On considère tous les nombres monotones (nombres d'au moins deux chiffres ne contenant pas de 0 et dont les chiffres pris dans l'ordre de lecture forment une suite strictement monotone) distincts et de 5 chiffres. Leur somme est :
   (a) 13999850
   (b) 13999860
   (c) 13999870
   (d) 13999880

28. La fonction $(x,y) \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}\right)$ coïncide sur son ensemble de définition avec :

(a) $(x,y) \mapsto \text{Arctan}\, x - \text{Arctan}\, y$
(b) $(x,y) \mapsto -\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y$
(c) $(x,y) \mapsto \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, y$
(d) $(x,y) \mapsto -\text{Arctan}\, x - \text{Arctan}\, y$

29. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(tx,ty) = f(x,y)$$

On a alors : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

(c) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

(d) $y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

30. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^2(1+y)^3 + y^4 \end{cases}$ f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et :

(a) ne possède pas de point critique
(b) possède un unique point critique et celui-ci est point selle
(c) possède un unique point critique qui est maximum global
(d) possède un unique point critique qui est minimum local.

31. On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Lorsqu'on remarque que l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $(x,y) \mapsto (u,v) = (x, x+y)$ est un $C^2 - diffomorphisme$, cette équation prend la forme suivante :

(a) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = lne - 1$

(b) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0$

(c) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2} = -u$

(d) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2} = -v$

32. On recherche une série entière solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$. Soit f une telle série (on suppose qu'il en existe). On suppose donc qu'$\exists R > 0, \forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors :

(a) $a_n = (n+1)a_{n+1}$

(b) $a_n = \dfrac{a_0}{n}$

(c) $a_n = a_0 \dfrac{2^n}{n!}$

(d) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

33. On suppose que le nombre N d'œufs pondus par un insecte suit une loi de poisson de paramètre α. On suppose également que la probabilité de développement d'un œuf est p et que les œufs sont mutuellement indépendants. On note S le nombre (aléatoire) de survivants. Alors le nombre S
   (a) suit une loi de Poisson de paramètre $p\alpha$
   (b) suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{p}{\alpha}$
   (c) suit une loi de Poisson de paramètre $\dfrac{\alpha}{p}$
   (d) ne suit pas une loi de Poisson.

34. On appelle produit scalaire
   (a) toute application « . » définie sur $\mathbb{R}^n$ par
   $$\forall x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}, y = (y_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^n, x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
   (b) toute forme bilinéaire symétrique positive.
   (c) toute forme bilinéaire symétrique définie.
   (d) toute forme bilinéaire définie positive.

35.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{(-1)^n}}{\sqrt{3^n}} =$$
   (a) e
   (b) $\dfrac{\pi^2}{2} - 1$
   (c) $\dfrac{\pi + 9}{6}$
   (d) $\dfrac{e^3}{7}$

36. Soit $a \in \mathbb{R}$, E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, φ_a l'application définie par $\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq a, \varphi_a(f)(x) = \dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
   (a) Si on note $\circ$ la composition des applications, alors, $(E, \circ)$ est un groupe.
   (b) Si on note $+$ la somme de deux applications, $(E, +)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $Id_E : x \mapsto x$.
   (c) Si on note « . » la multiplication d'une application par un scalaire, $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}-$e.v de dimension infinie.
   (d) Si $\times$ dénote la multiplication de deux applications, $(E, +, \times)$ est un corps.

37. (a) f admet une primitive, car toute fonction f définie sur $\mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)dt$ en est une primitive.
   (b) φ_a est prolongeable par continuité en a.
   (c) Pour toute fonction f de E, $\varphi_a(f)$ est prolongeable par continuité en a en posant $\varphi_a(f)(a) = f(a)$.

(d) Pour toute fonction f de E, $\varphi_a(f)$ est prolongeable par continuité en a en posant $\varphi_a(f)(a) = f'(a)$.

38. On considère l'équation aux différentielles totales suivante :

$$(2t^3 + 2x^2t + 2x)dt + (2x^3t^2 + 4x^2t + 2xt^2 + xt^4 + 2t)dx = 0$$

Cette équation admet comme facteur intégrant la fonction :

(a) $\mu = \frac{1}{x^2}$

(b) $\mu = e^{-x^2}$

(c) $\mu = e^{x^2}$

(d) $\mu = -\frac{1}{x^2}$

39. **Paradoxe de Bertrand (1889)** : on considère trois cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face roue et une face blanche. On expose une face au hasard : elle est rouge.

(a) Il serait judicieux de parier que la face cachée est rouge.

(b) Il serait judicieux de parier que la face cachée est blanche.

(c) aucun pari n'est judicieux.

(d) La face cachée est rouge-blanche.

40. **Paradoxe du prisonnier** : Trois prisonniers sont dans une cellule. Ils savent que deux vont être condamnés à mort et un gracié, mais ils ne savent pas qui. L'un d'entre eux va voir le gardien et lui demande :

— «Je sais que tu ne peux rien me dire, mais tu peux au moins me montrer un de mes compagnons qui sera exécuté.»
Le gardien réfléchit, se dit que de toutes les manières au moins 'un des deux autres prisonniers sera condamné, et s'exécute.
Le prisonnier lui déclare alors :

— «Merci, avant, j'avais une chance sur trois d'être gracié, et maintenant, j'ai une chance sur deux.»

(a) le prisonnier a raison.

(b) le prisonnier a tord.

(c) On ne peut dire à priori s'il a raison.

(d) Il faut exactement deux informations supplémentaires pour dire s'il a raison ou tord.

Bonne prestation
Par LEONEL FOFE, votre serviteur

Corrections des épreuves de Mathématiques.

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2009

CORRECTION D'INFORMATIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

Exercice 1

1. **Soient x, y deux réels. Montrer que l'on a les inégalités suivantes :** (1pt)

   (a) $xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$

   On a $(|x|-|y|) = x^2 - 2|x||y| + y^2$

   Alors, $|xy| = \frac{1}{2}\left[\left(x^2+y^2\right) - (|x|-|y|)^2\right] \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ (1).

   On a donc $|xy| \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$

   D'où $\boxed{xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}$

   (b) $-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \leq xy$

   (1) $\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \leq xy}$

Remarque 1.

Ces inégalités certes faciles à établir sont d'une utilité notoire en analyse vectorielle notamment dans l'étude de la continuité de certaines fonctions de deux variables. Et, il vaut mieux s'en souvenir.

2. **En déduire que $-\frac{1}{2}$ est un minorant de la fonction : $r : (x,y,z) \longmapsto \frac{xy+z^2}{x^2+y^2+z^2}$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et montrer que c'est son minimum.** (1pt)

   — Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. On a :
   $r(x,y,z) = \frac{xy+z^2}{x^2+y^2+z^2} \geq \frac{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+z^2}{x^2+y^2+z^2}$ car d'après (b), $xy \geq -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$. Par ailleurs,

   $$\frac{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+z^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)+\frac{3}{2}z^2}{x^2+y^2+z^2} \geq -\frac{1}{2}$$

   (x,y,z) ayant été pris arbitraire[1] dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, r(x,y,z) \geq -\frac{1}{2}$.

   D'où $\boxed{-\frac{1}{2} \text{ est un minorant de la fonction } r \text{ sur } \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}}$

   — Montrons maintenant que c'est son minimum.
   On a $(-1,1,0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et $r(-1,1,0) = -\frac{1}{2}$. Le minorant $-\frac{1}{2}$ étant atteint, il est minimum de r. D'où $\boxed{\min_{\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}} = -\frac{1}{2}}$.

1. Il est bon de rappeler que c'est parce l'inégalité est vraie en un (x,y,z) pris arbitrairement qu'elle est vraie en tout (x,y,z). Nous ne le ferons toutefois pas toujours dans la suite et cela sera considéré comme sous-entendu.

3. **Trouver de même le maximum de la fonction r sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.**

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. On a $r(x,y,z) = \dfrac{xy+z^2}{x^2+y^2+z^2} \leq \dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)+z^2}{x^2+y^2+z^2}$ car d'a... (a),
$xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.
Par ailleurs, $\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)+z^2}{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2+z^2} \leq 1$. On conclut alors que ... $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, r(x,y,z) \leq 1$.
D'où 1 est majorant de la fonction r sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
Il en est en plus le maximum car $(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et $r(0,0,1) = 1$.
D'où $\boxed{\max\limits_{\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}} = 1}$

4. (a) **Trouver les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**

Il s'agit des réels tels que $\det(A - \lambda I_3) = 0$

On a $\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - \frac{1}{4})$$
$$= (1-\lambda)(\lambda + \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{2})$$

Donc les valeurs propres sont : $\boxed{\lambda = 1, \lambda = -\frac{1}{2} \text{ et } \lambda = \frac{1}{2}}$

(b) **Soit M une matrice symétrique réelle d'ordre 3 et f l'endomorphisme canoniquement associé à M. On rappelle qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ de vecteurs propres pour f, chacun des vecteurs propres $\overrightarrow{u_k}$ étant associé à la valeur propre λ_k. On suppose que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.**
Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. On sait qu'il existe des réels non tous nuls $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tels que $\vec{v} = \alpha_1 \overrightarrow{u_1} + \alpha_2 \overrightarrow{u_2} + \alpha_3 \overrightarrow{u_3}$
Montrer que

$$\frac{\langle f(\vec{v}), \vec{v}\rangle}{||\vec{v}||^2} = \lambda_3 + \frac{\alpha_1^2(\lambda_1 - \lambda_3)}{||\vec{v}||^2} + \frac{\alpha_2^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{||\vec{v}||^2}$$

où $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^3$.

$$f(\vec{v}) = \alpha_1\lambda_1\vec{u_1} + \alpha_2\lambda_2\vec{u_2} + \alpha_3\lambda_3\vec{u_3}$$
$$f(\vec{v}).\vec{v} = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \lambda_3\alpha_3^2 \qquad ||\vec{v}|| = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$$
$$\frac{\langle f(\vec{v}), \vec{v}\rangle}{||\vec{v}||^2} = \frac{\lambda_3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \alpha_1^2(\lambda_1 - \lambda_3) + \alpha_2^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{||\vec{v}||^2}$$
$$= \lambda_3 + \frac{\alpha_1^2(\lambda_1 - \lambda_3)}{||\vec{v}||^2} + \frac{\alpha_2^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{||\vec{v}||^2}$$

D'où $\boxed{\dfrac{\langle f(\vec{v}), \vec{v}\rangle}{||\vec{v}||^2} = \lambda_3 + \dfrac{\alpha_1^2(\lambda_1 - \lambda_3)}{||\vec{v}||^2} + \dfrac{\alpha_2^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{||\vec{v}||^2}}$

(c) **En déduire que λ_3 est le maximum de la fonction r_f suivante sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$** (1pt)

$$r_f : \vec{u} \longmapsto \frac{\langle f(\vec{u}), \vec{u}\rangle}{||\vec{u}||^2}$$

On a $r_f(\vec{u}) = \lambda_3 + \dfrac{\alpha_1^2(\lambda_1 - \lambda_3)}{||\vec{u}||^2} + \dfrac{\alpha_2^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{||\vec{u}||^2}$ Or $\lambda_1 - \lambda_3 < 0$ et $\lambda_2 - \lambda_3 < 0$
donc pour tout $\vec{u}$ on a $\dfrac{\alpha_1^2(\lambda_1 - \lambda_3)}{||\vec{u}||^2} + \dfrac{\alpha_2^2(\lambda_2 - \lambda_3)}{||\vec{u}||^2} \leq 0$
ainsi $r_f \leq \lambda_3$ or pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ on a $r_f = \lambda_3$.
D'où $\boxed{\lambda_3 \text{ est le maximum de } r_f}$

(d) **Déterminer de même le minimum de la fonction r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$.** (1pt)

On a vu en (b) que $r_f(\vec{u}) = \lambda_1 + \dfrac{\alpha_2^2(\lambda_2 - \lambda_1)}{||\vec{u}||^2} + \dfrac{\alpha_3^2(\lambda_3 - \lambda_1)}{||\vec{u}||^2}$ Or $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ et $\lambda_3 - \lambda_1 > 0$
donc pour tout $\vec{u}$ on a $\dfrac{\alpha_2^2(\lambda_2 - \lambda_1)}{||\vec{u}||^2} + \dfrac{\alpha_3^2(\lambda_3 - \lambda_1)}{||\vec{u}||^2} \geq 0$
Ainsi $r_f \geq \lambda_3$ or pour $\alpha_2 = \alpha_3 =$, on a $r_f = \lambda_1$ Donc $\boxed{\lambda_1 \text{ est le minimum de } r_f}$

Application : **On considère la matrice**

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme associé.

5. **Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous espace propre f** (2pts)

Il s'agit des réels $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\det(M - \lambda I_3) = 0$

On a $\det(M - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

$$= -(1+\lambda)(-5\lambda + \lambda^2 + 2)$$
$$= -\lambda(1+\lambda)^2(\lambda - 5)$$

donc les valeurs propres sont : $\boxed{\lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 5 \text{ ou } \lambda = 0}$
Déterminons maintenant les vecteurs propres associés aux valeurs propres de f
L'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre λ de A est
$E_\lambda = \{\vec{u}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (M - \lambda I_3)\vec{u} = \vec{0}\}$ ce qui conduit dans ce cas aux relations suivantes :

$$\begin{cases} (-1-\lambda)x & = 0 \\ (2-\lambda)y + 2z & = 0 \\ + 2y + (4-\lambda)z & = 0 \end{cases}$$

— **Pour $\lambda = -1$**

On a $\begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ 2y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = z = 0$ donc $E_{-1} = \{(x,0,0) = k(1,0,0)\ k \in \mathbb{R}^*\}$

donc $\vec{e_1} = (1,0,0)$ est une base de E_{-1}

— **Pour $\lambda = 0$**

On a $\begin{cases} -x = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2z \end{cases}$

donc $E_0 = \{(0,-2z,z) = k(0,-2,1)\ k \in \mathbb{R}^*\}$
donc $\vec{e_2} = (0,-2,1)$ est une base de E_0

— **Pour** $\lambda = 5$

On a $\begin{cases} x & = 0 \\ -4y + 2z & = 0 \\ 2y - z & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \end{cases}$

donc $E_5 = \{(0,y,2y) = k(0,1,2)\ k \in \mathbb{R}^*\}$
donc $\vec{e_3} = (0,1,2)$ est une base de E_5

6. **En déduire le maximum et le minimum de la fonction r_f sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ et préciser vecteurs en lesquelles ils sont atteints.**

D'après les questions 4.c et 4.d,

le maximum de r_f est 5 atteint en $\vec{e_3} = (0,1,2)$ et le minimum est **-1** atteint en $\vec{e_1} = (1,0,$

7. **On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ par $g(x,y,z) = \dfrac{-x+y+2z}{x^2+y^2+z^2}$ et P la par de $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$ constituée des triplets (x,y,z) tels que $x+y+2z = 1$. Soit $(x,y,z) \in P$, $\vec{v} = (x,y,z)$. Monter que $g(x,y,z) = r_f(\vec{v})$.**

On a :

$$f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -x \\ y+2z \\ 2y+4z \end{pmatrix} \qquad f(\vec{v}).\vec{v} = \begin{pmatrix} -x \\ y+2z \\ 2y+4z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x^2 + y^2 + 2yz + 2yz + 4z^2$$

$$\begin{aligned} r_f(\vec{v}) &= \frac{-x^2+y^2+2yz+2yz+4z^2}{x^2+y^2+z^2} \\ &= \frac{-x^2+(y+2z)^2}{x^2+y^2+z^2} \\ &= \frac{-x^2+(1-x)^2}{x^2+y^2+z^2} \\ &= \frac{1-2x}{x^2+y^2+z^2} \\ &= \frac{1-2(1-y-2z)}{x^2+y^2+z^2} \\ &= \frac{2y+4z-1}{x^2+y^2+z^2} \\ &= \frac{y+2z-1+y+2z}{x^2+y^2+z^2} \\ &= \frac{-x+y+2z}{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{r_f(\vec{v}) = \frac{-x+y+2z}{x^2+y^2+z^2} = g(x,y,z)}$$

8. **En déduire que g possède un minimum et un maximum sur P, que l'on calculera et préciser les points en lesquels ils sont atteints.** g admet comme maximum 5 en $\vec{v} = \alpha\vec{e_3} = (0,\alpha,2\alpha)$ $/5\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5}$ d'ou $\vec{v} = \frac{1}{5}(0,1,2)$
g admet comme minimum -1 en $\vec{v} = \alpha\vec{e_1} = (\alpha,0,0)$ $/\alpha = 1$ d'où $\vec{v} = (1,0,0)$

En conclusion $\boxed{\begin{array}{ll} \max(g) = 5 & \vec{v}_{max} = \frac{1}{5}(0,1,2) \\ \min(g) = -1 & \vec{v}_{min} = (1,0,0) \end{array}}$

Pour aller plus loin 2 (Extrémums des fonctions de plusieurs variables).

Un *esprit peu aguerri* n'a certainement pas saisi toute la quintessence de cet exercice. Regardons le de façon plus poussée pour mieux comprendre ce qui en fut l'objectif.
On remarque alors que dans la première partie de cet exercice, nous déterminons les extrémums d'une fonction assez simple de trois variables.
Par contre, dans la deuxième partie, derrière l'apparente fonction de trois variables qui est présentée, se cache la fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par $(x,y) \longmapsto \dfrac{-x+y+1-(x+y)}{x^2+y^2+\frac{1}{4}\left[1-(x+y)\right]^2}$.
En réalité, certaines fonctions particulières de deux variables ne se prêtent pas aux méthodes traditionnelles de recherche d'extrémum ; pour d'autres, ces méthodes traditionnelles donnent lieu à des calculs rendus inacceptables par leur caractère fastidieux ; il est alors impérieux de trouver une alternative. C'est en cela que *Dame Analyse* fait appel à sa sœur *Algèbre Linéaire*.
Précisons que rien n'est fait au hasard. Le choix de la matrice M et de l'espace P qui permettent d'aboutir à la relation $r_f(\vec{v}) = g(x,y,z)$ obéissent à des règles et nous invitons le lecteur hardi à les trouver.
Enfin, pour aller plus loin, le lecteur est invité à déterminer les extrémums de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $(x,y) \longmapsto \dfrac{-x+y+1-(x+y)}{x^2+y^2+\frac{1}{4}\left[1-(x+y)\right]^2}$ au moyen des méthodes traditionnelles.

Exercice 2

Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$, on note $I = [a,b[$ et soit f une fonction définie et de classe C^1 sur I, à valeurs réelles. On suppose que f et f' sont bornées sur I ($\exists C > 0, \forall t \in I, ||f(t)|| \leq C, ||f'(t)|| \leq C$).

1. **Montrer qu'il existe une constante M telle que la fonction $g(t) = f(t) + Mt$ soit croissante sur I.** (1pt).
   Une fonction g définie de la sorte est dérivable sur I, comme somme de fonctions dérivables sur I. Et on a : $\forall t \in I, g'(t) = f'(t) + M$
   Par ailleurs, f' est bornée $\Rightarrow f'$ est minorée. Ainsi,
   $\exists m_f \in \mathbb{R}, \forall t \in I, f'(t) \geq m_{f'}$. En prenant $\boxed{M = -m_{f'} + 1}$, on a $f'(t) + M \geq 1$. D'où $\forall t \in I, g'(t) \geq 0 \Rightarrow g$ est croissante sur I.
2. **En déduire que f possède une limite finie en b** (1pt).
   Soit M tel que $g : t \longmapsto f(t) + Mt$ soit croissante sur I. g est croissante et bornée (comme somme de fonctions bornées) sur I. Elle admet donc une limite finie en b. La fonction f étant définie par $t \longmapsto g(t) - Mt$ admet donc aussi une limite finie en b : $\boxed{\lim\limits_{t\to b^-} f(t) = \lim\limits_{t\to b^-} g(t) - Mb}$
3. **Soit t_0 un réel et (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$. On considère le système différentiel suivant :**

$$(S) : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + xy \\ \frac{dy}{dt} = -2y - x^2 \\ (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

Soit $(x(t), y(t))$ une solution de (S) correspondant à $t_0 = 0$ et $I =]\alpha, \beta[$. On pose $u = x^2(t) + y^2(t)$.

(a) **Montrer que la fonction u est décroissante sur $]0,\beta[$** (0,5pt)
u est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0,\beta[$. Soit $t\in]0,\beta[$; on a :

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=2\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)\\&=2\left[x(-x+xy)+y\left(-2y-x^2\right)\right]\\&=-2\left(x^2+2y^2\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{du}{dt}\leq 0$. Il vient alors que $\boxed{u \text{ est décroissante sur }]0,\beta[}$.

(b) **Montrer que $x(t)$ et $y(t)$ sont bornées ainsi que $x'(t)$ et $y'(t)$.** (1pt)
u est bornée sur $]0,\beta[$ car minorée (comme fonction positive) et majorée (par $u(0)$ car décroissante). On a :
$x^2=u-y^2\leq u\Rightarrow x^2$ est bornée (car u est bornée) ; donc x est bornée.
Pour les mêmes raisons, y est bornée.
x' et y' sont bornées comme somme et produit de fonctions bornées.
D'où $\boxed{x, y, x' \text{ et } y' \text{ sont bornées sur }]\alpha,\beta[}$

(c) **En utilisant l'exercice 1), montrer que x et y admettent des limites quand $t\longrightarrow\beta$.** (1pt)
x est de classe C^1 sur $]0,\beta[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; x et x' sont bornées sur $]0,\beta[$: nous sommes dans les hypothèses de la **question 2)** et le résultat de celle-ci nous permet de conclure que x admet une limite quand $t\to\beta$.
Pour les mêmes raisons, y en admet.
D'où $\boxed{x \text{ et } y \text{ admettent des limites quand } t\longrightarrow\beta}$.

On suppose dans cette partie que $I=[0,+\infty[$ et que $(x(t),y(t))$ est une solution du système (S). On pose $v(t)=(x^2(t)+y^2(t))e^{2t}$

(a) **Montrer que v est décroissante sur I.** (0,5pt)
v est dérivable sur I, comme somme et produit de fonctions dérivables sur I. Soit $t\in I$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&=2\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+(x^2+y^2)\right)e^{2t}\\&=2\left(-x^2-2y^2+x^2+y^2\right)e^{2t}\\&=-y^2e^{2t}\end{aligned}$$

Donc $\frac{dv}{dt}\leq 0$. Il vient que $\boxed{v \text{ est décroissante sur } I}$

(b) **En déduire que $u(t)\leq\left(x_0^2(t)+y_0^2(t)\right)e^{-2t},\forall t\geq 0$.** (1pt)
Soit $t\geq 0$. Puisque v est décroissante sur $[0,+\infty[$, on a :

$$v(t)\leq v(0)\Rightarrow\left(x^2(t)+y^2(t)\right)e^{2t}\leq\left(x^2(0)+y^2(0)\right)e^{2\times 0}$$

D'où $x^2(t)+y^2(t)\leq\left(x_0^2+y_0^2\right)e^{-2t}$ i.e. $\boxed{u(t)\leq\left(x_0^2+y_0^2\right)e^{-2t},\forall t\geq 0}$

(c) **Montrer que $(x(t),y(t))\longrightarrow(0,0)$ lorsque $t\longrightarrow+\infty$.** (1pt)
On a : $0\leq u(t)\leq\left(x_0^2(t)+y_0^2(t)\right)e^{-2t},\forall t\geq 0$
Alors, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{t\to+\infty}u(t)=0$. On a également $\begin{cases}0\leq x^2(t)\leq u(t)\\0\leq y^2(t)\leq u(t)\end{cases}$

Toujours par le théorème des gendarmes, on a $\lim_{t\to+\infty} x^2(t) = \lim_{t\to+\infty} y^2(t) = 0$. D'où $\boxed{\lim_{t\to+\infty} (x(t), y(t)) = (0,0)}$

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2010

CORRECTION DE MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

Première Partie

Question 1 (2pts)

Montrer que pour tout $x \in I$, $v(x) = (1-x)\int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 (1-t)f(t)dt.$

Soit $x \in I$. On a :

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_0^1 G(x,t)f(t)dt \\ &= \int_0^x G(x,t)f(t)dt + \int_x^1 G(x,t)f(t)dt \\ &= \int_0^x t(1-x)f(t)dt + \int_x^1 x(1-t)f(t)dt \\ &= (1-x)\int_0^x tf(t)dt + (1-t)\int_x^1 xf(t)dt \end{aligned}$$

x ayant été pris arbitraire[2] dans I, il vient que $\boxed{\forall x \in I, v(x) = (1-x)\int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 (1-t)f(t)dt}$

Question 2

1. **Montrer que la fonction $v \in \mathcal{C}(I)$, qu'elle est deux fois dérivables et qu'elle vérifie** (3pts)

$$\begin{cases} -v''(x) = f(x) & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

$v \in \mathcal{C}(I)$ car obtenue par des opérations élémentaires sur des fonctions de $\mathcal{C}(I)$. Pour les mêmes raisons, v est deux fois dérivable sur $]I, \infty[$.

Nous allons noter F une primitive $t \longmapsto tf(t)$ et G une primitive de $t \longmapsto (1-t)f(t)$ sur I.

Soit $x \in]0,1[$ On a :

$$\begin{aligned} v(x) &= (1-x)\int_0^x tf(t)dt + x\int_x^1 (1-t)f(t)dt \\ &= (1-x)\left(F(x) - F(0)\right) + x\left(G(1) - G(x)\right) \end{aligned}$$

Alors, $v'(x) = -\left(F(x) - F(0)\right) + (1-x)F'(x) + \left(G(1) - G(x)\right) - xG'(x)$ et

$$\begin{aligned} v''(x) &= -F'(x) + (1-x)F''(x) - F'(x) - G'(x) - xG''(x) - G'(x) \\ &= -2\left(F'(x) + G'(x)\right) + (1-x)F''(x) - xG''(x) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\begin{cases} F'(x) = xf(x) \\ G'(x) = (1-x)f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F''(x) = f(x) + xf'(x) \\ G''(x) = -f(x) + (1-x)f'(x) \end{cases}$

2. A l'avenir nous ne ferons plus cette précision, mais il est important de préciser que c'est parce que cette relation est vraie pour x pris arbitraire dans I qu'elle est vraie en tout point x de I

Ainsi,

$$\begin{aligned} v''(x) &= -2\left[xf(x)+(1-x)f(x)\right]+(1-x)\left(f(x)+xf'(x)\right)-x\left(-f(x)+(1-x)f'(x)\right) \\ &= -2f(x)+f(x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Alors, $-v''(x)=f(x)$. Il est évident que $v(0)=v(1)=0$.

On conclut alors que $\boxed{\begin{cases} -v''(x)=f(x) & \text{si} \quad x\in]0,1[\\ v(0)=v(1)=0 \end{cases}}$

2. **Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, trouver une fonction $\overline{G}$ définie sur $[a,b]\times[a,b]$, à valeurs réelles telle que pour toute fonction r définie sur $[a,b]$ deux fois dérivables telle que $r(a)=r(b)=0$, on ait**

$$r(x)=-\int_a^b \overline{G}(x,t)r''(t)dt$$

Remarquons d'entrée que dans le cas précédent, on a $v(x)=-\displaystyle\int_0^1 G(x,t)v''(t)dt$.

Cette observation et une petite analyse nous suggèrent de prendre

$$\overline{G}(x,t)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}(b-x)(t-a) & \text{si} \quad a\leq t\leq x\leq b \\ \dfrac{1}{b-a}(x-a)(t-b) & \text{si} \quad a\leq x\leq t\leq b \end{cases}$$

Ceci est envisageable parce qu'en posant $a=0$ et $b=1$, on retrouve G. De plus, les deux expressions (celle utilisée pour $a\leq t\leq x\leq b$ et celle utilisée pour $a\leq x\leq t\leq b$ conviennent pour calculer $G(t,t)$)

Démontrons maintenant que cette expression satisfait bien à la condition posée sur $\overline{G}$

Soir r une fonction définie sur $[a,b]$ deux fois dérivables telle que $r(a)=r(b)=0$, et $g\in\mathcal{C}(I)$.

Nous allons supposer que $r(x)=-\displaystyle\int_a^b \overline{G}(x,t)g(t)dt$ et montrer qu'on a nécessairement $g=r''$.

Soit $x\in]0,1[$ On a :

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{1}{b-a}\left[(b-x)\int_a^x (t-a)g(t)dt+(x_a)\int_x^b (b-t)f(t)dt\right] \\ &= \frac{1}{b-a}\left[(b-x)\left(F(x)-F(a)\right)+(x-a)\left(G(b)-G(x)\right)\right] \end{aligned}$$

Alors, $r'(x)=\dfrac{1}{b-a}\left[-\left(F(x)-F(a)\right)+(b-x)F'(x)+\left(G(b)-G(x)\right)-(x-a)G'(x)\right]$ et

$$\begin{aligned} r''(x) &= \frac{1}{b-a}\left[-F'(x)-F'(x)+(b-x)F''(x)-G'(x)-(x-a)G''(x)-G'(x)\right] \\ &= \frac{1}{b-a}\left[-2\left(F'(x)+G'(x)\right)+(b-x)F''(x)-(x-a)G''(x)\right] \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{cases} F'(x)=\dfrac{1}{b-a}(x-a)f(x) \\ G'(x)=\dfrac{1}{b-a}(b-x)f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F''(x)=\frac{1}{b-a}\left[f(x)+(x-a)f'(x)\right] \\ G''(x)=\frac{1}{b-a}\left[-f(x)+(b-x)f'(x)\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'(x)+G'(x)=f(x) \\ (b-x)F''(x)-(x-a)G''(x)=f(x) \end{cases}$$

Ainsi, $r''(x) = -f(x)$
En conclusion, il est bel bien convenable de définir $\overline{G}$ par

$$\overline{G}(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}(b-x)(t-a) & \text{si} \quad a \leq t \leq x \leq b \\ \frac{1}{b-a}(x-a)(t-b) & \text{si} \quad a \leq x \leq t \leq b \end{cases}$$

Question 3

Calculer $v\left(\frac{1}{2}\right)$ dans les deux cas suivants

1. $f(t) = \sin(k\pi t), k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} v\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(1-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{1}{2}} tf(t)dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} tf(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f(t)dt\right) \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f(t)dt &= \int_{\frac{1}{2}}^0 u\sin(k\pi(1-u))(-du) \text{ où on a posé } u = 1-t \\ &= (-1)^{k+1}\int_0^{\frac{1}{2}} uf(u)du \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} v\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} tf(t)dt + (-1)^{k+1}\int_0^{\frac{1}{2}} tf(t)dt\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} tf(t) \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} tf(t)dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} t\sin(k\pi t)dt \\ &= \left[t\frac{1}{k\pi}(-\cos(k\pi t))\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{1}{k\pi}\cos(k\pi t)dt \quad \text{(intégration par parties)} \\ &= \frac{1}{2k\pi}\left(-\cos\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi t)\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{k^2\pi^2}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{(-1)^{k'+1}}{k^2\pi^2} \quad \text{où } k' \text{ est l'unique entier tel que } k = 2k'+1 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \boxed{v\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{k^2\pi^2} & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}}$$

2. $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - t - 1}}$

On a : $v\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} tf(t)dt + \dfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)f(t)dt$

Mais la fonction f n'est malheureusement pas définie sur $\left[0, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$; l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} tf(t)$ n'a donc malheureusement pas de sens.

Il peut être utile de prendre $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - t + 1}}$ (le faire !)

Question 4

Montrer que $\forall t \in I$ **et** $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}, |F(t, z_1) - F(t, z_2)| \leq L|z_1 - z_2|$ (2pts)

Soient $t \in I, (z_1, z_2) \in \mathbb{R}$; on peut supposer sans nuire à la généralité que $z_1 \leq z_2$.

On a : $\left|\dfrac{\partial F}{\partial z}(t,z)\right| \leq L \Rightarrow -L \leq \dfrac{\partial F}{\partial z} \leq L \quad (1).$

La fonction $z \longmapsto \left|\dfrac{\partial F}{\partial z}(t,z)\right|$ étant continue sur $\mathbb{R}$ (puisque $z \longmapsto \dfrac{\partial F}{\partial z}(t,z)$ l'est), elle l'est sur $[z_1, z_2]$ et y est donc intégrable. Puisqu'en plus $z_1 \leq z_2$,

$$\begin{aligned}
(1) &\Rightarrow \int_{z_1}^{z_2}\left|\frac{\partial F}{\partial z}(t,z)dz\right| \leq \int_{z_1}^{z_2} Ldz\\
&\Rightarrow \left|\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial F}{\partial z}(t,z)dz\right| \leq \int_{z_1}^{z_2} Ldz \quad \text{car} \quad \left|\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial F}{\partial z}(t,z)dz\right| \leq \int_{z_1}^{z_2}\left|\frac{\partial F}{\partial z}(t,z)dz\right|\\
&\Rightarrow |F(t,z_2) - F(t,z_1)| \leq L(z_1 - z_2)
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\forall t \in I, \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2, |F(t,z_1) - F(t,z_2)| \leq L|z_1 - z_2|}$

Question 5

1. **Calculer les nombres** m **et** $\overline{m}$ **définis par :**

(a) $m = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} \displaystyle\int_0^1 |G(x,t)|\, dt$ Soit $x \in]0,1[$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |G(x,t)|\, dt &= \int_0^x |G(x,t)|\, dt + \int_x^1 |G(x,t)|\, dt\\
&= \int_0^x |t(1-x)|dt + \int_x^1 |(1-t)x|dt\\
&= (1-x)\int_0^x tdt + x\int_x^1 |(1-t)|dt\\
&= (1-x)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x + x\left[-\frac{(1-t)^2}{2}\right]_x^1\\
&= (1-x)\frac{x^2}{2} + x\frac{(1-x)^2}{2}\\
&= \frac{x(1-x)}{2}
\end{aligned}$$

Par suite, $m = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} \dfrac{x(1-x)}{2}$ Il est trivial, par étude de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x(1-x)}{2}$ qu'elle admet un maximum et l'atteint en $\dfrac{1}{2}$. Alors, $m = \dfrac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)}{2}$. D'où $\boxed{m = \frac{1}{8}}$.

(b) $\overline{m} = \sup_{a \leq x \leq b} \int_a^b |\overline{G}(x,t)|\, dt$ Soit $x \in]a, b[$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |\overline{G}(x,t)|\, dt &= \int_a^x |\overline{G}(x,t)|\, dt + \int_x^b |\overline{G}(x,t)|\, dt \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\int_a^x |(t-a)(b-x)|dt + \int_x^b |(b-t)(x-a)|dt\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\left((b-x)\int_a^x (t-a)dt + (x-a)\int_x^1 |(b-t)|dt\right) \\
&= \frac{1}{b-a}\left((b-x)\left[\frac{(t-a)^2}{2}\right]_a^x + (x-a)\left[-\frac{(b-t)^2}{2}\right]_x^b\right) \\
&= \frac{(b-x)(x-a)}{2(b-a)}(b-a) \\
&= \frac{(b-x(x-a))}{2}
\end{aligned}$$

Par suite, $\overline{m} = \sup_{a \leq x \leq b} \frac{(b-x)(x-a)}{2}$. Il est tout aussi trivial, par étude de la fonction $x \longmapsto \frac{(b-x)(x-a)}{2}$, qu'elle admet un maximum et l'atteint en $\frac{a+b}{2}$. Alors, $m = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{2}$. D'où $\boxed{m = \frac{(b-a)^2}{8}}$.

Remarque 3.

En posant $X = \frac{x-a}{b-a}$ (i.e. $x = a + (b-a)X$), on remarque que $(a \leq x \leq b \Leftrightarrow 0 \leq X \leq 1)$ et $\frac{(b-x)(x-a)}{2} = (b-a)^2\frac{X(1-X)}{2}$.
Alors,

$$\begin{aligned}
\overline{m} &= \sup_{0 \leq x \leq 1} (b-a)^2\frac{X(1-X)}{2} \\
&= (b-a)^2 m
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{m = \frac{(b-a)^2}{8}}$.
Cette remarque n'a probablement l'air de rien, mais de tels changements de variables sont beaucoup utilisés en analyse numérique (notamment dans la recherche de *l'écart* entre une fonction et son polynôme d'interpolation relatif à certains points) et réduisent considérablement les calculs de bornes supérieures de certaines fonctions particulières.

2. **Montrer que** $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathcal{C}(I)$
$u_0 \in \mathcal{C}(I)$ (par hypothèse) et $\forall n \in \mathbb{N}(n \geq 1), u_n \in \mathcal{C}(I)$ car $G \in \mathcal{C}(I)$

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathcal{C}(I)}$

Deuxième Partie

Question 6

1. **Montrer que** $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, |u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq \frac{L}{8} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_{n-1}(t) - u_{n-2}(t)|$.

   Soient $x \in I, n \in \mathbb{N}(n \geq 2)$. On a $|u_n(x) - u_{n-1}(x)| = \left|\int_0^1 G(x,t)\,(F(t,u_{n-1}(t)) - F(t,u_{n-2}(t)))\,dt\right|$.

   Or,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 G(x,t)\,(F(t,u_{n-1}(t)) - F(t,u_{n-2}(t)))\,dt\right| &\leq \int_0^1 G(x,t)\,|F(t,u_{n-1}(t)) - F(t,u_{n-2}(t))|\,dt \\ &\leq \left(\int_0^1 (G(x,t))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |F(t,u_{n-1}(t)) - F(t,u_{n-2}(t))\right. \\ &\leq \left(\int_0^1 |G(x,t)|\,dt\right)\left(\int_0^1 |F(t,u_{n-1}(t)) - F(t,u_{n-2}(t))|\,d\right. \\ &\leq mL\,|u_{n-1}(t) - u_{n-2}(t)|, \forall t \in [0,1]\end{aligned}$$

   La dernière ligne provient des résultats de **Question 4** et **Question 5.1.a**.

   Or $m = \frac{1}{8}$ (d'après **Question 5.1.a**).

   D'où $\boxed{\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, |u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq \frac{L}{8} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_{n-1}(t) - u_{n-2}(t)|}$.

2. **Montrer que** $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, |u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq \frac{L^{n-1}}{8^{n-1}} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|$.

   Nous procédons par récurrence :

   — La propriété est initialisée au rang $n = 1$. En effet, pour $n = 1$, elle s'écrit :

$$\forall x \in I, |u_1(x) - u_0(x)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|$$

   ce qui est évidemment vrai.

   — Soit $k \in \mathbb{N}(k \geq 1)$

   Supposons que $\forall x \in I, |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \leq \frac{L^{k-1}}{8^{k-1}} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|$ et montrons que

   $\forall x \in I, |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \leq \frac{L^k}{8^k} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|$

   Soit $x \in I$. D'après la **Question 1**, on :

$$|u_{k+1}(x) - u_k(x)| \leq \frac{L}{8} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_k(t) - u_{k-1}(t)| \qquad (a)$$

   Or d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\forall t \in I, |u_k(t) - u_{k-1}(t)| \leq \frac{L^{k-1}}{8^{k-1}} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)| \Rightarrow \max_{0 \leq t \leq 1} |u_k(t) - u_{k-1}(t)| \leq \frac{L^{k-1}}{8^{k-1}} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)| \qquad (b)$$

   D'où (par combinaison de (a) et (b)), on a :

$$\forall x \in I, |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \leq \frac{L^k}{8^k} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|$$

   La propriété est alors héréditaire.

Lé propriété étant initialisée au rang $n = 1$ et héréditaire, elle est vraie d'après le principe de raisonnement par récurrence.

D'où $\boxed{\forall x \in I, |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \leq \frac{L^k}{8^k} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|}$

3. **Montrer que** $\forall x \in I, \forall m, p \in \mathbb{N}, |u_{m+p}(x) - u_m(x)| \leq \frac{L^m}{8^m} \frac{1}{1 - \frac{L}{8}} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|$.

Soit $x \in I, m, p \in \mathbb{N}$. On a :

$$
\begin{aligned}
|u_{m+p}(x) - u_m(x)| &\leq \sum_{i=1}^{p} |u_{m+i}(x) - u_{m+i-1}(x)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{p} \frac{L^{m+i-1}}{8^{m+i-1}} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|
\end{aligned}
$$

Or,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \frac{L^{m+i-1}}{8^{m+i-1}} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)| &= \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)| \frac{L^m}{8^m} \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{L}{8}\right)^{i-1} \\
&= \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)| \frac{L^m}{8^m} \frac{1 - \left(\frac{L}{8}\right)}{1 - \frac{L}{8}} \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)| \frac{L}{8}
\end{aligned}
$$

D'où $\boxed{\forall x \in I, \forall m, p \in \mathbb{N}, |u_{m+p}(x) - u_m(x)| \leq \frac{L^m}{8^m} \frac{1}{1 - \frac{L}{8}} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|}$

Question 7

1. **Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme,** c'est-**à-dire :**

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], |u_m(x) - u_{m+p}(x)| \leq \epsilon$$

et qu'elle converge uniformément vers une fonction $u \in C(I)$.

— Si (u_n) est constante, alors, elle est de Cauchy.

— Sinon, $\max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)| \neq 0$.

Soit dans ce dernier cas $\epsilon > 0$.
Cherchons $N \in \mathbb{N}, \forall m > N (m \in \mathbb{N}), \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], |u_m(x) - u_{m+p}(x)| \leq \epsilon$
A la **Question 6.3)**, nous avons montrer que
$\forall x \in I, \forall m, p \in \mathbb{N}, |u_{m+p}(x) - u_m(x)| \leq \frac{L^m}{8^m} \frac{1}{1 - \frac{L}{8}} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|$.

Alors, pour $m, p \in \mathbb{N}$, pour avoir $|u_m(x) - u_{m+p}(x)| \leq \epsilon$, il suffit d'avoir

$$
\begin{aligned}
\frac{L^m}{8^m} \frac{1}{1 - \frac{L}{8}} \max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)| \text{ i.e. } \left(\frac{L}{8}\right)^m &< \frac{1 - \frac{L}{8}}{\max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|} \text{ car } 1 - \frac{L}{8} > 0 \\
\text{i.e. } m &> \frac{1}{\ln\left(\frac{L}{8}\right)} \ln\left(\frac{\left(1 - \frac{L}{8}\right)\epsilon}{\max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|}\right)
\end{aligned}
$$

Prendre $\boxed{N = E\left[\frac{1}{\ln\left(\frac{L}{8}\right)} \ln\left(\frac{\left(1 - \frac{L}{8}\right)\epsilon}{\max_{0 \leq t \leq 1} |u_1(t) - u_0(t)|}\right)\right]}$.

Ayant prouvé l'existence d'un tel N, on conclut que (u_n) est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme

Ceci nous emmène à conclure aussitôt qu'elle converge uniformément vers une fonction $u \in C(I)$

2. **Montrer que**

$$\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |F(t,u(t)) - F(t,u_n(t))| \leq L\,|u(t) - u_n(t)|$$

Soient $t \in I, n \in \mathbb{N}$

Comme $u(t)$ et $u_n(t)$ sont des réels, le résultat de la **Question 4** nous conduit à $|F(t,u(t)) - F(t,u_n(t))| \leq L\,|u(t) - u_n(t)|$

t et n ayant été pris arbitraires dans I et $\mathbb{N}$ respectivement, on conclut que :

$\boxed{\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |F(t,u(t)) - F(t,u_n(t))| \leq L\,|u(t) - u_n(t)|}$

3. **En déduire que**

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t)F(t,u(t))dt \quad \text{et que} \quad \begin{cases} -u''(x) = F(x,u(x)) & \text{pour} x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Souvenons nous de la définition de (u_n) :

$\forall n \in \mathbb{N}(n \geq 1), \forall x \in [0,1], u_n(x) = \displaystyle\int_0^1 G(x,t)F(t,u_{n-1}(t))dt \qquad (1)$

Soit $x \in [0,1]$. Comme u est limite uniforme de (u_n), alors u est limite simple de u_n (i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = u(x)$)

$$\begin{aligned}(1) &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 G(x,t)F(t,u_{n-1}(t))dt \\ &\Rightarrow u(x) = \int_0^1 \left(G(x,t) \lim_{n\to+\infty} F(t,u_{n-1}(t))\right) dt \\ &\Rightarrow u(x) = \int_0^1 G(x,t)F(t,u(t))dt\end{aligned}$$

D'où $\forall x \in [0,1], u(x) = \displaystyle\int_0^1 G(x,t)F(t,u(t))dt$

De cette égalité, on déduit en vertu du résultat de la **Question 2.1)** que $\begin{cases} -u''(x) = F(x,u(x)) & \text{pour} x \in]0, \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

D'où $\boxed{u(x) = \displaystyle\int_0^1 G(x,t)F(t,u(t))dt \quad \text{et que} \quad \begin{cases} -u''(x) = F(x,u(x)) & \text{pour} x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}}$

Question 8

Montrer qu'il existe une fonction w définie sur I telle que :

$$\begin{cases} -w''(x) = \cos(w(x)) & \textbf{pour} \quad x \in]0,1[\\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$$

Posons $\forall (t,z) \in I \times \mathbb{R}, F(t,z) = \cos(z)$ et remarquons d'entrée qu'en prenant $L = 1$, cette fonction se prête bien aux hypothèses de la **Question 3.3)** i.e.

— $L < 8$

— $(t,z) \in I \times \mathbb{R}, \left|\dfrac{\partial F}{\partial z}(t,z)\right| = |-\sin(z)| \leq L$

D'après la **Question 7.3)**, une telle fonction fonction existe et est par exemple limite uniforme de la suite définie par la relation de récurrence

$$w_n(x) = \int_0^1 \cos(w_{n-1}(t))\, dt \quad \text{pour} \quad n \geq 1, \forall x \in I$$

et $w_0 \in \mathcal{C}(I)$

Pour aller plus loin 4 (Méthodes numériques).

Un *esprit peu aguerri* a sans doute pensé que mis à part la vertu ludique de cet exercice, il n'en possède pas d'autre et sert donc simplement à mener la vie dure aux étudiants. Pourtant, il n'en est rien ; cet exercice a un aspect pratique incontestable ; en fait il établit un résultat aussi indubitable qu'indispensable.
Regardons le donc avec un peu plus d'intérêt et remarquons que nous venons là de démontrer l'existence des solutions de certaines équations différentielles issues de la physique et des problèmes d'ingénierie telle celle de la **Question 8** : $\begin{cases} -w''(x) = \cos(w(x)) & \text{pour} \quad x \in]0,1[\\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}$ et toutes celles qui sont de cette forme (forme définie à la **Question 7.3** avec évidemment les contraintes données plus haut sur F).
Un regard plus approfondi de la chose nous montre que nous avons fait mieux que cela : en plus d'avoir démontrer l'existence des solutions à de telles équations différentielles, nous avons d'une certaine manière donné une procédure pour les trouver (ou tout au moins les approcher).
Dans le cas de la **Question 8** par exemple, nous avons vu que la solution est limite uniforme de toute suite de fonctions définie par $u_0 \in \mathcal{C}(I)$ et par la donnée de la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}(n \geq 1)\forall x \in I, \quad w_n(x) = \int_0^1 G(x,t)\cos(w_{n-1}(x))$.
Une telle fonction n'étant pas d'expression simple, on peut se contenter de «l'approcher», notamment par interpolation. En fait, on se fixe des points (x_i) de l'intervalle I (plus il y en a, mieux est l'approximation), auxquels on calcule des approximations à la précision voulue $\tilde{w}(x_i)$ (celle-ci correspond à une valeur $w_N(x)$, N étant choisie toujours par des méthodes numériques de sorte que w_N respecte la contrainte de précision). Ensuite on construit par exemple le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, \tilde{w}(x_i))$ qu'on prend comme approximation de w.
Remarque : La proximité entre w et sa fonction approchante est fixée par le choix du nombre de points et par la proximité entre $\tilde{w}(x_i)$ et $w(x_i)$

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2011

CORRECTION DE MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

Partie 1 : Algèbre (14 points)

Exercice 1

1. (a) **Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les vecteurs propres associés.**(2pts+2pts) **(On choisira des vecteurs dont la première composante est égale à 1).**

— Valeurs propres

Il s'agit des réels $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\det(A-\lambda I_3)=0$

On a : $det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)(-3\lambda+\lambda^2+2)$
$= (1-\lambda)^2(\lambda-2)$

D'où les valeurs propres de A sont : $\boxed{\lambda = 1 \; ou \; \lambda = 2}$.

— Vecteurs propres associés aux valeurs propres L'ensemble des vecteurs propres associés à une valeurs propres λ de A est $E_\lambda = \{\vec{u}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/(A-\lambda I_3)\vec{u} = \vec{0}\}$ ce qui conduit dans ce cas aux relations suivantes :

$$\begin{cases} (-\lambda)x - -y\,z & = 0 \\ x + (2-\lambda)y - z & = 0 \\ -x + -y + (2-\lambda)z & = 0 \end{cases}$$

— **Pour** $\lambda = 1$

On a $\begin{cases} -x-y+z & = 0 \\ x+y-z & = 0 \\ -x-y+z & = 0 \end{cases} \Rightarrow x+y=z.$

Donc $E_1 = \{(x,y,x+y) = k(1,0,1) + l(0,1,1)\; k,l \in \mathbb{R}^*\}$.

Alors $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$ forment une base de E_1. Mais pour avoir une base de E_1 de première composante 1, on choisit $\vec{e_1} = (1,0,1)$ *et* $\vec{e_2} = (1,0,1)-(0,1,1) = (1,-1,0)$

— **Pour** $\lambda = 2$

On a $\begin{cases} -2x-y+z & = 0 \\ x \quad -z & = 0 \\ -x-y & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ x = -y \end{cases}$

donc $E_2 = \{(x,-x,x) = k(1,-1,1)\; k \in \mathbb{R}^*\}$

donc $\vec{e_3} = (1,-1,1)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda = 1 & \vec{e_1} = (1,0,1),\ \vec{e_2} = (1,-1,0) \\ \lambda = 2 & \vec{e_3} = (1,-1,1) \end{array}}$$

(b) **Justifier que A est diagonalisable et la diagonaliser.** (1pt+2pts)

A admet 2 valeurs propres $\lambda = 1$ d'ordre de multiplicité 2 et $\lambda = 2$ d'ordre de multiplicité 1. or E_1 admet 2 vecteurs propres linéairement indépendants et E_2 admet un vecteur propre donc A est diagonalisable d'après le théorème de la diagonalisation.

Diagonalisons A

Il s'agit d'écrire la matrice D équivalente à A dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ cette matrice D vérifie $D = PAP^{-1}$ ou P est la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

La matrice de passage de$(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Ainsi $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

le calcul de P donne $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

et donc $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

(c) **Calculer A^n pour tout n.** (2pts) D'après (b), on peut écrire $A = P^{-1}DP$ et donc $A^n = P^{-1}D^nP$

$$\begin{aligned} A^n &= P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2^n & -2^n & 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 2^n & 1-2^n \\ 1-2^n & 1-2^n & 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 2^n & 1-2^n \\ 1-2^n & 1-2^n & 2^n \end{pmatrix}}$

2. **Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.** (2pts) On a $\begin{cases} u_{n+1} = -v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n - w_n \\ w_{n+1} = -u_n - v_n + 2w_n \end{cases}$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

$$D'o \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 2^n & 1-2^n \\ 1-2^n & 1-2^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n \\ 2^n \\ 2-2^n \end{pmatrix}$$

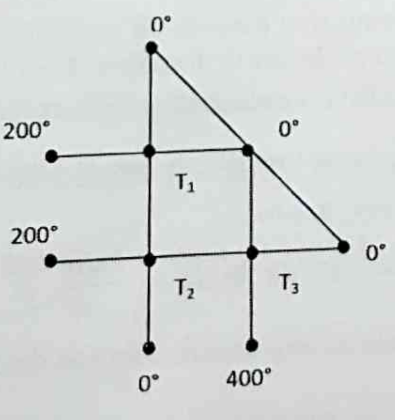
Ainsi, $\boxed{\begin{array}{lcl} u_n & = & 2-2^n \\ v_n & = & 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ w_n & = & 2-2^n \end{array}}$

Pour aller plus loin 5 (Trigonalisation, Jordanisation, etc.).

Éberlué par la puissance de l'algèbre linéaire mise au service de l'analyse réelle pour la détermination d'expression de suites vérifiant un système de récurrence linéaire d'ordre 1, un *esprit peu aguerri* pourrait penser que cette méthode permet de lever tous les problèmes de ce type. Mais il n'en est rien et le lecteur dubitatif peut s'en convaincre en essayant de l'utiliser pour résoudre le système suivant $\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 3v_n - 4w_n \\ v_{n+1} = -6u_n - 2v_n + 5w_n \\ w_{n+1} = 4u_n + 2v_n - w_n \end{cases}$

Mais devant cette difficulté, l'algèbre linéaire ne baisse pas les bras et développe, lorsque la diagonalisation n'est pas possible, des méthodes telles la trigonalisation, la Jordanisation, etc. qui permettent tout aussi d'élever des matrices aux puissances voulues.
Pour aller plus loin, le lecteur est invité à résoudre le système ci-dessus donné par trigonalisation de la matrice qui y apparait implicitement.

Exercice 2



(3pts)

Calculer la température aux trois mailles intérieures.

L'énoncé du problème nous invite à écrire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} T_2 = \dfrac{T_3 + T_1 + 200 + 0}{4} \\ T_1 = \dfrac{T_2 + 200 + 0 + 0}{4} \\ T_3 = \dfrac{T_2 + 400 + 0 + 0}{4} \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} T_2 = \dfrac{T_3 + T_1 + 200 + 0}{4} \\ T_1 = \dfrac{T_2 + 200 + 0 + 0}{4} \\ T_3 = \dfrac{T_2 + 400 + 0 + 0}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T_1 - 4T_2 + T_3 = -200 \\ 4T_1 - T_2 = 200 \\ T_2 - 4T_3 = -400 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_1 - 4T_2 + T_3 = -200 \\ 15T_2 - 4T_3 = 1000 \\ T_2 - 4T_3 = -400 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_1 - 4T_2 + T_3 = -200 \\ T_2 = 100 \\ T_3 = 125 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T_1 = 75 \\ T_2 = 100 \\ T_3 = 125 \end{cases}$$

D'où $\boxed{\begin{cases} T_1 = 75 \\ T_2 = 100 \\ T_3 = 125 \end{cases}}$

Partie 2 : Probabilité (18 points)

Exercice 3

1. **Montrer que f est une densité de probabilité et déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ayant pour densité f.** (1pt+1pt)

Rappelons à toutes fins utiles qu'une densité de probabilité est toute fonction continue par morceau, positive et dont l'intégrale sur le domaine de définition vaut 1.

La fonction sus-définie est positive, continue (et donc continue par morceau).

Par ailleurs [3], $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$ est une IIC en $-\infty$ et $+\infty$. Or la fonction $u : x \longmapsto e^{-x}$ réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ vers $]0, +\infty[$.

En posant $u = e^{-x}$, on a $du = -e^{-x}dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{u}$. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$ est donc de même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$ et égale à cette dernière en cas de convergence.

3. Nous commençons par démontrer que cette intégrale est définie. Toutefois cette procédure ne convient qu'aux maniaques de la rigueur mathématique. L'intégrale peut donc immédiatement être calculée sous l'hypothèse qu'elle converge.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$ est une IIS en $+\infty$. Par ailleurs, la fonction $g : u \longmapsto \dfrac{1}{(1+u)^2}$ est positive et on a $u^{\frac{3}{2}}g(u) = \dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{1+u^2} \to 0$ lorsque $u \to +\infty$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$ converge donc d'après la règle $u^\alpha g(u)$ avec $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$ et peut alors être calculée.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2} &= \left[-\frac{1}{1+u}\right]_0^{+\infty} \\ &= 1\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$ converge et on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx = 1$$

f étant continue par morceau, positive et d'intégrale sur le domaine de définition égale à 1, f est une densité de probabilité.

2. **Soit $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$. En étudiant la fonction φ, montrer qu'elle est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$. Déterminer sa réciproque.** **(1pt+1pt+1pt)**

   φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

   $$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} > 0\end{aligned}$$

   φ étant continue et strictement croissante, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x), \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)[$, soit $]-1, 1[$.

   Détermination de sa bijection réciproque :

   $$\begin{aligned}\varphi(x) = x &\Rightarrow e^x - 1 = (e^x+1)\varphi(x) \\ &\Rightarrow x = \log\left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right)\end{aligned}$$

   D'où la bijection réciproque φ^{-1} de φ est la fonction $x \longmapsto \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

3. **Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \varphi(X)$. Déterminer la fonction de répartition et la densité de Y** **(2pts+2pts)**

   Nous les notons respectivement F_Y et f_Y. Soit $y \in]-1, 1[$. On a :

   $$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(\varphi(x) \le y) \\ &= P\left(x \le \varphi^{-1}(y)\right) \\ &= F_X\left(\varphi^-1(y)\right)\end{aligned}$$

Or pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}dt \\ &= \int_{e^x}^{0} \frac{u}{(1+u)^2}\left(-\frac{du}{u}\right) \text{ où on a posé } u = e^{-t} \\ &= \int_{0}^{e^x} \frac{du}{(1+u)^2} \\ &= \left[-\frac{1}{1+u}\right]_0^{e^x} \\ &= 1 - \frac{1}{1+e^x}\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= 1 - \frac{1}{1+e^{\varphi^{-1}(y)}} \\ &= 1 - \frac{1}{1+\frac{1+y}{1-y}} \\ &= 1 - \frac{1-y}{2} \\ &= \frac{1+y}{2}\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\forall y \in]-1,1[, F_Y(y) = \frac{1+y}{2}}$.

On en déduit aussitôt (sachant $f_Y = F'_Y$) que $\boxed{\forall y \in]-1,1[, f_Y(y) = \frac{1}{2}}$

Exercice 4

1. **Décrire les évènements $X = 2$, $X = 3$, $= 4$ et calculer p_2, p_3 et p_4.** **(1pt+1,5pt)**
Pour rendre aisée la compréhension de cette description, nous notons L_i le résultat $\overline{F}$ (pour pile) ou F (pour face) du i^{eme} lancée. Alors,

$$\begin{aligned}&X = 2 \Leftrightarrow L_1 = L_2 = \overline{F} \\ &X = 3 \Leftrightarrow L_1 = F, L_2 = L_3 = \overline{F} \\ &X = 4 \Leftrightarrow (L_1, L_2, L_3, L_4) \in \{(\overline{F}, F, \overline{F}, \overline{F}), (F, F, \overline{F}, \overline{F}\}\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$P_2 = P(X=2) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$P_3 = P(X=3) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

$$P_4 = P(X=4) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}$$

2. **Montrer que** $p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}, \forall n \geq 4$

(2pts)

Les évènements $L_1 = \overline{F}$ et $L_1 = \overline{F}$ forment un système complet d'évènements[4]. Alors,

$$\begin{aligned} P_n &= P(X=n) \\ &= P(L_1 = \overline{F})P_{L_1=\overline{F}}(X=n) + P(L_1 = F)P_{L_1=F}(X=n) \\ &= P(L_1 = \overline{F} \times P(L_2 = F) \times P_{n-2} + P(L_1 = F) \times P_{n-1} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}P_{n-2} + \frac{1}{3} \times P_{n-1} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{P_n = \frac{2}{9}P_{n-2} + \frac{1}{3}P_{n-1}}$

Remarque 6.

