Exercice 1.

1. On considère les formes linéaires f_1 et f_2 sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$f_1(x,y) = x + y, \quad f_2(x,y) = x - y$$

   (a) Montrer que $\gamma^* = (f_1, f_2)$ est une base de $(\mathbb{R}^2)^*$

   (b) Exprimer les formes linéaires g et h dans la base γ^*.

$$g(x,y) = x, \quad h(x,y) = 2x - 6y$$

2. (a) Montrer que les polynômes $u_1(X) = 1 - X + X^2$, $u_2(X) = 1 + X^2$ et $u_3(X) = 1 - X^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Déterminer la base duale associée à la base (u_1, u_2, u_3).

3. (a) Montrer que l'application

$$q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 8z^2 - 4xy + 2xz - 10yz$$

   définie une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

   (b) Montrer que le cône d'isotropie de q est la réunion de deux plans dont on déterminera des équations.

   (c) Déterminer la forme polaire de q

   (d) Déterminer le noyau de q.

4. Considérer la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x,y,z) = xy + yz + xz$$

   (a) Déterminer la signature, le rang et une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Soit $e_1 = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$. On considère $F = \mathbb{R}e_1$. Déterminer $F^\perp$.

Exercice 2.

On considère, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la forme quadratique

$$q_\alpha(x,y,z) = \alpha(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + xz + yz).$$

1. Justifier que q_α est une forme quadratique pour toute valeur de α, et déterminer la forme polaire associée

2. Déterminer une matrice M_α de q_α, puis le rang de q_α en fonction de α.

3. Déterminer les valeurs de α pour les quelles q_α est définie positive

4. Réduire q_α en fonction des valeurs de α.

5. Déterminer une base q_α-orthogonale pour tout α. (Une seule ! α).
   Indication : Remarquer que

$$q_\alpha(x,y,z) = (\alpha+1)(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2$$