

Déterminants

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **

Montrer que
$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b).$$

[Correction ▼](#)

[005362]

Exercice 2 **

Pour a, b et c deux à deux distincts donnés, factoriser
$$\begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}.$$

[Correction ▼](#)

[005363]

Exercice 3 ***

Calculer :

1. $\det(|i-j|)_{1 \leq i, j \leq n}$

2. $\det(\sin(a_i + a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ (a_1, \dots, a_n étant n réels donnés)

3.
$$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & b \\ 0 & a & \ddots & & b & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & b & & & a & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & \dots & a \end{vmatrix}$$

4.
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5. $\det(C_{n+i-1}^{j-1})_{1 \leq i, j \leq p+1}$

6.
$$\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -X & 1 \\ a_0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} - X \end{vmatrix}$$

[Correction ▼](#)

[005364]

Exercice 4 **** Déterminant de CAUCHY et déterminant de HILBERT

Soit $A = \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ où $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont $2n$ réels tels que toutes les sommes $a_i + b_j$ soient non nulles. Calculer $\det A$ (en généralisant l'idée du calcul d'un déterminant de VANDERMONDE par l'utilisation d'une fraction rationnelle) et en donner une écriture condensée dans le cas $a_i = b_i = i$.

[Correction ▼](#)

[005365]

Exercice 5 ****

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ où, pour tout i et tout j , $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$. Montrer que $\det A$ est un entier divisible par 2^{n-1} .

[Correction ▼](#)

[005366]

Exercice 6 ***

Résoudre le système $MX = U$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 2^2 & \dots & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix}$.

[Correction ▼](#)

[005367]

Exercice 7 *I**

Soit $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ et $C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det C \geq 0$.

[Correction ▼](#)

[005368]

Exercice 8 **I

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$. Montrer que $\det B = \det A$.

[Correction ▼](#)

[005369]

Exercice 9 *I**

Déterminer les matrices A , carrées d'ordre n , telles que pour toute matrice carrée B d'ordre n on a $\det(A + B) = \det A + \det B$.

[Correction ▼](#)

[005370]

Exercice 10 **** Déterminant circulant

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ et $P = (\omega^{(k-1)(l-1)})_{1 \leq k, l \leq n}$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer P^2 et PA . En déduire $\det A$.

[Correction ▼](#)

[005371]

Exercice 11 *I**

Calculer $\det(\operatorname{com} A)$ en fonction de $\det A$ puis étudier le rang de $\operatorname{com} A$ en fonction du rang de A .

[Correction ▼](#)

[005372]

Exercice 12 *I** Dérivée d'un déterminant

Soient $a_{i,j}$ $((i, j)$ élément de $\{1, \dots, n\}^2$) n^2 fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , dérivables sur \mathbb{R} et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \det(A(x))$.

Applications. Calculer

$$1. \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$2. \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x \\ x & \dots & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}$$

[Correction ▼](#)

[005373]

Exercice 13 ***I

Calculer

$$1. \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$2. \det((i+j-1)^2)$$

$$3. \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

$$4. \begin{vmatrix} a_1+x & c+x & \dots & \dots & c+x \\ b+x & a_2+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1}+x & c+x \\ b+x & \dots & \dots & b+x & a_n+x \end{vmatrix} \quad b, c \text{ complexes distincts}$$

$$5. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

[Correction ▼](#)

[005374]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Notons Δ le déterminant de l'énoncé. Pour x réel, on pose $D(x) = \begin{vmatrix} -2x & x+b & x+c \\ b+x & -2b & b+c \\ c+x & c+b & -2c \end{vmatrix}$ (de sorte que $\Delta = D(a)$). D est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Le coefficient de x^2 vaut

$$-(-2c) + (b+c) + (b+c) - (-2b) = 4(b+c).$$

Puis,

$$D(-b) = \begin{vmatrix} 2b & 0 & -b+c \\ 0 & -2b & b+c \\ c-b & c+b & -2c \end{vmatrix} = 2b(4bc - (b+c)^2) + 2b(c-b)^2 = 0,$$

