****** EXERCICE 1 ****** ***Pour*** $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$, ***et*** $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ***continue, on pose :***

$$u_n = \frac{1}{2n+1}, \quad f_n(t) = 1 - \text{th}^{2n} t, \quad \varphi_n(t) = \frac{f_n(t)}{f_1(t)}, \quad I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\text{d}t, \quad J = \int_0^{+\infty} f_1(t)\,g(t)\,\text{d}t.$$

1°) *Trouvons la nature de I_0 et, en cas de convergence, précisons sa valeur.*

Par définition, $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_0(t)\,\text{d}t$, avec $f_0(t) = 1 - \text{th}^0 t = 1 - (\text{th}\,t)^0 = 1 - 1 = 0$,

$\Longrightarrow$ comme ***intégrale d'une fonction nulle***, $\boxed{I_0 \text{ est convergente et } I_0 = 0}$.

> ••• ***Remarque/Commentaire n°1-Exo1 :***
> La réponse à cette question consistait simplement à utiliser une propriété triviale énoncée en Cours. Ainsi, il n'y avait aucun besoin de faire appel à un quelconque critère de convergence ici.

> ••• ***Remarque/Commentaire n°2-Exo1 :***
> Mais le plus ahurissant est que la réponse la plus populaire dans les copies, à cette question, a consisté à ecrire que $f_0(t) = 1 - \text{th}^{\,0} t = 1$, et donc que $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \text{d}t$ (qui diverge...) ***!!!***
> Bref, les un(e)s et les autres ont estimé majoritairement que pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $x^0 = 0$ ***!!!***
> On se perd en conjectures : étourderie ou lacune structurelle systématique ***?!?!***
> En tout cas, pour la réponse à la 1$^{\text{ère}}$ question d'une épreuve, c'est vraiment étonnant de ***refuser de la sorte de prendre 1 point pratiquement gratuit offert d'entrée !!!***

N.B. *Dans toute la suite, on se place dans le cas où $n \in \mathbb{N}^*$, i.e. n est un entier $\geqslant 1$.*

2°) *Exprimons $\varphi_n(t)$ comme somme de n fonctions bornées (et 2 à 2 distinctes) de t sur $\mathbb{R}$.*

La fonction *th* étant définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1\,,\,1[$, alors, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t)$ existe dans $\mathbb{R}$, avec :

$$\varphi_n(t) = \frac{f_n(t)}{f_1(t)} = \frac{1 - \text{th}^{2n} t}{1 - \text{th}^2 t} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \text{avec } q = \text{th}^2 t. \qquad (\textbf{\textit{E1.1}})$$

Or, on sait que $1 - q^n = (1-q)(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$,

$$\Longrightarrow \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k. \qquad (\textbf{\textit{E1.2}})$$

$$(\textbf{\textit{E1.1}}) \text{ et } (\textbf{\textit{E1.2}}) \Longrightarrow \boxed{\varphi_n(t) = 1 + \text{th}^2 t + \text{th}^4 t + \cdots + \text{th}^{2(n-1)} t = \sum_{k=0}^{n-1} \text{th}^{2k} t = \sum_{k=0}^{n-1} (\text{th}\,t)^{2k}}. \qquad (\textbf{\textit{E1.3}})$$

- D'autre part, $\forall k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, posons, $\forall t \in \mathbb{R}$: $g_k(t) = \text{th}^{2k} t = (\text{th}\,t)^{2k}$. Alors on a :
  1. $\forall t \in \mathbb{R}$, $-1 < \text{th}\,t < 1 \Longrightarrow 0 \leqslant \text{th}^2 t < 1 \Longrightarrow 0 \leqslant g_k(t) \leqslant 1$ (dernier $\leqslant$ et non $<$ pour $k = 0$),
     $\Longrightarrow$ g_k est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.
  2. Soient $k, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}/\ k \neq j$. Montrons que g_k et g_j sont 2 fonctions différentes.
     Raisonnons par l'absurde. Supposons donc que $g_k = g_j$, i.e. $\forall t \in \mathbb{R}$, $g_k(t) = g_j(t)$.
     Fixons, en particulier, un $t \in \mathbb{R}^*$, arbitraire. Il vérifierait donc :
     $$g_k(t) = g_j(t), \quad \text{i.e. } \text{th}^{2k} t = \text{th}^{2j} t. \qquad (\textbf{\textit{E1.4}})$$
     Mais $t \neq 0 \Longrightarrow \text{th}\,t \neq 0 \Longrightarrow \text{th}^{2j} t \neq 0$. De ce fait, on peut diviser (***E1.4***) membre à membre par $\text{th}^{2j} t$, ce qui donne :
     $$\text{th}^{2(k-j)} t = 1, \quad \text{i.e. } (\text{th}\,t)^{2(k-j)} = 1. \qquad (\textbf{\textit{E1.5}})$$
     Or, $k \neq j \Longrightarrow 2(k-j) \neq 0$. Par conséquent, (***E1.5***) $\Longrightarrow \text{th}^2 t = 1$, i.e. $\text{th}\,t = \pm 1$.
     L'absurdité s'ensuit, car on sait qu'on a toujours $-1 < \text{th}\,t < 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
     On conclut que : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $g_k(t) \neq g_j(t)$. De ce fait, g_k et g_j sont 2 fonctions différentes sur $\mathbb{R}$.

•• ***Conclusion :***

Par conséquent, à travers (***E1.3***), on a bien exprimé $\varphi_n(t)$ comme somme de n fonctions bornées, et 2 à 2 distinctes, de la variable t sur $\mathbb{R}$. ***Cqfd.***

3°) a) *Montrons qu'il existe $C_n \in \mathbb{R}^*$ (à préciser) tel que : $f_n(t) \sim C_n f_1(t)$ quand $t \longrightarrow +\infty$.*

Vu que, par définition de $\varphi_n(t)$, $f_n(t) = \varphi_n(t) f_1(t)$, et compte tenu des propriétés des équivalents de fonctions au voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$, la question revient essentiellement à essayer de calculer la limite de $\varphi_n(t)$ quand $t \longrightarrow +\infty$. Or, on sait que $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \operatorname{th} t = 1$. D'où : $\forall k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \operatorname{th}^{2k} t = 1$;

$$\Longrightarrow \lim_{t \longrightarrow +\infty} \varphi_n(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{th}^{2k} t = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\lim_{t \longrightarrow +\infty} \operatorname{th}^{2k} t \Big) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow \boxed{\varphi_n(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\sim} n},$$

$\Longrightarrow \varphi_n(t) f_1(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\sim} n f_1(t)$, i.e. $\boxed{f_n(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\sim} n f_1(t)}$. D'où le résultat en prenant $\boxed{C_n = n}$. ***Cqfd.***

b) *Utilisons ce résultat pour en déduire l'équivalent simple de $f_n(t)$ quand $t \longrightarrow +\infty$.*

Compte tenu du résultat de la question précédente, il suffit ici de trouver, préalablement, l'équivalent simple de $f_1(t)$ quand $t \longrightarrow +\infty$ (N.B. Dans tout ceci, l'entier n reste fixé). Or, $f_1(t) = 1 - \operatorname{th}^2 t$. D'où :

$$f_1(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} = \left(\frac{2}{e^t + e^{-t}} \right)^2 = 4\, e^{-2t} \times \frac{1}{(1 + e^{-2t})^2} \quad \text{et} \quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + e^{-2t})^2} = 1 \Longrightarrow f_1(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\sim} 4\, e^{-2t},$$

$\Longrightarrow n f_1(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\sim} 4n\, e^{-2t}$, ce qui combiné avec le résultat de **3°)a)**, entraîne : $\boxed{f_n(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\sim} 4n\, e^{-2t}}$.

De ce fait, $\boxed{\text{l'équivalent simple de } f_n(t) \text{ quand } t \longrightarrow +\infty \text{ est la fonction } 4n\, e^{-2t}}$.

