Chapitre 1
Espaces Métriques, Suites

Jusqu'au milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, les notions d'espaces et de fonctions continues semblaient naturelles. Cependant, l'exigence d'une rigueur croissante et l'apparition de certaines contradictions ont entraîné une axiomatisation de certaines notions. C'est ainsi qu'est apparue la notion précise de distance et d'espace métrique due principalement à Fréchet (1906). Cette notion répondait aux besoins des géomètres pour qui cette notion de distance est liée intrinsèquement à la notion de voisinage et de proximité, et répondait aussi aux besoins des analystes pour qui cette notion permettait de donner une caractérisation rigoureuse de la notion de suites convergentes et de fonctions continues.

Pour votre étude, je vous conseille le plan suivant :

- **Semaine 1 :** Etude du paragraphe 1 et du sous-paragraphe 2.1. Faire les exercices d'apprentissage 1.1—1.8 et les exercices d'approfondissement 1.28—1.30.
- **Semaine 2 :** Etude des sous-paragraphes 2.2, 2.3, 3.1 et 3.2. Faire les exercices d'apprentissage 1.9—1.12 et les exercices d'approfondissement 1.31—1.33.
- **Semaine 3 :** Etude des sous-paragraphes 3.3, 3.4, 3.5 et du paragraphe 4. Faire les exercices d'apprentissage 1.13—1.17 et les exercices d'approfondissement 1.34—1.40.
- **Semaine 4 :** Etude du paragraphe 5. Faire les exercices d'apprentissage 1.18—1.27 et les exercices d'approfondissement 1.41.—1.47.

1. Généralités.

1.1. Notions de distance.

$\star$ **1.1.1. Définition.** Soit E un ensemble non vide. On dit que d est une *distance* sur E si et seulement si d est une application de E^2 dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\begin{array}{llll}
(i) & \forall (x,y) \in E^2, & d(x,y) = 0 \iff x = y & \text{(séparation)} \\
(ii) & \forall (x,y) \in E^2, & d(x,y) = d(y,x) & \text{(symétrie)} \\
(iii) & \forall (x,y,z) \in E^3, & d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) & \text{(inégalité triangulaire)}
\end{array}$$

Dans ce cas, on dit que (E,d) est un *espace métrique.*

⋆ **1.1.2. Propriétés.**

- $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n, \qquad d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$
- $\forall (x, y, z) \in E^3, \qquad d(x, y) \geq |d(x, z) - d(z, y)|$ (deuxième inégalité triangulaire)
- Si d est une distance alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, λd est une distance.

Preuve. Nous ne prouverons que le deuxième point (les deux autres font l'objet de l'exercice 1.1). Cette inégalité est importante, et est presque aussi utile que l'inégalité triangulaire.

Soient donc x, y et z dans E. L'inégalité triangulaire nous donne $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, ce qui implique que $d(x, y) \geq d(x, z) - d(y, z)$.

D'autre part, l'inégalité triangulaire nous donne aussi $d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y)$, ce qui implique donc que $d(x, y) \geq d(y, z) - d(x, z)$; d'où le résultat. □

⋆ **1.1.3. Exemples.**

- Si E est un ensemble quelconque non vide, et si pour x et y éléments de E, on pose

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y, \end{cases}$$

alors (E, d) est un espace métrique. (Exercice 1.2). On dit que d est la *distance discrète* sur E.

- Si, pour x et y dans $\mathbb{R}$, on pose $d(x, y) = |x - y|$, alors $(\mathbb{R}, d)$ est un espace métrique (Exercice 1.3).

- Si, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

alors $(\mathbb{R}^n, d)$ est un espace métrique. On dit que d définit la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

La séparation et la symétrie sont laissées en exercice au lecteur.

La démonstration de l'inégalité triangulaire utilise l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz : si pour x et y dans $\mathbb{R}^n$, on note

$$\|x\|_2 = d(x, 0) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

alors, pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2. \tag{CS}$$

Pour prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on utilise le fait que, si x et y sont fixés, alors l'application φ qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $\varphi(t) = \|x + ty\|_2^2$ est positive ou nulle. Tout d'abord, si $y = 0$, l'inégalité (CS) est claire. Supposons donc $y \neq 0$.

Un calcul direct nous donne que

$$\varphi(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle = t^2 \langle y, y \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle x, x \rangle = t^2 \|y\|_2^2 + 2t \langle x, y \rangle + \|x\|_2^2.$$

$\varphi(t)$ est donc un polynôme en t de degré deux, positif ou nul. Cela entraîne que le discrimant de ce polynôme est négatif ou nul, soit encore

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|_2^2\|y\|_2^2 \leq 0.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz découle alors de cette dernière inégalité.

Montrons maintenant l'inégalité triangulaire. Pour tous u, v dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \|u+v\|_2^2 &= \|u\|_2^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|_2^2 \\ &\leq \|u\|_2^2 + 2\|u\|_2\|v\|_2 + \|v\|_2^2 \quad \text{(par Cauchy-Schwarz)} \\ &= (\|u\|_2 + \|v\|_2)^2. \end{aligned}$$

Si on pose $u = x - y$ et $v = y - z$, ceci donne

$$\|x - z\|_2 \leq \|x - y\|_2 + \|y - z\|_2,$$

d'où l'inégalité triangulaire. □

- On peut généraliser les deux exemples précédents en introduisant la notion de distance associée à une norme.

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ (égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$). On dit que l'application qui à x dans E associe $\|x\| \in \mathbb{R}_+$ est une *norme* sur E si et seulement si :

$$\begin{array}{llll} (i) & \forall x \in E, & \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0 & \\ (ii) & \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, & \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| & \text{(homogénéité)} \\ (iii) & \forall (x, y) \in E^2, & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| & \text{(inégalité triangulaire)} \end{array}$$

Dans ce cas, si pour x et y dans E, on pose $d(x, y) = \|x - y\|$, alors (E, d) est un espace métrique (Exercice 1.4). On dit que d est la *distance associé à la norme* $\|\cdot\|$. Les paragraphes suivants vont développer cette notion de distance associée à des normes.

1.2. Les distances associées aux normes $\|\cdot\|_p$ dans $\mathbb{K}^n$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.

On rappelle que, dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ est le corps des réels ou le corps des complexes.

1.2.1. Définition. Pour $p \geq 1$ et $x \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{k \in \{1, \dots, n\}} |x_k|.$$

La justification de ces notations est donnée par la proposition suivante laissée en exercice (*cf.* Exercice 1.5):

1.2.2. Proposition. *Pour $x \in \mathbb{K}^n$, on a :*

$$\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Enfin, nous avons le théorème fondamental suivant :

⋆ **1.2.3. Théorème.** *Pour $1 \leq p \leq +\infty$, les espaces $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_p)$ sont des espaces vectoriels normés.*

Preuve. Pour prouver ce théorème, nous avons besoin des lemmes suivants.

1.2.4. Lemme. *Si a et b sont des réels positifs ou nuls et si p et q sont des réels strictement supérieurs à 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Preuve du lemme 1.2.4. Si l'un des réels a ou b est nul, l'inégalité est claire.

Supposons donc que a et b sont strictement positifs. On a :

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\ln a + \ln b) \\ &= \exp\left(\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q\right) \\ &\leq \frac{1}{p}\exp(\ln a^p) + \frac{1}{q}\exp(\ln b^q) \quad \text{(car } \mathbb{R} \ni x \mapsto \exp x \text{ est convexe)} \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme 1.2.4. □

Une autre preuve (n'utilisant pas l'argument de convexité) est l'objet de l'exercice 1.6.

1.2.5. Lemme (Inégalité de Hölder). *Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels positifs ou nuls. Soient p et q des réels strictement supérieurs à 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a alors l'inégalité suivante :*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve du lemme 1.2.5. Si les a_i sont tous nuls, c'est clair. De même si tous les b_i sont nuls.

Supposons donc que les a_i ne sont pas tous nuls et que les b_i non plus. Considérons le nombre

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

D'après le lemme précédent, on a :

$$\begin{aligned} A &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}\right) \\ &= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p} + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder en découle. □

⋆ **1.2.6. Lemme (Inégalité de Minkowski).** *Soient $a_1,\dots,a_n$ et $b_1,\dots,b_n$ des réels positifs ou nuls. Soit p un réel supérieur ou égal à 1. On a alors l'inégalité suivante :*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Preuve du lemme 1.2.6. Si $p=1$, l'inégalité de Minkowski est claire.

