Les complexes

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **IT

Calculer de deux façons les racines carrées de $1+i$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Correction ▼ [005119]

Exercice 2 **T

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+z+1=0$
2. $2z^2+2z+1=0$
3. $z^2-2z\cos\theta+1=0$, θ réel donné.
4. $z^2-(6+i)z+(11+13i)=0$
5. $2z^2-(7+3i)z+(2+4i)=0$.

Correction ▼ [005120]

Exercice 3 **IT Une construction du pentagone régulier à la règle et au compas

1. On pose $z=e^{2i\pi/5}$ puis $a=z+z^4$ et $b=z^2+z^3$. Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont a et b et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
2. Le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par le point M d'affixe i recoupe (Ox) en deux points I et J. Montrer que $\overline{OI}+\overline{OJ}=\overline{OI}.\overline{OJ}=-1$ et en déduire une construction à la règle et au compas, du pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 dont un des sommets est le point d'affixe 1.
3. La diagonale $[AC]$ d'un pentagone régulier $(ABCDE)$ est recoupée par deux autres diagonales en deux points F et G. Calculer les rapports $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{FG}{AF}$.

Correction ▼ [005121]

Exercice 4 ***

Soit $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donné. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

Correction ▼ [005122]

Exercice 5 ****

1. Soit (ABC) un triangle dont les longueurs des côtés BC, CA et AB sont notées respectivement a, b et c. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle (ABC). Montrer que $I=\text{bar}\{A(a),B(b),C(c)\}$.
2. Déterminer z complexe tel que O soit le centre du cercle inscrit au triangle (PQR) dont les sommets ont pour affixes respectives z, z^2 et z^3.

Correction ▼ [005123]

Exercice 6 ***I

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que :

$$ABC \text{ équilatéral} \Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ est racine de l'équation } az^2+bz+c=0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = ab+ac+bc \Leftrightarrow \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0.$$

Correction ▼ [005124]

Exercice 7 **T

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.

Correction ▼ [005125]

Exercice 8 **

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2+1)^n-(z-1)^{2n}=0$.

Correction ▼ [005126]

Exercice 9 **I

Déterminer les complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.

Correction ▼ [005127]

Exercice 10 **I

On note U l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ (z\in U\setminus\{-1\}\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}/\ z=\frac{1+ix}{1-ix}).$$

Correction ▼ [005128]

Exercice 11 **IT

Forme trigonométrique de $\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ et de $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$.

Correction ▼ [005129]

Exercice 12 *T

Calculer $(1+i\sqrt{3})^9$.

Correction ▼ [005130]

Exercice 13 **T

Déterminer les racines quatrièmes de i et les racines sixièmes de $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.

Correction ▼ [005131]

Exercice 14 ***

Montrer que les solutions de l'équation $1+z+z^2+...+z^{n-1}-nz^n=0$ sont de module inférieur ou égal à 1.

Correction ▼ [005132]

Exercice 15 **T

Pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, on pose $Z=\frac{1+z}{1-z}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z tels que

1. $|Z|=1$.
2. $|Z|=2$.
3. $Z\in\mathbb{R}$.
4. $Z\in i\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005133]

Exercice 16 *T

Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :

1. $z' = z + 3 - i$
2. $z' = 2z + 3$
3. $z' = iz + 1$
4. $z' = (1-i)z + 2 + i$

Correction ▼ [005134]

Exercice 17 **I

On considère l'équation $(E)\ :\ (z-1)^n - (z+1)^n = 0$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 donné.

1. Montrer que les solutions de (E) sont imaginaires pures.
2. Montrer que les solutions de (E) sont deux à deux opposées.
3. Résoudre (E).

Correction ▼ [005135]

Exercice 18 ***T ESIM 1993

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\mathrm{ch}\, z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $\mathrm{sh}\, z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ et $\mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}$.

1. Quels sont les nombres complexes z pour lesquels $\mathrm{th}\, z$ existe ?
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{th}\, z = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\left\{\begin{array}{l} |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{2} \\ |\mathrm{th}\, z| < 1 \end{array}\right.$.
4. Montrer que la fonction th réalise une bijection de $\Delta = \{z \in \mathbb{C}/\ |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{4}\}$ sur $U = \{z \in \mathbb{C}/\ |z| < 1\}$.