> **• • • *Remarque/Commentaire n°3-Exo1 :***
> Une curiosité a voulu ici qu'un bon nombre de copies ont répondu, à cette question, que l'équivalent simple de $f_n(t)$ quand $t \longrightarrow +\infty$ était la fonction $n\, f_1(t) = n(1 - \operatorname{th}^2 t)$. Bref, à leur compréhension, la question ne servait à rien, vu qu'avec cette réponse, elle devenait alors redondante avec la question précédente.
> Mais une deuxième curiosité a alors voulu que lorsqu'il a fallu répondre à la question suivante, pour montrer la convergence de I_n, une proprotion élevée de ces mêmes copies se sont mises à chercher un autre équivalent de $f_n(t)$ quand $t \longrightarrow +\infty$. Apparemment, elles ne se sont pas rendues compte que cette nouvelle recherchait invalidait leur réponse à cette question **3°)b)** ***!!!***

4°) a) *Sans chercher à calculer I_n, montrons que I_n est un réel $\geqslant 0$.*

Notons d'abord que (*th* fonction continue sur $\mathbb{R}$) $\Longrightarrow$ (f_n fonction continue sur $\mathbb{R}$),

$$\Longrightarrow \boxed{I_n \text{ est une } \textbf{\textit{I.I.S.}} \text{ en } +\infty}.$$

D'autre part, $\forall t \in \mathbb{R}$: $-1 < \operatorname{th} t < 1 \Longrightarrow |\operatorname{th} t| < 1 \Longrightarrow \operatorname{th}^2 t < 1 \Longrightarrow \operatorname{th}^{2n} t < 1 \Longrightarrow 1 - \operatorname{th}^{2n} t > 0$,

$$\Longrightarrow \forall t \in [0, +\infty[, \quad f_n(t) \geqslant 0. \qquad (\textbf{\textit{E1.6}})$$

Comme, de plus, *ses bornes sont dans l'ordre naturel*, il vient que I_n est une ***I.I.S.*** de fonction $\geqslant 0$. Ainsi :

$\boxed{\textbf{\textit{Pour montrer que } } I_n \textbf{\textit{ est un réel }} \geqslant 0\textbf{\textit{, il suffit de montrer que l'intégrale impropre }} I_n \textbf{\textit{ est convergente}}}$.

***Plusieurs méthodes étaient envisageables pour démontrer la convergence de l'intégrale I_n. Nous examinons, ci-après, les 2 méthodes les plus rapides et les plus efficaces pour y arriver, compte tenu des questions précédentes de l'Exercice. Les 2 méthodes partent de l'équivalent simple $4n\, e^{-2t}$ de $f_n(t)$ quand $t \longrightarrow +\infty$, obtenu à la question* 3°)b).**

• • Méthode 1 : *Critère des équivalents des I.I.S. de fonctions $\geqslant 0$.*

Puisque I_n et $I_{n,1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} 4n\, e^{-2t}\, \mathrm{d}t$ sont 2 ***I.I.S.*** en $+\infty$ de fonctions $\geqslant 0$, alors, par le ***Critère des équivalents des I.I.S. de fonctions*** $\geqslant 0$, l'équivalent simple ci-dessus entraîne que I_n et $I_{n,1}$ sont de même nature. Mais, comme $\lambda = 4n \in \mathbb{R}^*$, alors $I_{n,1}$ est de même nature que $I_{n,2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\, \mathrm{d}t$. Or, $I_{n,2}$ est une ***I.I.S.*** en $+\infty$ convergente, car $I_{n,2}$ est de la forme : $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{\alpha t}\, \mathrm{d}t$, avec $a = 0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha = -2 < 0$;

$$\Longrightarrow I_{n,2} \text{ converge} \Longrightarrow I_{n,1} \text{ converge} \Longrightarrow I_n \text{ converge} \Longrightarrow I_n \text{ est un réel} \geqslant 0. \ \textbf{\textit{Cqfd.}}$$

•• Méthode 2 : *Equivalent simple de f en $+\infty$, puis Règle « $x^\alpha f(x)$ » en $+\infty$.*

Ici, on part de :

$$f_n(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\sim} 4n\, e^{-2t} \implies t^3 f_n(t) \underset{t \longrightarrow +\infty}{\sim} 4n\, t^3 e^{-2t}. \qquad (\textbf{\textit{E1.7}})$$

D'après les propriétés de croissance comparée dans les limites, on sait que :

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^3 \cdot e^{-2t} = \lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-2t} = 0 \implies \lim_{t \longrightarrow +\infty} 4n\, t^3 e^{-2t} = 0. \qquad (\textbf{\textit{E1.8}})$$

Or, $(\textbf{\textit{E1.7}})$ et $(\textbf{\textit{E1.8}}) \implies \lim_{t \longrightarrow +\infty} t^3 f_n(t) = 0 \implies \exists\, \alpha > 1\ (\alpha = 3) \,/ \lim_{t \longrightarrow +\infty} t^\alpha f_n(t) = 0,$

$\implies I_n$ converge, d'après la ***Règle*** « $x^\alpha f(x)$ » en $+\infty$, $\implies I_n$ est un réel $\geqslant 0$. ***Cqfd.***

> **••• *Remarque/Commentaire n°4-Exo1 :***
> Ci-dessus, la puissance $\alpha = 3$ a permis de conclure. Mais on vérifie aisément que tout réel $\alpha > 1$ aurait permis tout autant de le faire.

b) *Déduisons que si g est une fonction bornée sur $]\,0\,, +\infty\,[$, alors l'intégrale J converge.*

Posons, $\forall\, t \in \mathrm{IR}$: $h(t) = f_1(t)\, g(t)$. Par définition, on a : $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\ \mathrm{d}t$.

On a déjà dit (en prenant $n = 1$ ci-dessus) que f_1 est une fonction continue sur IR. Il en est de même, par hypothèse, de la fonction g. Il s'ensuit que h est aussi une fonction continue sur IR. Par conséquent, l'intégrale J n'a aucune singularité finie. C'est donc une ***I.I.S.*** en $+\infty$.

Supposons alors que, en plus d'être continue, g est une fonction bornée sur $]\,0\,, +\infty\,[$. Cela signifie que :

$$\exists\, M \in \mathrm{IR}_+ /\ \ \forall\, t \in\,]\,0\,, +\infty\,[,\ \ |\, g(t)\,| \leqslant M. \qquad (\textbf{\textit{E1.9}})$$

Or, $\forall\, t \in \mathrm{IR}$, $f_1(t) \geqslant 0 \implies |\, f_1(t)\,| = f_1(t)$. D'où : $|\, h(t)\,| = |\, f_1(t)\,| \cdot |\, g(t)\,| = f_1(t) \cdot |\, g(t)\,|$. $\qquad (\textbf{\textit{E1.10}})$

De $(\textbf{\textit{E1.9}})$ et $(\textbf{\textit{E1.10}})$, on tire qu'on a :

$$\forall\, t \in\,]\,0\,, +\infty\,[,\ \ 0 \leqslant |\, h(t)\,| \leqslant M f_1(t). \qquad (\textbf{\textit{E1.11}})$$

Or, en prenant $n = 1$ dans la question précédente, on déduit que $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(t)\ \mathrm{d}t$ converge. $\qquad (\textbf{\textit{E1.12}})$

Par le ***Critère de comparaison des I.I. de fonctions*** $\geqslant 0$, $(\textbf{\textit{E1.11}})$ et $(\textbf{\textit{E1.12}})$ impliquent que

$$\int_0^{+\infty} |\, h(t)\,|\ \mathrm{d}t \text{ converge, i.e. } J \text{ converge absolument, et donc } J \text{ converge } \textbf{\textit{Cqfd.}}$$

> **••• *Remarque/Commentaire n°5-Exo1 :***
> La curiosité pour cette question est la proportion de copies qui ont réussi à y « répondre » sans faire la moindre référence à ce qu'est une « fonction bornée ».
> D'autres (ou parfois les mêmes) ont fait comme si la fonction g était $\geqslant 0$, ce qui n'était indiqué nulle part dans l'énoncé.
> Enfin, certain(e)s (beaucoup même) ont voulu forcer une utilisation du *Critère d'Abel.* Là non plus, les hypothèses imposées sur la fonction g dans l'énoncé ne s'y prêtaient pas.

5°) *Exprimons I_n comme somme de n réels $\geqslant 0$, en calculant chaque terme de cette somme.*

On va partir du résultat de la question **2°**). En effet, du fait que $f_n(t) = f_1(t)\varphi_n(t)$, ce résultat entraîne :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left[f_1(t) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} g_k(t) \right] \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n-1} f_1(t) \cdot g_k(t) \right] \mathrm{d}t. \qquad (\textbf{\textit{E1.13}})$$

où $g_k(t) = \mathrm{th}^{2k} t$, $\forall\, k \in \{\,0, 1, \cdots, n-1\}$ et $\forall\, t \in \mathrm{IR}$. Posons alors : $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(t) \cdot g_k(t)\ \mathrm{d}t$.

Comme g_k est une fonction continue et bornée sur IR, il vient, d'après la question précédente, que J_k est une intégrale convergente. Par conséquent, $(\textbf{\textit{E1.13}})$ entraîne :

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{+\infty} f_1(t) \cdot g_k(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} J_k, \qquad (\textbf{\textit{E1.14}})$$

soit une expression de I_n sous forme de somme de n réels $\geqslant 0$ car, du fait que g_k est à valeurs réelles $\geqslant 0$ sur IR, on déduit que l'intégrale convergente $J_k \in \mathrm{IR}_+$.

