Intégration

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1

Etudier l'existence des intégrales suivantes

1) (**) $\int_0^{+\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)\,dx$ **2) (**)** $\int_1^{+\infty}\left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)\,dx$ **3) (**)** $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x+e^x}\,dx$

4) (***) $\int_0^{+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{x}}\,dx$ **5) (**)** $\int_1^{+\infty}e^{-\sqrt{x^2-x}}\,dx$ **6) (**)** $\int_0^{+\infty}x^{-\ln x}\,dx$

7) (**) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{5/3}}\,dx$ **8) (**)** $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$ **9) (**)** $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}}\,dx$

10) (**) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\,dx$ **11) (**)** $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}\,dx$ **12) (***)** $\int_0^1\frac{1}{\mathrm{Arccos}(1-x)}\,dx.$

Correction ▼ [005713]

Exercice 2

Etudier l'existence des intégrales suivantes.

1) (***) I $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^a\ln^b x}\,dx$ (Intégrales de BERTRAND) **2) (**)** $\int_0^{\pi/2}(\tan x)^a\,dx$

3) (**) $\int_1^{+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}}-a-\frac{b}{x}\right)dx$ **4) (***)** $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x^b)}\,dx$

Correction ▼ [005714]

Exercice 3

(Hors programme) Etudier la convergence des intégrales impropres suivantes

1) (I)** $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ **2) (**)** $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^a}\,dx$ **3) (**)** $\int_0^{+\infty}e^{ix^2}\,dx$

4) (**) $\int_0^{+\infty}x^3\sin(x^8)\,dx$ **5) (**)** $\int_0^{+\infty}\cos(e^x)\,dx$ **6) (****)** $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^3\sin^2 x}\,dx.$

Correction ▼ [005715]

Exercice 4

Existence et calcul de :

1) (I)** $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ **2) (très long)** $\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)}\,dx$
3) (I)** $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx$ **4) (***)** $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}\,dx$

5)(***) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,dx$ **6) (**)** $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\,dx$

7) (**) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{5\operatorname{ch}x+3\operatorname{sh}x+4}\,dx$ **8) (***)** $\int_0^{+\infty}\left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)dt$

9) (I)** $\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx$ **10) (I très long)** $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^a}\,dx$ (calcul pour $a\in\left\{\frac{3}{2},2,3\right\}$)

11) (***) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx$ **12) (*** I)** $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$ $(0<a<b)$

Correction ▼ [005716]

Exercice 5

Deux calculs de $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx$.

1) (I)** En utilisant $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx$, calculer I (et J).

2) (* I)** Calculer $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$ (commencer par P_n^2) et en déduire I.

Correction ▼ [005717]

Exercice 6 ** I

En utilisant un développement de $\frac{1}{1-t}$, calculer $\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\, dt$.

Correction ▼ [005718]

Exercice 7 *** I

Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, dt$ (en écrivant $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\, dt = \int_0^x \frac{t}{\ln t}\, dt - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\, dt$).

Correction ▼ [005719]

Exercice 8

1) (I)** Trouver un équivalent simple quand x tend vers $+\infty$ de $e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

2) (***) Montrer que $\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx \underset{a \to 0}{\sim} -\ln a$.

3) (*) Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{x^3+a^2}\, dx \underset{a \to +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}$.

Correction ▼ [005720]

Exercice 9 ***

Etude complète de $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt$.

Correction ▼ [005721]

Exercice 10 ***

(Hors programme) Convergence et calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x}\, dx$.

Correction ▼ [005722]

Exercice 11 ***

Soit f définie, continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, intégrable sur $[1,+\infty[$.

1. Montrer que $xf(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
2. Existence et calcul de $\int_1^{+\infty} x(f(x+1)-f(x))dx$.

Correction ▼ [005723]

Exercice 12 ***

1. Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge en $+\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f'(x)\, dx$ converge en $+\infty$ si et seulement si $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
2. (a) On suppose que f est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' admettent des limites réelles quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f' tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire que si les intégrales $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\int_0^{+\infty} f''(x)\, dx$ convergent alors f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [005724]

Exercice 13 ***

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x)\,dx\right)$. Cas d'égalité ?

