République du Cameroun
Republic of Cameroun

Université de Yaoundé I

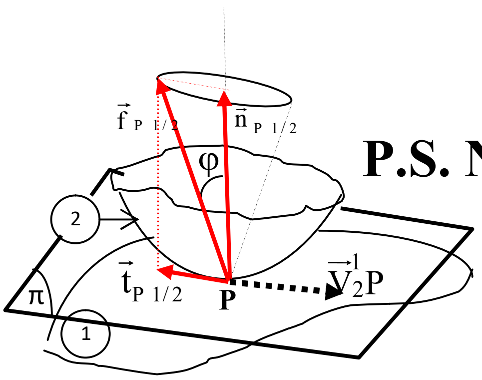
University of Yaounde I

# STATIQUE DU SOLIDE

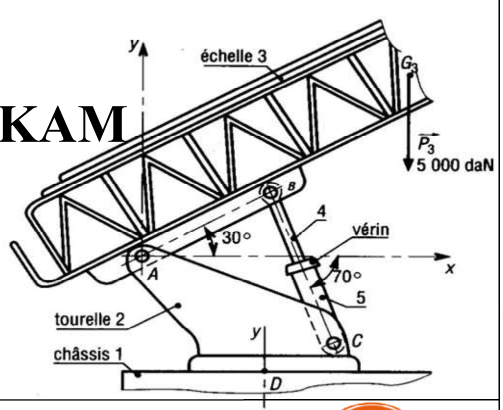
## *GENERALITES SUR LES TORSEURS*
## *- EXERCICE RESOLU -*

Ressource Pédagogique Mise en Ligne

Par




**P.S. NGOHE-EKAM**




**Ecole Nationale**
**Supérieure Polytechnique de Yaoundé**

# PREAMBULE

Suite à la menace de propagation du Covid-19 (Corona virus Disease) dont le premier cas de contamination a été déclaré au mois de mars 2020 au Cameroun, des mesures sanitaires ont été édictées par monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, puis renforcées par une sortie médiatisée de monsieur le Premier Ministre (PM) du Cameroun. Le point commun de l'allocution de ces deux personnalités et relatif à l'enseignement supérieur fut la fermeture des établissements d'enseignement, dont l'Université de Yaoundé.

Monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, dans le souci que la fermeture de l'UY I ne soit pas une perche tendue aux étudiants paresseux pour se laisser aller à un certain sommeil intellectuel, instruit alors que les enseignants « mettent en ligne » leurs cours grâce au serveur du Centre Universitaire des Technologies de l'Information (CUTI) de l'UY I et que les étudiants visitent ce serveur à volonté pour télécharger les ressources pédagogiques (puisque c'est le terme le plus approprié) que les enseignants y auront déposé, ce téléchargement devant permette aux étudiants de continuer d'apprendre (à domicile) pendant la période de pseudo-confinement décrétée par monsieur le PM.

C'est ainsi que le présent document est conçu et mis en forme par l'auteur. Ce document fait partie de l'enseignement dispensé par l'auteur aux étudiants de niveau II de l'Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de l'UY I. L'auteur a valablement sectionné cet enseignement en modules qui constitueraient des chapitres de cours en présentiel. Et pour chaque module l'enseignant a produit trois documents en vue de faciliter l'apprentissage à distance :

- Des notes de cours
- Des exercices corrigés
- Des exercices non corrigés

L'idée principale du sectionnement de l'enseignement est de guider au mieux l'apprenant dans l'organisation de sa mémoire cognitive. En effet, il n'est pas bien d'exiger de l'apprenant une concentration trop longue, dépassant les six minutes reconnues par la plupart des experts en pédagogie, sans activité de restitution par exemple. L'apprenant est ainsi invité à ne pas rester trop longtemps sur les parties cours et exercices corrigés ; il peut y revenir en tant que de besoin. Cependant le traitement des exercices non corrigés étant une phase d'extériorisation de la connaissance emmagasinée, l'apprenant pourra et devrait y passer assez de temps de travail.

