**** *EXERCICE 1* ****

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose : $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$, $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\, e^{-x^2}\mathrm{d}x$, $L_k = J_{2k}$ et $M_k = J_{2k+1}$.

1°) *Sans calculer ni I_k, ni J_k, montrons que I_k et $J_k \in \mathbb{R}$.*

On peut remarquer que chacune de ces 2 intégrales est de la forme $R_k(c) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^k\, e^{-x^c}\,\mathrm{d}x$,

où $k \in \mathbb{N}$ et c est une constante réelle > 0. En effet, on voit que $I_k = R_k(1)$ et $J_k = R_k(2)$.

Montrons ainsi que comme $k \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}_+^*$, alors $R_k(c) \in \mathbb{R}$.

Pour cela, notons d'abord que : $(\,k \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}_+^*) \implies \boxed{R_k(c) \text{ est une } \textbf{\textit{I.I.S.}} \text{ en } +\infty}$.

Ensuite, posons, $\forall\, x \in\,]\,0\,,\,+\infty\,[\,$: $f(x) = x^k\, e^{-x^c}$. On a donc : $R_k(c) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi, comme la fonction f est ***à valeurs réelles*** sur $]\,0\,,\,+\infty\,[$, alors :

pour montrer que $R_k(c) \in \mathbb{R}$, il suffit de montrer que l'intégrale impropre $R_k(c)$ est convergente

Or, on a : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 f(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2\, x^k\, e^{-x^c} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} x^{\,k+2}\, e^{-x^c}$.

Par ailleurs, $c > 0 \implies \displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^{\,k+2}\, e^{-x^c} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^{-x^c} = 0$, $\implies \displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 f(x) = 0$,

$\implies$ $R_k(c)$ converge, d'après la ***Règle « $\boldsymbol{x^\alpha f(x)}$ »*** en $+\infty$, avec $\alpha = 2 > 1$;

$\implies$ $R_k(c) \in \mathbb{R}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ et $\forall\, c \in \mathbb{R}_+^*$, $\implies$ I_k et $J_k \in \mathbb{R}$. ***Cqfd.***

> ••• ***Remarque/Commentaire n°1 :***
> Ci-dessus, la puissance $\alpha = 2$ a permis de conclure sur la nature de l'***I.I.S.*** en $+\infty$ $R_k(c)$.
> Mais on vérifie aisément que tout réel $\alpha > 1$ aurait permis tout autant de le faire.

2°) *Sans calculer ni I_k, ni M_k, montrons que $M_k = \alpha\, I_k$, où α est une constante réelle à préciser.*

Pour cela, notons d'abord que :

$$M_k = J_{2k+1} = \int_0^{+\infty} x^{2k+1}\, e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{2k}\, e^{-x^2} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (x^2)^k\, e^{-x^2} \times \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(x^2).$$

Ceci suggère d'effectuer, dans l'intégrale impropre M_k, le changement de variable $t = x^2$, et donc $x = \sqrt{t}$. Comme il se déduit de la question précédente que $M_k = J_{2k+1} \in \mathbb{R}$, et que, par ailleurs,

1. $f(x) = x^{2k+1}\, e^{-x^2}$ est une fonction continue sur $]\,0\,,\,+\infty\,[$,
2. $\varphi(t) = \sqrt{t}$ est est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\,0\,,\,+\infty\,[\longrightarrow]\,0\,,\,+\infty\,[$,

alors, il vient, d'après le ***Théorème de Changement de variable dans une intégrale impropre*** :

$$M_k = \int_0^{+\infty} t^k\, e^{-t} \times \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\, I_k, \implies \boxed{M_k = \alpha\, I_k, \text{ avec } \alpha = \frac{1}{2}}. \ \textbf{\textit{Cqfd.}}$$

3°) a) *Montrons que : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $I_{k+1} = (k+1)\, I_k$.*

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a : $I_{k+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{k+1}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Pour montrer que $I_{k+1} = (k+1)\, I_k$, effectuons une *intégration par parties* dans l'intégrale impropre I_{k+1}, en considérant $u(t)$ et $v(t)$, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,,\,+\infty\,[$ telles que :

$$u(t) = t^{k+1} \qquad \text{et} \qquad v'(t) = e^{-t}.$$

Alors $u'(t) = (k+1)\, t^{\,k}$, et on peut prendre $v(t) = -\, e^{-t}$. Il vient ainsi :

$$\lim_{t \underset{>}{\longrightarrow} 0} \big[u(t)\, v(t) \big] = \lim_{t \underset{>}{\longrightarrow} 0} \big(t^{k+1} \times -e^{-t} \big) = - \big(\lim_{t \underset{>}{\longrightarrow} 0} t^{k+1} \times e^{-t} \big) = -(0 \times 1) = 0$$

$$\Big(\text{car } \lim_{t \underset{>}{\longrightarrow} 0} e^{-t} = 1, \text{ et } k \in \mathbb{N} \implies k+1 > 0 \implies \lim_{t \underset{>}{\longrightarrow} 0} t^{k+1} = 0 \Big) ;$$

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \big[u(t)\, v(t) \big] = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \big(t^{k+1} \times -e^{-t} \big) = - \big(\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^{k+1} e^{-t} \big) = - \big(\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{-t} \big) = 0.$$

$$\implies \lim_{t \underset{>}{\longrightarrow} 0} \big[u(t)\, v(t) \big] = 0 = L_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} \big[u(t)\, v(t) \big] = 0 = L_2 \in \mathbb{R}.$$

De ce qui précède, et comme $I_{k+1} \in \mathbb{R}$, on peut écrire, d'après le ***Théorème d'intégration par parties pour les intégrales impropres*** :

$$I_{k+1} = \int_0^{+\infty} \big[u(t)\, v'(t) \big]\, dt = L_2 - L_1 - \int_0^{+\infty} \big[u'(t)\, v(t) \big]\, dt = 0 - 0 - \int_0^{+\infty} (k+1)\, t^k \times -e^{-t}\, dt,$$

$$\implies I_{k+1} = (k+1) \int_0^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, dt, \text{ i.e. } I_{k+1} = (k+1)\, I_k. \text{ \textbf{\textit{Cqfd.}}}$$

b) ***Déduisons en les valeurs de*** I_k ***et*** M_k**,** $\forall\, k \in \mathbb{N}$**.**

