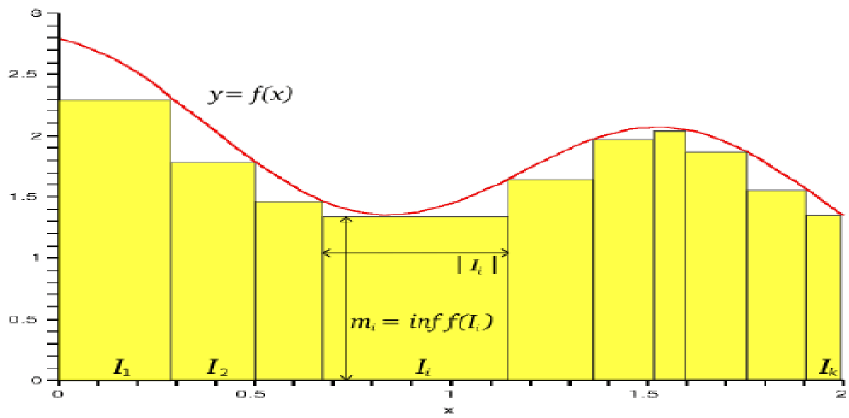
Chapitre 01 : Intégrales multiples

Introduction : Les intégrales multiples constituent la généralisation des intégrales dites simples : c'est-à-dire les intégrales d'une fonction d'une seule variable réelle. On s'attache ici à la généralisation à des fonctions dont le nombre de variables est plus important (deux ou trois).

Rappelons qu'une fonction réelle f, définie sur un intervalle [a,b], est dite Riemann intégrable si on peut l'encadrer entre deux fonctions en escalier ; d'où toute fonction continue est intégrable. L'intégrale de f sur $[a,b]$, notée $\int_a^b f(x)dx$, est interprétée comme l'aire comprise entre le graphe de f, l'axe (X'oX) et les droites d'équations $x=a, x=b$. En subdivisant $[a,b]$ en n sous intervalles $[x_{i-1},x_i]$ de même longueur $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, on définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par

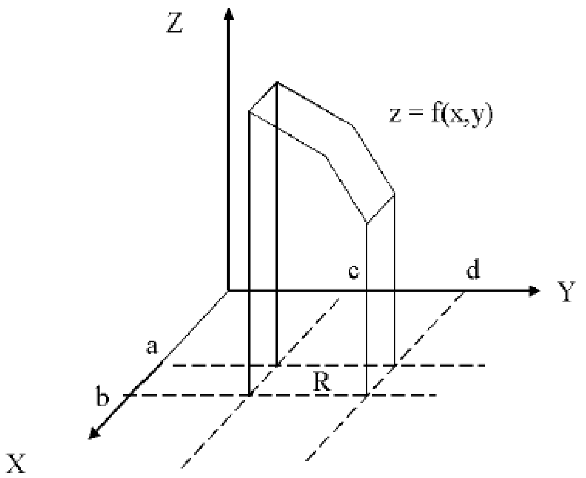
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(a_i)(x_i-x_{i-1})}_{\substack{aire\ du\ rectangle\ de\ base[x_{i-1},x_i]\\ et\ de\ hauteur f(a_i)}} \quad , \ a_i \in [x_{i-1},x_i]$$

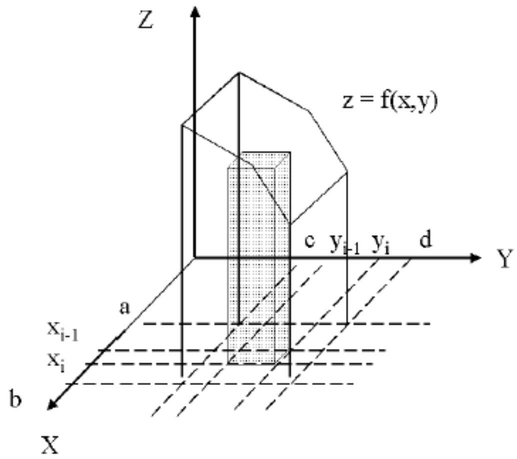


I. Intégrales doubles :

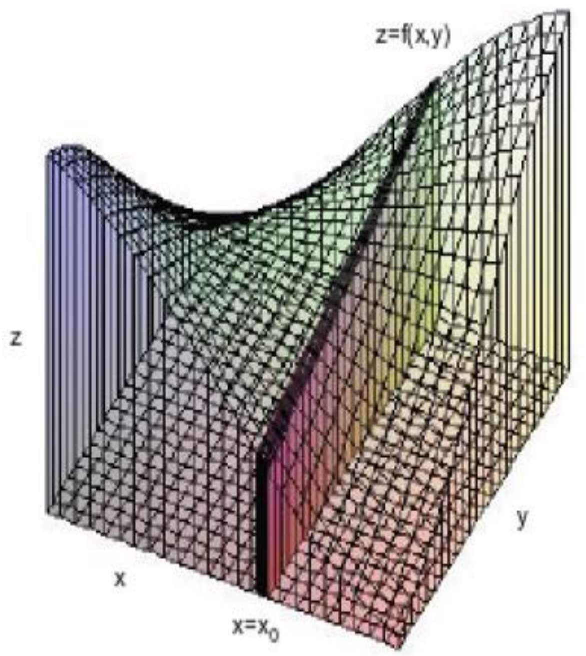
1. Principe de l'intégrale double sur un rectangle :

Soit f la fonction réelle des deux variables x et y, continue sur un rectangle $D=[a,b]\times[c,d]$ de $\mathbb{R}^2$. Sa représentation est une surface S dans l'espace muni du repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.





