UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET SCIENCES PHYSIQUES
Pr TEWA Jean Jules

ANNEE ACADEMIQUE 2020/2021
CYCLE INGENIEUR II

TRAVAUX DIRIGES DE LOIS DE PROBABILITES

Exercice 1 : ***Stabilité d'une loi***

1) Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Déterminer la loi suivie par $Z = X + Y$.
2) Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que X et Y suivent une même loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi suivie par $Z = X + Y$
3) Déterminer $P(X > n)$ pour $n \in IN$
4) En déduire la loi de $K = \min(X,Y)$

Exercice 2 : Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte en tout N images distinctes. On note X_k le nombre d'achats ayant permis l'obtention de k images distinctes. En particulier, $X_1 = 1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète.

1) Déterminer la loi suivie par la variable $X_{k+1} - X_k$.
2) En déduire l'espérance de X_N.

Exercice 3 : Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans IN.
On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la loi de Y sachant $X = n$ est binomiale de paramètres n et $p \in]0,1[$.

1) Déterminer la loi conjointe de (X,Y).
2) Reconnaître la loi de Y.

Exercice 4 : Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans IN.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie $P(X = j, Y = k) = \dfrac{a}{j!\,k!}$, avec $a \in IR$.

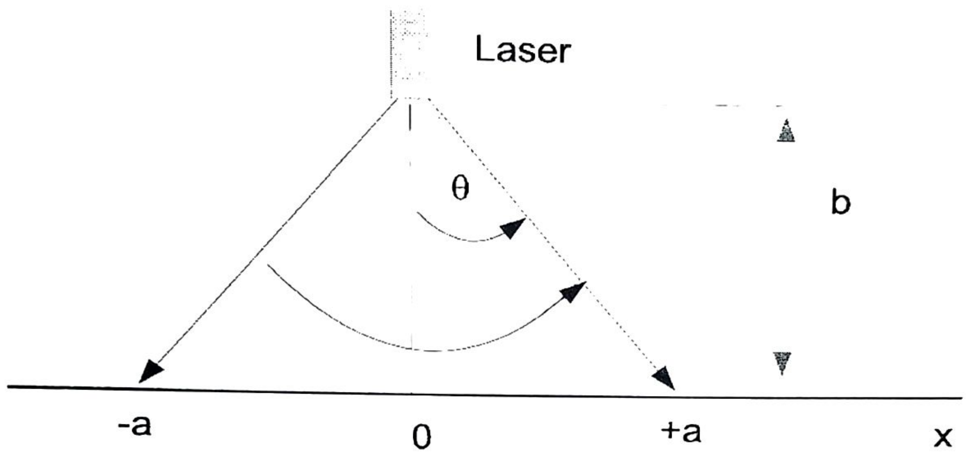
1) Déterminer la valeur de a
2) Reconnaître les lois marginales de X et Y
3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 : La durée de vie d'une ampoule est distribuée suivant la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif, de densité : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} 1_{[0,+\infty]}(t)$.

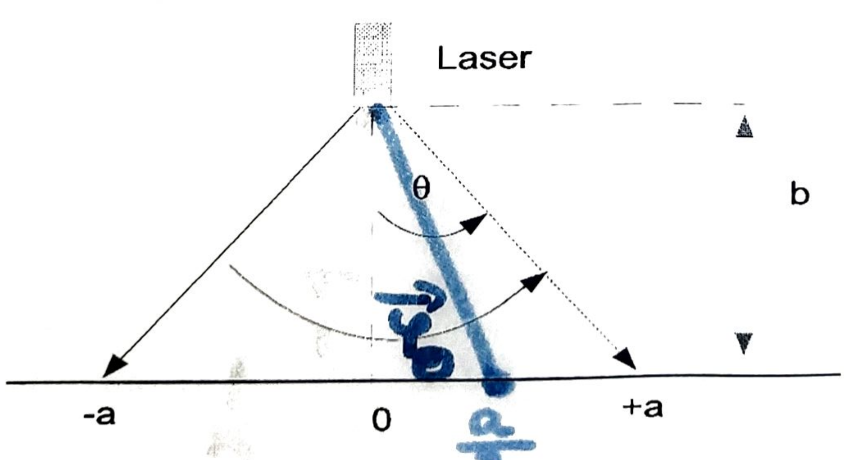
1. Tracer le graphe de f.
2. Calculer la probabilité que la durée de vie soit comprise entre -3 et 4.
3. Calculer la probabilité que la durée de vie soit inférieure à t. On appelle $F(t)$ cette quantité. Tracer le graphe de F.
4. Déterminer t_0 tel que 50% des ampoules aient une durée de vie inférieure à t_0.