D'après la question précédente, pour $k \in \mathbb{N}$, $I_{k+1} = (k+1)\, I_k$. Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $I_k = k \cdot I_{k-1}$, et donc, par itération descendante :

$$I_k = k \cdot I_{k-1} = k\,(k-1) \cdot I_{k-2} = \cdots = k\,(k-1) \times \cdots \times 1 \cdot I_0, \implies \boxed{I_k = (k\,!) \cdot I_0}. \qquad (\textbf{\textit{E1.1}})$$

La dernière égalité est aussi vraie pour $k = 0$. Elle est donc vraie $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que, pour obtenir la valeur finale de I_k, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, il suffit de calculer celle de l'intégrale $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt$. Or, d'après **1°)** avec $k = 0$, I_0 est une ***I.I.S.*** en $+\infty$ qui converge. De ce fait, sa valeur est donnée, par définition, par :

$$I_0 = \lim_{X \longrightarrow +\infty} F(X), \text{ avec, } \forall\, X \in \,]\,0\,, +\infty\,[, \; F(X) = \int_0^X e^{-t}\, dt = \big[-e^{-t} \big]_{t=0}^{t=X} = 1 - e^{-X},$$

$$\implies I_0 = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \big(1 - e^{-X}\big), \text{ i.e. } \boxed{I_0 = 1}. \qquad (\textbf{\textit{E1.2}})$$

Alors $(\textbf{\textit{E1.2}})$ dans $(\textbf{\textit{E1.1}})$ entraîne : $\boxed{\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}, \; I_k = k\,!}}$. D'où aussi, d'après **2°)** : $\boxed{\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}, \; M_k = \dfrac{k\,!}{2}}}$.

4°) a) ***Montrons que :*** $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$**,** $L_k = \beta \cdot (2k-1)\, L_{k-1}$**,** ***où*** β ***est une constante réelle à préciser.***

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Observons que : $L_k = J_{2k} = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{2k}\, e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} x^{2k-1} \times x\, e^{-x^2}\, dx.$

Ceci suggère d'effectuer, dans l'intégrale impropre L_k, une *intégration par parties*, avec $u(x)$ et $v(x)$, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\,0\,, +\infty\,[$ telles que :

$$u(x) = x^{2k-1} \quad \text{et} \quad v'(x) = x\, e^{-x^2}.$$

Alors $u'(x) = (2k-1)\, x^{2k-2}$, et on peut prendre $v(x) = -\dfrac{e^{-x^2}}{2}$. Il vient ainsi :

$$\lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} \big[u(x)\, v(x) \big] = \lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} \Big(x^{2k-1} \times -\frac{e^{-x^2}}{2} \Big) = -\frac{1}{2} \big(\lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} x^{2k-1} \times e^{-x^2} \big) = -\frac{0 \times 1}{2} = 0$$

$$\Big(\text{car } \lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} e^{-x^2} = 1, \text{ et } k \in \mathbb{N}^* \implies 2k-1 > 0 \implies \lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} x^{2k-1} = 0 \Big) ;$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \big[u(x)\, v(x) \big] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \Big(x^{2k-1} \times -\frac{e^{-x^2}}{2} \Big) = -\frac{\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^{2k-1}\, e^{-x^2}}{2} = -\frac{\lim_{x \longrightarrow +\infty} e^{-x^2}}{2} = 0.$$

$$\implies \lim_{x \underset{>}{\longrightarrow} 0} \big[u(x)\, v(x) \big] = 0 = L_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} \big[u(x)\, v(x) \big] = 0 = L_2 \in \mathbb{R}.$$

De ce qui précède, et comme $L_k = J_{2k} \in \mathbb{R}$, on peut écrire, d'après le ***Théorème d'intégration par parties pour les intégrales impropres*** :

$$L_k = \int_0^{+\infty} \left[u(x)\, v'(x) \right] \mathrm{d}x = L_2 - L_1 - \int_0^{+\infty} \left[u'(x)\, v(x) \right] \mathrm{d}x$$

$$= 0 - 0 - \int_0^{+\infty} (2k-1)\, x^{2k-2} \times -\frac{e^{-x^2}}{2}\, \mathrm{d}x = \frac{2k-1}{2} \int_0^{+\infty} x^{2k-2}\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{2k-1}{2}\, J_{2k-2}\ ;$$

$$\Longrightarrow L_k = \frac{2k-1}{2}\, J_{2(k-1)} = \frac{2k-1}{2}\, L_{k-1}, \quad \Longrightarrow \boxed{L_k = \beta \cdot (2k-1)\, L_{k-1}, \ \text{avec} \ \beta = \frac{1}{2}}.\ \textbf{\textit{Cqfd.}}$$

b) ***Déduisons en que,*** $\forall\, k \in \mathbb{N}$***, on a :*** $L_k = \dfrac{(p\,k)\,!}{q^k \cdot (k\,!)} \cdot B$***, où*** p, q ***sont 2 constantes entières, et*** B ***est une constante réelle, toutes les*** 3 ***à préciser. On admettra que*** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$***.***

D'après ce qui précède, on a, pour $k \in \mathbb{N}^*$: $L_k = \dfrac{2k-1}{2}\, L_{k-1}$. Il s'ensuit, par itération descendante :

$$L_k = \frac{2k-1}{2}\, L_{k-1} = \frac{2k-1}{2} \times \frac{2k-3}{2}\, L_{k-2} = \cdots = \frac{2k-1}{2} \times \frac{2k-3}{2} \times \cdots \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\, L_0,$$

$$\Longrightarrow \boxed{L_k = \frac{(2k-1)(2k-3) \times \cdots \times 3 \times 1}{2^k}\, L_0}.$$

