EXERCICES SUR LES INTEGRALES MULTIPLES

Table des matières

Les exercices proposés dans ce qui suit illustrent différents moyens pratiques de calculer des intégrales multiples

$$\underset{D}{\int \cdots \int} f(x_1, \ldots, x_p)\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_p$$

dans le cas de 2, de 3 puis de p variables.

Tous les domaines d'intégration D considérés sont limités par des courbes simples dans $\mathbb{R}^2$, des surfaces simples dans $\mathbb{R}^3$ et des hypersurfaces simples dans $\mathbb{R}^p$.

Les fonctions f intégrées sont continues sur D.

Lorsque le domaine D n'est pas fermé ou n'est pas borné, on appliquera les méthodes générales dès que la fonction f est positive sur D.

On ne soulèvera pas de difficultés pour les changements de variables proposés.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Première partie

INTEGRATION DANS $\mathbb{R}^2$

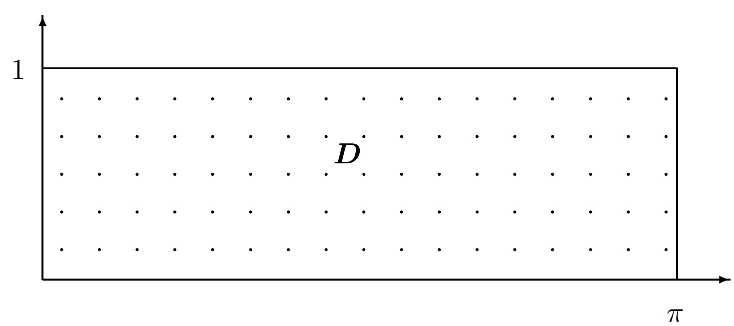
Chapitre 1

THEOREME DE FUBINI

1) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est le rectangle de sommets O, $A(\pi,0)$, $B(0,1)$, $C(\pi,1)$ et

$$f(x,y) = 2y\,\sin x\,.$$

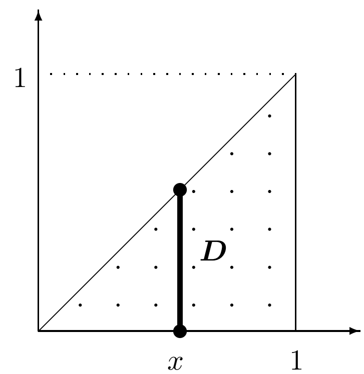


Comme on intégre sur un rectangle une fonction dont les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^\pi \sin x\,dx\right)\left(\int_0^1 2y\,dy\right) = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi \Big[y^2\Big]_0^1 = 2\,.$$

2) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le triangle de sommets O, $A(1,0)$, $B(1,1)$ et

$$f(x,y) = x - y\,.$$



La droite OB a pour équation

$$y = x\,.$$

Lorsque x est compris entre 0 et 1, le nombre y varie de 0 à x. Donc

$$I_y(x) = \int_0^x (x-y)\,dy = \left[-\frac{(x-y)^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} = \frac{x^2}{2}\,.$$

On a alors

$$I = \int_0^1 I_y(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\,.$$

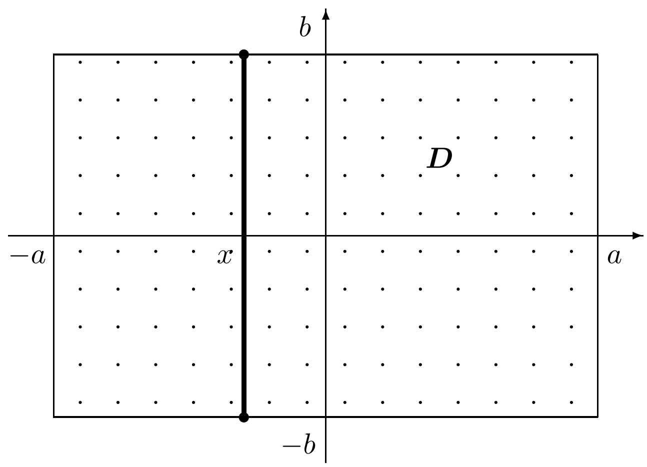
3) Calculer $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = \{(x,y) \mid |x| \le a \ ,\ |y| \le b\}\,.$$

