M.K.S

UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET SCIENCES PHYSIQUES
EPREUVE DE PROBABILITES-STATISTIQUE

Examen final
Cycle Ingénieur II
Session Normale 2019
Examinateur : Pr TEWA Jean Jules
Durée : (3h00- Janvier 2019

Exercice 1 (pts) :
Votre petit frère collectionne les images des joueurs de la coupe du monde que l'on trouve dans les tablettes de chocolat. On suppose qu'il existe N images différentes et qu'elles sont équitablement réparties, à raison d'une par tablette. On note Xr le nombre de tablettes qu'il faut acheter pour avoir r images différentes. On note Tn le nombre de tablettes qu'il faut acheter pour avoir une nouvelle image sachant que l'on en a déjà $n-1$ ($T_1 = 1$).

1) Montrer que la loi de T_2 est une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
2) Donner la loi de T_n.
3) En déduire $E(X_r)$ et $E(X_N)$. Donner un équivalent de $E(X_N)$ quand $N \longrightarrow \infty$.
4) On admet que les v.a.d. T_n sont indépendantes. Calculer $Var(X_N)$. En donner un équivalent quand $N \longrightarrow \infty$.
5) Votre petit frère est uniquement intéressé par l'équipe française (k joueurs). On note Y_k le nombre de tablettes qu'il faut acheter pour obtenir les k joueurs français. Calculer $E(Y_k)$ et $E(Y_k)$.

Exercice 2 (pts) :
Le temps T nécessaire à un rat pour parcourir un labyrinthe est une variable aléatoire dont la distribution de probabilité est donnée par :

T (en secondes)	2	3	4	5	6	7
$P(T=t)$	0,1	0,1	0,3	p_5	0,2	0,1

1) Compléter le tableau en calculant $p_5 = P(T=5)$.
2) Calculer le temps moyen, la variance, l'écart-type.
3) Le rat est récompensé à l'aide d'un biscuit pour chaque seconde économisée sur un temps de parcours de 6 secondes (par exemple, s'il met 4 secondes, il reçoit 2 biscuits, mais, s'il met 6 secondes ou plus, il ne reçoit rien). Tabuler la loi de probabilité de la variable « Récompense » R égale au nombre de biscuits reçus. Calculer la récompense moyenne du rat, ainsi que la variance et l'écart-type de R.
4) Supposons que le rat soit puni par un choc électrique dont la puissance augmente fortement avec le temps mis à parcourir le labyrinthe, soit un choc de T^2 volts pour un temps de T secondes. Calculer la punition moyenne du rat.
5) Reprendre la question précédente en supposant que la punition soit un choc électrique dont la puissance varie avec le temps selon la formule $P = 10\,T + 5$ (la puissance du choc électrique est exprimée en volts). Calculer de deux façons différentes la punition moyenne ainsi que $Var(P)$.

Exercice 3 (pts) : **Lois continues**
Les deux rives d'un estuaire sont reliées par des bateaux qui quittent la rive nord exactement toutes les 10 minutes. Mr Dulac séjourne sur la rive nord et traverse l'estuaire une fois par jour pour se rendre dans la partie sud. Son arrivée au point d'embarquement sur la rive se fait au hasard.

1. Le temps, en minutes, séparant l'arrivée de Mr Dulac à l'embarcadère du prochain départ du bateau, définit une variable aléatoire T qui suit une loi uniforme.

a) Définir la fonction de densité de probabilité f suivie par la variable aléatoire T.
b) Quel est le temps moyen d'attente de M. Dulac à l'embarcadère ?
c) Calculer la probabilité pour qu'un jour donné M. Dulac attende plus de 7 mn à l'embarcadère.

2. Mr Dulac séjourne 10 jours sur la rive nord. Le nombre de jours où son attente, pour prendre le bateau, est supérieure à 7 minutes définit une variable aléatoire X. On suppose que l'arrivée de Mr Dulac à l'embarcadère se fait de façon indépendante d'un jour à l'autre.

a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Déterminer $E(X)$
b) Calculer la probabilité que M. Dulac n'attende jamais plus de 7 mn à l'embarcadère
c) Calculer $p(X \leq 5)$