Supposons donc $p>1$. Si on pose $c_i=a_i+b_i$, alors on a :

$$\sum_{i=1}^{n}c_i^p = \sum_{i=1}^{n}a_ic_i^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}b_ic_i^{p-1}.$$

Posons alors $q=p/(p-1)$, si bien que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. On applique ensuite l'inégalité de Hölder à chacune des deux sommes du membre de droite dans l'égalité ci-dessus et on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n}c_i^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^p\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Et donc, en divisant les deux membres de cette inégalité par

$$\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

et en remarquant que $1-(p-1)/p=1/p$, on obtient l'inégalité de Minkowski. □

Revenons maintenant à la preuve du théorème 1.2.3. L'inégalité de Minkowski valable pour $p\geq 1$ entraîne que $\|\cdot\|_p$ est une norme (vérification laissée en exercice au lecteur). Il reste à traiter le cas où $p=+\infty$. Pour cela on remarque que, si $a_1,\dots,a_n$ et si $b_1,\dots,b_n$ sont des réels positifs, alors

$$\forall i=1,\dots,n \qquad a_i+b_i \leq \max_{i\in\{1,\dots n\}} a_i + \max_{i\in\{1,\dots n\}} b_i,$$

et donc

$$\max_{i=1,\dots,n}(a_i+b_i) \leq \max_{i\in\{1,\dots n\}} a_i + \max_{i\in\{1,\dots n\}} b_i,$$

ce qui implique l'inégalité triangulaire et prouve donc le théorème 1.2.3. □

1.3. Ensembles bornés et fonctions bornées.

1.3.1. Définition. Soit (E,d) un espace métrique et $A\subset E$. On dit que A est *bornée* si et seulement si

$$\exists a\in E, \quad \exists r>0, \quad A\subset B(a,r).$$

On appelle *diamètre* de A et on note $\delta(A)$ le nombre

$$\sup_{(x,y)\in A^2} d(x,y).$$

(le sup valant éventuellement $+\infty$).

Soit $f : X \to (E, d)$. On dit que f est *bornée* si et seulement si $f(X)$ est bornée.

Nous avons alors la proposition suivante :

1.3.2. Proposition. *Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. A est bornée si et seulement si*

$$\forall a \in E, \quad \exists r > 0, \quad A \subset B(a, r)$$

et si et seulement si

$$\delta(A) < +\infty.$$

Preuve. Exercice 1.7.

1.4. Distance d'un point à un ensemble, d'un ensemble à un autre.

1.4.1. Définition. Soit (E, d) un espace métrique, A et B deux parties de E et $x \in E$. On appelle *distance de x à A* et on note $d(x, A)$ ou encore $d_A(x)$ le nombre

$$\inf_{y \in A} d(x, y).$$

Enfin, on appelle *distance entre A et B* et on note $d(A, B)$ le nombre

$$\inf_{x \in A,\ y \in B} d(x, y).$$

1.4.2. Remarque et propriétés.

- *Bien faire attention que, malgré son nom, la distance entre ensembles n'est absolument pas une distance !! Par exemple, si $E = \mathbb{R}$ et si $A = [0, 1]$ et $B = [1, 2]$ alors $d(A, B) = 0$ et pourtant $A \neq B$.*
- *On a aussi $d(A, B) = \inf_{x \in A} d_B(x) = \inf_{y \in B} d_A(y)$.*

Preuve. Exercice 1.8.

2. Topologie asociée à une distance.

Dans ce paragraphe, (E, d) sera un espace métrique. On se propose de s'intéresser à la géométrie de E. Pour cela, nous allons définir des ensembles remarquables qui seront les boules ouvertes et fermées ainsi que les ouverts et les voisinages de points.

2.1. Boules ouvertes et fermées.

$\star$ **2.1.1. Définition.** Soit $a \in E$ et soit $r > 0$. On appelle *boule ouverte* (*resp. fermée*) *de centre a et de rayon r* et on note $B(a, r)$ (*resp.* $B'(a, r)$) l'ensemble $\{x \in E,\ d(a, x) < r\}$ (*resp.* $\{x \in E,\ d(a, x) \leq r\}$).

Dans ce qui suit, on appellera systématiquement boule toute boule ouverte. Seules les boules fermées seront désignées par le terme boule fermée.

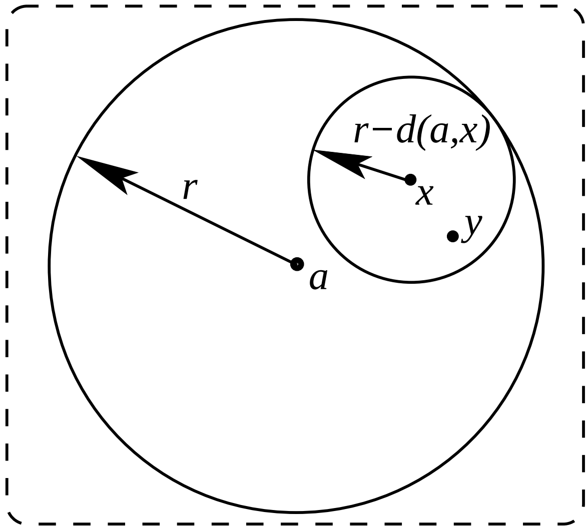
2.2. Ensembles ouverts.

$\star$ **2.2.1. Définition.** Soit U un sous-ensemble de E. On dit que U est un *ouvert* si et seulement si :

$$\forall x \in U, \qquad \exists \varepsilon > 0, \qquad B(x, \varepsilon) \subset U.$$

On a alors la proposition suivante :

$\star$ **2.2.2. Proposition.** *Toute boule est un ouvert.*



Preuve.

Soit une boule $B(a, r)$ de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$. Montrons que c'est un ouvert. Pour cela, il suffit de montrer que si $x \in B(a, r)$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$.

Soit donc x dans $B(a, r)$. Posons $\varepsilon = r - d(a, x)$. Par définition, on a $d(a, x) < r$ donc $\varepsilon > 0$.

Montrons que $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$. Soit donc $y \in B(x, \varepsilon)$. L'inégalité triangulaire nous donne $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \varepsilon = r$, et donc $y \in B(a, r)$, ce qui prouve donc que $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$ et termine la preuve de la proposition. $\square$

En particulier, dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, tout intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$ est un ouvert car c'est la boule ouverte de centre $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ et de rayon $\frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. La proposition suivante rassemble quelques unes des propriétés fondamentales des ouverts :

$\star$ **2.2.3. Proposition.**
- *$\emptyset$ et E sont des ouverts.*
- *Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts, alors l'ensemble $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert.*
- *Si $(U_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est une famille finie d'ouverts, alors l'ensemble $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ est un ouvert.*

Preuve. La propriété caractérisant les ouverts est trivialement vérifiée pour l'ensemble vide car il ne contient aucun élément. Elle est aussi trivialement vérifiée pour E car, pour tout $x \in E$ et pour tout $r > 0$, la boule de centre x et de rayon r est incluse dans E (on rappelle que, par définition, la boule de centre x et de rayon r est l'ensemble des $y \in E$ tels que $d(x, y) < r$). Le premier point est donc prouvé.

En ce qui concerne le second, soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Soit donc $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est ouvert, on en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U_{i_0}$. Et comme $U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, on en déduit que $B(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, ce qui prouve le deuxième point.

Enfin, en ce qui concerne le troisième point, soit $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. Comme, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, U_i est un ouvert et que $x \in U_i$, on en déduit qu'il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(x, \varepsilon_i) \subset U_i$. Soit alors $\varepsilon = \inf_{i \in \{1, \ldots, n\}} \varepsilon_i$. Comme les ε_i sont en nombre finis, on en déduit que $\varepsilon > 0$. De plus, comme pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varepsilon \leq \varepsilon_i$, on a $B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_i) \subset U_i$, ce qui montre que $B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$ et termine la preuve du troisième point. $\square$

2.2.4. Remarque. Attention ! le troisième point tombe en défaut si on ne suppose plus que la famille est finie. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle, les ensembles $] - 1/n, 1/n[$ sont ouverts, mais leur intersection $\{0\}$ n'est pas ouverte.

2.3. Voisinages.

La notion de voisinage est importante et est liée de manière plus intime à la notion de “proximité”.

$\star$ **2.3.1. Définition.** Soit $x \in E$ et $V \subset E$. On dit que V est un *voisinage de* x et on note $V \in \mathcal{V}(x)$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset V$.

On a alors les propositions suivantes dont les preuves sont laissées en exercices :

2.3.2. Proposition.

- $\forall V \in \mathcal{V}(a), \quad a \in V.$
- $\forall V \in \mathcal{V}(a), \quad \forall V' \in \mathcal{P}(E), \quad V \subset V' \;\Rightarrow\; V' \in \mathcal{V}(a).$
- $\forall V, V' \in \mathcal{V}(a), \quad V \cap V' \in \mathcal{V}(a).$
- $\forall V \in \mathcal{V}(a), \quad \exists U \in \mathcal{V}(a), \quad \forall b \in E, \quad b \in U \;\Rightarrow\; V \in \mathcal{V}(b).$

Preuve. Exercice 1.9.

2.3.3. Proposition. *Un sous-ensemble U est ouvert si et seulement si U est voisinage de chacun de ses points.*

Preuve. Exercice 1.10.

3. Adhérence. Intérieur. Extérieur.

Dans ce qui suit (E, d) est toujours un espace métrique.

3.1. Points adhérents.

$\star$ **3.1.1 Définition.** Soit $A \subset E$ et $a \in E$. On dit que a est adhérent à A si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A et on l'appelle *adhérence de* A.

Par exemple, pour $A =]0, 1[\subset \mathbb{R}$ où $\mathbb{R}$ est muni de la topologie usuelle, on a 0 et 1 qui sont dans $\overline{A}$. De même, si $B = \mathbb{R}^*$, on a $0 \in \overline{B}$. Intuitivement, dire que $x \in \overline{A}$ c'est dire que soit $x \in A$ ou bien x est "au bord de A".

