**UNIVERSITE DE YAOUNDE I**
**ECOLE NATIONALE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE DE YAOUNDE**
**DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET DE SCIENCES PHYSIQUES**
**Pr TEWA Jean Jules**

**ANNEE ACADEMIQUE 2020/2021**
**CYCLE INGENIEUR II**

# TRAVAUX DIRIGES DE VARIABLES ALEATOIRES

**Exercice 1** : Soit $X$ une variable aléatoire discrète prenant les valeurs 3, 4, 5, 6. Déterminer la loi de probabilité de $X$ sachant que : $P(X<5)=\frac{1}{3}, P(X>5)=\frac{1}{2}, P(X=3)=P(X=4)$

$P(X=3)+P(X=4)=\frac{1}{3}$
$P(X=6)=\frac{1}{2}$

**Exercice 2** : L'oral d'un examen comporte 20 sujets possibles. Le candidat tire 3 sujets au hasard. Ce candidat a révisé seulement 12 sujets. On considère la variable $X$ égale au nombre de sujets révisés parmi les 3 tirés. Quelle est la loi de probabilité de $X$. $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

$p(x=0)=\frac{8}{20}$ $p(x=1)=\frac{C_{12}^1 C_8^2}{C_{20}^3}$ $P(x=2)=\frac{C_{12}^2 C_8^1}{C_{20}}$ $P(x=3)=\frac{C_{12}^3}{C_{20}^3}$

**Exercice 3** : Un QCM comporte 5 affirmations. Pour chaque affirmation, on doit répondre par vrai (V) si l'affirmation est toujours vraie, faux (F) si elle est toujours fausse ou par (P) si on ne peut pas conclure. Une réponse au QCM est une suite de 5 lettres parmi V, F ou P.

1) Quel est le nombre de réponses possibles pour le QCM ? $3^5$
2) Le nombre de réponses comprenant exactement 3 V est-il égal à $C_5^3$ ?
3) On décide d'attribuer 2 points pour chaque réponse exacte. Combien de points doit-on retirer par réponse inexacte pour que le score d'un candidat qui répond au hasard ait une espérance mathématique nulle ?
4) Un candidat répond au hasard et on appelle $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de bonnes réponses. Indiquer la loi suivie par $X$ et préciser ses paramètres et calculer $E(X)$.

**Exercice 4** : Soit $n \in IN^*$, $\beta$ un nombre réel, $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $[0,n] \cap IN$ telle que $\forall k \in [0,n] \cap IN, P(X=k)=\frac{\beta}{k+1}C_n^k$. Déterminer $\beta$

**Exercice 5** : Dans une urne il y a $k$ boules blanches et $n-k$ boules noires $(1 \leq k \leq n-1)$. On les tire une à une et sans remise. On introduit une variable aléatoire $X$ associée au rang de la dernière boule blanche tirée.

1) Déterminer la loi de $X$
2) Montrer que $\sum_{l=p}^{n} C_l^p = C_{n+1}^{p+1}$. En déduire $E(X)$

**Exercice 6** : Soit $X$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{1,2,3,4,5\}$ de loi : $P(X=i)=K(7-i)\ \forall i \in \{1,2,3,4,5\}$ où $K$ est une constante.

1) Calculer $P\left(X^2-5X+6=0\right)$
2) Calculer $P\left(X^2-5X+6>0\right)$



Scanned with CamScanner

**Exercice 7** : Des individus sont soumis à une épreuve composée de trois questions indépendantes. On propose trois réponses possibles à la première question, quatre à la deuxième et cinq à la troisième. A chaque question, une réponse et une seule est correcte. Chaque individu doit choisir une réponse à chaque question.
Si sa réponse à la première question est correcte, il a trois points. A la deuxième question, s'il a juste, il a trois points. La bonne réponse à la troisième question donne quatre points.
Soit $X$ la variable aléatoire réelle qui a pour réalisation la note obtenue à l'épreuve par un individu qui choisit au hasard les réponses aux questions.
1. Déterminer l'ensemble des réalisations possibles de $X$.
2. Déterminer la loi de probabilité de $X$.
On soumet les individus à une deuxième épreuve indépendante de la première avec le même nombre de questions, de réponses par question, de points obtenus en cas de bonne réponse (unique pour chaque question à nouveau).
On décide d'attribuer à un individu la note finale égale au maximum des notes qu'il a obtenues aux deux épreuves. Soit $Y$ cette note finale pour un individu qui répond au hasard aux deux épreuves.
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y$.