et par symétrie des rôles de b et c , $D(-c) = 0$. De ce qui précède, on déduit que si $b \neq c$, $D(x) = 4(b+c)(x+b)(x+c)$ (même si $b+c=0$ car alors D est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 admettant au moins deux racines distinctes et est donc le polynôme nul). Ainsi, si $b \neq c$ (ou par symétrie des rôles, si $a \neq b$ ou $a \neq c$), on a : $\Delta = 4(b+c)(a+b)(a+c)$. Un seul cas n'est pas encore étudié à savoir le cas où $a = b = c$. Dans ce cas,

$$D(a) = \begin{vmatrix} -2a & 2a & 2a \\ 2a & -2a & 2a \\ 2a & 2a & -2a \end{vmatrix} = 8a^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 32a^3 = 4(a+a)(a+a)(a+a),$$

ce qui démontre l'identité proposée dans tous les cas (on pouvait aussi conclure en constatant que, pour a et b fixés, la fonction Δ est une fonction continue de c et on obtient la valeur de Δ pour $c = b$ en faisant tendre c vers b dans l'expression de Δ déjà connue pour $c \neq b$).

$$\Delta = 4(a+b)(a+c)(b+c).$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit $P = \begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$. P est un polynôme unitaire de degré 4. En remplaçant C_1 par $C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ et

par linéarité par rapport à la première colonne, on voit que P est divisible par $(X + a + b + c)$. Mais aussi, en remplaçant C_1 par $C_1 - C_2 - C_3 + C_4$ ou $C_1 - C_2 + C_3 - C_4$ ou $C_1 + C_2 - C_3 - C_4$, on voit que P est divisible par $(X - a - b + c)$ ou $(X - a + b - c)$ ou $(X + a - b - c)$. **1er cas.** Si les quatre nombres $-a - b - c$, $-a + b + c$, $a - b + c$ et $a + b - c$ sont deux à deux distincts, P est unitaire de degré 4 et divisible par les quatre facteurs de degré 1 précédents, ceux-ci étant deux à deux premiers entre eux. Dans ce cas, $P = (X + a + b + c)(X + a + b - c)(X + a - b + c)(X - a + b + c)$. **2ème cas.** Deux au moins des quatre nombres $-a - b - c$, $-a + b + c$, $a - b + c$ et $a + b - c$ sont égaux. Notons alors que $-a - b - c = a + b - c \Leftrightarrow b = -a$ et que $-a + b + c = a - b + c \Leftrightarrow a = b$. Par symétrie des rôles, deux des quatre nombres $-a - b - c$, $-a + b + c$, $a - b + c$ et $a + b - c$ sont égaux si et seulement si deux des trois nombres $|a|$, $|b|$ ou $|c|$ sont égaux. On conclut dans ce cas que l'expression de P précédemment trouvée reste valable par continuité par rapport à a , b ou c .

$$P = (X + a + b + c)(X + a + b - c)(X + a - b + c)(X - a + b + c).$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Pour $n \geq 2$, posons $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Tout d'abord, on fait apparaître beaucoup de 1. Pour cela, on effectue les transformations $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ puis \dots puis $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$. On obtient

$$\Delta_n = \det(C_1 - C_2, C_2 - C_3, \dots, C_{n-1} - C_n, C_n) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & & \vdots & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On fait alors apparaître un déterminant triangulaire en constatant que $\det(L_1, L_2, \dots, L_n) = \det(L_1, L_2 + L_1, \dots, L_{n-1} + L_1, L_n + L_1)$. On obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -1 & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -2 & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix} = (1-n)(-2)^{n-2}.$$

$$\boxed{\forall n \geq 2, \Delta_n = (1-n)(-2)^{n-2}.}$$

2. $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\sin(a_i + a_j) = \sin a_i \cos a_j + \cos a_i \sin a_j$ et donc si on pose $C = \begin{pmatrix} \cos a_1 \\ \cos a_2 \\ \vdots \\ \cos a_n \end{pmatrix}$ et $S =$

$\begin{pmatrix} \sin a_1 \\ \sin a_2 \\ \vdots \\ \sin a_n \end{pmatrix}$, on a $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_j = \cos a_j S + \sin a_j C$. En particulier, $\text{Vect}(C_1, \dots, C_n) \subset \text{Vect}(C, S)$ et le

rang de la matrice proposée est inférieur ou égal à 2. Donc,

$$\boxed{\forall n \geq 3, \det(\sin(a_i + a_j))_{1 \leq i, j \leq n} = 0.}$$

Si $n = 2$, $\det(\sin(a_i + a_j))_{1 \leq i, j \leq 2} = \sin(2a_1) \sin(2a_2) - \sin^2(a_1 + a_2)$.