On a la proposition suivante, reliant les notions d'adhérence et de voisinage :

3.1.2. Proposition. *$a \in \overline{A}$ si et seulement si $E \setminus A$ n'est pas voisinage de a.*

Preuve. En effet, si $E \setminus A$ est un voisinage de a, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset E \setminus A$, ce qui implique que $B(a, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ et donc $a \notin \overline{A}$. Réciproquement, si $E \setminus A$ n'est pas un voisinage de a, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \not\subset E \setminus A$ ce qui entraîne que $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ et donc que $a \in \overline{A}$. $\square$

Voici quelques propriétés immédiates de l'adhérence :

$\star$ **3.1.3. Proposition.** *Soient A et B deux parties de E. On a alors :*

- $A \subset \overline{A}$.
- $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \overline{A} \subset \overline{B}$.
- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Preuve. Pour le premier point, on remarque que si $a \in A$ et si $\varepsilon > 0$, alors $B(a, \varepsilon)$ contient $a \in A$ et donc $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ce qui implique que $a \in \overline{A}$.

Pour le second, supposons que $a \in \overline{A}$ et montrons que $a \in \overline{B}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $a \in \overline{A}$, on a $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Soit donc $x \in B(a, \varepsilon) \cap A$. Comme $A \subset B$, on a donc $x \in B(a, \varepsilon) \cap B$, ce qui montre que $B(a, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$, et prouve le deuxième point.

Le troisième point est un peu plus délicat. Tout d'abord, le premier point montre que $A \subset \overline{A}$ et le second point montre que $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Il reste donc à montrer que $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ pour conclure.

Soit $x \in \overline{\overline{A}}$. On veut montrer que $x \in \overline{A}$. Il suffit donc de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $x \in \overline{\overline{A}}$, on en déduit que $\overline{A} \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Soit alors $y \in \overline{A} \cap B(x, \varepsilon)$. Posons $\varepsilon' = \varepsilon - d(y, x)$. On a $\varepsilon' > 0$ et $B(y, \varepsilon') \cap A \neq \emptyset$ car $y \in \overline{A}$.

De plus, on a : $B(y,\varepsilon') \subset B(x,\varepsilon)$; en effet, si $z \in B(y,\varepsilon')$, on a $d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z) < d(x,y)+\varepsilon' = \varepsilon$, donc $z \in B(x,\varepsilon)$.

On en déduit donc que $B(y,\varepsilon') \cap A \subset B(x,\varepsilon) \cap A$, et donc que $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ puisque $B(y,\varepsilon') \cap A \neq \emptyset$. Ce qui termine la preuve de la proposition. $\square$

3.2. Ensembles fermés.

$\star$ **3.2.1. Définition.** Soit A un sous-ensemble de E. On dit que A est *fermé* si et seulement si $\bar{A} = A$.

De manière intuitive donc, dire que A est fermé, c'est dire que A contient les points du bord.

Nous avons la proposition suivante qui donne une autre caractérisation du caractère fermé d'un ensemble.

$\star$ **3.2.2. Proposition.** *Un ensemble A est fermé si et seulement si le complémentaire $E \setminus A$ de cet ensemble dans E est ouvert.*

Preuve. En effet, A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$. Comme $A \subset \overline{A}$, on a $A = \overline{A}$ si et seulement si $\overline{A} \subset A$, soit si et seulement si $E \setminus A \subset E \setminus \overline{A}$. Or

$$\begin{array}{rcll} E \setminus A \subset E \setminus \overline{A} & \Leftrightarrow & \forall x \in E \setminus A, \quad x \notin \overline{A} & \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in E \setminus A, \quad E \setminus A \text{ est un voisinage de } x & \text{(grâce à (3.1.2))} \\ & \Leftrightarrow & E \setminus A \text{ est ouvert} & \text{(grâce à (2.3.3))} \end{array}$$

ce qui prouve la proposition. $\square$

Nous avons aussi la proposition importante suivante :

$\star$ **3.2.3. Proposition.** *$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*

Preuve. En effet, si F est un fermé contenant A, on a $\overline{A} \subset \overline{F} = F$. De plus, $\overline{A}$ est fermé car $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, et contient A. $\square$

$\star$ **3.2.4. Proposition.**

- *$\emptyset$ et E sont des fermés.*
- *Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés, alors l'ensemble $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé.*
- *Si $(F_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ est une famille finie de fermés, alors l'ensemble $\bigcup_{i=1}^n U_i$ est un fermé.*

Preuve. Le premier point découle du fait que les complémentaires de E et de $\emptyset$ sont ouverts grâce à 2.2.3.

Le second point découle de la proposition 2.2.3 et de l'égalité suivante laissée en exercice (exercice 1.11.) :

$$E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} (E \setminus F_i).$$

Enfin le troisième point découle encore de la proposition 2.2.3. et de l'égalité suivante (laissée aussi en exercice) :

$$E \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (E \setminus F_i).$$

$\star$ **3.2.5. Définition.** Soit (E, d) un espace métrique. Soient A et B deux parties de E. On dit que A est *dense* dans B si et seulement si $B \subset \overline{A}$.

Lorsque $B = E$, c'est à dire lorsque A est dense dans E, on dit parfois que A est *partout dense*.

On dit que E est *séparable* si et seulement si il existe une partie dénombrable dense dans E.

⋆ **3.2.6. Propriétés et Remarques.**

- *A est dense dans B si et seulement si, pour tout x dans B, pour tout voisinage V de x, V intersecte A.*
- *Si A est dense dans B et si B est dense dans C, alors A est dense dans C.*
- *A est partout dense si et seulement si tout ouvert non vide de E rencontre A.*

Preuve. Exercice 1.12.

3.3. Intérieur.

⋆ **3.3.1. Définition.** Soit $A \subset E$. L'*intérieur* de A est la réunion de tous les ouverts contenus dans A. On le note $\overset{\circ}{A}$ ou encore Int A.

⋆ **3.3.2. Proposition.** *$\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.*

Preuve. En effet, $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert contenu dans A. De plus, si U est un ouvert contenu dans A, alors par définition, $U \subset \overset{\circ}{A}$. □

⋆ **3.3.3. Proposition.** *On a :* $\quad E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}.$

Preuve. Exercice 1.13.

3.4. Extérieur et frontière.

3.4.1. Définition. Soit A un sous-ensemble de E et x un point de E. On dit que x est *extérieur* à A si et seulement si x est intérieur à $E \setminus A$. On note Ext A et on appelle *extérieur de* A l'ensemble des points extérieurs à A. Autrement dit, Ext A =Int $(E \setminus A)$.

⋆ **3.4.2. Définition.** Soit A une partie de E et x dans E. On dit que x est un *point frontière* de A si et seulement si x est adhérent à A et à $E \setminus A$. On appelle *frontière* de A et on note Fr A ou encore ∂A l'ensemble des points frontières de A.

3.4.3. Proposition. *Si A est un sous-ensemble de E, alors Ext A, Int A et ∂A forment une partition de E. De plus $\partial A = \overline{A} \setminus A^{\circ}$.*

Preuve. Exercice 1.14.

3.5. Points d'accumulation.

3.5.1. Définition. Soit A une partie de E et x dans E. On dit que x est un *point isolé* de A si et seulement si il existe V un voisinage de x tel que $V \cap A = \{x\}$.

On dit que x est un *point d'accumulation* de A si et seulement si tout voisinage V de x contient un point de A différent de x.

On dit que A est *discret* si et seulement si tous les éléments de A sont isolés.

Par exemple, si $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \subset \mathbb{R}$, alors A n'a qu'un seul point d'accumulation qui est 0. Tous les points de A sont isolés donc A est discret.

3.5.2. Propriétés et remarques.

- *x est un point d'accumulation de A si et seulement si tout voisinage de x contient une infinité de points de A.*
- *Si x est un point isolé de A, alors x est dans A.*
- *x est un point d'accumulation de A si et seulement si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.*
- *$\overline{A}$ est la réunion disjointe de l'ensemble des points d'accumulation de A et de l'ensemble des points isolés de A.*
- *Explication du mot "discret" : Un espace métrique muni de la topologie discrète est discret car pour tout x dans E, $\{x\}$ est ouvert donc voisinage de x et donc x est un point isolé.*

Preuve. Exercice 1.15.

4. Construction d'espaces métriques.

4.1. Métrique induite.

⋆ **4.1.1. Définition.** Soit (E, d) un espace métrique et F un sous-ensemble de E. La distance d induit naturellement une distance d_F sur F par la relation : $d_F(x, y) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in F$. On dit que d_F est la *distance induite* par d sur F.

⋆ **4.1.2. Proposition.** *Soit F un sous-ensemble de E muni de la métrique induite. Les fermés et les ouverts de F sont exactement les traces sur F de fermés et d'ouverts de E. Autrement dit $A \subset F$ est fermé dans F si et seulement si il existe A' fermé dans E tel que $A = A' \cap F$. De même, $A \subset F$ est ouvert dans F si et seulement si il existe A' ouvert dans E tel que $A = A' \cap F$.*

Preuve. Montrons d'abord que si A est ouvert dans F, alors il existe A' ouvert dans E tel que $A = A' \cap F$. Par définition, comme A est ouvert, pour tout $x \in A$, il existe $\varepsilon_x > 0$ tel que $B_F(x, \varepsilon_x) = \{y \in F, \quad d_F(x, y) < \varepsilon_x\} \subset A$ (on note B_F pour bien mettre en évidence que ce sont des boules pour la métrique induite d_F et contenues dans F).

