Intégration

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 ****

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a,b]$. Pour n entier naturel non nul donné, on pose $u_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n}$.
Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite (commencer par le cas $g = 1$).

Correction ▼ [005444]

Exercice 2 **I

1. Soit f une application de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $f(1) \neq 0$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ puis déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$ (étudier $\lim_{n\to+\infty} nu_n$).
2. Mêmes questions en supposant que f est de classe C^2 sur $[0,1]$ et que $f(1) = 0$ et $f'(1) \neq 0$.

Correction ▼ [005445]

Exercice 3 ***IT

Limites de

1) $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2 \sin\frac{k\pi}{n}$ 2) $\left(\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^n (a+k)\right)^{1/n}$ ($a > 0$ donné)   3) $\sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k}$ 4) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$
5) $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n E(\sqrt{k})$ 6) $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{8k^3+n^3}$ 7) $\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$ 8) $n\sum_{k=1}^n \frac{e^{-n/k}}{k^2}$

Correction ▼ [005446]

Exercice 4 ***I

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$. Déterminer le réel a tel que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Correction ▼ [005447]

Exercice 5 **I Le lemme de Lebesgue

1. On suppose que f est une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b \sin(\lambda t) f(t)\,dt = 0$.
2. (***) Redémontrer le même résultat en supposant simplement que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ (commencer par le cas des fonctions en escaliers).

Correction ▼ [005448]

Exercice 6 ***T

Soit E l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur $[a,b]$.
Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt\right) \end{array}$.

1. Montrer que $\varphi(E)$ n'est pas majoré.
2. Montrer que $\varphi(E)$ est minoré. Trouver $m = \text{Inf}\{\varphi(f),\ f \in E\}$. Montrer que cette borne infèrieure est atteinte et trouver toutes les f de E telles que $\varphi(f) = m$.

Correction ▼ [005449]

Exercice 7 ***

Etude complète de la fonction $f(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,dt$.

Correction ▼ [005450]

Exercice 8 ***

Pour x réel, on pose $f(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1. Montrer que f est impaire et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.
3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1$.
4. Soit $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}f'(x)$. Montrer que g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et que g admet sur $]0,+\infty[$ un unique zéro noté x_0 vérifiant de plus $0 < x_0 < 1$.
5. Dresser le tableau de variations de f.

Correction ▼ [005451]

Exercice 9 ***

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $2\int_0^1 f^2(t)\,dt \leq \int_0^1 f'^2(t)\,dt$.

Correction ▼ [005452]

Exercice 10 ****

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour x réel, on pose $F(x) = \int_a^b |t-x|f(t)\,dt$. Etudier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005453]

Exercice 11 ***

Soit a un réel strictement positif et f une application de classe C^1 et strictement croissante sur $[0,a]$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\forall x \in [0,a],\ \forall y \in [0, f(a)],\ xy \leq \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^y f^{-1}(t)\,dt$.

Correction ▼ [005454]

Exercice 12 **

Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Correction ▼ [005455]

Exercice 13 **

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $[0,1]$ telles que
$\forall x \in [0,1],\ f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que $\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right) \geq 1$.

Correction ▼ [005456]

Exercice 14 ***

Partie principale quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\frac{1}{(n+k)^2}$.

Correction ▼ [005457]

Exercice 15 **

Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})$.

Correction ▼ [005458]

Exercice 16 **

Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$1)\ u_n=\frac{1}{n!}\int_0^1\operatorname{Arcsin}^n x\,dx\ 2)\ \int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx\ 3)\ \int_0^\pi\frac{n\sin x}{x+n}\,dx.$$

Correction ▼ [005459]

Exercice 17 ***

Etude complète de $F(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

Correction ▼ [005460]

Exercice 18 ***

Trouver toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x)f(y)=\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,dt$.

Correction ▼ [005461]

Exercice 19 ***

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ telle que $f(a)=f(b)=0$ et soit $M=\sup\{|f'(x)|,\ x\in[a,b]\}$. Montrer que $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq M\frac{(b-a)^2}{4}$.

Correction ▼ [005462]

Exercice 20 **

Déterminer les fonctions f continues sur $[0,1]$ vérifiant $\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right|=\int_0^1|f(t)|\,dt$.

Correction ▼ [005463]

Exercice 21 ***I

- Déterminer $\lim_{x\to1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.
- Etude complète de $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

Correction ▼ [005464]

Exercice 22 ****

Soit $f(t)=\frac{t^2}{e^t-1}$ si $t\neq0$ et 0 si $t=0$.

1. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que F a une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$ puis que $\ell=2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$.

Correction ▼ [005465]

Correction de l'exercice 1 ▲

f est continue sur le segment $[a,b]$ et admet donc un maximum M sur ce segment. Puisque f est strictement positive sur $[a,b]$, ce maximum est strictement positif.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons $u_n=\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n}$. Par croissance de l'intégrale, on a déjà

$$u_n\leq\left(\int_a^b M^n\,dx\right)^{1/n}=M(b-a)^{1/n},$$

(car $\forall x\in[a,b],\ 0\leq f(x)\leq M\Rightarrow\forall x\in[a,b],\ (f(x))^n\leq M^n$ par croissance de la fonction $t\mapsto t^n$ sur $[0,+\infty[$).
D'autre part, par continuité de f en x_0 tel que $f(x_0)=M$, pour $\varepsilon\in]0,2M[$ donné, $\exists[\alpha,\beta]\subset[a,b]/\ \alpha<\beta$ et $\forall x\in[\alpha,\beta],\ f(x)\geq M-\frac{\varepsilon}{2}$.
Pour n élément de $\mathbb{N}^*$, on a alors

$$u_n\geq\left(\int_\alpha^\beta (f(x))^n\,dx\right)^{1/n}\geq\left(\int_\alpha^\beta (M-\frac{\varepsilon}{2})^n\,dx\right)^{1/n}=(M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n}.$$

En résumé,

$$\forall\varepsilon\in]0,2M[,\ \exists(\alpha,\beta)\in[a,b]^2/\ \alpha<\beta \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ (M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n}\leq u_n\leq M(b-a)^{1/n}.$$