3. L'exercice n'a de sens que si le format n est pair. Posons $n = 2p$ où p est un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & a+b & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & b+a & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ b+a & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \quad (\text{pour } 1 \leq j \leq p, C_j \leftarrow C_j + C_{2p+1-j}) \\
&= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & a & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix} \quad (\text{par linéarité par rapport aux colonnes } C_1, C_2, \dots, C_p) \\
&= (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & b & 0 & \vdots \\ & & \ddots & a-b & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} \quad (\text{pour } p+1 \leq i \leq 2p, L_i \leftarrow L_i - L_{2p+1-i}).
\end{aligned}$$

et $\Delta_n = (a+b)^p(a-b)^p = (a^2 - b^2)^p$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \Delta_{2p} = (a^2 - b^2)^p.}$$

4. On retranche à la première colonne la somme de toutes les autres et on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(n-2) & 1 & \dots & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(n-2).$$

5. Pour $1 \leq i \leq p$,

$$L_{i+1} - L_i = (C_{n+i}^0 - C_{n+i-1}^0, C_{n+i}^1 - C_{n+i-1}^1, \dots, C_{n+i}^p - C_{n+i-1}^p) = (0, C_{n+i-1}^0, C_{n+i-1}^1, \dots, C_{n+i-1}^{p-1}).$$

On remplace alors dans cet ordre L_p par $L_p - L_{p-1}$ puis L_{p-1} par $L_{p-1} - L_{p-2}$ puis ... puis L_2 par $L_2 - L_1$ pour obtenir, avec des notations évidentes

$$\det(A_p) = \begin{vmatrix} 1 & \\ 0 & A_{p-1} \end{vmatrix} = \det(A_{p-1}).$$

Par suite, $\det(A_p) = \det(A_{p-1}) = \dots = \det(A_1) = 1$.

6. En développant suivant la dernière ligne, on obtient :

$$D_n = (a_{n-1} - X)(-X)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k+1} a_k \Delta_k,$$

$$\text{où } \Delta_k = \left| \begin{array}{ccc|ccc} -X & 1 & 0 & & & \\ 0 & \ddots & 1 & & & \\ 0 & 0 & -X & & & \\ \hline 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & -X & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & -X & 1 \end{array} \right| = (-1)^k X^k \text{ et donc}$$

$$\forall n \geq 2, D_n = (-1)^n (X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k).$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Si deux des b_j sont égaux, $\det(A)$ est nul car deux de ses colonnes sont égales. On suppose dorénavant que les b_j sont deux à deux distincts. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, n nombres complexes tels que $\lambda_n \neq 0$. On a

$$\det A = \frac{1}{\lambda_n} \det(C_1, \dots, C_{n-1}, \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j) = \det B,$$

où la dernière colonne de B est de la forme $(R(a_i))_{1 \leq i \leq n}$ avec $R = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{X+b_j}$. On prend $R = \frac{(X-a_1) \dots (X-a_{n-1})}{(X+b_1) \dots (X+b_n)}$. R ainsi définie est irréductible (car $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_i \neq -b_j$). Les pôles de R sont simples et la partie entière de R est nulle. La décomposition en éléments simples de R a bien la forme espérée. Pour ce choix de R , puisque $R(a_1) = \dots = R(a_{n-1}) = 0$, on obtient en développant suivant la dernière colonne

$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda_n} R(a_n) \Delta_{n-1},$$

avec

$$\lambda_n = \lim_{z \rightarrow -b_n} (z + b_n) R(z) = \frac{(-b_n - a_1) \dots (-b_n - a_{n-1})}{(-b_n + b_1) \dots (-b_n + b_{n-1})} = \frac{(a_1 + b_n) \dots (a_{n-1} + b_n)}{(b_n - b_1) \dots (b_n - b_{n-1})}.$$