On a : $A = \bigcup_{x \in A} B_F(x, \varepsilon_x)$. En effet, pour tout $x \in A$, $B_F(x, \varepsilon_x) \subset A$, et donc $\bigcup_{x \in A} B_F(x, \varepsilon_x) \subset A$. Et, pour tout $x \in A$, $x \in B_F(x, \varepsilon_x)$, donc $A \subset \bigcup_{x \in A} B_F(x, \varepsilon_x)$.

Posons $A' = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon_x)$. A' est ouvert car c'est une réunion d'ouverts. De plus $A' \cap F = \bigcup_{x \in A}(B(x, \varepsilon_x) \cap F) = \bigcup_{x \in A} B_F(x, \varepsilon_x) = A$. On a donc bien prouvé que tout ouvert de F est la trace sur F d'un ouvert de E.

Il reste à montrer qu'on a le résultat analogue pour un fermé A de F. Pour cela, on considère $B = F \setminus A$. B est ouvert dans F. Donc, d'après ce qui précède, il existe un ouvert B' de E tel que $B = F \cap B'$. On pose $A' = E \setminus B'$. On a alors A' qui est fermé dans E et $A' \cap F = (E \setminus B') \cap F = (E \cap F) \setminus (B' \cap F) = F \setminus B = A$. □

⋆ **4.1.3. Remarques.**

- *Pour tout x dans F, les voisinages de x dans F sont exactement les traces sur F des voisinages de x dans E.*
- *Si une partie A de F est ouverte dans E alors elle est ouverte dans F.*
- *F est ouvert dans E si et seulement si pour toute partie A ouverte dans F, A est ouverte dans E.*

Preuve. Exercice 1.16.

4.1.4. Exemple. Par exemple, $A = [-1, 1[$ est un ouvert de $E = [-1, +\infty[$. On peut par exemple écrire $A = E \cap]-2, 1[$.

4.2. Espaces métriques produits.

4.2.1. Définition. Soient $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques. Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$. On note, pour $p \geq 1$,

$$D_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^p \right)^{1/p}$$

et

$$D_\infty(z, y) = \sup_{i=1,\ldots,n} d_i(x_i, y_i).$$

On a alors la proposition suivante :

4.2.2. Proposition. *Les D_j pour $1 \leq j \leq +\infty$ sont des distances sur $\prod_{i=1}^n E_i$.*

Preuve. Exercice 1.17.

5. Suites.

5.1. Suites convergentes.

⋆ **5.1.1. Définition.** Soit (E, d) un espace métrique et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E. On dit que $(u_n)_n$ est une *suite convergente* si et seulement si

$$\exists \ell \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(u_n, \ell) \leq \varepsilon.$$

On dit que $(u_n)_n$ converge vers ℓ. On note alors $\lim u_n = \ell$ ou encore $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.

On a aussi la caractérisation suivante dont la preuve est laissée en exercice :

⋆ **5.1.2. Proposition.** *La suite (u_n) converge vers ℓ si et seulement si la suite $(d(u_n, \ell))_n$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$ et si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ d(u_n, \ell) > \varepsilon\}$ est fini.*

Preuve. Exercice 1.18.

5.1.3. Définition. Soit (E, d) un espace métrique et (u_n) une suite d'éléments de E. On dit que (u_n) est *stationnaire* si et seulement si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; u_n = u_{n_0}.$$

5.1.4. Proposition. *Toute suite stationnaire est convergente.*

Preuve. Exercice 1.19.

⋆ **5.1.5. Proposition** *Soit (E, d) un espace métrique. Si une suite (u_n) converge vers ℓ et ℓ', alors $\ell = \ell'$.*

Preuve. Exercice 1.20.

5.2. Suites extraites.

⋆ **5.2.1. Définition.** Soit E un ensemble, $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites d'éléments de E. On dit que la suite (v_n) est *extraite* de (u_n) si et seulement si il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

⋆ **5.2.2. Proposition.** *Soit (E, d) un espace métrique et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de E qui converge vers $\ell \in E$. Alors, toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge vers ℓ.*

Preuve. Exercice 1.21.

5.2.3. Remarque. Une erreur très classique est la suivante. Soit (u_n) une suite, $(v_n)_n = (u_{\varphi(n)})_n$ extraite de $(u_n)_n$ et $(w_n)_n = (v_{\psi(n)})_n$ extraite de $(v_n)_n$ où φ et ψ sont deux applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors, que vaut selon vous w_n en fonction de u_n ? $u_{\psi\circ\varphi(n)}$ ou bien $u_{\varphi\circ\psi(n)}$? Il s'agit de $\ldots u_{\varphi\circ\psi(n)}$. Si, si… Vérifiez le à titre d'exercice (Exercice 1.22.).

5.3. Suites réelles.

⋆ **5.3.1. Définition.** Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. On dit que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; u_n \geq A.$$

On dit que $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; u_n \leq A.$$

Voici un théorème qui nous sera particulièrement utile :

⋆ **5.3.2. Théorème de passage à la limite.** *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de réels convergente vers* $\ell \in \mathbb{R}$. *On suppose que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $u_n \geq 0$. *Alors,* $\ell \geq 0$.

Preuve. Exercice 1.23.

Un autre théorème fondamental est le suivant :

⋆ **5.3.3. Théorème.** *Toute suite croissante majorée de nombres réels converge.*

Preuve. Soit $(u_n)_n$ une suite croissante majorée de nombres réels. Soit $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Par hypothèse, A est majoré et non vide. D'après la propriété fondamentale du corps des réels (voir chapitre 0), A possède donc une borne supérieure $s \in \mathbb{R}$. Montrons que la suite $(u_n)_n$ converge vers s. Tout d'abord, on remarque que, comme s est majorant de A, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq s$. Soit $\varepsilon > 0$. s étant le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A et comme $s - \varepsilon < s$, on en déduit que $s - \varepsilon$ n'est plus majorant de A. Et donc, il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > s - \varepsilon$. Comme $(u_n)_n$ est croissante, on en déduit que, pour tout $n \geq n_0$, on a $s - \varepsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq s$. En particulier, on a bien prouvé que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $|u_n - s| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $(u_n)_n$ converge vers s. □

5.3.4. Proposition. *Soit* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites de réels telles que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on ait* $u_n \leq v_n$.
- *Si* $\lim u_n = \ell$ *et* $\lim v_n = \ell'$, *alors* $\ell \leq \ell'$.
- *Si* $\lim u_n = +\infty$ *alors* $\lim v_n = +\infty$.

Preuve. Exercice 1.24.

⋆ **5.3.5. Théorème des suites adjacentes.** *Soient* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites de nombres réels telles que la suite* $(u_n)_n$ *soit croissante, la suite* v_n *soit décroissante et* $\lim(u_n - v_n) = 0$. *Alors* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *sont convergentes et convergent toutes les deux vers la même limite.*

Preuve. Exercice 1.25.

5.4. Applications des suites à la topologie.

⋆ **5.4.1. Théorème.** *Soit* (E, d) *un espace métrique,* A *une partie de* E *et* $a \in E$. *Alors,* a *est dans* $\overline{A}$ *si et seulement si il existe une suite* $(u_n)_n$ *d'éléments de* A *qui converge vers* a.

Preuve. Exercice 1.26.

⋆ **5.4.2. Corollaire.** *A est fermée si et seulement, toute suite d'éléments de A qui converge dans E converge dans A. En d'autres termes, pour montrer que A est fermée, on prend une suite quelconque d'éléments de A qui converge vers $\ell \in E$; il suffit alors de montrer que, nécessairement, $\ell \in A$.*

⋆ **5.4.3. Corollaire.** *A est dense dans E si et seulement, pour tout $x \in E$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.*

Exercices.

Exercices d'apprentissage.

Exercice 1.1. Vérifiez les points non démontrés dans la propriété 1.1.2.

Exercice 1.2. Vérifiez que la distance discrète de l'exemple 1.1.3. est bien une distance.

Exercice 1.3. Pour x, y dans $\mathbb{R}$, on pose $d(x, y) = |x - y|$. Vérifiez que $(\mathbb{R}, d)$ est bien un espace métrique.

Exercice 1.4. Montrez que si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé alors la distance associée est bien une distance.

Exercice 1.5. Montrez la Proposition 1.2.2. (remarquer que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$.)

Exercice 1.6. En étudiant la fonction $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^p/p - bx$, donnez une autre preuve du lemme 1.2.4.

Exercice 1.7. Montrez la proposition 1.3.2.

Exercice 1.8. Montrez la proposition 1.4.2.

Exercice 1.9. Montrez la proposition 2.3.2.

Exercice 1.10. Montrez la proposition 2.3.3.

Exercice 1.11. Montrez la proposition 3.2.4 in extenso.

Exercice 1.12. Montrez la proposition 3.2.6.

Exercice 1.13. Montrez la proposition 3.3.3. (remarquer que $x \in A^\circ$ si et seulement si, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$.

Exercice 1.14. Montrez la proposition 3.4.3.

Exercice 1.15. Montrez la proposition 3.5.2.

Exercice 1.16. Montrez la proposition 4.1.3.