- ***Calcul de*** J_k**,** $\forall\, k \in \{\,0, 1, \cdots, n-1\}$.

On sait déjà que J_k est une ***I.I.S.*** en $+\infty$ convergente. Sa valeur numérique est donc donnée par :

$$J_k = \lim_{X \longrightarrow +\infty} F(X), \text{ avec, } \forall\, X \in [\,0\,,\,+\infty\,[,\ F(X) = \int_0^X f_1(t)\cdot g_k(t)\ dt = \int_0^X (1-\text{th}^2 t)\cdot(\text{th}^{2k} t)\ dt.$$

$$\text{Or, } F(X) = \int_0^X (\text{th}\, t)'\cdot(\text{th}^{2k} t)\, dt = \left[\frac{\text{th}^{2k+1} t}{2k+1}\right]_{t=0}^{t=X} = \frac{\text{th}^{2k+1}X - \text{th}^{2k+1}0}{2k+1}\ ;$$

$$\text{et } k \geqslant 0 \implies 2k+1 \geqslant 1 \implies \text{th}^{2k+1}0 = (\text{th}\, 0)^{2k+1} = 0^{2k+1} = 0 \implies F(X) = \frac{\text{th}^{2k+1}X}{2k+1}\ ;$$

$$\implies J_k = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \frac{\text{th}^{2k+1}X}{2k+1}, \text{ i.e. } \boxed{J_k = \frac{1}{2k+1}} \quad (\text{car } \lim_{X \longrightarrow +\infty} \text{th}\, X = 1).$$

- • • ***Conclusion :*** $\boxed{I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}}$.

6°) a) *Trouvons la nature de la série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$ ***et de rang de départ*** $n = 0$.

On a, $\forall\, n \geqslant 1 :\ 2n+1 = 2n\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) = 1, \implies 2n+1 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} 2n,$

$$\implies \frac{1}{2n+1} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}, \text{ i.e. } u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n} = \frac{A}{n^\alpha}, \text{ avec : } \begin{cases} A = 1/2 \in \mathbb{R}_+^*, \\ \alpha = 1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Comme $\alpha \leqslant 1$, alors, d'après la ***Règle de Riemann pour les séries***, $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} u_n \text{ est divergente}}$.

b) *Déduisons la limite de* I_n ***quand*** $n \longrightarrow +\infty$.

Posons, $\forall\, N \in \mathbb{N} :\ S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n = \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{1}{2n+1}$, la somme partielle de rang N de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$.

On a alors les faits suivants :

1. D'après la question précédente, cette série est divergente. Par conséquent, sa suite de sommes partielles $(S_N)_{N \geqslant 0}$ est divergente (comme suite numérique).
2. Il s'agit d'une série à termes $u_n \geqslant 0$. Il s'ensuit que $(S_N)_{N \geqslant 0}$ est une suite croissante de réels $\geqslant 0$.
3. Puisque la suite réelle $(S_N)_{N \geqslant 0}$ est donc croissante et divergente, alors $\boxed{\lim\limits_{N \longrightarrow +\infty} S_N = +\infty}$.
4. Or, d'après **5°)**, on a, $\forall\, n \in \mathbb{N}^* :\ I_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{2k+1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k \implies \boxed{I_n = S_{n-1}}$.
5. Ainsi, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} I_n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_{n-1} = \lim\limits_{N \longrightarrow +\infty} S_N \implies \boxed{\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} I_n = +\infty}$.

- ***Disons pourquoi cette limite était intuitivement prévisible.***

Observons que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ est une *suite de fonctions numériques* sur $\mathbb{R}$ vérifiant, en tout $t \in \mathbb{R}$:

$$|\,\text{th}\, t\,| < 1 \implies \lim_{n \longrightarrow +\infty} \text{th}^{2n} t = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (\text{th}\, t)^{2n} = 0 \implies \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(t) = 1\ ;$$

$\implies$ la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 0}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ vers la fonction constante égale à 1.

Par conséquent, dans une certaine intuition, on pouvait (seulement) suspecter qu'il y avait des chances que : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} dt$. Cette dernière étant une ***I.I.S.*** en $+\infty$, divergente et de fonction $\geqslant 0$, on a envie de lui donner la valeur $+\infty$ car pour $F(X) = \displaystyle\int_0^X dt = X$, on a $\lim\limits_{X \longrightarrow +\infty} F(X) = +\infty$. D'où l'intuition.

FIN de l'EXERCICE 1

****** EXERCICE 2 ****** ***Soit*** $A = \sum_{n=p+q}^{+\infty} \frac{\cos(\omega n - \omega q)}{5^n}$***, où*** $\omega \in \mathbb{R}$ ***et*** $p, q \in \mathbb{N}$.

1°) ***Sans chercher à calculer*** A***, montrons que*** $A \in \mathbb{R}$.

Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant p+q)$: $u_n = \frac{\cos(\omega n - \omega q)}{5^n}$. On a donc : $A = \sum_{n=p+q}^{+\infty} u_n$.

Comme la suite $(u_n)_{n \geqslant p+q}$ est ***à valeurs réelles***, alors :

pour montrer que $A \in \mathbb{R}$***, il suffit de montrer que la série numérique*** $\sum_{n \geqslant p+q} u_n$ ***est convergente***.

Commençons par le rappel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos x| \leqslant 1$ et $5^x > 0$. Il s'ensuit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (n \geqslant p+q), \ 0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{1}{5^n}. \qquad (\textbf{\textit{E2.1}})$$

Or $\sum_{n \geqslant p+q} \frac{1}{5^n} = \sum_{n \geqslant p+q} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ est une ***série géométrique*** de raison $z = \frac{1}{5}$ / $|z| = \frac{1}{5} < 1$,

$$\Longrightarrow \text{ la série numérique } \sum_{n \geqslant p+q} \frac{1}{5^n} \text{ est convergente.} \qquad (\textbf{\textit{E2.2}})$$

Mais, d'après le ***Critère de comparaison des séries à termes*** $\geqslant 0$,

$$(\textbf{\textit{E2.1}}) \text{ et } (\textbf{\textit{E2.2}}) \Longrightarrow \text{ la série numérique } \sum_{n \geqslant p+q} |u_n| \text{ est convergente,}$$

$\Longrightarrow$ la série numérique $\sum_{n \geqslant p+q} u_n$ est absolument convergente, $\Longrightarrow \sum_{n \geqslant p+q} u_n$ est convergente,

$\Longrightarrow$ sa somme (totale) $A = \sum_{n=p+q}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R}$, car, de plus, $u_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant p+q)$. ***Cqfd.***

••• ***Remarque/Commentaire n°1-Exo2 :***

Encore une fois, la nature d'une série géométrique $\sum_{n \geqslant n_0} z^n$ (avec la raison $z \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) , est un résultat du Cours (donc censé être connu) : *elle converge (et même absolument) si* $|z| < 1$, *et diverge si* $|z| \geqslant 1$, ce qui fait 2 conditions assez triviales à vérifier.

De ce fait, étudier la nature d'une telle série par toute autre approche ou critère (du genre ***Règle*** « $\boldsymbol{n^\alpha u_n}$ » ou ***Règle de Cauchy***) est inefficace et étale plutôt une méconnaissance du Cours, et donc le peu de travail pour sa compréhension et sa maîtrise. Il faut savoir reconnaître une série géométrique chaque fois qu'on en a une devant soi, ce qui est, là aussi, plutôt trivial.

••• ***Remarque/Commentaire n°2-Exo2 :***

Nous avons proposé, ci-dessus, une seule méthode pour prouver la convergence de la série $\sum_{n \geqslant p+q} \frac{\cos(\omega n - \omega q)}{5^n}$ parce que cette méthode est, de très loin la plus efficace pour ce travail (avec une méthode alternative voisine utilisant un ***passage temporaire dans le plan complexe***).

La convergence de cette série pouvait, évidemment, s'établir par d'autres approches que celle que nous avons utilisée, mais de manière incomparablement plus compliquée, comme ont pu le constater les copies qui s'y sont lancées. En effet, cela requérait souvent de mener une discussion par rapport au réel ω, notamment selon que $\omega \in 2\pi\mathbb{Z}$ ou $\omega \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$. Mais beaucoup n'y ont même pas pensé. Juste à titre illustratif, voici 2 assertions populairement lues dans les copies :

$$\frac{\cos(\omega q)}{5^n} \xrightarrow{\searrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sin(\omega q)}{5^n} \xrightarrow{\searrow} 0.$$

Malheureusement, la partie sur la décroissance n'est vraie que lorsque le réel ω et l'entier q sont tels que $\cos(\omega q) \geqslant 0$ et $\sin(\omega q) \geqslant 0$.