On partage D en sous-rectangles, dans chaque sous-rectangle$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ on choisit un point M(x,y) et on calcule l'image de (x,y) pour la fonction f.



La somme des volumes des colonnes dont la base est des sous-rectangles et la hauteur f(x,y) est une approximation du volume compris entre le plan Z=0 et la surface S. Lorsque le quadrillage devient suffisamment « fin » pour que la diagonale de chaque sous-rectangle tende vers 0, ce volume sera la limite des sommes de Riemann et on le note

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{1\le i\le n;1\le j\le n} f(a + i\frac{b-a}{n}, c + j\frac{d-c}{n})$$

Exemple : En utilisant la définition, calculer $\iint_{[0,1]\times[0,1]}(x+2y)dx\,dy$

Remarques :

- A priori, l'intégrale double est faite pour calculer des volumes, de même que l'intégrale simple était faite pour calculer une aire.
- Dans une intégrale double, les bornes en x et y doivent toujours être rangées en ordre croissant.

Théorème : *Soit D un domaine borné de* $\mathbb{R}^2$*.Alors toute fonction continue* $f: D \to \mathbb{R}$ *est intégrable au sens de Riemann.*

2. Propriétés des intégrales doubles :

- L'intégrale double sur un domaine D est linéaire :

$$\iint_D (\alpha f + \mu g)(x,y)\ dx\ dy = \alpha \iint_D f(x,y) dx\ dy + \mu \iint_D g(x,y) dx\ dy.$$

- Si D et D' sont deux domaines tels que $D \cap D' = \begin{Bmatrix} \emptyset\ ou \\ une\ courbe, ou \\ \{points\ isolés\} \end{Bmatrix}$, alors :

$$\iint_{D \cup D'} f(x,y) dx\ dy = \iint_D f(x,y) dx\ dy + \iint_{D'} f(x,y) dx\ dy.$$

- Si $f(x,y) \geq 0$ en tout point de D, avec f non identiquement nulle, alors $\iint_D f(x,y) dx\ dy$ est strictement positive.
- Si $\forall (x,y) \in D, f(x,y) \leq g(x,y), alors\ \iint_D f(x,y) dx\ dy \leq \iint_D g(x,y) dx\ dy.$
- $\left| \iint_D f(x,y) dx\ dy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\ dx\ dy.$

3. Formules de Fubini :

Théorème 01: Soit f une fonction continue sur un rectangle $D = [a,b] \times [c,d]$.Nous avons

$$\iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx \right] dy.$$

Nous calculons donc une intégrale double sur un rectangle en calculant deux intégrales simples :

- En intégrant d'abord par rapport à x entre a et b (en laissant y constante). Le résultat est une fonction de y.
- En intégrant cette expression de y entre c et d.
  Alternativement, on peut faire de même en intégrant d'abord en y puis ensuite en x.

Exemple 01 : Calcul de $I = \iint_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \sin(x+y)\ dx\ dy$

D'après Fubini, on a :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\, dx \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\, dy \right] dx.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + sin y) dy$$

$$= [sin y - cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Dans cette exemple x et y jouent le même rôle.

Exemple 02 : Calcul de $I = \iint_{[0,1] \times [2,5]} \frac{1}{(1+x+2y)^2}\ dx\ dy.$

Calculons $I = \int_2^5 \left[\int_0^1 \frac{1}{(1+x+2y)^2} dx \right] dy = \int_2^5 \left[\frac{1}{1+x+2y} \right]_0^1 dy$

$$= \frac{1}{2} [\ln(1+2y) - \ln(2+2y)]_2^5 = \frac{1}{2}\ ln \frac{11}{10}.$$

Cas particulier : Si $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ et $h: [c,d] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, alors

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} g(x) h(y) dx\ dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right)$$

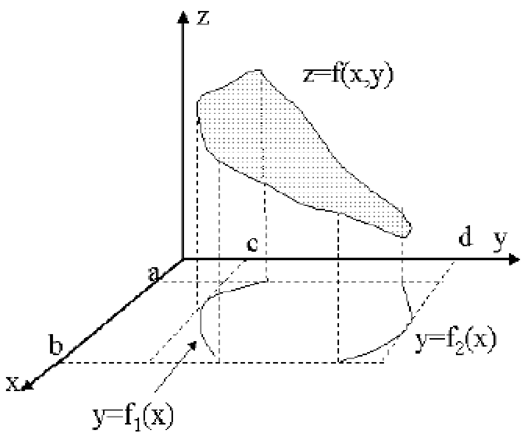
Exemple : Calculer l'intégrale $\iint_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \sin x \cos y\ dxdy$