et

$$f(x,y) = (x+y)e^{x-y}\,.$$



On intègre sur un rectangle. Lorsque x est compris entre $-a$ et a, l'ordonnée y varie de $-b$ à b. Donc

$$I_y(x) = \int_{-b}^{b} (x+y)e^{x-y}\,dy\,.$$

En intégrant par parties

$$I_y(x) = \Big[-(x+y)e^{x-y}\Big]_{y=-b}^{y=b} + \int_{-b}^{b} e^{x-y}\,dy = \Big[-(x+y+1)e^{x-y}\Big]_{y=-b}^{y=b} = -(x+b+1)e^{x-b} + (x-b+1)e^{x+b}\,.$$

On a alors

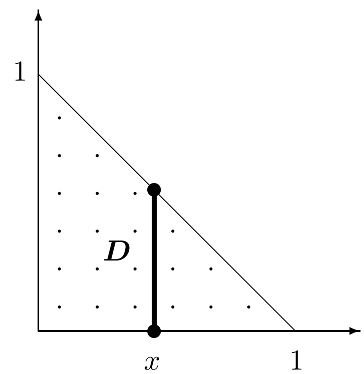
$$I = \int_{-a}^{a} I_y(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \left[(x-b+1)e^{x+b} - (x+b+1)e^{x-b}\right] dx\,.$$

En intégrant de nouveau par parties

$$\begin{aligned}
I &= \Big[(x-b+1)e^{x+b}\Big]_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{a} e^{x+b}\,dx - \left(\Big[(x+b+1)e^{x-b}\Big]_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{a} e^{x-b}\,dx\right)\\
&= \Big[(x-b)e^{x+b}\Big]_{-a}^{+a} - \Big[(x+b)e^{x-b}\Big]_{-a}^{+a}\\
&= (a-b)e^{a+b} + (a+b)e^{b-a} - (a+b)e^{a-b} + (b-a)e^{-(a+b)}\\
&= (a-b)(e^{a+b} - e^{-(a+b)}) + (a+b)(e^{b-a} - e^{a-b})\\
&= 2(a-b)\,\mathrm{sh}(a+b) + 2(a+b)\,\mathrm{sh}(b-a)\,.
\end{aligned}$$

4) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le triangle de sommets O, $A(1,0)$, $B(0,1)$ et

$$f(x,y) = x^2 y\,.$$



La droite AB a pour équation

$$y = 1 - x\,.$$

Lorsque x est compris entre 0 et 1, le nombre y varie de 0 à $1-x$. Donc

$$I_y(x) = \int_0^{1-x} yx^2\,dy = x^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} = \frac{x^2(x-1)^2}{2}\,.$$

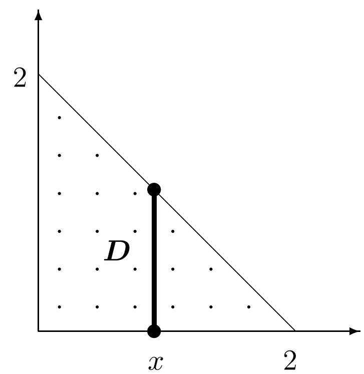
On a alors

$$I = \int_0^1 I_y(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{60}\,.$$

5) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est le triangle de sommets O, $A(2,0)$, $B(0,2)$ et

$$f(x,y) = xe^x \sin y\,.$$



La droite AB a pour équation

$$y = 2 - x\,.$$

Lorsque x est compris entre 0 et 2, le nombre y varie de 0 à $2-x$. Donc

$$I_y(x) = \int_0^{2-x} xe^x \sin y\,dy = xe^x \Big[-\cos y\Big]_{y=0}^{y=2-x} = xe^x\,(1 - \cos(x-2))\,.$$

Alors

$$I = \int_0^2 I_y(x)\,dx = \int_0^2 xe^x\,dx - \int_0^2 xe^x \cos(x-2)\,dx\,.$$

En intégrant par parties, on obtient tout d'abord

$$\int_0^2 xe^x\,dx = \Big[xe^x\Big]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx = \Big[(x-1)e^x\Big]_0^2 = e^2 + 1\,.$$