5. Déterminer t_1 tel que 75% des ampoules aient une durée de vie inférieure à t_1.
Soit X la variable aléatoire associée à la durée de vie d'une ampoule.
6. Calculer le moment d'ordre n de X. En déduire la durée de vie moyenne et la variance de la durée de vie.

Exercice 6 : ***Le graveur Laser***



Pendant un procédé de gravure, un faisceau laser balaye une fois et à vitesse de rotation ω constante un axe horizontal. Le déplacement s'effectue de $x=-a$ à $x=+a$. La distance du laser à l'axe balayé est notée b.
1. Quelle est la durée T_0 du balayage complet ?
Le dispositif tombe en panne à l'instant $T\in[0,T_0]$. On suppose que T est une variable aléatoire uniformément distribuée sur cette période.
2. Quelle est la probabilité que le faisceau tombe en panne avant qu'il ait atteint $x=\dfrac{a}{2}$?
3. Donner la densité de probabilité de la variable aléatoire X où X est la position où s'arrête le faisceau.
N.B : *Il est important de comprendre que les variables aléatoires réelles X et T sont fortement liées même si l'une est spatiale et l'autre temporelle.*



Exercice 7 : Un tremblement de Terre de magnitude M libère une énergie E telle que $M = \log(E)$ où log désigne le logarithme népérien. Pour des tremblements de terre de magnitude $M > 3$, on suppose que la variable aléatoire $Y = M - 3$ suit une loi exponentielle de moyenne égale à 2. Par la suite, on néglige les tremblements de terre dont la magnitude est inférieure à 3.

1. Calculer la moyenne et la variance de M.
2. Calculer la densité de probabilité de M et tracer son graphe.
3. Calculer la fonction de répartition de E et sa densité de probabilité.
4. On s'intéresse à deux tremblements de terre indépendants et dont la magnitude suit la même loi que celle de M. Démontrer que l'on a $P\left(\min\left\{M_1, M_2\right\} \geq m\right) = \left(P\left(M \geq m\right)\right)^2$ pour tout $m > 3$.
5. En particulier, calculer $P\left(\min\left\{M_1, M_2\right\} \geq 4\right)$.

Exercice 8 : soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}(1-x)^{\frac{1}{3}} \ si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \sin on \end{cases}$

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire Y.
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable Y. Construire sa représentation graphique dans un repère orthonormal.
3. Calculer l'espérance de la variable Y.
4. Calculer la probabilité de l'événement $\left\{0,488 < Y \leq 1,2\right\}$

Exercice 9 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\varepsilon(\lambda)$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.
2. Déterminer une densité de X^2.
3. Déterminer une densité de X^3.

Exercice 10 : ***Loi géométrique sur*** IN

On lance une pièce de monnaie indéfiniment jusqu'à obtenir pile pour la première fois. La probabilité d'obtenir face est q et celle d'obtenir pile est $p = 1 - q$.

On suppose $p \in \left]0,1\right[$. Soit X le rang du tirage qui am.ne le dernier face consécutif.

Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 11 : ***Recherche d'une loi***

Soit $n \in IN^*$. Une urne contient une boule blanche, une boule verte et une boule rouge. On tire successivement n boules de cette urne, avec remise de la boule dans l'urne après chaque tirage. Pour $i \in \left[2, n\right] \cap IN$, on dit qu'il y a changement de couleur au $i^{ème}$ tirage si la $i^{ème}$ boule tirée n'a pas la même couleur que la $(i-1)^{ème}$ boule tirée.

