

Suites, Séries, Intégrales

Cours et exercices

Sylvie Guerre-Delabrière
Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie

Table des matières

1	Quelques éléments de logique	1
1.1	Lettres grecques et symboles mathématiques	1
1.2	Implications $[A \Rightarrow B]$ et équivalences $[A \Longleftrightarrow B]$	1
1.3	Intersection et réunion	2
1.4	Quantificateurs	3
1.5	Ordre des quantificateurs	4
1.6	Négation	4
1.7	Raisonnement par récurrence	5
1.8	Bornes supérieures et bornes inférieures dans \mathbb{R}	5
1.9	Exercices sur le chapitre 1	6
1.10	Corrigé des exercices sur le Chapitre 1	7
2	Suites et Séries Numériques	11
2.1	Suites numériques	11
2.2	Limites dans $\overline{\mathbb{R}}$	19
2.3	Séries numériques	23
2.4	Séries à termes positifs	27
2.5	Séries à termes quelconques	34
2.6	Opérations sur les séries	37
2.7	Exercices sur le chapitre 2	40
2.8	Corrigé des exercices sur le Chapitre 2	42
3	Intégrale de Riemann et intégrale généralisée	47
3.1	Intégrales des fonctions en escalier	47
3.2	Fonctions intégrables, intégrale de Riemann	49
3.3	Primitives	55
3.4	Calcul des primitives	58
3.5	Intégration d'un produit de fonctions	59
3.6	Méthodes d'approximation numérique des intégrales	61
3.7	Définition des intégrales généralisées	65
3.8	Intégrales généralisées des fonctions positives.	68
3.9	Intégrales généralisées des fonctions ne gardant pas un signe constant	70
3.10	Exercices sur le chapitre 3	73
3.11	Corrigé des exercices sur le Chapitre 3	74
4	Suites et séries de fonctions	79
4.1	Convergence simple	79
4.2	Convergence uniforme	81
4.3	Continuité des limites et des sommes pour la convergence uniforme	85

4.4	Dérivabilité des limites et des sommes pour la convergence uniforme	87
4.5	Intégration des limites et sommes pour la convergence uniforme	90
4.6	Exercices sur le chapitre 4	91
4.7	Corrigé des exercices sur le Chapitre 4	93
5	Séries entières	97
5.1	Définitions et disque de convergence	97
5.2	Opérations sur les séries entières	100
5.3	Dérivation et intégration des séries entières	102
5.4	Développement en série entière à l'origine	104
5.5	Développement en série entière des fonctions usuelles	107
5.6	Fonction exponentielle complexe	109
5.7	Exercices sur le chapitre 5	112
5.8	Corrigé des exercices sur le Chapitre 5	113
6	Séries trigonométriques	119
6.1	Définitions et convergence	119
6.2	Continuité, dérivation et intégration de la somme	122
6.3	Développement en séries trigonométriques	124
6.4	Exercices sur le chapitre 6	132
6.5	Corrigé des exercices sur le Chapitre 6	134
7	Intégrales de Riemann dépendant d'un paramètre	139
7.1	Théorème de convergence bornée	139
7.2	Continuité de l'intégrale de Riemann	139
7.3	Dérivabilité de l'intégrale de Riemann	141
7.4	Cas où les bornes d'intégration dépendent du paramètre	143
7.5	Exercices sur le chapitre 7	145
7.6	Corrigé des exercices sur le Chapitre 7	146
8	Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre	149
8.1	Théorème de convergence dominée	149
8.2	Continuité de l'intégrale généralisée	150
8.3	Dérivabilité	151
8.4	Application : transformée de Laplace	155
8.5	Exercices sur le chapitre 8	159
8.6	Corrigé des exercices sur le Chapitre 8	162
	Bibliographie	169
	Index	170
	Index	170

Chapitre premier

Quelques éléments de logique

1.1 Lettres grecques et symboles mathématiques

α alpha	κ kappa	τ tau	Λ Lambda	\forall Pour tout
β beta	λ lambda	υ upsilon	Ξ Xi	\exists Il existe
γ gamma	μ mu	ϕ phi	Π Pi	\Rightarrow Implique
δ delta	ν nu	χ chi	Σ Sigma	\Longleftrightarrow Equivalent
ε epsilon	ξ xi	ψ psi	Υ Upsilon	\cap Intersection
ζ zeta	\omicron omicron	ω omega	Φ Phi	\cup Réunion
η eta	π pi	Γ Gamma	Ψ Psi	ϕ vide
θ theta	ρ rho	Δ Delta	Ω Omega	\in appartient
ι iota	σ sigma	Θ Theta		\subset est inclus

1.2 Implications $[A \Rightarrow B]$ et équivalences $[A \Longleftrightarrow B]$

Dans ce paragraphe, les symboles A et B désignent des propriétés logiques, c'est-à-dire des objets mathématiques exprimés à l'aide d'assemblages de signes : quantificateurs, égalité, fonctions, ...

A toute propriété logique A , on peut attribuer des valeurs de vérité : A peut être vraie ou fausse.

La démarche du mathématicien consiste, par application de règles logiques, à déterminer, à partir d'axiomes précisés, si une proposition est vraie ou fausse.

1.2.1 Définition. Implication.

La proposition $[A \Rightarrow B]$ veut dire : si la propriété A est vraie, alors la propriété B l'est aussi.

En revanche, si la propriété A n'est pas vraie, on ne peut rien dire de la propriété B .

1.2.2 Exemple. $a = 1 \Rightarrow a^2 = 1$.

Cette proposition s'exprime en disant que la propriété A implique la propriété B . La propriété A s'appelle *l'hypothèse* et la propriété B s'appelle *la conclusion*.

Le raisonnement logique qui permet de passer de l'hypothèse A à la conclusion B s'appelle *la démonstration*.

Un énoncé logiquement équivalent à la proposition $[A \Rightarrow B]$ est $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$: lorsque l'on veut démontrer $[A \Rightarrow B]$, on peut procéder *par contraposée* et démontrer $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$.

1.2.3 Exemple. La propriété de l'exemple 1.2.2 s'exprime par contraposée en :

$$a^2 \neq 1 \Rightarrow a \neq 1.$$

Une autre façon de démontrer la proposition $[A \Rightarrow B]$ est de procéder par *l'absurde*, c'est-à-dire de supposer que les propriétés A et $\text{non } B$ sont vraies toutes les deux et d'en déduire une *contradiction*.

1.2.4 Exemple. La propriété de l'exemple 1.2.2 s'exprime par l'absurde en :

$$a = 1 \text{ et } a^2 \neq 1 \text{ est une contradiction.}$$

1.2.5 Définition. *Equivalence.*

La proposition $[A \Longleftrightarrow B]$ veut dire que les propriétés A et B sont vraies en même temps et donc aussi fausses en même temps, c'est-à-dire : si la propriété A est vraie, alors la propriété B l'est aussi, c'est-à-dire $[A \Rightarrow B]$ et si la propriété B est vraie, alors la propriété A l'est aussi, c'est-à-dire $[B \Rightarrow A]$.

Cette proposition s'exprime en disant que la propriété A est équivalente à la propriété B .

Comme précédemment, un énoncé logiquement équivalent à la proposition $[A \Longleftrightarrow B]$ est $[\text{non } A \Longleftrightarrow \text{non } B]$. Lorsque l'on veut démontrer $[A \Longleftrightarrow B]$, on peut procéder *par contraposée* et démontrer $[\text{non } A \Longleftrightarrow \text{non } B]$.

1.2.6 Exemple. Dans \mathbb{R} , la propriété $a^2 = 1$ n'est pas équivalente à la propriété $a = 1$.

En effet, le réel $a = -1$ est tel que $a^2 = 1$ et $a \neq 1$.

Donc $[a = 1 \Rightarrow a^2 = 1]$ et $[a^2 = 1 \not\Rightarrow a = 1]$.

Des panachages entre les démonstrations directes et les démonstrations par contraposée sont possibles mais dangereux : il faut s'assurer qu'on ne démontre pas deux fois le même sens !

1.2.7 Exemple. Pour démontrer que $[A \Longleftrightarrow B]$, on peut démontrer au choix :

ou bien $[A \Rightarrow B]$ et $[B \Rightarrow A]$

ou bien $[A \Rightarrow B]$ et $[\text{non } A \Rightarrow \text{non } B]$

ou bien $[B \Rightarrow A]$ et $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$

ou bien $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$ et $[\text{non } A \Rightarrow \text{non } B]$.

1.3 Intersection et réunion

Dans ce paragraphe, P et Q désignent des ensembles ou des sous-ensembles d'un ensemble plus grand.

La proposition $x \in P \cap Q$ veut dire que x appartient à la fois à P et à Q , c'est-à-dire :

$$x \in P \text{ et } x \in Q.$$

$P \cap Q$ s'appelle *l'intersection* de P et Q .

La proposition $x \in P \cup Q$ veut dire que x appartient à P ou à Q , c'est-à-dire

$$x \in P \text{ ou } x \in Q.$$

$P \cup Q$ s'appelle *la réunion* de P et Q .

On notera que le *ou* ici n'est pas exclusif : si P et Q ont une partie commune, x peut être dans cette partie-là.

Si P et Q sont des sous-ensembles d'un ensemble plus grand, désignons par P^c et Q^c les complémentaires de P et Q . La négation de la propriété $x \in P \cap Q$ s'exprime par $x \in P^c \cup Q^c$ et la négation de $x \in P \cup Q$ par $x \in P^c \cap Q^c$. En d'autres termes, la négation de *et* est *ou* et celle de *ou* est *et*.

La proposition $x \in P \Delta Q$ veut dire que x appartient à P et n'appartient pas à Q ou l'inverse, x appartient à Q et n'appartient pas à P , c'est-à-dire :

$$x \in P \cup Q \text{ et } x \notin P \cap Q.$$

$P \Delta Q$ s'appelle *la différence symétrique* de P et Q .

Ici, le *ou* est exclusif : l'élément x ne peut pas être pris dans l'intersection de P et Q .

1.4 Quantificateurs

Les quantificateurs servent à exprimer des propositions. Le quantificateur \forall se lit *pour tout* et le quantificateur \exists se lit *il existe*.

1.4.1 Exemple. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 1$.

Cette proposition est vraie : le nombre réel $x = 1$ convient.

1.4.2 Exemple. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = \pm x$.

Cette proposition est vraie : si le nombre réel x est positif, il est égal à sa valeur absolue, s'il est négatif il est égal à l'opposé de sa valeur absolue et s'il est nul, il est égal à la fois à sa valeur absolue et à l'opposé de sa valeur absolue.

Une proposition exprimée avec des quantificateurs peut être vraie ou fausse selon le cadre dans lequel on se place. Pour montrer qu'une proposition est fausse, il suffit d'exhiber un *contre-exemple*, c'est-à-dire un exemple qui nie la proposition en question.

1.4.3 Exemple. $\forall x \in \mathbb{C}, |x| = \pm x$.

Cette proposition est fausse, on peut trouver un nombre complexe qui ne la vérifie pas : en effet le nombre complexe $x = 1 + i$ est tel que $|x| = \sqrt{2} \neq \pm(1 + i)$.

Il faut donc préciser le domaine où l'on travaille.

1.5 Ordre des quantificateurs

Une proposition peut s'exprimer à l'aide de plusieurs quantificateurs. Dans ce cas, l'ordre dans lequel ils sont écrits est primordial, le sens de la proposition peut être radicalement modifié si l'on intervertit certains quantificateurs.

1.5.1 Exemple. i) *Continuité de f sur \mathbb{R} :*

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[, |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon.$$

ii) *Continuité uniforme de f sur \mathbb{R} :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall (t, t') \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } |t - t'| \leq \alpha, |f(t) - f(t')| \leq \varepsilon.$$

Dans l'assertion i), le nombre α dépend de t_0 : si l'on change le point t_0 en lequel on étudie la continuité de f , ce nombre peut être modifié.

Dans l'assertion ii), le nombre α ne dépend pas du point t : le même α convient pour tous les points t en lesquels on étudie la continuité de f .

Evidemment, on peut remarquer que la proposition ii) implique la proposition i) mais que l'inverse est faux.

Ces deux propositions ne sont donc pas équivalentes.

La règle pour ne pas modifier le sens d'une propriété comprenant plusieurs quantificateurs est la suivante : on ne peut pas intervertir deux quantificateurs consécutif distincts ; en revanche, deux quantificateurs consécutifs de même nature sont indiscernables donc leur ordre d'apparition n'a pas d'importance.

Il existe une notation différente, qui est équivalente à celle des propriétés i) et ii), mais où le *dernier* quantificateur \forall est omis :

1.5.2 Exemple. i) *Continuité de f sur \mathbb{R} :*

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |t - t_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon.$$

ii) *Continuité uniforme de f sur \mathbb{R} :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |t - t'| \leq \alpha \Rightarrow |f(t) - f(t')| \leq \varepsilon.$$

1.6 Négation

Pour nier une phrase mathématique, c'est-à-dire pour écrire le contraire d'une propriété comprenant des quantificateurs, on inverse tous les quantificateurs, c'est-à-dire que l'on remplace \forall par \exists et \exists par \forall , sans en changer l'ordre et on nie la conclusion.

1.6.1 Exemple. *Discontinuité de f en t_0 :*

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \alpha > 0, \exists t \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\text{ tel que } |f(t) - f(t_0)| \geq \varepsilon.$$

Attention, il ne faut pas oublier d'inverser le quantificateur \forall lorsqu'il est sous-entendu, comme dans l'exemple 1.5.2 !

On peut aussi préciser la notion de *contre-exemple* : si on veut montrer qu'une propriété $[\forall x, R(x)]$, comprenant le quantificateur \forall , est fautive, il faut montrer que la proposition contraire $[\exists x, \text{non } R(x)]$ est vraie c'est-à-dire qu'il existe un élément x qui ne vérifie pas $R(x)$. Cet élément est appelé un *contre-exemple*.

1.6.2 Exemple. On reprend l'exemple 1.4.3 : il est équivalent de dire :
la propriété $[\forall x \in \mathbb{C}, |x| = \pm x]$ est fausse et la propriété $[\exists x \in \mathbb{C}, |x| \neq \pm x]$ est vraie.

Le nombre complexe $x = 1 + i$ est un contre-exemple à la propriété $[\forall x \in \mathbb{C}, |x| = \pm x]$, qui est donc fausse.

1.7 Raisonnement par récurrence

On cherche à démontrer qu'une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier n , est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Pour cela, on démontre la première propriété, en général $P(0)$ ou $P(1)$. Puis, on prouve que pour un n quelconque, si les propriétés $P(0), P(1), \dots, P(n)$ sont vraies, la propriété $P(n+1)$ l'est aussi. Alors, de proche en proche à partir de la première propriété, on peut montrer que toutes les propriétés $P(n)$ sont vraies. Le schéma de démonstration est donc le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(0) \text{ vraie} \\ (P(0), P(1), \dots, P(n)) \Rightarrow P(n+1) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ vraie.}$$

Très souvent, la propriété $P(n)$ suffit à entraîner la propriété $P(n+1)$. Le schéma suivant, moins général mais plus fréquent, est aussi une démonstration par récurrence

$$\left\{ \begin{array}{l} P(0) \text{ vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{array} \right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ vraie.}$$

1.7.1 Exemple. $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$

La propriété $P(1)$ est vraie : en effet, en faisant $n = 1$ ci-dessus, on trouve $1 = 1$.
Supposons donc que la propriété $P(n)$ soit vraie. A partir de

$$P(n) : 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2,$$

on calcule

$$P(n+1) : 1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

On peut donc passer de l'ordre n à l'ordre $n+1$.

On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.8 Bornes supérieures et bornes inférieures dans \mathbb{R} .

Rappelons les notions de borne supérieure et borne inférieure d'un sous-ensemble borné de \mathbb{R} , dont l'existence est une conséquence de la construction de \mathbb{R} , voir par exemple [9] :

1.8.1 Définition. Soit $A \subset \mathbb{R}$, borné.

1) La borne supérieure de A , notée $\sup A$, est l'élément de \mathbb{R} défini par :

$$\forall a \in A, a \leq \sup A \text{ et } \forall b \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall a \in A, a \leq b, \text{ alors } \sup A \leq b.$$

2) La borne inférieure de A , notée $\inf A$, est l'élément de \mathbb{R} défini par :

$$\forall a \in A, a \geq \inf A \text{ et } \forall b \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall a \in A, a \geq b, \text{ alors } \inf A \geq b.$$

On résume ces propriétés en disant que la borne supérieure est le plus petit majorant de l'ensemble et la borne inférieure le plus grand minorant de l'ensemble.

Ces nombres sont caractérisés par les propriétés suivantes :

1.8.2 Proposition. 1) $s = \sup A$ si et seulement si s est un majorant de A et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } s - \varepsilon \leq a \leq s$$

2) $t = \inf A$ si et seulement si t est un minorant de A et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } t \leq a \leq t + \varepsilon.$$

On remarquera que la borne supérieure et la borne inférieure d'un ensemble ne sont pas nécessairement dans l'ensemble.

1.9 Exercices sur le chapitre 1

1.1 Exercice. Contredire les assertions suivantes :

- 1) Dans toutes les prisons, tous les détenus détestent tous les gardiens.
- 2) Pour tout entier naturel x , il existe un entier naturel y tel que pour tout entier naturel z , la relation $z < x + y$ est vérifiée. Cette assertion est-elle exacte ?

1.2 Exercice. André, Bernard et Claude sont trois frères. L'un est médecin, l'autre pharmacien et le troisième dentiste. On cherche à déterminer la profession de chacun d'eux sachant que : si André est médecin, alors Bernard est dentiste ; si André est dentiste, alors Bernard est pharmacien ; si Bernard n'est pas médecin, alors Claude est dentiste ; si Claude est pharmacien, alors André est dentiste.

En utilisant les notations de la logique pour exprimer les propositions ci dessus, trouver la profession de chacun.

1.3 Exercice. Examiner les relations logiques existant entre les assertions suivantes :

- A Tous les hommes sont mortels
- B Tous les hommes sont immortels
- C Aucun homme n'est mortel
- D Aucun homme n'est immortel
- E Il existe des hommes immortels
- F Il existe des hommes mortels

1.4 Exercice. Soient a, b deux réels fixés tels que $0 < a < b$.

On cherche à montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définies par :

$$u_0 = a, v_0 = b, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n), v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n},$$

admettent une limite commune.

- 1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$.
- 2) En déduire que les 2 suites convergent dans \mathbb{R} .
- 3) Montrer que ces limites sont les mêmes.

1.5 Exercice. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, ayant une dérivée strictement positive en tout point.

Montrer en utilisant un raisonnement par l'absurde que f est croissante sur $[a, b]$.

1.6 Exercice. 1) Quelles sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) / p, q \in \mathbb{N}^*, p \neq q \right\} ?$$

2) Ces bornes appartiennent-elles à l'ensemble A ?

1.10 Corrigé des exercices sur le Chapitre 1

Corrigé de l'exercice 1.1

1) Soit A l'assertion : *Dans toutes les prisons, tous les détenus détestent tous les gardiens.*
 A s'exprime à l'aide de 3 quantificateurs \forall . Sa négation s'exprime donc en remplaçant ces 3 quantificateurs par 3 quantificateurs \exists et en niant la conclusion. Cela donne :
 non A : *Il existe des prisons dans lesquelles il y a des détenus qui aiment bien certains gardiens.*

2) Écrivons cette assertion en termes mathématiques :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall z \in \mathbb{N}, z < x + y.$$

En renversant les quantificateurs et en niant la conclusion, cela donne :

$$\exists x \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N} \text{ tel que } z \geq x + y.$$

On peut énoncer cette assertion ainsi : Il existe un entier naturel x tel que pour tout entier naturel y , il existe un entier naturel z tel que $z \geq x + y$.

L'assertion est fausse car $z = x + y + 1$ ne peut en aucun cas être strictement inférieur à $x + y$.

Vérifions que la négation de l'assertion est exacte : l'entier naturel $x = 0$ est bien tel que pour tout entier naturel y , $z = y$ vérifie $z \geq x + y$.

Corrigé de l'exercice 1.2

On a 9 propositions :

A_1 : André est dentiste

A_2 : André est médecin

A_3 : André est pharmacien

B_1 : Bernard est dentiste

...

C_3 : Claude est pharmacien

On doit trouver un triplet A_i, B_j, C_k vrai avec i, j, k tous trois distincts.

Les hypothèses s'expriment par les implications :

$(I_1) \quad A_2 \Rightarrow B_1, (I_2) \quad A_1 \Rightarrow B_3, (I_3) \quad \text{non } B_2 \Rightarrow C_1, (I_4) \quad C_3 \Rightarrow A_1.$

On va procéder par élimination sur C :

-supposons C_3 vraie, alors A_1 est vrai par (I_4) et donc B_3 est vrai par (I_2) . Ce cas n'est pas possible puisque les indices doivent être distincts.

-supposons C_2 vraie, alors B_2 n'est pas vraie puisque les indices doivent être distincts. Et donc C_1 doit être vraie, ce qui n'est pas possible.

-supposons C_1 vraie, alors A_1 et B_1 ne sont pas vraies puisque les indices doivent être distincts. Or si B_1 n'est pas vraie, A_2 n'est pas vraie non plus par la contraposée de (I_1) . Donc c'est A_3 qui est vraie et donc aussi B_2 .

Le triplet gagnant est donc : A_3 , B_2 , C_1 , c'est-à-dire : André est pharmacien, Bernard est médecin et Claude est dentiste.

Corrigé de l'exercice 1.3

Les relations logiques existant entre les assertions suivantes sont :

non $A = E$, non $B = F$, $A = D$, $B = C$,

A et B sont incompatibles.

Corrigé de l'exercice 1.4

1) On procède par récurrence :

-Pour $n = 0$, on a bien $(R_0) u_0 < v_0$ par hypothèse.

-Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $(R_n) u_n < v_n$. Alors, d'après la définition de u_{n+1} , on a : $u_n < u_{n+1} < v_n$ et donc par définition de v_{n+1} et en utilisant l'inégalité précédente, on a aussi $u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$. On en déduit :

$$u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n.$$

-On en déduit que l'inégalité (R_{n+1}) est vraie. La récurrence est donc bien vérifiée et on peut donc conclure que $(R_n) u_n < v_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) La démonstration précédente implique également que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par a . On en déduit que les 2 suites convergent dans \mathbb{R} .

3) Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l' .

Alors la relation $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ implique en passant à la limite que $l = \frac{l + l'}{2}$ et donc que $l = l'$.

Corrigé de l'exercice 1.5

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, ayant une dérivée strictement positive en tout point.

Soit $x_0 \in]a, b[$. Comme $f'(x_0) > 0$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0.$$

Donc, il existe $\alpha > 0$, avec $x_0 + \alpha \leq b$, tel que pour tout $x \in]x_0, x_0 + \alpha[$, $f(x) - f(x_0) \geq 0$. Soit E l'ensemble des x tels que cette inégalité ait lieu. Cet ensemble est non vide et majoré par b . Il admet donc une borne supérieure s .

Montrons par l'absurde que $f(s) \geq f(x_0)$:

en effet sinon on aurait $f(s) < f(x_0)$ et par continuité de f , il existerait $\beta > 0$, avec $x_0 < s - \beta$, tel que, pour tout $x \in]s - \beta, s + \beta[$, $f(s) < f(x_0)$. Ce n'est pas possible car tous les $x \in]s - \beta, s]$ ne seraient pas dans l'ensemble E et s ne serait donc pas la borne supérieure de E .

Il y a donc contradiction et par suite, $f(s) - f(x_0) \geq 0$.

Montrons par l'absurde que $s = b$:

en effet si l'on avait $s < b$, comme $f'(s) > 0$, en appliquant le raisonnement ci dessus, il existerait $\gamma > 0$, $s + \gamma < b$ tel que pour tout $x \in]s, s + \gamma[$, $f(x) - f(s) \geq 0$, donc aussi $f(x) - f(x_0) \geq 0$. s ne serait donc pas la borne supérieure de E .

Il y a donc contradiction et par suite $s = b$.

On en déduit donc que pour tout $x \in [x_0, b]$, $f(x) \geq f(x_0)$. Comme ceci est vrai pour tout $x_0 \in]a, b[$, f est bien croissante sur $]a, b[$ et donc aussi sur $[a, b]$ par continuité de f .

Corrigé de l'exercice 1.6

1) La borne inférieure de l'ensemble A est 0. En effet 0 est un minorant de l'ensemble A et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $n > \frac{2}{\varepsilon}$. Alors $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ et $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \in A$.

La borne supérieure de l'ensemble A est $\frac{3}{2}$. En effet, $\frac{3}{2}$ est un majorant de l'ensemble A et $\frac{3}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \in A$.

2) La borne inférieure de A n'est pas dans A et sa borne supérieure y est.

Chapitre 2

Suites et Séries Numériques

2.1 Suites numériques

On suppose que \mathbb{K} est l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

2.1.1 Définition. Une suite numérique $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une application $n \rightarrow s_n$ de \mathbb{N} dans \mathbb{K} .

2.1.2 Définition. On dit qu'une suite numérique $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

- majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq M$,
- minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \geq m$,
- bornée s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|s_n| \leq A$.

Il est facile de voir qu'une suite est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

2.1.3 Définition. i) La suite numérique $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si :

$$\exists l \in \mathbb{K}, \text{ tel que } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow |s_n - l| \leq \varepsilon.$$

ii) La valeur l est appelé limite de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = l$.

iii) Si la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

En niant la propriété i), une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge si :

$$\forall l \in \mathbb{K}, \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } |s_n - l| > \varepsilon.$$

Lorsque la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , on notera $s_n \rightarrow l$ quand $n \rightarrow +\infty$ ou encore $|s_n - l| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

2.1.4 Proposition. Une suite numérique $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a au plus une limite

Démonstration. Supposons que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente et ait deux limites l et l' . Alors, par définition, pour $\varepsilon > 0$ donné :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow |s_n - l| \leq \varepsilon.$$

$$\exists N' \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N' \Rightarrow |s_n - l'| \leq \varepsilon.$$

En appliquant ces propriétés pour $n \geq \sup\{N, N'\}$, on obtient :

$$|l - l'| = |l - s_n + s_n - l'| \leq |l - s_n| + |s_n - l'| \leq 2\varepsilon.$$

Comme ε est quelconque, ceci implique bien $l = l'$ et la limite est unique. □

2.1.5 Définition. On dit qu'une suite numérique $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy si elle vérifie la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N \Rightarrow |s_p - s_q| \leq \varepsilon.$$

Rappelons quelques propriétés élémentaires des suites convergentes ou de Cauchy :

2.1.6 Proposition. 1) Toute suite convergente ou de Cauchy est bornée.

2) Les suites obtenues en faisant la somme et le produit de deux suites convergentes (respectivement de Cauchy) sont convergentes (respectivement de Cauchy). Dans le cas de suites convergentes les limites sont la somme et le produit des limites des suites de départ.

3) La suite obtenue en faisant le produit par un scalaire d'une suite convergente (respectivement de Cauchy) est convergente (respectivement de Cauchy). Dans le cas d'une suite convergente la limite est le produit de la limite de la suite de départ par ce scalaire.

4) La suite obtenue en prenant le module dans le cas de \mathbb{C} ou la valeur absolue dans le cas de \mathbb{R} , d'une suite convergente (respectivement de Cauchy) est convergente (respectivement de Cauchy). Dans le cas d'une suite convergente la limite est le module ou la valeur absolue de la limite de la suite de départ.

5) Dans le cas d'une suite à valeurs complexes, une suite est convergente (respectivement de Cauchy) si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont des suites à valeurs réelles convergentes (respectivement de Cauchy). Dans le cas d'une suite convergente la limite de la partie réelle est la partie réelle de la limite et de même, la limite de la partie imaginaire est la partie imaginaire de la limite de la suite de départ.

6) Toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration. Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers l ou de Cauchy.

Pour démontrer le point 1), on applique la définition de la convergence d'une suite ou de la condition de Cauchy avec $\varepsilon = 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$ l'entier associé à cet ε .

Pour $n \geq N$, on peut écrire :

-si la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente :

$$|s_n - l| \leq 1, \text{ soit encore } l - 1 \leq s_n \leq l + 1.$$

-si la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy :

$$|s_n - s_N| \leq 1, \text{ soit encore } 1 - s_N \leq s_n \leq 1 + s_N.$$

Ceci implique bien que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par $\sup\{s_0, s_1, \dots, s_N, |l - 1|, |l + 1|\}$ dans le cas d'une suite convergente et par $\sup\{s_0, s_1, \dots, s_N, |s_N - 1|, |s_N + 1|\}$ dans le cas d'une suite de Cauchy.

Pour démontrer le point 2) dans le cas de la somme de deux suites, on se donne une autre suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers l' ou de Cauchy et on utilise les inégalités :

-si les suites sont convergentes :

$$|(s_n + t_n) - (l + l')| \leq |s_n - l| + |t_n - l'|.$$

-si les suites sont de Cauchy :

$$|(s_p + t_p) - (s_q + t_q)| \leq |s_p - s_q| + |t_p - t_q|.$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, si on applique la définition de la convergence ou la condition de Cauchy avec $\frac{\varepsilon}{2}$ pour chacune des suites, on obtient deux entiers N et N' tels que :

-pour des suites convergentes,

$$n \geq N \Rightarrow |s_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } n \geq N' \Rightarrow |t_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

qui impliquent

$$n \geq \sup \{N, N'\} \Rightarrow |(s_n + t_n) - (l + l')| \leq \varepsilon,$$

et entraînent la convergence de la suite somme vers $l + l'$.

-pour des suites de Cauchy,

$$p, q \geq N \Rightarrow |s_p - s_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } p, q \geq N' \Rightarrow |t_p - t_q| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

qui impliquent

$$p, q \geq \sup \{N, N'\} \Rightarrow |(s_p + t_p) - (s_q + t_q)| \leq \varepsilon,$$

et entraînent la condition de Cauchy pour la suite somme.

Dans le cas du produit des 2 suites, on utilise les inégalités :

-si les suites sont convergentes :

$$|s_n t_n - ll'| = |s_n(t_n - l') + l'(s_n - l)| \leq |s_n| |t_n - l'| + |l'| |s_n - l|.$$

-si les suites sont de Cauchy :

$$|s_p t_p - s_q t_q| = |s_p(t_p - t_q) + t_q(s_p - s_q)| \leq |s_p| |t_p - t_q| + |t_q| |s_p - s_q|.$$

Comme on sait que dans les deux cas, les suites sont bornées, par M et M' respectivement, pour $\varepsilon > 0$ donné, si on applique la définition de la convergence ou la condition de Cauchy avec $\frac{\varepsilon}{2M}$ et $\frac{\varepsilon}{2M'}$ pour chacune des suites, on obtient deux entiers N et N' tels que :

-pour des suites convergentes,

$$n \geq N \Rightarrow |s_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \text{ et } n \geq N' \Rightarrow |t_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2M'},$$

qui impliquent

$$n \geq \sup \{N, N'\} \Rightarrow |s_n t_n - ll'| \leq \varepsilon,$$

et entraînent la convergence de la suite produit vers ll' .

-pour des suites de Cauchy,

$$p, q \geq N \Rightarrow |s_p - s_q| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \text{ et } p, q \geq N' \Rightarrow |t_p - t_q| \leq \frac{\varepsilon}{2M'},$$

qui impliquent

$$p, q \geq \sup \{N, N'\} \Rightarrow |s_p t_p - s_q t_q| \leq \varepsilon,$$

et entraînent la condition de Cauchy pour la suite produit.

Pour démontrer le point 3), on se donne un nombre réel ou complexe λ et on utilise les inégalités :

-si la suite est convergente :

$$|\lambda(s_n - l)| \leq |\lambda| |s_n - l|.$$

-si la suite est de Cauchy :

$$|\lambda(s_p - s_q)| \leq |\lambda| |s_p - s_q|.$$

Si $\lambda = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $\lambda \neq 0$.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, si on applique la définition de la convergence ou la condition de Cauchy avec $\frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, on obtient un entier N tel que :

-pour une suite convergente,

$$n \geq N \Rightarrow |s_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|},$$

ce qui implique

$$n \geq N \Rightarrow |\lambda(s_n - l)| \leq \varepsilon,$$

et entraîne la convergence de la suite $(\lambda s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers λl .

-pour une suite de Cauchy,

$$p, q \geq N \Rightarrow |s_p - s_q| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|},$$

ce qui implique

$$p, q \geq N \Rightarrow |\lambda(s_p - s_q)| \leq \varepsilon,$$

et entraîne la condition de Cauchy pour la suite $(\lambda s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour démontrer le point 4), on utilise les inégalités :

-si la suite est convergente :

$$||s_n| - |l|| \leq |s_n - l|.$$

-si la suite est de Cauchy :

$$||s_p| - |s_q|| \leq |s_p - s_q|.$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, si on applique la définition de la convergence ou la condition de Cauchy avec ε , on obtient un entier N tel que :

-pour une suite convergente,

$$n \geq N \Rightarrow |s_n - l| \leq \varepsilon,$$

qui implique

$$n \geq N \Rightarrow ||s_n| - |l|| \leq \varepsilon,$$

ce qui entraîne la convergence de la suite $(|s_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $|l|$.

-pour une suite de Cauchy,

$$p, q \geq N \Rightarrow |s_p - s_q| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique

$$n \geq N \Rightarrow ||s_p| - |s_q|| \leq \varepsilon,$$

et entraîne la condition de Cauchy pour la suite $(|s_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour démontrer le point 5), on remarque d'abord que comme la suite est la somme de sa partie réelle et de sa partie imaginaire, le point 2) implique immédiatement que, si la partie imaginaire et la partie réelle sont des suites convergentes ou de Cauchy, il en est de même pour la suite elle-même. Pour la réciproque, on utilise les inégalités :

-si la suite est convergente :

$$|\Re s_n - \Re l| = |\Re(s_n - l)| \leq |s_n - l|,$$

$$|\Im s_n - \Im l| = |\Im(s_n - l)| \leq |s_n - l|.$$

-si la suite est de Cauchy :

$$|\Re s_p - \Re s_q| = |\Re(s_p - s_q)| \leq |s_p - s_q|,$$

$$|\Im s_p - \Im s_q| = |\Im(s_p - s_q)| \leq |s_p - s_q|.$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, si on applique la définition de la convergence ou la condition de Cauchy avec ε , on obtient un entier N tel que :

-pour une suite convergente,

$$n \geq N \Rightarrow |s_n - l| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique

$$n \geq N \Rightarrow |\Re s_n - \Re l| \leq \varepsilon,$$

et entraîne la convergence de la suite $(\Re s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $|\Re l|$.

-pour une suite de Cauchy,

$$p, q \geq N \Rightarrow |s_p - s_q| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique

$$p, q \geq N \Rightarrow |\Re s_p - \Re s_q| \leq \varepsilon,$$

et entraîne la condition de Cauchy pour la suite $(\Re s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On conclut de la même façon pour les parties imaginaires.

Pour démontrer le point 6), on utilise l'inégalité :

$$|s_p - s_q| = |(s_p - l) - (s_q - l)| \leq |s_p - l| + |s_q - l|.$$

Donc si la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, de limite l , pour $\varepsilon > 0$ donné, en appliquant la définition de la convergence avec $\frac{\varepsilon}{2}$, on obtient un entier N tel que :

$$p, q \geq N \Rightarrow |s_p - s_q| \leq |s_p - l| + |s_q - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui montre bien que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. □

Les suites de réels, c'est-à-dire lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ont des propriétés particulières que nous allons étudier maintenant :

2.1.7 Théorème. Théorème de comparaison :

1) Soient $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes à valeurs réelles, de limite respective s et t . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq t_n$, alors $s \leq t$.

2) Soient $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites à valeurs réelles, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq t_n \leq s'_n$. Alors si les suites $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite s , la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers s .

Démonstration. 1) On procède par l'absurde : supposons $s > t$.

On choisit $0 < \varepsilon < \frac{s-t}{2}$, ainsi les intervalles $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$ et $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$ sont disjoints.

Les conditions $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t$ entraînent qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq N_1$, $s_n \in]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$ et $\forall n \geq N_2$, $t_n \in]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$.

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$ et soit n un entier naturel tel que $n \geq N$.

Alors, $t_n \leq t + \varepsilon < s - \varepsilon \leq s_n$, donc en particulier $t_n < s_n$, d'où la contradiction.

2) Soit $\varepsilon > 0$. Les conditions $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n = s$ entraînent l'existence d'entiers naturels N_1 et N_2 tels que :

$$n \geq N_1 \implies |s_n - s| \leq \varepsilon \text{ et } n \geq N_2 \implies |s'_n - s| \leq \varepsilon.$$

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$, alors pour $n \geq N$, on peut écrire :

$$s - \varepsilon \leq s_n \leq t_n \leq s'_n \leq s + \varepsilon.$$

La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien vers s .

□

Remarque. 1) Le théorème 2.1.7 reste vrai si les inégalités ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang.

2) Même si dans les inégalités du théorème 2.1.7 1), on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, la conclusion ne change pas c'est à-dire que l'inégalité reste large : $s \leq t$.

On le vérifie aisément en considérant par exemple les suites $s_n = \frac{1}{2n}$ et $t_n = \frac{1}{n}$.

Pour étudier une suite, on peut essayer d'utiliser ce théorème en comparant la suite donnée à certaines suites particulières que l'on connaît. Voici deux exemples :

Suites géométriques : $s_n = k^n$

Cette suite converge si et seulement si $k \leq 1$. Sa limite est 0 si $k < 1$ et 1 si $k = 1$.

Suites puissances : $s_n = n^\alpha$

Cette suite converge si et seulement si $\alpha \leq 0$. Sa limite est 0 si $\alpha < 0$ et 1 si $\alpha = 0$.

2.1.8 Proposition. *Toute suite de réels, croissante et majorée ou décroissante et minorée converge.*

Démonstration. Supposons par exemple la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et majorée. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq s_{n+1}$ et il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq M$.

La partie $\{s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\}$ est donc une partie majorée de \mathbb{R} et par suite elle admet une borne supérieure l .

Par la proposition 1.8.2, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $l - \varepsilon \leq s_N \leq l$.

Mais puisque la suite est croissante, pour tout $n \geq N$, $l - \varepsilon \leq s_N \leq s_n \leq l$, ce qui implique que $0 \leq l - s_n \leq \varepsilon$ et donc la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . □

2.1.9 Définition. *On dit que les suites de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si :*

- 1) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
- 2) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$
- 4) $b_n - a_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$

2.1.10 Corollaire. *Deux suites adjacentes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont toujours convergentes et ont la même limite.*

Démonstration. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par b_0 donc est convergente. La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par a_0 donc est convergente. La condition 4) implique en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$ que ces deux limites sont les mêmes. □

Le résultat suivant contient à la fois la propriété 6) de la proposition 2.1.6 et sa réciproque. On l'écrit sous cette forme pour avoir un critère de convergence. L'intérêt d'un tel critère est de pouvoir déterminer si une suite converge même sans connaître sa limite.

2.1.11 Théorème. Critère de Cauchy.

La suite numérique $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la condition de Cauchy 2.1.5 si et seulement si elle converge.

Démonstration. La proposition 2.1.6 6) montre que toute suite convergente est de Cauchy.

La démonstration de la réciproque repose sur les propriétés des bornes supérieure et inférieure dans \mathbb{R} .

Supposons que la suite de Cauchy $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit à valeurs réelles.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \{s_p / p \geq n\}.$$

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'ensembles non vides. D'autre part, pour tout entier n , l'ensemble U_n est une partie bornée et non vide de \mathbb{R} . Cet ensemble admet donc une borne supérieure et une borne inférieure, on pose :

$$a_n = \inf U_n \text{ et } b_n = \sup U_n.$$

On a ainsi défini deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leq s_n \leq b_n.$$

L'inclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \subset U_n$ entraîne que :

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$.

On utilise alors la condition de Cauchy : soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe un entier N tel que

$$p \geq n \geq N \implies s_n - \varepsilon \leq s_p \leq s_n + \varepsilon.$$

Donc pour $n \geq N$,

$$s_n - \varepsilon \leq a_n \leq s_n + \varepsilon \text{ et } s_n - \varepsilon \leq b_n \leq s_n + \varepsilon$$

ce qui implique $0 \leq b_n - a_n \leq 2\varepsilon$.

La suite $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont donc des suites adjacentes. Elles ont alors une limite commune.

La double inégalité $a_n \leq s_n \leq b_n$ entraîne alors la convergence de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si la suite est à valeurs complexes, on regarde séparément la partie réelle et la partie imaginaire et on applique le point 4) de la proposition 2.1.6.

□

2.1.12 Exemple. 1) La suite $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge.

2) La suite $s_n = \ln n$ diverge.

Pour montrer 1), on écrit, pour $p \geq q$:

$$0 \leq s_p - s_q = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^q \frac{1}{k^2} = \sum_{k=q+1}^p \frac{1}{k^2}.$$

On utilise l'inégalité vraie pour $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

et en reportant on obtient :

$$0 \leq s_p - s_q = \sum_{k=q+1}^p \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=q+1}^p \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

Comme ce dernier terme tend vers 0 quand p, q tendent vers $+\infty$, on en déduit que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy donc convergente.

Pour montrer 2), on écrit, pour $p \geq q$:

$$0 \leq s_p - s_q = \ln p - \ln q = \ln \frac{p}{q}.$$

En prenant $p = 2q$, on trouve

$$0 \leq s_{2q} - s_q = \ln \frac{2q}{q} = \ln 2,$$

ce qui montre que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy et donc est divergente.

Rappelons la définition d'une sous-suite :

2.1.13 Définition. Une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite numérique $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une application croissante $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = s_{p_n}$.

2.1.14 Exemple. La suite $(a^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $p_n = 2n$.

Les propriétés suivantes sont immédiates :

2.1.15 Proposition. 1) Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et a même limite.

2) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

3) Toute suite croissante possédant une sous-suite convergente est convergente.

Rappelons enfin le théorème suivant :

2.1.16 Théorème. (Bolzano-Weierstrass)

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Démonstration. On considère une suite bornée $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq s_n \leq b$. L'un au moins des deux intervalles moitié, $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$ contient une infinité de valeurs de s_n . On le note $[a_1, b_1]$ et on recommence le raisonnement avec cet intervalle.

On définit par ce procédé une suite d'intervalles emboîtés $[a_n, b_n]$ dont la longueur égale à $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. On en déduit que les intervalles $[a_n, b_n]$ ont un seul point commun l qui est la limite commune des suites adjacentes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On construit ensuite une sous-suite $(s_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{p_n} \in [a_n, b_n]$. Cette sous-suite converge vers l . \square

Terminons ce paragraphe par un exemple :

2.1.17 Exemple. La suite des sommes de Cesàro d'une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{n}.$$

Alors, si $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers l . La réciproque est fausse.

Si la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \geq N \Rightarrow |s_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Si $n \geq N$, on écrit

$$c_n = \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{n} + \frac{\sum_{i=N+1}^n s_i}{n}.$$

D'où, si $n \geq N$:

$$|c_n - l| \leq \left| \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{n} \right| + \left| \frac{\sum_{i=N+1}^n (s_i - l)}{n} \right| + \left| \frac{N+1}{n} l \right| \leq \left| \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{n} \right| + \frac{\varepsilon}{3} + \left| \frac{N+1}{n} l \right|.$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, les deux termes $\left| \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{n} \right|$ et $\left| \frac{N+1}{n} l \right|$ tendent vers 0 donc il existe deux entiers N_1 et N_2 tels que :

$$n \geq N_1 \Rightarrow \left| \frac{\sum_{i=1}^N s_i}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

$$n \geq N_2 \Rightarrow \left| \frac{N+1}{n} l \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Finalement :

$$n \geq \sup\{N, N_1, N_2\} \Rightarrow |c_n - l| \leq \varepsilon,$$

et la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien vers l .

La réciproque de cette propriété est fausse : en effet, la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = (-1)^n,$$

ne converge pas mais la suite de ses sommes de Cesàro converge vers 0.

2.2 Limites dans $\overline{\mathbb{R}}$

Dans cette partie, on considère des suites de réels et on étend la notion de limite aux valeurs infinies.

2.2.1 Définition. i) On définit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.

ii) On dit que la suite de réels $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$ si

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow s_n \geq A.$$

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$

iii) On dit que la suite de réels $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $-\infty$ si

$$\forall A < 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow s_n \leq A.$$

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$

iv) On dit que la suite de réels $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si elle converge dans \mathbb{R} ou vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Remarque. Ces définitions s'étendent au cas des suites à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire que les s_n peuvent valoir $+\infty$ et $-\infty$.

On obtient une extension de la proposition 2.1.8 et du théorème 2.1.16 :

2.2.2 Proposition. 1) Toute suite monotone dans \mathbb{R} ou dans $\overline{\mathbb{R}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.
2) Toute suite de réels admet une sous-suite convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration. 1) Plaçons-nous par exemple dans le cas croissant, le cas décroissant se traite de la même façon. Si une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, ou bien elle est majorée et donc converge d'après la proposition 2.1.8, ou bien elle n'est pas majorée et alors, quelque soit $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $s_N \geq M$. Mais comme la suite est croissante, pour tout $n \geq N$, on a aussi $s_n \geq M$, ce qui veut dire que la suite tend vers $+\infty$.

2) De la même façon, si une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, elle admet une sous-suite convergente par le théorème de Bolzano-Weierstrass 2.1.16. Si elle n'est pas bornée, en supposant par exemple qu'elle n'est pas majorée, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, il existe un indice $p_n \in \mathbb{N}$ tel que $s_{p_n} \geq n$. La sous-suite $(s_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$. \square

Nous pouvons maintenant définir les notions de limite supérieure et de limite inférieure d'une suite réelle :

Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Les suites $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s''_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies respectivement pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ par :

$$\begin{aligned} s'_n &= \sup \{s_p \mid p \geq n\} && \text{si la suite } (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est majorée} \\ &= +\infty && \text{sinon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s''_n &= \inf \{s_p \mid p \geq n\} && \text{si la suite } (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est minorée} \\ &= -\infty && \text{sinon} \end{aligned}$$

sont respectivement décroissante et croissante.

2.2.3 Définition. i) On appelle limite supérieure et on note $\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n$ la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de la suite $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ii) On appelle limite inférieure et on note $\liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n$ la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ de la suite $(s''_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On remarquera que la limite supérieure et la limite inférieure d'une suite de réels existent toujours dans $\overline{\mathbb{R}}$, même si la suite n'est pas convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.