La résolution d'un problème de probabilité se ramène très souvent à la recherche d'un système complet d'évènements, celui-ci pouvant être facilement identifiable ou pas. Une fois un système complet d'évènements déterminé, il n'y a plus de raison de s'arrêter...

3. **En déduire l'expression de** p_n **pour tout** $n \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}(n \geqslant 2)$.

P_n est solution de la récurrence linéaire d'ordre 2 ci-dessus trouvée.

Le polynôme caractéristique associé est :

$$\begin{aligned} P(r) &= r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{2}{9} \\ &= \frac{1}{9}\left(9r^2 - 3r - 2\right) \end{aligned}$$

$\Delta = (-3)^2 - 4(9)(-2) = 9^2$.

D'où $P(r) = \left(r - \frac{2}{3}\right)\left(r + \frac{1}{3}\right)$.

Il s'ensuit que $P_n = \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Les probabilités calculées précédemment fixent les constantes réelles α et β comme suit :

$$\begin{cases} P_2 = \frac{4}{9} \\ P_3 = \frac{4}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha + \beta = 4 \\ 8\alpha - \beta = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\alpha + \beta = 4 \\ 8\alpha - \beta = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = \frac{4}{3} \end{cases}$$

D'où $\boxed{P_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$

4. Voir cours de Probabilités de Leo

4. **Soit $q \in]-1,1[$. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ et en déduire l'espérance mathématiques $E(X)$ de la variable aléatoire X** **(1,5pt+2pts)**

La règle $n^\alpha u_n$ nous montre qu'il s'agit d'une somme définie.

On a : $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} nq^n$. Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} nq^n &= q\sum_{n=1}^{N} nq^{n-1} \\
&= q\frac{d}{dq}\left(\sum_{n=0}^{N} q^n\right) \\
&= q\frac{d}{dq}\left(\frac{1-q^N}{1-q}\right) \\
&= q\frac{-Nq^{N-1}(1-q)+(1-q^N}{(1-q)^2}
\end{aligned}$$

Et on a :

$$\lim_{n\to\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

D'où $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}}$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(X=x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} nP_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \\
&= \frac{2}{3}\frac{\frac{2}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - \frac{-\frac{1}{3}}{\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)\right)^2}\times\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{63}{16}
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{E(X) = \frac{63}{16}}$

Partie 3 : Analyse (18 points)

Exercice 5

1. **Déterminer le rayon de convergence de la série S. En déduire le domaine de définition D_S de S. (on étudiera la convergence de S aux bornes du domaine de définition)** (1pt+2pts)

On a : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ avec $u_n = a_n x^n$ et $a_n = \dfrac{2^n}{n^2+2n}$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2x}{e^{\frac{1}{n}\ln n + \frac{1}{n}\ln(n+2)}} = \frac{2x}{e^{0+0}} = 2x$$

donc d'après le **critère de Cauchy** :

— si $x < \dfrac{1}{2}$ alors la série $S(x)$ converge

— si $x > \dfrac{1}{2}$ alors la série $S(x)$ diverge

Et donc en revenant à la définition du rayon de convergence, nous déduisons de ce qui précède que $\boxed{R = \dfrac{1}{2}}$.

— Étude aux bornes du domaine convergence :

En $x = \dfrac{1}{2}$, on a : $u_n = \dfrac{1}{n^2+2n}$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n^2+2n} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Mais la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ converge comme série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Il vient alors d'après le critère de comparaison que la série de terme général (u_n) converge.

En $x = -\dfrac{1}{2}$, on a $u_n = (-1)^n t_n$ avec $t_n = \dfrac{1}{n^2+2n}$. On remarque alors que (t_n) est décroissante et tend vers 0. Alors, d'après le critère des séries alternées, la série de terme général (u_n) est convergente.

Puisque $R = \dfrac{1}{2}$ et que S converge en $\dfrac{1}{2}$ et en $-\dfrac{1}{2}$, alors $\boxed{D_S = \left[-\dfrac{1}{2}, +\dfrac{1}{2}\right]}$

2. **Déterminer le plus grand intervalle I dans lequel S est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que S' n'est pas définie en $\dfrac{1}{2}$** (1pt+2pts)

Étant donné que nous sommes en présence d'une série entière dont $R > 0$ alors S est dérivable dans son disque de convergence D_S. Pour tout réel x dans D_S $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n}{n+2} x^{n-1}$.

<u>Étudions la dérivabilité en $-\dfrac{1}{2}$ et en $\dfrac{1}{2}$:</u>

— $S'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n+2}$ est un série **harmonique** donc diverge.

— $S'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n+2}$ est un série **harmonique** donc diverge.

<u>**Conclusion**</u> : Le plus grand intervalle dans lequel S est de classe C^1 est $\boxed{I = \left]-\dfrac{1}{2}, +\dfrac{1}{2}\right[}$.

3. **Donner le développement en série entière de $\ln(1-2x)$ en précisant l'ensemble sur lequel ce développement est valable. En déduire que pour $x \in I, xS'(x) + 2S(x) = -\ln(1-2x)$** (2pts+3pts)

$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right[$, $-2x \in]-1,1[$, donc

$$\ln(1-2x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n}x^n$$

<u>Conclusion</u> : Le développement en série entière de $\ln(1-2x)$ est $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2^n}{n}\right)x^n, x \in I$

* <u>Déduisons que pour $x \in I, xS'(x) + 2S(x) = -\ln(1-2x)$</u> :
En s'appuyant sur le fait que S est dérivable sur I, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} xS'(x) + 2S(x) &= x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n+2}x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n^2+2n}x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n x^n}{n+2}(1+\frac{2}{n}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n}x^n \\ &= -(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n}x^n) \\ &= -\ln(x-2x) \end{aligned}$$

d'après ce qui précède.

4. **Résoudre l'équation différentielle $xy'(x) + 2y(x) = -\ln(1-2x)$ sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$** (3pts)

* <u>Solution sans second membre</u> :

$\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, $xy' + 2y = 0$
ie $xy' = -2y$
ie $\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x}$
ie $\frac{dy}{y} = -\frac{2}{x}dx$
ie $\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{2}{x}dx$
ie $\ln|y| = -2\ln|x| + k, k \in \mathbb{R}$
ie $y = \frac{\lambda}{x^2}$

* <u>Variation de la constante</u> :

$y' = \frac{\lambda' x - 2\lambda}{x^3}$, donc $xy' + 2y = -\ln(1-2x) \Rightarrow \frac{\lambda'}{x} = -\ln(1-2x)$

ie $\lambda(x) = \int -x\ln(1-2x)dx$

Effectuons une intégration par parties en posant $u'(x) = -1$ et $v(x) = x\ln(1-2x)$; alors on obtient : $\lambda(x) = -x^2\ln(1-2x) + \int x\ln(1-2x)dx - \int \frac{2x^2}{1-2x}dx$

ie $\lambda(x) = -x^2\ln(1-2x) - \lambda(x) + \int (x + \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}}{1-2x})dx + K$

ie $2\lambda(x) = \frac{1}{2}(x^2+x) + (\frac{1}{4} - x^2)\ln(1-2x) + K$

soit $\forall x \in]0, \frac{1}{2}[$,

$$\lambda(x) = \frac{1}{4}x(1+x) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - x^2)\ln(1-2x) + K$$

Or $y(x) = \frac{\lambda(x)}{x^2}$

donc $y(x) = \frac{1+x}{4x} + \frac{1}{8x^2}ln(1-2x) - \frac{1}{2}ln(1-2x) + \frac{K}{x^2}$

__Conclusion__ : Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies sur $]0, \frac{1}{2}[$ par $\boxed{y(x) = \frac{1+x}{4x} + \frac{1}{8x^2}\ln(1-2x) - \frac{1}{2}\ln(1-2x) + \frac{K}{x^2}, K \in \mathbb{R}}$.

Déterminer la solution qui admet une limite quand x tend vers 0. (2pts)

On a : $\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, y(x) = \frac{1+x}{4x} + \frac{1}{8x^2}\ln(1-2x) - \frac{1}{2}\ln(1-2x) + \frac{K}{x^2}, K \in \mathbb{R}$

Au voisinage de 0(c'est le cas ici car $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$), $\ln(1-2x) = -2x - 2x^2 + O(x^3)$ donc

$$y(x) = \frac{1+x}{4x} + \frac{1}{8x^2}(-2x - 2x^2 + O(x^3)) - \frac{1}{2}\ln(1-2x) + \frac{K}{x^2}$$

$$= \frac{1}{4x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4x} - \frac{1}{4} + O(x) - \frac{1}{2}\ln(1-2x) + \frac{K}{x^2}$$

$$= \frac{K}{x^2} - \frac{1}{2}\ln(1-2x) + O(x)$$

Or $\lim_{x\to 0} O(x) = 0$, $\lim_{x\to 0}\ln(1-2x) = 0$ donc y à une limite en 0 si $K = 0$

Ainsi la solution de l'équation admettant une limite quand $x \to 0$ est :

$$\boxed{y(x) = \frac{1+x}{4x} + \frac{1}{8x^2}\ln(1-2x) - \frac{1}{2}\ln(1-2x)}$$

5. **Donner la forme explicite de $S(x)$ pour $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$** Forme explicite de $S(x)$ pour $x \in]0, \frac{1}{2}[$:

Puisque S est une solution de l'équation différentielle précédente(d'après la **question 3)**), alors on peut déduire que S est la solution de cette équation qui admet une limite(0 d'après la question précédente) quand $x \to 0$ car $S(0) = 0$. Ainsi on peut conclure de façon élégante que

$$\boxed{\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, S(x) = \frac{1+x}{4x} + \frac{1}{8x^2}\ln(1-2x) - \frac{1}{2}\ln(1-2x)}$$

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2012

CORRECTION DE MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

Exercice 1

1. **Calculer les valeurs propres de A.** (1,5pt)

   Il s'agit des réels $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\det(A-\lambda I_3)=0$

   On a $\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 6 & 5-\lambda \end{vmatrix}$

   $= (5-\lambda)(-20-\lambda+\lambda^2+18)$
   $= (5-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$

   don les valeurs propres sont : $\boxed{\lambda = 5 \; ou \; \lambda = -1 \; ou \; \lambda = 2}$

2. **Calculer les vecteurs propres de A. On les notera $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.** (1,5pt)

   L'ensemble des vecteurs propres associés à une valeurs propres λ de A est

   $E_\lambda = \left\{\vec{u}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (A-\lambda I_3)\vec{u} = \vec{0}\right\}$ ce qui conduit dans ce cas aux relations suivantes :

   $$\begin{cases} (-4-\lambda)x - 6y = 0 \\ 3x + (5-\lambda)y = 0 \\ 3x + 6y + (5-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

   — **Pour** $\lambda = -1$

   On a $\begin{cases} -3x - 6y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \\ 3x + 6y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = 0 \end{cases}$

   donc $E_{-1} = \{(-2y, y, 0) = k(-2,1,0) \; k \in \mathbb{R}*\}$

   — **Pour** $\lambda = 2$

   On a $\begin{cases} -6x - 6y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ 3x + 6y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = -y \end{cases}$

   donc $E_2 = \{(-y, y, -y) = k(-1,1,-1) \; k \in \mathbb{R}*\}$

   — **Pour** $\lambda = 5$

   On a $\begin{cases} -9x - 6y = 0 \\ 3x = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

   donc $E_5 = \{(0,0,z) = k(0,0,1) \; k \in \mathbb{R}*\}$

3. **Trouver la matrice P de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.** (3pts)

   On pose $\vec{e_1} = (1,-1,1)) \; \vec{e_2}(-2,1,0) \; et \; \vec{e_3} = (0,0,1)$

   Alors la matrice de passage de$(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Ainsi $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

le calcul de P donne $\boxed{P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$

4. **Trouver la matrice D de f dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.** (3pts)

On a $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$ (matrice des valeurs propres).

5. **Quelle relation y a-t-il entre A, D et P ?** (3pts)

On a $\boxed{D = PAP^{-1}}$

6. **Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.** (3pts)

D'après 6), on peut écrire $A = P^{-1}DP$ et donc $A^n = P^{-1}D^nP$

$$\begin{aligned}
A^n &= P^{-1} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2^n & -2^{n+1} & 0 \\ -(-1)^n & -(-1)^n & 0 \\ 5^n & 2.5^n & 5^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ 2^n - (-1)^n & 2^{n+1} - (-1)^n & 0 \\ 5^n - 2^n & 2(5^n - 2^n) & 5^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ 2^n - (-1)^n & 2^{n+1} - (-1)^n & 0 \\ 5^n - 2^n & 2(5^n - 2^n) & 5^n \end{pmatrix}}$

7. **Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n et de u_0, v_0, w_0.** (4pts)

On a $\begin{cases} u_{n+1} = -4v_n - 6w_n \\ v_{n+1} = 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$

On peut donc écrire $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

On en déduit que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\text{D'où } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ 2^n - (-1)^n & 2^{n+1} - (-1)^n & 0 \\ 5^n - 2^n & 2(5^n - 2^n) & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2(-1)^n - 2^n)u_0 + (2(-1)^n - 2^{n+1})v_0 \\ (2^n - (-1)^n)u_0 + (2^{n+1} - (-1)^n)v_0 \\ (5^n - 2^n)u_0 + 2(5^n - 2^n)v_0 + 5^n w_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\begin{aligned} u_n &= (2(-1)^n - 2^n)u_0 + (2(-1)^n - 2^{n+1})v_0 \\ v_n &= (2^n - (-1)^n)u_0 + (2^{n+1} - (-1)^n)v_0 \\ w_n &= (5^n - 2^n)u_0 + 2(5^n - 2^n)v_0 + 5^n w_0 \end{aligned}}$

Exercice 2

1. **On choisit l'une des deux pièces au hasard et on la lance une fois. Quelle est la probabilité qu'elle tombe sur pile ?** **(2pts)**

   Nous allons noter comme suit les différents évènements :

   Pour $i \in \{1,1\}$, C_i : «La pièce choisie est la pièce i»

   F : «La pièce lancée tombe sur pile».

   — $P(C_1) = P(C_2) = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow C_1 \neq \emptyset$ et $C_2 \neq \emptyset$

   — $P(C_1 \cap C_2) = 0 \Rightarrow C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$

   — $C_1 \cup C_2 = \Omega$

   Les évènements C_1 et C_2 forment alors un système complet d'évènements[5]. Ains,

$$\begin{aligned} P(\overline{F}) &= P(C_1)P_{C_1}(\overline{F}) + P(C_2)P_{C_2}(\overline{F}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

   D'où $\boxed{P(\overline{F}) = \frac{3}{10}}$.

2. **On choisit l'une des deux pièces au hasard et on la lance une fois. Quelle est la probabilité qu'elle tombe sur face ?** **(2pts)**

   Il s'agit de calculer $P(F)$.

   On a $P(F) = 1 - P(\overline{F})$.

   D'où $\boxed{P(F) =: \frac{7}{10}}$.

3. **On choisit l'une des deux pièces au hasard et on la lance deux fois. Quelle est la probabilité qu'elle tombe exactement une fois sur pile ?** **(3pts)**

   Si on note X la v.a. égale au nombre de fois qu'on tombe sur pile, alors, $X \sim B(2, p)$ où p est la probabilité de tomber sur pile selon la pièce choisie.

   Notons P_1 la probabilité à calculer. On a :

$$\begin{aligned} P_1 &= P(C_1)P_{C_1}(X = 1) + P(C_2)P_{C_2}(X = 2) \\ &= \frac{1}{2} \times C_2^1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times C_2^1 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} \\ &= \frac{34}{100} \end{aligned}$$

   D'où $\boxed{P_1 = \frac{17}{50}}$

4. **On choisit l'une des deux pièces au hasard et on la lance une fois, elle tombe sur pile. Quelle est la probabilité que ce soit la pièce équilibrée ?** **(2pts)**

5. Eh oui ! Derechef les systèmes complets d'évènements...

Il s'agit de calculer $P_{\overline{F}}(C_1)$. C_1 et C_2 formant un système complet d'évènements, la formule de Bayes s'écrit :

$$\begin{aligned}
P_{\overline{F}}(C_1) &= \frac{P(C_1)\times P_{C_1}(\overline{F})}{P(C_1)\times P_{C_1}(\overline{F}) = P(C_2)\times P_{C_2}(\overline{F}})\\
&= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}}
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{P_{\overline{F}}(C_1) = \frac{5}{6}}$.

5. **On choisit l'une des deux pièces au hasard et on la lance deux fois, elle tombe sur pile. Quelle est la probabilité que ce soit la pièce équilibrée ?** **(2pts)**

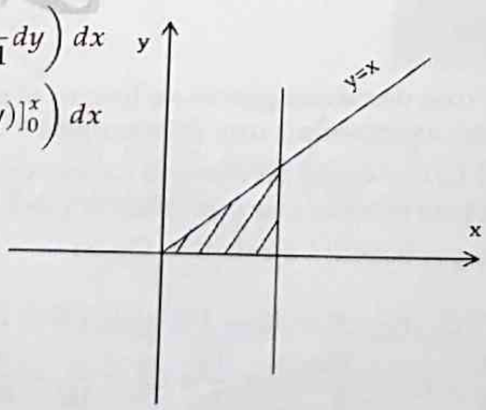
Si on note $\overline{FF}$ l'évènement : « la pièce tombe deux fois sur pile », alors, il s'agit de calculer $P_{\overline{FF}}(C_1)$. Pour les mêmes raisons que précédemment, on a :

$$\begin{aligned}
P_{\overline{FF}}(C_1) &= \frac{P(C_1)\times P_{C_1}(\overline{FF})}{P(C_1)\times P_{C_1}(\overline{FF}) = P(C_2)\times P_{C_2}(\overline{FF}})\\
&= \frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}\right)}{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{9}\right)^2}\\
&= \frac{81}{85}
\end{aligned}$$

Exercice 3

Calculer l'intégrale $\iint_D f(x,y)dxdy$ **où** $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0\le x\le 1, 0\le y\le x\}$ **et** $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}$ (2pts)

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)dxdy &= \int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}\int_0^x\frac{1}{y^2+1}dy\right)dx\\
&= \int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}\left[\operatorname{Arctan}(y)\right]_0^x\right)dx\\
&= \int_0^1\frac{\operatorname{Arctan} x}{x^2+1}dx\\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{Arctan} x\right)^2\right]_0^1\\
&= \frac{\pi^2}{32}
\end{aligned}$$



D'où $\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \frac{\pi^2}{32}}$

Exercice 4

On considère $\mathbb{R}^2$ **muni de la norme** $||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2}$.

1. **Montrer que** $\forall u\in\mathbb{R}$, **on a** $0\le 1-\cos u\le\frac{u^2}{2}$. (2pts)

— On a $\forall u\in\mathbb{R}, \cos u\le 1 \Leftrightarrow \forall u\in\mathbb{R}, 1-\cos u\ge 0$.

— Considérons la fonction numérique de la variable réelle $g : u \longmapsto 1 - \cos u - \dfrac{u^2}{2}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $u \in \mathbb{R}$.
On a $g'(u) = \sin u - u$.
g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :
$g''(u) = \cos u - 1 \leq 0 \Rightarrow g'$ est décroissante sur $\mathbb{R}$
Par ailleurs, $\lim\limits_{u \to -\infty} g'(u) = +\infty$, $\quad g'(0) = 0$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} g'(u) = -\infty$

D'où g' est $\begin{cases} = 0 \text{ pour } u = 0 \\ < 0 \text{ pour } u > 0 \\ > 0 \text{ pour } u < 0 \end{cases}$ On conclut alors que $g(u) \leq 0, \forall u \in \mathbb{R}$

u	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(u)		+	0	-	
g(u)	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

D'où $\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, 0 \leqslant 1 - \cos u \leqslant \dfrac{u^2}{2}}$

2. **En déduire que la fonction** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos xy}{x^2 + y^2} & \textbf{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \textbf{si} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **est continue en** $(0,0)$. (2pts)

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On a :

$$0 \leqslant 1 - \cos xy \leqslant \frac{(yx)^2}{2} \Rightarrow |1 - \cos xy| \leqslant \frac{(xy)^2}{2}$$
$$\left|\frac{1 - \cos xy}{x^2 + y^2}\right| \leqslant \frac{(xy)^2}{2\,(x^2 + y^2)}$$

Par ailleurs, $(|x| - |y|)^2 = x^2 - 2|X||y| + y^2 \Rightarrow |x||y| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$

Alors, $\left|\dfrac{1 - \cos xy}{x^2 + y^2}\right| \leqslant \dfrac{\left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)^2}{2(x^2 + y^2}$ i.e. $\left|\dfrac{1 - \cos xy}{x^2 + y^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{8}\left(x^2 + y^2\right)$. Or $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{1}{8}\left(x^2 + y^2\right) = 0$.

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.

D'où $\boxed{f \text{ est continue en } (0,0)}$

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **deux fois différentiable. Soit** $g :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ **définie par** $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

On pose $h = f \circ g$.

1. **Montrer que h est différentiable sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)$ et $\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de $r,\theta,\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta))$.** (2pts)

Remarque 7.

A toutes fins utiles, précisons que g est en fait la fonction qui permet de passer du système de coordonnées polaires planes à celui de coordonnées cartésiennes. Ainsi, x et y qui apparaissent dans les questions sont implicitement définis et on a : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

— $g :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est différentiable. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable. Alors, $h = f\circ g$ est différentiable comme composée bien définie de fonctions différentiables.

— Soit $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial (f\circ g)}{\partial \theta}(r,\theta)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta))\frac{\partial y}{\partial \theta}\\ &= r\left(-\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta) + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta))\right)\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial (f\circ g)}{\partial r}(r,\theta)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta))\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta)) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta))\end{aligned}$$

D'où $\boxed{\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) = r\left(-\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta) + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta))\right) \text{ et } \frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta)) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta))}$

2. **En déduire l'expression de $\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))$ et de $\frac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta))$ en fonction de $r,\theta,\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)$ et de $\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)$** (3pts)

Les résultats de la question précédente nous conduisent au système suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))\\ \frac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)\\ \frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)\end{pmatrix}$$

$\det M = r \neq 0$. Ce système admet donc un unique vecteur solution.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta)) &= \frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) & \sin\theta\\ \frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) & r\cos\theta\end{vmatrix}}{\det M}\\ &= \frac{r\cos\theta\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) - \sin\theta\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)}{r}\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta)) = \frac{\begin{vmatrix} \cos\theta & \frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) \\ -r\sin\theta & \frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) \end{vmatrix}}{\det M}$$
$$= \frac{\cos\theta\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) + r\sin\theta\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)}{r}$$
$$= \frac{r\sin\theta\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) + \cos\theta\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)}{r}$$

D'où
$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta)) &= \frac{r\cos\theta\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) - \sin\theta\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)}{r} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(g(r,\theta)) &= \frac{r\sin\theta\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) + \cos\theta\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)}{r} \end{aligned}}$$

3. **En déduire les expressions de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r,\theta))$ et de $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(r,\theta))$ en fonction r,θ et des dérivées partielles d'ordre un et deux de h au point (r,θ).** (3pts)

On a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r,\theta)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r\cos\theta\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) - \sin\theta\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)}{r}\right]$$
$$= \frac{1}{r^2}\left[r\left(\cos\theta\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) + r\cos\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r,\theta) - \sin\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}(r,\theta)\right) - \left(r\cos\theta\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) - \sin\theta\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)\right)\right]$$
$$= \frac{1}{r^2}\left(r^2\cos\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r,\theta) - r\sin\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}(r,\theta) + \sin\theta\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(r,\theta))\right) = \frac{1}{r}\left(-r\sin\theta\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) + r\cos\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}(r,\theta) - \cos\theta\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) - \sin\theta\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}(r,\theta)\right)$$

Et :

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\begin{aligned}
\tan\theta = \frac{y}{x} &\Rightarrow \left(1+\tan^2\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\\
&\Rightarrow \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\\
&\Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{r}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(g(r,\theta)\right) &= \frac{\cos\theta}{r^2}\left(r^2\cos\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r,\theta) - r\sin\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}(r,\theta) + \sin\theta\frac{\partial h}{\partial\theta}(r,\theta)\right)\\
&\quad - \frac{\sin\theta}{r^2}\left(-r\sin\theta\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) + r\cos\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}(r,\theta) - \cos\theta\frac{\partial h}{\partial\theta}(r,\theta) - \sin\theta\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}(r,\theta)\right)\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}(r,\theta) - 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}(r,\theta)\\
&\quad + 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial h}{\partial\theta}(r,\theta) + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\left(g(r,\theta)\right)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\left(g(r,\theta)\right)\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\left(g(r,\theta)\right)\right)\frac{\partial\theta}{\partial y}
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\left(g(r,\theta)\right)\right) &= \frac{1}{r^2}\left[r\left(\sin\theta\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) + r\sin\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r,\theta) + \cos\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}(r,\theta)\right)\right.\\
&\quad \left. - \left(r\sin\theta\frac{\partial h}{\partial\theta}(r,\theta) + \cos\theta\frac{\partial h}{\partial\theta}(r,\theta)\right)\right]\\
&= \frac{1}{r^2}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r,\theta) + r\cos\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}(r,\theta) - \cos\theta\frac{\partial h}{\partial\theta}(r,\theta)\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\left(g(r,\theta)\right)\right) = \frac{1}{r}\left(r\cos\theta\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) + r\sin\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}(r,\theta) - \sin\theta\frac{\partial h}{\partial\theta}(r,\theta) + \cos\theta\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}(r,\theta)\right)$$

Et :

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$$

$$\begin{aligned}
\tan\theta = \frac{y}{x} &\Rightarrow \left(1+\tan^2\theta\right)\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{x}\\
&\Rightarrow \left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{x}\\
&\Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(r,\theta)) &= \frac{\sin\theta}{r^2}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r,\theta)+r\cos\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}(r,\theta)-\cos\theta\frac{\partial h}{\partial\theta}(r,\theta)\right)\\ &+\frac{\cos\theta}{r^2}\left(r\cos\theta\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)+r\sin\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}(r,\theta)-\sin\theta\frac{\partial h}{\partial\theta}(r,\theta)+\cos\theta\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}(r,\theta)\right)\\ &=\sin^2\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}(r,\theta)+2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}(r,\theta)\\ &-2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial h}{\partial\theta}(r,\theta)+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r,\theta)) &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}(r,\theta)-2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}(r,\theta)+2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial h}{\partial\theta}(r,\theta)+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(r,\theta)) &= \sin^2\theta\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}(r,\theta)+2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}(r,\theta)-2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial h}{\partial\theta}(r,\theta)+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)\end{aligned}}$$

4. **Calculer** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r,\theta))+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(r,\theta))$ **en fonction** r,θ **et des dérivées partielles d'ordre un et deux de** h **au point** (r,θ). (3pts)

A partir des résultats de la question précédente, on obtient aisément :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r,\theta))+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(r,\theta))=\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}(r,\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta)}.$$

5. **Dans cette question uniquement, on suppose que** h **ne dépend que de** r **et que** $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$ **pour** $(x,y)\neq(0,0)$. **Déduire l'expression de** h**, puis celle de** $f(x,y)$ **pour** $(x,y)\neq(0,0)$. (2pts) Comme h ne dépend que de r, $\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2}(r,\theta)=0$.

Ainsi, en exploitant le résultat de la question précédente, on peut écrire que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(g(r,\theta))+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(g(r,\theta))=0 &\Leftrightarrow h''(r)+\frac{1}{r}h'(r)=0,\forall r\in]0,+\infty[\\ &\Leftrightarrow \frac{dh'}{h'}=-\frac{dr}{r}\\ &\Leftrightarrow \exists c\in\mathbb{R},\ln|h'|=-\ln|r|+c,\forall r\in]0,+\infty[\\ &\Leftrightarrow \exists k_1\in\mathbb{R},h'(r)=\frac{k_1}{r},\forall r\in]0,+\infty[\\ &\Leftrightarrow \exists k_1,k_2\in\mathbb{R},h(r)=k_1\ln r+k_2,\forall r\in]0,+\infty[\end{aligned}$$

Il vient alors que $\boxed{h(r)=k_1\ln r+k_2,\forall r\in]0,+\infty[\text{ et } f(x,y)=\frac{k_1}{2}\ln(x^2+y^2)+k_2,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ avec $k_1,k_2\in\mathbb{R}$

Pour aller plus loin 8 (D'un système à un autre).

Long et «interminable» n'est-ce pas ! Oui, c'est long, je vous l'accorde. J'avoue même que ça parait interminable. Mais avant qu'un *esprit peu aguerri* ne pense que c'est inutile, disons avec force et sans ménagement que c'est utile ; même, c'est très utile, peut-être trop utile.

Précisons également avec plus de force encore, avec plus de véhémence, qu'étant donné un champ scalaire Φ, s'il est vrai qu'en coordonnées cartésiennes (x, y, z),

$\Delta\Phi = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$, il faut très vite dissuader le *premier idiot* de penser que

$\Delta\Phi = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$.

Cet exercice nous le montre bien : partant de l'expression du Laplacien en coordonnées cartésiennes (x, y, z), on a établit (non sans sueur) qu'en coordonnées cylindriques (r, θ, z),

$\Delta\Phi = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial \theta^2} + r\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$.

Mieux, il nous enseigne comment nous pouvons exprimer tout opérateur dans un système de coordonnées donné partant de son expression dans un autre.

Pour aller plus loin, le lecteur peut exprimer le Laplacien en coordonnées sphériques (R, θ, φ) sachant que $\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2013

CORRECTION DE MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

Nous marquerons ici la proposition «e» pour signifier qu'aucune des propositions données ne correspond au QCM posé. Toutefois, en absence d'instruction comme dans le cas d'espèce, nous recommandons fortement à l'étudiant de laisser la case de réponse vide lorsqu'aucune des propositions n'est juste.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b,c	a	c	d	c	b,d	e	a	c	b,c	a	e	b,d	b	e
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
c	b	b	b	a,d	d	a	d	b,d	d	a	d	b	b,c	b

Réponse 1 :Réponse 1 :Réponse 1 :Réponse 1 :

1. (a) $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1.$
   (b) $j^3 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{i2\pi} = 1.$
   (c) $j^3 - 1 = (j-1)(j^2+j+1)$. **Donc** $j^3 = 1 \Rightarrow j^2 + j + 1 = 0$ **car** $j \neq 1$.
   (d) $j^2 + j = -1 \neq 1$
2. (a) **Puisque** $j^3 = 1, j^4 = j$ **puis,** $a + bj^2 + cj = x(1 + j^2 + j) + y(1 + j^3 + j^3) + z(1 + j^4 + j^2) = 3y + (x+z)(1+j+j^2)$.
   (b) $a + b + c = x(1+1+1) + y(1+j+j^2) + z(J + j^2 + j) = 3x + (y+z)(1+j+j^2)$.
   (c) $a + bj + cj^2 = x(1+j+j^2) + y(1+j^2+j^4) + z(1+j^3+j^3) = 3z + (x+y)(1+j+j^2)$.
   (d) $a + bj^2 + cj = 3y + (x+z)(1+j+j^2)$.
3. **Le déterminant du système vaut** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & (j^2)^2 \end{vmatrix} = Van(1, j, j^2) \neq 0$ **car** $1, j$ **et** j^2 **sont deux à deux distincts. Le système est donc de Cramer et admet par conséquent un et un seul triplet solution.**
   D'après 2.b), $x = \frac{a+b+c}{3}$ **; d'après 2.d)** $y = \frac{1 + bj^2 + cj}{3}$ **et d'après 2.c),** $z = \frac{a + bj + cj^2}{3}$.

Remarque 9.

L'écriture $Van(1, j, j^2)$ **précédemment utilisée renvoie au déterminent de VANDERMONDE.**
Plus généralement, si n **est un entier supérieur ou égal à 2 et** $a_1, a_2, \cdots a_n$, n **éléments d'un corps** $\mathbb{K}$**, on appelle déterminent de Vandermonde l'élément de** $\mathbb{K}$ **défini par :**

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On démontre sans douleur que $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i)$.

4. (a) $a = 1, b = j, c = j^2$ (a, b et c ne sont pas tous réels) fournit $x = 0, y = 1$ et $z = 0$ (x, y et z sont réels). Donc a) est faux.
   (b) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow a \in \mathbb{R}$. Donc b) est faux.
   (c) Même arguments qu'en a)
   (d) $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $j^2 \neq \overline{-j}$.
5. Puisque $\alpha \in \mathbb{R}^*, \alpha + in \neq 0$. Donc pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n + iv_n &= \int_0^\pi e^{(\alpha+in)x}dx \\ &= \frac{1}{\alpha+in}\left[e^{(\alpha+in)x}\right]_0^\pi \\ &= \frac{\alpha - in}{\alpha^2+n^2}\left[e^{\alpha x}\left(\cos(nx) + i\sin(nx)\right)\right]_0^\pi \\ & \frac{1}{\alpha^2+n^2}\left[e^{\alpha x}\left(\alpha\cos(nx) + n\sin(nx) + i\left(-n\cos(nx) + \alpha\sin(nx)\right)\right)\right]_0^\pi \end{aligned}$$

Et en prenant la partie réelle,

$$u_n = \frac{1}{\alpha^2+n^2}\left[e^{\alpha x}\left(\cos(nx) + n\sin(nx)\right)\right]_0^\pi$$

.

Par une double intégration par parties, on a aussi :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\cos(nx)\right]_0^\pi + \frac{n}{\alpha}\int_0^\pi e^{\alpha x}\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\cos(nx)\right]_0^\pi + \frac{n}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\sin(nx)\right]_0^\pi - \frac{n^2}{\alpha^2}\int_0^\pi e^{\alpha x}\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\left(\cos(nx) + \frac{n}{\alpha}\sin(nx)\right)\right]_0^\pi - \frac{n^2}{\alpha^2}u_n \end{aligned}$$

6. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} v_n &= Im(u_n + iv_n) \\ &= \frac{1}{\alpha^2+n^2}\left[e^{\alpha x}\left(-n\cos(nx) + \alpha\sin(nx)\right)\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\alpha^2+n^2}\left((-1)^{n+1}ne^{\alpha\pi} + n\right) \end{aligned}$$

Par double intégration par parties, on a aussi :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\sin(nx)\right]_0^\pi - \frac{n}{\alpha}\left[\int_0^\pi e^{\alpha x}\cos(nx)\right] \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\sin(nx)\right]_0^\pi - \frac{n}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\cos(nx)\right]_0^\pi - \frac{n^2}{\alpha^2}\int_0^\pi e^{\alpha x}\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{\alpha}\left[e^{\alpha x}\left(\sin(nx) - \frac{n}{\alpha}\cos(nx)\right)\right]_0^\pi - \frac{n^2}{\alpha^2}v_n \end{aligned}$$

7. (a)

$$\begin{aligned} |u_0| &= \frac{|e^{\alpha\pi} - 1|}{|\alpha|} \\ &= \frac{|\alpha|}{0^2+\alpha^2}\left|e^{\alpha\pi} - 1\right| > \frac{|\alpha|}{0^2+\alpha^2} \text{ pour } \alpha = 1 \text{ par exemple.} \end{aligned}$$

(b) D'après le QCM 5), $u_n = \dfrac{\alpha\left((-1)^n e^{\alpha\pi} - 1\right)}{n^2+\alpha^2}$ et donc pour n impair, $|u_n| = |\alpha|\dfrac{e^{\alpha\pi}+1}{n^2+\alpha^2}$.
Enfin, si $n^2 > \alpha^2$, $\dfrac{1}{|n^2-\alpha^2|} > \dfrac{1}{n^2+\alpha^2}$...

(c) Si $\alpha > 0$ en $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n\left(1-e^{\alpha\pi}\right)}{n^2+\alpha^2} < 0$.

(d) Faux pour $n = 0$.

8. D'après le QCM 6, $c_n = \dfrac{(-1)^{n+1} n e^{\alpha\pi} + n}{\alpha^2+n^2}$ et donc $v_{2k} = \dfrac{2k}{\alpha^2+4k^2}\left(1-e^{\alpha\pi}\right)$. Donc

$$v_{2k} \sim_{k\to+\infty} \frac{1-e^{\alpha\pi}}{2k}$$

9. (a) La suite de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ n'est pas de signe constant et converge.
(b) La suite de terme général $-n$ est majorée et diverge.
(c) $|u_n| = |\alpha|\dfrac{\left(e^{\alpha\pi}+1\right)}{n^2+\alpha^2} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
(d) Idem qu'en c).

10. (a) Pour la valeur particulière $\theta = 0$, l'assertion a) s'écrit :

$$\cos(5\times 0) = 16\cos^5(0) + 5\cos(0)$$

Soit $1 = 16 + 5$ (absurde !).

(b) Soit le complexe $z = \cos(5\theta) + i\sin(5\theta)$.
A l'aide du binôme de Newton et en s'aidant du triangle de Pascal, on obtient :

$$\begin{aligned} z &= \left(\cos(5\theta) + i\sin(5\theta)\right)^5 \\ &= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \cos(5\theta) &= \Re(z) \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\left(1-\cos^2\theta\right) + 5\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^2 \\ &= \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\left(1-\cos^2\theta\right) + 5\cos\theta\left(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta\right) \\ &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta \end{aligned}$$

(c) Pour $\theta = \dfrac{\pi}{10}$, la relation précédente s'écrit :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 16\cos^5\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\left[16\cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5\right] = 0 \\ &\Rightarrow 16\cos^4\left(\frac{\pi}{10}\right) - 20\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 5 = 0 \text{ car } \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \neq 0 \\ &\Rightarrow 16x^2 - 20x + 5 = 0 \text{où on a posé } x = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) \\ &\Rightarrow x \in \left\{\frac{5-\sqrt{5}}{8}, \frac{5+\sqrt{5}}{8}\right\} \end{aligned}$$

On en déduit $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$ car $0 \leqslant \frac{\pi}{10} \leqslant \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,866...$

(d) Idem qu'en c)

Remarque 10 (Formule de MOIVRE).

Il peut être bon de préciser que plus haut, nous avons utilisé la formule de MOIVRE sans faire de protocole. Elle s'écrit :
$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

11.

$$\begin{aligned}\frac{z'-z_1}{z-z_1} &= \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)}{1+i} \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)\right)(1-i) \\ &= \sqrt{3}+i \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

La similitude considérée est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{6}$. Donc b), c) et d) sont faux et a) est vrai.

12. (a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} C_n^k \sin^2(k\theta) &= \sum_{k=1}^{n} C_n^k \left(\frac{1-\cos(2k\theta)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} C_n^k - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_n^k \cos(2k\theta)}_{\text{nul d'après l'hypothèse}}\end{aligned}$$

En utilisant le développement du binôme de Newton, on obtient :
$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = (1+1)^n = 2^n$; donc $\sum_{k=1}^{n} C_n^k \sin^2(k\theta) = \frac{2^n-1}{2}$.

(b) Pour la valeur particulière $\theta = 0$, l'équation de l'assertion b) s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ soit encore } 2^n - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ (absurde !)}$$

(c) $\theta = 0$ n'est pas solution de l'équation à résoudre, puisque, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \cos(0) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n - 1 \neq 0$$

Pourtant, $\theta = 0$ appartient à l'ensemble des solutions proposées, puisque pour $k = -1$, θ s'écrit $\frac{\pi}{n} + \frac{k\pi}{n} = \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n} = 0$.

(d) D'après la formule de MOIVRE,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} C_n^k \cos(2k\theta) &= \Re\left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k\left[\cos(2k\theta)+i\sin(2k\theta)\right]\right)\\ &= \Re\left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k\left(e^{2i\theta}\right)^k\right)\\ &= \Re\left[\left(e^{2i\theta}+1\right)^n-1\right]\\ &= \Re\left[e^{in\theta}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^n-1\right]\\ &= 2^n\cos(n\theta)\cos^n\theta-1\end{aligned}$$

Il nous revient donc de résoudre l'équation $\cos(n\theta)\cos^n\theta=\frac{1}{2^n}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, définissons la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $f(\theta)=\cos(n\theta)\cos^n\theta$. On a :

$$f(0)=1>\frac{1}{2^n} \text{ et } f\left(\frac{\pi}{2n}\right)=0<\frac{1}{2^n}$$

Or, f est continue. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists\theta_0\in\left[0,\frac{\pi}{2n}\right]$, $f(\theta_0)=\frac{1}{2n}$ et θ_0 est solution de l'équation proposée.

13. (a) f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \exists! a_n\in\mathbb{R}_+, f(a_n)=\frac{1}{n}$$

$a_n=f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ or $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

(b) f^{-1} est continue en 0, donc $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)=f^{-1}(0)=0$.

(c) La suite $\left(1+\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive, mais tend vers 1.

(d) $\ln(1+t)\sim_0 t$ et $\frac{t^2}{1+t^2}\sim_0 t^2 << t$ d'où $f(t)\sim_0 t$. Or $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$. Donc $f(a_n)\sim_{+\infty}a_n$.

Finalement, $a_n\sim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}$.

14. (a) Posons $f(x)=e^x$. La formule de TAYLOR-MAC LAURIN fournit un réel $\theta\in]0,1[$ dépendant de n et de x tel que $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{n+1}(\theta x)x^{n+1}}{(n+1)!}$ et donc

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}.$$

(b) , (c) et (d) La formule de TAYLOR-LAPLACE («avec reste intégral») s'écrit :

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)(a)}}{k!}(b-a)^k+\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt$$

Ce qui fournit

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{1}{n!}\int_0^x\int_0^x(x-t)^ne^tdt$$

Cette formule fournit déjà :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Pour $x \in \mathbb{R}_-$, on a :

$$n!\left(e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) = \int_0^x (x-t)^n e^t dt$$
$$= -\int_x^0 \left(-(t-x)\right)^n e^t dt$$

$$a = (-1)^{n+1} \int_x^0 (t-x)^n e^t dt$$

Pour $x \in \mathbb{R}_-, e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et donc positiva si n impair et négative si n pair.

15. **(a) Puisque $a(x) \sim_\alpha b(x)$, il existe une fonction ϵ définie sur un voisinage de α telle que $a(x) = b(x)(1+\epsilon(x))$ et $\lim_{x\to\alpha} \epsilon(x) = 0$. Mais alors**

$$\ln(\alpha(x)) = \ln(b(x)) + \ln(1+\epsilon(x)) \text{ et } \lim_{x\to\alpha} \epsilon(x) = 0$$

(b) et (b). Quand x tend vers,

$$\ln\left(1 + \frac{x}{2} + \sin^2 x\right) =$$
$$= \ln\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)$$
$$= \frac{x}{2} + o(x)$$
$$\sim_{\frac{x}{2}}$$

Et $\ln(1+x) \sim x$. Pourtant, $1 + \frac{x}{2} + \sin^2 x$ et $1 + x$ sont des expressions équivalentes en 0 car équivalentes à 1.

(d) La raisons invoquée est insuffisante : il faut à tout prix éviter que les arguments des logarithmes tendent vers 1.

16. **(a) et b) quand x tend vers 0, $\cos(\alpha x)$ et $\cos(\beta x)$ tendent vers 1 et donc**

$$\frac{\ln(\cos(\alpha x))}{\ln(\cos(\beta x))} \sim \frac{\cos(\alpha x) - 1}{\cos(\beta x) - 1} \sim \frac{\frac{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}}{2}}{-\frac{\beta^2 x^2}{2}} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

(c), et (d) On pose $x = \frac{\pi}{6} + h$ de sorte que $h = x - \frac{\pi}{6}$ tend vers 0.

$$\tan(3x)\left(\tan\frac{3x}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 3h\right)\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3h}{2}\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{\tan(3h)} \ln \frac{1 + \tan\frac{3h}{2}}{1 - \tan\frac{3h}{2}}$$
$$= -\frac{1}{3h + o(h)}\left(\ln\left(1 + \frac{3h}{2} + o(h)\right) - \ln\left(1 - \frac{3h}{2} + o(h)\right)\right)$$
$$= -\frac{3h + o(h)}{3h + o(h)} = -1 + o(1).$$

17. (a) Pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{1}{x}e^{\frac{x-1}{x^2}} \\ &= \exp\left(\frac{x-1}{x^2} - \ln x\right) \\ &= \exp\left(\frac{-1+x-x^2\ln x}{x^2}\right)\end{aligned}$$

Quand x tend vers 0, $-\frac{-1+x-x^2\ln x}{x^2} \sim -\frac{1}{x^2} \to -\infty$ et donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \to 0$. f est dérivable en 0 et a) est faux.

(b)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)' f(x) \\ &= \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) f(x) \\ &= \frac{2-x}{x^3}e^{\frac{x-1}{x^2}}\end{aligned}$$

(c) La raison invoquée est insuffisante. Il faut constater que f' s'annule en 2 en changeant de signe.

(d) Il n'y a pas de rapport entre la raison invoquée et la conclusion (on peut trouver beaucoup de graphes tangents à la première bissectrice et la coupant en 3, 4,... points).

18. (a) (c) et (d) $\sqrt{x(x+2)}$ est bien définie au voisinage de $\pm\infty$ et équivalente à $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$. Le développement proposé est équivalent à x en $\pm\infty$. Ce développement est peut-être le bon en $+\infty$ mais ne peut l'être en $-\infty$. a) est faux. Pour les mêmes raisons, c) et d) sont faux.

(b) En $+\infty$,

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)} &= e^{\frac{1}{x}} x \left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= x\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= x\left(1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= x+2+o(1)\end{aligned}$$

Donc b) est vrai.

19. (a) et (b) $P(a) = 0 \Rightarrow P(a^2) = P(a)P(a+1) = 0$. Mais alors $P\left(\left(\left(a^2\right)^2\right)^2\right) = \cdots = P\left(a^{2^n}\right) = 0$. a) est donc faux et b) vrai.

(c) Un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines. La suite $\left(a^{2^n}\right)$ ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs. En particulier, il existe $n < m$ tel que $a^{2^n} = a^{2^m}$ ou encore $a^{2^{m-n}} = a$. c) est vrai.

(d) d) est faux car 0 peut être racine de P. Par exemple, si $P = X(X-1)$, $P(X^2) = X^2(X^2-1) = X(X+1)X(X-1) = P(X+1)P(X)$.

20. Erreurs d'énoncés probables : il faut certainement supposer $a_n \neq 0, a_0 \neq 0, p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 \in \mathbb{Z}^*$.

21. (a) et b) $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}$. Comme $x = \dfrac{u+v}{2}$ et $y = \dfrac{u-v}{2c}$, on a donc : $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}$. a) et b) sont faux.

(c) Si on suppose juste l'existence de dérivées partielles secondes, il n'y a aucune raison que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\right. \\
&= \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{4c}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{1}{4c}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{1}{4c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

(d) $c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c^2 e^x \cosh(cy) - e^x c^2 \cosh(cy) = 0$. Donc d) est vrai.

22. Pour obtenir l'exponentielle d'une matrice, il suffit de la diagonaliser et d'appliquer la formule (développement en série entière de la fonction exponentielle avec pour argument la matrice).

23. On a :

$$A(z),\ B(z^2),\ C(z^5) \quad alignes \Leftrightarrow I_m\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow I_m\left(\frac{z^5 - z}{z^2 - z}\right) = 0, \quad avec\, z \notin \{0,1\}$$

$$\Leftrightarrow I_m\left(\frac{z^4 - 1}{z - 1}\right) = 0, \quad --||--$$

$$\Leftrightarrow I_m(1 + z + z^2 + z^3) = 0, \quad --||--$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 + z + z^2 + z^3) - \overline{(1 + z + z^2 + z^3)}}{2i} = 0, \quad --||--$$

$$\Leftrightarrow (z - \overline{z}) + (z^2 - \overline{z^2}) + (z^3 - \overline{z^3}) = 0, \quad --||--$$

$$\Leftrightarrow (z - \overline{z})[1 + (z + \overline{z}) + (z^2 + z\overline{z} + \overline{z}^2)] = 0, \quad --||--$$

$$\left|\begin{array}{rcl} z - \overline{z} &=& 0 \quad (R_1) \\ 1 + (z + \overline{z}) + (z^2 + z\overline{z} + \overline{z}^2) &=& 0 \quad (R_2) \end{array}\right.$$

En posant $z = x + iy$, on obtient :

$$(R_1) \Rightarrow 2iy = 0 \Rightarrow y = 0 \quad donc\ H \supset (O, \overrightarrow{u}) - \{O, I\}$$

$$(R_2) \Rightarrow 1 + 2x + x^2 - y^2 + 2ixy + x^2 + y^2 + x^2 - y^2 - 2ixy = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x - y^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x+\frac{1}{3})^2 - \frac{3}{9} - y^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{(x+\frac{1}{3})^2}{(\frac{\sqrt{2}}{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{2}{3}})^2} = 1$$

Equation d'une hyperbole **(vous pouvez trouver ses caractéristiques vous-même) ; donc H contient cette hyperbole.**

Conclusion : proposition d correcte.

24. **(a)** $P_n' = P_{n-1} = P_n - \frac{X^n}{n!}$. **Une éventuelle racine multiple a de P_n dans $\mathbb{C}$ est aussi racine de P_n' et donc de $\frac{X^n}{n!}$. 0 est donc la seule racine multiple de P_n possible. Comme 0 n'est pas racine de P_n, P_n est à racines simples. a) est faux**

(b) P_n **est une solution de** $y - y' = \frac{X^n}{n!}$. **Les solutions de cette équation sont les** $x \mapsto P_n(x) + \lambda e^x$. **Une telle fonction est un polynôme si et seulement si** $\lambda = 0$. **Donc b) est vrai.**

(c)

$$\begin{aligned} P(1) &= n-(n+2)+(n+2)-n \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P'(1) &= n(n+2)-(n+2)(n+1)+n(n+2) \\ &= (n-1)(n+2) \neq 0 \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

Donc c) est faux

(d) Posons $m = qn, q \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} X^m - a^m &= (X^n)^q - (a^n)^q \\ &= (X^n - a^n)\sum_{i=0}^{q-1}(X_n)^i(a^n)^{q-i-1} \end{aligned}$$

Donc (d) est vrai.

25. E est rapporté à $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$(D) : \begin{cases} x = 1+t \\ x = 1-2t \\ z = 1+t \end{cases}$$

a) Soient $M(a,b,c)$ **et** $M'(a',b',c') / S_{(D)}(M) = M'$. **Alors :**

$$\begin{cases} I \text{ milieu de } [MM'] \in (D) \\ \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0 \text{ ou } \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est le vecteur directeur de } (D) \end{cases}$$

Contacts : (+237) 6 99 00 71 94 / 6 98 22 22 77 / 6 71 83 97 97

$$\overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{u} = 0 \Rightarrow a' - a - 2b' + 2b + c' - c = 0 \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a+a'}{2} \\ \frac{b+b'}{2} \\ \frac{c+c'}{2} \end{pmatrix} \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+a'}{2} &= 1+t \\ \frac{b+b'}{2} &= 1-2t \\ \frac{c+c'}{2} &= 1+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' &= -a+2(1+t) \\ x &= -b+(1-2t) \\ z &= -c+2(1+t) \end{cases} \quad (\#)$$

(#) dans (1) donne :

$$-a+2(1+t)-a-2(-b+2(1-2t))+2b-c+2(1+t)-c=0$$

$$ie \quad -2a+2+2t+2b-4+8t+2b-c+2+2t-c=0$$

$$ie \quad t = \frac{1}{6}(a-2b+c) \quad (2)$$

(2) dans (#) nous donne :

$$\begin{cases} a' &= \frac{1}{3}(-2a-2b+c+6) \\ b' &= \frac{1}{3}(-2a+b-2c+6) \\ c' &= \frac{1}{3}(a-2b-2c+6) \end{cases}$$

Donc la proposition a est fausse.

b) proposition fausse.

c)

$$(z'Oz) : \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0, \\ z &= t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est le vecteur directeur de } (z'Oz)$$

puisque la symétrie est une isométrie(donc conserve les distances), alors la droite (Δ) cherchée est la droite passant par $O' = S_{(D)}(O)$ et $K' = S_{(D)}(K)$, où $k(0,0,1)$ car $O, K \in (z'Oz)$. On a :

$$\begin{cases} O' = S_{(D)}(O) & \Rightarrow O'(2,2,2) \\ K' = S_{(D)}(K) & \Rightarrow K'(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}) \end{cases}$$

Et donc

$$\overrightarrow{O'K'}\begin{pmatrix} \frac{7}{3}-2 \\ \frac{4}{3}-2 \\ \frac{4}{3}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

D'où

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2-2t, \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2-2t \end{cases}$$

Ainsi la proposition c est fausse.

d)

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 2+t & (1) \\ y = 2-2t & (2) \\ z = 2-2t & (3) \end{cases}$$

$2 * (1) + (2) \Rightarrow 2x + y = 6$

$\Rightarrow 6 - 2x - y = 0 \quad (a)$

(2) et $(3) \quad \Rightarrow \quad y = z \quad (b)$

Ainsi (a) et (b) on donne :

$$(\Delta) : \begin{cases} 6 - 2x - y = 0 \\ y = z \end{cases}$$

<u>**Conclusion**</u> **: proposition d correcte.**

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2014

CORRECTION DE MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

Nous marquerons ici la proposition «e» pour signifier qu'aucune des propositions données ne correspond au QCM posé. Toutefois, en absence d'instruction comme dans le cas d'espèce, nous recommandons fortement à l'étudiant de laisser la case de réponse vide lorsqu'aucune des propositions n'est juste.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
c	c	c	d	a	b	b	e		b	d	e	a		
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
b	e	d	d	a	a	e	c	a	a	c	a,c	d	b	a

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
a	a	a	a			a	e	a	a

PARTIE I

Q1. La réponse est : **C)**

On a

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 xcosxy\ dy\right) dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [sinxy]_{y=0}^1\, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\ dx$$
$$= [-cosx]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 1$$

D'où le résultat

Q2. La réponse est : **C**

Posons $t = \tan(\frac{x}{2})$, on a

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

L'équation devient

$$\text{Arcsin}(\sin(x)) + 2\,\text{Arccos}(\cos(x)) = \pi$$

$$\Leftrightarrow x + 2x = \pi$$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3}$

Q4. on a $f(x,y,z) = (2x-2y-3z, x-y-2z, -x+y+2z)$ et $g(x,y,z) = (x-2y, x-y, y-z)$
et $h = f\circ g$

$$h(x,y,z) = \begin{cases} x' &= 2(x-y) - 2(x-y) - 3(y-z) \\ y' &= x-2y - (x-y) - 2(y-z) \\ z' &= -(x-2y) + (x+y) + 2(y-z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' &= -5y+3z \\ y' &= -y+2z \\ z' &= y-2z \end{cases}$$

donc $kerf$ est la droite d'équation $\begin{cases} 5y-3z &= 0 \\ y-2z &= 0 \end{cases} \Rightarrow dimkerf = 1$

4-D

Q5. La réponse est : **A**

Q6. La réponse est : **B**

$$\begin{aligned}\sin(2\,\text{Arcsin}(x)) &= 2\sin(\text{Arcsin}(x))\cos(\text{Arcsin}(x))\\ &= 2x\cos(\text{Arcsin}(x))\\ &= 2x\cos(\frac{\pi}{2} - \text{Arccos}(x))\\ &= 2x\sin(\text{Arccos}(x))\end{aligned}$$

D'où le résultat

Q7. Posons $A(x) = \sum_{n>=1} u_n$ et $B(x) = \sum_{n>=1} |u_n|$ avec $u_n = \dfrac{\cos nx}{n^2}$.
On a :

$$|u_n| \leq \frac{1}{n^2} => B(x) \leq \sum_{n>=1} \frac{1}{n^2}$$

Or d'après le **critère de Riemann**, la série $\sum_{n>=1} \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $B(x)$ converge c-à-d que $A(x)$ converge absolument.

— Vérifions si $A(x)$ converge uniformement :

Posons $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Soit $\epsilon > 0$. cherchons $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que
$n > N_\epsilon => \underset{x\in\mathbb{R}}{sup}|A_n(x) - A(x)| < \epsilon$. On a :

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{sup}|A_n(x) - A(x)| = \underset{x\in\mathbb{R}}{sup}|-\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k|$$

$$\leq \underset{x\in\mathbb{R}}{sup} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k|$$

$$\leq \underset{x\in\mathbb{R}}{sup} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\right) = \frac{1}{n}$$

Pour avoir $\sup_{x\in\mathbb{R}}|A_n(x) - A(x)| < \epsilon$, il suffit d'avoir $\frac{1}{n} < \epsilon$, ie $n > \frac{1}{\epsilon}$

Prendre $N_\epsilon = E(\frac{1}{\epsilon}) + 1$ pour conclure.

<u>**Conclusion**</u> : proposition **B** correcte.