Exercice 1.17. Montrez la proposition 4.2.2.

Exercice 1.18. Montrez la proposition 5.1.2

Exercice 1.19. Montrez la proposition 5.1.4.

Exercice 1.20. Montrez la proposition 5.1.5.

Exercice 1.21. Montrez la proposition 5.2.2.

Exercice 1.22. Montrez la remarque 5.2.3.

Exercice 1.23. Montrez la théorème 5.3.2.

Exercice 1.24. Montrez la proposition 5.3.4.

Exercice 1.25. Montrez le théorème 5.3.5. On pourra remarquer que $u_n \leq v_n$ et donc que (u_n) est une suite croissante majorée.

Exercice 1.26. Montrez la proposition 5.4.1.

Exercice 1.27. Montrez que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. En déduire que $\mathbb{R}$ est séparable. Indication, si $x \in \mathbb{R}$, la suite $[nx]/n$ est une suite de rationnels convergeant vers x ($[\alpha]$ désignant la partie entière de α).

Exercices d'approfondissement.

Exercice 1.28. Les égalités suivantes définissent-elles des distances ?

a. $d(x,y) = |x^2 - y^2|$ sur $\mathbb{R}$.

b. $d(x,y) = |x^3 - y^3|$ sur $\mathbb{R}$.

c. $d(x,y) = |x^{-1} - y^{-1}|$ sur $\mathbb{R}^*$.

d. $d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ sur $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.

e. $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$ sur $C([a,b],\mathbb{K})$, l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$.

f. $d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$ sur l'espace des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$.

Exercice 1.29. *Construction de distances.* Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante, telle que $f(0) = 0$, et telle que f soit sous-additive, *i.e.* $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad f(u+v) \leq f(u) + f(v)$. Soit (E,d) un espace métrique.

1. Montrer que $d' = f(d)$ est une distance sur E.

2. Application : montrer que

$$d_1 = \frac{d}{1+d},\ d_2 = \log(1+d),\ d_3 = \log\left(1 + \frac{d}{1+d}\right),\ d_4 = d^\alpha (0 < \alpha < 1)$$

sont des distances sur E.

Exercice 1.30. Soit E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application. On pose $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur f pour que d soit une distance.

2. On pose $E = \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$. Montrer que d est une distance et trouver les boules ouvertes.

Exercice 1.31. *Métrique bornée*
1. Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que $d' = \inf(1,d)$ fait de E un espace métrique borné.
2. Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $d = d_\infty$ la distance. Déterminer dans $(\mathbb{R}^n, d')$ les boules $B(x,r)$ et $B'(x,r)$.

Exercice 1.32. On note $C([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour f et g dans $C([a,b],\mathbb{K})$ et $p \geq 1$, on définit

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

(On admettra que toute fonction f continue sur $[a,b]$ est bornée). Montrez que d_p et d_∞ sont des distances.

Exercice 1.33.
1. Montrer que sur $\mathbb{R}^2$, d_∞ et d_2 définissent les mêmes ouverts.
2. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \times B$ est un ouvert de $(\mathbb{R}^2, d_2)$ si et seulement si A et B sont des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la métrique usuelle.

Exercice 1.34. Soit (E,d) un espace métrique quelconque.
1. Une boule (différente de E) ouverte (*resp.* fermée) peut-elle être fermée (*resp.* ouverte) ?
2. Une boule peut-elle ne contenir qu'un point, que deux points,... ?
3. Existe-t'il des boules dont chacun des points soit le centre ?
4. Soit $A = B(x,r)$. Montrer que le diamètre $\delta(A) \leq 2r$. Peut-on avoir $\delta(A) < 2r$?
5. $[a,b[$ peut-il être une boule ouverte, une boule fermée ?

Exercice 1.35. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé.
1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Montrer que $\overline{B(A,r)} = B'(a,r)$. Montrer que $(B'(a,r))^\circ = B(a,r)$.
2. Soit (E,d) un espace métrique. A-t'on les égalités précédentes ?

Exercice 1.36. Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique (E,d).
1. Montrez les propriétés suivantes :

$$(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ \quad \overline{A\cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B} \quad A^\circ \cup B^\circ \subset (A\cup B)^\circ \quad \overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\partial(A\cup B) \subset \partial A \cup \partial B \quad \partial(A\cap B) \subset \partial A \cup \partial B$$

2. Montrer sur des exemples simples que les inclusions ci-dessus peuvent être strictes.
3. Montrer que A est fermé si et seulement si $\partial A \subset A$.

Exercice 1.37. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un espace métrique (E,d).
1. Montrer que $\bigcup_{i\in I} \bar{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ et $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \bar{A}_i$

2. En utilisant la dualité $\overline{E \setminus A} = E \setminus (A^\circ)$, quelles relations obtient-on ?
3. Montrer sur des exemples que les inclusions peuvent être strictes.

Exercice 1.38. *Distance à une partie.* Soit (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E. Pour $x \in E$, on pose $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = d_A(x) =$ distance de x à A.
1. Soit $x \in E$. Montrer que
$$x \in \bar{A} \Longleftrightarrow d(x, A) = 0.$$
2. Pour $\varepsilon > 0$, on pose :
$$V_\varepsilon(A) = \{x \in E \ : \ d(x, A) < \varepsilon\}.$$
Montrer que $\bar{A} = \displaystyle\bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon(A)$.
3. Montrer que $d_A = d_B \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B}$.

Exercice 1.39. *Connexité de* $\mathbb{R}$
1. Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide bornée. Montrer que $\sup A$ et $\inf A$ sont éléments de $\overline{A}$, et que $\overline{A} \subset [\inf A, \sup A]$.
2. Montrer que $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont les seules parties fermées et ouvertes de $\mathbb{R}$. Pour cela, soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide ouverte et fermée. Soit $a \in A$. S'il existe $x \in \mathbb{R} \setminus A$ plus grand que a, introduire $\inf\left((\mathbb{R} \setminus A) \cap [a, +\infty[\right)$.

Exercice 1.40. Soient (E, d) un espace métrique et B une partie non vide de de E.
1. Vérifier que E est séparé, c'est à dire que, pour tous points distincts x et y de E, il existe U et V deux ouverts tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.
2. Soient $x \in E$ et B une partie de E telle que $x \in \bar{B}$. Peut-on trouver deux ouverts U et V tels que $x \in U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.
3. On suppose que $x \notin \bar{B}$ et on pose $\delta = d(x, B)$. Montrer que $U = B(x, \frac{\delta}{2})$ et $V = \cup_{y \in B} B(y, \frac{\delta}{2})$ sont des ouverts séparant x et B, c'est-à-dire que $x \in U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.
4. Soit A une partie de E telle que $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$.
4.1. Peut-on avoir $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y) = 0$? (considérer dans $\mathbb{R}$ les ensembles $A = \mathbb{N}$ et $B = \{p + \frac{1}{p} \ : \ p \in \mathbb{N}, \ p \geq 2\}$).
4.2. Pour $x \in A$, on pose $d_x = d(x, B)$, et pour $y \in B$, $\delta_y = d(y, A)$ et on désigne par U et V les ouverts:
$$U = \bigcup_{x \in A} B(x, \frac{d_x}{2}), \qquad V = \bigcup_{y \in B} B(y, \frac{\delta_y}{2}).$$
Montrer que le couple (U, V) sépare (A, B), c'est à dire que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 1.41. *L'espace métrique s des suites.* Soit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{K}-$espace vectoriel des suites quelconques de nombres réels ou complexes. Si $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)$, on pose
$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Montrez que d est bien définie et que c'est une distance sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. L'espace métrique $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, d)$ est noté s.

Exercice 1.42. Pour $p \geq 1$, on note ℓ^p l'ensemble des suites de nombres complexes $(u_n)_n$ telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p \text{ converge.}$$

Pour $u = (u_n)_n \in \ell^p$, on note

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On note ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées (c'est-à-dire telles qu'il existe $M > 0$ tel que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on ait $|u_n| \leq M$). Pour $u = (u_n)_n \in \ell^\infty$, on note

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Enfin, on note c_0 l'ensemble des suites de complexes tendant vers 0 (c'est-à-dire telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, quel que soit $n \geq n_0$, on ait $|u_n| \leq \varepsilon$) et on note c_{00} l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.

Montrez que, pour tout $p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur ℓ^p et que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur ℓ^∞. Montrez que, pour tous p et q tels que $1 \leq p \leq q$, on a

$$c_{00} \subset \ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset \ell^\infty.$$

Exercice 1.43. Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans un espace métrique (E, d).
1. Montrez que, si u_n est convergente, alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la suite $u_{\sigma(n)}$ converge vers la même limite.
2. Montrez que, si $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ convergent vers la même limite, alors (u_n) converge. Montrer que si (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent, alors (u_n) converge.

Exercice 1.44. *Suites réelles et complexes.* Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs complexes.
1. Montrer que $\lim(u_{n+1} - u_n) = l \neq 0$ implique que $\lim |u_n| = \infty$.
2. *Lemme de Césaro.* Montrer que si $\lim u_n = \ell \in \mathbb{C}$, alors $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k$ converge vers ℓ. Réciproquement, si (v_n) converge vers ℓ, est ce que (u_n) converge vers ℓ ?
3. Montrez qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire. Montrez que si une suite de rationnels p_n/q_n tend vers un irrationnel $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim |q_n| = +\infty$.
4. Montrez que si u_n est une suite réelle bornée, et si $s = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup A$ alors $s \in A$, ou bien il existe une suite extraite convergeant vers s.
5. Montrez que de toute suite réelle convergente on peut extraire une sous-suite monotone.

