Nous venons d'achever le cours sur la pblté

Ce que je sais :

- Avant toute chose, on définit d'abord un évènemt. Un évènemt est dit aléatoire lorsque qu'on ne peut pas prévoir à l'avance le nbre de fois de fois qu'il apparaît dans l'expérience et si répété dans les conditions similaires, il peut produire un résultat different.

Lors d'un expérience aléatoire, un évènmt élémtaire est noté ω et l'en. des évmts éltaires est Ω.

Maintenant, sur Ω, on va définir des évènemts (évènemts certain, impossible, le complementaire d'1 évènement). On va aussi définir les opérations sur les ensembles comme l'intersection, la réun° ou alors la ≠ce symétrique ($A \setminus B = A \cap \bar{B}$).

- Système complet d'évènmt

On dit que les partie $A_1, \dots, A_n$ forment un système complet d'évènmt si $(A_1, \dots, A_n)$ constitue une partition de Ω.

- Espace probabilisable

C'est la donnée de tt couple (Ω, F) où $F \subset \Omega$ vérifie :
- ~~F ≠ ∅~~ $\Omega \in F$
- $\forall A \in F, \bar{A} \in F$
- $\forall (A_i)_{i \in I} \in F, \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in F$

Définition

On appelle probabilité p tte application :

$$P : \mathcal{E}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longmapsto P(A) \text{ vérifiant :}$$

i) $\forall A \in \mathcal{E}(\Omega), P(A) \geq 0$ (axiome de positivité)

ii) $\forall A, B \in \mathcal{E}(\Omega), A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (axiome d'additivité)

iii) $P(\Omega) = 1$ (axiome de certitude)

Probabilité Combinatoire

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

Propriétés

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(\cup A_i) = \sum (-1)^{1+\text{Card } I} P(A_I)$ où $I_n = [\![1, n]\!]$, $A_\emptyset = \emptyset$

$A_{\{1,2,\dots,n\}} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

Indépendance statistique

On dit que 2 évènements A et B sont indépendants si $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$.

* **Indépendance mutuelle** On dit que les évènements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants dans leur ensemble si

$$\forall J \subset I_n, \quad P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

exple On lance 3 fois un dé équilibré numéroté de 1 à 6, et on observe à chaque fois le numéro affiché par le dé.

A : « le numéro est pair »

B : « Le numéro du 2nd est multiple de 3 ».

C : « La somme des 2 premiers est paire ».

Etudier l'indépendance mutuelle de A, B et C.

L'univers associé est : $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 = \{1, 2, \dots, 6\}^3$.

$|\Omega| = 6^3$.

$A = \{2, 4, 6\} \times \Omega_2 \times \Omega_3 \Rightarrow P(A) = \frac{3 \times 6 \times 6}{6^3} = \frac{1}{2}$

$B = \Omega_1 \times \{3,6\} \times \Omega_3 \Rightarrow P(B) = \frac{6\times 2\times 6}{6^3} = \frac{1}{3}$

$C = \{1,3,5\} \times \{1,3,5\} \times \Omega_3 + \{2,4,6\} \times \{2,4,6\} \times \Omega_3$

$P(C) = 2\times \frac{3\times 3\times 6}{6^3} = \frac{1}{2}$

$A\cap B = \{2,4,6\} \times \{3,6\} \times \Omega_3 \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{3\times 2\times 6}{6^3} = \frac{1}{6} = P(A)\times P(B)$

$A\cap C = \{2,4,6\} \times \{2,4,6\} \times \Omega_3 \Rightarrow P(A\cap C) = \frac{3\times 3\times 6}{6^3} = \frac{1}{4} = P(A)\times P(C)$

$B\cap C = (\{1,3,5\} \times \{3\} \times \Omega_3) \cup (\{2,4,6\} \times \{6\} \times \Omega_3)$

$\Rightarrow P(B\cap C) = \frac{3\times 6 + 3\times 6}{6^3} = \frac{1}{6} = P(B)\times P(C)$

$A\cap B\cap C = (\{2,4,6\} \times \{6\} \times \Omega_3) \Rightarrow P(A\cap B\cap C) = \frac{3\times 1\times 6}{6^3} = \frac{1}{12}$

$= P(A).P(B).P(C)$

D'où il y'a independance mutuelle.

Probabilité conditionnelle

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad (1)$$

On a donc d'après (1), $P(A\cap B) = P_A(B)\cdot P(A) = P_B(A)\cdot P(B)$

Probabilités totales

On donne $\{A_i\}$ un système complet d'évènmt et B un évènemt qque.

On a : $B = B\cap\Omega = B\cap(\bigcup A_i) = \bigcup(B\cap A_i)$

$P(B) = P(\bigcup(B\cap A_i)) = \sum P(B\cap A_i) = \sum P_{A_i}(B).P(A_i)$

$$\boxed{P(B) = \sum P_{A_i}(B).P(A_i)}$$

Probabltté : Theorème de Bayes

$\{A_i\}$ un système complet d'évèmmts, B qque.

$$\boxed{P_B(A_i) = \frac{P(A_i\cap B)}{P(B)} = \frac{P_{A_i}(B).P(A_i)}{\sum P_{A_i}(B).P(A_i)}}$$

Illustrons un peu ces formules par des exples pratiques

① 2 machines M_1 et M_2 produisent respectivement 100 et 200 auto. M_1 produit 5% de pièces défectueuses et M_2 — 6%. On prend une pièce au hazard et on constate qu'elle est défectueuse. pblté qu'elle ait été prdte par M_2.

Solution :

Soit les évènements suivants :

M_i : La pièce provient de la machine M_i

D : La pièce est défectueuse.

Il s'agit de $P_D(M_2)$.

$\{M_1, M_2\}$ forme un système complet d'évènemt.

D'après la formule de Bayes,

$$P_D(M_2) = \frac{P(D \cap M_2)}{P(D)} = \frac{P_{M_2}(D) \cdot P(M_2)}{P_{M_1}(D) \cdot P(M_1) + P_{M_2}(D) \cdot P(M_2)}$$

② Dans 1 poplt°, 1 pers / 100 est atteinte d'un maladie génétique. On met au point un test de dépistage. Le résultat est soit positif (T) ou négatif ($\overline{T}$). On sait que $P_M(T) = 0,8$ et $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,9$. On soumet un patient au test et il est positif. Quelle est la pblité que ce patient soit atteint de la maladie M?

Solution

$\{M, \overline{M}\}$ est un système complet d'évènements. D'après la formule de Bayes,

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{P_M(T) \cdot P(M)}{P_M(T) \cdot P(M) + P_{\overline{M}}(T) \cdot P(\overline{M})}.$$

en considérant : $P_{\overline{M}}(T) + P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 1$