

UNIVERSITE DE YAOUNDE I

Ecole Nationale Supérieure Polytechnique

Département des Génies Industriel et Mécanique

**Cours  
de  
Mécanique du Solide**

Pr. KENMEUGNE Bienvenu

# SOMMAIRE

<b>Chap. 1 - CALCUL VECTORIEL</b>	<b>5</b>
I. DEFINITIONS	5
I. 1. Vecteur lié	5
I. 2. Vecteur libre	5
I. 3. Vecteur glissant	6
II. OPERATIONS SUR LES VECTEURS LIBRES	6
II. 1. Addition de vecteurs	6
II. 2. Produit externe	6
II. 3. Produit scalaire	7
II. 4. Produit vectoriel	7
II. 5. Double produit vectoriel	8
II. 6. Produit mixte	8
II. 7. Composantes d'un vecteur sur un plan (P) et sa normale	9
III. DERIVATION	9
III. 1. Définition	9
III. 2. Propriétés	10
IV. DIVISION VECTORIELLE	11
V. LE VECTEUR MOMENT	11
V. 1. Définition	11
V. 2. Propriétés	12
VI. LES TORSEURS	12
VI. 1. Définition	12
VI. 2. Propriétés	13
VI. 3. Torseur associé à un champ de vecteurs	13
VI. 4. Différents types de torseurs	13
VI. 5. Axe central d'un torseur	14
VI. 6. Expression des torseur en mécanique	15
<b>Chap. 2 - BASES PHYSIQUES : UNITES - GRANDEURS - MESURES</b>	<b>17</b>
I. SYSTEME D'UNITES - DIMENSION $[G]$ D'UNE GRANDEUR G	17
I. 1. Différents systèmes	17
I. 2. Dimension $[G]$ d'une grandeur G	17
I. 3. Grandeurs mécaniques	17
I. 4. Grandeurs électriques et magnétiques	18
I. 5. Remarques	18
I. 6. Multiples et sous multiples	18
I. 7. Quelques unités particulières	18
I. 8. Problèmes de changement de système d'unités - utilisation des équations aux dimensions	19
II. MESURE DES GRANDEURS (METROLOGIE)	19
II. 1. Différentes causes d'erreur	19
II. 2. Incertitude absolue	20
II. 3. ... de relative	20
II. 4. Calcul des incertitudes	20
II. 5. Exemples	21
III. GRANDEURS SCALAIRES ET GRANDEURS VECTORIELLES	22
III. 1. Les grandeurs scalaires	22
III. 2. Les grandeurs vectorielles	22

<b>Chap. 3 - CINÉMATIQUE DU SOLIDE RIGIDE</b>	<b>23</b>
<b>1<sup>er</sup> partie : CINÉMATIQUE DU SOLIDE RIGIDE</b>	<b>23</b>
I. DEFINITION - BUT	23
I. 1. Définition	23
I. 2. But	23
II. SOLIDE "INDEFORMABLE"	23
II. 1. Définition	23
II. 2. Conséquences	24
II. 3. Mouvement d'un solide	24
III. CHAMP DES VITESSES	24
III. 1. Vecteur rotation	25
III. 2. Formule du repère mobile	25
III. 3. Torseur cinématique	26
III. 4. Calcul du vecteur rotation	26
IV. CHAMP DES ACCELERATIONS	27
V. MOUVEMENTS PARTICULIERS	27
V. 1. Translation	27
V. 2. Rotation autour d'un axe	27
V. 3. Mouvement hélicoïdal tangent	27
<b>2<sup>nd</sup> partie : COMPOSITION DE MOUVEMENTS</b>	<b>28</b>
VI. DEFINITIONS	28
VI. 1. Mouvement "absolu"	28
VI. 2. Mouvement relatif	28
VI. 3. Mouvement d'entraînement	29
VII. COMPOSITION DES DERIVATIONS	29
VIII. COMPOSITION DES VITESSES	30
IX. COMPOSITION DES ACCELERATIONS	30
X. COMPOSITION DE MOUVEMENTS DE REPERES	32
X. 1. Vitesse	32
X. 2. Accélération	32
X. 3. Rotation	32
X. 4. Composition des torseurs cinématiques	32
X. 5. Mouvements inverses	33
X. 6. Cinématique du contact de deux solides	33
X. 7. Vitesse de glissement	33
X. 8. Roulement sans glissement	34
XI. REPERAGE D'UN SOLIDE PAR LES ANGLES D'EULER	34
XII. LIAISONS PARFAITES ET TORSEURS CINÉMATIQUES ASSOCIES	35
XII. 1. Liaisons entre solides	35
XII. 2. Liaisons normalisées entre solides	35
XII. 3. Schémas normalisés	35
XII. 4. Degrés de liberté d'un solide par rapport à un autre	35
Tableau des liaisons parfaites et torseurs cinématiques associés	35
	36

<b>Chap. 4 - STATIQUE</b>	
I. DEFINITIONS - BUT - GENERALITES	38
I. 1. Définition	38
I. 2. But	38
I. 3. Généralités - Définitions	38
II. PREMIER PRINCIPE DE LA STATIQUE	39
II. 1. Représentation des actions mécaniques	39
II. 2. Propriétés	39
II. 3. Premier principe de la statique	39
III. MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES DE CONTACT	40
III. 1. Torseur d'action mécanique de contact	40
III. 2. L...lomb	41
III. 3. Solides en contact ponctuel	42
III. 4. Liaisons parfaites	44
III. 5. Schéma cinématique minimal	46
IV. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (PFS)	47
IV. 1. Principe fondamental de la statique appliqué à un solide	47
IV. 2. Exemple : étude de l'équilibre de ( $S_1$ )	47
IV. 3. Démarche de résolution d'un problème de statique du solide	48
V. STATIQUE D'UN SYSTEME DE SOLIDES OU ENSEMBLE MATERIEL (E)	48
V. 1. Définition	48
V. 2. Principe fondamental de la statique	48
V. 3. Hyperstatisme des mécanismes : h	49
VI. STATIQUE GRAPHIQUE	50
VI. 1. Introduction	50
VI. 2. Méthodologie et résolution	50
VI. 3. Avantages et inconvénients de la méthode graphique	51
VII. APPLICATIONS : ARC-BOUTEMENT - BASCULEMENT - COINCEMENT	51
<b>Chap. 5 - CINETIQUE</b>	52
I. REPARTITION DES MASSES	52
I. 1. Masse volumique - masse	52
I. 2. Centre de gravité	52
I. 3. Moments d'inertie	54
II. TORSEUR CINETIQUE	57
II. 1. <del>Définition</del>	57
II. 2. Résultante cinétique	57
II. 3. Moment cinétique - 1 <sup>er</sup> théorème de Koënig	58
II. 4. Torseur cinétique d'un ensemble matériel	58
III. TORSEUR DYNAMIQUE	59
III. 1. Définition	59
III. 2. Résultante dynamique	59
III. 3. Moment dynamique	59
III. 4. Torseur dynamique d'un ensemble matériel	60
IV. ENERGIE CINETIQUE	60
IV. 1. Energie cinétique d'un solide ( $S$ ) en mouvement par rapport à un repère ( $R$ )	60
IV. 2. Cas particuliers	61

<b>Chap. 6 - DYNAMIQUE : PRINCIPES NEWTONIENS</b>	<b>62</b>
I. HYPOTHÈSE D'UN ESPACE ABSOLU	62
II. HYPOTHÈSE D'UNE CHRONOLOGIE ABSOLUE	62
III. ORIGINE DES FORCES	62
IV. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE	63
IV. 1. Enoncé	63
IV. 2. Principe de la statique	64
IV. 3. Principe de la résultante dynamique	64
IV. 4. Principe du moment dynamique	64
IV. 5. Principe d'action-réaction	65
<b>Chap. 7 - ENERGETIQUE</b>	<b>66</b>
I. PUSSANCE	66
1. 1. Cas du point matériel	66
1. 2. Cas du solide	66
1. 3. Puissance développée par des actions réciproques entre deux solides	67
1. 4. Puissance des actions de contact	68
II. TRAVAIL	68
III. ENERGIE POTENTIELLE	68
III. 1. . . . .	68
III. 2. Applications	69
IV. THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE	69
IV. 1. Cas d'un solide	69
IV. 2. Cas d'un ensemble de solides	70
IV. 3. Intégrale première de l'énergie cinétique	70
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>71</b>

# Chap. 1 - CALCUL VECTORIEL

## TABLE DES MATIERES

- Définitions
- Opérations sur les vecteurs libres
- Dérivation
- Division vectorielle
- Le vecteur moment
- Les torseurs

## I. DEFINITIONS

Le cours de mécanique générale nécessite l'introduction d'un espace Euclidien  $\mathbb{R}^3$  à trois dimensions (3 dimensions spatiales). Le temps est introduit pour la description des mouvements. On suppose définie une base orthonormée.

### I. 1. Vecteur lié

Définition : un vecteur lié (ou bipoint ou pointeur) est un couple ordonné de 2 points A et B

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

Un vecteur lié dépend de 6 paramètres scalaires :

$$x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B$$

Un vecteur lié ne possède qu'un seul représentant dans l'espace : le bipoint  $[AB]$  :

Un vecteur lié est défini par un point d'application A, une droite support ( $\Delta$ ), une intensité et un sens.

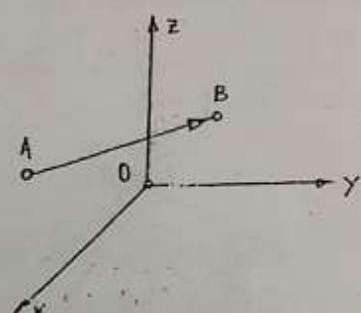


Figure 1.1

Intensité :  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$       sens :  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$

Les vecteurs liés de supports parallèles, de même sens et de même module sont dits équipollents.

### I. 2. Vecteur libre

Définition : un vecteur libre est constitué par la classe d'équivalence (l'ensemble des vecteurs équipollents) d'un vecteur lié donné.

$$\vec{U} = U_x \vec{x} + U_y \vec{y} + U_z \vec{z}$$

Un vecteur libre dépend de 3 paramètres scalaires :

$$U_x, U_y, U_z$$

Un vecteur libre possède une infinité de représentants.

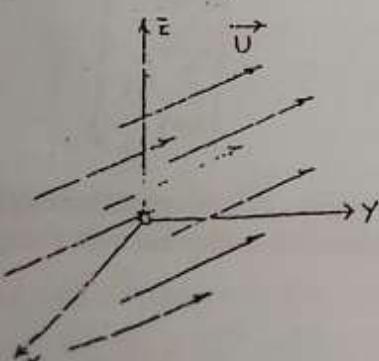


Figure 1.2

### I. 3. Vecteur glissant

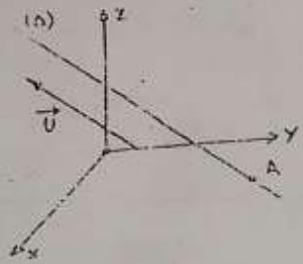


Figure 1.3

Définition : un vecteur glissant est constitué par les vecteurs équipollents à un vecteur lié donné, supportés par la même droite ( $\Delta$ ).

Un vecteur glissant est défini par un vecteur libre et un point quelconque du support.

Un vecteur glissant dépend de cinq paramètres :

$$U_x, U_y, U_z$$

Les composantes du vecteur

La trace de ( $\Delta$ ) dans un plan quelconque  $x_A, y_A$ , par exemple.  
Un vecteur glissant possède une infinité de représentants disposés le long de support.

## II. OPERATIONS SUR LES VECTEURS LIBRES

$$\bar{U}_k = x_k \cdot \bar{x} + y_k \cdot \bar{y} + z_k \cdot \bar{z} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

dans une base orthonormée  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

On considère des vecteurs tels que :

### II. 1. Addition de vecteurs

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 + \bar{U}_2 &= (x_1 \cdot \bar{x} + y_1 \cdot \bar{y} + z_1 \cdot \bar{z}) + (x_2 \cdot \bar{x} + y_2 \cdot \bar{y} + z_2 \cdot \bar{z}) = \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La somme est commutative.

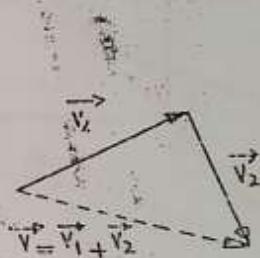


Figure 1.4

De façon générale :

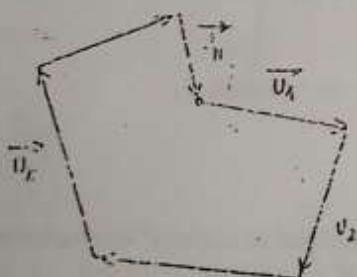


Figure 1.5

$$\bar{U} = \sum_{k=1}^N \bar{U}_k = \sum_{k=1}^N x_k \cdot \bar{x} + y_k \cdot \bar{y} + z_k \cdot \bar{z} =$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N x_k \\ \sum_{k=1}^N y_k \\ \sum_{k=1}^N z_k \end{bmatrix}$$

Si  $\bar{U} = \bar{0}$  c'est que les vecteurs  $\bar{U}_k$  forment les cotés d'un polygone (l'extrémité du dernier vecteur est confondue avec l'origine du premier vecteur)

### II. 2. Produit externe

C'est la multiplication d'un vecteur par un scalaire réel. Le résultat est un vecteur colinéaire au vecteur initial.

$$\lambda \in \mathbb{R}, \vec{U} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow[\text{externe}]{\text{pdt scalaire}} \lambda \vec{U} \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \lambda \vec{U} = \lambda x \vec{x} + \lambda y \vec{y} + \lambda z \vec{z} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

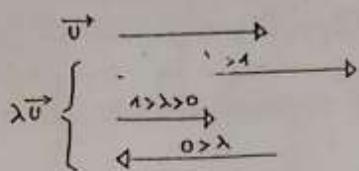
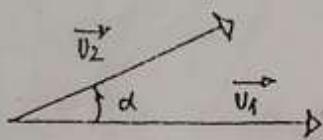


Figure 1.6

### II. 3. Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs est défini par :



$$\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 = \|\vec{U}_1\| \|\vec{U}_2\| \cos \alpha$$

La transformation géométrique associée est la projection orthogonale.  
Dans un système orthonormé :

$$\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 = (x_1 \vec{x} + y_1 \vec{y} + z_1 \vec{z}) \cdot (x_2 \vec{x} + y_2 \vec{y} + z_2 \vec{z}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Figure 1.7

Le produit scalaire est commutatif :  $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 = \vec{U}_2 \cdot \vec{U}_1$

Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :  $\vec{V} \cdot (\vec{U}_1 + \vec{U}_2) = \vec{V} \cdot \vec{U}_1 + \vec{V} \cdot \vec{U}_2$

Le produit scalaire est associatif pour le produit externe :  $(\lambda \vec{U}_1) \cdot \vec{U}_2 = \lambda (\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2)$

Le produit scalaire est nul si :  $\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 = 0 \Rightarrow \vec{U}_1 = \vec{0}$  ou  $\vec{U}_2 = \vec{0}$  ou  $\vec{U}_1$  perpendiculaire à  $\vec{U}_2$

$$\|\vec{U}\|^2 = \vec{U} \cdot \vec{U}$$

Le carré scalaire est égal au carré du module :

Projection d'un vecteur  $\vec{V}$  sur un axe ( $\Delta$ ) orienté par le vecteur unitaire  $\vec{u}$  :  $\text{proj}_{\Delta}(\vec{V}) = \vec{V} \cdot \vec{u}$

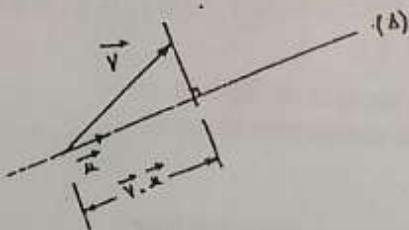


Figure 1.8

### II. 4. Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur défini comme suit :

$$\vec{U}_1, \vec{U}_2 \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{pdt vectoriel}} \vec{W} \in \mathbb{R}^3 \text{ tq: } \vec{W} = \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 = \|\vec{U}_1\| \|\vec{U}_2\| \sin \alpha \vec{w}$$

La direction du vecteur résultant est perpendiculaire au plan défini par les vecteurs opérands.

Le module du vecteur résultant est égal à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs opérands.  
Le sens du vecteur résultant est tel qu'il forme avec les vecteurs opérands un trièdre direct.

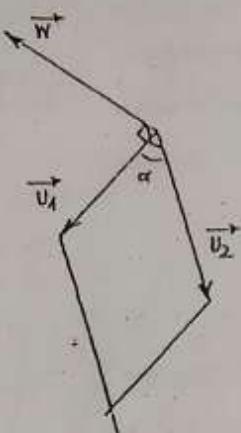


Figure 1.9

Dans une base orthonormée :  
Le produit vectoriel peut être défini par un "déterminant" d'ordre 3 tel que :

$$\vec{U}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \vec{U}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 = \begin{vmatrix} \bar{x} & x_1 & x_2 \\ \bar{y} & y_1 & y_2 \\ \bar{z} & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 = \begin{bmatrix} + & y_1 & y_2 \\ - & z_1 & z_2 \\ + & x_1 & x_2 \\ - & z_1 & z_2 \\ + & x_1 & x_2 \\ - & y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2 \\ z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2 \\ x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2 \end{bmatrix}$$

ou encore :  
Le produit vectoriel est anti-commutatif :

$$\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 = -\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_1$$

Le produit vectoriel est distributif vis à vis de l'addition :  $\vec{V} \wedge (\vec{U}_1 + \vec{U}_2) = \vec{V} \wedge \vec{U}_1 + \vec{V} \wedge \vec{U}_2$

Le produit vectoriel est associatif pour le produit externe :  $(\lambda \vec{U}_1) \wedge \vec{U}_2 = \lambda (\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2)$

Le produit vectoriel est nul si :  $\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{U}_1 = \vec{0}$  ou  $\vec{U}_2 = \vec{0}$  ou  $\vec{U}_1$  parallèle à  $\vec{U}_2$

## II. 5. Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel n'est pas un opérateur particulier, toutefois on rencontre assez fréquemment celle combinaison de trois vecteurs en mécanique classique, notamment lors de la composition de mouvement.

Propriété :  $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

## II. 6. Produit mixte

Le produit mixte de trois vecteur est un scalaire réel défini comme suit :

$$\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3 \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{pdlt mixte}} \sigma = (\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq: } \sigma = \vec{U}_1 \cdot (\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3)$$

Le produit mixte de trois vecteur est égal, en module, au volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs opérands :

Le produit mixte est invariant par permutation circulaire :

$$(\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3) = (\vec{U}_2, \vec{U}_3, \vec{U}_1) = (\vec{U}_3, \vec{U}_1, \vec{U}_2)$$

D'où une autre expression :

$$(\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3) = \vec{U}_1 \cdot (\vec{U}_2 \wedge \vec{U}_3) = (\vec{U}_1 \wedge \vec{U}_2) \cdot \vec{U}_3$$

Le produit mixte est distributif vis à vis de l'addition :

$$(\vec{A}, \vec{B}, (\vec{U}_1 + \vec{U}_2)) = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{U}_1) + (\vec{A}, \vec{B}, \vec{U}_2)$$

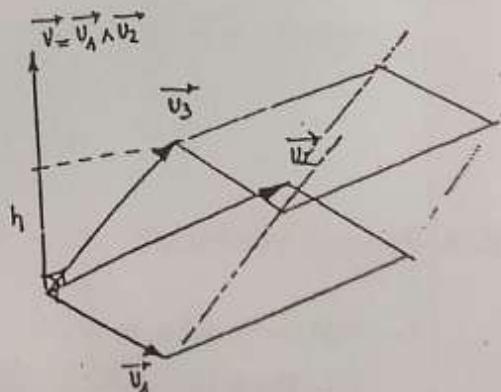


Figure 1.10

dans une base orthonormée :

$$(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1)$$

$$(\bar{A}, \bar{B}, \lambda\bar{U}) = \lambda(\bar{A}, \bar{B}, \bar{U})$$

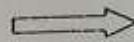
Le produit mixte est associatif avec le produit externe :

Le produit mixte est nul si :

$$(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3) = 0 \Rightarrow \bar{U}_1 = \bar{0} \text{ ou } \bar{U}_2 = \bar{0} \text{ ou } \bar{U}_3 = \bar{0} \text{ ou } \bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3 \text{ sont coplanaires}$$

## II. 7. Composantes d'un vecteur $\bar{b}$ sur un plan (P) et sa normale $\bar{n}$

Données : équation du plan (P)



composantes de  $\bar{n}$

Vecteur  $\bar{b}$

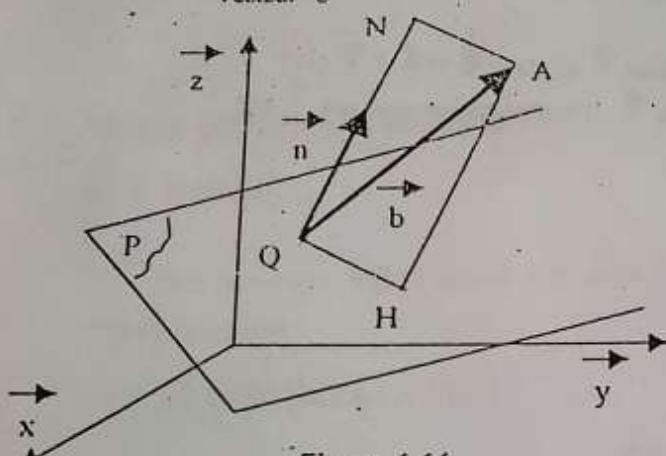


Figure 1.11

Composante normale :  $\bar{QN} = \bar{n} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{n})$

Composante tangentielle :  $\bar{QH} = \bar{n} \wedge (\bar{b} \wedge \bar{n})$

Démonstration :

$$\text{On a : } \bar{b} = \bar{QA} = \bar{QH} + \bar{AH} = \bar{QH} + \bar{QN}$$

$$\text{Soit : } \bar{QH} = \bar{QA} - \bar{QN} = \bar{b} - \bar{n} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{n})$$

$$\text{d'où } \bar{QH} = (\bar{n} \cdot \bar{n}) \cdot \bar{b} - \bar{n} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{n}) = \bar{n} \wedge (\bar{b} \wedge \bar{n})$$

## III. DERIVATION

### III. 1. Définition

On considère un vecteur tel que :  $\bar{U} = x(t)\bar{x} + y(t)\bar{y} + z(t)\bar{z}$  dont les composantes dans une base orthonormée  $\{\bar{R}\} = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$  dépendent du temps. Les vecteurs de base sont constants (invariants avec le temps).

On définit la dérivée du vecteur  $\bar{U}$  par rapport au temps dans le repère  $\{\bar{R}\}$  de la façon suivante :

$$\left( \frac{d\bar{U}}{dt} \right)_R = \frac{dx(t)}{dt} \bar{x} + \frac{dy(t)}{dt} \bar{y} + \frac{dz(t)}{dt} \bar{z} = \dot{x} \bar{x} + \dot{y} \bar{y} + \dot{z} \bar{z}$$

L'indice R à droite du signe de dérivation rappelle que les vecteurs de base de  $\{\bar{R}\}$  sont invariants par dérivation par rapport au temps.

### III. 2. Propriétés

$$\left( \frac{d(\bar{U}_1 + \lambda\bar{U}_2)}{dt} \right)_R = \left( \frac{d\bar{U}_1}{dt} \right)_R + \lambda \left( \frac{d\bar{U}_2}{dt} \right)_R$$

Linéarité

$$\text{Dérivée d'un produit scalaire : } \left( \frac{d(\bar{U}_1 \cdot \bar{U}_2)}{dt} \right)_R = \left( \frac{d\bar{U}_1}{dt} \right)_R \cdot \bar{U}_2 + \bar{U}_1 \cdot \left( \frac{d\bar{U}_2}{dt} \right)_R$$

$$\left( \frac{d(\bar{U}_1 \wedge \bar{U}_2)}{dt} \right)_R = \left( \frac{d\bar{U}_1}{dt} \right)_R \wedge \bar{U}_2 + \bar{U}_1 \wedge \left( \frac{d\bar{U}_2}{dt} \right)_R$$

Dérivée d'un produit vectoriel :

Dérivée d'un produit mixte :

$$\left( \frac{d(\bar{U}_1, \bar{U}_2, \bar{U}_3)}{dt} \right)_R = \left( \left( \frac{d\bar{U}_1}{dt} \right)_R, \bar{U}_2, \bar{U}_3 \right) + \left( \bar{U}_1, \left( \frac{d\bar{U}_2}{dt} \right)_R, \bar{U}_3 \right) + \left( \bar{U}_1, \bar{U}_2, \left( \frac{d\bar{U}_3}{dt} \right)_R \right)$$

#### IV. DIVISION VECTORIELLE

Soient deux vecteurs  $\bar{A}, \bar{Y}$  connus, existe-t-il un vecteur  $\bar{X}$  tel que :  $\bar{A} \wedge \bar{X} = \bar{Y}$  (1) ?

Comme  $\bar{Y}$  est normal au plan ( $\pi$ ) défini par les vecteurs  $\bar{A}$  et  $\bar{X}$ , il faut nécessairement que  $\bar{Y}$  soit perpendiculaire à  $\bar{A}$ .

Si  $\bar{A} \cdot \bar{Y} \neq 0$ , il n'y a donc pas de solution.

Si  $\bar{A} \cdot \bar{Y} = 0$ , plusieurs cas peuvent se présenter :

Si  $\bar{A} = \bar{0}$

Si  $\bar{Y} = \bar{0}$  tout vecteur  $\bar{X}$  de  $\mathbb{R}^3$  est solution.

Si  $\bar{Y} \neq \bar{0}$ , il n'y a pas de solution

Si  $\bar{A} \neq \bar{0}$  (cas général)

On cherche une solution dans le plan ( $\pi$ ) perpendiculaire à  $\bar{Y}$ . Or  $\bar{A} \in (\pi)$  et  $\bar{A} \wedge \bar{Y} \in (\pi)$  également.

