E.N.S.P. ....Niveau II / Année 2012-13, Semestre 1 ....ND/NG

*** U.E. MAT 217 « *Séries et Intégrales généralisées* » ***

***** Examen Final (3H 00mn) *****

1. **TOUT DOCUMENT INTERDIT.**
2. **Le correcteur appréciera le SOIN apporté à la REDACTION et à la PRESENTATION du devoir.**
3. **Toute réponse doit être justifiée, mais éviter des explications INUTILEMENT KILOMETRIQUES.**
4. **L'objectif ici ne doit pas être de chercher à traiter à tout prix toute l'épreuve, en sprintant inconsidérément et en bâclant. Mais, plutôt, d'en couvrir une part significative de manière convaincante.**

**** *EXERCICE 1* (3 POINTS) ****

On pose : $A = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\mathrm{sh}\,(n) + \mathrm{ch}\,(n)}$.

1°) Sans calculer A, montrer que $A \in \mathbb{R}$. **2°)** Calculer A.

**** *EXERCICE 2* (6 POINTS) ****

Etudier la nature des séries : *(1)* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{\ln n}{n + \sqrt{\mathrm{ch}\, n}}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(\sqrt[3]{n} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - 1 \right)$; *(3)* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} e^{-(1+i)\,n} \cos\left(e^{n^2}\right)$; *(4)* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} (-1)^n \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$.

**** *EXERCICE 3* (3,5 POINTS) ****

Soit ω, un réel arbitraire fixé.

1°) a) Trouver le *domaine de définition* $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{C}$ de la fonction : $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}\,(\omega\, n) - \mathrm{ch}\,(\omega\, n)}{\mathrm{sh}\,(\omega\, n) + \mathrm{ch}\,(\omega\, n)} z^n$.

b) Représenter ce domaine dans le *plan complexe*.

2°) Calculer $f(z)$, $\forall\, z \in \mathcal{D}_f$.

**** *EXERCICE 4* (2,5 POINTS) ****

Trouver le *domaine de définition* dans $\mathbb{N}$ de la fonction : $T(k) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(k\pi\sqrt{1+n^2}\right)$. Et dans $\mathbb{Z}$?

**** *EXERCICE 5* (8 POINTS) ****

1°) Trouver le *domaine de définition* $\mathcal{D}_F$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la fonction : $F(a,b) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(an+b)^2}$.

2°) Trouver le *domaine de définition* $\mathcal{D}_G$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la fonction : $G(h,\beta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{h\,(n+\beta)^2}$.

3°) Trouver le *domaine de définition* $\mathcal{D}_L$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la fonction : $L(a,b,c) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{an^2 + bn + c}$.

4°) a) Calculer une *valeur approchée* de $L(-1/5, -1, 0)$ à 10^{-8} près.

b) Donner une *approximation* de l'*erreur absolue* associée à cette *valeur approchée* de $L(-1/5, -1, 0)$.

5°) a) Du calcul précédent, on peut déduire une *valeur approchée* de $L(-1/5, -1, 7)$.
Laquelle et que peut-on dire de l'*erreur absolue* associée ?

b) Que peut-on dire de l'*erreur relative* associée comparativement à celle associée à la *valeur approchée* de $L(-1/5, -1, 0)$ calculée ci-dessus ?

FIN