2°) *Calculons A, en simplifiant le résultat autant que possible.*

Remarquons d'abord que, $\forall\, n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant p+q)$: $u_n = \dfrac{\cos(\omega n - \omega q)}{5^n} = \dfrac{\cos[\omega(n-q)]}{5^n}$.

Cette remarque suggère d'effectuer, dans la somme infinie A, le changement d'indice $k = n - q$:

$$A = \sum_{n=p+q}^{+\infty} \frac{\cos[\omega(n-q)]}{5^n} = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{\cos(\omega k)}{5^{k+q}} = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{\cos(\omega k)}{5^k 5^q} = \frac{B}{5^q}, \quad \text{avec } B = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{\cos(\omega k)}{5^k}. \qquad (\textbf{\textit{E2.3}})$$

Ainsi, pour obtenir la valeur de A, il suffit de calculer d'abord celle de B. Or, $B = \sum_{k=p}^{+\infty} v_k$, avec :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ (k \geqslant p), \quad v_k = \frac{\cos(\omega k)}{5^k} = \frac{1}{5^k} \cdot \mathbf{Re}(e^{i\omega k}) = \mathbf{Re}\left(\frac{1}{5^k} \cdot e^{i\omega k}\right) \quad (\text{car } \frac{1}{5^k} \in \mathbb{R}),$$

$$\Longrightarrow \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\ (k \geqslant p), \ v_k = \mathbf{Re}(w_k), \ \text{où} \ w_k = \frac{e^{i\omega k}}{5^k} = \frac{(e^{i\omega})^k}{5^k} = \left(\frac{e^{i\omega}}{5}\right)^k = z^k, \ \text{avec } z = \frac{e^{i\omega}}{5}.$$

La série numérique à termes complexes $\sum_{k \geqslant p} w_k$ est une ***série géométrique*** de raison z vérifiant :

$$|z| = \left|\frac{e^{i\omega}}{5}\right| = \frac{|e^{i\omega}|}{5} = \frac{1}{5} < 1,$$

$\Longrightarrow$ $\sum_{k \geqslant p} w_k$ est une série géométrique convergente et sa somme (totale) est donc donnée par :

$$C = \sum_{k=p}^{+\infty} w_k = \frac{w_p}{1-z} = \frac{z^p}{1-z} = \frac{\left(\frac{e^{i\omega}}{5}\right)^p}{1 - \frac{e^{i\omega}}{5}} = \frac{1}{5^{p-1}} \cdot \frac{e^{ip\omega}}{5 - e^{i\omega}} \ ; \qquad (\textbf{\textit{E2.4}})$$

$$\Longrightarrow \quad B = \sum_{k=p}^{+\infty} v_k = \sum_{k=p}^{+\infty} \mathbf{Re}(w_k) = \mathbf{Re}\left(\sum_{k=p}^{+\infty} w_k\right) = \mathbf{Re}(C). \qquad (\textbf{\textit{E2.5}})$$

Or, on a : $\dfrac{e^{ip\omega}}{5 - e^{i\omega}} = \dfrac{\cos(p\omega) + i\sin(p\omega)}{5 - \cos\omega - i\sin\omega} = \dfrac{[\cos(p\omega) + i\sin(p\omega)] \cdot (5 - \cos\omega + i\sin\omega)}{(5 - \cos\omega - i\sin\omega)(5 - \cos\omega + i\sin\omega)}$;

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{Re}\left(\frac{e^{ip\omega}}{5 - e^{i\omega}}\right) = \frac{(5 - \cos\omega)\cos(p\omega) - (\sin\omega)\sin(p\omega)}{(5-\cos\omega)^2 + \sin^2\omega}$$

$$= \frac{5\cos(p\omega) - [\cos\omega\cos(p\omega) + (\sin\omega)\sin(p\omega)]}{25 - 10\cos\omega + \cos^2\omega + \sin^2\omega}$$

$$= \frac{5\cos(p\omega) - \cos(p\omega - \omega)}{25 - 10\cos\omega + 1} = \frac{5\cos(p\omega) - \cos[(p-1)\omega]}{26 - 10\cos\omega}. \qquad (\textbf{\textit{E2.6}})$$

$(\textbf{\textit{E2.4}})$, $(\textbf{\textit{E2.5}})$ et $(\textbf{\textit{E2.6}})$ $\Longrightarrow$ $B = \dfrac{1}{5^{p-1}} \cdot \dfrac{5\cos(p\omega) - \cos[(p-1)\omega]}{26 - 10\cos\omega}$.

Avec cette valeur de B dans $(\textbf{\textit{E2.3}})$, on arrive finalement à : $\boxed{A = \dfrac{1}{5^{p+q-1}} \cdot \dfrac{5\cos(p\omega) - \cos[(p-1)\omega]}{26 - 10\cos\omega}}$.

• • • *Remarque/Commentaire n° 3-Exo2 :*

La ***valeur de la somme d'une série géométrique convergente*** $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ ***de raison*** z (i.e. avec $z \in \mathbb{C} / \ |z| < 1$), est un résultat du Cours (énoncé et démontré), et censé être bien connu :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \frac{1^{er} \ \textit{terme (dans la somme)}}{1 - \textit{(raison)}} = \frac{u_{n_0}}{1-z}.$$

Par conséquent, calculer une telle somme en revenant à des arguments de niveau Terminale (comme cela s'est trop souvent lu dans les copies) est grossièrement inefficace (d'abord en termes de gestion du temps d'examen) pour le niveau où nous sommes censés être, et traduit davantage une méconnaissance du Cours, et donc un travail insuffisant pour sa compréhension et sa maîtrise.

FIN de l'EXERCICE 2

****** EXERCICE 3 ****** ***Etudions la nature des séries :***

•• $\boxed{\textit{(1)} \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \dfrac{\cos(5n\pi)}{n}}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}^* : \; u_n = (-1)^n \dfrac{\cos(5n\pi)}{n}$.

En partant du résultat classique $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; \cos(n\pi) = (-1)^n}$, il vient, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, comme $5n \in \mathbb{N}$:

$$\cos(5n\pi) = (-1)^{5n} = [\,(-1)^5\,]^n = (-1)^n \implies u_n = (-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{2n}}{n}, \quad \text{i.e.} \quad u_n = \frac{1}{n},$$

$\implies \sum_{n \geqslant 1} u_n = \sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$, la *série harmonique*, laquelle diverge.

• ***Conclusion :*** $\boxed{\textbf{\textit{La série numérique}} \sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \dfrac{\cos(5n\pi)}{n} \textbf{\textit{ est divergente}}}$.

> ••• ***Remarque/Commentaire n° 1-Exo3 :***
> Ainsi, et contrairement à ce qui a été populairement lu dans les copies, cette série ne converge
> – ni par le ***Critère des séries alternées*** (vu qu'elle n'est même pas alternée. . .) ;
> – ni par le ***Critère des séries trigonométriques***.

•• $\boxed{\textit{(2)} \sum_{n \geqslant 1} \dfrac{\operatorname{Arctg} n}{\sqrt[3]{\operatorname{sh}(2n)}}}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}^* : \; u_n = \dfrac{\operatorname{Arctg} n}{\sqrt[3]{\operatorname{sh}(2n)}} \geqslant 0$.