2.2.4 Exemple. i) $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = 1$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = -1$.

$$ii) \limsup_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{n\pi}{3} = 1 \text{ et } \liminf_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{n\pi}{3} = -1.$$

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition 2.2.3 :

2.2.5 Propriété. Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

i) On a toujours

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n.$$

ii) On a aussi

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} -s_n = -\liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} -s_n = -\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n.$$

iii) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq t_n$, alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} t_n \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} t_n.$$

En utilisant les définitions des bornes supérieure et inférieure, définition 1.8.1, et les définitions des limites de suites, on peut caractériser les notions de limite supérieure et limite inférieure par les propriétés suivantes :

2.2.6 Proposition. i) $\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$ si et seulement si la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$

ii) $\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ si et seulement si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe une infinité de valeurs de n telles que $s_n \geq A$.

iii) $l \in \mathbb{R}$ vérifie $l = \limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de valeurs de n telles que s_n soit supérieur à $l - \varepsilon$ et pour toutes valeurs de n sauf éventuellement un nombre fini, s_n soit inférieur à $l + \varepsilon$.

Démonstration. i) est évident.

ii) Supposons que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$. Alors, par définition, la suite $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$, c'est-à-dire que quel que soit $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{p \geq n} s_p \geq A.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \geq n$ tel que $s_p \geq A - \varepsilon$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient bien une infinité de valeurs de $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ supérieures à $A - \varepsilon$. Comme A et ε sont arbitraires, ceci prouve bien le résultat.

Réciproquement si pour tout $A > 0$, il existe une infinité de valeurs de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ supérieures à A , à partir d'un certain rang, les s'_n sont donc supérieurs à A et comme A est arbitraire, ceci implique bien que la suite $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.

iii) Supposons que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n = l$. Alors, par définition, la suite $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , donc en particulier, que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{p \geq n} s_p \geq l - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc il existe $p \geq n$ tel que $s_p \geq l - \varepsilon$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient bien une infinité de valeurs de $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ supérieures à $l - \varepsilon$.

De plus, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq M \Rightarrow \sup_{p \geq n} s_p \leq l + \varepsilon.$$

Ceci implique que toutes les valeurs de s_n au delà de M sont inférieures à $l + \varepsilon$.

Réciproquement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité de valeurs de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ supérieures à $l - \varepsilon$, à partir d'un certain rang, les s'_n sont donc supérieurs à $l - \varepsilon$ et comme ε est arbitraire, ceci implique bien que la suite $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite qui est supérieure ou égale à l .

De plus, si pour toutes les valeurs de n sauf éventuellement un nombre fini, s_n est inférieur à $l + \varepsilon$, à partir d'un certain rang, s'_n est inférieure à $l + \varepsilon$ et donc la limite de s'_n est inférieure ou égale à $l + \varepsilon$. Comme ε est arbitraire, ceci implique bien que la limite de $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est inférieure à l . \square

On a évidemment l'analogie de ces résultats pour les limites inférieures :

2.2.7 Proposition. i) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$ si et seulement si la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

ii) $\liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n = -\infty$ si et seulement si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe une infinité de valeurs de n telles que $s_n \leq A$.

iii) $l \in \mathbb{R}$ vérifie $l = \liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, pour toutes les valeurs de n sauf éventuellement un nombre fini, s_n soit supérieur à $l - \varepsilon$ et il existe une infinité de valeurs de n telles que s_n soit inférieur à $l + \varepsilon$.

De ces caractérisations, on peut encore déduire les résultats suivants :

2.2.8 Corollaire. i) Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. La suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si

$$l = \limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n.$$

ii) Soit L l'ensemble des limites des sous-suites de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n \in L \text{ et } \liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n \in L,$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sup L \text{ et } \liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n = \inf L.$$

Démonstration. i) Supposons que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, tous les termes de la suite sont plus grands que $l - \varepsilon$ et plus petits que $l + \varepsilon$. Donc la limite supérieure et la limite inférieure valent l . Réciproquement, si la limite supérieure et la limite inférieure valent l , à partir d'un certain rang N , tous les termes de la suite sont plus grands que $l - \varepsilon$ et plus petits que $l + \varepsilon$ donc la suite converge vers l .

ii) Nous allons démontrer ces propriétés pour la limite supérieure, les résultats analogues s'en déduisant aisément pour la limite inférieure.

Soit l la limite supérieure de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs, tendant vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Par la proposition 2.2.6, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe au moins un entier p_n tel que $l - \varepsilon_n \leq s_{p_n} \leq l + \varepsilon_n$. La sous-suite $(s_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers l et $l \in L$.

De plus s'il existe une valeur $l' \in L$ telle que $l < l'$, alors il existe une sous-suite $(s_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers l' . Pour $\varepsilon < \frac{l' - l}{2}$, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, $s_{p_n} \geq l' - \varepsilon$. Donc il existe une infinité de valeurs de s_n qui sont supérieures à $l + \varepsilon$, ce qui contredit les propriétés de la limite supérieure, voir proposition 2.2.6.

On a donc bien $\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sup L$. \square

2.3 Séries numériques

On suppose que \mathbb{K} est l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

2.3.1 Définition. i) Une série numérique est un couple formé de deux suites numériques

$$\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}}\},$$

telles que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{i=0}^n u_i$.

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n s'appelle le terme général d'ordre n de la série, s_n s'appelle la somme partielle d'ordre n de la série.

Une série sera désignée par "la série de terme général u_n ".

iii) La série somme de la série de terme général u_n et de la série de terme général v_n est la série de terme général $(u_n + v_n)$. Le produit de la série de terme général u_n par un scalaire λ est la série de terme général λu_n .

2.3.2 Définition. La série de terme général u_n converge si la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et la limite s de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'appelle la somme de la série de terme général u_n .

Si la série de terme général u_n converge, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = s - s_n$ s'appelle le reste d'ordre n de la série de terme général u_n .

On peut caractériser de plusieurs manières la convergence d'une série :

2.3.3 Proposition. La série de terme général u_n converge et sa somme est s

si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N \Rightarrow |s - s_n| \leq \varepsilon$

si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N \Rightarrow \left| s - \sum_{i=0}^n u_i \right| \leq \varepsilon$

si et seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N \Rightarrow |r_n| \leq \varepsilon$.

2.3.4 Notations. Si s est la somme de la série de terme général u_n , on note $s = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$. Ce

symbole veut dire : $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n u_i$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$r_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k u_i - \sum_{i=0}^n u_i = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=n+1}^k u_i = \sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i.$$

Remarque. La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes de cette série : on peut modifier un nombre fini de termes d'une série sans changer sa nature. En revanche, si la série converge, la valeur de sa somme dépend de tous les termes de la série.

En appliquant le critère de Cauchy pour les suites à la suite des sommes partielles d'une série numérique, on obtient le critère de Cauchy pour les séries :

2.3.5 Théorème. (Critère de Cauchy pour les séries)

Une série numérique de terme général u_n converge si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } q \geq p \geq N \Rightarrow \left| \sum_{i=p}^q u_i \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour $q \geq p$,

$$\sum_{i=p}^q u_i = s_q - s_{p-1},$$

et d'appliquer le critère de Cauchy pour les suites numériques 2.1.11 à la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Le critère de Cauchy permet de démontrer une condition nécessaire de convergence des séries numériques :

2.3.6 Proposition. *Si la série numérique, de terme général u_n , converge, alors la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Cette condition nécessaire de convergence de la série n'est pas suffisante.

Démonstration. Si la série de terme général u_n converge, elle vérifie le critère de Cauchy, théorème 2.3.5, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } q \geq p \geq N \Rightarrow |s_p - s_q| \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour $n - 1 \geq N$, on a

$$|s_n - s_{n-1}| = |u_n| \leq \varepsilon.$$

Ceci implique bien la convergence vers 0 de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour montrer que cette condition n'est pas suffisante, il suffit de considérer la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n}.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 alors que la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge comme on le verra à la proposition 2.4.4 iii) et aussi dans l'exemple 2.4.13. \square

La proposition suivante est immédiate :

2.3.7 Proposition. *Si deux séries de termes généraux respectifs u_n et v_n sont convergentes de sommes s et σ , la série somme de terme général $(u_n + v_n)$ est convergente de somme $s + \sigma$ et la série produit par un scalaire de terme général λu_n est convergente de somme λs .*

L'étude des séries à termes positifs est plus facile que celle des séries à termes quelconques, comme on le verra au paragraphe suivant. Grâce à la notion de convergence absolue, on peut s'y ramener dans certains cas :

2.3.8 Définition. *On dit qu'une série de terme général u_n converge absolument si la série de terme général $|u_n|$ converge.*

Remarquons que la convergence et la convergence absolue coïncident dans le cas d'une série à termes positifs. Dans le cas général, on a :

2.3.9 Proposition. *Si la série numérique de terme général u_n converge absolument, cette série converge.*

Démonstration. Si la série de terme général u_n converge absolument, le critère de Cauchy (théorème 2.3.5) appliqué à la série de terme général $|u_n|$ s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } q \geq p \geq N, \Rightarrow \sum_{i=p}^q |u_i| \leq \varepsilon.$$

Mais on a :

$$\left| \sum_{i=p}^q u_i \right| \leq \sum_{i=p}^q |u_i| \leq \varepsilon.$$

La série de terme général u_n vérifie donc le critère de Cauchy. Cette série est donc bien convergente. \square

La réciproque de cette proposition est fausse : la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge comme on le verra dans le corollaire 2.5.2 alors qu'elle ne converge pas absolument, comme on l'a déjà remarqué dans la proposition 2.3.6.

Remarque. Pour qu'une série de terme général u_n soit absolument convergente, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{i=0}^n |u_i| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit majorée.

En effet, pour qu'une série de terme général u_n soit absolument convergente, il faut et il suffit que la suite $\left(\sum_{i=0}^n |u_i| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente. Or cette suite est évidemment croissante et on peut donc appliquer les propositions 2.1.8 et 2.2.2 : pour qu'elle converge, il faut et il suffit qu'elle soit majorée.

On a également les propriétés immédiates suivantes :

2.3.10 Proposition. Si deux séries de termes généraux respectifs u_n et v_n sont absolument convergentes, la série somme de terme général $(u_n + v_n)$ est absolument convergente et la série produit par un scalaire de terme général λu_n est absolument convergente pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Grâce à la notion de convergence absolue, on peut étudier les produits de séries :

2.3.11 Définition. On considère deux séries numériques de termes généraux respectifs u_n et v_n . La série produit de ces deux séries est la série de terme général :

$$w_n = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p}.$$

2.3.12 Théorème. On considère une série numérique de terme général u_n absolument convergente et une série numérique de terme général v_n convergente. Alors la série produit, de terme général

$$w_n = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p},$$

est convergente et sa somme est le produit des sommes des deux séries de départ.

Si de plus la série de terme général v_n est absolument convergente, la série produit est absolument convergente.

Démonstration. On définit les sommes partielles des séries par :

$$s_n = \sum_{i=0}^n u_i, \quad \sigma_n = \sum_{j=0}^n v_j, \quad A_n = \sum_{i=0}^n |u_i|,$$

$$\Pi_n = \sum_{k=0}^n w_k = \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k u_p v_{k-p} = \sum_{0 \leq i+j \leq n} u_i v_j.$$

Soient s, σ, A, Π les sommes correspondantes.

On veut montrer que la suite $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $s\sigma$. Comme la suite $(s_n \sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $s\sigma$, il suffit de montrer que la suite $(s_n \sigma_n - \Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Or :

$$\begin{aligned} s_n \sigma_n - \Pi_n &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n u_i v_j - \sum_{0 \leq i+j \leq n} u_i v_j = \sum_{n+1 \leq i+j \leq 2n} u_i v_j \\ &= u_1 v_n + u_2 (v_n + v_{n-1}) + \cdots + u_n (v_n + v_{n-1} + \cdots + v_1). \end{aligned}$$

Soit $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{i=0}^n |u_i| \leq M$ et $|\sigma_n| \leq \frac{M}{2}$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Par hypothèse, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow |\sigma_n - \sigma_m| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \text{ et } n, m \geq n_0 \Rightarrow |A_n - A_m| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

En coupant la somme ci-dessus en deux à l'indice n_0 on peut écrire :

$$\begin{aligned} s_n \sigma_n - \Pi_n &= u_1 v_n + u_2 (v_n + v_{n-1}) + \cdots + u_n (v_n + v_{n-1} + \cdots + v_1) \\ &= u_1 v_n + \cdots + u_{n_0} (v_n + v_{n-1} + \cdots + v_{n-n_0+1}) + \cdots + u_n (v_n + v_{n-1} + \cdots + v_1) \\ &= u_1 (\sigma_n - \sigma_{n-1}) + \cdots + u_{n_0} (\sigma_n - \sigma_{n-n_0}) + \cdots + u_n (\sigma_n - \sigma_0). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |s_n \sigma_n - \Pi_n| &\leq [|u_1| |\sigma_n - \sigma_{n-1}| + |u_2| |\sigma_n - \sigma_{n-2}| + \cdots + |u_{n_0}| |\sigma_n - \sigma_{n-n_0}|] + \\ &\quad [|u_{n_0+1}| |\sigma_n - \sigma_{n-n_0-1}| + \cdots + |u_n| |\sigma_n - \sigma_0|]. \end{aligned}$$

Or, si $n \geq 2n_0$, on a :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n_0\}, |\sigma_n - \sigma_{n-k}| \leq \frac{\varepsilon}{2M},$$

et on a aussi

$$\forall k \in \{n_0 + 1, \dots, n\}, |\sigma_n - \sigma_{n-k}| \leq |\sigma_n| + |\sigma_{n-k}| \leq 2 \frac{M}{2} = M.$$

D'où :

$$\begin{aligned} n \geq 2n_0 \Rightarrow |s_n \sigma_n - \Pi_n| &\leq \frac{\varepsilon}{2M} [|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n_0}|] + M [A_n - A_{n_0}] \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

La série produit converge bien et sa somme est bien égale au produit des sommes des séries de termes généraux respectifs u_n et v_n .

Dans le cas où la série de terme général v_n est absolument convergente, on peut définir la série de terme général :

$$w'_n = \sum_{0 \leq i+j \leq n} |u_i| |u_j|.$$

C'est donc le produit des deux séries de termes généraux respectifs $|u_n|$ et $|v_n|$. Ces deux séries sont convergentes et aussi absolument convergentes puisqu'elles sont à termes positifs. Par la démonstration précédente, c'est une série convergente. Or, on remarque que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |w_n| \leq w'_n.$$

D'où, si $(\Pi'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la suite des sommes partielles de la série de terme général w'_n , on a aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \sum_{i=0}^n |w_i| \leq \Pi'_n.$$

Comme ces deux suites sont croissantes et que $(\Pi'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, la suite des sommes partielles de la série de terme général $|w_n|$ est convergente et la série produit est bien absolument convergente. \square

2.4 Séries à termes positifs

Dans le courant du paragraphe précédent, on a constaté que les séries à termes positifs ont des propriétés particulières. On va maintenant les étudier systématiquement :

2.4.1 Proposition. *Soit u_n une série dont le terme général u_n est positif ou nul pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite des sommes partielles $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. La suite des sommes partielles $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$s_n - s_{n-1} = u_n \geq 0.$$

Cette suite est donc croissante et donc convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$ par la proposition 2.2.2 \square

Le résultat suivant est essentiel, c'est le théorème de comparaison :

2.4.2 Théorème. *On considère deux séries dont les termes généraux u_n et v_n sont positifs, (ie. $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $u_n \leq v_n$. Alors si la série de terme général v_n converge, la série de terme général u_n converge et si la série de terme général u_n diverge, la série de terme général v_n diverge.*

Démonstration. Posons $s_n = \sum_{i=0}^n u_i$ et $\sigma_n = \sum_{i=0}^n v_i$. L'hypothèse implique que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq s_n \leq \sigma_n.$$

Si la série de terme général v_n converge, la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc est bornée. La suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc aussi bornée et comme elle est croissante, elle converge par la Proposition 2.1.8, ce qui veut bien dire que la série de terme général u_n converge.

La deuxième propriété est la contraposée de la première donc est vraie également. \square

Remarque. Ce résultat reste vrai si l'inégalité $u_n \leq v_n$ n'est vraie qu'à partir d'un certain rang n_0 . C'est une conséquence de la remarque signalant que la convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes de cette série.

Nous allons étudier des séries particulières, les séries géométriques, qui nous donneront une échelle de comparaison.

2.4.3 Proposition. Soit $a, r \in \mathbb{K}$ non nuls. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = ar^n$. Alors, la série de terme général u_n converge si et seulement si $|r| < 1$.

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned} \text{si } r \neq 1, s_n &= a(1 + r + \cdots + r^n) = a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \\ \text{si } r = 1, s_n &= a(n + 1). \end{aligned}$$

La suite $(a(n + 1))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge et la suite $\left(a \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|r| < 1$.

La série de terme général u_n converge donc bien si et seulement si $|r| < 1$ et sa somme est égale à $\frac{a}{1 - r}$. \square

En utilisant ce résultat, on obtient deux tests :

2.4.4 Proposition. *Test de Cauchy.*

On considère une série à termes positifs u_n . Posons $l = \limsup_{n \in \mathbb{N}} (u_n)^{1/n}$. Alors :

- i) $l < 1 \Rightarrow$ la série de terme général u_n converge
- ii) $l > 1 \Rightarrow$ la série de terme général u_n diverge
- iii) $l = 1$ on ne peut pas conclure.

Démonstration. i) Supposons $l < 1$. On choisit $r \in]l, 1[$. D'après la proposition 2.2.6 iii), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow (u_n)^{1/n} < r$ ou encore $u_n < r^n$.

On peut donc appliquer le théorème de comparaison 2.4.2 et la proposition 2.4.3 : la série de terme général u_n converge.

ii) Supposons $l > 1$. On choisit $r \in]1, l[$. D'après la proposition 2.2.6 iii), il existe une infinité de valeurs de n tels que $(u_n)^{1/n} \geq r$.

Ceci implique que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et par la proposition 2.3.6, la série de terme général u_n diverge.

iii) Supposons $l = 1$. Les deux séries de termes généraux respectifs $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ vérifient cette condition.

Or la première diverge, car

$$\sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i} - \sum_{i=0}^n \frac{1}{i} = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

et la série de terme général $\frac{1}{n}$ ne vérifie pas la condition de Cauchy (théorème 2.3.5).

En revanche, la seconde converge car on peut écrire, comme dans l'exemple 2.1.12 :

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}.$$

La série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ converge car on a :

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{i(i-1)} = \sum_{i=2}^n \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Le théorème de comparaison 2.4.2 permet donc de conclure que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge. \square

Dans le cas où la série de terme général u_n vérifie le i) du test de Cauchy, on a une majoration du reste r_n :

2.4.5 Corollaire. *On considère une série à termes positifs u_n vérifiant :*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} < 1$$

et soit r tel que $\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} < r < 1$. Alors le reste d'ordre n de cette série vérifie à partir d'un certain rang :

$$|r_n| \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} r^i = \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

2.4.6 Exemple. *Majoration du reste de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^n}$.*

Cette série vérifie $\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n)^{1/n} = 0$. Dans ce cas, on peut améliorer l'estimation précédente. En effet pour $i \geq n+1$, on a $u_i = \frac{1}{i^i} < \frac{1}{(n+1)^i}$. D'où par comparaison avec la série géométrique de raison $\frac{1}{n+1}$:

$$r_n \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^i} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)^n}.$$

Pour $n = 4$, on obtient : $r_n \leq 4 \cdot 10^{-4}$.

2.4.7 Proposition. *Test de d'Alembert.*

On considère une série à termes strictement positifs u_n .

- i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow$ la série de terme général u_n converge
- ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow$ la série de terme général u_n diverge
- iii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ on ne peut pas conclure.

Démonstration. i) Supposons que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et soit $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < r < 1.$$

Alors la proposition 2.2.6 implique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r$$

D'où, en itérant :

$$n \geq N \Rightarrow u_{n+1} \leq u_N r^{n+1-N} = r^{n+1} \left(\frac{u_N}{r^N} \right).$$

Le terme $\frac{u_N}{r^N}$ ne dépend pas de n et la série de terme général r^{n+1} converge puisque $r < 1$, (proposition 2.4.3). Le théorème de comparaison 2.4.2 implique que la série de terme général u_n converge.

ii) Supposons que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et soit $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > r > 1.$$

Alors la proposition 2.2.7 implique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq r.$$

Ceci implique que la suite des termes généraux $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. La série de terme général u_n ne peut donc pas converger d'après la proposition 2.3.6.

iii) Les deux séries de termes généraux respectifs $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ vérifient cette condition car $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Or on a vu dans la proposition 2.4.4 que la première diverge et que la seconde converge. \square

Dans le cas où la série de terme général u_n vérifie le i) du test de d'Alembert, on a également une majoration du reste r_n :

2.4.8 Corollaire. *On considère une série à termes positifs u_n vérifiant :*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

et soit r tel que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < r < 1$. Alors son reste d'ordre n vérifie à partir d'un certain rang N :

$$|r_n| \leq \left(\frac{u_N}{r^N} \right) \sum_{i=n+1}^{+\infty} r^i = \left(\frac{u_N}{r^N} \right) \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

2.4.9 Exemple. *Calcul approché de $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$*

On pose $u_n = \frac{1}{n!}$ et on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}$. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ et dans ce cas, on peut améliorer l'estimation précédente. En effet, pour $i \geq 1$, on écrit : $\frac{u_{n+i}}{u_{n+1}} \leq \left(\frac{1}{n+1} \right)^{i-1}$ et par comparaison avec la série géométrique de raison $\frac{1}{n+1}$:

$$\begin{aligned} r_n &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{i-1}} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{nn!}. \end{aligned}$$

En prenant $n = 10$, on obtient

$$2,71828182 < e < 2,71828183.$$

Remarque. On verra dans le chapitre 5 sur les séries entières, corollaire 5.1.8, que si la limite de la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et vaut l , alors la limite de la suite $u_n^{1/n}$ existe aussi et vaut l . On en déduit que le test de Cauchy (proposition 2.4.4) est en général plus efficace que le test de d'Alembert (proposition 2.4.7) : théoriquement, il suffit de tester la suite $(u_n^{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$. Cependant, en pratique, il est souvent plus facile de tester la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Montrons par un contre-exemple que la réciproque de cette propriété est fautive : soit $a > 0, a \neq 1$.

La suite définie pour tout $p \in \mathbb{N}$ par $u_{2p} = u_{2p+1} = a^p$ vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1/n} = \sqrt{a}$ alors que la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'a pas de limite quand $n \rightarrow +\infty$.

2.4.10 Proposition. Comparaison avec une intégrale.

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^+ , positive et décroissante, telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Soit $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite des intégrales $\left(\int_0^n f(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration. Puisque f est décroissante :

$$t \in [i-1, i] \Rightarrow u_i = f(i) \leq f(t) \text{ et } t \in [i, i+1] \Rightarrow u_i = f(i) \geq f(t).$$

Donc aussi :

$$u_i = \int_{i-1}^i u_i dt \leq \int_{i-1}^i f(t) dt \text{ et } u_i = \int_i^{i+1} u_i dt \geq \int_i^{i+1} f(t) dt.$$

Si $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n , on peut écrire :

$$s_n - s_0 = \sum_{i=1}^n u_i = \sum_{i=1}^n f(i) \leq \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i f(t) dt = \int_0^n f(t) dt.$$

De la même façon, on a aussi :

$$s_n = \sum_{i=0}^n u_i = \sum_{i=0}^n f(i) \geq \sum_{i=0}^n \int_i^{i+1} f(t) dt = \int_0^{n+1} f(t) dt.$$

On a donc la double inégalité :

$$\int_0^{n+1} f(t) dt \leq s_n \leq s_0 + \int_0^n f(t) dt.$$

Comme ces suites sont croissantes, ces deux inégalités prouvent que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite des intégrales $\left(\int_0^n f(t) dt\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$. □

Remarque. Cette proposition est encore vraie si l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$ est remplacé par un intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Il suffit alors de considérer la série à partir du rang n_0 tel que $n_0 \geq a$.

Sous les hypothèses de la proposition 2.4.10 et si la série converge, ces inégalités impliquent un encadrement du reste :

2.4.11 Corollaire. *Sous les hypothèses de la proposition 2.4.10, le reste $r_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$ vérifie la double inégalité :*

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t) dt \leq r_n \leq \int_n^{\infty} f(t) dt.$$

2.4.12 Exemple. *Valeur approchée de la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$.*

Cette série vérifie les hypothèses de la proposition 2.4.10. En posant $f(t) = \frac{1}{t^2}$ pour tout $t > 0$, on va approcher par défaut la somme s de la série de terme général $u_n = f(n) = \frac{1}{n^2}$ par :

$$s'_n = s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(t) dt = \sum_{i=1}^n f(i) + \int_{n+1}^{\infty} f(t) dt = s - r_n + \int_{n+1}^{\infty} f(t) dt.$$

D'après le corollaire 2.4.11, cette valeur approchée vérifie :

$$0 \leq s - s'_n = r_n - \int_{n+1}^{\infty} f(t) dt \leq \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

Dans le cas de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$, pour $n = 10$, on obtient :

$$0 \leq s - s'_{10} \leq \int_{10}^{11} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{110}.$$

On verra au chapitre 6 que la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ a pour somme $\frac{\pi^2}{6}$. Le résultat précédent donne donc une valeur approchée de ce nombre avec une estimation de l'erreur.

La proposition 2.4.10 va permettre d'étoffer l'échelle de comparaison des séries à termes positifs :

2.4.13 Exemple. *Les séries de Riemann.*

Soient $\alpha > 0$ et $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ pour $n \geq 1$. La série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$.

On compare la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n à l'intégrale sur l'intervalle $[1, n]$ de la fonction $f_\alpha(t) = \frac{1}{t^\alpha}$.

Or on peut calculer cette intégrale :

$$\begin{aligned} \int_1^n f_\alpha(t) dt &= \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha} (n^{1-\alpha} - 1) \text{ si } \alpha \neq 1 \\ &= \ln n \text{ si } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Cette suite d'intégrales converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2.4.14 Exemple. *Les séries de Bertrand.*

Soient $\alpha > 0$ et $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ pour $n > 1$. La série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1$.

De la même façon, on compare la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n à l'intégrale sur l'intervalle $[2, n]$ de la fonction $g_\alpha(t) = \frac{1}{t(\ln t)^\alpha}$.

On peut calculer cette intégrale :

$$\begin{aligned} \int_2^n g_\alpha(t) dt &= \int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha} ((\ln n)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}) \text{ si } \alpha \neq 1 \\ &= (\ln \ln n - \ln \ln 2) \text{ si } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Cette suite d'intégrales converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2.4.15 Proposition. *Test des équivalents.*

Soient f et g deux fonctions définies positives sur \mathbb{R}^+ . On définit u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$.

Alors, si les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$, les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n ont même nature : la série de terme général u_n converge si et seulement si la série de terme général v_n converge.

Démonstration. On rappelle que les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \text{ tel que } t \geq A \Rightarrow |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon g(t).$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Si les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$, il existe donc $A > 0$ tel que :

$$t \geq A \Rightarrow (1 - \varepsilon)g(t) \leq f(t) \leq (1 + \varepsilon)g(t).$$

On en déduit que pour $n \geq A$, on a :

$$(1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n.$$

On applique le théorème de comparaison 2.4.2 deux fois :

si la série de terme général v_n converge la série de terme général u_n converge et si la série de terme général u_n converge, la série de terme général v_n converge.

Ces deux séries ont bien même nature. □

2.4.16 Exemple. *On considère les séries à termes positifs u_n et v_n telles que*

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \text{ et } v_n = \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}\right)}{\sin \frac{1}{n}}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors la série de terme général u_n converge et la série de terme général v_n diverge.

Pour la série de terme général u_n , on remarque que la fonction f définie pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$ par $f(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$ est équivalente au voisinage de $+\infty$ à la fonction définie par $\frac{1}{t^2}$ et on applique la proposition 2.4.15 et l'exemple 2.4.13.

Pour la série de terme général v_n , on écrit que la fonction g définie pour tout $t \in \mathbb{R}_*^+$ par $g(t) = \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{t\sqrt{\ln t}}\right)}{\sin \frac{1}{t}}$ est équivalente au voisinage de $+\infty$ à la fonction définie par $\frac{1}{2t \ln t}$ et on applique la proposition 2.4.15 et l'exemple 2.4.14.

2.5 Séries à termes quelconques

On a déjà vu la notion de série absolument convergente en 2.3.8, et on a démontré qu'une série absolument convergente est convergente, proposition 2.3.9. On va maintenant étudier quelques cas particuliers de séries non absolument convergentes, qui cependant sont convergentes.

2.5.1 Théorème. Théorème d'Abel.

On considère une série de terme général u_n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n b_n$ avec :

- i) la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ est bornée.
- ii) la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

Alors la série de terme général u_n converge.

Démonstration. On applique le critère de Cauchy (2.3.5) à la série de terme général u_n , en écrivant, si $q \geq p$:

$$\begin{aligned} s_q - s_{p-1} &= \sum_{n=p}^q u_n = \sum_{n=p}^q a_n b_n = \sum_{n=p}^q (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= \sum_{n=p}^q A_n b_n - \sum_{n=p}^q A_{n-1} b_n \\ &= A_q b_q - A_{p-1} b_p + \sum_{n=p}^{q-1} A_n (b_n - b_{n+1}). \end{aligned}$$

D'où :

$$|s_q - s_{p-1}| = \left| \sum_{n=p}^q u_n \right| \leq |A_q| b_q + |A_{p-1}| b_p + \sum_{n=p}^{q-1} |A_n| (b_n - b_{n+1}).$$

Or par hypothèse, il existe $M > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|A_k| \leq M$.

Donc

$$|s_q - s_{p-1}| = \left| \sum_{n=p}^q u_n \right| \leq M(b_p + b_q) + M(b_p - b_q) = 2M b_p.$$

Ce dernier terme tend vers 0 par hypothèse. La suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente et par suite, la série de terme général u_n est convergente. \square

Comme application de ce théorème, on a :

2.5.2 Corollaire. Séries alternées.

On considère une série de terme général u_n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n b_n$ où $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive décroissante, tendant vers 0. Alors la série de terme général u_n converge.

En fait dans le cas des séries alternées, on a de plus un **encadrement de la somme**. En effet, si $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles, on peut écrire : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{2n} - s_{2n+2} = \sum_{i=0}^{2n} u_i - \sum_{i=0}^{2n+2} u_i = -u_{2n+2} - u_{2n+1} = b_{2n+1} - b_{2n+2} \geq 0.$$

La suite $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

De la même façon, on a :

$$s_{2n+3} - s_{2n+1} = \sum_{i=0}^{2n+3} u_i - \sum_{i=0}^{2n+1} u_i = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -b_{2n+3} + b_{2n+2} \geq 0.$$

La suite $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante.

Par le même calcul, on a aussi :

$$s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1} = -b_{2n+1} \leq 0.$$

Ces inégalités se résument en :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_{2n+1} \leq s_{2n+3} \leq s_{2n+2} \leq s_{2n}.$$

Comme la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, les suites $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, sous-suites de la précédente, convergent vers la même limite. Ce sont donc deux suites adjacentes. Leur limite commune s qui par définition est la somme de la série de terme général u_n vérifie alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n}.$$

On a aussi une **majoration du reste** d'une série alternée. En effet, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 0 &\geq r_{2n} = s - s_{2n} \geq s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1} \\ 0 &\leq r_{2n+1} = s - s_{2n+1} \leq s_{2n+2} - s_{2n+1} = u_{2n+2}. \end{aligned}$$

Donc

$$|r_{2n}| \leq |u_{2n+1}| \text{ et } |r_{2n+1}| \leq |u_{2n+2}|.$$

Par suite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |r_n| \leq |u_{n+1}|.$$

2.5.3 Exemple. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge, bien qu'elle ne soit pas absolument convergente.

2.5.4 Définition. On rappelle qu'un angle θ est congru à un angle α modulo 2π et on note $\theta \equiv \alpha [2\pi]$ si $\theta = \alpha + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

2.5.5 Corollaire. Séries trigonométriques.

Soit u_n la série de terme général $u_n = b_n e^{in\theta}$, où $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive décroissante, tendant vers 0 et $\theta \neq 0 [2\pi]$. Alors la série de terme général u_n converge.

Démonstration. Il suffit de vérifier la condition i) du théorème d'Abel 2.5.1 :

$$A_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} \sin((n+1)\frac{\theta}{2})}{e^{i\frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2}}.$$

On en déduit que :

$$|A_n| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|}.$$

Le théorème 2.5.1 montre alors que la série de terme général u_n converge. □

On peut remarquer que si $\theta = \pi [2\pi]$, on retrouve les séries alternées du corollaire 2.5.2 et que cette démonstration ne s'applique pas au cas où $\theta = 0 [2\pi]$: dans ce cas, $u_n = b_n$ et la série de terme général u_n n'est pas forcément convergente.

2.5.6 Exemple. Valeur approchée de la somme de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Cette série est une série alternée et donc le reste de rang n est majoré par $\frac{1}{(n+1)^2}$. Pour $n = 10$, on trouve donc une erreur inférieure à $\frac{1}{121}$.

On verra au chapitre 6 que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^2}$ a pour somme $-\frac{\pi^2}{12}$. Ce résultat donne donc un encadrement de ce nombre avec une estimation de l'erreur.

Une technique très utilisée pour les séries à termes quelconques pour lesquelles les résultats précédents ne s'appliquent pas est l'utilisation d'un développement limité du terme général. Expliquons cette méthode sur deux exemples :

2.5.7 Exemple. 1) La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ converge
 2) La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge.

Notation de Landau : on dit qu'une fonction f est un $O(h^k)$ au voisinage de 0 s'il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que, au voisinage de 0, on ait :

$$C_1 |h|^k \leq |f(h)| \leq C_2 |h|^k.$$

On utilise un développement limité de la fonction $(1+x)^{-1}$ au voisinage de 0 :

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + O(x^2).$$

1) On écrit, pour la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$:

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Cette série apparaît donc comme la somme de 3 séries : la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ converge par le théorème d'Abel, et les deux séries de termes généraux respectifs $\frac{1}{n^2}$ et $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, sont absolument convergentes, donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ est bien convergente.

2) Pour la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, le même calcul donne :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Les séries de termes généraux respectifs $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ sont convergentes mais la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge. Donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge.

2.6 Opérations sur les séries

2.6.1 Définition. Commutation des termes

On dira qu'une série de terme général u_n est commutativement convergente si quelque soit la permutation σ de \mathbb{N} , la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ est convergente et a même somme que la série de terme général u_n .

Notons qu'une série commutativement convergente est nécessairement convergente, en prenant pour σ la permutation identité.

2.6.2 Théorème. Convergence commutative.

i) Une série est absolument convergente si et seulement si elle est commutativement convergente.

ii) Si une série de terme général u_n est convergente et non absolument convergente, pour tout $l \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une permutation σ de \mathbb{N} telle que la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ converge et a pour somme l .

Démonstration. i) On considère une série de terme général u_n absolument convergente et une permutation σ de \mathbb{N} .

Posons $M = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m(n) = \sup\{\sigma(k) \mid 0 \leq k \leq n\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n |u_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=0}^{m(n)} |u_k| \leq M.$$

La suite croissante des sommes partielles de la série de terme général $|u_{\sigma(n)}|$ est bornée donc convergente. La série de terme général $u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente donc aussi convergente par la proposition 2.3.9.

De plus on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

En inversant les rôles des séries de termes généraux u_n et $u_{\sigma(n)}$, ce qui revient à considérer la permutation σ^{-1} de \mathbb{N} , on obtient aussi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{\sigma(k)}|,$$

d'où l'égalité des sommes des modules des deux séries.

Il reste à montrer l'égalité des sommes des séries elles-mêmes :

Soit

$$\Delta_n = \{p \geq 0, p \leq m(n) \mid p \neq \{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n)\}\}.$$

On peut écrire :

$$\left| \sum_{k=0}^{m(n)} u_k - \sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \right| = \left| \sum_{k \in \Delta_n} u_k \right| \leq \sum_{k \in \Delta_n} |u_k|.$$

Or on a :

$$\sum_{k \in \Delta_n} |u_k| = \sum_{k=0}^{m(n)} |u_k| - \sum_{k=0}^n |u_{\sigma(k)}|,$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ d'après le raisonnement précédent.

On peut donc bien conclure que la limite des sommes partielles des deux séries de termes généraux u_n et $u_{\sigma(n)}$ est la même, c'est-à-dire que ces séries ont même somme.

Réciproquement, par contraposée, il faudrait montrer qu'une série qui n'est pas absolument convergente, n'est pas commutativement convergente. Nous admettrons ce résultat dans toute sa généralité.

Par contre, nous allons présenter ici le cas de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$.

De la même façon, nous ne démontrerons pas la propriété ii), nous étudierons seulement le cas de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$.

Précisément, nous allons montrer que quel que soit $l \in \mathbb{R}$ il existe une permutation σ des termes de cette série telle que la somme de la série permutée soit égale à l . Ceci prouvera, dans le cas particulier de cette série, à la fois la réciproque de la propriété i) et la propriété ii).

Supposons pour fixer les idées que $l \in \mathbb{R}$, $l > 0$, les autres cas étant analogues. On va définir la série de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$ de la façon suivante :

$$v_0 = u_0, v_1 = u_2, \dots, v_{n_0} = u_{2n_0},$$

où n_0 est le premier entier tel que

$$v_0 + v_1 + \dots + v_{n_0-1} \leq l \leq v_0 + v_1 + \dots + v_{n_0-1} + v_{n_0}.$$

$$v_{n_0+1} = u_1, v_{n_0+2} = u_3, \dots, v_{n_0+n'_1} = u_{2n'_1-1},$$

où n'_1 est le premier entier tel que

$$v_0 + v_1 + \dots + v_{n_0+n'_1} \leq l \leq v_0 + v_1 + \dots + v_{n_0+n'_1-1}.$$

On pose $n_1 = n_0 + n'_1$ et on définit

$$v_{n_1+1} = u_{2n_0+2}, \dots$$

On continue ainsi en additionnant des termes de rang pair (donc positifs) jusqu'à ce que la somme dépasse l puis des termes de rang impair (donc négatifs) jusqu'à ce que la somme redevienne plus petite que l .

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série de terme général v_n .

On remarque que

$$n_{2p} \leq k \leq n_{2p+1} - 1 \Rightarrow |S_k - l| \leq u_{2n_{2p}},$$

$$n_{2p+1} \leq k \leq n_{2p+2} - 1 \Rightarrow |S_k - l| \leq u_{2n'_{2p+1}}.$$

Par construction, les sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la série de terme général v_n obtenue par cette permutation des termes de la série de terme général u_n ont la propriété suivante :

La sous-suite $(S_{n_{2p}})_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante et supérieure à l .

La sous-suite $(S_{n_{2p+1}})_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante et inférieure à l .

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l quand $n \rightarrow +\infty$.

On en déduit que la série de terme général v_n obtenue par cette permutation des termes de la série de terme général u_n converge et a pour somme l . \square

2.6.3 Définition. *Séries de paquets*

On dit que la série de terme général v_n est une série de paquets de la série de terme général u_n s'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que

$$v_n = \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} u_k.$$

2.6.4 Théorème. *Sommation par paquets.*

Si la série de terme général u_n converge, toute série de paquets de terme général v_n converge et a même somme que la série de terme général u_n .

Démonstration. On considère une série de terme général u_n convergente et une série de paquets de terme général v_n , définis en 2.6.3.

Posons

$$s_n = \sum_{k=0}^n u_k \text{ et } \sigma_n = \sum_{k=0}^n v_k.$$

Par construction, la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Précisément on a :

$$\sigma_n = s_{p_n}.$$

Comme toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite, la série de terme général v_n converge bien et a même somme que la série de terme général u_n . \square

Dans le cas des séries à termes positifs, on a également la réciproque de cette propriété :

2.6.5 Proposition. i) Si la série de terme général u_n est à termes positifs, la convergence d'une série de paquets de terme général v_n implique la convergence de la série de terme général u_n vers la même somme.

ii) En général, la convergence d'une série de paquets n'implique pas la convergence de la série de terme général u_n .

Démonstration. i) Si la série de terme général u_n est à termes positifs, avec les notations du théorème 2.6.4, les suites $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont toutes les deux croissantes.

$(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une sous-suite de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si elle converge toute la suite converge aussi.

ii) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = e^{\frac{2in\pi}{k}}.$$

On définit une suite croissante d'entiers par : $p_n = kn + k$.

La suite de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 donc la série de terme général u_n ne converge pas (proposition 2.3.6).

Cependant, la série de paquets de terme général v_n , définie par

$$v_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} e^{\frac{2ij\pi}{k}},$$

est évidemment convergente car c'est la série nulle (On rappelle que la somme des k racines $k^{\text{ème}}$ de l'unité est nulle). \square

2.7 Exercices sur le chapitre 2

2.1 Exercice. Soient $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies pour $n \geq 2$ par :

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \quad t_n = s_n + \frac{1}{n!}.$$

- 1) Montrer que les suites $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
- 2) En déduire qu'elles convergent vers une même limite e .
- 3) Montrer par l'absurde que e n'est pas rationnel.

2.2 Exercice. N étant un entier naturel fixé, soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$s_0 = s_1 = \cdots = s_N = 0, \quad s_{2k} = 1 + \frac{(-1)^k}{k}, \quad s_{2k+1} = 2 + \frac{(-1)^k}{k} \text{ pour } 2k > N.$$

- 1) Trouver des équivalents des suites $s'_n = \sup_{p \geq n} s_p$ et $s''_n = \inf_{p \geq n} s_p$ au voisinage de $+\infty$.
- 2) En déduire les limites supérieures et inférieures de $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2.3 Exercice. Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On définit :

$$s'_n = \sup_{p \geq n} s_p, \quad s''_n = \inf_{p \geq n} s_p.$$

On définit également la somme de Cesàro de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$c_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n s_i.$$

- 1) Montrer que, pour tout $n, N \in \mathbb{N}$ avec $n > N$, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^N s_i + \left(1 - \frac{N}{n}\right) s''_{N+1} \leq c_n \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^N s_i + \left(1 - \frac{N}{n}\right) s'_{N+1}.$$

- 2) En faisant tendre n vers $+\infty$, en déduire que :

$$s''_{N+1} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} c_k \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} c_k \leq s'_{N+1}.$$

- 3) En déduire que :

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} s_k \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} c_k \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} c_k \leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} s_k.$$

- 4) A l'aide de la question 3), retrouver le résultat suivant : si une suite converge vers une limite l , alors la suite de ses sommes de Cesàro converge aussi vers l .

2.4 Exercice. On étudie la suite $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- 1) Montrer que quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, il existe un entier n_k tel que

$$(8k-1)\frac{\pi}{4} \leq n_k \leq (8k+1)\frac{\pi}{4}.$$

- 2) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que la suite $(\cos n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit minorée par cette constante c .
- 3) En déduire que la suite $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

2.5 Exercice. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{\cos n}{n^\alpha + \cos n},$$

où α est un paramètre réel.

- a) Si $\alpha > 1$, montrer que la série converge absolument.
- b) Si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, montrer que la série converge.
- c) Si $\alpha = \frac{1}{2}$, montrer que la série diverge. (on utilisera l'exercice 2.4)

2.6 Exercice. Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge. On appelle S la somme de cette série, et $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i^2}$ la somme partielle d'ordre n . Trouver une valeur explicite de n telle que

$$|S_n - S| \leq \frac{1}{100}.$$

2.7 Exercice. Soit $0 < a < 1$.

- a) Calculer l'intégrale : $\int_1^n a^{\sqrt{x}} dx$ pour tout $n > 1$.
- b) Calculer la $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_1^n a^{\sqrt{x}} dx \right)$.
- c) Etudier la nature de la série de terme général $a^{\sqrt{n}}$.

2.8 Exercice. On considère la série de terme général :

$$u_n = \frac{\ln(n^{\cos n})}{\sqrt{n}}.$$

- a) Etudier la monotonie de la fonction $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, donnée par

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

- b) Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

2.9 Exercice. Etudier la convergence des séries suivantes, de termes généraux :

$$\text{a) } v_n = \frac{10^n}{n!}, \quad \text{b) } w_n = \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \right)^n.$$

2.8 Corrigé des exercices sur le Chapitre 2

Corrigé de l'exercice 2.1

1) On a :

$(s_n - s_{n-1}) = \frac{1}{n!} > 0$, donc la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

$(t_n - t_{n-1}) = s_n + \frac{1}{n!} - s_{n-1} - \frac{1}{(n-1)!} = \frac{2}{n!} - \frac{n}{n!} = \frac{2-n}{n!} < 0$, donc la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

$(t_n - s_n) = \frac{1}{n!} > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n - s_n) = 0$

2) Ces deux suites sont bien adjacentes et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$.

3) Supposons que leur limite e soit rationnelle, c'est-à-dire : $e = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

On écrit que $s_n < e < t_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les inégalités étant strictes puisque les suites $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement strictement croissante et strictement décroissante. Soit $n \geq q$. En réduisant au même dénominateur les fractions qui définissent s_n , ceci implique l'existence d'un entier A_n tel que :

$$\frac{A_n}{n!} < \frac{p}{q} < \frac{A_n}{n!} + \frac{1}{n!}.$$

Quitte à multiplier p et q par un même facteur entier, on peut supposer que $q = n!$. On en déduit qu'il existe un entier p tel que :

$$A_n < p < A_n + 1.$$

Ceci n'est pas possible, donc l'hypothèse est absurde et e n'est pas rationnel.

Corrigé de l'exercice 2.2

1) On vérifie que, au voisinage de $+\infty$, on a :

$$s'_n \sim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n}, \quad s''_n \sim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n}.$$

2) On en déduit que :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n = 2, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1.$$

Corrigé de l'exercice 2.3

1) Pour tout $k \geq N+1$, on a :

$$s''_{N+1} \leq s_k \leq s'_{N+1}.$$

En sommant sur $k = N+1, \dots, n$, on obtient :

$$(n-N)s''_{N+1} \leq \sum_{k=N+1}^n s_k \leq (n-N)s'_{N+1}.$$

En ajoutant les N premiers termes de la suite et en divisant par n , on obtient exactement :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^N s_k + \left(1 - \frac{N}{n}\right) s''_{N+1} \leq c_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^N s_k + \left(1 - \frac{N}{n}\right) s'_{N+1}.$$

2) Fixons N . Lorsque $n \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^N s_k \rightarrow 0$ puisque l'on multiplie une constante par une suite qui tend vers 0, et $\left(1 - \frac{N}{n}\right) \rightarrow 1$.
On en déduit que, lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^N s_k + \left(1 - \frac{N}{n}\right) s'_{N+1} \rightarrow s'_{N+1},$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^N s_k + \left(1 - \frac{N}{n}\right) s''_{N+1} \rightarrow s''_{N+1}.$$

Le résultat en découle.