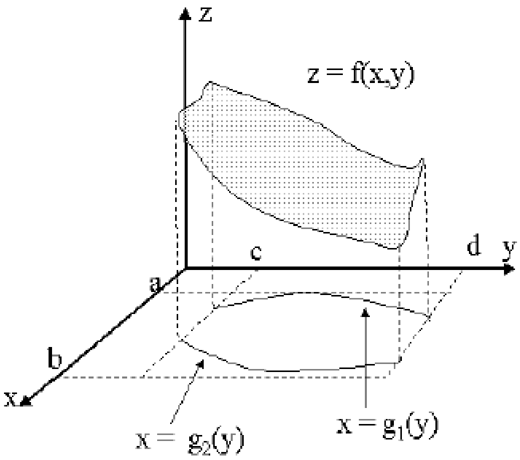
Théorème 02 : Soit f une fonction continue sur un domaine borné D de $\mathbb{R}^2$. L'intégrale double $I = \iint_D f(x,y)dx\,dy$ se calcule par l'une ou l'autre des façons suivantes :

- Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\, f_1(x) \le y \le f_2(x), a \le x \le b\}$ alors
$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\right] dx.$
- Si l'on peut représenter le domaine D sous la forme
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\, g_1(y) \le x \le g_2(y), c \le y \le d\}$, alors :

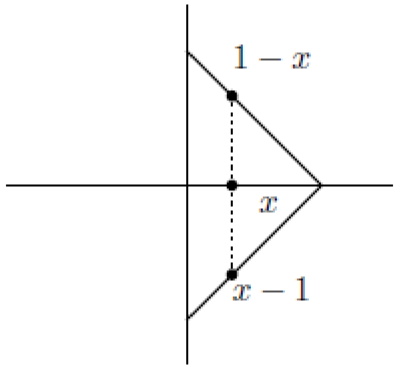
$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\right] dy.$$

Si les deux représentations sont possibles, les deux résultats sont évidemment égaux.





Exemple01 : Calculer l'intégrale $\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ avec D est le triangle de sommets (0,1), (0,-1) et (1,0).



Pour cela on va définir D analytiquement par les inégalités :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 0 \le x \le 1, x-1 \le y \le 1-x\}$$

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} (x^2 + y^2)\,dy\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{x-1}^{1-x} dx = \frac{1}{3}$$

Exemple02 : Calculer $I = \iint_D (x + 2y)\,dx\,dy$ sur le domaine D formé de la réunion de la partie gauche du disque unité et du triangle de sommets (0,-1), (0,1) et (2,1).

On a $I = \int_{-1}^{1} \left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y+1} (x+2y)dx\right] dy = \int_{-1}^{1} \left(3y + 3y^2 + 2y\sqrt{1-y^2}\right) dy = 2.$

Exemple03: Calculer l'intégrale $\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy$, où $D = \{(x,y): 0 \le y \le x \le 1\}$. Le domaine est l'intérieur du triangle limité par l'axe des x, la droite x=1 et la droite y=x. Dans ce cas on est obligé a intégrer d'abord par rapport à y puis par rapport à x, car la primitive de la fonction $x \longmapsto e^{x^2}$ ne s'exprime pas au moyen des fonctions usuelles. D'où $I = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy\,dx = \int_0^1 x\,e^{x^2} dx = \frac{e-1}{2}$.

Exemple 04 : Calculer $I = \int_0^4 \int_{2x}^8 \sin(y^2) dydx = \int_0^8 (\int_0^{\frac{y}{2}} \sin(y^2)\,dx)dy = \frac{1}{4}\int_0^8 2y\sin(y^2)dy = \frac{1-\cos 64}{4}$.

4. Changement de variable dans une intégrale double:

Nous allons avoir un résultat analogue à celui de l'intégrale simple, où le changement de variable $x = \varphi(t)$ nous demandait de remplacer le « dx » par $\varphi'(t)dt$. C'est le Jacobien qui va jouer le rôle de la dérivée :

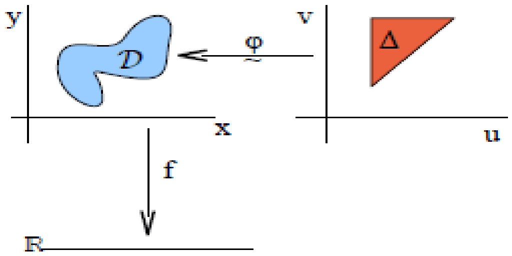
<u>Rappel</u> : On appelle la matrice jacobienne de $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ la matrice à p lignes et n colonnes :

$$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial \varphi_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La première colonne contient les dérivées partielles des coordonnées de φ par rapport à la première variable x_1, la deuxième colonne contient les dérivées partielles des coordonnées de φ par rapport à la deuxième variable x_2 et ainsi de suite.