Mais, $\lim_{n\to+\infty}M(b-a)^{1/n}=M$ et $\lim_{n\to+\infty}(M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n}=(M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n}$.
Par suite, $\exists n_1\in\mathbb{N}^*/\ \forall n\geq n_1,\ M(b-a)^{1/n}<M+\varepsilon$ et $\exists n_2\in\mathbb{N}^*/\ \forall n\geq n_2,\ (M-\frac{\varepsilon}{2})(\beta-\alpha)^{1/n}>M-\varepsilon$.
Soit $n_0=\text{Max}\{n_1,n_2\}$. Pour $n\geq n_0$, on a $M-\varepsilon<u_n<M+\varepsilon$. On a montré que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*/\ \forall n\in\mathbb{N},\ (n\geq n_0\Rightarrow|u_n-M|<\varepsilon),$$

et donc que $\lim_{n\to+\infty}u_n=M$.
Plus généralement, si g continue sur $[a,b]$, g admet un minimum m_1 et un maximum M_1 sur cet intervalle, tous deux strictement positifs puisque g est strictement positive. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$m_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n}\leq\left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n}\leq M_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right),$$

et comme d'après l'étude du cas $g=1$, on a $\lim_{n\to+\infty}m_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n}=\lim_{n\to+\infty}M_1^{1/n}\left(\int_a^b (f(x))^n\,dx\right)^{1/n}=M$, le théorème de la limite par encadrements permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n}=M$. On a montré que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\,dx\right)^{1/n}=\text{Max}\{f(x),\ x\in[a,b]\}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. f est continue sur le segment $[0,1]$ et est donc bornée sur ce segment. Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0,1]$. Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$|u_n|\leq\int_0^1 t^n|f(t)|\,dt\leq M\int_0^1 t^n\,dt=\frac{M}{n+1},$$

et comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{M}{n+1}=0$, on a montré que $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Puisque f est de classe C^1 sur $[0,1]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$u_n=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}f(t)\right]_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt=\frac{f(1)}{n+1}-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt.$$

Puisque f' est continue sur $[0,1]$, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt = 0$ ou encore $-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt = o(\frac{1}{n})$. D'autre part, puisque $f(1)\neq 0$, $\frac{f(1)}{n+1}\sim\frac{f(1)}{n}$ ou encore $\frac{f(1)}{n+1}=\frac{f(1)}{n}+o(\frac{1}{n})$. Finalement, $u_n=\frac{f(1)}{n}+o(\frac{1}{n})$, ou encore

$$u_n\sim\frac{f(1)}{n}.$$

2. Puisque f est de classe C^1 sur $[0,1]$ et que $f(1)=0$, une intégration par parties fournit $u_n=-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt$. Puisque f' est de classe C^1 sur $[0,1]$ et que $f'(1)\neq 0$, le 1) appliqué à f' fournit

$$u_n=-\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\,dt\sim-\frac{1}{n}\frac{f'(1)}{n}=-\frac{f'(1)}{n^2}.$$

Par exemple, $\int_0^1 t^n\sin\frac{\pi t}{2}\,dt\sim\frac{1}{n}$ et $\int_0^1 t^n\cos\frac{\pi t}{2}\,dt\sim\frac{\pi}{2n^2}$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Pour $n\geq 1$,

$$u_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^2\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n}),$$

où $f(x)=x^2\sin(\pi x)$. u_n est donc une somme de RIEMANN à pas constant associée à la fonction continue f sur $[0,1]$. Quand n tend vers $+\infty$, le pas $\frac{1}{n}$ tend vers 0 et on sait que u_n tend vers

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\sin(\pi x)\,dx&=\left[-\frac{1}{\pi}x^2\cos(\pi x)\right]_0^1+\frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx=\frac{1}{\pi}+\frac{2}{\pi}(\left[\frac{1}{\pi}x\sin(\pi x)\right]_0^1-\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin(\pi x)\,dx)\\&=\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1=\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi^2}(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi})\\&=\frac{1}{\pi}-\frac{4}{\pi^3}.\end{aligned}$$

2. On peut avoir envie d'écrire :

$$\ln(u_n)=\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n}(\ln(a+k)-\ln k))=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{a}{k}).$$

La suite de nombres a, $\frac{a}{2}$,..., $\frac{a}{n}$ « est une subdivision (à pas non constant) de $[0,a]$ » mais malheureusement son pas $a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On n'est pas dans le même type de problèmes.
Rappel. (exo classique) Soit v une suite strictement positive telle que la suite $(\frac{v_{n+1}}{v_n})$ tend vers un réel positif ℓ, alors la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ tend encore vers ℓ.
Posons $v_n=\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)$ puis $u_n=\sqrt[n]{v_n}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{a+n+1}{n+1}\to 1,$$

et donc $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$.

3. Encore une fois, ce n'est pas une somme de RIEMANN. On tente un encadrement assez large : pour $1\leq k\leq n$,

$$\frac{n+k}{n^2+n}\leq\frac{n+k}{n^2+k}\leq\frac{n+k}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\frac{1}{n^2+n}\sum_{k=1}^{n}(n+k) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(n+k),$$

et donc ((premier terme + dernier terme)$\times$nombre de termes/2),

$$\frac{1}{n^2+n}\frac{((n+1)+2n)n}{2} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\frac{((n+1)+2n)n}{2},$$

et finalement, $\frac{3n+1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{3n+1}{2n}$. Or, $\frac{3n+1}{2(n+1)}$ et $\frac{3n+1}{2n}$ tendent tous deux vers $\frac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\frac{3}{2}$.

4. Tout d'abord

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n}),$$

où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0,1[$. u_n est donc effectivement une somme de RIEMANN à pas constant associée à la fonction f mais malheureusement, cette fonction n'est pas continue sur $[0,1]$, ou même prolongeable par continuité en 1. On s'en sort néanmoins en profitant du fait que f est croissante sur $[0,1[$.

Puisque f est croissante sur $[0,1[$, pour $1 \leq k \leq n-2$, on a $\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, et pour $1 \leq k \leq n-1$, $\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geq \int_{(k-1)/n}^{k/n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} \geq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{Arcsin}(1-\frac{1}{n}),$$

et

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \\ &= \mathrm{Arcsin}(1-\frac{1}{n}) - \mathrm{Arcsin}\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{2n-1}}. \end{aligned}$$

Quand n tend vers $+\infty$, les deux membres de cet encadrement tendent vers $\mathrm{Arcsin}\,1 = \frac{\pi}{2}$, et donc u_n tend vers $\frac{\pi}{2}$.