3) Par définition :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} s'_{N+1},$$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} s''_{N+1}.$$

Il suffit donc de faire tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité du 2) pour obtenir le résultat cherché.

4) Lorsque la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite l , alors :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = l.$$

D'après 3), on a donc :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} c_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} c_n = l,$$

et la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge bien vers l .

Corrigé de l'exercice 2.4

1) Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. On remarque que

$$(8k+1)\frac{\pi}{4} - (8k-1)\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} > 1.$$

Il existe donc bien un entier n_k dans cet intervalle.

2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\cos n_k$ est minorée par $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$ convient.

3) La suite $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une sous-suite $(\cos n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui est minorée par la constante $c > 0$ donc elle ne tend pas vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé de l'exercice 2.5

a) Si $\alpha > 1$, on écrit, pour $n \rightarrow +\infty$:

$$\left| \frac{\cos n}{n^\alpha + \cos n} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha - 1} \sim \frac{1}{n^\alpha}.$$

La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente, donc la série de terme général u_n est absolument convergente par le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

b) Si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, on utilise un développement limité autour de 0 de la fonction définie par $x \rightarrow \frac{1}{1+x}$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x\mathcal{E}(x).$$

On applique ce résultat avec $x = \frac{\cos n}{n^\alpha}$, qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\cos n}{n^\alpha} \frac{1}{1 + \frac{\cos n}{n^\alpha}} = \frac{\cos n}{n^\alpha} \left(1 - \frac{\cos n}{n^\alpha} + \frac{\cos n}{n^\alpha} \mathcal{E}\left(\frac{\cos n}{n^\alpha}\right) \right) \\ &= \frac{\cos n}{n^\alpha} + \frac{\cos^2 n}{n^{2\alpha}} + \frac{\cos^2 n}{n^{2\alpha}} \mathcal{E}\left(\frac{\cos n}{n^\alpha}\right). \end{aligned}$$

La série de terme général u_n apparaît donc comme la somme de 3 séries. La première converge par le théorème d'Abel (voir 2.5.1) et les 2 suivantes sont absolument convergentes car $2\alpha > 1$. Donc la série de terme général u_n converge.

c) Si $\alpha = \frac{1}{2}$, on utilise le même développement. Dans ce cas, la première série est convergente et la troisième également. En revanche, la série de terme général $\frac{\cos^2 n}{n^{2\alpha}} = \frac{\cos^2 n}{n}$ diverge. En effet, d'après l'exercice 2.4, la suite $(\cos^2 n)_{n \in \mathbb{N}}$ a un sous-suite $(\cos^2 n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ minorée par un nombre $c > 0$. Comme il s'agit de séries à termes positifs, on peut écrire :

$$\sum_{n=1}^N \frac{\cos^2 n}{n} \geq \sum_{k=1}^K \frac{\cos^2 n_k}{n_k} \geq c \sum_{k=1}^K \frac{1}{n_k},$$

où K est tel que $n_K \leq N$ mais tend vers $+\infty$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

Or par construction, $n_k \leq 8k + 1$. Donc :

$$\sum_{n=1}^N \frac{\cos^2 n}{n} \geq \sum_{k=1}^K \frac{1}{8k+1}.$$

Cette dernière série est divergente et donc la série de terme général $\frac{\cos^2 n}{n}$ également en utilisant le théorème de comparaison.

Donc la série de terme général u_n diverge.

Corrigé de l'exercice 2.6

La série de terme général u_n est une série alternée donc elle converge. On utilise la majoration du reste d'une série alternée :

$$|S_n - S| \leq |u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Pour obtenir la précision souhaitée, il suffit de prendre $(n+1)^2 \geq 100$, c'est-à-dire $n \geq 9$

Corrigé de l'exercice 2.7

a) On effectue le changement de variable $s = \sqrt{x}$, alors :

$$\int_1^n a^{\sqrt{x}} dx = \int_1^{\sqrt{n}} 2sa^s ds = \int_1^{\sqrt{n}} 2se^{s \ln a} ds.$$

On effectue une intégration par parties en posant

$$u = 2s, du = 2ds \text{ et } v = \frac{e^{s \ln a}}{\ln a}, dv = e^{s \ln a} ds,$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_1^n a^{\sqrt{x}} dx &= \left[\frac{2se^{s \ln a}}{\ln a} \right]_1^{\sqrt{n}} - \frac{2}{\ln a} \int_1^{\sqrt{n}} e^{s \ln a} ds \\ &= \frac{2\sqrt{n}e^{\sqrt{n} \ln a}}{\ln a} - 2\frac{e^{\ln a}}{\ln a} - \frac{2}{(\ln a)^2} (e^{\sqrt{n} \ln a} - e^{\ln a}) \\ &= \frac{2\sqrt{n}a^{\sqrt{n}}}{\ln a} - 2\frac{a}{\ln a} - \frac{2}{(\ln a)^2} (a^{\sqrt{n}} - a). \end{aligned}$$

b) Comme $0 < a < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}a^{\sqrt{n}} = 0$ on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n a^{\sqrt{x}} dx = 2\frac{a}{\ln a} \left(\frac{1}{\ln a} - 1 \right).$$

b) On utilise le théorème de comparaison des séries à termes positifs et des intégrales, proposition 2.4.10 : la série de terme général $a^{\sqrt{n}}$ converge.

Corrigé de l'exercice 2.8

a) Pour $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, on a $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}(1 - \ln x)$.

La dérivée de f est positive sur $]0, e]$, nulle en e et négative sur $[e, +\infty[$. Donc la fonction f est croissante sur $]0, e]$, admet un maximum en e qui vaut $\frac{1}{\sqrt{e}}$ et est décroissante sur $[e, +\infty[$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b) On peut écrire : $u_n = \frac{\ln(n^{\cos n})}{\sqrt{n}} = \frac{\cos n \ln(n)}{\sqrt{n}} = a_n b_n$,

avec $a_n = \cos n$ et $b_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et tend vers 0 en $+\infty$ d'après la question a). La série de terme général u_n vérifie les hypothèses du théorème d'Abel et est donc convergente.

Corrigé de l'exercice 2.9

a) Il s'agit d'une série à termes positifs.

En utilisant la formule de Stirling : $n! \sim_{n \rightarrow +\infty} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, on obtient :

$$v_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10^n e^n}{n^n \sqrt{2\pi n}} = \left(\frac{10e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Or, dès que $n > 2(10e)$, $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ et comme la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente, la série de terme général v_n l'est aussi.

b) Il s'agit aussi d'une série à termes positifs. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} = 0$, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, $\ln n \leq n^{1/4}$.

Alors, pour $n \geq N$, $w_n \leq \left(\frac{n^{1/4}}{n^{1/2}}\right)^n = \frac{1}{n^{n/4}}$. La série de terme général $\frac{1}{n^{n/4}}$ est convergente. Donc la série de terme général w_n l'est aussi par le théorème de comparaison.

Chapitre 3

Intégrale de Riemann et intégrale généralisée

3.1 Intégrales des fonctions en escalier

Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} . Dans tout ce chapitre, on considère des fonctions définies et bornées sur $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

3.1.1 Définition. 1) On appelle subdivision de $[a, b]$, une suite finie strictement croissante de nombres

$$\{t_0, t_1, \dots, t_n\}, \text{ tels que } t_0 = a \text{ et } t_n = b.$$

2) Le pas d'une telle subdivision est le nombre positif σ , défini par :

$$\sigma = \sup\{(t_{i+1} - t_i) \mid i = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

3.1.2 Définition. 1) Une fonction f , définie sur $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} est dite en escalier (ou simple dans la terminologie anglo-saxonne) s'il existe une subdivision $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$.

2) Une telle subdivision sera dite adaptée à f .

On remarque qu'une subdivision de $[a, b]$ adaptée à une fonction en escalier f n'est pas unique : on peut en effet redécouper certains intervalles et la subdivision obtenue sera toujours adaptée à cette fonction f .

On remarque aussi que f peut prendre des valeurs quelconques aux points t_0, t_1, \dots, t_n . Ces valeurs ne joueront aucun rôle dans l'intégration de ces fonctions et on oubliera souvent de leur donner un nom.

3.1.3 Proposition. Si f et g sont deux fonctions en escalier sur l'intervalle $[a, b]$, il existe une subdivision adaptée à la fois à f et g .

Démonstration. Il suffit de prendre une subdivision adaptée à f et de la redécouper pour l'adapter à g . □

3.1.4 Proposition. 1) Si f et g sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$ et si λ et μ sont des scalaires, $\lambda f + \mu g$ et fg sont en escalier.

2) Si f est en escalier sur $[a, b]$, $|f|$ l'est aussi.

Démonstration. 1) Grâce à la proposition précédente, on peut prendre une subdivision adaptée à la fois à f et à g et le résultat est alors évident.

La démonstration de 2) est évidente. □

3.1.5 Définition. Soit f une fonction en escalier sur l'intervalle $[a, b]$ et $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ une subdivision de cet intervalle adaptée à f . Soit f_i la valeur de f sur l'intervalle $]t_i, t_{i+1}[$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le nombre :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_i(t_{i+1} - t_i) = f_0(t_1 - t_0) + f_1(t_2 - t_1) + \dots + f_{n-1}(t_n - t_{n-1}).$$

On note ce nombre

$$\int_a^b f(t) dt.$$

Pour que cette définition ait un sens, il faut montrer que l'intégrale de f ainsi définie ne dépend pas de la subdivision adaptée à f :

Soient $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ et $\{s_0, s_1, \dots, s_m\}$ deux subdivisions adaptées à f . On peut fabriquer une troisième subdivision adaptée à f , $\{u_0, u_1, \dots, u_p\}$ en intercallant les points des deux subdivisions initiales. Il suffit alors de comparer les intégrales de f correspondants aux subdivisions $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ et $\{u_0, u_1, \dots, u_p\}$ d'une part et $\{s_0, s_1, \dots, s_m\}$ et $\{u_0, u_1, \dots, u_p\}$ d'autre part. On est donc ramené au cas où l'une des deux subdivisions est plus fine que l'autre. On peut même supposer par itération que l'on a rajouté un seul point $u \in]t_i, t_{i+1}[$.

Or l'intégrale de f associée à cette nouvelle subdivision est :

$$\begin{aligned} & f_0(t_1 - t_0) + f_1(t_2 - t_1) + \dots + f_{i-1}(t_i - t_{i-1}) + f_i(u - t_i) \\ & + f_i(t_{i+1} - u) + f_{i+1}(t_{i+2} - t_{i+1}) + \dots + f_{n-1}(t_n - t_{n-1}), \end{aligned}$$

ce qui est évidemment la même chose que l'expression initiale de la définition 3.1.5.

Remarque. Si l'on dessine le graphe de la fonction en escalier f , les quantités $f_i(t_{i+1} - t_i)$ représentent l'aire des rectangles de côtés $(t_{i+1} - t_i)$ et $|f_i|$, comptée positivement si $f_i \geq 0$ et négativement si $f_i < 0$. Donc $\int_a^b f(t) dt$ représente la somme des aires des rectangles compris entre l'axe des t et le graphe de f , comptées positivement quand la valeur prise par f est positive et comptées négativement dans l'autre cas.

3.1.6 Proposition. 1) Soient f et g deux fonctions en escalier sur l'intervalle $[a, b]$ et λ et μ deux scalaires. Alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

2) Si f est en escalier sur $[a, b]$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

3) Si f et g sont en escalier sur $[a, b]$ et si $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

4) Si f est en escalier sur $[a, b]$ et si $c \in]a, b[$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Démonstration. 1) Il suffit de prendre une subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fois à f et à g et le résultat est alors immédiat à partir de la définition.

2) Il suffit de remarquer que toute subdivision adaptée à f est adaptée à $|f|$ et appliquer l'inégalité triangulaire.

3) Comme pour 1), il suffit de prendre une subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fois à f et à g . Sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ où f et g sont constantes et valent respectivement f_i et g_i , on a $f_i \leq g_i$. On a donc bien l'inégalité $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ en appliquant la définition 3.1.5.

4) Etant donné une fonction f en escalier sur $[a, b]$, on peut rajouter c à toute subdivision adaptée à f et le résultat est alors évident. \square

Remarque. Si on change le sens des bornes d'intégration, on pose par définition, :

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

3.2 Fonctions intégrables, intégrale de Riemann

3.2.1 Définition. On dit qu'une fonction f , définie sur l'intervalle $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , est intégrable sur cet intervalle si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier sur $[a, b]$, φ à valeurs réelles ou complexes et η à valeurs réelles positives, telles que

$$\forall t \in [a, b], |f(t) - \varphi(t)| \leq \eta(t) \text{ et } \int_a^b \eta(t) dt \leq \varepsilon.$$

3.2.2 Proposition. 1) Si f est une fonction intégrable sur $[a, b]$, f est bornée sur cet intervalle.

2) Si f et g sont des fonctions intégrables sur $[a, b]$ et si λ et μ sont des scalaires, $\lambda f + \mu g$ et $f g$ sont intégrables sur $[a, b]$.

3) Si f est intégrable sur $[a, b]$, $|f|$ l'est aussi.

Démonstration. 1) Les fonctions en escalier étant bornées, la définition de l'intégrabilité d'une fonction implique immédiatement que cette fonction est bornée.

2) Soit $\varepsilon > 0$ donné.

-Cas d'une combinaison linéaire :

pour λ et μ non tous deux nuls, on associe à la fonction intégrable f , les fonctions en escalier φ et η , $\eta \geq 0$, telles que :

$$\forall t \in [a, b], |f(t) - \varphi(t)| \leq \eta(t) \text{ et } \int_a^b \eta(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|},$$

et on associe à la fonction intégrable g les fonctions en escalier ψ et ν , $\nu \geq 0$ telles que :

$$\forall t \in [a, b], |g(t) - \psi(t)| \leq \nu(t) \text{ et } \int_a^b \nu(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|}.$$

On peut alors associer à la fonction $\lambda f + \mu g$, les fonctions en escalier $\lambda \varphi + \mu \psi$ d'une part et $|\lambda| \eta + |\mu| \nu$ d'autre part, qui vérifient :

$$\forall t \in [a, b], |(\lambda f + \mu g)(t) - (\lambda \varphi + \mu \psi)(t)| \leq (|\lambda| \eta + |\mu| \nu)(t),$$

$$\text{et } \int_a^b (|\lambda| \eta + |\mu| \nu)(t) dt \leq (|\lambda| + |\mu|) \frac{\varepsilon}{|\lambda| + |\mu|} = \varepsilon.$$

La fonction $\lambda f + \mu g$ est donc bien intégrable.

-Cas d'un produit :

soit M un majorant de la fonction $|f|$ sur $[a, b]$, c'est-à-dire $\sup_{t \in [a, b]} |f(t)| \leq M$.

A la fonction intégrable g , on associe les fonctions en escalier ψ et ν , $\nu \geq 0$, telles que :

$$\forall t \in [a, b], |g(t) - \psi(t)| \leq \nu(t) \text{ et } \int_a^b \nu(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Soit M' un majorant de la fonction $|\psi|$ sur $[a, b]$, c'est-à-dire $\sup_{t \in [a, b]} |\psi(t)| \leq M'$.

A la fonction intégrable f , on associe les fonctions en escalier φ et η , $\eta \geq 0$, telles que :

$$\forall t \in [a, b], |f(t) - \varphi(t)| \leq \eta(t) \text{ et } \int_a^b \eta(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2M'}.$$

On peut alors associer à la fonction fg , les fonctions en escalier $\varphi\psi$ et $M'\eta + M\nu$ qui vérifient pour tout $t \in [a, b]$:

$$|(fg)(t) - (\varphi\psi)(t)| \leq (|f(t)| |g(t) - \psi(t)| + |\psi(t)| |f(t) - \varphi(t)|) \leq (M' \eta + M \nu)(t)$$

$$\text{et } \int_a^b (M' \eta + M \nu)(t) dt \leq M' \frac{\varepsilon}{2M'} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

La fonction fg est donc bien intégrable.

3) De la même façon, pour $\varepsilon > 0$ donné, on associe à la fonction intégrable f les fonctions en escalier φ et η , $\eta \geq 0$ et alors, les fonctions en escalier $|\varphi|$ et η sont naturellement associées à $|f|$ et ceci prouve que $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$. \square

En prenant une suite de nombres $\varepsilon_n > 0$ tendant vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, par exemple $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, si f est intégrable sur $[a, b]$, il existe des suites de fonctions en escalier, φ_n et η_n , $\eta_n \geq 0$, telles que :

$$\forall t \in [a, b], |f(t) - \varphi_n(t)| \leq \eta_n(t) \text{ et } \int_a^b \eta_n(t) dt \leq \varepsilon_n.$$

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$\forall t \in [a, b], |\varphi_p(t) - \varphi_q(t)| \leq |f(t) - \varphi_p(t)| + |f(t) - \varphi_q(t)| \leq \eta_p(t) + \eta_q(t).$$

Donc :

$$\left| \int_a^b \varphi_p(t) dt - \int_a^b \varphi_q(t) dt \right| \leq \int_a^b |\varphi_p(t) - \varphi_q(t)| dt$$

$$\leq \int_a^b (\eta_p(t) + \eta_q(t)) dt \leq \varepsilon_p + \varepsilon_q.$$

La suite $\left(\int_a^b \varphi_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors de Cauchy et donc convergente.

Montrons que sa limite ne dépend pas du choix des suites $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$: soit $\varepsilon'_n > 0$ une autre suite tendant vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ et soient ψ_n et v_n deux suites de fonctions en escalier telles que $\forall t \in [a, b], |f(t) - \psi_n(t)| \leq v_n(t)$ et $\int_a^b v_n(t) dt \leq \varepsilon'_n$. Alors :

$$\forall t \in [a, b], |\varphi_n(t) - \psi_n(t)| \leq |f(t) - \varphi_n(t)| + |f(t) - \psi_n(t)| \leq \eta_n(t) + v_n(t).$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi_n(t) dt - \int_a^b \psi_n(t) dt \right| &\leq \int_a^b |\varphi_n(t) - \psi_n(t)| dt \\ &\leq \int_a^b (\eta_n(t) + v_n(t)) dt \leq \varepsilon_n + \varepsilon'_n. \end{aligned}$$

Les deux suites $\left(\int_a^b \varphi_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\int_a^b \psi_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent donc bien vers la même limite.

Ceci nous conduit à donner la définition suivante :

3.2.3 Définition. Si la fonction f est intégrable sur $[a, b]$, la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ de la suite $\left(\int_a^b \varphi_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée *intégrale de Riemann de f* et se note $\int_a^b f(t) dt$.

L'intégrale de Riemann d'une fonction intégrable apparaît donc comme une limite d'intégrales de fonctions en escalier. Dans bien des cas, pour montrer une propriété de l'intégrale des fonctions intégrables, on démontrera cette propriété pour les fonctions en escalier et on passera à la limite pour obtenir aussi le cas général.

C'est ce qui se produit dans le résultat suivant : en passant à la limite dans la proposition 3.1.6, on obtient aisément les propriétés analogues pour les intégrales de fonctions intégrables :

3.2.4 Proposition. 1) Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$ et λ et μ deux scalaires. Alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

2) Si f est intégrable sur $[a, b]$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

3) Si f et g sont intégrables sur $[a, b]$ et si $\forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

4) Si f est intégrable sur $[a, b]$ et si $c \in]a, b[$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Remarque. Comme pour l'intégrale des fonctions en escalier, on pose par définition, :

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

Les fonctions les plus faciles à utiliser sont les fonctions continues. On va utiliser un théorème bien connu, (voir [9]), sur les fonctions continues pour montrer que ce sont des fonctions intégrables :

3.2.5 Rappel. *Toute fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$ fermé borné y est uniformément continue, c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } |t - t'| \leq \eta \Rightarrow |f(t) - f(t')| \leq \varepsilon.$$

3.2.6 Théorème. *Toute fonction continue f sur l'intervalle $[a, b]$ y est intégrable.*

Démonstration. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $\varepsilon > 0$ donné. Comme d'après le rappel 3.2.5, f est uniformément continue il existe $h > 0$ tel que :

$$|t - t'| \leq h \Rightarrow |f(t) - f(t')| \leq \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Considérons deux fonctions en escalier sur $[a, b]$, φ_1 et φ_2 , associées à une subdivision t_0, t_1, \dots, t_n de pas inférieur à h :

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \inf_{c \in [t_i, t_{i+1}]} f(c) \text{ pour } t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ et } i = 0, 1, \dots, n-1 \\ \varphi_2(t) &= \sup_{c \in [t_i, t_{i+1}]} f(c) \text{ pour } t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ et } i = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

et posons $\eta = \varphi_2 - \varphi_1$.

Alors, $\varphi_1(t) \leq f(t) \leq \varphi_2(t)$ pour tout $t \in [a, b]$ et par suite $0 \leq f(t) - \varphi_1(t) \leq \eta(t)$ pour tout $t \in [a, b]$.

De plus,

$$\begin{aligned} \int_a^b \eta(t) dt &= \sum_{i=0,1,\dots,n-1} (t_{i+1} - t_i) \left[\sup_{c \in [t_i, t_{i+1}]} f(c) - \inf_{c \in [t_i, t_{i+1}]} f(c) \right] \\ &\leq \sum_{i=0,1,\dots,n-1} (t_{i+1} - t_i) \frac{\varepsilon}{b - a} = \varepsilon. \end{aligned}$$

La fonction f est donc bien intégrable sur $[a, b]$. □

3.2.7 Extension. *On dit qu'une fonction f est continue par morceaux s'il existe une subdivision de $[a, b]$, $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, telle que f soit continue sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ de cette subdivision et admette des limites à droite et à gauche en tous les points t_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Tout ce qui précède reste valable si on considère des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.*

En effet, il suffit de découper l'intervalle $[a, b]$ en utilisant la subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ et de raisonner sur chaque morceau $[t_i, t_{i+1}]$.

Cependant, il existe des fonctions intégrables encore plus générales. Donnons un exemple de fonctions intégrables non nécessairement continues par morceaux :

3.2.8 Exemple. Si f est une fonction monotone sur $[a, b]$ à valeurs réelles, alors f est intégrable sur cet intervalle.

Supposons par exemple f croissante.

On peut supposer que $f(b) > f(a)$ sinon, f est constante donc continue et nous savons déjà qu'elle est intégrable.

Soit $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. On peut définir deux fonctions en escalier particulières, φ_1 et φ_2 par :

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= f(t_i) \text{ pour } t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ et } i = 0, 1, \dots, n-1 \\ \varphi_2(t) &= f(t_{i+1}) \text{ pour } t \in [t_i, t_{i+1}] \text{ et } i = 0, 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Ces fonctions vérifient, pour tout $t \in [a, b]$:

$$\varphi_1(t) \leq f(t) \leq \varphi_2(t),$$

$$\begin{aligned}\int_a^b (\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) dt &= \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) (f(t_{i+1}) - f(t_i)) \\ &\leq \sup_{i=0,1,\dots,n-1} (t_{i+1} - t_i) (f(b) - f(a)).\end{aligned}$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$ donné, si l'on choisit la subdivision tel que

$$\sigma = \sup_{i=0,1,\dots,n-1} (t_{i+1} - t_i) \leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)},$$

les fonctions en esclier φ_1 et $h = \varphi_2 - \varphi_1$ vérifient les conditions de la définition 3.2.1 et on en déduit que f est bien intégrable sur $[a, b]$.

En appliquant la proposition 3.2.4 3) et le théorème bien connu des valeurs intermédiaires pour les fonctions continues (voir [9]) , on obtient la première formule de la moyenne :

3.2.9 Corollaire. Première formule de la moyenne

1) Si f est intégrable et bornée sur $[a, b]$, à valeurs réelles, en posant :

$$m = \inf_{t \in [a,b]} f(t) \text{ et } M = \sup_{t \in [a,b]} f(t),$$

on a :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a).$$

2) Si f est continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t) dt = f(c)(b-a).$$

Remarque. Si f est à valeurs complexes, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions à valeurs réelles f_1 et f_2 telles que $f = f_1 + if_2$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f_1(t) dt + i \int_a^b f_2(t) dt.$$

3.2.10 Définition. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$. On appelle somme de Riemann associée à une subdivision $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de cet intervalle et à des points c_i choisis dans chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, pour $i = 0, 1, \dots, n-1$, le nombre :

$$R(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(t_{i+1} - t_i) = f(c_0)(t_1 - t_0) + f(c_1)(t_2 - t_1) + \dots + f(c_{n-1})(t_n - t_{n-1}).$$

D'après la définition 3.1.5, la somme de Riemann ci-dessus est égale à l'intégrale de la fonction en escalier sur $[a, b]$, égale à $f(c_i)$ sur $[t_i, t_{i+1}]$ pour $i = 0, 1, \dots, n-1$.

3.2.11 Théorème. Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $[a, b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que quelle que soit la somme de Riemann de f ,

$$R(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(t_{i+1} - t_i) = f(c_1)(t_2 - t_1) + f(c_2)(t_3 - t_2) + \dots + f(c_{n-1})(t_n - t_{n-1}).$$

associée à une subdivision dont le pas est inférieur à α , alors :

$$\left| R(f) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Puisque par hypothèse, f est intégrable, il existe deux fonctions en escalier φ et η , $\eta \geq 0$, telles que :

$$\forall t \in [a, b], |f(t) - \varphi(t)| \leq \eta(t) \text{ et } \int_a^b \eta(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Soient x_1, x_2, \dots, x_p l'ensemble des points de discontinuité des fonctions φ et η . Ces deux fonctions restent donc constantes sur tout intervalle ne contenant aucun de ces points.

La somme de Riemann $R(f)$ vérifie :

$$\int_a^b f(t) dt - R(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(t) - f(c_i)] dt.$$

Si l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ ne contient aucun point x_1, x_2, \dots, x_p et si on désigne par φ_i et η_i les valeurs constantes prises par les fonctions φ et η sur cet intervalle, on a, pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$|f(t) - f(c_i)| = |f(t) - \varphi_i + \varphi_i - f(c_i)| \leq 2\eta_i.$$

D'où

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(t) - f(c_i)] dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(t) - f(c_i)| dt \leq 2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \eta(t) dt.$$

Chaque point x_1, x_2, \dots, x_p appartient à au plus deux intervalles fermés $[t_i, t_{i+1}]$. Il existe donc au plus $2p$ intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ contenant des points de discontinuité des fonctions φ et η . Pour ces intervalles, on a :

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f(t) - f(c_i)] dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f(t) - f(c_i)| dt \leq 2Mh,$$

où $M = \sup\{|f(t)|, t \in [a, b]\}$ et $h = \sup|t_{i+1} - t_i|, i = 1, 2, \dots, n-1$.

On en déduit que :

$$\int_a^b f(t) dt - R(f) \leq 4pMh + 2 \int_a^b \eta(t) dt \leq 4pMh + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc si on choisit $\alpha = \frac{\varepsilon}{8pM}$, alors pour tout $h \leq \alpha$:

$$\int_a^b f(t) dt - R(f) \leq 4pMh + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \quad \square$$

3.2.12 Exemple. On considère la suite $R_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Cette suite tend vers $\ln 2$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

On pose $i = k - n - 1$ et on écrit :

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{i+1+n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{i+1}{n} + 1}.$$

La suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ apparaît donc comme la suite des sommes de Riemann de la fonction $f(t) = \frac{1}{1+t}$ sur $[0, 1]$ associée à la subdivision tel que $t_0 = 0 < t_1 = \frac{1}{n} < t_2 = \frac{2}{n} < \dots < t_n = 1$.

Comme cette fonction est continue, cette suite converge vers $\int_0^1 f(t) dt = \ln 2$.

Remarque. Si f est une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$, on a vu dans le paragraphe précédent que ses sommes de Riemann, définies dans la définition 3.2.10, représentent l'aire comprise entre l'axe des t et le graphe de la fonction en escalier valant $f(c_i)$ sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, comptée positivement si le graphe est au dessus de l'axe et négativement dans l'autre cas. La convergence de ces sommes vers l'intégrale de la fonction permet de définir l'aire comprise entre l'axe des t et le graphe de f , comptée positivement si le graphe est au dessus de l'axe et négativement dans l'autre cas, comme étant égale à l'intégrale de la fonction f sur $[a, b]$.

3.3 Primitives

3.3.1 Définition. On rappelle qu'une fonction f , définie sur un intervalle $[a, b]$ admet une primitive F si F est une fonction dérivable sur l'intervalle $]a, b[$ et si :

$$\forall t \in]a, b[, F'(t) = f(t).$$

3.3.2 Rappel. Supposons qu'une fonction f , définie sur un intervalle $[a, b]$ ait une primitive F , alors toutes les primitives de f sont les fonctions $F + \lambda$, où λ est un scalaire arbitraire.

3.3.3 Théorème. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $x_0 \in [a, b]$. Alors la fonction F_0 , définie par :

$$\forall x \in [a, b], F_0(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

est une primitive de f . En particulier, F_0 est dérivable sur $]a, b[$ avec $F_0'(x) = f(x)$.

Démonstration. En séparant partie imaginaire et partie réelle, on se ramène au cas où f est à valeurs réelles. Soient x et $x+h$ deux points de $[a, b]$. On peut écrire :

$$F_0(x+h) - F_0(x) = \int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt = hf(c),$$

où c est compris entre x et $x+h$, (corollaire 3.2.9).

On peut donc écrire, si $h \neq 0$:

$$\frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} = f(c).$$

Fixons x . Quand $h \rightarrow 0$, $c \rightarrow x$, donc par continuité, $f(c) \rightarrow f(x)$. On voit donc que F_0 est dérivable en x et que

$$F_0'(x) = f(x).$$

Ceci prouve le théorème 3.3.3. □

3.3.4 Corollaire. 1) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

2) Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ telle que

$$\int_a^b f(t) dt = 0.$$

Alors, $f = 0$.

Démonstration. Pour $x \in [a, b]$, soit $F_0(x) = \int_a^x f(t) dt$. D'après le théorème 3.3.3, F_0 est une primitive de f .

Le point 1) est une conséquence du fait que si F est une primitive de f , alors il existe un réel λ tel que $F = F_0 + \lambda$ et alors puisque $F_0(a) = 0$,

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t) dt.$$

Montrons le point 2) par l'absurde : supposons que, pour une fonction f continue et positive, on ait à la fois $\int_a^b f(t) dt = 0$ et un point $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$.

Puisque par hypothèse f est continue, il existe un intervalle $I \subset [a, b]$ de longueur non nulle $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$. Alors :

$$0 = \int_a^b f(t) dt \geq \int_I f(t) dt \geq \alpha \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

Nous obtenons bien une contradiction, ce qui veut dire qu'il n'existe pas de point x_0 dans l'intervalle $[a, b]$ où $f(x_0) > 0$. Puisque f est positive, f est alors bien nulle sur $[a, b]$. □

Des propriétés importantes des primitives sont les suivantes :

3.3.5 Proposition. 1) Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, intégrable et bornée sur $[a, b]$. Alors la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

est continue sur $[a, b]$.

2) Si de plus, f est positive sur $[a, b]$, F est croissante.

Démonstration. 1) On pose $A = \sup\{|f(t)| \mid t \in [a, b]\}$. Alors, en utilisant la proposition 3.2.4, on obtient :

$$|F(x) - F(y)| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq A|x - y|,$$

ce qui prouve la continuité de F .

2) Soit $a \leq x < y \leq b$. Si f est positive, on écrit :

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t) dt \geq 0,$$

et ceci prouve que F est croissante. □

Les deux résultats qui suivent, le théorème d'intégration par parties et le théorème de changement de variable, sont très utiles dans le calcul des intégrales :

3.3.6 Théorème. Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions continûment dérivables sur $[a, b]$. On a :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement du fait que la fonction uv est une primitive de la fonction $uv' + u'v$. □

3.3.7 Théorème. Changement de variable

Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux intervalles de \mathbb{R} et φ une fonction continûment dérivable de $[c, d]$ dans $[a, b]$ telle que $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_c^d f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds.$$

Démonstration. On vérifie que les fonctions

$$F(x) = \int_a^{x} f(t) dt \text{ et } G(x) = \int_c^x f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds,$$

ont les mêmes dérivées et qu'elles s'annulent toutes les deux en c . □

Remarque. Dans ces deux résultats, il faut bien vérifier que les fonctions ont une dérivée continue sur l'intervalle $[a, b]$.

3.4 Calcul des primitives

En utilisant les résultats ci dessus et les formules trigonométriques ou hyperboliques (voir Chapitre 5), on calcule aisément les primitives des fonctions usuelles. Voici quelques exemples où on note $\int f(t) dt$ une primitive de la fonction f sur un domaine où cette fonction est continue et où a, α, β sont des constantes réelles avec $a \neq 0$ et $\alpha + i\beta \neq 0$:

Fonctions puissance :

$$\int e^{(\alpha+i\beta)t} dt = \frac{e^{(\alpha+i\beta)t}}{(\alpha+i\beta)}, \quad \int \frac{dt}{t} = \ln|x|, \quad \int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1).$$

Fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned} \int \sin t dt &= -\cos x, & \int \cos t dt &= \sin x, & \int \tan t dt &= -\ln|\cos x| \\ \int \cot t dt &= \ln|\sin x|, & \int \frac{dt}{\sin t} &= \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right|, & \int \frac{dt}{\cos t} &= \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| \\ \int \frac{dt}{\cos^2 t} &= \tan x, & \int \frac{dt}{\sin^2 t} &= -\cot x, & \int \frac{dt}{\sin t \cos t} &= \ln|\tan|x|. \end{aligned}$$

Fonctions hyperboliques :

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh} t dt &= \operatorname{ch} x, & \int \operatorname{ch} t dt &= \operatorname{sh} x, & \int \tanh t dt &= \ln \operatorname{ch} x \\ \int \coth t dt &= \ln|\operatorname{sh} x|, & \int \frac{dt}{\operatorname{sh} t} &= \ln\left|\tanh \frac{x}{2}\right|, & \int \frac{dt}{\operatorname{ch} t} &= 2 \arctan e^x \\ \int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} &= \tanh x, & \int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} &= -\coth x, & \int \frac{dt}{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t} &= \ln|\tanh|x|. \end{aligned}$$

Fonctions inverses :

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t^2+a^2} &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, & \int \frac{dt}{t^2-a^2} &= \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \\ \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a^2}} &= \operatorname{argsh} \frac{x}{a}, & \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} &= \operatorname{argch} \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

3.4.1 Exemple. Calcul de primitive d'un polynôme en $\cos t$ et $\sin t$:

En remplaçant toute puissance paire de $\sin t$ par la puissance moitié de $1 - \cos^2 t$, on se ramène à étudier les primitives de fonctions de la forme $P(\cos t) + Q(\cos t) \sin t$, où P et Q sont des polynômes.

La partie $Q(\cos t) \sin t$ s'intègre facilement au moyen du changement de variable défini par $u = \cos t$:

$$\int Q(\cos t) \sin t dt = \int Q(u) du,$$

et on est ramené au calcul d'une primitive du polynôme Q .

Pour intégrer la partie $P(\cos t)$, il suffit de connaître des primitives des fonctions $\cos^n t$ pour $n \in \mathbb{N}$. On utilise la linéarisation des fonctions $\cos^n t$, que nous verrons au chapitre 5, voir 5.6.14 :

$$\begin{aligned} 2^n (\cos t)^n &= (e^{it} + e^{-it})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(n-k)t} e^{-ikt} = \sum_{k=0}^n C_n^k e^{-i(n-2k)t} \\ &= e^{int} + C_n^1 e^{i(n-2)t} + \dots + C_n^{n-1} e^{-i(n-2)t} + e^{-int} \\ &= 2[\cos nt + C_n^1 \cos(n-2)t + C_n^2 \cos(n-4)t + \dots]. \end{aligned}$$

On se ramène donc au calcul de primitives des fonctions $\sin nt$ et $\cos nt$ qui sont respectivement $-\frac{\cos nt}{n}$ et $\frac{\sin nt}{n}$.

On obtient ainsi par exemple :

$$\begin{aligned}\int \sin^2 t \, dt &= \int \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \\ \int \cos^2 t \, dt &= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \\ \int \cos^4 t \, dt &= \int \frac{\cos 4t + 4\cos 2t + 3}{8} \, dt = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} \\ \int \sin^3 t \, dt &= \int (1 - \cos^2 t) \sin t \, dt = \int (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = \cos x - \frac{\cos^3 x}{3}.\end{aligned}$$

3.5 Intégration d'un produit de fonctions

Les deux résultats suivants, appelés deuxième formule de la moyenne et inégalité de Cauchy-Schwarz sont consacrés à l'étude de l'intégrale d'un produit de deux fonctions.

3.5.1 Théorème. Deuxième formule de la moyenne

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, à valeurs réelles, la fonction f étant supposée positive décroissante. Il existe un point $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t) \, dt = f(a+0) \int_a^c g(t) \, dt,$$

où $f(a+0)$ désigne la limite de $f(t)$ quand t tend vers a par valeurs supérieures.

Démonstration. Notons d'abord que, par la proposition 3.2.2, si f et g sont intégrables, le produit fg l'est aussi.

Si m et M désignent la borne supérieure et la borne inférieure sur l'intervalle $[a, b]$ de la fonction $G(x) = \int_a^x g(t) \, dt$, comme cette fonction est continue d'après la proposition 3.3.5, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, (voir [9]), la propriété de l'énoncé est équivalente à

$$mf(a+0) \leq \int_a^b f(t)g(t) \, dt \leq Mf(a+0).$$

C'est cette dernière formule que nous allons démontrer.

Premier cas : Supposons f en escalier. Soit $\{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ une subdivision adaptée à f et f_i la valeur de f sur $]t_i, t_{i+1}[$, pour tout $i = 0, \dots, n-1$.

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t) \, dt &= \sum_{i=0}^{n-1} f_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t) \, dt = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \left(\int_a^{t_{i+1}} g(t) \, dt - \int_a^{t_i} g(t) \, dt \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} (f_i - f_{i+1}) \int_a^{t_{i+1}} g(t) \, dt + f_{n-1} \int_a^{t_n} g(t) \, dt.\end{aligned}$$

La fonction f étant positive et décroissante, on a $f_i - f_{i+1} \geq 0$ pour tout $i = 0, \dots, n-1$ et $f_{n-1} \geq 0$.

D'autre part, par définition, on a :

$$\forall i = 1, 2, \dots, n, \quad m \leq \int_a^{t_i} g(t) dt \leq M.$$

On en déduit les inégalités :

$$m \left(\sum_{i=0}^{n-2} (f_i - f_{i+1}) + f_{n-1} \right) \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq M \left(\sum_{i=0}^{n-2} (f_i - f_{i+1}) + f_{n-1} \right),$$

c'est-à-dire :

$$mf_0 \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq Mf_0,$$

ce qui est la propriété voulue pour une fonction en escalier f .

Deuxième cas : f intégrable sur $[a, b]$.

On définit \tilde{f} par :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= f(t) \text{ pour } t \in]a, b] \\ \tilde{f}(a) &= f(a+0). \end{aligned}$$

\tilde{f} est encore une fonction positive décroissante sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = \int_a^b \tilde{f}(t)g(t) dt.$$

Soit $\{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$ obtenue en découpant l'intervalle en n intervalles de même longueur.

On va approcher \tilde{f} par les fonctions en escalier φ'_n et φ''_n définies par :

$$\begin{aligned} \varphi'_n(t) &= \tilde{f}(t_i) \text{ pour } t \in]t_i, t_{i+1}[, \quad i = 0, \dots, n-1 \\ \varphi''_n(t) &= \tilde{f}(t_{i+1}) \text{ pour } t \in]t_i, t_{i+1}[, \quad i = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Comme \tilde{f} est décroissante sur $[a, b]$, on a :

$$\forall t \in]a, b[, \quad \varphi''_n(t) \leq \tilde{f}(t) \leq \varphi'_n(t).$$

Comme la fonction g est intégrable sur $[a, b]$, elle est bornée sur cet intervalle et soit $A = \sup\{|g(t)| \mid t \in [a, b]\}$. Alors, comme $t_{k+1} - t_k = \frac{b-a}{n}$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi'_n(t)g(t) dt - \int_a^b \tilde{f}(t)g(t) dt \right| &\leq A \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\varphi'_n(t) - \tilde{f}(t)) dt \\ &\leq A \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\varphi'_n(t) - \varphi''_n(t)) dt \\ &= A \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{f}(t_{k+1}) - \tilde{f}(t_k)) \\ &= A \frac{b-a}{n} (\tilde{f}(a) - \tilde{f}(b)). \end{aligned}$$

La suite $\left(\int_a^b \varphi'_n(t)g(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc vers $\int_a^b \tilde{f}(t)g(t) dt = \int_a^b f(t)g(t) dt$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Les fonctions en escalier φ'_n sont positives décroissantes sur $[a, b]$, on peut donc leur appliquer le premier cas :

$$mf(a+0) = m\tilde{f}(a) \leq \int_a^b \varphi'_n(t)g(t) dt \leq M\tilde{f}(a) = Mf(a+0).$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient bien :

$$mf(a+0) \leq \int_a^b f(t)g(t) dt \leq Mf(a+0). \quad \square$$

Montrons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

3.5.2 Théorème. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Alors :

$$\int_a^b |f(t)g(t)| dt \leq \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt \right]^{1/2} \left[\int_a^b |g(t)|^2 dt \right]^{1/2}.$$

De plus, si f et g sont continues, cette inégalité est une égalité si et seulement si $|f|$ et $|g|$ sont proportionnelles.

Démonstration. Notons d'abord que, par la proposition 3.2.2, si f et g sont intégrables, le produit fg et les carrés f^2 et g^2 le sont aussi.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On écrit :

$$\int_a^b (\lambda |f| + |g|)^2(t) dt = \lambda^2 \int_a^b |f(t)|^2 dt + 2\lambda \int_a^b |f(t)g(t)| dt + \int_a^b |g(t)|^2 dt \geq 0.$$

Ce trinôme du second degré en λ garde un signe constant sur \mathbb{R} donc son discriminant est négatif ou nul, soit :

$$\left[\int_a^b |f(t)g(t)| dt \right]^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt,$$

ce qui est la formule voulue.

Cette inégalité est une égalité si et seulement si le trinôme précédent a une racine double nécessairement réelle. C'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b (\lambda |f| + |g|)^2(t) dt = 0$.

Si f et g sont continues, $(\lambda |f| + |g|)^2$ est une fonction positive et continue, d'intégrale nulle, donc, d'après le corollaire 3.3.4, elle est nulle sur $[a, b]$, ce qui implique bien que $|f|$ et $|g|$ sont proportionnelles. \square

3.6 Méthodes d'approximation numérique des intégrales

On connaît des formules qui permettent de calculer l'intégrale de quelques fonctions. Mais, il y a relativement peu de fonctions dont on sait calculer l'intégrale. Il suffit même

de changer légèrement l'expression d'une fonction pour passer d'une fonction que l'on sait intégrer à une fonction qu'on ne sait pas intégrer. Par exemple, on sait que

$$\int_a^b \sin t \, dt = \cos a - \cos b,$$

mais on ne sait pas calculer

$$\int_a^b \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{ou} \quad \int_a^b \sin t^2 \, dt.$$

Or la fonction $\frac{\sin t}{t}$ prolongée par la valeur 1 en $t = 0$, est intégrable sur tout intervalle $[a, b]$ puisqu'elle est continue sur \mathbb{R} . Il en est de même pour la fonction $\sin t^2$. À défaut de pouvoir calculer ces intégrales, on doit savoir les approcher.

Mais, même s'il s'agit d'intégrales qu'on sait calculer, leur calcul peut être long et compliqué et il peut être avantageux de le remplacer par un calcul approché.

La première méthode d'approximation que nous allons considérer s'appelle la méthode des rectangles.

Méthode des rectangles

Soit f une fonction monotone de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Par exemple, on suppose que f est croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé arbitrairement, on pose $h = \frac{(b-a)}{n}$ et considère la subdivision de $[a, b]$:

$$a < a+h < a+2h < \dots < a+kh < \dots < a+nh = b.$$

On a évidemment, pour $k = 1, 2, \dots, n$:

$$hf(a + (k-1)h) \leq \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} f(t) \, dt \leq hf(a + kh).$$

D'où, en sommant :

$$h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh) \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq h \sum_{k=1}^n f(a + kh).$$

La méthode des rectangles consiste à approcher l'intégrale de f par des sommes d'aires de rectangles correspondant aux sommes finies qui encadrent la valeur de l'intégrale dans l'inégalité ci dessus.

On peut donner une estimation de l'erreur \mathcal{E} commise en remplaçant l'intégrale de f par l'une de ces sommes : on majore la différence entre l'intégrale de f et l'une de ces sommes par la différence des sommes majorant et minorant cette intégrale, soit :

$$\mathcal{E} \leq h \sum_{k=1}^n f(a + kh) - h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh) = h(f(b) - f(a)) = \frac{(b-a)}{n} (f(b) - f(a)).$$

L'erreur est donc de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{n}$. Il suffit donc en théorie de découper l'intervalle $[a, b]$ en suffisamment de petits sous-intervalles pour obtenir une erreur aussi petite que l'on veut.

3.6.1 Exemple. *Calcul approché de*

$$\int_0^1 e^{t^2} dt,$$

par la méthode des rectangles.

Pour obtenir la valeur de cette intégrale à $1/100$ près, il faudrait prendre $n \geq 100(e-1)$, soit $n \geq 172$, ce qui exige de calculer la valeur de la fonction e^{t^2} en 172 points.

Cet exemple montre que cette méthode n'est pas très efficace.

La méthode que nous allons étudier maintenant est plus compliquée mais donne de meilleurs résultats : cette méthode s'appelle la méthode des trapèzes.

Méthode des trapèzes

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{R} et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme pour la méthode des rectangles, on prend la subdivision de $[a, b]$:

$$a < a+h < a+2h < \dots < a+kh < \dots < a+nh = b.$$

Pour essayer d'améliorer le résultat précédent, l'idée est de remplacer la fonction f sur chaque intervalle $[a+(k-1)h, a+kh]$ non plus par une constante mais par une fonction affine prenant les mêmes valeurs que f aux points $a+(k-1)h$ et $a+kh$, c'est-à-dire par la fonction g_k définie par :

$$g_k(t) = \frac{1}{h} (f(a+kh)[t - (a+(k-1)h)] - f(a+(k-1)h)[t - (a+kh)]).$$

On remarque que :

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+kh} g_k(t) dt = \frac{h}{2} [f(a+(k-1)h) + f(a+kh)].$$

La méthode des trapèzes consiste donc à approcher $\int_a^b f(t) dt$ par la somme de ces expressions pour $k = 1, 2, \dots, n$, c'est-à-dire par :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{h}{2} \sum_{k=1}^n (f(a+(k-1)h) + f(a+kh)) \\ &= \frac{(b-a)}{2n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Comme dans le cas de la méthode des rectangles, il s'agit d'évaluer l'erreur \mathcal{E} , commise en remplaçant l'intégrale de f par cette somme.