••• ***Nous proposons 2 méthodes de degrés d'efficacité relativement comparables.***

• ***Méthode 1.***

On sait que, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant \operatorname{Arctg} x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $\operatorname{sh}(2x) > 0$. D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; 0 \leqslant u_n \leqslant v_n, \quad \text{avec } v_n = \frac{\pi/2}{\sqrt[3]{\operatorname{sh}(2n)}}. \qquad (\textbf{\textit{E3.1}})$$

Montrons alors que la série à termes $\geqslant 0$, $\sum_{n \geqslant 1} v_n$, est convergente. Pour cela, partons de :

$$\operatorname{sh}(2n) = \frac{e^{2n} - e^{-2n}}{2} = \frac{e^{2n}}{2}(1 - e^{-4n}) \quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} (1 - e^{-4n}) = 1, \qquad (\textbf{\textit{E3.2}})$$

$$\implies \operatorname{sh}(2n) \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{2n}}{2} \implies \sqrt[3]{\operatorname{sh}(2n)} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{\frac{e^{2n}}{2}} = \frac{e^{2n/3}}{\sqrt[3]{2}}. \qquad (\textbf{\textit{E3.3}})$$

$$\implies v_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi \sqrt[3]{2}}{2} e^{-2n/3} = \frac{\pi}{\sqrt[3]{4}} \left(e^{-2/3}\right)^n = \lambda \rho^n, \text{ avec } \lambda = \frac{\pi}{\sqrt[3]{4}} \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \rho = e^{-2/3} \in \mathbb{R}_+.$$

Comme $\rho < 1$, alors, d'après la ***Règle*** « $\lambda \rho^n$ », la série $\sum_{n \geqslant 1} v_n$ est convergente. $\qquad (\textbf{\textit{E3.4}})$

Finalement, d'après le ***Critère de comparaison des séries à termes*** $\geqslant 0$,

$$(\textbf{\textit{E3.1}}) \text{ et } (\textbf{\textit{E3.4}}) \implies \boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 1} \frac{\operatorname{Arctg} n}{\sqrt[3]{\operatorname{sh}(2n)}} \text{ est convergente}}.$$

• ***Méthode 2.***

Ici, on démarre par (***E3.2***) et (***E3.3***) de la ***Méthode 1***. Mais ensuite, on remarque que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \operatorname{Arctg} n = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}^* \implies \operatorname{Arctg} n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}. \qquad (\textbf{\textit{E3.5}})$$

Or, (***E3.3***) et (***E3.5***) $\implies u_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \dfrac{\pi \sqrt[3]{2}}{2} e^{-2n/3} = \dfrac{\pi}{\sqrt[3]{4}} \left(e^{-2/3}\right)^n = \lambda \rho^n$, avec $\begin{cases} \lambda = \dfrac{\pi}{\sqrt[3]{4}} \in \mathbb{R}_+^*, \\ \rho = e^{-2/3} \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$

Comme $\rho < 1$, alors, d'après la ***Règle*** « $\lambda \rho^n$ », $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 1} \dfrac{\operatorname{Arctg} n}{\sqrt[3]{\operatorname{sh}(2n)}} \text{ est convergente}}$.

•• $\boxed{\textit{(3)} \sum_{n \geqslant 0} (\operatorname{sh} n - \operatorname{ch} n)}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = \operatorname{sh} n - \operatorname{ch} n \leqslant 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh} x < \operatorname{ch} x$).

On a, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{e^n - e^{-n}}{2} - \dfrac{e^n + e^{-n}}{2} = -e^{-n} = -(e^{-1})^n$,

$\Longrightarrow \sum_{n \geqslant 0} u_n = \sum_{n \geqslant 0} [-(e^{-1})^n]$, série géométrique de 1er terme $u_0 = -1$ et de raison $q = e^{-1}$.

Comme $|q| = e^{-1} < 1$, alors $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} (\operatorname{sh} n - \operatorname{ch} n) \text{ est convergente}}$.

$\boxed{\textit{(4)} \sum_{n \geqslant 0} (1 - \operatorname{th} n) \cdot \operatorname{ch}^2 n}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = (1 - \operatorname{th} n) \cdot \operatorname{ch}^2 n \geqslant 0$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th} x < 1$).

On sait que, $\forall x \in \mathbb{R}$: $1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ (car $1 - \operatorname{th}^2 x = 1 - \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}$),

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1 - \operatorname{th} n}{1 - \operatorname{th}^2 n} = \frac{1}{1 + \operatorname{th} n}.$$

Or, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \operatorname{th} n = 1 \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \dfrac{1}{2} \neq 0 \Longrightarrow$ $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} (1 - \operatorname{th} n) \cdot \operatorname{ch}^2 n \text{ est divergente}}$.

> ••• ***Remarque/Commentaire n° 2-Exo3 :***
> On pouvait aussi partir de :
> $u_n = \left(1 - \dfrac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch} n}\right) \cdot \operatorname{ch}^2 n = (\operatorname{ch} n - \operatorname{sh} n) \cdot \operatorname{ch} n = e^{-n} \cdot \dfrac{e^n + e^{-n}}{2} = \dfrac{1 + e^{-2n}}{2} \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$.

•• $\boxed{\textit{(5)} \sum_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + \cos n}}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + \cos n}$.

Partons de ce que : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \cdot \dfrac{1}{1 + x}$, avec $x = \dfrac{\cos n}{\sqrt[3]{n}}$.

On sait que quand $n \longrightarrow +\infty$, $x \longrightarrow 0$ (car $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \longrightarrow 0$ et $\cos n$ est bornée). D'où, quand $n \longrightarrow +\infty$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3) = 1 - \frac{\cos n}{\sqrt[3]{n}} + \left(\frac{\cos n}{\sqrt[3]{n}}\right)^2 + O\left(\frac{\cos n}{\sqrt[3]{n}}\right)^3 = 1 - \frac{\cos n}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\cos^2 n}{n^{2/3}} + O\left(\frac{\cos^3 n}{n}\right),$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \cdot \left[1 - \frac{\cos n}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\cos^2 n}{n^{2/3}} + O\left(\frac{\cos^3 n}{n}\right)\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} - \frac{(-1)^n \cos n}{n^{2/3}} + \frac{(-1)^n \cos^2 n}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \cdot O\left(\frac{\cos^3 n}{n}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} - \frac{\cos(n + n\pi)}{n^{2/3}} + \frac{(-1)^n [1 + \cos(2n)]}{2n} + O\left(\frac{(-1)^n \cos^3 n}{n^{4/3}}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} - \frac{\cos[n(1+\pi)]}{n^{2/3}} + \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{(-1)^n \cos(2n)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right) \quad \text{(car } (-1)^n \cos^3 n \text{ est bornée)}
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{u_n = (-1)^n \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dfrac{1}{2n}\right) - \dfrac{\cos[n(1+\pi)]}{n^{2/3}} + \dfrac{\cos[n(2+\pi)]}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^{4/3}}\right)}$. (***E3.6***)

• ***Nature de la série*** $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ ***, avec*** $a_n = (-1)^n \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dfrac{1}{2n}\right)$.

C'est une série alternée, car $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dfrac{1}{2n} \geqslant 0$. De plus, $|a_n| = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dfrac{1}{2n} \searrow 0$;

$\Longrightarrow$ d'après le ***Critère des séries alternées***, $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 1} a_n \text{ est convergente}}$. (***E3.7***)

• ***Nature de la série*** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n$ ***, avec*** $b_n = \dfrac{\cos[\,n(1+\pi)\,]}{n^{2/3}}$.

On observe que $b_n = \gamma_n \cos(n\theta)$, avec : $\gamma_n = \dfrac{1}{n^{2/3}} \searrow 0$ et $\theta = 1+\pi \in \mathbb{R}\setminus(2\pi\mathbb{Z})$;

$\Longrightarrow$ d'après le ***Critère des séries trigonométriques***, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n \text{ est convergente}}$. (***E3.8***)

• ***Nature de la série*** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} c_n$ ***, avec*** $c_n = \dfrac{\cos[\,n(2+\pi)\,]}{2n}$.

Ici aussi $c_n = \gamma_n \cos(n\theta)$, avec : $\gamma_n = \dfrac{1}{2n} \searrow 0$ et $\theta = 2+\pi \in \mathbb{R}\setminus(2\pi\mathbb{Z})$;

$\Longrightarrow$ d'après le ***Critère des séries trigonométriques***, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} c_n \text{ est convergente}}$. (***E3.9***)

• ***Nature de la série*** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} d_n$ ***, avec*** $d_n = O\Big(\dfrac{1}{n^{4/3}}\Big)$.