De plus ces vecteurs sont indépendants, ils forment une base de ( $\pi$ ), de sorte que la solution  $\bar{X}$  cherchée est de la forme :  $\bar{X} = \mu \bar{A} + \nu \bar{A} \wedge \bar{Y}$

Remplaçant  $\bar{X}$  par son expression, il vient :

$$\begin{aligned} \bar{A} \wedge \bar{X} &= \bar{A} \wedge (\mu \bar{A} + \nu \bar{A} \wedge \bar{Y}) = \nu \bar{A} \wedge (\bar{A} \wedge \bar{Y}) = \nu \left[ \bar{A} \cdot (\bar{A} \cdot \bar{Y}) - \bar{Y} \cdot \|\bar{A}\|^2 \right] = -\nu \bar{Y} \cdot \|\bar{A}\|^2 \\ -\nu \|\bar{A}\|^2 &= 1 \Rightarrow \nu = -\frac{1}{\|\bar{A}\|^2} \end{aligned}$$

or  $\bar{A} \wedge \bar{X} = \bar{Y}$  donc en identifiant, et  $\mu$  est indifférent.

La solution est donc la famille de vecteurs :

$$\vec{X} = -\frac{\vec{A} \wedge \vec{Y}}{\|\vec{A}\|^2} + \mu \vec{A}$$

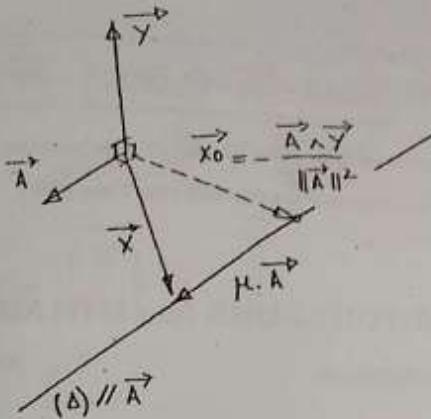


Figure 1.12

## V. LE VECTEUR MOMENT

### V. 1. Définition

Soit un vecteur  $\tilde{V}(M)$  associé à un point M de coordonnées (x, y, z), on appelle moment au point O du  $\tilde{V}(M)$  la quantité :

$$\bar{M}_o(\tilde{V}(M)) = \overrightarrow{OM} \wedge \tilde{V}(M) \quad (\text{A})$$

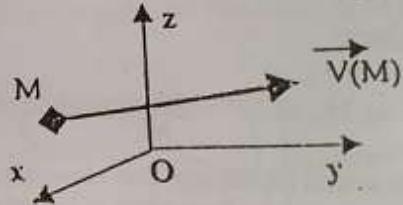


Figure 1.13

### V. 2. Propriétés

$\Rightarrow$  formule de changement de point :

$$(\text{A}) \text{ peut s'écrire : } \bar{M}_o(\tilde{V}(M)) = \left( \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} \right) \wedge \tilde{V}(M) = \overrightarrow{OP} \wedge \tilde{V}(M) + \overrightarrow{PM} \wedge \tilde{V}(M)$$

$$\text{or } \overrightarrow{PM} \wedge \tilde{V}(M) = \bar{M}_P(\tilde{V}(M))$$

$$\text{ensin : } \boxed{\bar{M}_o(\tilde{V}(M)) = \bar{M}_P(\tilde{V}(M)) + \overrightarrow{OP} \wedge \tilde{V}(M)} \quad (\text{B})$$

○ ○ ○

formule de  
changement  
de point.

$\Rightarrow$  équiprojectivité :

Multipions la relation (B) scalairement par le vecteur  $\overrightarrow{OP}$  :

$$\overrightarrow{OP} \cdot \bar{M}_o(\tilde{V}(M)) = \overrightarrow{OP} \cdot \bar{M}_P(\tilde{V}(M)) + \overrightarrow{OP} \cdot \left( \overrightarrow{OP} \wedge \tilde{V}(M) \right) \text{ or d'après les propriétés du produit mixte on}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \left( \overrightarrow{OP} \wedge \tilde{V}(M) \right) = \left( \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP}, \tilde{V}(M) \right) = \left( \tilde{V}(M), \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP} \right) = \tilde{V}(M) \cdot \left( \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OP} \right) = 0$$

$$\text{enfin : } \bar{M}_o(\bar{v}(M)) \cdot \overrightarrow{OP} = \bar{M}_P(\bar{v}(M)) \cdot \overrightarrow{OP}$$

Le moment au point O ( $\bar{M}_o$ ) et le moment au point P ( $\bar{M}_P$ ) ont même projection sur l'axe (OP).

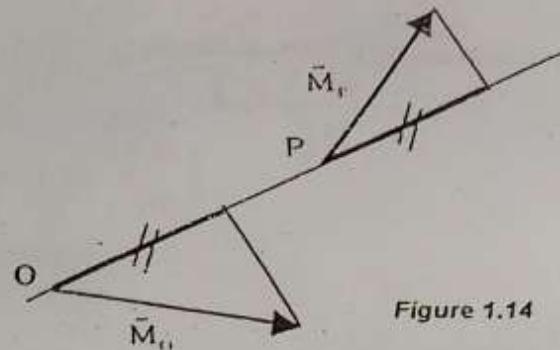


Figure 1.14

## VI. LES TORSEURS (ou DYNAMES)

### VI. 1. Définition

En mécanique nous considérons qu'un torseur est un ensemble de deux vecteurs

$$\text{noté : } \{\tau\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{S} \\ \bar{M}_P \end{array} \right\}$$

défini au point P et respectant la relation suivante (formule de changement de point) :

$$\bar{M}_P\{\tau\} = \bar{M}_O\{\tau\} + \overrightarrow{PQ} \wedge \bar{S}\{\tau\}$$

Avec  $\left| \begin{array}{l} \bar{S} = \text{vecteur somme, indépendant de P} \\ \bar{M}_P = \text{Vecteur moment, dépend de P} \end{array} \right.$

Remarques :

⇒  $\bar{S}$  et  $\bar{M}_P$  sont les éléments de réduction du torseur.

⇒ Un torseur est défini si l'on connaît ses éléments de réduction en un point quelconque de l'espace ; l'écriture de ce torseur en un autre point se fait en utilisant la formule de changement de point.

### VI. 2. Propriétés

#### ① Equiprojectivité

$$\bar{M}_S \cdot \overrightarrow{SR} = \bar{M}_R \cdot \overrightarrow{SR} \quad \forall S, R$$

#### ② Invariant d'un torseur

$$\Im = \bar{S} \cdot \bar{M}_i = \text{Cste} \quad \forall i$$

#### ③ Égalité de deux torseurs

$$\{\tau_1\} = \{\tau_2\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_1 = \bar{S}_2 \\ \bar{M}_{1P} = \bar{M}_{2P} \end{array} \right. \circ \quad \circ$$

Lorsqu'on fait des opérations sur les torseurs, ils doivent obligatoirement être écrits au même point.

#### ④ Torseur nul

Il suffit que  $\left\{ \begin{array}{l} \bar{S} = \bar{0} \\ \bar{M}_P = \bar{0} \end{array} \right.$  ceci en un point P quelconque de l'espace

④ Combinaison linéaire de torseurs

$$\{\tau\} = k_1 \{\tau_1\} + k_2 \{\tau_2\} \Rightarrow \begin{cases} \bar{S} = k_1 \bar{S}_1 + k_2 \bar{S}_2 \\ \bar{M}_P = k_1 \bar{M}_{1P} + k_2 \bar{M}_{2P} \end{cases}$$

⑤ Produit scalaire de deux torseurs

$$\{\tau_1\} \cdot \{\tau_2\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_1 \\ \bar{M}_{1P} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}_2 \\ \bar{M}_{2P} \end{array} \right\} = \bar{S}_1 \cdot \bar{M}_{2P} + \bar{S}_2 \cdot \bar{M}_{1P} \quad \forall P$$

Ce produit est indépendant de la position du point P.

⑥ Dérivée d'un torseur

Cas où le point  $P$  est fixe dans le repère de définition :  $\{\tau'\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{S}' \\ \bar{M}'_P \end{array} \right\}$

## VI. 3. Torseur associé à un champ de vecteurs

① Champ discret

Considérons des points  $M$ , auxquels sont associés des vecteurs  $\bar{F}_i$ . A ce champ on peut

associer un torseur :  $\{\tau_{(\bar{F}_i)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{S} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \\ \bar{M}_P = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{PM}_i \wedge \bar{F}_i \end{array} \right\}$

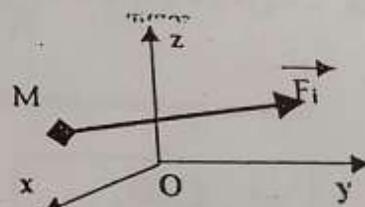


Figure 1.15

② Champ continu

Soit un ensemble de vecteurs défini sur un domaine continu  $(D)$  par une densité vectorielle  $\bar{\phi}(M)$  par unité de mesure  $\mu$ .

Ainsi :  $\{\tau_{(\bar{\phi}, \mu)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{S} = \int_D \bar{\phi}(M) d\mu \\ \bar{M}_P = \int_D \overrightarrow{PM} \wedge \bar{\phi}(M) d\mu \end{array} \right\}$

Dans la plupart des cas on considérera que  $\mu$  ne dépend pas de  $M$ .

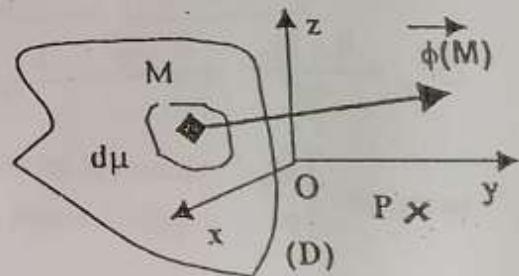


Figure 1.16

## VI. 4. Différents types de torseurs

1<sup>er</sup> groupe :  $\bar{S} = \bar{0}$        $\begin{cases} \bar{M}_A = \bar{0} & \Rightarrow \text{torseur nul} \\ \bar{M}_A \neq \bar{0} & \Rightarrow \text{couple} \end{cases}$



2<sup>me</sup> groupe :  $\bar{S} \neq \bar{0}$        $\begin{cases} \bar{M}_A = \bar{0} & \Rightarrow \text{vecteur} \\ \bar{M}_A \neq \bar{0} & \Rightarrow \text{torseur quelconque} \end{cases}$



Remarque : Un torseur est dit spécial si  $\bar{S} \cdot \bar{M}_A = 0 \quad \forall A$

## VI. 5. Axe central d'un torseur

### ① Définition

$(\Delta)$  est l'ensemble des points  $P$  où  $\bar{M}_P$  est orthogonal à  $\bar{S}$  tels que la norme de  $\bar{M}_P$  soit minimale.

### ② Calcul de la position de $(\Delta)$ par rapport au point O

Par rapport à O où sont définis les éléments de réduction du torseur  $\bar{S}$  et  $\bar{M}_{O_0}$ , on doit avoir :

$$\bar{M}_P = \bar{M}_{O_0} + \overrightarrow{PO} \wedge \bar{S} = \alpha \bar{S} \quad (\text{si } \alpha \neq 0) \Rightarrow \bar{M}_{O_0} + \overrightarrow{PO} \wedge \bar{S} = \alpha \bar{S} = \overrightarrow{OP} \wedge \bar{S} = \bar{M}_{O_0} - \alpha \bar{S} \quad (1)$$

On peut dire que  $\overrightarrow{OP}$  est le résultat de la division vectorielle de  $(\bar{M}_{O_0} - \alpha \bar{S})$  par  $\bar{S}$  qui n'existe que si  $(\bar{M}_{O_0} - \alpha \bar{S}) \wedge \bar{S} = \bar{0} \Rightarrow \alpha = \frac{\bar{S} \wedge \bar{M}_{O_0}}{|\bar{S}|^2}$ .  $\alpha$  est un invariant et est encore appelé le "pas" du torseur.

Dans ces conditions, nous avons déjà établi que :  $\overrightarrow{OP} = \frac{\bar{S} \wedge (\bar{M}_{O_0} - \alpha \bar{S})}{|\bar{S}|^2} + \lambda \bar{S}$

Ou

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \frac{\bar{S} \wedge \bar{M}_{O_0}}{|\bar{S}|^2} + \lambda \bar{S}}$$

$(\Delta)$  est donc une droite parallèle à  $\bar{S}$  et passant par le point  $P_0$ , tel que :

$$\overrightarrow{OP''} = \frac{\bar{S} \wedge \bar{M}_{O_0}}{|\bar{S}|^2} \quad \overrightarrow{OP''} \perp \bar{S}, \bar{M}_{O_0}$$

on appelle :  $\begin{cases} \bar{M}_P & \text{moment central} \\ P & \text{point central} \end{cases}$

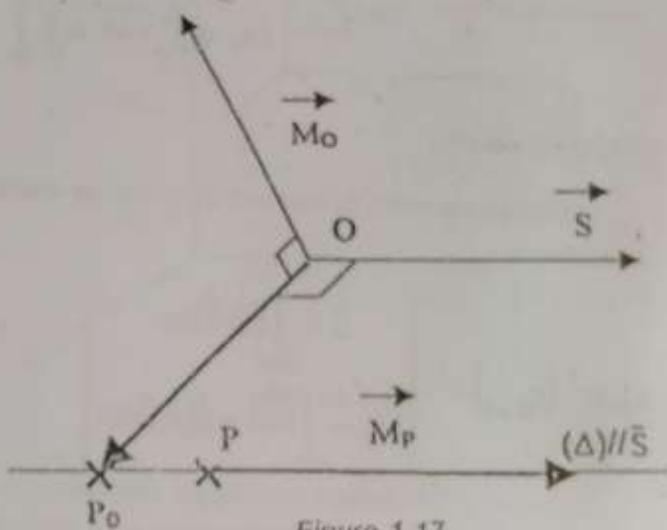


Figure 1.17

Remarque : L'axe central  $(\Delta)$  n'existe que si  $\bar{S} \neq \bar{0}$

### ③ Cas particuliers d'axes centraux

Si  $\bar{S}$  est la somme d'un système de forces coplanaires, alors ce système peut être remplacé par le vecteur  $\bar{S}$  positionné sur l'axe central  $(\Delta)$  de ce système de forces.

En fait  $\bar{S}$  représente la résultante de ce système de forces coplanaires ( $\bar{M}_{\text{centr.}} = \bar{0}$ )

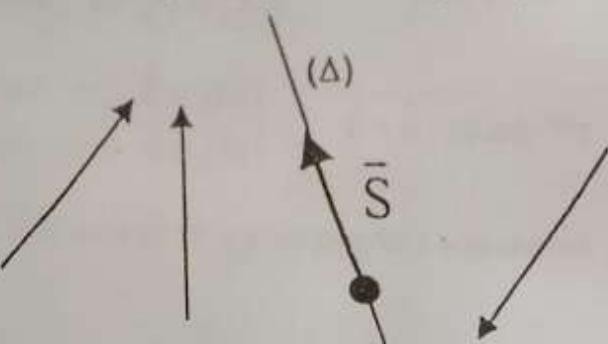


Figure 1.18

Dans un champ de pesanteur appliquée à un solide, on montre que l'axe central passe par le centre de gravité  $G$  de ce solide et que l'on peut remplacer le torseur poids par  $\bar{S} = \bar{P}$  positionné sur cet axe central ( $\bar{M}_A = \bar{0}$ ).

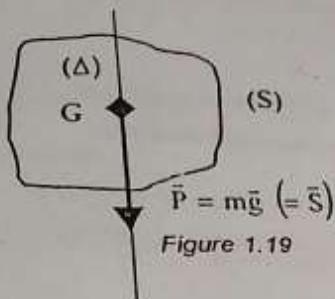


Figure 1.19

## VI 6. Expression des torseurs en mécanique

### ① Expression analytique

$$\{\tau\} = \begin{cases} \bar{S} = S_x \bar{x} + S_y \bar{y} + S_z \bar{z} \\ \bar{M}_A = M_{Ax} \bar{x} + M_{Ay} \bar{y} + M_{Az} \bar{z} \end{cases} = \begin{cases} S_x & M_{Ax} \\ S_y & M_{Ay} \\ S_z & M_{Az} \end{cases} \quad \{\tau\} = \begin{cases} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{cases}$$

6 composantes

Les différents torseurs utilisés en mécanique

⇒ Le torseur statique d'action mécanique de  $(S_0)$  sur  $(S)$

$$\{\tau_{(S_0 \rightarrow S)}\} = \begin{cases} \bar{R}_{(S_0 \rightarrow S)} \\ \bar{M}_{P(S_0 \rightarrow S)} \end{cases} \Rightarrow \text{résultante} \\ \Rightarrow \text{moment résultant en } A$$

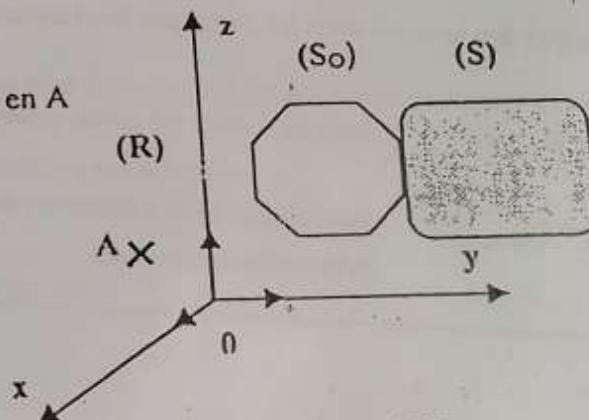


Figure 1.20

⇒ Le torseur cinématique d'un solide  $(S)$  dans son mouvement par rapport au repère  $(R)$

$$\{\theta_{(S/R)}\} = \begin{cases} \bar{\Omega}(S/R) \\ \bar{v}(A/R) \end{cases} \Rightarrow \text{rotation de } S \% R \\ \Rightarrow \text{vitesse de } A \% R$$

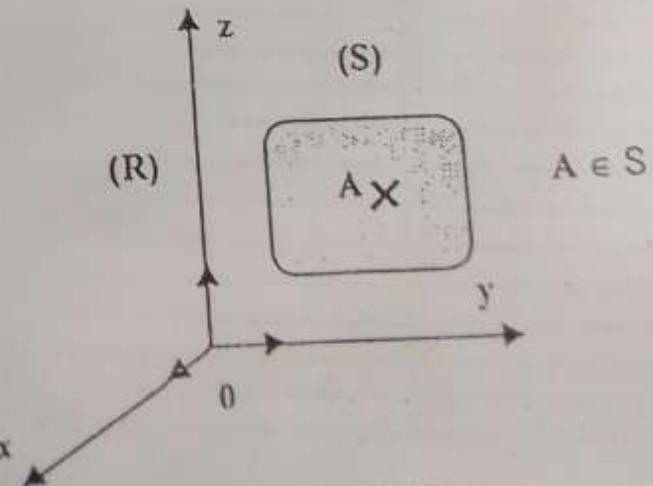


Figure 1.21

⇒ Le torseur cinétique d'un ensemble matériel (E) en mouvement par rapport à un repère (R)

$$\{C_{(E \rightarrow R)}\} = \begin{Bmatrix} m \bar{V}(G/R) \\ \bar{\sigma}_A(E/R) \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{résultante cinétique}$$

$\Rightarrow$  moment cinétique

$G$  = centre de gravité de (E)

Résultante cinétique = quantité de mouvement

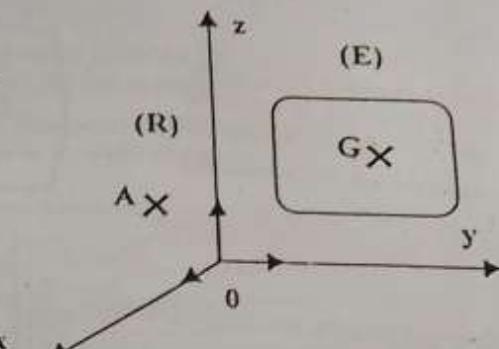


Figure 1.22

⇒ Le torseur dynamique d'un ensemble matériel (E) en mouvement par rapport à un repère (R)

$$\{D_{(E \rightarrow R)}\} = \begin{Bmatrix} m \bar{a}(G/R) \\ \bar{\delta}_A(E/R) \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{résultante dynamique}$$

$\Rightarrow$  moment dynamique

Remarques : utilité des torseurs dans les principes fondamentaux de la statique et de la dynamique

PFS :  $\{t_{(s \rightarrow s)}\} = \{0\}$  Pour rechercher les actions inconnues

PFD :  $\{D_{(E \rightarrow R)}\} = \{t_{(s \rightarrow s)}\}$  Pour rechercher les équations du mouvement  
et les actions inconnues

# Chap. 2 - BASES PHYSIQUES

## TABLE DES MATIERES

- Systèmes d'unités - Dimension [G] d'une grandeur G
- Mesure des grandeurs (Métrie)
- Grandeurs scalaires et grandeurs vectorielles

## I. SYSTEME D'UNITES - DIMENSION [G] D'UNE GRANDEUR G

### I. 1. Différents systèmes

Pendant des siècles, chaque corps de métier avait son propre système d'unités : système des mécaniciens, des chimistes, etc. de même chaque pays, chaque région et parfois chaque ville avait des unités particulières.

Une première tentative d'unification a eu lieu avec le système C.G.S. Cependant le système qui sera adopté dans le cadre de ce cours est le Système International d'unités, en abrégé le S.I., aussi dénommé M.K.S.A. pour rappeler les unités fondamentales qui le définissent.

Grandeurs fondamentales	Système MKSA		Système CGS	
Longueur L	mètre	m	Centimètre	cm
Massé M	kilogramme	kg	Gramme	g
Temps T	seconde	s	Seconde	s
Intensité I	ampère	A	Unité électrostatique/seconde	nes/s

### I. 2. Dimension [G] d'une grandeur G

A partir de ces quatre grandeurs fondamentales on peut définir toutes les grandeurs physiques aussi bien en mécanique qu'en électricité et en magnétisme.

La dimension [G] d'une grandeur physique G s'exprimera par la relation :

$$[G] = a \times L^\alpha \times M^\beta \times T^\gamma \times I^\delta$$

a étant un scalaire et  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  des exposants  $> 0$  ou  $< 0$ .

### I. 3. Grandeurs mécaniques

Grandeur	Dimension	Unité	Symbol
Longueur	L	Mètre	m
Surface	$L^2$	mètre carré	$m^2$
Volume	$L^3$	mètre cube	$m^3$
Massé	M	Kilogramme	kg
Massé volumique	$ML^{-3}$	kilogramme/m <sup>3</sup>	$kg.m^{-3}$
Temps	T	Seconde	s
Fréquence	$T^{-1}$	Hertz	Hz
Vitesse	$LT^{-1}$	mètre/seconde	$m.s^{-1}$
Accélération	$LT^{-2}$	mètre/seconde <sup>2</sup>	$m.s^{-2}$
Force	$MLT^{-2}$	Newton	N
Energie, quantité de chaleur	$ML^2T^{-2}$	Joule	J
Puissance	$ML^2T^{-3}$	Watt	W
Pression	$ML^{-1}T^{-2}$	Pascal	Pa
Viscosité	$ML^{-1}T^{-1}$	Poisseulle	Pl

## I. 4. Grandeurs électriques et magnétiques

Grandeur	Dimension	Unité	Symbol
Charge ou quantité d'électricité	$IT$	Coulomb	$C$
Intensité	$I$	Ampère	$A$
Potentiel ou f.c.m	$ML^2T^{-3}I^{-1}$	Volt	$V$
Champ électrique	$MLT^{-1}I^{-1}$	volt/mètre	$V.m^{-1}$
Résistance	$ML^2T^{-1}I^{-2}$	Ohm	$\Omega$
Capacité	$M^{-1}L^2T^{-1}I^{-2}$	Farad	$F$
Inductance	$ML^2T^{-1}I^{-2}$	Henry	$H$
Flux magnétique	$ML^2T^{-1}I^{-1}$	Weber	$Wb$
Induction magnétique	$MT^{-1}I^{-1}$	Tesla	$T$
Permittivité absolue $\epsilon_0$ du vide	$M^{-1}L^2T^{-1}I^{-2}$	$F.m^{-1}$	$\epsilon_0$
Perméabilité magnétique $\mu_0$ du vide	$ML^{-1}T^{-2}$	$H.m^{-1}$	$\mu_0$

On rappelle que  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont telles que  $\epsilon_0 \times \mu_0 \times c^2 = 1$  avec  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ ;  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ F.m}^{-1}$  et  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

## I. 5. Remarques

Lorsqu'il est écrit en entier, le nom d'une unité s'écrit en minuscule et prend le pluriel.

Lorsqu'il est écrit en abrégé, le nom d'une unité ne prend pas le pluriel; il s'écrit en majuscule si il s'agit d'un savant et en minuscule dans tous les autres cas.

Il est impératif de ne pas méler les systèmes d'unités.

Il faut toujours vérifier l'homogénéité d'une formule et cela d'autant plus que la formule est compliquée.

## I. 6. Multiples et sous multiples

Exemples			
semito	$f$	$10^{-15}$	$1 fJ = 10^{-15} J$
pico	$p$	$10^{-12}$	$1 pg = 10^{-12} g$
nano	$n$	$10^{-9}$	$1 nm = 10^{-9} m$
micro	$\mu$	$10^{-6}$	$1 \mu s = 10^{-6} s$
milli	$m$	$10^{-3}$	$1 mm = 10^{-3} m$
kilo	$k$	$10^3$	$1 km = 10^3 m$
mega	$M$	$10^6$	$1 Mt = 10^6 t$
giga	$G$	$10^9$	$1 Gv = 10^9 v$
tera	$T$	$10^{12}$	$1 Tt = 10^{12} t$

## I. 7. Quelques unités particulières

■ 1 tonne = 1 t = 1000 kg

■ 1 u = 1 uma = 1/12 masse de l'atome de  $^{12}C$

Comme une mole d'atome de carbone de C représente N atomes et a une masse de 12 g, on peut donc écrire que

$$1 uma = 1/12 \times 12/N = 1/N = 1/6.02 \times 10^{24} = 1.66 \times 10^{-24} g$$

■ 1 eV = énergie cinétique acquise par un électron soumis à une ddp de 1 V

$$1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \times 1 = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

⇒ Longueurs

1 Angst:  $\lambda = 10^{-10} \text{ m}$  ordre de grandeur de l'atome  
1 Fermi  $= 10^{-15} \text{ m}$  ordre de grandeur du noyau

⇒ Temps      seconde      s      et non      sec  
                minute      min      et non      min  
                heure      h

### I. 8. Problèmes de changement de système d'unités - Utilisation des équations aux dimensions

Convertir une unité du système CGS en unité du système MKSA : par exemple l'unité de travail ou d'énergie.