Théorème : Soit $(u,v) \in \Delta \longmapsto (x,y) = \varphi(u,v) \in D$ une bijection de classe C^1 du domaine Δ au domaine D. Soit $|J_\varphi|$ la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de φ. Alors, nous avons :

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_\Delta f \circ \varphi(u,v)\ |J_\varphi(u,v)|\,du\,dv$$



Exemple : Calculer $I = \iint_D (x-1)^2\,dx\,dy$ sur le domaine

$$D = \{(x,y): -1 \le x+y \le 1, -2 \le x-y \le 2\}$$

En effectuant le changement de variable $u = x+y, v = x-y$. Le domaine D en (u,v) est donc le rectangle $\{-1 \le u \le 1, -2 \le v \le 2\}$. On a aussi $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$. Le jacobien de ce changement de variables est $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut $-1/2$. Et donc

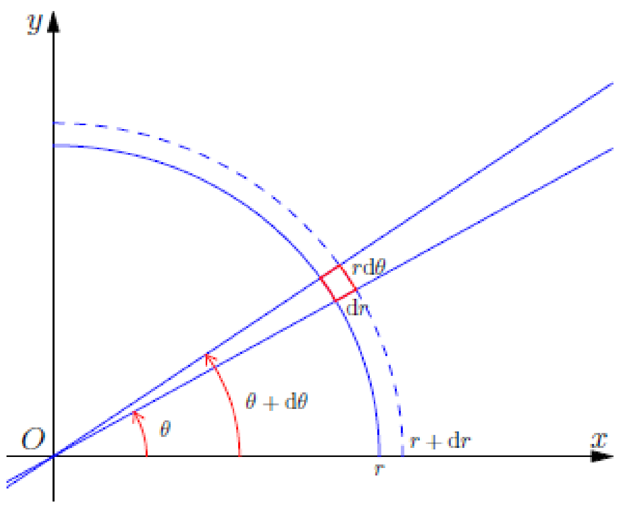
$I = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2}\left[\int_{-1}^{1}(u+v-2)^2\,du\right]dv = \frac{136}{3}.$

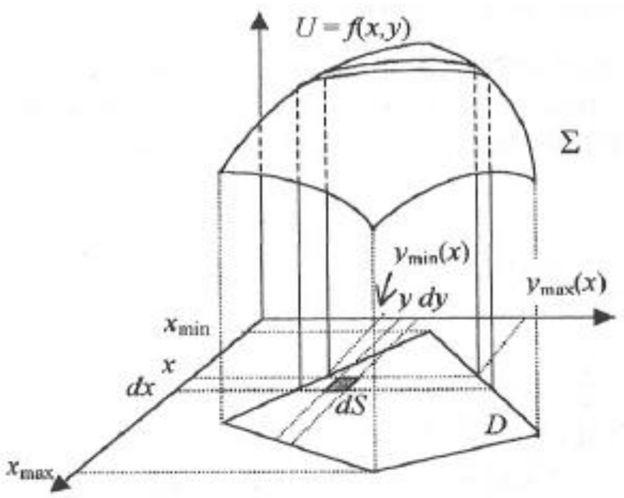
Remarque :

- Si $|\det(J_\varphi)| = 1$, on obtient $\iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_\Delta f(\varphi(u,v))du\,dv.$
- Cela permet d'utiliser les symétries : si par exemple $\forall(x,y) \in D, (-x,y) \in D$ *et* $f(-x,y) = f(x,y)$ alors $\iint_D f(x,y)dx\,dy = 2\iint_{D'} f(x,y)\,dx\,dy,$ où $D' = D \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}).$

Changement de variable en coordonnées polaires :

Soit $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $(r,\theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et son jacobien vaut : $J_\varphi(r,\theta) = \begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r.$





Et donc $I = \iint_D f(x,y)dx\,dy = \iint_\Delta g(r,\theta)r dr\,d\theta.$

Exemple : 1) Calculer en passant en coordonnées polaires $I = \iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ où

$D = \{(x,y): 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$

D représente le quart de la partie comprise entre les deux cercles centrés à l'origine et de rayons 1 et 2(anneau). D'où $I = \iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \frac{r\,dr\,d\theta}{r^2} = \frac{\pi}{2}\ln 2$

2) Calculer le volume d'une sphère : $V = 2\iint_{x^2+y^2\leq R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dx\,dy$ et puisque la fonction est paire par rapport aux deux variables ; $V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}r\,dr\,d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$

5. Applications :

a) **Calcul d'aire d'un domaine D :** On a vu que $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ mesure le volume sous la représentation de f et au dessus de D. On a aussi la possibilité d'utiliser l'intégrale double pour calculer l'aire elle-même du domaine D. Il suffit pour cela de prendre f(x,y)=1. Ainsi, l'aire A du domaine est $A = \iint_D \ dx\, dy = \iint_\Delta \ r\, dr d\theta$.

Exemple : Calculer l'aire délimitée par l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Notons l'aire de cette ellipse A, donc $A = \iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} dx\, dy$. Par symétrie et en passant aux coordonnées polaires généralisées : $x = a\, r cos\theta$, $y = b\, r \sin\theta$, on obtient $A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 abr\, dr\, d\theta = \pi ab$.

b) Calcul d'aire d'une surface :

On appelle D la région du plan XOY délimitée par la projection sur le plan XOY de la surface représentative d'une fonction f, notée ∑. L'aire de la surface de ∑ délimitée par sa projection D sur le plan XOY est donnée par $A = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dx\, dy$.