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{4/3}}$ est une ***série de Riemann*** convergente, car de la forme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$ avec $\alpha = 4/3 > 1$. Etant à termes $\geqslant 0$, elle donc aussi absolument convergente. Puisque $d_n = O\Big(\dfrac{1}{n^{4/3}}\Big)$ quand $n \longrightarrow +\infty$, il s'ensuit :

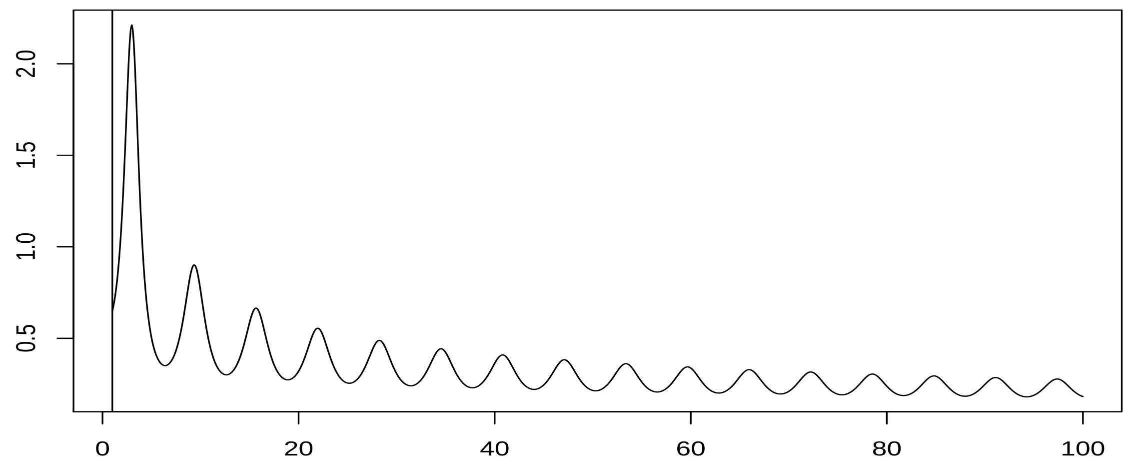
$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} d_n \text{ est aussi absolument convergente, et donc convergente}}. \qquad (\textbf{\textit{E3.10}})$$

• ***Conclusion :*** (***E3.6***) à (***E3.10***) $\Longrightarrow$ $\boxed{\textbf{\textit{La série numérique}} \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+\cos n} \textbf{\textit{ est convergente}}}$.

••• ***Remarque/Commentaire n° 3-Exo3 :***

La série ***(5)***, ci-dessus, converge donc. Sauf qu'elle ne converge pas par le ***Critère des séries alternées***. Certes, c'est bien une série alternée et $|\,u_n\,| = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}+\cos n} \Longrightarrow \displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} |\,u_n\,| = 0$.

Cependant, il y a une hypothèse cruciale du ***Critère des séries alternées*** qui n'est pas satisfaite par cette série, et ce malgré le forcing invétéré de certain(e)s dans leurs copies. En effet, $(|\,u_n\,|)_{n\geqslant 1}$ n'est pas une suite décroissante. Elle oscille indéfiniment, même si ces oscillations s'amortissent vers 0 quand $x \longrightarrow +\infty$. Pour l'illustrer, voici un graphique représentant le tracé de la fonction $f(x) = 1/(\sqrt[3]{x}+\cos x)$ sur l'intervalle $[\,1\,,\,100\,]$:



Courbe de la fonction $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+\cos x}}$ ***sur l'intervalle*** $\boldsymbol{[\,1\,,\,100\,]}$

• • $\boxed{\textit{(6)} \sum_{n \geqslant 0} e^{-3in^2}}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-3in^2} \in \mathbb{C}$.

On a, $\forall n \in \mathbb{N}$: $|u_n| = \left| e^{-3in^2} \right| = 1$ (car $e^{-3in^2} = e^{i\theta}$, et $\theta = -3n^2 \in \mathbb{R} \implies \left| e^{i\theta} \right| = 1$) ;

$\implies \lim_{n \longrightarrow +\infty} |u_n| = 1 \implies |u_n| \not\longrightarrow 0 \implies \boxed{u_n \not\longrightarrow 0}$, $\implies$ $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 0} e^{-3in^2} \text{ est divergente}}$.

> • • • ***Remarque/Commentaire n° 4-Exo3 :***
> La série ***(6)***, ci-dessus, est bien ***à termes complexes***. Elle n'est pas à termes réels $\geqslant 0$ comme lu dans certaines copies, et ne converge pas d'après la ***Règle*** « $\boldsymbol{n^\alpha u_n}$ ».
> La manière de traiter les séries à termes complexes (ou à termes réels quelconques) est explicitée dans le document de Cours remis sur les séries, et l'a encore été davantage en Cours.

> • • • ***Remarque/Commentaire n° 5-Exo3 :***
> Dans le traitement de la série ***(6)***, les un(e)s et les autres auront pris la peine de bien noter (et comme cela a été bien précisé en Cours) que l'expression « ne tend pas vers » se note : $\not\longrightarrow$ et non $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\backslash\;\;$, comme populairement lu dans les copies et selon l'inspiration, voire l'*humeur artistique* des un(e)s et des autres ***!!!***

FIN de l'EXERCICE 3

**** EXERCICE 4 ****

On pose : $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)\,!}$, $I = \displaystyle\int_0^{10} \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{x}\,) - 1}{x}\, \mathrm{d}x$, $W = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{10^k}{(2k)\,! \cdot k}$, $T = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n\, x^n$.

1°) *Sans chercher à calculer ni $F(x)$, ni I, ni W :*

a) *Montrons que $W \in \mathbb{R}$.*

Posons, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$: $w_k = \dfrac{10^k}{(2k)\,! \cdot k}$. On a ainsi : $W = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} w_k$.

Comme la suite $(w_k)_{k \geqslant 1}$ est ***à valeurs réelles***, alors :

pour montrer que $W \in \mathbb{R}$, il suffit de montrer que la série numérique $\sum_{k \geqslant 1} w_k$ est convergente.

Puisque $w_k > 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, alors on peut écrire : $\left| \dfrac{w_{k+1}}{w_k} \right| = \dfrac{w_{k+1}}{w_k} = \dfrac{10^{k+1}}{[\,2(k+1)\,]\,! \cdot (k+1)} \times \dfrac{(2k)\,! \cdot k}{10^k}$,

$$\Longrightarrow \left| \frac{w_{k+1}}{w_k} \right| = \frac{10^{k+1}}{10^k} \times \frac{(2k)\,!}{[\,2(k+1)\,]\,!} \times \frac{k}{k+1} = \frac{5k}{(2k+1)(k+1)^2},$$

$$\Longrightarrow \lim_{k \longrightarrow +\infty} \left| \frac{w_{k+1}}{w_k} \right| = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{5k}{(2k+1)(k+1)^2} = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{5k}{2k \cdot k^2} \Longrightarrow \lim_{k \longrightarrow +\infty} \left| \frac{w_{k+1}}{w_k} \right| = 0 < 1,$$

$\Longrightarrow$ D'après la ***Règle de d'Alembert***, la série $\sum_{k \geqslant 1} w_k$ converge.

$\Longrightarrow$ sa somme (totale) $W = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} w_k \in \mathbb{R}$, car, de plus, $w_k \in \mathbb{R}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$. ***Cqfd.***

• • • *Remarque/Commentaire n° 1-Exo4 :*

Les un(e)s et les autres auront donc noté que si $w_k = \dfrac{10^k}{(2k)\,! \cdot k}$, alors :

$$w_{k+1} = \frac{10^{k+1}}{[\,2(k+1)\,]\,! \cdot (k+1)} = \frac{10^{k+1}}{(2k+2)\,! \cdot (k+1)}, \quad \text{et non} \quad w_{k+1} = \frac{10^{k+1}}{(2k+1)\,! \cdot (k+1)},$$

cette dernière égalité ayant été lue dans un trop grand nombre de copies !!!

Ceci montre que le ***parenthésage est fondamental dans la rédaction mathématique***. En effet, il faut placer des parenthèses (et/ou des crochets) partout où il y a des risques d'ambiguïté dans l'interprétation d'une expression mathématique. Sinon, cela peut produire des ***erreurs fatales*** comme pour certain(e)s ci-dessus. Ils/elles doivent retenir que $2k+1$ n'est pas égal à $2(k+1)$.

b) *Montrons que I est une intégrale définie (au sens de Riemann).*

Posons, $\forall\, x \in \,]\,0\,,\,10\,]$: $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(\sqrt{x}\,) - 1}{x}$. On a donc : $I = \displaystyle\int_0^{10} f(x)\, \mathrm{d}x$.

Observons d'abord qu'à première vue, I est une ***I.I.S.*** en 0^+, car f est continue sur $]\,0\,,\,10\,]$.