⇒ En CGS      1 erg      =      1 dyne      ×      1 cm  
                    Travail      =      force      ×      déplacement

⇒ En MKSA      1 joule      =      1 N      ×      1 m  
                    Travail      =      force      ×      déplacement

$$W = \bar{F} \cdot \bar{l} = F \cdot l \cdot \cos\theta \quad \text{0 angle de } \bar{F} \text{ et } \bar{l} \quad \text{si } \theta = 0 \text{ alors } \cos\theta = 1$$

on a donc  $W = F \cdot l$

comme d'autre part :  $\bar{F} = m \times \bar{a}$  (force = masse × accélération)

A partir de la formule du travail, il faut en premier trouver son équation aux dimensions, c'est à dire exprimer cette grandeur physique en fonction des unités fondamentales.

$$[a] = \text{longueur}/(\text{temps})^2 = LT^{-2}$$

$$[F] = MLT^{-2}$$

$$[W] = ML^2T^{-2}$$

⇒ CGS	gramme	centimètre	seconde	erg
[W]	M	L <sup>2</sup>	T <sup>-2</sup>	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>
⇒ MKSA	kg	(10 <sup>-2</sup> ) <sup>2</sup>	(1) <sup>-2</sup>	10 <sup>-7</sup>
		m	s	joule

D'où finalement : 1 erg = 10<sup>-7</sup> J.

## II. MESURE DES GRANDEURS (METROLOGIE)

Toute mesure d'une grandeur physique G est entachée d'une erreur  $\delta G$  dont les causes sont multiples :

$$G_{\text{vrai}} = G_{\text{mesuré}} + \delta G \quad \delta G \text{ étant positif ou négatif.}$$

### II. 1. Différentes causes d'erreurs

Il y trois principales causes d'erreur :

- Les erreurs systématiques qui peuvent provenir d'une mauvaise utilisation ou d'une défectuosité de l'appareil de mesure ; ces erreurs ont toujours lieu dans le même sens. Par exemple le 0 d'un ampèremètre qui est mal fait.
- Les erreurs accidentielles, elles sont dues au manque de fidélité des instruments (forces de frottement, échauffement) et aux insuffisances de l'expérimentateur (erreurs de parallaxe, on utilise parfois un miroir pour réduire ce risque d'erreur). La répétition des mesures et l'emploi des méthodes statistiques permettent de réduire l'incidence de ces erreurs sur le résultat final.

- L'erreur intrinsèque. Par exemple un trait gravé sur une règle ne peut pas être infiniment fin sous peine d'être invisible : c'est ce que l'on appelle l'erreur ou l'imprécision intrinsèque.

## II. 2. Incertitude absolue

Il est évidemment impossible de connaître la valeur exacte et le sens de l'erreur  $\Delta G$  commise dans la mesure d'une grandeur.

Mais il est du devoir de l'expérimentateur d'en déterminer une limite supérieure en valeur absolue : cette limite porte le nom d'incertitude absolue : on la note  $\Delta G$  et on a  $|\Delta G| < \Delta G$ .

L'indication de la valeur numérique d'une grandeur doit toujours comprendre outre l'indication de sa mesure et de l'unité correspondante, celle de l'incertitude absolue.

Soit  $G_{\text{vrai}} = G_{\text{mesurée}} \pm \Delta G$

Par exemple : une longueur  $l = 14.56$  cm mesurée au dixième de décimètre à 0.2 mm près s'écrira :  $l = 14.56 \pm 0.02$  cm.

Entre alors  $l = 14.568 (\pm 0.02)$  n'a aucune signification : seul le 6 et les chiffres qui le précèdent sont significatifs, ici la longueur est donnée avec 4 chiffres significatifs.

Lorsque l'indication de l'incertitude absolue n'accompagne pas explicitement la mesure, on considère que l'incertitude est de l'ordre de 1 unité et porte sur le dernier chiffre indiqué.

Par exemple :

1.  $L = 0.200$  m      signifie       $l = 20.0 \pm 0.1$  cm

D'où une incertitude absolue de 1 mm       $l = 200 \pm 1$  mm

2.  $L = 0.20$  m      signifie       $l = 20 \pm 1$  cm

Il est donc non seulement inutile mais faux de donner un résultat avec un nombre de chiffres supérieurs au nombre de chiffres significatifs, c'est à dire exacts, à l'exception du dernier qui peut être entaché d'une erreur d'une unité au lieu de  $\pi = 3.141592$  on peut écrire  $\pi = 3.14160$

parce que cela signifie       $\pi = 3.14160 \pm 0.00001$

ce qui est exact       $3.14159 < \pi < 3.14161$

mais il serait faux d'écrire       $\pi = 3.141600$  puisque cela voudrait dire que  $\pi$  est compris entre ces deux valeurs :  
 $3.141599 < \pi < 3.141601$       ce qui n'est manifestement pas vrai.

## II. 3. Incertitude relative

C'est le rapport  $\Delta G/G$  mesurée. L'incertitude relative donne la précision de la mesure.

En effet l'incertitude absolue de 1 mm sur une mesure de 1 m est beaucoup plus satisfaisant que la même incertitude absolue sur une valeur de 1 cm.

Dans le premier cas l'incertitude relative est de  $1/10^3 = 10^{-3}$  soit  $1/1000^{\text{e}}$ .

Dans le deuxième cas elle est de  $1/10 = 10^{-1}$  soit  $1/10^{\text{e}}$  d'où une précision moindre.

## II. 4. Calcul des incertitudes

### Théorème des incertitudes absolues

Dans une somme ou une différence, l'incertitude absolue sur le résultat est égale à la somme arithmétique des incertitudes absolues sur les différents termes.

$$\text{Si } S = a - b - c - d \quad \Delta S = \Delta a + \Delta b + \Delta c + \Delta d$$

### Théorème des incertitudes relatives

L'erreur relative commise sur un produit est égale à la somme des erreurs relatives de chacun des facteurs.

Si  $P = abcd$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} + \frac{\Delta d}{d}$$

Si  $P = an$

$$\frac{\Delta P}{P} = n \frac{\Delta a}{a} \quad \text{si } P = a/n$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{n} \frac{\Delta a}{a}$$

Si  $P = \frac{a}{b} = a \times b^{-1}$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \quad (+ \text{ puisqu'on ne connaît pas le sens de l'erreur})$$

Deux remarques importantes :

1. Pour calculer l'incertitude absolue d'un produit il faut passer par l'incertitude relative.
2. D'un point de vue pratique pour calculer l'incertitude relative d'une expression, on prend le logarithme puis la différentielle logarithmique de cette expression (dérivée multipliée par la différentielle de la variable), on groupe alors tous les termes relatifs à une différentielle et enfin on passe aux valeurs absolues.

## II. 5. Exemples

Rappel mathématique

$$\ln\left(\frac{ab}{c}\right) = \ln a + \ln b - \ln c$$

$$d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$$

si  $u = f(x)$  la différentielle logarithmique de  $u$  est :  $d(\ln u) = \frac{du}{u} = \frac{u'}{u} dx$

1<sup>er</sup> exemple : calculer l'incertitude relative de la grandeur  $G = \frac{ML^2}{T^2} \cos \theta$

On prend le logarithme des deux membres :  $\ln G = \ln\left(\frac{ML^2}{T^2} \cos \theta\right)$ , puis on développe :

$$\ln G = \ln M + 2 \ln L - 2 \ln T + \ln \cos \theta$$

on prend la différentielle logarithmique des deux membres :

$$\frac{dG}{G} = \frac{dM}{M} + 2 \frac{dL}{L} - 2 \frac{dT}{T} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta$$

on passe enfin aux valeurs absolues pour avoir le résultat final :

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta M}{M} + 2 \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta T}{T} + |\operatorname{tg} \theta| \Delta \theta$$

2<sup>nd</sup> exemple : calculer l'incertitude relative de la grandeur  $G = \frac{(x+y)}{y}$

$$\ln G = \ln\left(\frac{(x+y)}{y}\right) = \ln(x+y) - \ln y$$

$$\frac{dG}{G} = \frac{d(x+y)}{x+y} \cdot \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+y} + \frac{dy}{x+y} \cdot \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+y} + \left( \frac{1}{x+y} - \frac{1}{y} \right) dy = \frac{dx}{x+y} - \frac{x dy}{y(x+y)}$$

$$\text{d'où finalement : } \frac{\Delta G}{G} = \left| \frac{1}{x+y} \right| \Delta x + \left| \frac{x}{y(x+y)} \right| \Delta y$$

3<sup>e</sup> exemple : calculer l'incertitude relative de la grandeur  $G = \frac{x}{x-y}$

$$\ln G = \ln\left(\frac{x}{x-y}\right) = \ln x - \ln(x-y)$$

$$\frac{dG}{G} = \frac{dx}{x} - \frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{dx}{x} - \frac{dx}{x-y} + \frac{dy}{x-y} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-y}\right)dx + \frac{dy}{x-y} = -\frac{ydx}{x(x-y)} + \frac{dy}{x-y}$$

$$d'où : \frac{\Delta G}{G} = \left| \frac{y}{x(x-y)} \right| \Delta x + \left| \frac{1}{x-y} \right| \Delta y$$

### III. GRANDEURS SCALAIRES ET GRANDEURS VECTORIELLES

#### III. 1. Les grandeurs scalaires

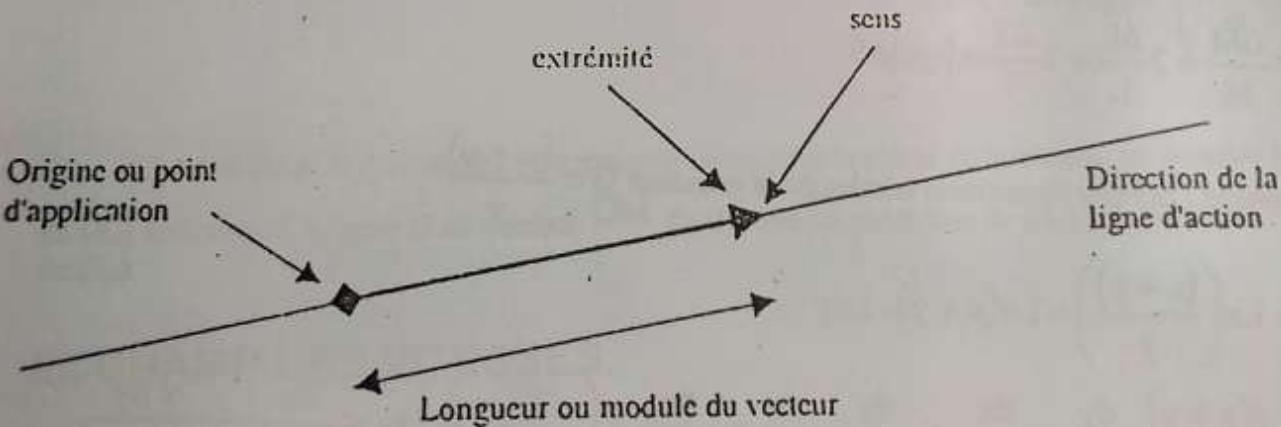
Elles sont définies par un nombre, une valeur numérique accompagnée d'une unité par exemple, une surface ou sans unité comme un pourcentage, un rendement etc...

#### III. 2. Les grandeurs vectorielles

Elles sont définies par trois (3) éléments :

- grandeur ou module.
- direction.
- sens.

NB : Il bien faut noter que la grandeur vectorielle est définie dans un cadre général, et que c'est sa mise en œuvre dans des cas pratiques qui fait quelquefois appel à la notion de point d'application.



# Chap. 3 - CINÉMATIQUE

## TABLE DES MATIÈRES

### 1<sup>ère</sup> Partie : CINÉMATIQUE DU SOLIDE RIGIDE

- Définition - But
- Solide indéformable
- Champ des vitesses
- Champ des accélérations
- Mouvements particuliers

### 2<sup>ème</sup> Partie : COMPOSITION DE MOUVEMENTS

- Définitions
- Composition des dérivations
- Composition des vitesses
- Composition des accélérations
- Composition de mouvements de repères
- Repérage d'un solide par les angles d'Euler
- Liaisons parfaites et torseurs cinématiques associés

## 1<sup>ère</sup> Partie : CINÉMATIQUE DU SOLIDE RIGIDE

### I. DEFINITION – BUT

#### I. 1. Définition

La cinématique est la partie de la Mécanique qui étudie les mouvements des corps dans leur rapport avec le temps, indépendamment des causes (actions mécaniques) de ces mouvements.

#### I. 2. But

Un problème de cinématique consiste :

- en généraliser ... déterminer des relations entre les longueurs, les vitesses, les accélérations et le temps, se rapportant aux mouvements des points et des corps déformables ou non ;
- dans bien des cas à déterminer les formes et les dimensions à donner aux corps en tenant compte de certaines conditions cinématiques.

### II. SOLIDE " INDEFORMABLE "

#### II. 1. Définition

Tous les solides se déforment sous l'action des sollicitations mécaniques ou des variations de température. Les déformations peuvent être élastiques, plastiques, instantanées ou différées.

Si ces déformations sont faibles – la part des déplacements résultant des déformations reste très petite devant les dimensions générales du solide – on convient de considérer le solide comme indéformable.

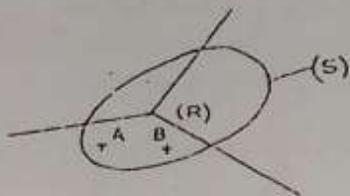


Figure 3.1

A noter qu'en résistance des matériaux il est fréquent de considérer qu'une structure est indéformable dans la phase de calcul des sollicitations(\*) puis après seulement d'envisager l'évaluation des déformations.

Définition : Un solide indéformable ( $S$ ) est un ensemble de points dont les distances mutuelles sont indépendantes du temps :

$$\forall t, \forall (A, B) \in (S) \Rightarrow \|AB\| = \text{constante}$$

(\*) Sauf lorsque des effets de second ordre veulent être étudiés

## II. 2. Conséquences

- Tout ensemble de points liés à un repère ( $R$ ) constitue un solide ;
- A tout solide ( $S$ ) on peut attacher un repère ( $R$ ) lié ;
- On identifie ( $R$ ) à ( $S$ ) ;
- Sauf indication explicite contraire, dans la suite de ce cours, par "solide" on entend "solide indéformable".

## II. 3. Mouvement d'un solide

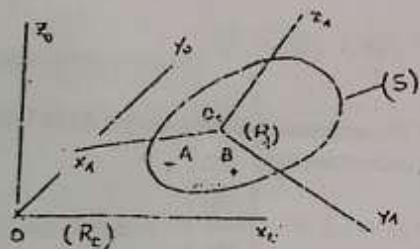


Figure 3.2

Soit un solide ( $S$ ) attaché à un repère  $(R_1) = \{O_1, x_1, y_1, z_1\}$  en mouvement dans un repère  $(R_0) = \{O_0, x_0, y_0, z_0\}$

La position de ( $S$ ) par rapport à ( $R_0$ ) est connue à chaque instant si on connaît les fonctions vectorielles suivantes :

$$O\bar{O}_1(t) \quad \bar{x}_1(t) \quad \bar{y}_1(t) \quad \bar{z}_1(t)$$

La vitesse d'un point M quelconque de ( $S$ ) par rapport à ( $R_0$ ) est notée :

$$\bar{V}(M \in S / R_0) = \left( \frac{d\bar{O}M}{dt} \right)_{R_0}$$

L'indice  $R_0$  de la dérivation / temps signifie que, dans le calcul de la vitesse, on suppose les vecteurs de base de ( $R_0$ ) constants. L'origine O du vecteur  $\bar{O}M$  DOIT être un point fixe de ( $R_0$ ) ; ce peut être n'importe quel point de ( $R_0$ ).

## III. CHAMP DES VITESSES

Pour tout point M de ( $S$ ), on a :

$$\bar{O}M = \bar{O}\bar{O}_1 + \bar{O}_1\bar{M} \quad \text{et} \quad \bar{O}_1\bar{M} = x\bar{x}_1 + y\bar{y}_1 + z\bar{z}_1$$

la vitesse de M dans ( $R_0$ ) est donc :

$$\bar{V}(M \in S / R_0) = \left( \frac{d\bar{O}M}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d\bar{O}\bar{O}_1}{dt} \right)_{R_0} + x \left( \frac{d\bar{x}_1}{dt} \right)_{R_0} + y \left( \frac{d\bar{y}_1}{dt} \right)_{R_0} + z \left( \frac{d\bar{z}_1}{dt} \right)_{R_0}$$

$$\vec{v}(O_1/R_0) = \left( \frac{d\vec{O}_1}{dt} \right)_{R_0}$$

vitesse de  $O_1$  par rapport à  $(R_0)$

on reconnaît :

### III. 1. Vecteur rotation

les vecteurs de base de  $(R_1)$  sont normés et orthogonaux

normés (les longueurs sont unitaires et restent invariantes au cours du mouvement)

$$\begin{cases} \|\vec{x}_1\| = 1 & \vec{x}_1 \frac{d\vec{x}_1}{dt} = 0 & \frac{d\vec{x}_1}{dt} = a\vec{y}_1 + b\vec{z}_1 \\ \|\vec{y}_1\| = 1 & \vec{y}_1 \frac{d\vec{y}_1}{dt} = 0 & \frac{d\vec{y}_1}{dt} = c\vec{x}_1 + d\vec{z}_1 \\ \|\vec{z}_1\| = 1 & \vec{z}_1 \frac{d\vec{z}_1}{dt} = 0 & \frac{d\vec{z}_1}{dt} = e\vec{x}_1 + f\vec{y}_1 \end{cases}$$

Par conséquent :

orthogonaux (les angles sont droits et restent invariants au cours du mouvement)

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ b + e = 0 \\ d + f = 0 \end{cases}$$

L'orthogonalité des vecteurs de base entraîne :

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1 = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_1) = \frac{d\vec{x}_1}{dt} \cdot \vec{y}_1 + \frac{d\vec{y}_1}{dt} \cdot \vec{x}_1 = 0 \Rightarrow a + c = 0$$

en effet : par exemple.

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}_1}{dt} = a\vec{y}_1 - c\vec{z}_1 \\ \frac{d\vec{y}_1}{dt} = -a\vec{x}_1 + d\vec{z}_1 \\ \frac{d\vec{z}_1}{dt} = e\vec{x}_1 - f\vec{y}_1 \end{cases}$$

Donc :

$$\text{On définit ainsi le vecteur } \bar{\Omega} = d\vec{z}_1 + e\vec{y}_1 + a\vec{z}_1 \text{ noté } \bar{\Omega} = \omega_x \vec{x}_1 + \omega_y \vec{y}_1 + \omega_z \vec{z}_1$$

$$\text{ce qui permet d'écrire : } \begin{cases} \frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{R_0} = \bar{\Omega} \wedge \vec{x}_1 \\ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \Big|_{R_0} = \bar{\Omega} \wedge \vec{y}_1 \\ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \Big|_{R_0} = \bar{\Omega} \wedge \vec{z}_1 \end{cases}$$

- le vecteur ainsi défini est unique (uniforme) pour tout le solide (S)

c'est le vecteur rotation de (S) ou de  $(R_1)$  par rapport à  $(R_0)$ , il est noté :  $\bar{\Omega}(S/R_0)$  ou bien  $\bar{\Omega}(R_1/R_0)$

### III. 2. Formule du repère mobile

Sont  $\vec{U}$  un vecteur quelconque appartenant à  $(R_1)$  tel que  $\vec{U} = u\vec{x}_1 + v\vec{y}_1 + w\vec{z}_1$  avec  $u, v$  et  $w$  constantes  
Si on dérive ce vecteur par rapport au repère  $(R_0)$ , on obtient :

$$\left( \frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{R_0} = u \left( \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right)_{R_0} + v \left( \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right)_{R_0} + w \left( \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right)_{R_0}$$

$$\left( \frac{d\bar{U}}{dt} \right)_{R_0} = \bar{\Omega}(R_1 / R_0) \wedge \bar{U} \text{ si } \bar{U} \in (R_1)$$

C'est-à-dire :

c'est la formule du repère mobile

### III. 3. Torseur cinématique

La relation :

$$\bar{V}(M \in S / R_0) = \left( \frac{dO\bar{M}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{dO\bar{\Omega}_1}{dt} \right)_{R_0} + x \left( \frac{d\bar{x}_1}{dt} \right)_{R_0} + y \left( \frac{d\bar{y}_1}{dt} \right)_{R_0} + z \left( \frac{d\bar{z}_1}{dt} \right)_{R_0}$$

$$\text{Devient } \bar{V}(M \in S / R_0) = \bar{V}(O_1 / R_0) + x \bar{\Omega} \wedge \bar{x}_1 + y \bar{\Omega} \wedge \bar{y}_1 + z \bar{\Omega} \wedge \bar{z}_1$$

$$\text{Soit : } \bar{V}(M \in S / R_0) = \bar{V}(O_1 / R_0) + \bar{\Omega} \wedge (x \bar{x}_1 + y \bar{y}_1 + z \bar{z}_1)$$

$$\text{Finalement : } \bar{V}(M \in S / R_0) = \bar{V}(O_1 / R_0) + \bar{\Omega} \wedge O_1 \bar{M}$$

**Enoncé :** Le champ des vitesses d'un solide est celui du champ de moment d'un torseur cinématique et dont la résultante est le vecteur rotation.

Les éléments de réduction du torseur cinématique sont donc :

$$\{VS/R_0\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}(S/R_0) \\ \bar{V}(O_1 \in S/R_0) \end{array} \right\}_{O_1}$$

Le vecteur rotation est indépendant du choix du repère ( $R_1$ ) lié à ( $S$ ).

On peut montrer l'équiprojectivité du champ de vitesse d'un solide indéformable indépendamment du théorème du repère mobile, en effet :

$$\begin{aligned} \|A\bar{B}\|^2 = L^2 &\Rightarrow \frac{d}{dt} (\bar{A}\bar{B} \cdot \bar{A}\bar{B})_{R_0} = 0 \\ &\Rightarrow \bar{A}\bar{B} \cdot \frac{d}{dt} (\bar{O}\bar{B} - \bar{O}\bar{A})_{R_0} = 0 \\ &\Rightarrow \bar{A}\bar{B} \cdot \bar{V}(B/R_0) = \bar{A}\bar{B} \cdot \bar{V}(A/R_0) \end{aligned}$$

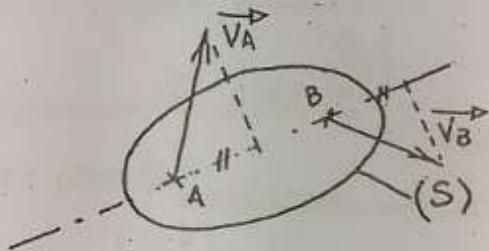


Figure 3. 3

Remarque : l'axe central du torseur cinématique est appelé "axe de viration".

### III. 4. Calcul du vecteur rotation

$$\begin{cases} \left( \frac{d\bar{x}_1}{dt} \right)_{R_0} = \bar{\Omega} \wedge \bar{x}_1 \\ \left( \frac{d\bar{y}_1}{dt} \right)_{R_0} = \bar{\Omega} \wedge \bar{y}_1 \\ \left( \frac{d\bar{z}_1}{dt} \right)_{R_0} = \bar{\Omega} \wedge \bar{z}_1 \end{cases}$$

à partir de sommons

prémultiplications vectoriellement par chaque vecteur de base

$$\bar{x}_1 \wedge \frac{d\bar{x}_1}{dt} + \bar{y}_1 \wedge \frac{d\bar{y}_1}{dt} + \bar{z}_1 \wedge \frac{d\bar{z}_1}{dt} = \bar{x}_1 \wedge (\bar{\Omega} \wedge \bar{x}_1) + \bar{y}_1 \wedge (\bar{\Omega} \wedge \bar{y}_1) + \bar{z}_1 \wedge (\bar{\Omega} \wedge \bar{z}_1)$$

par propriété du double produit vectoriel :  $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$   
on obtient :

$$\vec{x}_1 \wedge \frac{d\vec{x}_1}{dt} + \vec{y}_1 \wedge \frac{d\vec{y}_1}{dt} + \vec{z}_1 \wedge \frac{d\vec{z}_1}{dt} = \vec{\Omega} - \vec{x}_1 \cdot (\vec{\Omega} \vec{x}_1) + \vec{\Omega} - \vec{y}_1 \cdot (\vec{\Omega} \vec{y}_1) + \vec{\Omega} - \vec{z}_1 \cdot (\vec{\Omega} \vec{z}_1)$$

soit :

$$\vec{z}_1 \wedge \frac{d\vec{x}_1}{dt} + \vec{y}_1 \wedge \frac{d\vec{y}_1}{dt} + \vec{z}_1 \wedge \frac{d\vec{z}_1}{dt} = 3\vec{\Omega} - (\omega_x \vec{x}_1 + \omega_y \vec{y}_1 + \omega_z \vec{z}_1)$$

finalement :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \left( \vec{x}_1 \wedge \frac{d\vec{x}_1}{dt} + \vec{y}_1 \wedge \frac{d\vec{y}_1}{dt} + \vec{z}_1 \wedge \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right)$$

## IV. CHAMP DES ACCELERATIONS

Le champ des vitesses d'un solide indéformable permet d'écrire :

$$\tilde{V}(M \in S/R_0) = \tilde{V}(O_1/R_0) + \vec{\Omega} \wedge O_1 \vec{M}$$

Dérivons par rapport au temps dans ( $R_0$ ) :

$$\tilde{\Gamma}(M \in S/R_0) = \tilde{\Gamma}(O_1/R_0) + \left( \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{R_0} \wedge O_1 \vec{M} + \vec{\Omega} \wedge \frac{d}{dt} (O_1 \vec{M})_{R_0}$$

Théorème du repère mobile :

$$\tilde{\Gamma}(M \in S/R_0) = \tilde{\Gamma}(O_1/R_0) + \left( \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{R_0} \wedge O_1 \vec{M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge O_1 \vec{M})$$

Ou encore :

$$\tilde{\Gamma}(M \in S/R_0) = \tilde{\Gamma}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}' \wedge O_1 \vec{M} + \vec{\Omega}^2 O_1 \vec{M}$$

$$\vec{\Omega}' = \left( \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt} \right)_{R_0}$$

avec .  
Le champ des accélérations d'un solide indéformable N'EST PAS le champ des moments d'un torsur.