Exemple : Calculons l'aire du paraboloïde

$\Sigma = \{(x,y,z) : z = x^2 + y^2, 0 \le z \le h\}$. Puisque la surface ∑ est égale au graphe de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ définie au-dessus du domaine

$\mathrm{D} = \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) : x^2 + y^2 \le h\}$. D'où

$Aire(\Sigma\ \ ) = \iint_D \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dx\, dy = 2\pi\int_0^{\sqrt{h}} \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr = \frac{\pi}{6}(4h+1)^{\frac{3}{2}}$

c) Masse et centres d'inertie : Si on note $\rho(x,y)$ la densité surfacique d'une plaque Δ , sa masse est donnée par la formule $M = \iint_\Delta \ \rho(x,y) dx\, dy$. Et son centre d'inertie $G = (x_G, y_G)$ est tel que : $\begin{cases} x_G = \frac{1}{M}\iint_\Delta \ x\,\rho(x,y)dx\, dy \\ y_G = \frac{1}{M}\iint_\Delta \ y\,\rho(x,y)dx\, dy \end{cases}$

Exemple : Déterminer le centre de masse d'une fine plaque de métal triangulaire dont les sommets sont en (0,0), (1,0) et (0,2), sachant que sa densité est $\boldsymbol{\rho(x,y) = 1 + 3x + y}$.

$$M = \iint_D \rho(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^{2-2x}(1+3x+y)dxdy = \frac{8}{3}$$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)dxdy = \displaystyle\int_0^1\int_0^{2-2x} x(1+3x+y)dxdy = \frac{3}{8} \\ y_G = \dfrac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)dxdy = \displaystyle\int_0^1\int_0^{2-2x} y(1+3x+y)dxdy = \frac{11}{16} \end{cases}$$

d) Le moment d'inertie : Le moment d'inertie d'une masse ponctuelle M par rapport à un axe est défini par Mr^2, où r est la distance entre la masse et l'axe. On étend cette notion à une plaque de métal qui occupe une région D et dont la densité est donnée par $\rho(x,y)$, le moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe (X'OX) est : $I_x = \iint_D \ y^2\rho(x,y)dxdy$. De même, le moment d'inertie de la plaque par rapport à l'axe (y'Oy) est : $I_y = \iint_D \ x^2\rho(x,y)dxdy$. Il est aussi intéressant de considérer le moment d'inertie par rapport à l'origine : $I_O = \iint_D \ (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy$.

II. Intégrale triple : Le principe est le même que pour les intégrales doubles,

Si $(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) \in \mathbb{R}$ est une fonction continue de trois variables sur un domaine D de $\mathbb{R}^3$, on définit $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ comme limite de somme de la forme $\sum_{i,j,k} f(u_i,v_j,w_k)\,(x_i - x_{i-1})\,(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$.

Remarque : On a les mêmes propriétés algébriques des intégrales doubles : linéarité, …

1. Formules de Fubini :

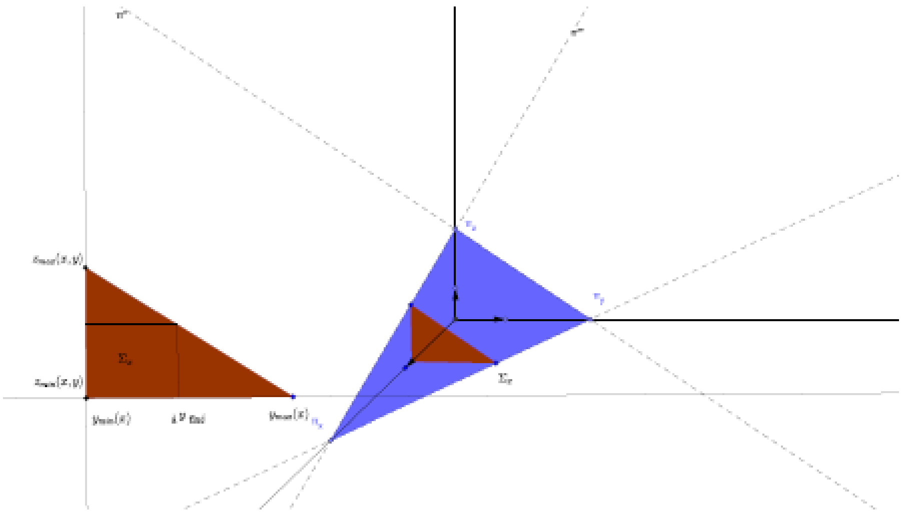
- **Sur un parallélépipède :** Le théorème de Fubini s'applique de façon assez naturelle quand $D = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$, on se ramène à calculer trois intégrales simples :

$$\iiint_D \mathrm{f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$
$$= \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_e^f \mathrm{f(x,y,z)dz}\right] \mathrm{dy}\right] \mathrm{dx}$$
$$= \int_e^f \left[\int_c^d \left[\int_a^b \mathrm{f(x,y,z)dx}\right] \mathrm{dy}\right] \mathrm{dz} = \cdots$$