Donc

$$\forall n \geq 2, \Delta_n = \frac{(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})(b_n - b_1) \dots (b_n - b_{n-1})}{(a_n + b_1)(a_n + b_2) \dots (a_n + b_n) \dots (a_2 + b_n)(a_1 + b_n)} \Delta_{n-1}.$$

En réitérant et compte tenu de $\Delta_1 = 1$, on obtient

$$\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)} = \frac{\text{Van}(a_1, \dots, a_n) \text{Van}(b_1, \dots, b_n)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}.$$

Dans le cas particulier où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i = b_i = i$, en notant H_n le déterminant (de HILBERT) à calculer :

$$H_n = \frac{\text{Van}(1, 2, \dots, n)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)}.$$
 Mais,

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} (i+j) = \prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^n (i+j) \right) = \prod_{i=1}^n \frac{(n+i)!}{i!} = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k!}{(\prod_{k=1}^n k!)^2},$$

et d'autre part,

$$\text{Van}(1, 2, \dots, n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^n (j-i) \right) = \prod_{i=1}^{n-1} (n-i)! = \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n k!.$$

Donc,

$$\forall n \geq 1, H_n = \frac{(\prod_{k=1}^n k!)^3}{n!^2 \times \prod_{k=1}^{2n} k!}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

On procède par récurrence sur $n \geq 1$. • Pour $n = 1$, c'est clair. • Soit $n \geq 1$. Supposons que tout déterminant Δ_n de format n et du type de l'énoncé soit divisible par 2^{n-1} . Soit Δ_{n+1} un déterminant de format $n+1$, du type de l'énoncé. Si tous les coefficients $a_{i,j}$ de Δ_{n+1} sont égaux à 1, puisque $n+1 \geq 2$, Δ_{n+1} a deux colonnes égales et est donc nul. Dans ce cas, Δ_{n+1} est bien divisible par 2^n . Sinon, on va changer petit à petit tous les -1 en 1. Soit (i, j) un couple d'indices tel que $a_{i,j} = -1$ et Δ'_{n+1} le déterminant dont tous les coefficients sont égaux à ceux de Δ_{n+1} sauf le coefficient ligne i et colonne j qui est égal à 1.

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = \det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_n) - \det(C_1, \dots, C'_j, \dots, C_n) = \det(C_1, \dots, C_j - C'_j, \dots, C_n),$$

$$\text{où } C_j - C'_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (-2 \text{ en ligne } i). \text{ En développant ce dernier déterminant suivant sa } j\text{-ème colonne, on}$$

obtient :

$$\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1} = -2\Delta_n,$$

où Δ_n est un déterminant de format n et du type de l'énoncé. Par hypothèse de récurrence, Δ_n est divisible par 2^{n-1} et donc $\Delta_{n+1} - \Delta'_{n+1}$ est divisible par 2^n . Ainsi, en changeant les -1 en 1 les uns après les autres, on obtient

$$\Delta_{n+1} \equiv \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \pmod{2^n}.$$

Ce dernier déterminant étant nul, le résultat est démontré par récurrence.

Correction de l'exercice 6 ▲

$\Delta = \det M = \text{Van}(1, 2, \dots, n) \neq 0$ et le système est de CRAMER. Les formules de CRAMER fournissent alors pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ où

$$\Delta_k = \text{Van}(1, \dots, k-1, 0, k+1, \dots, n) = (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} 1 & \dots & k-1 & k+1 & \dots & n \\ 1 & & (k-1)^2 & (k+1)^2 & & n^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & & (k-1)^{n-1} & (k+1)^{n-1} & & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(en développant par rapport à la k -ème colonne). Par linéarité par rapport à chaque colonne, on a alors

$$\begin{aligned} \Delta_k &= (-1)^{k+1} 1 \times 2 \dots \times (k-1) \times (k+1) \times \dots \times n \times \text{Van}(1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{n!}{k(k-(k-1)) \dots (k-1)((k+1)-k) \dots (n-k)} \text{Van}(1, 2, \dots, n) = (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \Delta, \end{aligned}$$

et donc,

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = (-1)^{k+1} C_n^k.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

En remplaçant les colonnes C_1, \dots, C_n par respectivement $C_1 + iC_{n+1}, \dots, C_n + iC_{2n}$, on obtient :

$$\det C = \det \begin{pmatrix} A + iB & B \\ -B + iA & A \end{pmatrix},$$

puis en remplaçant les lignes L_{n+1}, \dots, L_{2n} de la nouvelle matrice par respectivement $L_{n+1} - iL_1, \dots, L_{2n} - iL_n$, on obtient :

$$\det C = \det \begin{pmatrix} A + iB & B \\ 0 & A - iB \end{pmatrix} = \det(A + iB) \det(A - iB) = |\det(A + iB)|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1ère solution.