Q8. La réponse est **E**

f est dérivable sur son domaine de définition comme somme de produits de fonctions dérivables.
Ses extremum vérifient donc les équations

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

Cherchons les points critiques de f

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(2y) = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow 2xy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^2 - (\ln(x))^2 + x\left(0 - 2\frac{\ln(x)}{x}\right)\\ &= y^2 - (\ln(x))^2 - 2\ln(x)\end{aligned}$$

Or les points critiques vérifie $y = 0$ d'après (1) donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 &\Leftrightarrow -(\ln(x))^2 - 2\ln(x) = 0\\ &\Leftrightarrow (\ln(x))(\ln(x)+2) = 0\\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 0 \ ou\ \ln(x) = -2\\ &\Leftrightarrow x = 1 \ ou\ x = e^{-2}\end{aligned}$$

Les points critiques sont donc $(1,0)$ et $(e^{-2},0)$

$$r(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2\frac{\ln(x)}{x} - \frac{2}{x}$$

$$s(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y$$

$$t(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2x$$

Pour $(1,0)$:

$$r(1,0) = -2$$
$$s(1,0) = 0$$
$$t(1,0) = 2$$

$$r(1,0) \times t(1,0) - (s(1,0))^2 = -4 < 0$$

$(1,0)$ est donc un point col

Pour $(e^{-2},0)$:

$$\begin{aligned} r(e^{-2},0) &= 4e^2 - 2e^2 > 0 \\ s(e^{-2},0) &= 0 \\ t(e^{-2},0) &= 2e^{-2} \\ r(e^{-2},0) \times t(e^{-2},0) - (s(e^{-2},0))^2 &= 4 > 0 \end{aligned}$$

$(e^{-2},0)$ est donc un minimum local

Q9. La réponse est : **C**

$f(z)$ est un facteur intégrant pour $\omega(x,y,z)$ si et seulement si la forme différentielle $f(z)\omega(x,y,z)$ est exacte, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}(2f(z)zx) &= \frac{\partial}{\partial x}(-2f(z)yz) \\ \frac{\partial}{\partial z}(2f(z)zx) &= \frac{\partial}{\partial x}(-(x^2-y^2)f(z)) \\ \frac{\partial}{\partial z}(-2f(z)yz)) &= \frac{\partial}{\partial y}(-(x^2-y^2)f(z)) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow 0 = 0$

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 2x(zf'(z) + f(z)) = -2xf(z) \\ &\Leftrightarrow zf'(z) + 2f(z) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow -2y(zf'(z) + f(z)) = 2yf(z) \\ &\Leftrightarrow zf'(z) + 2f(z) = 0 \end{aligned}$$

f vérifie donc l'équation différentielle $\boxed{zf'(z) + 2f(z) = 0}$

Q10. La réponse est : **B**

f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions dérivable sur D_f. Ses points critiques vérifient donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad (2)$$

Cherchons les points critiques de f

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y(x+1)(y+1)(x+y) - xy\left[(y+1)(x+y)+(x+1)(y+1)\right]}{\left[(x+1)(y+1)(x+y)\right]^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x(x+1)(y+1)(x+y) - xy\left[(x+1)(x+y)+(x+1)(y+1)\right]}{\left[(x+1)(y+1)(x+y)\right]^2} \\
\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{(x+1)(y+1)(x+y)(y-x) - xy(x+y)(y-x)}{\left[(x+1)(y+1)(x+y)\right]^2} \\
&= \frac{(x+y)(y-x)\left[(x+y)(y+1)-xy\right]}{\left[(x+1)(y+1)(x+y)\right]^2} \\
&= \frac{(x+y)(y-x)(x+y+1)}{\left[(x+1)(y+1)(x+y)\right]^2}
\end{aligned}$$

D'après (1), $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ donc les points critiques vérifient

$$x = y \text{ ou } \underbrace{x = -y}_{impossible} \text{ ou } x+y = -1$$

$* \; x = y$

Le numérateur de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ vaut

$$\begin{aligned}
x(x+1)(x+1)(2x) - x^2\left[(x+1)(2x)+(x+1)^2\right] &= 2x^2(x+1)^2 - x^2(x+1)^2 - 2x^3(x+1) \\
&= x^2(x+1)^2 - 2x^3(x+1) \\
&= x^2\left[(x+1)^2 - 2x(x+1)\right] \\
&= x^2(x^2+2x+1-2x^2-2x) \\
&= x^2(-x^2+1)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } (x = 1 \text{ ou } \underbrace{x=-1}_{impossible})$$

Donc $(0,0)$ et $(1,1)$ sont des points critiques

$* \; x+y = 1$ i.e $y = -1-x$

Le numérateur de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ vaut

$$\begin{aligned}
-(1+x)(x+1)(-x)(-1) - (x)(-1)(1+x)\left[(-x)(-1)+(x+1)(-x)\right] &= -x(x+1)^2 + x(x+1)\left[x-\right. \\
&= -x(x+1)^2 + x^2(x+1) - x \\
&= x(x+1)\left[-(x+1)+x-x\right. \\
&= x(x+1)\left[-1-x^2-x\right] \\
&= -x(x+1)(x^2+x+1)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \text{ ou } \underbrace{x=-1}_{impossible}$$

Mais $x = 0 \Rightarrow \underbrace{y = -1}_{impossible}$ donc $\boxed{(0,0) \text{ et } (1,1) \text{ sont les points critiques}}$

Q11. $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha (lnn)^\theta}\ \alpha, \theta > 0$

— Si n commence à 1, alors S diverge forcément car la fonction $x- > 1/x$ n'est pas définie en 0(en effet $ln(1) = 0$) et donc la bonne réponse serait **E**.

— Si n commence à 2, ie $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha (lnn)^\theta}\ \alpha, \theta > 0$, est la série de Bertrand qui converge si et seulement si **(**$\alpha > 1$ **et** $\beta \in \mathbb{R}$**) ou (**$\alpha = 1$ **et** $\beta > 1$). D'où la reponse juste serait **?**.

Q12. Lé réponse est : **B**

Posons $t = \tan\theta$

$t = 0 \Rightarrow \theta = 0$
$t = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$dt = (1 + \tan^2\theta)d\theta = (1 + t^2)d\theta$

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-(\frac{x}{\cos\theta})^2}}{t^2+1}(t^2+1)d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-(\frac{x}{\cos\theta})^2} d\theta \end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 \\ &= \int_0^x e^{-t^2} dt \times \int_0^x e^{-u^2} du \\ &= \int_0^x \int_0^x e^{-t^2} e^{-u^2} dt du \\ &= \int_0^x \int_0^x e^{-(t^2+u^2)} dt du \end{aligned}$$

En passant aux coordonnées polaires le domaine devient

$$\begin{cases} 0 \le t = r\cos\theta \le x & \Rightarrow & 0 \le r \le \frac{x}{\cos\theta}\ pour\ \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ 0 \le u = r\sin\theta \le x & \Rightarrow & 0 \le r \le \frac{x}{\sin\theta}\ pour\ \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{x}{\cos\theta}} re^{-r^2} dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{x}{\sin\theta}} re^{-r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\frac{x}{\cos\theta}} d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\frac{x}{\sin\theta}} d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^{-(\frac{x}{\cos\theta})^2} - 1)d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (e^{-(\frac{x}{\sin\theta})^2} - 1)d\theta\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-(\frac{x}{\cos\theta})^2} d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\frac{x}{\sin\theta})^2} d\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Pour le deuxième terme du membre de droite, posons $\theta' = \theta - \frac{\pi}{2}$ On a

$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta' = -\frac{\pi}{4}$
$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta' = 0$
$d\theta = d\theta'$
$\sin(\theta' + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta'$

D'où

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-(\frac{x}{\cos\theta})^2}d\theta + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^{-\left(\frac{x}{\cos\theta'}\right)^2}d\theta' - \frac{\pi}{2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-(\frac{x}{\cos\theta})^2}d\theta - \frac{\pi}{2}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(2\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-(\frac{x}{\cos\theta})^2}d\theta - \frac{\pi}{2}\right)\\
&= -g(x) + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}}$

Q13. on a $det(e^A) = e_1^x.e_2^x...e_n^x = e^{(x_1+x_2+...+x_n)} = e^{trA}$ donc $\boxed{\textbf{13-D}}$
Q15. La réponse est : **A**

On a

$$\begin{cases} \alpha x + y = u \\ -\alpha x + y = v \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow y = \dfrac{u+v}{2}$
$(1) - (2) \Rightarrow x = \dfrac{u-v}{2\alpha}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\
&= \frac{1}{2\alpha}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} &= \frac{1}{2\alpha}\frac{\partial f_x'}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial f_y'}{\partial u}\\
&= \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{\partial f_x'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_x'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_y'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_y'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right]\\
&= \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2\alpha}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\
&= -\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} &= -\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial f'_x}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial f'_y}{\partial v} \\
&= -\frac{1}{2\alpha}\left[\frac{\partial f'_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f'_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f'_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f'_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right] \\
&= -\frac{1}{2\alpha}\left(-\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + -\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} &= \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}$$

On a donc bien : $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}$

Q16 on a

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^3 & \alpha^4 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq 1$ et $\alpha^3 = 1$

le calcul de M^{-1} donne $M^{-1} = \frac{1}{\alpha-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ \alpha & 1 & -(\alpha+1) \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et après vérification aucune de ces propositions n'est vraie donc $\boxed{\textbf{16 - E}}$

Q17. $z = x + iy$ et $M(z) \mapsto M'(z' = e^z)$; $D = \{z \in \mathbb{C} / R_e(z) \leq 0\}$

$z \in D \Rightarrow z = x + iy, x \leq 0 \Rightarrow z' = e^x e^{iy}, x \leq 0$ Or $0 < e^x \leq 1$ et $y \in \mathbb{R}$

Donc les images seront contenues dans le disque de centre O et de rayon 1.

__Conclusion__ : proposition **C** correcte.

Q18. $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{w} = \vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$. Alors :

$$V = |mix(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = |(\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}| = |[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}].\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}| = 20$$

__Conclusion__ : proposition **D** correcte. Q20. La réponse est : **A**

g est harmonique si et seulement si g satisfait l'équation de Laplace i.e

$$\nabla^2 g = 0$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= 2a(ax+by+c)-2x = 2x(a^2-1)+2a(by+c)\\
\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= 2(a^2-1)\\
&et\\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= 2b(ax+by+c)-2y = 2y(b^2-1)+2b(ax+c)\\
\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= 2(b^2-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)=0 &\Leftrightarrow 2(a^2-1+b^2-1)=0\\
&\Leftrightarrow a^2+b^2-2=0\\
&\Leftrightarrow a^2+b^2=2
\end{aligned}$$

D'où le résultat : $\boxed{a^2+b^2=2}$

Q21. La réponse est : **E**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3-3y^2$$
$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \Leftrightarrow 3x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\ ou\ x=-\frac{1}{3}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \Leftrightarrow 3-3y^2=0 \Leftrightarrow y=1\ ou\ x=-1\end{cases}$$

Or, aucun des points $(\frac{1}{3},1)$, $(-\frac{1}{3},1)$, $(\frac{1}{3},-1)$ et $(-\frac{1}{3},-1)$ ne vérifie les équations des ensembles proposés d'où la réponse.

Q22 Δ est le déterminant d'une matrice de **Van Dermone** donc $\boxed{\Delta = \prod_{i<j}(x_i-x_j)\ \textbf{donc 22 - C}}$

Q23. La réponse est : **1**

En passant aux coordonnées sphériques le domaine devient

$$\begin{cases} r & \leq R & \leq r\\ 0 & \leq \varphi & \leq 2\pi\\ 0 & \leq \theta & \leq \pi\end{cases}$$

Puisque R ne varie pas et que l'intégration se fait aussi sur R, $\boxed{\iint_V f(x,y,z)dxdydz=0}$

Q33. La réponse est : **A**

Les points fixes de (1) sont les constantes solutions de (1)

$$\begin{aligned}
\lambda\in\mathbb{R}\ solution\ de\ (1) &\Leftrightarrow -\varepsilon\lambda+\lambda^3=0\\
&\Leftrightarrow \lambda(\lambda^2-\varepsilon)=0\\
&\Leftrightarrow \lambda=0\ ou\ (\lambda\pm\sqrt{\varepsilon}\ si\ \varepsilon>0)
\end{aligned}$$

Puisque λ est une constante, $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ donc les points fixes sont $\boxed{(0,0)\ si\ \varepsilon \leq 0,\ (0,0)\ et\ (\pm\sqrt{\varepsilon}, 0)\ si\ \varepsilon > 0}$

Q34. La réponse est : **A**

Ramenons tout d'abord l'équation à un système différentiel d'ordre 1 dans le plan de phase $(x, \frac{dx}{dt})$

$$\begin{cases} x'(t) &= x'(t) \\ x''(t) &= \varepsilon x - x^3 \end{cases}$$

La matrice jacobienne A du système est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre $(0,0)$ on a

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

donc $tr(A) = 0$ et $det(A) = -\varepsilon$.
Si $\boxed{\varepsilon > 0}$, $det(A) < 0$. $tr(A) = 0$ et $det(A) < 0 \Rightarrow$ $\boxed{(0,0) \text{ est un point de type col(toujours instable)}}$
Si $\boxed{\varepsilon < 0}$, $det(A) > 0$. $tr(A) = 0$ et $det(A) > 0 \Rightarrow$ $\boxed{(0,0) \text{ est un point de type centre}}$

Au point d'équilibre $(\pm\sqrt{\varepsilon}, 0)$ on a

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

donc $tr(A) = 0$ et $(et(A) = 2\varepsilon > 0$.
$tr(A) = 0$ et $det(A) > 0 \Rightarrow$ $\boxed{(\pm\sqrt{\varepsilon}, 0) \text{ est un point de type centre}}$

Q37. La réponse est : **A**

En effet,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x \end{cases}$$

Mais

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1 \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1$$

ce qui contredit le fait que df soit une différentielle totale

Q38. La réponse est : **E**

$$\begin{aligned}
\varphi^*\omega &= \varphi^*(-ydx) + \varphi^*(xdy)\\
&= -yo\varphi.d(\varphi^*(x)) + xo\varphi.d(\varphi^*(y))\\
&= y(r,\theta)d(x(r,\theta)) + x(r,\theta).d(y(r,\theta))\\
&= -rsin\theta(\cos(\theta)dr - r\sin(\theta)d\theta) + rcos\theta(\sin(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta)\\
&= (-rsin\theta cos\theta + rsin\theta cos\theta)dr + (r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta)d\theta\\
&= r^2d\theta
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi^*\omega = r^2d\theta}$

Q39. La réponse est : **A**

$\frac{\omega}{h} = -\frac{y}{h}dx + \frac{x}{h}dy$ est une différentielle totale donc

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{h}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{h}\right)\\
\Leftrightarrow\ & -\frac{h - y\frac{\partial h}{\partial y}}{h^2} = \frac{h - x\frac{\partial h}{\partial x}}{h^2}\\
\Leftrightarrow\ & y\frac{\partial h}{\partial y} - h = h - x\frac{\partial h}{\partial x}\\
\Leftrightarrow\ & x\frac{\partial h}{\partial x} + y\frac{\partial h}{\partial y} - 2h = 0
\end{aligned}$$

Donc h vérifie : $\boxed{x\frac{\partial h}{\partial x} + y\frac{\partial h}{\partial y} - 2h = 0}$

Q40. La réponse est : **A**

En effet, $\frac{\omega}{g}$ est de classe C^1 car $-\frac{-y}{x^2+2y^2+2xy}$ et $\frac{x}{x^2+2y^2+2xy}$ sont de classe C^1

De plus

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - 2g(x,y) &= x(2x+2y) + y(4y+2x) - 2x^2 - 4y^2 - 4xy\\
&= 2x^2 - 2x^2 + 4y^2 - 4y^2 + 4xy - 4xy\\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc g vérifie $x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - 2g(x,y) = 0$

Enfin,

$$df = \frac{\omega}{g} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\frac{-y}{x^2+2y^2+2xy} \quad (1)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x}{x^2+2y^2+2xy} \quad (2)\end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{-y}{x^2+2y^2+2xy}$$
$$= -\frac{y}{(x+y)^2+y^2}$$
$$= -\frac{y}{y^2\left[1+(\frac{x+y}{y})^2\right]}$$
$$= -\frac{\frac{1}{y}}{1+(1+\frac{x}{y})^2}$$
$$\Rightarrow f(x,y) = -\operatorname{Arctan}(1+\frac{x}{y}) + K(y)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+2y^2+2xy}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+(1+\frac{x}{y})^2} + K'(y) = \frac{x}{x^2+2y^2+2xy}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{(x+y)^2+y^2} + K'(y) = \frac{x}{x^2+2y^2+2xy}$$
$$\Leftrightarrow K'(y) = 0$$
$$\Leftrightarrow K(y) = \lambda \in \mathbb{R}$$

On a donc $\boxed{f(x,y) = -\operatorname{Arctan}(1+\frac{x}{y}) + cste}$

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2015

CORRECTION DE MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

Exercice 1

$\Omega = \{-2,-1,0,1,2\}$ $X(\Omega) = \{0,1,2\}$ $Y(\Omega) = \{-12,0,12\}$

$$P(X=1) = P(0)+P(2) = \frac{1}{2} P(Y=0) = P(0) = \frac{1}{3}$$
$$P(X=0) = P(-2)+P(1) = \frac{1}{4} P(Y=-12) = P(-1)+P(1) = \frac{1}{3}$$
$$P(X=2) = P(-1) = \frac{1}{4} P(Y=12) = P(-2)+P(2) = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow P(-2) = \frac{1}{6}$ $P(-1) = \frac{1}{4}$ $P(0) = \frac{1}{3}$ $P(1) = \frac{1}{12}$ $P(2) = \frac{1}{6}$

Q1

Réponse A

Q2

Réponse C

Q3

Réponse D

Q4

$$\begin{aligned} E(S(S-1)) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k a^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} n(n-1) C_{n-2}^k a^{k+2} q^{n-k-2} \\ &= n(n-1)a^2 \end{aligned}$$

Réponse B

Q5

$$E(S(S-1)) = E(S^2 - S) = E(S^2) - E(S) = n(n-1)a^2$$
$$\Rightarrow E(S^2) = n(n-1)a^2 + na$$
$$= na((n-1)a+1)$$
$$= na(na - a + 1)$$
$$= (na)^2 - na^2 + na$$
$$= (na)^2 + na(1-a)$$

Réponse C

Exercice 2

Q6

$$\begin{cases} 0 \text{ si } x \leq -2 \\ a(x+b)^2 \text{ si } x \in]-2,0] \\ \text{cx+d si } x \in]0,1] \\ \text{e si } x>1 \end{cases}$$

Condition nécéssaire et suffisante sur F : e=1, a$(-2+b)^2 = 0$, ab^2=d,c+d=1

Réponse A

Q7

$P(X \leq -1) = 0$ valeurs de a, b, c, d, e

e=1 $P(X \leq -1) = F(-1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(b-1)^2 = 0 \\ a(b-2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0$$

Réponse C

Q8

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ x \text{ si } x \in]0,1] \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Réponse C

Q9

$P(-1 \leq Y \leq \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) - F(-1) = \frac{5}{8}$

$$\frac{1}{2}c + d - a(b-1)^2 = \frac{5}{8}$$
$$\frac{1}{2}c + d - a(b^2 - 2b + 1) = \frac{5}{8}$$
$$\frac{1}{2}c - a + 2ab = \frac{5}{8} \qquad (d = ab^2)$$
$$\frac{1}{2}(1-d) - a + 2ab = \frac{5}{8} \qquad (c + d = 1)$$
$$\frac{1}{2}(1 - ab^2) - a + 2ab = \frac{5}{8}$$

$a(b-2)^2 = 0 \Rightarrow$ a=0 ou b=2

$$-\frac{1}{2}ab^2 - a + 2ab = \frac{5}{8} - \frac{1}{2}$$
$$a(-\frac{1}{2}b^2 + 2b - 1 = \frac{1}{8})$$

si a=0$\Rightarrow$ $0 = \frac{1}{8}$ absurde

si b=2$\Rightarrow$ $a(-2+4-1) = \frac{1}{8}$

$a = \frac{1}{8}$ $d = \frac{1}{2}$ $c = \frac{1}{2}$

Réponse D

Q10

$$F_Y(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x \leq -2 \\ \frac{1}{8}(x+2)^2 \text{ si } -2 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}(x+1) \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \text{f(y)=}\begin{cases} 0 \text{ si } x \leq -2 \\ \frac{1}{4}(x+2) \text{ si } -2 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{\mathbb{R}} yf(y)dy \\ &= \int_{-2}^{0} \frac{1}{4}x(x+2)dx + \int_0^1 \frac{1}{2}xdx \\ &= \left[\frac{1}{4}(\frac{x^3}{3} + x^2)\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4}(-\frac{8}{3} + 4) + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-2}^{0} \frac{1}{4}x^2(x^2+2)dx + \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(\frac{x^4}{3} + \frac{2x^3}{3})\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$V(Y) = \frac{1}{2} - (\frac{1}{12})^2 = \frac{71}{144}$$

Réponse B

Exercice 3

Q11

Réponse B

Q12

On a :

$$\begin{aligned} Res(g,a) &= \lim_{z\to a} \frac{d}{dz}\left[(z-a)^2 za\frac{f(z)}{(z-a)^2})\right] \\ &= \lim_{z\to a} \frac{d}{dz}\left[zaf(z)\right]' \\ &= \lim_{z\to a} a(f(z) + zf'(z)) \\ &= af(a) + a^2 f'(a) \end{aligned}$$

Réponse E

Exercice 4

F(x)=$\int_{-\pi}^{\pi} ln(1 + x^2 - 2x\cos\theta)d\theta$

Q15

Reponse B

Q16

En posant $t = \tan(\frac{\theta}{2})$, $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$

Ainsi, puisque $F'(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2(x-cos\theta)}{1+x^2-2xcos\theta}d\theta$, on obtient :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{1+t^2}\left(\frac{x-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+x^2-2x\frac{1-t^2}{1+t^2}}\right)dt \\ &= 4\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2}\right)dt \end{aligned}$$

Une division euclidienne permet d'obtenir
$\frac{(x+1)t^2+(x-1)}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2} = \frac{1}{x+1}\left(1+\frac{2(x-1)}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2}\right)$
Donc :

$$\begin{aligned}F'(x) &= \frac{4}{x+1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}+\frac{2(x-1)}{(1+t^2)((x+1)^2t^2+(x-1)^2)}\right)\\ &= \frac{4}{x+1}\left(\pi+2(x+1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)((x+1)^2t^2+(x-1)^2})\right)\end{aligned}$$

On doit chercher α et β tels que :
$\frac{1}{(1+t^2)((x+1)^2t^2+(x-1)^2)} = \frac{\alpha}{1+t^2}+\frac{\beta}{(x+1)^2t^2+(x-1)^2}$
En multipliant par $1+t^2$ et en faisant tendre t vers i on a :
$\frac{1}{-(x+1)^2+(x-1)^2} = \alpha$, ie $\alpha = -\frac{1}{4x}$
En multipliant par $(x+1)^2t^2+(x-1)^2$ et en faisant tendre t vers i , on a :

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{1-\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}}\\ &= \frac{(x+1)^2}{4x}\end{aligned}$$

Ainsi $F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\frac{1}{x+1}\left[\frac{1}{1+t^2}+\frac{(x+1)^2(x-1)}{2x((x+1)^2t^2+(x-1)^2)}-\frac{x-1}{2x(1+t^2)}\right]dt$
Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{a^2t^2+b^2} = \frac{\pi}{|ab|}$, on obtient :

$$\begin{aligned}F'(x) &= 4\frac{\pi}{x+1}\left[1+\frac{(x+1)^2(x-1)}{2x(1-x^2)}-\frac{x-1}{2x}\right]\\ &= \frac{4\pi}{x+1}\left(1+\frac{x-1-x+1}{2x}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Réponse C

Q17
$F(0) = \int_{-\pi}^{\pi} ln(1)d\theta = 2\pi ln(1) = 0$

Réponse A

Exercice 5

Q18

Réponse B

Q19

Aucune réponse, car f n'est pas la primitive de φ !

Réponse E

Q20

Réponse E

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_0^{\pi} \sqrt{|1+\cos t|}dt \overset{x=\pi-t}{=} -\int_{\pi}^{0} \sqrt{|1-x\cos x|}dx \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{|1-x\cos x|}dx \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Q21

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x) = \dfrac{-\cos t}{2\sqrt{1-x\cos t}}$

Ceci suffit à conclure qu'aucune réponse n'est juste.

$\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x) = \dfrac{-\cos^2 t}{4\sqrt[3/2]{1-x\cos t}}$

$R(t,x) = \dfrac{-x(\cos^2 t+1)+2\cos t}{\sqrt[3/2]{(1-x\cos t)}}$

Réponse E

Q22

$\int_0^{\pi} R(t,x)dt = \left[\dfrac{2\sin t}{\sqrt{1-\cos t}}\right]_0^{\pi}$

Réponse E

Exercice 6

$f(x) = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x\sin t}dt$

Q23

Reponse E

Q24

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x) = -\sin te^{-x\sin t}$

Réponse C ou E.Mais $f'(x) = -\int_{\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin te^{-x\sin t}dt$

$$\Downarrow$$

Réponse E

Q25

$$f''(x) = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t e^{-x\sin t} dt$$

$$\Downarrow$$

Réponse E

Cependant on a bien l'equation

$$xf''(x) + f'(x) - xf(x) = 0$$

Q26

Réponse D

Exercice 7

Q27

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\ln u_n(x) &= \frac{\ln n + a\ln x - nx^2}{n}\\ &= \frac{\ln n}{n} + \frac{a\ln x}{n} - x^2\end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{lnu_n(x)}{n} = -x^2$

Réponse C

Q28

D'après ce qui précède, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(u_n(x)\right)^{\frac{1}{n}} = -x^2 \Leftrightarrow \lim_{n\leftrightarrow+\infty} e^{\ln(u_n(x))^{\frac{1}{n}}} = e^{-x^2}$$

$$\text{i.e : } \lim_{n\to+\infty} \ln\left(u_n(x)\right)^{\frac{1}{n}} = \ln\sqrt[n]{(u_n(x))} = e^{-x^2}$$

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}x^2 > 0 &\Rightarrow -x^2 < 0\\ &\Rightarrow e^{-x^2} < e^0 = 1\end{aligned}$$

Donc pour $x > 0$ $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(u_n(x)\right)^{\frac{1}{n}} < 1$ D'après le critère de Cauchy, la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge.

Réponse C

Q29

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} nz^n &= z\frac{d}{dz}\left(n \overset{\sum}{\geq} 1z^n\right)\\
&= z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)\\
&= z\frac{1}{1(1-z)^2}\\
\sum_{n\geq 1} nz^n &= \frac{z}{(1-z)^2}
\end{aligned}$$

Réponse D ou E si on tient compte de l'oubli de "|.|"

Q30

$$\begin{aligned}
\sum u_n(x) &= x^\alpha \sum_{n\geq 1} n\left(e^{-x^2}\right)^n\\
&= x^\alpha \frac{e^{-x^2}}{\left(1-e^{-x^2}\right)^2}
\end{aligned}$$

Réponse C

Q31

$$\begin{aligned}
u_n(x) &= nx^a e^{-nx^2}\\
u_n'(x) &= n\left[ax^{a-1} - 2nx^{a+1}\right]e^{-nx^2}\\
&= nx^{a-1}e^{-nx^2}(a-2nx^2)\\
u_n'(x) = 0 &\Leftrightarrow a - 2nx_n^2 = 0\\
&\Leftrightarrow x_n^2 = \frac{a}{2n}
\end{aligned}$$

i.e :

$$x_n = \sqrt{\frac{a}{2n}}$$

Donc

$$\begin{aligned}
Sup_{x\in\mathbb{R}_+} &= n\left(\frac{a}{2n}\right)^{\frac{a}{2}} e^{-n\frac{a}{2n}}\\
&= \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{a}{2}} \frac{1}{n^{\frac{a}{2}}-1} = \frac{A}{n^{\frac{a}{2}}-1}
\end{aligned}$$

avec $A = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{a}{2}}$

ICORP Nivo 3_Contacts : (+237) 6 99 00 71 94 / 6 98 22 22 77 / 6 71 83 97 97
Site web : www.intelligentsiacorporation.com

Réponse B

Q32

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ |u_n(x) < Sup_{x\in\mathbb{R}_+} u_n(x) = \frac{A}{n^{\frac{a}{2}} - 1}$$

Le terme général de la série $u_n(x)$ converge normalement si et seulement si la série numérique de terme général $Sup_{x\in\mathbb{R}_+} u_n(x)$ converge.
Or $Sup_{x\in\mathbb{R}_+} u_n(x)$ est une série de Riemann, elle converge si et seulement si $\frac{a}{2} > 2$ i.e $a > 4$

Réponse A

Q33

Posons $S_n(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x)$
Soit $N \in \mathbb{N}^*$ on a $\sum_{n=N}^{2N} u_n(x) = S_{2N}(x) - S_{N-1}(x)$
Donc pour montrer que $u_n(x)$ ne converge pas uniformément, il suffit de trouver $C > 0/$
$|S_{2N}(x) - S_{N-1}(x)| = S_{2N}(x) - S_{N-1}(x) \geq C$

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{2N} u_n(x) &= \sum_{n=N}^{2N} n * \left(\sqrt{\frac{2}{N}}\right)^4 e^{-n\frac{2}{N}} \\ &= \sum_{n=N}^{2N} \frac{4n}{N^2} e^{-\frac{2n}{N}}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}N \leq n \leq 2N \Rightarrow -2 \leq -\frac{n}{N} \leq -1 \\ -4 \leq -\frac{2n}{N} \\ i.e : e^{-4} \leq e^{-\frac{2n}{N}}\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{4n}{N^2} e^{-\frac{2n}{N}} \geq \frac{4N}{N^2} e^{-4} = \frac{4}{N} e^{-4}$$

$$i.e : \sum_{n=N}^{2N} \frac{4n}{N^2} e^{-\frac{2n}{N}} \geq 4e^{-4} \underbrace{\sum_{n=N}^{2N} \frac{1}{N}}_{1} = 4e^{-4}$$

$$C = 4e^{-4}$$

$$\sum_{n=N}^{2N} u_n(x) \geq C$$

Ceci montre que $u_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $]0; +\infty[$ et par conséquent n'y converge pas normalement.

Réponse E

Q34

On a

$$Sup_{x\in]0;+\infty[}\sum_{n=N}^{2N}u_n(x)\geq\sum_{n=N}^{2N}u_n(x_n)$$

car

$$x_n\in]0;+\infty[$$
$$\Rightarrow Sup_{x\in]0;+\infty[}\sum_{n=N}^{2N}u_n(x)\geq C=4e^{-4}>0$$

D'ou $Sup_{x\in]0;+\infty[}\sum_{n=N}^{2N}u_n(x)$ ne tend pas vers 0.

Réponse B

Q35

Réponse A

Q36

$$a=4\ \lim_{x\to 0^+}S(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x^2}}{-x^2}=1\Rightarrow 1-e^{-x^2}\simeq -x^2$$
$$\Rightarrow (1-e^{-x^2})^2\simeq x^4$$
$$\Rightarrow S_n(x)\simeq\frac{x^4e^{-x^2}}{x^4}=e^{-x^2}$$

Donc $\lim_{x\to 0^+}S(x)=\lim_{x\to 0}e^{-x^2}=1$

Réponse B

Q37

Réponse A

Exercice 8

Q38

$$S=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n^2-1}$$
$$\text{Or }\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2N+1}\right)$$

$$\text{D'ou } S=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$$

Réponse C

Q39

$\forall$ t $\in [0, x]$, $\text{Arcsin}\, t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\text{Arcsin}\, x - \text{Arcsin}\, 0 < (x-0)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\text{Arcsin}\, x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, avec biensur $x \in]0,1]$

Réponse B

Q40

Réponse A

Q41

$T = \pi, f(x) = \cos x, 0 < x < \pi, w = \frac{2\pi}{T} = 2$

$$S(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1} (a_n \cos(2nx) + b_n \sin(2nx))$$

f étant paire, $\forall n\ b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2}{\pi}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$a_0 = \frac{2}{\pi} \neq 0$

Réponse E

Q42

Le domaine d'intégration est une sphère qui est une surface (dimension 2), or $dxdydz$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{R}^3$: les domaines de dimension inférieure à 3 sont de mesure nulle. La sphère précédente est donc de mesure nulle par conséquent l'intégrale vaut 0.

Réponse E

Q43

Par élimination , aucune réponse sachant que $-1 \in D$ et que $1 \in D$

Réponse E

Q44

Cette intégrale est classique. En effet, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}$

Comme $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est paire $K = 2 * \frac{\pi}{2} = \pi$

Réponse C

Q45

Réponse E

Q46

M est symétrique et réelle, donc diagonalisable. De plus $P_M(\lambda) = (6-\lambda)(3-\lambda)^2$

Réponse A

Q47

$rg(f) = rg(M) = 1$ On a $rg(f) = dim(Im_f) = 1$
D'après le théorème du rang, $dim_{\ker f} = 3 - rg(f) = 2$

Réponse D

Q48

$T = \pi, f(x) = \cos x, 0 < x < \pi, w = \frac{2\pi}{T} = 2$
f impaire $\Rightarrow \forall n\ a_n = 0$
Or dans toutes les propositions, on voit $a_0 = \frac{2}{\pi} \neq 0$

Réponse E

Q49

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x - \sin x - \tan x}{x(1+\cos x) - 2\tan x}$

$$\begin{aligned}2x - \sin x - \tan x &= 2x - (x - \frac{x^3}{6}) - (x + \frac{x^3}{3}) + o(x^3)\\ &= -\frac{x^3}{6} + o(x^3)\\ x(1+\cos x) - 2\tan x &= x(1 - \frac{x^2}{2}) - 2(x + \frac{x^3}{3}) + o(x^3)\\ &= -\frac{7}{6}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x - \sin x - \tan x}{x(1+\cos x) - 2\tan x} = \frac{1}{7}$

Réponse C

Q50

$$J = \int_{(C)} \frac{z}{(z-i)(z-3)} dz$$

Déterminons a,b ∈ C tels que $\frac{z}{(z-i)(z-3)} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{z-3}$

Après calcul on obtient :

$$a = \frac{-i}{3-i} \qquad b = \frac{3}{3-i}$$

$$\frac{z}{(z-i)(z-3)} = \frac{1}{3-i}\left(\frac{-i}{z-i} + \frac{3}{z-3}\right)$$

$$J = \frac{1}{3-i}\left[\int_C \frac{-i}{z-i}dz + \int_C \frac{3}{z-3}dz\right]$$

Or $\int_C \frac{-i}{z-i}dz = 2\pi$ d'après le théorème de Cauchy

Et $\int_C \frac{z}{z-3}dz = Ind(C,3) = 0$ car 3> | z | =2

D'ou $J = \frac{2\pi}{3-i}$

Réponse A

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2016

CORRECTION DE MATHÉMATIQUES

3 heures Documents et calculatrices interdits

Question 1 :

$$y' = \frac{1+2xy^3}{3xy^2} \Rightarrow 3xy^2y' = 1+2xy^3$$

On pose $z = y^3$ ie $z' = 3y'y^2$

$$\Rightarrow xz' = 1+2xz$$
$$\Rightarrow z' - 2z = \frac{1}{x}$$
$$\Rightarrow z = \frac{c\,e^{2t}-1}{2x}$$

Réponse E.

Question 2 :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = 1 = -\alpha\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} sin(x+y)\,dxdy$$
$$= 2\alpha$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$
$$E(x) = \iint_D xf(x,y)\,dxdy = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Réponse E

Question 3 :

$$\frac{\partial f}{\partial a_2} = -\sin a_2 + 2a_2\cos a_0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a_2}(1+x^2) = -\sin(1)+2$$

$\Rightarrow$ Réponse E.

Question 4 :

$$\begin{cases} x' = & 2x+y \\ y' = & 3x+2y \end{cases} \Rightarrow M_f = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow det(f) = 4-3 = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $f$est un isomorphisme

$\Rightarrow$ Réponse A

Question 5 :

Pas de réponse donnée jusqu'à présent

Question 6 :

$$S = 2x^5 + \frac{4x^{10}}{3} + + \frac{8x^{15}}{5} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{5k}}{2n-1}.2^n$$

$$\Rightarrow S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2n-1} x^{5k} \text{ ; On pose } a_n = \frac{2^n}{2n-1}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{2n+1} . \frac{2n-1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{d'où } R = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ Réponse C.}$$

Question 7 :

$$A = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix} \Rightarrow det(A) = m^3 - 3m + 2 = (m+2)(m-1)^2$$

$$\Rightarrow P_A(x) = (m-x+2)(m-x-1)^2$$

$$\Rightarrow Spect(A) = \{m+2, m-1\}$$

$\Rightarrow$ Réponse C.

Question 8 :

$$\lim U_n = \lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = e^{-n}.e^n = 1$$

$\Rightarrow$ Réponse E.

Question 9 :

$$I = \int_0^1 \text{Arctan}(\frac{1}{x})\, dx \text{ On pose } x = \frac{1}{u}$$

$$\Rightarrow I = \int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan}\, u}{u^2}\, du = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} \text{ (c'est un fax)}$$

Question 10 :

Pour $\lambda = \frac{1}{64}$, $-\frac{1}{2}$ est une racine double

$\Rightarrow$ Réponse D.

Question 11 :

Réponse C. (C'est une propriété)

Question 12 :

$\frac{P(x)}{x^3+1} = x^2 + 3x + 1$, $\frac{Q(x)}{x^3+1} = x + 2$

$pgcd\,(x^3 + 3x + 1,\, x + 2) = 1$

d'où $pgcd(P, Q) = x^3 + 1$

$\Rightarrow$ Réponse A.

Question 13 :

f est dite holomorphe si f est dérivable en tout point.

$$f(z) = \bar{z}\ ,\ g(z) = (Re(z))^2(Im(z)) + iIm(z)$$

Question 14 :

$def(u_1, u_2, u_3, u_4) = 0$
$\Rightarrow Vect(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)$
$\Rightarrow$ Réponse A.
(u_1, u_2, u_3) est une base de $Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)$ et $Vect(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$
$\Rightarrow Vect(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = Vect(u_1, u_2, u_3)$
Réponse C
d'où réponses A et C

Question 15 :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 - y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2 - x$$

(x_0, y_0) est un extrémum local ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$

$ie\ (x_0, y_0) \in\in \{(0,0), (1,0), (0,1), (1/3, 1/3)\}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = 2x + 2y - 1\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$$

$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det(H(0,0)) = -1 < 0 \Rightarrow (0,0)$est un minimum local

$H(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow det(H(1,0)) = -1 < 0 \Rightarrow (1,0)$ est un minimum local

$H(0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det(H(0,1)) = -1 < 0 \Rightarrow (0,1)$est un minimum local

$H(1/3, 1/3) = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow det(H(1/3, 1/3)) = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow (1/3, 1/3)$est un maximum local

d'où réponse E

Question 16 :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho+1}-1} = 0$$

Réponse A

Question 17 :

$$Ona:\ ye^x + e^y \sin 2x = 0\ ie\ \frac{y}{x}e^x + \frac{e^y}{x}\sin 2x = 0$$

quand $(x,y) \to (0,0)$, $\dfrac{ye^x + e^y \sin 2x}{x} \simeq \dfrac{y}{x}(1+x)(1+y)2$

$\Rightarrow \dfrac{ye^x + e^y \sin 2x}{x} \simeq \dfrac{y}{x} + y + 2 + 2y \longrightarrow 0$

$\Rightarrow \dfrac{y}{x} \longrightarrow_{(x,y)\to(0,0)} -3y - 2$

$\Rightarrow \dfrac{y}{x} \longrightarrow_{(x,y)\to(0,0)} -2$

Réponse A.

Question 18 :

Pas encore de réponse donnée

Question 19 :

$$\iiint_D f(x, yz)\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^{x-z} \int_0^{-z+y} (x^2 + y + z^2)\, dxdydz = \frac{19}{15}$$

$\Rightarrow$ **Réponse E**

Question 20 :

$v \in Vect(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \Rightarrow 7(x, y, z, t, s),\ v = xu_1 + yu_2 + zu_3 + tu_4 + su_5$

$\Rightarrow$ Un bon développement nous fait aboutir à E.

Réponse E.

Question 21 :

Soit$z \in C^\infty(\mathbb{R})$. Cherchons $z/\ y + 2y' = z$

Cela revient à résourdre une équation différentielle admettant une infinité de solutions

$\Rightarrow T_\alpha$est surjective et injective

$\Rightarrow$ **Réponse A**

Question 22 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ A^2 = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} = {}^tA$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} z$$

$\Rightarrow E = Vect(I, A^2, A)$

$\Rightarrow$ **Réponse C**

Question 23 :

$$\int_a^s f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^s ne^{-nx}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-na} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^3} = \frac{1}{1-e^{-a}} - \frac{1}{1-e^{-b}}$$

$\Rightarrow$ **Réponse D.**

Question 24 :

$y' + 3y + y^2 - 2 = 0 \;\Rightarrow\; y' = 2 - y^2 - 3y$

$y = cte \;\Rightarrow\;$ si on pose $y = a$ $2 - a^2 - 3a = 0$ ie $a^2 + 3a - 2 = 0$

$\Delta = 9 + 8 = 17 > 0$

L'équation admet 2 solutions ctes

Réponse B

Question 25 :

Réponse D (C'est une propriété obtenue à partir de la concavité de la fonction ln)

Question 26 :

$$f(x) = \frac{-x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

Réponse E.

Question 27 :

Au rang n = 2

$$I_n(x) = \frac{x^{x-1}}{x^2+3x+2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{4} - x^2 + 3x + 2\right)$$

Le tracé de la courbe de $I_n(x) - \dfrac{2\times 2^x}{x(x+1)(x+2)}$ montre que

$$I_n(x) > \frac{(n!)n^2}{x(x+1)\dots(x+n)} \quad \text{(Pour n=2)}$$

De même, $I_n(x) > \dfrac{n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$ Pour n = 2

Par conséquent, A, B, C, D sont fausses

$\Rightarrow$ **Réponse E.**

Question 28 :

Pas de réponse donnée jusque là

Question 29 :

On se rend compte que pour toutes les valeurs de A proposées :

$$\frac{A}{p} \notin \mathbb{C}[X]$$

Réponse E.

Question 30 :

On pose M(x, y, z)

$$div\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{OM^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{OM^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{OM^3}\right)$$

$$= 0$$

$$\vec{rot}\vec{F} = \vec{0}.$$

$\Rightarrow$ **Réponse B**

Question 31 :

Après intégration, on trouve :

$$f(x,y,z) = 24x^2 + 12xy + 4xz + 240x + 2y^2 + 2yz + 48y + z^2 + 12z + 740$$

$\Rightarrow$ **Réponse C**.

Question 32 :

Pas de réponse obtenue jusqu'ici

Question 33 :

$$\|x\| + \|y\| \geq \|x+y\| \quad et \quad \|x\| + \|y\| \geq \|x-y\|$$

$$\|x\| + \|y\| \geq max\{\|x-y\|, \|x+y\|\}$$

Réponse C.

Question 34 :

$$\frac{1}{u+v} - \frac{a}{u} - \frac{b}{v} = \frac{uv(1-a-b) - av^2 - bu^2}{uv(u+v)} \quad avec 1-a-b = 2\sqrt{ab} car \sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{(\sqrt{a}u + \sqrt{b}v)^2}{uv(u+v)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u+v} \leq \frac{a}{u} + \frac{b}{v}$$

$\Rightarrow$ **Réponse A**.

Question 35 :

Réponse E car $\sum x_i x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \alpha^2 f(x).$

Question 36 :

Réponse E

Question 37 :

Pas de réponse donnée jusqu'ici

Question 38 :

Pas de réponse donnée jusqu'ici

Question 39 :

$z^3 - xz - y = 0$

$$\Rightarrow (3z^2 - x)\frac{\partial z}{\partial x} - z = 0\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y}(3z^2 - x) - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{3z^2 - x}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3z^2 - x}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(3z^2 - x) + (6z\frac{\partial z}{\partial y}) - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{3z^2 + x}{(3z^2 - x)}.$$

Question 40 :

On montre que A est faux, B est vraie
$\Rightarrow$ **Réponse A**.

Question 41 :

Pas de réponse reçue jusqu'ici

Question 42 :

$R =$ Rayon de convergence de $S_n \ = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$

$\Rightarrow S_n converge\ \forall |z| < R$
$\Rightarrow S_n converge\ \forall |z^2| < R^2$
$\Rightarrow R^2 =$ rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n z_n^2$

$\Rightarrow$ **Réponse A**

Question 43 :

$7^4 \equiv 1[10] \ \Rightarrow\ 7^{49} = 7^{4 \times 12}.7 \equiv 7[10]$
$\Rightarrow$ **Réponse C.**

Question 44 :

Réponse B (C'est un fax)

Question 45 :

Une base de E est $\left\{ V_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} V_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$det(V_1, V_2, V_3, V_4) = 0 \; et \; rang(u_1, u_2, u_3, u_4) = 3$

$\Rightarrow dim(E + F) = 3$

$\Rightarrow$ **Réponse C**

Question 46 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \;=\; \mathrm{Arcsin}(a) \;=\; 1 \;\Rightarrow\; a \;=\; \sin 1$$

Réponse E.

Question 47 :

Pas de réponse reçue jusqu'ici

Question 48 :

$f_3 \circ f_4 \;\notin\; \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$

$\Rightarrow$ G n'est pas un groupe abelien

$\Rightarrow$ **Réponse A**

Question 49 :

$$N_4 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \;;\; N_5 = 1 \;;\; N_6 = \frac{15\sqrt{\pi}}{16} \;;\; N_3 = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ **Réponse E**

Question 50 :

$Quand \; x \to 0 \; alors \; y \to 0 \; et \; xe^y + ye^x \longrightarrow 0$

$$\Rightarrow xe^y + ye^x \sim_{x\to 0} x(1+y) + y(1 + x + \frac{x^2}{2}) \simeq 0$$

$$\Rightarrow y \sim_{x\to 0} \frac{x}{1 + 2x + \frac{x^2}{2}} \sim x - 2x^2 + O(x^2)$$

$\Rightarrow$ **Réponse E**

Intelligentsia Corporation

Épreuves de Physique.

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2009

ÉPREUVE DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

« Le hasard et la coïncidence sont les moyens qu'a choisi Dieu pour rester anonyme » :ALBERT EINSTEIN

Exercice 1 **Calcul d'incertitudes** Moé veut carreler la façade principale de sa maison , d'une surface globale (san ouvertures) d'environ 12 m *4 m , avec des carreaux de 40*30 . Sachant que les dimensions des carreaux sont connues au cm près et que celles du mur le sont à 2/100^e , Déterminer avec précision à l'appui

1. le nombre de carreaux nécessaires pour cette opération
2. le coût d'investissement pour cet embellissement si le prix du carreau varie selon la saison entre 1000 F et 1100 F

Exercice 2 **Cinématique du point** L'étude expérimentale d'un bombardement pasanien de particules lourdes a permins de réaliser l'enregistrement ci -dessous (figure 1) pour un mouvement rectiligne

1. Déterminer la loi $x = f(V)$
2. Quelle est l'équation du mouvement d'une particule ainsi bombardée
3. Déterminer la loi horaire du mouvement de la particule si cette dernière est en X_0 à l'instant initial
4. AN : $X_0 = 2$ m . Calculer la vitesse d'une particule à l'instant t = 2s

Exercice 3 **Cinématique du solide (Torseur cinématique)** Deux referentiels $R_1(O_2, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ *et* $R_2(O_1, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ sont liés aux solides (S_1) *et* (S_2) respectivement; (R1) est supposé fixe

1. Pour quelles valeurs du paramètre λ ci dessous , les trois point O_2 , A et B de (S_2) auraient-ils , à un instant donné τ , les coordonnées et les vitesses absolues ci-après dans (R_1) ? $O_2(0,0,0)$, A(1,0,0) , B(0,1,0) et $\overrightarrow{V_{O_2}} = -2\overrightarrow{x_1} + 2(1+\lambda)\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{V_A} = -2\overrightarrow{x_1} + (3+2\lambda)\overrightarrow{y_1} - 3\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{V_B} = -3\lambda\overrightarrow{x_1} + 2(1+\lambda)\overrightarrow{y_1} + 2(1+\lambda)\overrightarrow{z_1}$
2. En déduire , à cet instant τ , la vitesse absolue du point C tel que $\overrightarrow{O_1C}(\tau) = \overrightarrow{z_1}$
3. Déterminer le vecteur rotation instantanée du solide (S_2) par rapport à (S_1) , à l'instant τ

Exercice 4 **Thermodynamique** On considère un volume élementaire dV = dxdydz contenu entre les altitudes z et z + dz dans un fluide au repos de masse volumique ρ ; l'accéleration de la pesanteur est g . (la face avant aura l'indice 1 , l'arrière l'indice 2 , la gauche l'indice 3 , la droite l'indice 4 , celle de dessus 5 et celle de dessous 6 , confre figure 2)

1. Faire le bilan(expressions vectorielles) des forces s'exerçant sur ce volume
2. En déduire la loi de variation de la pression dans le fluide en fonction de l'altitude
3. Ă : Soit un tube en plastique rempli d'eau et renversé sur une bassine d'eau comme le montre la figure 3 . Le point A est exposé à la pression atmosphérique $p_A = 1$ atm , et on perce un trou en B
   (a) L'eau va t elle sortir du tube B ou alors c'est l'air qui y entrera ?
   (b) Justifier votre réponse

Exercice 5 **Electronique (Diode et circuits)** Soit une diode (D) , dont la caractéristique est représentée sur la figure 4 ci - dessous **I - Etude de la diode**

1. A partir de la caractéristique , calculer la résistance dynamique r_d lorsque la diode est "passante" .
2. Quelle est sa tension seuil U_s ?
3. En considérant que le courant inverse (diode "bloquée ") est nul . Proposer une modélisation par morceaux de cette diode

II - Utilisation de la diode (D) Cette diode est utilisée dans le circuit représenté sur la figure 5 ci-dessous

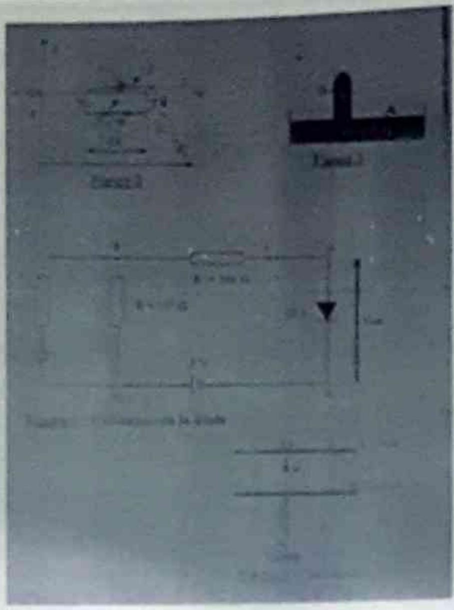
1. (a) Peut on appliquer le théorême de superposition (justifier la réponse) ?
   (b) Quel autre outil peut on utiliser ?
2. En utilisant (exclusivement) la méthode de Thévenin et la modélisation faite en I- 3 déterminer
   (a) la tension u_{AK}
   (b) le courant qui traverse la diode (D)

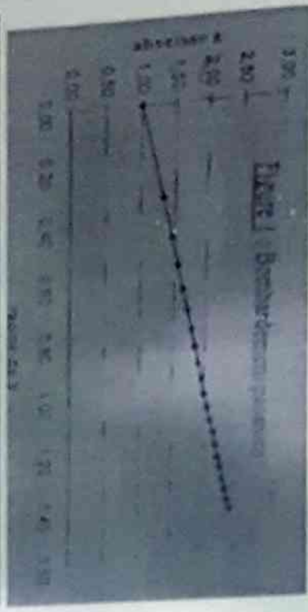
Exercice 6 **Problème de physique I - préliminaires**

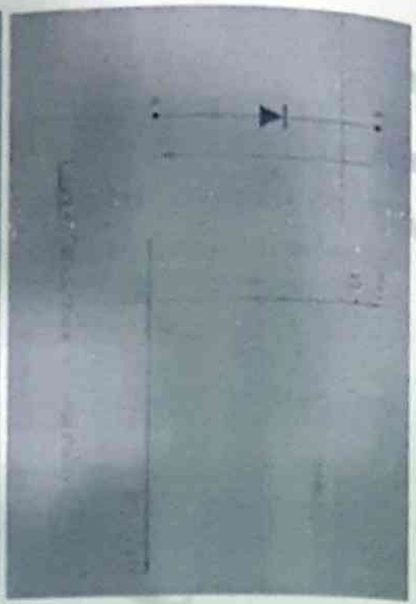
1. Déterminer le champ électrique créé en un point de son axe , d'abscisse z , par un disque plan , d'épaisseur négligeable , de rayon a et portant une charge surfacique σ . (On distinguera les cas z >0 et z < 0)
2. En déduire l'expression du champ créé dans l'espace par un plan (infiniment grand) uniformément chargé

II - Condensateur plan à armature mobile (figure 6)
On considère un condensateur plan horizontal d'armature supérieure A (fixe et légère) pouvant être reliéz à un potentiel V_A et d'armature inférieure B , de masse m , reposant sur un ressort vertical de masse négligeable de raideur k . A et B ont une surface S . B est maintenu au potentiel nul et peut , par un guidage approprié , se déplacer le long d'un axe Oz orienté vers le bas . Lorsque le potentiel de A est nul , la distance à l'équilibre entre les deux plaques est Z_0

1. L'armature A est portée au potentiel $V_A = V_0$, la distance entre les deux armatures étant maintenue à la valeur Z_0 . Déterminer la charge portée par l'armature B en fonction de V_0, Z_0 et S .
2. On isole alors A et on libère B . Justifiez que la charge portée par B reste constante au cours du mouvement .
3. Faire le bilan des forces s'exerçant sur la plaque B lorsqu'elle se trouve à une distance z (désignations ou descriptions et expressions vectorielles)
4. Déterminer l'équation du mouvement de l'armature B
5. En déduire la nouvelle position d'équilibre Z_1
6. On désire étudier la stabilité de ce nouvel équilibre ; pour cela on utilise un raisonnement énergetique
   (a) Déterminer l'énergie potentielle totale du système en étude (condensateur + ressort) lorsque B est en mouvement
   (b) Par étude de ce potentiel retrouver la position d'équilibre de la plaue B
   (c) Dire alors si l'équilibre est stable ou non
   (d) calculer la difference $Z_0 - Z_1$







UNIVERSITE DE YAOUNDE I

Ecole Nationale Supérieure Polytechnique

ÉPREUVE DE PHYSIQUE

[illegible]

DONNEES :

- Masse du proton [illegible]
- Charge élémentaire [illegible]
- Constante [illegible]

Exercice 1 : Optique et calcul d'incertitudes

[illegible]

Exercice 2 : Electricité. [illegible] ... par A, B, C ou D

Question	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Réponse	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Q1 : [illegible]

A) [illegible] B) [illegible]

C) [illegible] D) Aucune condition

Q2 : [illegible]

A) [illegible] B) [illegible]

C) [illegible] D) Aucune réponse

Q3 : Une particule de masse [illegible] et de charge [illegible] condensateur plan [illegible] plaques [illegible]

A) 2,08 m/s B) 2,5 m/s C) 4,0 m/s D) Aucune réponse

Q4 : Un usager [illegible] phares [illegible] batterie [illegible]

A) [illegible]

Q5 : La courant de charge d'un condensateur [illegible]

1. A) 1 A B) 2 A C) 3 A D) 4 A

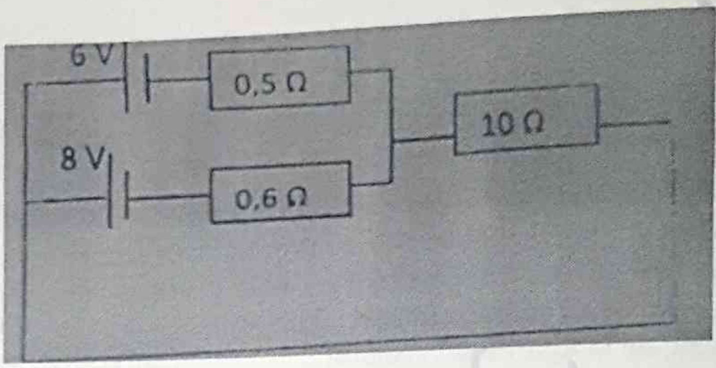
Q6 : Le condensateur de $100\mu F$ et ayant une reserve d'énergie de 50 J, est utilisé pour actionner une lampe flash. La charge traversant la lampe flash est :

1. A) 0.1 C B) 0.5 C C) 5 C D) 5 10^{-3}C

Q7 : La puissance dissipée par deux ampoules électriques de 220Ω montées en parallèle sur un secteur de 220 V est de :

1. A) 110 W B) 220 W C)440 W D) 48.3 kW

Q8 : Soit le circuit électrique ci-contre , la résistance de 10Ω est parcourue par un courant d'intensité



1. A) 0.7 A B) 1.4 A
2. C) 2.1 A D) aucune reponse

Q9 : Le champ électrique $\overrightarrow{E}_{a,b,c}(x,y,z) = (x+2y+bz)\overrightarrow{e_x} + (cx-3y-z)\overrightarrow{e_y} + (4x+ay+2z)\overrightarrow{e_z}$ est irrotationnel pour le triplet (a,b,c) égal à :

1. A) (2,-3,0) B) (1,2,2)
2. C) (-1,4,2) D) aucune reponse

Q10 : Dans le cas irrotationnel , la circulation du champ précédent du point A(2,-1,1) au point D(1,0,2) en passant successsivement par les points B(7,4,-3) et C(5,0,6) est de :

1. A) -3 V B) 2 V
2. C) 4 V D) aucune reponse

Exercice 3 **Electromagnétisme** Un cerceau homogène de masse m , de rayon r , de résistance électrique R et d'inductance négligeable est suspendu à un fil vertical isolant OG vertical , qui n'oppose aucune résistance à la torsion . Le cerceau baigne dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{u}$, horizontal . On désigne par θ l'angle que fait la normale $\overrightarrow{n}$ à la surface du cerceau avec $\overrightarrow{B}$ et par $\overrightarrow{k}$ la verticale ascendante O_1O . A t=0 , $\theta = 0$ et le cerceau est mis en mouvement avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\theta_0}$.

1. Par application de la loi de Lenz-Faraday et celle d'Ohm , déterminer , en fonction de B_0 , r, R et θ , l'intensité du courant électrique circulant dans le cerceau , lorsqu'il occupe une position θ quelconque
2. En déduire le vecteur moment magnétique $\overrightarrow{M}$ du circuit formé par le cerceau
3. Etablir l'équatiion du mouvement du cerceau
4. Montrer que le mouvement du cerceau s'arrête après avoir tourné d'un angle θ_f dont on donnera une relation avec $\dot{\theta_0}$ et les autres données du problème
5. Quelle est l'énergie totale E_j dissipée par effet Joule , dans le cerceau , pendant son mouvement ?

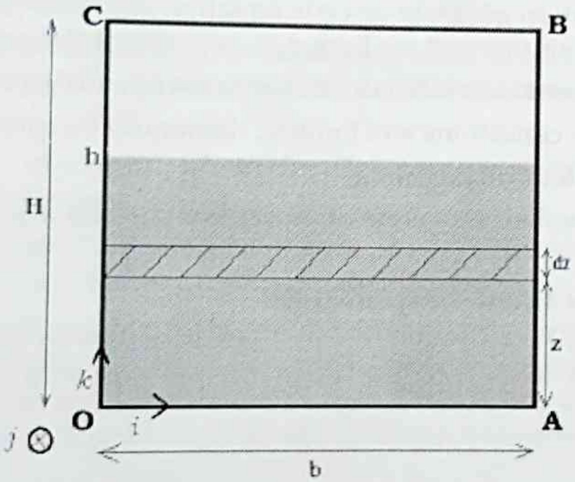
6. Comparer E_j à l'énergie mécanique initiale E_m (dont on donnera l'expression) . Conclusion ?

Exercice 4 **Mécanique** Un peintre en bâtiment de masse M = 90 kg est assis sur une chaise le long du mur qu'il doit peindre . Sa chaise est suspendue à une corde reliée à une poulie parfaite . Pour grimper , le peintre tire sur l'autre extremité de la corde avec une force de 680 N . La masse de la chaise est m = 15 kg . L'axe du repère est la verticale descendante du lieu

1. Déterminer l'accélération du peintre et de sa chaise . Commenter son signe
2. Quelle force le peintre exerce-t-il sur la chaise ?
3. Quelle quantité m' de peinture peut il hisser avec lui ?

