République du Cameroun
Republic of Cameroun

Université de Yaoundé I

University of Yaounde I

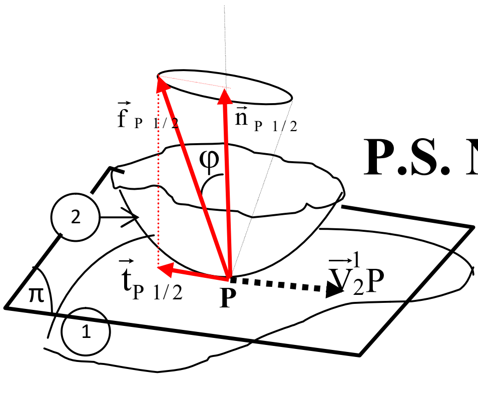
STATIQUE DU SOLIDE

MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

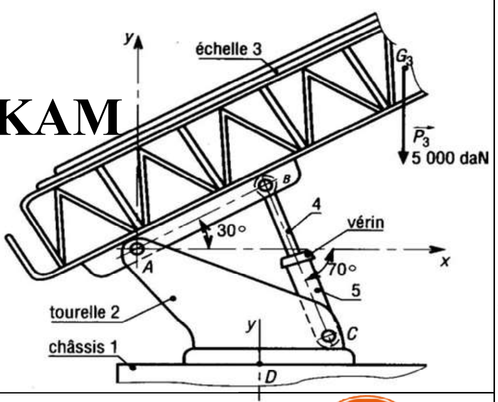
- EXERCICES RESOLUS -

Ressource Pédagogique Mise en Ligne

Par



P.S. NGOHE-EKAM



Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de Yaoundé

PREAMBULE

Suite à la menace de propagation du Covid-19 (Corona virus Disease) dont le premier cas de contamination a été déclaré au mois de mars 2020 au Cameroun, des mesures sanitaires ont été édictées par monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, puis renforcées par une sortie médiatisée de monsieur le Premier Ministre (PM) du Cameroun. Le point commun de l'allocution de ces deux personnalités et relatif à l'enseignement supérieur fut la fermeture des établissements d'enseignement, dont l'Université de Yaoundé.

Monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, dans le souci que la fermeture de l'UY I ne soit pas une perche tendue aux étudiants paresseux pour se laisser aller à un certain sommeil intellectuel, instruit alors que les enseignants « mettent en ligne » leurs cours grâce au serveur du Centre Universitaire des Technologies de l'Information (CUTI) de l'UY I et que les étudiants visitent ce serveur à volonté pour télécharger les ressources pédagogiques (puisque c'est le terme le plus approprié) que les enseignants y auront déposé, ce téléchargement devant permette aux étudiants de continuer d'apprendre (à domicile) pendant la période de pseudo-confinement décrétée par monsieur le PM.

C'est ainsi que le présent document est conçu et mis en forme par l'auteur. Ce document fait partie de l'enseignement dispensé par l'auteur aux étudiants de niveau II de l'Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de l'UY I. L'auteur a valablement sectionné cet enseignement en modules qui constitueraient des chapitres de cours en présentiel. Et pour chaque module l'enseignant a produit trois documents en vue de faciliter l'apprentissage à distance :

- Des notes de cours
- Des exercices corrigés
- Des exercices non corrigés

L'idée principale du sectionnement de l'enseignement est de guider au mieux l'apprenant dans l'organisation de sa mémoire cognitive. En effet, il n'est pas bien d'exiger de l'apprenant une concentration trop longue, dépassant les six minutes reconnues par la plupart des experts en pédagogie, sans activité de restitution par exemple. L'apprenant est ainsi invité à ne pas rester trop longtemps sur les parties cours et exercices corrigés ; il peut y revenir en tant que de besoin. Cependant le traitement des exercices non corrigés étant une phase d'extériorisation de la connaissance emmagasinée, l'apprenant pourra et devrait y passer assez de temps de travail.