L'interaction de l'enseignant avec les apprenants est rendue possible grâce aux fora (plateformes d'enseignement à distance, groupe Whatsapp, liste de distribution par email, etc.) divers dans lesquels les apprenants sont invités à s'inscrire.

Pour finir, nous signalons que l'organisation actuelle de cet enseignement n'est pas vraiment une mise en ligne de cours, encore moins un MOOC, comme cela est fait dans la plupart des plateformes d'enseignement à distance. Nous essayons de faire une mise en ligne des ressources (dans le serveur de l'UY I), mais une mise en ligne suggérant une sorte de protocole d'apprentissage aux étudiants.

Yaoundé, le 21 mars 2020,

P.S. NGOHE-EKAM

# EXERCICE RESOLU DE GENERALITES SUR LES TORSEURS

On donne dans un repère $R_1(0,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$, les points A(1, 2,0) et B(2, 1, 0), et on considère l'ensemble des deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ constitués respectivement par les deux branches obliques AA''(équipollent à OA', où AA' est horizontal et de longueur 3m) et BB'' (équipollent à OB', où BB' est vertical ascendant de longueur 5 m). Voir schéma ci-contre à compléter.

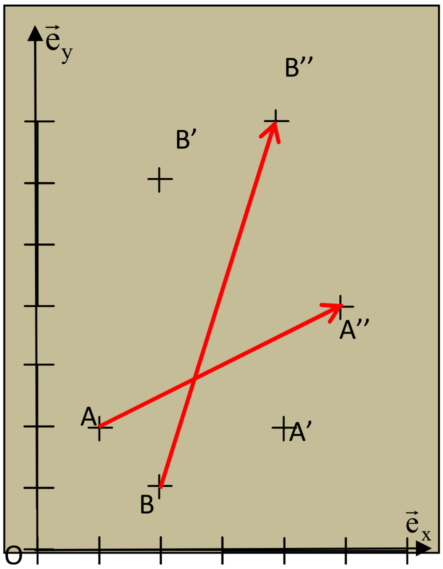



Figure 1 : Exercice résolu n°1

1°) - Montrer que ces deux vecteurs peuvent constituer un torseur

2°) – Donner les coordonnées plückériennes de ce torseur dans $R_1(0,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$

3°) – Donner les coordonnées plückériennes de ce torseur dans $R_2(A,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$

4°) – Déterminer l'axe central (équations cartésiennes) de ce torseur dans ($R_1$).

5°) – Déterminer tous les glisseurs qui lui sont perpendiculaires et dont l'origine 0 appartient à leurs axes centraux.

Solution :

1°) - Montrons que ces deux vecteurs peuvent constituer un torseur

Pour cela, construisons deux vecteurs $\vec{R}$ libre et $\vec{\mathcal{M}}$ lié, tous les deux vérifiant la propriété :

$\vec{\mathcal{M}}_P = \vec{\mathcal{M}}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{R} \quad \forall P,Q$

Posons $\vec{R} = \vec{U} + \vec{V}$ et $\vec{\mathcal{M}}_P = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{PB} \wedge \vec{V}$. On a donc :

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1+5 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{R} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_1)}$$

c'est un vecteur libre, car ses composantes dans ($R_1$) sont indépendantes des coordonnées d'espace.

$$P(x,y,z), \vec{\mathcal{M}}_P = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{PB} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1-x & 2-y & -z \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2-x & 1-y & -z \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2z+6z \\ * \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8z \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

qui est bien un vecteur lié, puisque ses composantes (du moins la première qui vaut 8z) dépendent des coordonnées d'espace.