5. Pour $1 \leq k \leq n$, $\sqrt{k}-1 \leq E(\sqrt{k}) \leq \sqrt{k}$, et en sommant,

$$\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 et la somme de RIEMANN $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$ tend vers $\int_0^1\sqrt{x}\,dx = \frac{3}{2}$. Donc, u_n tend vers $\frac{3}{2}$.

6. $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k/n)^2}{1+8(k/n)^3}$ tend vers $\int_0^1\frac{x^2}{8x^3+1}\,dx = \left[\frac{1}{24}\ln|8x^3+1|\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{12}$.

7. $u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2(k+n)+1} = \frac{1}{2}\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\frac{2k+1}{n}}$ tend vers $\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{2+x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \ln 2$.

8. Soit $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x}$ si $x > 0$ et 0 si $x = 0$. f est continue sur $[0,1]$ (théorèmes de croissances comparées). Donc, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n})$ tend vers $\int_0^1 f(x)\,dx$. Pour $x \in [0,1]$, posons $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$. Puisque f est continue sur $[0,1]$, F l'est et

$$\int_0^1 f(x)\,dx = F(0) = \lim_{x\to 0,\,x>0}F(x) = \lim_{x\to 0,\,x>0}\left[e^{-1/t}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0,\,x>0}(e^{-1}-e^{-1/x}) = \frac{1}{e}.$$

Donc, u_n tend vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Supposons f de classe C^2 sur $[0,1]$. Soit F une primitive de f sur $[0,1]$. Soit n un entier naturel non nul.

$$u_n = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1}(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt - \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})) = \sum_{k=0}^{n-1}(F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n})).$$

f est de classe C^2 sur le segment $[0,1]$. Par suite, $F^{(3)} = f''$ est définie et bornée sur ce segment. En notant M_2 la borne supérieure de $|f''|$ sur $[0,1]$, l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 appliquée à F sur le segment $[0,1]$ fournit

$$\left|F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})\right| \leq \frac{(1/n)^3 M_2}{6},$$

et donc,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n-1}[F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})]\right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1}|F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(1/n)^3 M_2}{6} = \frac{M_2}{6n^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n-1}[F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})] = O(\frac{1}{n^2})$, ou encore $\sum_{k=0}^{n-1}[F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n}F'(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n})] = o(\frac{1}{n})$, ou enfin,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n}) + o(\frac{1}{n}).$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2}F''(\frac{k}{n}) = \frac{1}{2n}.\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'(\frac{k}{n}).$$

Or, la fonction f' est continue sur le segment $[0,1]$. Par suite, la somme de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'(\frac{k}{n})$ tend vers $\int_0^1 f'(t)\,dt = f(1) - f(0)$ et donc

$$\frac{1}{2n}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'(\frac{k}{n}) = \frac{1}{2n}(f(1) - f(0) + o(1)) = \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o(\frac{1}{n}).$$

Finalement,

$$\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(\frac{k}{n}) = \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o(\frac{1}{n}).$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Puisque f est de classe C^1 sur $[a,b]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit pour $\lambda > 0$:

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{\lambda}(-[\cos(\lambda t)f(t)]_a^b + \int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,dt)\right| \leq \frac{1}{\lambda}(|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt).$$

   Cette dernière expression tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$, et donc $\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

2. Si f est simplement supposée continue par morceaux, on ne peut donc plus effectuer une intégration par parties.
Le résultat est clair si $f=1$, car pour $\lambda>0$, $\left|\int_a^b \sin(\lambda t)\,dt\right| = ... \leq \frac{2}{\lambda}$.
Le résultat s'étend aux fonctions constantes par linéarité de l'intégrale puis aux fonctions constantes par morceaux par additivité par rapport à l'intervalle d'intégration, c'est-à-dire aux fonctions en escaliers.
Soit alors f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.
Soit $\varepsilon>0$. On sait qu'il existe une fonction en escaliers g sur $[a,b]$ telle que $\forall x\in[a,b]$, $|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.
Pour $\lambda>0$, on a alors

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| &= \left|\int_a^b (f(t)-g(t))\sin(\lambda t)\,dt + \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|\\ &\leq \int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt + \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| \leq (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|\\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right|.\end{aligned}$$

Maintenant, le résultat étant établi pour les fonctions en esacliers,

$$\exists A>0/\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ (\lambda>A\Rightarrow \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

Pour $\lambda>A$, on a alors $\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. On a montré que

$$\forall\varepsilon>0, \exists A>0/\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ (\lambda>A\Rightarrow \left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\right| < \varepsilon),$$

et donc que $\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soient m un réel strictement positif et, pour $t\in\mathbb{R}$, $f_m(t)=e^{mt}$. f_m est bien un élément de E et de plus,

$$\begin{aligned}\varphi(f_m) &= \frac{1}{m^2}(e^{mb}-e^{ma})(e^{-ma}-e^{-mb})\\ &= \frac{1}{m^2}e^{m(a+b)/2}(e^{m(b-a)/2}+e^{-m(b-a)/2})e^{-m(a+b)/2}(e^{m(b-a)/2}+e^{-m(b-a)/2})\\ &= \frac{4\,\mathrm{sh}^2(m(b-a)/2)}{m^2}.\end{aligned}$$

Cette expression tend vers $+\infty$ quand m tend vers $+\infty$ et $\varphi(E)$ n'est pas majoré.

2. Soit f continue et strictement positive sur $[a,b]$. L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ montre que :

$$\varphi(f) = \int_a^b \left(\sqrt{f(t)}\right)^2 dt \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\right)^2 dt \geq \left(\int_a^b \sqrt{f(t)}\frac{1}{\sqrt{f(t)}}\,dt\right)^2 = (b-a)^2,$$

avec égalité si et seulement si la famille de fonctions $(\sqrt{f(t)}, \frac{1}{\sqrt{f(t)}})$ est liée ou encore si et seulement si $\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*/\ \forall t\in[a,b]$, $\sqrt{f(t)}=\lambda\frac{1}{\sqrt{f(t)}}$ ou enfin si et seulement si $\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*/\ \forall t\in[a,b]$, $f(t)=\lambda$, c'est-à-dire que f est une constante strictement positive.
Tout ceci montre que $\varphi(E)$ admet un minimum égal à $(b-a)^2$ et obtenu pour toute fonction f qui est une constante strictement positive.

