

Applications linéaires continues, normes matricielles

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable

Exercice 1 *

On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par : $\forall P \in E, \|P\|_\infty = \sup \left\{ \left| \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \right|, n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Vérifier brièvement que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .
2. Soit f l'endomorphisme de E défini par $\forall P \in E, f(P) = XP$. Démontrer que l'application f est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et déterminer $\|f\|$.

[Correction ▼](#)

[005854]

Exercice 2 **

On munit $E = \ell^\infty(\mathbb{C})$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des suites bornées de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

On considère les endomorphismes Δ et C de $\ell^\infty(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall u \in E, \Delta(u) = v \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n \text{ et } \forall u \in E, C(u) = w \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Montrer que Δ et C sont continus sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et calculer leur norme.

[Correction ▼](#)

[005855]

Exercice 3 *** I

On munit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme 1 définie par $\forall f \in E, \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

On pose $T : E \rightarrow E$ et on admet que T est un endomorphisme de E .

$$\begin{aligned} f &\mapsto Tf : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

1. Démontrer que T est continu sur $(E, \|\cdot\|_1)$ et déterminer $\|T\|$.
2. Vérifier que la borne supérieure n'est pas atteinte.

[Correction ▼](#)

[005856]

Exercice 4 **

On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N définie par $\forall A \in E, N(A) = \sup_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}$ (on admet que N est une norme sur E).

Soit f l'application de E dans \mathbb{R} définie par $\forall A \in E, f(A) = \text{Tr}(A)$. Démontrer que l'application f est continue sur (E, N) et déterminer $\|f\|$.

[Correction ▼](#)

[005857]

Exercice 5 ***

Déterminer $s = \sup \left\{ \frac{\|AB\|}{\|A\|\|B\|}, (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2 \right\}$ quand $\|\cdot\|$ est

1. $\|\cdot\|_1$,
2. $\|\cdot\|_2$,

3. $\|\cdot\|_\infty$.

[Correction ▼](#)

[005858]

Exercice 6 *

Une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$), est-elle nécessairement une « norme trois barres » ?

[Correction ▼](#)

[005859]

Exercice 7 **

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, N(AB) \leq k(A)N(B)$.

[Correction ▼](#)

[005860]

Exercice 8 **

Existe-t-il une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) telle que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, N(AB) = N(A)N(B)$.

[Correction ▼](#)

[005861]

Exercice 9 ***

On pose $\forall X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Déterminer les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ respectivement associées aux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On notera $|||\cdot|||_1$ et $|||\cdot|||_\infty$ ces normes.

[Correction ▼](#)

[005862]

Exercice 10 **I

Pour $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\rho(A)$ le rayon spectral de A c'est-à-dire $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.

Montrer que $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), |||A|||_2 = \rho(A)$ où $|||A|||_2 = \sup \left\{ \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\}$.

[Correction ▼](#)

[005863]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. • Soit $P \in E$. Si on pose $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > n, a_k = 0$. Donc $\|P\|_\infty = \sup \left\{ \left| \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \right|, k \in \mathbb{N} \right\} = \max\{|a_k|, 0 \leq k \leq n\}$ existe dans \mathbb{R} .
- $\forall P \in E, \|P\|_\infty \geq 0$.
 - Soit $P \in E$. $\|P\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, |a_k| \leq 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, a_k = 0 \Rightarrow P = 0$.
 - Soient $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda P\|_\infty = \max\{|\lambda a_k|, 0 \leq k \leq n\} = |\lambda| \max\{|a_k|, 0 \leq k \leq n\} = |\lambda| \|P\|_\infty$.
 - Soient $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k \geq 0} b_k X^k$ deux polynômes. Pour $k \in \mathbb{N}$, $|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k| \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$ et donc $\|P + Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$.

$\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .

2. $\forall P \in E, \|f(P)\|_\infty = \|P\|_\infty$ et donc $\forall P \in E \setminus \{0\}, \frac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty} = 1$. On en déduit que $\sup \left\{ \frac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty}, P \in E \setminus \{0\} \right\} = 1$. Ceci montre tout à la fois que f est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et $\|f\| = 1$.

f est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et $\|f\| = 1$.