  Exemple : Calcul de $I = \iiint_{[0,1]\times[1,2]\times[1,3]} (x + 3yz)dx\,dy\,dz$

- **Sur un domaine quelconque borné :** Représentons un domaine D pour établir le traitement de la recherche des bornes d'intégration. Pour un certain x fixé, variant entre x_{min} et x_{max},on découpe dans D une surface D_x. On peut alors représenter D_x dans le plan YOZ, puis le traitement sur D_x se fait comme avec les intégrales doubles :

  $I = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left[\int_{y_{min}}^{y_{max}} \left[\int_{z_{min}}^{z_{max}} f(x,y,z)dz\right] dy\right] dx$. Bien-sûr, on peut intervertir les rôles de x, y et z.



Exemple : Calcul de $I = \iiint_D (x^2 + yz)dx\,dy\,dz$ sur le domaine

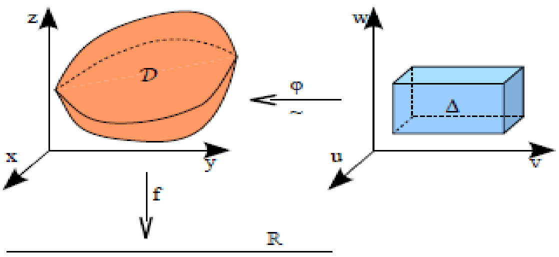
$D = \{(x,y,z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + 2z \leq 1\}$.

$$\iiint_D (x^2 + yz)dx\,dy\,dz = \int_0^{1/2} \left[\int_0^{1-2z} \left[\int_0^{1-2z-x} (x^2 + yz)dy\right] dx\right] dz = \frac{1}{96}$$

2. Changement de variables : Si l'on a une application bijective φ et de classe C^1 du domaine Δ sur le domaine D, définie par

$(u,v,w) \longmapsto \varphi(u,v,w) = (x,y,z)$. La formule du changement de variables est :

$\iiint_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta f\circ\varphi(u,v,w)\left|J_\varphi(u,v,w)\right| du\,dv\,dw$ en notant $\left|J_\varphi\right|$ la valeur absolue du déterminant du jacobien.



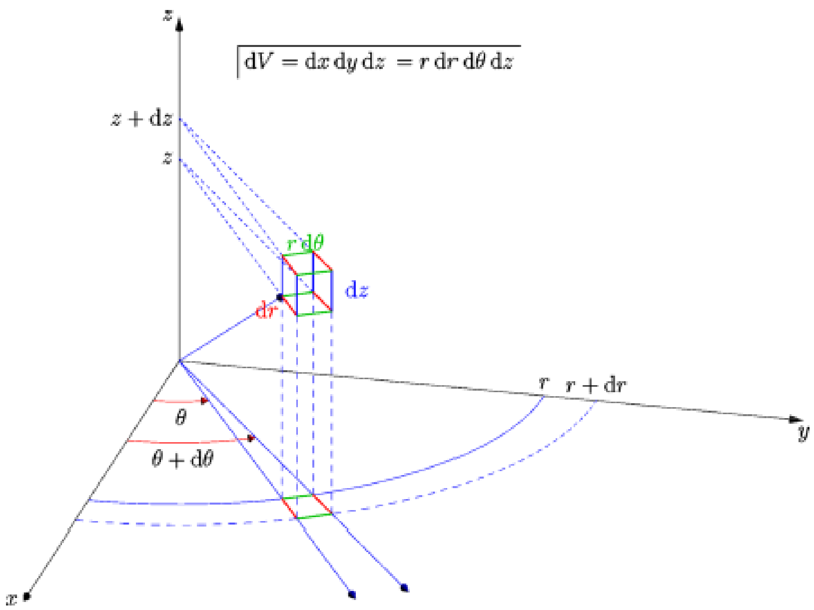
a) **Calcul en coordonnées cylindriques :**

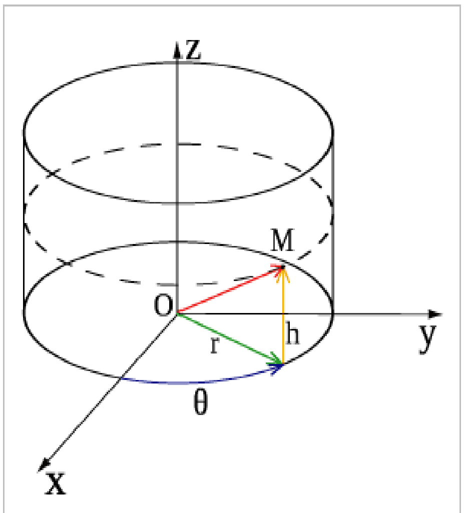
En dimension 3, les coordonnées cylindriques sont données par :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne de $\varphi : (r,\theta,z) \longmapsto (x,y,z)$ sera

$$\left|J_\varphi\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\,dr\,d\theta\,dz$$