Pour mettre ce résultat sous la forme finale demandée, constatons qu'au numérateur de la fraction dans l'encadré ci-dessus, on a le produit des entiers impairs de 1 jusqu'à $2k-1$. On peut compléter ce produit pour obtenir $(2k)\,!$ en multipliant ce numérateur et le dénominateur par les entiers pairs de 2 à $2k$, soit :

$$L_k = \frac{(2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)(2k-4) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}{2^k \times (2k)(2k-2)(2k-4) \times \cdots \times 4 \times 2}\, L_0,$$

$$= \frac{(2k)\,!}{2^k \times 2^k \times k\,(k-1)(k-2) \times \cdots \times 2 \times 1}\, L_0, \quad \Longrightarrow \boxed{L_k = \frac{(2k)\,!}{4^k \cdot (k\,!)}\, L_0}. \qquad (\textbf{\textit{E1.3}})$$

Cette dernière égalité reste vraie y compris pour $k = 0$. Elle est donc vraie $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que, pour obtenir la valeur finale de L_k, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, il suffit de trouver celle de l'intégrale $L_0 = J_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x$. Or, l'énoncé nous a rappelé que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Par ailleurs, on voit que la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ est paire. Il s'ensuit que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = 2\, L_0 \Longrightarrow \boxed{L_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

En injectant cela dans (***E1.3***), on conclut que : $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}, \ L_k = \dfrac{(2k)\,!}{4^k \cdot (k\,!)} \cdot \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$;

$$\Longrightarrow \boxed{\forall\, k \in \mathbb{N}, \ L_k = \frac{(p\,k)\,!}{q^k \cdot (k\,!)} \cdot B, \ \text{avec} \ p = 2 \in \mathbb{N}, \ q = 4 \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ B = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \in \mathbb{R}}.\ \textbf{\textit{Cqfd.}}$$

5°) a) ***Trouvons un équivalent simple de*** L_k ***quand*** $k \longrightarrow +\infty$***.***

On sait que, d'après la ***Formule de Stirling***, on a : $\boxed{k\,! \underset{k \longrightarrow +\infty}{\sim} \left(\dfrac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{2\pi k}}$.

Par conséquent, on a aussi : $(2k)\,! \underset{k \longrightarrow +\infty}{\sim} \left(\dfrac{2k}{e}\right)^{2k} \cdot \sqrt{2\pi \times 2k} = 4^k \left(\dfrac{k}{e}\right)^{2k} \cdot 2\sqrt{\pi k}\,.$

Compte tenu du résultat de la question précédente et des propriétés des équivalents de suites au voisinage de $+\infty$, il s'ensuit que :

$$L_k \underset{k \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^k \left(\dfrac{k}{e}\right)^{2k} \cdot 2\sqrt{\pi k}}{4^k \cdot \left(\dfrac{k}{e}\right)^{k} \cdot \sqrt{2\pi k}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \text{i.e.} \qquad \boxed{L_k \underset{k \longrightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

b) ***Etudions la nature de la série*** $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{J_{2k}}{J_{2k+1}}$.

Posons, $\forall\, k \in \mathbb{N}$: $\displaystyle u_k = \frac{J_{2k}}{J_{2k+1}} = \frac{L_k}{M_k} \geqslant 0\,; \implies \sum_{k \geqslant 0} \frac{J_{2k}}{J_{2k+1}} = \sum_{k \geqslant 0} u_k$, série à termes positifs.

Comme elle est à termes positifs, alors, pour étudier la nature de cette série, on peut d'abord chercher un équivalent simple de u_k quand $k \longrightarrow +\infty$. D'après les propriétés des équivalents de suites au voisinage de $+\infty$, il suffit d'en trouver un respectivement pour L_k et M_k. Or, on a déjà trouvé celui de L_k à la question précédente. Mais, au début de cette même question précédente, on a aussi rappelé la *Formule de Stirling* donnant l'équivalent simple de $k\,!$ quand $k \longrightarrow +\infty$. On en déduit alors que, compte tenu de l'expression de M_k ($\forall\, k \in \mathbb{N}$) trouvée à la question **3°) b)**, on a :

$$\boxed{M_k \underset{k \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}}\,.$$

En combinant cela avec le résultat de la question précédente, il vient : $\displaystyle u_k \underset{k \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\dfrac{k}{e}\right)^k \cdot \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}}{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}}$,

$$\implies u_k \underset{k \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k^{1/2}} = \frac{A}{k^{\alpha}}, \quad \text{avec : } \begin{cases} A = 1 \in \mathbb{R}_+^*, \\ \alpha = 1/2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$\implies$ D'après la ***Règle de Riemann pour les séries***, la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} u_k$ est divergente, car $\alpha = \dfrac{1}{2} \leqslant 1$.

• ***Conclusion :*** $\boxed{\text{La série } \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{J_{2k}}{J_{2k+1}} \text{ est divergente}}$.

****** EXERCICE 2 ******

Trouvons le* domaine de définition *dans* IR *de la fonction : $H(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, posons, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{a^n}{1+a^{2n}} \in \mathbb{R}$. Par définition, on a :

$$\mathcal{D}_H = \Big\{a \in \mathbb{R} / \ H(a) \text{ existe dans } \mathbb{R}\Big\} = \Big\{a \in \mathbb{R} / \text{ la série } \sum_{n \geqslant 0} u_n \text{ converge}\Big\}.$$

Pour trouver $\mathcal{D}_H$, nous devons donc mener une discussion sur la nature de la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ selon les valeurs de a dans IR. Compte tenu de la forme de son terme général u_n, nous distinguerons 3 cas :

- • ***Cas 1 :*** $|a| < 1$, i.e. $a \in]-1, 1[$.

Dans ce cas, $\lim_{n \to +\infty} a^{2n} = 0 \implies \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+a^{2n}} = 1 \implies u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} a^n$,

$$\implies |u_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} |a|^n = \lambda \rho^n, \text{ avec : } \begin{cases} \lambda = 1 \in \mathbb{R}_+^*, \\ \rho = |a| \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

$\implies$ D'après la ***Règle*** « $\lambda \rho^n$ », la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ est convergente, car $\rho = |a| < 1$.

- ***Conclusion 1 :*** $\boxed{\forall a \in \mathbb{R} / |a| < 1, \text{ on a : } a \in \mathcal{D}_H}$.