D'autre part

$$\int_0^2 xe^x \cos(x-2)\,dx = \mathrm{Re}\int_0^2 xe^x e^{i(x-2)}\,dx = \mathrm{Re}\left(e^{-2i}\int_0^2 xe^{(1+i)x}\,dx\right)\,.$$

On intègre de nouveau par parties ce qui donne

$$\int_0^2 xe^{(1+i)x}\,dx = \left[x\,\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\,dx = \left[x\,\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{e^{(1+i)x}}{(1+i)^2}\right]_0^2\,.$$

Mais

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1+i)^2} = \left[\frac{1-i}{2}\right]^2 = -\frac{i}{2}\,,$$

d'où

$$\int_0^2 xe^{(1+i)x}\,dx = \frac{1}{2}\left[x(1-i)e^{(1+i)x} + ie^{(1+i)x}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\big((1-i)x+i\big)e^{(1+i)x}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left((2-i)e^{2+2i} - i\right).$$

Alors

$$e^{-2i}\int_0^2 xe^{(1+i)x}\,dx = \frac{1}{2}\left((2-i)e^2 - ie^{-2i}\right),$$

et

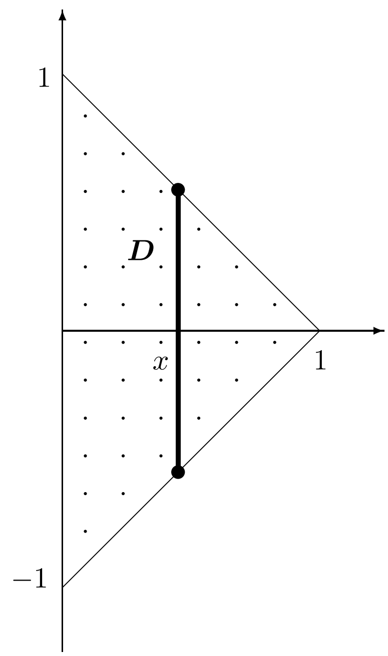
$$\mathrm{Re}\left(e^{-2i}\int_0^2 xe^{(1+i)x}\,dx\right) = e^2 - \frac{\sin 2}{2}\,.$$

Finalement

$$I = e^2 + 1 - \left(e^2 - \frac{\sin 2}{2}\right) = 1 + \frac{\sin 2}{2}\,.$$

6) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le triangle de sommets $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(0,-1)$ et

$$f(x,y) = x + 2y\,.$$



Les droites AB et AC ont pour équations respectives

$$y = 1 - x \quad \text{et} \quad y = -1 + x\,.$$

Lorsque x est compris entre 0 et 1, le nombre y varie de $x-1$ à $1-x$. Donc

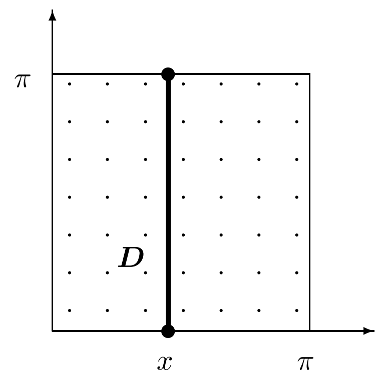
$$I_y(x) = \int\limits_{x-1}^{1-x} (x+2y)\,dy = \Big[xy + y^2\Big]_{y=x-1}^{y=1-x} = x(1-x) + (x-1)^2 - \big(x(x-1) + (x-1)^2\big) = 2x(1-x)\,.$$

On a alors

$$I = \int\limits_0^1 I_y(x)\,dx = \int\limits_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\,.$$

7) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le carré de sommets O, $A(\pi,0)$, $B(0,\pi)$, $C(\pi,\pi)$ et

$$f(x,y) = (x+y)\sin x\,\sin y\,.$$



Lorsque x est compris entre 0 et π, le nombre y varie de 0 à π. Donc

$$I_y(x) = \int_0^\pi (x+y)\sin x\,\sin y\,dy\,.$$

On intègre par parties

$$I_y(x) = \sin x\,\left(\Big[(x+y)\,(-\cos y)\Big]_{y=0}^{y=\pi} + \int_0^\pi \cos y\,dy\right) = \sin x\,\Big[(x+y)(-\cos y)+\sin y\Big]_{y=0}^{y=\pi} = (2x+\pi)\sin x\,.$$