On a besoin d'un lemme :

3.6.2 Lemme. *Soit f une fonction de $[u, v]$ dans \mathbb{R} , deux fois dérivable sur $[u, v]$ et telle qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall t \in [u, v], \alpha \leq f''(t) \leq \beta$. Alors :*

$$\frac{\alpha(v-u)^3}{12} \leq \frac{v-u}{2} (f(u) + f(v)) - \int_u^v f(t) dt \leq \frac{\beta(v-u)^3}{12}.$$

Démonstration. La fonction h définie par $h(t) = f(t) + \frac{\alpha}{2}(t-u)(v-t)$ prend les mêmes valeurs que f aux points u et v et vérifie pour tout $t \in [u, v]$:

$$h''(t) = f''(t) - \alpha \geq 0.$$

C'est donc une fonction convexe, (voir [9]).

Si g est la fonction affine prenant les mêmes valeurs que f (donc que h) en u et v , on aura donc : $\forall t \in [u, v]$, $h(t) \leq g(t)$. D'où :

$$\int_u^v h(t) dt = \int_u^v f(t) dt + \frac{\alpha}{2} \int_u^v (t-u)(v-t) dt \leq \int_u^v g(t) dt.$$

Or,

$$\int_u^v (t-u)(v-t) dt = \left[-\frac{t^3}{3} + (u+v)\frac{t^2}{2} - uvt \right]_u^v = \frac{(v-u)^3}{6}.$$

D'où, en utilisant le calcul précédent :

$$\int_u^v g(t) dt = \frac{v-u}{2} [f(u) + f(v)] \geq \int_u^v f(t) dt + \frac{\alpha}{12}(v-u)^3.$$

Ceci donne bien la première inégalité du lemme. La seconde s'obtient de la même façon en considérant la fonction concave $t \rightarrow f(t) + \frac{\beta}{2}(t-u)(v-t)$, (voir [9]). \square

En appliquant ce lemme à chaque sous-intervalle $[a + (k-1)h, a + kh]$ et en sommant sur $k = 1, 2, \dots, n$, on obtient une estimation de l'erreur \mathcal{E} dans la méthode des trapèzes :

3.6.3 Proposition. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $[a, b]$ et telle que pour tout $t \in [a, b]$, $\alpha \leq f''(t) \leq \beta$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{\alpha(b-a)^3}{12n^2} \leq S_n - \int_a^b f(t) dt \leq \frac{\beta(b-a)^3}{12n^2},$$

avec

$$S_n = \frac{(b-a)}{2n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right].$$

On peut remarquer que l'erreur dans la méthode des trapèzes tend vers 0 comme $\frac{1}{n^2}$ lorsqu'on découpe l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de plus en plus petits, ce qui est meilleur que pour la méthode des rectangles.

3.6.4 Exemple. Calcul approché de

$$\int_0^1 e^{t^2} dt,$$

par la méthode des trapèzes.

On a $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$, d'où pour $x \in [0, 1]$: $2 \leq f''(x) \leq 6e < 17$.

Il suffit donc de prendre $n \geq 12$ pour obtenir une valeur approchée de cette intégrale à 1/100 près.

La méthode des trapèzes est donc plus efficace que la méthode des rectangles.

3.7 Définition des intégrales généralisées

Dans ce paragraphe, on considérera un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ de \mathbb{R} et une fonction f , définie sur $[a, b[$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , tels que :

ou bien $b = +\infty$

ou bien $b < +\infty$ et f n'est pas définie en b .

On obtient des résultats analogues lorsque f est définie sur un intervalle semi-ouvert $]a, b]$ tel que ou bien $a = -\infty$ ou bien $a > -\infty$ et f n'est pas définie en a . Il suffit pour les démontrer de faire un changement de variable $t \rightarrow -t$.

Lorsque f est définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$, on fixera un point $c \in]a, b[$ et on considérera séparément l'existence des intégrales généralisées de f sur les deux intervalles semi-ouverts $]a, c]$ et $[c, b[$.

Remarque. On notera que les résultats de ce chapitre présentent de nombreuses analogies avec ceux du chapitre 2 sur les séries numériques. Cela provient du fait que ce sont deux types particuliers de sommation, l'une discrète pour les séries et l'autre continue pour les intégrales généralisées. En revanche, certains résultats peuvent être spécifiques au type de sommation envisagé (par exemple la proposition 2.3.6 dans le cas des séries qui n'a pas d'analogue dans le cas des intégrales généralisées, comme on le verra plus loin).

3.7.1 Définition. On dira qu'une fonction f est localement intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ si elle est intégrable, au sens de Riemann, sur tout sous-intervalle fermé $[a, c] \subset [a, b[$

3.7.2 Définition. 1) Soit f une fonction définie sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , localement intégrable sur $[a, b[$. On dit que f est intégrable sur $[a, b[$ si la limite lorsque $x \rightarrow b$ de l'intégrale $\int_a^x f(t) dt$ existe.

2) Si f est intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$, on appellera intégrale généralisée de f sur $[a, b[$ et on notera $\int_a^b f(t) dt$ la limite ci-dessus, c'est-à-dire :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$$

3.7.3 Notations. Lorsqu'une fonction localement intégrable f est intégrable sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ au sens des intégrales généralisées définies ci-dessus, on dit que l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(t) dt,$$

converge.

3.7.4 Exemple. 1) Soit $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ sur $[0, +\infty[$. Alors f est intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En effet :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}.$$

2) Soit $f(t) = \frac{1}{1+t}$ sur $[0, +\infty[$. Alors f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$. En effet :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty.$$

3) Soit $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0, 1]$. Alors f est intégrable sur $]0, 1]$. En effet :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} 2(1 - \sqrt{x}) = 2.$$

4) Soit $f(t) = \frac{1}{t}$ sur $]0, 1]$. Alors f n'est pas intégrable sur $]0, 1]$. En effet :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x) = +\infty.$$

Remarque. Soit f une fonction définie sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} , localement intégrable sur $[a, b[$. Pour que f soit intégrable sur $[a, b[$ il suffit qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_{\alpha}^x f(t) dt \text{ existe.}$$

Il est clair que, puisque pour tout $x \in [a, b[$,

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^{\alpha} f(t) dt + \int_{\alpha}^x f(t) dt,$$

on a la formule :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^{\alpha} f(t) dt + \int_{\alpha}^b f(t) dt,$$

où la première intégrale est l'intégrale de Riemann de f sur $[a, \alpha]$ et la deuxième intégrale est l'intégrale généralisée de f sur l'intervalle semi-ouvert $[\alpha, b[$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate des propriétés de l'intégrale de Riemann, figurant dans la proposition 3.2.4 :

3.7.5 Proposition. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$, intégrables sur $[a, b[$.

1) Pour tous scalaires λ et μ , la fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, b[$ et de plus :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

2) Si $|f|$ est intégrable sur $[a, b[$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

3) Si $\forall t \in [a, b[$, $f(t) \leq g(t)$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

4) Si $c \in]a, b[$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Comme pour les suites ou les séries numériques, on a un théorème de Cauchy pour les intégrales généralisées qui donne un moyen de décider si une fonction est intégrable sur un intervalle $[a, b[$ sans connaître la valeur de son intégrale généralisée sur cet intervalle.

3.7.6 Notations. On considère un intervalle semi-ouvert $[a, b[$. On convient de noter $V(b)$ un voisinage du point b dans $[a, b[$, c'est-à-dire un intervalle du type $[A, +\infty[$ si $b = +\infty$ et un intervalle du type $[b - \eta, b[$, $0 < \eta \leq b - a$, si b est fini.

Rappelons d'abord un lemme de Cauchy pour les fonctions :

3.7.7 Lemme. Critère de Cauchy

Soit F une fonction définie sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$, à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Alors la limite quand x tend vers b de $F(x)$ existe si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V(b)$ du point b tel que :

$$x, x' \in V(b) \Rightarrow |F(x) - F(x')| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Supposons que $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = l$ et soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe un voisinage $V(b)$ de b tel que

$$x \in V(b) \Rightarrow |F(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que :

$$x, x' \in V(b) \Rightarrow |F(x) - F(x')| \leq |F(x) - l| + |l - F(x')| \leq \varepsilon.$$

Donc F vérifie bien le critère de Cauchy.

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$ fixé et supposons que F vérifie le critère de Cauchy c'est-à-dire qu'il existe $V(b)$ tel que

$$x, x' \in V(b) \Rightarrow |F(x) - F(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers b (dans $\overline{\mathbb{R}}$ si $b = +\infty$). Alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_0 \Rightarrow x_n \in V(b).$$

Donc

$$p, q \geq N_0 \Rightarrow |F(x_p) - F(x_q)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et la suite $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Elle converge donc vers une limite l et de plus,

$$n \geq N_0 \Rightarrow |F(x_n) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $x \in V(b)$, on choisit $n \geq N_0$ et on peut écrire :

$$|F(x) - l| \leq |F(x) - F(x_n)| + |F(x_n) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La fonction F admet donc l comme limite quand $x \rightarrow b$. □

En appliquant cette propriété à la fonction $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, on obtient le résultat suivant :

3.7.8 Corollaire. Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$. Alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $V(b)$ du point b tel que :

$$x, x' \in V(b) \Rightarrow \left| \int_x^{x'} f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Contrairement au cas des séries numériques dont le terme général tend vers 0 lorsqu'elles convergent, voir la proposition 2.3.6, l'intégrabilité d'une fonction sur $[a, +\infty[$ n'implique pas la convergence vers 0 de cette fonction lorsque $t \rightarrow +\infty$:

3.7.9 Exemple. La fonction $\cos t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et ne tend pas vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Soit $x \in [1, +\infty[$, alors, par un changement de variables et une intégration par parties, on peut écrire :

$$\int_1^x \cos t^2 dt = \int_1^{x^2} \frac{\cos s}{2\sqrt{s}} ds = \left[\frac{\sin s}{2\sqrt{s}} \right]_1^{x^2} + \frac{1}{4} \int_1^{x^2} \frac{\sin s}{s\sqrt{s}} ds.$$

Le terme tout intégré tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$ et on verra plus loin (voir exemple 3.9.3 2)) que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin s}{s\sqrt{s}} ds$ existe. On en déduit bien que la fonction $\cos t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ alors qu'elle ne tend pas vers 0 à l'infini.

3.8 Intégrales généralisées des fonctions positives.

Comme dans l'étude des séries numériques à termes positifs, on a dans le cas des fonctions positives, des théorèmes de comparaison :

3.8.1 Théorème. Soient f et g des fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$, localement intégrables sur $[a, b[$ et telles que

$$\forall t \in [a, b[, 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Alors, si g est intégrable sur $[a, b[$, f l'est aussi et si f n'est pas intégrable sur $[a, b[$, g ne l'est pas non plus.

Démonstration. Il suffit de montrer la première propriété, la seconde étant la contraposée de la première.

Posons :

$$\forall x \in [a, b[, F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ et } G(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

Alors, d'après les propriétés de l'intégrale de Riemann, les fonctions F et G sont croissantes comme intégrales de fonctions positives et de plus,

$$\forall x \in [a, b[, F(x) \leq G(x).$$

Si g est intégrable sur $[a, b[$, la fonction $G(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow b$, donc elle est bornée sur $[a, b[$. Par suite, la fonction $F(x)$ est également bornée sur $[a, b[$ et comme elle est croissante, elle admet une limite quand $x \rightarrow b$ et ceci équivaut à dire que f est intégrable sur $[a, b[$. \square

3.8.2 Théorème. Soient f et g des fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$, localement intégrables sur $[a, b[$ et telles que :

$$\forall t \in [a, b[, 0 \leq f(t) \text{ et } 0 \leq g(t).$$

Alors, si f est équivalente à g au voisinage de b , f est intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ si et seulement si g est intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Si f et g sont équivalentes au voisinage de b , il existe $\alpha \in [a, b[$ tel que :

$$\forall t \in [\alpha, b[, 0 \leq (1 - \varepsilon)g(t) \leq f(t) \leq (1 + \varepsilon)g(t).$$

On peut donc appliquer le théorème 3.8.1 : si g est intégrable sur $[\alpha, b[$, f l'est aussi par l'inégalité de droite et si f est intégrable sur $[\alpha, b[$, g l'est aussi par l'inégalité de gauche. Puisque ces deux fonctions sont intégrables sur l'intervalle $[a, \alpha]$, on a donc bien l'équivalence : f est intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ si et seulement si g est intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$. \square

Pour appliquer ces théorèmes de comparaison, nous allons étudier l'intégrabilité de fonctions classiques qui constitueront une échelle de comparaison.

3.8.3 Proposition. Les fonctions de Riemann

1) Soit $\alpha > 0$ et $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, définie sur l'intervalle semi-ouvert $[1, +\infty[$. Alors f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

2) Soit $\alpha > 0$ et $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, définie sur l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$. Alors f est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. 1) On calcule l'intégrale de f sur $[1, x]$:

$$\int_1^x f(t) dt = \frac{1}{1 - \alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) \text{ si } \alpha \neq 1,$$

$$\int_1^x f(t) dt = \ln x \text{ si } \alpha = 1.$$

Ces fonctions n'ont de limite quand $x \rightarrow +\infty$ que si $\alpha > 1$.

2) De la même façon, on calcule l'intégrale de f sur $]x, 1]$, avec $0 < x < 1$:

$$\int_x^1 f(t) dt = \frac{1}{1 - \alpha} \left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right) \text{ si } \alpha \neq 1,$$

$$\int_x^1 f(t) dt = -\ln x \text{ si } \alpha = 1.$$

Ces fonctions n'ont de limite quand $x \rightarrow 0$ que si $\alpha < 1$. \square

Remarque. Par un changement de variable $u = t - a$, ces arguments s'appliquent aussi aux fonctions de la forme : $f(t) = \frac{1}{(t-a)^\alpha}$, sur les intervalles semi-ouverts $]a, b]$ ou $[b, +\infty[$.

3.8.4 Exemple. La fonction $f(t) = \frac{\ln(\cos \frac{1}{t})}{\ln t}$ est intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[2, +\infty[$.

Cette fonction est négative sur $[2, +\infty[$. On va donc raisonner avec la fonction $-f$.

La fonction $\cos \frac{1}{t}$ est équivalente à $1 - \frac{1}{2t^2}$ en $+\infty$, donc la fonction $-\ln(\cos \frac{1}{t})$ est équivalente à $\frac{1}{2t^2}$ en $+\infty$. La fonction $-f(t)$ est donc équivalente à $\frac{1}{2t^2 \ln t}$ en $+\infty$.

Or $0 \leq \frac{1}{2t^2 \ln t} \leq \frac{1}{t^2}$ sur $[2, +\infty[$ et cette dernière fonction est intégrable en $+\infty$.

En appliquant successivement les théorèmes 3.8.1 et 3.8.2, on obtient que $-f$ et par suite f également, est intégrable sur $[2, +\infty[$.

On peut aussi comparer dans certains cas des intégrales généralisées et des séries numériques :

3.8.5 Théorème. Soit f une fonction définie sur l'intervalle semi-ouvert $[a, +\infty[$, localement intégrable, positive et décroissante. Pour que f soit intégrable sur $[a, +\infty[$ il faut et il suffit que la série numérique à termes positifs, de terme général $u_n = f(n)$ soit convergente.

Démonstration. Si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est positive et décroissante, on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$$

On a alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} = f(n+1) \leq v_n \leq u_n = f(n).$$

Les séries de termes généraux u_n et v_n ont donc même nature par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, voir 2.4.2.

Or, si $N_0 \in \mathbb{N}$ est tel que $a \leq N_0$, on peut écrire,

$$N_0 \leq N \leq x \leq N+1 \Rightarrow \sum_{n=N_0}^N v_n \leq \int_{N_0}^x f(t) dt \leq \sum_{n=N_0}^{N+1} v_n.$$

On en déduit que la limite de $\int_{N_0}^x f(t) dt$ existe quand $x \rightarrow +\infty$ si et seulement si la série de terme général v_n converge. Par suite, la fonction f est bien intégrable sur $[N_0, +\infty[$ et donc aussi sur $[a, +\infty[$ si et seulement si la série de terme général u_n converge. \square

3.9 Intégrales généralisées des fonctions ne gardant pas un signe constant.

On va maintenant étudier une notion qui, dans certains cas, permet de ramener l'étude de l'intégrale d'une fonction de signe quelconque à celle d'une fonction positive :

3.9.1 Définition. Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$. On dit que f est absolument intégrable sur $[a, b[$ si $|f|$ est intégrable sur $[a, b[$.

En d'autres termes, ceci veut dire que la limite quand x tend vers b de $\int_a^x |f(t)| dt$ existe.

3.9.2 Proposition. Soit f une fonction localement intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$. Si f est absolument intégrable sur $[a, b[$ alors f est intégrable sur $[a, b[$ et

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Démonstration. On utilise le critère de Cauchy pour les intégrales, corollaire 3.7.8 : soit $\varepsilon > 0$ donné ; si $|f|$ est intégrable sur $[a, b[$, il existe un voisinage $V(b)$ du point b dans $[a, b[$ tel que :

$$x, x' \in V(b) \Rightarrow \int_x^{x'} |f(t)| dt \leq \varepsilon.$$

Mais on a :

$$\left| \int_x^{x'} f(t) dt \right| \leq \int_x^{x'} |f(t)| dt$$

Donc

$$x, x' \in V(b) \Rightarrow \left| \int_x^{x'} f(t) dt \right| \leq \varepsilon,$$

et de nouveau par le corollaire 3.7.8, la fonction f est intégrable sur $[a, b[$. De plus comme pour tout $x \in [a, b[$, on a $\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt$, en passant à la limite quand x tend vers b , on obtient bien :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt. \quad \square$$

3.9.3 Exemple. 1) La fonction $f(t) = \frac{\sin t}{1+t^2}$ est absolument intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[1, +\infty[$.

2) La fonction $g(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$ est intégrable et non absolument intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[1, +\infty[$.

1) Pour la fonction f , on écrit :

$$|f(t)| \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

L'intégrale de $\frac{1}{t^2}$ existe sur $[1, +\infty[$ par la proposition 3.8.3 et le théorème 3.8.1. Donc f est bien absolument intégrable sur $[1, +\infty[$.

2) Pour la fonction g , on fixe $x \in [1, +\infty[$ et on intègre par parties :

$$\int_1^x g(t) dt = \left[\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \right]_1^x + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\sin t}{t\sqrt{t}} dt.$$

La fonction $\left[\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \right]_1^x = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \sin 1$ admet pour limite $-\sin 1$ en $+\infty$ et l'intégrale

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t\sqrt{t}} dt$$

est absolument convergente en $+\infty$ d'après l'argument donné pour f . On en déduit bien que la fonction g est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Pour voir que g n'est pas absolument intégrable sur cet intervalle, on écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |g(t)| dt \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}} \int_0^\pi |\cos t| dt.$$

En sommant sur n , comme la série $\frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}$ est divergente, on voit que g n'est pas absolument intégrable sur $[\pi, +\infty[$ et donc pas non plus sur $[1, +\infty[$.

Remarque. L'argument donné pour montrer l'intégrabilité de g sur $[1, +\infty[$ est souvent très utile. Cependant on doit remarquer que le résultat d'intégration par parties n'est vrai que pour les intégrales de Riemann et qu'il n'y a pas d'analogie pour les intégrales généralisées.

La proposition suivante est très utilisée dans la pratique :

3.9.4 Proposition. Soit f une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert $[a, +\infty[$, avec $a > 0$, telle qu'il existe $\alpha > 1$ vérifiant : $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha |f(t)| = 0$. Alors f est absolument intégrable sur $[a, +\infty[$.

Démonstration. Puisque la fonction f est continue, elle est localement intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, +\infty[$.

D'autre part, comme $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha f(t) = 0$, il existe $A > a$ tel que pour $t \geq A$, $|f(t)| \leq \frac{1}{t^\alpha}$.

On peut donc appliquer le théorème de comparaison, 3.8.1 sur l'intervalle $[A, +\infty[$: la fonction de Riemann $\frac{1}{t^\alpha}$ étant intégrable en $+\infty$, f est bien absolument intégrable sur cet intervalle. □

Comme son analogue relatif aux séries numériques, le théorème suivant s'appelle le théorème d'Abel :

3.9.5 Théorème. Soit f une fonction définie sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$, continue, positive, décroissante et tendant vers 0 quand x tend vers b .

Soit g une fonction localement intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ telle qu'il existe $M > 0$, vérifiant :

$$\forall x \in [a, b[, \left| \int_a^x g(t) dt \right| \leq M.$$

Alors fg est intégrable sur $[a, b[$.

Démonstration. C'est une conséquence de la deuxième formule de la moyenne, (théorème 3.5.1). Comme cette formule ne s'applique qu'aux fonctions à valeurs réelles, on décompose g en $g = g_1 + ig_2$ où g_1 et g_2 sont à valeurs réelles. Il est clair que ces deux fonctions vérifient aussi les hypothèses du théorème 3.9.5. De plus g vérifie la conclusion du théorème 3.9.5 si et seulement si g_1 et g_2 la vérifient. On peut donc supposer que g est à valeurs réelles.

Sous les hypothèses du théorème 3.9.5, par la deuxième formule de la moyenne, quels que soient $u, v \in [a, b[$, il existe $y \in [u, v]$ tel que

$$\int_u^v f(t)g(t) dt = f(u) \int_u^y g(t) dt.$$

On écrit $\int_u^y g(t) dt = \int_a^y g(t) dt - \int_a^u g(t) dt$ et on en déduit :

$$\left| \int_u^v f(t)g(t) dt \right| \leq 2Mf(u).$$

Comme $f(u) \rightarrow 0$ quand $u \rightarrow b$, par le critère de Cauchy (corollaire 3.7.8), on obtient bien que $f g$ est intégrable sur $[a, b[$. \square

Remarque. Ce théorème s'applique en particulier lorsque la fonction g est l'une des fonctions $e^{i\lambda t}$, $\sin \lambda t$, $\cos \lambda t$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ fixé et $b = +\infty$.

3.10 Exercices sur le chapitre 3

3.1 Exercice. Soit f une fonction continue, strictement croissante sur l'intervalle $[0, a]$, telle que $f(0) = 0$. On pose $g = f^{-1}$.

1) Calculer à l'aide de sommes de Riemann bien choisies :

$$\int_0^a f(t) dt + \int_0^{f(a)} g(t) dt.$$

2) En déduire que, pour tout $\alpha \in [0, a]$ et $\beta \in [0, f(a)]$:

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha f(t) dt + \int_0^\beta g(t) dt.$$

3.2 Exercice. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, montrez que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\int_a^b e^{-nt^2} dt \right]^{\frac{1}{n}} = e^{-a^2}.$$

3.3 Exercice. Calculer une primitive F de la fonction $f(t) = \frac{t}{\cos^2 t}$, définie sur l'intervalle ouvert $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3.4 Exercice. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. Déterminer l'ensemble des couples (α, β) pour lesquels l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha \ln t}{1+t^\beta} dt$$

est convergente.

3.5 Exercice. On étudie, selon la valeur de a l'existence de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^a \sin^2 t}.$$

On distinguera les 4 cas suivants : $a \leq 0$, $0 < a \leq 1$, $1 < a \leq 2$, $2 < a$.

Pour les 2 derniers cas, on découpera l'intervalle $[0, +\infty[$ en sous-intervalles de la forme $[n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}]$ et sur chacun de ces intervalles, on fera le changement de variable $t = n\pi + s$.

3.6 Exercice. Soit f une fonction intégrable sur tout intervalle borné de \mathbb{R} telle que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = l \text{ et } \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = l'.$$

Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t)) dt.$$

(On pourra raisonner séparément sur $[0, +\infty[$ et sur $] -\infty, 0]$.)

3.7 Exercice. Construire une fonction positive et continue sur $[0, +\infty[$, dont l'intégrale généralisée existe sur cet intervalle mais qui n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$.

3.11 Corrigé des exercices sur le Chapitre 3

Corrigé de l'exercice 3.1

1) Soit $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = a$ une subdivision quelconque du segment $[0, a]$ et pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$ soit $c_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Puisque f est intégrable sur $[0, a]$, on a :

$$\int_0^a f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(c_i).$$

De plus $(f(t_i))_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision du segment $[0, f(a)]$. Donc si $d_i \in [f(t_i), f(t_{i+1})]$, on a :

$$\int_0^{f(a)} g(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}) - f(t_i)) g(d_i).$$

On choisit pour chaque i : $c_i = t_{i+1}$ et $d_i = f(t_i)$. On a alors :

$$\int_0^a f(t) dt + \int_0^{f(a)} g(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(t_{i+1}) + (f(t_{i+1}) - f(t_i)) t_i = af(a).$$

2) a) Supposons $f(\alpha) \leq \beta \leq f(a)$.

Le raisonnement précédent implique :

$$\int_0^\alpha f(t) dt + \int_0^{f(\alpha)} g(t) dt = \alpha f(\alpha).$$

D'autre part, g étant croissante sur $[f(\alpha), \beta]$,

$$\int_{f(\alpha)}^\beta g(t) dt \geq g(f(\alpha)) \int_{f(\alpha)}^\beta dt = \alpha(\beta - f(\alpha)).$$

D'où

$$\int_0^\alpha f(t) dt + \int_0^\beta g(t) dt \geq \alpha f(\alpha) + \alpha(\beta - f(\alpha)) = \alpha\beta.$$

b) Supposons $0 \leq \beta < f(\alpha)$, on a alors $\alpha > f^{-1}(\beta)$. On démontre le résultat en échangeant les rôles de f et g .

Corrigé de l'exercice 3.2

Soit I_n l'intégrale définie dans l'énoncé.

On remarque d'abord que $\forall t \in [a, b], e^{-nt^2} \leq e^{-na^2}$. D'où

$$I_n = \left[\int_a^b e^{-nt^2} dt \right]^{\frac{1}{n}} \leq \left[e^{-na^2} \right]^{\frac{1}{n}} (b-a)^{\frac{1}{n}} = e^{-a^2} (b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

Or $(b-a)^{\frac{1}{n}}$ tend vers 1 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \leq e^{-a^2}$.

Pour démontrer l'autre inégalité, on utilise la continuité de la fonction e^{-t^2} en a : à $\varepsilon > 0$ donné, on associe $\alpha > 0$ tel que $a + \alpha \leq b$ et pour tout $t \in [a, a + \alpha], e^{-t^2} \geq e^{-a^2} (1 - \varepsilon)$. Alors :

$$\int_a^b e^{-nt^2} dt \geq \int_a^{a+\alpha} e^{-nt^2} dt \geq (1 - \varepsilon)^n \int_a^{a+\alpha} e^{-na^2} dt = \alpha (1 - \varepsilon)^n e^{-na^2},$$

d'où l'inégalité :

$$I_n \geq \alpha^{\frac{1}{n}} (1 - \varepsilon) e^{-a^2}.$$

Comme $\alpha^{\frac{1}{n}}$ tend vers 1 lorsque $n \rightarrow +\infty$, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \geq (1 - \varepsilon) e^{-a^2}.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \geq e^{-a^2}.$$

Corrigé de l'exercice 3.3

On peut prendre $F(x) = \int_0^x \frac{t}{\cos^2 t} dt$ que l'on calcule en intégrant par partie en posant :

$$du = \frac{dt}{\cos^2 t}, \quad u = \tan t,$$

$$v = t, \quad dv = dt.$$

D'où

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{\cos^2 t} dt = [t \tan t]_0^x - \int_0^x \tan t dt = x \tan x + \ln(|\cos x|).$$

Corrigé de l'exercice 3.4

On distingue les 2 bornes d'intégration :

En $+\infty$, la condition sur α et β est $\beta - \alpha > 1$.

En 0, la condition sur α et β est $\alpha > -1$.

L'ensemble cherché est donc : $\{(\alpha, \beta) / \alpha > -1 \text{ et } \beta > 1 + \alpha\}$.

Corrigé de l'exercice 3.5

On vérifie d'abord que toutes les fonctions qui interviennent dans cet exercice sont continues et positives, donc on peut appliquer les théorèmes de comparaison du cours.

1) Supposons $a \leq 0$. Alors, t^a tend vers 0 ou est égal à 1 (si $a = 0$) lorsque $t \rightarrow +\infty$ donc dans ce cas la fonction $\frac{1}{1+t^a \sin^2 t}$ reste minorée par $\frac{1}{2}$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et elle n'est donc pas intégrable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2) Supposons $0 < a \leq 1$. Alors dans ce cas, on peut écrire, pour $t \in [0, +\infty[$:

$$\frac{1}{1+t^a} \leq \frac{1}{1+t^a \sin^2 t} \leq 1.$$

Or la fonction $\frac{1}{1+t^a}$ est équivalente au voisinage de $+\infty$ à $\frac{1}{t^a}$, qui n'est pas intégrable en $+\infty$. Donc la fonction $\frac{1}{1+t^a \sin^2 t}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

3) Supposons $1 < a$ et posons, pour $n > 1$:

$$u_n = \int_{n\pi - \frac{\pi}{2}}^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+t^a \sin^2 t} \text{ et } u_0 = \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+t^a \sin^2 t}$$

En effectuant le changement de variable $t = n\pi + s$, on obtient :

$$u_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{1+(n\pi+s)^a \sin^2 s}.$$

On va, comme dans les 2 premiers cas, encadrer u_n entre deux intégrales plus simples obtenues en remplaçant $(n\pi+s)^a$ par $(n\pi - \frac{\pi}{2})^a$ et $(n\pi + \frac{\pi}{2})^a$, soit :

$$w_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{1+(n\pi + \frac{\pi}{2})^a \sin^2 s} \leq u_n \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{1+(n\pi - \frac{\pi}{2})^a \sin^2 s} = v_n.$$

On peut calculer l'intégrale de Riemann $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{1+C^a \sin^2 s}$ en effectuant le changement de variable $u = \tan s$:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2(1+C^a)+1} = \frac{\pi}{(1+C^a)^{\frac{1}{2}}}.$$

On en déduit les équivalences suivantes quand n tend vers $+\infty$:

$$v_n = \frac{\pi}{(1+(n\pi - \frac{\pi}{2})^a)^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{\pi}{(n\pi)^{\frac{a}{2}}},$$

$$w_n = \frac{\pi}{(1+(n\pi + \frac{\pi}{2})^a)^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{\pi}{(n\pi)^{\frac{a}{2}}}.$$

La série à termes positifs u_n est encadrée par deux séries à termes positifs v_n et w_n , qui sont convergentes si et seulement si $a > 2$. La série de terme général u_n est donc convergente si $a > 2$ et divergente si $1 < a \leq 2$.

On pose, pour $X > 0$: $F(X) = \int_0^X \frac{dt}{1+t^a \sin^2 t}$.

Il est facile de voir que $F(n\pi + \frac{\pi}{2}) = \sum_{k=0}^n u_k$.

- a) Pour $1 < a \leq 2$, $F(n\pi + \frac{\pi}{2})$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et donc $F(X)$ ne peut pas avoir de limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ et l'intégrale généralisée diverge.
- b) Pour $a > 2$, pour tout $X > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $n\pi - \frac{\pi}{2} \leq X \leq n\pi + \frac{\pi}{2}$. On peut donc écrire :

$$F(x) = F(n\pi - \frac{\pi}{2}) + \int_{n\pi - \frac{\pi}{2}}^X \frac{dt}{1 + t^a \sin^2 t}.$$

Lorsque $X \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow +\infty$ et $F(n\pi - \frac{\pi}{2})$ admet une limite finie. D'autre part, l'intégrale $\int_{n\pi - \frac{\pi}{2}}^X \frac{dt}{1 + t^a \sin^2 t}$ est inférieure à u_{n+1} et donc tend vers 0 lorsque $X \rightarrow +\infty$. L'intégrale généralisée existe donc bien dans ce cas et sa valeur est la somme de la série de terme général u_n .

Corrigé de l'exercice 3.6

On découpe l'intégrale généralisée en deux, l'une sur $[0, +\infty[$ et l'autre sur $] -\infty, 0]$.

1) Soit $X > 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^X (f(t+1) - f(t)) dt &= \int_0^X f(t+1) dt - \int_0^X f(t) dt \\ &= \int_1^{X+1} f(s) ds - \int_0^X f(t) dt \\ &= \int_X^{X+1} f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f(t)$ tend vers l lorsque $t \rightarrow +\infty$, il existe $A > 0$ tel que $t > A$ entraîne $l - \varepsilon < f(t) < l + \varepsilon$.

On en déduit que si $X > A$, alors $l - \varepsilon \leq \int_X^{X+1} f(t) dt \leq l + \varepsilon$.

D'où $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_X^{X+1} f(x) dx = l$ et l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} (f(t+1) - f(t)) dt$ existe et vaut $l - \int_0^1 f(t) dt$.

2) Pour l'intégrale généralisée sur $] -\infty, 0]$, le même raisonnement permettrait de démontrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{-\infty} (f(t+1) - f(t)) dt$ existe et vaut $l' - \int_0^1 f(t) dt$.

En rassemblant ces deux résultats, on en déduit donc que l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t)) dt$$

existe et vaut $l - l'$.

Corrigé de l'exercice 3.7

L'idée est de construire une fonction, nulle sauf sur de très petits intervalles où elle prend de grandes valeurs. Précisément, on définit f par :

$$f(n) = n, \quad f(n - \frac{1}{2n^3}) = f(n + \frac{1}{2n^3}) = 0 \text{ pour } n > 0,$$

f est affine sur $[n - \frac{1}{2n^3}, n]$ et sur $[n, n + \frac{1}{2n^3}]$,

f est nulle ailleurs.

On voit facilement que f est continue, positive sur $[0, +\infty]$ et que f n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$.

En revanche, pour tout $X > 0$, l'intégrale $F(X) = \int_0^X f(t) dt$ est majorée par $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Comme F est une fonction positive croissante, ceci implique que $F(X)$ a une limite finie lorsque $X \rightarrow +\infty$ et donc que l'intégrale généralisée existe.

Chapitre 4

Suites et séries de fonctions

4.1 Convergence simple

On suppose que \mathbb{K} est l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} et que D est une partie non vide de \mathbb{K} .

4.1.1 Définition. i) Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D dans \mathbb{K} est une application $n \rightarrow f_n$ de \mathbb{N} dans l'ensemble des fonctions de D dans \mathbb{K} .

ii) Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D dans \mathbb{K} converge simplement vers la fonction f si quelque soit $t \in D$, la suite numérique $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(t)$.

On peut reformuler la propriété ii) de la façon suivante :

4.1.2 Proposition. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D dans \mathbb{K} converge simplement vers la fonction f si et seulement si :

$$\forall t \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

4.1.3 Définition. i) Une série de fonctions de terme général u_n de D dans \mathbb{K} est un couple formé de deux suites de fonctions définies sur D et à valeurs dans \mathbb{K} $\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ telles que

$$\forall t \in D, \forall n \in \mathbb{N}, s_n(t) = \sum_{i=0}^n u_i(t).$$

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n s'appelle le terme général d'ordre n de la série de fonctions et s_n s'appelle la somme partielle d'ordre n .

iii) Une série de fonctions de terme général u_n , défini sur D , à valeurs dans \mathbb{K} converge simplement et a pour somme s si quel que soit $t \in D$, la série numérique de terme général $u_n(t)$ converge et a pour somme $s(t)$.

iv) Si la série converge simplement, pour tout $t \in D$ et $n \in \mathbb{N}$, $r_n(t) = s(t) - s_n(t)$ s'appelle le reste d'ordre n de la série de terme général u_n

Comme dans le cas des séries numériques, on a :

4.1.4 Notations. On note $s = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$. Ce qui veut dire :

$$\forall t \in D, s(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n u_i(t).$$

Si la série de fonctions de terme général u_n converge simplement et a pour somme s , on peut donc écrire : $\forall t \in D, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$r_n(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k u_i(t) - \sum_{i=0}^n u_i(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=n+1}^k u_i(t) = \sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i(t).$$

La convergence de la série de terme général $u_n(t)$ s'exprime par la convergence de la suite des sommes partielles $s_n(t) = \sum_{i=0}^n u_i(t)$. On peut donc reformuler la propriété iii) de la définition 4.1.3 en :

4.1.5 Proposition. *La série de fonctions de terme général u_n de D dans \mathbb{K} converge simplement et a pour somme s si et seulement si, $\forall t \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$n \geq N \Rightarrow |s_n(t) - s(t)| = \left| \sum_{i=0}^n u_i(t) - s(t) \right| = |r_n(t)| \leq \varepsilon.$$

Remarquons que dans ces définitions et propositions sur la convergence simple, l'entier N peut dépendre de t : il n'y a pas en général un entier N qui marche pour tout $t \in D$. A cause de cela, la convergence simple des suites ou séries de fonctions ne transmet pas, en général, les propriétés de la suite à sa limite ou de la série à sa somme.

Donnons des exemples :

4.1.6 Exemple. i) *La suite de fonctions continues définie pour tout $t \in [0, 1]$ par*

$$f_n(t) = t^n,$$

converge simplement vers la fonction discontinue f telle que :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \in [0, 1[\\ f(1) = 1. \end{cases}$$

ii) *La série de fonctions continues définie pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, de terme général*

$$u_n(t) = \sin^2 t \cos^n t,$$

converge simplement et a pour somme la fonction s , discontinue en 0, telle que :

$$\begin{cases} s(t) = \frac{\sin^2 t}{1 - \cos t} & \text{si } t \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ s(0) = 0. \end{cases}$$

4.1.7 Exemple. i) *La suite de fonctions dérivables définie pour $n \geq 1$ et pour $t \in [0, \pi/2]$ par*

$$f_n(t) = \frac{\sin nt}{\sqrt{n}},$$

converge simplement vers la fonction 0.

Par contre la suites des dérivées

$$f'_n(t) = \frac{n \cos nt}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cos nt,$$

ne converge pas vers 0 qui est pourtant la dérivée de la limite des $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ii) La série de fonctions dérivables définie pour $n \geq 2$ et pour $t \in [0, \pi/2]$, de terme général

$$u_n(t) = \frac{\sin nt}{\sqrt{n}} - \frac{\sin(n-1)t}{\sqrt{n-1}},$$

converge simplement et a pour somme la fonction $-\sin t$.

La série des dérivées ne converge pas.

4.1.8 Exemple. i) La suite de fonctions définie par $f_n(t) = nt(1-t^2)^n$ pour tout $t \in [0, 1]$ converge simplement vers la fonction nulle. Par contre,

$$\int_0^1 f_n(t) dt = n \int_0^1 t(1-t^2)^n dt = \frac{n}{2n+2}.$$

Cette suite converge vers $1/2$ qui n'est pas égal à l'intégrale de la limite des $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$.

ii) La série de fonctions continues définie pour $n \geq 1$, de terme général

$$u_n(t) = nt(1-t^2)^n - (n-1)t(1-t^2)^{(n-1)},$$

pour tout $t \in [0, 1]$ converge simplement et a pour somme 0. L'intégrale de u_n sur $[0, 1]$ vaut d'après le i) $\frac{n}{2n+2} - \frac{n-1}{2n}$. La série dont le terme général est l'intégrale de u_n sur $[0, 1]$ converge donc vers $1/2$, puisque

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{2i+2} - \frac{i-1}{2i} \right) = \frac{n}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2},$$

qui n'est pas l'intégrale de la somme de la série de terme général u_n sur $[0, 1]$.

Pour que les propriétés de la suite ou de la série, se transmettent à la limite de la suite ou à la somme de la série, on est donc amené à définir une convergence plus forte, la convergence uniforme.

4.2 Convergence uniforme

4.2.1 Définition. Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D dans \mathbb{K} converge uniformément vers la fonction f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que, } n \geq N \Rightarrow \forall t \in D, |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Cette définition s'écrit encore :

4.2.2 Proposition. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D dans \mathbb{K} converge uniformément vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que, } n \geq N \Rightarrow \sup_{t \in D} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

4.2.3 Définition. Une série de fonctions de terme général u_n de D dans \mathbb{K} converge uniformément et a pour somme s si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que,}$$

$$n \geq N \Rightarrow \forall t \in D, |s_n(t) - s(t)| = \left| \sum_{i=0}^n u_i(t) - s(t) \right| = |r_n(t)| \leq \varepsilon.$$

On peut également reformuler ceci en :

4.2.4 Proposition. La série de fonctions de terme général u_n de D dans \mathbb{K} converge uniformément et a pour somme s si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que,}$$

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{t \in D} |s_n(t) - s(t)| = \sup_{t \in D} \left| \sum_{i=0}^n u_i(t) - s(t) \right| = \sup_{t \in D} |r_n(t)| \leq \varepsilon.$$

On peut définir une norme sur l'ensemble des fonctions bornées sur un ensemble D , qui est directement reliée à la convergence uniforme des suites ou séries de fonctions :

4.2.5 Définition. Soit f une fonction bornée sur D , alors on appelle norme de la convergence uniforme de f , le nombre défini par :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \mid t \in D\}.$$

Grâce à cette norme, on peut écrire très simplement la convergence uniforme des suites et séries de fonctions :

Remarque. 1) La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si et seulement si la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2) La série de fonctions de terme général u_n converge uniformément et a pour somme s si et seulement si la suite numérique $(\|s_n - s\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

La différence essentielle entre les définitions 4.2.1 et 4.2.3 sur la convergence uniforme des suites et séries de fonctions et leurs analogues pour la convergence simple, définitions 4.1.1 et 4.1.3, est qu'ici l'entier N ne dépend pas de $t \in D$: il est le même pour tous les t dans D . Cette constatation permet de montrer la proposition suivante :

4.2.6 Proposition. i) Si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , elle converge simplement vers f et la réciproque est fausse.

ii) Si une série de terme général u_n converge uniformément et a pour somme s , elle converge simplement et a même somme. La réciproque est fausse.

Démonstration. i) Il suffit de remarquer que si $\sup_{t \in D} |f_n(t) - f(t)|$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, alors, pour t_0 fixé dans D , $f_n(t_0) - f(t_0)$ tend vers 0.

Voici un contre-exemple montrant que la réciproque de cette proposition est fausse :

la suite de fonctions de l'exemple 4.1.6, $f_n(t) = t^n$ pour $t \in [0, 1]$ converge simplement vers la fonction f telle que $f(t) = 0$ si $t \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$.

Or $\sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t \in [0, 1]} |t^n| = 1$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ donc cette suite ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

ii) De la même manière, si $\sup_{t \in D} |s_n(t) - s(t)|$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, alors, pour t_0 fixé dans D , $s_n(t_0) - s(t_0)$ tend vers 0.

De même, pour montrer que la réciproque de cette proposition est fausse, donnons un contre exemple :

la série de fonctions de l'exemple 4.1.6, de terme général $u_n(t) = \sin^2 t \cos^n t$ défini pour $t \in [0, \pi/2]$ converge simplement mais non uniformément car :

$$\sup_{t \in [0, \pi/2]} |r_n(t)| = \sup_{t \in [0, \pi/2]} \left| \sum_{i=n+1}^{+\infty} \sin^2 t \cos^i t \right| = \sup_{x \in [0, \pi/2]} \left| \frac{\sin^2 t \cos^{n+1} t}{1 - \cos t} \right| = 2,$$

puisque :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t \cos^{n+1} t}{1 - \cos t} = 2. \quad \square$$

Il existe un critère de Cauchy uniforme, qui permet de tester la convergence uniforme d'une suite ou d'une série sans connaître sa limite ou sa somme :

4.2.7 Théorème. Critère de Cauchy uniforme.

i) Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D dans \mathbb{K} converge uniformément si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N \Rightarrow \sup_{t \in D} |f_p(t) - f_q(t)| \leq \varepsilon.$$

ii) Une série de fonctions de terme général u_n de D dans \mathbb{K} converge uniformément si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N \Rightarrow \sup_{t \in D} |s_p(t) - s_q(t)| = \sup_{t \in D} \left| \sum_{i=q+1}^p u_i(t) \right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. i) Supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D . Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow \forall t \in D, |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

D'où

$$p, q \geq N \Rightarrow \forall t \in D, |f_p(t) - f_q(t)| \leq |f_p(t) - f(t)| + |f_q(t) - f(t)| \leq 2\varepsilon.$$

On a donc bien le critère de Cauchy uniforme.

Réciproquement, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N \Rightarrow \forall t \in D, |f_p(t) - f_q(t)| \leq \varepsilon,$$

pour $t \in D$ fixé, la suite de nombres $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{K} , donc converge vers un nombre $f(t)$. Dans le critère de Cauchy, on peut alors faire tendre q vers $+\infty$ et on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p \geq N \Rightarrow \forall t \in D, |f_p(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

ii) La démonstration de cette propriété pour les séries est la même que pour les suites en raisonnant sur la suite des sommes partielles. \square

Comme dans le cas numérique, proposition 2.3.6, pour **les séries de fonctions**, le critère de Cauchy uniforme a un corollaire, que l'on utilise beaucoup par sa contraposée, pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément :

4.2.8 Corollaire. *Si la série de fonctions de terme général u_n de D dans \mathbb{K} converge uniformément sur D , alors $\|u_n\|_\infty = \sup_{t \in D} |u_n(t)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. La réciproque est fausse.*

Démonstration. Il suffit d'écrire :

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{t \in D} |u_n(t)| = \sup_{t \in D} |s_n(t) - s_{n-1}(t)|,$$

et d'appliquer le critère de Cauchy uniforme.

Pour montrer que la réciproque est fausse, il suffit de prendre une série dont le terme général est une fonction constante, qui diverge et dont le terme général tend vers 0 à l'infini comme en 2.3.6. Par exemple la série de fonctions constantes, de terme général $u_n(t) = \frac{1}{n}$, $n > 1$, pour tout t convient. \square

On a pour les **séries de fonctions**, une notion de convergence, la **convergence normale**, qui implique la convergence uniforme et qui dans la pratique est souvent facile à vérifier :

4.2.9 Définition. *Une série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur D si la série numérique à termes positifs de terme général $\|u_n\|_\infty = \sup_{t \in D} |u_n(t)|$ converge.*

Le terme convergence normale correspond au fait qu'elle s'exprime à l'aide de la norme de la convergence uniforme définie dans la définition 4.2.5 :

Cette notion de convergence est plus forte que la convergence uniforme car on a :

4.2.10 Proposition. *Si la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur D , elle converge uniformément sur D .*

Démonstration. On peut écrire :

$$\sup_{t \in D} \left| \sum_{i=q+1}^p u_i(t) \right| \leq \sum_{i=q+1}^p \sup_{t \in D} |u_i(t)|.$$

Si la série numérique de terme général $\sup_{t \in D} |u_n(t)|$ converge, elle vérifie le critère de Cauchy et l'inégalité ci-dessus prouve que la série de terme général u_n vérifie le critère de Cauchy uniforme. Donc elle converge uniformément sur D . \square

Remarque. La réciproque de cette propriété est fausse : la série de fonctions de terme général $u_n(t) = \frac{(-1)^n}{n+t}$, $n > 1$, est uniformément convergente mais non normalement convergente sur $[0, 1]$.