Exercice 5 : **Statique** Dans cet exercice , la pression atmosphérique est négligée et on note ρ_0 la masse volumique de l'eau. On considère un barrage d'eau modelisé par un mur rectangulaire OABC , de base b , de hauteur H et d'épaisseur négligeable . Le niveau d'eau est h

1. Enoncer le principe de l'hydrostatique
2. Déterminer (réduction en O) le torseur $[d\tau]$ d'actions mécaniques pressantes s'exerçant sur une surface élementaire ds de ce mur , située à une altitude z et d'épaisseur dz
3. En déduire (réduction en O) le torseur global $[T]$ des actions presssantes de l'eau sur le barrage
4. a) Déterminer l'axe central (équations cartésiennes) de ce torseur b) En déduire(coordonnées) le point D où l'on doit soutenir le barrage pour éviter que la pression de l'eau le fasse basculer



Exercice 6 : **Thermodynamique** Un kilogramme d'air suit un cycle thermodynamique constitué de trois phases :

phase 1-2 : chauffage isochore

phase 2-3 : détente isotherme

phase 3-1 : compression isobare

A l'état 1 , la température est 27 deg Cet la pression 1 bar . A l'état 2 , on a 2 bar . En supposant l'air comme un gaz parfait ($r_{air} = 287J/kg$

1. Donner l'allure du cycle sur un diagramme P-V
2. Déterminer , en degré Celsius , la température à l'état 2
3. Trouver le volume à l'état 3
4. Donner le travail échangé par le gaz et la variation de l'énergie interne sur chaque phase du cycle

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2011

ÉPREUVE DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

« Le hasard et la coïncidence sont les moyens qu'a choisi Dieu pour rester anonyme » : ALBERT EINSTEIN

Exercice 1 : **Electromagnetisme** Les champs électrique et magnétique d'une onde électromagnétique sont respectivement définis par $\overrightarrow{E} = E_x \overrightarrow{i} + E_y \overrightarrow{j} + E_z \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{B} = B_x \overrightarrow{i} + B_y \overrightarrow{j}$ où $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{k}$ sont trois vecteurs orthonormés .
Elle se propage suivant la direction Oz d'un guide d'onde dont la section droite est un carré de côté a suivant Ox et Oy . Le guide d'onde enferme de l'air et ses parois sont parfaitement conductrices .

1. Représenter un tel guide d'onde ainsi que la représentation vectorielle des champs électrique et magnétique à un instant donné
2. A l'aide des équations de Maxwell , établir que toutes les autres composantes des champs électrique et magnétique peuvent s'exprimer en fonction de la composante E_z sachant que $E_z = E_{0z}(x,y)\exp[i(k_g z - \omega t)]$ où k_g est le module du vecteur d'onde
3. Etablir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par E_z
4. Montrer que la solution générale de cette équation aux dérivées partielles est de la forme $E_z = E_0 \sin(px + c)\sin(qy + d)$ où E_0, p, c, q *et* d sont des constantes
5. (a) Quelles conditions doit satisfaire E_z sur la surface du guide d'onde ?
   (b) En utilisant ces conditions aux limites , démontrer l'expression de E_z
6. (a) Calculer le vecteur de Poynting
   (b) Déterminer la valeur moyenne de ce vecteur sur une période et conclure

Exercice 2 **Mécanique**

NB : les questions 2 ,3 et 4 sont indépendantes

Soit un cylindre de centre C , de rayon R = 10 cm et de hauteur h= 1 m . Sa masse volumique varie suivant la loi $\rho(r) = \rho_0(1 - b\frac{r^2}{R^2})$ où r est la distance par rapport à l'axe du cylindre . ρ_0 et b sont des constantes

1. Déterminer
   (a) Les constantes ρ_0 et b sachant que $\rho(R) = 2.5g/cm^3$ et que la masse volumique moyenne du cylindre vaut $\rho_m = 5.5g/cm^3$
   (b) Le tenseur d'inertie du cylindre par rapport au centre C , l'axe Cx étant l'axe du cylindre , les axes Cy et Cz sont perpendiculaires à Cx .
2. Le cylindre subit l'action d'une force motrice constante d'intensité F = 100 N appliquée au centre C et ayant la direction Cy . Le cylindre roule sans glisser avec un frottement de roulement de coefficient k = 2 mm
   Etablir l'expression de la vitesse de rotation du cylindre en fonction du temps . La vitesse initiale vaut $10rd/s$
3. On suppose maintenant que le cylindre tourne autour d'un axe (Δ) = Cx, articulé en deux points I et J tels que IJ = 2h . Le point I est confondu avec le centre O d'une des bases du cylindre . Le cylindre tourne sous l'action d'une force $\overrightarrow{F} = R\sqrt{2}/2(\overrightarrow{e_r} + \overrightarrow{e_\theta})$ appliquée sur la périphérie de l'autre base du cylindre . $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ est la base polaire
   Déterminer la vitesse de rotation du cylindre et les réactions de l'axe IJ aux points I et J

4. Dans cette question , le solide tourne autour du point O. Une force $\overrightarrow{F} = 0.01 \cos t \overrightarrow{k}$,($\overrightarrow{k}$ est le vecteur unitaire de l'axe vertical) est appliquée au centre de la base opposée au point O
   (a) Paramétrer le mouvement
   (b) Déterminer le tenseur d'inertie par rapport au point O
   (c) Déterminer le moment cinétique
   (d) En appliquant le théorême du moment cinétique et l'approximation gyroscopique , déterminer l'expression de l'angle de précession en fonction du temps
   (e) Représenter les variations temporelle de cet angle

Exercice 3 : **Thermodynamique**

NB : les questions 1 , 2 ,3 et 4 sont indépendantes

1. Dans une installation de climatisation , on maintient la température d'une pièce à 290 K alors que la température à l'extérieur est de 305 K . Les cylindres de la machine réfrigérante situés à l'exterieur sont à 320 K et les serpentins situés dans la maison où se produit la détente sont à 280 K . La machine fonctionne suivant un cycle reversible
   (a) Calculer le rendement de la machine
   (b) Quel travail faut-il fournir pour retirer de la maison une quantité de chaleur équivalente à 5000 J
   (c) Quelle variation d'entropie correspond à cette réfrigération pour le système formé par la maison et le milieu extérieur ?
2. Une chambre à air d'automobile est gonflée sous la pression $P_1 = 2$ bars à la température T_1 = 27deg C . son volume est V_1 à cette température . Le coefficient de dilatation thermique du pneu est de 0.005
   (a) Après avoir roulé sur une route , elle s'échauffe jusqu'à la température de 57 deg C , calculer la pression d'air dans le pneu
   (b) Si la résistance maximale du pneu est de 6 bars , à quelle température risque-t-il d'exploser ? Quel est son volume au moment de l'explosion ?
3. Deux enceintes isolées , aux parois rigides , peuvent communiquer par un robinet. L'une d'elles contient 0.5 mole d'hélium à 300 K et l'autre 1 mole d'oxygène à 400 K . Si on ouvre la vanne , quelle sera la température finale du mélange . On rappelle que les chaleurs spécifiques par mole sont 3R/é pour l'hélium et 5R/2 pour l'oxygène où R est la constante des gaz parfaits
4. (a) Un calorimètre contient une masse d'eau m_1 = 150 g à la température $t_1 = 42.8 \deg C$. On y verse une masse $m_2 = 150g$ d'eau prise à la température $t_2 = 15.5 \deg C$. La température finale est $t_f = 29.8 \deg C$. Calculer la capacité thermique du calorimètre
   (b) Ce calorimètre contient maintenant une masse m_3 = 200 g de benzène à la température $t_3 = 20.3 \deg C$. On y plonge un bloc d'aluminium de masse m_4 = 250 g prise à la température $T_4 = 0 \deg C$. Les chaleurs massiques de l'aluminium et du benzène valent respectivement 900 et 1730 $J.kg^{-1}. \deg C^{-1}$. Calculer la température finale du mélange

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2012

ÉPREUVE DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

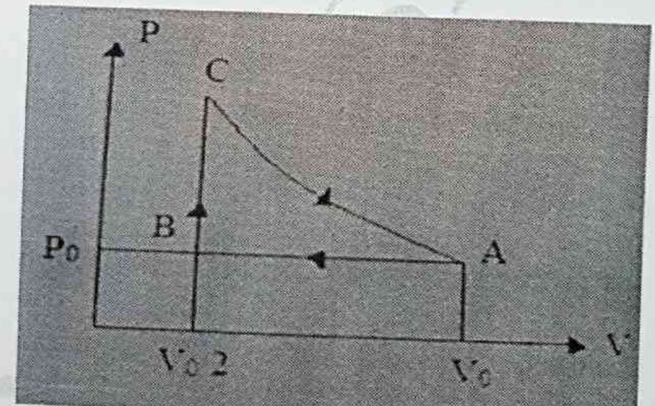
« Le hasard et la coïncidence sont les moyens qu'a choisi Dieu pour rester anonyme » :ALBERT EINSTEIN

Exercice 1 : **Machines à glaçons** Une machine frigorifique fonctionne réversiblement entre une source froide , constituée par une grande masse d'eau sous forme liquide à la température $t_0 = 0\deg \quad C$, et une source chaude constituée par l'air extérieur à la température $t_1 = 20\deg \quad C$. La puissance de la machine est P = 1 KW .
Données : Chaleur latente massique de fusion de la glace sous la pression atmosphérique $l_{fus} = 334J.g^{-1}$, Capacité thermique de l'eau liquide $c_{eau} = 4.18kJ.kg^{-1}.K^{-1}$

1. Exprimer et calculer le transfert thermique Qf échangée sur une durée t = 5 min par la machine avec la source froide , en supposant que sa température reste égale à $t_0 = 0\deg C$
2. En déduire la masse de glace formée en t= 5 min par la machine

Exercice 2 : **Rendement d'un cycle** Un système constitué par n moles d'un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1.4$ suit le cycle représenté sur le diagramme de Clapeyron ci dessous . La phase C vers A est une détente adiabatique réversible . On note T_0 la température dans l'état A

1. Exprimer les températures T_B et T_C en fonction de T_0
2. Quelle est la nature de cette machine thermique ? Exprimer son rendement η en fonction de $T_A \quad , T_B \quad et \quad T_C$ puis uniquement en fonction de T_0 . Le calculer
3. Calculer le rendement η_{max} de la machine de Carnot entre les mêmes sources chaude et froide



Exercice 3 : **Ondes électromagnétiques dans les diélectriques**
Une onde électromagnétique à polarisation rectiligne se dirige selon l'axe oz . Le champ électrique est noté par . Un électron dans une molécule est soumis à l'action du champ magnétique et son équation de mouvement est $m\ddot{\overrightarrow{r}} = -m\omega_0^2 r - 2m\Gamma \overrightarrow{r} v + q\overrightarrow{E}$

1. calculer $\omega_0 = 2\pi(c/\lambda_0) avec \lambda_0 = 0.3 \quad 10^{-6}m, \Gamma/\omega_0 = 3 \quad 10^{-6}$ $c = 3 \quad 10^8 m/s, q = -1.6 \quad 10^{-19}C, m = 9.1 \quad 10^{-30}kg$ $.Calculer \omega_0 et \Gamma^{-1}$
2. l'électron restant lié dans la molécule de rayon a , on néglige au niveau de la molécule , la dépendance spatiale en exp $i\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}$ du champ . Justifier cette approximation
3. Trouver en régime stationnaire l'amplitude complexe $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{r_0}\overrightarrow{e_x}$ du mouvement de l'électron , ainsi que sa vitesse $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{v_0}\overrightarrow{e_x}$

4. Pour quelle valeur de ω le module de v_0 est il maximal ?
5. S'il ya z électrons par molécule , le moment dipolaire électrique complexe est $\overrightarrow{p} = zq\overrightarrow{r} = \alpha\overrightarrow{E}$. En déduire , s'il ya N molécules par unité de volume , la constante diélectrique $\epsilon_r = \epsilon(\omega)/\epsilon_0$. On néglige toute interaction dipolaire entre molécules
6. On pose $\epsilon_r = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$. on a $\epsilon' - 1 << 1 et \epsilon'' << 1$. On considère l'intervalle défini par $\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0} dans[-10^{-5}, 10^5]$ a) Montrer que l'expression de $\epsilon''(\omega)$ se simplifie en $\epsilon''(\omega) = \Omega_p^2 \frac{\Gamma}{2\omega_0} \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\Gamma^2}$ b) Trouver Ω_p^2

Exercice 4 **Phénomène d'induction** Un cerceau homogène de masse M et de rayon a est fait de cuivre . Sa résistance électrique est R et son inductance est négligeable . Il est suspendu à un fil isolant OO_1 qui n'oppose aucune résistance à la torsion . Le cerceau se trouve dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ horizontal et uniforme . Soit θ l'angle que fait la normale du plan du cerceau avec $\overrightarrow{B}$. A l'instant t=0 , $\theta = 0$ et le cerceau est mis en mouvement de rotation autour de OO_1 avec une vitesse angulaire initiale $\dot{\alpha}_0$.

1. Ecrire l'équation différentielle du mouvement du cerceau
2. Montrer que le cerceau s'arrête après avoir tourné d'un angle α_f tel que $\dot{\alpha}_0 = \frac{(B\pi a)^2}{2MR}(2\alpha_f - \sin 2\alpha_f)$
3. Déterminer l'énergie totale dissipée par effet Joule dans le cerceau et justifier le résulat

Exercice 5 **Mouvement d'un solide autour d'un point** Une sphère (S) de rayon a et de centre C reste en contact avec le plan de repère (O,i,j) . Au cours de son mouvement , il effectue des rotations autour du centre C . On considère les référentiels R(O,i,j,k) fixe R_c(C,i,j,k) barycentrique et $R_1(C, i_1, j_1, k_1)$ lié à la sphère

1. Paramétrer le mouvement
2. Soit A le point de contact de la sphère avec le plan. Déterminer la vitesse du point A par rapport au référentiel F
3. Soit B un point de la sphère tel que $\overrightarrow{CB} = a\overrightarrow{k_1}$. Déterminer la vitesse de B par rapport à R
4. On suppose que la sphère roule sans glisser a) Ecrire le non glissement b) Que deviennent les réponses des questions 2 et 3 ?

Exercice 6 **Formalismes de base de la mécanique**

1. Une particule est soumise à l'action d'un potentiel de la forme $U(x) = -Ax^4$ a) Donner l'équation de mouvement de la particule b) En supposant que l'énergie de la particule est nulle , montrer que la loi horaire du mouvement est donnée par l'expression $x(t) = \frac{x_0}{1 \pm t x_0\sqrt{2A/m}}$ o $x_0 = x(0)$
2. Trouver la pulsation des petites oscillations des particules dans le champ $U(x) = V\cos\alpha x - Fx$
3. Déterminer l'énergie E acquise par un oscillateur sous l'action de la force $F(t) = F\exp(-t/r)^2$ durant le temps de son action , si pour $t = -\infty$ l'oscillateur était au repos
4. Déterminer la fonction de Hamilton d'un oscillateur anharmonique dont la fonction de Lagrange est $L = \dot{x}^2/2 - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 - \beta x\dot{x}^2$

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2013

ÉPREUVE DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

« Le hasard et la coïncidence sont les moyens qu'a choisi Dieu pour rester anonyme » :ALBERT EINSTEIN

Exercice 1 **Electrostatique - Disque uniformément chargé** Un disque infiniment mince de centre O , d'axe oz et de rayon a , porte une charge totale Q uniformément répartie sur sa surface

1. Calculer le potentiel $V_1(z)$ en tout point M(z,0,0) dans le cas où z est positif
   (a) $V_1(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}(\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}+\frac{z}{a})$
   (b) $V_1(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}(\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}}-\frac{z}{a})$
   (c) $V_1(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}(\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}}-\frac{z}{a})$
   (d) $V_1(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a}(\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}}+\frac{z}{a})$
2. Calculer le potentiel $V_2(z)$ en tout point M(z,0,0) de l'axe oz dans le cas où z est négatif
   (a) $V_2(z) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0}(\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}+\frac{z}{a}}$
   (b) $V_2(z) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}-\frac{z}{a}}$
   (c) $V_2(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}+\frac{z}{a}}$
   (d) $V_2(z) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0}(\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}-\frac{z}{a}}$
3. On désigne par $\overrightarrow{e_z}$ le vecteur unitaire porté par l'axe oz . Exprimer le champ électrique $\overrightarrow{E_1(z)}$ en tout point M(z,0,0) de l'axe dans le cas où z est positif
   (a) $\overrightarrow{E_1(z)} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}(\frac{z/a}{\sqrt{1+(z/a)^2}}-1)\overrightarrow{e_z}$
   (b) $\overrightarrow{E_1(z)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}(-\frac{z/a}{\sqrt{1+(z/a)^2}}+1)\overrightarrow{e_z}$
   (c) $\overrightarrow{E_1(z)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}(\frac{z/a}{\sqrt{1+(z/a)^2}}+1)\overrightarrow{e_z}$
   (d) $\overrightarrow{E_1(z)} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}(-\frac{z/a}{\sqrt{1+(z/a)^2}}-1)\overrightarrow{e_z}$
4. Exprimer le champ électrique $\overrightarrow{E_2(z)}$ en tout point M(z,0,0) de l'axe dans le cas où z est négatif
   (a) $\overrightarrow{E_2(z)} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}(\frac{z/a}{\sqrt{1+(z/a)^2}}-1)\overrightarrow{e_z}$
   (b) $\overrightarrow{E_1(z)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}(-\frac{z/a}{\sqrt{1+(z/a)^2}}+1)\overrightarrow{e_z}$

(c) $\overrightarrow{E_1(z)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(\frac{z/a}{\sqrt{1+(z/a)^2}}+1\right)\overrightarrow{e_z}$

(d) $\overrightarrow{E_1(z)} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\left(-\frac{z/a}{\sqrt{1+(z/a)^2}}-1\right)\overrightarrow{e_z}$

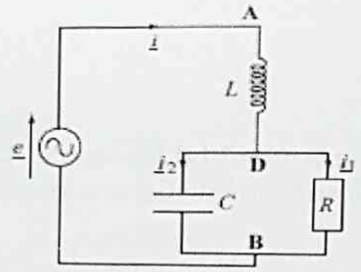
5. Calculer le saut du champ électrique à la traversée de la distribution $\delta\overrightarrow{E} = \lim_{\epsilon\to 0}(\overrightarrow{E_1(\epsilon)} - \overrightarrow{E_2(\epsilon)})$
   (a) $\delta\overrightarrow{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\overrightarrow{e_z}$
   (b) $\delta\overrightarrow{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\overrightarrow{e_z}$
   (c) $\delta\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$
   (d) $\delta\overrightarrow{E} = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 a^2}\overrightarrow{e_z}$
6. On perce dans le disque un trou circulaire de rayon b centré en 0 . Calculer la variation du champ électrique lors du passage d'un point $M_1(\epsilon,0,0)$ au point $M_2(\epsilon,0,0)$ quant $\epsilon\to 0$
   (a) $\delta\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$
   (b) $\delta\overrightarrow{E} = \frac{Q}{\pi\epsilon_0(a-b)^2}\overrightarrow{e_z}$
   (c) $\delta\overrightarrow{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b^2}\overrightarrow{e_z}$
   (d) $\delta\overrightarrow{E} = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 a^2}\overrightarrow{e_z}$

Exercice 2 **Electrocinétique : régime sinusoîdal** Le dipôle AB représenté sur le schéma de la figure ci-après est alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice instantanée $e(t) = E_0\sqrt{2}\sin(\omega t)$

7. Exprimer L en fonction de R , C et ω pour que le dipôle AB soit équivalent à une résistance pure R_{eq}
   (a) $L = \frac{RC\omega}{1+(RC\omega)^2}$
   (b) $L = \frac{R^2C}{1+RC\omega}$
   (c) $L = \frac{R^2C}{1+(RC\omega)^2}$
   (d) $L = \frac{RC\omega}{1-RC\omega}$
8. Calculer L sachant que R = 100Ω , $C = 100/3\mu F \quad et \quad \omega = 400 rad.s^{-1}$
   (a) L = 120 mH
   (b) L = 200 mH
   (c) L = 50 mH
   (d) L = 37 mH
9. La valeur efficace de la force électromotrice du générateur vaut $E_0 = 180V$. Calculer la valeur efficace de l'intensité I du courant dans la bobine
   (a) I = 1.2 A
   (b) I = 3.7 A
   (c) I = 4.2 A
   (d) I = 5 A
10. Calculer les valeurs efficaces des différences de potentiel $U_{AD} et U_{DB}$
    (a) $U_{AD} = 100V \quad et \quad U_{DB} = 250V$

(b) $U_{AD} = 45V \quad et \quad U_{DB} = 135V$
(c) $U_{AD} = 240V \quad et \quad U_{DB} = 300V$
(d) $U_{AD} = 180V \quad et \quad U_{DB} = 45V$

11. Calculer les valeurs efficaces de $I_1 \quad et \quad I_2$ des intensités des courants circulant respectivement dans la résistance et dans le condensateur
    (a) $I_1 = 1A \quad et \quad I_2 = 4A$
    (b) $I_1 = 3A \quad et \quad I_2 = 4A$
    (c) $I_1 = 2A \quad et \quad I_2 = 7A$
    (d) $I_1 = 7A \quad et \quad I_2 = 2A$
12. Calculer la puissance moyenne P consommée par le dipôle AB sur une période
    (a) P = 1200 W
    (b) P = 120 W
    (c) P = 75 W
    (d) P = 900 W



Exercice 3 **Optique géométrique** A l'aide d'une lentille mince convergente L de distance focale image f′ = 20 cm , on forme l'image d'un objet sur un écran situé à une distance D = 1 m de l'objet . En déplaçant la lentille , on trouve deux positions $O_1 \quad et \quad O_2$ qui donnent une image nette sur l'écran (voir figure ci-contre)

13. Calculer la distance qui sépare ces deux points
    (a) d = 447 mm
    (b) d = 192 mm
    (c) d = 58 mm
    (d) d = 352 mm
14. Calculer le grandissement G_t de l'image correspondant à chacune de ces deux positons de la lentille
    (a) $G_t = -2.62 \quad et \quad G_t = -0.38$
    (b) $G_t = -0.79 \quad et \quad G_t = -1.27$
    (c) $G_t = -0.38 \quad et \quad G_t = -0.79$
    (d) $G_t = -1.27 \quad et \quad G_t = -0.38$
15. La lentille précédente est remplacée par une lentille L′ de distance focale image f′ inconnue . Les deux positions de la lentille qui donnent une image nette sur l'écran sont séparées par une distance d′= 600 mm . Calculer f′
    (a) f′ = 100 mm

(b) f′ = 260 mm

(c) f′ = 90 mm

(d) f′ = 160 mm

16. On remplace L′ par une nouvelle lentille convergente L″ placée entre l'objet et l'écran . On règle la position de l'écran de façon à ce qu'il n'existe plus qu'une seule position pour laquelle L″ donne une image nette de l'objet (d = 0) . On mesure alors une distance D″ = 1200 mm entre l'objet et son image . En déduire la distance focale image f″ de cette lentille

(a) f″ = 150 mm

(b) f″ = 300 mm

(c) f″ = 120 mm

(d) f″ = 200 mm

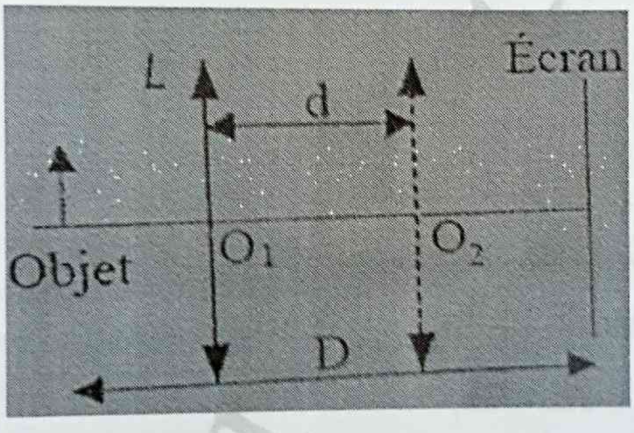
17. Calculer , dans ces conditions le grandissement transversal G_t' de l'image .

(a) $G_t' = -3$

(b) $G_t' = -0.5$

(c) $G_t' = -1$

(d) $G_t' = -2.3$



Exercice 4 **Transformations d'un gaz parfait**

18. n moles d'un gaz parfait évoluent d'un état initial p_i, V_i, T_i vers un état final p_f, V_f, T_f . On désigne par $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ le rapport des chaleurs spécifiques respectivement c_p à pression et c_v à volume constants. Exprimer la variation ΔU de l'énergie interne du gaz

(a) $\Delta U = \frac{p_iV_i - p_fV_f}{n\gamma}$

(b) $\Delta U = 0$

(c) $\Delta U = \frac{p_fV_f - p_iV_i}{nR}$

(d) $\Delta U = -\frac{p_iV_i - p_fV_f}{\gamma - 1}$

19. Un récipient rigide , cylindrique horizontal muni d'un piston mobile P qui peut coulisser sans frottement le long du cylindre est séparé en deux compartiments A et B par une paroi fixe P_0 . L'ensemble constitué par le cylindre , le piston et les parois est adiabatique . Sur la face externe la pression atmosphérique p_a que l'on suppose uniforme et constante s'exerce Dans la situation initiale , le compartiment A de volume V_A contient n moles d'un gaz parfait à la pression p_a , le compartiment B , de volume V_B est vide (pression négligeable) . On perce dans la paroi p_0 , un orifice suffisamment petit pour que le piston se déplace

infiniment lentement . On suppose , dans un premier temps , que V_B est suffisamment petit pour que dans l'état d'équilibre final le piston n'arrive pas en butée sur p_0 . Calculer le volume ΔV balayé par le piston lors de l'évolution du gaz vers l'état d'équilibre final caractérisé par le volume final V_{f1} de l'ensemble des deux compartiments .

(a) $\Delta V = V_A + V_B - V_{f1}$
(b) $\Delta V = -V_A + V_B + V_{f1}$
(c) $\Delta V = V_A - V_B + V_{f1}$
(d) $\Delta V = -V_B + V_{f1}$

20. Calculer , en appliquant le premier principe de la thermodynamique , le volume final V_{f1} du gaz

(a) $V_{f1} = V_A + \frac{\gamma-1}{\gamma} V_B$
(b) $V_{f1} = V_B + \frac{\gamma-1}{\gamma} V_A$
(c) $V_{f1} = V_B + \frac{\gamma}{\gamma-1} V_A$
(d) $V_{f1} = \gamma V_A + \frac{V_B}{\gamma-1}$

21. Calculer la température finale T_{f1} du gaz

(a) $T_{f1} = \frac{p_a}{nR}(V_B + \dfrac{\gamma-1}{\gamma} V_A)$
(b) $T_{f1} = \frac{p_a}{nR}(V_A + \dfrac{\gamma-1}{\gamma} V_B)$
(c) $T_{f1} = \frac{p_a}{nR}(V_B + \dfrac{\gamma}{\gamma-1} V_A)$
(d) $T_{f1} = \frac{p_a}{nR}(\gamma V_A + \dfrac{V_B}{\gamma-1})$

22. Calculer la variation d'entropie ΔS_1 du gaz

(a) $\Delta S_1 = n\gamma R \ln[1 + \dfrac{(\gamma-1)V_B}{\gamma V_A}]$
(b) $\Delta S_1 = \frac{n\gamma R}{\gamma-1} \ln[1 + \dfrac{(\gamma-1)V_B}{\gamma V_A}]$
(c) $\Delta S_1 = \frac{n\gamma R}{\gamma-1} \ln[1 + \dfrac{(\gamma)V_A}{(\gamma V_A - 1)V_B}]$
(d) $\Delta S_1 = \frac{nR}{\gamma} \ln[1 + \dfrac{\gamma V_A}{(\gamma-1)V_B}]$

23. On suppose maintenant que V_B est suffisamment grand pour que dans l'état d'équilibre final le piston soit buté sur p_0 . Calculer la pression finale p_{f2} du gaz

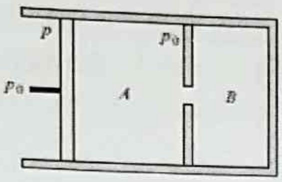
(a) $p_{f2} = \gamma p_a \frac{V_B}{V_A}$
(b) $p_{f2} = (\gamma - 1) p_a \frac{V_A}{V_B}$
(c) $\frac{p_a}{\gamma} \frac{V_B}{V_A}$
(d) $p_{f2} = \gamma p_a \frac{V_A}{V_B}$

24. Calculer la température finale T_{f2} du gaz

(a) $T_{f2} = \frac{\gamma p_a V_A}{nR}$
(b) $T_{f2} = \frac{(\gamma-1) p_a V_A}{nR}$

(c) $T_{f2} = \frac{p_a V_A}{n\gamma R}$

(d) $T_{f2} = \frac{p_a V_B}{nR(\gamma-1)}$



Exercice 5 **Mécanique - problème de Képler**

25. Deux corps assimilés à des points matériels A_1 *et* A_2, de masse respectives m_1 *et* m_2, isolés du reste du monde, évoluent sous la seule action des forces de gravitation qu'elles exercent l'une sur l'autre. On note C le centre de masse du système, $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{CA_1}$ *et* $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{CA_2}$ les rayons vecteurs des deux corps et $G = 6.67 \quad 10^{-11} SI$ la constante de gravitation universelle. Ce problème à deux corps, se réduit dans le référentiel galiléen R* du centre de masse, à l'étude de mouvement d'un corps matériel fictif A de masse μ, de rayon vecteur $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}$ (figure ci contre) soumis à la force $\overrightarrow{F} = -Gm_1 m_2 \frac{\overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|^3}$ Exprimer μ en fonction de m_1 *et* m_2
   (a) $\mu = m_1 + m_2$
   (b) $\mu = (1/m_1 + 1/m_2)^{-1}$
   (c) $\mu = \sqrt{m_1 + m_2}$
   (d) $\mu = (1/m_1 - 1/m_2)^{-1}$
26. Quelles sont, au cours du mouvement de A, les grandeurs conservatives ?
   (a) l'énergie mécanique de A
   (b) L'énergie potentielle de A
   (c) L'énergie cinétique de A
   (d) Le moment cinétique de A en C
27. Le référentiel R* est muni du repère cartésien $(C, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Le mouvement de A s'effectue dans le plan $(C, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$. On désigne par $r = \|\overrightarrow{r}\|$ *et* $\varphi = (\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{r})$, la coordonnée radiale et l'angle orienté, du système de coordonnées polaires. Exprimer l'énergie mécanique E_m de A
   (a) $E_m = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - G\frac{m_1 m_2}{r^2}$
   (b) $E_m = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\ddot{\varphi}^2) - G\frac{m_1 m_2}{r}$
   (c) $E_m = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - G\frac{m_1 m_2}{r}$
   (d) $E_m = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\ddot{\varphi}^2) - G\frac{m_1 m_2}{r^2}$
28. Donner l'expression de l'énergie cinétique E_k de A en fonction de $r(\varphi)$, $\frac{dr}{d\varphi}$, μ *et* l_z composante sur l'axe $(C, \overrightarrow{e_z})$ du moment cinétique de A en C
   (a) $E_k = \frac{\mu l_z^2}{2r^2}(1 + \frac{1}{r}\frac{d^2 r}{d\varphi^2}$
   (b) $E_k = \frac{\mu l_z^2}{2r^2}(1 + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 r}{d\varphi^2}$

(c) $E_k = \frac{L_z^2}{2\mu r^2}(1 + \frac{1}{r^2}(\frac{dr}{d\varphi})^2$

(d) $E_k = \frac{L_z^2}{2r^2}(1 + \frac{1}{r^2}(\frac{dr}{d\varphi})^2$

29. En introduisant la fonction $u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}$ dans les expressions précédentes , on établit l'équation différentielle suivante $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p}$. Expliciter p

(a) $p = \frac{\mu L_z^2}{2Gm_1m_2} + \frac{Gm_1m_2}{2E_m}$

(b) $p = \frac{L_z^2}{\mu Gm_1m_2}$

(c) $p = \frac{L_z^2}{2\mu Gm_1m_2} + \frac{Gm_1m_2}{2E_m}$

(d) $\frac{Gm_1m_2}{2E_m}$

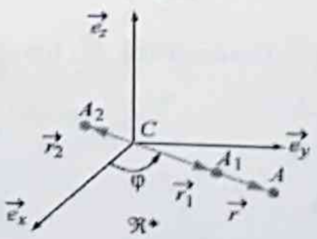
30. Le système à deux corps , constitué par une sonde interplanétaire et la Terre , que l'on assimile à des points matériels , est supposé isolé du reste de l'Univers . La sonde , de masse m_1 négligeable devant celle de la terre , est assimilable au point matériel fictif A étudié précédemment , tandis que la terre est assimilable au centre de masse C du système . Calculer la vitesse de libération V_l de la sonde dans R* à une altitude de 400 km pour une masse $m_2 = 5.98 \quad 10^24kg$ de la terre , supposée sphérique , de rayon $R_T = 6470$ km

(a) $V_l = 10.8km.s^{-1}$

(b) $V_l = 341km.s^{-1}$

(c) $V_l = 10800km.s^{-1}$

(d) $V_l = 38800km.s^{-1}$



2013.png

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2014

ÉPREUVE DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

« Le hasard et la coïncidence sont les moyens qu'a choisi Dieu pour rester anonyme » :ALBERT EINSTEIN

Exercice 1 : **Q1 à Q3**

Une salle de stockage des copies d'examen d'un concours officiel est gérée par quatre responsables : le Directeur (A) , le Directeur adjoint(B) , le Chef de la scolarité(C) et un responsable désigné en charge du concours (D) . Seuls les responsables A et B disposent de la clé de la salle et évidemment , le Directeur et le Directeur adjoint ne peuvent être présens au même moment , dû aux contraintes administratives . L'ouverture de la porte est caractérisée par la variable de sortie . L'accès de la salle est soumis à la condition suivante : Le Directeur et le Directeur adjoint nee peuvent ouvrir la salle de stockage des copies qu'en presence du chef de la scolarité et/ou du responsable désigné en charge des examens .

1. **la table de vérité tenant compte des variables A , B ,C ,D et Y est :**

(a)

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1

(b)

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1

(c)

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1

(d)

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1

(e) aucune reponse

2. **la table de Karnaugh pour la fonction logique Y est alors**

(a)

0	1	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1

(b)

0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1

(c)

0	0	0	0
0	1	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1

(d)

0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1

(e) aucune reponse

3. **D'après la table de Karnaugh , l'expression simplifiée est**

(a) $Y = A\overline{B} + \overline{A}B$

(a) $Y = A\overline{B}C + A\overline{B}D + \overline{A}B$

(a) $Y = A\overline{B}C + A\overline{B}D + \overline{A}BC + \overline{A}BC$

(a) $Y = A\overline{B} + \overline{A}BC + \overline{A}BD$

(a) aucune reponse

Exercice 2 : **Q4 à Q20**

Rappels mathématiques :

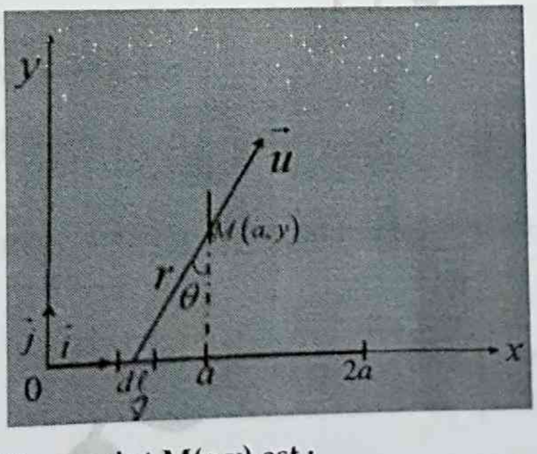
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2} + cste$

$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}dx = -\frac{1}{2a}\ln\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{\ln(\sqrt{x^2+a^2}-a} + cste$

$\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)(x^2+a^2)^{m-1}}$ Les constantes habituelles sont $\epsilon_0 etk$

On considère un conducteur filiforme de longueur 2a , uniformément chargé de densité linéaire positive λ . Le but de l'exercice est de déterminer les expressions du champ et potentiel électrostatiques en tout point de l'espace , créés par le conducteur filiforme . On choisit alors un repère orthonormé arbitraire (O,i,j)

Partie 1 : On s'intéresse aux calculs du champ électrique $\overrightarrow{E}$ et du potentiel V sur la droite x=a , pour tout point M(a,y) . On choisit alors sur le fil , un élement de longueur dl autour du point d'abscisse x=l et un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$, comme l'indique la figure ci contre



4. **Le champ électrique créé au point M(a,y) est :**
   (a) $\overrightarrow{E} = -k\lambda\int\frac{dl}{r^2}\overrightarrow{j}$
   (b) $\overrightarrow{E} = k\lambda\int\frac{dl}{r^2}\overrightarrow{u}$
   (c) $\overrightarrow{E} = -k\lambda\int\frac{dl}{r^2}\overrightarrow{i}$
   (d) $\overrightarrow{E} = k\lambda\int\frac{dl}{r^2}\overrightarrow{j}$
   (e) aucune reponse
5. **L'élement de longueur dl s'écrit :**
   (a) $\frac{yd\theta}{\sin^2\theta}$
   (b) $\frac{-yd\theta}{\cos^2\theta}$
   (c) $\frac{-yd\theta}{\sin^2\theta}$

(d) $\frac{y d\theta}{\cos^2\theta}$

6. **Le champ électrique s'écrit :**
   (a) $\overrightarrow{E} = -k\lambda \int \frac{d\theta}{y}(\sin\theta \overrightarrow{i} + \cos\theta \overrightarrow{j}$
   (b) $\overrightarrow{E} = k\lambda \int \frac{d\theta}{y}(\sin\theta \overrightarrow{i}$
   (c) $\overrightarrow{E} = k\lambda \int \frac{d\theta}{y}(\sin\theta \overrightarrow{i} + \cos\theta \overrightarrow{j}$
   (d) $\overrightarrow{E} = k\lambda \int \frac{d\theta}{y}(\cos\theta \overrightarrow{j}$
   (e) aucune reponse
7. **L'intégration de cette dernière expression , donne :**
   (a) $\overrightarrow{E} = \frac{ka\lambda}{2y\sqrt{y^2+a^2}} \overrightarrow{i}$
   (b) $\overrightarrow{E} = \frac{2ka\lambda}{y\sqrt{y^2+a^2}} \overrightarrow{j}$
   (c) $\overrightarrow{E} = \frac{ka\lambda}{y\sqrt{y^2+a^2}} \overrightarrow{j}$
   (d) $\overrightarrow{E} = -\frac{ka\lambda}{2y\sqrt{y^2+a^2}} \overrightarrow{i} + \frac{ka\lambda}{2x\sqrt{x^2+a^2}} \overrightarrow{j}$
   (e) aucune reponse
8. **On voudrait calculer le potentiel créé par ce conducteur au point M(a,y) , sans passer par la définition donnée par la question 5 . On peut écrire :**
   (a) $V = -\int \overrightarrow{E} dy \overrightarrow{j}$
   (b) $V = \int \overrightarrow{E} dy \overrightarrow{j}$
   (c) $V = -\int \overrightarrow{E} dy \overrightarrow{i}$
   (d) $V = \int \overrightarrow{E} dy \overrightarrow{i}$
   (e) aucune reponse
9. **En supposant que le potentiel est nul à l'infini , on peut écrire :**
   (a) $V = -k\lambda \ln \frac{\sqrt{y^2+a^2}+a}{\sqrt{y^2+a^2}-a}$
   (b) $V = k\lambda \ln \frac{\sqrt{y^2+a^2}+a}{\sqrt{y^2+a^2}-a}$
   (c) $V = -k\lambda \ln \frac{\sqrt{y^2+a^2}+a}{\sqrt{y^2+a^2}-a} + cste$
   (d) $V = k\lambda \ln \frac{\sqrt{y^2+a^2}+a}{\sqrt{y^2+a^2}-a} + cste$
   (e) aucune reponse

Partie 2 : On désire maintenant calculer le champ électrique en un point N(x,0) avec $|x| > 2a$

10. **Le champ électrique au point N(x,0) s'écrit :**
    (a) $\overrightarrow{E} = k\lambda \int \frac{dl}{(x-l)^2} \overrightarrow{i}$
    (b) $\overrightarrow{E} = k\lambda \int \frac{dl}{(x-l)^2} \overrightarrow{j}$
    (c) $\overrightarrow{E} = k\lambda \int \frac{dl}{(x+l)^2} \overrightarrow{i}$

(d) $\overrightarrow{E} = k\lambda \int \frac{dl}{(x+l)^2} \overrightarrow{j}$

(e) aucune reponse

11. **Après intégration , on obtient :**

(a) $\overrightarrow{E} = \frac{k\lambda a}{x^2-a^2} \overrightarrow{i}$

(b) $\overrightarrow{E} = \frac{2k\lambda a}{x^2-a^2} \overrightarrow{j}$

(c) $\overrightarrow{E} = \frac{2k\lambda a}{x(x-2a)} \overrightarrow{i}$

(d) $\overrightarrow{E} = \frac{2k\lambda a}{x(x-a)} \overrightarrow{i}$

(e) Aucune reponse

12. **Le potentiel au point N(x,0) s'écrit :**

(a) $V = k\lambda \ln \dfrac{x+a}{x-a}$

(b) $V = -k\lambda \ln \dfrac{x+a}{x-a}$

(c) $V = k\lambda \ln \dfrac{x+2a}{x-2a}$

(d) $V = k\lambda \ln \dfrac{x}{x-2a}$

(e) Aucune reponse

Partie 3 : On voudrait trouver l'expression du potentiel électrique M(x,y)

13. **Le potentiel au point M(x,y) s'écrit :**

(a) $V = k\lambda \int_0^{2a} \frac{dl}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}} + cste$

(b) $V = k\lambda \int_{-a}^{a} \frac{dl}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}} + cste$

(c) $V = k\lambda \int_0^{2a} \frac{dl}{\sqrt{(x-l)^2}} + cste$

(d) $V = k\lambda \int_{-a}^{a} \frac{dl}{\sqrt{(x-l)^2}} + cste$

(e) aucune reponse

14. On peut écrire :

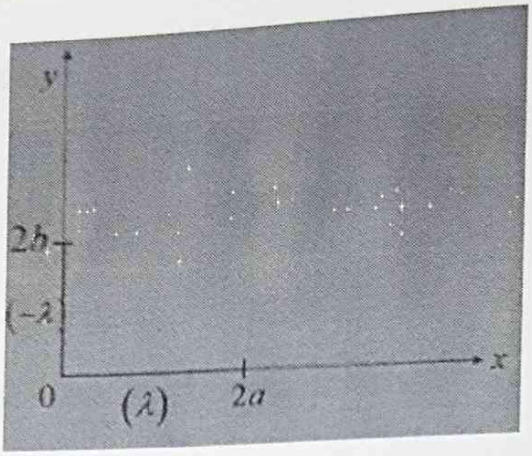
(a) $V = k\lambda \ln \dfrac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}+x+a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}+x-a}$

(b) $V = k\lambda \ln \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{(x-2a)^2+y^2}+x-2a} + cste$

(c) $V = k\lambda \ln \dfrac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}+x+a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}+x-a} + cste$

(d) $V = k\lambda \ln \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{\sqrt{(x-2a)^2+y^2}+x-2a}$

Partie 4 : On associe un deuxième conducteur filiforme de longueur 2 b , de densité linéaire $-\lambda$ comme l'indique la figure ci-contre



15. **Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ créé par le deuxième conducteur de densité linéaire -λ s'écrit :**
   (a) $\overrightarrow{E'} = \frac{-2kb\lambda}{a\sqrt{a^2+b^2}}\overrightarrow{i}$
   (b) $\overrightarrow{E'} = \frac{kb\lambda}{a\sqrt{a^2+b^2}}\overrightarrow{j}$
   (c) $\overrightarrow{E'} = \frac{2kb\lambda}{a\sqrt{a^2+b^2}}\overrightarrow{i}$
   (d) $\overrightarrow{E'} = \frac{-kb\lambda}{a\sqrt{a^2+b^2}}\overrightarrow{i} + \frac{kb\lambda}{b\sqrt{a^2+b^2}}\overrightarrow{j}$
   (e) Aucune reponse

16. Le champ électrique résultant$\overrightarrow{E''}$ au point M(a,b) s'écrit alors :
   (a) $\overrightarrow{E''} = \frac{2k\lambda}{\sqrt{a^2+b^2}}(-\frac{b}{a}\overrightarrow{i} + \frac{a}{b}\overrightarrow{j})$
   (b) $\overrightarrow{E''} = \frac{2k\lambda}{\sqrt{a^2+b^2}}(-\frac{a}{b}\overrightarrow{i} + \frac{b}{a}\overrightarrow{j})$
   (c) $\overrightarrow{E''} = \frac{2k\lambda}{\sqrt{a^2+b^2}}(\frac{b}{a}\overrightarrow{i} - \frac{a}{b}\overrightarrow{j})$
   (d) $\overrightarrow{E''} = \frac{2k\lambda}{\sqrt{a^2+b^2}}(\frac{a}{b}\overrightarrow{i} - \frac{b}{a}\overrightarrow{j})$
   (e) aucune reponse

Partie 5 : On garde le même schéma de la partie 4 (Q16 à Q17) mais le fil de longueur 2b a pour densité linéaire positive λ

17. **Le champ électrique $\overrightarrow{E'}$ créé par le deuxième conducteur de densité linéaire +λ au point M(a,b) s'écrit :**
   (a) $\overrightarrow{E'} = \frac{-2kb\lambda}{a\sqrt{a^2+b^2}}\overrightarrow{i}$
   (b) $\overrightarrow{E'} = \frac{kb\lambda}{a\sqrt{a^2+b^2}}\overrightarrow{j}$
   (c) $\overrightarrow{E'} = \frac{2kb\lambda}{a\sqrt{a^2+b^2}}\overrightarrow{i}$
   (d) $\overrightarrow{E'} = \frac{-kb\lambda}{a\sqrt{a^2+b^2}}\overrightarrow{i} + \frac{kb\lambda}{b\sqrt{a^2+b^2}}\overrightarrow{j}$
   (e) Aucune reponse

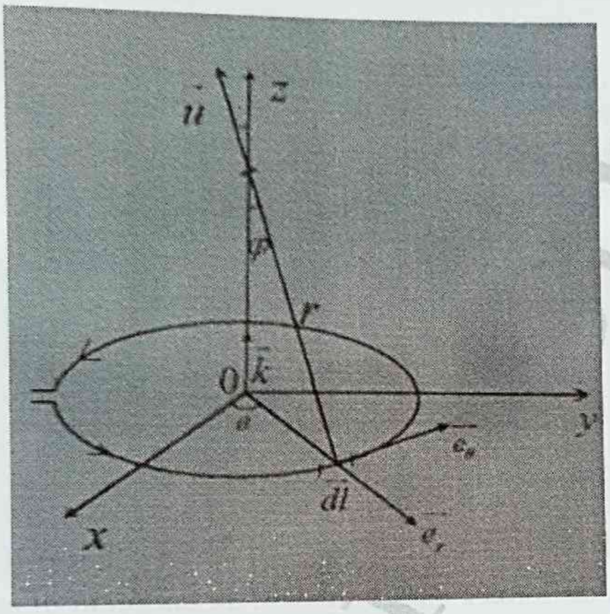
18. Le champ électrique résultant$\overrightarrow{E''}$ au point M(a,b) s'écrit alors :
   (a) $\overrightarrow{E''} = \frac{2k\lambda}{\sqrt{a^2+b^2}}(\frac{b}{a}\overrightarrow{i} + \frac{a}{b}\overrightarrow{j})$
   (b) $\overrightarrow{E''} = \frac{2k\lambda}{\sqrt{a^2+b^2}}(\frac{a}{b}\overrightarrow{i} + \frac{b}{a}\overrightarrow{j})$

(c) $\overrightarrow{E^{//}} = \frac{2k\lambda}{\sqrt{a^2+b^2}}(\frac{b}{a}\overrightarrow{i} + \frac{a}{b}\overrightarrow{j})$

(d) $\overrightarrow{E^{//}} = \frac{2k\lambda}{\sqrt{a^2+b^2}}(-\frac{a}{b}\overrightarrow{i} - \frac{b}{a}\overrightarrow{j})$

(e) aucune reponse

Exercice 3 : **Magnétostatique Q19 à Q27** On désire calculer le champ magnétique créé sur l'axe de révolution d'une spire circulaire de rayon R , parcourue par un courant électrique I (voir figure) . Le système $(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{k})$ forme un repère orthonormé direct



19. **D'après le schéma ci dessus on a :**
   (a) $\overrightarrow{u} = \cos\varphi\,\overrightarrow{k} - \sin\varphi\,\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{dl} = dl\,\overrightarrow{e_r}$
   (b) $\overrightarrow{u} = \sin\varphi\,\overrightarrow{k} - \cos\varphi\,\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{dl} = dl\,\overrightarrow{e_r}$
   (c) $\overrightarrow{u} = \cos\varphi\,\overrightarrow{k} - \sin\varphi\,\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{dl} = dl\,\overrightarrow{e_\theta}$
   (d) $\overrightarrow{u} = \cos\varphi\,\overrightarrow{k} + \sin\varphi\,\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{dl} = dl\,\overrightarrow{e_\theta}$

20. **En appliquant la loi de Biot et Savart , on peut écrire :**
   (a) $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{dl}}{r^2}$
   (b) $\overrightarrow{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{dl}}{r^2}$
   (c) $\overrightarrow{B} = \frac{\epsilon_0 I}{4\pi}\int\frac{\overrightarrow{dl}\wedge\overrightarrow{u}}{r^2}$
   (d) $\overrightarrow{B} = -\frac{\epsilon_0 I}{4\pi}\int\frac{\overrightarrow{dl}\wedge\overrightarrow{u}}{r^2}$
   (e) aucune réponse

21. On pose $l = R\theta$ **Alors :**
   (a) $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{R}\int_0^{2\pi}\overrightarrow{e_r}\,d\theta + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin^3\varphi}{R}\int_0^{2\pi}\overrightarrow{k}\,d\theta$
   (b) $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{R}\int_0^{2\pi}\overrightarrow{e_r}\,d\theta - \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin^3\varphi}{R}\int_0^{2\pi}\overrightarrow{k}\,d\theta$
   (c) $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin^3\varphi}{R}\int_0^{2\pi}\overrightarrow{e_r}\,d\theta + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin^3\varphi}{R}\int_0^{2\pi}\overrightarrow{k}\,d\theta$
   (d) $\overrightarrow{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin^3\varphi}{R}\int_0^{2\pi}\overrightarrow{e_r}\,d\theta + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\sin^3\varphi}{R}\int_0^{2\pi}\overrightarrow{k}\,d\theta$

(e) aucune reponse

22. **Dans ce cas**

(a) $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}(\frac{R^2}{R^2+z^2}^{3/2}\overrightarrow{k}$

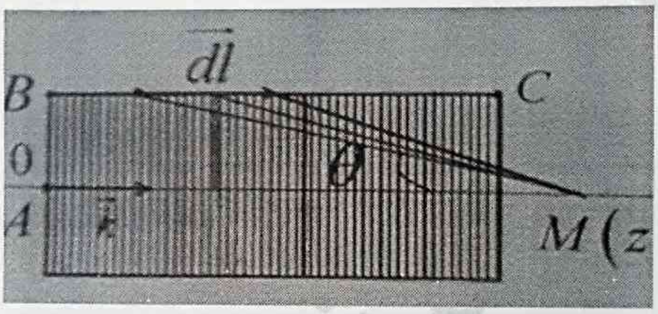
(b) $\overrightarrow{B} = -\frac{\mu_0 I}{2R}(\frac{R^2}{R^2+z^2}^{3/2}\overrightarrow{k}$

(c) $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}(\frac{R^2}{R^2+z^2}^{3/2}\overrightarrow{e_r}$

(d) $\overrightarrow{B} = -\frac{\mu_0 I}{2R}(\frac{R^2}{(R^2+z^2)}^{3/2}\overrightarrow{e_\theta}$

(e) aucune reponse

On considère maintenant une bobine cylindrique de longueur l , comportant n spires jointives par unité de longueur et parcourue par un courant électrique d'intensité I . Le sens du courant électrique est donné par le vecteur $\overrightarrow{BA}$ (voir schéma) . On pose
$\theta_1 = angle(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ et $\theta_2 = angle(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}$



23. **Le nombre de spires contenues dans l'élement de longueur dl est donné par l'expression**

(a) $N = \int ndz$

(b) $N = \int \frac{dz}{n}$

(c) $N = nz$

(d) $N = \frac{z}{n}$

(e) Aucune des réponses précédentes

24. **Le champ magnétique pour un point M(z) extérieur au cylindre est :**

(a) $\overrightarrow{B} = -\int \frac{\mu_0 nI\sin^3\theta}{2R}\overrightarrow{k}dz$

(b) $\overrightarrow{B} = \int \frac{\mu_0 nI\sin^3\theta}{2R}\overrightarrow{k}dz$

(c) $\overrightarrow{B} = \int \frac{\mu_0 nI\sin^3\theta}{4R}\overrightarrow{k}dz$

(d) $\overrightarrow{B} = -\int \frac{\mu_0 nI\sin^3\theta}{4R}\overrightarrow{k}dz$

(e) Aucune des réponses précédentes

25. On démontre que

(a) $dz = \frac{Rd\theta}{\sin^2\theta}$

(b) $dz = -\frac{Rd\theta}{\sin^2\theta}$

(c) $d\theta = \frac{Rdz}{\cos^2\theta}$

(d) $d\theta = -\frac{Rdz}{\cos^2\theta}$

(e) Aucune des réponses précédentes

26. **Pour un point extérieur au cylindre , on a**

(a) $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 n I}{2}[\frac{z-l}{\sqrt{(l^2-z^2)+R^2}} - \frac{z}{\sqrt{l^2+z^2}}]\overrightarrow{k}$

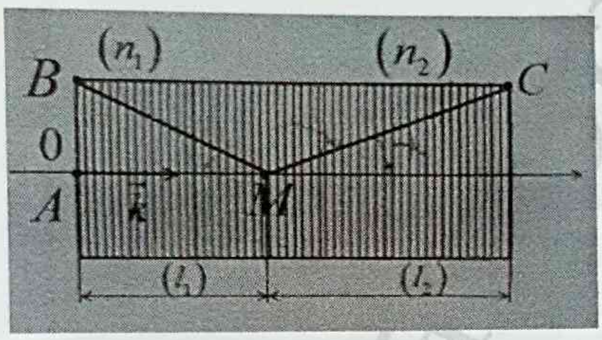
(b) $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 n I}{2}\frac{z-l}{\sqrt{l^2+R^2}}\overrightarrow{k}$

(c) $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 n I}{2}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\overrightarrow{k}$

(d) $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 n I}{2}[-\frac{z-l}{\sqrt{(l-z)^2+R^2}} + \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}]\overrightarrow{k}$

(e) Aucune des réponses précédentes

On considère un point intérieur à la bobine comme l'indique le schéma :



27. **Le champ magnétique au point M a pour expression :**

(a) $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2}[\frac{nl}{\sqrt{R^2+l^2}}]\overrightarrow{k}$

(b) $\overrightarrow{B} = -\frac{\mu_0 I}{2}[\frac{nl}{\sqrt{R^2+l^2}}]\overrightarrow{k}$

(c) $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2}[\frac{l_1}{\sqrt{R^2+l_1^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{R^2+l_2^2}}]\overrightarrow{k}$

(d) $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{2}[\frac{l_1}{\sqrt{R^2+l_1^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{R^2+l_2^2}}]\overrightarrow{k}$

(e) Aucune des réponses précédentes

28. **Si M est au centre de la bobine , le champ magnétique a pour expression :**

(a) $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 I}{4}[\frac{nl}{\sqrt{R^2+l^2}}]\overrightarrow{k}$

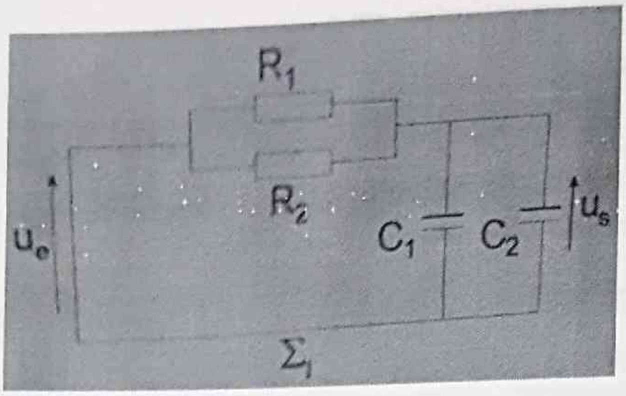
(b) $\overrightarrow{B} = -\frac{\mu_0 I}{4}[\frac{nl}{\sqrt{R^2+l^2}}]\overrightarrow{k}$

(c) $\overrightarrow{B} = \mu_0 I[\frac{nl}{\sqrt{4R^2+l^2}}]\overrightarrow{k}$

(d) $\overrightarrow{B} = -\mu_0 I[\frac{nl}{\sqrt{4R^2+l^2}}]\overrightarrow{k}$

Exercice 4 **Electrocinétique (Q29 à Q34)** Le système électronique σ_1 (figure ci -après) comporte deux résistors de résistance $R_1 = 2k\Omega et R_2 = 2k\Omega$ ainsi que deux condensateurs de capacités $C_1 = 200nF \quad et \quad C_2 = 50nF$. On applique en entrée de σ_1 la tension sinusoidale $u_e(t) = u_{e,m}\cos\omega t$ et on recueille en sortie la tension $u_s(t) = u_{s,m}\cos(\omega t + \phi)$; les grandeurs $u_{e,m}, u_{s,m}, \omega, \phi$ sont indépendantes du temps .

