Chapitre 10

PHENOMENE DE DIFFRACTION

I . Définition et présentation du phénomène

II. Postulat d'Huygens-Fresnel

II.1 Enoncé

II.2. Application du principe de Huygens-Fresnel

III. Ecrans complémentaires-Théorème de Babinet

IV Exemples de figures de diffraction

IV.1 Cas d’une ouverture rectangulaire

IV.2. Figure de diffraction par une fente

I. Définition et présentation du phénomène

Lorsqu'un faisceau de lumière traverse un diaphragme ou un obstacle matériel il subit un éparpillement: on dit qu'il y a ***diffraction de la lumière***. Ce phénomène prend le nom de diffraction à l'infini lorsque le faisceau incident est constitué de rayons parallèles.

L'étude de la diffraction est importante car

(i) au plan fondamental, elle permet de démontrer le caractère ondulatoire de la lumière au moyen d'expériences simples;

(ii) au plan des applications, cette étude permet de comprendre le rôle de ce phénomène dans les instruments d'optique. La diffraction intervient de manière positive dans certains instruments (tels que le diffractomètre, ou le spectrographe), et négative dans d'autres instruments, notamment les instruments d'observation (lunette, microscope, appareil photo, etc). Les performances de ces instruments sont sévèrement limitées par ce phénomène.

Le principe de la propagation rectiligne de la lumière ne permet pas d'expliquer
le phénomène de diffraction. L'interprétation de ce phénomène s'appuie sur une théorie ondulatoire élaborée Huygens (1976) et Fresnel (1818).

II. Postulat d'Huygens-Fresnel

II.1 Enoncé

- D'après Huygens, la lumière se propage de proche en proche. Chaque élément de surface atteint par la lumière se comporte comme une ***source*** (de lumière) ***secondaire*** qui émet des ondes sphériques dont l'amplitude est proportionnelle à la dimension de cet élément.

- D'après Fresnel, l'amplitude lumineuse en un point est la somme des amplitudes des vibrations produites par toutes les sources secondaires.

Pour illustrer ce postulat nous allons considérer le cas particulier de l'éclairement de l'élément diffractant par un faisceau parallèle de lumière monochromatique. Nous supposerons que l'ensemble du système est plongé dans l'air. Le schéma de montage permettant de se placer dans ces conditions (diffraction à l'infini) est représenté ci-après.

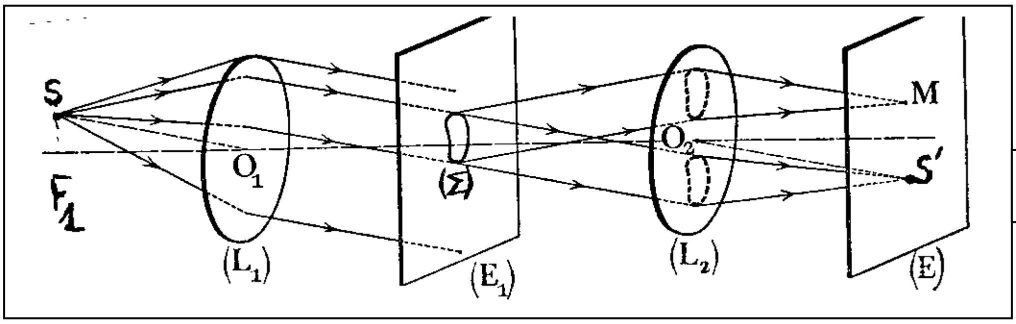


Fig. 1

Une ***source ponctuelle*** S placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente L_1, éclaire la lentille. Il en ressort un faisceau parallèle qui éclaire la pupille Σ. La seconde lentille L_2 permet d'observer la diffraction à l'infini. Les deux lentilles L_1 et L_2 sont supposées d'assez grand rayon pour que ce soit effectivement l'ouverture Σ qui limite le faisceau. ***Notons que S' est l'image géométrique de S ; s'il n y avait pas diffraction on observerait uniquement un point brillant S' dans le plan (E).*** Remarquons que la distance entre les deux lentilles ne joue aucun rôle; on peut donc accoler L_1 et L_2.