## V. MOUVEMENTS PARTICULIERS

### V. 1. Translation

- La vitesse de rotation est nulle
- Le vecteur vitesse est uniforme sur ( $S$ )

### V. 2. Rotation autour d'un axe

- Il existe au moins deux points A et B fixes dans ( $R_0$ )
- Tous les points de la droite ( $\Delta$ ) = (AB) ont une vitesse nulle
- ( $AB$ ) est l'axe central du torsur cinématique (c'est l'axe de rotation)
- Tous ... de ( $S$ ) ont une trajectoire circulaire autour de ( $\Delta$ )

### V. 3. Mouvement hélicoïdal tangent

Soient un point I  $\in (\Delta)$  (axe central ou axe de vibration) et un point M quelconque  $\{g(S/R)\}$

$$\tilde{V}(M \in S/R) = \tilde{V}(I \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge IM$$

$$\tilde{V}(M \in S/R) = \alpha \vec{\Omega}(S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge IM$$

La distribution des vitesses est à l'instant  $t$  identique à celle d'un mouvement hélicoïdal d'axe ( $\Delta$ ), de pas  $\alpha$  et de vecteur rotation  $\bar{\Omega}(S/R)$ . Ce mouvement est dit "mouvement hélicoïdal tangent à l'instant  $t$  au mouvement considéré. Nous pouvons d'ailleurs retrouver pour le mouvement instantané du solide les mouvements particuliers

$$\text{E} \quad \text{Si } \bar{\Omega}(S/R) = \bar{0} \quad \bar{V}(M \in S/R) = \bar{V}(A \in S/R) \quad \forall M, A \in (S)$$

On dit que le mouvement est à l'instant  $t$  un mouvement de translation.

$$\text{E} \quad \text{Si } \alpha = 0 \quad \bar{V}(M \in S/R) = \bar{\Omega}(S/R) \wedge \bar{IM}$$

On dit que le mouvement est à l'instant  $t$  un mouvement de rotation.

## 2<sup>eme</sup> Partie : COMPOSITION DE MOUVEMENTS

### VI. DEFINITIONS

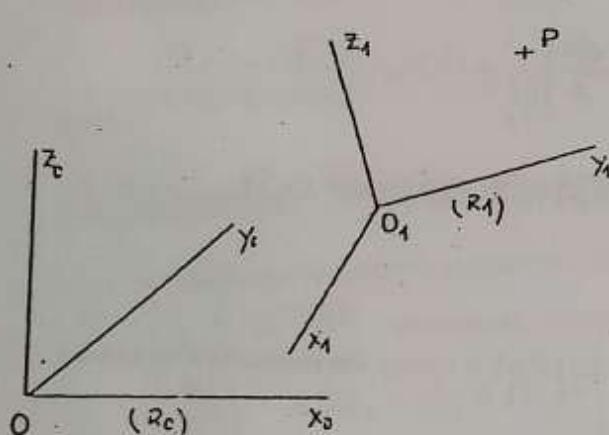


Figure 3.4

On considère :

Un repère  $(R_0)$  supposé fixe par rapport à l'observateur ;

Un repère  $(R_1)$  en mouvement par rapport à l'observateur ;

Un point  $P$  mobile à la fois par rapport à  $(R_0)$  et à  $(R_1)$ .

On définit ainsi trois mouvements comme suit.

### VI. 1. Mouvement "absolu"

Un mouvement absolu n'a pas de signification physique. Conventionnellement, on désigne par "mouvement absolu" le mouvement du point  $P$  par rapport au repère  $(R_0)$  "fixe" par rapport à l'observateur.

$$\text{Vitesse absolue} \quad \bar{V}(P/R_0) = \left( \frac{d\bar{OP}}{dt} \right)_{R_0}, \text{ bien noter que } O \text{ est un point de } (R_0)$$

$$\text{Accélération absolue} \quad \bar{f}(P/R_0) = \left( \frac{d\bar{V}(P/R_0)}{dt} \right)_{R_0}$$

### VI. 2. Mouvement relatif

C'est le mouvement du point  $P$  par rapport au repère "mobile"  $(R)$

Vitesse relative :  $\bar{v}(P/R_1) = \left( \frac{dO_1\bar{P}}{dt} \right)_{R_1}$  bien noter que  $O_1$  est un point de  $(R_1)$

Accélération relative :  $\bar{\Gamma}(P/R_1) = \left( \frac{d\bar{v}(P/R_1)}{dt} \right)_{R_1}$

### VI. 3. Mouvement d'entraînement

C'est le mouvement qu'aurait le point P dans le repère  $(R_0)$  s'il était solidaire - par une liaison solide - de  $(R_1)$ .

La vitesse d'entraînement est donc la vitesse par rapport à  $(R_0)$  d'un point  $P_1$  appartenant à  $(R_1)$  et coïncidant avec la position instantanée de P. Elle est notée :  $\bar{v}(P \in R_1 / R_0)$  et peut être calculée sur la base des propriétés fictif ( $S_1$ ) solidaire de  $(R_1)$ .

Ainsi, la vitesse d'entraînement est :  $\bar{v}(P \in R_1 / R_0) = \bar{v}(O_1 / R_0) + \bar{\Omega}(R_1 / R_0) \wedge O_1\bar{P}$  ; par la suite, on note  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}(R_1 / R_0)$  pour simplifier l'écriture.

L'accélération d'entraînement est notée :  $\bar{\Gamma}(P \in R_1 / R_0)$

Attention, ce n'est pas la dérivée de la vitesse d'entraînement - sauf de considérer le vecteur  $O_1\bar{P}$  fixe dans  $(R_1)$  - mais l'accélération du point P "collé" sur le solide fictif ( $S$ ) solidaire de  $(R_1)$ .

Donc :  $\bar{\Gamma}(P \in R_1 / R_0) = \bar{\Gamma}(O_1 / R_0) + \bar{\Omega}' \wedge O_1\bar{P} + \bar{\Omega} \wedge (\bar{\Omega} \wedge O_1\bar{P})$  avec  $\bar{\Omega}' = \left( \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \right)_{R_0}$

## VII. COMPOSITION DES DERIVATIONS

Considérons un vecteur quelconque dont les composantes x, y, et z dans  $(R_1)$  sont supposées continues

:  $\bar{U} = x\bar{x}_1 + y\bar{y}_1 + z\bar{z}_1$  : dérivons ce vecteur dans le repère  $(R_0)$  :

Alors :  $\left( \frac{d\bar{U}}{dt} \right)_{R_0} = (\dot{x}\bar{x}_1 + \dot{y}\bar{y}_1 + \dot{z}\bar{z}_1) + \left( x \left( \frac{d\bar{x}_1}{dt} \right)_{R_0} + y \left( \frac{d\bar{y}_1}{dt} \right)_{R_0} + z \left( \frac{d\bar{z}_1}{dt} \right)_{R_0} \right)$

par application du théorème du repère mobile, il vient :

$$\left( \frac{d\bar{U}}{dt} \right)_{R_0} = (\dot{x}\bar{x}_1 + \dot{y}\bar{y}_1 + \dot{z}\bar{z}_1) + (x.\bar{\Omega}(R_1 / R_0) \wedge \bar{x}_1 + y.\bar{\Omega}(R_1 / R_0) \wedge \bar{y}_1 + z.\bar{\Omega}(R_1 / R_0) \wedge \bar{z}_1)$$

$$\left( \frac{d\bar{U}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d\bar{U}}{dt} \right)_{R_1} + \bar{\Omega}(R_1 / R_0) \wedge \bar{U}$$

finalement : c'est le théorème du repère mobile généralisé au cas où le vecteur  $\bar{U}$  n'appartient pas à  $(R_1)$

### VIII. COMPOSITION DES VITESSES

Etablissons la relation entre les trois vitesses :

$$\bar{v}(P/R_0) = \left( \frac{d\bar{O}P}{dt} \right)_{R_0} \text{ avec } \bar{O}P = \bar{O}\bar{O}_1 + \bar{O}_1\bar{P}$$

On a :

$$\bar{v}(P/R_0) = \left( \frac{d\bar{O}\bar{O}_1}{dt} \right)_{R_0} + \left( \frac{d\bar{O}_1\bar{P}}{dt} \right)_{R_0}$$

En dérivant :

$$\left( \frac{d\bar{O}\bar{O}_1}{dt} \right)_{R_0} \quad \bar{v}(O_1/R_0) = \left( \frac{d\bar{O}\bar{O}_1}{dt} \right)_{R_0}$$

Remarquons que le terme  $\left( \frac{d\bar{O}\bar{O}_1}{dt} \right)_{R_0}$  est la vitesse du point  $O_1$  dans  $(R_0)$  soit

$$\left( \frac{d\bar{O}_1\bar{P}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d\bar{O}_1\bar{P}}{dt} \right)_{R_1} + \bar{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \bar{O}_1\bar{P}$$

Appliquons le théorème du repère mobile généralisé :

$$\left( \frac{d\bar{O}_1\bar{P}}{dt} \right)_{R_1}$$

Notons que le terme  $\left( \frac{d\bar{O}_1\bar{P}}{dt} \right)_{R_1}$  n'est rien d'autre que la vitesse relative de  $P$  dans le repère  $(R_1)$  notée  $\bar{v}(P/R_1)$  et que, d'autre part, la somme  $\bar{v}(O_1/R_0) + \bar{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \bar{O}_1\bar{P}$  est la vitesse d'entraînement du point  $P$  notée  $\bar{v}(P \in R_1/R_0)$

et finalement :  $\bar{v}(P/R_0) = \bar{v}(P/R_1) + \bar{v}(P \in R_1/R_0)$

*Énoncé : formule de combinaison des vitesses : la vitesse absolue est la somme des vitesses relative et d'entraînement.*

$$\begin{cases} \bar{v}_s(P) = \bar{v}_r(P) + \bar{v}_e(P) \\ \bar{v}_s(P) = \bar{v}(P/R_0) & \text{vitesse "absolue"} \\ \bar{v}_r(P) = \bar{v}(P/R_1) & \text{vitesse relative} \\ \bar{v}_e(P) = \bar{v}(O_1/R_0) + \bar{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \bar{O}_1\bar{P} & \text{vitesse d'entraînement} \end{cases}$$

### IX. COMPOSITION DES ACCELERATIONS

Exprimons l'accélération "absolue" du point  $P$  par rapport à  $(R_0)$  :

$$\bar{f}(P/R_0) = \left( \frac{d\bar{v}(P/R_0)}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d}{dt} (\bar{v}(P/R_1) + \bar{v}(P \in R_1/R_0)) \right)_{R_0}$$

Alors :

$$\left( \frac{d\bar{v}(P/R_1)}{dt} \right)_{R_0}$$

Le terme  $\left( \frac{d\bar{v}(P/R_1)}{dt} \right)_{R_0}$  peut être calculé par application du théorème du repère mobile généralisé puisque  $\bar{v}(P/R_1)$  n'est généralement pas un vecteur constant dans  $(R_1)$ .

$$\text{Alors : } \left( \frac{d\bar{V}(P/R_1)}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d\bar{V}(P/R_1)}{dt} \right)_{R_1} + \bar{\Omega} \wedge \bar{V}(P/R_1)$$

Notons que  $\left( \frac{d\bar{V}_{\omega \wedge P/R_1}}{dt} \right)_{R_1}$  n'est rien d'autre que l'accélération relative de  $P$  dans  $(R_1)$ :  $\bar{\Gamma}(P/R_1)$

Développons l'autre terme en

a	+	c	-	0
b	+	e	-	0
d	+	f	-	0

Le terme  $\left( \frac{d\bar{V}(P/R_1)}{dt} \right)_{R_0}$  n'est rien d'autre que l'accélération relative de  $P$  dans  $(R_1)$ :  $\bar{\Gamma}(P/R_1)$

Et le terme  $\left( \frac{d}{dt} (\bar{\Omega} \wedge O_1 \bar{P}) \right)_{R_0}$  peut être calculé par application du théorème du repère mobile :

$$\text{Soit : } \left( \frac{d}{dt} (\bar{\Omega} \wedge O_1 \bar{P}) \right)_{R_0} = \left( \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \right)_{R_0} \wedge O_1 \bar{P} + \bar{\Omega} \wedge \left( \frac{dO_1 \bar{P}}{dt} \right)_{R_0}$$

$$\text{puis : } \left( \frac{dO_1 \bar{P}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{dO_1 \bar{P}}{dt} \right)_{R_1} + \bar{\Omega} \wedge O_1 \bar{P} = \bar{V}(P/R_1) + \bar{\Omega} \wedge O_1 \bar{P}$$

Regroupons tous les termes.

$$\text{Au bilan : } \bar{\Gamma}(P/R_0) = [\bar{\Gamma}(P/R_1)] + [\bar{\Gamma}(O_1/R_0) + \bar{\Omega}' \wedge O_1 \bar{P} + \bar{\Omega} \wedge (\bar{\Omega} \wedge O_1 \bar{P})] + [2\bar{\Omega} \wedge \bar{V}(P/R_1)]$$

On voit ainsi que l'accélération absolue n'est pas la simple somme des accélérations relative et d'entraînement mais qu'une accélération complémentaire de Coriolis s'ajoute :

$$\bar{\Gamma}_a(P) = \bar{\Gamma}_r(P) + \bar{\Gamma}_e(P) + \bar{\Gamma}_c(P)$$

$$\bar{\Gamma}_a(P) = \bar{\Gamma}(P/R_0)$$

accélération "absolue"

$$\bar{\Gamma}_r(P) = \bar{\Gamma}(P/R_1)$$

accélération relative

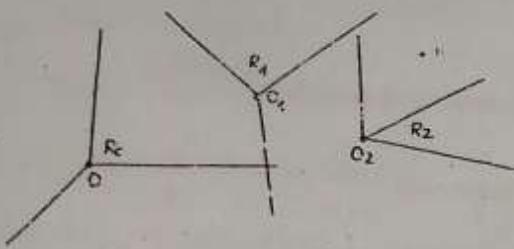
$$\bar{\Gamma}_e(P) = \bar{\Gamma}(O_1/R_0) + \bar{\Omega}' \wedge O_1 \bar{P} + \bar{\Omega} \wedge (\bar{\Omega} \wedge O_1 \bar{P})$$

accélération d'entraînement

$$\bar{\Gamma}_c(P) = 2\bar{\Omega} \wedge \bar{V}_r(P)$$

accélération de Coriolis

## X. COMPOSITION DE MOUVEMENTS DE REPÈRES



On considère 3 repères  $(R_0)$ ,  $(R_1)$  et  $(R_2)$  mobiles les uns par rapport aux autres.

Soit  $P$  un point fixe du repère  $(R_2)$  ou, si l'on préfère, un point du solide ( $S_2$ ) attaché à  $(R_2)$ .

Figure 3.5

### X. 1. Vitesse

$$\text{Par définition de } P, \bar{v}(P/R_0) = \bar{v}(P \in R_2/R_0)$$

Et par composition des vitesses :

$$\bar{v}(P \in R_2/R_0) = \bar{v}(P \in R_2/R_1) + \bar{v}(P \in R_1/R_0)$$

$$\bar{v}(P \in R_N/R_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{v}(P \in R_{k+1}/R_k)$$

Généralisons à  $N+1$  repères mobiles

### X. 2. Accélération

Par composition des accélérations :

$$\bar{v}(P \in R_1/R_0) = \bar{v}(O_1/R_0) + \bar{\omega}(R_1/R_0) \wedge O_1 \bar{P}$$

### X. 3. Rotation

Considérons un vecteur  $\bar{U}$  fixe dans  $(R_2)$  et calculons en la dérivée dans  $(R_0)$  puis dans  $(R_1)$  par application du théorème du repère mobile.

$$\text{Alors : } \left( \frac{d\bar{U}}{dt} \right)_{R_0} = \bar{\omega}(R_2/R_0) \wedge \bar{U}$$

$$\text{Et en "passant" par } (R_1) : \left( \frac{d\bar{U}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d\bar{U}}{dt} \right)_{R_1} + \bar{\omega}(R_1/R_0) \wedge \bar{U}$$

$$\text{Avec : } \left( \frac{d\bar{U}}{dt} \right)_{R_1} = \bar{\omega}(R_2/R_1) \wedge \bar{U}$$

$$\text{Par identification, } \bar{\omega}(R_2/R_0) = \bar{\omega}(R_2/R_1) + \bar{\omega}(R_1/R_0) \text{ c'est le théorème de composition des rotations}$$

### X. 4. Composition des torseurs cinématiques

A cause de la simple additivité des rotations (résultantes cinématiques) et des vitesses (vitesse cinématique), les torseurs cinématiques sont également additifs dans la composition des mouvements.

On écrit ainsi :  $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}(R_2/R_0) \\ \bar{V}(P \in R_2/R_0) \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}(R_2/R_1) \\ \bar{V}(P \in R_2/R_1) \end{array} \right\}_P + \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}(R_1/R_0) \\ \bar{V}(P \in R_1/R_0) \end{array} \right\}_P$

### X. 5. Mouvements inverses

On considère deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) en mouvement l'un par rapport à l'autre. Et soit  $P$  un point du solide ( $S_1$ )

$$\text{Alors bien sûr : } \bar{V}(P \in R_1/R_1) = \bar{0}$$

$$\text{Et comme : } \bar{V}(P \in R_1/R_1) = \bar{V}(P \in R_1/R_0) + \bar{V}(P \in R_0/R_1)$$

$$\text{Alors : } \bar{V}(P \in R_1/R_0) = -\bar{V}(P \in R_0/R_1) \quad (\text{les vitesses sont réciproques})$$

$$\text{De même : } \bar{\Omega}(R_1/R_0) = -\bar{\Omega}(R_0/R_1) \quad (\text{les rotations sont réciproques})$$

### X. 6. Cinématique du contact de deux solides

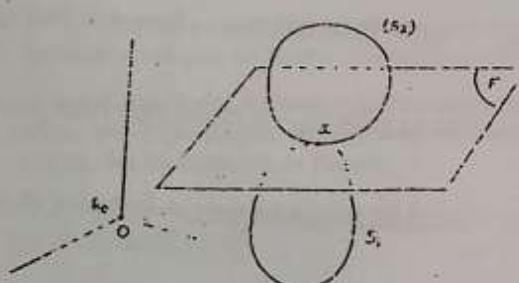


Figure 3.6

On considère deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) en contact et en mouvement dans un repère ( $R_0$ ) fixe par rapport à l'observateur.

Si on suppose que l'enveloppe de ces solides forme une surface convexe et lisse, le contact s'établit en un point noté I – dépendant de l'instant  $t$  –.

En ce point, les plans tangents aux solides sont communs, confondus avec le plan ( $\pi$ ).

A chaque instant, à la position du point de contact il convient de différencier trois points :

Le point I appartenant à ( $S_2$ )

Le point I appartenant à ( $S_1$ )

Le point I géométriquement confondu avec le contact.

Un instant plus tard, en raison du mouvement, ces trois points ne sont plus confondus.

### X. 7. Vitesse de glissement

La vitesse de I appartenant à ( $S_2$ ) par rapport au solide ( $S_1$ ) appartient nécessairement au plan tangent ( $\pi$ ) : une composante de vitesse normale à ( $\pi$ ) impliquerait soit un décollement des solides – et donc une rupture du contact – soit une intérénétration des solides, ce qui n'est pas acceptable pour des solides indéformables.

Cette vitesse  $\bar{V}(I \in S_2/S_1)$  est appelée vitesse de glissement du solide ( $S_2$ ) par rapport au solide ( $S_1$ ). Elle peut être calculée en "passant" par un repère intermédiaire – ( $R_0$ ) par exemple :

$$\bar{V}(I \in S_2/S_1) = \bar{V}(I \in S_2/R_0) + \bar{V}(I \in R_0/S_1) \quad \text{par composition des mouvements des repères}$$

soit  $\bar{V}(I \in S_2) = \bar{V}(I \in S_2/R_0) - \bar{V}(I \in S_1/R_0)$  par réciprocité des mouvements. La vitesse de glissement entre deux solides est ainsi la différence des vitesses des points en contact de chaque solide

## X. 8. Roulement sans glissement

Par définition, il y a roulement sans glissement du solide ( $S_2$ ) sur le solide ( $S_1$ ) - et réciproquement - si la vitesse de glissement est nulle :

$$\nabla(I \in S_2 / S_1) = \vec{0} \Leftrightarrow \text{roulement sans glissement}$$

## XI. REPERAGE D'UN SOLIDE PAR LES ANGLES D'EULER

La position de tout solide ( $S_1$ ) est totalement déterminée par la position du repère ( $R_1$ ) qui lui est attaché c'est-à-dire :

Par la position du centre du repère  $O_1$  (3 coordonnées)

Par l'orientation des axes  $\{x_1, y_1, z_1\}$  (3 angles)

Un solide possède donc 6 degrés de mobilité dans  $IR^3$ .

Il peut être avantageux, dans bon nombre d'applications, de repérer l'orientation du solide ( $S_1$ ) autour de  $O_1$  par les angles d'Euler définis comme suit.

Les axes  $\{x_1, y_1, z_1\}$  - concourants au centre  $O_1$  - du solide sont initialement parallèles aux axes  $\{x_0, y_0, z_0\}$  du repère "fixe" ( $R_0$ ).

- Le solide effectue une rotation d'amplitude  $\psi$  autour de  $\{z_0\}$  - angle de précession - le repère ( $R_0$ ) vient coïncider avec le repère ( $R_2$ ) =  $\{x_2, y_2, z_2\}$  tel que  $z_2 = z_0$
- Le solide effectue une rotation d'amplitude  $\theta$  autour de  $\{x_2\}$  - angle de nutation - le repère ( $R_2$ ) vient coïncider avec le repère ( $R_3$ ) =  $\{x_3, y_3, z_3\}$  tel que  $x_3 = x_2$
- Le solide effectue une rotation d'amplitude  $\varphi$  autour de  $\{z_3\}$  - angle de rotation propre - le repère ( $R_3$ ) vient finalement coïncider avec le repère ( $R_1$ ) =  $\{x_1, y_1, z_1\}$  tel que  $z_1 = z_3$

Ces angles peuvent être représentés dans des vues en projection :

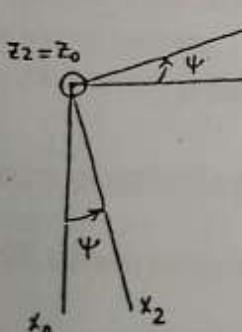


Figure 3.7

Précession  $\psi$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = \cos \psi \cdot \bar{x}_0 + \sin \psi \cdot \bar{y}_0 \\ \bar{y}_2 = -\sin \psi \cdot \bar{x}_0 + \cos \psi \cdot \bar{y}_0 \\ \bar{z}_2 = \bar{z}_0 \end{cases}$$

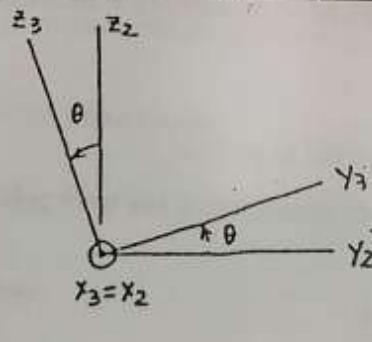


Figure 3.8

Nutation  $\theta$

$$\begin{cases} \bar{x}_3 = \bar{x}_2 \\ \bar{y}_3 = \cos \theta \cdot \bar{y}_2 + \sin \theta \cdot \bar{z}_2 \\ \bar{z}_3 = -\sin \theta \cdot \bar{y}_2 + \cos \theta \cdot \bar{z}_2 \end{cases}$$

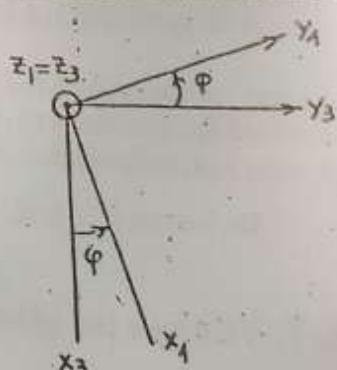


Figure 3.9

rotation propre  $\varphi$

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \cos \varphi \cdot \bar{x}_3 + \sin \varphi \cdot \bar{y}_3 \\ \bar{y}_1 = -\sin \varphi \cdot \bar{x}_3 + \cos \varphi \cdot \bar{y}_3 \\ \bar{z}_1 = \bar{z}_3 \end{cases}$$

En vertu du théorème de composition des vitesses :

$$\bar{\Omega}(R_1/R_n) = \bar{\Omega}(R_1/R_3) + \bar{\Omega}(R_3/R_2) + \bar{\Omega}(R_2/R_n)$$

Le vecteur rotation de  $(S_1)$  dans  $(R_n)$  s'écrit donc :  $\bar{\Omega}(R_1/R_n) = \dot{\phi} \bar{z}_1 + \dot{\theta} \bar{x}_2 + \dot{\psi} \bar{z}_n$

selon les besoins du calcul, il peut être indifféremment projeté dans l'un ou l'autre des repères  $(R_0)$ ,  $(R_1)$ ,  $(R_2)$ , ou  $(R_3)$ .