ICORP Nivo 3_Contacts : (+237) 6 99 00 71 94 / 6 98 22 22 77 / 6 71 83 97 97
Site web : www.intelligentsiacorporation.com



29. Le filtre σ_1 se comporte :
    (a) comme un passe-bas du premier ordre
    (b) Comme une passe-haut du premier ordre
    (c) Comme une passe-bas du deuxième ordre
    (d) Comme un passe-haut du deuxième ordre
    (e) aucune reponse
30. Déterminer la pulsation ω_c de coupure à -3dB de σ_1 :
    (a) $\omega_c = \frac{1}{(R_1+R_2)(C_1+C_2)}$
    (b) $\omega_c = \frac{C_1+C_2}{(R_1+R_2)C_1C_2}$
    (c) $\omega_c = \frac{(R_1+R_2)(C_1+C_2)}{R_1R_2C_1C_2}$
    (d) $\omega_c = \frac{R_1+R_2}{R_1R_2(C_1+C_2)}$
    (e) Aucune des réponses précédentes
31. En déduire la fréquence f_c de coupure à -3dB de σ_1 :
    (a) $f_c = 212Hz$
    (b) $f_c = 955Hz$
    (c) $f_c = 6.0kHz$
    (d) $f_c = 37.7kHz$
    (e) Aucune des réponses précédentes
32. Calculer ϕ pour $\omega = 2\omega_c$
    (a) $\phi = -1.1$ deg
    (b) $\phi = 0.46$ deg
    (c) $\phi = -26.6$ deg
    (d) $\phi = -63.4$ deg
    (e) Aucune des réponses précédentes
33. Exprimer la puissance moyenne P dissipée dans le résistor de résistance R_1 lorsque $\omega = \omega_c$
    (a) $P = \frac{u_{e,m}^2}{4R_2}$
    (b) $P = \frac{u_{e,m}^2}{4R_1}$
    (c) $P = \frac{u_{e,m}^2}{2R_2}(1 + \frac{R_1}{R_2})^2$

(d) $P = \frac{u_{e,m}^2}{2R_1}(1 + \frac{R_2}{R_1})^2$

(e) Aucune des réponses précédentes

34. Calculer la durée τ pendant laquelle le résistor R_1 dissipe une énergie totale de 1J si $u_{e,m} = 2V$

(a) $\tau = 1 \quad ms$

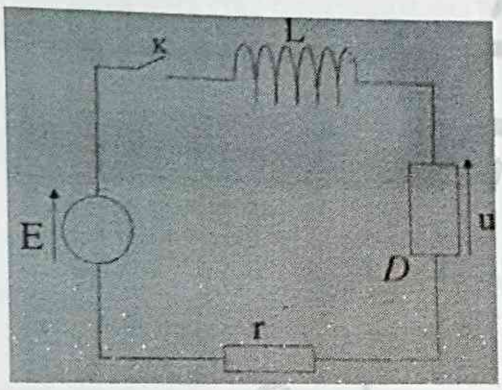
(b) $\tau = 3min42s$

(c) $\tau = 16min40s$

(d) $\tau = 3.4 \quad ms$

(e) Aucune des réponses précédentes

Exercice 5 : **Régime permanent en Electrocinétique** Le circuit representé sur la figure ci-contre comporte une source de tension stationnaire E = 2 V , une bobine d'inductance L= 0.5 H , un résistor de résistor $r = 20\Omega$ et un interrupteur K que l'on ferme à l'instant initial t = 0



35. Indiquer l'affirmation exacte

(a) La tension électrique aux bornes d'une bobine idéale ne subit jamais de discontinuité au cours du temps

(b) La bobine et le condensateur sont des dipôles non linéaires

(c) La tension aux bornes du condensateur ne subit jamais de discontinuité au cours du temps

(d) Aucune des réponses précédentes

36. D est un résistor de résistance $R = 150\Omega$. Calculer la durée τ_1 au bout de laquelle la tension aux bornes de D vaut 63.2% de sa valeur finale

(a) $\tau_1 = 3.3ms$

(b) $\tau_1 = 2.9ms$

(c) $\tau_1 = 25ms$

(d) $\tau_1 = 1ms$

(e) Aucune des réponses précédentes

37. D est une bobine d'inductance L' = 350 mH . Calculer la durée τ_2 au bout de laquelle la tension aux bornes de D vaut 63.2% de sa valeur finale :

(a) $\tau_2 = 15.5ms$

(b) $\tau_2 = 25ms$

(c) $\tau_2 = 33ms$

(d) $\tau_2 = 42.5ms$

(e) Aucune des réponses précédentes

38. D est désormais un condensateur de capacité C = 200 nF . Que vaut la qualité de ce circuit?

(a) Q = 79

(b) Q = 35

(c) Q = 1

(d) Q = 0.5

(e) Aucune des réponses précédentes

39. Après fermeture de K :

(a) L'intensité du courant électrique évolue en régime pseudopériodique

(b) L'intensité du courant évolue en régime critique

(c) L'intensité du courant électrique évolue en régime apériodique (ou surcritique)

(d) L'intensité du courant électrique tend vers zéro pour t tendant vers ∞

40. Quelle est la tension finale u_∞ aux bornes du condensateur pour t tendant vers ∞

(a) $u_\infty = 0V$

(b) $u_\infty = 1V$

(c) $u_\infty = 2V$

(d) u_∞ n'est pas définie

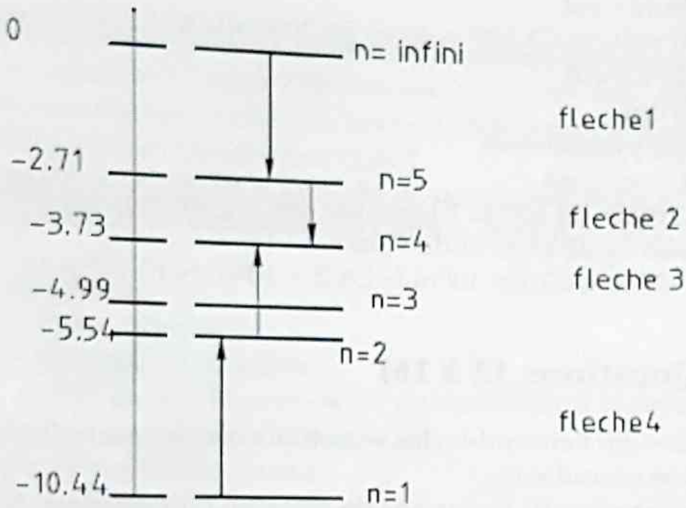
(e) Aucune des réponses précédentes

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2015

ÉPREUVE DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

Le diagramme de la figure 1 represente les niveaux d'energie de l'atome de mercure.on rappelle la relation entre la frequence ν et la periode T :$\nu = 1/T$



Q1. L'energie portée par le photon est donnée par la relation :
A) $E = h \times T$ B) $E = h \times \nu$
C) $E = m/c^2$ D) $E = h \times c^2/\nu$
E) Aucune des reponses precedentes
Sur le diagramme de niveaux d'energie ci contre,sont representées quatre transitions electroniques :
Q2.La fleche 1 correspond à :
A) L'absorption d'un photon par l'atome. B) l'emission d'un photon par l'atome.
C) l'emission stimulée d'un photon. D) l'emission spontanée d'un photon par l'atome.
E) Aucune des reponses precedentes
Q3. La fleche 2 correspond à :
A) L'absorption d'un photon par l'atome. B) l'emission de 4 photons par l'atome.
C) l'emission de 5 photons par l'atome. D) la relaxation de l'atome vers son état fondamental
E) Aucune des reponses precedentes
Q4. La fleche 3 correspond à :
A) une perte de $1,8eV$ B) un gain d'energie de $1,8eV$
C) une perte d'energie de $-5,57eV$ D) un gain de $3,73eV$
E) Aucune des reponses precedentes
Q5. La flèche 4 correspond à :
A) l'absorption d'un photon par atome
B) la relaxation de l'atome vers son état fondamental
C) l'absortion de deux photons par l'atome
D) l'energie minimale néscessaire pour exciter l'atome à partir de son état fondamental
E) Aucune des reponses precedentes

EXERCICE 2 :(Questions 6 à 11)

Dans un espace raporté à un repere orthonormé $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ où x, y, z designent les coordonnés d'espaces,d'une onde electromagnetique plane dont le champ electrique dans le systeme internationale d'unité est :$\vec{E} = \cos(\frac{2\pi}{3}z - 2\pi \times 10^6 t)\ \vec{e_x}$

Q6. Cette onde se propage dansà :
A) le sens des $z < 0$ B) le sens des $z > 0$ C) le sens des $x > 0$ D) le sens des $x < 0$ E) le sens des $y > 0$

Q7. L'onde est polarisée selon :
A) -$\vec{e_x}$ B) -$\vec{e_y}$ C) $\vec{e_y}$ D) $\vec{e_z}$ E) $\vec{e_x}$

Q8.L'amplitude de l'onde vaut
A) $\sqrt{300}$volt/m B) 150 volt/m C) 300^2volt/m D) 300volt/m E) Aucune des reponses precedentes

Q9.La longueur d'onde λ vaut :
A) 3m B) 6m C) 1m D) 2m
E) Aucune des reponses precedentes

Q10.La frequence f de l'onde est
A) 10^5Hz B)10^6Hz C) 10^3Hz D) 10^4Hz E)Aucune des reponses precedentes

Q11. La vitesse de phase V_ϕ de cette onde vaut :
A) 3×10^8m/s B) 6×10^6m/s C) 3×10^6m/s D) 2×10^6m/s E) 10^6m/s

EXERCICE 3 :(Questions 12 à 16)

Q12. Comment appelle-t-on l'ensemble des equations qui regissent la propagation d'une onde electromagnetique dans un milieu
A) Equation de Navier Stockes B) Equations de Newton C) Equation de Maxwell
D) Equation de Faraday E) Aucune des reponses precedentes

Q13. En designant respectivement le champ electrique et le champ magnetique par $\vec{E}$ et $\vec{B}$,les constantes electriques et magnetiques parμ_0 etϵ_0

A) $\boxed{div\vec{E} = \vec{B}\ \vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ div(\vec{B}) = 0\ \vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

B) $\boxed{div\vec{E} = 0\ \vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ div(\vec{B}) = 0\ \vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

C) $\boxed{div\vec{E} = 0\ \vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ \vec{grad}(\vec{B}) = 0\ \vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

D) $\boxed{div\vec{E} = 0\ \vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ \Delta(\vec{B}) = 0\ \vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

E) Aucune reponse

Q14. L'equation de propagation du champ electrique $\vec{E}$ dans le vide s'ecrit :
A) $\Delta(\vec{E})$-$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ B) $\Delta(\vec{E})$-$\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$
C) $\Delta(\vec{E})$-$\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$ D) $\Delta(\vec{E})$-$\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$
E) Aucune des reponses precedentes

NB :Ici,t represente la coordonnée temps,et Δ designe le laplacien. Les ondes electromagnetiques transportent de l'energie.La propagation de cette energie se ressent dans de nombreuses situations de la pratique quotidienne :Lors d'une exposition aux rayons solaires ou au rayonnement d'une source chaude,lorque l'on capte les émissions d'une station ou TV Q15. Par quel nom désigne-t-on le vecteur qui determine l'energie(ou puissance) transportée par une onde electromagnetique ?

A)Potentiel Vecteur B) Vecteur de Poynting
C) Vecteur de Faraday D) Vecteur de Maxwell
E) Aucune des reponses precedentes Q16.Preciser l'expression de ce vecteur(nous le noterons $\vec{\pi}$) pour une onde electromagnetique $(\vec{E}, \vec{B})$
A) $\vec{\pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ B) $\vec{\pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0\epsilon_0}$
C) $\vec{\pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\epsilon_0}$ D) $\vec{\pi} = \mu_0\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\epsilon_0}$
E) Aucune des reponses precedentes

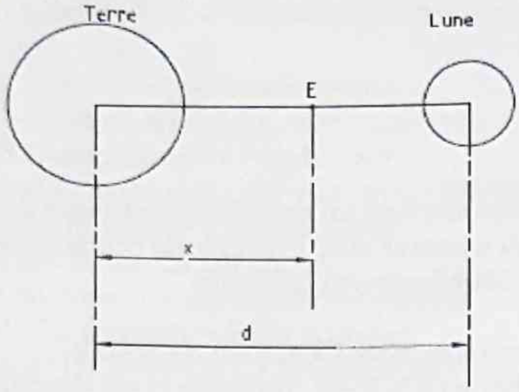
EXERCICE 4 :(Questions 17 à 21)

GOCE(Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) est un satellite scientifique de l'agence spatiale européenne lancé le 17 mars 2009,destiné à mesurer avec une grande precision,le champ de gravitation de la terre depuis une orbite située à 260kilometre d'altitude.
Q17. Laquelle des declarations suivantes est-elle exacte ?
A) GOCE est un satellite geostationnaire B) la periode de revolution de GOCE est de 86400s
C) le vecteur acceleration de GOCE est centripète D) l'orbite de GOCE est elliptique et est dans le plan equatorial
E) Aucune des reponses precedentes
Q18. En ce qui concerne sa vitesse orbitale :
A) Elle est independante de la masse du satellite
B) Elle verifie la relation $V = \frac{2\pi R}{T}$ avec T la periode de revolution et R le rayon de la trajectoire
C) Elle est divisée par 2 si le rayon est multiplié par 2
D) Les trois premieres propositions sont correctes
E) Aucune des reponses precedentes
La force d'interaction gravitationnelle est donnée par la relation $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$ où m_1, m_2 sont les masses des deux corps ponctuels en interaction et d la distance entre les deux corps
Q19.La constance gravitationnelle G s'exprime en :
A) $N^-1.kg^2.m^-2$ B) $N.g^-2.m^-2$ C) $N.g^2.m^-2$ D) $N.kg^2.m^2$
E) Aucune des reponses precedentes
Q20.Si l'on divise par deux la distance entre les corps,la force gravitationnelle :
A) Double B) est divisée par 2
C) augmente d'un facteur 4 D) diminue d'un rapport 4
E) Aucune des reponses precedentes
Q21. Seules quelques interactions dites fondamentales permettent d'expliquer la cohesion de la matiere et de l'univers de l'echelle atomique à l'echelle astronomique.Parmi les reponses ci-dessous, indiquer laquelle n'est pas une interaction fondamentale.
A) Interaction gravitationnelle B) Interaction electromagnetique
C) Interaction chimique D) Interaction forte
E) Aucune des reponses precedentes

EXERCICE 3 :(Questions 22 à 31)

On considere 2 Objets ponctuels A et B de masse respecctives m_A et m_B separés d'une distance.On note $\vec{F}_{B/A}$,la force d'attraction exercée par l'objet B sur l'objet A et $\overrightarrow{AB}$ celle exercée par l'objet A sur l'objet B. on note $\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{d}$ le vecteur unitaire de la droite (AB) orienté de A vers B.On donne la valeur de la constante de gravitation $G = 6,67 \times 10^-11$SI
Q22. On a l'egalité :
A) $\vec{F}_{B/A} = -G\frac{m_Am_B}{d^2}\vec{u}_{AB}$ B)$\vec{F}_{B/A}$=$\vec{F}_{A/B}$

C)$\vec{F}_{B/A} = G\frac{m_A m_B}{d^2}\vec{u}_{AB}$ D) $\vec{F}_{B/A} = G\frac{m_A m_B}{d}\vec{u}_{AB}$
E) Aucune des reponses precedentes
On cherche le point d'équigravité E entre la terre et la lune(point où les attractions respectives de la terre et de la lune s'annulent).On considere le schema suivant(les echelles ne sont pas respectées).on donne $m_T = 6 \times 10^21$tonnes, $m_L = 7 \times 10^19$tonnes, ainsi que la distance terre-lune $d = 380000Km$.

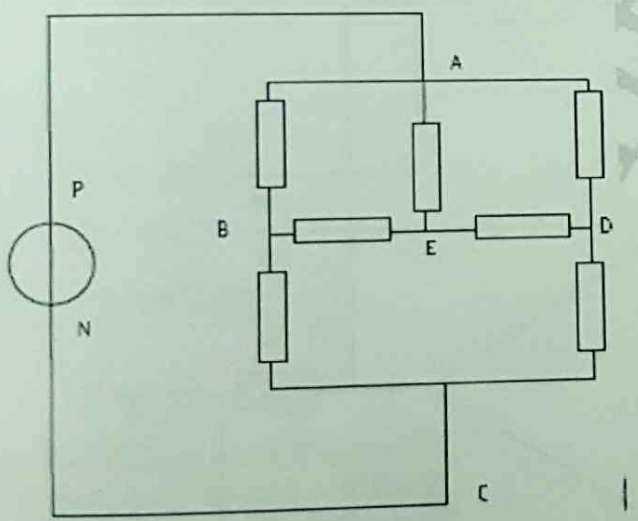


Q23. on a le resultat suivant :
A) $x = \frac{d\sqrt{\frac{m_T}{m_L}}}{1+\sqrt{\frac{m_T}{m_L}}}$ B)$x = \frac{d\sqrt{1+\frac{m_T}{m_L}}}{\sqrt{\frac{m_T}{m_L}}}$
C) $x = \frac{d}{1+\sqrt{\frac{m_T}{m_L}}}$ D) $x = \frac{d\sqrt{\frac{m_L}{m_T}}}{1+\sqrt{\frac{m_L}{m_T}}}$
E) Aucune des reponses precedentes
On considere à present un satellite en orbite autour de la lun,à une altitude h.On donne le rayon de la lune $RL = 1700km$. On considerera dans toute la suite de l'exercice que l'altitude h est suffisemment petite pour que l'attraction terrestre soit negligeable devant celle de la lune.On note g_0 la valeur du champ de pesanteur à la surface de la lune
Q24. On a la relation
A) $g_0 = G\frac{m_L}{R_L}$ B) $g_0 = G\frac{m_L}{R_L^2}$
C) $g_0 = \frac{G}{R_L}$ D) $g_0 = \frac{G}{R_L}$
E) Aucune des reponses precedentes
En premiere approximation,on considere que R_T/R_L=4 et que m_T/m_L=100.On souhaite comparer la valeur du champ de pesanteuur g_{Terre} à la valeur g_0 du champ de pesanteur à la surface de la lune.
Q25. La relation entre g_Terre et g_0
A) $g_0 = \frac{16}{100}g_{Terre}$ B) $g_0 = \frac{1}{6}g_{Terre}$ C) $g_0 = \frac{32}{100}g_{Terre}$ D) $g_0 = \frac{43}{100}g_{Terre}$
E) Aucune des reponses precedentes
Q26. Si on note g la valeur du champ lunaire et h l'altitude du satellite,on a :
A) $g = g_0(\frac{R_L}{R_L+h})^2$ B) $g = g_0\frac{R_L}{R_L+h}$
C) $g = g_0\frac{R_L}{h}$) D) $g = g_0(\frac{R_L}{h})^2$
E) Aucune des reponses precedentes
On suppose le mouvement du satellite uniforme
Q27. On peut dire à propos que le satellite que :
A) Son acceleration est nulle
B) son acceleration est tangentielle à la trajectoire
C) son acceleration est normale diriée vers l'exterieur
D) son acceleration est normale diriée vers l'interieur
E) Aucune des reponses precedentes

On designe par v la valeur de la vitesse du satellite,ω sa vitesse angulaire et a son acceleration.
Q28. On peut ecrire
A) $a = \frac{v^2}{h}$ B) $a = \omega^2(R_L + h)$
C) $a = \frac{\omega^2}{R_L + h}$ D) $a = (\frac{R_L}{h})^2$
E) Aucune des reponses precedentes
Q29. on a la relation
A) $v = \sqrt{\frac{g_0 R_L^2}{R_L + h}}$ B) $v = \sqrt{\frac{g_0 R_L h}{R_L + h}}$
C) $v = h\sqrt{\frac{g_0}{R_L + h}}$ D) $v = \sqrt{\frac{g_0 R_L^2}{h}}$
E) Aucune des reponses precedentes
Q30.La vitesse angulaire du satellite est :
A)$\omega = \frac{g_o R_L^2}{(R_L + h)^3}$ B) $\omega = \sqrt{\frac{g_o R_L^2}{(R_L + h)^3}}$
C) $\omega = \sqrt{\frac{g_o}{(R_L + h)}}$ D) $\omega = \frac{g_o R_L^2}{(R_L + h)}$
E) Aucune des reponses precedentes
Q31. La periode de revolution du satellite est :
A) $T = \frac{R_L + h}{R_L}\sqrt{\frac{R_L + h}{g_0}}$ B) $T = \frac{2\pi R_L}{R_L + h}\sqrt{\frac{R_L + h}{g_0}}$
C) $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_L + h}{g_0}}$ D) $T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{R_L + h}{g_0}}$
E) Aucune des reponses precedentes

EXERCICE 6 :(Questions 32à 35)

on considere un circuit electrique alimenté par un genertateur situé entre P et N dans la figure ci-contre.des mesures effectuées a l'aide d'un voltmetre donnent :U_{AB}=40V,U_{BC}=20V U_{BE}=10V,U_{ED}=6V.



Determiner les tensions aux bornes des dipoles ci apres :
Q32. U_{AB}=
A) 10V B) 28V C) 40V D) 50V
E) Aucune des reponses precedentes
Q33. U_{AD}=
A) 38V B) 15V C) 56V D) 59V

E) Aucune des reponses precedentes

Q34. U_{DC}=

A) 4V B) 8V C) 40V D) 59V

E) Aucune des reponses precedentes

Q35. U_{PN}

A) 15V B) 60V C) 65V D) 59V

E) Aucune des reponses precedentes

EXERCICE 7 :(Questions 36à 39)

un moteur consomme une puissance de 2000 W.Le rendement du moteurest de 90%.

Q36. La puissance mecanique fournie par le moteur est :

A) 1800W B) 2000W C) 1000W D) 3600W E) Aucune des reponses precedentes

Q37.La puissance dissipee par effet joule dans le moteur est :

A) 1800W B) 600W C) 200W D) 400W E) Aucune des reponses precedentes

Q38. L'energie dissipée par effet joule pendant 1h20 min(en J) :

A) 460 000J B) 960 000J C) 860 000J D) 956 000J E) Aucune des reponses precedentes

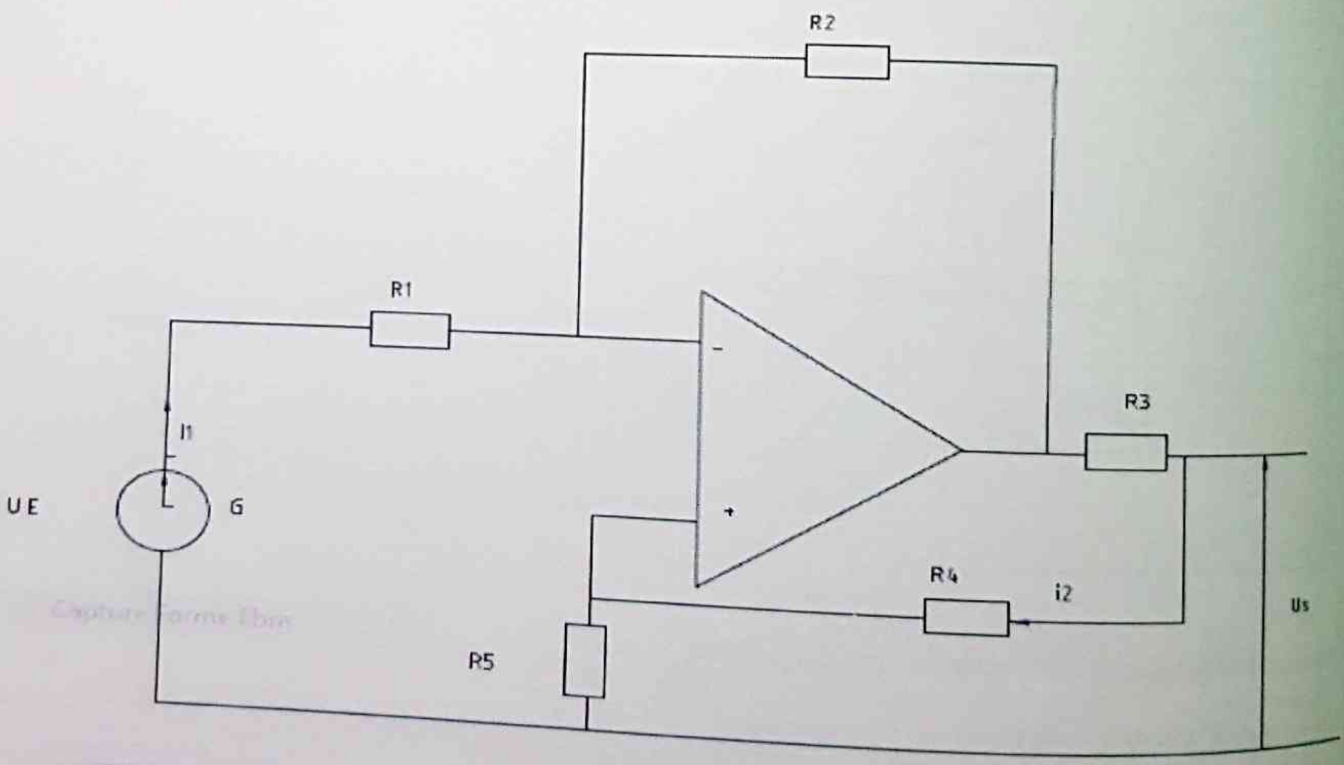
Q39. L'energie dissipée par effet Joule dans le moteur en 1h20 min(en KWh) :

A) 0.565KWh B) 0.167KWh C) 0.366KWh D) 0.267KWh

E) Aucune des reponses precedentes

EXERCICE 8 :(Questions 40à 50)

On considere le Schema ci-apres alimente par un generateur G capable de delivrer une tension U_E. L'amplificateur operationnel est supposé ideal



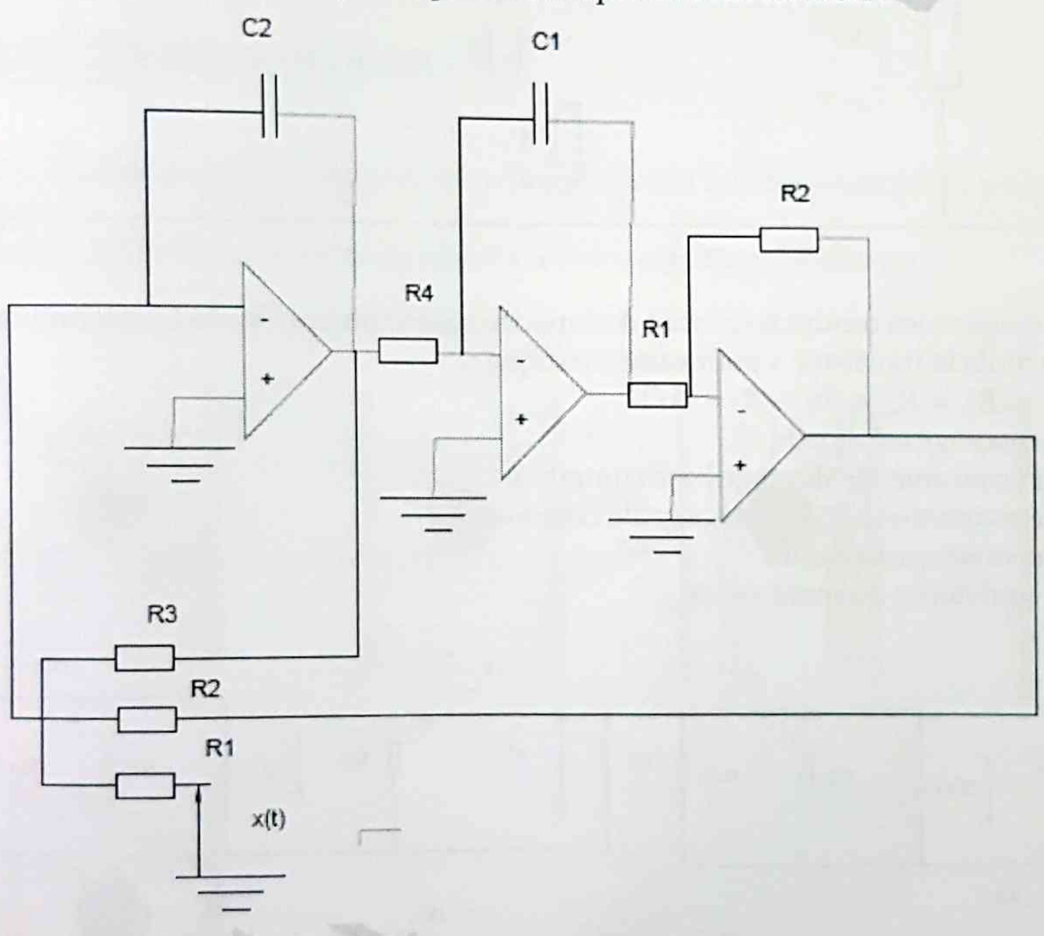
Q40. En appliquant les lois de kirchoff,les equations peuvent s'ecrire :

A) $U_E = R_5 i_2 + R_1 i_1\,; U_s = (R_4 + R_5) i_2\,; U_E = (R_1 + R_2 + R_3) i_1 + U_s$
B) $U_E = R_5 i_2 + R_1 i_1\,; U_s = (R_4 + R_5) i_2\,; U_s = (R_1 + R_2 + R_3) i_1 + U_E$
C) $U_E + R_5 i_2 + R_1 i_1 = 0\,; U_s = (R_4 + R_5) i_2\,; U_E = (R_1 + R_2 + R_3) i_1 + U_s$
D) $U_E + R_5 i_2 + R_1 i_1 = 0\,; U_s = (R_4 + R_5) i_2\,; U_s + (R_1 + R_2 + R_3) i_1 + U_E = 0$
E) Aucune des reponses precedentes

Q41.On s'arrange a ce que l'amplification n'existe pas ou soit infinie.dans ce cas :
A) $R_1 = R_2 + R_3$ B) $R_5 = R_4$
C) $R_1 = R_2 + R_3$ et $R_5 = R_4$ D) $R_5 = R_4$ ou $R_1 = R_2 + R_3$
E) Aucune des reponses precedentes

Q42. Dans ce cas on obtient :
A) $i_3 = \frac{1}{2}(\frac{U_E}{R_1} + (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})U_s)$
B)$i_3 = \frac{1}{2}(\frac{U_E}{R_1} - (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})U_s)$
C) $i_3 = \frac{U_E}{2R_1}$
D) $i_3 = \frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})U_s$
E) Aucune des reponses precedentes

On considère le circuit ou chaque amplificateur operationnel est ideal :

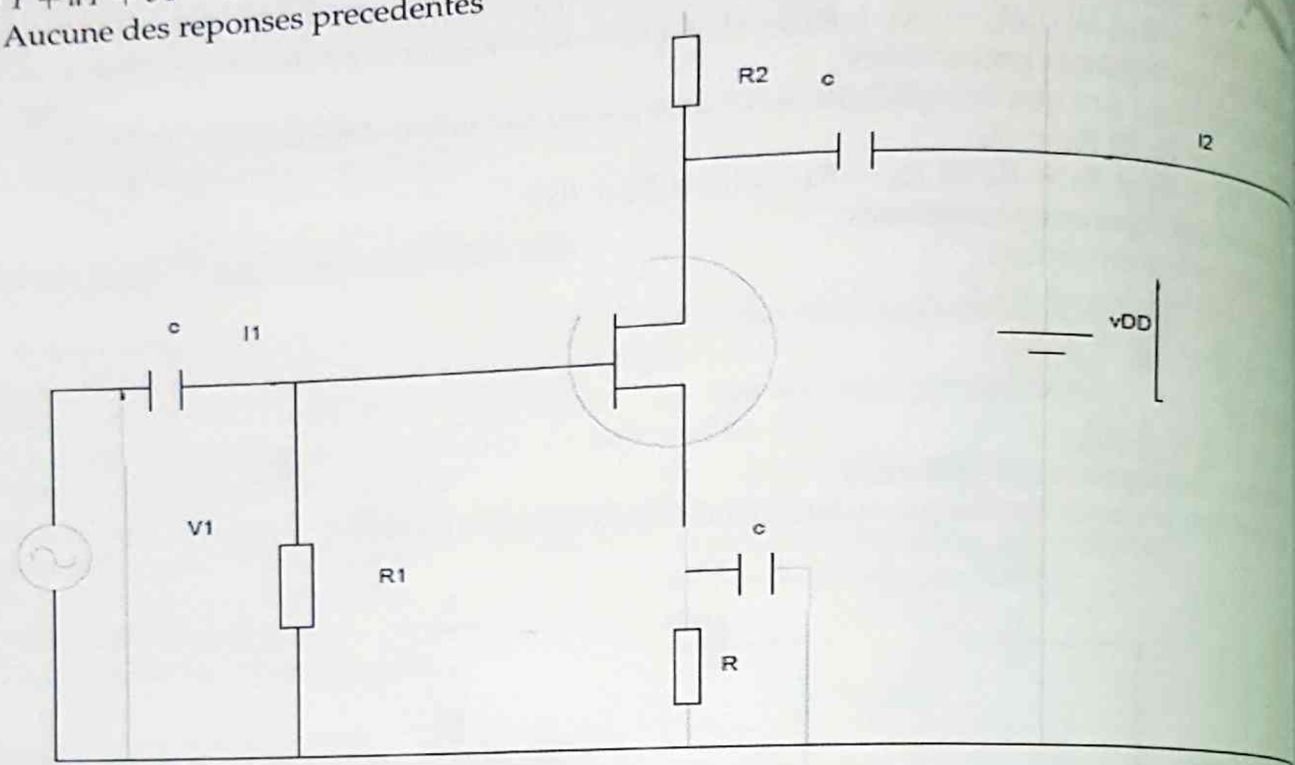


Q43. La relation entre Y et Z est :
A) $Z = R_4 C_2 \frac{dY}{dt}$ B) $Z = -R_4 C_2 \frac{dY}{dt}$
C) $\frac{dZ}{dt} = R_4 C_2 Y$ D) $\frac{dZ}{dt} = -R_4 C_2 Y$
E) Aucune des reponses precedentes

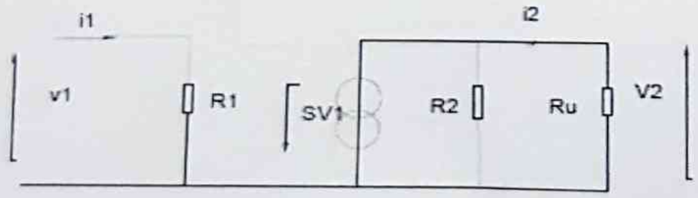
Q44. La relation entre Z et les autres donnees est :
A) $Z = -\frac{1}{R_3C_1}\int Zdt - \frac{1}{R_2C_1}\int Ydt - \frac{1}{R_1C_1}\int xdt$ B) $Z = \frac{1}{R_3C_1}\int Zdt - \frac{1}{R_2C_1}\int Ydt - \frac{1}{R_1C_1}\int xdt$
C) $Z = -\frac{1}{R_3C_1}\int Zdt + \frac{1}{R_2C_1}\int Ydt - \frac{1}{R_1C_1}\int xdt$ D) $Z = \frac{1}{R_3C_1}\int Zdt - \frac{1}{R_2C_1}\int Ydt + \frac{1}{R_1C_1}\int xdt$
E) Aucune des reponses precedentes

Q45. avec $a = \frac{1}{R_3C_1}, b = \frac{1}{R_2R_4C_1C_2}, c = \frac{1}{R_1R_4C_1C_2}$ on obtient l'on l'equation :

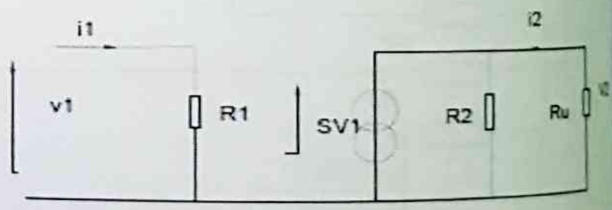
A) $\ddot{Y} + a\dot{Y} + bY + Cx = 0$ B) $\ddot{Y} - a\dot{Y} + bY + Cx = 0$ C) $\ddot{Y} + a\dot{Y} - bY + Cx = 0$
D) $\ddot{Y} + a\dot{Y} + bY - Cx = 0$
E) Aucune des reponses precedentes



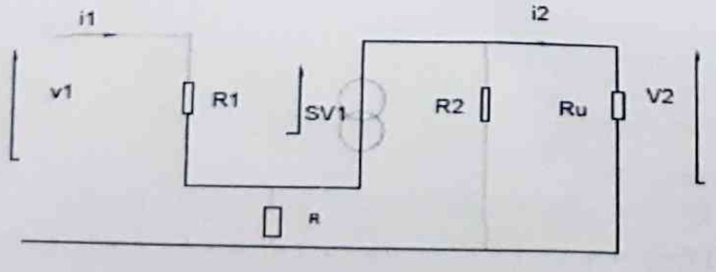
Dans le schema ci-apres les conducteurs sont de capacite suffisemment elevée.Le courant contin
est de resistance nulle.le transistor a pour caracteristique :
s=5mA/V,$\rho = +\infty$,$R_1 = R_2 = R_u = R = 1k\Omega$
Q46. Ce type de montage est appele :
A) Montage drain commun B) Montage base commune
C) Montage source commune D) Montage grille commune
E) Aucune des reponses precedentes
Q47. Le schema equivalent du montage est :



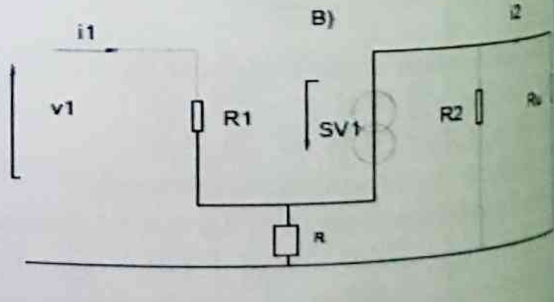
A)



B)



C)



D)

E) Aucune des reponses precedentes

Q48. Les condensateurs ont pour rôles

A) de redresser les courants alternatifs B) de polariser le transistor a effet de champ
C) de servir de court-Circuit en courant continu D) de servir de court-Circuit en courant alternatif
E) Aucune des reponses precedentes

Q49. V_{DD} a pour rôle

A) de redresser les courants alternatifs B) de polariser le transistor a effet de champ
C) de servir de court-Circuit en courant continu D) de servir de court-Circuit en courant alternatif
E) Aucune des reponses precedentes

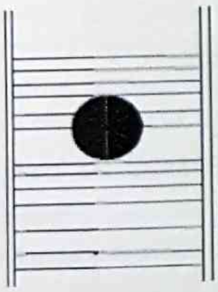
Q50. L'expression de l'amplification est :

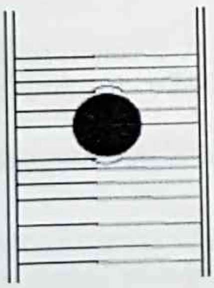
A) $A_v = \frac{sR_uR_2}{R_2+R_u}$ B) $A_v = -\frac{sR_uR_2}{R_2+R_u}$
C) $A_v = \frac{sR_1R_2}{R_2+R_1}$ D) $A_v = \frac{sRR_2}{R_2+R}$
E) Aucune des reponses precedentes

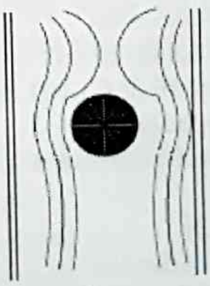
EXERCICE 9 :(Questions 51à 52)

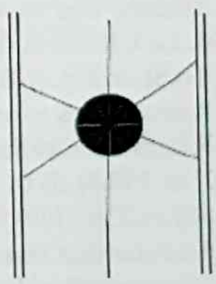
1.Dans le champ electrique uniforme entre les plaques d'un condensateur,on place une sphere metallique.

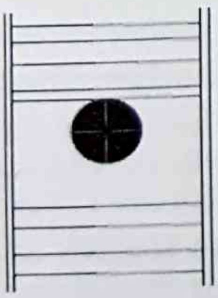
Q51.Lequel des dessins suivants represente le mieux le champ electrique


A


B

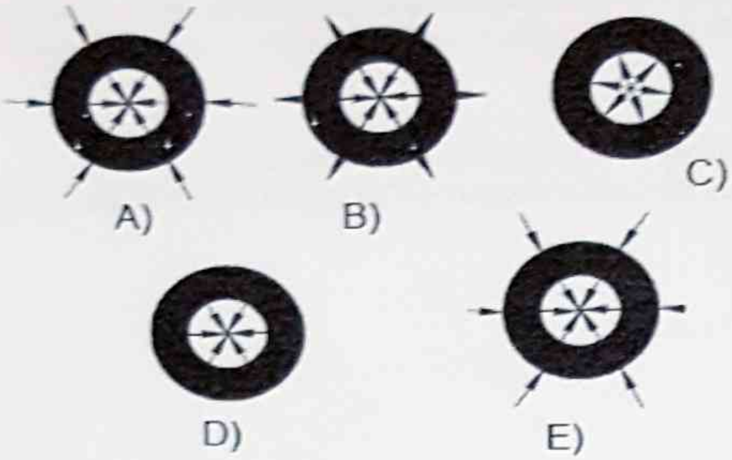

C


D



2.Une charge negative est est placee au centre d'une sphere conductrice creuse initialement neutre.

Q52.Lequel des dessins suivants represente le mieux le champ electrique



EXERCICE 10 :(Questions 53à 58)

Un gaz parfait diatomique comprenant n moles effectue un cycle de transformations reversibles. Partant du point initial A,il subit une detente isobare jusqu'au point B,puis un refroidissement isochore de Bau point C et enfin une compression adiabatique de C a A. on donne :$P_A = 1.5atm$ $V_A = 2.10^{-}3$;$P_c = 1atm$

Q53. Le valeur du volume V_c est :
A)2.7litre B) 3litres C) 1.5litres D) $2.310^{-}3m^3$
E) Aucune des reponses precedentes

Q54. Le travail et la chaleur echange sur le parcour A-B valent respectivement :
A)-10.8J et 356.3J B) -101.8Jet356.3J C) 101.8J et 254.5J D) -101.8mJ et 254mJ
E) Aucune des reponses precedentes

Q55.Le travail et la chaleur echange sur le parcour B-C valent respectivement :
A)0J et 338.3J B) 0J et 356.3J
C) 80J et 338.3J D) 0J et -338.3J
E) Aucune des réponses précédentes

Q56.Le travail et la chaleur échangée sur le parcour C-A valent respectivement :
A)110J et 0J B) 83.1J et 0J C) 0J et 83J D) 270J et 0J
E) Aucune des réponses précédentes

Q57. La performance de la machine est :
A) 0.052 B) 0.23 C) 0.52 D) 7.3
E) Aucune des réponses précédentes

Q58.la variation d'entropie du gaz sur le trajet B-C
A)-8.42nJ/K B) 11.8nJ/K C) -16.8nJ/K D) -0.5nJ/K
E) Aucune des réponses précédentes

Questions indépendantes(59 et 60)

Q59. Un gaz parfait d'énergie interne U subit une compression isotherme jusqu'à 50% de son volume initial.sa nouvelle énergie interne est :
A) U B) U/2 C) U/4 D) 2U E) Aucune des réponses précédentes

Q60. L'enonce mathematique du premier principe de la thermodynamique est :
A) $\Delta U = W + Q$ B) $W = -Q$ C) $\Delta U_{cycle} = 0$ D) $\Delta S_{cycle} = 0$ E) Aucune des réponses précédentes

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2016

ÉPREUVE DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

CONCOURS D'ENTREE EN 3ᵉANNEE 2016

EPREUVE DE PHYSIQUE

PARTIE I :OPTIQUE

Q1.un objet reel A situe a une distance $2f'$ d'une lentille convergente de distance focale f' et de cetre O,a son image A' au foyer image en :

a)$OA' = \frac{2f'}{3}$ b)$OA' = 2f'$ c)$OA' = \frac{3f'}{2}$ d)$OA' = \frac{f'}{2}$

Q2.Sur un banc optique de $1.5m$ de long,on place dans l'ordre :un objet reel,une lentille convergente de vergence $V_1 = 2\delta$ et un ecran.On pourra :

a)observer l'image de l'objet sur l'ecran,elle sera forcement plus petite que l'objet
b)observer l'image de l'objet sur l'ecran,elle sera forcement plus grande que l'objet
c)observer l'image de l'objet sur l'ecran,elle sera forcement de meme dimension que que l'objet
d)observer l'image de l'objet sur l'ecran,elle sera forcement plus petite ou plus grande que l'objet,selon la position de la lentille
e)ne pas observer d'image sur l'ecran

Q3.pour obtenir une image reelle avec une lentille divergente,l'objet doit etre :

a)reel et place a n'importe ou dans l'espace objet virtuel
b)virtuel et place a n'importe ou dans l'espace objet virtuel
c)virtuel et place entre le centre optique et le foyer
d) virtuel et place entre le foyer et l'infini
e) aucune des proposition n'est juste

Q4. pour realiser un systeme afocal elargisseur de faisceau avec une lentille L_1 de vergence $V_1 = 4\delta$ et une autre de vergence $V_2 = 5\delta$.Il faut :

a)L_1,puis L_2 a une distance de $45cm$ b)L_1,puis L_2 a une distance de $5cm$
c)L_2,puis L_1 a une distance de $45cm$ d)L_2,puis L_1 a une distance de $5cm$

Q5. Un miroir spherique possede :

a)un foyer :le foyer principal b)deux foyer distincts :un foyer objet et un foyer image
c) trois foyers distincts : un foyer image,un foyer objet et un foyer principal d) 0 foyer
e) aucune des propositions precedentes n'est juste

Q6.On place un objet reel,sur l'axe optique,a une distance de $1.5m$ du sommet d'un mirroir concave de focale $1m$.L'image est :

a)virtuelle et situee a $3m$ du miroir

b)reele et situee a $3m$ du miroir
c)virtuelle et situee a $60cm$ du miroir
d)reelle et situee a $60m$ du miroir
e) aucune des propositions precedentes n'est juste

Q7.Avec un mirior convexe de centre C,foyer F,et sommet S,on peut obtenir une image reelle si :

a)l'objet est reel
b)l'objet est virtuel,peu importe sa place
c) l'objet est virtuel,place entre S et F
d) l'objet est virtuel,place entre F et C
e) l'objet est virtuel,place entre C et l'infini

Q8. Pour realiser un mirior de foire qui permet de se voir grand et gros,il faut utiliser :

a)un miroir concave et se placer entre C et F
b)un miroir concave et se placer entre S et F
c)un miroir convexe et se placer entre C et F
d)un miroir convexe et se placer entre S et F
e) aucune des propositions precedentes n'est juste

PARTIE II :MAGNETOSTATIQUE

EXERCICE 1 :

plateau.png

On desire calculer le champ magnetique cree sur l'axe de revolution d'une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant electrique d'intensite I(voir figure ci-après).Le système $(O,\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{k})$ forme un repere orthonorme direct.

Q9. On se rend compte d'apres le schema que :

a)$\vec{u} = cos\phi\vec{k} + sin\phi\vec{e_r}$ et $\vec{dl} = dl\vec{e_\theta}$
b)$\vec{u} = cos\phi\vec{k} - sin\phi\vec{e_r}$ et $\vec{dl} = dl\vec{e_r}$
c)$\vec{u} = sin\phi\vec{k} - cos\phi\vec{e_r}$ et $\vec{dl} = dl\vec{e_\theta}$
d)$\vec{u} = sin\phi\vec{k} - cos\phi\vec{e_r}$ et $\vec{dl} = dl\vec{e_r}$
e) aucune des propositions precedentes n'est juste

Q10. d'apres la loi de Biot et Savart,on peut ecrire :

a) $\vec{B} = -\frac{\epsilon_0 I}{4\pi}\int\frac{\vec{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}$
b) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\vec{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}$
c) $\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{\vec{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}$
d) $\vec{B} = \frac{\epsilon_0 I}{4\pi}\int\frac{\vec{dl}\wedge\vec{u}}{r^2}$
e) aucune des propositions precedentes n'est juste

Q11.On pose $dl = Rd\theta$

a)$\vec{B} = \frac{\mu_0 I sin^3\phi}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\vec{e_r}d\theta + \frac{\mu_0 I sin^3\phi}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\vec{k}d\theta$
b)$\vec{B} = \frac{\mu_0 I sin^2\phi cos\phi}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\vec{e_r}d\theta + \frac{\mu_0 I sin^3\phi}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\vec{k}d\theta$
c)$\vec{B} = \frac{\mu_0 I sin^2\phi cos\phi}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\vec{e_r}d\theta - \frac{\mu_0 I sin^3\phi}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\vec{k}d\theta$
d)$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I sin^3\phi}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\vec{e_r}d\theta + \frac{\mu_0 I sin^3\phi}{4\pi R}\int_0^{2\pi}\vec{k}d\theta$
e) aucune des propositions precedentes n'est juste

Q12.dans ce cas,

a) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}(\frac{R^2}{R^2+z^2})^{(\frac{3}{2})}\vec{e_r}$ b)$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2R}(\frac{R^2}{R^2+z^2})^{(\frac{3}{2})}\vec{e_\theta}$

c)$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}(\frac{R^2}{R^2+z^2})^{(\frac{3}{2})}\vec{k}$

d)$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2R}(\frac{R^2}{R^2+z^2})^{(\frac{3}{2})}\vec{k}$

EXERCICE 2 :

sphere.png

On desire calculer le champ magnetique cree par une sphere de cetre O et de rayon R,en mouvement de rotation de vitesse angulaire constante ω autour de l'axe $0z$,portant une charge Q uniformement repartie en surface.

On suppose que le mouvement de la sphere n'influence pas la distribution des charges sur la surface.On pose $OM = R$, $MN = a$ et l'angle $(ON, \vec{OM} = \theta)$(voir figure ci-contre)

Q13.Dans le referentiel fixe ces charges surfaciques peuvent etres assimilees a :

a)une tension electrique b)un courant electrique

c) des champs magnetiques d)des champs electriques

e) aucune des reponse precedentes n'est juste

Q14.une sphere chargee en surface peut etre consideree comme une superposition d'elements parcourus par un courant elementaire dI.Ces elements sont :

a)des spires circulaires b)des disques c) des spheres

d)des solenoides e) aucune des reponse precedentes n'est juste

Q15.Entre R,θ ,a on peut ecrire :

a)$R = acos\theta$ b)$R = atan\theta$ c)$R = acotan\theta$

d)$R = asin\theta$

Q16.un observateur exterieur,pendant la periode T de rotation de la sphere,verra passer la charge dQ portee par une couronne elementaire de largeur angulaire $d\theta$,parcouru par un courant dItel que :

a)$dI = TdQ$ b) $dI = TQ$ c)$dI = \frac{dQ}{T}$ d)$dI = \frac{Q}{T}$ e)$dI = \frac{dQ}{2\pi T}$

Q17.soit σ la charge surfacique et dS la surface d'une couronne elementaire,on ecrira :

a)$dI = T\sigma dS$ b)$dI = T\sigma S$ c)$dI = \frac{\sigma dS}{T}$ d) $dI = \frac{\sigma S}{T}$ e) $dI = \frac{\sigma dS}{2\pi T}$

Q18.Alors

a)$dI = \frac{Q\omega dS}{8\pi^2 R^2}$ b)$dI = \frac{Q\omega dS}{2\pi^2 R^2}$ c)$dI = \frac{8\pi^2 R^2 dS}{Q\omega}$ d) $dI = \frac{2\pi Q dS}{\omega}$ e) $dI = \frac{Q\omega}{2\pi}$

Q19.on peut demontrer que :

a)$dI = \frac{Q\omega sin\theta d\theta}{4\pi}$ b)$dI = \frac{Q\omega sin\theta d\theta}{2\pi}$ c) $dI = \frac{4\pi d\theta sin\theta}{Q\omega}$

d) $dI = \frac{2\pi d\theta}{Q\omega sin\theta}$ e)$dI = \frac{Q\omega cos\theta d\theta}{2\pi}$

Q20.le plan d'antisymetrie des courants contient l'axe :

a) oy b) ox c) oz d) $\vec{e_\theta}$ e)aucunes des propositions

Q21.dans ce cas,le champ magnetique cree au centre de la sphere $B(\vec{0})$

est parrallele a l'axe :

a) oy b) ox c) oz d) $\vec{e_\theta}$ e)aucunes des proposition

Q22.par ailleurs,d'apres l'exercice 1,on peut ecrire :

a) $B = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 Q\omega sin^3\theta d\theta}{8\pi R}$

b)$B = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 Q\omega sin^3\theta d\theta}{2\pi R}$

c)$B = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 8\pi R sin^3\theta d\theta}{Q\omega}$

d)$B = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 2\pi R sin^3\theta d\theta}{Q\omega}$

e)aucunes des propositions precedente n'est justes

Q23.Enfin :

a) $B(0) = \frac{\mu_0 Q\omega}{6\pi R}$

b)$B(0) = \frac{\mu_0 Q\omega}{2\pi R}$

c) $B(0) = \frac{\mu_0 6\pi R}{Q\omega}$

d)$B(0) = \frac{\mu_0 2\pi R}{Q\omega}$

e)aucunes des propositions precedente n'est justes

Q24.Pour creer un champ magnetique il suffit de :

a) creer des ions apparement fixes

b) mettre un metal non charge en mouvement

c) mettre un metal charge en mouvement

d) charger un metal et l'immobiliser

e)aucunes des propositions precedente n'est justes

PARTIE III :THERMODYNAMIQUE

une mole de gaz parfait diatomique,prise dans les conditions normales de temperature et de pression, effectue trois transformations reversible :$A - B$,$B - C$et $C - A$ respectivement isotherme,rectiligne de pente α dans le diagramme de clapeyron et adiabatique. donnees : $(\frac{V_A}{V_C})^0.4 = 0.8203$,$(\frac{V_A}{V_C})^0.67 = 0.7213$,$(\frac{V_A}{V_C})^{(\frac{0.67}{1.67})} = 0.8213$ $(\frac{V_A}{V_C})^{(\frac{0.4}{1.4})} = 0.868$,

Q25.les coordonnees thermodynamiques du gaz a l'etat initial A sont:

a)$(22.4l, 290K, 1atm)$

b) $(22.4l, 300K, 1atm)$

c) $(22.4l, 273K, 1atm)$

d) $(22.4l, 298K, 1atm)$

e) $(22.4l, 273K, 1Pa)$

Q26.la pression du gaz a l'etat B a pour valeur :

a) $90.765Pa$

b) $89600Pa$

c)$1.45atm$

d)$0.5atm$

e)$90765Pa$

Q27. les coordonnes de pression et temperature en C sont :

a)$(0.81atm, 224K)$

b)$(0.75atm, 260K)$

c)$(0.5atm, 220K)$

d)$(0.5atm, 224K)$

e)$(1.5atm, 220K)$

Q28.La source chaude est sur le trajet :
a) $A-B$
b)$B-C$
c) $C-A$
d)$A-B$ et $B-C$
e)BC etCA

Q29.La chaleur echangee avec la source chaude vaut :
a)$187J$
b)$-187J$
c)$249J$
d)$1018J$
e)$-249.13J$

Q30.La chaleur echange avec la source froide vaut :
a)$249J$
b)$187J$
c)$-249J$
d)$-187J$
e)$1018J$

Q31.le travail effectue par le gaz pendant les trois processus vaut :
a)$-62J$
b)$-769J$
c)$-436J$
d)$62J$
e)$831J$

Q32.La performance de la machine thermique,fonctionnant selon le cycle ci dessus est egal a :
a)4.02
b)0.332
c)5.36
d)3
e)0.2487

PARTIE IV :ELECTRONIQUE

EXERCICE 1

route.png

Un systeme mecanique qui nous est familier est le systeme de suspension d'un vehicule automobile,qui dans sa forme elementaire est une masse montee sur un ressort et amortisseur qui a leur tour sont relies a une roue qui se deplace le long d'une route habituellement non lisse.La figure ci-contre montre un tel modele dans lequel une masse oscille le long de l'axe y_m.La roue suit une route ondulee $y_r = Y_r sin\omega t$ et applique une force sur le ressort k et l'amortisseur λ

Q33.l'equation qui determine le mouvement vertical d'une voiture en deplacement le long d'une route sinusoidalement ondulee est :

a) $m\frac{d^2y_m}{dt^2} + \lambda\frac{dy_m}{dt} + ky_m = 0$
b)$m\frac{d^2y_m}{dt^2} + \lambda\frac{dy_m}{dt} + ky_m = \lambda\omega Y_r cos\omega t + kY_r sin\omega t$
c)$m\frac{d^2y_m}{dt^2} + m\frac{dy_m}{dt} + ky_m = \lambda\omega Y_r sin\omega t + kY_r cos\omega t$
d)$m\frac{d^2y_m}{dt^2} + \lambda\frac{dy_m}{dt} + ky_m = \lambda\omega Y_r cos\omega t + kY_r sin\omega t$
e)aucune des propositions precedentes n'est juste

Une solution pour y_m pourrait etre utilisee pour concevoir un systeme de suspension optimale qui donnerait une tendance lisse sur une route sinusoidalement ondulee.Les ordinateurs analogiques ont ete largement utilises pour resoudre des equations differentielles jusqu'a ce qu'i soient latgement remplaces par des ordinateurs numeriques.Cependant,pour des applications specifiques telles que la conception de la suspension ou de l'analyse vibratoire,les ordinateurs analogiques imitent avec precision les systemes physiques,et peuvent etre facilement changes ppour differents parametres,et donner rapidement des reponses qui sont facilement affichables su un oscilloscope une solution d'ordinateur analogique pour le systeme de syspension ci-dessus e representee a la figure 2

ampli.png

Q34. le ciruit (1) est un amplificateur

a)integrateur
b)derivateur
c) inverseur
d) non inverseur
e) sommateur

Q35. le ciruit (2) est un amplificateur

a)integrateur
b)derivateur
c) inverseur
d) non inverseur
e) sommateur

Q36.les entree (+)et (-) de l'amplificateur operationnel (1) de la figure 1 sont respectivement appelees :

a)les entrees inverseuse et non inverseuse
b)les entrees non inverseuse et inverseuse
c)les entrees de masse et de tension
d) les entrees positives et negatives
e) aucune des proposition precedentes n'est juste

Q37.La sortie de l'amplificateur (5) a pour expression :

a) $-\frac{ky_m}{m}$
b)$\frac{ky_m}{m}$
c) -$\frac{my_m}{k}$
d) kmy_m
e) $\frac{y_m}{mk}$

Q38. la sortie de l'amplificateur (4) vaut :

a)$-\frac{\lambda dy_m}{mdt}$

b) $\frac{\lambda dy_m}{mdt}$

c) $\frac{mdy_m}{\lambda dt}$

d) $m\lambda\frac{dy_m}{dt}$

e) $\frac{dy_m}{\lambda mdt}$

Q39. la sortie de l'amplificateur (1) donne :

a) $\int(\lambda\frac{dy_m}{mdt}+\frac{ky_m}{m}-\frac{\lambda\omega}{m}Y_r cos\omega t-\frac{kY_r}{m}sin\omega t)dt$

b) $\frac{d}{dt}(\lambda\frac{dy_m}{mdt}+\frac{my_m}{k}+\frac{\lambda\omega}{m}Y_r cos\omega t+\frac{kY_r}{m}sin\omega t)$ c) $(m\frac{dy_m}{\lambda dt}+\frac{my_m}{k}-\frac{\lambda\omega}{m}Y_r cos\omega t-\frac{kY_r}{m}sin\omega t)$

d) $\int(-\lambda\frac{dy_m}{mdt}-\frac{my_m}{k}+\frac{\lambda\omega}{m}Y_r cos\omega t+\frac{kY_r}{m}sin\omega t)dt$

e) $(-m\frac{dy_m}{\lambda dt}-\frac{my_m}{k}-\frac{\lambda\omega}{m}Y_r cos\omega t-\frac{kY_r}{m}sin\omega t)$

Q40.la sortie de l'amplificateur (2) donne

a) $\int(\int(\lambda\frac{dy_m}{mdt}+\frac{ky_m}{m}-\frac{\lambda\omega}{m}Y_r cos\omega t-\frac{kY_r}{m}sin\omega t)dt)dt$

b) $\frac{d^2}{dt^2}(\lambda\frac{dy_m}{mdt}+\frac{my_m}{k}+\frac{\lambda\omega}{m}Y_r cos\omega t+\frac{kY_r}{m}sin\omega t)$ c) $\int(m\frac{dy_m}{\lambda dt}+\frac{my_m}{k}-\frac{\lambda\omega}{m}Y_r cos\omega t-\frac{kY_r}{m}sin\omega t)dt$

d) $\int(\int(-\lambda\frac{dy_m}{mdt}-\frac{my_m}{k}+\frac{\lambda\omega}{m}Y_r cos\omega t+\frac{kY_r}{m}sin\omega t)dtdt)$

e) $\frac{d}{dt}(-m\frac{dy_m}{\lambda dt}-\frac{my_m}{k}-\frac{\lambda\omega}{m}Y_r cos\omega t-\frac{kY_r}{m}sin\omega t)$

EXERCICE 2 :Convertisseur analogique-numerique

convert.png

Le convertisseur analogique-numerique (A-D) est un circuit electronique tres import et presente de nombreuse applications. Il forme une interface essentielle en ce qui concerne l'analyse des donnees analogiques avec un calculateur numerique.C'est un module indispensable de tout systeme de communication numerique.Il existe plusiseurs facons de convertir un signal analogique en un nombre fini de uns er de zeros.Fondalementalement,le signal analogique est echantillonne a des intervalles regulierement espaces,de courte duree,et les echantillons sont convertis en nombre binaire.un exemple simple est represente sur la figure 3.Les amplificateurs operationnel sont supposee ideaux

Q41.Dans quel mode fonctionnenet les amplifiacateurs operationnels ?

a) en mode amplificateur,

b)mode commun

c) mode comparateur

d) mode lineaire

e) aucune des proposition precedente

Q42.les expressions des tensions V_A, V_B, V_C sont respectivement :

a) $\frac{V_ref}{4},\frac{V_ref}{2},\frac{3V_ref}{2}$

b) $\frac{RV_ref}{4},\frac{RV_ref}{2},\frac{RV_ref}{4}$

c) $4V_e,3V_e,2V_e$

d) $V_e-V_ref,V_e-2V_ref,V_e-3V_ref$

e) aucune des propositions precedentes n'est justes

Q43.Pour une tension V_ref donnee,combien de valeurs peuvent prendre les tensions de sortie V_1, V_2, V_3

a)Une valeur

b) deux valeurs

c) trois valeurs
d) quatres valeurs
e) une infinite de valeur

Q44.On suppose que $V_e = 5V$ et $V_ref = 8V$,les tensions de sortie $V_1,V_2,$ prennent les valeurs :

a) 0V,0V,0V
b) 2V 4V 6V
c)5V 5V 0V
d)5V 5V -5V
e)aucune des valeurs precedentes n'est vrai

dans la suite,on attribuera le bit 1 aux tensions de sortie positives ete 0 aux tensions negatives ou nulles.La tension V_1 sera consideree comme le bit le moins signification et la tension V_3 comme le bit le plus significatif

Q45.combien de nombre decimaux pouvons-nous coder en base deux en utilisant ce convertisseur ?

a) deux
b) quatre
c) huit
d) une infinite de valeur
e) aucune proposition precedentes n'est juste

Q46. pour $V_e = 3V$ et $V_ref = 5V$ quel est le nombre binaire en sortie du convertisseur ?

a)000
b)011
c)110
d)111
e)aucune des propositions precedentes n'est juste

Q47. pour $V_e = 7V$ on desire obtenir le nombre binaire 111 en sortie du convertisseur,dans quel intervalle doit appartenir V_ref ?

a)$[0, 10]V$
b) $]-\infty, 9.33]V$
c) $]9.35, +\infty[$
d)$[0, 9.35]V$
e) aucune des propositions precedentes n'est juste

Corrections des épreuves de Physique.