II.2. Application du principe de Huygens-Fresnel

Ce principe permet de calculer l'amplitude de l'onde en un point M situé au delà de la surface diffractante Σ. Pour illustrer ce principe nous allons considérer le cas particulier de l'éclairement de la surface diffractante Σ par une source ponctuelle S émettant une onde sphérique monochromatique.

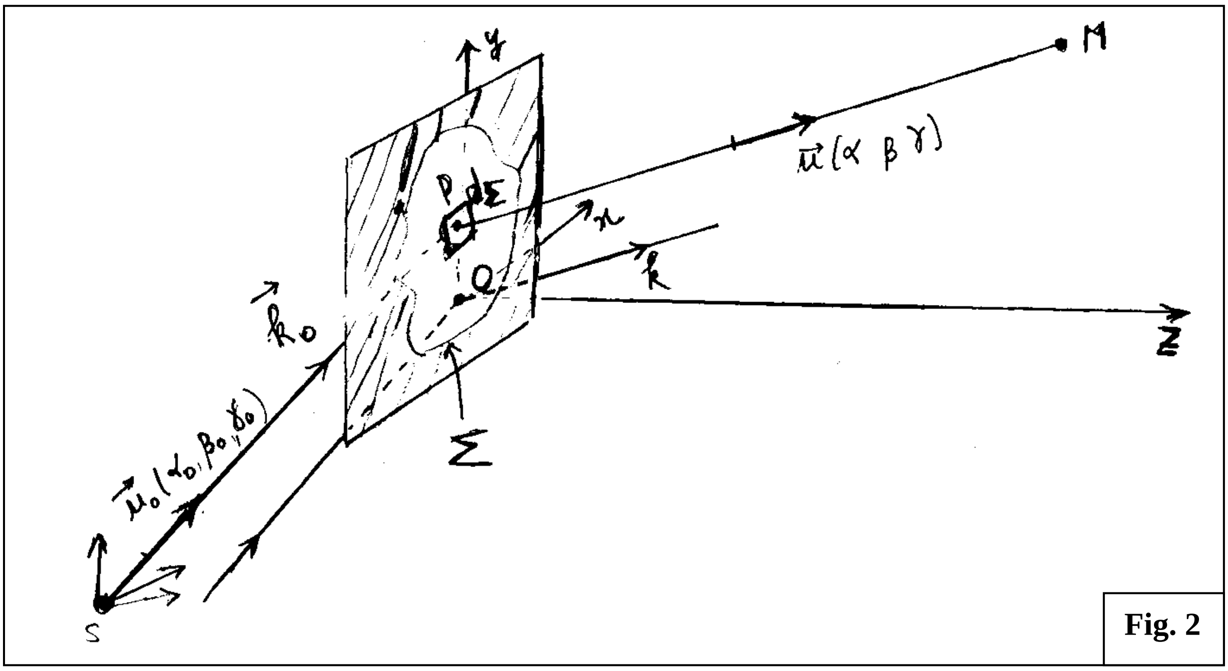


Fig. 2

L'amplitude complexe de l'onde incidente au point P s'écrit:

$$\tilde{a}(P) = \frac{1}{s}\,\mathrm{A}(P)\exp[\,j(k\,s - \omega t)]\,.$$

Il n'est pas indispensable de faire apparaître explicitement le facteur $\exp(-j\omega t)$, car ce facteur n'intervient pas dans le calcul de l'intensité de l'onde. On peut donc omettre ce facteur et considérer que l'amplitude est

$$a(P) = \frac{1}{s}\,\mathrm{A}(P)\exp(jk\,s) \qquad \left[a(P) = \tilde{a}(P)/\exp(-j\omega t)\right]$$

Dans cette expression, le facteur *1/ s* traduit la nature sphérique de l'onde.

D'après le principe de Huygens-Fresnel, chaque point P de Σ atteint par la lumière peut être considéré comme une source secondaire émettant une onde sphérique

(i) de même fréquence que celle de l'onde incidente;
(ii) d'amplitude proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente en P et à l'aire dS de la source secondaire.