Dans  $(R_3)$ , par exemple,  $\bar{\Omega}(R_1/R_n) = \dot{\theta} \bar{x}_3 + \dot{\psi} \sin \theta \bar{y}_3 + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \bar{z}_3$ , ou  $\bar{\Omega}(R_1/R_n) = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \end{Bmatrix}_{R_3}$

## XII. LIAISONS PARFAITES ET TORSEURS CINÉMATIQUES ASSOCIES

### XII. 1. Liaisons entre solides

Nous avons vu que la position d'un solide dans l'espace peut être définie par 6 paramètres, 3 Rotations cf. 3 Translations.

Ces 6 paramètres sont les 6 degrés de liberté du solide.

En fait un solide n'est généralement pas seul, il est en liaison avec d'autres solides. Cette liaison va limiter le nombre de degrés de liberté existant entre les solides.

L'étude des liaisons réelles existantes entre les différentes pièces d'un mécanisme est délicate et difficile en effet, les défauts entre les surfaces de contact (rugosité, défaut de forme), la présence de jeu, la déformation des pièces, les frottements, et l'usure.

Afin de pouvoir étudier le fonctionnement d'un mécanisme, il est nécessaire de modéliser les liaisons entre les différentes pièces.

### XII. 2. Liaisons normalisées entre solides.

Une liaison est dite parfaite si :

- Le contact s'établit théoriquement en un point, sur une ligne ou sur une surface de définition géométrique simple (plan sphère, cylindre, surface hélicoïdale, ...);
  - Les surfaces de contact sont supposées géométriquement parfaites;
  - la liaison est sans jeu.
- La norme NF E04-015 présente les onze liaisons élémentaires.

### XII. 3. Schémas normalisés

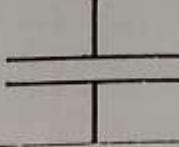
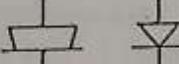
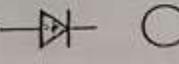
Cf. tableau récapitulatif page suivante.

### XII. 4. Degrés de liberté d'un solide par rapport à un autre:

On appelle degré de liberté d'un solide par rapport à un autre le nombre de mouvements élémentaires indépendants (3 rotations et 3 translations) entre les deux solides. Le nombre de degré de liberté de chaque liaison élémentaire est indiqué dans le tableau récapitulatif.

# LIAISONS PARFAITES ET TORSEURS CINÉMATIQUES ASSOCIES

NC Degree de liberté	Désignation et définition	Schématisation	Torseur cinématique $(V_{S_1, S_2})$	Repère idéal
0	Liaison encastrement ou liaison fixe	plane perspective	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	
1	Liaison Pivot		$\begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	L'axe x du repère idéal passe par l'axe de la liaison pivot. $\forall P \in \text{axe liaison}$
1	Liaison Glissière:		$\begin{pmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	axe x du repère idéal passe par l'axe de la liaison glissière $\forall P$
1	Liaison hélicoïdale		$\begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	Idem $ V_x  = \text{pas.}  \omega_x $ $\forall P \in \text{axe liaison}$
2	Liaison Pivot Glissant		$\begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	L'axe x du repère idéal passe par l'axe de la liaison pivot glissant. $\forall P \in \text{axe liaison}$
2	Liaison Sphérique à doigt		$\begin{pmatrix} \omega_z & 0 \\ 0 & 0 \\ c\omega_x & 0 \end{pmatrix}$	L'axe z du repère idéal passe par l'axe du doigt, l'axe x est perpendiculaire au plan de la rainure. Le point de réduction du torseur cinématique est le point O centre de la sphère.
3	Liaison Rolule ou Sphérique		$\begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ c\omega_z & 0 \end{pmatrix}$	Le point de réduction du torseur cinématique est le point C centre de la sphère. Le repère idéal passe par ce point

N° Degré de liberté	Désignation et définition	Schématisation	Torseur cinématique $\{V_{S,A}\}$	Repère idéal
		plane      perspective		
3	liaison Appui Plan	 	$\begin{pmatrix} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_x & 0 \end{pmatrix}_P$	L'axe z est perpendiculaire au plan $\forall P$
4	liaison Linéaire Annulaire	 	$\begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}_C$	l'axe x est l'axe du cylindre. C centre de la sphère.
4	Liaison Linéaire Rechtlinige	 	$\begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}_P$	Axe z normale au plan tangent. L'axe x est porté par la droite de contact $\forall P \in \text{axe } \bar{x}$
5	Liaison Ponctuelle	 	$\begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{pmatrix}_P$	Axe x normale au plan tangent. $\forall P \in \text{axe } \bar{x}$

# Chap. 4 - STATIQUE DU SOLIDE

## TABLE DES MATIERES

- Définitions - But - Généralités
- Premier principe de la statique
- Modélisation des actions mécaniques de contact
- Principe fondamental de la statique (PFS)
- Statique d'un système de solides ou ensemble matériel (E)
- Statique graphique
- Applications : Arc-boulement - Basculement - Coincement

## I. DEFINITIONS - BUT - GENERALITES

### I. 1. Définition

On appelle *statique* la partie de la Mécanique dans laquelle sont étudiées les conditions auxquelles doivent satisfaire les solides et les systèmes de solides afin d'être en équilibre par rapport à un système de référence supposé fixe (systèmes d'axes liés à la terre).

### I. 2. But

Un problème de statique consiste :

- en général, à déterminer une ou plusieurs forces, l'ensemble des forces devant se « neutraliser ».
- parfois, à déterminer un ou plusieurs éléments de configuration du système (angle, longueur) si celui-ci présente une certaine liberté de déplacement.
- Le cas échéant, à étudier la stabilité de l'équilibre.

### I. 3. Généralités – Définitions

#### ① – point matériel

Le *point matériel* est défini comme étant une particule de matière sans dimension mais contenant une quantité finie de matière. Ex : balle d'un fusil par rapport à sa trajectoire, une petite bille en contact avec le sol d'une salle de classe.

#### ② – solide (S)

Un *corps rigide*, ou *solide indéformable*, ou plus simplement *solide*, (S) est caractérisé mathématiquement de la manière suivante : la distance de deux points matériels quelconques du solide reste constante.

$$|AB| = \text{constante}$$

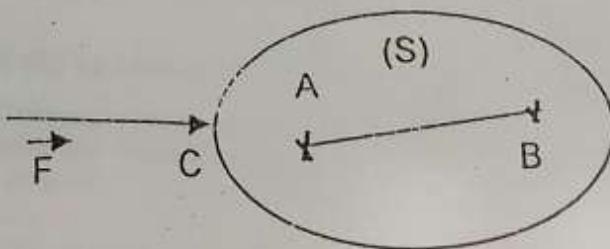


Figure 4.1

#### ③ – Référentiel (R)

En mécanique, nous utiliserons le référentiel galiléen ( $R_e$ ) qui est bien représenté dans la pratique par un repère lié à la terre. Cette notion sera amplement développée au chapitre 6.

Remarque : Par ailleurs rappelons que chaque solide sera associé à un repère propre (d'origine, son centre de gravité).

#### (\*) - action mécanique

On appelle *action mécanique* toute cause susceptible de maintenir un corps au repos, ou de créer un mouvement, ou de déformer un corps. Une *force* est une action mécanique représentée par un vecteur lié ou pointeur, exemple  $(C, \vec{F})$  sur la figure 4.1. Mais attention ! la notion de vecteur lié est insuffisante à elle seule pour représenter complètement d'autres actions mécaniques (couple par exemple). Les actions mécaniques sont de deux sortes

- actions mécaniques à distance, ou forces de volume (champs de pesanteur, champ électromagnétique, champ électrostatique, ...).
- actions mécaniques de contact, ou forces de surface (liaisons surfaciques, ...).

On distingue les actions mécaniques extérieures et intérieures à un ensemble de corps (cette dernière spécification est nécessaire pour appliquer le principe fondamental de la statique à un ensemble de corps).

Soient 3 corps  $(S_0)$ ,  $(S_1)$ ,  $(S_2)$  et soit  $(E)$  l'ensemble constitué par les deux corps  $(S_1)$  et  $(S_2)$ .  $(E) = (S_1) \cup (S_2)$

- $(S_0) \rightarrow (S_2)$  : l'action mécanique de  $(S_0)$  sur  $(S_2)$  est extérieure à  $(E)$ .
  - $(S_1) \rightarrow (S_2)$  : l'action mécanique de  $(S_1)$  sur  $(S_2)$  est intérieure à  $(E)$ .
  - $(E) \rightarrow (E)$  : l'action mécanique de  $(E)$  sur  $(E)$  est extérieure à  $(E)$ .
- où  $(\bar{E})$  : système extérieur à expliciter.

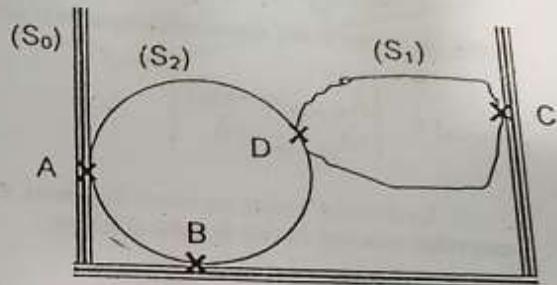


Figure 4.2

## II. PREMIER PRINCIPE DE LA STATIQUE

### II. 1. Représentation des actions mécaniques

D'une façon générale, si un corps  $(S)$  subit de la part d'un ensemble matériel  $(E)$  une action mécanique représentée par un système de  $n$  forces  $(P_i, \vec{F}_i)$  on caractérise globalement cette action mécanique par les deux vecteurs suivants :

$$\bar{R}_{(E \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \text{résultante générale de l'action mécanique de } (E) \text{ sur } (S).$$

$$\bar{M}_{A(E \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^n \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i \quad \text{moment résultant de l'action mécanique de } (E) \text{ sur } (S).$$

On dit alors que l'action mécanique de  $(E)$  sur  $(S)$  est équivalente, au point A, aux deux vecteurs  $\bar{R}_{(E \rightarrow S)}$  et  $\bar{M}_{A(E \rightarrow S)}$ .

### II. 2. Propriété

Le moment résultant s'écrit au point B :  $\bar{M}_{B(E \rightarrow S)} = \bar{M}_{A(E \rightarrow S)} + \vec{BA} \wedge \bar{R}_{(E \rightarrow S)}$

### II. 3. Premier principe de la statique

Le moment résultant d'une action mécanique vérifie donc la relation de changement de point du moment d'un torseur. Par suite le champ des moments résultants d'une action mécanique répond à la définition d'un torseur, ce qui nous conduit à énoncer ainsi le *premier principe de la statique* :

Toute action mécanique est entièrement caractérisée, d'un point de vue mécanique, par un torseur.

Dans le cas précédent, le torseur d'action mécanique de (E) sur (S) s'écrit :  $\{\tau_{(E \rightarrow S)}\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{(E \rightarrow S)} \\ \bar{M}_{A(E \rightarrow S)} \end{Bmatrix}$

avec :

$\bar{R}_{(E \rightarrow S)}$  résultante générale du torseur d'action mécanique de (E) sur (S)

$\bar{M}_{A(E \rightarrow S)}$  moment résultant du torseur d'action mécanique de (E) sur (S).

$\bar{R}_{(E \rightarrow S)}$  et  $\bar{M}_{A(E \rightarrow S)}$  sont aussi appelés éléments de réduction du torseur d'action mécanique de (E) sur (S).

exemple : le torseur d'action mécanique de la pesanteur sur tout corps, exprimé en G (son centre de gravité) est :

$$\{\tau_{(g \rightarrow E)}\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{(g \rightarrow E)} = -mg\bar{z} \\ \bar{M}_{G(g \rightarrow E)} = \bar{0} \end{Bmatrix}$$

Le centre d'inertie ou centre de gravité d'un ensemble matériel (E) est le point G tel que :

$$\int_{P \in (E)} \vec{GP} dm = \bar{0}.$$

ou encore pour tout point A :  $\vec{AG} = \frac{1}{m} \int_{P \in (E)} \vec{AP} dm$ .

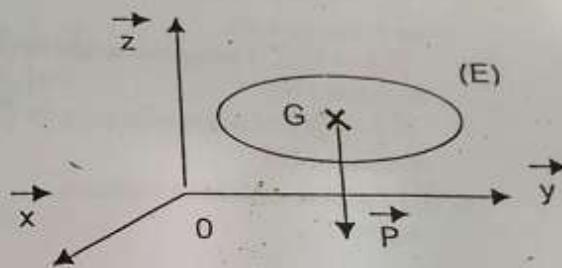


Figure 4.3

Si on considère une partition de  $E(m, G)$  en n éléments  $E_i(m_i, G_i)$ , alors on a :  $\vec{AG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{AG}_i$ .

Si (E) est homogène et admet un élément de symétrie (plan, axe, centre), son centre d'inertie appartient à cet élément de symétrie. La détermination du centre de gravité est développée dans le chapitre 5, § 1, 2.

### III. MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES DE CONTACT (LES LOIS DE COULOMB : frottement, roulement, pivotement)

#### III. 1. Torseur d'action mécanique de contact

- Le contact réel entre deux corps a lieu suivant une surface (S)
- L'action mécanique de contact  $(S_1) \rightarrow (S_2)$  est caractérisée par une densité surfacique de force  $\bar{f}_{(S_1 \rightarrow S_2)}$  en chaque point P de (S) relativement à un élément de surface dS, donc :

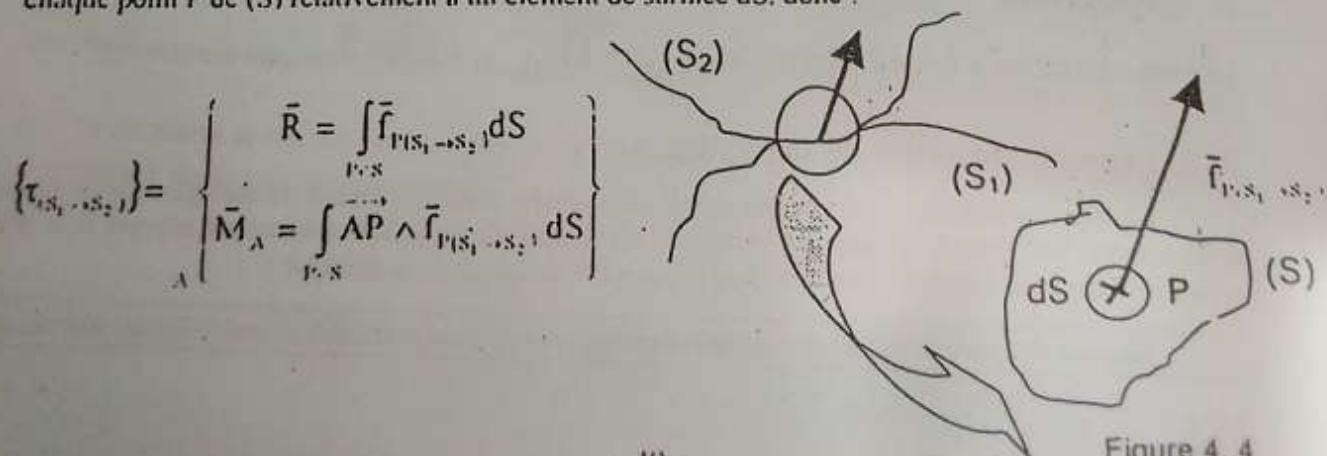


Figure 4.4

### III. 2. Lois de COULOMB

Considérons deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) en contact suivant une surface ( $S$ ). le plan ( $\pi$ ) tangent à ( $S_1$ ) et à ( $S_2$ ) au point  $P$  de ( $S$ ) et  $\bar{f}_P$  la densité surfacique de force au point  $P$

Soient :

$$\bar{f}_P = \bar{n}_P + \bar{t}_P \quad \begin{cases} \bar{n}_P \perp (\pi) \\ \bar{t}_P \in (\pi) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{composante normale} \\ \text{composante tangentielle} \end{array}$$

Soit  $\bar{V}(P \in S_1 / S_2)$  la vitesse de glissement au point  $P$  de ( $S_1$ ) par rapport à ( $S_2$ ).

$\bar{V}(P \in S_1 / S_2) \in (\pi)$ . (voir chap. 3 § X. 10.)

#### ① énoncé des lois de COULOMB

1<sup>er</sup> cas :  $\bar{V}(P \in S_1 / S_2) \neq \bar{0}$

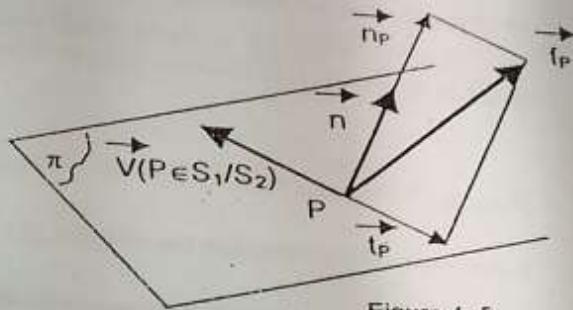
$\bar{V}(P \in S_1 / S_2)$  est opposé à  $\bar{t}_P$  :  $\begin{cases} \bar{t}_P \wedge \bar{V}(P \in S_1 / S_2) = \bar{0} \\ \bar{t}_P \bullet \bar{V}(P \in S_1 / S_2) < 0 \end{cases}$

$|\bar{t}_P|$  est proportionnelle à  $|\bar{n}_P|$  :  $|\bar{t}_P| = f \cdot |\bar{n}_P|$

avec :  $\bar{t}_P$  : force tangentielle = force de frottement

$f$  : coefficient de frottement en  $P$  de ( $S_1$ ) sur ( $S_2$ )  
où  $\varphi$  est le demi-angle au sommet du cône de frottement.

Figure 4. 5



$$f = \tan \varphi$$

2<sup>ème</sup> cas :  $\bar{V}(P \in S_1 / S_2) = \bar{0}$

Il n'y a pas de glissement entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) et on a :  $|\bar{t}_P| < f \cdot |\bar{n}_P|$

#### Remarques :

⇒ En toute rigueur, quand  $\bar{V}(P \in S_1 / S_2) = \bar{0}$  on devrait parler de coefficient d'adhérence «  $a$  » qui est légèrement supérieur à  $f$ , mais dans la pratique on prend souvent  $a = f$ .

⇒ Exemples de valeurs de  $f$

Contact	$f$
Pas de frottement	0
Fer / bois	0.5
Bois / bois	0.4
Bois / suif / bois	0.05
Fer / fer	0.15
Fer / eau / fer	0.1
Fer / huile / fer	0.01
Cuir sur métal	0.25

Contact	$f$
Cuir sur bois	0.5
Pneu / route	0.6
Pneu / eau / route	0.3
Pneu / glace	0.08
Patin / glace	0.03
Garniture de frein / acier	0.3
Fonte / bronze	0.05
Bronze / bronze	0.20

⇒ Très souvent afin de simplifier l'étude, on retient l'hypothèse de contact sans frottement :  $f = 0$  et  $\bar{f}_P \perp (\pi)$

⇒ Si on écarte le cas où par exemple ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) sont des solides aimantés, on peut dire qu'en général le vecteur densité surfacique normal  $\bar{n}_{P(S_1, S_2)}$  est dirigé de ( $S_1$ ) vers ( $S_2$ ).

## Application en mécanique

Considérons deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) en contact avec frottement suivant un plan ( $\pi$ ). Soit  $\bar{f}_{P(S_1 \rightarrow S_2)}$  la densité surfacique, en un point  $P$  quelconque de la surface de liaison, des forces de contact de ( $S_1$ ) sur ( $S_2$ ).

Soit  $R(0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  un repère tel que le plan  $(0, \bar{x}, \bar{y})$  soit confondu avec le plan ( $\pi$ ), et l'axe  $(0, \bar{z})$  dirigé de ( $S_1$ ) vers ( $S_2$ ). La résultante générale du torseur d'action mécanique de contact de ( $S_1$ ) sur ( $S_2$ ) s'écrit :

$$\bar{R}_{(S_1 \rightarrow S_2)} = \bar{N}_{(S_1 \rightarrow S_2)} + \bar{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \bar{N} = \bar{N}_{(S_1 \rightarrow S_2)} & \text{effort normal} \\ \bar{T} = \bar{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)} & \text{effort tangentiel} \end{cases}$$

Premier cas : ( $S_2$ ) est immobile par rapport à ( $S_1$ ) :  $|\bar{T}| < f \cdot |\bar{N}|$

Deuxième cas : ( $S_2$ ) est animé d'un mouvement de translation rectiligne par rapport à ( $S_1$ ) :  $|\bar{T}| = f \cdot |\bar{N}|$

Remarque : La condition de maintien permanent du contact est :  $\bar{N}_{(S_1 \rightarrow S_2)} \cdot \bar{n} = 0$  (Cette équation traduit tout simplement que l'effort normal est dirigé de ( $S_1$ ) vers ( $S_2$ )).

### III. 3. Solides en contact ponctuel

Soient deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) en contact ponctuel en un point A. Soit ( $\pi$ ) le plan tangent commun en A à ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ). En fait le contact réel entre ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) a lieu sur un petit élément de surface dS contenant le point A.

Le torseur d'action mécanique de contact de ( $S_1$ ) sur ( $S_2$ ) s'écrit au point A :

$$\{\tau_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{R} = \bar{N} + \bar{T} \\ \bar{M}_A = \bar{M}_A^n + \bar{M}_A^t \end{array} \right\}$$

avec  $\begin{cases} \bar{N} : \text{effort normal} \\ \bar{T} : \text{effort tangentiel} \\ \bar{M}_A^n : \text{moment de pivotement} \\ \bar{M}_A^t : \text{moment de roulement} \end{cases}$

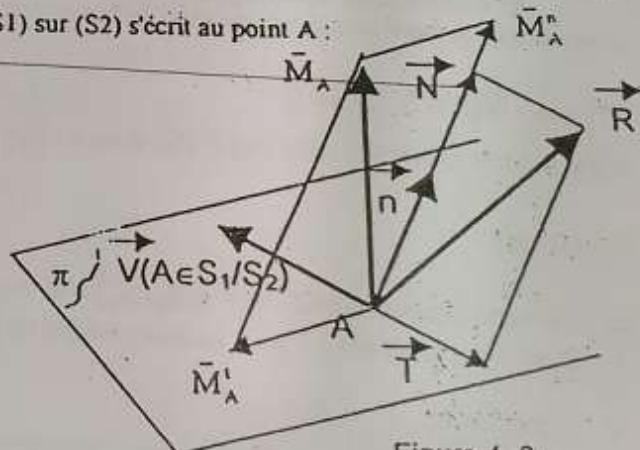


Figure 4.6

Considérons le torseur cinématique du mouvement de ( $S_2$ ) par rapport à ( $S_1$ ), défini au point A :

$$\{\nu_{(S_2 \rightarrow S_1)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}(S_2 / S_1) \\ \bar{V}(A \in S_2 / S_1) \end{array} \right\}$$

Posons :  $\bar{\Omega}(S_2 / S_1) = \bar{\Omega}_n(S_2 / S_1) + \bar{\Omega}_t(S_2 / S_1)$

où  $\bar{\Omega}_n(S_2 / S_1)$  est le vecteur rotation de pivotement (normal au plan ( $\pi$ )) et  $\bar{\Omega}_t(S_2 / S_1)$  (parallèle au plan ( $\pi$ )) est le vecteur rotation de roulement dans le mouvement de ( $S_2$ ) par rapport à ( $S_1$ ).

Rappelons que le vecteur vitesse de glissement  $\bar{V}(A \in S_2 / S_1)$  est parallèle au plan ( $\pi$ ).

Lorsque le vecteur vitesse de glissement ou le vecteur rotation de pivotement ou le vecteur rotation de roulement est nul ou pas, on a entre le torseur d'action mécanique de ( $S_1$ ) sur ( $S_2$ ) et le torseur cinématique du mouvement de ( $S_2$ ) par rapport à ( $S_1$ ) des relations analogues à celles mises en évidence dans les lois de Coulomb.

① Vecteur vitesse de glissement

⇒ 1<sup>er</sup> cas :  $\bar{v}(A \in S_1 / S_2) \neq \bar{0}$

$$\bar{v}(A \in S_2 / S_1) \wedge \bar{T}(S_1 \rightarrow S_2) = \bar{0}$$

$$\bar{v}(A \in S_2 / S_1) \bullet \bar{T}(S_1 \rightarrow S_2) < 0$$

$$|\bar{T}(S_1 \rightarrow S_2)| = f |\bar{N}(S_1 \rightarrow S_2)| \quad \text{où } f \text{ est le coefficient de frottement (ou d'adhérence) entre } (S_1) \text{ et } (S_2).$$

⇒ 2<sup>eme</sup> cas :  $\bar{v}(A \in S_1 / S_2) = \bar{0}$

$$|\bar{T}(S_1 \rightarrow S_2)| < f |\bar{N}(S_1 \rightarrow S_2)|$$

② Vecteur rotation de pivotement

⇒ 1<sup>er</sup> cas :  $\bar{\Omega}_n(S_2 / S_1) \neq \bar{0}$

$$\bar{\Omega}_n(S_2 / S_1) \bullet \bar{M}_A^n(S_1 \rightarrow S_2) < 0$$

$$|\bar{M}_A^n(S_1 \rightarrow S_2)| = \delta |\bar{N}(S_1 \rightarrow S_2)| \quad \text{où } \delta \text{ est le paramètre de résistance au pivotement entre } (S_1) \text{ et } (S_2). \\ \delta \text{ est homogène à une longueur.}$$

⇒ 2<sup>eme</sup> cas :  $\bar{\Omega}_n(S_2 / S_1) = \bar{0}$

$$|\bar{M}_A^n(S_1 \rightarrow S_2)| < \delta |\bar{N}(S_1 \rightarrow S_2)|$$

③ Vecteur rotation de roulement

⇒ 1<sup>er</sup> cas :  $\bar{\Omega}_t(S_2 / S_1) \neq \bar{0}$

$$\bar{\Omega}_t(S_2 / S_1) \wedge \bar{M}_A^t(S_1 \rightarrow S_2) = \bar{0}$$

$$\bar{\Omega}_t(S_2 / S_1) \bullet \bar{M}_A^t(S_1 \rightarrow S_2) < 0$$

$$|\bar{M}_A^t(S_1 \rightarrow S_2)| = \eta |\bar{N}(S_1 \rightarrow S_2)| \quad \text{où } \eta \text{ est le paramètre de résistance au roulement entre } (S_1) \text{ et } (S_2). \\ \eta \text{ est homogène à une longueur.}$$

⇒ 2<sup>eme</sup> cas :  $\bar{\Omega}_t(S_2 / S_1) = \bar{0}$

$$|\bar{M}_A^t(S_1 \rightarrow S_2)| < \eta |\bar{N}(S_1 \rightarrow S_2)|$$

④ Remarques :

⇒  $f, \delta, \eta$  : données pour des couples de matériaux.