Correction ▼ [005136]

Correction de l'exercice 1 ▲

D'abord on a $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Les racines carrées de $1+i$ dans $\mathbb{C}$ sont donc $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ et $-\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$. On a aussi, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$(x+iy)^2=1+i\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=1\\ x^2+y^2=\sqrt{2}\\ xy>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\\ y^2=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\\ xy>0\end{array}\right.\Leftrightarrow(x,y)\in\left\{\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\right\}.$$

Les racines carrées de $1+i$ sont donc aussi $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$. Puisque $\mathrm{Re}(e^{i\pi/8})=\cos\frac{\pi}{8}>0$, on obtient $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$, ou encore

$$e^{i\pi/8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

et donc, par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\text{ et }\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $z^2+z+1=0\Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j$ ou $z=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=j^2$.
2. $\Delta'=1^2-2=-1=i^2$. L'équation a donc deux solutions non réelles et conjuguées, à savoir $z_1=\frac{1}{2}(-1+i)$ et $z_2=\frac{1}{2}(-1-i)$.
3. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Pour tout complexe z, on a
$$\begin{aligned}z^2-2z\cos\theta+1&=(z-\cos\theta)^2+1-\cos^2\theta=(z-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=(z-\cos\theta)^2-(i\sin\theta)^2\\&=(z-\cos\theta-i\sin\theta)(z-\cos\theta+i\sin\theta)=(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})\end{aligned}$$
L'équation proposée a donc deux solutions (pas nécessairement distinctes) $z_1=e^{i\theta}$ et $z_2=e^{-i\theta}$. De plus, $\Delta'=\cos^2\theta-1=-\sin^2\theta$ et ces solutions sont distinctes si et seulement si $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$.
4. Soit (E) l'équation $z^2-(6+i)z+(11+3i)=0$. Son discriminant est $\Delta=(6+i)^2-4(11+13i)=-9-40i$. Comme $40=2\times20=2\times(4\times5)$ et que $4^2-5^2=16-25=-9$, on est en droit de deviner que $\Delta=(4-5i)^2$. L'équation (E) a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir $z_1=\frac{6+i+4-5i}{2}=5-2i$ et $z_2=\frac{6+i-4+5i}{2}=1+3i$.
5. Soit (E) l'équation $2z^2-(7+3i)z+(2+4i)=0$. Son discriminant est $\Delta=(7+3i)^2-8(2+4i)=24+10i$. Comme $10=2\times5=2\times(5\times1)$ et que $5^2-1^2=24$, on est en droit de deviner que $\Delta=(5+i)^2$. L'équation proposée a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir $z_1=\frac{7+3i+5+i}{4}=3+i$ et $z_2=\frac{7+3i-5-i}{4}=\frac{1}{2}(1+i)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. On a $a=2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $b=2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. 1, z, z^2, z^3 et z^4 sont les cinq racines cinquièmes de 1 dans $\mathbb{C}$. Par suite, $1+z+z^2+z^3+z^4=0$. Mais alors
$$a+b=z+z^2+z^3+z^4=-1$$
et
$$ab=(z+z^4)(z^2+z^3)=z^3+z^4+z^6+z^7=z+z^2+z^3+z^4=-1\ (\text{car } z^5=1).$$

a et b sont donc les solutions de l'équation $X^2+X-1=0$ dont les racines sont $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Enfin, puisque $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $a>0$. Par suite, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. D'autre part, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et donc,

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = +\sqrt{1-\cos^2(\frac{2\pi}{5})} = \sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

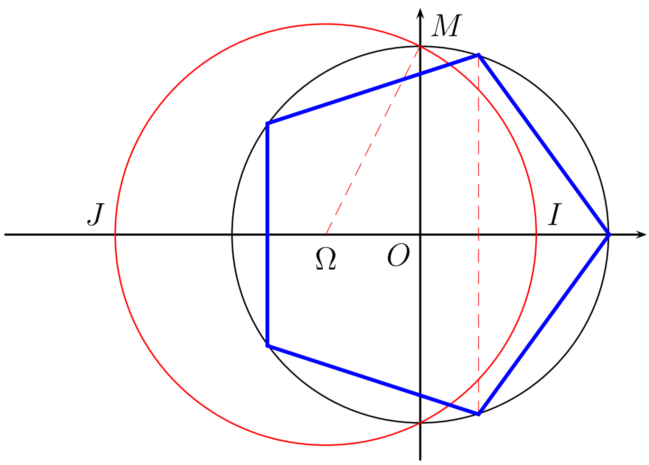
$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.}$$