- • ***Cas 2 :*** $|a| > 1$, i.e. $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Dans ce cas, observons d'abord que : $u_n = \dfrac{a^n}{a^{2n}\left(1+\frac{1}{a^{2n}}\right)} = \dfrac{\frac{1}{a^n}}{1+\frac{1}{a^{2n}}}$. Or, on a :

$$|a| > 1 \implies a^2 > 1 \implies \lim_{n \to +\infty} a^{2n} = +\infty \implies \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a^{2n}} = 0 \implies \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{a^{2n}}} = 1,$$

$$\implies u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \implies |u_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = \lambda \rho^n, \text{ avec : } \begin{cases} \lambda = 1 \in \mathbb{R}_+^*, \\ \rho = \dfrac{1}{|a|} \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Comme $|a| > 1 \implies \rho = \frac{1}{|a|} < 1$, alors la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge d'après la ***Règle*** « $\lambda \rho^n$ ».

- ***Conclusion 2 :*** $\boxed{\forall a \in \mathbb{R} / |a| > 1, \text{ on a : } a \in \mathcal{D}_H}$.

- • ***Cas 3 :*** $|a| = 1$, i.e. $a \in \{-1, 1\}$.

Dans ce cas, $|a| = 1 \implies a^2 = 1 \implies \forall n \in \mathbb{N}, \ a^{2n} = 1$, et donc $u_n = \frac{a^n}{2}$;

$\implies \sum_{n \geqslant 0} u_n = \sum_{n \geqslant 0} \frac{a^n}{2}$, ***série géométrique*** de 1^{er} terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $q = a$.

Comme $|q| = |a| = 1 \geqslant 1$, alors cette série géométrique diverge.

- ***Conclusion 3 :*** $\boxed{\forall a \in \mathbb{R} / |a| = 1, \text{ on a : } a \notin \mathcal{D}_H}$.

- ***Conclusion finale :***

$$\boxed{\boxed{\mathcal{D}_H = \{a \in \mathbb{R} / \ |a| \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[}}.$$

••• ***Remarque/Commentaire n° 2 :***

Le traitement de l'***Exercice 2*** qui précède a été globalement très peu convaincant, avec, dans l'écrasante majorité des copies, des raisonnements très approximatifs, quand bien même la réponse finale n'était pas, parfois, très éloignée de la réponse correcte attendue. Souvent aussi des cas détaillés de peu d'intérêt pour la discussion de la nature de la série considérée, ce qui traduit aussi une inefficacité dans la construction du raisonnememnt.

••• ***Remarque/Commentaire n° 3 :***

Dans un nombre non négligeable de copies, dans le traitement plus ou moins approximatif effectué de l'***Exercice 2***, la réponse finale sur le domaine de définition demandé ne contenait que des réels > 0, soit, souvent, la moitié du domaine demandé.

Ce qui semble avoir été à l'origine de ce résultat bizarroïde est le fait que, malgré l'insistance mise par l'enseignant en amphi sur ce point très particulier, certain(e)s ont voulu persister à penser que pour $n \in \mathbb{N}$, a^n serait égal à $e^{n \ln a}$, et donc n'existerait que pour les réels $a > 0$.

On va alors le répéter : $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall\, a \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)}, \boldsymbol{a^n} \textbf{\textit{ existe dans }} \mathbb{R} \textbf{\textit{ (ou dans }} \mathbb{C}\textbf{\textit{)}}}$.

Il est donné par :

$$\boxed{a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \,/\, n \geqslant 2, \ \text{ on a : } \ a^n = a \times \cdots \times a \quad (n \text{ fois})}.$$

••• ***Remarque/Commentaire n° 4 :***

De manière globale, pour l'***Exercice 2*** et le ***Problème*** qui suit, une correction réellement rigoureuse aurait suffi à mettre à terme la quasi totalité des copies. En effet, relativement à la problématique de la notation d'une série, l'enseignant commence le Chapitre sur les séries en énonçant d'entrée (avec insistance, et en motivant pourquoi) :

1. ***quelle notation sera utilisée et acceptée, dans ce Cours, pour une série de terme général*** u_n ***:*** $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$ ***;***
2. ***quelle notation sera utilisée et acceptée, dans ce Cours, pour la somme d'une telle série de terme général*** u_n***, lorsqu'elle est convergente :*** $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ ***.***

Malgré cet avertissement clair et précis d'entrée, ce sont de l'ordre de 90 % des copies qui n'en ont tenu absolument aucun compte. Ce qui fait que, si l'enseignant avait voulu être rigoureux, et conforme avec son propre avertissment, ce sont donc 90 % des copies qui auraient dû recevoir carrément la note de 00 d'entrée à l'***Exercice 2*** et au ***Problème***. Néanmoins, cela a bien été sanctionné, les concerné(e)s n'ayant jamais reçu la totalité des points dans les questions concernées, même quand le raisonnement était globalement acceptable (-0.25 à chaque fois) au contraire de ceux/celles qui ont bien voulu faire l'effort de respecter la spécification des notations données pour les séries et leurs sommes au dbut du Cours. Dans ces conditions, on se demande, en effet, pourquoi s'égosiller en Amphi ***!!!***

****** *PROBLEME* ******

I - *Pour $z \in \mathbb{C}$, et sans calculer $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, montrons que $F(z) \in \mathbb{C}$.*

Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{z^n}{n!}$. Ainsi, $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Comme $u_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors pour montrer que $F(z) \in \mathbb{C}$, il suffit de montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente.

Pour étudier la nature de cette série, distinguons 2 cas :

- ***Cas 1* :** $z = 0$.
  Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0$,
  $\Longrightarrow$ La série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente, car tous ses termes sont nuls à partir du rang $n = 1$.
- ***Cas 2* :** $z \in \mathbb{C}^*$.
  Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{z^n} = \frac{z}{n+1}$,
  $\Longrightarrow \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| = \frac{|z|}{n+1}$, car $n+1 \in \mathbb{N} \Longrightarrow n+1$ réel $\geqslant 0$.
  Ainsi, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1$;
  $\Longrightarrow$ D'après la ***Règle de d'Alembert***, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge absolument, donc converge.