Matériaux en contact		$\delta$ en mm
Rouleaux (bois sur bois)		0,5 à 1,5
Roue de wagon sur rail sec		0,5 à 1
Galet de pont roulant sur rail		0,5 à 0,7
Roue à bandage en fer sur chaussée empierrée		16 à 60
Pneu (auto ou camion) sur chaussée empierrée		10 à 20

Matériaux en contact		$\eta$ en mm
Acier trempé sur acier trempé		0,005 à 0,01
Fonte grise sur acier trempé		0,5
Fonte sur sol en bon état		10
Pneu sur sol en bon état		5 à 20

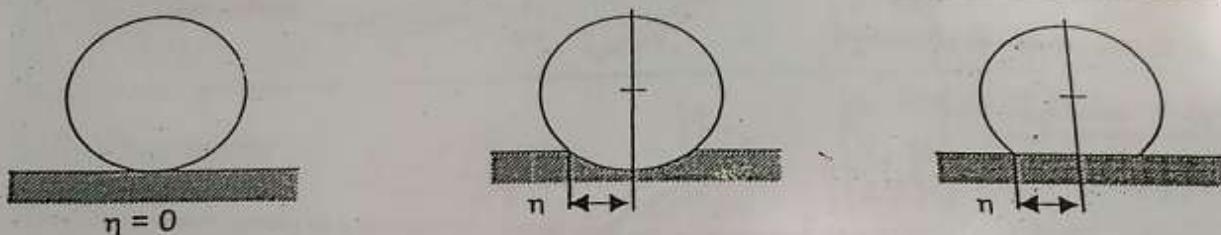


Figure 4. 7

⇒ La résistance au pivotement est en fait une résistance au frottement dans le mouvement de rotation.

⇒ Hypothèse du contact rigoureusement ponctuel

Dans cette hypothèse on suppose que le moment résultant  $\bar{M}_A(S_1 \rightarrow S_2)$  est nul. Cette hypothèse est souvent justifiée et facilite grandement les calculs.

⇒ Remarque très importante : Arc-boutement

Si quelles que soient les intensités des actions mécaniques appliquées pour provoquer le glissement en un point de contact, on trouve toujours un effort tangentiel  $|\bar{T}| < f \cdot |\bar{N}|$ , on dit qu'il y a, pour ces actions mécaniques données, ARC-BOUTEMENT en ce point, et le mouvement ne se produira pas.

### III. 4. Liaisons parfaites (on néglige $f, \delta, \eta$ )

Pour l'étude de ces liaisons, nous écrirons le torseur statique de la façon suivante :

$$\{\tau\} = \begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \bar{R} = X\bar{x} + Y\bar{y} + Z\bar{z} \\ \bar{M}_O = L\bar{x} + M\bar{y} + N\bar{z} \end{cases}$$

Pour chaque liaison type normalisée (voir tableau des liaisons page suivante) on écrira le torseur statique correspondant qui sera utilisé dans les calculs.

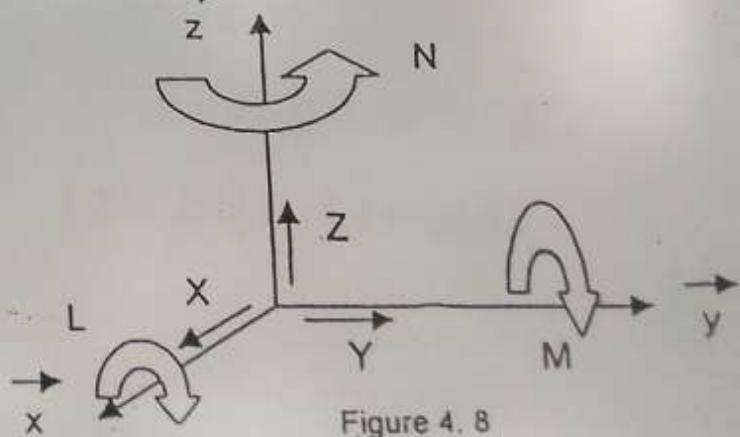


Figure 4. 8

Il faut bien noter que chaque élément du torseur correspond à un axe du repère.

# LIAISONS PARFAITES ET TORSEURS STATIQUES ASSOCIES

N <sup>e</sup> Degré de liberté	Désignation et définition	Schématisation	Torseur statique $(\tau(S_1 \rightarrow S_2))$	Repère idéal
		plane      perspective		
0	Liaison encastrement ou liaison fixe		 $\begin{cases} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{cases}$	
1	Liaison Pivot		 $\begin{cases} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{cases}$	L'axe x du repère idéal passe par l'axe de la liaison pivot. $\forall P \in \text{axe liaison}$
1	Liaison Glissière:		 $\begin{cases} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{cases}$	axe x du repère idéal passe par l'axe de la liaison glissière $\forall P$
1	Liaison hélicoïdale		 $\begin{cases} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{cases}$	Idem $L = \text{pas} \times X$ $\forall P \in \text{axe liaison}$
2	Liaison Pivot Glissant		 $\begin{cases} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{cases}$	L'axe x du repère idéal passe par l'axe de la liaison pivot glissant. $\forall P \in \text{axe liaison}$
2	liaison Sphérique à doigt		 $\begin{cases} X & 0 \\ Y & M \\ Z & 0 \end{cases}$	L'axe z du repère idéal passe par l'axe du doigt. L'axe x est perpendiculaire au plan de la rainure. Le point de réduction du torseur cinématique est le point O=C centre de la sphère.
3	liaison Rotule ou Sphérique		 $\begin{cases} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{cases}$	Le point de réduction du torseur statique est le point C centre de la sphère. Le repère idéal passe par ce point.

N°	Degré de liberté	Désignation et définition	Schématisation	Torseur statique $\{T(S_1 \rightarrow S_2)\}$	Repère idéal
			plane perspective		
3	1 liaison Appui Plan			$\begin{cases} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{cases}$	L'axe z est perpendiculaire au plan $\forall P$
4	liaison Linéaire Annulaire			$\begin{cases} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{cases}$	l'axe x est l'axe du cylindre. C centre de la sphère.
4	Liaison Linéaire Rectiligne			$\begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{cases}$	Axe z normale au plan tangent. L'axe x est porté par la droite de contact $\forall P \in \text{axe } \bar{x}$
5	Liaison Ponctuelle			$\begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{cases}$	Axe x normale au plan tangent. $\forall P \in \text{axe } \bar{x}$

### III. 5. Schéma cinématique minimal d'un mécanisme

C'est une modélisation du mécanisme à partir des liaisons types auxquelles sont associés les différents torseurs statiques.

Cette démarche est indispensable pour résoudre facilement les problèmes de mécanique.

N.B. : les liaisons doivent être étudiées les unes indépendamment des autres.

① Exemple : Vérin

$$L_1 \text{ liaison annulaire : } \begin{cases} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{cases}$$

$$L_2 \text{ liaison pivot glissant : } \begin{cases} 0 & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{cases}$$

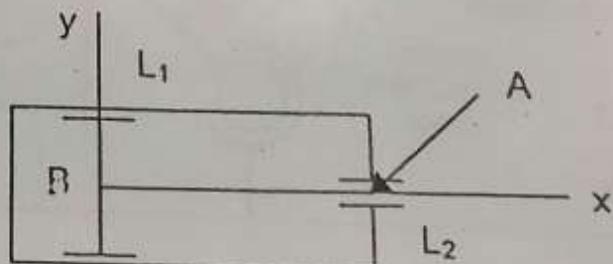


Figure 4. 9

∅ Remarque

On tolère une modification des symboles des liaisons afin de rendre les schémas plus explicites.

## IV. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (PFS) : CAS D'UN SOLIDE

### IV. 1. Principe fondamental de la statique (PFS) appliqué à un solide (S)

Pour qu'un solide (S) soit en équilibre par rapport à un repère (R), il doit être immobile dans ce repère.

Du point de vue mécanique, on dira que le torseur associé aux actions mécaniques extérieures à ce solide doit être nul.

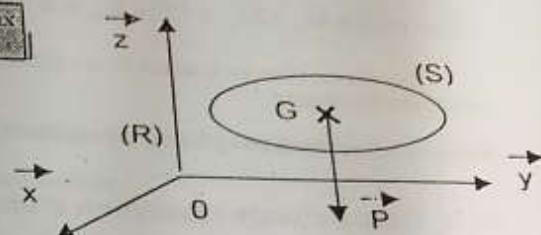
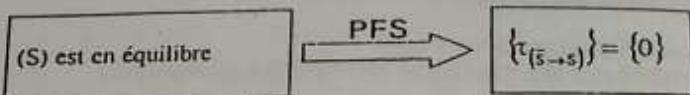
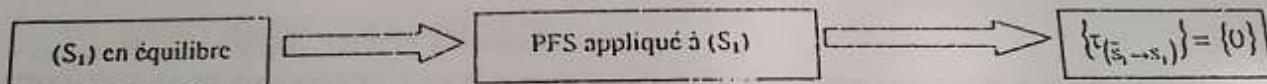


Figure 4. 10

$\{ \tau_{(S-S)} \} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{(S-S)} \\ \bar{M}_{A(S-S)} \end{Bmatrix}$  est encore appellé « torseur statique » d'action mécanique de (S) sur (S)

### IV. 2. Exemple :  tude de l'équilibre de ( $S_1$ ) (cf. figure 4.5)

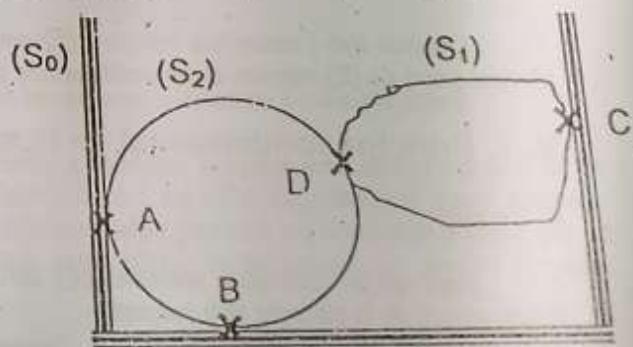


#### ① – Bilan des actions extérieures à (S<sub>1</sub>)

Remarque : tous les torseurs doivent être exprimés au même point. Nous choisissons le point C par exemple.

- action de la pesanteur :  $\{ \tau_{(f-S_1)} \} =_{G_1} \begin{Bmatrix} m_1 \bar{g} \\ \bar{0} \end{Bmatrix} =_{C} \begin{Bmatrix} m_1 \bar{g} \\ \overrightarrow{CG_1} \wedge m_1 \bar{g} \end{Bmatrix}$

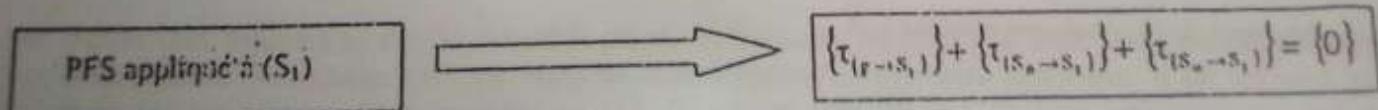
- action de contact en C :  $\{ \tau_{C(S_0 \rightarrow S_1)} \} =_{C} \begin{Bmatrix} \bar{R}_{C(S_0 \rightarrow S_1)} \\ \bar{M}_{C(S_0 \rightarrow S_1)} \end{Bmatrix} =_{C} \begin{Bmatrix} \bar{R}_C \\ \bar{M}_C \end{Bmatrix}$



- action de contact en D :  $\{ \tau_{D(S_2 \rightarrow S_1)} \} =_{D} \begin{Bmatrix} \bar{R}_{D(S_2 \rightarrow S_1)} \\ \bar{M}_{D(S_2 \rightarrow S_1)} \end{Bmatrix} =_{C} \begin{Bmatrix} \bar{R}_D \\ \bar{M}_D + \overrightarrow{CD} \wedge \bar{R}_D \end{Bmatrix}$

Figure 4. 11

#### ② – Application du Principe Fondamental de la Statique (PFS)   (S<sub>1</sub>)



## © - Résolution du problème

L'écriture du PFS conduit aux deux équations vectorielles suivantes :

$$m_1 \bar{g} + \bar{R}_C + \bar{R}_D = \bar{0} \quad \longrightarrow \quad 3 \text{ équations algébriques dans } (R) = (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

$$\overrightarrow{CG_1} \wedge m_1 \bar{g} + \bar{M}_C + \bar{M}_D + \overrightarrow{CD} \wedge \bar{R}_D = \bar{0} \quad \longrightarrow \quad 3 \text{ équations algébriques dans } (R)$$

On obtient donc un système de six (6) équations algébriques dont la résolution permet de déterminer les inconnues demandées.

Remarque : on obtient au plus six (6) équations algébriques indépendantes.

## IV. 3. Démarche de résolution d'un problème de statique du solide (Résumé)

① Schéma du système étudié

② liste des données et inconnues

③ bilan des actions extérieures sur (S) étudié (les représenter sur le schéma)

④ PFS appliqué à (S)  $\longrightarrow$  6 équations algébriques « indépendantes » (au plus)

⑤ Résolution du problème  $\longrightarrow$  détermination des inconnues demandées

## V. STATIQUE D'UN SYSTEME DE SOLIDES OU ENSEMBLE MATERIEL (E)

### V. 1. Définition

On dira que l'ensemble matériel (E) est en équilibre par rapport à un repère (R) si, au cours du temps, chaque point de (E) conserve une position fixe par rapport au repère (R).

### V. 2. Principe fondamental de la statique

① Enoncé

Pour qu'un ensemble matériel (E) soit en équilibre, il faut que pour chacun des solides, le principe fondamental de la statique soit respecté.

Si  $(E) = \sum_i (S_i)$  alors

$$(E) \text{ en équilibre} \longrightarrow \left\{ \tau_{(S_i \rightarrow S_i)} \right\} = \{0\}$$

② Théorèmes généraux de la statique

En écrivant qu'en tout point de l'espace, la résultante générale et le moment résultant du torseur associé aux actions mécaniques extérieures au sous ensemble matériel ( $S_i$ ) sont nuls, on obtient deux théorèmes appelés théorèmes généraux de la statique.

$\Rightarrow$  théorème de la résultante statique :  $\bar{R}_{(\bar{S}_i \rightarrow S_i)} = \bar{0}$

$\Rightarrow$  théorème du moment statique :  $\bar{M}_{A(\bar{S}_i \rightarrow S_i)} = \bar{0} \quad \forall A$

① Principe des actions réciproques

Soient  $(S_1)$  et  $(S_2)$  deux solides disjoints appartenant à l'ensemble  $(E)$  en équilibre. L'action mécanique de  $(S_1)$  sur  $(S_2)$  est opposée à l'action mécanique de  $(S_2)$  sur  $(S_1)$  et on peut écrire :

$$\{\tau_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} + \{\tau_{(S_2 \rightarrow S_1)}\} = \{0\}$$

ou encore

$$\{\tau_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} = -\{\tau_{(S_2 \rightarrow S_1)}\}$$

### V. 3. Hyperstatisme des mécanismes : h

Cette étude va nous permettre de vérifier que le nombre d'équations de la statique est le même que le nombre d'inconnues. Dans le cas contraire il faudra chercher des équations supplémentaires.

② Nombre d'équations algébriques indépendantes ( $E_{st}$ ) introduites par n solides en équilibre : r,

Exemple : soient deux solides en équilibre  $(S_1)$  et  $(S_2)$ .

on pose :  $(E) = (S_1) \cup (S_2)$  et donc  $(\bar{E}) = (S_n)$ .

- |                        |                   |   |
|------------------------|-------------------|---|
| $(E)$ est en équilibre | $\longrightarrow$ | les différents solides $(S_i)$ sont en équilibre.                                     |
| $(S_1)$ en équilibre   | $\longrightarrow$ | $\{\tau_{(\bar{E} \rightarrow S_1)}\} + \{\tau_{(S_2 \rightarrow S_1)}\} = \{0\}$     |
| $(S_2)$ en équilibre   | $\longrightarrow$ | $\{\tau_{(\bar{E} \rightarrow S_2)}\} + \{\tau_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} = \{0\}$     |
| $(E)$ en équilibre     | $\longrightarrow$ | $\{\tau_{(\bar{E} \rightarrow S_1)}\} + \{\tau_{(\bar{E} \rightarrow S_2)}\} = \{0\}$ |

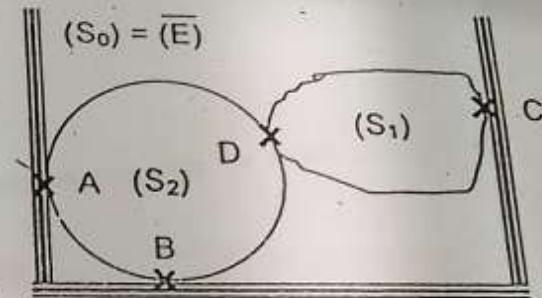


Figure 4.12

On constate que la troisième équation dépend des deux premières (c'est leur somme).

→ Trois solides en équilibre ne donnent que deux équations indépendantes statiques de torseurs.

Nous généraliserons en écrivant que n solides en équilibre donnent au maximum  $6(n-1)$  équations de la statique algébriquement indépendantes.

$$r_s \leq 6(n-1)$$

③ Nombre d'inconnues statiques ( $I_{st}$ ) introduites par les N liaisons entre n solides :  $N_s$

Exemple :  $(S)$  en équilibre

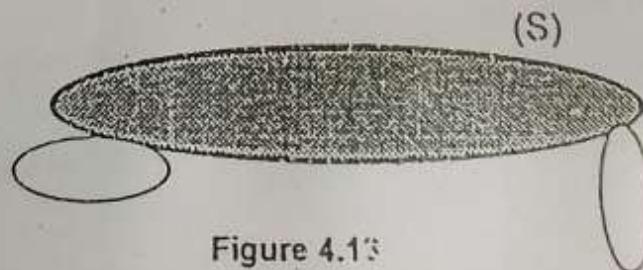


Figure 4.13

Théoriquement une liaison introduit au maximum 6 inconnues statiques. On peut généraliser en écrivant pour N liaisons :

$$N_s \leq 6N$$

En effet certaines hypothèses simplificatrices introduisent des zéros (0) dans les torseurs statiques des liaisons (voir tableau en page 45).

### ④ Détermination du degré d'hyperstatisme : $h$

Par définition :

$$h = N_s - r_s$$

Plusieurs cas peuvent se présenter :

⇒ si  $h = 0$  : le problème est dit isostatique

Résolution possible par application du PFS seul

⇒ si  $h > 0$  : le problème est dit hyperstatique

Dans ce cas il faut rechercher les équations supplémentaires dans les domaines suivants :

- Mécanique :
  - Lois de coulomb (liaisons pas parfaites).
  - Dispositions constructives.

- Résistance des matériaux → introduction des équations de déformation.

⇒ Si  $h < 0$  : le problème est dit hypostatique

Du point de vue mécanique, un tel mécanisme est mal défini.

Exemple : table avec seulement deux pieds.

## VI. STATIQUE GRAPHIQUE

### VI. 1. Introduction

La résolution de problèmes de statique plane peut généralement être obtenue par une méthode graphique, sous réserve toutefois que le mécanisme soit isostatique. Ce paragraphe expose les principes de cette méthode, en se limitant à l'utilisation de propriétés élémentaires :

- représentation des actions mécaniques par des glisseurs :
- étude de l'équilibre de pièces ou groupes de pièces pouvant se ramener à deux ou à trois glisseurs.

Le traitement d'un problème de statique par une méthode graphique suppose une analyse préalable de l'ordre dans lequel doivent être étudiés les différents sous-ensembles ; en effet l'application d'une méthode graphique à l'étude de l'équilibre d'une pièce doit permettre la détermination partielle ou totale des actions qui lui sont appliquées, afin d'utiliser ces résultats dans l'étude d'une autre pièce, et de proche en proche résoudre l'ensemble du problème.

Dans le cas d'une étude plane, le traitement graphique de l'équilibre d'une pièce est équivalent à l'application du PFS, donc à l'écriture des trois équations scalaires associées. Par conséquent une telle construction ne permettra une détermination complète des efforts appliqués que si le nombre d'inconnues est au plus égal à trois.

### VI. 2. Méthodologie de résolution

- ⇒ Rechercher, à partir du graphe de structure, les pièces ou sous-ensembles de pièces soumis à deux glisseurs : puis l'application du PFS permet de conclure que ces glisseurs sont directement opposés.
- ⇒ Rechercher, toujours en s'appuyant sur le graphe de structure, les pièces ou sous-ensembles de pièces soumis à un nombre quelconque d'efforts, mais ne faisant apparaître que trois inconnues. Il est toujours possible, dans ces conditions, de se ramener au cas d'équilibre sous l'action de trois glisseurs, qui doivent être concourantes (ou parallèles) et de somme vectorielle nulle.

### **VI. 3. Avantages et inconvénients de la méthode graphique**

- ⇒ Il est à noter que l'emploi d'une méthode graphique de résolution présente les avantages :
  - d'une résolution progressive et souvent rapide ;
  - d'une représentation des efforts au fur et à mesure de leur détermination, ce qui permet souvent de valider les résultats.
- La précision de ces derniers dépend de la rigueur de la construction graphique.
- ⇒ Par contre, une telle étude n'est conduite que pour une position particulière du mécanisme, ce qui la rend peu pratique dans le cas des mécanismes mobiles. D'autre part, elle ne permet pas d'analyser l'influence des différents paramètres géométriques sur les valeurs des efforts.
- ⇒ Enfin, son emploi nécessite une certaine expérience pour déterminer les pièces ou ensembles de pièces à étudier, ainsi que l'ordre de cette étude.

## **VII. APPLICATIONS : ARC-BOUTEMENT - BASCULEMENT - COINCÉMENT**

**Voir TD**

# Chap. 5 - CINETIQUE

## TABLE DES MATIERES

- Répartition des masses
- Torseur cinétique
- Torseur dynamique
- Energie cinétique

## I. REPARTITION DES MASSES

### I. 1. Masse volumique – Masse

Considérons un solide ( $S_1$ )

Découpons-le en petits éléments de volume  $dV$

La quantité de matière contenue dans l'élément de volume centré autour du point  $P$  est notée  $dm$  – cette masse élémentaire – caractérise les interactions du solide avec les autres solides (la Terre notamment) par effet gravitationnel et – comme on le verra plus tard – caractérise aussi les effets d'inertie

La masse volumique est simplement le rapport entre la masse de l'élément par son volume

$$\rho(P) = \frac{dm}{dV} \Leftrightarrow dm = \rho(P).dV$$

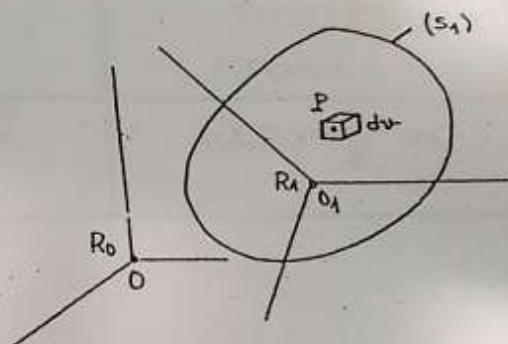


Figure 5.1

La masse volumique est une fonction du point en général. Lorsque le solide est homogène, elle est uniforme. La masse est une grandeur extensive, aussi la masse totale du solide est elle égale à la somme des masses de chacune de ses parties :

$$M = \iiint_{S_1} dm = \iiint_{S_1} \rho(P).dV$$

$$M = \int_{S_1} dm$$

que l'on notera indifféremment par la suite, que le domaine d'intégration ( $S_1$ ) soit volumique (solide tridimensionnel dans  $\mathbb{R}^3$ ) ou surfacique (solide bidimensionnel) ou linéique (solide monodimensionnel)

### I. 2. Centre de gravité

#### ① Définition

Le centre de gravité du solide ( $S_1$ ) – noté  $G$  – est le barycentre des éléments de volume  $dV$  pondérés par la masse volumique  $\rho$ .

$$\int_{S_1} G\ddot{P}.dm = \bar{0}$$

C'est donc l'équibarycentre des éléments de masse  $dm$  :

#### ② Détermination

On peut en calculer les coordonnées – dans un repère fixe ou mobile – en écrivant :  $G\ddot{P} = O_1\ddot{P} - O_1\ddot{G}$

$$\int_{S_1} G\bar{P} \cdot dm = \int_{S_1} O_1 \bar{P} \cdot dm - O_1 \bar{G} \int_{S_1} dm = 0$$

Alors :

$$O_1 \bar{G} = \frac{\int_{S_1} O_1 \bar{P} \cdot dm}{M}$$

Et donc :

$$S_{yOz} = \int_{S_1} x \cdot dm, S_{xOz} = \int_{S_1} y \cdot dm, S_{xOy} = \int_{S_1} z \cdot dm$$

Les intégrales ( $S_1$ ) respectivement par rapport aux plans ( $Oyz$ ), ( $Onz$ ) et ( $Ony$ ) sont les moments statiques du solide

### 3 Théorèmes de Guldin

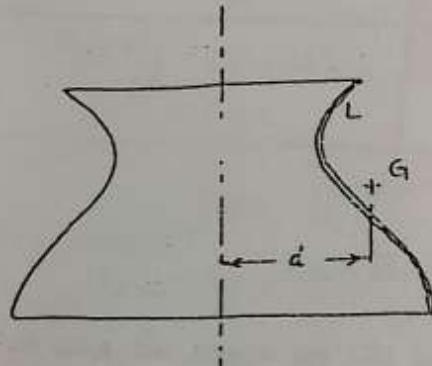


Figure 5.2

Considérons un solide linéaire plan et homogène, de longueur  $L$  en rotation autour d'un axe dont la distance au centre de gravité  $G$  est notée  $d$ . La surface de révolution ainsi construite possède une aire totale notée  $A$  telle que :

$$A = 2\pi d \times L$$

Exemple : quelle est la position du CdG d'un demi cercle ?

$$d = \frac{4\pi R^2}{2\pi \times \pi R} = \frac{2R}{\pi}$$

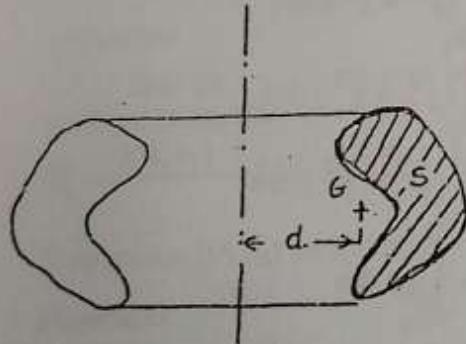


Figure 5.3

Considérons de même un solide surfacique, plan et homogène, d'aire  $S$  en rotation autour d'un axe dont la distance au centre de gravité  $G$  est notée  $d$ . Le volume de révolution ainsi construit possède un volume total noté  $V$  tel que :

$$V = 2\pi d \times A$$

### I. 3. Moments d'inertie

#### ① Définitions

Inertie d'un solide ( $S_1$ ) par rapport à un plan ( $\pi$ )	Inertie d'un solide ( $S_1$ ) par rapport à une droite ( $\Delta$ )	Inertie d'un solide ( $S_1$ ) par rapport à un point ( $A$ )

Figure 5.4

Figure 5.5

Figure 5.6

$$I(\pi, S_1) = \int_{S_1} d^2 dm$$

$$I(\Delta, S_1) = \int_{S_1} h^2 dm$$

$$I(A, S_1) = \int_{S_1} r^2 dm$$

#### 2 Moments et produits d'inertie

Considérons le solide ( $S_1$ ) dans le repère ( $R_0$ ) = {0, xo, yo, zo}

Calculons les moments d'inertie et les produits d'inertie de ( $S_1$ ) par rapport aux axes du repère :

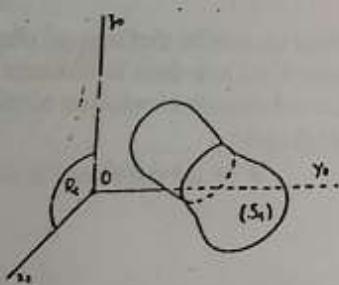


Figure 5.7

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{Ox} = \int_{S_1} (y^2 + z^2) dm \\ I_{Oy} = \int_{S_1} (z^2 + x^2) dm \\ I_{Oz} = \int_{S_1} (x^2 + y^2) dm \\ I_{Oyz} = \int_{S_1} yz dm \\ I_{Ozx} = \int_{S_1} zx dm \\ I_{Oxy} = \int_{S_1} xy dm \end{array} \right.$$

où x, y, z sont les coordonnées du point courant

L'inertie d'un solide par rapport à une droite est égale à la somme des inerties par rapport à deux plans perpendiculaires contenant la droite.