Correction ▼ [005725]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour $x \geqslant 0$, $x^2+4x+1 \geqslant 0$ et donc la fonction $f\ :\ x \mapsto x+2-\sqrt{x^2+4x+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Quand x tend vers $+\infty$, $x+2--\sqrt{x^2+4x+1} = \frac{3}{x+2+\sqrt{x^2+4x+1}} \sim 32x$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{3}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n ?est pas intégrable sur $[0;+\infty[$.
2. Pour $x \geqslant 1$, $1+\frac{1}{x}$ est défini et strictement positif. Donc la fonction $f\ :\ x \mapsto e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$.
   Quand x tend vers $+\infty$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = e^{1-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})} = e-\frac{e}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ puis $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2x}$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{e}{2x}$ est positive et non intégrable au voisinage de $+\infty$, f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
3. La fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{\ln x}{x+e^x}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.
   • En 0, $\frac{\ln x}{x+e^x} \sim \ln x$ et donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Comme $\frac{1}{2} < 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction f.
   • En $+\infty$, $f(x) \sim \frac{\ln x}{e^x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Comme $2 > 1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de la fonction f.
   Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.
4. La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$ est continue et strictement positive sur $[0,+\infty[$. Donc la fonction $f\ :\ x \mapsto \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
   En $+\infty$, $\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right) = \frac{1}{3}\ln x+\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3}-1\right) = \frac{1}{3}\ln x+\ln\left(\frac{1}{3x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = -\frac{2}{3}\ln x-\ln 3+O\left(\frac{1}{x}\right)$. Par suite, $\sqrt{x}\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{x}\ln x-\ln 3\sqrt{x}+o(1)$.
   Mais alors $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(-\frac{2}{3}\sqrt{x}\ln x-\ln 3\sqrt{x}+2\ln x+o(1)\right)$ et donc $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0$. Finalement $f(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et f est intégrable sur $[0,+\infty[$.
5. La fonction $f\ :\ x \mapsto e^{-\sqrt{x^2-x}}$ est continue sur $[1,+\infty[$.
   Quand x tend vers $+\infty$, $x^2 f(x) = \exp\left(-\sqrt{x^2-x}+2\ln x\right) = \exp(-x+o(x))$ et donc $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. $f(x)$ est ainsi négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ et donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
6. La fonction $f\ :\ x \mapsto x^{-\ln x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   • Quand x tend vers 0, $x^{-\ln x} = e^{-\ln^2 x} \to 0$. La fonction f se prolonge par continuité en 0 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 0.
   • Quand x tend vers $+\infty$, $x^2 f(x) = \exp\left(-\ln^2 x+2\ln x\right) \to 0$. Donc f est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$ et f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
   Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.
7. La fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{5/3}}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   • Quand x tend vers 0, $f(x) \sim \frac{5x-3x}{x^5/3} = \frac{2}{x^{2/3}} > 0$. Puisque $\frac{2}{3} < 1$, la fonction $x \mapsto \frac{2}{x^{2/3}}$ est positive et intégrable sur un voisinage de 0 et il en est de même de la fonction f.
   • En $+\infty$, $|f(x)| \leqslant \frac{2}{x^{5/3}}$ et puisque $\frac{5}{3} > 1$, la fonction f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
   Finalement, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.
8. La fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{\ln x}{x^2-1}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   • En 0, $f(x) \sim -\ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite.
   • En 1, $f(x) \sim \frac{\ln x}{2(x-1)} \sim \frac{1}{2}$. La fonction f se prolonge par continuité en 1 et est en particulier intégrable sur un voisinage de 1 à gauche ou à droite.
   • En $+\infty$, $x^{3/2} f(x) \sim \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = o(1)$. Donc $f(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{x^{3/2}}$ quand x tend vers $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$.
   Finalement, f est intégrable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.
9. La fonction$f\ :\ x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{|x|}}$ est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ et paire. Il suffit donc d'étudier l'intégrabilité de f sur $]0,+\infty[$.

f est positive et équivalente en 0 à droite à $\frac{1}{\sqrt{x}}$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.
f est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ puis par parité sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. On en déduit que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{|x|}}\,dx$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut par parité $2\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{|x|}}\,dx$.

10. La fonction $f\,:\,x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$, paire et équivalente au voisinage de 1 à droite à $\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$. f est donc intégrable sur $]-1,1[$.
11. La fonction $f\,:\,x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x^3}}$ est continue et positive sur $]0,1[$, équivalente au voisinage de 0 à droite à $\frac{1}{x^{2/3}}$ et au voisinage de 1 à gauche à $\frac{1}{(1-x)^{1/3}}$. f est donc intégrable sur $]0,1[$.
12. La fonction $f\,:\,x \mapsto \frac{1}{\text{Arccos}(1-x)}$ est continue et positive sur $]0,1]$.
En 0, $\text{Arccos}(1-x) = o(1)$. Donc $\text{Arccos}(1-x) \sim \sin(\text{Arccos}(1-x)) = \sqrt{1-(1-x)^2} = \sqrt{2x-x^2} \sim \sqrt{2}\sqrt{x}$.
Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$ et f est intégrable sur $]0,1[$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Pour tout couple de réels (a,b), la fonction $f\,:\,x \mapsto \frac{1}{x^a \ln^b x}$ est continue et positive sur $[2,+\infty[$. Etudions l'intégrabilité de f au voisinage de $+\infty$.
1er cas. Si $a>1$, $x^{(a+1)/2}f(x) = \frac{1}{x^{(a-1)/2}\ln^b x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ car $\frac{a-1}{2}>0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{(a+1)/2}}\right)$. Comme $\frac{a+1}{2}>1$, la fonction $x\mapsto \frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de f. Dans ce cas, f est intégrable sur $[2,+\infty[$.
2ème cas. Si $a<1$, $x^{(a+1)/2}f(x) = \frac{x^{(1-a)/2}}{\ln^b x} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ car $\frac{1-a}{2}>0$ et d'après un théorème de croissances comparées. Donc $f(x)$ est prépondérant devant $\frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ en $+\infty$. Comme $\frac{a+1}{2}<1$, la fonction $x\mapsto \frac{1}{x^{(a+1)/2}}$ n'est pas intégrable sur un voisinage de $+\infty$ et il en est de même de f. Dans ce cas, f n'est pas intégrable sur $[2,+\infty[$.
3ème cas. Si $a=1$. Pour $X>2$ fixé , en posant $t=\ln x$ et donc $dt=\frac{dx}{x}$ on obtient
$$\int_2^X \frac{1}{x\ln^b}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{dt}{t^b}.$$
Puisque $\ln X$ tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$ et que les fonctions considérées sont positives, f est intégrable sur $[2,+\infty[$ si et seulement si $b>1$.
En résumé ,