De même, en remplaçant $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Enfin, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

2. Le rayon du grand cercle vaut, d'après le théorème de PYTHAGORE :

$$R = \sqrt{\Omega O^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

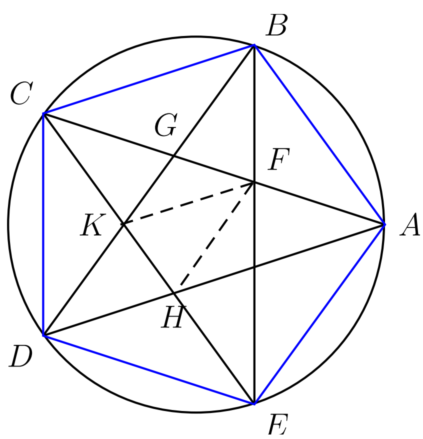
Donc $x_I = x_\Omega + R = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_J = x_\Omega - R = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Par suite, $x_I = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $x_J = 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$. Ceci montre que les médiatrices des segments $[O,I]$ et $[O,J]$ coupent le cercle de centre O et de rayon 1 en quatre des cinq sommets du pentagone.



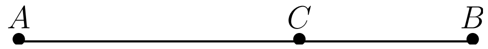
3. Posons $x = \frac{AF}{AC}$. D'après le théorème de THALES (je vous laisse vérifier les parallélismes),

$$x = \frac{AF}{AC} = \frac{HK}{HC} = \frac{FG}{FC} = \frac{AC-2AF}{AC-AF} = \frac{1-2x}{1-x}.$$

Donc $x^2-3x+1=0$ et puisque $x<1$, $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Puis
$\frac{AG}{AC} = \frac{AC-AF}{AC} = 1-x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{FG}{AF} = \frac{AC-2AF}{AF} = \frac{1}{x}-2 = \frac{2}{3-\sqrt{5}}-2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}-2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.



Définition du *nombre d'or*.



On veut que C partage le segment $[A,B]$ de telle sorte que $\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}$ (« $\frac{\text{petit}}{\text{moyen}}=\frac{\text{moyen}}{\text{grand}}$ ») c'est-à-dire, en posant $a=AB$ et $x=AC$, $\frac{x}{a}=\frac{a-x}{x}$ ou encore $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{x}{a}-1=0$ et donc, puisque $\frac{x}{a}>0$, $\frac{x}{a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{\text{Le nombre d'or (ou proportion dorée) est le nombre } \frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0,618...}$$

On peut aussi prendre pour le nombre d'or le rapport $\frac{a}{x}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,618...$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha}=e^{2i\alpha}$. Donc,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\Leftrightarrow\exists k\in\{-1,0,1\}/\ \frac{1+iz}{1-iz}=e^{i\left(\frac{2\alpha}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}=\omega_k\Leftrightarrow\exists k\in\{-1,0,1\}/\ i(\omega_k+1)z=\omega_k-1.$$

Maintenant, pour $k\in\{-1,0,1\}$,

$$\omega_k=-1\Leftrightarrow\frac{2\alpha}{3}+\frac{2k\pi}{3}\in\pi+2\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow\alpha\in-k\pi+\frac{3\pi}{2}+3\pi\mathbb{Z},$$

ce qui est exclu pour $\alpha\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Donc,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}\Leftrightarrow\exists k\in\{-1,0,1\}/\ z=\frac{\omega_k-1}{i(\omega_k+1)}\Leftrightarrow\exists k\in\{-1,0,1\}/\ z=\frac{e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)}}{e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)}}\frac{e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)}-e^{-i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)}}{i\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)}+e^{-i\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)}\right)}$$