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2009

CORRECTION DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 : Calcul d'incertitudes

1) Nombre de carreaux nécessaires

Comme les dimensions du mur sont des multiples respectifs des dimensions du carreau, on a immédiatement : $N_{carreaux} = \frac{S_{mur}}{S_{carreau}} = \frac{12*4}{0,3*0,4} = 400$ carreaux.

Incertitude $N_c = \frac{S_m}{S_c} = \frac{L_m l_m}{L_c l_c} \Longrightarrow \Delta N_c = \frac{l_m}{L_c l_c}\Delta L_m + \frac{L_m}{L_c l_c}\Delta l_m + \frac{L_m l_m}{l_c L_c^2}\Delta L_c + \frac{L_m l_m}{L_c l_c^2}\Delta l_c$
A.N. : $\Delta N_c = \frac{4}{0,4*0,3} * \frac{2}{100}.12 + \frac{12}{0,4*0,3} * \frac{2}{100}.4 + \frac{12*4}{0,3*0,4^2} * 0,01 + \frac{12*4}{0,4*0,3^2} * 0,01 = 39,33$
Soit $N_c = (400 \pm 40)$ carreaux.

2) Coût d'investissement

On a le prix unitaire du carreau $P_u = (1050 \pm 50)$ F.
Le coût d'investissement est $C_i = N_c * P_u$.
A.N. : $C_i = 400 * 1050 = 420000$ F.
Alors, $\Delta C_i = N_c.\Delta P_u + P_u.\Delta N_c = 400 * 50 + 1050 * 40 = 62000$
D'où le coût d'investissement $C_i = (420000 \pm 62000)$ F.

Exercice 2 : Cinématique du point

1) Loi $x = f(V)$

Le graphe révèle une linéarité entre x et $\sqrt{V}$. La pente vaut sensiblement $\frac{2,00-1,00}{1,00-0,00} = 1$, et $x_{V=0} = 1,00$, d'où la loi :

$$x = \sqrt{V} + 1,00$$

2) Équation du mouvement

$$\begin{aligned} & x &=& \sqrt{V}+1 \\ \Longleftrightarrow & x &=& \sqrt{\dot{x}}+1 \\ \Longrightarrow & \dot{x}-(x-1)^2 &=& 0 \end{aligned}$$

ce qui est donc l'équation du mouvement.

3) Loi horaire du mouvement

Il s'agit d'intégrer la relation précédente. On a

$$\begin{aligned} & \dot{x} &=& (x-1)^2 \\ \Longrightarrow & \frac{\dot{x}}{(x-1)^2} &=& 1 \\ \Longrightarrow & \frac{dx}{(x-1)^2} &=& dt \\ \Longrightarrow & x &=& 1-\frac{1}{t+\alpha} \end{aligned}$$

De plus, $x_{t=0} = X_0 \Longrightarrow 1 - \frac{1}{\alpha} = X_0 \Longrightarrow \alpha = \frac{1}{1-X_0}$.
On a donc enfin $x(t) = 1 - \frac{1}{t+\frac{1}{1-X_0}} = 1 - \frac{1-X_0}{1+(1-X_0)t} = \frac{X_0+(1-X_0)t}{1+(1-X_0)t}$.

4) Application

Pour $X_0 = 2$, on a $X_{t=2s} = \frac{2+(1-2)*2}{1+(1-2)*2} = 0$, et on trouve $V_{t=2} = (x_{t=2} - 1)^2 = 1$ m.s^{-1}.

Remarque On peut aussi dériver $x(t)$ pour trouver l'expression de la vitesse, puis calculer $V_{t=2}$.

Exercice 3 : Cinématique du solide

1) Valeur de λ admissible

Les points A et B étant fixes par rapport au point O_2 dans le repère R_2, si on note $\vec{\Omega}_{2/1}$ la rotation instantanée de R_2 par rapport à R_1, la composition des vitesses permet d'écrire :

$$\begin{cases} \vec{V}_A^1 = \vec{V}_{O_2}^1 + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2A} \\ \vec{V}_B^1 = \vec{V}_{O_2}^1 + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2B} \end{cases}$$

Si on pose (x, y, z) les composantes de $\vec{\Omega}_{2/1}$ dans R_1, on a $\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2A} = z.\vec{y}_1 - y.\vec{z}_1$, d'une part, et $\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2B} = -z.\vec{x}_1 + x.\vec{z}_1$, d'autre part.
Du système de composition des vitesses, en ne retenant que les composantes suivant $\vec{y}_1$ de la première égalité vectorielle et les composantes suivant $\vec{x}_1$ de la seconde égalité, on aboutit au nouveau système :

$$\begin{cases} 3 + 2\lambda = 2(1+\lambda) + z \\ -3\lambda = -2 - z \end{cases}$$

Ainsi, en tirant z de la première ligne et par une substitution immédiate, on trouve la seule valeur de λ pour laquelle ce système de coordonnées et de vitesses serait admissible : $\lambda = 1$.

2) Vitesse du point C au même instant

De même que précédemment, on a $\vec{V}_C^1 = \vec{V}_{O_2}^1 + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2C}$.
A l'instant τ, $O_1 = O_2$, et on a donc $\overrightarrow{O_2C} = \vec{z}_1$.
On en déduit $\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{O_2C} = y.\vec{x}_1 - x.\vec{y}_1$.
Du système de composition des vitesses exprimé à la question précédente, on a :
ligne, $-3 = 0 - y$, soit $y = 3$; et
ligne, $2(1+\lambda) = 0 + x$, soit $x = 2(1+\lambda) = 4$.
D'où la vitesse de C : $\vec{V}_C^1 = (-2\vec{x}_1 + 2(1+\lambda)\vec{y}_1) + (3\vec{x}_1 - 4\vec{y}_1)$
ie $\vec{V}_C^1 = \vec{x}_1$ ($\lambda = 1$).

3) Rotation instantanée à cet instant

$\vec{\Omega}_{2/1} = x.\vec{x}_1 + y.\vec{y}_1 + z.\vec{z}_1$
x et y ont déjà été explicitement déterminé dans la question précédente. Du système qui a permis de déterminer λ la question 1, on arrive à $z = 1$.
Alors, on écrit $\vec{\Omega} = 4\vec{x}_1 + 3\vec{y}_1 + \vec{z}_1$.

Remarque On vérifie que les valeurs trouvées sont bien compatibles avec les positions et les vitesses données (vérifier la composition des vitesses sur tous les axes), ce qui assure leur exactitude.

Exercice 4 : Hydrodynamique

1) Bilan des forces

Remarque Les faces 1 et 2 sont repérées par les ordonnées y et $y + dy$, les faces 3 et 4 par les abscisses x et $x + dx$, et les face 6 et 5 par les cotes z et $z + dz$...

Le volume élémentaire subit :

son poids : $\vec{P} = dm.\vec{g} = (\rho dV).(-g.\vec{e}_z) = (-\rho g dV)\vec{e}_z$;

sion sur la face 1 : $\vec{F}_1 = P(y).dx.dz.\vec{e}_y$;

sion sur la face 2 : $\vec{F}_2 = -P(y+dy).dx.dz.\vec{e}_y$;

sion sur la face 3 : $\vec{F}_3 = P(x).dy.dz.\vec{e}_x$;

sion sur la face 4 : $\vec{F}_4 = -P(x+dx).dy.dz.\vec{e}_x$;

sion sur la face 5 : $\vec{F}_5 = -P(z+dz).dx.dy.\vec{e}_z$;

sion sur la face 6 : $\vec{F}_6 = P(z).dx.dy.\vec{e}_z$;

2) Loi de variation de la pression

Le fluide étant au repos, les différentes forces doivent se compenser. On en déduit, suivant les différents axes :

$$\begin{cases} P(x)dydz - P(x+dx)dydz &= 0 \\ P(y)dzdx - P(y+dy)dzdx &= 0 \\ P(z)dxdy - P(z+dz)dxdy - \rho g dV &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} P(x) &= P(x+dx) \\ P(y) &= P(y+dy) \\ P(z) - P(z+dz) &= -\rho g dz \end{cases}$$

car $dV = dxdydz$.

Ainsi, la pression dans un fluide au repos ne dépend ni de x ni de y. Elle ne dépend que de z (la profondeur), et vérifie $P(z) - P(z+dz) = -dP = -\rho g dz$, soit encore $\Delta P = -\rho g \Delta z$: c'est la loi de variation de la pression dans le fluide.

3) Application

a) C'est l'air qui entre.

b) D'après la question précédente, la pression dans le tube ne dépend que de la hauteur du point considéré. De plus, la loi de variation montre que la pression P_2 en un point plus haut est inférieure à la pression P_1 en un point plus bas (car, alors, $z_2 - z_1 > 0$).
Le point B étant plus haut que le point A, sa pression est inférieure à la pression de A, c'est-à-dire la pression atmosphérique. En ce point, le fluide de plus haute pression (l'air à l'extérieur) va donc repousser le fluide de plus basse pression (l'eau dans le tube).

Exercice 5 : Electronique

I-Étude de la diode

1) Calcul de la résistance dynamique r_d

Il suffit d'évaluer la pente de la partie linéaire de la caractéristique pour les $U > 0$ (diode passante). On trouve $r_d \simeq \frac{2{,}5-1{,}5}{(10-5).10^{-3}} = 200\Omega$.

2) Tension de seuil U_s

C'est la tension à partir de laquelle un courant est observé dans la diode, dans le sens passant. Graphiquement, elle est déterminée par le point d'intersection de l'axe des abscisses avec le prolongement de la partie linéaire de la caractéristique. On trouve $U_s \simeq 0,5$ V.

3) Modélisation de la diode

Comme le courant inverse est nul, la modélisation de la diode se fait ainsi :

- pour $U \leq U_s$, $I = 0$, et la diode est modélisée par un interrupteur ouvert.
- pour $U > Us$, $I = \frac{U-U_s}{r_d}$n et la diode est modélisée par un récepteur de f.c.é.m. U_s et de résistance interne r_d.

II-Utilisation de la diode (D)

1)

a) Oui, on peut utiliser le théorème de superposition, car tous les dipôles de ce circuit sont linéaires.

b) On peut utiliser la méthode de Thévenin.

2)

a) Tension U_{AK} **Exercice 6** : Problème de Mécanique

Préliminaires

Champ électrique créé par un disque plan en un point M de son axe

Données : rayon du disque a, charge surfacique σ.
On considère le repère cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ associé au disque (O est le centre du disque et $\vec{e}_z$ dirige son axe). $\vec{e}_z$ est orienté vers le haut.
Alors, un point P du disque situé à une distance r de O et portant la charge surfacique élémentaire $dq = \sigma dS$ crée en M un champ élémentaire

$$d\vec{E} = \frac{\sigma dS}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\overrightarrow{PM}}{||\overrightarrow{PM}||^3}$$

. Si z est la côte de M, on a $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = z.\vec{e}_z - r.\vec{e}_r$. Ainsi, $||\overrightarrow{PM}|| = \sqrt{r^2 + z^2}$.
On écrit donc

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{z\vec{e}_z - r\vec{e}_r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dS$$

Du fait de la symétrie de révolution plane du disque, les termes en $\vec{e}_r$ se compensent, et il reste

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{z\vec{e}_z}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dS \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \vec{e}_z \int \frac{\pm 1}{z^2.(1+(\frac{r}{z})^2)^{\frac{3}{2}}} dS \end{aligned}$$

Le signe dans l'intégrale dépend du signe de z (en effet, $(z^2)^{\frac{3}{2}}$, qu'on a sorti au dénominateur, vaut z^3 si $z \geq 0$ et $-z^3$ sinon).
Par le changement de variable $\frac{r}{z} = tan\theta$ (où θ représente alors l'angle entre $\overrightarrow{PO}$ et $\overrightarrow{PM}$), on simplifie l'intégration, et on aboutit au résultat final :

si $z > 0$: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\vec{e}_z$

si $z < 0$: $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\vec{e}_z$

Autre Méthode : Comme la distribution de charges est finie, il s'avère plus aisé de déterminer d'abord le potentiel électrostatique $V = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dS}{||\overrightarrow{PM}||}$.
Une intégration semblable à la précédente donne $V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2+z^2} - |z|\right)$. On en déduit le champ, $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dV}{dz}.\vec{e}_z$.

Champ créé dans l'espace par un plan uniformément chargé

Un plan est encore un disque de rayon infini.
En posant $a \longrightarrow +\infty$, on trouve le champ

si $z > 0$: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$

si $z < 0$: $\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$

Condensateur plan à armature mobile

Charge portée par l'armature B

Note : $V_B = 0$ et $V_A \geq 0 \Longrightarrow$ A porte la charge positive et B la charge négative. De plus, $Q_A = -Q_B = Q$.
Le potentiel de l'armature A est V_0 et celui de B vaut 0. La d.d.p. entre les deux armatures est donc $U = V_0$, et le champ au milieu des deux veut $E = \frac{V_0}{Z_0}$ (*).
Or, le champ au milieu des armatures résulte de la superposition des champs créés par chacune des deux armatures, qu'on peut considérer comme des plans (car la distance entre les deux armatures est faible par rapport à leurs dimensions). Ainsi, on a encore :

$$E = E_A + E_B = \frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0} = \frac{Q_A}{2S\varepsilon_0} - \frac{Q_B}{2S\varepsilon_0}$$

, soit encore $E = -\frac{Q_B}{S\varepsilon_0}$ (**).
De (*) et de (**), on déduit rapidement la charge : $Q_B = -\frac{\varepsilon_0.S.V_0}{Z_0}$.

Justification

La charge portée par A reste constante au cours du temps, car A est isolée. Or, $Q_B = -Q_A$. Donc la charge portée par A reste constante elle aussi.

Bilan des forces sur B

Les forces subies par l'armature B sont :
— son poids, $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$;

- la tension du ressort qui la soutient, $\vec{T} = k(l - l_0)\vec{e}_z$, où l est la longueur courante du ressort et l_0 sa longueur à vide ; et
- la force de Coulomb exercée par l'armature A (charge +) sur l'armature B (charge -), $\vec{F} = Q_B\vec{E}_A = \frac{Q_B Q_A}{2S\varepsilon_0}\vec{e}_z = -\frac{Q_B^2}{2S\varepsilon_0}\vec{e}_z$.

Note : Prêter attention aux sens des forces ! Le vecteur $\vec{e}_z$ est orienté vers le bas.

Équation du mouvement de B

On prend pour origine sur l'axe des z la position de B à l'équilibre initial (notons ce point O). Si on note l' la longueur du ressort à cet instant là, on a alors

$$mg + k(l' - l_0) = 0$$

, car le poids et la tension du ressort sont les seules forces subies par B à cet instant là ($V_A = 0$). Par application du PFD à un instant ultérieur, il vient que

$$\begin{aligned} & \vec{P} + \vec{T} + \vec{F} &=& m\vec{a}_B \\ \Longleftrightarrow\ & mg + k(l - l_0) - \tfrac{Q_B^2}{2S\varepsilon_0} &=& ma_B \\ \Longleftrightarrow\ & k(l - l') - \tfrac{Q_B^2}{2S\varepsilon_0} &=& ma_B \\ \Longleftrightarrow\ & -kz - \tfrac{Q_B^2}{2S\varepsilon_0} &=& m\ddot{z} \end{aligned}$$

. D'où l'équation différentielle du mouvement de B :

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = -\frac{Q_B^2}{2mS\varepsilon_0}$$

Nouvelle position d'équilibre

L'équilibre est atteint lorsque la tension supplémentaire du ressort compense exactement la force électrostatique subie par B, soit $kz = -\frac{Q_B^2}{2S\varepsilon_0}$, soit encore

$$z = -\frac{Q_B^2}{2kS\varepsilon_0}$$

Puisque z représente le déplacement par rapport au point O, on déduit

$$Z_1 = Z_0 - \frac{Q_B^2}{2kS\varepsilon_0}$$

Étude de la stabilité

a) **Énergie potentielle totale du système** Prenons pour origine des énergies potentielles électrostatique et de pesanteur l'horizontale passant par O.
L'énergie potentielle totale du système est constituée de :

- L'énergie potentielle de pesanteur $E_{p_p} = -mgz$ (z est orienté vers le bas) ;
- L'énergie potentielle élastique $E_{p_{las}} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}k(z + l' - l_0)^2$ (z)$l - l'$) ; et
- L'énergie potentielle électrostatique $E_{p_{lec}} = -Fz = -\frac{Q_B^2}{2S\varepsilon_0}z$ (c'est le travail de la force électrostatique).

D'où l'énergie potentielle totale

$$E_{p_t} = \frac{1}{2}k(z + l' - l_0)^2 - mgz - \frac{Q_B^2}{2S\varepsilon_0}z$$

b) Position d'équilibre La position d'équilibre correspond au minimum de l'énergie potentielle. Ainsi, $\frac{dE_{p_t}}{dz}_{(z=z_1)} = 0$.
En se souvenant que $mg - k(l' - l_0) = 0$, on retrouve effectivement $z_1 = \frac{Q_B^2}{2kS\varepsilon_0}$, soit

$$Z_1 = Z_0 - \frac{Q_B^2}{2kS\varepsilon_0}$$

c) Stabilité de l'équilibre

Rappel : Pour étudier la stabilité de l'équilibre d'un corps autour d'une certaine position, il suffit d'étudier la limite de la vitesse de ce corps quand il se rapproche de cette position.
Or, si on pose $\alpha = -\frac{Q_B^2}{2S\varepsilon_0}$, l'équation du mouvement de B peut encore se mettre sous la forme $m\ddot{z} + kz = \alpha$.
A partir de là, il vient que

$$2m\ddot{z}.\dot{z} + 2k\dot{z}.z = 2\alpha\dot{z},$$

$\dot{z}^2 + kz^2 = 2\alpha z + \beta$ avec β réel ;
A $t = 0$, on a $z = 0$ (on est au point O) et $\dot{z} = 0$ (on est en un point d'équilibre). D'où $\beta = 0$, et il reste que $(\dot{z})^2 = -\frac{1}{m}z\left(kz + \frac{Q_B^2}{S\varepsilon_0}\right)$.
On calcule alors $\lim\limits_{z \to z_1} \dot{z}$, sachant que $z_1 = -\frac{Q_B^2}{2kS\varepsilon_0}$.

Conclusion : Cette limite étant différente de 0 (faire le calcul !), l'équilibre en Z_1 est instable.

Autre approche : On remarque bien que B obéit à la loi de déplacement d'un oscillateur harmonique simple, forcé mais non amorti. Or, pour un tel oscillateur, il n'y a pas de position d'équilibre stable une fois que le mouvement d'oscillation est enclenché...

d) $Z_0 - Z_1 = \frac{Q_B^2}{2kS\varepsilon_0}$

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2010

CORRECTION DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 Optique et calcul d'incertitudes

1) Position et taille d'une image

$AB = (10,0 \pm 0,1)$ cm
$OA = (22,0 \pm 0,1)$ cm
$C = (10,0 \pm 0,2)\delta$

Position

$\frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}}$
Or,

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\overline{OF'}} \\ \Longrightarrow \quad C &= \frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} \\ \Longrightarrow \quad \overline{OA_1} &= \frac{\overline{OA}}{C.\overline{OA}+1} \end{aligned}$$

AB : $\overline{OA_1} = \frac{-22}{-10.22+1} \simeq O,1$ cm

$$\begin{aligned} \Delta\overline{OA_1} &= \frac{\Delta\overline{OA}}{C.\overline{OA}+1} + \frac{\Delta(C.\overline{OA}+1).\overline{OA}}{(C.\overline{OA}+1)^2} \\ &= \frac{\Delta\overline{OA}}{C.\overline{OA}+1} + \frac{(C.\Delta\overline{OA}+\overline{OA}.\Delta C).\overline{OA}}{(C.\overline{OA}+1)^2} \end{aligned}$$

A.N. : $\Delta\overline{OA_1} = (10 \pm 0,2).10^{-2}$ cm

Taille

$\gamma = \frac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$
$\Longrightarrow \overline{A_1B_1} = \frac{\overline{OA_1}.\overline{AB}}{\overline{OA}}$
A.N. : $\overline{A_1B_1} = \frac{0,1.10}{22} = 0,045$ cm
On en déduit $\Delta\overline{A_1B_1} = \frac{\overline{OA_1}.\Delta\overline{AB}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{AB}.\Delta\overline{OA_1}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{OA_1}.\overline{AB}}{\overline{AB}^2}.\Delta\overline{OA}$
Après calcul, on aboutit à $\overline{A_1B_1} = (45,5 \pm 0,2).10^{-3}$ cm

2) Distance focale de la lentille

$e = (4,0 \pm 0,1)$ cm ; $\overline{O_2A} = (30 \pm 2)$ cm.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{O_2F'}} &= \frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} \\ \Longleftrightarrow \quad \overline{O_2F'} &= \frac{\overline{O_2A'}.\overline{O_2A_1}}{\overline{O_2A_1}-\overline{O_2A'}} \end{aligned}$$

A.N. : $\overline{O_2F'} \simeq -4,48$ cm

Exercice 2 Electricité

Question	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Réponse	D	C	D	B	D	A	C	A	C	D

Q1

La force gravitationnelle s'écrit $\frac{G.m_A.m_B}{AB^2}.\vec{u}_{AB}$ et la force électrique $\frac{K.q_A.q_B}{AB^2}.\vec{u}_{AB}$.
Pour que les deux forces soient égales, il faut et il suffit que $G.m_A.m_B = K.q_A.q_B$, ce qui ne dépend pas de la distance entre les particules...

Q2

Le champ électrique agissant sur l'électron vaut $E = \frac{K.q_p}{d^2}$
A.N. : $E \simeq 5,1.10^{11}$ V.m-1

Q3

D'après le PFD, on a $\vec{F_l} = m\vec{a}$, avec $\vec{F_l} = q\vec{E}$.
Alors, $\vec{a} = -\frac{q}{m}\vec{E}$, puis $\vec{V} = \vec{a}.t + \vec{V_0}$ et $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{V_0}.t$ (exprimer individuellement les composantes de ces vecteurs).
On trouve $t_{x=5}$, puis V à cet instant.

Q4

La puissance de la batterie est : $P_{batterie} = \frac{E}{t} = \frac{U.I}{t} = \frac{12.80}{24} = 40$ W< 60 W.
Ainsi, la batterie ne dispose pas de la puissance qu'il faudrait pour alimenter les lampes pendant $24h$. Elle s'épuisera bien avant, et les phares seront dons éteints.

Q5

$I = \frac{ddp - U}{R} = \frac{14-12}{0,5} = 4$ A.

Q6

$E = \frac{1}{2}C.U^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Longrightarrow q = \sqrt{2E.C}$
A.N. : $q = 0,1$ C

Q7

Résistance équivalente $R_eq = \frac{R}{2} = 110\Omega$

Puissance dissipée $P = RI^2 = \frac{U^2}{R} = 440$ W

Q8

La tension de la branche (E_1, R_1) est égale à celle de la branche (E_2, R_2), elle-même égale à la tension de la branche (R_3).
Selon l'orientation choisie, on a donc

$$\begin{cases} -E_1 + U_1 - U_2 + E_2 = 0 \\ -E_2 + U_2 + U_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0,5I_1 - 0,6I_2 = -2 \\ 10I_1 + 10,6I_2 = 8 \end{cases}$$

On trouve $I_1 \simeq -1,46$ A, $I_2 \simeq 2,12$ A, d'où $I = I_1 + I_2 \simeq 0,7$ A.

Q9

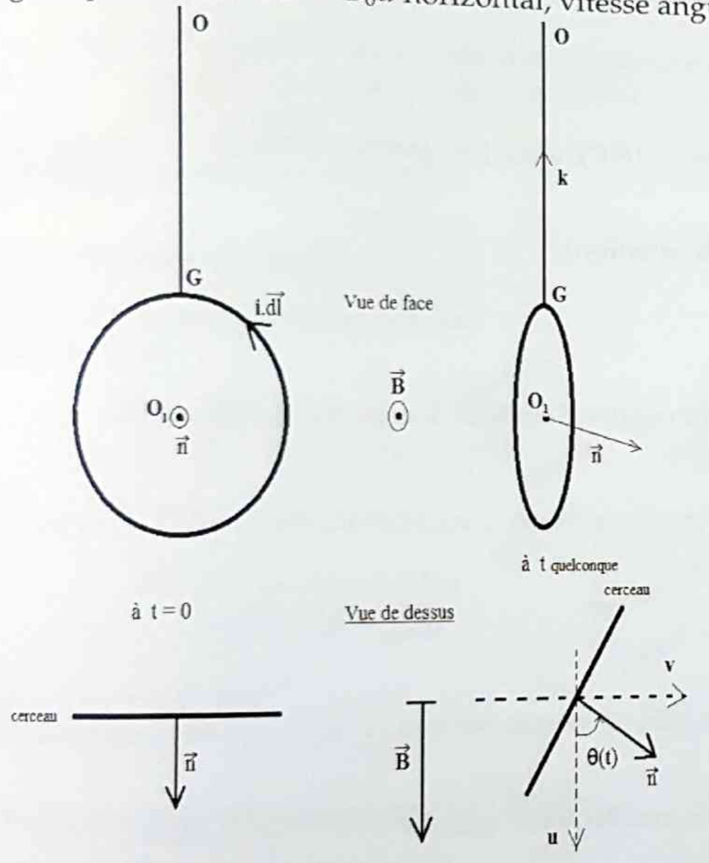
En testant les différentes valeurs, on trouve vite que $\overrightarrow{rot}\left(\vec{E}_{a,b,c}(x,y,z)\right) = \vec{0}$ dans le cas où $(a,b,c) = (-1,4,2)$.

Q10

La circulation vaut $\int_A^D \vec{E}.d\vec{l}$, avec $d\vec{l} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$.

$\boxed{\text{Exercice 3}}$ induction magnétique

Données : masse du cerceau m, rayon du cerceau r, résistance électrique du cerceau R, champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{u}$ horizontal, vitesse angulaire initiale $\dot{\theta}_0$.



1) Intensité du courant à travers le cerceau

Loi de Lenz-Faraday : $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$

Or, $d\Phi = \vec{B}.d\vec{S} = \vec{B}.\vec{n}dS = B_0(\cos\theta)dS$.

D'où $\Phi = B_0 S\cos\theta = \pi r^2 B_0\cos\theta$.

Ainsi, $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 B_0\dot{\theta}\cos\theta$.

Loi d'Ohm : $i(t) = \frac{e(t)}{R}$.

Soit encore $i(t) = \frac{\pi r^2 B_0}{R}\dot{\theta}\sin\theta$.

2) Moment magnétique $\vec{\mu}$

Un point M du cerceau porte une densité linéique de courant $\vec{j} = i(t).d\vec{l}$.
Si on considère le repère polaire associé au cerceau $(O_1, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$, on a

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \text{ et } d\vec{l} = rd\phi\vec{e}_\phi$$

On peut alors calculer le vecteur moment magnétique $\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{j}$. On a

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \tfrac{1}{2}\int (r\vec{e}_r) \wedge \left(i(t)rd\phi\vec{e}_\phi\right) \\ &= \tfrac{1}{2}r^2 i(t)\vec{n}\int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \pi r^2 i(t)\vec{n} \end{aligned}$$

3) Équation du mouvement

On sait que $\sum$moments des forces extérieures $= J\ddot{\theta}$ (*), avec $J = \frac{1}{2}mr^2$ (cerceau).
Les forces appliquées au cerceau sont :

son poids, de moment nul (car il rencontre l'axe de rotation) ;

la tension du fil, de moment nul (idem) ; et

ıgnétique due à $\vec{B}$, dont le moment vaut $\vec{\mu} \wedge \vec{B}$.

Or, $\vec{\mu} \wedge \vec{B} = (\pi r^2 i(t)\vec{n}) \wedge (B_0\vec{u}) = \pi r^2 B_0 i(t)\,(\vec{u}\cos\theta + \vec{v}\sin\theta) \wedge \vec{u} = -(\pi r^2 B_0 i(t)\sin\theta)\vec{k}$.
En projection sur l'axe (OO_1), on obtient de (*)

$$\begin{aligned} -\pi r^2 B_0 i(t)\sin\theta &= \tfrac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} \\ \Longleftrightarrow\quad -\frac{(\pi r B_0)^2}{R}\dot{\theta}\sin^2\theta &= \tfrac{1}{2}m\ddot{\theta} \\ \Longleftrightarrow\quad \ddot{\theta} + \frac{2(\pi r B_0)^2}{mR}\dot{\theta}\sin^2\theta &= 0\text{(i)} \end{aligned}$$

4) Angle à l'arrêt du mouvement

Déterminons la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.
Pour cela, intégrons la relation précédente, en remarquant que $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$. On a :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{(\pi r B_0)^2}{mR}\dot{\theta}(1-\cos 2\theta) &= 0 \\ \Longleftrightarrow\quad \dot{\theta} + \frac{(\pi r B_0)^2}{mR}(\theta - \frac{\sin^2\theta}{2} &= \alpha\text{, avec } \alpha \end{aligned}$$

A $t = 0, \theta = 0$ et $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 \Longrightarrow \alpha = \dot{\theta}_0$.
On a donc enfin $\dot{\theta} + \frac{(\pi r B_0)^2}{2mR}(2\theta - \sin 2\theta) - \dot{\theta}_0 = 0$ (ii).
Comme la fonction $f(\theta) = \frac{(\pi r B_0)^2}{2mR}(2\theta - \sin 2\theta)$ est croissante, non bornée et de valeur initiale 0, le cerceau continue de tourner, elle atteint forcément la valeur $\dot{\theta}_0$ à un instant qu'on note t_f.
Mais alors, à cet instant, l'équation (ii) montre que la vitesse angulaire s'annule ($\dot{\theta} = 0$). De plus tenant compte de cela, l'équation (i) montre que l'accélération angulaire est aussi nulle ($\ddot{\theta} = 0$) mouvement du cerceau s'arrête donc à l'instant t_f.
Par ailleurs, $\dot{\theta}(t_f) = 0 \Longrightarrow \frac{(\pi r B_0)^2}{2mR}(2\theta_f - \sin 2\theta_f) = \dot{\theta}_0$.

5) Énergie totale E_j dissipée par effet Joule

On a $E_j = R\int_0^{t_f} i^2 dt$.
Or, $i^2 dt = \frac{\pi^2 r^4 B_0^2}{R^2}\dot\theta^2 \sin^2\theta . dt = \frac{\pi^2 r^4 B_0^2}{R^2}\dot\theta \sin^2\theta . d\theta$, car $\dot\theta . dt = d\theta$.
On a alors, $E_j = \frac{\pi^2 r^4 B_0^2}{R}\int_0^{\theta_f}\dot\theta \sin^2\theta . d\theta$.

De plus, l'équation (ii) nous rappelle à propos que $\dot\theta = \dot\theta_0 - \frac{\pi^2 r^2 B_0^2}{2mr}(2\theta - \sin 2\theta)$.
On a donc

$$\begin{aligned} E_j &= \frac{\pi^2 r^4 B_0^2}{R}\int_0^{\theta_f}\left(\dot\theta_0 - \frac{\pi^2 r^2 B_0^2}{2mR}(2\theta - \sin 2\theta)\right)\sin^2\theta d\theta \\ &= \end{aligned}$$

6) Énergie mécanique initiale

Si on considère la position initiale du cerceau comme origine des énergies potentielles, l'énergie mécanique initiale se réduit à l'énergie cinétique (à $t = 0$, la torsion du fil est nulle, et $i = 0$).
Ainsi, $E_m = \frac{1}{2}J\dot\theta_0^2 = \frac{mr^2}{4}\dot\theta_0^2$.

Exercice 4 peintre sur une chaise

1) Accélération du peintre

Étudions le système (peintre+chaise).
LE PFD donne

$$\begin{aligned} \sum \vec F_{ext} &= (m+M)\vec a \\ \Longrightarrow \quad \vec P + \vec T + \vec T' &= (m+M)\vec a \end{aligned}$$

Comme $T = T'$ (le fil est inextensible), on en arrive à

$$\begin{aligned} P - 2T &= (m+M)a \\ \Longrightarrow \quad a &= g - \frac{2T}{m+M} \end{aligned}$$

A.N. : $a = -3,15 \text{ m.s}^{-2}$
On remarque que $a < 0$, car le peintre monte (le repère est orienté vers le bas).

2) Force exercée par le peintre sur la chaise

Les forces subies par la chaise sont :
- le poids du peintre $M\vec g$;
- la tension de la corde $\vec T$; et
- la force qu'exerce le peintre $\vec F_p$.

On a donc$P + F_p - T = ma$, d'où on tire $F_p = ma - P + T$
A.N. : $F_p = 580,25$ N

3) Quantité m' de peinture qu'il peut transporter

S'il transporte une quantité m' de peinture, le PFD permet d'écrire

$$\begin{aligned} P_t - 2T &= m_t a \\ \Longrightarrow \quad (m+M+m')g - 2T &= (m+M+m')a \end{aligned}$$

Alors, $a < 0$ (le peintre monte) $\Longrightarrow (m+M+m')g \leq 2T$, d'où on tire $m' < \frac{2T}{g} - (m+M)$.
La quantité maximale de peinture transportable est donc $m'_{max} = \frac{2T}{g} - (m+M)$.
A.N. : $m' = 33,77$ kg.

Exercice 5 peintre sur une chaise

1) Principe de l'hydrostatique

Énoncé littéral : Dans un fluide statique, la pression est continue et ne dépend que de la profondeur à laquelle on se trouve.

Énoncé sous forme locale : $dP = \pm\rho g dz$, selon que l'axe des cotes z est orienté vers le bas ou vers le haut, respectivement.

Énoncé sous forme globale : $P \pm \rho g z =$constante, selon que l'axe des cotes z est orienté vers le haut ou vers le bas, respectivement.

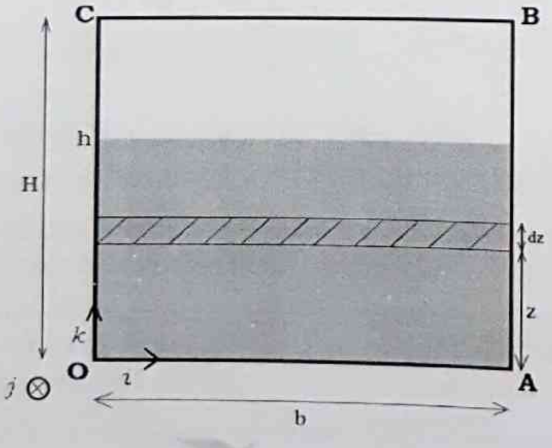
Remarques : Comme souvent en Physique, l'énoncé littéral est incomplet (ici, il ne précise pas quelle est la dépendance de P vis-à-vis de z) et l'énoncé global est imparfait (ici, il n'est valable que si ρ et g sont constantes où "presque" dans le domaine considéré).

Énoncé équivalent : Dans un fluide au repos, la différence de pression entre deux points est proportionnelle à la différence de profondeur des deux points : $\Delta P = \rho g h$.

2) Torseur des actions pressantes sur une surface élémentaire

Le point O est pris comme origine de notre repère, de base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ telle que : $\vec{i}$ est le vecteur de base du mur, porté par (OA) et $\vec{k}$ est porté par (OC).

Déterminons la loi de variation de la pression $P(z)$ A la surface du fluide $z = h$, la pression a la valeur de la pression atmosphérique (sinon, il y aurait discontinuité), ici négligée : $P_h = 0$. Or, d'après l'énoncé équivalent, on peut écrire, en un point quelconque, $P(z) - P(h) = \rho g(h-z)$ (la pression décroit quand la hauteur croit), soit $P = \rho g(h-z)$ $(P(h) = 0)$.



Déterminons la résultante On prend comme surface élémentaire le pan de mur de largeur b et d'épaisseur dz.
Une surface élémentaire de cote z est soumise à une pression $P(z)$ constante sur toute sa surface $dS = bdz$. D'où un effort pressant résultant

$$d\vec{R} = P(z).b.dz.\vec{j} = \rho g b(h-z)dz\vec{i}$$

Déterminons le moment en O Un point M de cette surface, d'abscisse x, subit l'effort pressant $P(z).dS_M.\vec{j}$, avec $dS_M = dxdz$.
Le moment de cet effort en O vaut donc $\overrightarrow{OM} \wedge P(z)dxdz\vec{j}$. On déduit le moment de l'effort résultant sur toute la surface élémentaire en intégrant par rapport a x :

$$\begin{aligned} d\vec{M}_O &= \int (x\vec{i} + z\vec{k}) \wedge P(z)dxdz\vec{j} \\ &= P(z).dz.\int_0^b \left(\vec{k}xdx - \vec{i}zdx\right) \\ &= P(z).b.dz.\left(\tfrac{b}{2}\vec{k} - z\vec{i}\right) \\ &= \rho.g.b.dz.\left(\tfrac{b}{2}\vec{k} - z\vec{i}\right) \end{aligned}$$

3) Torseur global des actions de l'eau sur le barrage

Il s'agit d'intégrer sur toute la hauteur en contact avec l'eau les grandeurs précédemment exprimées.

Résultante

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \int_0^h d\vec{R} \\ &= \int_0^h P(z)bdz\vec{i} \\ &= \rho g b\vec{i}\int_0^h (h-z)dz \end{aligned}$$

On en déduit $\vec{R} = \frac{1}{2}\rho g b h^2 \vec{j}$.

Moment en O

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \int_0^h d\vec{M}_O \\ &= \tfrac{b^2}{2}\vec{k}\int_0^h P(z)dz - b\vec{i}\int_0^h P(z)zdz \\ &= \tfrac{1}{2}\rho g b^2\vec{k}\int_0^h (h-z)dz - \rho g b\vec{i}\int_0^h z(h-z)dz \end{aligned}$$

On trouve après intégration $\vec{M}_O = \frac{1}{12}\rho g b h^2 \left(3b\vec{k} - 2h\vec{i}\right)$

4) Axe central du torseur

Équation cartésienne L'axe central du torseur est dirigé par $\vec{R}$, et passe par un point I tel que $\overrightarrow{OI} = \frac{\vec{R}\wedge\vec{M}_O}{||\vec{R}||^2}$
On trouve $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{12}\rho g b h^2(3b\vec{i} + 2h\vec{k})$, et on en déduit un système d'équations cartésiennes pour l'axe central :

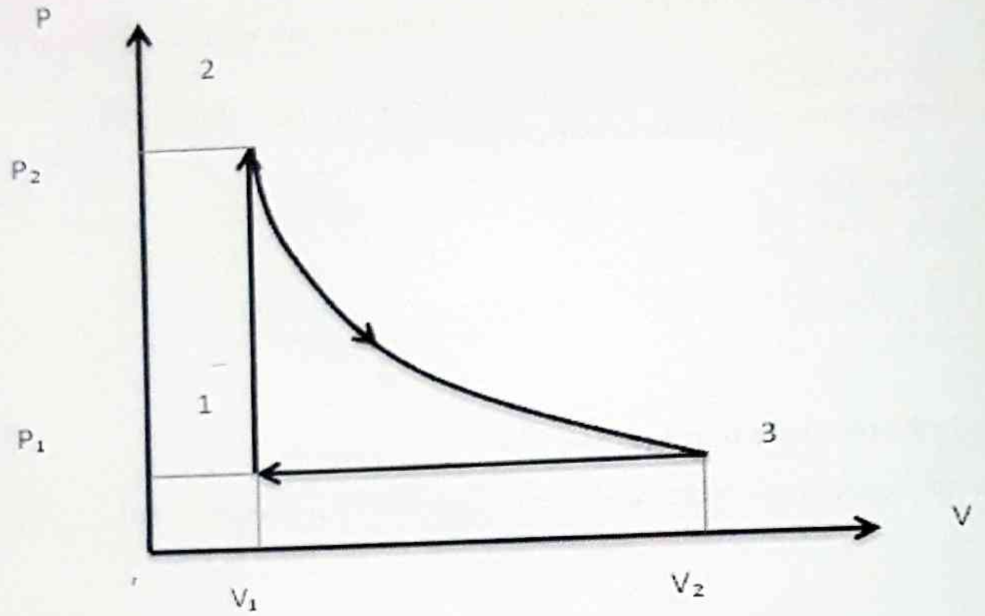
$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}\rho g b^2 h^2 \\ z = \frac{1}{6}\rho g b h^3 \end{cases}$$

Coordonnées du point central D Il s'agit encore du point I.

Exercice 6 Thermodynamique

On donne : $N = 1$ kg, $T_1 = 27\,^0$C, $R_{air} = 287$ J/kg, $P_1 = 1$ bar et $P_2 = 2$ bars.

1) Allure du cycle



2) Détermination de T_2

La transformation entre 1 et 2 étant isochore, on a :

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{P_2}{P_1}.T_1$$

AN : $T_2 = \frac{2}{1}(27 + 273) = 600$

D'où $T_2 = 600$ K, soit encore $T_2 = 327\,^0$C

3) Trouvons V_3

La transformation entre 2 et 3 étant isotherme, on a :

$$P_2.V_2 = P_3.V_3 \Rightarrow V_3 = \frac{P_2}{P_3}.V_2$$

Or, $\frac{P_2}{P_3} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{600}{300} = 2$, et $V_2 = V_1$.
Ainsi, on a $V_3 = 2V_1$ (1)
De plus, à l'état 1, on a : $P_1.V_1 = m.r.T_1 \Rightarrow V_1 = \frac{m.r.T_1}{P_1}$ (2)
(2) dans (1) donne : $V_3 = 2\frac{m.r.T_1}{P_1}$.

AN : $V_3 = 2.\frac{1.287.300}{100000} = 1,722$

Soit $V_3 = 1,72$ m^3

4) Déterminons ΔW_{cycle} et l'énergie interne de chaque phase ΔU_i

On sait que, par définition, $dW = -P.dV$ et $\Delta W_{cycle} = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta W_3$
De plus, $\Delta W_1 = 0$, $\Delta W_3 = -P_1.(V_1 - V_2)$.
Or, entre 2 et 3, on a $T_2 = T_3 \Rightarrow dW = -P.dV = -P_2.V_2.\frac{dV}{V} \Rightarrow \Delta W = -P_2.V_2.\ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right)$.

$$T_2 = T_3 \Rightarrow P_2.V_2 = P_3.V_3 \Rightarrow \frac{P_3}{P_2} = \frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{-1} \Rightarrow \Delta W_2 = P_2.V_2.\ln\left(\frac{P_3}{P_2}\right)$$

D'où on a : $\Delta W_{cycle} = 0 + P_2.V_2.\ln\left(\frac{P_3}{P_2}\right) - P_1.(V_1 - V_2)$.
Or, (1) donne $V_3 = 2V_1 = V_2$
Alors, $\Delta W_{cycle} = P_2.V_2.\ln\left(\frac{P_3}{P_2}\right) - P_1.(V_3/2 - V_2) = V_2.\left(P_2.\ln\left(\frac{P_3}{P_2}\right) + P_1/2\right)$
Ainsi, $\Delta W_{cycle} = V_2.\left(P_2.\ln\left(\frac{P_3}{P_2}\right) + P_1/2\right)$

AN : $\Delta W_{cycle} = 1,72.(200000\ln(\frac{1}{2}) + 100000/2) = 324442,6301$

D'où $\Delta W_{cycle} = 324443$ J

Déterminons l'énergie interne de chaque phase ΔU_i

On sait que $dU = C_V.dT$

Pour la transformation de 1 à 2, on a :

$\Delta U_1 = C_V.(T_2 - T_1)$

AN : $\Delta U_1 = C_V.(600 - 300)$

D'où $\Delta U_1 = C_V$

Pour la transformation de 2 à 3, on a :

$\Delta U_2 = C_V.(T_3 - T_2)$

Or, $T_3 = T_2$

D'où $\Delta U_2 = 0$

Pour la transformation de 3 à 1, on a :

$\Delta U_3 = C_V.(T_1 - T_3)$

AN : $\Delta U_3 = C_V.(300 - 600)$

D'où $\Delta U_3 = -2C_V$

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2011

CORRECTION DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 Mecanique

1. Déterminons

   (a) : les constantes $\rho_0 et b$

$$\begin{cases} \rho_m = \frac{1}{R}\int_0^R \rho(r)\mathrm{dr} = \rho_0\left(1-\frac{b}{3}\right) \\ \rho(R) = \rho_0(1-b) \end{cases}$$

   la résolution de ce système nous conduit à :

$$\begin{cases} \rho_0 = \frac{3}{2}\left(\rho_m - \frac{\rho(R)}{3}\right) \\ = \frac{\rho_m-\rho(R)}{\rho_m-\frac{\rho(R)}{3}} \end{cases}$$

   (b) Le tenseur d'inertie par rapport au centre C

$$I_c(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

   avec :

$$A = \int_{P\in(S)}(y^2+z^2)\mathrm{dm} = m\frac{R^3}{3}$$

$$B = \int_{P\in(S)}(x^2+z^2)\mathrm{dm} = \left(\frac{2R^3}{3}+\frac{h^3}{12}\right)m$$

$$C = \int_{P\in(S)}(x^2+y^2)\mathrm{dm} = \left(\frac{2R^3}{3}+\frac{h^3}{12}\right)m$$

$$D = \int_{p\in(S)} yz\mathrm{dm} = 0$$

$$E = \int_{p\in(S)} xz\mathrm{dm} = 0$$

$$F = \int_{p\in(S)} xy\mathrm{dm} = 0$$

2. Calcul de la vitesse de rotation du cylindre le principe fondamental de la dynamique nous donne :

$$\vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow F - kmg = mR\theta''$$

$$\Rightarrow \theta'' = \frac{F-kmg}{mR}$$

$$\Rightarrow \theta' = \left(\frac{F-kmg}{mR}\right)t + \theta_0'$$

avec évidement $m = \rho(R).\pi R^2 h.$

3) Vitesses et Réactions :

$$\sum M_\Delta\left(\vec{F_{ext}}\right) = J_\delta \theta''$$

$$\sum M_\Delta\left(\vec{F_{ext}}\right) = M(\vec{F}) = R^2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M_\Delta(\vec{P}) = \vec{0}$$

$$M_\Delta(\vec{R}) = \vec{0}$$

$$J_\Delta = m\frac{R^3}{3}$$

$$\Rightarrow \theta' = \left(\frac{3}{mR\sqrt{2}}\right)t + \theta_0'$$

3. Vitesse de rotation du cylindre et réactions aux points I et J pour cela appliquons le PFD en J on obtient :

$$\sum\{\ F_{ext}\ \}_J = \{\ 0\ \}$$

$$\{\ P\ \}_J + \{\ F\ \}_J + \{\ R_J\ \}_J + \{\ R_I\ \}_J = \{\ 0\ \}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{cc} mg\sin\theta & -mg\frac{h}{2}\cos\theta \\ mg\cos\theta & mg\frac{h}{2}\sin\theta \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_J + \left\{\begin{array}{cc} F_0 & 0 \\ F_0 & 0 \\ 0 & RF_0 \end{array}\right\}_J + \left\{\begin{array}{cc} J_r & 0 \\ J_\phi & 0 \\ J_x & 0 \end{array}\right\}_J + \left\{\begin{array}{cc} I_r & -hI_\phi \\ I_\phi & hI_r \\ I_x & 0 \end{array}\right\}_J = \{\ 0\ \}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} mg\sin\theta + F_0 + J_r + I_r = 0 \\ mg\cos\theta + F_0 + J_\phi + I\phi = 0 \\ J_x + I_x = 0 \\ -mg\frac{h}{2}\cos\theta - hI_\phi = 0 \\ mg\frac{h}{2}\sin\theta + hI_r = 0 \end{array}\right.$$

comme il n'y a pas d'action suivant $\vec{x}$(toutes les sollicitations sont concentrées dans le plan $(\vec{y},\vec{z})$ on a $J_x = I_x = 0$.

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} I_\phi = -\frac{mg}{2}\cos\theta \\ I_r = -\frac{mg}{2}\sin\theta \\ J_r = -\frac{mg}{2}\sin\theta - F_0 \\ J_\phi = -\frac{mg}{2}\cos\theta - F_0 \end{array}\right. \quad avec F_0 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

4. (a) Paramétrage du mouvement dans cette partie nous prenons comme axe du cylindre l'axe $\vec{z}$.Ainsi la paramétrisation du mouvement est la suivante :

rotation 1 : $(\vec{x};\vec{y};\vec{z})$ $Rot(\vec{z};\psi)$ donne $(\vec{u};\vec{v};\vec{z})$

rotation 2 : $(\vec{u};\vec{v};\vec{z})$ $Rot(\vec{u};\theta)$ donne $(\vec{u};\vec{w};\vec{z_1}$

rotation 3 : $(\vec{u},\vec{w},\vec{z_1})$ $Rot(\vec{z_1},\theta)$ donne $(\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1})$

les angles ψ,ϕ,θ sont appelés respectivement angle de précession, angle de nutation, et angle de rotation propre.