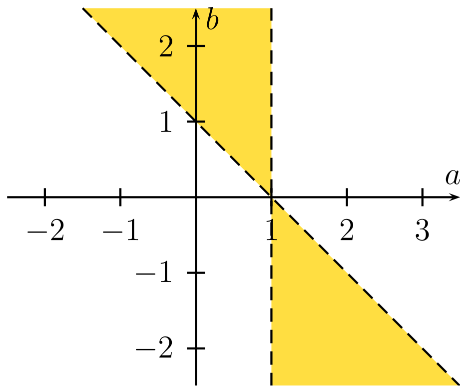
$$\boxed{\text{la fonction } x\mapsto \frac{1}{x^a\ln^b x} \text{ est intégrable sur } [2,+\infty[\text{ si et seulement si } a>1 \text{ ou } (a=1 \text{ et } b>1).}$$

(En particulier, la fonction $x\mapsto \frac{1}{x\ln x}$ n'est pas intégrable sur voisinage de $+\infty$ bien que négligeable devant $\frac{1}{x}$ en $+\infty$).
2. Pour tout réel a, la fonction $f\,:\,x\mapsto (\tan x)^a$ est continue et strictement positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. De plus, pour tout réel x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \frac{1}{f(x)}$.
• **Etude en 0 à droite.** $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^a$. Donc f est intégrable sur un voisinage de 0 à droite si et seulement si $a>-1$.
• **Etude en $\frac{\pi}{2}$ à gauche.** $f(x) = \frac{1}{f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{-a}$. Donc f est intégrable sur un voisinage de $\frac{\pi}{2}$ à gauche si et seulement si $a<1$.
En résumé, f est intégrable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ si et seulement si $-1<a<1$.
3. Pour $x\geqslant 1$, $1+\frac{1}{x}$ est défini et strictement positif. Donc pour tout couple (a,b) de réels, la fonction $f\,:\,x\mapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}$ est continue sur $[1,+\infty[$.
En $+\infty$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} (1-a)+\frac{1-b}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

• Si $a\neq 1$, f a une limite réelle non nulle en $+\infty$ et n'est donc pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
• Si $a=1$ et $b\neq 1$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1-b}{x}$. En particulier, f est de signe constant sur un voisinage de $+\infty$ et n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$.
• Si $a=b=1$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et dans ce cas, f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
En résumé, f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $a=b=1$.

4. Pour tout couple (a,b) de réels, la fonction $f\ :\ x\mapsto \frac{1}{x^a(1+x^b)}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.
• Etude en 0.
-Si $b>0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a<1$,
-si $b=0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a<1$,
-si $b<0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{a+b}}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de 0 si et seulement si $a+b<1$.
• Etude en $+\infty$.
-Si $b>0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{a+b}}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a+b>1$,
-si $b=0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a>1$,
-si $b<0$, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^a}$, et donc f est intégrable sur un voisinage de $+\infty$ si et seulement si $a>1$.
En résumé, f est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si (($b\geqslant 0$ et $a<1$) ou ($b<0$ et $a+b<1$)) et (($b>0$ et $a+b>1$) ou ($b\leqslant 0$ et $a>1$)) ce qui équivaut à ($b>0$ et $a+b>1$ et $a<1$) ou ($b<0$ et $a>1$ et $a+b<1$).
Représentons graphiquement l'ensemble des solutions. La zone solution est la zone colorée.



Correction de l'exercice 3 ▲

1. Soient ε et X deux réels tels que $0<\varepsilon<X$. Les deux fonction $x\mapsto 1-\cos x$ et $x\mapsto\frac{1}{x}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon,X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_\varepsilon^X \frac{\sin x}{x}\,dx=\left[\frac{1-\cos x}{x}\right]_1^X+\int_\varepsilon^X \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx=\frac{1-\cos X}{X}-\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}+\int_\varepsilon^X\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

• La fonction $x\mapsto\frac{1-\cos x}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, est prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ et donc intégrable sur un voisinage de 0, est dominée par $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$ et donc intégrable sur un voisinage de $+\infty$. La fonction $x\mapsto\frac{1-\cos x}{x^2}$ est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\int_\varepsilon^X\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ a une limite réelle quand ε tend vers 0 et X tend vers $+\infty$.
• $\left|\frac{1-\cos X}{X}\right|\leqslant\frac{1}{X}$ et donc $\lim_{X\to+\infty}\frac{1-\cos X}{X}=0$.
• $\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}\underset{\varepsilon\to 0}{\sim}\frac{\varepsilon}{2}$ et donc $\lim_{\varepsilon\to\varepsilon}\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}=0$.
On en déduit que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ est une intégrale convergente et de plus

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin^2(u)}{4u^2}\,2du=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du.$$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx \text{ converge et de plus } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.}$$

2. La fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{\sin x}{x^a}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

   • Sur $]0,1[$, la fonction f est de signe constant et l'existence de $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 f(x)\, dx$ équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $]0,1]$. Puisque f est équivalente en 0 à $\frac{1}{x^{a-1}}$, l'intégrale impropre $\int_0^1 f(x)\, dx$ converge en 0 si et seulement si $a > 0$. On suppose dorénavant $a > 0$.