En effet, cette série de fonctions n'est pas normalement convergente car

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{(-1)^n}{n+t} \right| = \frac{1}{n},$$

et cette série numérique est divergente.

Pour montrer la convergence uniforme, on utilise la majoration du reste d'une série alternée, voir 2.5.2 :

$$\forall t \in [0, 1], |r_n(t)| \leq \left| \frac{(-1)^n}{n+1+t} \right| \leq \left| \frac{1}{n+1} \right|.$$

Par suite, $\sup_{t \in [0,1]} |r_n(t)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ et on a bien convergence uniforme sur $[0, 1]$.

4.2.11 Exemple. i) La série de terme général $u_n(t) = \frac{\sin nt}{n^2}$, $n > 1$, définie sur \mathbb{R} converge normalement car :

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin nt}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}.$$

ii) Soit $r \in]0, 1[$. La série de terme général $u_n(z) = z^n$ définie sur le disque D_r centré à l'origine, de rayon r , converge uniformément sur ce disque car :

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{z \in D_r} |u_n(z)| = r^n.$$

Remarque. Dans toutes les définitions et propriétés de ce paragraphe, le domaine D est fondamental. Dans l'exemple ii) ci dessus, on a convergence uniforme sur D_r pour $r < 1$ mais pas sur D_1 .

4.3 Continuité des limites et des sommes pour la convergence uniforme

4.3.1 Théorème. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un domaine D et qui converge uniformément vers une fonction f sur D . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en un point t_0 de D , f est aussi continue en t_0 .
On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t), \end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de limites.

Démonstration. Puisque la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow \forall t \in D, |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

$\varepsilon > 0$ étant fixé, écrivons la continuité de la fonction f_N en t_0 :

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } |t - t_0| \leq \eta \Rightarrow |f_N(t) - f_N(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour tout $t \in D$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &= |f(t) - f_N(t) + f_N(t) - f_N(t_0) + f_N(t_0) - f(t_0)| \\ &\leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(t_0)| + |f_N(t_0) - f(t_0)|. \end{aligned}$$

Donc si $|t - t_0| \leq \eta$, on a

$$|f(t) - f(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ceci prouve la continuité de f en t_0 . \square

4.3.2 Corollaire. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un domaine D et qui converge uniformément vers une fonction f sur D . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur D , f est aussi continue sur D .

4.3.3 Théorème. On considère une série de fonctions de terme général u_n , défini sur un domaine D , qui converge uniformément et a pour somme la fonction s sur D . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue en un point t_0 de D , s est aussi continue en t_0 .

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} s(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{i=0}^{+\infty} u_i(t) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} u_i(t_0) = \sum_{i=0}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow t_0} u_i(t), \end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de limite et somme infinie.

Démonstration. On applique le théorème 4.3.1 à la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de terme général u_n , qui sont continues comme sommes finies de fonctions continues. \square

4.3.4 Corollaire. On considère une série de fonctions de terme général u_n , défini sur un domaine D , qui converge uniformément et a pour somme la fonction s sur D . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur D , s est aussi continue sur D .

On utilise souvent ces résultats par contraposée : en reprenant l'exemple 4.1.6, on retrouve immédiatement :

4.3.5 Exemple. i) La suite de fonctions continues $f_n(t) = t^n$ converge simplement vers une fonction f , discontinue sur $[0, 1]$. Elle ne converge donc pas uniformément sur cet intervalle.

ii) La série de fonctions continues de terme général $\sin^2 t \cos^n t$ converge simplement sur $[0, \pi/2]$ et a pour somme une fonction discontinue. Elle ne converge donc pas uniformément sur cet intervalle.

La convergence uniforme des suites ou séries de fonctions est suffisante mais non nécessaire pour assurer la continuité des limites ou des sommes. De plus, en général, on ne peut pas appliquer directement les résultats de continuité des limites de suites de fonctions, théorème 4.3.1, et de sommes de séries de fonctions, théorème 4.3.3, sur le domaine D en entier et on est obligé d'utiliser un argument, dit de saturation. Donnons deux exemples :

4.3.6 Exemple. 1) La suite de fonctions $f_n(t) = n^2 t e^{-nt}$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$ mais sa limite est continue sur $[0, +\infty[$.

2) La somme de la série de fonctions de terme général $\frac{1}{n^t}$ $n > 1$, est continue sur $]1, +\infty[$.

Démonstration. 1) La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $[0, +\infty[$ qui est bien une fonction continue.

Par contre, la convergence n'est pas uniforme. En effet, on a $f'_n(t) = n^2 e^{-nt} (1 - nt)$, cette fonction s'annule en $t = \frac{1}{n}$ et $\sup_{t \in [0, +\infty[} f_n(t) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e}$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

En revanche, il est facile de voir que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[a, +\infty[$, pour $a > 0$.

2) Soit $a > 1$. On peut écrire :

$$\forall t \in [a, +\infty[, 0 \leq \frac{1}{n^t} \leq \frac{1}{n^a}.$$

La série numérique de terme général $\frac{1}{n^a}$ est convergente. La série de fonctions de terme général $\frac{1}{n^t}$ est normalement convergente donc uniformément convergente sur $[a, +\infty[$ et sa somme s est continue sur cet intervalle. Comme ce raisonnement est valable pour tout $a > 1$, s est continue sur tous les intervalles $[a, +\infty[$ avec $a > 1$ donc aussi sur leur réunion qui est exactement l'intervalle $]1, +\infty[$. \square

4.4 Dérivabilité des limites et des sommes pour la convergence uniforme

Pour pouvoir parler de dérivation, on va se placer sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

4.4.1 Théorème. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ telle que :

- 1) Il existe $t_0 \in I$ tel que la suite numérique $(f_n(t_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge
- 2) La suite des dérivées $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I vers une fonction g .

Alors, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I vers une fonction dérivable f telle que $f' = g$.

On peut alors écrire, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right)' \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(t), \end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de limite et de dérivation.

Démonstration. Soit I' un sous-intervalle borné de I contenant t_0 et soit $|I'|$ sa longueur. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On peut écrire le critère de Cauchy uniforme pour la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur I' :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N \Rightarrow \forall t \in I' , |f'_p(t) - f'_q(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2|I'|}.$$

Pour chaque couple $p, q \geq N$, appliquons le théorème des accroissements finis en t_0 à la fonction $f_p - f_q$: pour tout $t \in I'$,

$$\begin{aligned} |[f_p(t) - f_q(t)] - [f_p(t_0) - f_q(t_0)]| &\leq |t - t_0| \sup_{t \in I'} |f'_p(t) - f'_q(t)| \\ &\leq |t - t_0| \frac{\varepsilon}{2|I'|} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in I'$, on a :

$$|f_p(t) - f_q(t)| \leq |f_p(t_0) - f_q(t_0)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par hypothèse, la suite $(f_n(t_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge ; par suite, elle est de Cauchy et il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$p, q \geq N' \Rightarrow |f_p(t_0) - f_q(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que :

$$p, q \geq \sup\{N, N'\} \Rightarrow \forall t \in I', |f_p(t) - f_q(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur I' . Soit f sa limite.

En reprenant la formule des accroissements finis ci-dessus en un point $t_1 \in I'$ et en divisant par $|t - t_1|$, on peut écrire : $p, q \geq N \Rightarrow \forall t \in I', t \neq t_1$,

$$\left| \frac{f_p(t) - f_q(t)}{t - t_1} - \frac{f_p(t_1) - f_q(t_1)}{t - t_1} \right| = \left| \frac{f_p(t) - f_p(t_1)}{t - t_1} - \frac{f_q(t) - f_q(t_1)}{t - t_1} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2|I'|}.$$

En revenant au début de la démonstration, on a vu que l'on a aussi :

$$p, q \geq N \Rightarrow \forall t \in I', |f'_p(t) - f'_q(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2|I'|}.$$

En définissant la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \varphi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(t_1)}{t - t_1} & \text{pour } t \neq t_1 \\ \varphi_n(t_1) = f'_n(t_1), \end{cases}$$

ces propriétés montrent que la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I' . Soit φ sa limite.

La suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues en t_1 car puisque par hypothèse, les fonctions f_n sont dérivables en t_1 et on peut écrire :

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \varphi_n(t) = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{f_n(t) - f_n(t_1)}{t - t_1} = f'_n(t_1) = \varphi_n(t_1).$$

En appliquant le théorème 4.3.1, on voit que la limite φ de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est continue en t_1 et que

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) = g(t_1) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(t_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{f_n(t) - f_n(t_1)}{t - t_1} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n(t) - f_n(t_1)}{t - t_1} = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1}. \end{aligned}$$

On en déduit que la dérivée de f au point t_1 existe et vaut

$$f'(t_1) = g(t_1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(t_1).$$

Puisque ceci est vrai pour tout $t_1 \in I'$, ceci prouve bien que f est dérivable sur I' et que sa dérivée est la limite de la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire que $g = f'$.

Comme on a choisi pour I' un sous-intervalle borné quelconque de I contenant t_0 , le raisonnement précédent prouve que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tous sous-intervalles bornés de I contenant t_0 . Donc la limite f de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dérivable, de dérivée g sur tous sous-intervalles bornés de I contenant t_0 et par suite sur I tout entier. \square

4.4.2 Corollaire. *Sous les hypothèses du théorème 4.4.1, si de plus, les fonctions f'_n sont continues sur I , alors la limite f a une dérivée f' continue sur I .*

Démonstration. Comme sous les hypothèses du théorème 4.4.1, la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I , il suffit d'appliquer le théorème 4.3.1 : la limite f' de la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est continue sur tout sous-intervalle borné de I et donc sur I tout entier. \square

Remarquons que la convergence uniforme de la suite de fonctions ne suffit pas à assurer la dérivabilité de la limite :

4.4.3 Exemple. *La suite de fonctions dérivables $f_n(t) = (t^2 + \frac{1}{n^2})^{1/2}$, $n > 1$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction $|t|$, qui n'est pas dérivable en 0.*

En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$|t| \leq (t^2 + \frac{1}{n^2})^{1/2} \leq |t| + \frac{1}{n}.$$

D'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f_n(t) - |t|| \leq \frac{1}{n}.$$

Cette inégalité implique la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la fonction $|t|$. D'après le théorème 4.4.1, la suite des dérivées ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

On utilisera beaucoup le cas particulier du théorème 4.4.1 suivant :

4.4.4 Corollaire. *Si la suite de fonctions dérivables $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f et si la suite des dérivées converge uniformément sur tous les sous-intervalles bornés de I vers g , alors f est dérivable et $f' = g$ sur I .*

On va maintenant étudier la dérivabilité des sommes de séries :

4.4.5 Théorème. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On considère une série de fonctions de terme général u_n , dérivable sur I telle que*

- 1) *Il existe $t_0 \in I$ tel que la série numérique de terme général $u_n(t_0)$ converge*
- 2) *La série des dérivées, de terme général u'_n converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I et a pour somme une fonction σ .*

Alors, la série de terme général u_n converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I et a pour somme une fonction dérivable s telle que $s' = \sigma$.

Avec la notation des sommes infinies, ceci s'écrit :

$$\begin{aligned} s'(t) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right)' \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(t), \end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de somme infinie et de dérivation.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 4.4.1 à la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de terme général u_n , qui sont dérivables comme sommes finies de fonctions dérivables. \square

On obtient également les corollaires suivant pour les séries de fonctions :

4.4.6 Corollaire. *Sous les hypothèses du théorème 4.4.5, si de plus, les fonctions u'_n sont continues sur I , alors la somme s a une dérivée s' continue sur I .*

4.4.7 Corollaire. *Si la série de fonctions dérivables, de terme général u_n converge simplement sur I et a pour somme s et si la suite des dérivées converge uniformément sur tous les sous-intervalles bornés de I et a pour somme σ , alors s est dérivable et $s' = \sigma$ sur I .*

4.4.8 Exemple. Soit $0 < r < 1$ et $I = [-r, +r]$. On considère la série de fonctions définies sur I , de terme général $u_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$.

La série numérique de terme général $u_n(0)$ converge (c'est la série nulle !) et la série des dérivées de terme général t^n converge uniformément sur I d'après l'exemple 4.2.11 (ii).

La somme $s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$ est donc dérivable et sa dérivée vaut :

$$s'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}.$$

Comme $s(0) = 0$, on en déduit que $s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-t)$.

4.5 Intégration des limites et sommes pour la convergence uniforme

4.5.1 Théorème. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} et qui converge uniformément vers une fonction f sur $[a, b]$. Alors, la suite numérique $(\int_a^b f_n(s) ds)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite $\int_a^b f(s) ds$.

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(s) ds &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(s) ds \\ &= \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(s) \right) ds, \end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de limite et d'intégrales.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [a, b]$, on pose $F_n(t) = \int_a^t f_n(s) ds$. Les fonctions F_n sont dérivables sur $[a, b]$ comme intégrales de fonctions continues et de plus

$$\forall t \in [a, b], F'_n(t) = f_n(t).$$

D'après l'hypothèse, la suite $(F'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n(a) = 0$, la suite numérique $(F_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On peut donc appliquer le théorème 4.4.1 à la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$: cette suite converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction F telle que $F' = f$ et $F(a) = 0$. On en déduit :

$$\forall t \in [a, b], F(t) = \int_a^t f(s) ds.$$

En particulier pour $t = b$,

$$F(b) = \int_a^b f(s) ds.$$

□

4.5.2 Exemple. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(t) = t^n(1-t)^n.$$

Comme pour $t \in [0, 1]$, $0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{4^n}$. Ceci implique que la suite de fonctions continues $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$.

La suite $\left(\int_0^1 s^n(1-s)^n ds\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

4.5.3 Théorème. On considère une série de fonctions de terme général u_n , défini et continu sur $[a, b]$, qui converge uniformément sur $[a, b]$ et a pour somme s . Alors, la série numérique de terme général $\left(\int_a^b u_n(t) dt\right)$ converge et a pour somme $\int_a^b s(t) dt$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \int_a^b s(t) dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) dt, \end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de somme infinie et d'intégrale.

Démonstration. On applique le théorème précédent 4.5.1 à la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de terme général u_n , qui sont continues sur $[a, b]$ comme sommes finies de fonctions continues. \square

4.5.4 Exemple. On considère la série de fonctions de terme général $u_n(t) = \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, défini sur $[0, 1]$.

Comme $\forall t \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{1}{(2n)!}$, cette série converge normalement donc uniformément (proposition 4.2.10) sur $[0, 1]$. D'après le théorème précédent, on a donc, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^{2i}}{(2i)!} dt = \int_0^x \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} \right) dt = \int_0^x \cosh t dt = \sinh x.$$

4.6 Exercices sur le chapitre 4

4.1 Exercice. Pour $n \geq 1$ et $x \in]0, +\infty[$, on définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$f_n(x) = n |\ln x|^n.$$

- 1) Déterminer le domaine de convergence simple D de cette suite de fonctions.
- 2) Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur D et sur les sous-intervalles fermés bornés de D .

4.2 Exercice. Soit α un nombre réel strictement positif. On considère la suite de fonctions définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$n \geq 1, f_n(x) = nx^n(1-x)^\alpha.$$

- 1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur l'intervalle $[0, 1]$ et trouver sa limite.
- 2) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers sa limite sur l'intervalle $[0, 1]$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- 3) On suppose $0 < \alpha \leq 1$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[0, a]$ pour tout $a \in [0, 1[$.

4.3 Exercice. Soit a un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par u_n la fonction définie pour $x \in [0, +\infty[$ par :

$$u_n(x) = nx^a e^{-nx^2}.$$

- 1) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln u_n(x)$ pour $x > 0$.
- 2) En déduire que pour tout $a > 0$, la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
- 3) a) Pour $|z| < 1$, calculer $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.

b) En faisant un changement de variable, en déduire la somme $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

4)a) Calculer $\sup_{x \in [0, +\infty[} u_n(x)$.

b) En déduire que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $a > 4$.

5) Soit $a = 4$. On cherche à montrer que dans ce cas, la série de fonctions $u_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

a) Trouver un réel $C > 0$ tel que

$$\forall N^* \in \mathbb{N}, \sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq C \text{ avec } x_N = \sqrt{\frac{2}{N}}.$$

b) En déduire que $\sup_{x \in [0, +\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$.

c) Conclure.

6) On suppose toujours que $a = 4$.

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} s(x) = 1$.

b) Retrouver la conclusion de la question 5).

4.4 Exercice. Démontrer les inégalités, pour $0 \leq x \leq 1$:

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq 2x^2.$$

Soit

$$u_n(t) = \exp 2^{-nt} - 1, t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*.$$

- 1) Déterminer l'ensemble D des réels $t \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série de fonctions de terme général $u_n(t)$ converge.
- 2) Soit $a > 0$. Etudier la convergence uniforme sur l'intervalle $[a, +\infty[$ de la série de fonctions de terme général u_n .
- 3) Soit s la somme de la série de fonctions de terme général u_n . Etudier la continuité de la fonction s sur D .
- 4) Trouver un équivalent pour $s(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

4.7 Corrigé des exercices sur le Chapitre 4

Corrigé de l'exercice 4.1

- 1) Pour $|\ln x| < 1$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 et pour $|\ln x| \geq 1$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Donc $D =]\frac{1}{e}, e[$.
- 2) On remarque que $\sup_{x \in D} n |\ln x|^n = n$ donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur D .
Soit $[a, b] \subset]\frac{1}{e}, e[$ un sous-ensemble compact de D .
Alors $\sup_{x \in [a, b]} n |\ln x|^n = n \sup(|\ln a|, |\ln b|)^n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Corrigé de l'exercice 4.2

- 1) Si $0 \leq x < 1$, $nx^n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.
Si $x = 1$, $f_n(x) = 0$.
Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- 2) On cherche le maximum de la fonction f_n sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour cela, on calcule :

$$f'_n(x) = nx^{n-1}(1-x)^{\alpha-1}(n-(n+\alpha)x).$$

En posant $x_n = \frac{n}{n+\alpha}$, on voit que f_n est croissante sur $[0, x_n]$ et décroissante sur $[x_n, 1]$.
 f_n atteint donc son maximum en x_n et celui-ci vaut :

$$M_n = f_n(x_n) = n \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{-n} \left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right)^\alpha \sim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^\alpha n^{1-\alpha}.$$

Comme $M_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc bien uniformément vers 0 sur $[0, 1]$ si et seulement si $\alpha > 1$.

3) On suppose $0 < \alpha \leq 1$. Si $a \in [0, 1[$ est fixé, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$, si n est assez grand, $x_n > a$, donc la fonction f_n est croissante sur le segment $[0, a]$ et de plus, lorsque $n \rightarrow +\infty$:

$$\sup_{0 \leq x \leq a} |f_n(x)| = f_n(a) \rightarrow 0.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc bien uniformément sur le segment $[0, a]$ pour tout $a \in [0, 1[$.

Corrigé de l'exercice 4.3

1) Pour $x > 0$, on a : $\frac{1}{n} \ln u_n(x) = \frac{1}{n} (\ln n + a \ln x - nx^2)$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln u_n(x) = -x^2$

2) Pour $x > 0$ fixé, la série à termes positifs $u_n(x)$ vérifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = e^{-x^2} < 1$. On peut donc appliquer le critère de Cauchy : la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge. Ceci étant vrai pour tout $x > 0$, on en déduit que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. En $x = 0$, la série de fonctions est nulle donc convergente de somme nulle.

3) a) Pour $z < 1$, $\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$.

b) Posons $z = e^{-x^2}$. On en déduit que pour $x > 0$, $x^a \frac{e^{-x^2}}{(1 - e^{-x^2})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = s(x)$.

4) a) Etudions le maximum de u_n sur $]0, +\infty[$:

$$u'_n(x) = nx^{a-1} e^{-nx^2} (a - 2nx^2). \text{ Donc } u'_n(x) = 0 \iff x = x_n = \sqrt{\frac{a}{2n}}.$$

$$u_n \text{ admet un maximum au point } x_n \text{ et } u_n(x_n) = \frac{a^{a/2}}{2^{a/2} n^{a/2-1}} e^{-a/2} = \frac{A}{n^{a/2-1}}.$$

b) La série numérique de terme général $\frac{A}{n^{a/2-1}}$ converge si et seulement si $\frac{a}{2} - 1 > 1$ c'est-à-dire $a > 4$, ce qui implique le résultat.

5) Pour $a = 4$, la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$.

a) Pour $N \leq n \leq 2N$, $u_n(x_N) \geq n \left(\frac{2}{N}\right)^2 e^{-\frac{2n}{N}} \geq \frac{4}{N} e^{-4}$.

D'où $\sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq 4e^{-4} = C$.

b) On en déduit que $\sup_{x \in]0, +\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x) \geq \sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq C$ et donc $\sup_{x \in]0, +\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$.

c) La série de fonctions de terme général $u_n(x)$ ne vérifie pas le critère de Cauchy uniforme et donc ne converge pas uniformément sur $]0, +\infty[$.

6) a) On remarque que $(1 - e^{-x^2})^2 \sim x^4$ quand $x \rightarrow 0$. Donc $s(x) \sim e^{-x^2} \sim 1$ quand $x \rightarrow 0$.

b) Comme $s(0) = 0$, la somme de la série de fonctions de terme général $nx^4 e^{-nx^2}$ est discontinue sur $[0, +\infty[$ et par suite la convergence ne peut pas être uniforme sur cet intervalle.

Corrigé de l'exercice 4.4

On pose $f(x) = e^x - 1 - x$ et $g(x) = e^x - 1 - x - 2x^2$. On vérifie que $f(0) = g(0) = 0$, que f est croissante sur $[0, 1]$ et que g est décroissante sur $[0, 1]$. Cela implique bien que $f(x) \geq 0$ et $g(x) \leq 0$ sur $[0, 1]$.

1) Si $t \leq 0$, alors la suite $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc la série de terme général $u_n(t)$ diverge.

Si $t > 0$, on a $2^{-nt} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, et par conséquent, $u_n(t) \sim 2^{-nt}$ ($n \rightarrow +\infty$). La série géométrique de terme général 2^{-nt} étant convergente car $|2^{-t}| < 1$, il résulte du théorème des équivalents pour les séries à termes positifs que la série de terme général $u_n(t)$ converge.

Conclusion : $D = \mathbb{R}_+^*$.

2) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto u_n(t)$ est positive et décroissante sur $[a, +\infty[$, car $u'_n(t) = -n(\ln 2)2^{-nt} \exp(2^{-nt}) \leq 0$ quel que soit $t \in [a, +\infty[$.

Donc $\sup_{t \in [a, +\infty[} |u_n(t)| = u_n(a)$.

Puisque la série numérique de terme général $u_n(a)$ converge, la série de fonctions de terme général u_n converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

3) Fixons $t_0 \in D = \mathbb{R}_+^*$. Soit $a > 0$ tel que $a < t_0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est une fonction continue sur $[a, +\infty[$. De plus, la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$. D'après le théorème de continuité pour les séries de fonctions uniformément convergentes, la fonction s est continue sur $[a, +\infty[$. En particulier, elle est continue en t_0 car $t_0 \in]a, +\infty[$.

Le point $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ étant quelconque, on déduit que s est continue sur \mathbb{R}_+^* .

4) Puisque $0 \leq e^x - 1 - x \leq 2x^2$ pour tout $x \in [0, 1]$, on a $2^{-nt} \leq u_n(t) \leq 2^{-nt} + 2 \cdot 2^{-2nt}$, quels que soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Ceci implique que

$$\sum_{n=1}^N 2^{-nt} \leq \sum_{n=1}^N u_n(t) \leq \sum_{n=1}^N 2^{-nt} + 2 \sum_{n=1}^N 2^{-2nt},$$

pour tout $N \geq 1$ et tout $t > 0$

En faisant N tendre vers $+\infty$ on obtient, pour $t > 0$:

$$\frac{2^{-t}}{1-2^{-t}} \leq s(t) \leq \frac{2^{-t}}{1-2^{-t}} + 2 \frac{2^{-2t}}{1-2^{-2t}}.$$

Comme : $\frac{2^{-2t}}{1-2^{-2t}} = o(2^{-t})$ et $\frac{2^{-t}}{1-2^{-t}} \sim_{t \rightarrow +\infty} 2^{-t}$ on a :

$$s(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2^{-t}}{1-2^{-t}} \sim_{t \rightarrow +\infty} 2^{-t}.$$

En conclusion, $s(t) \sim_{t \rightarrow +\infty} 2^{-t}$.

Chapitre 5

Séries entières

5.1 Définitions et disque de convergence

Une série entière est une série de fonctions d'une variable réelle ou complexe, d'une forme particulière. On désigne par t une variable réelle et par z une variable complexe.

5.1.1 Définition. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de scalaires, réels ou complexes. Une série entière est une série de fonctions de terme général $u_n(t) = a_n t^n$, où $t \in \mathbb{R}$, respectivement $u_n(z) = a_n z^n$, où $z \in \mathbb{C}$.

Pour unifier la présentation des résultats suivants, on se place dans le cas d'une variable complexe z , le cas réel s'en déduisant sans peine.

5.1.2 Théorème. On considère une série entière de terme général $a_n z^n$. Il existe un nombre $R \geq 0$ fini ou infini tel que :

- i) Si $|z| < R$, la série numérique de terme général $a_n z^n$ converge absolument.
- ii) Si $|z| > R$, le terme général de la série numérique $a_n z^n$ ne tend pas vers 0 et la série diverge.
- iii) Si $R > 0$, pour tout $0 < r < R$, la série de fonctions de terme général $a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\overline{D}_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$, de centre 0 et de rayon r .

Remarque. Dans i) et ii), il s'agit de convergence en un point z fixé, donc de convergence simple.

5.1.3 Définition. Le nombre positif R , fini ou infini, caractérisé par les propriétés i) et ii) du théorème 5.1.2 s'appelle le rayon de convergence de la série de terme général $a_n z^n$. Le disque ouvert $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ s'appelle le disque de convergence de la série de terme général $a_n z^n$.

Démonstration. Soit $A = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n < +\infty\}$. Comme visiblement $0 \in A$, l'ensemble A est non vide.

Posons $R = \sup A$ dans $\overline{\mathbb{R}^+}$.

Montrons ii) : Si $R = +\infty$, il n'y a rien à démontrer.

Si $R < +\infty$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| > R$, alors $|z| \notin A$.

Donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| |z|^n = +\infty$ et le terme général de la série $a_n z^n$ ne tend pas vers 0. Cette série est donc divergente d'après la proposition 2.3.6.

Montrons i) : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. On choisit r tel que $|z| < r < R$ et on pose $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n$; ce sup existe puisque $r \in A$. On peut alors écrire :

$$|a_n z^n| = |a_n| r^n \left| \frac{z}{r} \right|^n \leq M \left| \frac{z}{r} \right|^n$$

Le terme $\left|\frac{z}{r}\right|^n$ est le terme général d'une série convergente et par suite la série numérique $a_n z^n$ est absolument convergente.

Montrons *iii*) : $r < R$ étant fixé, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq r$, on a : $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$. La série numérique de terme général $|a_n| r^n$ est convergente d'après *ii*) et par suite la série de fonctions de terme général $a_n z^n$ est normalement convergente sur $\overline{D_r}$. \square

5.1.4 Corollaire. *On considère une série entière, de terme général $a_n z^n$ et de rayon de convergence R . La somme s de cette série est continue sur le disque ouvert*

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}.$$

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$. On choisit $r > 0$ tel que $|z_0| < r < R$. D'après le théorème 5.1.2 *iii*), la série de terme général $a_n z^n$ converge normalement donc uniformément (proposition 4.2.10) sur $\overline{D_r}$. Sa somme s est donc continue sur cet ensemble d'après le théorème 4.3.3, donc en particulier en z_0 . En faisant varier z_0 dans le disque ouvert D_R , on obtient la continuité de s en tout point de cet ensemble. \square

Remarque. *i)* Le rayon de convergence d'une série entière de terme général $a_n z^n$ est donné par la formule $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| r^n < +\infty\}$.

ii) Si $R = 0$, on dit que la série diverge.

iii) On ne peut rien dire de la convergence de la série de terme général $a_n z^n$ lorsque $|z| = R$.

5.1.5 Exemple. *1)* La série de terme général z^n converge absolument si $|z| < 1$ et diverge si $|z| > 1$. Donc $R = 1$.

2) La série de terme général $\frac{z^n}{n}$ converge absolument si $|z| < 1$ et diverge si $|z| > 1$. Donc $R = 1$.

Dans ces deux exemples, la série diverge pour $z = 1$. Dans le premier exemple, elle diverge aussi pour $z = -1$, alors que dans le deuxième exemple, elle converge pour $z = -1$.

5.1.6 Proposition. *On considère une série entière de terme général $a_n z^n$. Son rayon de convergence R est donné par la formule : $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{1/n}$.*

Démonstration. On applique le test de Cauchy (proposition 2.4.4) :

Premier cas : Si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n| |z^n|)^{1/n} < 1$, la série de terme général $a_n z^n$ converge. Or

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n| |z^n|)^{1/n} = |z| \limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{1/n}$$

On en déduit que si $|z| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{1/n}}$ la série de terme général $a_n z^n$ converge absolument. Donc

$$R \geq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{1/n}}$$

Deuxième cas : Si $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n| |z^n|)^{1/n} > 1$, c'est-à-dire si $|z| > \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{1/n}}$ alors le terme général $a_n z^n$ de la série ne tend pas vers 0 et la série diverge. Donc

$$R \leq \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{1/n}}$$

Ces deux inégalités prouvent la proposition. \square

5.1.7 Proposition. *On considère une série entière de terme général $a_n z^n$, telle que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$, le rayon de convergence R de la série est donné par :*

$$\frac{1}{R} = L.$$

Démonstration. On applique le test de d'Alembert (proposition 2.4.7) :

Soit $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

Premier cas : Si $|z| < \frac{1}{L}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| < 1$ donc la série de terme général $a_n z^n$ converge.

Deuxième cas : Si $|z| > \frac{1}{L}$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| > 1$ donc le terme général de la série de terme général $a_n z^n$ ne tend pas vers 0 et la série diverge.

Ces deux propriétés impliquent bien que $\frac{1}{R} = L$. \square

Remarque. La proposition 5.1.6 donne une caractérisation du rayon de convergence d'une série entière, contrairement à la proposition 5.1.7 qui ne donne sa valeur que dans le cas où la limite de la suite $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ existe.

Les deux propositions précédentes impliquent le résultat suivant :

5.1.8 Corollaire. *Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$, alors la limite de la suite $(|a_n|^{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ existe et vaut L .*

Démonstration. On considère la série entière de terme général $a_n z^n$. Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

par la proposition 5.1.7, son rayon de convergence est $\frac{1}{L}$. Par la proposition 5.1.6, la limite supérieure de $(|a_n|^{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ vaut L .

On considère de même la série entière de terme général $\frac{z^n}{a_n}$. Son rayon de convergence vaut L . Donc la limite supérieure de $\frac{1}{|a_n|^{1/n}}$ vaut $\frac{1}{L}$. On en déduit que la limite inférieure de $|a_n|^{1/n}$, qui est égale à l'inverse de la limite supérieure de $\frac{1}{|a_n|^{1/n}}$, vaut L . On conclut que la limite de la suite $(|a_n|^{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ existe et vaut L . \square

5.1.9 Exemple. 1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(n)$. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{P(n+1)}{P(n)} \right| = 1$. Le rayon de convergence de la série de terme général $a_n z^n$ est 1.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence de la série de terme général $\frac{z^n}{n^\alpha}$ est également 1.

3) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{(n+1)!}{n!}} = 0$, le rayon de convergence de la série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est $+\infty$.

5.2 Opérations sur les séries entières

5.2.1 Théorème. On considère deux séries entières, de termes généraux respectifs $a_n z^n$ et $b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b et de sommes respectives s_a et s_b . Soient λ et μ deux scalaires.

i) La série entière de terme général $(\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min\{R_a, R_b\}$ et a pour somme la fonction $\lambda s_a + \mu s_b$.

ii) La série entière de terme général $c_n z^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min\{R_a, R_b\}$ et a pour somme la fonction $s_a s_b$.

Démonstration. i) Pour $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, les deux séries de termes généraux respectifs $a_n z^n$ et $b_n z^n$ sont convergentes. On peut donc appliquer la proposition 2.3.7.

ii) On utilise le lemme sur les produits de séries numériques 2.3.11 :

On remarque que le terme général de la série produit des séries de termes généraux $a_n z^n$ et $b_n z^n$ est

$$\sum_{k=0}^n a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = c_n z^n$$

avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Pour $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, les deux séries de termes généraux respectifs $a_n z^n$ et $b_n z^n$ sont absolument convergentes ; le lemme 2.3.11 montre que la série $c_n z^n$ converge. \square

5.2.2 Application. On considère la série entière de terme général $\frac{z^n}{n!}$, de rayon de convergence $+\infty$ (voir exemple 5.1.9) et de somme s . Alors, on a :

$$s(z + z') = s(z)s(z')$$

Démonstration. En effet on applique le raisonnement du théorème 5.2.1 pour obtenir, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{n!} z^k z'^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z + z')^n}{n!}. \quad \square$$

5.2.3 Théorème. *Substitution d'une série entière dans une autre.*

On considère deux séries entières de termes généraux respectifs $a_n z^n$ et $b_n z^n$, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b et de sommes respectives s_a et s_b . On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha < R_b$ et $\sum_{i=0}^{+\infty} |b_i| \alpha^i < R_a$. Alors il existe une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à α , de somme $s_a \circ s_b$.

Démonstration. Notons $r = \sum_{i=0}^{+\infty} |b_i| \alpha^i$. Pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction s_b^k est la somme d'une série entière de rayon de convergence au moins égal à R_b d'après le théorème 5.2.1. Notons $c_n(k) z^n$ le terme général cette série. Comme les coefficients $c_i(k)$ sont d'après le même théorème, des sommes de produits des coefficients b_k , on a l'inégalité :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |c_i(k)| |z|^i \leq \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |b_i| |z|^i \right)^k$$

Par définition de α , on a aussi : si $|z| \leq \alpha$ alors

$$|s_b(z)|^k \leq \sum_{i=0}^{+\infty} |c_i(k)| |z|^i \leq \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |b_i| \alpha^i \right)^k = r^k$$

Donc puisque $r < R_a$, pour $|z| \leq \alpha$, la série de terme général $a_k s_b^k(z)$ converge absolument.

En utilisant le théorème de sommation par paquets 2.6.4 on peut donc sommer en regroupant les termes de même degré en n : on obtient bien ainsi une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à α et de somme $s_a \circ s_b$. \square

5.2.4 Application. On considère une série entière de terme général $a_n z^n$, de rayon de convergence R et de somme s ; on cherche à substituer la fonction $az + b$ dans cette série.

La fonction $az + b$ est la somme d'une série entière (finie !) de rayon de convergence $+\infty$. On applique le théorème 5.2.3 : s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha|a| + |b| < R$, alors la série entière de somme

$$s(az + b) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (az + b)^n = a_0 + a_1 (az + b) + a_2 (az + b)^2 + \dots$$

a un rayon de convergence supérieur à α .

En particulier, si $|a| < R$ la série entière de somme

$$s(z + a) = a_0 + a_1 (z + a) + a_2 (z + a)^2 + \dots$$

a un rayon de convergence strictement positif. En réordonnant les termes selon les puissances de z , on trouve :

$$s(z + a) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{n+k}^n a_{n+k} a^k$$

5.2.5 Application. On considère une série entière de terme général $a_n z^n$, de rayon de convergence R et de somme s ; on cherche à substituer la fonction z^2 dans cette série.

Il est clair que si $|z^2| < R$, la série de terme général $a_n z^{2n}$ converge et si $|z^2| > R$, la série de terme général $a_n z^{2n}$ diverge. Le rayon de convergence de cette série est donc \sqrt{R} .

En particulier, si la limite de $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ existe et vaut L , le rayon de convergence de la série de terme général $a_n z^{2n}$ est $\sqrt{\frac{1}{L}}$.

En multipliant le terme général par z , ce raisonnement s'applique aussi à la série de terme général $a_n z^{2n+1}$. Le rayon de convergence de cette série est donc également \sqrt{R} .

5.2.6 Application. (Inverse d'une série entière) On considère une série entière de terme général $a_n z^n$, de rayon de convergence non nul R , de somme s et dont le premier terme a_0 est non nul. Alors il existe une série entière de terme général $b_n z^n$, de rayon de convergence non nul R' , de somme σ telle que :

$$\forall z < \inf\{R, R'\}, \quad s(z)\sigma(z) = 1$$

Démonstration. Pour $z < R$, on pose :

$$s(z) = a_0 (1 - u(z)) \quad , \quad \text{avec } u(z) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_0} z^n$$

La série de terme général z^n ayant un rayon de convergence égal à 1, on peut remplacer z par $u(z)$ en appliquant le théorème 5.2.3 : en effet comme la somme d'une série entière est continue sur son disque de convergence, quand $z \rightarrow 0$, $u(z) \rightarrow 0$ et donc il existe $r > 0$ tel que si $|z| < r$, $|u(z)| < 1$.

Comme

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

on obtient ainsi une série entière $b_n z^n$ de rayon de convergence non nul et telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = 1$$

Par identification, on trouve la relation suivante entre les coefficients a_n et b_n :

$$a_0 b_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, \quad a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = 0.$$

Ceci permet de calculer de proche en proche les b_n en fonction des a_n . □

5.3 Dérivation et intégration des séries entières

Commençons par un résultat général pour les séries entières d'une variable réelle ou complexe, que l'on écrit comme précédemment dans le cas complexe.

5.3.1 Théorème. On considère une série entière de terme général $a_n z^n$, de somme s et de rayon de convergence R . Les séries entières de termes généraux

$$n a_n z^{n-1}, n(n-1) a_n z^{n-2}, \dots, n(n-1) \dots (n-k+1) a_n z^{n-k}, \dots$$

et la série entière de terme général

$$\frac{a_n}{n+1} z^n$$

ont également R pour rayon de convergence.

On remarquera que le premier terme des séries entières de terme général $a_n z^n$, $na_n z^{n-1}$, $n(n-1)a_n z^{n-2}$, ..., $n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k}$ est obtenu respectivement pour $n = 1$, $n = 2$, ..., $n = k$, ...

Démonstration. On utilise la caractérisation du rayon de convergence donnée dans la proposition 5.1.6 : $\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{1/n}$.

Or comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/n} = 1$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} (|a_n|)^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (|na_n|)^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (|n(n-1)a_n|)^{1/n} \\ &= \dots = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (|n(n-1)\dots(n-k+1)a_n|)^{1/n} = \dots = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{a_n}{n+1} \right| \right)^{1/n}. \quad \square \end{aligned}$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous limiterons au cas où la variable est réelle.

5.3.2 Corollaire. Dérivation des séries entières d'une variable réelle.

On considère une série entière de terme général $a_n t^n$ d'une variable réelle t , de somme s et de rayon de convergence R . La fonction s est indéfiniment dérivable sur le domaine de convergence de la série $] -R, +R[$ et les dérivées successives sont les sommes des séries obtenues en dérivant le terme général de la série de départ.

Démonstration. Sous les hypothèses du corollaire, la série de terme général $a_n t^n$ converge sur l'intervalle $] -R, +R[$ et la série des dérivées converge uniformément sur tout intervalle $[-r, +r]$ avec $r < R$. Sa somme s est donc dérivable sur ces intervalles par le théorème 4.4.5 et par suite sur l'intervalle ouvert $] -R, +R[$. La dérivée de s est la somme de la série de terme général $na_n t^{n-1}$ sur $] -R, +R[$. Or, d'après le théorème précédent, cette série a R pour rayon de convergence. On peut donc itérer le raisonnement. \square

5.3.3 Corollaire. On considère une série entière réelle de terme général $a_n t^n$, de somme s et de rayon de convergence R . Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $s^{(k)}(0) = k! a_k$.

5.3.4 Corollaire. Intégration des séries entières d'une variable réelle t .

On considère une série entière réelle de terme général $a_n t^n$, de somme s et de rayon de convergence R . Alors pour tout $x \in] -R, +R[$,

$$\int_0^x s(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Démonstration. De la même façon que pour le corollaire 5.3.2, la série de terme général $a_n t^n$ converge uniformément sur tout intervalle $[-r, +r]$ avec $r < R$. Sa somme s est donc intégrable terme à terme sur ces intervalles par le théorème 4.5.3 et par suite sur l'intervalle ouvert $] -R, +R[$. On termine le raisonnement comme ci-dessus. \square

5.4 Développement en série entière à l'origine

5.4.1 Définition. i) On dit qu'une fonction f d'une variable réelle t est développable en série entière à l'origine s'il existe une série entière de terme général $a_n t^n$, de rayon de convergence $R > 0$, de somme s telle que

$$\forall t \in]-R, +R[, f(t) = s(t).$$

ii) On dit qu'une fonction f d'une variable complexe z est développable en série entière à l'origine s'il existe une série entière de terme général $a_n z^n$, de rayon de convergence $R > 0$, de somme s telle que

$$\forall z \in D_R, f(z) = s(z).$$

Pour simplifier on dira simplement que f est développable en série entière.

On a déjà rencontré une fonction développable en série entière :

5.4.2 Exemple. La fonction $\frac{1}{1-z}$, définie pour $z \neq 1$, est développable en série entière.

En effet, c'est la somme de la série de terme général z^n , de rayon de convergence 1.

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous limiterons au cas d'une variable réelle t .

5.4.3 Proposition. Si une fonction f est développable en série entière à l'origine, alors f est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $] -R, +R[$, où R est le rayon de convergence de la série.

De plus, le développement en série entière s'il existe est unique.

Démonstration. La somme d'une série entière d'une variable réelle étant indéfiniment dérivable (corollaire 5.3.2), toute fonction f développable en série entière, est bien indéfiniment dérivable sur $] -R, +R[$.

On a vu au corollaire 5.3.3 que la si s est la somme d'une série entière de terme général $a_n t^n$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $s^{(k)}(0) = k! a_k$. Donc si f est développable en série entière, le terme général de la série vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Cette série est donc bien unique. □

5.4.4 Définition. Soit f une fonction d'une variable réelle t indéfiniment dérivable. La série entière de terme général $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$ s'appelle la série de Taylor de f .

5.4.5 Corollaire. Soit f une fonction indéfiniment dérivable d'une variable réelle t . Si f est paire, sa série de Taylor n'a pas de terme en t^k avec k impair et si f est impaire, sa série de Taylor n'a pas de terme en t^k avec k pair.

Le fait que f soit indéfiniment dérivable sur un intervalle $] -R, +R[$ ne suffit pas à assurer que cette fonction soit développable en série entière, même si sa série de Taylor converge :

5.4.6 Exemple. Soit f la fonction définie par : $f(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$ si $t > 0$. Il est facile de vérifier que f est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} . De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$. Donc, si f était développable en série entière, son développement serait la série nulle, ce qui n'est pas possible car f n'est nulle sur aucun intervalle de la forme $] -R, +R[$.

On va chercher une condition suffisante pour qu'une fonction soit développable en série entière. Commençons par une remarque qui est une conséquence immédiate de la définition 5.4.1 :

Remarque. Soit f une fonction indéfiniment dérivable d'une variable réelle t , définie sur un intervalle $] -r, +r[$. Alors f est développable en série entière sur $] -r, +r[$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- 1) La série entière de terme général $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k$ a un rayon de convergence $R \geq r$.
- 2) La somme de cette série vaut f sur $] -r, +r[$.

5.4.7 Théorème. Si la fonction f indéfiniment dérivable d'une variable réelle t , définie sur un intervalle $] -r, +r[$ vérifie la propriété :

$$\forall \rho \in]0, r[, \exists c > 0 \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [-\rho, +\rho], \left| \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \right| \leq c\rho^{-k},$$

alors f est développable en série entière.

Démonstration. Supposons l'hypothèse réalisée et soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < r$. On choisit ρ tel que $|t| < \rho < r$ et on lui associe la constante $c > 0$ donnée par l'hypothèse. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k \right| \leq c \left(\frac{|t|}{\rho} \right)^k.$$

La série de terme général $\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k \right|$ est dominée par une série convergente, elle est donc

convergente et par suite la série de terme général $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k$ est absolument convergente. Cet argument étant valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|t| < r$, ceci prouve que le rayon de convergence de la série de Taylor de f est supérieur ou égal à r . Ce qui montre la propriété 1) de la remarque.

Montrons que la propriété 2) de la remarque est vérifiée. Pour cela, on rappelle la formule de Taylor avec reste intégral, voir [9] : soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle $] -r, +r[$. On a pour tout $t \in] -r, +r[$,

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k + \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(st) t^{n+1} ds.$$

Donc t et ρ étant fixés comme ci-dessus, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^k \right| &= \left| \int_0^1 \frac{(1-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(st) t^{n+1} ds \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{(1-s)^n}{n!} f^{(n+1)}(st) t^{n+1} \right| ds \\ &\leq c(n+1) \left| \frac{t}{\rho} \right|^{n+1} \int_0^1 (1-s)^n ds = c \left| \frac{t}{\rho} \right|^{n+1}. \end{aligned}$$

Ce dernier terme tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ et par suite le reste de la série tend vers 0. La fonction f est bien somme de sa série de Taylor sur $] -r, +r[$. \square

5.4.8 Exemple. Soit $f(t) = e^t$. Alors f est développable en série entière sur \mathbb{R} .

En effet, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, f^{(k)}(t) = e^t$. Donc quel que soit $\rho > 0$,

$$|t| \leq \rho \Rightarrow \left| \frac{f^{(k)}(t)}{k!} \right| = \frac{e^t}{k!} \leq \frac{e^\rho}{k!} \leq c \frac{1}{\rho^k},$$

où $c = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\rho^k e^\rho}{k!}$, qui est fini car on rappelle que, à l'infini, $k! \sim \sqrt{2\pi k} k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k}$.