(b) Tenseur d'inertie par rapport à O ce tenseur peut se déduire du tenseur d'inertie en C, centre de gravité du cylindre par les relations suivantes(il est à noter que nous sommes dans la base principale d'inertie (x_1, y_1, z_1) :

$$\begin{cases} A_O = A_C + m(b^2+c^2) = A_C + \frac{mh^2}{4} \\ B_O = B_C + m(c^2+a^2) = B_C + \frac{mh^2}{4} \\ C_O = C_C + m(a^2+b^2) = C_C \\ D_0 = D_C = 0 \\ E_O = E_C = 0 \\ F_O = F_C = 0 \end{cases}$$

(c) Moment cinétique nous savons que dans la base (x_1, y_1, z_1) nous avons :

$$\vec{\mu}(C) = \bar{I}(C)\vec{\Omega}_1^0$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_1^0 &= \psi'\vec{z} + \theta'\vec{u} + \phi'\vec{z_1} \\ &= \psi'\vec{z} + \theta'\vec{u} + \phi'(\cos\theta\vec{z} + \sin\theta\vec{v}) \\ &= (\psi' + \phi'\cos theta)\vec{z} + \theta'\vec{u} + \phi'\sin\theta\vec{v} \end{aligned}$$

$$\vec{\mu}(C) = \begin{bmatrix} A_C\theta' \\ B_C\phi'\sin\theta \\ C_C(\psi' + \phi'\cos\theta) \end{bmatrix}$$

(d) Expression de l'angle de précession en fonction du temps D'après ce fameux théorème nous avons :

$$\frac{d^k}{dt}\vec{\mu}(O) = \sum \vec{M}_O(F_{ext})$$

ce qui donne littéralement : **la dérivée dans un repère (R_k) du moment cinétique est égale au moment des actions extérieures.** Ce théorème appliqué dans la base intermédiaire $B^{1'} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ nous donne :

$$\frac{d^{1'}}{dt}\vec{\mu}(O) = \frac{d^1}{dt}\vec{\mu}(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\mu}(O) = \sum \vec{M}_O(F_{ext})$$

$$\Rightarrow \frac{d^1}{dt}\vec{\mu}(C) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\mu}(C) = \sum \vec{M}_O(F_{ext})$$

Car nous avons

$$\begin{aligned} \vec{\mu}(O) &= \vec{\mu}(C) + m\vec{OC} \wedge \vec{v}^{1'}(C) \\ &= \vec{\mu}(C) \end{aligned}$$

de plus le moment des actions extérieures nous donne :

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_O(F_{ext}) &= \vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{F}) \\ &= \vec{M}_O(\vec{P}) \\ &= mg\frac{h}{2}\sin\theta\vec{u} \end{aligned}$$

En revenant donc à l'équation résultant de l'application du théorème du moment d'inertie on obtient :

$$\frac{d^{1'}}{dt}\left(\begin{bmatrix} A_C\theta' \\ B_C\psi'\sin\theta \\ C_C(\psi'\cos\theta + \phi') \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} \theta' \\ \psi'\sin\theta \\ \psi'\cos\theta + \phi' \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} A_C\theta' \\ B_C\psi'\sin\theta \\ C_C\psi'\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mg\frac{h}{2}\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de cette équation on tire trois équations et on applique l'approximation gyroscopique **vitesse de rotation propre très grande devant les autres grandeurs.**

- la troisième équation nous donne :$C_C\phi' = cte$
- la deuxième équation nous donne : $\theta = cte$
- la première équation nous donne : $\psi' = \frac{mgh}{2C_C\phi'}$

(e) Representation des variations de l'angle de précession D'après ce qui precède , on obtient : $\psi' = \frac{mgh}{2C_C\phi'} = \frac{mgh}{2\times cte}$ d'où on tire $\psi = \frac{mgh}{2\times cte}t + cte$. On en deduit donc que le graphe representant les variations temporelles de l'angle de précession est une droite

Exercice 2 Thermodynamique

1)

On donne $T_1 = 290$ K, $T_2 = 320$ K, $t_e = 320$ K et $t_m = 280$ K.

a-Calcul du rendement de la machine

Nous avons à faire à une machine frigorifique. Alors, nous savons que son rendement, ou encore son efficacité, est :

$$\eta = \frac{1}{\frac{t_e}{t_m} - 1} \Rightarrow \text{AN : } \eta = \frac{1}{\frac{320}{280}-1} = 7$$

, d'où on a $\eta = 7$.

b-Calcul du travail W

On sait que, pour une machine frigorifique, $\eta = \frac{Q_f}{W} \Rightarrow W = \frac{Q_f}{\eta}$

AN : $W = \frac{5000}{7} = 714,2857143$

, d'où $W = 714$ J.

c-Calcul de la variation d'entropie

On sait que $\Delta S = \Sigma \frac{\Delta Q_i}{T_i}$. Alors, dans notre cas, on a :

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}$$

Or, $-W = Q_1 + Q_2 \Rightarrow Q_2 = -W - Q_1 \Rightarrow \Delta S = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{-W-Q_1}{T_2}$

AN : $\Delta S = \frac{5000}{290} + \frac{-714-5000}{305} = 1,493046919$

D'où $\Delta S = 1,5$ J.K^{-1}

2)

On donne : $P_1 = 2$ bars, $T_1 = 27\,^0$C$= 300$ K, $T_2 = 57\,^0$C$= 330$ K, $\alpha = \frac{\Delta V}{\Delta T}$.

a-Calcul de P_2

On sait que $\alpha = \frac{\Delta V}{\Delta T} \Rightarrow \Delta V = \alpha\Delta T = V_2 - V_1 \Rightarrow V_2 = \alpha\Delta T + V_1$

Or, $P_2.V_2 = n.R.T_2 \Rightarrow P_2.V_2 = \frac{P_1.V_1}{T_1}.T_2 \Rightarrow P_2.(\alpha\Delta T + V_1) = \frac{P_1.V_1}{T_1}.T_2$ (*)

Alors, $P_2 = \frac{P_1.V_1}{\alpha\Delta T+V_1}.\frac{T_2}{T_1}$

AN : $P_2 = \frac{2V_1}{0{,}005V_1(330-300)+V_1}.\frac{330}{300} = 0{,}956521739$

D'où $P_2 = 0{,}957$ bar

b-Déterminons la température d'explosion T_{ex}

D'après (*), on a :

$$P_2.(\alpha\Delta T + V_1) = \frac{P_1.V_1}{T_1}.T_{ex} = P_2.(\alpha(T_{ex} - T_1) + V_1)$$

Posons $\alpha = A.V_1$. Alors,

$$\frac{P_1.V_1}{T_1}.T_{ex} = P_2.(A.V_1(T_{ex} - T_1) + V_1) \Rightarrow \frac{P_1}{T_1}.T_{ex} = P_2.(A.T_{ex} - A.T_1 + 1)$$

$$\Rightarrow T_{ex}.\left(\frac{P_1}{T_1} - P_2.A\right) = P_2.(1 - A.T_1)$$

$$\Rightarrow T_{ex} = \frac{1 - A.T_1}{\frac{P_1}{P_2.T_1} - A}$$

AN : $T_{ex} = \frac{1-0{,}005.300}{\frac{2}{300.6}-0{,}005} = 128{,}5714286$

D'où $T_{ex} = 128{,}57$ K

3)

On donne :

- $N_1 = 0{,}5$ mol et $N_2 = 1$ mol
- $T_1 = 300$ K et $T_2 = 400$ K
- $C_1 = 3R/2$ et $C_2 = 5R/2$

Déterminons la température finale du mélange

Les enceintes étant isolées et rigides, après l'ouverture du robinet, on obtient une enceinte isolée et rigide. Alors, $\Sigma\Delta Q_i = 0$

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = N_1.C_1.(T_f - T_1) + N_2.C_2.(T_f - T_2) = 0 \Rightarrow T_f = \frac{N_1.C_1.T_1 + N_2.C_2.T_2}{N_1.C_1 + N_2.C_2}$$

AN : $T_f = \frac{1{,}5.300+2.400}{1{,}5+2} = 357{,}142857$

D'où $T_f = 357$ K

4)

On donne :

— $M_1 = 150$ g et $M_2 = 150$ g

— $T_1 = 42,8\,^0$C, $T_2 = 15,5\,^0$C et $T_f = 29,8\,^0$C

— $C_a = 900$ J.kg^{-1}.^{0}C^{-1} et $C_b = 1730$ J.kg^{-1}.^{0}C^{-1}

a-Calcul de C

Le calorimètre assurant la conservation de la chaleur, on aura dons à faire à une transformation adiabatique, c.-à-d. $\Sigma Q_i = 0 \Rightarrow Q + Q_1 + Q_2 = 0$

$$\Rightarrow C.(T_f - T_1) + C_1.M_1.(T_f - T_1) + C_2.M_2.(T_f - T_2) = 0 \Rightarrow C = \frac{C_1.M_1.(T_f - T_1) + C_2.M_2.(T_f - T_2)}{-(T_f - T_1)}$$

$$\text{AN :}\quad C = \frac{4800.150.(29,8-42,8+4800.150.(29,8-15,5)}{-(29,8-42,8).1000}$$

$$C = 72\ \text{J.}^0\text{C}^{-1}$$

b-Calcul de T_f

Ici, on a les mélanges 3 et 4, d'où :

$$C.(T_f - T_3) + C_3.M_3.(T_f - T_3) + C_4.M_4.(T_f - T_4) = 0$$

$$p \Rightarrow T_f.(C + C_3.M_3 + C_4.M_4) - (C.T_3 + C_3.M_3.T_3 + C_4.M_4.T_4) = 0 \Rightarrow T_f = \frac{C.T_3 + C_3.M_3.T_3 + C_4.M_4.T_4}{C + C_3.M_3 + C_4.M_4}$$

$$\text{AN :}\quad T_f = \frac{72.0,2 + 900.0,2.20,3 + 1730.0,25.0}{72 + 900.0,2 + 1730.0,25} = 5,359240321$$

Alors, $\quad T_f = 5,36\,^0$C

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2012

CORRECTION DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 Machine à glaçons

On donne :

- Eau liquide à $t_0 = 0\,^0$C (source froide)
- Air à $t_1 = 20\,^0$C (source froide)
- Puissance de la machine $P = 1000$ W
- Chaleur latente de fusion de la glace $I_{fus} = 334$ J.g^{-1}
- Capacité thermique de l'eau liquide $C_e = 4,18$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}

1) Expression de Q_f

On sait que $P = \frac{Q_f}{\Delta t} \Rightarrow Q_f = P.\Delta t$, d'où on a :

$$Q_f = P.\Delta t$$

Calcul de Q_f

On sait que $P = 1000$ W et $\Delta t = 5$ min$=$ 5x60 s$=$ 300 s. Alors,

$Q_f = 1000\text{x}300 = 300000$ J, soit encore

$$Q_f = 300 \text{ kJ}$$

2) Déduction de m_e

Le bilan énergétique nous donne :

$Q_f = m_e.I_{fus} + m.C_e.(t_1 - t_0)$. Or, en prenant $m = 1$ g, on a :

$$m_e = \frac{Q_f - C_e.(t_1 - t_0)}{I_{fus}}$$

Ainsi, on a :

$$m_e = \frac{300000 - 4,18.(20-0)}{334} = 897,9532934$$

, d'où

$$m_e = 898 \text{ g}$$

Exercice 2 Rendement d'un cycle

On donne :

- n môles de GP
- un coefficient $\gamma = 1,4$

1) Expression de $T_B = f(T_0)$

La phase A vers B est une compression isobare. Alors :
$P_A.V_A = n.R.T_A$ et $P_B.V_B = n.R.T_B$ donnent respectivement l'équation des GP aux points A et B.
Or, $P_A = P_B$. Ainsi, on a : $\frac{T_A}{V_A} = \frac{T_B}{V_B} \Rightarrow T_B = T_A.\frac{V_B}{V_A}$. Or, $T_A = T_0$, $V_A = V_0$ et $V_B = V_0/2$.

D'où $T_B = T_0/2$

Expression de $T_C = f(T_0)$

La phase B vers C est une transformation isochore. Alors :
$P_C.V_C = n.R.T_C$ et $P_B.V_B = n.R.T_B$ donnent respectivement l'équation des GP aux points C et B.
Or, $V_C = V_B$. Ainsi, on a : $\frac{T_C}{P_C} = \frac{T_B}{P_B} \Rightarrow T_C = T_B.\frac{P_C}{P_B}$. Or, $T_B = T_0/2$, $P_B = P_0$ et $P_C = ?$.
La phase C vers A est une détente adiabatique. Alors :
$P_C.V_C^{\gamma} = P_0.V_0^{\gamma} \Rightarrow \frac{P_C}{P_0} = \frac{V_0}{V_0/2} \Rightarrow P_C = P_0/2$
Ainsi, on a : $T_C = T_0/2x2$
D'où $T_C = T_0$

2) Nature de la machine thermique

En nous appesantissant sur le sens d'évolution du cycle, nous constatons qu'il est celui des aiguilles d'une montre. C'est ainsi que, sachant que le sens d'évolution du cycle d'un moteur thermique est celui des aiguilles d'une montre, nous pouvons affirmer sans crainte que cette machine thermique est un moteur.

Expression du rendement en fonction de T_A, T_B et T_C

Nous savons par définition que le rendement est le rapport des recettes sur les dépenses.
Ainsi, on a : $\eta = \frac{|W_{cycle}|}{Q_{BC}}$. Or, $-W_{cycle} = Q_{AB} + Q_{BC}$ (d'après le premier principe de la thermodynamique).
Ainsi, on a : $\eta = \frac{|Q_{AB}+Q_{BC}|}{Q_{BC}}$. Or, $Q_{BC} > 0$, $Q_{AB} < 0$ et $|Q_{BC}| > |Q_{AB}| \Rightarrow$
$|Q_{AB} + Q_{BC}| = Q_{BC} - |Q_{AB}|$,
d'où on a : $\eta = 1 - \frac{|Q_{AB}|}{Q_{BC}}$.
De plus, nous savons par définition que : $Q_{AB} = C_P.(T_B - T_A)$

$$\Rightarrow |Q_{AB}| = C_P(T_A - T_B) \text{ et } Q_{BC} = C_V(T_C - T_B)$$

Alors, $\eta = 1 - \frac{C_P(T_A-T_B)}{C_V(T_C-T_B)}$. Or, $C_P/C_V = 1,4$.
D'où on a : $\eta = 1 - 1,4\frac{T_A-T_B}{T_C-T_B}$.

Expression du rendement en fonction de γ

La dernière expression nous donne : $\eta = 1 - \gamma\frac{T_A-T_B}{T_C-T_B} \Rightarrow \eta = 1 - \gamma\frac{T_A/T_B-1}{T_C/T_B-1}$.
Entre A et B, la transformation étant ISOBARE, on a :
$V_A/T_A = V_B/T_B \Rightarrow T_A/T_B = V_A/V_B = V_0/V_0/2 = 2 \Rightarrow T_A/T_B = 2$.
Entre B et C, la transformation étant ISOCHORE, on a : $P_C/T_C = P_B/T_B \Rightarrow T_C/T_B = P_C/P_B$
Or, entre C et A, la transformation étant adiabatique, on a :
$P_C V_C^{\gamma} = P_A V_A^{\gamma} \Rightarrow P_C/P_B = (V_A/V_C)^{\gamma} = 2^{\gamma}$, d'où $T_C/T_B = 2^{\gamma}$.
Alors, on a : $\eta = 1 - \gamma\frac{2-1}{2^{\gamma}-1} = 1 - \frac{\gamma}{2^{\gamma}-1}$,
d'où $\eta = 1 - \frac{\gamma}{2^{\gamma}-1}$

3) Calcul du rendement de la machine de Carnot η_{max}

Par définition, n sait que le rendement η_{max} de la machine de Carnot est celui pour lequel :

$$\eta_{max} = 1 - T_B/T_C \Rightarrow \eta_{max} = 1 - 2^{-\gamma}$$

AN : $\eta_{max} = 1 - 2^{-1,4} = 0,621070858$

d'où on a $\eta_{max} = 62\%$

Exercice 3 induction électromagnétique : voir exercice 3 2010

Exercice 4 Mouvements d'un solide autour d'un point

1) Paramétrage du mouvement

Considérons les angles d'Euler pour le passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$: l'angle de précession ψ, l'angle de nutation θ et l'angle de rotation propre ϕ.
On sait exprimer la matrice de passage de R_1 à R.
Ainsi, on peut exprimer les coordonnées (x, y, z) d'un point M dans R en fonction de ses coordonnées (x_1, y_1, z_1) dans R_1.
Une fois cette expression faite, le paramétrage consiste en remarquer qu'un point M appartient à la sphère de centre C et de rayon $a \Longleftrightarrow$

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} / \begin{cases} x_1 &= a \sin\alpha \cos\beta \\ y_1 &= a \sin\alpha \sin\beta \\ z_1 &= a\cos\alpha \end{cases}$$

En effet, il s'agit de la définition paramétrée d'une sphère.
En remplaçant x_1, y_1 et z_1 par leurs formes paramétrées dans les expressions de x, y et z, on obtient l'équation paramétrée du mouvement de la sphère, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ pour paramètres...

2) Vitesse du point A

A est le point coïncidant entre la sphère et le plan de base. On a donc :
$\vec{V}_A^0 = \frac{d^0\overrightarrow{OA}}{dt} = \frac{d^0\overrightarrow{OC}}{dt} + \frac{d^0\overrightarrow{CA}}{dt} = \frac{d^0\overrightarrow{OC}}{dt} = \vec{V}_C^0$.
En effet, le vecteur $\overrightarrow{CA}$ est constant par rapport à R.

3) Vitesse de B

$\vec{V}_B^0 = \vec{V}_C^0 + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{CB}$.

Exercice 5 Formalismes de base de la mécanique

1) Action d'un potentiel

Potentiel (énergétique) $U(x) = -Ax^4$.

a) Équation du mouvement La force effectivement subie par la particule sous l'action de U est $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U$,
soit $\vec{F} = 4Ax^3\vec{e}_x$.
Alors, le PFD permet d'écrire :

$$\begin{array}{rrcl} & \vec{F} & = & m\vec{a} \\ \Longrightarrow & 4Ax^3 & = & m\ddot{x} \\ \Longleftrightarrow & \ddot{x} - \frac{4A}{m}x^3 & = & 0 \end{array}$$

Loi horaire On a

$$\begin{array}{rrcl} & \ddot{x} - \frac{4A}{m}x^3 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & m\ddot{x}\dot{x} - 4A\dot{x}x^3 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - Ax^4 & = & \alpha\text{, après intégration, avec } \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

Or, l'énergie de la particule est nulle, soit $E_t = E_c + E_p = 0$. Comme $E_p = U(x)$, on a encore

$$\begin{array}{rrcl} & \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - Ax^4 & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & \alpha & = & 0 \\ \Longleftrightarrow & \dot{x} & = & \pm\sqrt{\frac{2A}{m}}.x^2 \\ \Longleftrightarrow & \frac{dx}{x^2} & = & \pm\sqrt{\frac{2A}{m}}.dt \\ \Longleftrightarrow & -\frac{1}{x} & = & \pm\sqrt{\frac{2A}{m}}t + \beta \\ \Longrightarrow & x(t) & = & \frac{1}{\beta\pm\sqrt{\frac{2A}{m}}} \end{array}$$

En posant $x(0) = x_0$, il vient bien que $x(t) = \frac{x_0}{1\pm t x_0\sqrt{\frac{2A}{3}}}$.

2) Pulsation des petites oscillations dans un champ

Comme précédemment, on aboutit à

$$\begin{array}{rrcl} & -\overrightarrow{grad}U & = & m\vec{a} \\ \Longrightarrow & -\alpha V\sin(\alpha x) - F & = & m\ddot{x} \\ \Longleftrightarrow & \ddot{x} + \frac{\alpha V}{m}\sin(\alpha x) & = & -\frac{F}{m} \end{array}$$

Pour de petites oscillations, on a $\sin(\alpha x) \simeq \alpha x$, et l'équation devient donc $\ddot{x} + \frac{\alpha^2 V}{m}x = -\frac{F}{m}$.
On déduit la pulsation : $\omega^2 = \frac{\alpha^2 V}{m} \Longrightarrow \omega = |\alpha|\sqrt{\frac{V}{m}}$

3) Énergie acquise par un oscillateur

Un oscillateur ne "conserve" pas d'énergie (de façon naturelle). Quand il absorbe de l'énergie dans un sens, il la rejette au cours de son mouvement dans l'autre sens, si bien que son énergie retrouve sa valeur initiale à la fin des oscillations.
Ainsi, l'énergie reçue de la force F est totalement dissipée pendant le mouvement, soit $E = 0$ J.

4) Fonction de Hamilton

On sait que $H = p_x.\dot{x} - L$, où L désigne la fonction de Lagrange, et $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$.
On a donc $p_x = \dot{x} - 2\beta x\dot{x}$, et on déduit la fonction
$H = p_x.\dot{x} - L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \beta x\dot{x}^2 + \frac{w^2x^2}{2} + \alpha x^3$.

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2013

CORRECTION DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 : Disque uniformément chargé

1. calcul du potentiel électrique pour z > 0
   Dans le repère cylindrique $(0, \overrightarrow{a_r}, \overrightarrow{a_\theta}, \overrightarrow{a_z})$ Considérons un point P du disque qui créée le potentiel en M . on a $P(r,0,z)$ et M(0,0 , z) . Le potentiel élementaire créé en M est donné par l'expression $dv = \iint \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 PM} = \iint \frac{\sigma ds}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2+z^2}}$. En coordonnées cylindriques on a $ds = rdrd\theta$. De plus la densité surfacique étant uniforme , on a $\sigma = Q/S = Q/\pi a^2$. On obtient donc $V(z) = \frac{Q}{4\pi^2\epsilon_0 a^2}\int_0^a \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\left(\sqrt{1+\frac{z^2}{a^2}} - \sqrt{\frac{z^2}{a^2}}\right)$
   Dans le cas où z > 0 on trouve donc la reponse C ($|z| = z$)
2. Dans le cas où z < 0 on a $|z| = -z$ et on trouve la reponse A
3. Calcul du champ électrique dans le cas où z < 0 On utilise la relation $\overrightarrow{E_1} = -\overrightarrow{grad}V_1 = -\frac{dV_1}{dz}\overrightarrow{e_z}$; on trouve donc la reponse B
4. Calcul du champ électrique dans le cas où z > 0 On utilise la relation $\overrightarrow{E_2} = -\overrightarrow{grad}V_2 = -\frac{dV_2}{dz}\overrightarrow{e_z}$; on trouve donc la reponse D
5. Calcul du saut du champ électrique
   Pour $\epsilon > 0$ on a $\lim_{\epsilon\to 0}\overrightarrow{E_1}(\epsilon) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\overrightarrow{e_z}$ et $\lim_{-\epsilon\to 0}\overrightarrow{E_2}(-\epsilon) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\overrightarrow{e_z}$ On trouve donc $\delta\overrightarrow{E} = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 a^2}\overrightarrow{e_z}$ d'où la reponse D
6. On sait qu'en tout point où est placée une charge condensée (surfacique , linéique ou ponctuelle) , le champ électrique n'est pas défini . En présence d'une charge surfacique , il ya discontinuité du champ . en tout autre point (vide de charge , ou présence d'une charge volumique) , le champ électrique est défini et continu . Lors du passage du point M_1 au point M_2 quant $\epsilon \to 0$, il n'ya plus traversée de la surface chargée en 0 , l'espace considéré étant vide de charge , donc le champ électrique est continu et par conséquent $\delta\overrightarrow{E_0} = \overrightarrow{0}$

Exercice 2 : Electrocinétique : régime sinusoîdal

1. Calculons l'impédance complexe équivalente z_{eq} du dipole AB
   — En parallèle les admittances complexes s'additionnent
   $Y_BC = Y_R + Y_C = 1/R + jCw = = \frac{1+jRCW}{R}$ *donc* $z_{BC} = \frac{R}{1+jRCw}$
   — En série , les impédances complexes s'ajoutent $z_{eq} = jLw + \frac{R}{1+jRCw}$

   Si on veut que l'impédance soit équivalente à une résistance pure , il faut que sa partie imaginaire soit nulle . En séparant en partie réelle et partie imaginaire , on trouve $z_{eq} = \frac{R}{1+R^2C^2w^2} + j\left(\frac{Lw+R^2Cw(LCw^2-1)}{1+R^2C^2w^2}\right)$ on trouve donc $L = \frac{R^2C}{1+R^2C^2w^2}$ d'ou la reponse C
2. on fait une simple application numérique on trouve L = 120 mH d'ou la reponse A
3. D'après la question précédente le circuit est équivalent à une résistance pure (partie imaginaire nulle) de valeur $R_{eq} = \frac{R}{1+R^2C^2w^2}$. L'intensité du courant délivré par le générateur est donné par $i(t) = \frac{e(t)}{z_{eq}}$. En passant aux modules on trouve $I = \frac{E_0}{R_{eq}}$ on trouve I = 5 A

4. On applique le diviseur de tension pour déterminer les differentes tensions on a
   — $u_{AD} = \frac{z_{AD}}{z_{eq}} e(t) = jLw \frac{1+R^2C^2w^2}{R} e(t)$. En passant aux modules on trouve $U_{AD} = RCwE_0 = 240V$
   — $u_{DB} = \frac{z_{DB}}{z_{eq}} e(t) = \frac{R}{1+jRCw} \frac{1+R^2C^2w^2}{R} e(t)$. En passant aux modules , on trouve $U_{DB} = \sqrt{1+R^2C^2w^2} E_0 = 300V$

   d'où reponse C
5. — on a $I_1 = \frac{U_{DB}}{R} = 3A$
   — on a $I_2 = \frac{U_{DB}}{|Z_c|} = CwU_{DB} = 4A$

   d'où reponse B
6. On applique le théorème de Boucherot qui dit que la puissance consommée dans une portion de circuit est la somme des puissances consommées dans chaque élement du circuit . Dans notre circuit seule la résistance R consomme la puisssance active .on a donc $P = RI_1^2 = 900\Omega$

$\boxed{\text{Exercice 3}}$: Optique

Ce problème est un problème classique en optique . Ici on utilise les formules connues sous le nom de formules de Bessel et Silbermann dont la demonstration est donnée ci dessous :

D'après la formule de conjugaison , on a $1/\hat{OF'} = 1/\hat{OA'} - 1/\hat{OA}$. or on a $D = \hat{AA'} = \hat{OA'} - \hat{OA}$ d'où $\hat{OA'} = D + \hat{OA}$. En remplaçant cette expression dans la formule de conjugaison , on arrive à l'équation de second dégré : $\hat{OA}^2 + D\hat{OA} + Df' = 0$. La résolution de cette équation nous donne les deux positions possibles de la lentille $\hat{O_1A} == \frac{-D-\sqrt{D^2-4Df'}}{2}$ et $\hat{O_2A} == \frac{-D+\sqrt{D^2-4Df'}}{2}$. La distance séparant ces deux positions est $d = \hat{O_1O_2} = \sqrt{D^2-4Df'}$. on en deduit la formule de Silbermann $f' = \frac{D^2-d^2}{4D}$

1. par simple utilisation de la formule de Silbermann on trouve d = 447 mm d'ou reponse A
2. On utilise les expressions données plus haut pour determiner $\hat{O_1A} et \hat{O_2A}$ puis on utilise la formule $\hat{OA'} = D + \hat{OA}$ pour déterminer les positions image correspondantes . Ensuite on sait que le grandissement est donné par l'expression $G = \frac{\hat{OA'}}{\hat{OA}}$. On trouve la reponse A
3. On reutilise la formule se Silbermmann pour trouver f' = 160 mm d'où reponse D
4. On reutilise la formule de Silbermann (Elle est connue maintenant sous le nom de formule de Bessel) . on trouve dans ce cas $f' = D/4 = 300mm$ d'ou reponse B
5. Dans ces conditions le grandissement transversal est égal à -1 d'où reponse C

$\boxed{\text{Exercice 4}}$: Thermodynamique

1. La variation de l'énergie interne d'un gaz parfait est donnée par $\Delta U = nc_v\Delta T$. En utilisant la relation de Meyer $c_p - c_v = R$ on trouve aisément $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$ et $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$. On utilise ensuite la relation des gaz parfaits pour exprimer la température on arrive à $\Delta U = \frac{p_fV_f - p_iV_i}{\gamma-1}$ d'où la reponse D
2. Bien noter que le volume balayé est positif . C'est donc l'opposé de la variation de volume des deux compartiments . on a $\Delta V = V_A + V_B - V_{f1}$ d'où la reponse A
3. Le premier principe de la thermodynamique appliqué au gaz entre les états initial et final s'écrit : $\Delta U = W + Q$. La transformation étant adiabatique on a Q = 0 donc $\Delta U = W$. La transformation s'effectue à pression exterieure constante , égale à p_a . Le travail des forces de pression extérieure reçu par le gaz vaut donc

$W = \int -p_{ext}dv = -p_a \int dv = -p_a(-\Delta V) = p_a\Delta V$. Compte tenu des résultats des questions A et 2 , on peut écrive $\frac{p_fV_f - p_iV_i}{\gamma-1} = p_a(V_A + V_B - V_{f1}$

— A l'état initial , d'après l'énoncé : $p_i = p_a$ et $V_i = V_A$

— A l'état final , il ya équilibre mécanique du piston , donc les pressions s'équilibrent de part et d'autre : $p_f = p_a$.

Finalement on obtient $V_{f1} = V_A + \frac{\gamma-1}{\gamma}V_B$ d'où la reponse A

4. Par simple application de la loi des gaz parfaits à l'état final , on trouve $T_{f1} = \frac{p_a}{nR}(V_A + \frac{\gamma-1}{\gamma}V_B)$ d'où la reponse B
5. Le gaz étant parfait sa variation d'entropie est donnée par $\Delta S = nc_pln(T_{f1}/T_i) - nRln(p_{f1}/p_i)$ On a $T_{f1} = \frac{p_aV_A}{nR}(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma V_A}V_B) = T_i(1 + \frac{\gamma-1}{\gamma V_A}V_B)$ donc $\frac{T_{f1}}{T_i} = (1 + \frac{\gamma-1}{\gamma V_A}V_B)$. On trouve donc $\Delta S = \frac{n\gamma R}{\gamma-1}ln\left(1 + \frac{(\gamma-1)V_B}{\gamma V_A}\right)$ d'où la reponse B
6. Dans cette question , à l'état final , le piston arrive en butée sur la paroi donc le volume final est $V_{f1} = V_B$. D'après la première question de cet exercice on a $\frac{p_fV_B - p_aV_A}{\gamma-1} = p_a(V_A + V_B - V_B) = p_aV_A$. On trouve donc $p_f = \gamma p_a\frac{V_A}{V_B}$ d'où la reponse D
7. On applique la loi des gaz parfaits appliquée au gaz à l'état final $T_f = \frac{p_fV_B}{nR} = \frac{\gamma p_aV_A}{V_B}$

Exercice 5 : Mecanique

1. Dans le référentiel du centre de masse la masse fictive μ est soumise à la force $\vec{F} = -Gm_1m_2\frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3}$. Le PFD appliqué à cette masse fictive donne $\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$. on a $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2}$ En appliquant le PFD à la masse m_1 on a $\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = -Gm_2\frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3}$ et à la masse m_2 on trouve $\frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = Gm_1\frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3}$ (en effet la seule force appliquée à une masse est la force gravitationnelle due à l'autre masse) . On trouve donc $\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -Gm_2\frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3} - Gm_1\frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3} = -G(m_1 + m_2)\frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3}$. Or on a $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -Gm_1m_2/\mu\frac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3}$. Par identification on trouve $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ d'où reponse B
2. D'après le théoreme de l'énergie mécanique la dérivée de l'energie mécanique par rapport au temps est égale à la somme des travaux des forces non conservatives . Dans notre cas la seule force est la force gravitationnelle qui est conservative donc l'énergie mécanique se conserve . De même d'après le théorême du moment cinétique la $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \Sigma\vec{M_c}(\vec{F}) = \vec{CA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ donc le moment cinétique se conserve . Les bonnes réponses sont A et D
3. l'energie mécanique est $E_m = E_c + E_p$.

— On a $E_c = 1/2\mu v^2$. En coordonnées cylindriques planes , on a $\vec{v}(\frac{dr}{dt}, r\frac{d\varphi}{dt})$. On a donc $E_c = 1/2\mu\left[(\frac{dr}{dt})^2 + r^2(\frac{d\varphi}{dt})^2\right]$

— on a $\vec{F} = -\vec{grad}E_p$ donc $E_p = -Gm_1m_2\frac{1}{r}$

on a donc $E_m = 1/2\mu\left[(\frac{dr}{dt})^2 + r^2(\frac{d\varphi}{dt})^2\right] - Gm_1m_2\frac{1}{r}$ d'ou la reponse C

4. L'expression de l'énergie cinétique a été établie à la question précédente . on a $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$ d'o $E_c = 1/2\mu\left[(\frac{dr}{d\varphi})^2(\frac{d\varphi}{dt})^2 + r^2(\frac{d\varphi}{dt})^2\right]$ $\frac{\mu r^2}{2}\left[1 + \frac{1}{r^2}(\frac{dr}{d\varphi})^2\right]$. Par ailleurs , le moment cinétique de A en C s'écrit $\vec{\sigma} = \vec{CA} \wedge \mu\vec{v} = r\vec{e_r} \wedge \mu\left(\frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_\varphi}\right) = \mu r^2\frac{d\varphi}{dt}\vec{e_z}$ d'où $I_z = \mu r^2\frac{d\varphi}{dt}$. En reportant dans l'expression précédente on trouve la reponse C

5. En utilisant le changement de variable $u = 1/r$ on peut écrire $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\varphi} = -1/u^2\frac{du}{d\varphi}$ soit , en remplaçant dans l'équation précédente on obtient $E_m = \frac{l_z^2 u^2}{2\mu}\left[1 + 1/u^2(\frac{du}{d\varphi})^2\right]$. L'energie mécanique étant constante on écrit $\frac{dE_m}{dt} = 0$ soit l'équation $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{Gm_1m_2}{l_z^2} = 1/p$ d'où la reponse B

6. La vitesse de libération est la vitesse qui confère à la sonde une énergie mécanique nulle , lui permettant d'atteindre l'infini avec une vitesse nulle d'où $E_m = 1/2\mu v_l^2 - \frac{Gm_1m_2}{R_T+h} = 0$ d'où $v_l = \sqrt{\frac{2Gm_1m_2}{\mu(R_T+h)}} = \sqrt{\frac{2Gm_1m_2}{m_1(R_T+h)}} = \sqrt{\frac{2Gm_2}{\mu(R_T+h)}} = 10.8km/s$

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2014

CORRECTION DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 electronique numerique

Q1 : table de vérité tenant compte des variables A, B, C, D, Y

A	B	C	D	E
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	O	X
1	1	1	1	X

Q2 : table de Karnaugh pour Y

0	0	X	0
0	1	X	1
0	1	X	1
0	1	X	1

Q3

L'expression simplifiée est donnée en remplaçant les X par les 1. on obtient la reponse C

Exercice 2 Champ électrique

partie :1

Le champ crée au point M(a,y)

le champ crée au point M par l'élement de longueur dl est donné par la relation :

$$d\vec{E} = -k\lambda \frac{dl}{r^2}\vec{u} \Rightarrow \vec{E} = -k\lambda \int_0^{2a} \frac{dl}{r^2}\vec{u}$$

aucune réponse n'étant juste, la reponse est **E**.

élement de longueur dl :

on a :

$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{l-a}{y} \\
\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\tan\theta &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{l-a}{y}\right) \\
\Rightarrow \frac{dl}{yd\theta} &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\
\Rightarrow dl &= \frac{yd\theta}{\cos^2\theta}
\end{aligned}
$$

donc la réponse est **D**.

Champ électrique crée par la barre

Le champ électrique est la somme de deux champs produits par les deux barres [0 ;a] et [a ;2a].

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E_1} + \vec{E_2} \\
\vec{E_1} &= -k\lambda \int \frac{dl}{r^2}\vec{u_1} \\
\vec{E_2} &= -k\lambda \int \frac{dl}{r^2}\vec{u_2}
\end{aligned}
$$

or nous avons :

$$
\begin{aligned}
\vec{u_1} + \vec{u_2} &= \cos\theta\vec{j} + \sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} - \sin\theta\vec{i} \\
&= 2\cos\theta\vec{j}
\end{aligned}
$$

ce qui nous donne :

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= -k\lambda \int \frac{yd\theta}{r^2\cos^2\theta}\vec{u} \\
&= -k\lambda \int \frac{yd\theta}{y^2}(2\cos\theta)\vec{j} \\
\Rightarrow \vec{E} &= -\frac{2k\lambda}{y}\int \cos\theta d`\vec{j}
\end{aligned}
$$

or il est évident de démontrer que :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d` = -\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}$$

ce qui nous ramène donc au résultat suivant :

$$\vec{E} = \frac{2ka\lambda}{y}\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}}\vec{j}$$

donc réponse **B**

potentiel en M(a,y)

$$\vec{E} = -\vec{grad}(V)$$

la symétrie du problème nous fait remarquer que $\vec{E}$ est dirigé uniquement suivant $\vec{j}$. ainsi on

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= E\vec{j} \\
\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \\
\Rightarrow \vec{grad}(V) &= \frac{dV}{dx}\vec{j} = -E\vec{j} \\
\Rightarrow dV &= -\vec{E}dy\vec{j}
\end{aligned}$$

donc la réponse appropriée est **A**.

Potentiel en supposant que $V(\infty) = 0$

dans ces conditions nous avons :

$$\begin{aligned}
dV = -\vec{E}dy\vec{j} &= -\frac{2ka\lambda}{y\sqrt{a^2+y^2}}dy \\
V(M) &= -\frac{2ka\lambda}{y\sqrt{a^2+y^2}}dy \\
&= -2ka\lambda \int_M^{\infty} \frac{dy}{y\sqrt{a^2+y^2}} \\
&= k\lambda ln\left(\frac{\sqrt{a^2+y^2}+a}{\sqrt{a^2+y^2}-a}\right)
\end{aligned}$$

en fait tout à été donné dans l'énoncé pour le calcul intégrale. Ainsi donc reponse **B**.

Partie :2

le champ électrique en N(x,0)

en procédant comme dans le cas précédent on trouve :

$$\vec{E} = k\lambda \int \frac{dl}{(x-l)^2}\vec{i}$$

Après intégration

On trouve :

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -k\lambda\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-2a}\right]\vec{i} \\
&= \frac{2ka\lambda}{x(x-2a)}\vec{i}
\end{aligned}$$

donc la réponse exacte est **C**.

Potentiel en N(x,0)

$$
\begin{aligned}
dV &= \int \vec{E} dx\vec{i} \\
\Rightarrow V(x) &= 2ka\lambda \int \frac{dx}{x(x-2a)} \\
&= k\lambda ln\left(\frac{x}{x-2a)}\right)
\end{aligned}
$$

On en déduit que le réponse est **D**.

Partie :3

Potentiel en M(x,y)

$$
\vec{E} = -k\lambda \int_0^{2a} \frac{dl}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}}\vec{u}
$$

$$
\begin{aligned}
dV &= \frac{k\lambda dl}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}} \\
\Rightarrow V &= k\lambda \int_0^{2a} \frac{dl}{\sqrt{(x-l)^2+y^2}} + cte
\end{aligned}
$$

donc réponse **A**.

Après intégration

On obtient :

$$
V = k\lambda ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-2a)^2+y^2}+x-2a}\right)
$$

donc réponse **D**.

Partie :4

champ E en M(a,b)

$$
\begin{aligned}
d\vec{E'} &= k\lambda \int \frac{dl}{\sqrt{(b-l)^2+a^2}} \cos\theta \vec{i} \\
\Rightarrow \vec{E'} &= \frac{2k\lambda}{a} \int \cos\theta d\grave{}\vec{i} \\
&= -\frac{2kb\lambda}{a\sqrt{a^2+b^2}}\vec{i}
\end{aligned}
$$

réponse **A**.

Résultant E"

$$
\begin{aligned}
\vec{E''} &= \vec{E'} + \vec{E} \\
&= \frac{2ka\lambda}{b}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{j} - \frac{2kb\lambda}{a\sqrt{a^2+b^2}}\vec{i} \\
&= \frac{2k\lambda}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\frac{a}{b}\vec{j} - \frac{b}{a}\vec{i}\right]
\end{aligned}
$$

donc réponse **A**.

Partie :5

Champ E crée par le deuxième conducteur de densité linéaire $+\lambda$ en M(a,b)

par analogie au cas précédent on observe que :

$$\vec{E'} = \frac{2kb\lambda}{a\sqrt{a^2+b^2}}\vec{i}$$

donc réponse **C**.

Champ électrique E" en M(a,b)

également par analogie on peut observer qu'on aura :

$$\vec{E''} = \frac{2k\lambda}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{a}{b}\vec{i} + \frac{b}{a}\vec{j}\right)$$

donc réponse **A**.

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2015

CORRECTION DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

CORRECTION DU CONCOURS POLYTECHNIQUE 2015

1	a	2	c	3	e	4	b	5	a	6	b
7	e	8	d	9	a	10	b	11	c	12	c
13	b,c	14	d	15	b	16	a	17	c	18	a,b
19	d	20	d	21	d	22	c	23	a	24	b
25	a	26	a	27	d	28	b	29	a	30	b
31	a	32	d	33	c	34	a	35	b	36	a
37	c	38	b	39	d	40	a	41	c	42	b
43	a	44	a	45	a	46	a	47	d	48	c
49	b	50	b	51	a	52	a	53	a	54	e
55	d	56	e	57	e	58	a	59	a	60	a

JUSTIFICATION DES REPONSES

question 1 : on a $E = h\nu$
question 6 : $\vec{E}$ se met sur la forme $g(z - vt)$
question 9 : $\lambda = \frac{2\pi}{k}$
question 11 : $V_\phi = \frac{\omega}{k}$
question 14 :$\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{E}) = \vec{grad}(div\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} = \vec{rot}(\frac{\partial}{\partial t}\vec{B})$
question 34 : $U_{DC} = U_{DE} + U_{EC}$
question 36 : rendement$=\frac{P_{utile}}{P_{absorbe}}$
question 40 :il suffit just d 'appliquer la loi des mailles
question 41 :$\frac{U_s}{U_E} = \frac{(R_2+R_3)(R_5+R_4)}{R_5(R_2+R_3)-R_1R_4}$
question 42 : on a $i_2 = \frac{U_s}{2R_5}, i_2 = \frac{U_E - U_s}{2R_1}, i_3 = i_1 - i_2$
question 53 : $P_A V_A^\gamma = P_c V_c^\gamma$, ce qui donne $V_A = 2.7 litre$

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I

École Nationale Supérieure Polytechnique

Concours d'entrée en niveau 3-Session 2016

CORRECTION DE PHYSIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

1.B	2 .E	3.C	4.C
5.A	6.B	7.C	8.B
9.C	10.B	11.C	12.D
13.B	14.A	15.aucune rep.	16.C
17.C	18.A	19.A	20.C
21.C	22.A	23.A	24.C
25.D	26.B	27.B	28.D
29. aucune rep.	30 aucune rep.	31 aucune rep.	32 aucune rep.
33.D	34.A	35.C	36.B
37.A	38.A	39.A	40 aucune rep.
41.A	42.B	43.B	44.D
45.C	46.C	47.D	

Épreuves d'Informatique.

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2009

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

« *Le hasard et la coïncidence sont les moyens qu'a choisi Dieu pour rester anonyme* » :ALBERT EINSTEIN

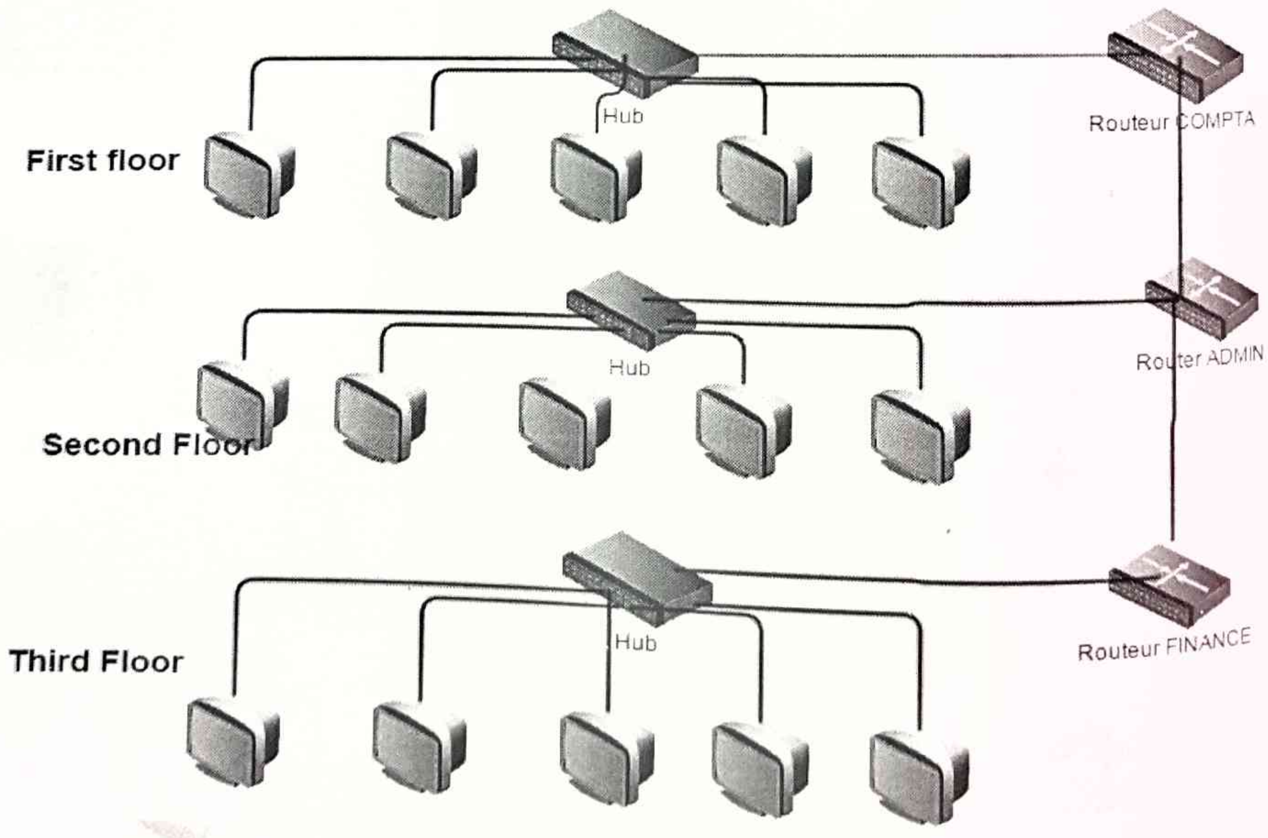
Exercice 1 : Réseau Informatique (adressage IP)(3 points)

Réseau Informatique (adressage IP) (3 points)
les adresses de sous réseau de broadcast et la plage hote valide pour :

1. 192.198.100.66 avec 2 bits de sous-réseau
2. 172.16.10.33 / 255.255.248.240
3. 10.10.10.5 /255.255.224.0

Exercice 2 :Réseau Informatique (architecture et configuration)(4 points)

on vous propose l'architecture suivante :



COMPTA : routeur RGI Adresse IP : 131.107.100.27 Masque Sous Réseau : 255.255.0.0 Passerelle par défaut 131.107.100.3	ADMIN : Routeur RGE Adresse IP interface RGI-RGE : 131.107.100.1 Adresse IP interface RGE-RGM : 131.107.33.3	FINANCE : Routeur RGM Adresse IP : 131.107.33.7 Masque Sous Réseau 255.255.0.0 Passerelle par défaut 131.107.33.3

On considère l'architecture réseau suivant :

1. Quel est le protocole de routage pensez-vous qu'il soit adéquat d'activer au niveau des routeurs de ce réseau local ?
2. Donnez les limites d'un tel protocole de routage.
   Les utilisateurs du sous-réseau COMPTA se plaignent de ne pouvoir accéder aux ressources du sous réseau FINANCE. De même, ceux du sous-réseau ADMIN n'accèdent pas à internet. Les VLANs, les ALCs et les pare-feux sont très bien configurés.
3. Quelle est la cause possible de ce problème.
4. Proposer une solution à ce problème.

Exercice 3 : Programmation(2 points)

Écrire un programme C nommé fact prenant en entrée un entier et renvoyant en sortie le factoriel du nombre tel que illustré comme suit n !=n.(n-1)....2.1

§ fact 5
120

Exercice 4 :Modélisation UML(4 points)

Dans un établissement scolaire, on désire gérer la réservation des salles de cours ainsi que le matériel pédagogique(ordinateur portable ou/et Vidéo projecteur). Seuls les enseignants sont habilités à effectuer les réservations(sous réservation de la disponibilité de la salle ou du matériel). Le planning des salles peut tant à lui être consulté par tous le monde(enseignants et étudiants). Par contre, le récapitulatif horaire par enseignants (calculé à partir du planning des salles) ne peut être consulté que par les enseignants. Enfin, il existe pour chaque formation un enseignant responsable qui seul peut éditer le récapitulatif horaire pour l'ensemble de la formation.
Question : modéliser cette situation par un diagramme de cas d'utilisation.

Exercice 5 : Modélisation UML(4.5 ponts)

Dessiner les diagrammes (d'objets, de classe) correspondant aux situations suivantes :

1. Le Cameroun est frontalier du Nigeria. La République Centrale Africaine est frontalière du Tchad.
2. Un polygone est constitué de points. Un point possède une abscisse et une ordonné.
3. Une médiathèque possède des médias empruntables par les abonnées de la médiathèques

Exercice 6 (Modélisation UML : question à choix multiple)

Question 1. UML est :

a) la partie «données» de la méthode MERISE.

b) un standard dans les méthodes d'analyse.

c) un ensemble de signes permettant aux entités d'un projet informatique de communiquer.

d) aucune des réponses a), b),c)

Question 2. A chaque vue d'UML correspond au plus un diagramme (Vrai ou Faux)

a) Vrai

b) Faux

Question 3. Les diagrammes structurels d'UML sont :

a) Cas d'utilisation, Classe, Composant et Collaboration.

b) Classe, Déploiement, Cas d'utilisation et activité.

c) Cas d'utilisation, Classe, Composant et Déploiement.

d) Activité, Cas D'utilisation, Classe).

Question 4. En UML, le modèle de déploiement montre les unités de travail :

a) Vrai

b) Faux

Question 5. Dans une classe, deux opérations peuvent avoir le même nom :

a) Vrai

b) Faux

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2010

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

« *Le hasard et la coïncidence sont les moyens qu'a choisi Dieu pour rester anonyme* » : ALBERT EINSTEIN

Exercice 1 : QCM(2/20)

1. Le choix du périphérique de démarrage de votre machine se fait
   A : dans le BIOS.
   B : avec une option de démarrage (Boot loader)
   C : automatiquement
2. Lorsqu'un fichier doit être ouverte, le système d'exploitation cherche le dossier le contenant jusqu'à ce qu'il trouve son nom. il récupère les attributs et les adresses mémoires et les met en ....
   A : mémoire virtuelle
   B : mémoire centrale
   C : mémoire secondaire
   D : bonne position
3. Les mécanismes de synchronisation garantissent ....(compléter par les mots ou groupe de mots justes, plusieurs choix sont possibles)
   A : un ordre d'exécution des processus
   B : un accès ordonné avec compétition sur les ressources
   C : un ordre d'accès aux ressources
   D : un partage asynchrone des ressources
4. La mémoire virtuelle fait appelle à deux techniques ou mécanismes, lesquels
   A : Partitionnement
   B : Segmentation
   C : Pagination
   D : Subdivisions
5. Un cache est une zone mémoire plus lente qui conserve des informations d'un autre plus rapide ?
   A : Vrai
   B : Faux
6. la taille d'une page physique en mémoire est de
   A : 4 Ko
   B : 16 Mo
   C : 4 Mo
   D : 16 Ko

Exercice 2 : Algorithmique(4/20)

1. Que produit l'algorithme suivant

```
Tableau Nb(5) en Entier
Variable i en Entier
Début
        pour i=0 à 5
                Nb(i)=i*i
        i suivant
        pour i=0 à 5
                Écrire Nb(i)
        i suivant
Fin
```

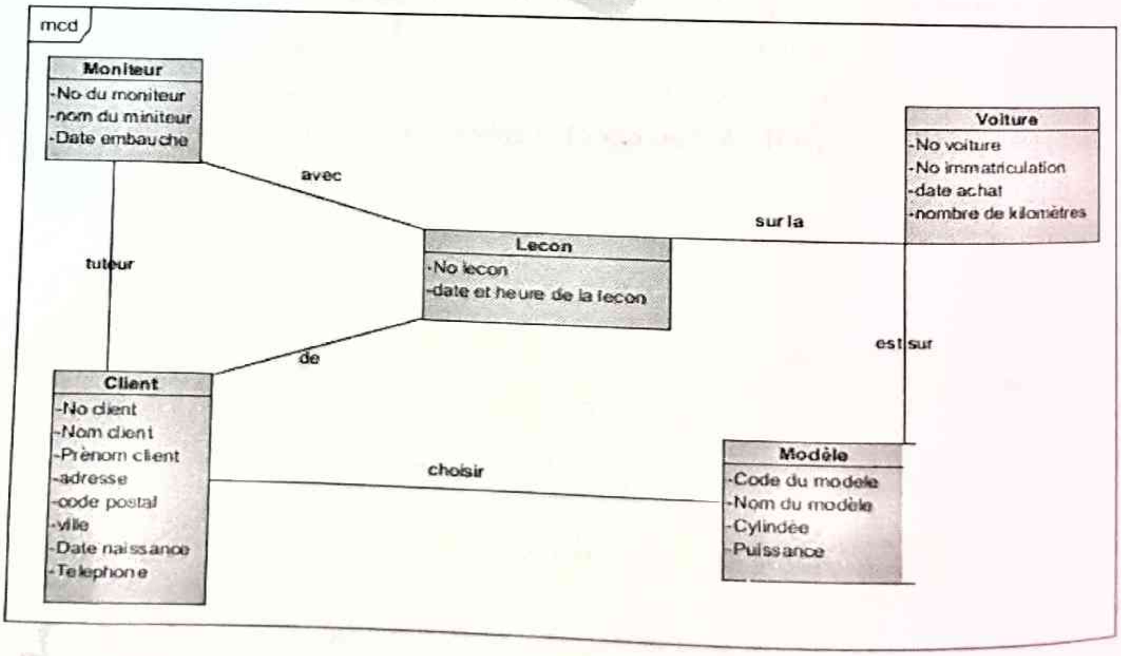
2. Peut-on simplifier cet algorithme avec le même résultat ?

Exercice 3(3/20)

Écrivez un algorithme permettant à l'utilisateur de saisir un nombre quelconque de valeur devront être stockées dans un tableau. L'utilisateur doit donc commencer par entrer le nombre de valeur qu'il compte saisir. Il effectuera ensuite cette saisie. Enfin, une fois la s terminée, le programme affichera le nombre de valeurs négatifs et le nombres de valeurs positives.

Problème : étude de cas(10/20)

Soit le MCD suivant



Travail à faire :

1. Indiquez tous les couples de cardinalité en les justifiant.

2. Présentez le planning des leçons tel qu'il pourrait existe sur le mur bureau de l'auto-école.
3. Précisez les codes éventuelles mise en œuvre ainsi que le contenu précis des fiches.
4. Quels sont les différents mode de facturation des leçons que vous pouvez envisager.
5. L'entité Leçon contient-elle les leçons passées, à venir , ou des deux ? discutez...
6. L'entité Leçon pourrait-elle avoir un autre identifiant que le N° de leçon ? Conclusions ?
7. Discutez de la stabilité de Choisir et Tuteur ?
8. Écrire le texte (comme si vous deviez concevoir un sujet) qui permettrait à un «merisin» averti de retrouver le modèle ci-dessus.
9. Présentez le schéma relationnel (l'ensemble des TABLES) correspondant (pensez à ACCESS).
10. Mettez au point un jeu d'essai et réaliste.

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2011

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

« *Le hasard et la coïncidence sont les moyens qu'a choisi Dieu pour rester anonyme* » :ALBERT EINSTEIN

Exercice 1 :(4pts)

Écrire un programme qui prend en entrée un entier n > 0 de l'utilisateur et donne comme résulta la somme :

$$S = \left\{ \begin{array}{l} 1+3+5+ \ldots\ldots\ldots\ldots +n \quad si \quad n \quad est \quad impaire \\ 2+4+6+ \ldots\ldots\ldots\ldots +n \quad si \quad n \quad est \quad paire \end{array} \right\}$$

L'algorithme ne doit pas accepter une valeur négative de n et doit afficher un seul résultat selon la valeur de n et non pas les 2 sommes.

Exercice 2(4pts)

Une classe contient environ 200 places réparties en 10 rangés et 20 colonnes. Chaque élève possède un numéro entre 1 et 200. Lors d'un examen, on place les élèves sur les places selon leur numéro en commençant par ma première rangé, puis la deuxième et ainsi de suite comme le montre le tableau suivant :

Rangée 1	1	2	...	20
Rangée 2	21	22	...	40
...	...	...	...	...
Rangée 10	181	182	...	200
	Colonne 1	Colonne 2	...	Colonne 20

Ecrire un algorithme qui prend de l'utilisateur un entier entre 1 et 200 puis affiche dans quelle rangée et dans quelle colonne élève doit etre placer. Par exemple, si n=35, l'élève doit se placer su la 2ème rangée de la 15ème colonne.

Exercice 3(6pts)

a. Écrire un procédure **LireTab** qui permet de remplir un tableau T de n éléments entiers donnés par l'utilisateur de sorte que les éléments soient donnés par ordre croissant. La procédure ne doit pas accepter des valeurs inférieures aux valeurs déjà introduites. On suppose en plus que n >1.

b. Écrire une procédure **EcrireTab** qui permet d'afficher les éléments d'un tableau de n éléments.

c. Écrire une procédure **Fusion** qui permet de prendre les éléments de deux tableaux triés et de les mettre dans un troisième tableau de sorte que ce dernier soit encore trié.(Il ne faut pas remplir le tableau puis le trié après).

d. Utiliser les procédures précédentes pour écrire un algorithme permettant de prendre de l'utilisateur deux tableaux de 100 entiers triés puis afficher l'ensemble formé par les éléments des deux tableaux d'une manière triée.

Exercice 4 : QCM (réponse juste 0.75pt, réponse fausse -0.5pt, aucune réponse 0pt) 6pts

1) Soit l'aglorithme suivant :

Variable p,q,r :Entier ;
Début
p←2, q←4,r← p*q ;
Si((q=r-p) et (r=8)) alors
q←p*r
r← p-q
p← q-r
sinon q ←p+q
r ← r+(p*q)

Fsi
Fin

Les valeurs des variables p,q,r sont :

a) p=30 ; q=16 ;r=14
b) p=2 ; q=6 ; r=20
c) p=2 ; q=6 ; r=8
d) Aucune réponse n'est juste.

3) Soit l'algorithme suivant :

Algorithme cal
Variable n1,n2,n3 ;

Procedure(a :entier par valeur, b :entier par reference)
b← a+1 ; a ← 2*a ;
FinProcedure

FonctionF1(a :entier, b :entier) :entier
a ←b-a ; Renvoyer(a) ;
FinFonction

Début
n1 ← 4; n2 ← 7 ;
n3 ← F1(n1,n2) ;
Appeler P1(n1,n2) ;
Ecrire(n1,n2,n3) ;
Fin

Les valeurs de n1,n2,n3 sont :

a) 8,7,5
b) 4,7,5
c) 4,7,3
d) Aucune reponse n'est juste

2) Soit l'algorithme suivant :

Variable i,n,sum :Entier ;
Début
n ← 50; sum ← 0 ;
pour (i de 1 à n) faire
sum ← sum + i;
FinPour
Fin

La valeur de la variable sum est :

a) 1275
b) 1270
c) 1285
d) Aucune reponse n 'est juste

4) Soit l'algorithme suivant :

Variable flag :booléen ;
ch :chaine de caractères
P :entier ;
Début
flag←faux ;P← ;
ch←"bonjou" ;
Tantque (flag) faire
P← len(ch) ;
Si(P<7) alors
flag←faux ;
sinon
flag←vrai ;
lire ch ;
P←P+1 ;
Fsi
FinTantque
Fin

Les valeurs des variables flag et P sont :

a) flag=vrai et P=2
flag=faux et P=1
flag= vrai et P=1
aucune des réponse n'est juste

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2013

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

« Le hasard et la coïncidence sont les moyens qu'a choisi Dieu pour rester anonyme » :ALBERT EINSTEIN

Exercice 1 : Codification de l'information

1. **Le résultat de la transformation $(43{,}25)_{10}$ en base 2 est**

   A. 101011,01
   B. 101001,10
   C. 110011,01
   D. 111010,10

2. **le résultat de la transformation $(42)_{10}$ en octal(base 8) est :**

   A. 37
   B. 52
   C. 25
   D. 75

3. **Le résultat de l'opération $(AC2)_{16} + (321)_8$ en hexa(base 16) est :**

   A. E43
   B. 1443
   C. B93
   D. CC2

4. **LE code de -35 en complément à 2 sur 8 bits :**

   A. 11101001
   B. 11001101
   C. 11011101
   D. 10011101

5. **Le résultat du produit 1101*1111 en binaire est :**

   A. 11100011
   B. 11000011
   C. 11010011
   D. 11001011

Exercice 2 :Généralités sur les algorithmes (QCM)

1. **Tous les algorithmes permettent :**
   - **A.** De résoudre les équations linéaires ou quadratiques
   - **B.** De mieux comprendre le fonctionnement des logiciels
   - **C.** Par une suite finie d'opérations de résoudre un problème
   - **D.** De définir l'architecture d'un ordinateur
2. **un algorithme peut être de type :**
   - **A.** Automatique
   - **B.** Récursif
   - **C.** Séquentiel
   - **D.** Électronique
3. **En langage algorithmique, un algorithme commence par un mot :**
   - **A.** Variable
   - **B.** Program
   - **C.** Constante
   - **D.** Algorithmique
4. **Quel est l'intérêt de créer les variables dans un algorithmique :**
   - **A.** Réduire le risque d'erreurs
   - **B.** Permettre de rendre les actions aléatoires
   - **C.** Garder les informations en mémoire
   - **D.** Une fois crée, elle peut être modifiée à tout moment
5. **Dans un algorithmique, les variables et les constantes se déclarent :**
   - **A.** Dans l'en-tête de l'algorithme
   - **B.** Entre "Début" et "Fin"
   - **C.** Dans l'en-tête pour les variables et entre "Début" et "Fin" pour les constantes
   - **D.** Toujours dans chaque bloc d'instruction.
6. **La partie déclaration dans un algorithme est constituée dans l'ordre des éléments suivants :**
   - **A.** constante, variable,type, fonction ou procédure
   - **B.** type, variable, constante
   - **C.** constante, type, variable,fonction ou procédure
   - **D.** variable, constante, type
7. **Les types de contenu de variable le plus courants sont :**
   - **A.** Enregistrement
   - **B.** Numérique
   - **C.** Pointeur

D. Chaines de caractère

8. **Dans un algorithme, une variable de type entier se nommant "i"** est déclarée par l'instruction :

A. Variable i←entier

B. Variable i :entier

C. Variable entière :i

D. Variable i en entier

9. **Dans un algorithme, une constante se nommant "k" et valant 97 est déclarée par l'instruction :**

A. Constante entière :k← 97

B. Constante k=97

C. Constante k←97

D. Constante k 97

10. **En déhors des opérations de calcul, un ordinateur peut fondamentalement effectuer les opérations :**

A. d'affectation des variables

B. de lecture/écriture

C. d'ajout/suppression

D. de test

11. **Un type composé permet de regrouper plusieurs types ;**

A. champs de même type dans une même variable

B. champs de même type dans un seul champ

C. champs de type distincts dans une même variable

D. variables dans les champs différentes.

12. **Quelles sont les objets à utiliser pour calculer la surface d'un circle ?(la formule du calcul est $S = pi * R * R$)**

A. la variable S et la constante pi

B. la variable R et la constante pi

C. les variables S et R

D. la constante R, la variable S et la constante pi

13. **Quel est le type d'une variable qui va contenir une adresse email ?**

A. Chaines de caractère

B. Caractère

C. Booléen

D. Alphanumérique

14. **Quelle affirmation concerne les identifications de variables est juste ?**

A. Un identificateur peut avoir 255 caractères

B. Un identificateur ne doit pas se terminer par un chiffre

C. Un identificateur ne doit pas contenir les signes : @, $ &,#.

D. Un identificateur

15. **Quelle est la différence entre une variable et une constante**

A. La variable est une zone mémoire et la constante est une donnée

B. Il n'a aucune différence entre variables et constante

C. La variable contient une valeur qui permet varier durant le déroulement de l'algorithme et la constante contient une valeur qui ne varie pas.