Correction de l'exercice 2 ▲

(La linéarité de Δ est claire et de plus Δ est un endomorphisme de E car si u est une suite bornée, $\Delta(u)$ l'est encore. Plus précisément,)

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |\Delta(u)_n| \leq |u_n| + |u_{n+1}| \leq 2\|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E, \|\Delta(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty.$$

Ceci montre que Δ est continu sur E et $\|\Delta\| \leq 2$. Ensuite, si u est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$ alors u est un élément non nul de E tel que $\|u\|_\infty = 1$ et $\|\Delta(u)\|_\infty = 2$. En résumé,

- $\forall u \in E \setminus \{0\}, \frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leq 2,$
- $\exists u \in E \setminus \{0\}, \frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 2.$

On en déduit que

Δ est continu sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et $\|\Delta\| = 2$.

(La linéarité de C est claire et C est un endomorphisme de E car si u est bornée, $C(u)$ l'est encore. Plus précisément,)

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, |(C(u))_n| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \|u\|_\infty = \|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E, \|C(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty.$$

Par suite T est continu sur E et $\|T\| \leq 1$. Ensuite, si u est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$ alors u est un élément non nul de E tel que $\|u\|_\infty = 1$ et $\|C(u)\|_\infty = 1$. En résumé,

- $\forall u \in E \setminus \{0\}, \frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leq 1,$
- $\exists u \in E \setminus \{0\}, \frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 1.$

On en déduit que

C est continu sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et $\|C\| = 1$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned}\|Tf\|_1 &= \int_0^1 |Tf(x)| dx = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t) dt \right| dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)| dt \right) dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| dt \right) dx = \int_0^1 \|f\|_1 dx = \|f\|_1.\end{aligned}$$

Ceci montre que $\forall f \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|Tf\|_1}{\|f\|_1} \leq 1$. Ceci montre que T est continu sur $(E, \|\cdot\|_1)$ et que $\|T\| \leq 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, posons $f_n(x) = (1-x)^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

puis pour $x \in [0, 1]$, $Tf_n(x) = \int_0^x (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1} (1 - (1-x)^{n+1})$ et donc

$$\|Tf_n\|_1 = \int_0^1 |Tf_n(x)| dx = \frac{1}{n+1} \int_0^1 (1 - (1-x)^{n+1}) dx = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|T\| \geq \frac{\|Tf_n\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{n+2}$.

En résumé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leq \|T\| \leq 1$ et donc $\|T\| = 1$.

T est continu sur $(E, \|\cdot\|_1)$ et $\|T\| = 1$.

2. Supposons qu'il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que $\|Tf\|_1 = \|f\|_1$. On en déduit que chaque inégalité écrite au début de la question 1) est une égalité et en particulier $\int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)| dt \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| dt \right) dx$ ou encore $\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| dt - \int_0^x |f(t)| dt \right) dx = 0$. Par suite, $\forall x \in [0, 1]$, $\int_0^1 |f(t)| dt - \int_0^x |f(t)| dt = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle) puis en dérivant la dernière inégalité, $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x)| = 0$ et finalement $f = 0$. Ceci est une contradiction et donc $\|T\|$ n'est pas atteinte.

Correction de l'exercice 4 ▲

L'application f est linéaire de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in E$.

$$\begin{aligned}|f(A)| &= |\text{Tr}(A)| \leq \sum_{i=1}^n |a_{i,i}| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \leq \sum_{i=1}^n N(A) = nN(A).\end{aligned}$$

Ceci montre déjà que f est continue sur (E, N) et que $\|f\| \leq n$. De plus, si $A = I_n \neq 0$, $\frac{|f(A)|}{N(A)} = \frac{n}{1} = n$. Donc

f est continue sur (E, N) et $\|f\| = n$.

Correction de l'exercice 5 ▲

• $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty = \max\{|a_{i,j}|, 1 \leq i, j \leq n\}$.