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) (-1)^{1+\sigma(1)+2+\sigma(2)+\dots+n+\sigma(n)} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \text{ (car } 1 + \sigma(1) + 2 + \sigma(2) + \dots + n + \sigma(n) = 2(1 + 2 + \dots + n) \in 2\mathbb{N}) \\ &= \det A \end{aligned}$$

2ème solution. On multiplie par -1 les lignes 2, 4, 6... puis les colonnes 2, 4, 6... On obtient $\det B = (-1)^{2p} \det A = \det A$ (où p est le nombre de lignes ou de colonnes portant un numéro pair).

Correction de l'exercice 9 ▲

On suppose $n \geq 2$. La matrice nulle est solution du problème. Soit A un élément de $M_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall B \in M_n(\mathbb{C}), \det(A + B) = \det A + \det B$. En particulier, $2\det A = \det(2A) = 2^n \det A$ et donc $\det A = 0$ car $n \geq 2$. Ainsi, $A \notin GL_n(\mathbb{C})$. Si $A \neq 0$, il existe une certaine colonne C_j qui n'est pas nulle. Puisque la colonne $-C_j$ n'est pas nulle, on peut compléter la famille libre $(-C_j)$ en une base $(C'_1, \dots, -C_j, \dots, C'_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{C})$. La matrice B dont les colonnes sont justement $C'_1, \dots, -C_j, \dots, C'_n$ est alors inversible de sorte que $\det A + \det B = \det B \neq 0$. Mais, $A + B$ a une colonne nulle et donc $\det(A + B) = 0 \neq \det A + \det B$. Ainsi, seule la matrice nulle peut donc être solution du problème.

$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), (\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \det(A + M) = \det(A) + \det(M)) \Leftrightarrow A = 0.$

Correction de l'exercice 10 ▲

• Soit $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Le coefficient ligne k , colonne l de P^2 est

$$\alpha_{k,l} = \sum_{u=1}^n \omega^{(k-1)(u-1)} \omega^{(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^n \omega^{(k+l-2)(u-1)} = \sum_{u=0}^{n-1} (\omega^{k+l-2})^u.$$

Or, $\omega^{k+l-2} = 1 \Leftrightarrow k+l-2 \in n\mathbb{Z}$. Mais, $0 \leq k+l-2 \leq 2n-2 < 2n$ et donc, $k+l-2 \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k+l-2 \in \{0, n\} \Leftrightarrow k+l=2$ ou $k+l=n+2$. Dans ce cas, $\alpha_{k,l} = n$. Sinon,

$$\alpha_{k,l} = \frac{1 - (\omega^{k+l-2})^n}{1 - \omega^{k+l-2}} = \frac{1 - 1}{1 - \omega^{k+l-2}} = 0.$$

Ainsi, $P^2 = n \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. • Soit $(k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Le coefficient ligne k , colonne l de $P\bar{P}$ est

$$\beta_{k,l} = \sum_{u=1}^n \omega^{(k-1)(u-1)} \omega^{-(u-1)(l-1)} = \sum_{u=1}^n (\omega^{k-l})^{u-1}.$$