Système de coordonnées cylindriques

On a donc

$$I = \iiint_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta g(r,\theta,z)r\,dr d\theta\,dz = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}}\left[\int_{r_{min}}^{r_{max}}\left[\int_{z_{min}}^{z_{max}} r\,g(r,\theta,z)dz\right]dr\right]d\theta.$$

Exemple : Calculer

$I = \iiint_V (x^2+y^2+1)dx\,dy\,dz$ où $V = \{(x,y,z): x^2+y^2 \le 1 \text{ et } 0 \le z \le 2\}$

$$I = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(r^2+1)dr\,d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dz \left[\frac{1}{4}(r^2+1)^2\right]_0^1 = 4\pi$$

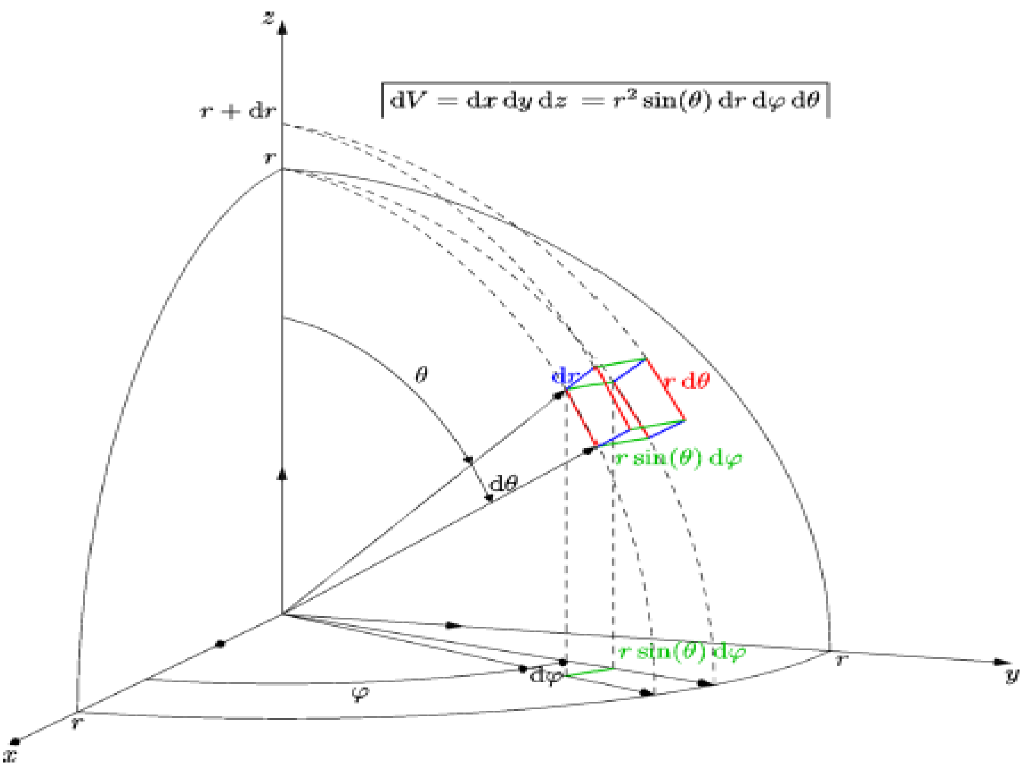
b) <u>Calcul en coordonnées sphériques :</u>

En dimension 3, les coordonnées sphériques sont données par :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\ \cos\varphi \\ y = r\sin\theta\ \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne de $\Phi: (r,\theta,\varphi) \longmapsto (x,y,z)$ sera

$$|J_\Phi| = \begin{vmatrix} \sin\theta\ \cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\ \sin\varphi \\ \sin\theta\ \sin\varphi & r\cos\theta\ \sin\varphi & r\sin\theta\ \cos\varphi \\ \cos\theta & -r\ \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$$



Et donc $\iiint_D f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iiint_\Delta g(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$

Exemple : Calculer $I = \iiint_D z\,dx\,dy\,dz$, où $D = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \le R^2; z \ge 0\}$

Le domaine D est l'hémisphère supérieur (centrée à l'origine et de rayon R), en passant aux coordonnées sphériques : $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\ d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{\pi}{3}R^3$

3. **Volume :** Le volume d'un corps est donné par $V = \iiint_D \, dx\, dy\, dz$ tel que D est le domaine délimité par ce corps.

Exemple : Calculer le volume d'une sphère.