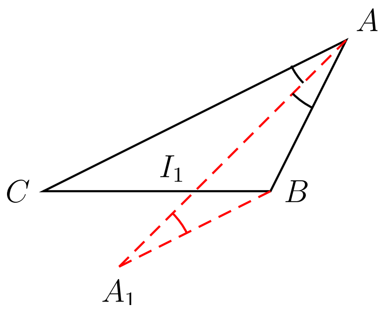
$$\Leftrightarrow\exists k\in\{-1,0,1\}/\ z=\frac{2i\sin\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)}{i\left(2\cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)\right)}\Leftrightarrow\exists k\in\{-1,0,1\}/\ z=\tan\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}\right)$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. On note I_1 le point d'intersection de la bissectrice (Δ_1) de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la droite (BC). La parallèle à (AC) passant par B coupe Δ_1 (puisque (AC) n'est pas parallèle à (Δ_1)) en un point A_1. Les angles alternes-internes $\widehat{CAA_1}$ et $\widehat{AA_1B}$ sont alors égaux. Puisque d'autre part, $\widehat{CAA_1}=\widehat{A_1AB}$, on en déduit que $\widehat{AA_1B}=\widehat{A_1AB}$ et donc que le triangle (ABA_1) est isocèle en B. D'après le théorème de THALÈS, on a alors

$$\frac{I_1B}{I_1C}=\frac{A_1B}{AC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b},$$

et donc puisque I_1 est entre B et C, $b\overrightarrow{I_1B}+c\overrightarrow{I_1C}=\vec{0}$, ou enfin $I_1=\text{bar}\{B(b),C(c)\}$.



On a aussi bien sûr les deux autres égalités $I_2 = \text{bar}\{A(a),C(c)\}$ et $I_3 = \text{bar}\{A(a),B(b)\}$ où I_2 et I_3 sont les points d'intersection des deux autres bissectrices avec (AC) et (AB) respectivement. Soit alors $I' = \text{bar}\{A(a),B(b),C(c)\}$. D'après le théorème du barycentre partiel, on a

$$I' = \text{bar}\{A(a),I_1(b+c)\} = \text{bar}\{B(b),I_2(a+c)\} = \text{bar}\{C(c),I_3(a+b)\},$$

ce qui montre que I' est sur (AI_1), (BI_2) et (CI_3), c'est-à-dire sur les trois bissectrices. Par suite, $I' = I$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z,\ z^2 \text{ et } z^3 \text{ ne sont pas deux à deux distincts} \Leftrightarrow z^2 = z \text{ ou } z^3 = z \text{ ou } z^3 = z^2 \Leftrightarrow z \in \{-1,0,1\}.$$

Ensuite, pour $z \notin \{-1,0,1\}$,

$$z,\ z^2 \text{ et } z^3 \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ z^3 - z = \lambda(z^2 - z) \Leftrightarrow \frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z+1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Finalement, (z,z^2,z^3) est un « vrai » triangle si et seulement si z n'est pas réel. Soit alors z un complexe non réel.

$$\begin{aligned} O \text{ centre du cercle inscrit au triangle } (PQR) &\Leftrightarrow O = \text{bar}\{P(QR),Q(PR),R(PQ)\} \\ &\Leftrightarrow z|z^2 - z^3| + z^2|z - z^3| + z^3|z - z^2| = 0 \Leftrightarrow z.|z|.|1 - z|(|z| + z|1+z| + z^2) \\ &\Leftrightarrow |z| + z|1+z| + z^2 = 0\ (E)\ (\text{car } z \notin \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} |z| + z|1+z| + z^2 = 0 &\Leftrightarrow (z + \frac{|z|}{z}) + |1+z| = 0 \Rightarrow z + \frac{|z|}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + \frac{|z|}{z} = \bar{z} + \frac{|z|}{\bar{z}} \\ &\Leftrightarrow z - \bar{z} - |z|\frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z})(1 - \frac{1}{|z|}) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{|z|} = 0\ (\text{car } z \neq \bar{z}) \\ &\Leftrightarrow |z| = 1 \end{aligned}$$

Posons donc $z = e^{i\theta}$ où $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. En reportant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} + |1 + e^{i\theta}| = 0 \Leftrightarrow 2\cos\theta + |e^{i\theta/2}|.|2\cos\frac{\theta}{2}| = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\theta + |\cos\frac{\theta}{2}| = 0 \Leftrightarrow 2|\cos\frac{\theta}{2}|^2 + |\cos\frac{\theta}{2}| - 1 = 0 \Leftrightarrow |\cos\frac{\theta}{2}| \text{ est solution de l'équation } 2X^2 + X \\ &\Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| \in \left\{\frac{1}{2}, -1\right\} \Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z \in \{j, j^2\} \end{aligned}$$

Les nombres complexes solutions sont donc j et j^2.