   • Soit $X > 1$. Les deux fonction $x \mapsto -\cos x$ et $x \mapsto \frac{1}{x^a}$ sont de classe C^1 sur le segment $[1,X]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

   $$\int_1^X \frac{\sin x}{x^a}\, dx = \left[\frac{-\cos x}{x^a}\right]_1^X - a\int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\, dx = -\frac{\cos X}{X^a} + \cos 1 - a\int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\, dx.$$

   Maintenant, $\left|\frac{\cos x}{x^{a+1}}\right| \leqslant \frac{1}{x^{a+1}}$ et puisque $a+1 > 1$, la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{x^{a+1}}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction $X \mapsto \int_1^X \frac{\cos x}{x^{a+1}}\, dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$. Comme d'autre part, la fonction $X \mapsto -\frac{\cos X}{X^a} + \cos 1$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$, on a montré que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge en $+\infty$.
   Finalement

   $$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\, dx \text{ converge si et seulement si } a > 0.}$$

3. Soit X un réel strictement positif. Le changement de variables $t = x^2$ suivi d'une intégration par parties fournit :

   $$\int_1^X e^{ix^2}\, dx = \int_1^{X^2} \frac{e^{it}}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{i}{2}\left(-\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} + e^i - \frac{1}{2}\int_1^X \frac{e^{it}}{t^{3/2}}\, dt\right)$$

   Maintenant, $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^{iX}}{\sqrt{X}} = 0$ car $\left|\frac{e^{iX}}{\sqrt{X}}\right| = \frac{1}{\sqrt{X}}$. D'autre part, la fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\left|\frac{e^{it}}{t^{3/2}}\right| = \frac{1}{t^{3/2}}$. Ainsi, $\int_1^{+\infty} e^{ix^2}\, dx$ est une intégrale convergente et puisque d'autre part la fonction $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, on a montré que

   $$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{ix^2}\, dx \text{ converge.}}$$

   On en déduit encore que les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$ sont des intégrales convergentes (intégrales de FRESNEL).

4. La fonction $f\ :\ x \mapsto x^3\sin(x^8)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Soit $X > 0$. Le changement de variables $t = x^4$ fournit

   $$\int_0^X x^3\sin(x^8) dx = \frac{1}{4}\int_0^{X^4} \sin(t^2)\, dt = \frac{1}{4}\mathrm{Im}\left(\int_0^{X^4} e^{it^2}\, dt\right).$$

   D'après 3), $\int_0^{+\infty} e^{it^2}\, dt$ est une intégrale convergente et donc $\int_0^{+\infty} x^3\sin(x^8)\, dx$ converge.

5. La fonction $f\ :\ x \mapsto \cos(e^x)$ est continue sur $[0,+\infty[$. Soit $X > 0$. Le changement de variables $t = e^x$ fournit

   $$\int_0^X \cos(e^x)\, dx = \int_1^{e^X} \frac{\cos t}{t}\, dt.$$

   On montre la convergence en $+\infty$ de cette intégrale par une intégration par parties analogue à celle de la question 1). L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \cos(e^x)\, dx$ converge .

6. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $1 + x^3\sin^2 x \geqslant 1 > 0$ et donc la fonction $f\ :\ x \mapsto \frac{1}{1+x^3\sin^2 x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

   La fonction f étant positive, la convergence de l'intégrale proposée équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $[0,+\infty[$, intégrabilité elle-même équivalente à la convergence de la série numérique de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+x^3\sin^2 x}\, dx$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n \geqslant 0$ et d'autre part

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1+x^3\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(u+n\pi)^3\sin^2 u}\,du \\
&\leqslant \int_0^{\pi} \frac{1}{1+n^3\pi^3\sin^2}\,du = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+n^3\pi^3\sin^2 u}\,du \\
&\leqslant 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+n^3\pi^3\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}\,du \text{ (par concavité de la fonction sinus sur } [0,\pi]) \\
&= 2\times\frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}} \int_0^{(n\pi)^{3/2}} \frac{1}{1+v^2}\,dv \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}n^{3/2}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2}\,dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Donc, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leqslant u_n\leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}$ et la série de terme général u_n converge. On en déduit que la fonction $f\ :\ x\mapsto \frac{1}{1+x^3\sin^2 x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Existence et calcul de :

1) (I)** $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ **2) (très long)** $\int_2^{+\infty}\frac{1}{(x-1)^3(x^4+1)}\,dx$
3) (I)** $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}\,dx$ **4) (***)** $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\,dx$

5)(***) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+ax)}}\,dx$ **6) (**)** $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\,dx$

7) (**) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{5\,\mathrm{ch}\,x+3\,\mathrm{sh}\,x+4}\,dx$ **8) (***)** $\int_0^{+\infty}\left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)dt$

9) (I)** $\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{Arctan}\,x}{(1+x^2)^2}\,dx$ **10) (I très long)** $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2+1)^a}\,dx$ (calcul pour $a\in\left\{\frac{3}{2},2,3\right\}$)

11) (***) $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan x}\,dx$ **12) (*** I)** $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$ $(0<a<b)$

Correction de l'exercice 5 ▲

La fonction $f\ :\ x\mapsto\ln(\sin x)$ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. De plus, quand x tend vers 0, $\ln(\sin x)\sim\ln x=o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Par suite, f est intégrable sur$\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$.

1. Soient $I=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$ et $J=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx$. Le changement de variables $x=\frac{\pi}{2}-t$ fournit J existe et $J=I$. Par suite,

$$\begin{aligned}
2I=I+J&=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x\cos x)\,dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(2x))\,dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\,du \\
&=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\left(I+\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin u)\,du\right)=-\frac{\pi\ln 2}{2}+\frac{1}{2}\left(I+\int_{\pi/2}^{0}\ln(\sin(\pi-t))\,(-dt)\right)=-\frac{\pi\ln 2}{2}+I.
\end{aligned}$$

Par suite, $I=-\frac{\pi\ln 2}{2}$.

