

Fonctions circulaires et hyperboliques inverse

1 Fonctions circulaires inverses

Exercice 1

Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p . À quelle distance doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000745]

Exercice 2

Écrire sous forme d'expression algébrique

$$\sin(\operatorname{Arccos} x), \quad \cos(\operatorname{Arcsin} x), \quad \sin(3 \operatorname{Arctan} x).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000747]

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin} \frac{2}{5} + \operatorname{Arcsin} \frac{3}{5}, \quad \operatorname{Arccos} x = 2 \operatorname{Arccos} \frac{3}{4},$$

$$\operatorname{Arctan} x = 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{2}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000749]

Exercice 4

Vérifier

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x) \frac{\pi}{2}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000752]

Exercice 5

Démontrer les inégalités suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} a < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{si } 0 < a < 1;$$

$$\operatorname{Arctan} a > \frac{a}{1+a^2} \quad \text{si } a > 0.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000746]

2 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

Exercice 6

Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(\operatorname{ch} x)).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000759]

Exercice 7

Les réels x et y étant liés par

$$x = \ln \left(\tan \left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right),$$

calculer $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{th} x$ en fonction de y .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000764]

Exercice 8

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\operatorname{ch} x) = e^x.$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$

Préciser le nombre de solutions.

3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(e^x) = \operatorname{ch} x.$$

Préciser le nombre de solutions ; y a-t-il des solutions continues sur \mathbb{R}^+ ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000758]

Exercice 9

Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers positifs non nuls.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[000776]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Faire un dessin. Remarquer que maximiser l'angle d'observation α revient à maximiser $\tan \alpha$. Puis calculer $\tan \alpha$ en fonction de la distance et étudier cette fonction.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Il faut utiliser les identités trigonométriques classiques. Pour la dernière expression commencer par calculer $\sin(\operatorname{Arctan} x)$, $\cos(\operatorname{Arctan} x)$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

On compose les équations par la bonne fonction, par exemple sinus pour la première.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Faire une étude de fonction.

$\operatorname{sgn}(x)$ est la *fonction signe* : elle vaut $+1$ si $x > 0$, -1 si $x < 0$ (et 0 si $x = 0$).

Indication pour l'exercice 5 ▲

On pourra étudier les fonctions définies par la différence des deux termes de chaque inégalité.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Réponses :

1. $\frac{3}{4}$;
 2. $\ln 2$.
-

Indication pour l'exercice 7 ▲

Il faut trouver $\operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos(y)}$, $\operatorname{sh} x = \tan y$, $\operatorname{th} x = \sin y$.

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Regarder ce qui se passe en deux valeurs opposées x et $-x$.
 2. Poser $X = e^x$.
-

Indication pour l'exercice 9 ▲

Montrer que l'équation $x^y = y^x$ est équivalente à $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$, puis étudier la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

On note x la distance de l'observateur au pied de la statue. On note α l'angle d'observation de la statue seule, et β l'angle d'observation du piedestal seul. Nous avons les deux identités :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{p+s}{x}, \quad \tan \beta = \frac{p}{x}.$$

En utilisant la relation $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$ on obtient

$$\tan \alpha = \frac{sx}{x^2 + p(p+s)}.$$

Maintenant l'angle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et la fonction \tan est croissante sur cet intervalle, donc maximiser α est équivalent à maximiser $\tan \alpha$. Étudions la fonction $f(x) = \frac{sx}{x^2 + p(p+s)}$ définie sur $x \in [0, +\infty[$. Après calculs f' ne s'annule qu'en $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$ qui donne le maximum de f (en 0 et $+\infty$ l'angle est nul). Donc la distance optimale de vision est $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$.