Or, $\omega^{k-l} = 1 \Leftrightarrow k-l \in n\mathbb{Z}$. Mais, $-n < -(n-1) \leq k-l \leq n-1 < n$ et donc $k-l \in n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k=l$. Dans ce cas, $\beta_{k,l} = n$. Sinon, $\beta_{k,l} = 0$. Ainsi, $P\bar{P} = nI_n$ (ce qui montre que $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $P^{-1} = \frac{1}{n}\bar{P}$). Calculons enfin PA . Il faut d'abord écrire proprement les coefficients de A . Le coefficient ligne k , colonne l de A peut s'écrire a_{l-k+1} si l'on adopte la convention commode $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ et plus généralement pour tout entier relatif k , $a_{n+k} = a_k$. Avec cette convention d'écriture, le coefficient ligne k , colonne l de PA vaut

$$\sum_{u=1}^n \omega^{(k-1)(u-1)} a_{l-u+1} = \sum_{v=l-n+1}^l \omega^{(k-1)(l-v)} a_v.$$

Puis on réordonne cette somme pour qu'elle commence par a_1 .

$$\begin{aligned} \sum_{v=l-n+1}^l \omega^{(k-1)(l-v)} a_v &= \sum_{v=1}^l \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{v=l-n+1}^0 \omega^{(k-1)(l-v)} a_v \\ &= \sum_{v=1}^l \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{w=l+1}^n \omega^{(k-1)(l-w+n)} a_{w+n} \text{ (en posant } w = v+n) \\ &= \sum_{v=1}^l \omega^{(k-1)(l-v)} a_v + \sum_{w=l+1}^n \omega^{(k-1)(l-w)} a_w \\ &= \sum_{v=1}^n \omega^{(k-1)(l-v)} a_v = \omega^{(k-1)(l-1)} \sum_{v=1}^n \omega^{(k-1)(1-v)} a_v \end{aligned}$$

(le point clé du calcul précédent est que les suites (a_k) et (ω^k) ont la même période n ce qui s'est traduit par $\omega^{(k-1)(l-w+n)} a_{w+n} = \omega^{(k-1)(l-v)} a_v$). Pour k élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$, posons alors $S_k = \sum_{v=1}^n \omega^{(k-1)(1-v)} a_v$. On a montré que $PA = (\omega^{(k-1)(l-1)} S_k)_{1 \leq k, l \leq n}$.

Par linéarité par rapport à chaque colonne, on a alors

$$\det(PA) = \det(\omega^{(k-1)(l-1)} S_k)_{1 \leq k, l \leq n} = (\prod_{k=1}^n S_k) \times \det(\omega^{(k-1)(l-1)})_{1 \leq k, l \leq n} = (\prod_{k=1}^n S_k) \times \det P.$$

Donc $(\det P)(\det A) = (\prod_{k=1}^n S_k) \det P$ et finalement, puisque $\det P \neq 0$,

$$\boxed{\det A = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{v=1}^n \omega^{(k-1)(1-v)} a_v \right)}.$$

Par exemple, pour $n = 3$, $\det A = (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + ja_2 + j^2 a_3)(a_1 + j^2 a_2 + ja_3)$.

Correction de l'exercice 11 ▲

On a toujours $A \times {}^t \text{com} A = (\det A) I_n$ et donc

$$(\det A)(\det(\text{com} A)) = (\det A)(\det({}^t \text{com} A)) = \det(\det A I_n) = (\det A)^n.$$

• Si $\det A \neq 0$, on obtient $\det(\text{com} A) = (\det A)^{n-1}$. • Si $\det A = 0$, alors $A {}^t \text{com} A = 0$ et $\text{com} A$ n'est pas inversible car sinon, $A = 0$ puis $\text{com} A = 0$ ce qui est absurde. Donc, $\det(\text{com} A) = 0$. Ainsi, dans tous les cas,

$$\boxed{\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \det(\text{com} A) = (\det A)^{n-1}}.$$

• Si $\text{rg}A = n$, alors $\text{com}A \in GL_n(\mathbb{K})$ (car $\det(\text{com}A) \neq 0$) et $\text{rg}(\text{com}A) = n$. • Si $\text{rg}A \leq n-2$, alors tous les mineurs de format $n-1$ sont nuls et $\text{com}A = 0$. Dans ce cas, $\text{rg}(\text{com}A) = 0$. • Si $\text{rg}A = n-1$, il existe un mineur de format $n-1$ non nul et $\text{com}A \neq 0$. Dans ce cas, $1 \leq \text{rg}(\text{com}A) \leq n-1$. Plus précisément,

$$A' \text{com}A = 0 \Rightarrow \text{com}A' A = 0 \Rightarrow \text{Im}(^t A) \subset \text{Ker}(\text{com}A) \Rightarrow \dim(\text{Ker}(\text{com}A)) \geq \text{rg}(^t A) = \text{rg}A = n-1 \Rightarrow \text{rg}(\text{com}A) \leq 1,$$

et finalement si $\text{rg}A = n-1$, $\text{rg}(\text{com}A) = 1$.