•• ***Conclusion* :** $\forall z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge, donc $F(z) \in \mathbb{C}$. ***Cqfd.***

••• **N.B.** ***Dans toute la suite de ce Problème, on admettra que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $F(z) = e^z$***.

II - *On pose : $U = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n!}$, $V = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n!}$, et $W = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2(n)}{n!}$.*

1°) *Sans calculer ni U, ni V, ni W, montrons que U, V et $W \in \mathbb{R}$.* N.B. *Soyons efficace ! ! !*

Posons, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$: $u_n = \frac{\sin(n)}{n!}$, $v_n = \frac{\sin^2(n)}{n!}$, $w_n = (-1)^n \frac{\sin^2(n)}{n!}$.

Alors, comme $u_n, v_n, w_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$, pour montrer que les 3 sommes infinies $U, V, W \in \mathbb{R}$, il suffit de montrer que les 3 séries $\sum_{n \geqslant 0} u_n$, $\sum_{n \geqslant 0} v_n$, $\sum_{n \geqslant 0} w_n$ sont convergentes. Pour cela, remarquons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ (n \geqslant 2), \quad |u_n| \leqslant \frac{1}{n!}, \quad |v_n| \leqslant \frac{1}{n!}, \quad |w_n| \leqslant \frac{1}{n!}. \qquad (\boldsymbol{P.1})$$

Mais, d'après le **I**, comme $z = 1 \in \mathbb{C}$, alors la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!}$ est convergente.

$\Longrightarrow$ D'après la ***Règle du changement du rang de départ***, la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n!}$ est convergente. $(\boldsymbol{P.2})$

Or, d'après le ***Critère de comparaison des séries à termes*** $\geqslant 0$,

$$(\boldsymbol{P.1})\text{-}(\boldsymbol{P.2}) \Longrightarrow \text{ les 3 séries } \sum_{n \geqslant 0} |u_n|, \ \sum_{n \geqslant 0} |v_n|, \ \sum_{n \geqslant 0} |v_n| \text{ sont convergentes ;}$$

$\Longrightarrow$ les 3 séries $\sum_{n \geqslant 0} u_n$, $\sum_{n \geqslant 0} v_n$, $\sum_{n \geqslant 0} w_n$ sont *absolument convergentes*, donc convergentes ;

$$\Longrightarrow U, V, W \in \mathbb{R}. \ \textit{\textbf{Cqfd.}}$$

2°) *Calculons U, V et W.*

- ***Calcul de U.***

On a : $$U = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n!} - \frac{\sin(0)}{0!} - \frac{\sin(1)}{1!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n!} - \sin(1). \qquad (\boldsymbol{P.3})$$

On sait que, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $e^{in} = \cos n + i \sin n$, avec $\cos n, \sin n \in \mathbb{R}$; d'où, comme $\frac{1}{n!} \in \mathbb{R}$:

$$\sin n = \mathbf{Im}\,(e^{in}) \implies \frac{\sin(n)}{n!} = \frac{1}{n!} \cdot \mathbf{Im}\,(e^{in}) = \mathbf{Im}\left(\frac{e^{in}}{n!}\right). \qquad (\boldsymbol{P.4})$$

Or, en utilisant le $\boxed{\mathbf{I}}$, comme $z = e^{i} \in \mathbb{C}$, alors on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{i})^n}{n!} = e^{e^{i}} \in \mathbb{C}$;

avec ($\boldsymbol{P.4}$), il vient : $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{Im}\left(\frac{e^{in}}{n!}\right) = \mathbf{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n!}\right) = \mathbf{Im}\,(e^{e^{i}}). \qquad (\boldsymbol{P.5})$$

Mais $e^{e^{i}} = e^{\cos 1 + i \sin 1} = e^{\cos 1} \cdot e^{i \sin 1} = e^{\cos 1} \cdot \left[\cos(\sin 1) + i \sin(\sin 1)\right]$,

$$\implies e^{e^{i}} = e^{\cos 1} \cos(\sin 1) + i\, e^{\cos 1} \sin(\sin 1), \implies \mathbf{Im}\,(e^{e^{i}}) = e^{\cos 1} \sin(\sin 1). \qquad (\boldsymbol{P.6})$$

Enfin, ($\boldsymbol{P.3}$)-($\boldsymbol{P.5}$)-($\boldsymbol{P.6}$) $\implies$ $\boxed{U = e^{\cos 1} \sin(\sin 1) - \sin 1}$.

- ***Calcul de V.***

On a : $$V = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n!} - \frac{\sin^2(0)}{0!} - \frac{\sin^2(1)}{1!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n!} - \sin^2(1). \qquad (\boldsymbol{P.7})$$

Ensuite, notons que : $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-\cos(2n)}{2\,(n!)} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n!}\right]. \qquad (\boldsymbol{P.8})$$

Or,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = F(1) = e^1 = e \;; \qquad (\boldsymbol{P.9})$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,\mathbf{Re}\,(e^{2in}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{Re}\left(\frac{e^{2in}}{n!}\right) \qquad \left(\text{car } \frac{1}{n!} \in \mathbb{R}\right)$$

$$= \mathbf{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{2in}}{n!}\right) = \mathbf{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{2i})^n}{n!}\right)$$

$$= \mathbf{Re}\left[F(e^{2i})\right] = \mathbf{Re}\,(e^{e^{2i}}), \quad \text{d'après } \boxed{\mathbf{I}}, \qquad (\boldsymbol{P.10})$$

avec $e^{e^{2i}} = e^{\cos 2 + i \sin 2} = e^{\cos 2} \cdot e^{i \sin 2} = e^{\cos 2} \cdot \left[\cos(\sin 2) + i \sin(\sin 2)\right]$,

$$\implies e^{e^{2i}} = e^{\cos 2} \cos(\sin 2) + i\, e^{\cos 2} \sin(\sin 2), \implies \mathbf{Re}\,(e^{e^{2i}}) = e^{\cos 2} \cos(\sin 2). \qquad (\boldsymbol{P.11})$$

Compte tenu de ($\boldsymbol{P.7}$) à ($\boldsymbol{P.11}$), il vient : $\boxed{V = \frac{e - e^{\cos 2} \cos(\sin 2)}{2} - \sin^2(1)}$.