L'amplitude lumineuse en un point M situé au delà de Σ peut donc s'obtenir en remplaçant l'effet de la source S par l'effet de la totalité des sources secondaires réparties sur Σ. En d'autres termes, ***l'amplitude lumineuse émise dans une direction $\vec{u}$ est la somme des amplitudes lumineuses émises dans cette direction par toutes les sources secondaires. Les amplitudes lumineuses s'additionnent, et donc interfèrent entre elles, pour former la figure de diffraction.***

Pour appliquer le principe de Huygen-Fresnel il convient de re-écrire l'amplitude complexe de l'onde incidente au point P de Σ sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}(P) &= \frac{1}{s}\mathrm{A}(P)\exp(jk\,s) = \frac{1}{s}\mathrm{A}(P)\exp\left[j\phi(P)\right] \\
&= \frac{1}{s}\mathrm{A}(P)\exp\left[j\phi(O)\right]\exp\left[j\left\{\phi(P)-\phi(O)\right\}\right] \\
&= \frac{1}{s}\tilde{\mathrm{A}}(P)\exp\left[j\left\{\phi(P)-\phi(O)\right\}\right],\ \text{ avec } \tilde{\mathrm{A}}(P)=\mathrm{A}(P)\exp\left[j\phi(O)\right]
\end{aligned}$$

Dans cette expression $\phi(P)-\phi(O)$ représente le déphasage entre l'onde incidente en P et l'onde incidente en un point O du diaphragme pris comme origine des phases. Dans le cas d'un éclairement uniforme du diaphragme $\tilde{\mathrm{A}}(P)=\tilde{\mathrm{A}}\equiv C^{te}$;

$$\phi(P)-\phi(O)=\overrightarrow{k_0}.\overrightarrow{OP}=\frac{2\pi}{\lambda}\overrightarrow{u_0}.\overrightarrow{OP}=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\alpha_0 x+\beta_0 y\right)$$

D'après le principe de Huygens-Fresnel, l'amplitude émise par la source secondaire (dS) centrée en P, en tout point M situé dans une direction $\vec{u}$ s'écrit

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{a}_P(M) &= \frac{\exp(jkr)}{r}\boldsymbol{a}(P)dS = \frac{1}{r}\boldsymbol{a}(P)dS\exp\left[j\phi_P(M)\right] \\
&= \frac{1}{r}\boldsymbol{a}(P)dS\exp\left[j\phi_O(M)\right]\exp\left[j\left\{\phi_P(M)-\phi_O(M)\right\}\right],\ \text{ où } dS=dxdy,\ r=PM,
\end{aligned}$$

$\phi_O(M)$ représente la phase au point M de l'onde issue de O,
$\phi_P(M)$ représente la phase au point M de l'onde issue de P,
$\phi_P(M)-\phi_O(M)$ représente donc le déphasage entre les ondes émises par les sources secondaires centrées respectivement en P et O :

$$\phi_P(M)-\phi_O(M)=-\vec{k}.\overrightarrow{OP}=-\frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}.\overrightarrow{OP}=-\frac{2\pi}{\lambda}\left(\alpha x+\beta y\right)$$

Le déphasage en M entre le rayon passant par P et le rayon passant par O s’écrit :

$$\Delta\phi = \left[\phi_P(M) - \phi_O(M)\right] + \left[\phi(P) - \phi(O)\right] = \frac{2\pi}{\lambda}\left[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y\right]$$

L’amplitude lumineuse émise dans la direction $\vec{u}$ par toutes les sources secondaires réparties sur le diaphragme Σ s’écrit donc :

$$\boldsymbol{a}(\alpha, \beta) = K \iint_{\Sigma} f(x, y) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda}\left[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y\right]\right] dxdy$$

* Dans cette expression les quantités $1/s$ et $1/r$ ne varient que très peu lorsque P varie ; et sont donc traitées comme des constantes. Toutes les constantes réelles ou complexes sont regroupées dans la variable *K*.