Correction de l'exercice 7 ▲

Pour t réel, posons $g(t) = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}$ puis, pour x réel, $G(x) = \int_1^x g(t)\,dt$. Puisque g est définie et continue sur $\mathbb{R}$, G est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 et $G' = g$ (G est la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1). Plus précisément, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et donc G est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Finalement, f est définie et de classe C^∞ sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.
Etude en 1.
Pour $x \neq 1$,

$$f(x) = \frac{G(x)}{x-1} = \frac{G(1)+G'(1)(x-1)+\frac{G''(1)}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2)}{x-1} = g(1)+g'(1)(x-1)+o((x-1)).$$

Donc, f admet en 1 un développement limité d'ordre 1. Par suite, f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = g(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ puis le prolongement est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}g'(1)$. Or, pour tout réel x, $g'(x) = 2x\frac{1}{\sqrt{1+x^8}} + x2.(-\frac{4x^7}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}) = 2x\frac{1-x^8}{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}$ et $g'(1) = 0$. Donc, $f'(1) = 0$.
Dérivée. Variations
Pour $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{G'(x)(x-1)-G(x)}{(x-1)^2}$.
$f'(x)$ est du signe de $h(x) = G'(x)(x-1)-G(x)$ dont la dérivée est $h'(x) = G''(x)(x-1)+G'(x)-G'(x) = (x-1)g'(x)$. h' est du signe de $2x(1-x^8)(x-1)$ ou encore du signe de $-2x(1+x)$. h est donc décroissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $[0,+\infty[$ et croissante sur $[-1,0]$.
Maintenant, quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), $G'(x)(x-1) = g(x)(x-1) \sim x\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}$ et donc $G'(x)(x-1)$ tend vers 0. Ensuite, pour $x \geq 1$

$$0 \leq G(x) \leq \int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{t^8}}\,dt = 1-\frac{1}{x} \leq 1,$$

et G est bornée au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$). Comme G est croissante sur $\mathbb{R}$, G a une limite réelle en $+\infty$ et en $-\infty$. Cette limite est strictement positive en $+\infty$ et strictement négative en $-\infty$. Par suite, h a une limite strictement positive en $-\infty$ et une limite strictement négative en $+\infty$. Sur $[0,+\infty[$, h est décroissante et s'annule en 1. Donc, h est positive sur $[0,1]$ et négative sur $[1,+\infty[$.
Ensuite,

$$h(-1) = \int_{-1}^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,dt - \sqrt{2} = 2\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\,dt - \sqrt{2} < 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}\,dt - \sqrt{2} = 0,$$

et $h(-1) < 0$. h s'annule donc, une et une seule fois sur $]-\infty,-1[$ en un certain réel α et une et une seule fois sur $]-1,0[$ en un certain réel β. De plus, h est strictement positive sur $]-\infty,\alpha[$, strictement négative sur $]\alpha,\beta[$, strictement positive sur $]\beta,1[$ et strictement négative sur $]1,+\infty[$.
f est strictement croissante sur $]-\infty,\alpha]$, strictement décroissante sur $[\alpha,\beta]$, strictement croissante sur $[\beta,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.
Etude en l'infini.
En $+\infty$ ou $-\infty$, G a une limite réelle et donc f tend vers 0.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de f.
   La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est paire et donc la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ est impaire. Comme la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est paire, f est impaire.
2. Pour x réel, $f'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + e^{-x^2}e^{x^2} = -2xf(x)+1$.

3. Pour $x \geq 1$, une intégration par parties fournit :

$$\int_1^x e^{t^2}\,dt = \int_1^x \frac{1}{2t}.2te^{t^2}\,dt = \left[\frac{1}{2t}e^{t^2}\right]_1^x + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt,$$

et donc,

$$\begin{aligned}|1-2xf(x)| &= \left|1 - 2xe^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\,dt - 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,dt\right| \\ &\leq xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt + exe^{-x^2} + 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Les deux derniers termes tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Il reste le premier.
Pour $x \geq 2$,

$$\begin{aligned}0 \leq xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt &= xe^{-x^2}\int_1^{x-1}\frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt + xe^{-x^2}\int_{x-1}^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt \\ &\leq x(x-1)e^{-x^2}\frac{e^{(x-1)^2}}{1^2} + xe^{-x^2}e^{x^2}\int_{x-1}^x \frac{1}{t^2}\,dt \\ &= x(x-1)e^{-2x+1} + x\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) = x(x-1)e^{-2x+1} + \frac{1}{x-1}.\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On en déduit que $xe^{-x^2}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}\,dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Finalement, $1-2xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, ou encore, $f(x) \sim \frac{1}{2x}$.

4. Pour $x > 0$, $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}(1-2xf(x)) = \frac{e^{x^2}}{2x} - \int_0^x e^{t^2}\,dt$ puis,

$$g'(x) = e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{2x^2} - e^{x^2} = -\frac{e^{x^2}}{2x^2} < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc, g s'annule au plus une fois sur $]0,+\infty[$. Ensuite, $f'(1) = 1-2f(1) = 1-2e^{-1}\int_0^1 e^{t^2}\,dt$. Or, la méthode des rectangles fournit $\int_0^1 e^{t^2}\,dt = 1,44... > 1,35... = \frac{e}{2}$, et donc $f'(1) < 0$ puis $g(1) < 0$. Enfin, comme en 0^+, $g(x) \sim \frac{1}{2x}f'(0) = \frac{1}{2x}$, $g(0^+) = +\infty$. Donc, g s'annule exactement une fois sur $]0,+\infty[$ en un certain réel x_0 de $]0,1[$.

5. g est strictement positive sur $]0,x_0[$ et strictement négative sur $]x_0,+\infty[$. Il en de même de f'. f est ainsi strictement croissante sur $[0,x_0]$ et strictement décroissante sur $[x_0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Pour $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}f^2(t) = \left(\int_0^t f'(u)\,du\right)^2 &\leq \left(\int_0^t f'^2(u)\,du\right)\left(\int_0^t 1\,du\right) \quad (\text{CAUCHY}-\text{SCHWARZ}) \\ &= t\int_0^t f'^2(u)\,du \leq t\int_0^1 f'^2(u)\,du,\end{aligned}$$

et donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 f^2(t)\,dt \leq \int_0^1 t\left(\int_0^1 f'^2(u)\,du\right)dt = \left(\int_0^1 f'^2(u)\,du\right)\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f'^2(u)\,du.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Pour x réel donné, la fonction $t \mapsto |t-x|f(t)$ est continue sur $[a,b]$ et donc $F(x)$ existe. Pour $x \leq a$, $F(x) = \int_a^b (t-x)f(t)\,dt = -x\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b tf(t)\,dt$. F est donc de classe C^1 sur $]-\infty, a]$ en tant que fonction affine et, pour $x < a$, $F'(x) = -\int_a^b f(t)\,dt$ (en particulier $F'_g(a) = -\int_a^b f(t)\,dt$)..
De même, pour $x \geq b$, $F(x) = x\int_a^b f(t)dt - \int_a^b tf(t)\,dt$. F est donc de classe C^1 sur $[b, +\infty[$ en tant que fonction affine et, pour $x \geq b$, $F'(x) = \int_a^b f(t)\,dt$ (en particulier $F'_d(b) = \int_a^b f(t)\,dt$).
Enfin, si $a \leq x \leq b$,

$$F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\,dt + \int_x^b (t-x)f(t)\,dt = x(\int_a^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt) - \int_a^x tf(t)\,dt + \int_x^b tf(t)\,dt.$$