Correction de l'exercice 6 ▲

$$\begin{aligned} (A,B,C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow C = r_{A,\pi/3}(B) \text{ ou } C = r_{A,-\pi/3}(B) \Leftrightarrow c - a = (-j^2)(b-a) \text{ ou } c - a = (-j)(b-a) \\ &\Leftrightarrow (-1-j^2)a + j^2b + c = 0 \text{ ou } (-1-j)a + jb + c = 0 \Leftrightarrow ja + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \\ &\Leftrightarrow (j^2)^2a + j^2b + c = 0 \text{ ou } j^2a + jb + c = 0 \Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ sont solutions de l'équation } az^2 + bz + c = 0. \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}(A,B,C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow ja+j^2b+c=0 \text{ ou } j^2a+jb+c=0\\ &\Leftrightarrow (ja+j^2b+c)(j^2a+jb+c)=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+(j+j^2)(ab+ac+bc)=0\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc,\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}(A,B,C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0\\ &\Leftrightarrow -a^2+ab+ac-bc-b^2+bc+ba-ac-c^2+ca+cb-ab=0\\ &\Leftrightarrow (c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)=0 \Leftrightarrow \frac{(c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=0\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Le discriminant de l'équation $Z^2-(5-14i)Z-2(5i+12)=0$ vaut

$$\Delta=(5-14i)^2+8(5i+12)=-75-100i=25(-3-4i)=(5(1-2i))^2.$$

Cette équation admet donc les deux solutions $Z_1=\frac{5-14i+5-10i}{2}=5-12i$ et $Z_2=\frac{5-14i-5+10i}{2}=-2i$. Ensuite,

$$\begin{aligned}z \text{ est solution de l'équation proposée} &\Leftrightarrow z^2=5-12i=(3-2i)^2 \text{ ou } z^2=-2i=(1-i)^2\\ &\Leftrightarrow z=3-2i \text{ ou } z=-3+2i \text{ ou } z=1-i \text{ ou } z=-1+i.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Posons, pour n naturel non nul, $P=(X^2+1)^n-(X-1)^{2n}$.

$$\begin{aligned}P &= X^{2n}+(\text{termes de degré} \leq 2n-2)-X^{2n}+2nX^{2n-1}+(\text{termes de degré } \leq 2n-2)\\ &= 2nX^{2n-1}+(\text{termes de degré} \leq 2n-2).\end{aligned}$$

Donc $\deg(P)=2n-1$ et P admet dans $\mathbb{C}$, $2n-1$ racines, distinctes ou confondues.

$$\begin{aligned}(z^2+1)^n=(z-1)^{2n} &\Leftrightarrow \exists k\in\{0,\ldots,n-1\}/\ z^2+1=\omega_k(z-1)^2 \text{ où } \omega_k=e^{2ik\pi/n}\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\{0,\ldots,n-1\}/\ (1-\omega_k)z^2+2\omega_k z+(1-\omega_k)=0\end{aligned}$$

Si $k=0$, l'équation précédente s'écrit $2z=0$ ou encore $z=0$. Si k est élément de $[\![1,n-1]\!]$, $\Delta'_k=\omega_k^2-(1-\omega_k)^2=2\omega_k-1=2e^{2ik\pi/n}-1$. Soit d_k une racine carrée dans $\mathbb{C}$ de Δ'_k (difficile à expliciter semble-t-il). On a $S=\{0\}\cup\left\{\frac{-e^{2ik\pi/n}\pm d_k}{1-e^{2ik\pi/n}}, k\in[\![1,n-1]\!]\right\}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Soient z un complexe non nul, M le point d'affixe z et A le point d'affixe 1.