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. Posons $AB = (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$.
Pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$|c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n \|A\|_\infty \|B\|_\infty,$$

et donc, $\|AB\|_\infty \leq n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$. Ainsi, $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty} \leq n$.

De plus, pour $A_0 = B_0 = (1)_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$, $\|A_0\|_\infty = \|B_0\|_\infty = 1$ puis $\|A_0 B_0\|_\infty = \|nA_0\|_\infty = n$ et donc $\frac{\|A_0 B_0\|_\infty}{\|A_0\|_\infty\|B_0\|_\infty} = n$. Ceci montre que

$$\sup \left\{ \frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty}, (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2 \right\} = n.$$

En particulier, $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas une norme sous-multiplicative.

• $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} \|AB\|_1 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} |c_{i,j}| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \right) = \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} |a_{i,k}| |b_{k,j}| \\ &= \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} |a_{i,j}| |b_{k,l}| = \|A\|_1 \|B\|_1. \end{aligned}$$

Donc $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1} \leq 1$.

De plus, pour $A_0 = B_0 = E_{1,1}$, on a $A_0 B_0 = E_{1,1}$ et donc $\frac{\|A_0 B_0\|_1}{\|A_0\|_1\|B_0\|_1} = 1$. Ceci montre que

$$\sup \left\{ \frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1}, (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2 \right\} = 1.$$

En particulier, $\|\cdot\|_1$ est une norme sous-multiplicative.

• $\forall A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2}$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} \|AB\|_2^2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} c_{i,j}^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \\ &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2 \right) \text{ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{l=1}^n b_{l,j}^2 \right) = \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \left(\sum_{1 \leq i, k \leq n} a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{1 \leq j, l \leq n} b_{l,j}^2 \right) = \|A\|_2^2 \|B\|_2^2 \end{aligned}$$

Donc $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2} \leq 1$.

De plus, pour $A_0 = B_0 = E_{1,1}$, on a $A_0 B_0 = E_{1,1}$ et donc $\frac{\|A_0 B_0\|_2}{\|A_0\|_2\|B_0\|_2} = 1$. Ceci montre que

$$\sup \left\{ \frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2}, (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2 \right\} = 1$$

En particulier, $\|\cdot\|_2$ est une norme sous-multiplicative.

Correction de l'exercice 6 ▲

Une « norme trois barres » sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nécessairement sous-multiplicative. L'exercice précédent montre qu'il existe des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne sont pas sous-multiplicatives (par exemple $\|\cdot\|_\infty$). Donc une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement une « norme trois barres ».

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après l'exercice 5, $\|\cdot\|_1$ est une norme sous-multiplicative.

Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} , N et $\|\cdot\|_1$ sont des normes équivalentes. Par suite, il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $\alpha\|\cdot\|_1 \leq N \leq \beta\|\cdot\|_1$.

Pour $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N(AB) \leq \beta\|AB\|_1 \leq \beta\|A\|_1\|B\|_1 \leq \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$$

et le réel $k = \frac{\beta}{\alpha^2}$ est un réel strictement positif tel que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) \leq kN(A)N(B)$.

Remarque. Le résultat précédent signifie que $N' = \frac{1}{k}N$ est une norme sous-multiplicative car pour $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N'(AB) = \frac{1}{k^2}N(AB) \leq \frac{1}{k^2}N(A)N(B) = \frac{1}{k}N(A)\frac{1}{k}N(B) = N'(A)N'(B).$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Non, car si $A = E_{1,1} \neq 0$ et $B = E_{2,2} \neq 0$ alors $AB = 0$ puis $N(AB) < N(A)N(B)$.

Correction de l'exercice 9 ▲

• Pour $\|\cdot\|_1$. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \right) = \sum_{j=1}^n |x_j| \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right) \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right) \max \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, 1 \leq j \leq n \right\} = \max \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \} \times \|X\|_1, \end{aligned}$$

en notant C_1, \dots, C_n les colonnes de la matrice A . Donc, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_1 = \max \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \}$.