F est donc de classe C^1 sur $[a,b]$ et, pour $a \leq x \leq b$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_a^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt + x(f(x) - (-f(x))) - xf(x) - xf(x) \\ &= \int_a^x f(t)dt - \int_x^b f(t)\,dt. \end{aligned}$$

(et en particulier, $F'_d(a) = -\int_a^b f(t)\,dt = F'_g(a)$ et $F'_g(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F'_d(b)$).
F est continue $]-\infty, a]$, $[a,b]$ et $[b, +\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}$. F est de classe C^1 sur $]-\infty, a]$, $[a,b]$ et $[b, +\infty[$. De plus, $F'_g(a) = F'_d(a)$ et $F'_g(b) = F'_d(b)$. F est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

Puisque f est continue et strictement croissante sur $[0,a]$, f réalise une bijection de $[0,a]$ sur $f([0,a]) = [0, f(a)]$.
Soit $x \in [0,a]$. Pour $y \in [0, f(a)]$, posons $g(y) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^y f^{-1}(t)\,dt - xy$. Puisque f est continue sur $[0,a]$, on sait que f^{-1} est continue sur $[0, f(a)]$ et donc la fonction $y \mapsto \int_0^y f^{-1}(t)\,dt$ est définie et de classe C^1 sur $[0, f(a)]$. Donc g est de classe C^1 sur $[0, f(a)]$ et pour $y \in [0, f(a)]$, $g'(y) = f^{-1}(y) - x$.
Or, f étant strictement croissante sur $[0,a]$, $g'(y) > 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) > x \Leftrightarrow y > f(x)$. Par suite, g' est strictement négative sur $[0, f(x)[$ et strictement positive sur $]f(x), f(a)]$, et g est strictement décroissante sur $[0, f(x)]$ et strictement croissante sur $[f(x), f(a)]$. g admet en $y = f(x)$ un minimum global égal à $g(f(x)) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x)$. Notons $h(x)$ cette expression.
f est continue sur $[0,a]$. Donc, $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $[0,a]$. Ensuite f est de classe C^1 sur $[0,a]$ à valeurs dans $[0, f(a)]$ et $y \mapsto \int_0^y f^{-1}(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $[0, f(a)]$ (puisque f^{-1} est continue sur $[0, f(a)]$). On en déduit que $x \mapsto \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $[0,a]$. Il en est de même de h et pour $x \in [0,a]$,

$$h'(x) = f(x) + f'(x)f^{-1}(f(x)) - f(x) - xf'(x) = 0.$$

h est donc constante sur $[0,a]$ et pour $x \in [0,a]$, $h(x) = h(0) = 0$.
On a montré que

$$\forall (x,y) \in [0,a] \times [0, f(a)],\ \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^y f^{-1}(t)\,dt - xy \geq \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x) = 0.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit, pour $x \in [0,1]$, $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Si g est de signe constant, g étant de plus continue sur $[0,1]$ et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, on sait que g est nulle. Sinon, g change de signe sur $[0,1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires montre que g s'annule au moins une fois. Dans tous les cas, g s'annule au moins une fois sur $[0,1]$ ou encore, f admet au moins un point fixe dans $[0,1]$.

Correction de l'exercice 13 ▲

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right)=\left(\int_0^1(\sqrt{f(t)})^2\,dt\right)\left(\int_0^1(\sqrt{g(t)})^2\,dt\right)\geq\left(\int_0^1\sqrt{f(t)}\sqrt{g(t)}\,dt\right)^2\geq\left(\int_0^1 1\,dt\right)^2=1.$$

Correction de l'exercice 14 ▲

Soit $x\in[0,1]\subset[0,\frac{\pi}{2}]$.
D'après la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 1 fournit

$$\sin x=x-\int_0^x(x-t)\sin t\,dt\leq x,$$

car pour $t\in[0,x]$, $(x-t)\geq 0$ et pour $t\in[0,x]\subset[0,\frac{\pi}{2}]$, $\sin t\geq 0$.
De même, la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 3 fournit

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\int_0^x\frac{(x-t)^3}{6}\sin t\,dt\geq x-\frac{x^3}{6}.$$

Donc, $\forall x\in[0,1]$, $x-\frac{x^3}{6}\leq\sin x\leq x$.
Soient alors $n\geq 1$ et $k\in\{1,...,n\}$. On a $0\leq\frac{1}{(n+k)^2}\leq 1$ et donc

$$\frac{1}{(n+k)^2}-\frac{1}{6(n+k)^6}\leq\sin\frac{1}{(n+k)^2}\leq\frac{1}{(n+k)^2},$$

puis en sommant

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{(n+k)^2}-\sum_{k=1}^n\frac{1}{6(n+k)^6}\leq\sum_{k=1}^n\sin\frac{1}{(n+k)^2}\leq\sum_{k=1}^n\frac{1}{(n+k)^2}.$$

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{(n+k)^2}=\frac{1}{n}.\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{(1+\frac{k}{n})^2}=\frac{1}{n}\left(\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\,dx+o(1)\right)=\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}).$$