On a alors

$$I = \int_0^\pi I_y(x)\,dx\,,$$

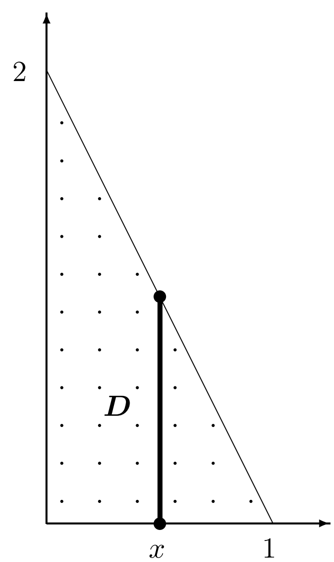
et on intègre de nouveau par parties

$$I = \int_0^\pi (2x+\pi)\sin x\,dx = \Big[(2x+\pi)(-\cos x)\Big]_0^\pi + 2\int_0^\pi \cos x\,dx = \Big[(2x+\pi)(-\cos x) + 2\sin x\Big]_0^\pi = 4\pi\,.$$

8) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est le triangle de sommets O, $A(1,0)$, $B(0,2)$ et

$$f(x,y) = (2x+y)^2\,.$$



La droite AB a pour équation

$$y = 2 - 2x\,.$$

Lorsque x est compris entre 0 et 1, le nombre y varie de 0 à $2-2x$. Donc

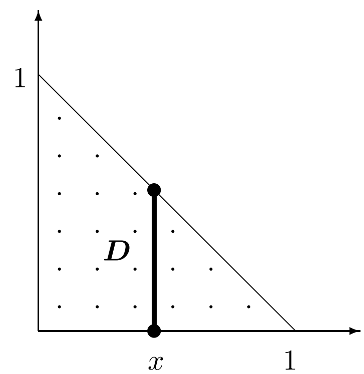
$$I_y(x) = \int_0^{2-2x} (2x+y)^2\,dy = \left[\frac{(2x+y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=2-2x} = \frac{8-8x^3}{3}\,.$$

Alors

$$I = \int_0^1 I_y(x)\,dx = \frac{8}{3}\int_0^1 (1-x^3)\,dx = \frac{8}{3}\left[x - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{8}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right) = 2\,.$$

9) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le triangle de sommets O, $A(1,0)$, $B(0,1)$ et

$$f(x,y) = \ln(x+y+1)\,.$$



La droite AB a pour équation

$$y = 1-x\,.$$

Lorsque x est compris entre 0 et 1, le nombre y varie de 0 à $1-x$. Donc

$$I_y(x) = \int_0^{1-x} \ln(x+y+1)\,dy\,.$$

En posant $u = x+y+1$, on obtient

$$I_y(x) = \int_{x+1}^{2} \ln u\,du = \Big[u\ln u - u\Big]_{u=x+1}^{u=2} = 2\ln 2 - 2 - (x+1)\ln(x+1) + (x+1)\,.$$

On a alors

$$I = \int_0^1 I_y(x)\,dx = \int_0^1 [2\ln 2 - 2 - (x+1)\ln(x+1) + (x+1)]\,dx\,.$$

En posant $v = x+1$, et en intégrant par parties on obtient

$$I = 2\ln 2 - 2 - \int_1^2 (v\ln v - v)\,dv = 2\ln 2 - 2 - \left[\frac{v^2}{2}\ln v\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{3}{2}v\,dv\,,$$