* La fonction $f(x, y) = \tilde{A}(P)$ est l'amplitude complexe de la vibration lumineuse au point P. Cette fonction *f(x,y),* que l'on appelle aussi ***transparence pupillaire***, prend en compte d'éventuelles variations de phase ou d'amplitude que pourrait subir l'onde à la traversée de la pupille (par exemple, en présence d'un filtre sur la pupille). On peut noter que

- $f(x, y) = 0$ en dehors de la pupille;
- $f(x, y) = 1$ pour une ouverture totalement transparente;
- $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ si l'onde incidente est normale au plan de la pupille.

Il est finalement très important de noter que l'expression (xx) s'applique de manière générale à tous les cas de diffraction à l'infini.

Intensité de l'onde diffractée dans la direction $\vec{u}$

A l'infini ou dans le plan focal d'une lentille d'observation, on observera une figure de diffraction traduisant la loi de répartition de l'intensité de l'onde diffractée.

$$I(\alpha, \beta) = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{a}^* = |\boldsymbol{a}|^2$$

III. Ecrans complémentaires-Théorème de Babinet

Deux écrans D_1 et D_2 sont dits complémentaires lorsque les parties opaques de l'un coïncident avec les ouvertures de l'autre. Autrement dit, la superposition de ces deux écrans conduit à un écran totalement opaque.

Soit D une ouverture constituée par la somme des ouvertures de D_1 et D_2.

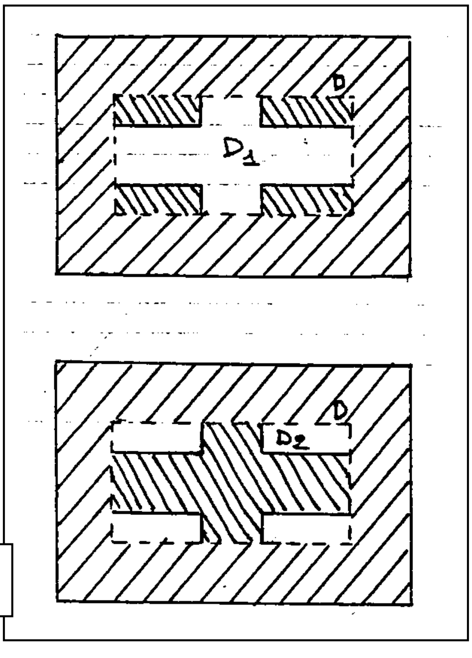


Fig. 3

Notons

- $\boldsymbol{a}(M)$ l'amplitude diffractée par D seule ;
- $\boldsymbol{a}_1(M)$ l'amplitude diffractée par l’écran comportant l’ouverture D_1 ;
- $\boldsymbol{a}_2(M)$ l'amplitude diffractée par l’écran comportant l’ouverture D_2 ;

On a donc $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$.
Considérons un point M où $\boldsymbol{a}(M) = 0$ en présence du diaphragme D ; En ce ce point on a:

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}_1^2 = \boldsymbol{a}_2^2$$

D'où le théorème de Babinet: deux écrans complémentaires produisent le même éclairement en tout point de l'espace non éclairé lorsque D est découverte. On peut aussi dire qu'en dehors de l'image géométrique, les figures de diffraction données par deux écrans complémentaires sont identiques.

IV Exemples de figures de diffraction

IV.1 Cas d'une ouverture rectangulaire

Considérons le cas particulier où (Σ) est une ouverture rectangulaire de côtés a et b. Soit O le centre du rectangle, Ox et Oy deux axes perpendiculaires dans le plan de (E_l). L'axe Oz perpendiculaire à (E_l) est l'axe optique du système centré formé par (L_1) et (L_2).