**Exercice 8** : On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la couleur rouge sinon (bref, on ne suppose pas de 0 vert. . .). Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :
- il mise initialement 1 dollar sur la couleur noire ;
- s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
- s'il perd, il double sa mise et rejoue.

1) On suppose la fortune du joueur infinie.
Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.
2) On suppose toujours la fortune du joueur infinie.
Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?
3) Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2n-1$ dollars ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

**Exercice 9** : Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $IN$ telle qu'il existe $a \in IR$ et $p \in ]0,1[$ vérifiant $P(X=k) = a C_{n+k}^{k} p^{k}$.
Calculer l'espérance et la variance de $X$.

**Exercice 10** : Un signal est diffusé via un canal et un bruit vient malheureusement s'ajouter à la transmission. Le signal est modélisé par une variable aléatoire discrète réelle $S$ d'espérance $m_s$ et de variance $\sigma_s^2$ connues. Le bruit est modélisé par une variable $B$ indépendante de $S$ d'espérance nulle et de variance $\sigma_B^2 > 0$. Après diffusion, le signal reçu est $X = S + B$.
Déterminer $a,b \in IR$ pour que $Y = aX + b$ soit au plus proche de $S$, c'est à dire tel que l'espérance $E\left((Y-S)^2\right)$ soit minimale.



Scanned with CamScanner

**Exercice 11** : Une résistance électrique a une valeur $R$ de dix ohms plus ou moins vingt pourcents. On suppose que la variable aléatoire $R$ est uniformément distribuée. Cette résistance est alimentée par une tension constante $U = 10V$. L'objet de l'exercice est d'étudier l'intensité $I$ qui traverse la résistance.

1. Déterminer la densité de probabilité $f_I$ de la variable aléatoire $I$.
2. Tracer le graphe de $f_I$ et celui de la fonction de répartition $F_I$.
3. Quelle est la probabilité d'avoir un courant d'intensité $I$ supérieur à un ampère ?
4. Quelle est l'intensité moyenne du courant ? Comparer cette valeur à $\frac{U}{E(R)}$.
5. Quels sont la variance et l'écart-type du courant ? Comparer ces valeurs à $\frac{U}{\sigma^2(R)}$ et à $\frac{U}{\sigma(R)}$
6. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner un majorant de la probabilité pour que le courant $I$ s'écarte de plus de $0,15$ ampère de sa valeur moyenne.

**Exercice 12** : Dans chacun des cas, dites si la fonction $f$ définit une densité de probabilité.

1) $f(x) = \frac{3}{x^4}$ si $x \in [1,+\infty[$ ; $f(x) = 0$ sinon

2) $f(x) = xe^{-x}$ si $x \in [0,+\infty[$ ; $f(x) = 0$ sinon

3) Soit l'intervalle $I = [1,10]$ et $\forall t \in I, f_\lambda(t) = \lambda t^{-2}$. Déterminer $\lambda$ pour que $f_\lambda$ soit une densité de probabilité.

**Exercice 13** : Dans un parc national, un guide propose quotidiennement l'observation de chamois venant s'abreuver dans un lac au coucher du soleil. Le temps d'attente du groupe $T$ en heures, avant l'arrivée des animaux, suit une loi uniforme sur $[0,1]$. Calculer les probabilités suivantes.

$P(T > 0,5); P(0,2 < T < 0,6); P(T = 0,6)$

**Exercice 14** : Une variable $T$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1) Trouver le paramètre de cette loi sachant que $P(T \leq 70) = 0,05$
2) Déduisez-en $P(T > 30)$

**Exercice 15** : Le temps, mesuré en heures, nécessaire pour réparer une machine suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

1) Quelle est la probabilité que le temps de réparation excède deux heures ?
2) Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins 10 heures, étant donné que sa durée a déjà dépassé neuf heures ?

**Exercice 16** : Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.



Scanned with CamScanner

1) Démontrer que pour deux réels positifs $s,t$ on a $P_{X>t}(X > s+t) = P(X > s)$ (loi de durée sans vieillissement).