Alors pour montrer que I est une intégrale définie au sens de Riemann, il suffit de montrer que la singularité finie qu'elle semble avoir en $x = 0$ n'en est, en réalité, pas une. Pour cela, il faut montrer que f est bornée au voisinage droit de 0. Une condition suffisante pour cela est que f admette une ***limite finie*** à droite en $x = 0$. Or, effectivement, on a, quand $x \longrightarrow 0$ $(x > 0)$:

$$u = \sqrt{x} \longrightarrow 0 \implies \operatorname{ch} u = 1 + \frac{u^2}{2} + O(u^4) \implies \operatorname{ch}\sqrt{x} = 1 + \frac{(\sqrt{x})^2}{2} + O(\sqrt{x})^4, \text{ i.e. } \operatorname{ch}\sqrt{x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2),$$

$$\Longrightarrow \operatorname{ch}\sqrt{x} - 1 = \frac{x}{2} + O(x^2) \implies f(x) = \frac{\frac{x}{2} + O(x^2)}{x} = \frac{x}{2x} + O\Big(\frac{x^2}{x}\Big) = \frac{1}{2} + O(x), \text{ quand } x \underset{>}{\longrightarrow} 0,$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} \left[\frac{1}{2} + O(x) \right] \Longrightarrow \lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} f(x) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$

Ayant une limite finie à droite en 0, on déduit que f est bornée au voisinage droit de 0 ;
$\Longrightarrow$ 0 n'est pas une singularité dans I $\Longrightarrow$ I est une intégrale définie au sens de Riemann. ***Cqfd.***

> ••• ***Remarque/Commentaire n° 2-Exo4 :***
> Contrairement à ce qui a été lu dans certaines copies, il ne s'agissait donc pas ici de simplement démontrer que I était convergente.
> En effet, il faut retenir que pour une intégrale, être définie au sens de Riemann est une propriété autrement plus forte que d'être seulement convergente. Par exemple, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale impropre convergente, mais n'est pas une intégrale définie au sens de Riemann.

> ••• ***Remarque/Commentaire n° 3-Exo4 :***
> Après avoir calculé $\displaystyle\lim_{\substack{x \longrightarrow 0 \\ >}} f(x) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, on pouvait alternativement poursuivre en disant qu'alors on peut prolonger la fonction f par continuité à droite en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, I est aussi l'intégrale d'une ***fonction continue sur l'intervalle fermé borné*** $[\,0\,,\,10\,]$, et donc une intégrale définie au sens de Riemann.

c) ***Trouvons le domaine de définition $\mathcal{D}_F$ de la fonction F dans $\mathbb{C}$.***

Pour $x \in \mathbb{C}$, fixé, posons, $\forall\, k \in \mathbb{N}$: $u_k = \dfrac{x^{2k}}{(2k)\,!} \in \mathbb{C}$.

Notons alors que $\mathcal{D}_F = \Big\{ x \in \mathbb{C} \,/\; F(x) \text{ existe dans } \mathbb{C} \Big\} = \Big\{ x \in \mathbb{C} \,/\; \text{la série } \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} u_k \text{ converge} \Big\}$.

Déterminer $\mathcal{D}_F$ revient ainsi à mener une discussion sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} u_k$ selon les valeurs de x dans $\mathbb{C}$. Il s'agit donc d'une série à termes complexes. Compte tenu de la forme de son terme général u_k, le plus naturel est de penser à utiliser la *Règle de d'Alembert*. Cependant, ceci n'est pas possible pour $x = 0$, car alors $u_k = 0$, $\forall\, k \geqslant 1$, et donc le rapport u_{k+1}/u_k n'a pas de sens. De ce fait, nous distinguerons 2 cas :

- ***Cas 1 :*** $x = 0$.

  Alors on a : $u_0 = 1$ et, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = 0$;
  $\Longrightarrow$ la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} u_k$ converge en tant que série à termes nuls à partir d'un certain rang, $\Longrightarrow$ $0 \in \mathcal{D}_F$.

- ***Cas 2 :*** $x \in \mathbb{C}^*$.

  Alors, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $u_k \neq 0$ et donc on peut écrire : $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{x^{2(k+1)}}{[\,2(k+1)\,]\,!} \times \dfrac{(2k)\,!}{x^{2k}} = \dfrac{x^2}{(2k+2)(2k+1)}$,

$$\Longrightarrow \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{x^2}{(2k+2)(2k+1)}\right| = \frac{|\,x\,|^2}{(2k+2)(2k+1)}, \quad \text{car } \frac{1}{(2k+2)(2k+1)} \text{ est un réel } \geqslant 0 \ ,$$

$$\Longrightarrow \lim_{k \longrightarrow +\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{|\,x\,|^2}{(2k+2)(2k+1)} = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \frac{|\,x\,|^2}{(2k)(2k)} \Longrightarrow \lim_{k \longrightarrow +\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = 0 < 1,$$

$\Longrightarrow$ D'après la ***Règle de d'Alembert***, la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} u_k$ converge, $\Longrightarrow$ $x \in \mathcal{D}_F$.

•• ***Conclusion :*** $\boxed{\mathcal{D}_F = \mathbb{C}}$.

> ••• ***Remarque/Commentaire n° 4-Exo4 :***
> Evidemment ici, presque tout le monde a « calculé » le quotient $\dfrac{u_{k+1}}{u_k}$ sans se soucier si u_k pouvait être nul, et donc, en fait, sans considérer le cas $x = 0$. Et ce malgré les situations analogues soigneusement illustrées en classe. Alors, on va le répéter :
>
> ***La division d'un nombre A par un nombre B n'a de sens que si que B est non nul***.
>
> Dans la toute petite minorité des copies ayant pensé à singulariser le cas $x = 0$, malheureusement une précipitation intempestive a fait qu'elles ont presque toutes écrit que $u_k = 0$, sous-entendu pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors que cela n'est garanti qu'à partir du rang $k = 1$.

••• ***Remarque/Commentaire n° 5-Exo4 :***

Comme pour la question **1°)a)**, les un(e)s et les autres auront noté que si $u_k = \dfrac{x^{2k}}{(2k)\,!}$, alors :

$$u_{k+1} = \frac{x^{2(k+1)}}{[\,2(k+1)\,]\,!} = \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)\,!}, \quad \text{et non} \quad u_{k+1} = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!},$$

cette dernière expression ayant été lue dans un trop grand nombre de copies !!!

D'autre part, quand x est un nombre complexe arbitraire, $|\,x^2\,| = |\,x\,|^2$, et non $|\,x^2\,| = x^2$ comme ***populairement lue dans les copies !!!*** Pour $x \in \mathrm{I\!R}$, $|\,x^2\,| = x^2$ est vraie.

2°) a) ***Montrons que :*** $\forall\, x \in \mathrm{I\!R}$**,** $\operatorname{ch} x = F(x)$**.**

Par définition, on sait que : $\forall\, x \in \mathrm{I\!R}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Or, il a été vu en Classe que : $\forall\, x \in \mathbb{C}$, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,!}$. D'où, $\forall\, x \in \mathrm{I\!R}$: $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,!}$ et $e^{-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n\,!}$,

$$\Longrightarrow\ 2\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n\,!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{n\,!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[\,1 + (-1)^n\,] \cdot x^n}{n\,!}. \qquad \textbf{\textit{(E4.1)}}$$

Par ailleurs, $\forall\, n \in \mathrm{I\!N}$, on a : $1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Par conséquent, (***E4.1***) $\Longrightarrow\ 2\operatorname{ch} x = \displaystyle\sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{2\,x^n}{n\,!} \ \Longrightarrow\ \operatorname{ch} x = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)\,!} = F(x)$. ***Cqfd.***

••• ***Remarque/Commentaire n° 6-Exo4 :***

Pour répondre à cette question, certain(e)s ont démarré par :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \cdots + \frac{x^n}{n\,!} + o(x^n),$$
$$\text{ou par : } \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)\,!} + o(x^{2n}),$$

i.e. la ***formule de Taylor avec reste de Young***, centrée en 0, pour la fonction *exponentielle* ou pour la fonction *ch*.

Mais en partant de la sorte, que ce soit par l'une ou l'autre de ces 2 fonctions, ***ceci ne menait et ne pouvait mener nulle part*** ici. En effet, ces formules de Taylor-Young sont valables quand $x \longrightarrow 0$, alors qu'ici, on demandait de démontrer la validité de l'égalité $\operatorname{ch} x = F(x)$ pour tout réel x, et pas seulement pour les réels x proches de 0.

