Exercice 1. (5pts)

1. Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2, et

$$F = \left\{P \in E | P(1) + P'(0) = 0\right\}$$

.

   (a) Montrer que F est une hyperplan de E et en déduire sa dimension.

   (b) Déterminer un supplément de F.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $E = \mathbb{K}^{n\times n}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

   (a) Soit $A \in E$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_A & : & E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & X & \longmapsto & \varphi_A(X) = tr(AX) \end{array}$$

   est une forme linéaire.

   (b) Soit Φ l'application définie par

$$\begin{array}{rcccl} \Phi & : & E & \longrightarrow & E^* \\ & & A & \longmapsto & \Phi(A) = \varphi_A. \end{array}$$

   Montrer que Φ est linéaire.

   (c) En déduire que pour toute forme linéaire φ sur E, il existe une matrice $A \in E$ et une seule telle que pour tout $X \in E$, $\varphi(X) = tr(AX)$.

Exercice 2. (7pts)

Soient

$$\mathcal{V} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2};\ b + c = 0\right\} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

où $\mathbb{R}^{2\times 2}$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. On définit l'application

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & \mathcal{V}\times\mathcal{V} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (A, B) & \longmapsto & \varphi(A, B) = tr(AJB), \end{array}$$

où $tr(X)$ est la trace de la mattrice X.

1. Montrer que $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathcal{V}$.

2. (a) Montrer que φ est bilinéaire.

   (b) Déterminer la matrice de φ relativement à la base $\mathcal{B}$.

   (c) φ est-elle symétrique? antisymétrique?

3. Soit q la forme quadratique définie par $q(A) = \varphi(A, A)$

   (a) Déterminer la matrice de q relativement à la base $\mathcal{B}$.

   (b) Déterminer le rang, la signature et le noyau de q. Le noyau de q est celui de sa forme polaire.

   (c) La forme quadratique q est-elle définie positive?

4. Déterminer le q-orthogonal $F^{\perp}$ de

$$F = \mathbb{R}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 3. (8pts)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de la variable X de degré au plus n, muni de sa base canonique $\beta_n = \left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$. On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (P, Q) & \longmapsto & \varphi\left(P, Q\right) = \displaystyle\int_0^1 t^2 P(t) Q'(t) dt, \\ q & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & P & \longmapsto & q\left(P\right) = \varphi\left(P, P\right). \end{array}$$

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique? Anti-symétrique?
2. Déterminer la forme polaire φ_q associée à q.
3. Déterminer la matrice A de q relativement à la base canonique β_n. On calculera le coefficient $[A]_{i,j}$ de A.
4. On suppose $n = 2$.
   (a) Déterminer l'expression analytique de φ relativement à la base β_2.
   (b) Déterminer la forme réduite de q par la méthode de Gauss.
   (c) Déterminer le rang, la signature, le noyau et le cône isotrope de q. On rappelle que le noyau d'une forme quadratique est celui de sa forme polaire.
   (d) q-est-elle positive? Négative?
   (e) Déterminer une base q-orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.