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx=-\frac{\pi\ln 2}{2}.}$$

2. Pour $n\geqslant 2$, posons $P_n=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Pour $1\leqslant k\leqslant n-1$, on a $0<\frac{k\pi}{2n}<\frac{\pi}{2}$ et donc $P_n>0$. D'autre part, $\sin\left(\frac{(2n-k)\pi}{2n}\right)=\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ et $\sin\frac{n\pi}{2n}=1$. On en déduit que

$$P_n^2=\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right),$$

puis

$$P_n^2=\prod_{k=1}^{2n-1}\frac{e^{ik\pi/(2n)}-e^{-ik\pi/(2n)}}{2i}=\frac{1}{(2i)^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(-e^{-ik\pi/(2n)}\right)\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)$$
$$=\frac{1}{(2i)^{2n-1}}(-1)^{2n-1}(e^{-i\pi/2})^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)=\frac{1}{2^{2n-1}}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)$$

Maintenant, le polynôme Q unitaire de degré $2n-1$ dont les racines sont les $2n-1$ racines $2n$-èmes de l'unité distinctes de 1 est

$$\frac{X^{2n}-1}{X-1}=1+X+X^2+...+X^{2n-1}$$

et donc $\prod_{k=1}^{2n-1}\left(1-e^{2ik\pi/(2n)}\right)=Q(1)=2n$. Finalement,

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=P_n=\sqrt{\frac{2n}{2^{2n-1}}}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Pour $0\leqslant k\leqslant n$, posons alors $x_k=\frac{k\pi}{2n}$ de sorte que $0=x_0<x_1<...<x_n=\frac{\pi}{2}$ est une subdivision de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ à pas constant égal à $\frac{\pi}{2n}$.
Puisque la fonction $x\mapsto\ln(\sin x)$ est continue et croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, pour $1\leqslant k\leqslant n-1$, on a $\frac{\pi}{2n}\ln(\sin(x_k))\leqslant\int_{x_k}^{x_{k+1}}\ln(\sin x)\,dx$ puis en sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)\leqslant\int_{\pi/(2n)}^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$$

De même, pour $0\leqslant k\leqslant n-1$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}}\ln(\sin x)\,dx\leqslant\frac{\pi}{2n}\ln(\sin(x_{k+1}))$ et en sommant

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx\leqslant\frac{\pi}{2n}\ln(P_n).$$

Finalement, $\forall n\geqslant 2$, $\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)+\int_0^{\pi/(2n)}\ln(\sin x)\,dx\leqslant I\leqslant\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)$. Mais $\ln(P_n)=\ln n-(n-1)\ln 2$ et donc $\frac{\pi}{2n}\ln(P_n)$ tend vers $-\frac{\pi\ln 2}{2}$ quand n tend vers $+\infty$ et comme d'autre part, $\int_0^{\pi/(2n)}\ln(\sin x)\,dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (puisque la fonction $x\ :\mapsto\ln(\sin x)$ est intégrable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$), on a redémontré que $I=-\frac{\pi\ln 2}{2}$.

Correction de l'exercice 6 ▲

La fonction $f\ :\ t\mapsto\frac{\ln t}{t-1}$ est continue et positive sur $]0,1[$, négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0 et prolongeable par continuité en 1. La fonction f est donc intégrable sur $]0;1[$.
1ère solution. (à la main, sans utilisation d'un théorème d'intégration terme à terme) Pour $t\in]0,1[$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\ln t}{t-1}=\frac{-\ln t}{1-t}=-\sum_{k=0}^{n}t^k\ln t+\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}$$

Pour $t\in]0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, posons $f_n(t)=-t^n\ln t$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Chaque fonction f_k, $0\leqslant k\leqslant n$, est continue sur $]0,1]$ et négligeable en 0 devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Donc chaque fonction f_k est intégrable sur $]0,1]$ et donc sur $]0,1[$. Mais alors, il en est de même de la fonction $t\mapsto\frac{t^{n+1}\ln t}{1-t}=\frac{\ln t}{t-1}+\sum_{k=0}^{n}t^k\ln t$ et

$$\int_0^1\frac{\ln t}{t-1}\,dt=-\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^k\ln t\,dt+\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt$$

• La fonction $g\ :\ t\mapsto\frac{t\ln t}{t-1}$ est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 et en 1. Cette fonction est en particulier bornée sur $]0,1[$. Soit M un majorant de la fonction $|g|$ sur $]0,1[$. Pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt\right|\leqslant\int_0^1 t^n|g(t)|\,dt\leqslant M\int_0^1 t^n\,dt=\frac{M}{n+1}.$$

Par suite, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{n+1}\ln t}{t-1}\,dt=0$. On en déduit que la série de terme général $-\int_0^1 t^k\ln t\,dt$ converge et que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1(-t^k\ln t)\,dt.$$

• Soit $\varepsilon\in]0,1[$. Pour $k\in\mathbb{N}$, une intégration par parties fournit

$$\int_\varepsilon^1(-t^k\ln t)\,dt = \left[-\frac{t^{k+1}\ln t}{k+1}\right]_\varepsilon^1 + \frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 t^k\,dt = \frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1} + \frac{1-\varepsilon^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $\int_\varepsilon^1(-t^k\ln t)\,dt = \frac{1}{(k+1)^2}$. Finalement,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

2ème solution. (utilisation d'un théorème d'intégration terme à terme) Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $]0,1[$ et la série de fonctions de terme général f_n converge simplement vers la fonction f sur $]0,1[$ et de plus, la fonction f est continue sur $]0,1[$. Enfin

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1|f_n(t)|\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} < +\infty.$$

D'après un théorème d'intégration terme à terme, $\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

La fonction $f\ :\ t\mapsto\frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$, prolongeable par continuité en 0 et 1 et donc est intégrable sur $]0,1[$.
Soit $x\in]0,1[$. Chacune des deux fonctions $t\mapsto\frac{t}{\ln t}$ et $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ se prolonge par continuité en 0 et est ainsi intégrable sur $]0,x]$. On peut donc écrire

$$\int_0^x\frac{t-1}{\ln t}\,dt = \int_0^x\frac{t}{\ln t}\,dt - \int_0^x\frac{1}{\ln t}\,dt.$$