- ***Calcul de W.***

Partons de :

$$W = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2(n)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin^2(n)}{n!} - \frac{\sin^2(0)}{0!} + \frac{\sin^2(1)}{1!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin^2(n)}{n!} + \sin^2(1). \qquad (\boldsymbol{P.12})$$

Ensuite, remarquons que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin^2(n)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1-\cos(2n)}{2\,(n!)} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n)}{n!}\right]. \quad (\boldsymbol{P.13})$$

Or,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = F(-1) = e^{-1} ; \quad (\boldsymbol{P.14})$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mathbf{Re}\,(e^{2in}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{Re}\left(\frac{(-1)^n e^{2in}}{n!}\right) \qquad \left(\text{car } \frac{(-1)^n}{n!} \in \mathrm{IR}\right)$$

$$= \mathbf{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{2in}}{n!}\right) = \mathbf{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-e^{2i})^n}{n!}\right)$$

$$= \mathbf{Re}\Big[F(-e^{2i})\Big] = \mathbf{Re}\,(e^{-e^{2i}}), \quad \text{d'après } \boxed{\mathbf{I}}, \quad (\boldsymbol{P.15})$$

avec $e^{-e^{2i}} = e^{-\cos 2 - i \sin 2} = e^{-\cos 2} \cdot e^{-i\sin 2} = e^{-\cos 2} \cdot \left[\cos(\sin 2) - i \sin(\sin 2)\right]$,

$$\Longrightarrow e^{-e^{2i}} = e^{-\cos 2}\cos(\sin 2) - i\, e^{-\cos 2}\sin(\sin 2), \Longrightarrow \mathbf{Re}\,(e^{-e^{2i}}) = e^{-\cos 2}\cos(\sin 2). \quad (\boldsymbol{P.16})$$

Compte tenu de $(\boldsymbol{P.12})$ à $(\boldsymbol{P.16})$, il vient : $\boxed{W = \dfrac{e^{-1} - e^{-\cos 2}\cos(\sin 2)}{2} + \sin^2(1)}$.

$\boxed{\text{III}}$ - ***Pour un réel*** $\lambda > 0$ ***donné, on considère*** X***, une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre*** λ***. Cela signifie que*** X ***est une variable aléatoire qui peut prendre comme valeurs les entiers naturels (i.e.*** $0, 1, 2, 3, \cdots$***), et avec les probabilités respectives :***

$$P_n = \mathbf{Pr}\,(X = n) = C(\lambda) \cdot \frac{\lambda^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathrm{IN},$$

où $C(\lambda)$ ***est une fonction appropriée de*** λ***.***

1°) ***Trouvons la fonction*** $C(\lambda)$***, sachant qu'on doit avoir :*** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P_n = 1$.

On a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P_n = \sum_{n=0}^{+\infty} C(\lambda) \cdot \frac{\lambda^n}{n!} = C(\lambda) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = C(\lambda) \cdot F(\lambda) = C(\lambda) \cdot e^{\lambda}$, d'après le $\boxed{\text{I}}$.

D'où : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P_n = 1 \iff C(\lambda) \cdot e^{\lambda} = 1 \iff \boxed{C(\lambda) = e^{-\lambda}}$.

2°) ***La moyenne ou espérance mathématique de*** X ***est donnée par :*** $\displaystyle m_X = \mathbf{E}\,(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n$***, lorsque cette somme infinie existe.***

a) ***Sans calculer*** m_X***, montrons que*** $m_X \in \mathrm{IR}$***.***

Comme $nP_n \in \mathrm{IR}$, $\forall n \in \mathrm{IN}$, alors pour montrer que la somme infinie $m_X \in \mathrm{IR}$, il suffit de montrer que la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} nP_n$ est convergente.

Or, si on pose $u_n = nP_n$, $\forall n \in \mathrm{IN}$, alors on a, $\forall n \geqslant 1$:

$$u_n = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{(n-1)!} > 0 \Longrightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{n+1}}{n!} \times \frac{(n-1)!}{e^{-\lambda} \cdot \lambda^n} = \frac{\lambda}{n}.$$

Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\lambda}{n} = 0 < 1$;

$\Longrightarrow$ D'après la ***Règle de d'Alembert***, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n = \sum_{n \geqslant 0} nP_n$ converge absolument, donc converge.

$\Longrightarrow$ Sa somme infinie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nP_n \in \mathrm{IR}$, i.e. $m_X \in \mathrm{IR}$. ***Cqfd.***

b) ***Montrons que $m_X = \lambda^k$, où k est une constante entière à préciser.***

On a : $m_X = \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n = 0 \times P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n = \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{(n-1)!} = \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$.

Or, par la translation d'indice $p = n-1$, il vient : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^p}{p!} = F(\lambda) = e^{\lambda}$, d'après le $\boxed{\mathrm{I}}$;

$\Longrightarrow\ m_X = \lambda\, e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = \lambda$, i.e. $\boxed{m_X = \lambda^k, \text{ avec } k = 1 \in \mathbb{N}}$. ***Cqfd.***

> ••• ***Remarque/Commentaire n° 5 :***
> Les 2 égalités suivantes, lues dans une marmaille des copies, sont ***grossièrement*** fausses :
>
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{(n-1)!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = e^{\lambda},$$
>
> car le terme de rang $n=0$ des 2 sommes infinies $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{(n-1)!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ n'a aucun sens, ceci du fait que $(-1)!$ n'existe pas ***!!!***
> La bonne manière de manœuvrer est celle suivie dans la solution proposée ci-dessus.
> Une remarque analogue vaut pour les réponses aux questions **3°) b)** et **4°)** ci-dessous.

3°) ***La variance de X est donnée par :*** $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}\left[(X - m_X)^2\right] = \mathbf{E}(X^2) - (m_X)^2$,

avec $\mathbf{E}(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P_n$, ***lorsque cette somme infinie existe.***

a) ***Sans calculer $\mathbf{E}(X^2)$, montrons que $\mathbf{E}(X^2) \in \mathbb{R}$.***

Comme $n^2 P_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors pour montrer que la somme infinie $\mathbf{E}(X^2) \in \mathbb{R}$, il suffit de montrer que la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} n^2 P_n$ est convergente.