La fonction \exp vérifie bien les hypothèses du théorème 5.4.7, avec $r > 0$ quelconque. Elle est donc développable en série entière sur \mathbb{R} , sa série de Taylor a un rayon de convergence égal à $+\infty$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Voici une autre méthode pour trouver le développement en série entière d'une fonction :

5.4.9 Exemple. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(t) = (1+t)^\alpha$. Alors f est développable en série entière sur $] -1, +1[$ et

$$\forall t \in] -1, +1[, f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)}{n!} t^n.$$

La fonction f est l'unique solution, pour $|t| < 1$, de l'équation différentielle avec conditions initiales :

$$(\mathcal{E}) \begin{cases} (1+t)f'(t) = \alpha f(t) \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

La somme d'une série entière de terme général $a_n t^n$ sera solution de (\mathcal{E}) si et seulement si :

$$\begin{cases} (1+t) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right)' = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

Comme la dérivée de la somme d'une série entière est la somme de la série dérivée sur son domaine de convergence, ceci équivaut à :

$$\begin{cases} (1+t) \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

En effectuant les produits et en identifiant les termes de même degré, on trouve :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, [(n+1)a_{n+1} + n a_n] t^n = \alpha a_n t^n \\ a_0 = 1, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, (n+1)a_{n+1} + na_n = \alpha a_n \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

Ce système infini est aussi équivalent à :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

L'unique solution de ce système infini est :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)}{n!}.$$

La série entière ainsi obtenue a un rayon de convergence égal à 1 car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha - n}{n+1} = -1.$$

La somme de la série entière de terme général $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)}{n!} t^n$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 1$ est donc solution de (\mathcal{E}) sur $] -1, +1[$. Elle est aussi égale à f sur cet ensemble et f est bien développable en série entière sur $] -1, +1[$.

La méthode employée dans cet exemple se généralise à toute fonction, unique solution d'une équation différentielle avec conditions initiales.

On peut également démontrer que la fonction $f(t) = (1+t)^\alpha$ est développable en série entière en l'écrivant $f(t) = e^{\alpha \ln(1+t)}$ et en appliquant le théorème de substitution 5.2.3.

Les coefficients s'obtiennent alors en calculant directement $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

5.5 Développement en série entière des fonctions usuelles

On part des trois développements en série entière que l'on connaît :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n, R = +1 \\ e^t &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}, R = +\infty \\ (1+t)^\alpha &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)}{n!} t^n, R = +1 \end{aligned}$$

On va appliquer les techniques des parties précédentes pour obtenir à partir de ces trois cas d'autres développements.

Par combinaisons linéaires

Cette technique est adaptée aux fonctions circulaires, sinus (sin), cosinus (cos) mais nous verrons ces développements-là dans le paragraphe suivant, consacré à l'exponentielle complexe car ils font appels à la théorie complexe des séries entières. Elle est bien adaptée

également aux fonctions hyperboliques, sinus hyperbolique (\sinh) et cosinus hyperbolique (\cosh), définies sur $] -\infty, +\infty[$:

$$\begin{aligned}\cosh t &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad R = +\infty \\ \sinh t &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = +\infty\end{aligned}$$

A partir de ces développements, on peut trouver ceux des fonctions tangente (\tan) définie sur $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ et tangente hyperbolique (\tanh), définie sur $] -\infty, +\infty[$ par quotient.

Par substitution

On remplace la variable t par λt ou par t^2 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{at+b} &= \frac{1}{b} \frac{1}{1+\frac{a}{b}t} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-a}{b}\right)^n t^n, \quad R = \left|\frac{b}{a}\right|, \text{ pour } a, b \neq 0 \\ \frac{1}{1-t^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}, \quad R = +1 \\ \frac{1}{1+t^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}, \quad R = +1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2^n n!} t^{2n}, \quad R = +1 \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2^n n!} t^{2n}, \quad R = +1\end{aligned}$$

Par dérivation

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1}, \quad R = +1$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$:

$$\frac{1}{(1-t)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{p!} t^{n-p}, \quad R = +1$$

Par intégration

Cette technique est spécialement utile pour des fonctions dont la dérivée admet un développement en séries entières connues. En particulier, cela s'applique à la fonction logarithme népérien (\ln), défini sur $]0, +\infty[$ et aux fonctions réciproques des fonctions circulaires : arctangente (\arctan) définie sur $] -\infty, +\infty[$, arcsinus (\arcsin) et arccosinus (\arccos) définies sur $[-1, +1]$ ainsi qu'aux fonctions réciproques des fonctions hyperboliques, argument sinus hyperbolique ($\operatorname{argsinh}$) et argument tangente hyperbolique (argth), définies sur $] -\infty, +\infty[$:

$$\begin{aligned}
\ln(1+t) &= \int_0^t \frac{ds}{1+s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n, \quad R = +1 \\
\ln(1-t) &= - \int_0^t \frac{ds}{1-s} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} t^n, \quad R = +1 \\
\arctan t &= \int_0^t \frac{ds}{1+s^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = +1 \\
\operatorname{argth} t &= \int_0^t \frac{ds}{1-s^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = +1 \\
\arcsin t &= \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = t + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2^n n!} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = +1 \\
\operatorname{argsinh} t &= \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = t + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2^n n!} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = +1 \\
\arccos t &= \frac{\pi}{2} - \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{\pi}{2} - t - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2^n n!} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = +1
\end{aligned}$$

Remarque. La fonction argument cosinus hyperbolique ($\operatorname{argcosh}$) étant définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ qui n'est pas symétrique par rapport à l'origine, le problème de son développement en série entière à l'origine ne se pose pas.

5.6 Fonction exponentielle complexe

Par extension du cas d'une variable réelle, on définit l'exponentielle complexe par :

5.6.1 Définition. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Cette définition est bien justifiée car on sait que le rayon de convergence de cette série est infini.

Toujours par extension du cas d'une variable réelle, on peut aussi définir les fonctions circulaires cosinus et sinus d'une variable complexe et les fonctions hyperboliques d'une variable complexe par :

5.6.2 Définition. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\cosh z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, & \sinh z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\
\cos z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, & \sin z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

De la même façon, le rayon de convergence de ces séries est $+\infty$.

En appliquant le théorème 5.2.1, la démonstration de la proposition suivante est immédiate à partir des définitions :

5.6.3 Proposition. 1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{aligned}$$

2) Les fonctions \cos et \cosh sont paires et les fonctions \sin et \sinh sont impaires.

En renversant ces formules, on obtient encore :

5.6.4 Proposition. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \cosh z + \sinh z &= e^z, & \cosh z - \sinh z &= e^{-z}, \\ \cos z + i \sin z &= e^{iz}, & \cos z - i \sin z &= e^{-iz}. \end{aligned}$$

On a déjà démontré (application 5.2.2) la propriété fondamentale suivante de la fonction exponentielle :

5.6.5 Théorème. Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

5.6.6 Corollaire. Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^z \neq 0, \quad \frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}, \quad (e^z)^n = e^{nz}.$$

De ce théorème, on peut aussi, par des calculs faciles, déduire les formules trigonométriques et hyperboliques, que l'on connaît déjà dans le cas d'une variable réelle :

5.6.7 Proposition. Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \cosh(z+z') &= \cosh z \cosh z' + \sinh z \sinh z', & \sinh(z+z') &= \sinh z \cosh z' + \cosh z \sinh z', \\ \cos(z+z') &= \cos z \cos z' - \sin z \sin z', & \sin(z+z') &= \sin z \cos z' + \cos z \sin z'. \end{aligned}$$

En utilisant les parités ou imparités des fonctions trigonométriques ou hyperboliques, on obtient aisément des formules analogues avec $z - z'$. On en déduit le corollaire suivant :

5.6.8 Corollaire. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ les fonctions \cos et \sin définies ci-dessus vérifient :

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

où l'on utilise les notations abrégées $\cos^2 t = (\cos t)^2$ et $\sin^2 t = (\sin t)^2$.

Cette méthode donne donc une construction des fonctions \sin et \cos que l'on connaissait déjà par leurs propriétés géométriques.

Cette définition de la fonction exponentielle complexe permet aussi de retrouver le module et l'argument du nombre complexe e^z :

5.6.9 Proposition. Soit $z = x + iy$ la décomposition du nombre complexe z en partie réelle et partie imaginaire. Alors :

- 1) $\Re e^z = e^x \cos y$ et $\Im e^z = e^x \sin y$,
- 2) Le module de e^z est égal à e^x ,
- 3) L'argument de e^z est égal à y .

Démonstration. D'après le théorème 5.6.5 et la proposition 5.6.4, on peut écrire, pour $z = x + iy$: $e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$, ce qui prouve la proposition. \square

5.6.10 Corollaire. i) Pour $t \in \mathbb{R}$, e^{it} est de module 1, sa partie réelle est $\cos t$ et sa partie imaginaire est $\sin t$.

- ii) Un nombre complexe z de module ρ et d'argument t s'écrit $z = \rho e^{it}$.
- iii) $e^z = 1$ si et seulement si $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
- iv) $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
- v) $e^{i\pi} = -1$.

Ce corollaire permet de retrouver en particulier le fait que les fonctions usuelles $\cos t$ et $\sin t$ de la variable réelle t sont périodiques, de période 2π .

Cette définition de la fonction exponentielle d'une variable complexe doit coïncider, dans le cas où on se limite à considérer la fonction d'une variable réelle, avec la fonction exponentielle réelle, définie comme étant la fonction solution de l'équation différentielle avec condition initiale :

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

Or, ceci est attesté par le résultat suivant :

5.6.11 Proposition. La fonction e^t est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(e^t)' = e^t.$$

Démonstration. On sait (théorème 5.3.2) qu'on a le droit de dériver terme à terme les séries entières à l'intérieur du domaine de convergence. Puisque la série de terme général $\frac{t^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini, on peut donc la dériver terme à terme la série sur \mathbb{R} tout entier.

Comme $(\frac{t^n}{n!})' = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, on a bien $(e^t)' = e^t$. \square

5.6.12 Corollaire. Développement en série entières des fonctions réelles \cos et \sin .

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, R = +\infty, \\ \sin t &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, R = +\infty. \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que les fonctions \cos et \sin définies dans la définition 5.6.2 coïncident, dans le cas d'une variable réelle t avec les fonctions habituelles. \square

Remarque. Comme ces fonctions sont définies par des sommes de séries entières de rayon de convergence infini, cette construction redémontre aussi le fait que les fonctions \sin et \cos sont indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} . En dérivant les séries terme à terme, on trouve :

$$\sin' t = \cos t \text{ et } \cos' t = -\sin t.$$

5.6.13 Application. Formule de Moivre.

Soient t_1, t_2, \dots, t_n des nombres réels. Alors :

$$\begin{aligned} & \cos(t_1 + t_2 + \dots + t_n) + i \sin(t_1 + t_2 + \dots + t_n) \\ &= e^{i(t_1 + t_2 + \dots + t_n)} = e^{it_1} e^{it_2} \dots e^{it_n} \\ &= (\cos t_1 + i \sin t_1)(\cos t_2 + i \sin t_2) \dots (\cos t_n + i \sin t_n). \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires de chaque membre, on trouve une expression de $\cos(t_1 + t_2 + \dots + t_n)$ et $\sin(t_1 + t_2 + \dots + t_n)$ en fonction des produits des fonctions $\cos t_j$ et $\sin t_j$ pour $j = 1, 2, \dots, n$.

En particulier, pour $t_1 = t_2 = \dots = t_n$, on retrouve des expressions de $\cos nt$ et $\sin nt$ en fonction des produits de puissances des fonctions $\cos t$ et $\sin t$.

On peut aussi considérer le problème inverse qui consiste à exprimer les puissances $n^{\text{ièmes}}$ de $\cos t$ et $\sin t$ en fonctions linéaires de $\cos jt$, $\sin jt$, pour $j = 1, 2, \dots, n$:

5.6.14 Application. Linéarisation de $\cos^n t$ et $\sin^n t$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} 2^n \cos^n t &= (e^{it} + e^{-it})^n = \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i(n-k)t} e^{-ikt} = \sum_{k=0}^n C_n^k e^{-i(n-2k)t} \\ &= e^{int} + C_n^1 e^{i(n-2)t} + \dots + C_n^{n-1} e^{-i(n-2)t} + e^{-int} \\ &= 2[\cos nt + C_n^1 \cos(n-2)t + C_n^2 \cos(n-4)t + \dots]. \end{aligned}$$

On a évidemment une formule analogue pour la fonction \sin .

Ces formules servent en particulier pour le calcul des primitives.

5.7 Exercices sur le chapitre 5

5.1 Exercice. Soient a, b, c trois réels non nuls. Etudier la série entière de terme général :

$$u_n(t) = (an^2 + bn + c)t^n.$$

Déterminer son rayon de convergence et sa somme.

5.2 Exercice. On rappelle que $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et que $1 + j + j^2 = 0$.

1) Montrer que $1 + 2j + 3j^2 = ij\sqrt{3}$.

2) Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général, défini pour $p > 1$ par

$$u_n(t) = \frac{1}{n}(1 + 2j + 3j^2)^n t^n.$$

3) Pour $|t| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, expliciter la somme partielle $s_n(t)$ et en déduire la somme $s(t)$ de la série entière de terme général $u_n(t)$.

5.3 Exercice. On pose

$$s_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}.$$

- 1) Trouver le rayon de convergence de la série entière de terme général $s_n t^n$.
- 2) En faisant apparaître cette série comme produit de 2 séries, calculer sa somme.

5.4 Exercice. On considère une série entière de terme général $a_n t^n$, de rayon de convergence $R > 0$, et de somme s . On suppose que s est une solution de l'équation différentielle $(1+t^2)f''(t) = 2f(t)$.

- 1) Établir une relation liant pour chaque $n \in \mathbb{N}$ les coefficients a_n et a_{n+2} .
- 2) Déterminer la valeur de a_4 puis de a_{2p} pour tout $p > 2$.
- 3) On suppose désormais que $s(0) = 0$ et $s'(0) = 1$. Calculer a_0 , a_2 et la valeur de a_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$.
- 4) Montrer que la série est une série entière de terme général $a_n t^n$ converge normalement sur l'intervalle $[-1, +1]$. Quel est son rayon de convergence ?
- 5) Posons $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{s'(t) - 1}{t}$ pour $t \neq 0$. Calculer la dérivée g' de g (on trouvera une fraction rationnelle simple).
- 6) Dédire de 5) une expression explicite de la fonction s .

5.5 Exercice. Soit $\alpha > -1$. En utilisant une intégration terme à terme sur $[0, x]$, pour $0 < x < 1$ et un passage à la limite lorsque $x \rightarrow 1$, trouver une série numérique dont la somme vaut :

$$\int_0^1 \frac{t^\alpha}{\sqrt{1-t^4}} dt.$$

5.6 Exercice. On pose

$$f(t, x) = \frac{x \sin t}{1 - 2x \cos t + x^2}.$$

- 1) Développer f en série entière selon les puissances de x .
- 2) Calculer :

$$\int_0^\pi f(t, x) dt.$$

5.8 Corrigé des exercices sur le Chapitre 5

Corrigé de l'exercice 5.1

Les séries entières de termes généraux : $an^2 t^n$, bnt^n , ct^n ont toutes les trois un rayon de convergence égal à 1. Donc le rayon de convergence de la série de terme général $u_n(t)$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Ce rayon de convergence est égal à 1 car la série obtenue pour $t = 1$, c'est-à-dire la série de terme général $an^2 + bn + c$ diverge.

Pour $|t| < 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} t^n &= \frac{1}{1-t} \\ \sum_{n=0}^{\infty} nt^n &= \frac{t}{(1-t)^2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n^2 t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} nt^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)t^n = t \left[\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{2t}{(1-t)^3} \right]. \end{aligned}$$

La somme de la série en tière de terme général $u_n(t)$ est donc

$$s(t) = \frac{at(1+t)}{(1-t)^3} + \frac{bt}{(1-t)^2} + \frac{c}{1-t}.$$

Corrigé de l'exercice 5.2

1) $1 + 2j + 3j^2 = 1 - 1 + i\sqrt{3} - \frac{3}{2} - \frac{3i\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = ij\sqrt{3}.$

2) On pose $\alpha = 1 + 2j + 3j^2 = ij\sqrt{3}$. Le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_n(t) = \frac{1}{n}(1 + 2j + 3j^2)^n t^n = \frac{1}{n}(ij\sqrt{3})^n t^n$ est donc $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3) On a :

$$s_n(t) = \sum_{p=1}^n \frac{\alpha^p t^p}{p}.$$

On en déduit :

$$s'_n(t) = \sum_{p=1}^n \alpha^p t^{p-1} = \alpha \frac{1 - \alpha^n t^n}{1 - \alpha t}.$$

D'où

$$s_n(x) = \alpha \int_0^x \frac{1}{1 - \alpha t} dt - \alpha^{n+1} \int_0^x \frac{t^n}{1 - \alpha t} dt.$$

Etudions le deuxième terme : $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ étant fixé, le terme $\frac{1}{1 - \alpha t}$ est borné sur l'intervalle d'intégration. Soit M une borne. Alors

$$\alpha^{n+1} \int_0^x \frac{t^n}{1 - \alpha t} dt \leq M \frac{|\alpha x|^{n+1}}{n+1} \leq M \frac{1}{n+1}.$$

Ce terme tend donc vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. On en déduit :

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \alpha \int_0^x \frac{1}{1 - \alpha t} dt.$$

Corrigé de l'exercice 5.3

1) On a : $1 \leq s_n \leq n$. Les rayons de convergence des séries entières de termes généraux t^n et nt^n sont 1, donc il en est de même de celui de la série entière de terme général $s_n t^n$.

2) On écrit : $s_n t^n = \sum_{p=1}^n \frac{t^p}{p} t^{n-p}$ et cette série entière est donc bien le produit des séries entières de termes généraux $\frac{t^n}{n}$ et t^n , dont les sommes respectives sont : $-\ln(1-t)$ et $\frac{1}{1-t}$ pour $|t| < 1$. Donc, pour $|t| < 1$:

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n t^n = -\frac{\ln(1-t)}{1-t}.$$

Corrigé de l'exercice 5.4

1) On écrit :

$$(1+t^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

ou encore, en posant $p = n - 2$ dans la première somme :

$$\sum_{p=0}^{\infty} (p+2)(p+1)a_{p+2}t^p + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n t^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

En rassemblant les termes de même degré, on obtient :

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = (2 - n(n-1))a_n = -(n+1)(n-2)a_n,$$

c'est-à-dire

$$(n+2)a_{n+2} = -(n-2)a_n.$$

2) En prenant $n = 2$, on trouve $a_4 = 0$ donc aussi $a_{2p} = 0$ pour tout $p > 2$.

3) Les conditions $s(0) = 0$ et $s'(0) = 1$ impliquent $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ donc aussi $a_2 = 0$. La valeur de a_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$ se calcule par récurrence à partir de a_1 :

$$\text{pour } n = 1, a_3 = \frac{1}{3}$$

$$\text{pour } n = 3, a_5 = -\frac{1}{5}a_3 = -\frac{1}{3 \times 5}$$

Supposons que jusqu'à l'ordre $2p-1$, pour $p \geq 2$ on ait : $a_{2p-1} = \frac{(-1)^p}{(2p-1)(2p-3)}$, alors

$$\text{on obtient : } a_{2p+1} = -\frac{2p-3}{2p+1} \frac{(-1)^p}{(2p-1)(2p-3)} = \frac{(-1)^{p+1}}{(2p+1)(2p-1)}$$

La formule est vérifiée à l'ordre $2p+1$ et donc la récurrence est bien vérifiée et on a :

$$s(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} t^{2p+1}}{(2p-1)(2p+1)}.$$

4) La série entière de terme général $a_n t^n$ est majorée sur $[-1, +1]$ par la série numérique de terme général $\frac{1}{(n+1)(n-1)}$ qui est une série convergente. La série entière de terme général $a_n t^n$ converge donc normalement sur l'intervalle $[-1, +1]$.

Son rayon de convergence est 1 puisque $\frac{a_n+2}{a_n} \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

5) En dérivant terme à terme la somme de la série entière de terme général $s_n(t)$, on peut

développer la fonction $g(t) = \frac{s'(t) - 1}{t}$ pour $t \in [-1, +1]$, $t \neq 0$, soit :

$$g(t) = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} t^{2p}}{(2p-1)} - 1}{t} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} t^{2p-1}}{2p-1}.$$

D'où en dérivant terme à terme :

$$g'(t) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p t^{2p} = \frac{1}{1+t^2}.$$

En intégrant, on trouve, avec la condition $g(0) = 0$, $g(t) = \arctan t$.

6) On en déduit que la fonction s peut s'écrire :

$$s(x) = \int_0^x t \arctan t \, dt + x.$$

Corrigé de l'exercice 5.5

Pour $|u| < 1$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-u}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n,$$

où $a_n = \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots (2n)} = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$. On en déduit, pour $|t| < 1$:

$$\frac{t^\alpha}{\sqrt{1-t^4}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{4n+\alpha}.$$

Soit $x \in [0, 1[$ fixé. La série entière de terme général $a_n t^{4n+\alpha}$ converge normalement sur $[0, x]$ puisqu'elle est dominée par la série numérique de terme général $a_n x^{4n+\alpha}$ qui converge. On peut donc l'intégrer terme à terme sur $[0, x]$, soit :

$$\int_0^x \frac{t^\alpha}{\sqrt{1-t^4}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^{4n+\alpha} dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{4n+\alpha+1}}{4n+\alpha+1}.$$

Posons, pour $x \in [0, 1[$

$$f(x) = \int_0^x \frac{t^\alpha}{\sqrt{1-t^4}} dt, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{4n+\alpha+1}}{4n+\alpha+1}.$$

On vient de démontrer que pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = g(x)$. Il est clair que

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \int_0^1 \frac{t^\alpha}{\sqrt{1-t^4}} dt.$$

Il suffit donc de calculer $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$. Comme $g(x)$ est la somme d'une série de fonctions continues sur $[0, 1]$, il suffit de montrer que la série est normalement convergente sur cet intervalle, pour obtenir l'égalité $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$. Pour cela, montrons que la série de terme général $b_n = \frac{a_n}{4n+\alpha+1}$ qui domine la série entière de terme général $a_n \frac{x^{4n+\alpha+1}}{4n+\alpha+1}$ sur $[0, 1]$, est convergente.

On a :

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{2n-1}{2n} \frac{4n+\alpha-3}{4n+\alpha+1} = 1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ce quotient tend vers 1 lorsque $n \rightarrow \infty$, on est donc dans le cas où le test de d'Alembert ne permet pas de conclure.

On va donc comparer cette série avec la série de terme général $c_n = \frac{1}{n^q}$, avec $1 < q < \frac{3}{2}$, qui est convergente.

On a : $\frac{c_n}{c_{n-1}} = 1 - \frac{q}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\text{Donc } \frac{c_n}{c_{n-1}} - \frac{b_n}{b_{n-1}} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{3}{2} - q)}{n}.$$

On en déduit que, à partir d'un certain rang, on a : $\frac{c_n}{c_{n-1}} \geq \frac{b_n}{b_{n-1}}$, ce qui, de proche en

proche, implique que $b_n \leq \frac{b_1}{c_1} c_n$.

Comme la série de terme général c_n converge, la série de terme général b_n converge également.

On en déduit que la fonction g est continue sur $[0, 1]$ et par suite :

$$\begin{aligned} g(1) &= \int_0^1 \frac{t^\alpha}{\sqrt{1-t^4}} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{4n + \alpha + 1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}(4n + \alpha + 1)}. \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5.6

1) On a

$$f(t, x) = \frac{x \sin t}{1 - 2x \cos t + x^2} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{1 - x e^{it}} - \frac{1}{1 - x e^{-it}} \right].$$

Donc, pour $|x| < 1$,

$$f(t, x) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} x^n (e^{nit} - e^{-nit}) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin nt.$$

2) Soit $|x| < 1$ fixé. La série de fonctions de terme général $u_n(t) = x^n \sin nt$ est normalement convergente sur le domaine $t \in [0, \pi]$ car elle est dominée par la série numérique convergente de terme général x^n .

On peut donc l'intégrer terme à terme sur $[0, \pi]$, soit :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^\pi f(t, x) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\pi x^n \sin nt dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[-\frac{\cos nt}{n} \right]_0^\pi = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m+1} = 2 \operatorname{argth} x. \end{aligned}$$

Chapitre 6

Séries trigonométriques

6.1 Définitions et convergence

Comme les séries entières, les séries trigonométriques sont des séries de fonctions d'une variable réelle t , d'une forme particulière.

6.1.1 Définition. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de scalaires, réels ou complexes. Une série trigonométrique est une série de fonctions de terme général :

$$u_n(t) = a_n \cos nt + b_n \sin nt.$$

Puisque $\sin 0 = 0$, on peut supposer que $b_0 = 0$.

En utilisant les fonctions e^{int} et e^{-int} , on a une autre représentation de ces séries :

6.1.2 Proposition. Le terme général d'une série trigonométrique s'écrit :

$$u_0(t) = c_0 \text{ et } \forall n > 1, u_n(t) = c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int},$$

où

$$c_0 = a_0 \text{ et } \forall n > 1, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Démonstration. On écrit $e^{int} = \cos nt + i \sin nt$ et $e^{-int} = \cos nt - i \sin nt$. D'où en remplaçant : $c_n + c_{-n} = a_n$ et $c_n - c_{-n} = -ib_n$. \square

Nous utiliserons plutôt l'écriture exponentielle qui donne des calculs plus simples.

6.1.3 Notations. Nous conviendrons de noter

$$(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}),$$

une série trigonométrique définie par son terme général :

$$u_0(t) = c_0 \text{ et } \forall n > 1, u_n(t) = c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}.$$

Il faut remarquer que l'entier $n = 0$ ne joue pas le même rôle que les autres entiers.

Dans les chapitres précédents, nous avons déjà rencontré des cas de convergence des séries trigonométriques :

6.1.4 Proposition. i) Si les séries numériques de terme général c_n et c_{-n} sont absolument convergentes, la série trigonométrique de terme général $(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$ est uniformément convergente sur \mathbb{R} .

ii) Si les suites $(c_n)_{n>1}$ et $(c_{-n})_{n>1}$ sont positives décroissantes et si elles convergent vers 0, la série trigonométrique de terme général $(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $0 < \alpha < \pi$.

Démonstration. i) Si les séries numériques de termes généraux c_n et c_{-n} sont absolument convergentes, on écrit :

$$\forall n > 1, \forall t \in \mathbb{R}, |u_n(t)| \leq |c_n| + |c_{-n}|.$$

La série de terme général u_n est donc normalement convergente sur \mathbb{R} et donc uniformément convergente sur \mathbb{R} par la proposition 4.2.10.

ii) On va utiliser la transformation d'Abel (théorème 2.5.1 et corollaire 2.5.5) :

On commence par majorer pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes

$$A_n(t) = \sum_{j=0}^n e^{ijt} \text{ et } A_n(-t) = \sum_{j=0}^n e^{-ijt},$$

sur l'intervalle $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $0 < \alpha < \pi$ sont fixés :

$$A_n(t) = \sum_{j=0}^n e^{ijt} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t} \sin(n+1)\frac{t}{2}}{e^{i\frac{t}{2}} \sin \frac{t}{2}}.$$

On en déduit que pour $t \in [2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$,

$$|A_n(t)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{t}{2}|} \leq \frac{1}{|\sin \frac{\alpha}{2}|}.$$

De la même façon, on obtient aussi : $\forall t \in [2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$,

$$|A_n(-t)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\alpha}{2}|}.$$

On vérifie le critère de Cauchy uniforme (4.2.7) pour la suite des sommes partielles $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la série de terme général u_n , en écrivant : $\forall t \in [2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$,

$$\begin{aligned} s_q(t) - s_{p-1}(t) &= \sum_{n=p}^q u_n(t) = \sum_{n=p}^q (c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) \\ &= \sum_{n=p}^q [(A_n - A_{n-1})(t) c_n + (A_n - A_{n-1})(-t) c_{-n}] \\ &= \sum_{n=p}^q [A_n(t) c_n + A_n(-t) c_{-n}] - \sum_{n=p}^q [A_{n-1}(t) c_n + A_{n-1}(-t) c_{-n}] \\ &= A_q(t) c_q + A_q(-t) c_{-q} - A_{p-1}(t) c_p - A_{p-1}(-t) c_{-p} \\ &\quad + \sum_{n=p}^{q-1} [A_n(t) (c_n - c_{n+1})] + \sum_{n=p}^{q-1} [A_n(-t) (c_{-n} - c_{-(n+1)})]. \end{aligned}$$

D'où l'on déduit que :

$$\left| \sum_{n=p}^q u_n(t) \right| \leq |A_q(t)|c_q + |A_{p-1}(t)|c_p + \sum_{n=p}^{q-1} |A_n(t)|(c_n - c_{n+1}) \\ + |A_q(-t)|c_{-q} + |A_{p-1}(-t)|c_{-p} + \sum_{n=p}^{q-1} |A_n(-t)|(c_{-n} - c_{-(n+1)}).$$

Donc pour tout $t \in [2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$,

$$\left| \sum_{n=p}^q u_n(t) \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\alpha}{2}|} [(c_p + c_q) + (c_{-p} + c_{-q}) + (c_p - c_q) + (c_{-p} - c_{-q})] \\ = \frac{2(c_p + c_{-p})}{|\sin \frac{\alpha}{2}|}.$$

Ce dernier terme tend vers 0 par hypothèse. La suite des sommes partielles de la série de terme général u_n est uniformément de Cauchy sur l'intervalle $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$ et donc convergente, ce qui veut bien dire que la série de terme général u_n converge uniformément sur cet intervalle. \square

Les résultats de la proposition 6.1.4 ont des analogues pour la représentation des séries trigonométriques avec les fonctions $\cos nt$ et $\sin nt$:

6.1.5 Proposition. i) Si les séries numériques de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes, la série trigonométrique de terme général $(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ est uniformément convergente sur \mathbb{R} .

ii) Si les suites $(a_n)_{n>1}$ et $(b_n)_{n>1}$ sont positives décroissantes et si elles convergent vers 0, la série trigonométrique de terme général $(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$, où $k \in \mathbb{Z}$ et $0 < \alpha < \pi$.

6.1.6 Exemple. i) Les séries de termes généraux $\frac{\sin nt}{n^2}$ et $\frac{\cos nt}{n^2}$ sont uniformément convergentes sur \mathbb{R} .

ii) La série de terme général $\frac{\cos nt}{n}$ converge uniformément sur tous les intervalles de la forme $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$, $0 < \alpha < \pi$. Elle converge donc simplement sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. On vérifie aisément qu'elle ne converge pas simplement sur \mathbb{R} tout entier, voir par exemple en $t = 0$.

iii) La série de terme général $\frac{\sin nt}{n}$ converge uniformément sur tous les intervalles de la forme $[2k\pi + \alpha, 2(k+1)\pi - \alpha]$, $0 < \alpha < \pi$. Elle converge donc simplement sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. On vérifie aisément qu'elle converge simplement sur \mathbb{R} tout entier.

6.1.7 Proposition. (Série trigonométrique associée à une série entière)

On considère une série entière de terme général $a_n z^n$ et de rayon de convergence R . Alors pour tout $r < R$, la série trigonométrique de terme général $a_n r^n e^{int}$ converge normalement sur \mathbb{R} .

Démonstration. Par définition du rayon de convergence d'une série entière, pour $r < R$, la série numérique de terme général $a_n r^n$ est absolument convergente (théorème 5.1.2). Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n r^n e^{int}| \leq |a_n| r^n$. Donc la série trigonométrique de terme général $a_n r^n e^{int}$ est dominée sur \mathbb{R} en module par une série numérique convergente et par suite elle est bien normalement convergente sur \mathbb{R} . \square

6.1.8 Exemple. Pour $|z| < 1$, nous avons : $\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} z^n$. Donc pour $r < 1$, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1+re^{it}}{1-re^{it}} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{int}.$$

En prenant les parties réelles et imaginaires dans cette dernière égalité, on trouve des identités remarquables, vraies pour $r < 1$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Re \left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}} \right) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos t} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos nt,$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Im \left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}} \right) = \frac{2r \sin t}{1+r^2-2r \cos t} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \sin nt.$$

6.2 Continuité, dérivation et intégration de la somme

6.2.1 Théorème. i) Si les séries numériques de termes généraux c_n et c_{-n} sont absolument convergentes, la somme de la série trigonométrique de terme général

$$(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$$

est continue sur \mathbb{R} .

ii) Si les suites numériques $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives décroissantes et si elles convergent vers 0, la somme de la série trigonométrique de terme général

$$(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$$

est continue sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 6.1.4 et du théorème 4.3.3. \square

6.2.2 Théorème. Si les séries numériques de termes généraux nc_n et nc_{-n} sont absolument convergentes, la somme de la série trigonométrique de terme général

$$(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$$

est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est la somme de la série de terme général

$$(inc_n e^{int} - inc_{-n} e^{-int}).$$

Démonstration. Par le théorème de comparaison 2.4.2, l'hypothèse entraîne en particulier que les séries numériques de termes généraux c_n et c_{-n} sont absolument convergentes. Les séries trigonométriques de termes généraux $(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$ et $(nc_n e^{int} + nc_{-n} e^{-int})$ sont donc toutes les deux normalement convergentes sur \mathbb{R} et on peut appliquer le théorème 4.4.5. \square

6.2.3 Théorème. *Si les séries numériques de termes généraux c_n et c_{-n} sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique de terme général*

$$\left[\int_0^t (c_n e^{ins} + c_{-n} e^{-ins}) ds \right]$$

est convergente sur \mathbb{R} et a pour somme

$$\int_0^t \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (c_n e^{ins} + c_{-n} e^{-ins}) \right] ds.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 4.5.3, puisque, sous cette hypothèse, la série trigonométrique de terme général $(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$ est normalement convergente sur \mathbb{R} . \square

On a bien entendu des résultats analogues pour la représentation des séries trigonométriques avec les fonctions $\cos nt$ et $\sin nt$:

6.2.4 Théorème. i) *Si les séries numériques de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes, la somme de la série trigonométrique de terme général*

$$(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

est continue sur \mathbb{R} .

ii) *Si les suites numériques $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont positives décroissantes et si elles convergent vers 0, la somme de la série trigonométrique de terme général*

$$(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

est continue sur $\mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.

6.2.5 Théorème. *Si les séries numériques de termes généraux na_n et nb_n sont absolument convergentes, la somme de la série trigonométrique de terme général $(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est la somme de la série de terme général $(-na_n \sin nt + nb_n \cos nt)$.*

6.2.6 Théorème. *Si les séries numériques de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes, alors la série de terme général*

$$\left[\int_0^t (a_n \cos ns + b_n \sin ns) ds \right]$$

est convergente sur \mathbb{R} et a pour somme

$$\int_0^t \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos ns + b_n \sin ns) \right] ds.$$

6.3 Développement en séries trigonométriques

Comme dans l'étude des séries entières, on se pose le problème du développement d'une fonction f donnée en série trigonométrique, c'est-à-dire que l'on étudie l'existence d'une série trigonométrique dont f est la somme. Ce problème est difficile et nous n'étudierons ici que des solutions très partielles.

Étudions d'abord la somme d'une série trigonométrique normalement convergente :

6.3.1 Proposition. *Supposons les séries numériques de termes généraux c_n et c_{-n} absolument convergentes et soit s la somme de la série trigonométrique de terme général $(c_n e^{ins} + c_{-n} e^{-ins})$. Alors :*

- i) *La fonction $t \rightarrow s(t)$ est périodique de période 2π .*
- ii) *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $2\pi c_k = \int_0^{2\pi} s(t) e^{-ikt} dt$.*

Démonstration. La propriété i) est évidente.

Pour démontrer la propriété ii), on commence par calculer, pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} p+q \neq 0, \quad \int_0^{2\pi} e^{ipt} e^{iqt} dt &= \left[\frac{e^{i(p+q)t}}{p+q} \right]_0^{2\pi} = 0 \\ p+q = 0, \quad \int_0^{2\pi} e^{ipt} e^{iqt} dt &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

On multiplie alors le terme général de la série trigonométrique par e^{int} ou e^{-int} , $n \in \mathbb{N}$ et en vertu du théorème 6.2.3, on peut l'intégrer terme à terme. Le calcul précédent donne le résultat immédiatement. \square

6.3.2 Corollaire. *Supposons les séries numériques de termes généraux c_n et c_{-n} absolument convergentes et soit s la somme de la série trigonométrique de terme général $(c_n e^{ins} + c_{-n} e^{-ins})$.*

Si la fonction $t \rightarrow s(t)$ est paire sur \mathbb{R} , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{-n} = c_n$

Si cette fonction est impaire sur \mathbb{R} , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{-n} = -c_n$.

Montrons les propriétés analogues pour la représentation des séries trigonométriques à l'aide des fonctions cos et sin :

6.3.3 Proposition. *Supposons les séries numériques de termes généraux a_n et b_n absolument convergentes et soit s la somme de la série trigonométrique de terme général $(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$. Alors :*

- i) *La fonction $t \rightarrow s(t)$ est périodique de période 2π .*
- ii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\pi a_n = \int_0^{2\pi} s(t) \cos nt dt$ et $\pi b_n = \int_0^{2\pi} s(t) \sin nt dt$.*
- iii) *$2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} s(t) dt$.*

Démonstration. La propriété i) est évidente.

La propriété ii) est une conséquence du calcul suivant :

Pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{i(p+q)t} dt &= \int_0^{2\pi} [(\cos pt \cos qt - \sin pt \sin qt) + i(\sin pt \cos qt + \cos pt \sin qt)] dt \\ &= 2\pi \delta_{p,-q} \end{aligned}$$

Rappelons que $\delta_{p,-q} = 0$ si $p + q \neq 0$ et $= 1$ si $p + q = 0$.

Supposons maintenant que n et m sont deux entiers naturels non nuls et écrivons cette égalité pour les couples (n, m) et $(n, -m)$:

$$\int_0^{2\pi} [(\cos nt \cos mt - \sin nt \sin mt) + i(\sin nt \cos mt + \cos nt \sin mt)] dt = 2\pi \delta_{n,-m} = 0,$$

car $m + n \neq 0$.

$$\int_0^{2\pi} [(\cos nt \cos mt + \sin nt \sin mt) + i(\sin nt \cos mt - \cos nt \sin mt)] dt = 2\pi \delta_{n,m},$$

et cette expression vaut 0 dès que $n \neq m$.

En séparant les parties imaginaires et les parties réelles puis en faisant successivement des sommes et des différences, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos nt \cos mt dt &= \int_0^{2\pi} \sin nt \sin mt dt = 0 \text{ si } n \neq m, \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 nt dt &= \int_0^{2\pi} \sin^2 nt dt = \pi, \\ \int_0^{2\pi} \cos nt \sin mt dt &= 0 \text{ pour tout } n, m \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

On multiplie alors le terme général de la série trigonométrique par $\cos nt$ ou $\sin nt$ et en vertu du théorème 6.2.3, on peut l'intégrer terme à terme. Le calcul précédent donne le résultat immédiatement.

La propriété *iii*) est immédiate en intégrant terme à terme de 0 à 2π la série trigonométrique de somme s , ce que l'on a le droit de faire d'après le théorème 6.2.3. \square

6.3.4 Corollaire. *Supposons les séries numériques de termes généraux a_n et b_n absolument convergentes et soit s la somme de la série trigonométrique de terme général $(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$.*

Si la fonction $t \rightarrow s(t)$ est paire sur \mathbb{R} , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$

Si cette fonction est impaire sur \mathbb{R} , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

Démonstration. Supposons par exemple s paire.

Dans ce cas, la fonction $t \rightarrow s(t) \sin nt$ est impaire pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par périodicité, on peut écrire :

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} s(t) \sin nt dt = \int_{-\pi}^{+\pi} s(t) \sin nt dt = 0.$$

La démonstration est analogue pour le cas impair. \square

Nous pouvons maintenant définir la série de Fourier d'une fonction périodique :

6.3.5 Définition. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , périodique de période 2π , intégrable sur $[0, 2\pi]$. On appelle série de Fourier de f et on note $SF(f)$ la série trigonométrique de terme général

$$(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}),$$

respectivement :

$$(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

où les coefficients, appelés coefficients de Fourier de f sont donnés par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, 2\pi c_n = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

respectivement :

$$\pi a_n = \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt, \pi b_n = \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt, 2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} f(t) dt.$$

En utilisant les calculs précédents, on obtient immédiatement :

6.3.6 Proposition. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , périodique de période 2π , intégrable sur $[0, 2\pi]$ et $(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}) = (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ sa série de Fourier.

Si la fonction f est paire sur \mathbb{R} , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$ et $c_{-n} = c_n$.

Si f est impaire sur \mathbb{R} , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ et $c_{-n} = -c_n$.

Nous allons étudier un cas de convergence des séries de Fourier. Donnons d'abord une notation :

6.3.7 Notations. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et soit $t_0 \in \mathbb{R}$.

Si la limite de $f(t)$ existe quand $t \rightarrow t_0$ par valeurs supérieures, on notera

$$f(t_0 + 0) = \lim_{t \rightarrow t_0, t > t_0} f(t)$$

.

De même, si la limite de $f(t)$ existe quand $t \rightarrow t_0$ par valeurs inférieures, on notera

$$f(t_0 - 0) = \lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} f(t).$$

On a besoin d'un lemme :

6.3.8 Lemme. Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$. On a :

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt = \lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos \lambda t dt = 0.$$

Démonstration. Supposons d'abord la fonction f en escalier, c'est-à-dire qu'il existe un découpage de l'intervalle $[a, b]$, tel que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ et f soit constante égale à α_j sur chaque intervalle $]a_j, a_{j+1}[$. On peut alors écrire :

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = \sum_{j=0}^k \alpha_j \int_{a_j}^{a_{j+1}} e^{i\lambda t} dt = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{e^{i\lambda a_{j+1}} - e^{i\lambda a_j}}{i\lambda}.$$

D'où

$$\left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \sum_{j=0}^k \frac{2|\alpha_j|}{|\lambda|}$$

Ce qui prouve bien que

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0.$$

Si f est intégrable sur $[a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier φ et η sur $[a, b]$ telles que

$$\forall t \in [a, b], |f(t) - \varphi(t)| \leq \eta(t) \text{ et } \int_a^b \eta(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On peut alors écrire :

$$\int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda t} dt + \int_a^b [f(t) - \varphi(t)] e^{i\lambda t} dt.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \right| &\leq \left| \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right| + \left| \int_a^b [f(t) - \varphi(t)] e^{i\lambda t} dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right| + \int_a^b |f(t) - \varphi(t)| dt \\ &\leq \left| \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Comme φ est en escalier, d'après la première partie de la démonstration, il existe $A > 0$ tel que si $\lambda \geq A$, alors

$$\left| \int_a^b \varphi(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que pour $\lambda \geq A$,

$$\left| \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien que

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0.$$

Les cas des fonctions $\sin \lambda t$ et $\cos \lambda t$ se traitent de la même façon. □

Avant d'énoncer le théorème principal, on peut citer un corollaire de ce lemme :

6.3.9 Corollaire. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , périodique de période 2π et intégrable sur $[0, 2\pi]$, alors les suites $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ [respectivement $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$] de ses coefficients de Fourier convergent vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Voici maintenant le théorème de Dirichlet :

6.3.10 Théorème. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , périodique de période 2π , intégrable sur $[0, 2\pi]$. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$i) \quad f(t_0 + 0) = \lim_{t \rightarrow t_0, t > t_0} f(t) \text{ et } f(t_0 - 0) = \lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} f(t) \text{ existent}$$

$$ii) \quad \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0 + 0)}{h} \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0, h < 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0 - 0)}{h} \text{ existent}$$

alors la série de Fourier de f converge au point t_0 et a pour somme

$$\frac{1}{2} [f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)].$$

En particulier si f est continue et dérivable en t_0 alors la série de Fourier de f converge au point t_0 et a pour somme $f(t_0)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n(t_0) = c_0 + \sum_{j=1}^n [c_j e^{ijt_0} + c_{-j} e^{-ijt_0}] = \sum_{j=-n}^{+n} c_j e^{ijt_0},$$

où les coefficients c_j pour $j \in \mathbb{Z}$ sont les coefficients de Fourier de la fonction f . D'après la définition 6.3.5, on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_n(t_0) &= \sum_{j=-n}^{+n} e^{ijt_0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ijt} f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{j=-n}^{+n} e^{ijt_0} e^{-ijt} f(t) \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{j=-n}^{+n} e^{ij(t_0-t)} \right] f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{2\pi-t_0} \left[\sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju} \right] f(t_0 + u) du, \end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variable $u = t - t_0$.

Comme la fonction à intégrer est périodique de période 2π , cette intégrale est encore égale à :

$$S_n(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju} \right] f(t_0 + u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju} \right] f(t_0 + u) du.$$

Comme dans la proposition 6.3.5, on peut calculer la somme $\sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju}$:

pour $u \in 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju} = 2n + 1,$$

pour $u \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju} &= e^{-inu} \sum_{k=0}^{2n} e^{iku} = e^{-inu} \frac{1 - e^{(2n+1)iu}}{1 - e^{iu}} \\ &= e^{-inu} \frac{e^{\frac{(2n+1)}{2}iu} e^{-\frac{(2n+1)}{2}iu} - e^{\frac{(2n+1)}{2}iu}}{e^{\frac{iu}{2}} e^{-\frac{iu}{2}} - e^{\frac{iu}{2}}} = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}}. \end{aligned}$$

On remarque que

$$2n+1 = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}u}{\sin \frac{u}{2}},$$

donc les deux expressions de cette somme coïncident en $u = 0$.

Si la fonction $u \rightarrow \frac{f(t_0+u)}{\sin \frac{u}{2}}$ était intégrable, on pourrait appliquer le lemme 6.3.8 et cela nous permettrait de conclure que $S_n(t_0)$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En général, sous les hypothèses du théorème, ce n'est pas le cas et nous devons considérer la fonction

$$u \rightarrow \frac{f(t_0+u) - f(t_0+0)}{\sin \frac{u}{2}} = \frac{f(t_0+u) - f(t_0+0)}{u} \frac{u}{\sin \frac{u}{2}},$$

qui elle, est continue en 0 par hypothèse et donc aussi intégrable sur $[0, \pi]$.