Exercice 1.45. Soit p réel supérieur ou égal à 1. Montrer que l'espace ℓ^p est séparable (penser à $\mathbb{Q}$).

Exercice 1.46. Montrer que l'espace ℓ^∞ n'est pas séparable.

Exercice 1.47. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. Montrez que $A \times B$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si A et B sont des fermés de $\mathbb{R}$.

Corrigé des exercices d'apprentissage.

Exercice 1.1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) = \text{“}\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \qquad d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}).\text{”}$$

$\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Soit $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Soit donc $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in E^{n+1}$. L'inégalité triangulaire nous donne

$$d(x_1, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1}).$$

L'hypothèse de récurrence vraie au rang n nous donne

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

Et donc,

$$d(x_1, x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) + d(x_n, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1}),$$

ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a bien prouvé par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ que $\mathcal{P}(n)$ est vraie

Montrons que si d est une distance sur E, alors λd est une distance pour $\lambda > 0$.

En effet, si x et y sont dans E, $\lambda d(x, y) = 0$ équivaut à $d(x, y) = 0$, soit encore à $x = y$.

Si x et y sont dans E, $\lambda d(x, y) = \lambda d(y, x)$.

Enfin, si x, y et z sont dans E, $\lambda d(x, z) \leq \lambda(d(x, y) + d(y, z)) = \lambda d(x, y) + \lambda d(y, z)$.

Donc λd est bien une distance.

Exercice 1.2. Soient x, y et z trois éléments de E.

On a $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

$d(x, y) = d(y, x)$.

Enfin, on vérife que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. En effet, si $d(x, z) = 0$, l'inégalité est évidente. Enfin, si $d(x, z) = 1$, l'inégalité sera vraie si et seulement si on n'a pas $d(x, y) = d(y, z) = 0$. Or, si on a $d(x, y) = d(y, z) = 0$, on obtient que $x = y$ et $y = z$, ce qui montre que $z = x$, et donc que $d(x, z) = 0$ et contredit l'hypothèse $d(x, z) = 1$.

On a bien montré que la distance discrète est une distance sur E.

Exercice 1.3. Soient x, y, z dans $\mathbb{R}$.

On a $|x - y| = 0$ si et seulement si $x = y$.

On a $|x - y| = |y - x|$.

Enfin, on a $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ si et seulement si, pour tous α et β dans $\mathbb{R}$, on a $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Pour vérifier cette inégalité, on remarque que $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$ et $-|\beta| \leq \beta \leq |\beta|$, ce qui prouve que $-|\alpha| - |\beta| \leq \alpha + \beta \leq |\alpha| + |\beta|$, et donc que $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Exercice 1.4. Soient x, y, z dans E.

On a $d(x, y) = 0$ si et seulement si $\|x - y\| = 0$, si et seulement si $x - y = 0$, si et seulement si $x = y$.

On a $d(x, y) = \|x - y\| = \| - (y - x)\| = | - 1|\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$.

Enfin, $d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$.

Donc d est une distance sur E.

Exercice 1.5. Soit $x \in \mathbb{K}^n$ et $p \geq 1$. On a

$$\|x\|_\infty^p \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \leq n\|x\|_\infty^p.$$

et donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$. Comme $n^{1/p} = \exp(\ln n/p) \to_{p \to +\infty} \exp 0 = 1$, on obtient que

$$\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$

Exercice 1.6. Soient $p > 1$ et q tel que $1/p + 1/q = 1$. Soit $f : \mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^p/p - bx$. f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = x^{p-1} - b$. En particulier, si $\beta = b^{1/(p-1)}$, f' est strictement négative sur $[0, \beta[$, nulle en β et strictement positive sur $]\beta, +\infty[$. f est donc minimale en β. En particulier, on a $f(a) \geq f(\beta)$. Comme $f(\beta) = b^{p/(p-1)}(1/p - 1) = -b^q/q$, on a $a^p/p - ba \geq -b^q/q$, soit encore $ab \leq a^p/p + b^q/q$.

Exercice 1.7. Montrons que A est bornée si et seulement si, pour tout $a \in E$, il existe $r > 0$ tel que $A \subset B(a, r)$.

Tout d'abord, il est clair que si, pour tout $a \in E$, il existe $r > 0$ tel que $A \subset B(a, r)$, alors A est bornée.

Réciproquement, soit A une partie bornée. Par définition, il existe $x \in E$ et $r > 0$ tel que $A \subset B(x, r)$.

Soit $a \in E$. Montrons que, si $r' = r + d(a, x)$, alors $A \subset B(a, r')$. En effet, si $y \in A$, on a $y \in B(x, r)$ et donc $d(y, x) < r$. En particulier, $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + r = r'$ et donc $y \in B(a, r')$. On a bien prouvé que $A \subset B(a, r')$ et donc A est bornée si et seulement si, pour tout $a \in E$, il existe $r > 0$ tel que $A \subset B(a, r)$.

Montrons que A est bornée si et seulement si $\delta(A) < +\infty$.

Tout d'abord si $\delta(A) < +\infty$ et si $a \in A$, alors $A \subset B(a, \delta(A) + 1)$. En effet, si $x \in A$, alors $d(a, x) \leq \delta(A) < \delta(A) + 1$. Et donc A est bornée.

Réciproquement, si A est bornée, alors il existe $a \in E$ et $r > 0$ tel que $A \subset B(a, r)$. En particulier, $\delta(A) \leq \delta(B(a, r)) \leq 2r$. En effet, si x, y sont dans A, on a $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) < 2r$, et donc $\sup_{(x,y) \in A^2} d(x, y) \leq 2r$. Et donc $\delta(A) < +\infty$.

Exercice 1.8. Montrons que $d(A, B) = \inf_{x \in A} d_B(x)$. Par définition, $d(A, B) = \inf_{x \in A,\ y \in B} d(x, y)$. Mais il n'y a aucune raison de conclure directement que $d(A, B) = \inf_{x \in A} d_B(x)$.

Tout d'abord, on remarque que, si $x \in A$ et $y \in B$, alors $d(x, y) \geq d(A, B)$. Et donc $\inf_{b \in B} d(x, b) \geq d(A, B)$, soit encore $d_B(x) \geq d(A, B)$, puis $\inf_{x \in A} d_B(x) \geq d(A, B)$.

Ensuite, on remarque que $d_B(x) \leq d(x,y)$ puis que $\inf_{a\in A} d_B(a) \leq d(x,y)$. On obtient ensuite que $\inf_{a\in A} d_B(a) \leq \inf_{x\in A,\ y\in B} d(x,y) = d(A,B)$, soit encore $\inf_{x\in A} d_B(x) \leq d(A,B)$.

En particulier, $\inf_{x\in A} d_B(x) = d(A,B)$.

L'autre égalité se démontre de manière totalement analogue.

Exercice 1.9. Soit $V \in \mathcal{V}(a)$. il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset V$, et donc $a \in B(a,\varepsilon) \subset V$.

Soit V un voisinage de a. Soit $V' \in \mathcal{P}(E)$ tel que $V \subset V'$. Comme V est un voisinage de a, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset V$. On a alors $B(a,\varepsilon) \subset V \subset V'$, ce qui montre que V' est un voisinage de a.

Soient V et V' deux voisinages de a. Il existe ε et ε' strictement positifs tels que $B(a,\varepsilon) \subset V$ et $B(a,\varepsilon') \subset V'$. En particulier, si $\varepsilon'' = \min(\varepsilon,\varepsilon')$, on a $\varepsilon'' > 0$ et $B(a,\varepsilon'') \subset V \cap V'$, ce qui montre que $V \cap V'$ est un voisinage de a.

Enfin, soit V un voisinage de a. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \subset V$. Posons $U = B(a,\varepsilon/2)$. Si $b \in U$, alors $B(b,\varepsilon/2) \subset B(a,\varepsilon) \subset V$ (en effet, si $x \in B(b,\varepsilon/2)$, alors $d(x,b) < \varepsilon/2$ et donc $d(x,a) \leq d(x,b) + d(a,b) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$) et donc $V \in \mathcal{V}(b)$.

Exercice 1.10. Si U est ouvert, alors pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$, ce qui montre que U est voisinage de x.

Réciproquement, si U est un voisinage de x, quel que soit x dans U, alors, pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$, et ceci montre que U est un ouvert.

Exercice 1.11. Montrons que

$$E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} (E \setminus F_i).$$

Pour cela, on écrit que

$$x \in E\setminus\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i\in I} F_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\, x \notin F_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\, x \in E\setminus F_i \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} (E\setminus F_i).$$

En particulier, d'après la proposition 3.2.2, $\bigcap_{i\in I} F_i$ est fermé si et seulement si $E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)$ est ouvert. Comme $E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I}(E \setminus F_i)$ et que, pour tout $i \in I$, $E \setminus F_i$ est ouvert d'après 3.2.2 et qu'une réunion d'ouverts est un ouvert, on en déduit que $E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)$ est ouvert, et donc que $\bigcap_{i\in I} F_i$ est fermé.