Dans la première intégrale, on pose $u=t^2$ et on obtient $\int_0^x\frac{t}{\ln t}\,dt = \int_0^x\frac{2t}{\ln(t^2)}\,dt = \int_0^{x^2}\frac{1}{\ln u}\,du$ et donc

$$\int_0^x\frac{t-1}{\ln t}\,dt = \int_0^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dt - \int_0^x\frac{1}{\ln t}\,dt = \int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dt.$$

On note alors que, puisque $x\in]0,1[$, $x^2<x$. Pour $t\in[x^2,x]$, on a $t\ln t<0$ et donc $\frac{x}{t\ln t}\leqslant\frac{t}{t\ln t}=\frac{1}{\ln t}\leqslant\frac{x^2}{\ln}t$ puis par croissance de l'intégrale, $\int_{x^2}^x\frac{x}{t\ln t}\,dt\leqslant\int_{x^2}^x\frac{1}{\ln t}\,dt\leqslant\int_{x^2}^x\frac{x^2}{t\ln t}\,dt$ et donc

$$x^2\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt\leqslant\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}\,dtx\leqslant x\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt$$

Maintenant, $\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln|\ln(x^2)|-\ln|\ln x| = \ln 2$ et on a montré que, pour tout réel x de $]0,1[$,

$$x^2\ln 2\leqslant\int_0^x\frac{t-1}{\ln t}\,dt\leqslant x\ln 2$$

Quand x tend vers 1, on obtient

$$\boxed{\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,dt = \ln 2.}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. La fonction $t\mapsto e^{-t^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$. De plus, quand t tend $+\infty$,

$$e^{-t^2}\sim\left(1+\frac{1}{t^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2t}e^{-t^2}\right).$$

D'après un théorème de sommation des relations de comparaison, quand x tend vers $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \sim \int_x^{+\infty}\left(-\frac{1}{2t}e^{-t^2}\right)'\,dt = \frac{1}{2x}e^{-x^2},$$

et donc

$$\boxed{e^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.}$$

2. Pour $a>0$ fixé, $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx$ converge (se montre en intégrant par parties (voir exercice 3)) puis

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx &= -\int_1^a\frac{\cos x}{x}\,dx+\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to0}{=} -\int_1^a\frac{\cos x}{x}\,dx+O(1)\\ &\underset{a\to0}{=} -\int_1^a\frac{1}{x}\,dx+\int_1^a\frac{1-\cos x}{x}\,dx+O(1) \underset{a\to0}{=} -\ln a+\int_1^a\frac{1-\cos x}{x}\,dx+O(1).\end{aligned}$$

Maintenant, $\frac{1-\cos x}{x}\underset{x\to0}{\sim}\frac{x}{2}$ et en particulier, $\frac{1-\cos x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Par suite, la fonction $x\mapsto\frac{1-\cos x}{x}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité en 0. Cette fonction est donc intégrable sur $]0,1]$ et en particulier, $\int_1^a\frac{1-\cos x}{x}\,dx$ a une limite réelle quand a tend vers 0. On en déduit que $\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to0}{=} -\ln a+O(1)$ et finalement

$$\boxed{\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\,dx \underset{a\to0}{\sim} -\ln a.}$$

3. Soit $a>0$.

$$\left|\int_0^1\frac{1}{x^3+a^2}\,dx-\frac{1}{a^2}\right| = \left|\int_0^1\left(\frac{1}{x^3+a^2}-\frac{1}{a^2}\right)\,dx\right| = \int_0^1\frac{x^3}{(x^3+a^2)a^2}\,dx \leqslant \frac{1}{a^4}$$

Donc, $\int_0^1\frac{1}{x^3+a^2}\,dx \underset{a\to+\infty}{=} \frac{1}{a^2}+o\left(\frac{1}{a^2}\right)$ ou encore

$$\boxed{\int_0^1\frac{1}{x^3+a^2}\,dx \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{1}{a^2}.}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

• **Domaine de définition.** Soit $x\in\mathbb{R}$.
Si $x<0$, la fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ n'est pas définie sur $[x,0[\subset[x,x^2]$ et $f(x)$ n'est pas défini.
Si $0<x<1$, $[x^2,x]\subset]0,1[$. Donc la fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x^2,x]$. Dans ce cas, $f(x)$ existe et est de plus strictement positif car $\ln t<0$ pour tout t de $]0,1[$.
Si $x>1$, $[x,x^2]\subset]1,+\infty[$. Donc la fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est continue sur $[x,x^2]$. Dans ce cas aussi, $f(x)$ existe et est strictement positif.
Enfin, $f(0)$ et $f(1)$ n'ont pas de sens.

$$\boxed{f \text{ est définie sur } D=]0,1[\cup]1,+\infty[\text{ et strictement positive sur } D.}$$

• **Dérivabilité.** Soit I l'un des deux intervalles $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. La fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est continue sur I. Soit F une primitive de cette fonction sur I.
Si $x\in]0,1[$, on a $[x^2,x]\subset]0,1[$ et donc $f(x)=F(x^2)-F(x)$. De même, si $x\in]1,+\infty[$.
On en déduit que f est de classe C^1 sur D. De plus, pour $x\in D$,

$$f'(x)=2xF'(x^2)-F'(x)=\frac{2x}{\ln(x^2)}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x-1}{\ln x}.$$