En appliquant le lemme 6.3.8, on obtient que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{f(t_0+u) - f(t_0+0)}{\sin \frac{u}{2}} \sin \frac{2n+1}{2}u \, du = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{f(t_0+0)}{\sin \frac{u}{2}} \sin \frac{2n+1}{2}u \, du &= \int_0^\pi f(t_0+0) \left(\sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju} \right) du \\ &= f(t_0+0) \int_0^\pi \left(\sum_{j=-n}^{+n} e^{-iju} \right) du = \pi f(t_0+0). \end{aligned}$$

On en conclut donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{f(t_0+u)}{\sin \frac{u}{2}} \sin \frac{2n+1}{2}u \, du = \pi f(t_0+0).$$

De la même façon, on montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^0 \frac{f(t_0+u)}{\sin \frac{u}{2}} \sin \frac{2n+1}{2}u \, du = \pi f(t_0-0).$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(t_0) = \frac{1}{2} [f(t_0+0) + f(t_0-0)]. \quad \square$$

6.3.11 Exemple. i) Soit f la fonction de période 2π sur \mathbb{R} définie par : $f(t) = 1$ pour $t \in]0, \pi[$, $f(t) = -1$ pour $t \in]-\pi, 0[$, $f(0) = f(\pi) = f(-\pi) = 0$. Alors

$$[SF(f)](t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}.$$

ii) Soit g la fonction de période 2π sur \mathbb{R} telle que $g(t) = |t|$ pour $|t| \leq \pi$. Alors,

$$[SF(g)](t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}.$$

iii) Soit h la fonction de période 2π sur \mathbb{R} telle que $h(t) = t^2$ pour $|t| \leq \pi$. Alors,

$$[SF(h)](t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}.$$

Ces trois fonctions vérifient les hypothèses du théorème de Dirichlet en tout point $t \in \mathbb{R}$ et dans les trois cas, on a $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)] = f(t), \quad \frac{1}{2}[g(t+0) + g(t-0)] = g(t), \quad \frac{1}{2}[h(t+0) + h(t-0)] = h(t).$$

Donc :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= [SF(f)](t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}, \\ \forall t \in \mathbb{R}, g(t) &= [SF(g)](t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}, \\ \forall t \in \mathbb{R}, h(t) &= [SF(h)](t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}. \end{aligned}$$

6.3.12 Application. Dans les trois exemples précédents, on obtient des identités remarquables :

$$i) \forall t \in]-\pi, +\pi[, \operatorname{sgnt} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1}.$$

$$ii) \forall t \in [-\pi, +\pi], |t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2}.$$

D'où en prenant $t = 0$,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En utilisant le calcul suivant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2},$$

on en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$iii) \forall t \in [-\pi, +\pi], t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nt}{n^2}.$$

D'où en prenant $t = 0$,

$$-\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Remarque. Le théorème de Dirichlet donne des conditions suffisantes pour qu'une série de Fourier converge en un point t_0 . Il s'agit donc d'une convergence simple. Dans un deuxième temps, on peut se poser la question de la convergence uniforme de cette série : dans l'exemple 6.3.11, on voit que la série de Fourier de f ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} alors que celle de g converge uniformément. Il n'y a pas de théorème général, pour étudier la convergence uniforme d'une série de Fourier, il faut étudier ces séries au cas par cas.

Nous citons sans démonstration un résultat qui est très utile dans la pratique, le théorème de Parseval :

6.3.13 Théorème. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , périodique de période 2π , intégrable sur $[0, 2\pi]$.

Soit $(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int})$, [respectivement $(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$] la série de Fourier de f . Alors :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt = 2\pi \left[|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) \right] = 2\pi |a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

A titre d'exercice, on peut vérifier le théorème de Parseval lorsque la fonction f est de la forme : $f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^N (c_n e^{nit} + c_{-n} e^{-nit})$. En effet, dans ce cas :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(c_0 + \sum_{n=1}^N (c_n e^{nit} + c_{-n} e^{-nit}) \right) \left(\overline{c_0} + \sum_{m=1}^N (\overline{c_m} e^{-mit} + \overline{c_{-m}} e^{mit}) \right) dt.$$

Comme $\int_{-\pi}^{+\pi} e^{int} e^{imt} dt = 0$ si $n + m \neq 0$ et $\int_{-\pi}^{+\pi} e^{int} e^{imt} dt = 2\pi$ si $n + m = 0$, seuls les produits correspondant aux termes $c_n \overline{c_n}$ et $c_{-n} \overline{c_{-n}}$ ont une intégrale non nulle et on en déduit bien que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)|^2 dt = 2\pi \left[|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) \right].$$

Le cas des coefficients de Fourier $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se traite de la même façon.

Remarque. Le théorème de Parseval est vrai même si f n'est pas la somme de sa série de Fourier.

6.3.14 Application. En utilisant les exemples 6.3.11 ii) et iii), le théorème de Parseval donne de nouvelles identités remarquables :

$$ii) \int_{-\pi}^{\pi} |t|^2 dt = \frac{2}{3} \pi^3 = \pi \left[\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \right].$$

D'où

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

En utilisant le calcul suivant :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{16p^4} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{1}{16} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4},$$

on en déduit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{16}{15} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

$$iii) \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{2}{5} \pi^5 = \pi \left[\frac{2\pi^4}{9} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right],$$

ce qui donne de nouveau d'une autre manière :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

6.4 Exercices sur le chapitre 6

6.1 Exercice. Soit α un nombre réel non entier et soit f une fonction de période 2π , définie sur \mathbb{R} , égale à $\sin \alpha t$ pour $|t| \leq \pi$.

1) Déterminer la série de Fourier de f .

2) La fonction f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?

3) Même questions avec la fonction g , de période 2π , définie sur \mathbb{R} , égale à $\cos \alpha t$ pour $|t| \leq \pi$.

4) A partir des séries de Fourier de f et de g , expliciter la série de Fourier (complexe) de la fonction h de période 2π , définie sur \mathbb{R} , égale à $e^{i\alpha t}$ pour $|t| \leq \pi$.

5) En déduire l'identité :

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2}.$$

6.2 Exercice. I Soit f une fonction continue et périodique, définie sur \mathbb{R} . On désigne par $c_n(f) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$, les coefficients de Fourier de f .

On note $S_k f(u) = \sum_{n=-k}^k c_n(f) e^{inu} = c_0 + \sum_{n=1}^k [c_n(f) e^{inu} + c_{-n}(f) e^{-inu}]$ la somme partielle de la série de Fourier de f .

I1) Pour k et N entiers positifs, on définit

$$D_k(x) = (2\pi)^{-1} \sum_{n=-k}^k e^{inx} = (2\pi)^{-1} \left[1 + \sum_{n=1}^k (e^{inx} + e^{-inx}) \right],$$

et

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(x).$$

Montrer que $\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt = 1$ pour tout $N \geq 0$.

I 2) Montrer que l'on a

$$F_N(x) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \left[\sum_{n=0}^N e^{inx} \right] \left[\sum_{m=0}^N e^{-imx} \right],$$

et en déduire

$$F_N(x) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \left[\frac{\sin[(N+1)x/2]}{\sin(x/2)} \right]^2.$$

I 3) On définit

$$T_N f(u) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k f(u).$$

Montrer que l'on a

$$S_k f(u) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_k(u-t) dt,$$

et

$$T_N f(u) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_N(u-t) dt.$$

II Dans cette partie, $(F_N)_{N \geq 0}$ désigne une suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :

(A) Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $F_N(x) \geq 0$.

(B) Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $F_N(x) = F_N(x + 2\pi)$.

(C) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = 1$.

(D) Pour tout $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$, il existe N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$\int_{-\pi}^{-\alpha} F_N(x) dx + \int_{\alpha}^{\pi} F_N(x) dx \leq \varepsilon.$$

II 1) On définit la suite de fonctions

$$f_N(u) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_N(u-t) dt.$$

Montrer que l'on a aussi

$$f_N(u) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u-s) F_N(s) ds,$$

et

$$f(u) - f_N(u) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(u) - f(u-t)] F_N(t) dt.$$

II 2) En remarquant que f est uniformément continue, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(u) - f(u-t)| F_N(t) dt \leq \varepsilon.$$

II 3) (α, ε) étant donnés par la question précédente, montrer qu'il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$, on a

$$\int_{-\pi}^{-\alpha} |f(u) - f(u-t)| F_N(t) dt + \int_{\alpha}^{\pi} |f(u) - f(u-t)| F_N(t) dt \leq 2M\varepsilon,$$

où $M = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

II 4) En déduire que la suite f_N converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

III 1) Montrer que les fonctions F_N de la partie I vérifient les hypothèses (A), (B) et (C) de la partie II.

III 2) Montrer que pour tout $\alpha \in]0, \pi]$, on a

$$F_N(x) \leq [2(N+1)\pi \sin^2(\alpha/2)]^{-1},$$

pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ tel que $|x| \geq \alpha$, et en déduire que les fonctions F_N de la partie I vérifient l'hypothèse (D) de la partie II.

III 3) En déduire le résultat suivant : Si f est une fonction continue de période 2π , les moyennes de Cesàro $T_N f$ des sommes partielles de sa série de Fourier convergent uniformément vers f sur \mathbb{R} .

6.3 Exercice. On considère la fonction f définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = |\cos t|^3.$$

1) Montrer que la fonction f est paire et continûment dérivable sur \mathbb{R} .

On considère les coefficients de Fourier de f :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad 2\pi c_n &= \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \pi a_n &= \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt dt, \quad \pi b_n = \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt dt, \quad 2\pi a_0 = \int_0^{2\pi} f(t) dt. \end{aligned}$$

2)a) Montrer que $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que $a_n = 0$ si n est impair (intégrer sur l'intervalle $[0, \pi]$ et effectuer le changement de variable $t \rightarrow \pi - t$).

3) a) Déterminer deux nombres réels A et B tels que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \cos^3 t = A \cos t + B \cos 3t.$$

b) En déduire a_n lorsque n est pair (poser $n = 2p$ et distinguer p pair et p impair).

c) Vérifier que $p^4 |a_{2p}|$ tend vers $\frac{3}{2\pi}$ quand p tend vers $+\infty$.

4) Ecrire la série de Fourier de f (réelle ou complexe). Montrer sa convergence simple sur \mathbb{R} et déterminer sa somme.

5) Etudier la convergence uniforme de la série de Fourier de f .

6.5 Corrigé des exercices sur le Chapitre 6

Corrigé de l'exercice 6.1

1) f étant une fonction impaire, on $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin \alpha t \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(\alpha - n)t - \cos(\alpha + n)t] dt \\ &= \frac{\sin \pi(\alpha - n)}{\pi(\alpha - n)} - \frac{\sin \pi(\alpha + n)}{\pi(\alpha + n)} = (-1)^n \frac{2n}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \sin \pi \alpha. \end{aligned}$$

D'où

$$[SF(f)](t) = \sin \pi \alpha \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n \sin nt}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

2) La fonction f est égale à la somme de sa série de Fourier puisqu'elle est de classe C^1 par morceaux, sauf à ses points de discontinuité éventuels $\{(2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

3) g étant une fonction impaire, on $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha t dt = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi},$$

et pour $n > 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos \alpha t \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(\alpha - n)t + \cos(\alpha + n)t] \, dt \\ &= \frac{\sin \pi(\alpha - n)}{\pi(\alpha - n)} + \frac{\sin \pi(\alpha + n)}{\pi(\alpha + n)} = (-1)^n \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \sin \pi\alpha. \end{aligned}$$

D'où

$$[SF(g)](t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\alpha \pi} \sin \pi\alpha \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \cos nt}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

La fonction g est égale à la somme de sa série de Fourier puisqu'elle est de classe C^1 par morceaux, sauf à ses points de discontinuité éventuels $\{(2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

4) En appliquant les formules du cours, on trouve :

$$[SF(h)](t) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{inx}}{(\alpha - n)}.$$

5) On applique le théorème de Parseval à la fonction h :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|^2 \, dt = 2\pi$$

et donc :

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2}.$$

Corrigé de l'exercice 6.2

I 1) On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) \, dt = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \int_{-\pi}^{\pi} D_k(t) \, dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N 2\pi = 1.$$

I 2) On a

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(x) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{k=0}^N \sum_{n=-k}^k e^{inx} = \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{k=-N}^N (N+1 - |k|) e^{ikx},$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi(N+1)} \left(\sum_{m=0}^N e^{imx} \right) \left(\sum_{m=0}^N e^{-imx} \right) &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{m,n=0}^N e^{i(m-n)x} \\ &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \sum_{k=-N}^N (N+1 - |k|) e^{ikx}. \end{aligned}$$

Ces deux fonctions sont donc bien égales et on en déduit :

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \left[\frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} \right] \left[\frac{1 - e^{-i(N+1)x}}{1 - e^{-ix}} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \left[\frac{e^{i(N+1)x/2} \sin((N+1)x/2)}{e^{ix/2} \sin(x/2)} \right] \left[\frac{e^{i-(N+1)x/2} \sin(-(N+1)x/2)}{e^{-ix/2} \sin(-x/2)} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \left[\frac{\sin((N+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right]^2. \end{aligned}$$

I 3) On calcule :

$$\begin{aligned} S_k f(u) &= \sum_{n=-k}^k c_n(f) e^{inu} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-k}^k e^{inu} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-k}^k e^{in(u-t)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_k(u-t) dt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T_N f(u) &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N S_k f(u) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_k(u-t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(u-t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_N(u-t) dt. \end{aligned}$$

II 1) On calcule :

$$\begin{aligned} f_N(u) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) F_N(u-t) dt = - \int_{u+\pi}^{u-\pi} f(u-s) F_N(s) ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(u-s) F_N(s) ds, \end{aligned}$$

par changement de variables $s = u - t$ et par périodicité. D'où en utilisant (C) :

$$f(u) - f_N(u) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(u) - f(u-t)] F_N(t) dt.$$

II 2) f est uniformément continue sur $[0, 2\pi]$ comme fonction continue sur un compact et donc aussi sur \mathbb{R} par périodicité. D'où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|t| \leq \alpha$ implique que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$|f(u) - f(u-t)| \leq \varepsilon.$$

On peut donc multiplier par $F_N(t)$ et intégrer en $t \in [-\alpha, \alpha]$: pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} |f(u) - f(u-t)| F_N(t) dt \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} \varepsilon F_N(t) dt \leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt \leq \varepsilon.$$

en utilisant les hypothèses (A) et (C).

II 3) (α, ε) étant donnés par la question précédente, d'après l'hypothèse (D), il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$, on a

$$\int_{-\pi}^{-\alpha} F_N(t) dt + \int_{\alpha}^{\pi} F_N(t) dt \leq \varepsilon.$$

Donc

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{-\alpha} |f(u) - f(u-t)| F_N(t) dt + \int_{\alpha}^{\pi} |f(u) - f(u-t)| F_N(t) dt \\ &\leq 2M \left[\int_{-\pi}^{-\alpha} F_N(t) dt + \int_{\alpha}^{\pi} F_N(t) dt \right] \leq 2M\varepsilon, \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse (A).

II 4) On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_0 tel que pour $N \geq N_0$, on a pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_N(u) - f(u) &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(u) - f(u-t)] F_N(t) dt \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} [f(u) - f(u-t)] F_N(t) dt + \int_{-\pi}^{-\alpha} [f(u) - f(u-t)] F_N(t) dt \\ &\quad + \int_{\alpha}^{\pi} [f(u) - f(u-t)] F_N(t) dt \\ &\leq \varepsilon + 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

La suite f_N converge donc bien uniformément vers f sur \mathbb{R} .

III 1) Les fonctions F_N de la partie I vérifient (A) d'après l'expression obtenue en I2, (B) car les D_k sont périodiques de période 2π et (C) d'après la question I1.

III 2) En prenant le résultat de la question I 2, comme pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ tel que $|x| \geq \alpha$, on a les majorations suivantes :

$$\sin((N+1)x/2) \leq 1 \text{ et } \sin(x/2) \geq \sin(\alpha/2),$$

on en déduit :

$$F_N(x) \leq [2(N+1)\pi \sin^2(\alpha/2)]^{-1}.$$

D'où :

$$\int_{-\pi}^{-\alpha} F_N(t) dt + \int_{\alpha}^{\pi} F_N(t) dt \leq 2(\pi - \alpha) \left[\frac{1}{2(N+1)\pi \sin^2(\alpha/2)} \right] \leq \frac{(\pi - \alpha)}{\pi \sin^2(\alpha/2)} \frac{1}{N+1}.$$

Comme la suite $\frac{(\pi - \alpha)}{\pi \sin^2(\alpha/2)} \frac{1}{N+1}$ tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$, la suite de fonctions F_N vérifie bien l'hypothèse (D) de la partie II.

III 3) Si f est une fonction continue de période 2π , les moyennes de Cesàro des sommes partielles de sa série de Fourier sont les fonctions $T_N f$ de la partie I. Les fonctions f_N de la partie II coïncident, dans le cas où les F_N sont celles de la partie I, avec les fonctions $T_N f$. On a montré dans la partie II que cette suite de fonctions converge uniformément vers f sur \mathbb{R} , ce qui prouve le résultat cherché.

Corrigé de l'exercice 6.3

1) La fonction f est évidemment paire. Comme f est la composée de la fonction C^∞ : $t \rightarrow \cos t$ et de la fonction $x \rightarrow |x|^3$, pour démontrer que f est C^1 sur \mathbb{R} , il suffit de montrer que $x \rightarrow |x|^3$ est C^1 sur \mathbb{R} . Or cette fonction est évidemment C^1 sur \mathbb{R}^* et sa dérivée vaut $3\operatorname{sgn} x x^2$ pour $x \neq 0$. Or, lorsque $x \rightarrow 0$, cette dérivée a même limite à droite et à gauche égale à 0. Cette fonction est donc bien dérivable en 0, de dérivée nulle et cette dérivée est continue sur \mathbb{R} .

2) a) $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ car f est paire.

b) Pour $n \geq 1$, n impair, on calcule :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos^3 t| \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos^3 t| \cos nt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos^3 s| \cos n(\pi - s) ds = (-1)^n a_n = -a_n. \end{aligned}$$

Donc $a_n = 0$ si n est impair.

3) a) On écrit

$$\cos^3 t = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3it} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-3it}) = \frac{1}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \cos t.$$

b) On a aisément $a_0 = 4/3\pi$ et si $n \geq 1$ est pair, on pose $n = 2p$ et alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\cos^3 t| \cos nt \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{4} \cos 3t + \frac{3}{4} \cos t \right] \cos nt \, dt \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{8} (\cos(n+3)t + \cos(n-3)t) + \frac{3}{8} (\cos(n+1)t + \cos(n-1)t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(n+3)t}{n+3} + \frac{\sin(n-3)t}{n-3} \right]_0^{\pi/2} + \frac{3}{2\pi} \left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1} + \frac{\sin(n-1)t}{n-1} \right]_0^{\pi/2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{1}{2\pi} (-1)^p \left(\frac{1}{2p-3} - \frac{1}{2p+3} \right) - \frac{3}{2\pi} (-1)^p \left(\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p+1} \right) \\ &= \frac{8 \times 3 (-1)^p}{\pi(4p^2-1)(4p^2-9)}. \end{aligned}$$

c) Le terme

$$p^4 |a_{2p}| = \frac{8 \times 3 p^4}{\pi(4p^2-1)(4p^2-9)}$$

tend vers $\frac{3}{2\pi}$ quand p tend vers $+\infty$.

4) La série de Fourier de f est donc :

$$\frac{4}{3\pi} + \frac{24}{\pi} \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p \cos 2pt}{(4p^2-1)(4p^2-9)}.$$

Par le théorème de Dirichlet, puisque f est de classe C^1 sur \mathbb{R} , cette série converge simplement sur \mathbb{R} et a pour somme f .

5) Comme $\left| \frac{(-1)^p \cos 2pt}{(4p^2-1)(4p^2-9)} \right| \leq \frac{C}{p^4}$ la convergence est normale donc uniforme sur \mathbb{R} .

Chapitre 7

Intégrales de Riemann dépendant d'un paramètre

7.1 Théorème de convergence bornée

Dans ce chapitre, nous allons utiliser un théorème, le théorème de convergence bornée, dont nous admettrons la démonstration :

7.1.1 Théorème. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur un intervalle $[a, b]$ telle que :

- 1) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction intégrable f .
- 2) Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b], |f_n(t)| \leq M.$$

Alors :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

7.1.2 Définition. Lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définies sur $[a, b]$, vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b], |f_n(t)| \leq M,$$

on dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée.

Ce théorème se démontre dans un cadre très général, avec des outils que nous n'avons pas développés ici.

On peut remarquer que c'est une extension du théorème 4.5.1.

En effet, l'hypothèse du théorème de convergence bornée est moins forte que la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a, b]$: par exemple, la suite de fonctions t^n sur $[0, 1]$ ne converge pas uniformément sur cet intervalle alors qu'elle converge simplement et est dominée par la fonction constante égale à 1.

En revanche, la conclusion est la même : l'intégrale de la limite de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a, b]$ est égale à la limite de la suite des intégrales des fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[a, b]$.

7.2 Continuité de l'intégrale de Riemann

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et a, b deux réels quelconques. On considère une fonction de deux variables $f(t, x)$ où $t \in [a, b]$ et $x \in I$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On suppose que pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et on s'intéresse à la continuité de la fonction définie pour $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt.$$

7.2.1 Théorème. Soit $f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{K}$, une fonction continue par rapport à chacune des deux variables et bornée sur $[a, b] \times I$. Alors la fonction F , définie pour $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt,$$

est continue sur I . En particulier, on a :

$$\begin{aligned} F(x_0) &= \int_a^b f(t, x_0) dt = \int_a^b \lim_{x \rightarrow x_0} f(t, x) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b f(t, x) dt, \end{aligned}$$

ce qui est une cas d'interversion de limite et d'intégrale.

Démonstration. Remarquons d'abord que l'hypothèse de continuité de la fonction f par rapport à la variable t implique que, quelque soit $x \in I$, la fonction $t \rightarrow f(t, x)$ est intégrable sur $[a, b]$.

Soit $x_0 \in I$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a, b], \forall x \in I, |f(t, x)| \leq M$.

On veut montrer la continuité de F en x_0 : soit $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ convergeant vers x_0 .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n(t) = f(t, x_n)$. Alors, par continuité de la fonction f par rapport à la variable x , la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $f(t, x_0)$.

De plus, cette suite de fonctions est uniformément bornée par M . On peut donc appliquer le théorème de convergence bornée, 7.1.1 : la suite $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F(x_0)$.

Comme ce résultat est valable pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 , on en déduit bien la continuité de F en x_0 et donc par suite sur I tout entier, ce qui prouve le théorème. \square

7.2.2 Exemple. Soit $f(t, x) = \frac{1}{(t^2 + 1)(t^2 + x^2)}$, définie sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_*^+$. La fonction

$$F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2 + 1)(t^2 + x^2)},$$

est continue sur \mathbb{R}_*^+ .

La fonction f est continue par rapport à chacune des deux variables sur son domaine de définition. En revanche, elle n'est pas bornée sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_*^+$.

On va donc utiliser un argument de saturation : soit $a > 0$, alors la fonction f est bornée sur $[0, 1] \times [a, +\infty[$ par $\frac{1}{a^2}$. On peut donc appliquer le théorème 7.2.1 sur ce domaine et on obtient la continuité de F sur $[0, 1] \times [a, +\infty[$.

Comme ceci est valable pour tout $a > 0$, on en déduit que F est continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_*^+$.

Ce résultat va permettre de calculer $F(1)$ facilement :

Pour $x \neq 1$, le calcul de $F(x)$ est simple. En effet :

$$\frac{1}{(t^2 + 1)(t^2 + x^2)} = \frac{1}{x^2 - 1} \frac{1}{t^2 + 1} + \frac{-1}{x^2 - 1} \frac{1}{t^2 + x^2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)(t^2+x^2)} &= \frac{1}{x^2-1} [\operatorname{arctg} t]_0^1 - \frac{1}{x^2-1} \frac{1}{x} \left[\operatorname{arctg} \frac{t}{x} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Le développement de Taylor de la fonction $\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow 1$ est

$$\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{4} - (x-1) \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) + O((x-1)^2).$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

Par la continuité de F en $x_0 = 1$, on obtient alors :

$$F(1) = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

7.3 Dérivabilité de l'intégrale de Riemann

De même, soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et a, b deux réels quelconques. On considère une fonction de deux variables $f(t, x)$ où $t \in [a, b]$ et $x \in I$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On suppose que pour tout $x \in I$, la fonction $t \rightarrow f(t, x)$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et on s'intéresse à la dérivabilité de la fonction définie pour $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt.$$

7.3.1 Théorème. Soit $f : [a, b] \times I \rightarrow \mathbb{K}$, une fonction continue par rapport à chacune des deux variables et bornée sur $[a, b] \times I$. Si f a une dérivée partielle par rapport à x , $\frac{\partial f}{\partial x}$, continue par rapport à chacune des deux variables et bornée sur $[a, b] \times I$, alors la fonction F , définie pour $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt,$$

est dérivable sur I et

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\int_a^b f(t, x) dt \right)' \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt, \end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de dérivée et d'intégrale.

Démonstration. Comme dans le théorème 7.2.1, l'hypothèse de continuité des fonctions f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à la variable t implique que, quelque soit $x \in I$, les fonctions $t \rightarrow f(t, x)$ et $t \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ sont intégrables sur $[a, b]$.

Soit $x_0 \in I$ et soit $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in [a, b], \forall x \in I, |f(t, x)| \leq M \text{ et } \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq M.$$

Comme précédemment, on fixe $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ convergeant vers x_0 . On peut supposer sans perte de généralité que $x_n \neq x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour démontrer la dérivabilité de la fonction F en x_0 , on écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = \int_a^b \left(\frac{f(t, x_n) - f(t, x_0)}{x_n - x_0} \right) dt.$$

On définit la suite de fonction $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $t \in [a, b]$ par :

$$h_n(t) = \frac{f(t, x_n) - f(t, x_0)}{x_n - x_0}$$

Puisque la fonction f est continûment dérivable par rapport à la variable x en x_0 , cette suite converge simplement vers la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)$, qui par hypothèse est intégrable par rapport à la variable t .

De plus, par le théorème des accroissements finis, il existe $y_n \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ tel que $h_n(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, y_n)$. Donc, les fonctions h_n sont donc uniformément bornées par M sur $[a, b]$.

En appliquant le théorème de convergence bornée, 7.1.1, on en déduit que la suite

$$\left(\frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge vers $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt$ quand $n \rightarrow \infty$.

Comme ceci est valable pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 , on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt,$$

ce qui prouve la dérivabilité de F en x_0 et l'égalité

$$F'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt.$$

□

Puisque x_0 est quelconque, ceci montre bien la dérivabilité de F pour tout $x \in I$.

7.3.2 Exemple. Pour $n \geq 1$, on pose, pour $x \neq 0$,

$$F_n(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(t^2 + x^2)^n}.$$

Il est facile de voir que $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{-2nx}{(t^2 + x^2)^{n+1}}$.

Les fonctions f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues par rapport à chacune des deux variables sur leur domaine de définition. En revanche, elles ne sont pas bornées sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_*$.

On va donc à nouveau utiliser un argument de saturation : soit $a, A > 0$, alors les fonctions f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont bornées sur $[0, 1] \times [-A, -a] \cup [a, A]$ par $\frac{1}{a^{2n}}$ et $\frac{2A}{a^{2(n+1)}}$ respectivement. On peut donc appliquer le théorème 7.3.1 sur ce domaine et on obtient la continuité de F sur $[0, 1] \times [-A, -a] \cup [a, A]$.

Comme ceci est valable pour tout $a, A > 0$, on en déduit que F est dérivable sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_*$.

Ce résultat permet de calculer les fonctions F_n par récurrence :

Pour $x \neq 0$, on a :

$$F'_n(x) = -2nx \int_0^1 \frac{dt}{(t^2 + x^2)^{n+1}}.$$

D'où la relation de récurrence : $F'_n(x) = -2nx F_{n+1}(x)$.

Sachant que $F_1(x) = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, cette relation permet de calculer les fonctions F_n .

7.4 Cas où les bornes d'intégration dépendent du paramètre

Comme précédemment, on considère une fonction de deux variables $f(t, x)$ où $t \in [a, b]$ et $x \in I$, I étant un intervalle ouvert de \mathbb{R} , à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On suppose que pour tout $x \in I$, la fonction $t \rightarrow f(t, x)$ est intégrable sur $[a, b]$ et on s'intéresse aux propriétés de la fonction définie pour $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^{v(x)} f(t, x) dt,$$

où la fonction v est définie sur I , à valeurs dans $[a, b]$.

On étudie la continuité et la dérivabilité de F .

7.4.1 Théorème. 1) Soit f une fonction continue par rapport à chacune des deux variables et bornée sur $[a, b] \times I$. Si la fonction v est continue sur I , alors, la fonction F est continue sur I .

2) Soit f une fonction continue par rapport à chacune des deux variables et bornée sur $[a, b] \times I$ telle que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe, est continue par rapport à chacune des deux variables et bornée sur $[a, b] \times I$. Si la fonction v est dérivable sur I , la fonction F est dérivable sur I et

$$F'(x) = \int_a^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt + v'(x) f(v(x), x).$$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$ et soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a, b], \forall x \in I, |f(t, x)| \leq M$.

Sous les hypothèses du 1), on écrit :

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^{v(x_0)} f(t, x) dt + \int_{v(x_0)}^{v(x)} f(t, x) dt - \int_a^{v(x_0)} f(t, x_0) dt.$$

D'après le théorème 7.2.1,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \int_a^{v(x_0)} f(t, x) dt - \int_a^{v(x_0)} f(t, x_0) dt \right| = 0.$$

De plus, on peut écrire :

$$\left| \int_{v(x_0)}^{v(x)} f(t, x) dt \right| \leq \int_{v(x_0)}^{v(x)} |f(t, x)| dt \leq M |v(x) - v(x_0)|.$$

On en déduit, par la continuité de la fonction v en x_0 que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \int_{v(x)}^{v(x_0)} f(t, x) dt \right| = 0.$$

Ceci prouve que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0.$$

La fonction F est donc bien continue en x_0 et donc aussi sur I tout entier.

Sous les hypothèses du 2), quitte à changer sa valeur, on suppose que M est tel que, pour tout $t \in [a, b]$ et $x \in I$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq M$ et on écrit :

$$F(x) = \int_a^{v(x_0)} f(t, x) dt + \int_{v(x_0)}^{v(x)} f(t, x_0) dt + \int_{v(x_0)}^{v(x)} (f(t, x) - f(t, x_0)) dt.$$

La fonction $x \rightarrow \int_a^{v(x_0)} f(t, x) dt$ est dérivable de dérivée en x_0 égale à $\int_a^{v(x_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt$ d'après le théorème 7.3.1.

D'après le théorème 3.3.3, la fonction $y \rightarrow \int_{v(x_0)}^y f(t, x_0) dt$ est dérivable de dérivée en $v(x_0)$ égale à $f(v(x_0), x_0)$.

D'où en composant par la fonction v , la fonction $x \rightarrow \int_{v(x_0)}^{v(x)} f(t, x_0) dt$ est dérivable de dérivée en x_0 égale à $v'(x_0) f(v(x_0), x_0)$.

Finalement, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left| \int_{v(x_0)}^{v(x)} (f(t, x) - f(t, x_0)) dt \right| &\leq \int_{v(x_0)}^{v(x)} |f(t, x) - f(t, x_0)| dt \\ &\leq |v(x) - v(x_0)| \sup_{t \in [a, b]} |f(t, x) - f(t, x_0)|, \end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis,

$$\sup_{t \in [a, b]} |f(t, x) - f(t, x_0)| \leq |x - x_0| \sup_{t \in [a, b], x \in I} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq M |x - x_0|.$$

Par continuité de la fonction v , le terme $|v(x) - v(x_0)|$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 et ceci implique que :

$$\left| \int_{v(x_0)}^{v(x)} (f(t, x) - f(t, x_0)) dt \right| = o(x - x_0).$$

On déduit de ces trois résultats que la fonction F est bien dérivable en x_0 avec

$$F'(x_0) = \int_a^{v(x_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt + v'(x_0) f(v(x_0), x_0).$$

Puisque x_0 est quelconque, ceci prouve bien le théorème. □

7.4.2 Exemple. Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On pose, pour tout $x \in]a, +\infty[$,

$$F_1(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt.$$

Pour pouvoir appliquer les résultats de ce chapitre, fixons $b \in]a, +\infty[$. On va raisonner pour $t \in [a, b]$ et $x \in]a, b[$.

Par le théorème 7.4.1, F_1 est dérivable sur $]a, b[$ et on a :

$$F_1'(x) = \int_a^x f(t)dt + (x-x)f(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

On en déduit :

$$F_1''(x) = f(x) \text{ pour } x \in]a, b[.$$

Comme cette identité est vraie pour tout $b \in]a, +\infty[$, elle est vraie également pour sur tout l'intervalle $]a, +\infty[$.

De la même façon, on montre par récurrence que, pour $x \in]a, +\infty[$, si

$$F_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)dt,$$

alors :

$$F_n^{(n+1)}(x) = f(x).$$

7.5 Exercices sur le chapitre 7

7.1 Exercice. Soit $F(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \ln(1+x^2-2x\cos\theta) d\theta$.

- 1) Montrer que F est continue et dérivable sur l'intervalle $] -1, +1[$.
- 2) Calculer F' sur l'intervalle $] -1, +1[$ (On pourra effectuer le changement de variable $t = \tan \frac{\theta}{2}$).
- 3) En déduire F sur l'intervalle $] -1, +1[$.

7.2 Exercice. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction

$$f(x) = \int_0^\pi \sqrt{|1-x\cos t|} dt.$$

- 1) Vérifier que f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que f est une fonction continue sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que f est une fonction paire de x .
- 3) Montrer que f est 2 fois dérivable pour $|x| < 1$ et qu'elle vérifie la relation :

$$4x(x^2-1)f''(x) + 4(x^2-1)f'(x) - xf(x) - \int_0^\pi R(t,x) dt,$$

où l'on a posé :

$$R(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2\sin t}{\sqrt{1-x\cos t}} \right).$$

- 4) En déduire que f vérifie l'équation différentielle :

$$4x(x^2-1)f''(x) + 4(x^2-1)f'(x) - xf(x) = 0.$$

7.3 Exercice. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction :

$$f(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin t} dt.$$

1) Vérifier que f est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que f est une fonction continue sur \mathbb{R} .

2) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que :

$$f'(x) = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-x \sin t} \sin t dt.$$

3) De même, montrer que f est 2 fois dérivable et qu'elle vérifie la relation :

$$xf''(x) + f'(x) - xf(x) = 0.$$

(On pourra faire une intégration par parties dans l'intégrale définissant f')

4) Résoudre les mêmes questions avec la fonction :

$$g(x) = \int_0^\pi e^{-x \cos t} dt.$$

7.6 Corrigé des exercices sur le Chapitre 7

Corrigé de l'exercice 7.1

Soit $F(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \ln(1 + x^2 - 2x \cos \theta) d\theta$.

1) La fonction de 2 variables $f(\theta, x) = \ln(1 + x^2 - 2x \cos \theta)$ est continue sur le rectangle Δ défini par les inégalités : $|\theta| \leq \pi$, $|x| < 1$ car le terme $1 + x^2 - 2x \cos \theta$ est positif et ne s'annule pas sur cet intervalle.

De plus, la dérivée partielle de f par rapport à x vaut :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\theta, x) = \frac{2(x - \cos \theta)}{1 + x^2 - 2x \cos \theta}.$$

Cette fonction est également continue sur Δ .

La fonction F est donc dérivable sur $] -1, +1[$ et on a :

$$F'(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial}{\partial x} f(\theta, x) d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2(x - \cos \theta)}{1 + x^2 - 2x \cos \theta} d\theta.$$

2) On suppose $|x| < 1$. Le changement de variable $t = \tan \frac{\theta}{2}$ donne alors :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + x^2 - 2x \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2(x+1) + (x-1)}{t^2(x+1)^2 + (x-1)^2} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)} \frac{t^2(x+1)^2 + (x-1)(x+1)}{t^2(x+1)^2 + (x-1)^2} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)} \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{(x-1)(x+1) - (x-1)^2}{[t^2(x+1)^2 + (x-1)^2][1+t^2]} \right) dt \\ &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)} \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{f(x)}{t^2(x+1)^2 + (x-1)^2} + \frac{g(x)}{1+t^2} \right) dt, \end{aligned}$$

où l'on calcule : $f(x)(1+t^2) + g(x)(t^2(x+1)^2 + (x-1)^2) = (x-1)(x+1) - (x-1)^2$, ce qui donne, si l'on suppose $x \neq 0$:

$$g(x) = -\frac{(x-1)}{2x}, \quad f(x) = +\frac{(x+1)^2(x-1)}{2x}.$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)} \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{(x+1)^2(x-1)}{2x} \frac{1}{t^2(x+1)^2 + (x-1)^2} - \frac{(x-1)}{2x} \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\ &= \frac{4\pi}{(x+1)} \left(1 + \frac{(x+1)^2(x-1)}{2x} \frac{1}{(x+1)^2(1-x)} - \frac{(x-1)}{2x} \right) \\ &= \frac{4\pi}{(x+1)} \left(1 - \frac{(x+1)}{2x} - \frac{(x-1)}{2x} \right). \end{aligned}$$

Donc $F'(x) = 0$ pour $x \neq 0$.

Par continuité, on obtient bien $F'(x) = 0$ pour tout $x \in]-1, +1[$.

3) La fonction F est donc constante et par suite, $F(x) = F(0) = 0$.

Corrigé de l'exercice 7.2

1) La fonction $\varphi(t, x) = \sqrt{|1 - x \cos t|}$ est continue sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ donc intégrable pour $t \in [0, \pi]$ et sa primitive $f(x)$ est continue sur \mathbb{R} .

2) On calcule $f(-x)$ en posant $u = \pi - t$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_0^\pi \sqrt{|1 + x \cos t|} dt = - \int_\pi^0 \sqrt{|1 - x \cos u|} du \\ &= - \int_0^\pi \sqrt{|1 - x \cos u|} du = f(x). \end{aligned}$$

3) La fonction $\varphi(t, x)$ est 2 fois continûment dérivable en x sur $[0, \pi] \times]-1, +1[$ avec :

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) = \frac{-\cos t}{\sqrt{1 - x \cos t}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(t, x) = \frac{-(\cos t)^2}{4(1 - x \cos t)^{3/2}}.$$

Donc f est bien 2 fois dérivable sur \mathbb{R} avec :

$$f'(x) = \int_0^\pi \frac{-\cos t}{\sqrt{1 - x \cos t}} dt \quad \text{et} \quad f''(x) = \int_0^\pi \frac{-(\cos t)^2}{4(1 - x \cos t)^{3/2}} dt.$$

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned} &4x(x^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(t, x) + 4(x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) - x \varphi(t, x) \\ &= \frac{-x(x^2 - 1) \cos^2 t - (x^2 - 1) \cos t (1 - x \cos t) - x(1 - x \cos t)^2}{(1 - x \cos t)^{3/2}} \\ &= \frac{-x(\cos^2 t + 1) + 2 \cos t}{(1 - x \cos t)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Or, on vérifie que

$$\begin{aligned} R(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2 \sin t}{\sqrt{1 - x \cos t}} \right) = \frac{-2 \cos t (1 - x \cos t) - \sin^2 t}{(1 - x \cos t)^{3/2}} \\ &= \frac{-x(\cos^2 t + 1) + 2 \cos t}{(1 - x \cos t)^{3/2}}. \end{aligned}$$

D'où l'égalité :

$$4x(x^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(t, x) + 4(x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) - x\varphi(t, x) = R(t, x),$$

qui implique bien l'égalité cherchée par intégration en t sur $[0, \pi]$.

4) Puisque $\int_0^\pi R(t, x) dt = \left[\frac{2 \sin t}{\sqrt{1 - \cos t}} \right]_0^\pi = 0$, on en déduit bien que f vérifie l'équation différentielle :

$$4x(x^2 - 1)f''(x) + 4(x^2 - 1)f'(x) - xf(x) = 0.$$

Corrigé de l'exercice 7.3

1) La fonction $\varphi(t, x) = e^{x \sin t}$ est continue sur $[-\pi/2, \pi/2] \times \mathbb{R}$ donc intégrable sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$ et sa primitive $f(x)$ est continue sur \mathbb{R} .

2) La fonction $\varphi(t, x)$ est continûment dérivable en x sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$ avec :

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x) = -\sin t e^{-x \sin t}.$$

Donc f est bien dérivable sur \mathbb{R} avec :

$$f'(x) = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin t e^{x \sin t} dt.$$

3) La fonction $\frac{\partial}{\partial x} \varphi(t, x)$ est continûment dérivable en x sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \times \mathbb{R}$ avec :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(t, x) = x \sin^2 t e^{-x \sin t}.$$

Donc f est bien deux fois dérivable sur \mathbb{R} avec :

$$f''(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x \sin^2 t e^{x \sin t} dt.$$

On intègre par partie l'intégrale définissant f' , en posant :

$$u = e^{-x \sin t}, \quad du = x \cos t e^{-x \sin t}, \quad dv = -\sin t, \quad v = \cos t,$$

et on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\cos t e^{-x \sin t} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x \cos^2 t e^{-x \sin t} dt \\ &= 0 + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} x (1 - \sin^2 t) e^{-x \sin t} dt = xf(x) - xf''(x). \end{aligned}$$

4) En suivant les mêmes étapes, on trouve que g vérifie l'équation différentielle :

$$xg''(x) + g'(x) - xg(x) = 0.$$

On en déduit que $f = g$, ce que l'on aurait pu voir directement en effectuant le changement de variable $t = u - \frac{\pi}{2}$ dans l'intégrale définissant g .

Chapitre 8

Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On considère un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ et une fonction de deux variables $f(t, x)$ où $t \in [a, b[$ et $x \in I$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On suppose ou bien que $b = +\infty$ ou bien que $b < +\infty$ et que pour certains $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ n'est pas définie en b . On suppose que pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ au sens des intégrales généralisées et on s'intéresse aux propriétés de la fonction définie sur I par l'intégrale généralisée

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt.$$

On étudie la continuité et la dérivabilité de F sur I .

8.1 Théorème de convergence dominée

Dans ce chapitre, nous allons utiliser le théorème de convergence dominée qui est une conséquence du théorème de convergence borné, 7.1.1 :

8.1.1 Théorème. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur un intervalle semi ouvert $[a, b[$ telle que :

- 1) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a, b[$ vers une fonction localement intégrable f .
- 2) Il existe une fonction ψ , intégrable sur l'intervalle semi ouvert $[a, b[$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a, b[, |f_n(t)| \leq \psi(t).$$

Alors f est intégrable sur l'intervalle semi ouvert $[a, b[$ et :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que l'hypothèse 2) implique en particulier que :

$$\forall t \in [a, b[, |f(t)| \leq \psi(t).$$

Pour montrer l'intégrabilité de la fonction f sur l'intervalle semi ouvert $[a, b[$, on écrit, pour tout $A \in [a, b[$, :

$$\int_a^A |f(t)| dt \leq \int_a^A \psi(t) dt.$$

Puisque par hypothèse, la fonction ψ est intégrable sur l'intervalle semi ouvert $[a, b[$, cette inégalité implique que la fonction f est absolument intégrable donc intégrable sur $[a, b[$.

Pour calculer l'intégrale de f sur $[a, b[$, on se donne $A \in [a, b[$ et on utilise le théorème de convergence bornée, 7.1.1 sur $[a, A]$: puisque la fonction f est intégrable sur $[a, A]$ elle est bornée sur cet intervalle. Donc, on a bien, pour tout $A \in [a, b[$:

$$\int_a^A f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^A f_n(t) dt.$$

De plus, $\varepsilon > 0$ étant fixé, on peut choisir $A \in [a, b[$ tel que

$$\int_A^b \psi(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_A^b |f_n(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{4} \text{ et } \int_A^b |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$:

$$\left| \int_a^A f(t) dt - \int_a^A f_n(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour $n \geq N$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b f_n(t) dt \right| &\leq \left| \int_a^A f(t) dt - \int_a^A f_n(t) dt \right| + \int_A^b |f(t)| dt + \int_A^b |f_n(t)| dt \\ &\leq \left| \int_a^A f(t) dt - \int_a^A f_n(t) dt \right| + \frac{2\varepsilon}{4} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci prouve bien que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est égale à la limite des intégrales des f_n sur cet intervalle. □

8.2 Continuité de l'intégrale généralisée

8.2.1 Théorème. Soit $f : [a, b[\times I \rightarrow \mathbb{K}$, une fonction continue par rapport à chacune des deux variables sur $[a, b[\times I$. On suppose qu'il existe une fonction $\phi : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$, intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ telle que :

$$\forall (t, x) \in [a, b[\times I, |f(t, x)| \leq \phi(t).$$

Alors la fonction $t \rightarrow f(t, x)$ est intégrable sur l'intervalle semi ouvert $[a, b[$ et la fonction F , définie pour $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt,$$

est continue sur I . En particulier, on a :

$$\begin{aligned} F(x_0) &= \int_a^b f(t, x_0) dt = \int_a^b \lim_{x \rightarrow x_0} f(t, x) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \int_a^b f(t, x) dt, \end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de limite et d'intégrale généralisée.

Démonstration. Remarquons d'abord que, pour tout $x \in I$, la fonction $t \rightarrow f(t, x)$ est localement intégrable sur $[a, b[$ car elle est continue par hypothèse.

Pour montrer l'intégrabilité de la fonction $t \rightarrow f(t, x)$ sur l'intervalle semi ouvert $[a, b[$ pour tout $x \in I$, on écrit, comme dans le théorème de convergence dominée 8.1.1, pour tout $A \in [a, b[$, :

$$\int_a^A |f(t, x)| dt \leq \int_a^A \phi(t) dt.$$

Puisque par hypothèse, la fonction ϕ est intégrable sur l'intervalle semi ouvert $[a, b[$, la fonction $t \rightarrow f(t, x)$ est absolument intégrable donc intégrable sur $[a, b[$.

On procède alors comme pour le théorème 7.2.1.

Soit $x_0 \in I$. On veut montrer la continuité de F en x_0 : soit $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ convergeant vers x_0 .

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n(t) = f(t, x_n)$. On remarque que les fonctions f_n sont intégrables sur l'intervalle semi ouvert $[a, b[$.

Par continuité de la fonction $x \rightarrow f(t, x)$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f(t, x_0)$, qui elle aussi est intégrable sur $[a, b[$. De plus, cette suite de fonctions est majorée par la fonction ϕ . On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, 7.1.1 : la suite $(F(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F(x_0)$.

Comme ce résultat est valable pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 , on en déduit bien la continuité de F en x_0 et donc par suite sur I tout entier puisque $x_0 \in I$ est quelconque, ce qui prouve le théorème. □

8.2.2 Exemple. Soit

$$f(t, x) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2},$$

définie pour $(t, x) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

La fonction f est continue par rapport à chacune des deux variables sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et

$$\forall (t, x) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, |f(t, x)| \leq \frac{1}{1+t^2},$$

qui est une fonction intégrable sur $[0, +\infty[$ (voir chapitre 3).

La fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt,$$

est donc continue sur $]0, +\infty[$.

Remarque. Comme pour la continuité des intégrales de Riemann dépendant d'un paramètre, en général, on ne peut pas raisonner sur l'intervalle I tout entier. On cherche des dominations sur des sous-intervalles de I et on utilise un argument de saturation pour obtenir le résultat sur I tout entier. Voir l'exemple de la fonction Gamma ci-dessous.