D. La variable peut être enregistré sur un disque et la constante dans une mémoire vive.

16. **Pour évaluer la complexité dans le cas d'un problème de recherche d'un élément dans un tableau, on choisit généralement comme instruction élémentaire :**

A. l'affectation qui sera effectué à la suite de la recherche

B. la lecture/écriture de chaque élément tableaux à rechercher

C. la comparaison de l'élément cherché et les éléments du tableau

D. les instructions de mise à jour qui seront effectuées lorqu'on aurait trouvé l'élément recherché

17. **Que permet de faire une boucle ?(une boucle "pour" par exemple)**

A. Tester plusieurs conditions simultanément

B. Améliorer la vitesse d'exécution d'un programme mais en augmentant le risque d'erreur

C. Initialiser les constantes

D. Répéter certains actions plusieurs fois

18. **Comment peut-on exécuter différentes selon certains cas**

A. En utilisant des conditions

B. En créant plusieurs programmes

C. En lançant les différents actions simultanément

D. En utilisant une boucle

19. **Peut-on insérer une boucle dans une autre boucle**

A. Oui,toujours

B. Non, jamais

C. Oui, mais seulement si la plus petite boucle ne contient aucune action

D. Oui, mais s'il n'y a pas autres boucles dans la plus grande boucle

20. **Si un algorithme contient une boucle infinie**

A. Il sera impossible à exécuter

B. Il sera possible de l'exécuter mais il y aura un dysfonctionnement

C. il est possible de l'exécuter. (ok)

D. Il n'est possible de l'exécuter que si la boucle contient un test conditionnel

21. **L'efficacité (ou la complexité) d'un algorithme est déterminée par :**

A. Le nombre de variables utilisées
B. La longueur de l'algorithme
C. Le nombre d'instructions effectuées
D. Le nombre de boucles utilisées

22. **La structure suivante est obligée d'effectuer au moins une fois les instructions de son propre bloc**
    A. Répéter
    B. Tant que
    C. Pour
    D. Si
23. **Quelles est l'égalité juste si a :=True et b :=False ?**
    A. b Or a=a Xor (Not(b Or a))
    B. Not(a Xor(a And B))=True
    C. (a And (Not b))Or(a Xor b)=a And ((Not b) Xor(a Or b))
    D. (a Xor b)=(Not a)And ((Not b) Xor(a Or b))
24. **Quel est le résultat de true XOR false**
    A. true
    B. false
    C. empty
    D. error
25. **Un fichier est un regroupement d'information sur un support non amovible.Les types de fichier qui existe sont :**
    A. Fichier texte
    B. Fichier numérique
    C. Fichier binaire
    D. Fichier assemblé
26. **Les modes d'accès à un fichier sont :**
    A. Séquentiel
    B. Direct
    C. Indirect
    D. Indexé
27. **En termes de type et mode d'accès, il existe :**
    A. Deux types de fichier avec deux modes d'accès à ces fichiers
    B. Trois types de fichier et trois modes d'accès à ces fichiers
    C. Deux types de fichier et trois modes d'accès à ces fichiers
    D. Quatre types de fichier et quatre modes d'accès à ces fichiers
28. **8Une procédure récursive utilise lors de son exécution :**

A. Une file

B. Une Pile

C. Une liste

D. Un tableau

29. **Quelles sont les étapes d'un algorithme DPR(Diviser Pour Régner)**

A. Diviser un problème en ses sous-problèmes

B. Résoudre les sous-problèmes de grande taille récursivement et ceux de petite taille directement.(ok)

C. Itérer sur les problèmes résolus

D. Combiner les solutions des sous-problèmes

30. **pour calculerX^n, nous multiplions X par lui-même n fois. Sachant que la taille de notre entrée est $\log_2 n$, la complexité en temps de notre algorithme est :**

A. linéaire

B. polynomiale

C. exponentielle.(ok)

D. Quadratique

Exercice 3 :Généralités - les questions binaires(QB)

1. Une procédure récursive n'a pas nécessairement une condition d'arret(V ou F).
2. Une pile est une zone mémoire réservée à chaque problème pour stocker soit les fichiers, soit les variables locales ou les paramètres d'une procédure (V ou F).
3. L'approche DPR consiste à résoudre un problème en le séparant en ses sous-problèmes différents du problème initiale mais de moindre taille, d'apporter les solutions aux sous-problèmes puis de combiner ces solutions pour produire la solution du problèmes initial (V ou F).
4. L'algorithme est une suite finie d'opérations élémentaires constituant un schéma de calcul ou de résolution d'un problème (V ou F).
5. La complexité d'un tri par insertion en moyenne est égale à la complexité au pire des cas soit $O(n^2)$ (V ou F).
6. Un tri par fusion d'un tableau de n éléments divise le tableau en tois parties, tri chaque partie de manière récursive et les fusionne pour le tri de l'ensemble .
7. Un pointeur est une variable qui contient le contenu et l'adresse d'une autre variable.
8. Un liste chainée est un cas particulier d'enregistrement donc un des champs est un pointeur qui pointe sur une variable enregistrement de même type(V ou F).
9. Les types de bases ou types prédéfinis sont les types qui correspondent aux données qui peuvent être directement traitées par le processeur mais avec une conversion ou formatage préable (V ou F).
10. Le mode d'accès indexé aux fichiers permet de se positionner directement sur l'enregistrement voulu en précisant l'index ou le numéro de cet enregistrement(V ou F).

Exercice 4 : Écriture des algorithmes

1. Dans la portion d'algorithme suivant, I et J sont les entiers. Si I vaut [illegible] avant l'exécution de la première ligne, combien vaut J après l'exécution de ces trois lignes
   - I ← [illegible]
   - I ← [illegible]
   - J ← [illegible]

   A. J vaut [illegible]
   B. J vaut 0
   C. J vaut [illegible]
   D. J vaut -[illegible]

2. Soit I une variable de type entier contenant la valeur [illegible]. Qu'affiche la portion de l'algorithme suivante :

```
Si I<10 alors
        Ecrire("C'est bon !")
Sinon
        Ecrire("C'est mauvais !")
FinSi
```

   A. Cette portion d'algorithme affiche "C'est bon !"
   B. Cette portion d'algorithme affiche "C'est mauvais !"
   C. Cette portion d'algorithme n'affiche rien
   D. Cette portion d'algorithme affiche "C'est bon !" puis "C'est mauvais !"

3. Dans la portion de code suivant, k est entier ayant la valeur [illegible]. Que vaut k après l'exécution de cette portion d'algorithme :

```
Si k modulo 2=1 Alors
        k← [illegible]
FinSi
k←k*2
```

   A. La valeur de k est 1[illegible]
   B. La valeur de k est 14
   C. La valeur de k est [illegible]
   D. La valeur de k est [illegible]

4. Dans la portion de code suivant, i et j sont des entiers. Que vaut j après exécution de ces lignes

```
j← 0
pour i← 1 à 11 par pas de 2
        j←j+[illegible]
FinPour
```

   A. j vaut [illegible]
   B. j vaut 11
   C. j vaut 22
   D. j vaut 2[illegible]

5. **Dans la portion de code suivant, n est un entier.Que vaut n après exécution de ces lignes.**

```
n← 0
tant que n>10 faire
        n← n+2
FinTantque
```

A. n vaut 0
B. n vaut 20
C. n vaut 22
D. n vaut 10

6. **Dans la portion de code suivant, m est un entier ayant pour valeur 7.Que vaut m lorsque l'exécution de ces lignes est terminée :**

```
répéter
        Si m modulo 2=1 alors
                m←3*m+1
        sinon
                m←m/2
        Finsi
jusqu'à m=1
```

A. m vaut 0
B. m vaut 1
C. m vaut 2
D. m vaut 3

7. **Soit les trois extraits d'algorithmes différentes ayant comme objectif de calculer** la **sommes des ventes saisies par un utilisateur**

ALGORITHME1 vente,TATALHT :réels Debut ALGORITHME Ecrire "vente" Lire VENTE TANT QUE VENTE<>0 faire Ecrire "vente" TOTAL ←TOTALHT+VENTE FIN TANT QUE Ecrire TOTALHT FIN ALGORITHME	ALGORITHME2 vente,TATALHT :réels Debut ALGORITHME TOTALHT← 0 VENTE←0 TANT QUE VENTE<>0 faire Ecrire "vente" TOTAL ←TOTALHT+VENTE FIN TANT QUE Ecrire TOTALHT FIN ALGORITHME	ALGORITHME3 vente,TATALHT :réels Debut ALGORITHME TOTALHT← 0 Ecrire "vente" Lire VENTE TANT QUE VENTE <>0 FA TOTAL ←TOTALHT+ FIN TANT QUE Ecrire TOTALHT FIN ALGORITHME

7.1 Pour l'algorithme 1

A. la boucle fonctionne correctement
B. on ne peut pas sortir de la boucle
C. on ne peut pas entrer dans la boucle
D. la boucle ne fonctionne pas

7.2 Pour l'algorithme 2

A. la boucle fonctionne correctement
B. on ne peut pas sortir de la boucle
C. on ne peut pas entrer dans la boucle
D. la boucle tourne indéfiniment

7.3 Pour l'aglorithme 3

A. la boucle fonctionne correctement
B. on ne peut pas sortir de la boucle

C. on ne peut pas entrer dans la boucle

D. on sort de la boucle avec une valeur infinie

7.4 Si l'utilisateur saisit les chiffres 10,20 et 0, que contiendra la variable TOTALHT à la fin de l'exécution de chaque algorithme 1)

A. 0

B. 20

C. 30

D. N'affiche rien

7.5 Si l'utilisateur saisit les chiffres 10,20 et 0, que contiendra la variable TOTALHT à la fin de l'exécution de chaque algorithme 2)

A. 0

B. 20

C. 30

D. N'affiche rien

7.6 Si l'utilisateur saisit les chiffres 10,20 et 0, que contiendra la variable TOTALHT à la fin de l'exécution de chaque algorithme 3)

A. 0

B. 20

C. 30

D. N'affiche rien

8. **Voici deux extraits algorithmes permettant d'obtenir la somme de chiffre d'affaires :**

Version 1	version 2
Debut Lire CA1 SOMME←CA1 Lire CA2 SOMME←SOMME+CA2 Lire CA3 .... Lire CA20 SOMME←SOMME+CA20 Ecrire("la somme des CA est de :",SOMME) Fin	Debut SOMME← 0 CA ←0 Pour i de 1 à 20 Lire CA SOMMEA←SOMME+CA FinPour Ecrire ("la somme des CA est de :", SOMME) Fin

Quels sont les avantages de la version 2

A. L'algorithme est plus court

B. Elle donne une résultat exact

C. le traitement est plus rapide

D. L'algorithme peut être adapter facilement

9. **Voici 3 extraits d'algorithme permettant d'obtenir la somme de chiffres d'affaires**

Version 1	Version 2	Version 3
Debut Lire CA Tantque CA<>0 faire Lire CA SOMME←SOMME+CA FinTantque Ecire("la somme des CA est de :",SOMME) Fin	Debut SOMME←0 CA←0 Pour i de 1 à 10 Lire CA SOMME←SOMME+CA FinPour Ecrire("la somme des CA est de :",SOMME) Fin	Debut SOMME← 0 Lire CA Tantque CA<>0 faire SOMME←SOMME+CA Lire CA FinTantque Ecrire("la somme des CA est de :",S Fin

Dans la version 3, comment peut-on arrêter de saisir des CA ?

A. Quand la somme est calculée

B. En saisissant un CA nul

C. En indiquant le nombre de CA à saisir

D. En déclarant une variable i de gestion de la boucle

10. **Considérons les deux version de l'algorithme ci-dessous permettant d'obtenir la somme de chiffres d'affaires**

Version 1	Version 2
Début Lire CA Tantque CA<>0 faire Lire CA SOMME←SOMME+CA FinTantque Ecrire("La somme des CA est de :",SOMME) Fin	Début SOMME←0 CA←0 Pour i de 1 à 20 faire Lire CA SOMME←SOMME+CA FinPour Ecrire("La somme des CA de :",SOMME) Fin

Quel est l'avantage de la version 1 à la version 2

A. le resultat de la somme est exacte

B. le traitement est plus rapide

C. l'initialisation des variables est juste

D. le nombre de CA à saisir peut être inconnu

11. **Soit l'extrait de l'algorithme suivant :**

```
Var SOMME,NOTE :réels ; REPONSE :texte
Début
   SOMME=0
   Ecrire "voulez vous saisir une note O/N"
   Lire REPONSE
   Tantque REPONSE="O" Faire
      Lire "Note", NOTE
      SOMME=SOMME+NOTE
      Ecrire "voulez vous saisir une autre note O/N"
      Lire REPONSE
   FinTantque
   Ecrire "la somme des notes est de ",SOMME
Fin
```

Que fait cet algorithme

A. il calcule la moyenne des notes

B. il calcule la somme des notes

C. il fournit la réponse Oui ou Non

D. il ne fournit aucune réponse

12. **Soit l'extrait de l'algorithme suivant.**

```
Var SOMME, NOTE :réels ; REPONSE :texte
Début
  SOMME=0,I=0 ;
  Ecrire "Voulez saisir une note O/N"
  Lire REPONSE
  Tantque REPONSE="O" Faire
    Lire "Note",NOTE
    SOMME=SOMME+NOTE
    I=I+1
    Ecrire "Voulez vous saisir une autre note O/N"
    Lire REPONSE
  FinTanque
 Si i<>0 alors SOMME=SOMME/I
 Ecrire "La somme des notes est de",SOMME
Fin
```

Si un utilisateur saisit les notes :3 puis 5 puis 10, quel sera le contenu de la variable SOMME à la fin du traitement ?

A. 12

B. 7

C. 18

D. 6

13. **Soit l'extrait de l'algorithme suivant**

Variable :a,x,a,c(réels)
Début Algorithme
$a \leftarrow x^2$
$b \leftarrow 2 * x$
$c \leftarrow a - b + 2$
Afficher c
Fin Algorithme

L'expression algébrique de la fonction f définie sur l'ensemble des réels par cet algorithme est :

A. $f(x) = x^2 - 2x + 2$

B. $f(x) = (x-2)^2 + 1$

C. $f(x) = x^2 - 2x$

D. $f(x) = x^2 - 2x - 2$

14. **Soit l'extrait d'algorithme suivant**

```
nbre_fois ←0
pour i ←1 à 5 faire
      nbre_fois←nbre_fois+1 ;
      i←i+1 ;
Finpour
```

Sachent qu'il est déconseillé de modifier l'indice d'itération d'une boucle "pour" dans une instruction à l'intérieur de la boucle , combien de fois entrez-vous dans le code ?

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

15. **Soit un fichier f contenant n enregistrements(0<n<100) et un tableau tab de taille 100 dans lequel nous voulons copier tout le contenu du fichier grace à l'algorithme suivant :**

```
Ouvir(f,lecture)
i←1
Tantque(CONDITION) faire
LireFichier(f,tab[i])
        i← i+1
finTantque
fermer(f)
```

Quelle est la meilleure CONDITION ?

A. EOF(f)

B. $i \geq 100$

C. nonEOF(f)

D. $i \leq 100$

16. **Soit un fichier f dans lequel nous voulons enregistrer les noms et les matricules des étudiants grace à l'algorithme suivant :**

```
Ouvrir(f,MODE)
Tantque nonEOF(f) faire
        Lire(etd.nom, etd.matricule)
        Ecrire Fichier(f,etd)
finTantque
fermer(f)
```

Quel est le meilleur mode d'ouverture

A. MODE=écriture

B. MODE=lecture

C. MODE=ajout

D. Aucun des trois modes, l'algorithme ne marchera pas

17. **Nous avons un problème de taille n que nous divisions en 2 sous-problèmes de taille n/3. Les couts pour diviser et pour construire la solution finale à partir des solutions aux sous-problèmes sont linéaires. Quel est le cout (dans le pire des cas) de la résolution de notre problèmes**

A. $\Theta(n)$

B. $\Theta(n \log)$

C. $\Theta(n^a)$ $avec$ $a < 1$

D. $\Theta(n^a)$ $avec$ $a > 1$

18. **Nous utiliserons un algorithme de tri particulier pour trier la liste [8,5,2,3,7] par ordre croissant. Voici toutes les modifications du tableau jusqu'à l'obtention du résultat final:** $[8,5,2,3,7] \rightarrow [2,5,8,3,7] \rightarrow [2,3,8,5,7] \rightarrow [2,3,5,8,7] \rightarrow [2,3,5,7,8]$. **Quel est l'algorithme de tri utilisé ?**

A. Tri bulle

B. Tri par insertion

C. Tri par sélection

D. Tri fusion

19. **Nous déroulons l'algorithme de tri par insertion et de tri par fusion pour trier le tableau ,[1,2,3,4,5] par ordre croissant. Quel sera l'algorithme le plus rapide ?**

A. L'algorithme de tri par insertion

B. L'algorithme de tri par fusion

C. ni l'un ni l'autre, ils auront le même temps

D. Aucun de ces algorithme ne peut être utilisé par un tel tableau

20. **Parmi ces algorithme de tri, le quel est un algorithme de type diviser pour régner ?**

A. Le tri à bulles

B. Le tri par insertion

C. Le tri par sélection

D. Le tri fusion

21. **Si pour un la recherche de la position du plus petit élément dans l'algorithme du tri par sélection nous utiliserons une recherche dichotomique , quelle sera alors la complexité en temps de notre algorithme de tri ?**

A. $\Theta(\log(n))$

B. $\Theta(n)$

C. $\Theta(n\log(n))$

D. $\Theta(n^2)$

22. **Principe du tri à bulle (bubble sort) :l'élément le plus grand remonte du tableau comme une bulle de campagne, puis on recommence pour que le deuxième plus grand remonte , etc. L'écriture de l'algorithme s'inspire de l'algorithme séquentielle qui vérifie si un tableau est trié.**

Algorithme de tri bulle

```
Procedure triBulle(entier[] tab){
entier i,j, temp ;
début
    pour (i allant de tab.longueur-2 à 1 pas -1 faire
        pour (j allant de 0 à pas 1) faire
        si(tab[j] >tab[j+1]) alors
            temp←tab[j] ;
            tab[j] ← tab[j+1] ;
            tab[j+1]←temp ;
        finsi
        finpour
    finpour
fin
```


ICORP Nivo 3_Contacts : (+237) 6 99 00 71 94 / 6 98 22 22 77 / 6 71 83 97 97
Site web : www.intelligentsiacorporation.com

Question

On voudrait trier par ordre croissant le tableau suivant :

701	17	2	268	415	45	45	102

Quel est l'ordre des éléments dans le tableau à la quatrième itération sur j et la première sur i.

A.	17	2	268	415	45	45	701	102
B.	17	2	268	415	701	45	45	102
C.	17	701	2	268	415	45	45	102
D.	17	2	268	415	45	701	45	102

23. **Soient a et b les variables entières.On vous fournit (à gauche) 3 versions de l'algorithme qui permute leur contenu :**

Version 1	Version 2	Version 3
a←b b←a	a←a+b a←a-b a←a+b	a←a+b b←a-b a←a-b

La bonne réponse est :

A. version 1

B. version 2

C. version 3

D. Aucune des vesrions1,2,3

24. **Soient les extraits des algorithmes suivantes résolvant le meme problème**

Version 1	Version 2
Tant que non(cond1 et cond2) faire inst Fin TanTque	Repeter inst jusqu'à cond3

On aura :

A. cond3=non(cond1 et cond2)

B. cond3=non(cond1 ou cond2)

C. cond3=cond1 et cond2

D. cond3=cond1 ou cond2

25. **Les instructions suivantes constituent les lignes de la procédure de tri par insertion d'un tableau de n éléments :(5) entieri,j,val ;(4)tantque((j>0)et tab[j-1]>val)) faire (3)tab[j]←tab[j-1] ; (8)j←j-1 ; (10)fintantque (6)tab[j]←val ; (2)pour(i allant de 1 à tab.longueur-1 pas 1)faire (11)val←tab[i] ;(13)j←i ;(9)Procedure triInsertion(entier[]tab)(12)Debut(7)Fin(1)FinPour.**
Laquelles des combinaisons suivantes forme cette procédure

A. (3)(8)(10)(2)(6)(13)(4)(9)(5)(12)(6)(1)(7)

B. (9)(5)(12)(2)(8)(10)(6)(1)(7)(6)(13)(4)(3)

C. (9)(5)(12)(2)(6)(13)(4)(3)(8)(10)(6)(1)(7)

D. (13)(4)(3)(8)(10)(9)(5)(12)(2)(6)(6)(1)(7)

Exercice 5 : Connaissance basique du langage pascal

1. **A quoi sert un langage un langage de programmation**
   - **A.** A écrire un document bien structuré
   - **B.** A produire des organigrammes correctes
   - **C.** A décrire un algorithme de manière compréhensible par un ordinateur.
   - **D.** A créer des algorithmes compliqués uniquement
   - **E.** A envoyer les signaux d'entrée-sortie aux périphérique de l'ordinateur
2. **Quelle est instruction erronée, parmi les instructions ?**
   - **A.** Readln("bonjour") ;
   - **B.** Readln("b,o,n,j,u,r") ;
   - **C.** Readln(bonjour) ;
   - **D.** Readln(bon,jour) ;
3. **Quelle est instruction erronée**
   - **A.** 5 :=X ;
   - **B.** X :=X ;
   - **C.** X :=X+2/Y ;
   - **D.** Y :=X-2 ;
4. **Parmi les affirmations suivantes,laquelle est juste ?**
   - **A.** On ne peut ni lire ni écrire une variable de type énuméré
   - **B.** On ne peut écrire et lire un variable de type énuméré
   - **C.** On ne peut seulement écrire une variable de type énuméré
   - **D.** On ne peut seulement lire une variable de type énuméré
5. **Que dire de juste à propos d'un tableau**
   - **A.** Tous ses éléments doivent appartenir au même type de variable.
   - **B.** Sa longueur peut varier au cours du déroulement du programme
   - **C.** Son nombre de dimension ne doit pas excéder trois.
   - **D.** Sa dimension doit être fixe.

Exercice 6 :Connaissance basique du langage C

1. **Le langage C est un langage**
   - **A.** Typé
   - **B.** Compilé
   - **C.** Semi-compilé
   - **D.** Interprété
2. **Parmi les langages suivantes, lequel est orienté "objet" ?**
   - **A.** Pascal
   - **B.** C
   - **C.** C++

D. JAVA

3. **En langage, parmi les identificateurs suivants,quels sont ceux invalides**

   A. $un-prix

   B. -une-somme

   C. une-somme

   D. ?1prix

4. **Considérons la portion du code suivant**

```
int n=5 ;
printf("%d",n) ;
```

   A. le résultat de l'exécution de ce code produit l'affichage du nombre 5

   B. le résultat de l'exécution de ce code produit l'affichage du nombre .5E+01

   C. le résultat de l'exécution de ce code produit un résultat indéterminé

   D. le résultat de l'exécution de ce code produit l'affichage de la lettre n

5. **Considérons la portion du code suivant**

```
int n=5 ;
printf("%d",&n) ;
```

   A. le résultat de l'exécution de ce code produit l'affichage du nombre 5

   B. le résultat de l'exécution de ce code produit l'affichage du nombre .5E+01

   C. ce code produit une erreur de compilation

   D. le résultat de l'exécution de ce code produit l'affichage de la lettre n

6. **Considérons la portion du code suivante :**

   int n=5 ;
   $printf(\ll \%d \gg, \&n);$

   A. ce code provoque tourjours une erreur à l'exécution

   B. Dans les conditions raisonnables ce code réalise correctement la saisie de l'entier tapé par l'utilisateur

   C. ce code provoque une erreur lors de la compilation

   D. ce code provoque une erreur qui peut passer inapercue

7. **Soient deux tableaux t1 et t2 déclarés ainsi :**

```
float t1[10],t2[10]
```

   Les instructions suivantes permettent de recopier dans t1 , tous les les éléments positifs de t2 en complétant éventuellement t1 par les zéros.

   A. int i,j ; for(i=0 ;i<10 ;i++) t1[i]=0 ;for(i=0 ;j=0 ;j<10 ;j++) if(t2[j]>0)t1[i++]=t2[j] ;(ok)

   B. int i,j ;for(i=0 ;i<10 ;i++)t1[i]=0 ; for(j=0 ;j<10 ;j++)if (t2[j]>0)t1[i]=t2[j] ;

   C. int i,j ;for(j=0 ;j<10 ;j++)t1[j]=0 ;for(j=0 ;i=0 ;i<10 ;j++)if(t2[i]>0)t1[j++]=t2[i] ;(ok)

   D. int i,j ;for(i=0 ;i<=10 ;i++)t1[i]=0 ;for(i=0 ;j=0 ;j<=0 ;j++)if(t2[j]>0)t1[i++]=t2[j] ;

8. **Soit la portion d'instruction suivante :**

```
int n=10,p=5,q=10 ;r ;
r=n==(p=q) ;
printf("n=%d p=%d q=%d r=%d\n",n,p,q,r) ;
```

   Quels résultat fournira ce bout de code ?

A. n=10 p=10 q=10 r=1

B. n=10 p=10 q=10 r=10

C. n=10 p=5 q=10 r=10

D. n=10 p=10 q=10 r=0

9. **Qu'affiche les instructions suivantes :**

```
int x=9 ;
int y=x+10 ;
printf("%d :%d :%d :",x,y,y) ;
```

A. 9 :19 :

B. 9 :19 :19

C. 9 :19 :%d

D : % :% :%

10. **Quelle est la valeur affichée par le programme suivant**

```
void fonction(int a[]){
a[1]=10 ;
}
int main(void){
int T[]={1,2,3} ;
fontion(T) ;
print("%d",T[1]) ;
return 0 ;
}
```

A. 10

B. 1

C. 2

D. 4

UNIVERSITÉ DE YAOUNDÉ I
École Nationale Supérieure Polytechnique
Concours d'entrée en niveau 3-Session 2014

ÉPREUVE D'INFORMATIQUE

3 heures Documents et calculatrices interdits

« *Le hasard et la coïncidence sont les moyens qu'a choisi Dieu pour rester anonyme* » :ALBERT EINSTEIN

Exercice 1 : Connaissance de base

Q1.Une variable est :

A. Une zone mémoire contenant plusieurs valeurs différentes.

B. Une élément de programme qui change chaque fois que l'on exécute le programme.

C. Une zone mémoire qui contient une valeur qui peut changer durant le déroulement de l'algorithme.

D. Une zone bien déterminée de la mémoire ou l'on stocke les valeurs que l'on manipule dans un algorithme.

E. Aucune des réponses précédentes.

Q2. Les constantes et les types dans un algorithme se déclarent :

A. Entre "Début" et "Fin".

B. Dans l'en-tête.

C. Toujours dans chaque bloc d'instructions

D. Dans l'en-tête pour les constantes, entre "Début" et "Fin" pour les types

E. Aucune des réponses précédentes .

Q3. Un algorithme est :

A. Un ensemble constitué des instructions ayant un "Début" et un "Fin".

B. Une suite d'instructions élémentaires toujours constitué des variables, des constantes et des types.

C. Une suite non nécessairement séquentielle d'instructions ayant des variables ou des constantes.

D. Une suite d'instructions séquentielles, éventuellement structurées par des conditions et des boucles.

E. Aucune des réponses précédentes.

Q4. Un algorithme s'écrit souvent :

A. en pseudo langage de programmation

B. en langage naturel

C. en langage de programmation hybride

D. en langage évolué

E. Aucune des réponses précédentes.

Q5. Toutes les données d'un programme sont mémorisée

A. en mémoire centrale

B. en mémoire auxiliaire
C. dans les registres
D. en mémoire cache
E. Aucune des réponses précédentes.

Q6. Un identificateur est composé de :

A. Lettre
B. Lettres et des chiffres mais ne peut pas commencer par un chiffre
C. Chiffre
D. De lettre en majuscule et des chiffres
E. Aucune des réponses précédentes.

Q7. Quelle est l'instruction erronée :

A. X :=X+2/Y ;
B. X :=X ;
C. 5 :=X ;
D. X :X+5 ;
E. Aucune des réponses précédentes.

Q8. Quelle est le nombre signé donc la représentation en complément à 2 sur un octet est 10101110 ?

A. +96
B. -82
C. +76
D. -66
E. Aucune des réponses précédentes.

Q9. Pour quelle représentation sur 8 bits l'inégalité 00000000≤ 11111111 est-elle vraie ?

A. signé en complément à 2
B. signé en complément à 1
C. signé en valeur absolue+signe
D. non signé
E. Aucune des réponses précédentes.

Q10. La représentation en binaire de 1100,75 est :

A. 10001001100,11
B. 10001101100,11
C. 10000011000,11
D. 10000001000,11
E. Aucune des réponses précédentes.

Q11. La conversion du nombre décimal 8,625 en virgule flottante suivant la norme 754(1 bilt de signe,Exposant sur 8 bits biaisé à 127, Pseudo mantisse sur 23 bits) est :

	Signe	Exposant biaisé	Pseudo mantisse
A.	0	10000010	000 1010 0000 0000 0000 0000
B.	0	10010010	000 1010 0000 0000 0000 0000
C.	0	10001010	000 1010 0000 0000 0000 0000
D.	0	10000010	000 1010 0010 0000 0000 0000
E.	aucune des réponses précédentes		

ICORP Nivo 3_Contacts : (+237) 6 99 00 71 94 / 6 98 22 22 77 / 6 71 83 97 97
Site web : www.intelligentsiacorporation.com

Q12. Une variable dans un algorithme permet de :

A. Stocker n'importe qu'elle type d'information numérique
B. rendre les actions aléatoire en mémoire
C. Garder des informations en mémoire
D. Mettre des informations en mémoire
E. Aucune des réponses précédentes.

Q13. Un identificateur de variable doit avoir :

A. au moins 8 caractères
B. au plus 255 caractères
C. Minimum 255 caractères
D. Autant de caractères que l'on souhaite
E. Aucune des réponses précédentes.

Q14. L'algorithme est :

A. Une science de traitement automatique de l'information par des ordinateurs
B. Suite finie,séquentielle de règles que l'on applique à un nombre fini de données, permettant de résoudre des classes de problèmes semblables.
C. Une suite finie de problème en informatique
D. Toutes les réponses sont correctes
E. Aucune des réponses précédentes.

Q15. En algorithmique, nous utiliserons très souvent des données. Dans la liste suivante coch

A. variables
B. structures
C. tableaux
D. processeur
E. Aucune des réponses précédentes.

Q16. L'algorithme présente divers concept clé. Dans la liste suivante, choisi l'intrus

A. instructions
B. conditions
C. formatage
D. récursivité
E. Aucune des réponses précédentes.

Q17. Dans un algorithme, la création d'une variable permet de :

A. rendre les actions aléatoires
B. réduire les risques d'erreurs
C. garder les informations en mémoire
D. rendre les informations manipulable pour tous les supports de programme
E. Aucune des réponses précédentes.

Q18. En algorithmique, l'enregistrement nommé PersonEnreg contenat deux champs(code type entier et nom de type chaine) se déclare par l'instruction :

A. Type Enregistrement =PersonEnreg
code :entier
nom :chaine de caractères
FinEnregistrement
B. Type PersonEnreg=Enregistrement
code : entier
nom : chaine
FinEnregistrement
C. Type PersonEnreg=Struct Enregistrement
code : entier
nom : chaine
FinEnregistrement
D. Struct Enregistrement :PersonEnreg
code :entier
nom : chaine de caractères
EndStruct
E. Aucune des réponses précédentes.

Q19. Les algorithmes de multiplication des matrices et de parcours dans les graphes ont une complexités :

A. En O(nlogn)
B. En O(logn)
C. En $O(n^2)$ et $O(n^3)$
D. En O(n)
E. Aucune des réponses précédentes.

Q20.Quelle est l'égalité juste si a<-True et b <- False ?

A. Not(b Or a)=a Xor (Not(b Or a))
B. a Xor(Not(b Or a))=True
C. (a And (Not b)) Or(a Xor b)=a And ((Not b) Xor(a Or b))
D. (a Xor b)=(Not a)And((Not b) Xor (a Or b)
E. Aucune des réponses précédentes.

Exercice 2 : Ecrire des programmes

Partie 1 : Calcul d'un salaire

Le revenu d'un commercant est composé d'une part fixe et d'une part variable (la prime). La part fixe, dépend de l'ancienneté du commercial :

.131000 Fcfa pour un "junior"

.2000000 Fcfa pour un "senior"

La prime, la proportionnelle au chiffre d'affaire mensuel (CA), se calcule comme suit :

Prime	condition
0 Fcfa	CA < 1965000 FCfa
131000 Fcfa	1965000 Fcfa <= CA < 3275000 FCfa
262000 Fcfa	3275000 Fcfa <= CA < 6550000 FCfa
339600 Fcfa	CA >= 6550000 FCfa

On veut écrire un algorithme permettant au commerçant de calculer son revenu mensuel . Les messages à utiliser sont :

-Entrez l'entier 1 si vous etes junior
-Entrez l'entier 2 si vous etes sénior
-Votre salaire est de ....FCfa

Choisir la bonne réponse structure de données pour cet algorithme

Q21.déclaration des constantes

A. Const PartJunior=1310000, Const PartSenior=200000 ;

B. # define PartJunior=1310000, # define PartSenior 2000000

C. Const PartJunior :=1310000, Const PartSenior :=2000000

D. Constante PartJunior :1310000, Constante PartSenior=2000000

E. Constant PartJunior :2000000, Constant PartSenior :1310000

Q22. déclairation des variables

A. Var AncCommercial : entier, Var Salaire : entier, Var Prime :entier, Var CA :entier

B. Var AncCommercial=1 ou 2, Var Salaire : entier, Var Prime :entier, Var CA :entier, Var Partfixe

C. int AncCommercial ; int Salaire ; int CA ; int Partfixe ;

D. Var PartJunior=1310000 :entier, Var PartSenior=2000000 :entier, Var AncCommercial :entier, Var Salaire : entier, Var Prime :entier, Var CA :entier, Var Partfixe

E. Var PartJunior=1310000 :integer, Var AncCommercial :integer, Var Premium : integer, Var Partfixe

Q23. choisir le meilleur bloc d'instructions ..

A. Ecrier(entrez 1 pour junior ou 2 pour senior')
Lire AncCommercial
si(AncCommercial=1) alors Partfixe=PartJunior
si(AncCommercial=2) alors Partfixe=PartSenior
Ecrire(entrez le chiffre d'affaire)
Lire CA

B. printf("entrez 1 pour junior ou 2 pour senior")
read AncCommercial
if(AncCommercial=1)Partfixe=PartJunior
if(AncCommercial=2 Partfixe=PartSenior
printf(entrez le chiffre d'affaire)
read CA

C. Ecrier("entrez 1 pour junior ou 2 pour senior")
Lire AncCommercial
si(AncCommercial=1) alors Partfixe <-- PartJunior
si(AncCommercial=2) alors Partfixe <-- PartSenior
Ecrire("entrez le chiffre d'affaire")
Lire CA

D. scanf AncCommercial
si(AncCommercial=1) alors Partfixe=PartJunior
si(AncCommercial=2) alors Partfixe=PartSenior
Ecrire(entrez le chiffre d'affaire)
Lire CA

E. Aucune des réponses précédentes

Q24. Choisir le meilleur bloc d'instructions .

A.
```
si(CA < 1965000) alors Prime <–0
sinon
    si (CA <3275000) alors Prime <– 131000
    sinon
        si (CA < 6550000) alors Prime <– 262000
        sinon Prime <– 339600
        Finsi
    Finsi
Finsi
```
B.
```
si(CA < 1965000) alors Prime =0
sinon
    si (CA <3275000) alors Prime = 131000
    sinon
        si (CA < 6550000) alors Prime = 262000
        sinon Prime =339600
        Finsi
    Finsi
Finsi
```
C.
```
if(CA < 1965000) Prime =0
else
    if (CA <3275000) Prime= 131000
    else
        if (CA < 6550000) Prime= 262000
        else Prime=339600
        Endif
    Endif
Endif
```
D.
```
if(CA < 1965000) Prime =0 ;
else
    if (CA <3275000) Prime= 131000 ;
    else
        if (CA < 6550000) Prime= 262000 ;
        else Prime=339600 ;
        Endif
    Endif
Endif
```
E.
Aucune des réponses précédents.

Q25. Choisir la meilleure instruction de calcul du salaire .

A. Salaire <– Partfixe + Prime

B. Salaire =Partfixe +Prime ;

C. Salaire <– Partfixe + CA + Prime ;

D. Salaire :=Partfixe + Prime ;

E. Salaire :=Prime ;

.

Partie 2 :

Q26. Considérons ce bout de code ci-dessous .

```
var p,q : entier
fonction test(Val n :entier ; ref m :entier) : vide
debut
    m=7
    p=7
finfonction
debut
    p=1
    q=2
    test(p,q)
fin
```

Quelle sont les valeurs de p et q à l'exécution de cet algorithme

A. p=1 et q=2

B. p=5 et q=7

C. p=1 et q=7

D. p=5 et q=2

E. Aucune des réponses précédentes

Q27. Dans la portion de code suivant, M, K, l et N sont des entiers. Si M vaut L avant l'exécution de la première ligne, combien vaut N après l'exécution des ces 3 lignes .

```
K ← 2*M-4
L ← -3*M-2*K
N ← 16*L+21*K/3
```

A. N vaut -1

B. N vaut 2

C. N vaut 1

D. N vaut -2

E. Aucune des réponses précédentes

Q28. Dans la portion de code suivant, N et M sont des entiers. Que vaut M après l'exécution de ces lignes :

```
M←0
Pour N← 1 à 13 par pas de 2
      M← M+N
FinPour
```

A. M vaut 4

B. M vaut 11

C. M vaut 35

D. M vaut 25

E. Aucune des réponses précédentes

Q29. Voici trois extraits d'algorithmes permettant d'obtenir le produit d'un certain nombre supérieur à 1 : .

Version 1	Version 2	Version 3
Début Lire Prod Tant que Prod<> 1 faire Lire Prod Produit←Produit*Prod Fin Tant que Écrire("le produit des nombres est de :",Produit) Fin	Début Produit ←1 Prod← 1 Pour i de 1 à 20 Lire Prod hspace*1cm Produit←Produit*Prod Fin Pour Écrire("le produit des nombres est de :",Produit) Fin	Début Produit ←1 Lire Prod Tant que Prod<>1 faire Produit←Produit*Prod Lire Prod Fin Tant Que Écrire("le produit des nombres est de :",Produit) Fin

Dans la version 3, comment peut-on arreter de saisir des Prod

A. Quand le produit est calculé

B. En saisissant un Prod qui vaut un

C. En indiquant le nombre de prod à saisir

D. En déclarant une variable i de gestion de la boucle

E. Aucune des réponses précédentes

Q30. Dans la portion de code suivante, n1 est un entier ayant pour valeur 8 . Que vaut n1 lorsque l'exécution de ces lignes est terminée : .

```
Répéter
    si n1 modulo 2=1 alors
        n1←3*n1+1
    sinon
        n1← n1/2
    Finsi
Jusqu'à n1=1
```

A. n1 vaut 0

B. n1 vaut 2

C. n1 est indéterminé car ce code ne peut se terminer

D. n1 vaut 1

E. Aucune des réponses précédentes

Q31. Soit a et b les variables entières. Nous vous proposons 3 versions de l'algorithme qui permute leur contenu .

Version 1	Version 2	Version 3
a←a+b b←a-b a←a-b	b←a+b a←b-a b←a+b	a←a+b a←a-b b←a+b

Quelle est la bonne version :

A. version 1

B. version 2

C. version 3

D. Aucune version ne marche, il faut une variable temporaire

E. Toutes les versions marchent

Q32. Nous voulons calculer le prix TTC (prix Tout Taxe Compris) d'un prixHT(prix Hors Taxe)

Soient les 3 versions suivantes :

Version 1	Version 2	Version 3
Constante TVA=19.2% Variable reel : prixHT, prixTTC Debut lire(TVA) ; prixTTC← prixHT*(1+TVA) ; ecrire(prixTTC) ; Fin	Constante TVA=19.2% Variable reel : prixHT, prixTTC Debut prixTTC← prixHT*(1+TVA) ; ecrire(prixTTC) ; Fin	Constante TVA=19.2 Variable reel : prixH Debut prixTTC← prixH ecrire(prixTTC); Fin

Selon vous, laquelle de ces versions est correcte ?

A. version 1

B. version 2

C. version 3

D. Aucune version ne marche

E. Toutes les versions marchent

Q33. Considérons les deux versions de l'algorithme ci-dessous permettant d'obtenir la somme **de chiffre d'affaire .**

Version 1	Version 2
Début SOMME← 0 Lire CA Tant que Ca <>0 faire SOMME ← SOMME+CA Appeler afficherIU() Lire CA Fin TantQue Ecrire("La somme des CA est de :", SOMME) Fin	Début SOMME← 0 Répéter Lire CA SOMME ←SOMME + CA AppelerIU() Jusqu'à CA=0 Ecrire("La somme des CA est de :", SO Fin

Quel est l'avantage de la version 1 par rapport à la version 2 :

A. le résultat de la somme est exact

B. le traitement est plus rapide

C. l'initialisation des variables est juste

D. le nombre de CA à saisir peut être inconnu

E. Aucune des réponses précédentes

Q34. Soit l'extrait de l'algorithme suivante :

Var N1,M,P :réels ; REPONSE :Caractère
Début

```
M=0
I=0
Ecrire "Voulez vous saisir un nombre O/N"
Lire REPONSE
Tant que REPONSE="O" Faire
  Lire P
  M=M+P
  I=I+1
  Ecrire "voulez saisir un autre nombre O/N"
  Lire P
Fin Tant que
Si i<>0 alors N1=N1/I
Ecrire N1
FSI
Fin
```

Si un utilisateur saisit les notes : 4 puis 7 puis 10, quel sera le contenu de la variable P à la fin du traitement ?

A. 12

B. 7

C. 8

D. 6

E. Aucune des réponses précédentes

Q35. Soit l'extrait d'algorithme suivante :

```
Nbre ←0
i ←1 ;
Tantque(i<7) faire
        Nbre←Nbre+1 ;
        i←i+1 ;
finTantque
```

Que vaut Nbre et i à la fin de l'exécution de la boucle Tantque

A. i=6 et Nbre=6

B. i=7 et Nbre=6

C. i=7 et Nbre=7

D. i=6 et Nbre=6

E. Aucune des réponses précédentes

Q36. Principe du tri par insertion : l'objectif à chaque étape est d'insérer le i-ème élément à sa position parmi ceux qui précédent. Il faut pour cela trouver ou l'élément doit être insérer en le comparant aux autres, puis décaler les éléments enfin de pouvoir effectuer l'insertion.En pratique, ces deux action sont fréquemment effectuées en une passe qui consiste à faire "remonter" l'élément au fur et à mesure jusqu'à rencontrer un élément plus petit .

Algorithme Tri Insertion
Algorithme TriParInsertion : Tri d'un tableau par insertion entrée :T[1,n] est un tableau d'entrée , n≥1 résultat :les élements de T sont ordonnes par ordre croissant Debut pour i ← 2 à n faire j←i, v←T[i] tant que j>1 et v<T[j-1] faire T[j]←T[j-1] j←j-1 FinTantque T[j]←v FinPour fin

Question

On voudrait trier par ordre croissant le tableau suivant

3	4	1	2	7	9	45	102

Quel est l'ordre des éléments dans le tableau à la troisième itération sur i

A.	3	1	4	2	7	9	45	120
B.	1	3	4	2	7	9	45	120
C.	1	3	4	2	9	7	45	120
D.	3	4	1	120	7	9	45	2
E.	Aucune des réponses précédentes							

Q37. On veut transformer la bouche "tantque" de l'algorithme de tri de l'exercice 2.12 en boucle "for", quelle est le meilleur bout de code parmi les codes ci-dessous

A. pour (j←i,j>0 et t[j-1]>v,j←j=1-1 faire
T[j]=T[j-1] ;
FinPour

B. pour(j←i, t[j-1]>v, j←j=1-1 faire
T[j]← T[j-1]
FinPour
T[j]=v ;

C. pour(j←i à 1 pas -1)
si Tab[j-1]>v alors
T[j]=T[j]←T[j-1]
Fsi
finPour
T[j]=v

D. pour(j=i ;j>0 ; && tab[j-1]>v ; j–)
T[j]=T[j-1] ; T[j]=v ;

D. Aucune des réponses précédentes.

Q38. Soit l'algorithme suivant : .

```
Variables entier :i,j, som ;
Début
    som ←0
    pour i← à 10 faire
        pour j←1 à i faire
            pour k← 1 à j faire
                som←som+1
            FinPour
        FinPour
    FinPour
    écrire(som)
Fin
```

Quelle est le la valeur affichée ?

A. 30

B. 220

C. 1000

D. 2000

E. Aucune des réponses précédents

Q39. Nous utilisons un algorithme de tri particulier pour trier le tableau [4,7,3,5,2,4] par ordre croissant.Quel algorithme de tri nous donne , à un moment donné, la configuration du tableau suivante : [2,4,5,3,4,7].

A. Tri bulle

B. Tri par sélection

C. Tri par insertion

D. Tri par shell

E. Aucune des réponses précédentes

Q40. Soit la déclaration d'un tableau d'enregistrement table(à gauche) ;cette table a été initialisée (à droite de la manière suivante .

Constante NE=4 // Nombre maximal d'évaluations TAILLE=10 // Taille maximale des caractères Type tChaine=Tableau[TAILLE+1] de caractères tEpreuve=enregistrement tChaine nom entier note finEnregistrement tTable=Tableau[NE] de tEpreuve Variable tTable	CC=10 TP=12 Examen=8 Rattrapage=18 Soient les affectations suivantes Var1←table[1].nom Var2←table[2].note var3←table[3].nom[4]

Quelle est la valeur des variables var1,var2 et var3 ?

A. var1="CC", var2=12, var3='e'

B. var1="TP", var2=12, var3='r'

C. var1="TP", var2=8, var3='r'

D. var1="CC", var2=8, var3='e'

Q41. Soit l'algorithme (à gauche), de la représentation en mémoire(au milieu) et les affectations (à droite) suivants :

Algorithmique	Représentation en mémoire	Affectations
Variable entier n ; Debut n←20 p1← @n p2←p1 p3←@p1 Fin	.... 0x1A40 $\boxed{20}$ n 0x4B32 $\boxed{0x1A40}$ P1 0x3C2B $\boxed{???}$ p2 0x2C2F $\boxed{??}$ p3 ...	var1←p3 var2←@p3 var3←©p2 var4←©p3 var5←©©p3

Q43. Nous voulons transformer la fonction itérative Iter(que nous appellerons dans le programme principale par result← Iter()) en une fonction récursive Rec(que nous appellerons dans le programme principale par result←Rec(MIN,init))

Fontion Iter	Fonction Rec
TypeResult FONCTION Iter() ; Variable Entier :i TypeResult :result Debut result← init // init est une constante de type TypeResult Pour i←MIN(1)MAX faire inst ; FinPour Renvoyer result ; Fin	TypeResult FONCTION Rec(entier :i, Ty sult :result) Debut si(X)alors Renvoyer result ; sinon inst ; //idem pour l'instructio fonction Iter() result←Rec(Y) ; Fsi Fin

A. X est (i<MIN) et Y est (i-1,result)

B. X est (i<MIN) et Y est (i+1,result)

C. X est (i>MAX) et Y est (i-1,result)

D. X est (i>MAX) et Y est (i+1,result)

E. Aucune des réponses précédentes

Q44. On vous donne l'algorithme qui utilise une sous procédure pour ajouter une valeur d'une variable à l'autre

Version 1	Version 2	Version 3
ALGORITHME param Variable globale entier :a,b PROCEDURE ajout() b← b+a finprocedure Debut Lire(a,b) Appeler ajout() Fin	ALGORITHME param variable entier :a,b PROCEDURE ajout(entier :x,¬entier :p) ©p ←©p + x finprocedure Debut Lire(a,b) Appeller ajout(a,©b) Fin	ALGORITHME param Variable entier :a,b entier FONCTION ajout(entier x,y) y←y+x renvoyer y finfonction Debut Lire(a,b) b← ajout(a,b) Fin

Selon vous quelle est la version la plus économique en mémoire

A. Version 1

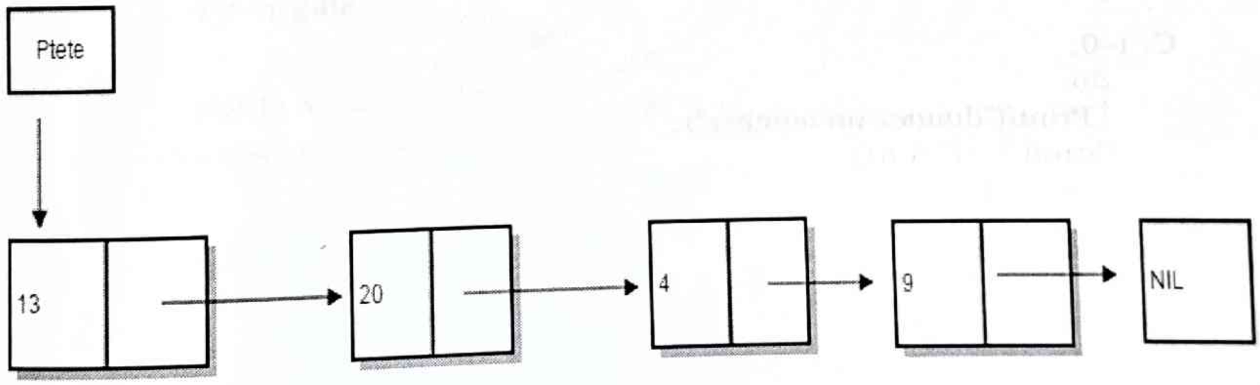
B. Version 2

C. Version 3

D. Aucune , elle sont toutes identiques

E. Aucune des réponses précédentes.

Q45. On considère la liste simplement chainée suivante :



Grace à quelle affectation cette liste chainée a-t-elle été obtenue ?

A. ptete←empiler(9,enfiler(13,empiler(4,enfiler(20,NIL))))

B. ptete←empiler(9,empiler(4,empiler(20,enfiler(13,NIL))))

C. ptete←enfiler(13,enfiler(20,empiler(4,enfiler(9,NIL))))

D. ptete←enfiler(9,empiler(13,enfiler(4,empiler(20,NIL))))

Exercice 3 : Connaissance basique du langage C

Q46. Soit le programme ci-dessous .

```
# include <stdio.h>
main()
{ int i, n,som ;
    som=0 ;
    for(i=0 ;i<4 ;i++)
    {Printf("donnez un entier") ;
    Scanf("% d",& n) ;
    som +=som ;
    }
Printf("somme : %d",som) ;
}
```

Quel bloc d'instructions ci-dessous peut mieux remplacer le bloc de la boucle for du programme ci-dessus.

A.
```
i=0 ;
    while(i<4)
    { Printf("donnez un nombre") ;
    Scanf("% d",& n) ;
    som +=n ;
    } i++ ;
```

B.
```
while(i<4) ;
    { Printf("donnez un nombre") ;
    Scanf("% d",& n) ;
    som +=n ;
    i++ ;
    }
```

C.
```
i=0 ;
    do
    { Printf("donnez un nombre") ;
    Scanf("% d",& n) ;
    som +=n ;
    i++ ;
    } while(i <4) ;
```

D.
```
som=0 ;
    i=0 ;
    while(i <= 4)
    { Printf("donnez un nombre") ;
    Scanf("% d",& n) ;
    som +=n ;
    i=i+1 ;
    }
```

E. Aucune des réponses précédentes

Q47. Soit le programme suivant :

```
# include <stdio.h>
main()
{     int i ;
    scanf("% d",& n)
    swith(n)
    {
    case 0 :printf("Nul\n") ;
    case 1 :
    case 2 :printf("Petit \n" ) ;
            Break ;
    case 3 :
    case 4 :
    case 5 : printf("Moyen \n") ;
    default : printf("Grand \n") ;
    }
}
```

Quels résultats affiche ce programme lorsqu'on fournit en entrée la valeur 10

A. Nul

B. Moyen

C. Grand

D. Petit

E. Aucune de réponses précédentes

Q48. Quelle erreur a été commise dans l'instruction suivante :
do c=getchar()while (c!='\n') ;

A. Il manque les accolades

B. Il manque un point-virgule

C. Aucune erreur

D. Le do doit précéder le while

E. Aucune des réponses précédentes

Q49. Quels résultats fournit le programme suivant :

```
# include <stdio.h>
main()
{     int n,p ;
    n=p=0 ;
    while(n < 5) n+=2 ;p++ ;
    printf("M1 : n=%d , p=%d \n",n,p) ;
    n=p=0 ;
    while(n<5){ n+=2 ;p++ ; }
    printf("M2 : n=% d,p=%d \n",n,p) ;
}
```

A. M1 :n=5,p=2 ;
M2 :n=5,p=3 :

B. M1 : n=6,p=1 ;
M2 :n=6, p=3 :

C. M1 :n=7,p=1 ;
M2 : n=7,p=3 :

D. M1 :n=7,p=2 ;
M2 :n=7, p=3 :

D. Aucune des réponses précédentes

Q50. Quel résultat fournit le programme suivant :

```
# include <stdio.h>
main()
{
int i=1 ;
int x=11 ;
int y=x+10 ;
printf("% d : % d : % d",x+1,y,y) ;
}
```

A. 9 :19 :

B. 12 :%d :21

C. 12.21.21

D. %d :%d :%d

E. Aucune des réponses précédentes

Q51.Soit le programme Exercice.c suivant :

```
# include <stdio.h>
int main()
{
int i ;
int *ptr= &i ;
printf("%x \n",&*ptr) ;
return 0 ;
}
```

Après la compilation et exécution, un exécutable est créé. Si on l'exécute , il :

A. ne compile pas

B. provoque une erreur à l'exécution (erreur de segmentation par exemple)

C. affiche l'adresse de i en hexadécimal

D. affiche l'adresse de ptr en hexadécimal

E. Aucune des réponses précédentes

Q52. Soit le programme Exercice2.c suivant :

```
#include <stdio.h>
#ifdef X
int main() {
printf("def \n");
return 0;
}
#else
int main() {
printf("ndef \n");
return 0;
}
#endif
```

Après compilation et exécution, un exécutable est créé. si on l'exécute, il :

A. ne compile pas

B. provoque une erreur à l'exécution(erreur de segmentation par exemple)

C. affiche def

D. affiche ndef

E. Aucune des réponses précédentes

Q53. Soit le proramme Exercice3.c suivant :

```
#include <stdio.h>

int main() {
int a,b;
int *ptr1, *ptr2;
a=5;
b=a;
ptr1=&a;
ptr2=ptr1;
b=(-ptr2)++;
printf("a=%d, b=%d,*ptr1=%d,*ptr2=%d \n", a,b,*ptr1,*ptr2);
return 0;
}
```

Après compilation et exécution, un exécutable est crée. Si on l'exécute, il :

A. provoque une erreur de compilation à l'exécution (erreur de segmentation par exemple)

B. affiche a=6,b=5,*ptr1=6,*ptr2=6

C. affiche a=5,b=5,*ptr1=5,*ptr2=5

D. affiche a=6,b=6,*ptr1=6,*ptr2=6

E. Aucune des réponses précédentes

Q54. Soit le programme Exercice4.c suivant :

```
#include <stdio.h>
#define TAB_LENGTH 3
int main() {
int tab[TAB_LENGTH];
int j;
for(j=0;j<TAB_LENGTH;j++)
tab[j]=5;
j=0;
printf("[");
while(j<TAB_LENGTH)
printf("%d", tab[j]); j++;
printf("]");
return 0;

}
```

Après compilation et exécution, un exécutable est crée. Si on l'exécute, il :

A. ne compile pas

B. provoque une erreur fatale à exécution(erreur de segmentation par exemple)

C. boucle

D. affiche [5 5 5]

E. Aucune des réponses précédentes

Q55. Soit le programme Exercice5.c suivant :

```
#include <stdlib.h>
struct list_couple {
int membre1;
int membre2;
struct list_coupe *suivant;
};
typedef struct list_coupe *list;
int main()
{
list m=malloc(sizeof(struct list_couple));
list m2=malloc(sizeof(struct list_couple));
(*m).suivant=*m2;
free(m);
return 0;
}
```

Après compilation et exécution, un exécutable est créé.Si on l'exécute, il :

A. ne compile pas

B. provoque une erreur à l'exécution(erreur de segmentation par exemple).

C. fonctionne et avant le retour de la fonction main() tout l'espace occupé par m et m2 a été libéré.

D. fonctionne mais avant le retour de la fonction main() tout l'espace occupé par m et m2 n'a pas été libéré.

E. Aucune des réponses précédentes.

Q56. Soit le programme Exercice6.c suivant :

```
#include <stdio.h>
struct list_v {
int i ;
struct list_v *suivant ;
} ;
int main()
{
struct list_v maliste ;
maliste.suivant=maliste ;
return 0 ;
}
```

Après compilation et exécution, un exécutable est créé. Si on l'exécute, il :

A. ne compile pas

B. provoque une erreur fatale à l'exécution(erreur de segmentation par exemple

C. boucle

D. fonctionne normalement mais n'affiche rien

E. Aucune des réponses précédentes

Q57. Soit le programme Exercice7.c suivant :

```
#include <stdlib.h>
struct list_couple {
double membre1 ;
double membre2 ;
struct list_couple *suivant ;
} ;
typedef struct list_couple *liste ;
int main()
{
list m=malloc(sizeof(struct list_coupe)) ;
list m2=malloc(sizeof(struct list_coupe)) ;
m→membre1=18.5 ;
m2→membre2=23.4 ;
free(m→membre1) ;
free(m→membre2) ;
free(m2) ;
free(m) ;
return 0 ;
}
```

Après compilation et exécution,un exécutable est créé. Si on l'exéxute, il :

A. ne compile pas

B. fonctionne et avant le retour de la fonction main() tout l'espace occupé par m et m2 a été libéré.