$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|=\frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1,$$

et

$$|z| = |z-1| \Leftrightarrow OM = AM \Leftrightarrow M \in \text{med}[OA] \Leftrightarrow x_M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \frac{1}{2}.$$

Donc,

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |z-1| \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } \text{Re}(z) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = -j \text{ ou } z = -j^2.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z = \frac{1+ix}{1-ix}$. Puisque $1 - ix \neq 0$, z est bien défini et $|z| = \frac{|1+ix|}{|1-ix|} = \frac{|1+ix|}{|\overline{1+ix}|} = 1$. Enfin, $z = \frac{-1+ix+2}{1-ix} = -1 + \frac{2}{1-ix} \neq -1$. On a montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1+ix}{1-ix} \in U \setminus \{-1\}.$$

Réciproquement, soit $z \in U \setminus \{-1\}$. Il existe un réel $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Mais alors,

$$z = e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}(1+i\tan\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}(1-i\tan\frac{\theta}{2})} = \frac{1+i\tan\frac{\theta}{2}}{1-i\tan\frac{\theta}{2}}\ (\cos\frac{\theta}{2} \neq 0 \text{ car } \frac{\theta}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}),$$

et z est bien sous la forme voulue avec $x = \tan\frac{\theta}{2}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$1 + \cos\theta + i\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -1 \text{ et } \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Donc, $\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ existe pour $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Pour un tel θ,

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\,\frac{\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2)+i\cos(\theta/2)} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\,\frac{e^{-i\theta/2}}{e^{i(\pi-\theta)/2}} = -i\,\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

- 1er cas.] $\text{cotan}\frac{\theta}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$. Dans ce cas, la forme trigonométrique de $\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ est $\text{cotan}(\frac{\theta}{2})e^{-i\pi/2}$ (module$=$ $\text{cotan}(\frac{\theta}{2})$ et argument$= -\frac{\pi}{2}$ (2π)).

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = \left[\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right), -\frac{\pi}{2}\right].$$

- 2ème cas. $\text{cotan}\frac{\theta}{2} < 0 \Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$. Dans ce cas,

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = -\text{cotan}(\frac{\theta}{2}).e^{i\pi/2} = |\text{cotan}(\frac{\theta}{2})|e^{i\pi/2},$$

et donc,

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = \left[-\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right].$$

- 3ème cas. $\text{cotan}\frac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a $\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = 0$.

2. Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2})} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = i\,\mathrm{cotan}\,\frac{\theta}{2}.$$

Si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, \pi+2k\pi[$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = [\mathrm{cotan}\,\frac{\theta}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi+2k\pi, 2(k+1)\pi[$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = [-\mathrm{cotan}\,\frac{\theta}{2}, -\frac{\pi}{2}]$.
Si $\theta \in \pi+2\pi\mathbb{Z}$, $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = 0$.

Correction de l'exercice 12 ▲

$(1+i\sqrt{3})^9 = (2e^{i\pi/3})^9 = 2^9e^{3i\pi} = -512$.

> La forme algébrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à l'addition.
> La forme trigonométrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à la multiplication.

Correction de l'exercice 13 ▲

$i = e^{i\pi/2}$ et les racines quatrièmes de i sont donc les $e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})}$, $k \in \{0,1,2,3\}$. Ensuite, $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-2}{e^{i\pi/3}} = -2e^{-i\pi/3} = 2e^{2i\pi/3}$. Les racines sixièmes de $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ sont donc les $\sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3})}$, $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$.

$$|1+z+\ldots+z^{n-1}| \leq 1+|z|+|z|^2+\ldots+|z|^{n-1} < |z|^n+|z|^n+\ldots+|z|^n = n|z|^n = |nz^n|,$$

et en particulier, $1+z+\ldots+z^{n-1} \neq nz^n$. Donc, si $1+z+\ldots+z^{n-1}-nz^n = 0$, alors $|z| \leq 1$.

Correction de l'exercice 15 ▲

A- Solutions algébriques.] Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $z = x+iy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. $$|Z| = 1 \Leftrightarrow \frac{|1+z|^2}{|1-z|^2} = 1 \Leftrightarrow (1+x)^2+y^2 = (1-x)^2+y^2 \text{ et } (x,y) \neq (1,0) \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

   L'ensemble cherché est la droite (Oy).