D'autre part,

$$0\leq\sum_{k=1}^n\frac{1}{6(n+k)^6}\leq n.\frac{1}{6n^6}=\frac{1}{6n^5},$$

et donc, $\sum_{k=1}^n\frac{1}{6(n+k)^6}=o(\frac{1}{n})$.
On en déduit que $2n(\frac{1}{(n+k)^2}-\frac{1}{6(n+k)^6})=2n(\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}))=1+o(1)$ et que $2n\frac{1}{(n+k)^2}=1+o(1)$. Mais alors, d'après le théorème des gendarmes, $2n\sum_{k=1}^n\sin\frac{1}{(n+k)^2}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, ou encore

$$\sum_{k=1}^n\sin\frac{1}{(n+k)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}=\mathrm{Im}(\sum_{k=1}^{n}e^{ik/n^2})=\mathrm{Im}\left(e^{i/n^2}\frac{1-e^{ni/n^2}}{1-e^{i/n^2}}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{i(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2})/n^2}\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\sin\frac{1}{2n^2}}\right)=\frac{\sin\frac{n+1}{2n^2}\sin\frac{1}{2n}}{\sin\frac{1}{2n^2}}$$
$$\underset{n\to+\infty}{=}(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))(\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n^2}))(\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^3}))^{-1}$$
$$=(1+\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))(\frac{1}{2}+o(\frac{1}{n}))(1+o(\frac{1}{n}))^{-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}),$$

(on peut aussi partir de l'encadrement $\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6}\leq\sin\frac{k}{n^2}\leq\frac{k}{n^2}$).

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $0\leq\mathrm{Arcsin}^x\leq(\frac{\pi}{2})^n$ et donc, par croissance de l'intégrale,
$$0\leq u_n\leq\frac{1}{n!}\int_0^1(\frac{\pi}{2})^n dx=\frac{1}{n!}(\frac{\pi}{2})^n.$$
D'après un théorème de croissances comparées, $\frac{1}{n!}(\frac{\pi}{2})^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'après le théorème des gendarmes, u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. $0\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx\leq\int_0^1\frac{x^n}{1+0}\,dx=\frac{1}{n+1}$. Comme $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
$$\left|\int_0^\pi\frac{n\sin x}{x+n}\,dx-\int_0^\pi\sin x\,dx\right|=\left|\int_0^\pi\frac{-x\sin x}{x+n}\,dx\right|\leq\int_0^\pi\left|\frac{-x\sin x}{x+n}\,dx\right|\leq\int_0^\pi\frac{\pi}{0+n}\,dx=\frac{\pi^2}{n}.$$
Or, $\frac{\pi^2}{n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc $\int_0^\pi\frac{n\sin x}{x+n}\,dx$ tend vers $\int_0^\pi\sin x\,dx=2$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 17 ▲

Pour $t\in\mathbb{R}$, posons $g(t)=\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$. g est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Définition, dérivabilté, dérivée.

Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$, F est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F(x)=G(2x)-G(x)$. G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,
$$F'(x)=2G'(2x)-G'(x)=2g(2x)-g(x)=\frac{2}{\sqrt{16x^4-4x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

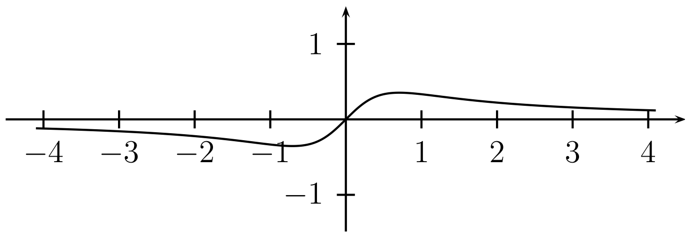
Parité.

Soit $x\in\mathbb{R}$. En posant $t=-u$ et donc $dt=-du$, on obtient, en notant que g est paire
$$F(-x)=\int_{-x}^{-2x}g(t)\,dt=\int_x^{2x}g(-u).-du=-\int_x^{2x}g(u)\,du=-F(x).$$
F est donc impaire.

Variations.

Pour x réel,
$$\mathrm{sgn}(F'(x))=\mathrm{sgn}(\frac{2}{\sqrt{16x^4-4x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}})=\mathrm{sgn}(2\sqrt{x^4+x^2+1}-\sqrt{16x^4-4x^2+1})$$
$$=\mathrm{sgn}(4(x^4+x^2+1)-(16x^4+4x^2+1))\text{ (par croissance de }t\mapsto t^2\text{ sur }\mathbb{R}^+)$$
$$=\mathrm{sgn}(-12x^4+3)=\mathrm{sgn}(1-4x^4)=\mathrm{sgn}(1-2x^2).$$

F est donc strictement croissante sur $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ et strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ et sur $[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$.
Etude en $+\infty$.
Pour $x>0$, $0 \leq F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{x^4}}\, dt = \frac{2x-x}{x^2} = \frac{1}{x}$. Comme $\frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
Graphe.



Correction de l'exercice 18 ▲

f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. Soit F une primitive donnée de f sur $\mathbb{R}$. Notons $(*)$ la relation :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = F(x+y) - F(x-y).$$

Pour $x=y=0$, on obtient $forallx \in \mathbb{R}$, $f(0)=0$. Puis $x=0$ fournit $\forall y \in \mathbb{R}$, $F(y)-F(-y)=0$. F est donc nécessairement paire et sa dérivée f est nécessairement impaire.
La fonction nulle est solution du problème. Soit f une éventuelle solution non nulle. Il existe alors un réel y_0 tel que $f(y_0) \neq 0$. Pour tout réel x, on a alors

$$f(x) = \frac{1}{f(y_0)} \int_{x-y_0}^{x+y_0} f(t)\, dt = \frac{1}{f(y_0)}(F(x+y_0) - F(x-y_0)).$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(y_0)}(F(x+y_0) - F(x-y_0))$ et donc de f. Mais alors, F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donc f l'est aussi (f est en fait de classe C^∞ par récurrence).
En dérivant $(*)$ à y fixé, on obtient $f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y)$ $(**)$, mais en dérivant à x fixé, on obtient aussi $f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$ $(***)$. En redérivant $(**)$ à y fixé, on obtient $f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$ et en dérivant $(***)$ à x fixé, on obtient $f(x)f''(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$. Mais alors,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f''(x)f(y) = f(x)f''(y),$$

et en particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - \frac{f''(y_0)}{f(y_0)} f(x) = 0.$$

On a montré que si f est solution du problème, il existe un réel λ tel que f est solution de l'équation différentielle $y'' - \lambda y = 0$ (E).
- si $\lambda > 0$, en posant $k = \sqrt{\lambda}$, (E) s'écrit $y'' - k^2 y = 0$. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{sh}(kx) + B\,\mathrm{ch}(kx)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\,\mathrm{sh}(kx)$, $A \in \mathbb{R}$.
  Réciproquement, soit k un réel strictement positif. Pour $A \in \mathbb{R}^*$ (on sait que la fonction nulle est solution) et $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = A\,\mathrm{sh}(kx)$. Alors

$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt = \frac{A}{k}(\mathrm{ch}(k(x+y)) - \mathrm{ch}(k(x-y)))\frac{2A}{k}\,\mathrm{sh}(kx)\,\mathrm{sh}(ky) = \frac{2}{kA} f(x)f(y).$$

  f est solution si et seulement si $\frac{2}{kA} = 1$ ou encore $A = \frac{2}{k}$.