Or, si on pose $u_n = n^2 P_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors on a, $\forall n \geqslant 1$:

$$u_n = e^{-\lambda} \cdot \frac{n\lambda^n}{(n-1)!} > 0 \implies \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-\lambda} \cdot (n+1)\lambda^{n+1}}{n!} \times \frac{(n-1)!}{e^{-\lambda} \cdot n\lambda^n} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\frac{\lambda}{n}.$$

De ce fait, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\frac{\lambda}{n} = 0 < 1$;

$\Longrightarrow$ D'après la ***Règle de d'Alembert***, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n = \sum_{n \geqslant 0} n^2 P_n$ converge absolument, donc converge.

$\Longrightarrow$ Sa somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P_n \in \mathbb{R}$, i.e. $\mathbf{E}(X^2) \in \mathbb{R}$. ***Cqfd.***

b) ***Calculons $\mathbf{Var}(X)$. NOTA : On pourra remarquer que $n^2 = n(n-1) + n$.***

Pour cela, calculons d'abord $\mathbf{E}(X^2)$. On a :

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P_n = \sum_{n=0}^{+\infty} [n(n-1) + n] P_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P_n + m_X = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P_n + \lambda\ ; \qquad (\boldsymbol{P.17})$$

d'autre part, $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P_n = 0 \times P_0 + 0 \times P_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P_n = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P_n$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}. \qquad (\boldsymbol{P.18})$$

Or, par la translation d'indice $p = n-2$, il vient : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)\,!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^p}{p\,!} = F(\lambda) = e^{\lambda}$, d'après le $\boxed{\mathrm{I}}$;

$\displaystyle\Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P_n = \lambda^2\, e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = \lambda^2, \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{E}\,(X^2) = \lambda^2 + \lambda}$, compte tenu de $(\boldsymbol{P.17})$-$(\boldsymbol{P.18})$.

Par conséquent, $\mathbf{Var}\,(X) = \mathbf{E}\,(X^2) - (m_X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda$, i.e. $\boxed{\boxed{\mathbf{Var}\,(X) = \lambda}}$.

4°) *Après avoir montré qu'elle existe, calculons la valeur de la somme infinie* $\displaystyle A = \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 P_n$.

•• *Montrons d'abord que la somme infinie A existe.*

Comme $n^3 P_n \in \mathrm{IR}$, $\forall\, n \in \mathrm{IN}$, alors pour montrer que la somme infinie A existe, il suffit de montrer que la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} n^3 P_n$ est convergente.

Or, si on pose $u_n = n^3 P_n$, $\forall\, n \in \mathrm{IN}$, alors on a, $\forall\, n \geqslant 1$:

$$u_n = e^{-\lambda} \cdot \frac{n^2 \lambda^n}{(n-1)\,!} > 0 \implies \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-\lambda} \cdot (n+1)^2 \lambda^{n+1}}{n\,!} \times \frac{(n-1)\,!}{e^{-\lambda} \cdot n^2 \lambda^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{\lambda}{n}.$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \frac{\lambda}{n} = 0 < 1$;

$\Longrightarrow$ D'après la ***Règle de d'Alembert***, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n = \sum_{n \geqslant 0} n^3 P_n$ converge absolument, donc converge.

$\Longrightarrow$ Sa somme infinie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 P_n \in \mathrm{IR}$, i.e. A existe dans IR. ***Cqfd.***

•• *Calcul de A.*

Nous partirons de l'observation que :

$$n(n-1)(n-2) = n(n^2 - 3\,n + 2) = n^3 - 3\,n^2 + 2\,n \implies n^3 = n(n-1)(n-2) + 3\,n^2 - 2\,n\ ;$$

$$\Longrightarrow A = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)P_n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P_n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n.$$

Or, $\displaystyle 3 \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P_n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n P_n = 3\, \mathbf{E}\,(X^2) - 2\, m_X = 3\,(\lambda^2 + \lambda) - 2\,\lambda = 3\,\lambda^2 + \lambda$, tandis que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)P_n = 0 \times P_0 + 0 \times P_1 + 0 \times P_2 + \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)P_n = \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)P_n$$

$$= \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2) \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n\,!} = \lambda^3\, e^{-\lambda} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-3}}{(n-3)\,!}.$$

Or, par la translation d'indice $p = n-3$, il vient : $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-3}}{(n-3)\,!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\lambda^p}{p\,!} = F(\lambda) = e^{\lambda}$, d'après le $\boxed{\mathrm{I}}$;

$\displaystyle\Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)P_n = \lambda^3\, e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = \lambda^3, \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\boxed{A = \lambda^3 + 3\,\lambda^2 + \lambda}}$.

FIN

••• *Remarque/Commentaire n°6 :*
Ci-dessus, on a essayé de proposer la réponse la plus constructive pour chaque question de l'épreuve. Cependant, pour chacune de ces questions, d'autres démarches étaient, évidemment, possibles. Ci après, une alternative est proposée pour certaines de ces questions.

****** EXERCICE 2 ****** ***Démarche alternative dans la détermination de $\mathcal{D}_H$ par une discussion de la nature, selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, de la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$, avec $u_n = \frac{a^n}{1+a^{2n}} \in \mathbb{R}$.***

On distingue les mêmes 3 cas, mais en étudiant chacun différemment.

- • ***Cas 1 :*** $|a| < 1$, i.e. $a \in]-1, 1[$.

Du fait que $1 + a^{2n} \geqslant 1$ et $|u_n| = \frac{|a|^n}{1+a^{2n}}$, alors on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |u_n| \leqslant |a|^n = v_n$. (***E2.1'***)

Or, $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ est une ***série géométrique*** de raison $q = |a|$ telle que $|q| = |a| < 1$,

$\Longrightarrow$ la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ est convergente. (***E2.2'***)

Mais, d'après le ***Critère de comparaison des séries à termes*** $\geqslant 0$,

(***E2.1'***) et (***E2.2'***) $\Longrightarrow$ la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} |u_n|$ est convergente,

$\Longrightarrow$ la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est absolument convergente, $\Longrightarrow$ $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente.