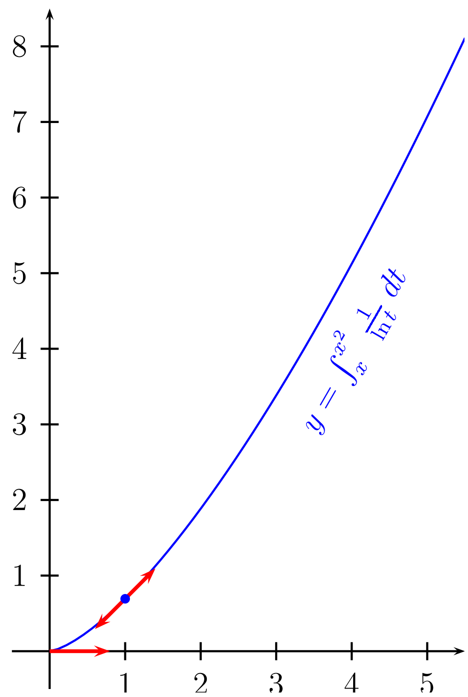
• **Variations.** f' est strictement positive sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ (mais pas nécessairement sur D).
• **Etude en** 0**.** Soit $x\in]0,1[$. On a $0<x^2<x<1$ et de plus la fonction $t\mapsto\frac{1}{\ln t}$ est décroissante sur $[x^2,x]\subset]0,1[$ en tant qu'inverse d'une fonction strictement négative et strictement croissante sur $]0,1[$. Donc, $\frac{x-x^2}{\ln x}\leqslant\int_{x^2}^{x}\frac{1}{\ln t}\,dt\leqslant\frac{x-x^2}{\ln(x^2)}$ puis

$$\forall x\in]0,1[,\ \frac{x^2-x}{2\ln x}\leqslant f(x)\leqslant\frac{x^2-x}{\ln x}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$ et on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=0$ (on note encore f le prolongement).
Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f'(x)=\frac{x-1}{\ln x}$ tend vers 0. Ainsi,
- f est continue sur $[0,1[$,
- f est de classe C^1 sur $]0,1[$,
- f' a une limite réelle quand x tend vers 0 à savoir 0.
D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $[0,1[$ et $f'(0)=0$.
• **Etude en 1.** On a vu à l'exercice 7 que $\lim_{x\to 1}f(x)=\ln 2$ (la limite à droite en 1 se traite de manière analogue).
On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1)=\ln 2$ (on note encore f le prolongement obtenu).
Ensuite quand x tend vers 1, $f'(x)$ tend vers 1. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(1)=1$.
En particulier, f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et d'après plus haut f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
• **Etude en** $+\infty$**.** Pour $x>1$, $f(x)\geqslant x^2-x\ln x$. Donc $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. La courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).
• **Convexité.** Pour $x\in D$, $f''(x)=\frac{\ln x-\frac{x-1}{x}}{\ln^2 x}$.
En 1, en posant $x=1+h$ où h tend vers 0, on obtient

$$f''(1+h)=\frac{(1+h)\ln(1+h)-h}{(1+h)\ln^2(1+h)}=\frac{(1+h)\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)-h}{h^2+o(h^2)}=\frac{1}{2}+o(1).$$

f est donc de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et $f''(1)=\frac{1}{2}$.
Pour $x\neq 1$, $f''(x)$ est du signe de $g(x)=\ln x-1+\frac{1}{x}$ dont la dérivée est $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$. La fonction g est stictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Donc pour $x\neq 1$, $g(x)>g(1)=0$. On en déduit que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f''(x)>0$ et donc que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^+$.
• **Graphe.**



Correction de l'exercice 10 ▲

La fonction $f\ :\ x\mapsto\frac{(-1)^{E(x)}}{x}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$ et donc localement intégrable sur $[1,+\infty[$. Soient X un réel élément de $[2,+\infty[$ et $n=E(X)$.

$$\int_1^X\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx+\int_n^X\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)+\int_n^X\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx.$$

Or, $\left|\int_n^X\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx\right|\leqslant\frac{X-n}{n}\leqslant\frac{1}{E(X)}$. Cette dernière expression tend vers 0 quand le réel X tend vers $+\infty$ et donc $\lim_{X\to+\infty}\int_n^X\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx=0$.

D'autre part, la suite $\left((-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)_{k\geqslant1}$ est de signe alterné et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. La série de terme général $(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $k\geqslant1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées ou encore, quand le réel X tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ a une limite réelle.

Il en est de même de $\int_1^X\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx$ converge. De plus

$$\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Calcul. Puisque la série converge, on a $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\left(-\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right)\\&=\ln\left(\frac{(1\times3\times\ldots\times(2n-1))^2\times(2n+1)}{(2\times4\times\ldots\times(2n))^2}\right)=\ln\left(\frac{1}{2^{4n}}\times\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2\times(2n+1)\right).\end{aligned}$$

D'après la formule de STIRLING,

$$\frac{1}{2^{4n}}\times\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)^2\times(2n+1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2^{4n}}\times\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}(\sqrt{4\pi n})^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}(\sqrt{2\pi n})^4}\times(2n)=\frac{2}{\pi}.$$