- si $\lambda < 0$, en posant $k = \sqrt{-\lambda}$, (E) s'écrit $y'' + k^2 y = 0$. Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\sin(kx) + B\cos(kx)$, $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto A\sin(kx)$, $A \in \mathbb{R}$.
  Réciproquement, soit k un réel strictement positif. Pour $A \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = A\sin(kx)$. Alors
$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{A}{k}(\cos(k(x-y)) - \cos(k(x+y))) = \frac{2A}{k}\sin(kx)\sin(ky) = \frac{2}{kA}f(x)f(y).$$
  f est solution si et seulement si $\frac{2}{kA} = 1$ ou encore $A = \frac{2}{k}$.
- si $\lambda = 0$, (E) s'écrit $y'' = 0$. Les solutions de (E) sont les fonctions affines et les solutions impaires de (E) sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ax$, $A \in \mathbb{R}$.
  Réciproquement, si $f(x) = Ax$
$$\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt = \frac{A}{2}((x+y)^2 - (x-y)^2) = 2Axy = \frac{2}{A}f(x)f(y),$$
  et f est solution si et seulement si $A = 2$.

Les solutions sont la fonction nulle, la fonction $x \mapsto 2x$, les fonctions $x \mapsto \frac{2}{k}\sin(kx)$, $k > 0$ et les fonctions $x \mapsto \frac{2}{k}\operatorname{sh}(kx)$, $k > 0$.

Correction de l'exercice 19 ▲

Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. F est de classe C^2 sur le segment $[a,b]$ et l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE permet d'écrire
$$|F(\frac{a+b}{2}) - F(a) - \frac{b-a}{2}F'(a)| \leq \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{4}\sup\{|F''(x)|,\ x \in [a,b]\}.$$
Mais $F'(a) = f(a) = 0$ et $F'' = f'$. Donc,
$$|F(\frac{a+b}{2}) - F(a)| \leq \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4}.$$
De même, puisque $F'(b) = f(b) = 0$,
$$|F(\frac{a+b}{2}) - F(b)| \leq \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4}.$$
Mais alors,
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = |F(b) - F(a)| \leq |F(b) - F(\frac{a+b}{2})| + |F(\frac{a+b}{2}) - F(a)| \leq \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4} + \frac{1}{2}M\frac{(b-a)^2}{4} = M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Correction de l'exercice 20 ▲

Si $\int_0^1 f(t)\,dt \geq 0$,
$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| = \int_0^1 |f(t)|\,dt &\Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 |f(t)|\,dt \Leftrightarrow \int_0^1 (|f(t)| - f(t))\,dt = 0\\ &\Leftrightarrow |f| - f = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)}\\ &\Leftrightarrow f = |f| \Leftrightarrow f \geq 0.\end{aligned}$$
Si $\int_0^1 f(t)\,dt \leq 0$, alors $\int_0^1 -f(t)\,dt \geq 0$ et d'après ce qui précède, f est solution si et seulement si $-f = |-f|$ ou encore $f \leq 0$.
En résumé, f est solution si et seulement si f est de signe constant sur $[0,1]$.

Correction de l'exercice 21 ▲

1. Si $x > 1$, $[x,x^2] \subset]1,+\infty[$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]1,+\infty[$. Par suite, $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ existe. De plus,

$$x\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt \leq \int_x^{x^2} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_x^{x^2} t\frac{1}{t\ln t}\,dt \leq x^2\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt.$$

Mais,

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = [\ln|\ln t|]_x^{x^2} = \ln|\ln(x^2)| - \ln|\ln(x)| = \ln\left|\frac{2\ln x}{\ln x}\right| = \ln 2.$$

Donc, $\forall x > 1,\ x\ln 2 \leq F(x) \leq x^2\ln 2$. On en déduit que $\lim_{x\to 1,\,x>1} F(x) = \ln 2$.
Si $0 < x < 1$, on a $x^2 < x$ puis $[x^2,x] \subset]0,1[$. Donc, $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x^2,x]$ et $F(x) = -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,dt$ existe.
Pour $t \in [x^2,x]$, on a $t\ln t < 0$ et $x^2 \leq t \leq x$. Par suite,

$$x\frac{1}{t\ln t} \leq t\frac{1}{t\ln t} = \frac{1}{\ln t} \leq x^2\frac{1}{t\ln t},$$

puis, $\int_{x^2}^{x} x\frac{1}{t\ln t}\,dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,dt \leq \int_{x^2}^{x} x^2\frac{1}{t\ln t}\,dt$, et finalement,

$$x^2\ln 2 = \int_x^{x^2} x^2\frac{1}{t\ln t}\,dt \leq F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt \leq \int_x^{x^2} x\frac{1}{t\ln t}\,dt = x\ln 2.$$

On obtient alors $\lim_{x\to 1,\,x<1} F(x) = \ln 2$ et finalement, $\lim_{x\to 1} F(x) = \ln 2$. On en déduit que F se prolonge par continuité en 1 en posant $F(1) = \ln 2$ (on note encore F le prolongement obtenu).

2. On a déjà vu que F est définie (au moins) sur $]0,+\infty[$ (F désignant le prolongement). Il ne parait pas encore possible de donner un sens à $F(0)$ et encore moins à $F(x)$ quand $x < 0$, car alors $[x,0]$ est un intervalle de longueur non nulle contenu dans $[x,x^2]$, sur lequel la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ n'est même pas définie.

$$D_F =]0,+\infty[.$$

Pour $t \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, posons $g(t) = \frac{1}{\ln t}$ et notons G une primitive de g sur cet ensemble. Alors, pour x dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$, $F(x) = G(x^2) - G(x)$. On en déduit que F est dérivable (et même de classe C^1) sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et que pour x dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$F'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Maintenant, quand x tend vers 1, $\frac{x-1}{\ln x}$ tend vers 1. Ainsi, F est continue sur $]0,+\infty[$, de classe C^1 sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et F' a une limite réelle en 1. Un théorème classique d'analyse permet d'affirmer que F est de classe C^1 sur D_F et en particulier, dérivable en 1 avec $F'(1) = 1$.