Reste alors à montrer la propriété : $\forall P,Q,\ \vec{\mathcal{M}}_P = \vec{\mathcal{M}}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{R}$

Nous avons défini $\vec{\mathcal{M}}_P = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{PB} \wedge \vec{V}$ ; et donc $\vec{\mathcal{M}}_Q = \overrightarrow{QA} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{QB} \wedge \vec{V}$. Il vient

$$\vec{\mathcal{M}}_Q = \overrightarrow{QA} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{QB} \wedge \vec{V} = (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PA}) \wedge \vec{U} + (\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PB}) \wedge \vec{V}$$

$$= \overrightarrow{QP} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{PB} \wedge \vec{V} = \overrightarrow{QP} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{V} + \overrightarrow{PA} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{PB} \wedge \vec{V}$$

$\rightarrow \vec{\mathcal{M}}_Q = \overrightarrow{QP} \wedge (\vec{U} + \vec{V}) + (\overrightarrow{PA} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{PB} \wedge \vec{V}) = \overrightarrow{QP} \wedge \vec{R} + \vec{\mathcal{M}}_P$

$\rightarrow \vec{\mathcal{M}}_P = \vec{\mathcal{M}}_Q - \overrightarrow{QP} \wedge \vec{R} = \vec{\mathcal{M}}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{R}$ . Ainsi : $\forall P, Q,\ \vec{\mathcal{M}}_P = \vec{\mathcal{M}}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{R}$

Conclusion : Les deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ permettent de constituer un torseur [T]= $\vec{R}$ +ε $\vec{\mathcal{M}}_P$ avec

$\vec{R} = \vec{U} + \vec{V}$ et $\vec{\mathcal{M}}_P = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{PB} \wedge \vec{V},\ \ \forall P \in \mathscr{E}$

2°) – Donnons les coordonnées plückériennes de ce torseur dans $R_1(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

On a déjà $\vec{R} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_1)}$ ; il reste à déterminer $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}$ $\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{V}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1-0 & 2-0 & -0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2-0 & 1-0 & -0 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2-8)+(12-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

D'où : $\boxed{[T] = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{(R_1)}}$

3°) – Donnons les coordonnées plückériennes de ce torseur dans $R_2(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

On a toujours $\vec{R} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_1)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_2)}$ ; il reste à calculer $\vec{\mathcal{M}}_A$ :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_O + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -1 & -2 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4+4=8 \end{bmatrix}_{(R_2)}$$

D'où : $\boxed{[T] = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}_{(R_2)}}$

4°) – Déterminons l'axe central (équations cartésiennes) de ce torseur.

$\Delta(I^*, \vec{R})$ avec $\overrightarrow{OI^*} = \dfrac{\vec{R} \wedge \vec{\mathcal{M}}_O}{\vec{R}^2} = \dfrac{1}{6^2+8^2} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{100} \begin{bmatrix} 32 \\ -24 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{25} \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_1)}$

$$M(x,y,z) \in (\Delta) \leftrightarrow \overrightarrow{I^*M} \wedge \vec{R} = \vec{0} \leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x-8/25 & y+6/25 & z \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 8z = 0 \\ 6z = 0 \\ 8(x-8/25) - 6(y+6/25) = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 8x - 6y = \dfrac{64+36}{25} = 4 \end{cases}$$ D'où : $\boxed{(\Delta) : \begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ z = 0 \end{cases}}$

5°) – Déterminons tous les glisseurs qui lui sont perpendiculaires et dont O appartient à leurs axes centraux.

$$[T'] = \begin{bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}_{(R_1)} \quad ; \quad [T'] \perp [T] \leftrightarrow [T'] \bullet [T] = 0 + \varepsilon 0 \text{ avec } [T] = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{(R_1)}$$

Or $[T_1].[T_2] = \vec{R}_1.\vec{R}_2 + \varepsilon(\vec{R}_1.\vec{m}_2 + \vec{R}_2\vec{m}_1)$ → (6X+8Y)+ε(4Z+6L+8M) = 0 +ε0 → $\begin{cases} 6X + 8Y = 0 \\ 4Z + 6L + 8M = 0 \end{cases}$

Si maintenant, [T'] doit être un glisseur de support passant par O, son moment en O est obligatoirement nul. → L = M = N = 0. Il vient donc : $\begin{cases} Y = -\dfrac{3}{4}X \\ Z = 0 = L = M = N \end{cases}$.

D'où la solution : $\boxed{[T']_O = k(\vec{e}_x - \dfrac{3}{4}\vec{e}_y) + \varepsilon\vec{0} \ , \ k \in IR}$