En complément on peut calculer l'angle maximum α_0 correspondant : par la relation $\tan \alpha_0 = f(x_0) = \frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$, on obtient $\alpha_0 = \text{Arctan} \frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$ donc $\sin y = \pm \sqrt{1 - \cos^2 y}$. Donc $\sin \text{Arccos } x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \text{Arccos } x} = \pm \sqrt{1 - x^2}$ et comme $\text{Arccos } x \in [0, \pi]$ on a $\sin \text{Arccos } x = +\sqrt{1 - x^2}$.

2. De la même manière on trouve la même formule pour : $\cos \text{Arcsin } x = +\sqrt{1 - x^2}$.

3. Commençons par calculer $\sin(\text{Arctan } x)$, $\cos(\text{Arctan } x)$. On utilise $1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{1 - \sin^2 y}$ avec $y = \text{Arctan } x$. Cela donne $\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$ et $\sin^2 y = \frac{x^2}{1+x^2}$. En étudiant les signes de $\sin(y)$, $\cos(y)$ nous obtenons $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Il ne reste plus qu'à linéariser $\sin(3y)$: $\sin(3y) = 3 \sin y \cos^2 y - \sin^3 y$, ce qui s'écrit aussi $\sin(3y) = 4 \sin y \cos^2 y - \sin y$. Ces formules s'obtiennent à la main en écrivant d'abord $\sin(3y) = \sin(2y + y) = \sin(2y) \cos(y) + \dots$. Ou alors à l'aide des nombres complexes et de la formule de Moivre en développant $\cos(3y) + i \sin(3y) = (\cos y + i \sin y)^3 = \cos^3 y + 3i \cos^2 y \sin y + \dots$ puis identifiant les parties imaginaires.

Maintenant

$$\sin(3 \text{Arctan } x) = \sin(3y) = 4 \sin y \cos^2 y - \sin y = 4 \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. En prenant le sinus de l'équation $\text{Arcsin } x = \text{Arcsin } \frac{2}{5} + \text{Arcsin } \frac{3}{5}$ on obtient $x = \sin(\text{Arcsin } \frac{2}{5} + \text{Arcsin } \frac{3}{5})$, donc $x = \frac{2}{5} \cos \text{Arcsin } \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cos \text{Arcsin } \frac{2}{5}$. En utilisant la formule $\cos \text{Arcsin } x = +\sqrt{1 - x^2}$. On obtient $x = \frac{2}{5} \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{8}{25} + \frac{3\sqrt{21}}{25}$.

2. En prenant le cosinus de l'équation $\text{Arccos } x = 2 \text{Arccos } \frac{3}{4}$ on obtient $x = \cos(2 \text{Arccos } \frac{3}{4})$ on utilise la formule $\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1$ et on arrive à : $x = 2(\frac{3}{4})^2 - 1 = \frac{1}{8}$.

3. En prenant la tangente et à l'aide de $\tan(a+b) = \dots$ on obtient : $x = \tan(2 \text{Arctan } \frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit f la fonction sur $[-1, 1]$ définie par $f(x) = \text{Arcsin } x + \text{Arccos } x$ alors $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ pour chaque $x \in]-1, 1[$; donc f est une fonction constante sur l'intervalle $[-1, 1]$ (car continue aux extrémités). Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. Soit $g(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$, la fonction est définie sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. On a $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$ donc g est constante sur chacun de ses intervalles de définition. $g(x) = c_1$ sur $] -\infty, 0[$ et $g(x) = c_2$ sur $]0, +\infty[$. En calculant $g(1)$ et $g(-1)$ on obtient $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $c_2 = +\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Soit $f(a) = \operatorname{Arcsin} a - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ sur $]0, 1[$. Alors $f'(a) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-a^2}(1-a^2)} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{-a^2}{1-a^2}$ donc $f'(a) \leq 0$. Ainsi f est strictement décroissante et $f(0) = 0$ donc $f(a) < 0$ pour tout $a \in]0, 1[$.
2. Si $g(a) = \operatorname{Arctan} a - \frac{a}{1+a^2}$ alors $g'(a) = \frac{1}{1+a^2} - \frac{1-a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{2a^2}{(1+a^2)^2} > 0$. Donc g est strictement croissante et $g(0) = 0$ donc g est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Par la formule du binôme de Newton nous avons $\operatorname{ch}^3 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x})$. Et de même $\operatorname{sh}^3 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x})$. Donc $e^{-x}(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) = \frac{1}{8}e^{-x}(6e^x + 2e^{-3x}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4x}$ qui tend vers $\frac{3}{4}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. $x - \ln(\operatorname{ch} x) = x - \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = x - \ln(e^x + e^{-x}) + \ln 2 = x - \ln(e^x(1 + e^{-2x})) + \ln 2 = x - x + \ln(1 + e^{-2x}) + \ln 2 = \ln(1 + e^{-2x}) + \ln 2$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\ln(1 + e^{-2x}) \rightarrow 0$ donc $x - \ln(\operatorname{ch} x) \rightarrow \ln 2$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