Désignons par $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ les paramètres directeurs du vecteur unitaire $\vec{u}_0$ parallèle au faisceau incident sur (Σ) et par α, β, γ ceux du vecteur unitaire d'une direction $\vec{u}$ de la lumière diffractée. x et y étant les coordonnées de P, la relation (xx) s'écrit

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\left[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y\right]$$

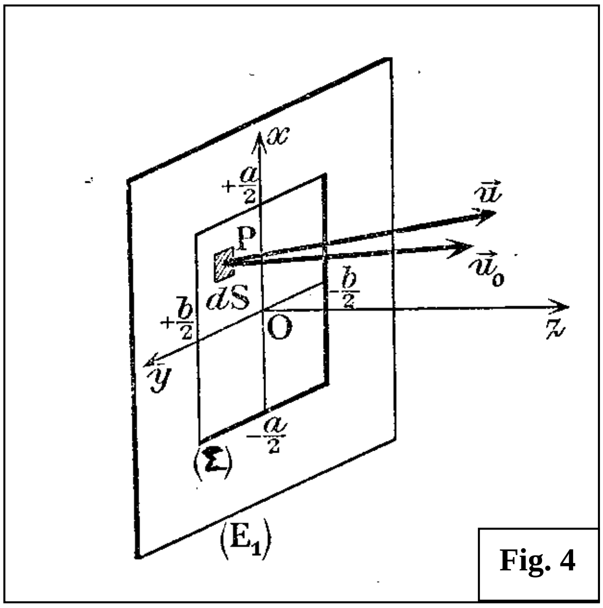


Fig. 4

En prenant $dS = dxdy$, l'amplitude en M de la vibration diffractée est d'après la relation (xx)

$$\boldsymbol{a}(M) = K \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda}\left[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y\right]\right] dxdy$$

$$\boldsymbol{a}(M) = K \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda}\left[(\alpha - \alpha_0)x\right]\right] dx \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda}\left[(\beta - \beta_0)y\right]\right] dy$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}(M) = K\,a\,b \frac{\sin\dfrac{\pi(\alpha - \alpha_0)a}{\lambda}}{\dfrac{\pi(\alpha - \alpha_0)a}{\lambda}} \frac{\sin\dfrac{\pi(\beta - \beta_0)b}{\lambda}}{\dfrac{\pi(\beta - \beta_0)b}{\lambda}}}$$

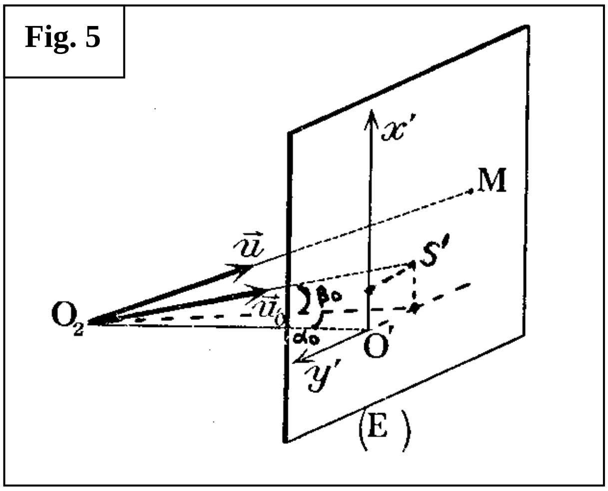
Choisissons dans le plan focal (E) de (L2) deux axes $O'x'$ et $O'y'$ respectivement parallèles à Ox et Oy. Si les directions $\vec{u_0}$ et $\vec{u}$ sont voisines de l'axe optique, les coordonnées de S' (image au sens de l'optique géométrique du point S) s'écrivent :

$$x'_0 = \alpha_0 f' \quad \text{et} \quad y'_0 = \beta_0 f' \quad \text{avec} \quad O_2O' = f'$$

Les coordonnées du point M s'écrivent

$$x' = \alpha f' \quad \text{et} \quad y' = \beta f'$$

Fig. 5



En posant $I = \lambda f'/a$ et $J = \lambda f'/b$ on obtient

$$\boldsymbol{a}(x', y') = \boldsymbol{a}_0 \frac{\sin \dfrac{\pi(x - x'_0)}{I}}{\dfrac{\pi(x - x'_0)}{I}} \frac{\sin \dfrac{\pi(y - y'_0)}{J}}{\dfrac{\pi(y - y'_0)}{J}}, \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{a}_0 = K\,a\,b$$