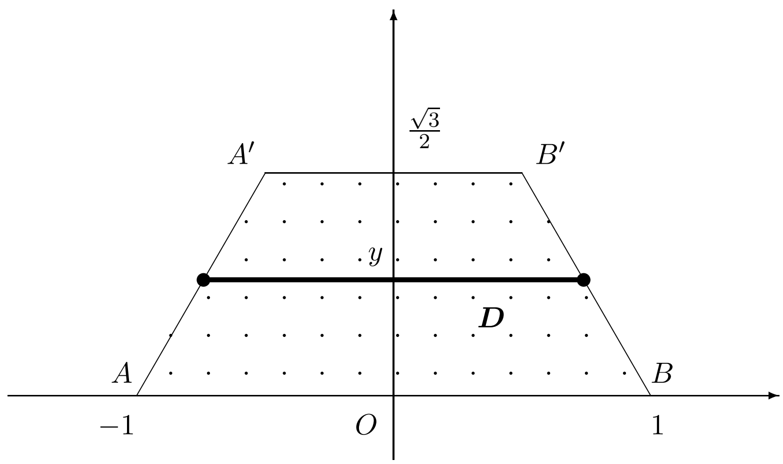
d'où

$$I = 2\ln 2 - 2 - \left[\frac{v^2}{2}\ln v - \frac{3}{4}v^2\right]_1^2 = \frac{1}{4}\,.$$

10) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est le trapèze dont la base est le segment de l'axe des x dont les abscisses sont comprises entre -1 et 1 et dont les trois autres côtés sont situés dans le demi-plan des y positifs et de longueur 1, et

$$f(x,y) = y\,.$$



Si l'on note $A(-1,0)$, $B(1,0)$ et A' et B' les autres sommets du trapèze, on a $AA' = A'B' = BB' = 1$. Les triangles OBB', $OB'A'$ et OAA' sont équilatéraux. Alors la droite passant par A' et B' a pour équation

$$y = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

la droite passant par B et B' a pour équation

$$y = -\tan\frac{\pi}{3}\,(x-1) = -\sqrt{3}\,(x-1)\,,$$

et celle passant par A et A' a pour équation

$$y = \sqrt{3}\,(x+1)\,.$$

Lorsque y est fixé entre 0 et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, la variable x est comprise entre $-1+\dfrac{y}{\sqrt{3}}$ et $1-\dfrac{y}{\sqrt{3}}$, et l'on a

$$I_x(y) = y\int\limits_{-1+y/\sqrt{3}}^{1-y/\sqrt{3}} dx = 2y\left(1-\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\,.$$

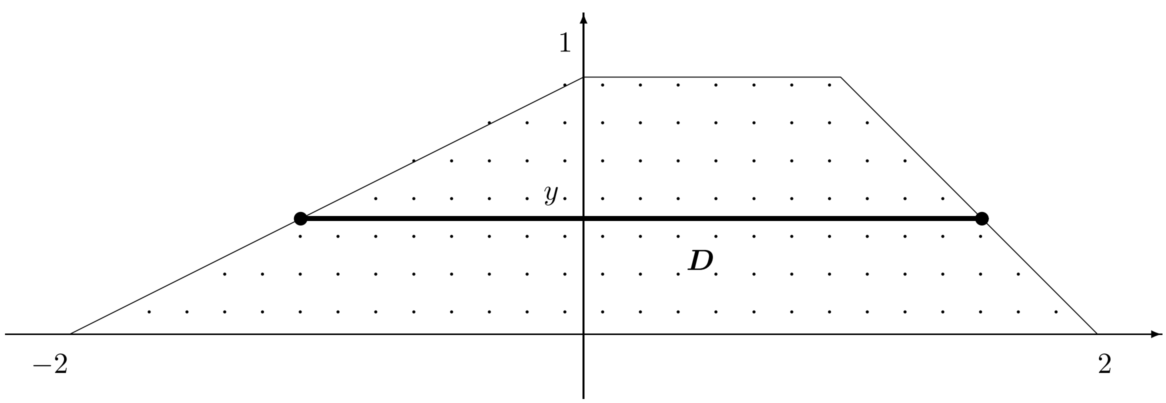
Alors

$$I = \int\limits_0^{\sqrt{3}/2} I_x(y)\,dy = \int\limits_0^{\sqrt{3}/2} 2y\left(1-\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\,dy = \left[y^2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}\,y^3\right]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2}\,.$$

11) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est le trapèze limité par les droites d'équation $y=0$, $y=1$, $y=2-x$ et $y=1+\dfrac{x}{2}$, et

$$f(x,y) = xy\,.$$



Lorsque y est compris entre 0 et 1, le nombre x varie de $2y-2$ à $2-y$. Donc

$$I_x(y) = \int_{2y-2}^{2-y} xy\,dx = \left[y\,\frac{x^2}{2}\right]_{x=2y-2}^{x=2-y} = \frac{y}{2}\left[(2-y)^2-(2y-2)^2\right] = \frac{y}{2}\,(4y-3y^2)\,.$$

On a alors

$$I = \int_0^1 I_x(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (4y^2-3y^3)\,dy = \left[\frac{2y^3}{3}-\frac{3y^4}{8}\right]_0^1 = \frac{2}{3}-\frac{3}{8} = \frac{7}{24}\,.$$

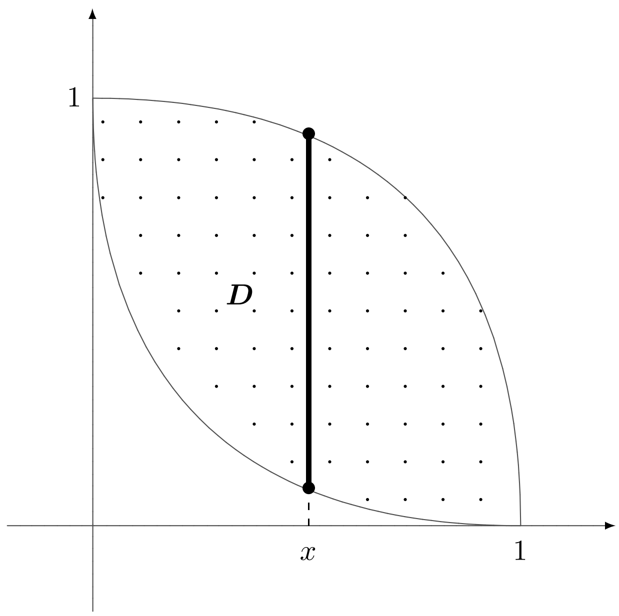
12) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est l'ensemble des points du plan qui vérifient les inégalités

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1 \quad \text{et} \quad \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geq 1\,,$$

et

$$f(x,y) = (x-y)^2\,.$$



Si (x,y) appartient à D, on a nécessairement $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$. Alors la condition

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1\,,$$

équivaut à

$$\sqrt{y} \geq 1 - \sqrt{x}\,,$$

puis à

$$y \geq (1-\sqrt{x})^2 = 1 + x - 2\sqrt{x}\,.$$

De même, la condition

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geq 1\,,$$

équivaut à

$$\sqrt{1-y} \geq 1 - \sqrt{1-x}\,,$$

puis à

$$1 - y \geq (1-\sqrt{1-x})^2\,,$$

et enfin à

$$y \leq 1 - (1 - \sqrt{1-x})^2 = x - 1 + 2\sqrt{1-x}\,.$$

Pour x compris entre 0 et 1, on calcule

$$\begin{aligned}
I_y(x) &= \int\limits_{1+x-2\sqrt{x}}^{x-1+2\sqrt{1-x}} (y-x)^2\,dy \\
&= \left[\frac{(y-x)^3}{3}\right]_{y=1+x-2\sqrt{x}}^{y=x-1+2\sqrt{1-x}} \\
&= \frac{1}{3}\left[(2\sqrt{1-x}-1)^3 - (1-2\sqrt{x})^3\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[8(x^{3/2} + (1-x)^{3/2}) + 6(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) - 14\right].
\end{aligned}$$