L'autre point est analogue. Tout d'abord, on montre, en utilisant l'identité

$$E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} (E \setminus F_i).$$

que

$$E \setminus \left(\bigcup_{i\in I} F_i\right) = \bigcap_{i\in I} (E \setminus F_i).$$

Tout d'abord, on pose $F_i' = E \setminus F_i$ et on applique la première identité aux F_i' :

$$E \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i' \right) = \bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i').$$

On obtient que

$$\bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i') = \bigcup_{i \in I} F_i = E \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i' \right),$$

soit encore, en passant au complémentaire, que

$$E \setminus \left(\bigcup_{i \in I} F_i \right) = \left(\bigcap_{i \in I} F_i' \right) = \bigcap_{i \in I} (E \setminus F_i).$$

En raisonnant comme précédemment, $\bigcup_{i=1}^n F_i$ est fermé si et seulement si $E \setminus (\bigcup_{i=1}^n F_i)$ est ouvert. Comme $E \setminus (\bigcup_{i=1}^n F_i) = \bigcap_{i=1}^n (E \setminus F_i)$ et que, pour tout $i \in I$, $E \setminus F_i$ est ouvert d'après 3.2.2 et qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert, on en déduit que $E \setminus (\bigcup_{i=1}^n F_i)$ est ouvert, et donc que $\bigcup_{i=1}^n F_i$ est fermé.

Exercice 1.12. Supposons que, pour $x \in B$, tout voisinage V de x intersecte A. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, ce qui montre que $x \in \overline{A}$, donc A est dense dans B.

Réciproquement, si A est dense dans B, alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in B$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. En particulier, si $x \in B$ et si V est un voisinage de x, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset V$, et donc $V \cap A \neq \emptyset$.

On a bien prouvé que A est dense dans B si et seulement si, pour tout $x \in B$, pour tout voisinage V de x, V intersecte A.

Montrons que, si A est dense dans B et B dense dans C, alors A est dense dans C. Soit $x \in C$, et $\varepsilon > 0$. Comme B est dense dans C, on en déduit que $B(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$. Soit $y \in B(x, \varepsilon) \cap B$. Posons $\varepsilon' = \varepsilon - d(x, y) > 0$. On a $B(y, \varepsilon') \subset B(x, \varepsilon)$. Comme $y \in B$ et que A est dense dans B, on a $B(y, \varepsilon') \cap A \neq \emptyset$. Enfin, on a $B(y, \varepsilon') \cap A \subset B(x, \varepsilon) \cap A$, et donc $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, ce qui montre que A est dense dans C.

Si tout ouvert de E rencontre A, alors pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, ce qui montre que tout x de E est dans $\overline{A}$, et donc que A est partout dense.

Réciproquement, supposons A partout dense. Soit U un ouvert non vide de E. Soit $x \in U$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$. Comme A est partout dense, on a $x \in \overline{A}$, donc $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. En particulier, comme $B(x, \varepsilon) \cap A \subset U \cap A$, on en déduit que $U \cap A \neq \emptyset$.

Exercice 1.13. Montrons d'abord que $x \in A^\circ$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Tout d'abord, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$, alors $B(x, \varepsilon)$ est un ouvert contenu dans A, donc $B(x, \varepsilon) \subset A^\circ$, ce qui montre que $x \in A^\circ$.

Réciproquement, supposons que $x \in A^\circ$. Comme A° est un ouvert, on en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A^\circ \subset A$.

Montrons maintenant que $E \setminus A^\circ = \overline{E \setminus A}$. On a $x \in E \setminus A^\circ \;\Leftrightarrow\; x \notin A^\circ \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \not\subset A \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap (E \setminus A) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow x \in \overline{E \setminus A}$.

Exercice 1.14. Montrons que, si $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$ alors Ext A, Int A et ∂A forment une partition de E. En effet, on aura alors Int $A \cap \partial A = \emptyset$, Ext $A \cap \partial A = \emptyset$ car Ext $A = E \setminus \overline{A}$ et car $\partial A \subset \overline{A}$ et enfin $A^\circ \cap$ Ext $A = \emptyset$ car $A^\circ \subset \overline{A}$. Enfin, on a $E = (E \setminus \overline{A}) \cup \overline{A} = (E \setminus \overline{A}) \cup (\overline{A} \setminus A^\circ) \cup A^\circ = \mathrm{Ext}\, A \cup \partial A \cup A^\circ$.

Vérifions donc que $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. Or, par définition, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$. Or $\overline{E \setminus A} = E \setminus A^\circ$, et donc $\partial A = \overline{A} \cap E \setminus A^\circ = \overline{A} \setminus A^\circ$.

Exercice 1.15. *Montrons que x est un point d'accumulation de A si et seulement si tout voisinage V de x contient une infinité de points de A.* Tout d'abord, si V est un voisinage de x qui contient une infinité de points de A, alors V contient au moins un point de A différent de x. En particulier, tout voisinage V de x contient un point de A différent de x, donc x est un point d'accumulation.

Ensuite, soit x un point de E et V un voisinage de x contenant un nombre fini de points $x_1, \dots, x_n$ dans A. Posons $\varepsilon = \inf_{i \in \{1,\dots,n\},\ x_i \neq x} d(x, x_i)$. Comme les x_i sont en nombre fini, on a $\varepsilon > 0$. Enfin, $V \cap B(x, \varepsilon/2)$ est un voisinage de x ne contenant aucun point de A différent de x, ce qui entraîne que x n'est pas un point d'accumulation de A.

On a bien montré que x est un point d'accumulation de A si et seulement si tout voisinage V de x contient une infinité de points de A.

Si x est un point isolé de A, alors il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$, et donc $x \in A$.

Montrons que x est un point d'accumulation de A si et seulement si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Montrons que, si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$, alors x est un point d'accumulation de A. Soit V un voisinage de x. En particulier, il existe $a \in A$, différent de x tel que $a \in V$, et donc x est un point d'accumulation de A.

Réciproquement, si x est un point d'accumulation de A et si $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ est un voisinage de x donc contient un point y de A différent de X. En particulier, $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. On a bien prouvé que x est un point d'accumulation de A si et seulement si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Il reste à vérifier que $\overline{A}$ est la réunion disjointe de l'ensemble des points isolés de A et de l'ensemble des points d'accumulation de A. Le fait que ces ensembles soient disjoints est clair.

Soit $x \in \overline{A}$ qui ne soit pas un point isolé. Montrons que x est un point d'accumulation de A. Soit V un voisinage de x. Comme x n'est pas isolé, on en déduit que $V \cap A \neq \{x\}$. Comme $V \cap A \neq \emptyset$ car $x \in \overline{A}$, on en déduit que $V \cap A$ contient un point différent de x, et donc x est un point d'accumulation de A. On a bien montré que $\overline{A}$ est la réunion disjointe de l'ensemble des points isolés de A et de l'ensemble des points d'accumulation de A.

Enfin, montrons que dans un espace muni de la topologie discrète, $\{x\}$ est ouvert. On remarque qu'on a en fait $\{x\} = B(x, 1/2)$.

Exercice 1.16. Soit V' un voisinage de x dans E. Posons $V = V' \cap F$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_E(x, \varepsilon) \subset V'$. En particulier, comme $B_F(x, \varepsilon) = B_E(x, \varepsilon) \cap F$, on a $B_F(x, \varepsilon) \subset V$ et V est un voisinage de x dans F.

Réciproquement, si V est un voisinage de x dans F, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_F(x, \varepsilon) \subset V$. Posons $V' = V \cup B_E(x, \varepsilon)$. V' est un voisinage de x dans E car V' contient $B_E(x, \varepsilon)$. De plus $V' \cap F = (V \cup B_E(x, \varepsilon)) \cap F = (V \cap F) \cup (B_E(x, \varepsilon) \cap F) = V \cup B_F(x, \varepsilon) = V$.

Si A est une partie de F ouverte dans E, alors $A = A' \cap F$ avec $A' = A$ qui est ouverte dans E, donc A est ouverte dans F.

Montrons que F est ouvert dans E si et seulement si, pour toute partie A ouverte dans F, A est ouverte dans E. Si F est ouverte dans E, et si A est une partie ouverte de F, montrons que A est ouverte dans E. D'après ce qui précède, si A est ouverte dans F, alors il existe une partie A' ouverte de E telle que $A = A' \cap F$. Comme A' et F sont ouvertes dans E et qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert, on en déduit que A est un ouvert de E.

Réciproquement, si pour toute partie A de F ouverte dans F, A est ouverte dans E, alors en faisant $A = F$, on obtient que F est ouverte dans E.

Exercice 1.17. Vérification aisée via l'inégalité de Minkowski. Soit $p \geq 1$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$ et $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \prod_{i=1}^n E_i$, alors $D_p(x, y) = 0$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $d_i(x_i, y_i) = 0$, soit si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i = y_i$, soit si et seulement si $x = y$.

L'égalité $D_p(x, y) = D_p(y, x)$ est claire.