Correction de l'exercice 12 ▲

$$\begin{aligned} (\det A)' &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \right)' = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(\sum_{k=1}^n a_{\sigma(1),1} \dots a'_{\sigma(k),k} \dots a_{\sigma(n),n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a'_{\sigma(k),k} \dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{k=1}^n \det(C_1, \dots, C'_k, \dots, C_n) \end{aligned}$$

Applications.

$$1. \text{ Soit } \Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}. \Delta_n \text{ est un polynôme dont la dérivée est d'après ce qui}$$

précède, $\Delta'_n = \sum_{k=1}^n \delta_k$ où δ_k est le déterminant déduit de Δ_n en remplaçant sa k -ème colonne par le k -ème vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$. En développant δ_k par rapport à sa k -ème colonne, on obtient $\delta_k = \Delta_{n-1}$ et donc $\Delta'_n = n\Delta_{n-1}$. Ensuite, on a déjà $\Delta_1 = X+1$ puis $\Delta_2 = (X+1)^2 - 1 = X^2 + 2X \dots$ Montrons par récurrence que pour $n \geq 1$, $\Delta_n = X^n + nX^{n-1}$. C'est vrai pour $n=1$ puis, si pour $n \geq 1$, $\Delta_n = X^n + nX^{n-1}$ alors $\Delta'_{n+1} = (n+1)X^n + (n+1)nX^{n-1}$ et, par intégration, $\Delta_{n+1} = X^{n+1} + (n+1)X^n + \Delta_{n+1}(0)$. Mais, puisque $n \geq 1$, on a $n+1 \geq 2$ et $\Delta_{n+1}(0)$ est un déterminant ayant au moins deux colonnes identiques. Par suite, $\Delta_{n+1}(0) = 0$ ce qui montre que $\Delta_{n+1} = X^{n+1} + (n+1)X^n$. Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta_n = x^n + nx^{n-1}.}$$

$$2. \text{ Soit } \Delta_n(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}. \Delta_n = \det(a_1 e_1 + xC, \dots, a_n e_n + xC) \text{ où } e_k \text{ est le } k\text{-ème}$$

vecteur de la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et C est la colonne dont toutes les composantes sont égales à 1. Par linéarité par rapport à chaque colonne, Δ_n est somme de 2^n déterminants mais dès que C apparaît deux fois, le déterminant correspondant est nul. Donc, $\Delta_n = \det(a_1 e_1, \dots, a_n e_n) + \sum \det(a_1 e_1, \dots, xC, \dots, a_n e_n)$. Ceci montre que Δ_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. La formule de TAYLOR fournit alors : $\Delta_n = \Delta_n(0) + X\Delta'_n(0)$. Immédiatement, $\Delta_n(0) = \prod_{k=1}^n a_k = \sigma_n$ puis $\Delta'_n(0) = \sum_{k=1}^n \det(a_1 e_1, \dots, C, \dots, a_n e_n) = \sum_{k=1}^n \prod_{i \neq k} a_i = \sigma_{n-1}$. Donc, $\Delta_n = \sigma_n + X\sigma_{n-1}$.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Pour le premier déterminant, on retranche la première colonne à chacune des autres et on obtient un déterminant triangulaire inférieur dont la valeur est $(-1)^{n-1}$. Pour le deuxième, on ajoute à la première colonne la somme de toutes les autres, puis on met $(n-1)$ en facteurs de la première colonne et on tombe sur le premier déterminant. Le deuxième déterminant vaut donc $(-1)^{n-1}(n-1)$.

