ENSP
Examen de MAT218
Durée 3h
Novembre 2017

MAT218 : Algèbre multilinéaire - Courbes et surfaces

Exercice 1.

1. On considère les formes linéaires f_1 et f_2 sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$f_1(x, y) = x + y; \quad f_2(x, y) = x - y.$$

   (a) Montrer que $\gamma^* = (f_1, f_2)$ est une base de $(\mathbb{R}^2)^*$.

   (b) Exprimer les formes linéaires g et h dans la base γ^* :

$$g(x, y) = x, \quad h(x, y) = 2x - 6y.$$

2. (a) Montrer que les polynômes $u_1(X) = 1 - X + X^2$, $u_2(X) = 1 + X^2$ et $u_3(X) = 1 - X^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Déterminer la base duale associée à la base (u_1, u_2, u_3).

3. (a) Montrer que l'application

$$q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 8z^2 - 4xy + 2xz - 10yz$$

   définie une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

   (b) Montrer que le cône d'isotropie de q est la réunion de deux plans dont on déterminera des équations

   (c) Déterminer la forme polaire de q.

   (d) Déterminer le noyau de q.

4. Considérer la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x, y, z) = xy + yz + xz.$$

   (a) Déterminer la signature, le rang et une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Soit $e_1 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. On considère $F = \mathbb{R}e_1$. Déterminer $F^\perp$.

Exercice 2.

On considère, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la forme quadratique

$$q_\alpha(x, y, z) = \alpha\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 2(xy + xz + yz).$$

1. Justifier que q_α est une forme quadratique pour toute valeur de α, et déterminer la forme polaire associée.

2. Déterminer une matrice M_α de q_α, puis le rang de q_α en fonction de α.

3. Déterminer les valeurs de α pour les quelles q_α est définie positive.

4. Réduire q_α en fonction des valeurs de α.

5. Déterminer une base q_α-orthogonale pour tout α.
   Indication : Remarquer que

$$q_\alpha(x, y, z) = (\alpha + 1)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - (x + y + z)^2.$$