L'interaction de l'enseignant avec les apprenants est rendue possible grâce aux fora (plateformes d'enseignement à distance, groupe Whatsapp, liste de distribution par email, etc.) divers dans lesquels les apprenants sont invités à s'inscrire.

Pour finir, nous signalons que l'organisation actuelle de cet enseignement n'est pas vraiment une mise en ligne de cours, encore moins un MOOC, comme cela est fait dans la plupart des plateformes d'enseignement à distance. Nous essayons de faire une mise en ligne des ressources (dans le serveur de l'UY I), mais une mise en ligne suggérant une sorte de protocole d'apprentissage aux étudiants.

Yaoundé, le 21 mars 2020,

P.S. NGOHE-EKAM

EXERCICES RESOLUS SUR LA MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

Exercice résolu n°1 : Détermination du centre d'inertie par partitionnement.

Soit une équerre de maçon BAC, homogène, de masse volumique ρ, de base a, de hauteur b et d'épaisseurs e et e' négligeables (devant b et c) ; On oriente le repérage de sorte que : A(0,0), B(0,b) et C(c, 0). Déterminer, par partitionnement, les coordonnées de son centre de gravité G.

Solution :

Désignons par :

- E le système équerre tel qu'on ait (E,m)
- $E_1 \equiv$ la barre AB tel qu'on ait (E_1, m_1)
- $E_2 \equiv$ la barre AC tel qu'on ait (E_2, m_2)

E_1 et E_2 forment E.

Le centre de gravité G_1 de E_1 est : $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}b\vec{e}_y$;

Le centre de gravité G_2 de E_2 est : $\overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}c\vec{e}_x$.

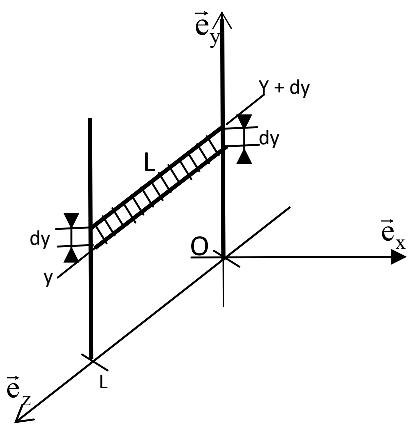
Le centre de gravité G de E est donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m}\left[m_1\overrightarrow{AG_1} + m_2\overrightarrow{AG_2}\right]$

Or $m_1 = \rho \cdot ee'b;\ \ m_2 = \rho.ee'c\ ;\ \text{et } m = \rho.ee'(b+c)$. Donc les masses sont proportionnelles aux longueurs. On a alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{c^2}{2(b+c)}\vec{e}_x + \frac{b^2}{2(b+c)}\vec{e}_y}$$

Exercice résolu n°2: champ des actions mécaniques de pression hydrostatique sur une paroi verticale de hauteur h et de largeur L.

Un barrage hydroélectrique principalement constitué d'un mur de largeur L et de hauteur H est rempli jusqu'à un niveau h (h < H).



1°) – Par application de la loi de l'hydrostatique entre un point A à la surface libre du fluide et un point M à une altitude y, déterminer la pression en M.

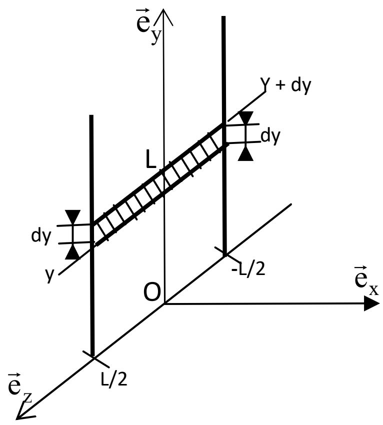
2°) – En déduire l'expression de l'action élémentaire s'exerçant sur un élément de surface $dS = Ldy$ à l'altitude y

3°) – Déterminer le moment, en O, de cette action élémentaire. (on négligera l'infiniment petit d'ordre 2)
4°) – En négligeant la pression atmosphérique (devant les pressions exercées sur la parois par de l'eau), déterminer, par intégration, le torseur de l'ensemble des actions mécaniques de pression hydrostatique s'exerçant sur le barrage.