2. Pour (i, j) élément de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$, $(i + j - 1)^2 = j^2 + 2(i - 1)j + (i - 1)^2$. Donc,

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, C_j = j^2(1)_{1 \leq i \leq n} + 2j(i - 1)_{1 \leq i \leq n} + ((i - 1)^2)_{1 \leq i \leq n}.$$

Les colonnes de la matrice sont donc éléments de $\text{Vect}((1)_{1 \leq i \leq n}, (i - 1)_{1 \leq i \leq n}, ((i - 1)^2)_{1 \leq i \leq n})$ qui est de dimension inférieure ou égale à 3 et la matrice proposée est de rang inférieur ou égal à 3. Donc, si

$$n \geq 4, \Delta_n = 0. \text{ Il reste ensuite à calculer } \Delta_1 = 1 \text{ puis } \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = -7 \text{ puis } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = (225 - 256) - 4(100 - 144) + 9(64 - 81) = -31 + 176 - 153 = -8.$$

3.

$$\Delta_n = \det(C_1, \dots, C_n) = \det(C_1 + \dots + C_n, C_2, \dots, C_n) = (a + (n - 1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix},$$

par linéarité par rapport à la première colonne. Puis, aux lignes numéros 2, ..., n, on retranche la première ligne pour obtenir :

$$\Delta_n = (a + (n - 1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a - b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a - b \end{vmatrix} = (a + (n - 1)b)(a - b)^{n-1}.$$

4. Par n linéarité, D_n est somme de 2^n déterminants. Mais dans cette somme, un déterminant est nul dès qu'il

contient au moins deux colonnes de x . Ainsi, en posant $\Delta_n = \det(C_1 + xC, \dots, C_n + xC)$ où $C_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \\ b \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

et $C = (1)_{1 \leq i \leq n}$, on obtient :

$$\Delta_n = \det(C_1, \dots, C_n) + \sum_{k=1}^n \det(C_1, \dots, C_{k-1}, xC, C_{k+1}, \dots, C_n),$$

ce qui montre que Δ_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. Posons $\Delta_n = AX + B$ et $P = \prod_{k=1}^n (a_k - X)$. Quand $x = -b$ ou $x = -c$, le déterminant proposé est triangulaire et se calcule donc immédiatement. Donc : **1er cas.** Si $b \neq c$, $\Delta_n(-b) = P(b)$ et $\Delta_n(-c) = P(c)$ fournit le système $\begin{cases} -bA + B = P(b) \\ -cA + B = P(c) \end{cases}$

et donc $A = -\frac{P(c) - P(b)}{c - b}$ et $B = \frac{cP(b) - bP(c)}{c - b}$. Ainsi,

$$\text{si } b \neq c, \Delta_n = -\frac{P(c) - P(b)}{c - b}x + \frac{cP(b) - bP(c)}{c - b} \text{ où } P = \prod_{k=1}^n (a_k - X).$$

2ème cas. Si $b = c$, l'expression obtenue en fixant x et b est clairement une fonction continue de c car polynômiale en c . On obtient donc la valeur de Δ_n quand $b = c$ en faisant tendre c vers b dans l'expression déjà connue de Δ_n pour $b \neq c$. Maintenant, quand b tend vers c , $-\frac{P(c) - P(b)}{c - b}$ tend vers $-P'(b)$ et

$$\frac{cP(b) - bP(c)}{c - b} = \frac{c(P(b) - P(c)) + (c - b)P(c)}{c - b},$$

tend vers $-bP'(b) + P(b)$.

$$\text{si } b = c, \Delta_n = -xP'(b) + P(b) - bP'(b) \text{ où } P = \prod_{k=1}^n (a_k - X).$$

5. $\Delta_2 = 3$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 2 = 4$. Puis, pour $n \geq 4$, on obtient en développant suivant la première colonne :

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}.$$

D'où, pour $n \geq 4$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$ et la suite $(\Delta_n - \Delta_{n-1})_{n \geq 3}$ est constante. Par suite, pour $n \geq 3$, $\Delta_n - \Delta_{n-1} = \Delta_3 - \Delta_2 = 1$ et donc la suite $(\Delta_n)_{n \geq 2}$ est arithmétique de raison 1. On en déduit que, pour $n \geq 2$, $\Delta_n = \Delta_2 + (n-2) \times 1 = n+1$ (on pouvait aussi résoudre l'équation caractéristique de la récurrence double).

$$\forall n \geq 2, \Delta_n = n+1.$$