Certes en Cours, il a été fait allusion à la possibilité de démontrer ce genre d'égalité entre une fonction et une somme infinie (somme de série entière) en passant par une formule de Taylor, mais il avait bien été précisé : ***formule de Taylor avec reste de Lagrange !!!*** Effectivement ici, on aurait pu procéder de la sorte. Mais nous ne proposons pas cette solution ici, car connaissant l'expression de e^x sous forme de somme infinie en tout $x \in \mathrm{I\!R}$ énoncée en Cours, la solution proposée ci-dessus est nettement plus efficace dans le présent contexte. Fort heureusement, c'est celle qui a été lue dans une majorité des copies.

b) ***Déduisons que*** $I = W$ ***(permuter les symboles intégral et somme infinie est valide ici).***

Posons encore, $\forall\, x \in \,]\,0\,,\,10\,]$: $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(\sqrt{x}\,) - 1}{x}$. On a donc : $I = \displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

De **1°)a)**, on déduit qu'on peut prolonger la fonction f par continuité à droite en 0 en posant : $f(0) = \dfrac{1}{2}$.
Maintenant, de **2°)a)** ci-dessus, il vient, $\forall\, x \in \,]\,0\,,\,10\,]$:

$$\operatorname{ch}(\sqrt{x}\,) = F(\sqrt{x}\,) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x}\,)^{2k}}{(2k)\,!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)\,!} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)\,!} \ \Longrightarrow\ \operatorname{ch}(\sqrt{x}\,) - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)\,!},$$

$\Longrightarrow\ f(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)\,!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{(2k)\,!}$, expression qui est valable aussi pour $x = 0$. D'où :

$$I = \int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k-1}}{(2k)\,!}\right] \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\int_0^{10} \frac{x^{k-1}}{(2k)\,!}\,\mathrm{d}x\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(2k)\,!} \int_0^{10} x^{k-1}\,\mathrm{d}x\right], \quad (\boldsymbol{E4.2})$$

l'avant-dernière égalité découlant de ce que l'énoncé nous a dit d'admettre qu'il est valide ici de permuter les symboles intégral et somme infinie, et la dernière de la linéarité de l'intégrale définie au sens de Riemann.

Or, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{10} x^{k-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^k}{k}\right]_{x=0}^{x=10} = \frac{10^k}{k}$, ce qui, injecté dans ($\boldsymbol{E4.2}$), entraîne :

$$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(2k)\,!} \cdot \frac{10^k}{k}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{10^k}{(2k)\,!\cdot k} = W.\ \textbf{\textit{Cqfd.}}$$

c) *Utilisons ce dernier résultat pour calculer une approximation de I à 10^{-10} près.*

D'après la question précédente, il suffit de calculer une approximation de la somme infinie W avec une incertitude absolue $< Tol = 10^{-10}$. Or, rappelons que : $W = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} w_k$, avec $w_k = \dfrac{10^k}{(2k)\,!\cdot k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

Pour obtenir une valeur approchée de W à $Tol = 10^{-10}$ près, il suffit de considérer une somme partielle $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} w_k$, pour un rang N (à trouver et aussi petit que possible) vérifiant :

$$|\,W - S_N\,| < Tol. \qquad (\boldsymbol{E4.3})$$

Or, $W - S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} w_k - \sum_{k=1}^{N} w_k = \sum_{n=N+1}^{+\infty} w_k = R_N$. Ainsi, ($\boldsymbol{E4.3}$) $\iff |\,R_N\,| < Tol \iff R_N < Tol$, la dernière équivalence venant de ce qu'ayant affaire à une série à termes $\geqslant 0$, les valeurs absolues sont superflues autour des w_k et de R_N.

Pour trouver un rang N (aussi petit que possible) vérifiant $R_N < Tol$, nous allons exhiber une suite auxiliaire (ρ_N), ***plus maniable***, convergente vers 0 et vérifiant : $\forall\, N \in \mathbb{N}^*$, $R_N \leqslant \rho_N$. Une fois une telle suite trouvée, tout rang N satisfaisant $\rho_N < Tol$ vérifiera aussi $R_N < Tol$.

Pour trouver une suite (ρ_N) appropriée, nous partons de ce qu'à la question **1°)a)**, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} w_k$ (dont W est la somme) a été prouvée par la ***Règle de d'Alembert***, et il y a été observé que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{w_{k+1}}{w_k} = \frac{5k}{(2k+1)(k+1)^2}\ ;$$

$$\Longrightarrow \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{w_{k+1}}{w_k} \leqslant \frac{5(k+1)}{(2k+1)(k+1)^2} = \frac{5}{(2k+1)(k+1)},\ \text{ qui } \searrow 0\ ;$$

$$\Longrightarrow \forall\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, k \geqslant N+1\ (k \in \mathbb{N}),\ \frac{w_{k+1}}{w_k} \leqslant r_N, \quad \text{où } r_N = \frac{5}{(2N+3)(N+2)} \in [\,0\,,1\,[\ ;$$

$$\Longrightarrow \forall\, N \in \mathbb{N},\ R_N \leqslant \frac{w_{N+1}}{1-r_N}, \quad \text{i.e. } \boxed{R_N \leqslant \rho_N, \quad \text{avec } \rho_N = \frac{w_{N+1}}{1-r_N}}.$$

Ainsi, pour que $R_N < Tol$, il suffit que $\rho_N = \dfrac{w_{N+1}}{1-r_N} < Tol$. D'où le tableau de calculs suivant :

N	u_N	ρ_N	S_N	$\rho_N < 10^{-10}$
1	5	$3,12$	5	*FAUX*
2	$2,083\,333\,333\,333$	$5,64 \times 10^{-1}$	$7,083\,333\,333\,333$	*FAUX*
3	$4,629\,629\,629\,630 \times 10^{-1}$	$6,98 \times 10^{-2}$	$7,546\,296\,296\,296$	*FAUX*
4	$6,200\,396\,825\,397 \times 10^{-2}$	$5,96 \times 10^{-3}$	$7,608\,300\,264\,550$	*FAUX*
5	$5,511\,463\,844\,797 \times 10^{-3}$	$3,68 \times 10^{-4}$	$7,613\,811\,728\,395$	*FAUX*
6	$3,479\,459\,497\,978 \times 10^{-4}$	$1,71 \times 10^{-5}$	$7,614\,159\,674\,345$	*FAUX*
7	$1,638\,677\,942\,533 \times 10^{-5}$	$6,18 \times 10^{-7}$	$7,614\,176\,061\,124$	*FAUX*
8	$5,974\,346\,665\,484 \times 10^{-7}$	$1,78 \times 10^{-8}$	$7,614\,176\,658\,559$	*FAUX*
9	$1,735\,467\,440\,954 \times 10^{-8}$	$4,20 \times 10^{-10}$	$7,614\,176\,675\,914$	*FAUX*
10	$4,110\,317\,623\,312 \times 10^{-10}$	$8,24 \times 10^{-12}$	$7,614\,176\,676\,325$	*VRAI*

Ceci montre que $\rho_N < Tol$ est vérifié pour la première fois au rang $\boxed{N = 10}$, et qu'alors on a :

$\boxed{S_N = S_{10} \simeq 7,614\,176\,676}$, qui est donc une valeur approchée de W, et donc aussi de I, à 10^{-10} près.

> **••• *Remarque/Commentaire n° 7-Exo4* :**
> L'inégalité $k \leqslant k+1$ utilisée pour déduire une majoration simple et décroissante de $\dfrac{w_{k+1}}{w_k}$ ci-dessus est intéressante dans ce contexte parce qu'elle n'est pas brutale du fait que $k \sim k+1$ quand $k \longrightarrow +\infty$.

> **••• *Remarque/Commentaire n° 8-Exo4* :**
> Une approche alternative, un peu plus subtile mais pas vraiment plus efficace, consistait à remarquer que :
>
> $$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{w_{k+1}}{w_k} = \frac{5k}{(2k+1)(k+1)^2} = \frac{5 \cdot 2k}{2(2k+1)(k+1)^2}\ ;$$
>
> $$\Longrightarrow \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{w_{k+1}}{w_k} \leqslant \frac{5(2k+1)}{2(2k+1)(k+1)^2} = \frac{5}{2(k+1)^2},\ \text{ qui } \searrow 0\ ;$$
>
> $$\Longrightarrow \forall\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, k \geqslant N+1\ (k \in \mathbb{N}),\ \frac{w_{k+1}}{w_k} \leqslant r_N, \quad \text{où } r_N = \frac{5}{2(N+2)^2} \in [\,0\,,1\,[\ ;$$
>
> $$\Longrightarrow \forall\, N \in \mathbb{N},\ R_N \leqslant \frac{w_{N+1}}{1-r_N}, \quad \text{i.e.} \quad \boxed{R_N \leqslant \rho_N, \quad \text{avec } \rho_N = \frac{w_{N+1}}{1-r_N}}.$$

d) *Difficulté qu'aurait posée une tentative de calcul direct de I.*

Difficulté : impossible de trouver une expression maniable d'une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch}(\sqrt{x}) - 1}{x}$.

3°) *Une* série entière *est une série de la forme T, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique. Montrons alors que $F(x)$ est la somme d'une série entière, en précisant les coefficients a_n appropriés, en donnant d'abord a_0, a_1, a_2, a_3, avant d'extrapoler pour n quelconque.*

La fonction $F(x)$ est la somme de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$.

Or, on peut écrire $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{n \geqslant 0} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + a_4\, x^4 + \cdots$,

avec $\boxed{a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = \dfrac{1}{2!},\ a_3 = 0}$, et, plus généralement : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}}$

FIN de l'EXERCICE 4

FIN