Solution :
1°) – Loi de l'hydrostatique entre un point A à la surface libre du fluide et un point M à une altitude y
M à une altitude y → M à une profondeur h-y.
→ $p_M - p_A = \varpi(h-y) = \rho g(h-y)$
c'est-à-dire : $\boxed{p_M = p_A + \rho g(h-y)}$

2°) – Déduction de l'expression de l'action élémentaire s'exerçant sur un élément de surface $dS = Ldy$ à l'altitude y :

La pression p_M ci-dessus s'exerce sur l'élément de surface $dS = Ldy$; elle y exerce donc une action (force) élémentaire $\overrightarrow{df} = -p(M)ds\vec{n}$ où $\vec{n}$, normale sortante est égale à $-\vec{e}_x$
$\Rightarrow \overrightarrow{df} = p(M)ds\vec{e}_x = \left[p_A + \rho g(h-y)\right]Ldy\vec{e}_x$ Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{df} = \left[p_A + \rho g(h-y)\right]Ldy\vec{e}_x}$ (1)



Remarque : * cette action est centrée en un point M tel que $\overrightarrow{OM} = \left(y + \frac{dy}{2}\right)\vec{e}_y + \frac{L}{2}\vec{e}_z$

* le terme $\frac{L}{2}\vec{e}_z$ s'annule si on fait passer le plan xOy par le milieu de la paroi (voir figure ci-contre).

3°) – Moment en O de cette action élémentaire
$$d\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{df} = \left(y + \frac{dy}{2}\right)\left[p_A + \rho g(h-y)\right]Ldy.\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x$$
$\approx -L\left[p_A + \rho g(h-y)\right]ydy\vec{e}_z$ (2) (on néglige l'infiniment petit d'ordre 2)
Ainsi : $\boxed{d\vec{\mathcal{M}}_O \approx -L\left[p_A + \rho g(h-y)\right]ydy\vec{e}_z}$

4°) – Torseur de l'ensemble des actions mécaniques de pression hydrostatique s'exerçant sur le barrage

Si la pression atmosphérique est négligée ($p_A \approx 0$), l'intégration sur toute la paroi (y allant de 0 à h) donne :
* Pour la résultante géométrique :

$$\vec{R}_{1/2} = \vec{x}\int_{y=0}^{h} L\rho g(h-y)dy = -L\rho g\vec{x}\left[\frac{1}{2}(h-y)^2\right]_{y=0}^{h} = -L\rho g\vec{x}\left[\frac{1}{2}(0-h^2)\right] = L\rho g\frac{h^2}{2}\vec{x}$$

$$\boxed{\vec{R}_{1/2} = \frac{1}{2}\rho g L h^2\vec{x}}$$

* Pour le moment résultant :

$$\vec{\mathscr{M}}_{0,1/2} = \vec{z}\int_{y=0}^{h} -\rho g L(h-y)y dy = -\rho g L\vec{z}\int_{y=0}^{h}(hy-y^2)dy$$

$$= -\rho g L\vec{z}\left[\frac{1}{2}hy^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{h} = -\rho g L\vec{z}\left[\frac{1}{2}h^3 - \frac{1}{3}h^3\right] = -\frac{1}{6}\rho g L h^3\vec{z}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{\mathscr{M}}_{0,1/2} = -\frac{1}{6}\rho g L h^3\vec{z}}$$

Ainsi, l'ensemble des actions mécaniques de pression hydrostatique sur la paroi peut être modélisé par le torseur :

$$\boxed{[\mathscr{T}_{1/2}] = \begin{cases} \vec{R}_{1/2} = \frac{1}{2}\rho g L h^2\vec{x} \\ \vec{\mathscr{M}}_{0,1/2} = -\frac{1}{6}\rho g L h^3\vec{z} \end{cases}}$$