L'inertie d'un solide par rapport à un point est égale à la somme des inerties par rapport à trois plans perpendiculaires contenant le point.

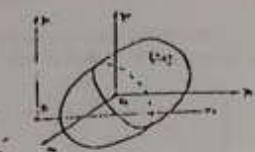


Figure 5.8

On considère un solide ( $S_1$ ) dont le centre de gravité est désigné par  $G$  et deux systèmes d'axes parallèles  $(O,x,y,z)$  et  $(G,x,y,z)$ .

Les formules de Huyghens permettent de calculer les inerties par rapport à un système d'axes quand on connaît les inerties par rapport à l'autre système d'axes.

Désignons par  $x,y,z$  les coordonnées de  $P$  dans  $(O,x,y,z)$  et par  $x',y',z'$  les coordonnées de  $P$  dans  $(G,x,y,z)$  alors :

$$I_{Ox} = \int_{S_1} (y^2 + z^2) dm$$

L'inertie par rapport à  $Ox$  est par exemple :

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \\ z = c + z' \end{cases}$$

Si les coordonnées de  $G$  dans  $(O,x,y,z)$  sont notées  $a,b,c$  alors de façon générale :

$$I_{Ox} = \int_{S_1} ((b+y')^2 + (c+z')^2) dm = (b^2 + c^2) \int_{S_1} dm + 2b \int_{S_1} y' dm + 2c \int_{S_1} z' dm + \int_{S_1} (y'^2 + z'^2) dm$$

Donc :

$$\int_{S_1} y' dm \text{ et } \int_{S_1} z' dm$$

Comme  $G$  est centre de gravité, les moments statiques  $\int_{S_1} y' dm$  et  $\int_{S_1} z' dm$  sont nuls :

La quantité  $(b^2 + c^2)$  n'est rien d'autre que la distance  $d$  de l'axe  $Gx$  à l'axe  $Ox$  élevée au carré

$$I_{Ox} = I_{Gx} + d^2 \times M$$

Par conséquent :  $I_{Ox} \geq I_{Gx}$  ; c'est donc que l'inertie du solide par rapport à un axe passant par son centre de gravité est minimale.

Pour les produits d'inertie :

$$I_{Oxy} = \int_{S_1} xy dm = \int_{S_1} (a+x')(b+y') dm = a \int_{S_1} y' dm + b \int_{S_1} x' dm + ab \int_{S_1} dm + \int_{S_1} x'y' dm$$

Par exemple :

$$\text{soit } I_{Oxy} = I_{Gxy} + ab \times M$$

#### ④ Opérateur d'inertie

##### Définition

Soit  $(S_1)$  solide dans le repère  $(R0)$  et soit  $A$  un point quelconque – à tout vecteur  $\vec{U}$  de l'espace on applique la transformation telle que :

$$\vec{U} \xrightarrow{J(A,S_1)} J(A,S_1). \vec{U} = \int_{S_1} \vec{AP} \wedge (\vec{U} \wedge \vec{AP}) dm$$

L'opérateur  $J(A,S_1)$  est appelé opérateur d'inertie du solide  $(S_1)$  au point  $A$ .

##### Propriétés

$$J(A,S_1).(\lambda_1 \vec{U}_1 + \lambda_2 \vec{U}_2) = \lambda_1 J(A,S_1). \vec{U}_1 + \lambda_2 J(A,S_1). \vec{U}_2$$

L'opérateur  $J(A,S_1)$  est linéaire : on peut donc lui associer une matrice dans un système de projection choisi.

L'opérateur  $J(A, S_1)$  est symétrique :

$$\bar{U}_2 J(A, S_1) \bar{U}_1 = \bar{U}_1 J(A, S_1) \bar{U}_2$$

la matrice associée est donc elle-même symétrique. La matrice associée à  $J(A, S_1)$  est la suivante dans le système d'axes  $\{A, x, y, z\}$  :

$$J(A, S_1) = \begin{pmatrix} \int_{S_1} (y^2 + z^2) dm & - \int_{S_1} xy dm & - \int_{S_1} yz dm \\ - \int_{S_1} xy dm & \int_{S_1} (x^2 + z^2) dm & - \int_{S_1} zx dm \\ - \int_{S_1} yz dm & - \int_{S_1} zx dm & \int_{S_1} (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix}_{\{Axyz\}}$$

$$J(A, S_1) = \begin{pmatrix} I_{Ax} & -I_{Axy} & -I_{Axz} \\ -I_{Axy} & I_{Ay} & -I_{Ayz} \\ -I_{Axz} & -I_{Ayz} & I_{Az} \end{pmatrix}_{\{Axyz\}}$$

on note :

#### Axes principaux

La matrice  $J(A, S_1)$  étant symétrique elle admet une base de 3 vecteurs propres orthogonaux. Dans cette base la matrice est diagonale. On appelle repère principal d'inertie tout trièdre  $\{A, x_1, y_1, z_1\}$  dont les axes sont orientés par les vecteurs propres (les produits d'inertie sont nuls dans cette base).

$$J(A, S_1) = \begin{pmatrix} I_{Ax_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ay_1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Az_1} \end{pmatrix}_{\{Ax_1y_1z_1\}}$$

Le trièdre principal d'inertie  $\{G, x_1, y_1, z_1\}$  ayant le centre de gravité G comme origine est appelé trièdre central d'inertie (les moments d'inertie y sont minimaux).

#### Inertie par rapport à une droite

Soit  $(S_1)$  un solide dans le repère  $(R_0)$  et soit A un point quelconque auquel est défini l'opérateur d'inertie  $J(A, S_1)$  : le moment d'inertie par rapport à toute droite  $(\Delta)$  orientée par le vecteur  $\bar{U}$  et passant par A est égal à :

$$I(\Delta, S_1) = \bar{U} J(A, S_1) \bar{U}$$

## II. TORSEUR CINETIQUE

### II. 1. Définition

#### 1) Cas du point matériel (rappel)

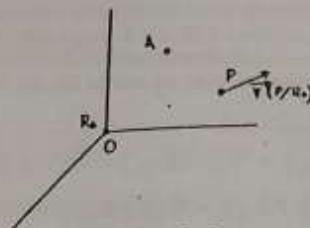


Figure 5.9

Soit  $P$  un point matériel de masse  $M$  en mouvement dans le repère  $(R_0)$  à l'instant  $t$  à la vitesse  $\vec{v}(P/R_0)$ , on définit :

La quantité de mouvement :

$$\vec{q}(P/R_0) = M\vec{v}(P/R_0)$$

Le moment cinétique du point par rapport à un point  $A$  quelconque :

$$A\bar{P} \sim M\vec{v}(P/R_0)$$

#### 2) Cas du solide indéformable

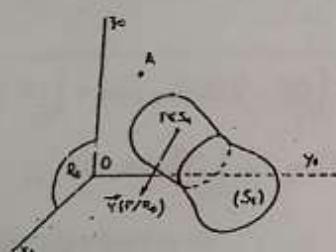


Figure 5.10

Ces concepts se généralisent au cas d'un solide indéformable. Soit  $(S_1)$  un solide de masse  $M$  en mouvement dans le repère  $(R_0)$ . A chaque instant, on définit :

La quantité de mouvement, appelée aussi résultante cinétique :

$$\bar{R}_C(S_1/R_0) = \int_{S_1} \vec{v}(P/R_0) \cdot dm$$

Le moment cinétique du point par rapport à un point  $A$  quelconque :

$$\bar{o}(A, S_1/R_0) = \int_{S_1} A\bar{P} \wedge \vec{v}(P/R_0) \cdot dm$$

$$(CS_1/R_0)_A = \begin{cases} \bar{R}_C(S_1/R_0) \\ \bar{o}(A, S_1/R_0) \end{cases}$$

Le torsur cinétique est désigné par

### II. 2. Résultante cinétique

$$\bar{R}_C(S_1/R_0) = \int_{S_1} \vec{v}(P/R_0) \cdot dm$$

La résultante cinétique d'un solide s'écrit : , compte tenu que le centre de gravité est barycentre des masses, il est naturel d'écrire :

$$\bar{R}_C(S_1/R_0) = \vec{v}(G/R_0) \int_{S_1} dm + \bar{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \int_{S_1} G\bar{P} \cdot dm$$

Par conséquent :

$$\int_{S_1} dm = M \quad \text{et} \quad \int_{S_1} G\bar{P} \cdot dm = \bar{0}$$

Comme , il reste :  $\bar{R}_C(S_1/R_0) \sim M\vec{v}(G/R_0)$

La résultante cinétique du solide - ou sa quantité de mouvement - dans son mouvement dans  $(R_0)$  est égale au produit de sa masse par la vitesse de son centre de gravité.

## II. 3. Moment cinétique – 1<sup>er</sup> théorème de Koenig

Le moment cinétique du solide ( $S_1$ ) dans son mouvement dans ( $R_0$ ) calculé au point A quelconque est donné

$$\tilde{\sigma}(A, S_1 / R_0) = \int_{S_1} \bar{A}\bar{P} \wedge \tilde{V}(P / R_0) dm$$

par l'expression :

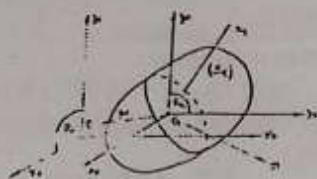


Figure 5.11

Considérons le repère ( $R_0$ ) de centre G et dont les axes sont parallèles à ( $R_0$ ) – il est en translation par rapport à  $R_0$  – Le mouvement de ( $S_1$ ) dans ( $R_0$ ) s'appelle "mouvement du solide autour de son centre de gravité".

Alors :

$$\tilde{V}(P / R_0) = \tilde{V}(P / R_G) + \tilde{V}(P \in R_G / R_0)$$

$$\text{Soit : } \tilde{V}(P / R_0) = \tilde{V}(P / R_G) + \tilde{V}(G / R_0)$$

$$\text{Puisque: } \tilde{\Omega}(R_G / R_0) = \bar{0}$$

Là encore on peut faire jouer au centre de gravité son rôle privilégié.

$$\tilde{\sigma}(A, S_1 / R_0) = \int_{S_1} (\bar{A}\bar{G} + \bar{G}\bar{P}) \wedge (\tilde{V}(P / R_G) + \tilde{V}(G / R_0)) dm$$

Ainsi :

Développons :

$$\tilde{\sigma}(A, S_1 / R_0) = \bar{A}\bar{G} \wedge \int_{S_1} \tilde{V}(P / R_G) dm + \bar{A}\bar{G} \wedge \tilde{V}(G / R_0) \int_{S_1} dm + \int_{S_1} \bar{G}\bar{P} \wedge \tilde{V}(P / R_G) dm + \int_{S_1} \bar{G}\bar{P} dm \wedge \tilde{V}(G / R_0)$$

$$\text{avec : } \int_{S_1} \tilde{V}(P / R_G) dm = \int_{S_1} \tilde{\Omega}(S_1 / R_G) \wedge \bar{G}\bar{P} dm = \tilde{\Omega}(S_1 / R_G) \wedge \int_{S_1} \bar{G}\bar{P} dm = \bar{0}$$

$$M = \int_{S_1} dm \quad \text{et} \quad \int_{S_1} \bar{G}\bar{P} dm = \bar{0}$$

$$\text{Il reste : } \tilde{\sigma}(A, S_1 / R_0) = \tilde{\sigma}(G, S_1 / R_G) + \bar{A}\bar{G} \wedge M\tilde{V}(G / R_0)$$

### théorème de Koenig

Le moment cinétique de ( $S_1$ ) dans son mouvement dans ( $R_0$ ) calculé en un point A quelconque est égal à la somme du moment cinétique de ( $S_1$ ) autour de son centre de gravité et du moment en A de la quantité de mouvement de ( $S_1$ ).

On peut calculer le moment cinétique du solide dans son mouvement autour de son centre de gravité grâce à l'opérateur d'inertie.

$$\tilde{\sigma}(G, S_1 / R_G) = \int_{S_1} \bar{G}\bar{P} \wedge \tilde{V}(P / R_0) dm = \int_{S_1} \bar{G}\bar{P} \wedge (\tilde{\Omega}(S_1 / R_G) \wedge \bar{G}\bar{P}) dm$$

En effet :

$$\text{D'où : } \tilde{\sigma}(G, S_1 / R_G) = J(G, S_1) \cdot \tilde{\Omega}(S_1 / R_G) = J(G, S_1) \cdot \tilde{\Omega}(S_1 / R_0)$$

$$\text{Le théorème de Koenig s'écrit donc aussi : } \tilde{\sigma}(A, S_1 / R_0) = J(G, S_1) \cdot \tilde{\Omega}(S_1 / R_0) + \bar{A}\bar{G} \wedge M\tilde{V}(G / R_0)$$

## II. 4. Torseur cinétique d'un ensemble matériel

Soit ( $S$ ) un ensemble matériel de  $N$  solides ( $S_1$ ). Le torseur cinétique de l'ensemble ( $S$ ) est simplement la somme des torseurs de chacun des solides – réduits au même point naturellement –

$$(CS / R_0)_A = \sum_{k=1}^N (CS_k / R_0)_A$$

### III. TORSEUR DYNAMIQUE

#### III. 1. Définition

##### ① Cas du point matériel (rappel)

Soit  $P$  un point matériel de masse  $M$  en mouvement dans le repère  $(R_0)$  à l'instant  $t$ ,  
l'accélération  $\bar{\Gamma}(P/R_0)$ , on définit

La quantité d'accélération :	Le moment dynamique par rapport à un point A quelconque :
$M\bar{\Gamma}(P/R_0)$	$A\bar{P} \wedge M\bar{\Gamma}(P/R_0)$

##### ② Cas du solide indéformable

Soit  $(S_1)$  un solide en mouvement dans le repère  $(R_0)$ , on définit

La résultante dynamique :	Le moment dynamique en A :
$\bar{R}_D(S_1/R_0) = \int_{S_1} \bar{\Gamma}(P/R_0) dm$	$\delta(A, S_1/R_0) = \int_{S_1} A\bar{P} \wedge \bar{\Gamma}(P/R_0) dm$

Le torseur dynamique est désigné par

$$(DS_1/R_0)_A = \begin{cases} \bar{R}_D(S_1/R_0) \\ \delta(A, S_1/R_0) \end{cases}_A$$

#### III. 2. Résultante dynamique

La résultante dynamique d'un solide s'écrit :

$$\bar{R}_D(S_1/R_0) = \int_{S_1} \bar{\Gamma}(P/R_0) dm = \int_{S_1} \left( \frac{d\bar{V}}{dt}(P/R_0) \right)_{R_0} dm$$

$$\bar{R}_D(S_1/R_0) = \left( \frac{d}{dt} \int_{S_1} \bar{V}(P/R_0) dm \right)_{R_0} = \left( \frac{d\bar{R}_C(S_1/R_0)}{dt} \right)_{R_0}$$

Soit encore :

La résultante dynamique est la dérivée de la résultante cinétique.

$$\bar{R}_D(S_1/R_0) = \left( \frac{d}{dt} (M\bar{V}(G/R_0)) \right)_{R_0}$$

Donc : et donc :  $\bar{R}_D(S_1/R_0) = M\bar{\Gamma}(G/R_0)$

La résultante dynamique d'un solide  $(S_1)$  est égale au produit de la masse par l'accélération du centre de gravité.

#### III. 3. Moment dynamique

Le moment dynamique du solide  $(S_1)$  dans son mouvement dans  $(R_0)$  calculé au point A quelconque est donné par l'expression :

$$\delta(A, S_1/R_0) = \int_{S_1} A\bar{P} \wedge \bar{\Gamma}(P/R_0) dm$$

$$\text{Comme } u \frac{dv}{dt} = \frac{d(uv)}{dt} - \frac{du}{dt} v$$

$$\bar{\delta}(A, S_1 / R_0) = \int_{S_1} \left( \frac{d}{dt} (A \bar{P} \wedge \bar{V}(P / R_0)) \right)_{R_0} dm - \int_{S_1} \left( \frac{d(A \bar{P})}{dt} \right)_{R_0} \wedge \bar{V}(P / R_0). dm$$

Il vient :

$$\bar{\delta}(A, S_1 / R_0) = \frac{d}{dt} \left( \int_{S_1} A \bar{P} \wedge \bar{V}(P / R_0). dm \right)_{R_0} - \int_{S_1} (\bar{V}(P / R_0) - \bar{V}(A / R_0)) \wedge \bar{V}(P / R_0). dm$$

Soit :

$$\bar{\delta}(A, S_1 / R_0) = \frac{d}{dt} (\bar{\sigma}(A, S_1 / R_0))_{R_0} + \bar{V}(A / R_0) \wedge M \bar{V}(G / R_0)$$

finalement :

#### CAS PARTICULIERS :

Le moment dynamique se réduit à la dérivée du moment cinétique dans les cas suivants :

- La vitesse du point A est nulle :  $\bar{V}(A / R_0) = \bar{0}$
- La vitesse de A est parallèle à celle de G :  $\bar{V}(A / R_0) // \bar{V}(G / R_0)$
- A est confondu avec G :  $A = G$

### III. 4. Torseur dynamique d'un ensemble matériel

Soit (S) un ensemble matériel de N solides ( $S_k$ ). le torseur dynamique de l'ensemble (S) est simplement la somme des torseurs cinétiques de chacun des solides - réduits au même point naturellement - :

$$(DS/R_0)_A = \sum_{k=1}^N (DS_k/R_0)_A$$

### IV. ENERGIE CINETIQUE

#### IV. 1. Energie cinétique d'un solide (S) en mouvement par rapport à un repère (R)

Soit un solide (S) de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère (R). Soit A un point lié au solide (S).

Par définition, l'énergie cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère (R) est :

$$T(S/R) = \frac{1}{2} \int_{M(S)} \left| \bar{V}(M/R) \right|^2 dm = \frac{1}{2} \{C(S/R)\} \cdot \{g(S/R)\}$$

Par commodité, on calcule le double de l'énergie cinétique et on écrit :

$$2T(S/R) = m \bar{V}(G/R) \cdot \bar{V}(A \in S/R) + \bar{\Omega}(S/R) \cdot \bar{\sigma}_A(S/R)$$

## IV. 2. Cas particuliers

① Premier cas : A est fixe dans R

$$2T(S/R) = \bar{\Omega}(S/R) \cdot \bar{\sigma}_A(S/R)$$

$\bar{\Omega}(S/R)$  est de la forme  $\dot{\theta}\bar{z}$

$$2T(S/R) = I_A \dot{\theta}^2$$

$\bar{\Omega}(S/R)$  est quelconque

$$2T(S/R) = \bar{\Omega}(S/R) \cdot \bar{\sigma}_A(S, \bar{\Omega}(S/R))$$

② Deuxième cas : A est confondu avec G

$$2T(S/R) = m|\bar{V}(G/R)|^2 + \bar{\Omega}(S/R) \cdot \bar{\sigma}_G(S/R)$$

$\bar{\Omega}(S, \bar{\sigma}_G)$  est de la forme  $\dot{\theta}\bar{z}$

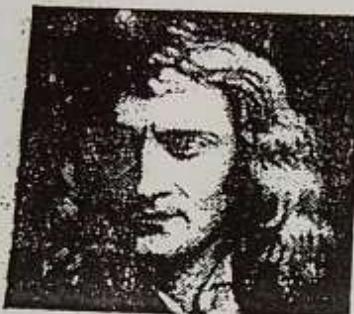
$$2T(S/R) = m|\bar{V}(G/R)|^2 + I_G \dot{\theta}^2$$

$\bar{\Omega}(S/R)$  est quelconque

$$2T(S/R) = m|\bar{V}(G/R)|^2 + \bar{\Omega}(S/R) \cdot \bar{\sigma}_G(S, \bar{\Omega}(S/R))$$

# Chap. 6 - DYNAMIQUE principes Newtoniens

## TABLE DES MATIERES



Isaac Newton (1642-1727)

- Hypothèse d'un espace absolu
- Hypothèse d'une chronologie absolue
- Origine des forces
- Principe fondamental de la dynamique de Newton

## I. HYPOTHESE D'UN ESPACE ABSOLU

Isaac Newton fait l'hypothèse d'un espace dont la structure Euclidienne est indépendante de la présence des corps matériels :

"L'espace absolu, sans relation aux choses extérieures, demeure toujours similaire et immobile".  
(citation extraite de l'ouvrage : "La relativité" de Stamatia Mavridès – collection Que sais-je – presses universitaires de France – isbn 2 13 042839 8.)

Voir aussi la biographie de Newton dans les Cahiers de Sciences & Vie "les pères fondateurs de la science" hors série n°13 de février 93.)

Les référentiels en mouvement rectiligne uniforme par rapport au repère absolu sont dits Galiléens. Tous les repères Galiléens sont en mouvements rectilignes uniformes les uns par rapport aux autres. En pratique, on considère qu'un repère calé sur des étoiles fixes de la Galaxie constitue un repère Galiléen. Pour la plupart des applications – notamment en génie civil où la dynamique des structures intéresse le génie parasismique – on considérera qu'un référentiel lié à la Terre constitue une bonne approximation d'un système Galiléen.

## II. HYPOTHESE D'UNE CHRONOLOGIE ABSOLUE

Newton fait l'hypothèse d'une chronologie absolue commune à tous les sites de l'espace :

"Le temps absolu vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément et s'appelle durée". Pour lui toutes les horloges sont synchronisables quelle que soit leur distance réciproque ou leur vitesse relative. De ce fait la simultanéité de deux événements peut toujours être établie(\*)".

(\*) Cela revient à supposer qu'un signal (de synchronisation) peut se propager de façon instantanée (avec une vitesse infinie). En fait Einstein, en 1905, suite aux expériences de Morley et Michelson, a montré qu'aucun signal ne pouvait se propager à une vitesse supérieure à celle de la lumière dans le vide. C'est la base de la théorie de la relativité restreinte.

## III. ORIGINE DES FORCES

Les forces solides résultent principalement de deux interactions entre les atomes constitutifs de ces solides parmi les quatre interactions connues. Ces interactions sont véhiculées par des particules appelées bosons (voir "sous l'atome les particules" par Etienne Klein – collection dominos – édition Flammarion – isbn 2 08 035187 7).