On note X la variable aléatoire .gale au nombre de changements de couleur obtenus au cours des n tirages.

1) Déterminer la loi de X.

2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

<u>Exercice 12</u> : ***Tirage avec ou sans remise***

Soit n et k deux entiers vérifiant $1 \leq k \leq n$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une à une, sans remise, k boules de cette urne.

Soit X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros des boules tirées.

1) Déterminer la loi de X.
2) Déterminer la loi de X si le tirage est avec remise.

<u>Exercice 13</u> : ***Loi de Pascal***

Une urne contient a boules vertes et b boules blanches. On effectue des tirages avec remise de la boule tirée.

1) Trouver la loi de la variable X associée au temps d'attente de la $r^{ième}$ boule verte.
2) Déterminer son espérance et sa variance.

<u>Exercice 14</u> : ***Loi Binomiale négative***

On considère une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes ayant deux issues possibles succès et échec et de même paramètre p (la probabilité du succès). On considère la variable X associée au nombre d'échecs obtenus avant le $r^{ième}$ succès.

Déterminer la loi de X son espérance et sa variance.

<u>Exercice 15</u> : ***Temps d'attente dans un tirage sans remise***

Considérons une urne à deux catégories comportant N boules ($N \in IN^*$) dont a boules blanches et b boules noires ($a, b \in IN^*$).

1) Pour tout $n \in IN^*, n \leq N$ on introduit S_n le nombre de boules blanches (succès) obtenues au cours des n premiers tirages effectués sans remise. Déterminer la loi de S_n.

2) Soit Y la variable aléatoire égale au temps d'attente de la première boule blanche. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

<u>Exercice 16</u> : ***Loi de Pascal et théorème de transfert***

On effectue une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli de même paramètre p, répétées de façon indépendantes. Soit X la variable aléatoire associée au rang d'apparition du $k^{ième}$ succès.

1) Déterminer la loi de X
2) Pour $k = 2$, calculer $E(X)$ et $E\left(\frac{2}{X}\right)$

<u>Exercice 17</u> : ***Loi d'une variable sous condition***

Soit X une variable de Poisson de paramètre λ. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ } si \text{ } X(\omega) \text{ } est \text{ } nul \text{ } ou \text{ } impair, \\ \dfrac{X(\omega)}{2} \text{ } si \text{ } X(\omega) \text{ } est \text{ } pair \text{ } et \text{ } non \text{ } nul \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Exercice 18 : Soit un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi est définie dans le tableau ci-dessous :

X/Y	1	2	3	4
1	0	0	0	0,3
2	0,2	0	0	0
3	0	0	0,1	0
4	0,3	0,1	0	0

1) Déterminer les lois marginales de ce couple.
2) Les lois de X et Y sont-elles indépendantes ?
3) Calculer la covariance du couple (X,Y).
4) Déterminer les lois conditionnelles de X sachant que $Y=2$ et de Y sachant que $X \in \{1,4\}$.
5) Déterminer la loi de la variable aléatoire $E(X/Y)$.
6) Calculer $E\left[E(X/Y)\right]$ et comparer à $E(X)$.

Exercice 19 : Soit (X,Y) un vecteur aléatoire discret dans IN^2 dont la loi conjointe est $P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) = C_n^x C_{n-x}^y p^x q^y (1-p-q)^{n-x-y}$ pour $x,y \in \{0,1,\cdots,n\}$ avec $x+y \leq n$ (loi multinomiale)

1) Déterminer la loi de X
2) Déterminer les lois conditionnelles de Y sachant que $\{X=x\}$ et de X sachant que $\{Y=y\}$
3) Calculer $E(Y/\{X=x\})$ et $E(X/\{Y=y\})$
4) Trouver $E(Y/X)$ et $E(X/Y)$

Exercice 20 : ***Calcul d'une covariance***

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. Soit $Y_n = X_n X_{n+1}$; on pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $V_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1) Calculer $E(S_n), E(V_n), V(S_n)$ et $V(V_n)$
2) Calculer $Cov(S_n, V_n)$

Exercice 21 : ***Chasse aux fraudeurs***

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros. Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.

Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au $i^{ème}$ trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Dans cette partie on suppose que $p = \frac{1}{20}$

a. Calculer l'espérance mathématique de X.

b. Calculer les probabilités $P(X=0), P(X=1), P(X=2)$.

c. Calculer la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit Z_i la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.

Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$ puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \frac{1}{5}$

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99%.

a. Démontrer que $P(X \leq 2) = (1-p)^{38}\left(741p^2 + 38p + 1\right)$

b. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = (1-x)^{38}\left(741x^2 + 38x + 1\right)$

Montrer que f est strictement décroissante sur $[0,1]$ et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0,1]$ tel que $f(x_0) = 0{,}01$. Déterminer l'entier naturel n tel que $\frac{n}{100} < x_0 < \frac{n+1}{100}$

c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99%. (On exprimera p en fonction de x_0).

<u>Exercice 22</u> : ***Visite de musée***

Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-contre, organise une exposition. Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard, en faisant les hypothèses suivantes :

- Le visiteur passe au hasard d'une salle à une salle voisine.
- Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.

Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E.

Par exemple :

- Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDF.
- Le trajet codé EBDB est impossible avec les hypothèses choisies.

1. On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes.

a. Construire l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur.

b. Montrer que la probabilité du parcours codé EBDF est $\frac{1}{6}$.

c. Déterminer la probabilité p_1 de l'événement : « La quatri.me salle du trajet est F ».

d. Pour des raisons techniques, le directeur installe les œuvres les plus intéressantes dans la salle T. Déterminer la probabilité p_2 de l'événement « Le trajet passe par la salle T ».

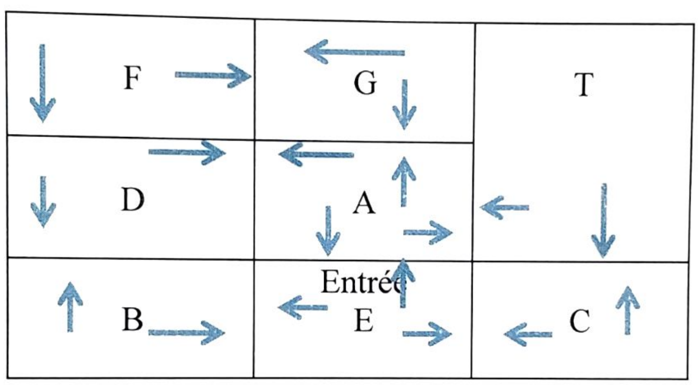
2. Le directeur imagine dix visiteurs pris au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux dix visiteurs, associe le nombre de leurs trajets passant par la salle T.

a. Calculer la probabilité de l'événement $\{X = 1\}$.

b. Calculer la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T. (Donner le résultat arrondi au millième.)

c. Le directeur décide d'obliger les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, les hypothèses précédentes demeurant pour la suite des trajets. Il pense ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins, sur les dix, passent par la salle T. Prouver qu'il a tort.



La case F communique avec les cases G et D ; la case D communique avec les cases A et B ; la case G communique avec les cases F et A ; la case A communique avec les cases D, E et T ; la case B communique avec les cases D et E ; la case E communique avec les cases A et C ; la case C communique avec les cases E et T ; la case T communique avec les cases A et C

<u>Quelques relations utiles</u>

Relation de Vandermonde

$\forall n,m,N$ tels que $0 \le N \le n+m$, $\sum_{k=0}^{k=N} C_n^k \, C_m^{N-k} = C_{n+m}^N$

Relation de Pascal

$\forall n,k$ tels que $0 \le k \le n$, $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

D'autres relations

$\forall n,p$ tels que $0 \le p \le n$, $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$ et $\sum_{k=n}^{n+p} C_k^n = C_{n+p+1}^{n+1}$