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ F'(x) = \left\{\begin{array}{l} \frac{x-1}{\ln x} \text{ si } x \neq 1 \\ 1 \text{ si } x = 1. \end{array}\right. .$$

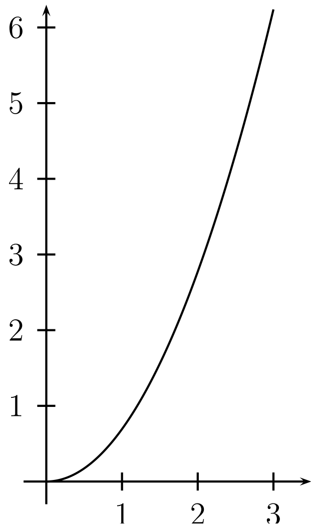
Si $x > 1$, $x-1 > 0$ et $\ln x > 0$ et si $0 < x < 1$, $x-1 < 0$ et $\ln x < 0$. Dans tous les cas ($0 < x < 1$, $x = 1$, $x > 1$) $F'(x) > 0$. F est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
On a vu que $\forall x > 1,\ F(x) > x\ln 2$ et donc $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Plus précisément, pour $x > 1$,

$$\frac{F(x)}{x} = \frac{1}{x}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt \geq \frac{x^2-x}{x\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Comme $\frac{x-1}{\ln x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\frac{F(x)}{x}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et donc que la courbe représentative de F admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).
Pour $x \in]0,1[$ et $t \in [x^2,x]$, on a $2\ln x = \ln(x^2) \leq \ln t \leq \ln x < 0$ et donc $\frac{1}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{2\ln x}$, puis $(x-x^2)\frac{1}{\ln x} \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,dt \leq (x-x^2)\frac{1}{2\ln x}$ et finalement,

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{x-x^2}{-2\ln x} \leq F(x) \leq \frac{x-x^2}{-\ln x}.$$

On obtient déjà $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$. On peut prolonger F par continuité en 0 en posant $F(0) = 0$. Ensuite, $\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{F(x)}{x}$ est compris entre $\frac{1-x}{-2\ln x}$ et $\frac{1-x}{-\ln x}$. Comme ces deux expressions tendent vers 0 quand x tend vers 0, on en déduit que $\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. F est donc dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.



Correction de l'exercice 22 ▲

1. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. D'autre part, quand t tend vers 0, $f(t) \sim \frac{t^2}{t} = t$ et $\lim_{t\to 0,\, t\neq 0} f(t) = 0 = f(0)$. Ainsi, f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc F est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. De plus, $F' = f$ est positive sur $[0,+\infty[$, de sorte que F est croissante sur $[0,+\infty[$. On en déduit que F admet en $+\infty$ une limite dans $]-\infty,+\infty]$.

   Vérifions alors que F est majorée sur $\mathbb{R}$. On contate que $t^2.\frac{t^2}{e^t-1}$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, d'après un théorème de croissances comparées. Par suite, il existe un réel A tel que pour $t \geq A$, $0 \leq t^2.\frac{t^2}{e^t-1} \leq 1$ ou encore $0 \leq f(t) \leq \frac{1}{t^2}$. Pour $x \geq A$, on a alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^A f(t)\,dt + \int_A^x \frac{t^2}{e^t-1}\,dt \leq \int_0^A f(t)\,dt + \int_A^x \frac{1}{t^2}\,dt \\ &= \int_0^A f(t)\,dt + \frac{1}{A} - \frac{1}{x} \leq \int_0^A f(t)\,dt + \frac{1}{A}. \end{aligned}$$

   F est croissante et majorée et donc a une limite réelle ℓ quand n tend vers $+\infty$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $t \in]0,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 e^{-t}\frac{1}{1-e^{-t}} = t^2 e^{-t}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-t})^k + \frac{(e^{-t})^n}{1-e^{-t}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} t^2 e^{-(k+1)t} + \frac{t^2 e^{-t}}{1-e^{-t}} e^{-nt} = \sum_{k=1}^{n} t^2 e^{-kt} + f_n(t)\ (*), \end{aligned}$$

   où $f_n(t) = \frac{t^2 e^{-t}}{1-e^{-t}} e^{-nt}$ pour $t > 0$. En posant de plus $f_n(0) = 0$, d'une part, f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et d'autre part, l'égalité $(*)$ reste vraie quand $t = 0$. En intégrant, on obtient

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ F(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^2 e^{-kt}\,dt + \int_0^x f_n(t)\,dt\ (**).$$

Soient alors $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,+\infty[$. Deux intégrations par parties fournissent :

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2 e^{-kt}\,dt &= \left[-\frac{1}{k}t^2 e^{-kt}\right]_0^x + \frac{2}{k}\int_0^x te^{-kt}\,dt = -\frac{1}{k}x^2e^{-kx} + \frac{2}{k}(\left[-\frac{1}{k}te^{-kt}\right]_0^x + \frac{1}{k}\int_0^x e^{-kt}\,dt)\\ &= -\frac{1}{k}x^2e^{-kx} - \frac{2}{k^2}xe^{-kx} - \frac{2}{k^3}e^{-kx} + \frac{2}{k^3}.\end{aligned}$$

Puisque $k > 0$, quand x tend vers $+\infty$, on obtient $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^2e^{-kt}\,dt = \frac{2}{k^3}$. On fait alors tendre x vers $+\infty$ dans $(**)$ et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ell - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt\ (***).$$

Vérifions enfin que $\lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt) = 0$. La fonction $t \mapsto \frac{t^2e^{-t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et a une limite réelle en $+\infty$. On en déduit que cette fonction est bornée sur $]0,+\infty[$. Soit M un majorant de cette fonction sur $]0,+\infty[$. Pour $x \in [0,+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$0 \leq \int_0^x f_n(t)\,dt \leq M\int_0^x e^{-nt}\,dt = \frac{M}{n}(1-e^{-nx}).$$

A $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt \leq \frac{M}{n},$$

puis on passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt\right) = 0.$$

Par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$ puis quand n tend vers $+\infty$ dans $(***)$, on obtient enfin

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{t^2}{e^t-1}\,dt = 2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}.$$