On en déduit l'intensité :

$$\boldsymbol{I}(x', y') = |\boldsymbol{a}|^2$$

La figure ci-dessous montre l'allure de la figure de diffraction de l'ouverture rectangulaire

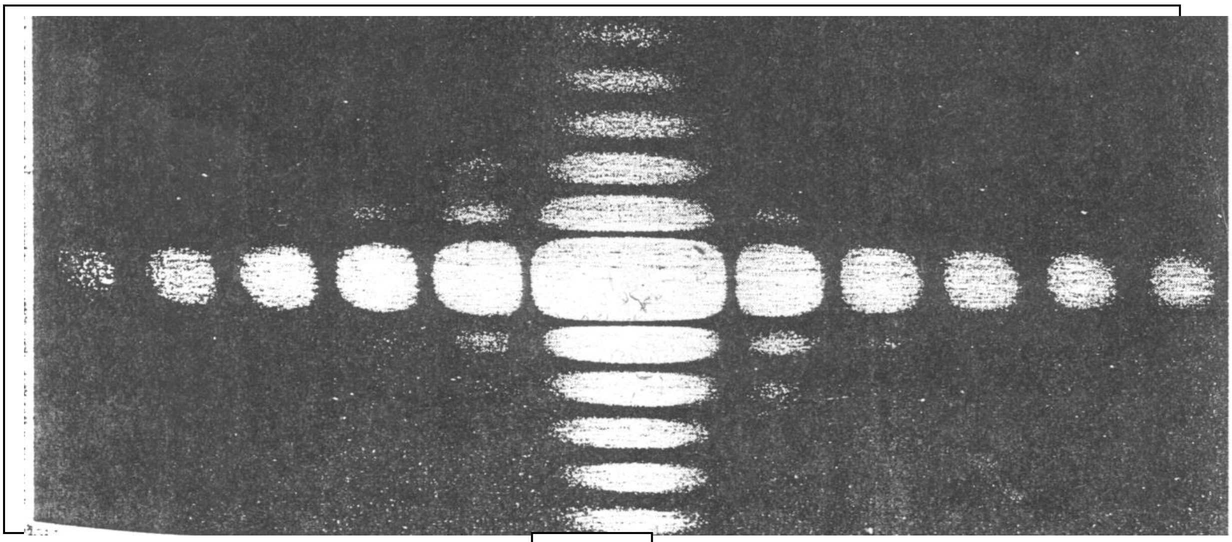


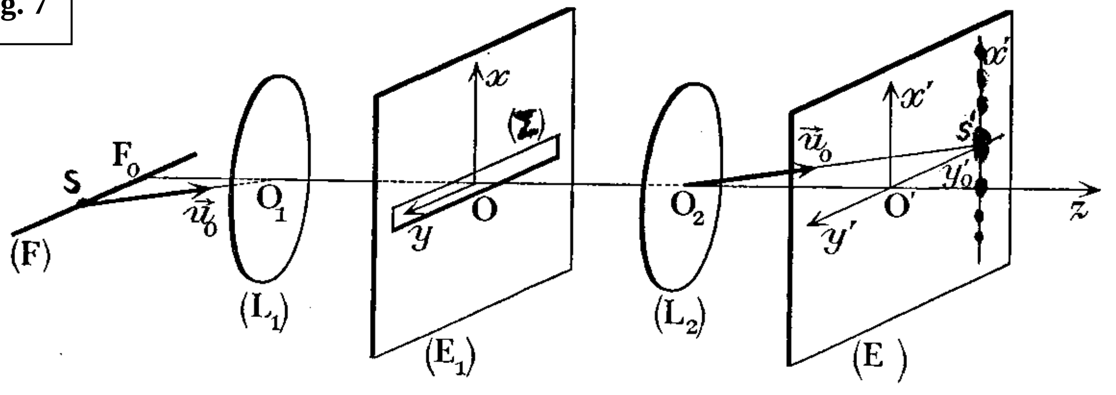
Fig. 6

IV.2. Figure de diffraction par une fente

IV.2.1 La source est ponctuelle

Supposons *b* très grand devant *a*: l'ouverture largeur a, dont les bords sont parallèles à *Oy*; donc b peut être considéré comme infini, J est nul et le terme $\dfrac{\sin\frac{\pi(y-y_0^{'})}{J}}{\frac{\pi(y-y_0^{'})}{J}}$ est nul sauf pour $y=y_0^{'}$ auquel cas il est égal à 1 : l'amplitude de la lumière dans le plan de (E) est partout nulle sauf sur la droite $y=y_0^{'}$, c'est-à-dire sur la droite $S'x'$ de ce plan, perpendiculaire à la fente Σ et passant par l'image géométrique S' de S.

Fig. 7



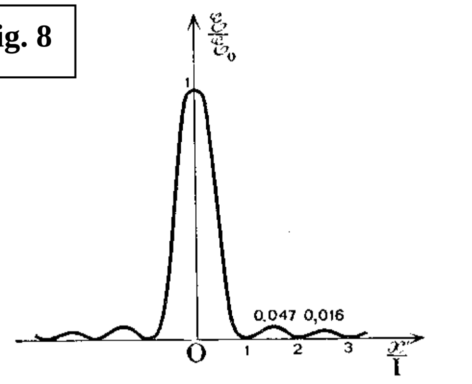
$$\boldsymbol{a}(x',y')=\boldsymbol{a}(x')=\boldsymbol{a}_0\,\frac{\sin\frac{\pi(x-x_0^{'})}{I}}{\frac{\pi(x-x_0^{'})}{I}}=\boldsymbol{a}_0\,\frac{\sin U}{U}\,,\qquad \Rightarrow I=\ \boldsymbol{a}_0^2\,\frac{\sin^2 U}{U^2}$$