2. $$\begin{aligned} |Z| = 2 &\Leftrightarrow (1+x)^2+y^2 = 4((1-x)^2+y^2) \Leftrightarrow 3x^2+3y^2-10x+3 = 0 \text{ et } (x,y) \neq (1,0) \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{10}{3}x+1 = 0 \text{ et } (x,y) \neq (1,0) \\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2 = \frac{16}{9} \text{ et } (x,y) \neq (1,0) \\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2 = \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

   L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{5}{3},0\right)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

3. $$\begin{aligned} Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \overline{Z} \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} &= \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} \\ &\Leftrightarrow (1+z)(1-\overline{z}) = (1-z)(1+\overline{z}) \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z-\overline{z} = \overline{z}-z \text{ et } z \neq 1 \\ &\Leftrightarrow z = \overline{z} \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ et } z \neq 1. \end{aligned}$$

   L'ensemble cherché est la droite (Ox) privé du point $(1,0)$.

4.

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Z = -\overline{Z} \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = -\frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}} \Leftrightarrow (1+z)(1-\bar{z}) = -(1-z)(1+\bar{z}) \text{ et } z \neq 1$$
$$\Leftrightarrow 1 - z\bar{z} = -1 + \bar{z} \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } z \neq 1.$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1,0)$.

B- Solutions géométriques. Soient A et B les points d'affixes respectives -1 et 1 et $\mathscr{E}$ l'ensemble cherché. Soit M un point du plan distinct de B d'affixe z.

1.
$$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow |z+1| = |z-1| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB] = (Oy).$$

2. Soit $\Omega = \text{bar}(A(1), B(-4))$. On a $x_\Omega = \frac{-1}{5}(x_A - 4x_B) = \frac{5}{3}$ et $y_\Omega = \frac{-1}{5}(y_A - 4y_B) = 0$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow |z+1|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow AM^2 = 4BM^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 - 4\overrightarrow{BM}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M})^2 - 4(\overrightarrow{B\Omega} + \overrightarrow{\Omega M})^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3\overrightarrow{\Omega M}^2 + 2(\overrightarrow{A\Omega} - 4\overrightarrow{B\Omega}).\overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{A\Omega}^2 - 4\overrightarrow{B\Omega}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{1}{3}(\Omega A^2 - 4\Omega B^2) \end{aligned}$$

Or, $\Omega A^2 = (\frac{5}{3}+1)^2 = \frac{64}{9}$ et $\Omega B^2 = (\frac{5}{3}-1)^2 = \frac{4}{9}$. Par suite,

$$\frac{1}{3}(\Omega A^2 - 4\Omega B^2) = \frac{1}{3}(\frac{64}{9} - \frac{16}{9}) = \frac{16}{9}.$$

Ainsi,

$$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{4}{3},$$

et on retrouve le cercle de centre $\Omega(\frac{5}{3}, 0)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

3.
$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0\ (\pi) \Leftrightarrow M = A \text{ ou } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0\ (\pi) \\ &\Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{B\}. \end{aligned}$$

et on retrouve la droite (Ox) privée du point $(1,0)$.

4.
$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi) \Leftrightarrow M = A \text{ ou } \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi) \\ &\Leftrightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [AB] \text{ privé de } B. \end{aligned}$$

et on retrouve le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1,0)$.

Correction de l'exercice 16 ▲

Soit f la transformation considérée.

1. f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(3,-1)$.
2. $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$. f est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3,0)$.
3. $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1+i)$. Comme $i = e^{i\pi/2}$, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
4. $\omega = (1-i)\omega + 2 + i \Leftrightarrow \omega = 1 - 2i$. Comme $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f est la similitude de centre $\Omega(1,-2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Soient M, A et B les points d'affixes resectives z, 1 et -1.

$$z \text{ solution de } (E) \Rightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Rightarrow |(z-1)^n| = |(z+1)^n| \Rightarrow |z-1|^n = |z+1|^n \Rightarrow |z-1| = |z+1|$$
$$\Rightarrow AM = BM \Rightarrow M \in \text{med}[AB] \Rightarrow M \in (Oy) \Rightarrow z \in i\mathbb{R}.$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$(-z-1)^n - (-z+1)^n = (-1)^n((z+1)^n - (z-1)^n) = -(-1)^n((z-1)^n - (z+1)^n).$$