Soit alors $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|C_{j_0}\|_1 = \max \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \}$. On note X_0 le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles sauf la j_0 -ème qui est égale à 1. X_0 est un vecteur non nul tel que

$$\|AX_0\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{i,j_0}| = \max \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \} \times \|X_0\|_1.$$

En résumé,

(1) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} \leq \max \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \}$,

(2) $\exists X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\frac{\|AX_0\|_1}{\|X_0\|_1} = \max \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \}$.

On en déduit que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_1 = \max \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \}$.

• Pour $\|\cdot\|_\infty$. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} |(AX)_i| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \|X\|_\infty \\ &\leq \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|, 1 \leq i \leq n \right\} \|X\|_\infty = \max \{ \|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n \} \times \|X\|_\infty, \end{aligned}$$

en notant L_1, \dots, L_n les lignes de la matrice A . Donc, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty = \max \{ \|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n \}$.

Soit alors $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\|L_{i_0}\|_1 = \max \{ \|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n \}$. On pose $X_0 = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ où $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ε_j est un élément de $\{-1, 1\}$ tel que $a_{i_0,j} = \varepsilon_j |a_{i_0,j}|$ (par exemple, $\varepsilon_j = \frac{a_{i_0,j}}{|a_{i_0,j}|}$ si $a_{i_0,j} \neq 0$ et $\varepsilon_j = 1$ si $a_{i_0,j} = 0$).

$$\begin{aligned}\|AX_0\|_\infty &= \text{Max} \left\{ \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} \varepsilon_j \right|, 1 \leq i \leq n \right\} \\ &\geq \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \varepsilon_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = \|L_{i_0}\|_1 = \text{Max} \{ \|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n \} \times \|X_0\|_\infty.\end{aligned}$$

En résumé,

$$(1) \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq \text{Max} \{ \|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n \},$$

$$(2) \exists X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|AX_0\|_\infty}{\|X_0\|_\infty} \geq \text{Max} \{ \|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n \}.$$

On en déduit que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\|_\infty = \text{Max} \{ \|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n \}$.

Ainsi, en notant C_1, \dots, C_n et L_1, \dots, L_n respectivement les colonnes et les lignes d'une matrice A ,

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\|_1 = \text{Max} \{ \|C_j\|_1, 1 \leq j \leq n \} \text{ et } \|A\|_\infty = \text{Max} \{ \|L_i\|_1, 1 \leq i \leq n \}.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|DX\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2} \leq \sqrt{(\rho(D))^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = \rho(D) \|X\|_2,$$

De plus, si λ est une valeur propre de D telle que $|\lambda| = \rho(D)$ et X_0 est un vecteur propre associé, alors

$$\|DX_0\|_2 = \|\lambda X_0\|_2 = |\lambda| \|X_0\|_2 = \rho(D) \|X_0\|_2.$$

En résumé

$$(1) \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|DX\|_2}{\|X\|_2} \leq \rho(D),$$

$$(2) \exists X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \frac{\|DX_0\|_2}{\|X_0\|_2} = \rho(D).$$

On en déduit que $\forall D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}), \|D\|_2 = \rho(D)$.

Soit alors $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PD^tP$. De plus $\rho(A) = \rho(D)$. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\|AX\|_2 &= \|PD^tPX\|_2 \\ &= \|D(^tPX)\|_2 \text{ (car } P \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|PY\|_2 = \|Y\|_2) \\ &= \|DX'\|_2 \text{ où on a posé } X' = ^tPX.\end{aligned}$$

Maintenant l'application $X \mapsto ^tPX = X'$ est une permutation de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car la matrice tP est inversible et donc X décrit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si X' décrit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, pour tout vecteur colonne X , $\|X'\|_2 = \|^tPX\|_2 = \|X\|_2$. On en déduit que $\left\{ \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} = \left\{ \frac{\|DX'\|_2}{\|X'\|_2}, X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\}$ et en particulier,

$$\|A\|_2 = \|D\|_2 = \rho(D) = \rho(A).$$

$$\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \|A\|_2 = \text{Sup} \left\{ \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \right\} = \rho(A).$$

Remarque. L'application $A \mapsto \rho(A)$ est donc une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de plus cette norme est sous-multiplicative.