8.3 Dérivabilité

8.3.1 Théorème. Soit $f : [a, b[\times I \rightarrow \mathbb{K}$, une fonction continue par rapport à chacune des deux variables sur $[a, b[\times I$. On suppose que f admet une dérivée partielle par rapport à

$x, \frac{\partial f}{\partial x}$, continue par rapport à chacune des deux variables sur $[a, b] \times I$.

On suppose qu'il existe deux fonctions ϕ et $\psi : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$, intégrables sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ telles que

$$\forall (t, x) \in [a, b[\times I, |f(t, x)| \leq \phi(t) \text{ et } \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq \psi(t).$$

Alors pour tout $x \in I$, les fonctions $t \rightarrow f(t, x)$ et $t \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ sont intégrables sur l'intervalle semi ouvert $[a, b[$ et la fonction F , définie pour $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt,$$

est dérivable sur I et

$$F'(x) = \left(\int_a^b f(t, x) dt \right)' = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

ce qui est un cas d'interversion de dérivée et d'intégrale généralisée.

Démonstration. Remarquons d'abord que, pour tout $x \in I$, les fonctions $t \rightarrow f(t, x)$ et $t \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ sont localement intégrables sur l'intervalle semi ouvert $[a, b[$ car elles sont continues par hypothèse.

Pour montrer l'intégrabilité des fonctions $t \rightarrow f(t, x)$ et $t \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ sur l'intervalle semi ouvert $[a, b[$ pour tout $x \in I$, on écrit, comme dans le théorème du convergence dominée 8.1.1, pour tout $A \in [a, b[$, :

$$\int_a^A |f(t, x)| dt \leq \int_a^A \phi(t) dt \text{ et } \int_a^A \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| dt \leq \int_a^A \psi(t) dt.$$

Puisque par hypothèse, les fonctions ϕ et ψ sont intégrables sur l'intervalle semi ouvert $[a, b[$, les fonctions $t \rightarrow f(t, x)$ et $t \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ sont absolument intégrables donc intégrables sur $[a, b[$.

On procède alors comme pour le théorème 7.3.1. On fixe $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ convergeant vers x_0 . On peut supposer que $x_n \neq x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour démontrer la dérivabilité de la fonction F en x_0 , on écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} = \int_a^b \left(\frac{f(t, x_n) - f(t, x_0)}{x_n - x_0} \right) dt.$$

On définit la suite de fonction $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour $t \in [a, b]$ par :

$$h_n(t) = \frac{f(t, x_n) - f(t, x_0)}{x_n - x_0}$$

Puisque la fonction f est dérivable par rapport à la variable x en x_0 , cette suite converge simplement vers la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0)$, qui bien est intégrable par rapport à la variable t .

De plus, par le théorème des accroissements finis, il existe $y_n \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ tel que $h_n(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, y_n)$. Donc, les fonctions h_n sont donc dominées par la fonction ψ sur $[a, b]$. En appliquant le théorème de convergence dominée, 8.1.1, on en déduit que la suite

$$\left(\frac{F(x_n) - F(x_0)}{x_n - x_0} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge vers $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt$ quand $n \rightarrow \infty$.

Comme ceci est valable pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 , on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt,$$

ce qui prouve la dérivabilité de F en x_0 et l'égalité

$$F'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0) dt. \quad \square$$

Puisque $x_0 \in I$ est quelconque, ceci montre bien la dérivabilité de F sur I .

Remarque. Pour la dérivation sous le signe somme, on a la même remarque que pour la continuité : en général, on ne peut pas raisonner sur l'intervalle I tout entier. On cherche des dominations sur des sous-intervalles de I et on utilise un argument de saturation pour obtenir le résultat sur I tout entier. Voir l'exemple de la fonction Gamma ci-dessous.

8.3.2 Exemple. La fonction Γ .

Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Définition :

Comme il y a deux problèmes d'intégration, en 0 et en $+\infty$, on sépare cette intégrale généralisée en deux intégrales généralisées :

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \Gamma_2(x) = \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

On a bien sûr,

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

La fonction à intégrer $f(t, x) = e^{-t} t^{x-1}$ est positive. On peut donc pour $x > 0$ fixé, appliquer le théorème 3.8.2 :

-Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Quand $t \rightarrow 0$, $f(t, x)$ est équivalente à t^{x-1} qui est intégrable en 0 d'après la proposition 3.8.3. Donc $\Gamma_1(x)$ est bien définie pour $x \in]0, +\infty[$.

-Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. Quand $t \rightarrow +\infty$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t/2} f(t, x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t/2} t^{x-1} = 0.$$

Donc $f(t, x)$ est dominée au voisinage de $+\infty$ par $e^{-t/2}$ qui est intégrable en $+\infty$. Donc $\Gamma_2(x)$ est également bien définie pour $x \in]0, +\infty[$.

On vérifie sans difficulté que $\Gamma(1) = 1$ et que $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. On en déduit en particulier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$. La fonction Γ apparaît donc comme une extension à \mathbb{R}^+ de la fonction “factorielle”.

Continuité : La fonction $f(t, x) = e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Soit $\alpha > 0$. On a :

$$\forall x \in [\alpha, +\infty[, \forall t \in]0, 1], |e^{-t}t^{x-1}| \leq e^{-t}t^{\alpha-1}.$$

La fonction $\psi_1(t) = e^{-t}t^{\alpha-1}$ est intégrable en 0. D'après le théorème 8.2.1, la fonction $\Gamma_1(x)$ est continue sur $[\alpha, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, on en déduit que $\Gamma_1(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Soit $\beta > 0$. On a de la même façon :

$$\forall x \in]0, \beta], \forall t \in [1, +\infty[, |e^{-t}t^{x-1}| \leq e^{-t}t^{\beta-1}.$$

La fonction $\psi_2(t) = e^{-t}t^{\beta-1}$ est intégrable en $+\infty$. De nouveau, d'après le théorème 8.2.1, la fonction $\Gamma_2(x)$ est continue sur $]0, \beta]$. Ceci étant vrai pour tout $\beta > 0$, on en déduit que $\Gamma_2(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

La fonction Γ est donc continue sur $]0, +\infty[$.

Dérivabilité : La fonction $f(t, x) = e^{-t}t^{x-1}$ admet une dérivée partielle par rapport à x qui est continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. En effet, pour tout $(t, x) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = e^{-t}t^{x-1} \ln t.$$

Soit $\alpha, \beta > 0$. Comme pour la continuité, on écrit :

$$\forall x \in [\alpha, +\infty[, \forall t \in]0, 1], |e^{-t}t^{x-1} \ln t| \leq e^{-t}t^{\alpha-1} \ln t,$$

$$\forall x \in]0, \beta], \forall t \in [1, +\infty[, |e^{-t}t^{x-1} \ln t| \leq e^{-t}t^{\beta-1} \ln t.$$

La fonction $e^{-t}t^{\alpha-1} \ln t$ est intégrable en 0 et la fonction $e^{-t}t^{\beta-1} \ln t$ est intégrable en $+\infty$. On en déduit par le théorème 8.3.1 que les fonctions Γ_1 et Γ_2 sont dérivables respectivement sur $[\alpha, +\infty[$ et $]0, \beta]$. Comme c'est vrai pour tous $\alpha, \beta > 0$, ces deux fonctions sont dérivables sur $]0, +\infty[$. Il en est de même pour Γ et on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} \ln t dt.$$

Remarque. L'hypothèse de domination de la fonction $f(t, x)$ ou de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ par une fonction intégrable ψ sur l'intervalle semi-ouvert $[a, b[$ dans les deux théorèmes 8.2.1 et 8.3.1 est très forte. On peut envisager une hypothèse moins forte, la convergence uniforme :

8.3.3 Définition. On dit que l'intégrale généralisée dépendant d'un paramètre

$$F(x) = \int_a^b f(t, x) dt,$$

est uniformément convergente sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[\text{ tel que } \forall x \in I, \left| \int_c^b f(t, x) dt \right| \leq \varepsilon.$$

On peut montrer que la conclusion des théorèmes 8.2.1 et 8.3.1 reste valide si on remplace l'hypothèse de domination (sur f ou sur $\frac{\partial f}{\partial x}$) par cette hypothèse de convergence uniforme.

8.4 Application : transformée de Laplace

8.4.1 Définition. On pose :

$$\mathcal{E} = \{f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{K}) \mid \exists M_f > 0, \exists r_f > 0, \forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)| \leq M_f e^{r_f t}\}.$$

et pour $f \in \mathcal{E}$, on définit la transformée de Laplace de f , quand elle existe, par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt.$$

8.4.2 Proposition. 1) Soit $f \in \mathcal{E}$. Alors, pour tout $x > r_f$, $\mathcal{L}(f)(x)$ est bien définie.

2) L'application \mathcal{L} est une application linéaire de l'espace vectoriel \mathcal{E} dans l'espace des fonctions de classe C^∞

3) Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}$, $\mathcal{L}(f)(x)$ tend vers 0 ainsi que toutes ses dérivées lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration. : 1) Pour $f \in \mathcal{E}$, la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)(x)$ est définie par une intégrale généralisée sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x > r_f$, on peut écrire :

$$|f(t) e^{-xt}| \leq M_f e^{(r_f - x)t}.$$

La fonction $e^{(r_f - x)t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc $t \rightarrow f(t) e^{-xt}$ est absolument intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $x > r_f$ et $\mathcal{L}(f)(x)$ est bien définie pour ces valeurs de x .

2) Il est facile de voir que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{K})$ et que \mathcal{L} est linéaire. Montrons que pour $f \in \mathcal{E}$, $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ :

La fonction $(t, x) \rightarrow e^{-xt} f(t)$ est continue sur $[0, +\infty[\times]r_f, +\infty[$, dérivable par rapport à x avec $\frac{\partial}{\partial x}(e^{-xt} f(t)) = -t e^{-xt} f(t)$ qui est continue sur $[0, +\infty[\times]r_f, +\infty[$

De plus, soit $a > r_f$. On peut écrire, pour $t \in [0, +\infty[$ et $x \in [a, +\infty[$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}(e^{-xt} f(t)) \right| = |-t e^{-xt} f(t)| \leq M_f t e^{(r_f - a)t}.$$

La fonction $t \rightarrow t e^{(r_f - a)t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On peut donc appliquer le théorème 8.3.1 : pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a

$$\frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt = - \int_0^{+\infty} t e^{-xt} f(t) dt.$$

Comme $a > r_f$ est quelconque, cette égalité est vérifiée sur $]r_f, +\infty[$.

Le même argument appliqué à la fonction $t e^{-xt} f(t)$ permet d'itérer le raisonnement. Le résultat à l'ordre n est alors immédiat et on obtient bien que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ .

3) Pour $x > r_f$, la majoration :

$$|e^{-xt} f(t)| \leq M_f e^{(r_f - x)t},$$

implique que

$$|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-xt} f(t)| dt \leq M_f \int_0^{+\infty} e^{(r_f-x)t} dt = \frac{M_f}{x-r_f}.$$

Donc $|\mathcal{L}(f)(x)|$ tend bien vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.

Pour la dérivée, un calcul analogue donne, pour $x > r_f$:

$$|-te^{-xt} f(t)| \leq M_f t e^{(r_f-x)t},$$

d'où :

$$\left| \frac{d}{dx} \mathcal{L}(f)(x) \right| \leq \int_0^{+\infty} |te^{-xt} f(t)| dt \leq M_f \int_0^{+\infty} t e^{(r_f-x)t} dt.$$

Or par une intégration par parties, on a, pour tout $X > 0$:

$$\int_0^X t e^{(r_f-x)t} dt = \left[\frac{t e^{(r_f-x)t}}{r_f-x} \right]_0^X - \frac{1}{r_f-x} \int_0^X e^{(r_f-x)t} dt.$$

Le terme tout intégré tend vers 0 quand $X \rightarrow +\infty$ et le second terme tend vers $\frac{1}{(x-r_f)^2}$ donc,

$$\int_0^{+\infty} t e^{(r_f-x)t} dt = \frac{1}{(x-r_f)^2}.$$

On en déduit que

$$\left| \frac{d}{dx} \mathcal{L}(f)(x) \right| \leq \frac{M_f}{(x-r_f)^2},$$

donc la dérivée de $\mathcal{L}(f)$ tend bien vers 0 à l'infini.

Cet argument s'applique aussi à toutes les dérivées de cette fonction. □

8.4.3 Proposition. Soit $f \in \mathcal{E}$. Alors, si $x > r_f + a$,

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(x) = \mathcal{L}(f)(x-a).$$

Démonstration. : Si $x > r_f + a$, par l'argument précédent, les deux intégrales :

$$\int_0^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-xt} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f(t) e^{(a-x)t} dt$$

existent et sont évidemment égales. □

8.4.4 Proposition. Pour $x > \lambda$, pour tout $n \geq 1$

$$\mathcal{L}(t^n e^{\lambda t})(x) = \frac{n!}{(x-\lambda)^{n+1}}.$$

Démonstration. : Soit $x > \lambda$. Pour tout $X > 0$, par intégration par parties, on a :

$$\int_0^X t^n e^{(\lambda-x)t} dt = \left[\frac{t^n e^{(\lambda-x)t}}{\lambda-x} \right]_0^X - n \int_0^X \frac{t^{n-1} e^{(\lambda-x)t}}{\lambda-x} dt.$$

Quand $X \rightarrow +\infty$, le terme tout intégré tend vers 0. Donc on obtient l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{(\lambda-x)t} dt = \frac{-n}{\lambda-x} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{(\lambda-x)t} dt.$$

On itère ce calcul n fois et on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^n e^{(\lambda-x)t} dt &= \frac{-n}{\lambda-x} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{(\lambda-x)t} dt = \dots \\ &= (-1)^n \frac{n!}{(\lambda-x)^n} \int_0^{+\infty} e^{(\lambda-x)t} dt = \frac{n!}{(x-\lambda)^{n+1}}. \end{aligned} \quad \square$$

8.4.5 Proposition. Soit $f \in \mathcal{E}$. Pour $x > r_f$, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathcal{L}(t^n f(t))(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (\mathcal{L}(f)(x)).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n .

Vérifions cette propriété à l'ordre 1 :

D'après la proposition 8.4.2, on a :

$$\frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt = - \int_0^{+\infty} t e^{-xt} f(t) dt.$$

D'où

$$\mathcal{L}(t f(t))(x) = - \frac{d}{dx} (\mathcal{L}(f)(x)).$$

Le même calcul appliqué à la fonction $t e^{-xt} f(t)$ permet d'itérer le raisonnement. Le résultat à l'ordre n est alors immédiat. \square

8.4.6 Proposition. 1) Si f et $f' \in \mathcal{E}$, alors, pour $x > r_f, r_{f'}$:

$$\mathcal{L}(f')(x) = x \mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

2) Si $f, f', \dots, f^{(n)} \in \mathcal{E}$, alors, pour $x > r_f, r_{f'}, \dots, r_{f^{(n)}}$

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(x) = x^n \mathcal{L}(f)(x) - x^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Démonstration. La deuxième propriété se démontre par une récurrence immédiate à partir de la première.

Montrons 1) : Soit $X > 0$. Par intégration par parties, on trouve, pour tout $x > r_f, r_{f'}$:

$$\int_0^X f'(t) e^{-xt} dt = [f(t) e^{-xt}]_0^X + x \int_0^X f(t) e^{-xt} dt.$$

Quand $X \rightarrow +\infty$, le terme tout intégré tend vers $-f(0)$ et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} f'(t) e^{-xt} dt = -f(0) + x \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}(f')(x) = x \mathcal{L}(f)(x) - f(0). \quad \square$$

Les propriétés que nous venons de démontrer permettent de résoudre des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants et des équations différentielles linéaires à coefficients constants, par la méthode de la transformée de Laplace, si l'on admet le résultat suivant :

8.4.7 Théorème. La transformée de Laplace \mathcal{L} est une application injective sur \mathcal{E} .

8.4.8 Exemple. On considère l'équation différentielle :

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

On sait que cette équation admet une solution unique sur \mathbb{R} . On cherche cette solution dans \mathcal{E} . On transforme cette équation par \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}(y''(t)) - 3\mathcal{L}(y'(t)) + 2\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(e^t).$$

En utilisant les propositions 8.4.2 et 8.4.6, on écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y''(t))(x) &= x^2 \mathcal{L}(y(t))(x) - xy(0) - y'(0) = x^2 \mathcal{L}(y(t))(x) - x \\ \mathcal{L}(y'(t))(x) &= x \mathcal{L}(y(t))(x) - y(0) = x \mathcal{L}(y(t))(x) - 1 \\ \mathcal{L}(e^t)(x) &= \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

La fonction $\mathcal{L}(y(t))$ vérifie donc :

$$(x^2 - 3x + 2)\mathcal{L}(y(t))(x) - x + 3 = \frac{1}{x-1}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y(t))(x) &= \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{x-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)} \\ &= -\mathcal{L}(te^t)(x) + \mathcal{L}(e^t)(x) = \mathcal{L}((1-t)e^t)(x). \end{aligned}$$

Par l'injectivité de \mathcal{L} (théorème 8.4.7), on obtient donc :

$$y(t) = (1-t)e^t.$$

Par suite, cette fonction est l'unique solution de l'équation différentielle sur \mathbb{R} .

8.4.9 Exemple. On considère le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = 2x(t) + 2y(t) + e^t, \\ \frac{dy}{dt}(t) = x(t) + 3y(t) - te^t, \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = 4$.

Comme dans l'exemple précédent, on sait que ce système admet une solution unique. On cherche cette solution dans \mathcal{E} et on transforme ce système par \mathcal{L} . On obtient :

$$\begin{cases} u\mathcal{L}(x(t))(u) - 1 = 2\mathcal{L}(x(t))(u) + 2\mathcal{L}(y(t))(u) + \frac{1}{u-1}, \\ u\mathcal{L}(y(t))(u) - 4 = \mathcal{L}(x(t))(u) + 3\mathcal{L}(y(t))(u) - \frac{1}{(u-1)^2}, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} (u-2)\mathcal{L}(x(t))(u) - 2\mathcal{L}(y(t))(u) = \frac{u}{u-1}, \\ \mathcal{L}(x(t))(u) + (u-3)\mathcal{L}(y(t))(u) = \frac{(2u-3)(2u-1)}{(u-1)^2}. \end{cases}$$

Ce système admet pour solution :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x(t))(u) = \frac{u^3 - 12u^2 + 19u - 6}{(u-1)^3(u-4)}, \\ \mathcal{L}(y(t))(u) = \frac{4u^3 - 15u^2 + 18u - 6}{(u-1)^3(u-4)}. \end{cases}$$

On décompose ces fractions rationnelles en éléments simples et on utilise la proposition 8.4.4 pour inverser la transformée de Laplace grâce au théorème 8.4.7.

Remarque. Cette méthode ne s'applique que si l'on connaît la transformée de Laplace du deuxième membre de l'équation différentielle ou du système différentiel.

8.5 Exercices sur le chapitre 8

8.1 Exercice. On étudie ici l'intégrale généralisée dépendant d'un paramètre $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t, x) dt,$$

avec

$$f(t, x) = \frac{\cos(tx)}{1+t^2}.$$

1) a) Montrer que cette intégrale existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que F est définie sur \mathbb{R} tout entier.

b) Montrer que F est continue et bornée sur \mathbb{R} .

2) Montrer que $F(x)$ est paire et calculer $F(0)$.

3) Montrer que pour $x > 0$, on a

$$F(x) = xG(x),$$

où $G(x)$ est donnée par

$$G(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos u}{u^2 + x^2} du.$$

4) Montrer que $G(x)$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $G'(x)$ et $G''(x)$ sous la forme d'intégrales généralisées dépendant du paramètre $x \in]0, +\infty[$.

5) En déduire que F est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et que sa dérivée seconde est donnée par

$$F''(x) = x \int_0^{\infty} \frac{2x^2 - 6u^2}{(u^2 + x^2)^3} \cos u du.$$

6) a) Montrer que pour $(u, x) \neq (0, 0)$, les fonctions

$$h(u, x) = \frac{2x^2 - 6u^2}{(u^2 + x^2)^3} \text{ et } k(u, x) = \frac{-1}{u^2 + x^2},$$

vérifient

$$h(u, x) = \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(u, x).$$

b) En déduire que F vérifie sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $F'' = F$.

[On pourra faire des intégrations par parties en les justifiant, à partir de l'expression :

$$F''(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(x, u) \cos u \, du.]$$

c) En déduire que F est de la forme

$$F(x) = ae^x + be^{-x}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

pour $x \in]0, +\infty[$.

7) Calculer les valeurs de a et b à l'aide des informations obtenues sur F en 1) et 2) et en déduire une expression simple de F valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

8.2 Exercice. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, on pose :

$$h_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x^4)^n}.$$

1) Montrer que h_n est bien définie sur \mathbb{R}_*^+ .

2) Montrer que h_n est continue sur \mathbb{R}_*^+ .

3) Montrer que h_n est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ et que sa dérivée vérifie :

$$h'_n(x) = -4nx^3 h_{n+1}(x).$$

4)a) Calculer $h_1(x)$.

4)b) Montrer par récurrence que h_n est de la forme $h_n(x) = a_n x^{2-4n}$ où $a_n \in \mathbb{R}$ vérifie une relation de récurrence que l'on précisera.

4)c) En déduire $h_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

8.3 Exercice. Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} telle que $f(0) = 1$ et $0 \leq f(t) < 1$ pour tout $t \in]0, 1]$. On note $g(x) = \sup_{t \in [x, 1]} f(t)$, pour $x \leq 1$.

1) Pour quelles valeurs réelles de α l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{t^\alpha}$ existe-t-elle ? On note $\Gamma(1 - \alpha)$ la valeur de cette intégrale généralisée si elle existe.

2) Montrer que si $x \in]0, 1]$, alors $g(x) < 1$.

3) Montrer que $f'(0) \leq 0$.

Désormais, on fixe un réel $\alpha \in]0, 1[$; on suppose que $f'(0) \neq 0$ et on note $f'(0) = -\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

4) Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - e^{-\mu t}}{t} = \mu - \lambda.$$

[Pour la suite, on rappelle que toute suite de réels admet une limite supérieure et une limite inférieure (éventuellement infinies) et que la suite converge si et seulement si la limite supérieure et la limite inférieure sont finies et égales]

5)a) Soit $\mu > \lambda$. Montrer à l'aide de 4) qu'il existe $x_\mu \in]0, 1]$ tel que $f(t) \geq e^{-\mu t}$ pour tout $t \in [0, x_\mu]$.

5)b) En déduire que pour $\mu > \lambda$,

$$\int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \geq (n\mu)^{\alpha-1} \int_0^{n\mu x_\mu} e^{-t} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

5)c) En déduire que pour $\mu > \lambda$,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}.$$

puis que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}.$$

6)a) On suppose maintenant que $0 < \mu < \lambda$. Montrer à l'aide de 4) qu'il existe $x_\mu \in]0, 1]$ tel que $f(t) \leq e^{-\mu t}$ pour tout $t \in [0, x_\mu]$.

6)b) En déduire que pour $0 < \mu < \lambda$,

$$\int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \leq (n\mu)^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) + \frac{r^n}{(x_\mu)^\alpha} (1-x_\mu),$$

où $r := g(x_\mu)$.

6)c) En déduire (en utilisant 2)) que pour $0 < \mu < \lambda$,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}.$$

puis que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}.$$

7) Déduire des questions 5) et 6) que

$$\int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha} n^{1-\alpha}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

8.4 Exercice. 1) Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $\Re z > 0$. Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt,$$

existe et donner sa valeur.

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déduire de 1) que l'intégrale généralisée

$$G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt,$$

existe et montrer que

$$G(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'intégrale généralisée

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt,$$

existe.

4) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que $F'(x) = -G(x)$.

5) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$, puis en utilisant 2) et 4), en déduire $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

6) Montrer que l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt,$$

est semi-convergente.

7) Le théorème de continuité des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre permet-il de conclure que $I = \lim_{x \rightarrow 0} F(x)$?

8.6 Corrigé des exercices sur le Chapitre 8

Corrigé de l'exercice 8.1

1) On remarque que

$$|f(t, x)| \leq h(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Ceci nous montre tout d'abord que $F(x)$ est bien définie puisque $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ est convergente (théorème de comparaison). D'autre part puisque $f(t, x)$ est continue, et uniformément dominée par la fonction $h(t)$, on peut appliquer le théorème de continuité des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre. La fonction $F(x)$ est donc continue sur \mathbb{R} . De plus $F(x)$ est bornée par $\int_0^{+\infty} h(t) dt = \frac{\pi}{2}$.

2) Il est immédiat que $F(x) = F(-x)$ puisque $\cos(tx) = \cos(-tx)$. D'autre part,

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \arctg(T) - \arctg(0) = \pi/2.$$

3) En utilisant le changement de variable $u = xt$, on obtient

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{1+(u/x)^2} \frac{du}{x} = x \int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{x^2 + u^2} du = xG(x).$$

4) On calcule tout d'abord

$$\frac{\partial g}{\partial x}(u, x) = \frac{-2x \cos u}{(x^2 + u^2)^2}.$$

C'est une fonction continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Soit $a > 0$ donné. Pour $x \geq a$, on a

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, u) \right| \leq \frac{2x}{(x^2 + u^2)^2} \leq \frac{2x}{x^2(x^2 + u^2)} = \frac{2}{x(x^2 + u^2)} \leq \frac{2}{a(a^2 + u^2)}.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} \frac{2}{a(a^2 + u^2)} du$ converge, on peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre qui nous montre que G est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(u, x) du = \int_0^{+\infty} \frac{-2x \cos u}{(x^2 + u^2)^2} du.$$

De même, on calcule

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u, x) = \frac{8x^2 \cos u}{(x^2 + u^2)^3} - \frac{2 \cos u}{(x^2 + u^2)^2} = \frac{(6x^2 - 2u^2) \cos u}{(x^2 + u^2)^3}.$$

C'est une fonction continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Pour $x \geq a$, on a

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u, x) \right| \leq \frac{|6x^2 - 2u^2|}{(x^2 + u^2)^3} \leq \frac{6(x^2 + u^2)}{(x^2 + u^2)^3} \leq \frac{6}{(a^2 + u^2)^2}.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} \frac{6}{(a^2 + u^2)^2} du$ converge, ceci nous permet d'appliquer le théorème de dérivation des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre qui nous montre que G' est C^1 sur $[a, +\infty[$, c'est-à-dire que G est de classe C^2 et que sa dérivée G'' est donnée par

$$G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u, x) du = \int_0^{+\infty} \frac{(6x^2 - 2u^2) \cos u}{(x^2 + u^2)^3} du.$$

5) Puisque $F(x) = xG(x)$, F est aussi deux fois dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$ et par conséquent sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée est donnée par $F'(x) = xG'(x) + G(x)$, et sa dérivée seconde par

$$\begin{aligned} F''(x) = xG''(x) + 2G'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{x(6x^2 - 2u^2) \cos u}{(x^2 + u^2)^3} - \frac{4x \cos u}{(x^2 + u^2)^2} du \\ &= x \int_0^{+\infty} \frac{(2x^2 - 6u^2) \cos u}{(x^2 + u^2)^3} du. \end{aligned}$$

6) Pour $(u, x) \neq (0, 0)$ on peut calculer les dérivées partielles de $k(u, x)$ et on trouve

$$\frac{\partial k}{\partial u}(u, x) = \frac{2u}{(x^2 + u^2)^2},$$

et

$$\frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(u, x) = \frac{2}{(x^2 + u^2)^2} - \frac{8u^2}{(x^2 + u^2)^3} = \frac{2x^2 - 6u^2}{(x^2 + u^2)^3} = h(u, x).$$

Ceci montre que

$$F''(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(u, x) \cos u du.$$

On effectue deux intégrations par partie successives sur un intervalle $[A, B]$ où $B > A > 0$. On remarque que les termes tout intégrés tendent vers 0 lorsque $A \rightarrow 0$ et $B \rightarrow +\infty$, et on trouve donc :

$$F''(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\partial k}{\partial u}(u, x) \sin u du = -x \int_0^{+\infty} k(u, x) \sin u du = F(x).$$

Toute solution de cette équation sur un intervalle est une combinaison linéaire des solutions élémentaires e^x et e^{-x} d'où la forme de F .

7) Puisque $F(x)$ est bornée quand $x \rightarrow +\infty$, on a nécessairement $a = 0$ (sinon $F(x)$ tendrait vers $+\infty$ ou $-\infty$). Comme F est continue en 0, on a $b = F(0) = \frac{\pi}{2}$, soit $F(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$ sur $[0, +\infty[$. Par parité, on a donc

$$F(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}.$$

Corrigé de l'exercice 8.2

1) La fonction positive $\frac{1}{(t^2+x^4)^n}$ est définie et continue sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}_*^+$. Elle est donc intégrable sur tout intervalle $[0, A] \subset [0, +\infty[$. Pour $t \rightarrow +\infty$, on a $0 \leq \frac{1}{(t^2+x^4)^n} \leq \frac{1}{t^{2n}}$ qui est intégrable en $+\infty$. On en déduit que cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2) Soit $a > 0$. Pour $t \in [0, +\infty[$ et $x \in [a, +\infty[$, on peut écrire :

$$0 \leq \frac{1}{(t^2+x^4)^n} \leq \frac{1}{(t^2+a^4)^n}.$$

La fonction $t \rightarrow \frac{1}{(t^2+a^4)^n}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ et donc h_n est continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

Comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, on en déduit que h_n est continue sur $]0, +\infty[$.

3) Soit $0 < a < A$. Pour $t \in [0, +\infty[$ et $x \in [a, A]$, on peut écrire :

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{(t^2+x^4)^n} \right| = \left| \frac{-2nx^3}{(t^2+x^4)^{n+1}} \right| \leq \frac{2nA^3}{(t^2+a^4)^{n+1}}.$$

La fonction $t \rightarrow \frac{2nA^3}{(t^2+a^4)^{n+1}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc h_n est dérivable sur $[a, A]$ et sa dérivée vérifie bien :

$$h'_n(x) = -4nx^3 h_{n+1}(x).$$

Comme ceci est vérifié pour tout $0 < a < A$, on en déduit que h_n est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ et que cette relation est également vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$.

$$4)a) h_1(x) = \int_0^\infty \frac{1}{(t^2+x^4)} dt = \left[x^2 \arctan \frac{t}{x^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2x^2}.$$

$$4)b) \text{ Si } n = 1, \text{ on a bien } h_1(x) = a_1 x^{-2}, \text{ avec } a_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Supposons que h_n est de la forme $h_n(x) = a_n x^{2-4n}$ et calculons h_{n+1} , pour $x > 0$, par la relation trouvée en 3) :

$$h_{n+1}(x) = -\frac{1}{4nx^3} h'_n(x) = -\frac{1}{4nx^3} (2-4n)a_n x^{2-4n-1} = a_n \frac{4n-2}{4n} x^{2-4(n+1)}.$$

L'hypothèse de récurrence est bien vérifiée au rang $n+1$ et $a_n \in \mathbb{R}$ vérifie la relation de récurrence $a_1 = \frac{\pi}{2}$, $a_{n+1} = a_n \frac{2n-1}{2n}$.

$$4)c) \text{ On en déduit que } h_n(x) = \frac{\pi (2n-3)(2n-5) \dots 1}{2 (2n-2)(2n-4) \dots 2} x^{2-4n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Corrigé de l'exercice 8.3

1) En appliquant le résultat du cours sur la fonction Γ , on voit aisément que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} dt}{t^\alpha}$ existe si et seulement si $\alpha < 1$.

2) Il est clair que $g(x) \leq 1$ pour tout $x \in]0, 1]$. Supposons qu'il existe $a \in]0, 1]$, tel que $g(a) = \sup_{t \in [a, 1]} f(t) = 1$. Alors, puisque la fonction f est continue, elle atteint sa borne

supérieure et donc il existe $b \in [a, 1]$ tel que $f(b) = 1$. Ceci contredit l'hypothèse sur f et on a donc bien $g(x) < 1$ pour tout $x \in]0, 1]$.

3) Supposons que $f'(0) > 0$ et soit $0 < \varepsilon < f'(0)$. La formule des accroissements finis nous dit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $0 \leq t \leq \alpha$, alors $|f(t) - f(0) - tf'(0)| \leq t\varepsilon$.

On en déduit que, si $0 \leq t \leq \alpha$, $f(t) \geq 1 + t(f'(0) - \varepsilon) > 1$. Ceci contredit l'hypothèse et donc on a bien $f'(0) \leq 0$.

4) On applique la formule des accroissements finis aux 2 fonctions f et $e^{-\mu t}$: il existe deux fonctions ε_1 et ε_2 , tendant vers 0 lorsque $t \rightarrow 0$ telles que

$$f(t) = 1 - \lambda t + t\varepsilon_1(t), \quad e^{-\mu t} = 1 - \mu t + t\varepsilon_2(t).$$

On en déduit que

$$\frac{f(t) - e^{-\mu t}}{t} = \mu - \lambda + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t).$$

D'où :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - e^{-\mu t}}{t} = \mu - \lambda.$$

5)a) Soit $\mu > \lambda$. Supposons que pour tout $x \in]0, 1]$, il existe $t \in [0, x]$ tel que $f(t) < e^{-\mu t}$ et soit $0 < \varepsilon < \mu - \lambda$. Alors, d'après 4), il existe α tel que pour tout $s \in [0, \alpha]$,

$$|f(s) - e^{-\mu s} - (\mu - \lambda)s| \leq \varepsilon s.$$

Ceci implique en particuliers que pour tout $s \in [0, \alpha]$, $f(s) > e^{-\mu s}$.

Ceci contredit l'hypothèse que nous avons faite et donc on a bien l'existence de $x_\mu \in]0, 1]$ tel que pour tout $t \in [0, x_\mu]$, $f(t) \geq e^{-\mu t}$.

5)b) Pour $\mu > \lambda$, on peut écrire

$$\int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_0^{x_\mu} f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_0^{x_\mu} e^{-n\mu t} \frac{dt}{t^\alpha} \geq (n\mu)^{\alpha-1} \int_0^{n\mu x_\mu} e^{-t} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

en ayant effectué le changement de variable $s = n\mu t$.

5)c) Lorsque $n \rightarrow \infty$, la suite $\left(\mu^{\alpha-1} \int_0^{n\mu x_\mu} e^{-t} \frac{dt}{t^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}$. Donc toute valeur d'adhérence de la suite $\left(n^{1-\alpha} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est supérieure à cette limite. En particulier, on en déduit bien que pour $\mu > \lambda$,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\mu > \lambda$, on a aussi :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}.$$

6)a) Soit $0 < \mu < \lambda$.

Supposons que pour tout $x \in]0, 1]$ il existe $t \in [0, x]$ tel que $f(t) > e^{-\mu t}$. Soit $0 < \varepsilon < \lambda - \mu$. Alors, d'après 4), il existe α tel que pour tout $s \in [0, \alpha]$,

$$|f(s) - e^{-\mu s} - (\mu - \lambda)s| \leq \varepsilon s.$$

Ceci implique en particulier que pour tout $s \in [0, \alpha]$, $f(s) < e^{-\mu s}$.

Ceci contredit l'hypothèse que nous avons faite et donc on a bien l'existence de $x_\mu \in]0, 1]$ tel que pour tout $t \in [0, x_\mu]$, $f(t) \leq e^{-\mu t}$.

6b) Pour $0 < \mu < \lambda$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} &\leq \int_0^{x_\mu} f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} + \int_{x_\mu}^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \\ &\leq \int_0^{x_\mu} e^{-n\mu t} \frac{dt}{t^\alpha} + g^n(x_\mu) \int_{x_\mu}^1 \frac{dt}{t^\alpha} \\ &\leq (n\mu)^{\alpha-1} \int_0^{n\mu x_\mu} e^{-t} \frac{dt}{t^\alpha} + g^n(x_\mu) \frac{(1-x_\mu)}{x_\mu^\alpha}. \end{aligned}$$

6c) Or, lorsque $n \rightarrow \infty$, les suites

$$\left(\mu^{\alpha-1} \int_0^{n\mu x_\mu} e^{-t} \frac{dt}{t^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(n^{1-\alpha} g^n(x_\mu) \frac{(1-x_\mu)}{x_\mu^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

tendent vers $\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}$ et 0 respectivement car $g(x_\mu) < 1$. Donc, toute valeur d'adhérence

de la suite $\left(n^{1-\alpha} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est inférieure à la somme de ces 2 limites.

En particulier, on en déduit bien que pour $0 < \mu < \lambda$,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}.$$

et puisque cette inégalité est vraie pour tout $\mu < \lambda$, on a aussi l'inégalité :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}.$$

7) On déduit des questions 5) et 6) que la suite $\left(n^{1-\alpha} \int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ a mêmes limites supérieure et inférieure, elle est donc convergente vers cette valeur commune qui est $\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}$. D'où le résultat :

$$\int_0^1 f^n(t) \frac{dt}{t^\alpha} \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha} n^{1-\alpha}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Corrigé de l'exercice 8.4

1) Soit $A > 0$ fixé. En intégrant par parties sur $[0, A]$, on trouve :

$$\int_0^A e^{-zt} dt = \left[\frac{e^{-zt}}{-z} \right]_0^A = \frac{1}{z} (1 - e^{-Az}).$$

Or $|e^{-Az}| = e^{-A\Re z} \rightarrow 0$ quand $A \rightarrow +\infty$ car $\Re z > 0$.

D'où : $\int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{z} (1 - e^{-Az}) = \frac{1}{z}$.

$$2) G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right) dt = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right) = \frac{1}{x^2+1}.$$

3) La fonction $t \rightarrow \left| \frac{\sin t}{t} \right|$ reste bornée par 1 et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ converge. Donc $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ converge absolument.

4) Soit $a > 0$. L'application $g : [0, +\infty[\times [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(t, x) = e^{-xt} \frac{\sin t}{t}$ est continue par rapport au couple (t, x) ainsi que $\frac{\partial}{\partial x} g(t, x) = -e^{-xt} \sin t$. De plus, pour $(t, x) \in [0, +\infty[\times [a, +\infty[$, $|-e^{-xt} \sin t| \leq e^{-at}$ qui est intégrable sur $[0, +\infty[$. On a donc $\frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} g(t, x) dt$ soit $F'(x) = \int_0^{+\infty} -e^{-xt} \sin t dt = -G(x)$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$ quelconque), donc sur $]0, +\infty[$.

5) On a :

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

D'où $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$. Comme $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ alors $F(x) = -\arctg x + C$, on a donc $C = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$ et $F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctg x$.

6) La fonction $t \rightarrow \frac{\sin t}{t}$ est continue en 0, donc le seul problème de convergence est en $+\infty$. Soit $A > 0$. On a :

$$\int_1^A \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t} \right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Cette dernière intégrale est absolument convergente. On peut prendre la limite quand $A \rightarrow +\infty$ et on trouve :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

Par contre, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge car elle a le même comportement que la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$. Or u_n vérifie :

$$\frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt \leq u_n \leq \frac{1}{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt,$$

soit

$$\frac{2}{(n+1)\pi} \leq u_n \leq \frac{2}{n\pi}.$$

La série est donc divergente et l'intégrale aussi.

7) Soit $b > 0$. L'application $g : [0, +\infty[\times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(t, x) = e^{-xt} \frac{\sin t}{t}$ est continue par rapport au couple (t, x) mais il n'existe pas de fonction intégrable φ telle que

$\left| e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \right| \leq \varphi(t)$ sur $[0, +\infty[\times [0, b]$ car sinon, pour $x = 0$ on aurait, $\left| \frac{\sin t}{t} \right| \leq \varphi(t)$ ce qui implique $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = +\infty$. Donc le théorème ne s'applique pas.

Bibliographie

- [1] BOURDAUD G. *Mathématiques pour la physique* Diderot éditeur, Arts et Sciences, Paris (1996).
- [2] CAGNAC G., RAMIS E., COMMEAU J. *Nouveau cours de mathématiques spéciales, Tome 2, Analyse*. Masson and Cie, Paris (1965).
- [3] CHRISTOL, G., COT, A., MARLE, C.-M. *Calcul Différentiel*. Ellipses, Paris (1997).
- [4] CHRISTOL, G., COT, A., MARLE, C.-M. *Topologie*. Ellipses, Paris (1996).
- [5] DIEUDONNE J. *Elements d'Analyse I, fondements de l'analyse moderne*. Gauthier-Villars, Cahiers Scientifiques, Fascicule XXVIII, Paris (1972).
- [6] HAUCHECORNE B., SURATTEAU D. *Des Mathématiciens de A à Z*. 3^e édition, Ellipses, Paris (2008).
- [7] KREE P., VAUTHIER J. *Mathématiques, Deuxième année du DEUG*. ESKA, Paris (1989).
- [8] KREE M., KREE P., VAUTHIER J. *Exercices de Mathématiques, Deuxième année du DEUG, Vol. 1, Analyse*. ESKA, Paris (1989).
- [9] LELONG-FERRAND, J., ARNAUDIÈS, J.-M. *Cours de Mathématiques, Tome 2, Analyse*. Dunod, Paris (1977).
- [10] RAMIS, E. *Exercices d'analyse, avec solutions développées*. Masson et Cie, Paris (1968).
- [11] SCHWARTZ, L. *Analyse I, Théorie des ensembles et Topologie*. Hermann, Collection enseignement des sciences, Paris (1991).
- [12] SCHWARTZ, L. *Analyse, Topologie générale et Analyse Fonctionnelle*. Hermann, Paris (1970).

Index

- A**
- Application partielle 138, 139
- Approximation numérique des intégrales
59, 60
- B**
- Borne inférieure 5, 19, 57
- Borne supérieure 5, 16, 19, 57
- C**
- Calcul des primitives 55, 56
- Changement de variable . 55, 56, 62, 65,
67, 126
- Coefficients de Fourier . . . 124–126, 129
- Continuité de l'intégrale de Riemann . . .
140, 145
- Continuité de l'intégrale généralisée 151,
154
- Continuité des limites 83, 85
- Continuité des sommes 84, 96, 100, 120,
121
- Contraposée 2
- Convergence absolue . 22–25, 32, 35, 95,
96, 98, 118–123
- Convergence commutative 35, 37
- Convergence d'une série 124
- Convergence normale . . . 82, 83, 96, 118,
120–122
- Convergence simple 77–80, 95, 128
- Convergence uniforme . . . 79–85, 87, 88,
96, 118, 119, 128
- Convergence uniforme des intégrales gé-
néralisées 155
- Critère de Cauchy uniforme 118
- Critère de Cauchy 15, 21–23, 26, 32
- Critère de Cauchy pour les fonctions . 64
- Critère de Cauchy pour les intégrales 65,
68, 70
- Critère de Cauchy uniforme . . 81, 82, 85,
118
- D**
- Deuxième formule de la moyenne 56, 70
- Dérivabilité de l'intégrale de Riemann . .
141, 142, 145
- Dérivabilité de l'intégrale généralisée . .
152, 155
- Dérivabilité des limites 85
- Dérivabilité des sommes . . 87, 100, 120,
121
- Développement en séries entières . . 102,
104, 105
- Développement en séries entières . . 102,
109
- Développement en séries trigonométri-
ques 122
- Disque de convergence 95, 96, 100
- E**
- Equivalence 2
- Erreur 30, 34, 60, 61
- Exponentielle complexe 107
- F**
- Fonction absolument intégrable 68
- Fonction continûment différentiable 139,
145
- Fonction de plusieurs variables 137–140,
144, 151
- Fonction en escalier . . 45–48, 50, 51, 57,
124, 125
- Fonction Gamma 154
- Fonction intégrable . . 47, 48, 50, 51, 57,
58, 124, 125, 151, 152
- Fonction inverse 56
- Fonction localement intégrable . . 62, 65,
66, 68
- Fonctions hyperboliques 55
- Fonctions puissance 55
- Fonctions trigonométriques 55
- Formule de Moivre 110
- Formule de Taylor 103
- I**
- Implication 1
- Intersection 2

Intégrale de Riemann . 49, 140, 141, 145
 Intégrale des fonctions en escalier ... 46
 Intégrale généralisée .. 63, 151, 154–156
 Intégrales de Riemann 67
 Intégration des limites 88
 Intégration des sommes 89, 101, 121
 Intégration par parties 55
 Inverse d'une série entière 100
 Inégalité de Cauchy-Schwarz 58

L

Limite 18
 Limite d'une suite 11, 12, 16, 17, 19–21,
 29, 36, 48, 78, 81, 83–85, 87, 88,
 97
 Limite inférieure 18, 20, 97
 Limite supérieure 20, 96, 97
 Linéarisation 110

M

Matrice jacobienne 139
 Méthode des rectangles 59
 Méthode des trapèzes 60

N

Négation 4
 Norme de la convergence uniforme .. 80

P

Première formule de la moyenne 51
 Primitive 53–55
 Produit de séries 23, 98

Q

Quantificateur 3

R

Raisonnement par l'absurde 2, 54
 Rayon de convergence 95–102, 104, 105,
 107, 109, 119
 Reste d'une série . 21, 27, 28, 30, 33, 34,
 77, 82, 104
 Récurrence 5, 145, 158
 Réunion 2

S

Série alternée 33, 34, 83
 Série convergente . 21–26, 32, 34, 35, 37,
 67, 104, 117

Série de fonctions 77, 80, 83, 85, 88
 Série de Fourier 124, 125, 128, 129
 Série de Taylor 102, 104
 Série entière 100, 122
 Série entière 95, 98, 119
 Série géométrique 26
 Série numérique 21
 Séries de Bertrand 31
 Séries de Riemann 31
 Série trigonométrique . 34, 117, 119–123
 Série à termes positifs 25
 Sinus et Cosinus complexes 107
 Somme par paquets 37, 38, 99
 Somme d'une série 21, 22, 24, 30,
 33–37, 77–81, 83–85, 87, 88, 96,
 98–105, 120–123, 125, 129
 Somme de Cesaro 17
 Somme de Riemann 52, 53
 Somme partielle d'une série 21,
 23–25, 31, 33, 35–37, 77, 81, 84,
 87, 118, 119
 Sous-suite 16, 18
 Substitution de séries entières 99
 Suite bornée 11
 Suite convergente . 11–16, 18, 32, 48, 53,
 81
 Suite de Cauchy .. 11–16, 18, 32, 65, 81,
 119
 Suite de fonctions 77, 80, 83, 85, 88
 Suite numérique 11
 Suites adjacentes 16, 33

T

Terme général 21
 Terme général d'une série 21
 Test de Cauchy 26, 27, 29, 96
 Test de d'Alembert 27, 97
 Test des équivalents 31
 Théorème de Parseval 129
 Théorème d'Abel 32, 34, 118
 Théorème d'Abel pour les intégrales . 69
 Théorème de Bolzano-Weierstrass ... 16
 Théorème de Dirichlet 126
 Transformée de Laplace 155

V

Voisinage d'un point 64, 65, 68