- ***Conclusion 1 :*** $\boxed{\forall a \in \mathbb{R} / |a| < 1, \text{ on a : } a \in \mathcal{D}_H}$.

- • ***Cas 2 :*** $|a| > 1$, i.e. $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Ici, partons plutôt de ce que, comme $1 + a^{2n} \geqslant a^{2n}$, $|u_n| = \frac{|a|^n}{1+a^{2n}}$ et $a^{2n} = |a|^{2n}$, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{|a|^n}{|a|^{2n}} = \frac{1}{|a|^n} = \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = w_n. \qquad (\textbf{\textit{E2.3'}})$$

La série $\sum_{n \geqslant 0} w_n$ est une ***série géométrique*** de raison $q = \frac{1}{|a|}$.

Or, $|a| > 1 \Longrightarrow |q| = \frac{1}{|a|} < 1 \Longrightarrow$ la série géométrique $\sum_{n \geqslant 0} w_n$ est convergente. (***E2.4'***)

Mais, d'après le ***Critère de comparaison des séries à termes*** $\geqslant 0$,

(***E2.3'***) et (***E2.4'***) $\Longrightarrow$ la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} |u_n|$ est convergente,

$\Longrightarrow$ la série numérique $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est absolument convergente, $\Longrightarrow$ $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente.

- ***Conclusion 2 :*** $\boxed{\forall a \in \mathbb{R} / |a| > 1, \text{ on a : } a \in \mathcal{D}_H}$.

- • ***Cas 3 :*** $|a| = 1$, i.e. $a \in \{-1, 1\}$.

Dans ce cas, $|a| = 1 \Longrightarrow a^2 = 1 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a^{2n} = 1$, et donc $u_n = \frac{a^n}{2}$;

$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| = \frac{1}{2}, \Longrightarrow \lim_{n \longrightarrow +\infty} |u_n| = \frac{1}{2}$;

$\Longrightarrow |u_n| \not\longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$, $\Longrightarrow u_n \not\longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$;

$\Longrightarrow$ la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est divergente.

- ***Conclusion 3 :*** $\boxed{\forall a \in \mathbb{R} / |a| = 1, \text{ on a : } a \notin \mathcal{D}_H}$.

- ***Conclusion finale :***

$$\boxed{\boxed{\mathcal{D}_H = \{a \in \mathbb{R} / |a| \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[}}.$$

****** PROBLEME ****** ***Autres approches pour la question*** $\boxed{\mathbf{II}}$ **- 2°).**

•• ***Calcul de U : Approche 2.***

Partons de : $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 2)$, $e^{in} = \cos n + i \sin n$, avec $\cos n,\ \sin n \in \mathbb{R}$; d'où, comme $\dfrac{1}{n!} \in \mathbb{R}$:

$$\sin n = \mathbf{Im}\,(e^{in}) \implies \frac{\sin(n)}{n!} = \frac{1}{n!} \cdot \mathbf{Im}\,(e^{in}) = \mathbf{Im}\left(\frac{e^{in}}{n!}\right). \qquad (\textbf{\textit{P.1'}})$$

Or, d'après le $\boxed{\mathbf{I}}$, comme $z = e^{i} \in \mathbb{C}$, alors on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{i})^n}{n!} = e^{e^{i}} \in \mathbb{C}$.

Ainsi, $\displaystyle e^{e^{i}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n!} = \frac{e^{0i}}{0!} + \frac{e^{1i}}{1!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n!} \implies \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n!} = e^{e^{i}} - e^{i} - 1$,

ce qui, combiné avec (***P.1'***), donne :

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n!} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbf{Im}\left(\frac{e^{in}}{n!}\right) = \mathbf{Im}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n!}\right) = \mathbf{Im}\,(e^{e^{i}} - e^{i} - 1)\\ &= \mathbf{Im}\,(e^{\cos 1} \cdot \cos(\sin 1) + i\, e^{\cos 1} \sin(\sin 1) - \cos 1 - i \sin 1 - 1)\ ;\end{aligned}$$

$$\implies \boxed{U = e^{\cos 1} \sin(\sin 1) - \sin 1}.$$

•• ***Calcul de V : Approche 2.***

Partons de : $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 - \cos(2n)}{2\,(n!)} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n!}\right]. \qquad (\textbf{\textit{P.2'}})$$

Or, $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = F(1) - 1 - 1 = e - 2\ ; \qquad (\textbf{\textit{P.3'}})$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n!} - \frac{\cos(2\times 0)}{0!} - \frac{\cos(2\times 1)}{1!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n!} - 1 - \cos(2). \qquad (\textbf{\textit{P.4'}})$$

Mais, en calculant comme en (***P.10***)-(***P.11***), $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n)}{n!} = e^{\cos 2} \cos(\sin 2). \qquad (\textbf{\textit{P.5'}})$$

Compte tenu de (***P.2'***) à (***P.5'***), il vient : $\boxed{V = \dfrac{e - 1 + \cos 2 - e^{\cos 2} \cos(\sin 2)}{2}}$.

•• ***Calcul de W : Approche 2.***

Partons de :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2(n)}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 - \cos(2n)}{2\,(n!)} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n)}{n!}\right]. \qquad (\textbf{\textit{P.6'}})$$

Or, $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} = F(-1) - 1 + 1 = e^{-1}\ ; \qquad (\textbf{\textit{P.7'}})$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n)}{n!} - \frac{\cos(0)}{0!} + \frac{\cos(2)}{1!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n)}{n!} - 1 + \cos(2). \qquad (\textbf{\textit{P.8'}})$$

Mais, en calculant comme en (***P.15***)-(***P.16***), $$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2n)}{n!} = e^{-\cos 2} \cos(\sin 2). \qquad (\textbf{\textit{P.9'}})$$

Compte tenu de (***P.6'***) à (***P.9'***), il vient : $\boxed{W = \dfrac{e^{-1} + 1 - \cos 2 - e^{-\cos 2} \cos(\sin 2)}{2}}$.