Par suite,

$$z \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow (z-1)^n - (z+1)^n = 0 \Leftrightarrow (-z-1)^n - (-z+1)^n = 0 \Leftrightarrow -z \text{ solution de } (E).$$

3. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!] \,/\, z+1 = e^{2ik\pi/n}(z-1) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!] \,/\, z = \frac{e^{2ik\pi/n} - 1}{e^{2ik\pi/n} + 1} \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!] \,/\, z = \frac{e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n} + e^{-ik\pi/n}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!] \,/\, z = \frac{2i\sin\frac{k\pi}{n}}{2\cos\frac{k\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!] \,/\, z = i\,\text{cotan}\,\frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 18 ▲

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. $\text{sh}\,z$ et $\text{ch}\,z$ sont définis et donc, $\text{th}\,z$ existe si et seulement si $\text{ch}\,z \neq 0$. Or,

$$\text{ch}\,z = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow e^{2z} = e^{i\pi} \Leftrightarrow 2z \in i\pi + 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

$\text{th}\,z$ existe si et seulement si $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

2. Soit $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

$$\text{th}\,z = 0 \Leftrightarrow \text{sh}\,z = 0 \Leftrightarrow e^z = e^{-z} \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow 2z \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in i\pi\mathbb{Z}.$$

Comme $i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cap i\pi\mathbb{Z} = \varnothing$, $\text{th}\,z = 0$ si et seulement si $z \in i\pi\mathbb{Z}$.

3. Soit $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} |\,\text{th}\,z| < 1 &\Leftrightarrow |e^z - e^{-z}|^2 < |e^z + e^{-z}|^2 \Leftrightarrow (e^z - e^{-z})(e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}) < (e^z + e^{-z})(e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}) \\ &\Leftrightarrow -e^{z-\bar{z}} - e^{-(z-\bar{z})} < e^{z-\bar{z}} + e^{-(z-\bar{z})} \Leftrightarrow 2(e^{2iy} + e^{-2iy}) > 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(2y) > 0 \end{aligned}$$

Par suite,

$$\left\{\begin{array}{l} |\,\text{Im}\,z| < \frac{\pi}{2} \\ |\,\text{th}\,z| < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |y| < \frac{\pi}{2} \\ \cos(2y) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow |y| < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow z \in \Delta.$$

4. Soit $z \in \Delta$. D'après 1), $\text{th}\, z$ existe et d'après 3), $|\text{th}\, z| < 1$. Donc $z \in \Delta \Rightarrow \text{th}\, z \in U$. Ainsi, th est une application de Δ dans U. Soit alors $Z \in U$ et $z \in \Delta$.

$$\text{th}\, z = Z \Leftrightarrow \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} = Z \Leftrightarrow e^{2z} = \frac{1+Z}{1-Z}.$$

Puisque $Z \neq -1$, $\frac{1+Z}{1-Z} \neq 0$ et on peut poser $\frac{1+Z}{1-Z} = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi,\pi]$.
Par suite,

$$\begin{aligned} e^{2z} = \frac{1+Z}{1-Z} &\Leftrightarrow e^{2z} = re^{i\theta} \Leftrightarrow e^{2x} = r \text{ et } 2y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln r \text{ et } y \in \frac{\theta}{2} + \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Maintenant, on ne peut avoir $\theta = \pi$. Dans le cas contraire, on aurait $\frac{1+Z}{1-Z} = -r \in \mathbb{R}_-^*$ puis $Z = \frac{r+1}{r-1} \in \mathbb{R}$. Par suite, puisque $|Z| < 1$, on aurait $Z \in]-1,1[$ et donc $\frac{1+Z}{1-Z} \in \mathbb{R}_+^*$ ce qui est une contradiction. Donc, $\theta \in]-\pi,\pi[$ puis $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Mais alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{th}\, z = Z \\ z \in \Delta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\ln r \\ y = \frac{\theta}{2} \end{array} \right. .$$

Ainsi, tout élément Z de U a un et un seul antécédent z dans Δ (à savoir $z = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+Z}{1-Z}\right| + \frac{i}{2}\text{Arg}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$ où $\text{Arg}\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)$ désigne l'argument de $\frac{1+Z}{1-Z}$ qui est dans $]-\pi,\pi[$). Finalement, th réalise donc une bijection de Δ sur U.