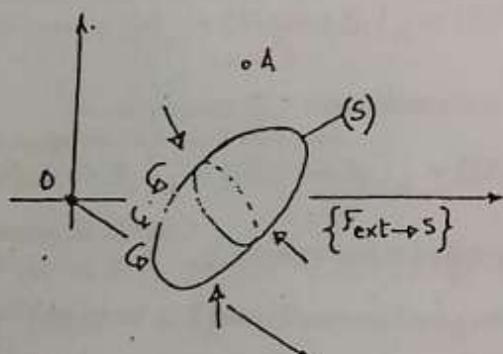
Interaction	Bosons vecteur de l'interaction	Constante de couplage caractérise l'intensité de l'interaction	Commentaire
Interaction forte	Gluons	1	Portée très courte, à l'intérieur du noyau atomique
Interaction électromagnétique	Photon	1/137	Forces de Van der Waals, liaisons chimiques, forces de contact – répulsives ou attractives
Interaction faible	Bosons W+, W-, Z°	10⁻⁶ (environ)	Interaction de contact entre les quarks du noyau – à l'origine de la radioactivité
Interaction gravitationnelle	Graviton (pas encore détecté à ce jour ?)	10⁻³⁴ (faible)	Toujours attractive, portée très longue

En mécanique classique, on considère deux types d'interaction :

- Les forces de contact : répulsives et d'origine électromagnétique ;
- Les forces à distance : attractives et d'origine gravitationnelle. Bien que la constante de couplage de l'interaction gravitationnelle soit  $10^{34}$  fois plus petite que la constante de couplage de l'interaction électromagnétique, les forces gravitationnelles (le poids) doivent souvent être prises en compte à cause de ce que cette interaction est uniquement attractive, qu'elle a une longue portée d'action et de la masse colossale des astres (dont la Terre).

## IV. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

### IV. 1. Enoncé



Enoncé : Dans tout repère Galiléen, le torseur des forces extérieures agissant sur un ensemble matériel (S) est égal au torseur dynamique.

$$(DS_1 / R_0)_A = (F_{\text{ext} \rightarrow S_1})_A \text{ si } (R_0) \text{ est Galiléen}$$

Figure 6.1

Si l'ensemble matériel (S) étudié est lui-même rattaché à d'autres solides – par un système d'appuis ou de liaisons – il faut isoler l'ensemble matériel et prendre en compte les actions de liaison externes à (S) dans l'évaluation des éléments de réduction du torseur des forces.

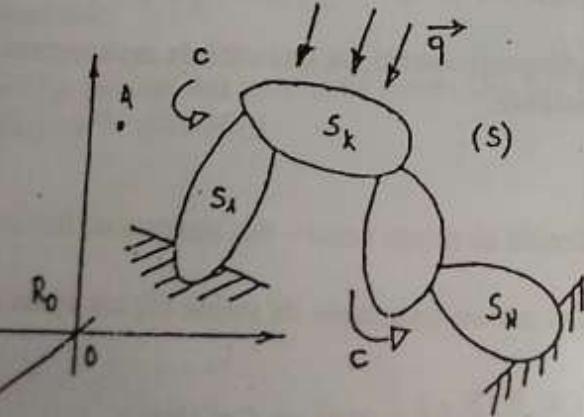


Figure 6.2

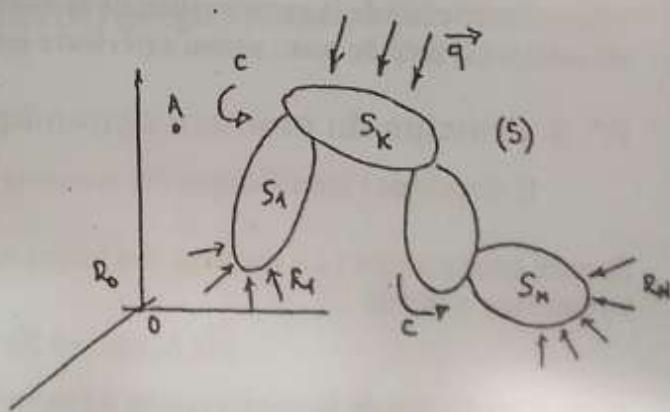


Figure 6.3

Notez que les actions extérieures sont définies sans rapport avec un quelconque système d'axes alors que le mouvement lui, doit être défini dans un système d'axes Galiléen.

Il est néanmoins possible d'établir des équations de dynamique dans des systèmes non-Galiléens à condition d'introduire des torseurs de " forces d'entraînement " et des torseurs de " Coriolis " (voir " Newton et la relativité " par Jean-Michel Rocard - collection " Que sais-je ? " - presses universitaires de France - isbn 2 13 039464 7).

$$(DS_1 / R_0)_A = \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_D(S_1 / R_0) \\ \bar{\delta}(A, S_1 / R_0) \end{array} \right\}_A$$

Le torseur dynamique se réduit à :

$$\{F_{ext} \rightarrow S\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_{(ext \rightarrow S)} \\ \bar{M}(A, i : \rightarrow S) \end{array} \right\}_A$$

Et le torseur des forces extérieures à :

#### IV. 2. Principe de la statique

Dans le cas particulier où le torseur dynamique Galiléen est nul, on établit un principe simplifié :

Enoncé original : Un corps persiste dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, à moins que l'action d'une force ne l'oblige à changer d'état.

Enoncé contemporain : Un solide (S) est en équilibre statique si le torseur des forces extérieures agissant sur lui est égal au torseur nul.

$$\{F_{ext} \rightarrow S\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \bar{0} \\ \bar{0} \end{array} \right\}_A \text{ équilibre statique}$$

#### IV. 3. Principe de la résultante dynamique

Il découle de l'identification des résultantes des torseurs de forces et dynamique.

Enoncé original : le rythme de variation du mouvement d'un corps est proportionnel à la force appliquée et à lieu dans la direction de la force.

Enoncé contemporain : La résultante des forces agissant sur un ensemble de solide (S) est égale à la résultante dynamique galiléenne.

$$\bar{F}_{(ext \rightarrow S)} = \bar{R}_D(S / R_0) \text{ si } (R_0) \text{ est Galiléen}$$

pour le cas d'un solide (S<sub>1</sub>) unique :  $\bar{F}_{(ext \rightarrow S_1)} = \bar{R}_D(S_1 / R_0) = M \bar{I}(G \in S_1 / R_0)$

Autre énoncé : (dit de la conservation de la quantité de mouvement) La quantité de mouvement d'un ensemble de solides (S) isolé de toute action extérieure est constante.

#### IV. 4. Principe du moment dynamique

Il découle de l'identification des moments - calculés au même point - des torseurs de forces et dynamique.

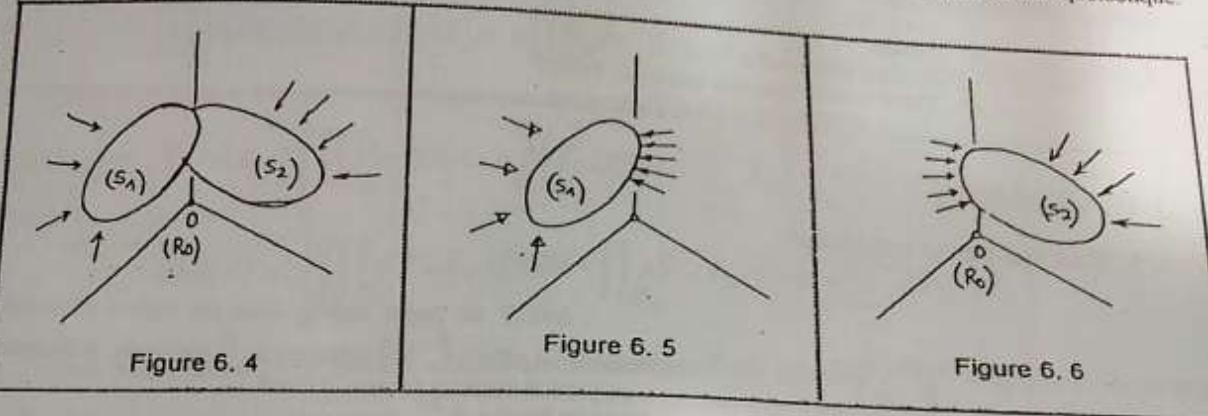
Enoncé contemporain : Le moment des forces agissant sur un ensemble de solide (S) est égale au moment dynamique galiléen.

$$\bar{M}(A, ext \rightarrow S) = \bar{\delta}(A, S / R_0) \text{ si } (R_0) \text{ est Galiléen}$$

Autre énoncé : (dit de la conservation du moment cinétique) Le moment cinétique d'un ensemble de solides (S) isolé de toute action extérieure est constant.

#### IV. 5. Principe d'action-réaction

Considérons un système ( $S$ ) formé par deux solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ).  
 Soit  $\{F_{ext} \rightarrow S\}_A$  le torseur des forces extérieures agissant sur l'ensemble ( $S$ ) réduit en un point A quelconque.  
 Isolons tour à tour chacun des deux solides, alors :



Principe de Newton appliqué à l'ensemble ( $S$ ) :

$$\{F_{ext} \rightarrow S\}_A = \{DS / R_0\}_A \quad (i)$$

Introduisons le torseur  $\{FS_2 \rightarrow S_1\}_A$  des actions de ( $S_2$ ) sur ( $S_1$ ) et appliquons le Principe de Newton à ( $S_1$ ) seul :  
 $\{F_{ext} \rightarrow S_1\}_A + \{FS_2 \rightarrow S_1\}_A = \{DS_1 / R_0\}_A \quad (ii)$

De même pour ( $S_2$ ), introduisons le torseur  $\{FS_1 \rightarrow S_2\}_A$  des actions de ( $S_1$ ) sur ( $S_2$ ) puis appliquons le Principe de Newton à ( $S_2$ ) seul :

$$\{F_{ext} \rightarrow S_2\}_A + \{FS_1 \rightarrow S_2\}_A = \{DS_2 / R_0\}_A \quad (iii)$$

Sommons (i)+(ii) :

$$[\{F_{ext} \rightarrow S_1\}_A + \{F_{ext} \rightarrow S_2\}_A] + [\{FS_2 \rightarrow S_1\}_A + \{FS_1 \rightarrow S_2\}_A] = [\{DS_1 / R_0\}_A + \{DS_2 / R_0\}_A]$$

$$\text{Or: } \{F_{ext} \rightarrow S_1\}_A + \{F_{ext} \rightarrow S_2\}_A = \{F_{ext} \rightarrow S\}_A$$

$$\text{et: } \{DS_1 / R_0\}_A + \{DS_2 / R_0\}_A = \{DS / R_0\}_A$$

$$\text{Il reste: } \{F_{ext} \rightarrow S\}_A + [\{FS_2 \rightarrow S_1\}_A + \{FS_1 \rightarrow S_2\}_A] = \{DS / R_0\}_A$$

$$\text{Par comparaison avec l'équation (i): } [\{FS_2 \rightarrow S_1\}_A + \{FS_1 \rightarrow S_2\}_A] = \{0\}_A$$

$$\text{C'est donc que: } \{FS_2 \rightarrow S_1\}_A = -\{FS_1 \rightarrow S_2\}_A$$

**Enoncé :** Le torseur des actions du solide ( $S_2$ ) sur le solide ( $S_1$ ) est égal à l'opposé du torseur des actions du solide ( $S_1$ ) sur le solide ( $S_2$ )

# Chap. 7 - ENERGETIQUE

## TABLE DES MATIÈRES

- Puissance
- Travail
- Energie potentielle
- Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

## I. PUISSANCE

### I. 1. Cas du point matériel

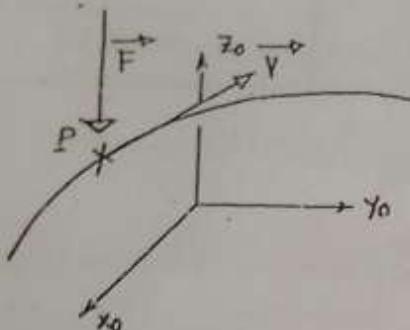


Figure 7.1

Soit  $P$  un point mobile dans un repère  $(R_0)$  sur lequel s'exerce un effort  $\bar{F}$ , la puissance de  $\bar{F}$  est égale, à chaque instant  $t$ , au produit scalaire force  $\times$  vitesse :

$$P(\bar{F} / R_0) = \bar{F} \cdot \bar{V}(P / R_0)$$

- La puissance est un scalaire.
- La puissance dépend du repère dans lequel elle est évaluée.
- La puissance est fonction de l'instant  $t$  considéré.
- L'unité de la puissance est le Watt.

### I. 2. Cas du solide

Soit un solide  $(S_1)$  en mouvement par rapport au repère  $(R_0)$  et  $\bar{f}_V(P)$  une distribution volumique de force sur  $(S_1)$ .

Soit  $(\partial S_1)$  le "conicur" de  $(S_1)$ , c'est à dire son enveloppe, et  $\bar{f}_S(P)$  une distribution surfacique de force sur  $(\partial S_1)$ .

Soit une distribution discrète de  $N$  efforts  $\bar{F}_k$  appliqués aux points  $P_k$  du solide  $(S_1)$ .

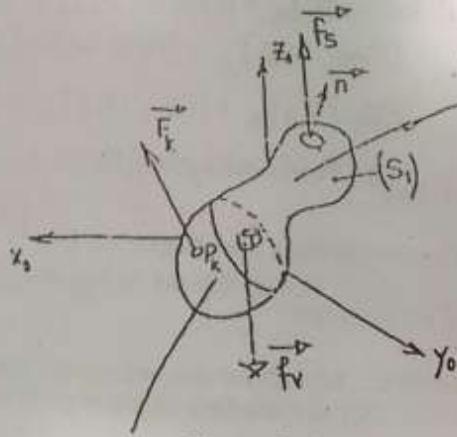


Figure 7.2

Définition : La puissance de la distribution des forces s'exerçant sur  $(S_1)$  dans le repère  $(R_0)$  est égale à la somme (intégrale et discrète) des puissances de chacune des forces :

$$P(S / R_0) = \underbrace{\iiint_{S_1} \bar{f}_V(P) \cdot \bar{V}(P / R_0) \cdot dV}_{\text{forces volumiques}} + \underbrace{\iint_{\partial S_1} \bar{f}_S(P) \cdot \bar{V}(P / R_0) \cdot ds}_{\text{forces surfaciques}} + \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \bar{V}(P_k / R_0)$$

Considérons un point A quelconque de  $(S_1)$ . Comme le champ de vitesse d'un solide indéformable est le champ de moment du torseur cinématique, on peut écrire :  $\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \times \vec{AP}$   
On peut donc réécrire la puissance sous la forme :

$$P(S/R_0) = \vec{V}(A/R_0) \iint_{S_1} \bar{f}_V(P) \cdot dv + \vec{V}(A/R_0) \iint_{\partial S_1} \bar{f}_S(P) \cdot ds + \vec{V}(A/R_0) \sum_{k=1}^N \bar{F}_k + \\ \iint_{S_1} (\bar{F}_V(P), \vec{\Omega}(S_1/R_0), \vec{AP}) \cdot dv + \iint_{\partial S_1} (\bar{f}_S(P), \vec{\Omega}(S_1/R_0), \vec{AP}) \cdot ds + \sum_{k=1}^N (\bar{F}_k, \vec{\Omega}(S_1/R_0), \vec{AP}_k)$$

Soit, en regroupant les termes et compte tenu des propriétés du produit mixte :

$$P(S/R_0) = \vec{V}(A/R_0) \left[ \iint_{S_1} \bar{f}_V(P) \cdot dv + \iint_{\partial S_1} \bar{f}_S(P) \cdot ds + \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \right] + \\ \vec{\Omega}(S_1/R_0) \left[ \iint_{S_1} \vec{AP} \wedge \bar{f}_V(P) \cdot dv + \iint_{\partial S_1} \vec{AP} \wedge \bar{f}_S(P) \cdot ds + \sum_{k=1}^N \vec{AP}_k \wedge \bar{F}_k \right]$$

Dans cette expression, le premier crochet est la résultante  $\bar{R}$  du torseur  $(F_{ext \rightarrow S_1})$  des forces agissant sur  $(S_1)$ . Le second crochet en est le moment  $\bar{M}_A$  calculé au point A.

Par conséquent :

Enoncé : La puissance des forces agissant sur un solide indéformable est égale au comoment du torseur des forces par le torseur cinématique (rappel : c'est un invariant).

$$P(S/R_0) = \{F_{ext \rightarrow S_1}\} \otimes \{V_{S_1/R_0}\} = \begin{Bmatrix} \bar{R} \\ \bar{M}_A \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/R_0) \\ \vec{V}(A/R_0) \end{Bmatrix}_A = \bar{R} \cdot \vec{V}(A/R_0) + \bar{M}_A \cdot \vec{\Omega}(S_1/R_0)$$

Dans le cas particulier où  $\bar{R}$  est un glisseur passant par le point Q de  $(S_1)$ , l'expression de la puissance se simplifie :

$$P(S/R_0) = \begin{Bmatrix} \bar{R} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_Q \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/R_0) \\ \vec{V}(Q/R_0) \end{Bmatrix}_Q = \bar{R} \cdot \vec{V}(Q/R_0)$$

Enoncé : La puissance d'un glisseur agissant sur un solide indéformable est égale au produit scalaire de la résultante du glisseur par la vitesse du point d'application.

Dans le cas particulier où le solide  $(S_1)$  est soumis à l'action d'un couple :

$$P(S/R_0) = \begin{Bmatrix} \bar{0} \\ \bar{C} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S_1/R_0) \\ \vec{V}(C/R_0) \end{Bmatrix}_A = \bar{C} \cdot \vec{\Omega}(S_1/R_0)$$

Enoncé : La puissance d'un couple agissant sur un solide indéformable est égale au produit scalaire du moment par le vecteur vitesse de rotation du solide.

### I. 3. Puissance développée par des actions réciproques entre deux solides $(S_1)$ et $(S_2)$ en mouvement par rapport à (R) : $P(S_1 \leftrightarrow S_2)$

Enoncé : La puissance développée par des actions réciproques entre deux solides  $(S_1)$  et  $(S_2)$  en mouvement par rapport à (R) est :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = P(S_1 \leftrightarrow S_2/R) + P(S_2 \leftrightarrow S_1/R)$$

Cette puissance est indépendante du repère choisi pour la calculer.

Remarque :

Cette formule peut s'appliquer quand on étudie une liaison avec frottement dans ce cas la puissance est dissipée donc négative.

Cas des liaisons parfaites

On dit qu'une liaison est énergiquement parfaite lorsque la puissance des actions réciproques est nulle :  
 $P(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0$ .

Si on considère que le repère (R) est lié à ( $S_1$ ) on peut écrire :

$$P(S_1 \leftrightarrow S_2) = P(S_1 \leftrightarrow S_2 / S_1) = \{t(S_1 \rightarrow S_2)\} \cdot \{v(S_2 / S_1)\} = 0$$

On dit que les deux torseurs  $\{t\}$  et  $\{v\}$  sont réciproques, ce qui justifie les remarques faites lors du remplissage des tableaux des liaisons (les zéros du torseur  $\{t\}$  correspondent aux valeurs du torseur  $\{v\}$ ).

#### I. 4. Puissance des actions de contact

Ceci constitue un cas particulier d'actions réciproques. On utilise les lois de Coulomb (frottement, roulement, pivotement) pour exprimer le torseur des actions de contact.

Si le contact est ponctuel en I entre les solides ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ), alors le moment de l'action de contact en I est nul :  
 $M_I(S_1 \rightarrow S_2) = \bar{0}$ .

## II. TRAVAIL

Par définition, on appelle travail d'une action mécanique entre l'instant  $t_1$  et l'instant  $t_2$ , la somme de la puissance développée par cette action mécanique entre ces instants :

$$W_{12}^{12} = \int_{t_1}^{t_2} P(E \rightarrow S/R) dt \quad \text{l'unité du travail est le joule.}$$

## III. ENERGIE POTENTIELLE

### III. 1. Définition

Soient deux ensembles matériels ( $\Sigma$ ) et ( $E$ ) en mouvement par rapport à (R), par définition ( $E$ ) possède une énergie potentielle associée à l'action de ( $\Sigma$ ) sur ( $E$ ) dans le mouvement de ( $E$ ) par rapport à (R) s'il existe une fonction scalaire  $V(\Sigma \rightarrow E/R)$  telle que :

$$P(\Sigma \rightarrow E/R) = -\frac{d}{dt} V(\Sigma \rightarrow E/R)$$

Remarques :

- on dit dans ce cas que la puissance dérive d'un potentiel.
- l'énergie potentielle est définie à une constante près.
- Dans ce cas il de l'action mécanique de ( $\Sigma$ ) sur ( $E$ ) ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des valeurs finale et initiale de l'énergie potentielle :  $W_{12}^{12} = -(V(t_2) - V(t_1))$ .

### III. 2. Applications

#### Energie potentielle de pesanteur

$$V(g \rightarrow E/R) = m g z_a + C'$$

Energie potentielle liée à une action mutuelle (cas de l'énergie potentielle élastique)

$$V(S_1 \leftrightarrow S_2) = \frac{1}{2} k(l - l_n)^2$$

## IV. THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE (TEC)

Le théorème de l'énergie cinétique (TEC) constitue l'une des traductions énergétiques du principe fondamental de la statique (PFD).

### IV. 1. Cas d'un solide

La dérivée, par rapport au temps t, de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide (S), est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (S).

$$\frac{d}{dt} T(S/R) = P(\bar{S} \rightarrow S/R)$$

Démonstration :

Le PFD appliquée à (S) donne :  $\{D(S/R)\} = \{\tau(\bar{S} \rightarrow S)\}$   
où :  $\{D(S/R)\}$  est le torseur dynamique de (S) dans son mouvement par rapport à (R),  
et  $\{\tau(\bar{S} \rightarrow S)\}$  est le torseur des actions mécaniques extérieures à (S) s'exerçant sur (S).

Multiplions les deux membres de la relation issue du PFD par le torseur cinématique de (S) par rapport à (R) :

$$\{D(S/R)\} \cdot \{g(S/R)\} = \{\tau(\bar{S} \rightarrow S)\} \cdot \{g(S/R)\}$$

On démontre que :  $\{D(S/R)\} \cdot \{g(S/R)\} = \frac{d}{dt} T(S/R)$  et on sait :  $\{\tau(\bar{S} \rightarrow S)\} \cdot \{g(S/R)\} = P(\bar{S} \rightarrow S/R)$

Et on obtient alors :  $\frac{d}{dt} T(S/R) = P(\bar{S} \rightarrow S/R)$

#### IV. 2. Cas d'un ensemble (E) de solides

La dérivée, par rapport au temps t, de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble (E) de solides, est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à (E) et des puissances des actions mutuelles entre les solides de (E).

$$\frac{d}{dt} T(E/R) = P(\bar{E} \rightarrow E/R) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P(S_i \rightarrow S_j/R)$$

##### Démonstration

Soit un ensemble (E) de n solides (S1), (S2), ..., (Sn) en mouvement par rapport à un repère galiléen (R). Pour un solide (Si) de (E) le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{d}{dt} T(S_i/R) = P(S_i \rightarrow \bar{S}_i/R)$$

En faisant la somme membre à membre des n relations analogues obtenues pour les n solides, on a :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n T(S_i/R) = \sum_{i=1}^n P(S_i \rightarrow \bar{S}_i/R)$$

$$\text{On a : } \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n T(S_i/R) = \frac{d}{dt} T(E/R) \text{ et } \sum_{i=1}^n P(S_i \rightarrow \bar{S}_i/R) = P(\bar{E} \rightarrow E/R) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P(S_i \rightarrow S_j/R)$$

$$\text{D'où : } \frac{d}{dt} T(E/R) = P(\bar{E} \rightarrow E/R) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P(S_i \rightarrow S_j/R)$$

#### IV. 3. Intégrale première de l'énergie cinétique

Lorsque les puissances intervenant dans le théorème de l'énergie cinétique sont nulles ou dérivent d'une énergie potentielle (au signe près), dont nous noterons la somme V(E/R), ce théorème s'écrit :

$$\frac{d}{dt} T(E/R) = - \frac{d}{dt} V(E/R)$$

Par conséquent, il existe une intégrale première du mouvement, appelée intégrale première de l'énergie cinétique :

$$T(E/R) + V(E/R) = C^*$$

La constante est déterminée en fonction des conditions initiales du mouvement.

Par définition, l'énergie mécanique de (E) est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle (par rapport à (R)). L'intégrale première de l'énergie cinétique traduit la conservation de l'énergie mécanique.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] Michel CAZIN, Jeanne METGE  
« Cours de mécanique industrielle élémentaire avec exercices résolus. »  
Gauthier - Villars. 1973. 507 p.
- [2] P. AGATI, Y. BREMONT, G. DELVILLE  
« Mécanique du solide : Applications industrielles. »  
Dunod. 1986. 276 p..
- [3] Yves BREMONT, Paul REOCREUX  
MECANIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE  
« Mécanique 1 : Calcul vectoriel - cinématique » Cours et exercices résolus  
Ellipses. 2000. 320 p.
- [4] Yves BREMONT, Paul REOCREUX  
MECANIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE  
« Mécanique 2 : Statique » Cours et exercices résolus  
Ellipses. 2000.
- [5] Yves BREMONT, Paul REOCREUX  
MECANIQUE DU SOLIDE INDEFORMABLE  
« Mécanique 3 : Cinétique - Dynamique » Cours et exercices résolus  
Ellipses. 2000. 256 p.
- [6] Marcel GAILLARD, Jean-Claude RAFFY  
« Mécanique générale. » Tome 2 : dynamique, méthode vectorielle  
BTS, DUT, Ecoles d'ingénieurs  
Eyrolles. 1990. 168 p., 120 F
- [7] Michel COMBARNOUS, Didier DESJARDINS, Christophe BACON  
« Mécanique des solides. »  
Masson. 1996. 197 p., 79 F
- [8] Pierre TANGUY, Daniel THOUROUDE  
« L'épreuve de mécanique aux concours d'entrée dans les grandes écoles. »  
McGraw - Hill. 1983. 181 p..
- [9] Rémi HAKIM  
« Introduction à la mécanique. »  
Amphi sciences, Masson. 1995. 224 p., 79 F
- [10] R. MARI  
« Comprendre et appliquer la mécanique. » Tome 1 : Principes de base  
Masson. 1981. 126 p., 76 F
- [11] J. L. QUEYREL, J. MESPLEDE  
« Précis de physique - cours, exercices résolus » Mécanique I  
Classes préparatoires - Premier cycle universitaire  
Bréal éditeur. 1975. 115 p..