IV.2.2 La source est une fente

La fente source (F) est infiniment fine, parallèle à Oy et passe par S. On peut considérer (F) comme engendrée par le déplacement de S parallèlement à *Oy*; durant ce trajet, la droite $S'x'$ «balaie» le plan (E). On obtient donc de la lumière sur la totalité de l'écran (E).

En un point *M* quelconque de l'écran, l'amplitude de la vibration est $\boldsymbol{a}(x')$ et l'éclairement $\mathrm{E}(x')$ de l'écran en ce point s'écrit, en posant $\mathrm{E}_0=\boldsymbol{a}_0^2$.

Fig. 8



$$\frac{E(x')}{E_0} = \left(\frac{\sin \frac{\pi x'}{I}}{\frac{\pi x'}{I}} \right)^2$$

La figure ci-dessous représente le graphique de $\frac{E(x')}{E_0}$ en fonction de $\frac{x'}{I}$. On observe sur l'écran des *franges alternativement sombres et lumineuses*, parallèles aux fentes (F) et (S). Ce sont les franges de diffraction. La frange centrale, de beaucoup la plus lumineuse, de largeur 2I, est bordée de franges de largeur I.

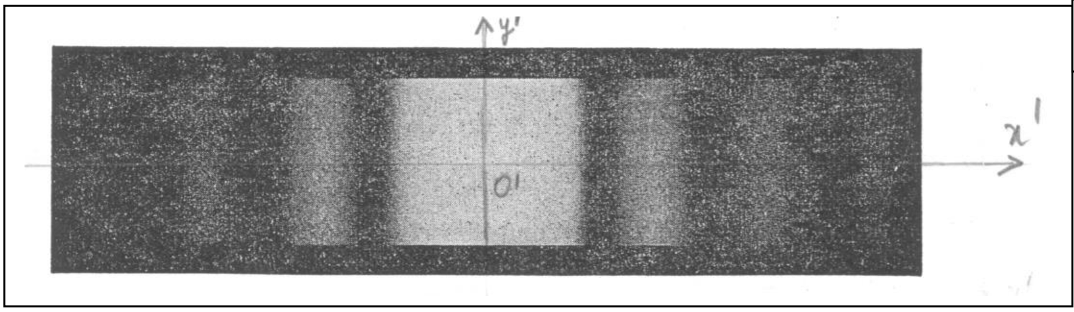


Fig. 9