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$ et on a montré que

$$\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{(-1)^{E(x)}}{x}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\frac{2}{\pi}\right).}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Puisque f est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$, pour $x\geqslant2$ on a
$$0\leqslant xf(x)=2\left(x-\frac{x}{2}\right)f(x)\leqslant2\int_{x/2}^x f(t)\,dt=2\left(/dintx/2+\infty f(t)\,dt-\int_x^{+\infty}f(t)\,dt\right)$$
Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ car f est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc si f est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1,+\infty[$ alors $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. La fonction $x\mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$.
Soit $X\geqslant1$.
$$\begin{aligned}\int_1^X x(f(x)-f(x+1))\,dx&=\int_1^X xf(x)\,dx-\int_2^{X+1}(x-1)f(x)\,dx=\int_1^X xf(x)\,dx-\int_2^{X+1}xf(x)\,dx+\int_2^{X+1}f(x)\,dx\\&=\int_1^2 xf(x)\,dx-\int_X^{X+1}xf(x)\,dx+\int_2^{X+1}f(x)\,dx.\end{aligned}$$
Maintenant $0\leqslant\int_X^{X+1}xf(x)\,dx\leqslant(X+1-X)(X+1)f(X)\leqslant2Xf(X)$. D'après 1), cette dernière expression tend vers 0 quand X tend vers $+\infty$. Donc, quand X tend vers $+\infty$, $\int_1^X x(f(x)-f(x+1))\,dx$ tend vers $\int_1^2 xf(x)\,dx+\int_2^{+\infty}f(x)\,dx$.
Puisque la fonction $x\mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$, on sait que $x\mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si la fonction $X\mapsto\int_1^X x(f(x)-f(x+1))\,dx$ a une limite réelle quand X tend vers $+\infty$. Donc la fonction $x\mapsto x(f(x)-f(x+1))$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et

$$\boxed{\int_1^{+\infty} x(f(x)-f(x+1))\,dx = \int_1^2 xf(x)\,dx + \int_2^{+\infty} f(x)\,dx.}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Puisque f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, pour $x \geqslant 0$, $\int_0^x f'(t)\,dt = f(x)-f(0)$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ converge en $+\infty$ si et seulement si f a une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$.
   Si de plus l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, il est exclus d'avoir $\ell \neq 0$ et réciproquement si $\ell = 0$ alors $\int_0^x f'(t)\,dt$ tend vers $-f(0)$ quand x tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ converge si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. (a) Soit $x \geqslant 0$. D'après la formule de TAYLOR-LAGRANGE, il existe un réel $\theta_x \in]x,x+1[$
   $$f(x+1) = f(x) + (x+1-x)f'(x) + \tfrac{1}{2}f''(\theta_x).$$
   ce qui s'écrit encore $f'(x) = f(x+1)-f(x)-\frac{1}{2}f''(\theta_x)$. Quand x tend vers $+\infty$, $f(x+1)-f(x)$ tend vers 0 et d'autre part, θ_x tend vers $+\infty$. Ainsi, si f et f'' ont une limite réelle quand x tend vers $+\infty$, f' a également une limite réelle et de plus $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} f''(x)$.
   Ensuite, puisque pour $x \geqslant 0$, $\int_0^x f'(t)\,dt = f(x)-f(0)$ et $\int_0^x f''(t)\,dt = f'(x)-f'(0)$, les intégrales $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} f''(t)\,dt$ convergent et d'après 1), $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ $(= \lim_{x\to+\infty} f''(x))$.

   (b) Soit $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$. F est de classe C^3 sur $\mathbb{R}^+$. De plus, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $F''(x) = f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,dt$ tend vers $f'(0) + \int_0^{+\infty} f''(t)\,dt$. Donc F et F'' ont des limites réelles en $+\infty$. D'après a), $f = F'$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 13 ▲

L'inégalité $|ff''| \leqslant \frac{1}{2}(f^2+f''^2)$ montre que la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$ puis, pour X et Y tels que $X \leqslant Y$, une intégration par parties fournit

$$\int_X^Y f'^2(x)\,dx = [f(x)f'(x)]_X^Y - \int_X^Y f(x)f''(x)\,dx.$$

Puisque la fonction f'^2 est positive, l'intégrabilité de f'^2 sur $\mathbb{R}$ équivaut à l'existence d'une limite réelle quand X tend vers $+\infty$ et Y tend vers $-\infty$ de $\int_X^Y f'^2(x)\,dx$ et puisque la fonction ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}$, l'existence de cette limite équivaut, d'après l'égalité précédente, à l'existence d'une limite réelle en $+\infty$ et $-\infty$ pour la fonction ff'.
Si f'^2 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ alors $\int_0^{+\infty} f'^2(x)dx = +\infty$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = +\infty$. En particulier, pour x suffisament grand, $f(x)f'(x) \geqslant 1$ puis par intégration $\frac{1}{2}(f^2(x)-f^2(0)) \geqslant x$ contredisant l'intégrabilité de la fonction f^2 sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction ff' a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$.
De même la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^-$ et la fonction ff' a une limite réelle quand x tend vers $-\infty$.
Si cette limite est un réel non nul ℓ, supposons par exemple $\ell > 0$. Pour x suffisament grand, on a $f(x)f'(x) \geqslant \ell$ puis par intégration $\frac{1}{2}(f^2(x)-f^2(0)) \geqslant \ell x$ contredisant de nouveau l'intégrabilité de la fonction f^2. Donc la fonction ff' tend vers 0 en $+\infty$ et de même en $-\infty$.
Finalement, la fonction f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x)\,dx$.
D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on a

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)\,dx\right)^2 = \left(-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f''(x)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\,dx\right)^2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2(x)\,dx\right)^2.$$

Puisque les fonctions f et f'' sont continues sur $\mathbb{R}$, on a l'égalité si et seulement si la famille (f,f'') est liée.
Donc nécessairement, ou bien f est du type $x \mapsto A\,\mathrm{ch}(\omega x) + B\,\mathrm{sh}(\omega x)$, ω réel non nul, qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $A = B = 0$, ou bien f est affine et nulle encore une fois, ou bien f est du type $x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ et nulle encore une fois.
Donc, on a l'égalité si et seulement si f est nulle.