Enfin,

$$\begin{aligned} D_p(x,z) = \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i,z_i)^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{i=1}^n (d_i(x_i,y_i) + d_i(y_i,z_i))^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n d_i(y_i,z_i)^p\right)^{1/p} \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Minkowski. Il reste à vérifier que D_∞ est une distance. Les deux premiers points sont clairs. Montrons le troisième. Si $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $d_i(x_i, z_i) \leq d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)$. Et donc

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad d_i(x_i, z_i) \leq \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} d_i(x_i, y_i) + \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} d_i(y_i, z_i)$$

ce qui entraîne que

$$\max_{i \in \{1,\ldots,n\}} d_i(x_i, z_i) \leq \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} d_i(x_i, y_i) + \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} d_i(y_i, z_i).$$

Exercice 1.18. Supposons que la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ. Montrons que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ d(u_n, \ell) > \varepsilon\}$ est fini. Pour cela, on remarque qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$ on ait $d(u_n, \ell) \leq \varepsilon$ et donc $\{n \in \mathbb{N},\ d(u_n, \ell) > \varepsilon\} \subset \{0, 1, \ldots, n_0\}$ est un ensemble fini.

Réciproquement, supposons que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ d(u_n, \ell) > \varepsilon\}$ est fini. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $n_0 = \max\{n \in \mathbb{N},\ d(u_n, \ell) > \varepsilon\} + 1$. Si $n \geq n_0$, on a $n \notin \{n \in \mathbb{N},\ d(u_n, \ell) > \varepsilon\}$ donc $d(u_n, \ell) \leq \varepsilon$. On a bien montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $d(u_n, \ell) \leq \varepsilon$ et donc (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 1.19. Soit (u_n) une suite stationnaire, c'est à dire qu'il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n = u_{n_0}$. Posons $\ell = u_{n_0}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \geq n_0$, on a $d(u_n, \ell) = d(u_n, u_{n_0}) = 0 \leq \varepsilon$. Donc (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 1.20. Supposons que (u_n) converge vers ℓ et ℓ' avec $\ell \neq \ell'$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{3}d(\ell, \ell')$. Comme (u_n) converge vers ℓ, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $d(u_n, \ell) \leq \varepsilon$. Comme (u_n) converge vers ℓ', il existe n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, on ait $d(u_n, \ell') \leq \varepsilon$. En particulier, si $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a $d(\ell, \ell') \leq d(\ell, u_n)+d(u_n, \ell') \leq \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon < d(\ell, \ell')$ ce qui est impossible. Et donc, $\ell = \ell'$.

Exercice 1.21. On va montrer que si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$. Soit

$$\mathcal{P}(n) = \text{“}\varphi(n) \geq n\text{”}.$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Comme φ est strictement croissante, on a $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, donc $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1 \geq n + 1$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a bien prouvé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

Montrons maintenant, que si (u_n) est une suite convergente vers ℓ et si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $(u_{\varphi(n)})$ est convergente vers ℓ.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $d(u_n, \ell) < \varepsilon$. En particulier, si $n \geq n_0$, comme $\varphi(n) \geq n \geq n_0$, on a $d(u_{\varphi(n)}, \ell) \leq \varepsilon$ et donc $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.

Exercice 1.22. En effet, $w_n = v_{\psi(n)}$. Notons $p = \psi(n)$. On a $w_n = v_p$. Par définition, $v_p = u_{\varphi(p)}$ et donc $w_n = v_p = u_{\varphi(p)} = u_{\varphi(\psi(n))} = u_{\varphi\circ\psi(n)}$.

Exercice 1.23. Supposons $\ell < 0$. Posons $\varepsilon = -\ell/2 > 0$. Soit n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $d(u_n, \ell) \leq \varepsilon$. En particulier, si $n \geq n_0$, on a $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon = \ell/2 < 0$, ce qui est absurde. Donc $\ell \geq 0$.

Exercice 1.24. On applique le théorème de passage à la limite à la suite $v_n - u_n$. Cette suite converge vers $\ell - \ell'$. En effet, si $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\ell-\varepsilon/2 \leq u_n \leq \ell+\varepsilon/2$ et il existe n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, $-\ell'-\varepsilon/2 \leq -v_n \leq -\ell'+\varepsilon/2$. Et donc, pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$, $\ell - \ell' - \varepsilon \leq u_n - v_n \leq \ell - \ell' + \varepsilon$, ce qui implique que $d(u_n - v_n, \ell - \ell') \leq \varepsilon$.

En particulier, comme pour tout n, on a $v_n - u_n \geq 0$, on obtient $\ell' - \ell \geq 0$, soit $\ell \leq \ell'$.

Si $\lim u_n = +\infty$ et $u_n \leq v_n$, montrons que v_n tend vers $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq A$. En particulier, pour tout $n \geq n_0$, $v_n \geq u_n \geq A$, et donc $v_n \to +\infty$.

Exercice 1.25. La suite (w_n) définie par $w_n = u_n - v_n$ est croissante et tend vers 0. Donc, pour tout n, $w_n \leq 0$ (en effet, s'il existe N tel que $w_N > 0$, alors, pour tout $n \geq N$, $w_n \geq w_N > 0$ et donc la limite 0 de (w_n) vérifie $0 \geq w_N > 0$, ce qui est absurde). En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n \leq v_0$ car (v_n) est décroissante. La suite (u_n) est donc croissante majorée donc converge vers ℓ. De même, la suite (v_n) est décroissante minorée donc converge vers ℓ'. Enfin, $(u_n - v_n)$ converge vers $\ell - \ell' = 0$ donc $\ell = \ell'$.

Exercice 1.26. Supposons que a soit dans $\overline{A}$ et montrons qu'il existe (u_n) une suite d'éléments de A qui converge vers a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La boule de centre a et de rayon $1/n$ rencontre A. Soit $u_n \in A \cap B(a, 1/n)$. La suite (u_n) ainsi construite est une suite d'éléments de A. De plus, l'inégalité $d(u_n, a) < 1/n$ valable quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$ montre que (u_n) tend vers a.

Réciproquement, supposons qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers a. Montrons que $a \in \overline{A}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $d(u_n, a) < \varepsilon$. Et donc $u_{n_0} \in B(a, \varepsilon)$ ce qui montre que $B(a, \varepsilon) \cap A$ est non vide. On a bien montré que $a \in \overline{A}$.

Exercice 1.27. Montrons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il suffit de montrer que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui converge vers x. On prend $x_n = [nx]/n$ où $[nx]$ désigne la partie entière de nx. Comme $[nx] \leq nx < [nx] + 1$, on obtient que

$$\frac{[nx]}{n} \leq x < \frac{[nx]}{n} + \frac{1}{n},$$

soit encore

$$x - \frac{1}{n} < \frac{[nx]}{n} \leq x$$

et donc $d(x_n, x) < 1/n$, ce qui prouve le résultat.

Montrons que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = x - \sqrt{2}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (y_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui converge vers y. En particulier, la suite (x_n) définie par $x_n = y_n + \sqrt{2}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ qui converge vers x. (rappelons que si α est rationnel et β irrationnel, la somme $\alpha + \beta$ est irrationnelle).

Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $\mathbb{R}$ est séparable.

Indications pour les exercices d'approfondissement.

Exercice 1.28.

a. non
b. oui
c. oui
d. oui
e. oui
f. non

Exercice 1.30.

1. Il faut et il suffit que f soit injective.

Exercice 1.31. Il suffit de montrer que $f(x) = \inf(1, x)$ est sous-additive, c'est-à-dire que, pour tous $x, y \geq 0$,

$$\inf(1, x + y) \leq \inf(1, x) + \inf(1, y)$$

Etudier la fonction $x \mapsto \inf(1, x) + \inf(1, y) - \inf(1, x + y)$ (Distinguer les cas $y \leq 1$, $y \geq 1$).

Exercice 1.32. Pour l'inégalité triangulaire, refaire la preuve de Minkowski pour les séries.

Exercice 1.38. Pour la question 3, montrez que $d_A = d_{\overline{A}}$.

Exercice 1.42. Pour montrer que $\ell^p \subset \ell^q$, remarquer que si $(u_n) \in \ell^p$, alors $|u_n|$ tend vers 0, et donc pour n assez grand $|u_n|^q \leq |u_n|^p$.

Exercice 1.43. Utilisez le fait que (u_n) tend vers ℓ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N},\ d(u_n, \ell) < \varepsilon\}$ est fini. Pour la deuxième question, utilisez le fait que si une suite converge, toute suite extraite de cette suite converge vers la même limite.

Exercice 1.44.

1. Traiter d'abord le cas où (u_n) est réelle et $\ell = 1$. Se ramener ensuite à ce cas dans le cas général.
2. Se ramener au cas où $\ell = 0$.
3. Si $|q_n|$ ne tend pas vers ∞, on peut en extraire une suite $(q_{\varphi(n)})$ bornée. La suite $(p_\varphi(n))$ sera elle aussi bornée, donc $\{p_{\varphi(n)}/q_{\varphi(n)},\ n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble fini et ℓ est dans l'adhérence de cet ensemble. En particulier, ℓ est dans cet ensemble ce qui est absurde.

Exercice 1.46. Trouver un sous-ensemble discret non dénombrable (par exemple $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$). Si ℓ^∞ était séparable, il existerait (x_n) une suite d'éléments de ℓ^∞ dense dans E. Les boules de centre x et de rayon $1/2$ pour $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sont disjointes et contiennent au moins un x_N. Absurde.

Exercice 1.47. Raisonner avec les suites.