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire $T$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

2) Déterminer une expression exacte de $\lambda > 0$ sachant que $P(T \leq 10) = 0,7$
3) Calculer la probabilité $P_{T>10}(T > 15)$
4) Sachant qu'un client a déjà attendu 10mn à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15mn.
5) On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement 6 caisses sont ouvertes. On désigne par $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10mn. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $Y$.
6) Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10mn. Déterminer la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

<u>Exercice 17</u> : Le moteur d'une voiture neuve est garanti pour 1 an. La durée de vie (ans) $T$ du moteur est une variable exponentielle de moyenne égale à 3 ans. Le profit réalisé par la vente de la voiture est de 1000\$ et le coût de réparation est supérieur à 250 pour que $E(P) = 0$

1) Quel est le profit moyen?
2) Jusqu'à quelle limite pourrait-on étendre la garantie sans perdre de l'argent?
3) Refaire les calculs (1) et (2) avec une moyenne de 2 ans et une moyenne de 4 ans.

<u>Exercice 18</u> : Un manufacturier d'appareils de télévision offre une garantie de un an. Le temps d'utilisation avant la première panne est une variable exponentielle avec une moyenne de 20000 heures. Il en coût 300\$ pour fabriquer l'appareil, 150\$ pour le réparer et il est vendu 400\$. Quel est le profit moyen du manufacturier si l'on suppose que les appareils sont en usage continu (par exemple dans les aérogares)?

<u>Exercice 19</u> : Une famille de densité de probabilité utilisée pour représenter la distribution des revenus, la taille des villes, la taille des entreprises, etc s'appelle la loi de Pareto. Elle est définie par la fonction de densité $f_X(X,k,\theta) = \begin{cases} 0 \ si \ X < \theta, k > 0, \\ \dfrac{k\theta^k}{x^{k+1}} \ si \ x \geq \theta. \end{cases}$

1) Déterminez une expression explicite (sans signe d'intégration) pour la fonction de répartition $F(X,k,\theta)$.
2) Calculer $P(2 < X < 3)$ si $k = 2$ et $\theta = 1$.
3) Déterminez une expression explicite pour le $p^{ième}$ percentile $X_p$
4) Calculer la médiane si $k = 2$ et $\theta = 1$
5) Si $k > 1$, déterminez une expression pour la moyenne et calculez si $k = 2$ et $\theta = 1$
6) Si $k > 1$, déterminez une expression pour l'écart-type



Scanned with CamScanner

**Exercice 20** : On prend au hasard un point à l'intérieur d'une sphère de rayon $r$. La probabilité que ce point appartient à une région sphérique est proportionnelle au volume de cette région. Soit $X$ la distance du point choisi au centre de la sphère.

1. Déterminer la fonction de répartition de $X$
2. Déterminer la fonction de densité de $X$.

**Exercice 21** : On considère le couple de variables aléatoires $V = (X,Y)$ de fonction densité de probabilité $p_v(x,y) = \begin{cases} \theta^x \; si \; x = 0,1,2,\cdots \\ x!e^{-\theta} C_x^y p^y (1-p)^{x-y} \; si \; y = 0,1,\cdots,x \\ 0 \; ailleurs \end{cases}$

1) Déterminez : loi de probabilité marginale de $X$, loi de probabilité conditionnelle de $Y$ étant donné $X = x$
2) Déterminer la loi marginale de $Y$
3) Calculez : moyenne de $X$, écart-type de $X$, moyenne de $Y$, écart type de $Y$.
4) Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes?

**Exercice 22** : On désigne par $X$ un nombre choisi au hasard sur l'intervalle $(0,1)$ et par la suite un nombre Y est choisit au hasard sur l'intervalle $(0,x)$ où $x$ est la réalisation de $X$

1) Déterminez la densité marginale de $X$ et la densité conditionnelle de $Y$ si $X = x$.
2) Calculez $P(X+Y>1)$.
3) Déterminez la densité $f_Y(y)$ de $Y$.
4) Calculez la moyenne de $X$, moyenne de $Y$, écart type de $X$, écart type de $Y$, coefficient de corrélation entre $X$ et $Y$.

**Exercice 23** : On considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Z = X + Y$.

1) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $Z$.
2) Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z$.
3) Montrer que pour tout $x \in ]0,1[$, les événements $\{Z>1\}$ et $\{1-x<Z\leq 1+x\}$ sont indépendants.
   On pose maintenant $T = \max(X,Y)$.
4) Déterminer une densité de la variable aléatoire $T$.
5) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $T$.
6) On pose $U = |X-Y|$. Montrer que $U$ est une combinaison linéaire de $Z$ et $T$.
7) En déduire $E(U)$.



Scanned with CamScanner