1.

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = \frac{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}{2} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos(y)}.$$

2. De même $\operatorname{sh} x = \tan y$.

3. $\operatorname{th} x = \sin y$.

Ce sont des formules classiques utiles à connaître.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Si f existe alors pour $x = 1$ on a $f(\operatorname{ch} 1) = e$ et pour $x = -1$ on a $f(\operatorname{ch} -1) = f(\operatorname{ch} 1) = 1/e$. Une fonction ne peut prendre deux valeurs différentes au même point (ici $t = \operatorname{ch} 1$).
2. Notons $X = e^x$, l'équation devient

$$f(X) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

Comme la fonction exponentielle est une bijection de \mathbb{R} sur $]0, +\infty[$, alors l'unique façon de définir f sur $]0, +\infty[$ est par la formule $f(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$.

3. Comme e^x est toujours non nul, alors f peut prendre n'importe quelle valeur en 0. $f(0) = c \in \mathbb{R}$ et $f(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ pour $t > 0$. Il y a une infinité de solutions. Mais aucune de ces solutions n'est continue car la limite de $f(t)$ quand $t > 0$ et $t \rightarrow 0$ est $+\infty$.

Correction de l'exercice 9 ▲

$$x^y = y^x \Leftrightarrow e^{y \ln x} = e^{x \ln y} \Leftrightarrow y \ln x = x \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$$

(la fonction exponentielle est bijective). Etudions la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $[1, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

donc f est croissante sur $[1, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$. Donc pour $z \in]0, f(e)[=]0, 1/e[$, l'équation $f(x) = z$ a exactement deux solutions, une dans $]1, e[$ et une dans $]e, +\infty[$.

Revenons à l'équation $x^y = y^x$ équivalente à $f(x) = f(y)$. Prenons y un entier, nous allons distinguer trois cas : $y = 1$, $y = 2$ et $y \geq 3$. Si $y = 1$ alors $f(y) = z = 0$ on doit donc résoudre $f(x) = 0$ et alors $x = 1$. Si $y = 2$ alors il faut résoudre l'équation $f(x) = \frac{\ln 2}{2} \in]0, 1/e[$. Alors d'après l'étude précédente, il existe deux solutions une sur $]0, e[$ qui est $x = 2$ (!) et une sur $]e, +\infty[$ qui est 4, en effet $\frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$. Nous avons pour l'instant les solutions correspondant à $2^2 = 2^2$ et $2^4 = 4^2$.

Si $y \geq 3$ alors $y > e$ donc il y a une solution x de l'équation $f(x) = f(y)$ dans $]e, +\infty[$ qui est $x = y$, et une solution x dans l'intervalle $]1, e[$. Mais comme x est un entier alors $x = 2$ (c'est le seul entier appartenant à $]1, e[$) c'est un cas que nous avons déjà étudié conduisant à $4^2 = 2^4$.

Conclusion : les couples d'entiers qui vérifient l'équation $x^y = y^x$ sont les couples $(x, y = x)$ et les couples $(2, 4)$ et $(4, 2)$.