$V = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \le R^2} dx\, dy\, dz$, d'après la propriété de la symétrie :

$V = 8 \iiint_D \, dxdydz \; avec \; D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2 ; x \ge 0, y \ge 0 \; et z \ge 0\}$ d'où

$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta \int_0^R r^2 \, dr = \frac{4\pi}{3} R^3$

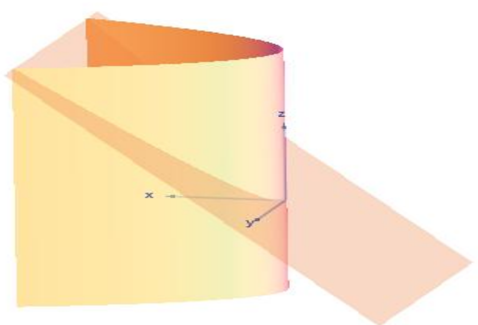
4. **Masse, centre et moments d'inertie :** Soit µ la densité d'un solide qui occupe la région V , alors sa masse est donnée par

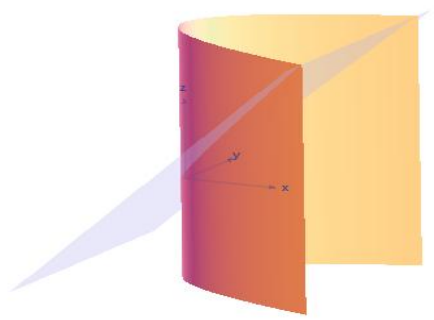
$$M = \iiint_V \, \mu(x,y,z) dx\, dy\, dz$$

Le centre de masse G est de coordonnées $\begin{cases} x_G = \frac{1}{M} \iiint_V \, x\mu(x,y,z) dx\, dy\, dz \\ y_G = \frac{1}{M} \iiint_V \, y\mu(x,y,z) dx\, dy\, dz \\ z_G = \frac{1}{M} \iiint_V \, z\mu(x,y,z) dx\, dy\, dz \end{cases}$

Les moments d'inertie par rapport aux trois axes sont : $\begin{cases} I_x = \iiint_V \, (y^2+z^2)\mu(x,y,z) dx\, dy\, dz \\ I_y = \iiint_V \, (x^2+z^2)\mu(x,y,z) dx\, dy\, dz \\ I_z = \iiint_V \, (x^2+y^2)\mu(x,y,z) dx\, dy\, dz \end{cases}$

Exemple : Déterminer le centre de masse d'un solide de densité constante, borné par le cylindre parabolique $x = y^2$ et les plans x=z, z=0 et x=1.





La masse est $= \int_{-1}^{1} (\int_{y^2}^{1} (\int_0^x \mu dz) dx) dy = \frac{4\mu}{5}$, en raison de symétrie du domaine et μ par rapport au plan OXZ, on a $y_G = 0$. Et $x_G = \frac{1}{M} \iiint_V \, x\mu \, dx\, dy\, dz = \frac{\mu}{M} \int_{-1}^{1} (\int_{y^2}^{1} (\int_0^x xdz) dx) dy = \frac{5}{7}$

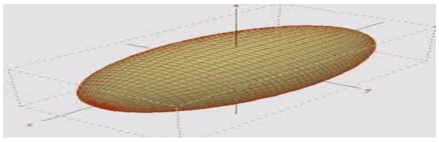
$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_V \, z\mu dx\, dy\, dz = \frac{\mu}{M} \int_{-1}^{1} (\int_{y^2}^{1} \left(\int_0^x zdz \right) dx) dy = \frac{5}{14}$$

Complément : « Surfaces dans l'espace »

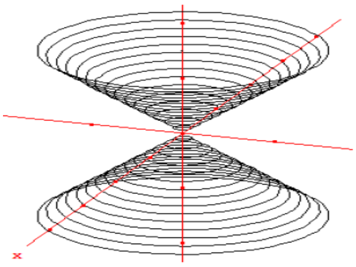
1) Sphère : L'équation cartésienne d'une sphère centrée en (x_0, y_0, z_0) et de rayon R est :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

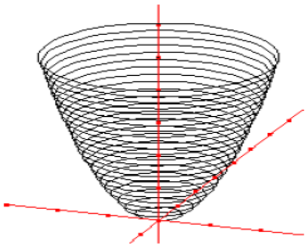
2) Ellipsoïde : est une surface d'équation de la forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



3) Cône : C'est une surface de l'espace d'équation de la forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

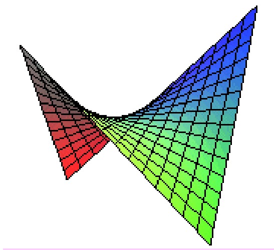


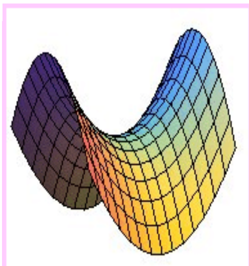
4) Paraboloïde elliptique (bol) : est d'équation de la forme : $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



5) Paraboloïde hyperbolique : (à selle) est d'équation de la forme :

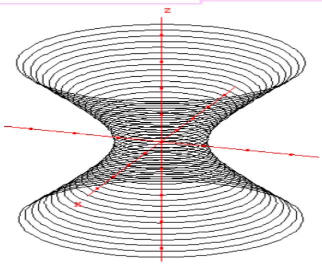
$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$; par un changement de variable l'équation se transforme en $z = x\, y$





6) Hyperboloïde à une nappe : d'équation de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



7) Hyperboloïde à deux nappes : est d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$