Alors

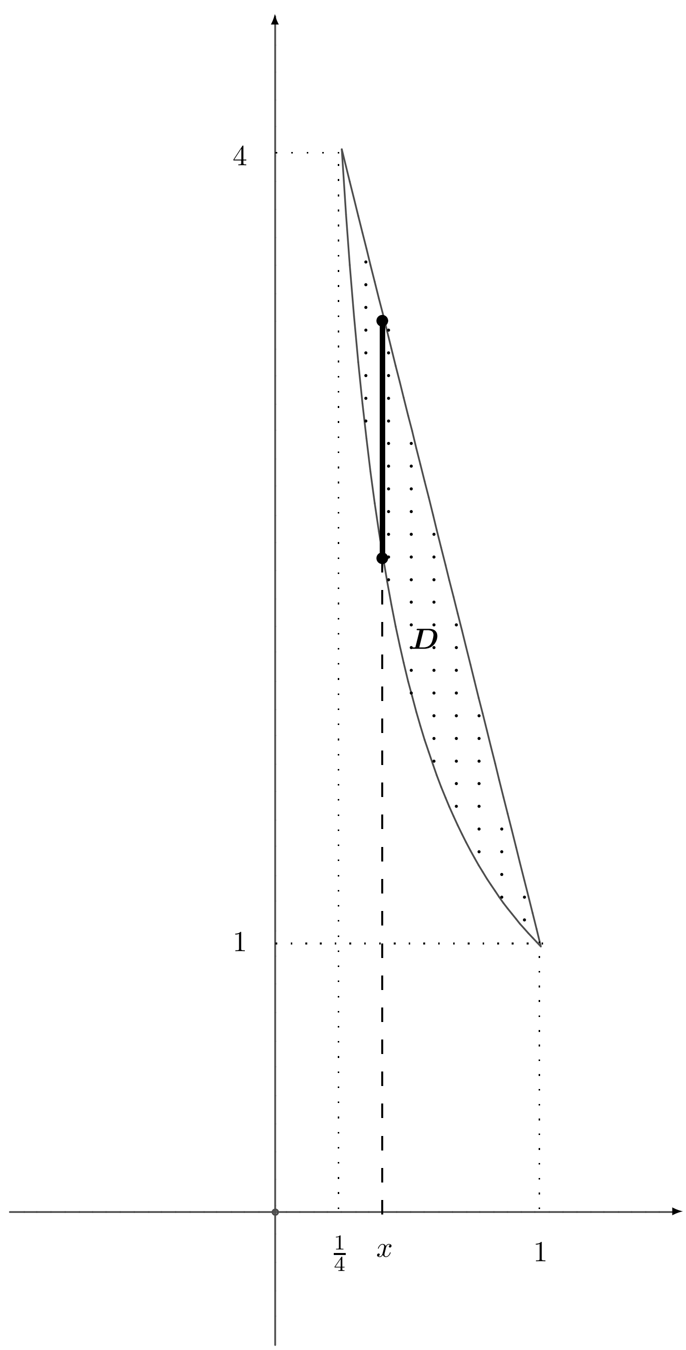
$$\begin{aligned}
I &= \int\limits_0^1 I_y(x)\,dx \\
&= \int\limits_0^1 \frac{1}{3}\left[8(x^{3/2} + (1-x)^{3/2}) + 6(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) - 14\right] dx \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{16}{5}(x^{5/2} - (1-x)^{5/2}) + 4(x^{3/2} - (1-x)^{3/2}) - 14x\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{16}{5} + 4 - 14 + \frac{16}{5} + 4\right] \\
&= \frac{2}{15}\,.
\end{aligned}$$

13) Calculer $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est l'ensemble des points du plan limité par les courbes d'équation

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y = -4x+5\,,$$

et

$$f(x,y) = x^2 y\,.$$



Cherchons les points d'intersection des deux courbes. On doit avoir

$$\frac{1}{x} = -4x + 5\,,$$

ce qui équivaut à

$$4x^2 - 5x + 1 = 0\,,$$

et a pour solutions 1 et 1/4. Lorsque x est fixé entre ces deux valeurs, on intègre en y

$$\begin{aligned}
I_y(x) &= \int_{1/x}^{-4x+5} x^2 y\,dy \\
&= \left[\frac{1}{2}\,x^2 y^2\right]_{y=1/x}^{y=-4x+5} \\
&= \frac{1}{2}\,[x^2(-4x+5)^2 - 1] \\
&= \frac{1}{2}\left(16x^4 - 40x^3 + 25x^2 - 1\right)\,.
\end{aligned}$$

Alors

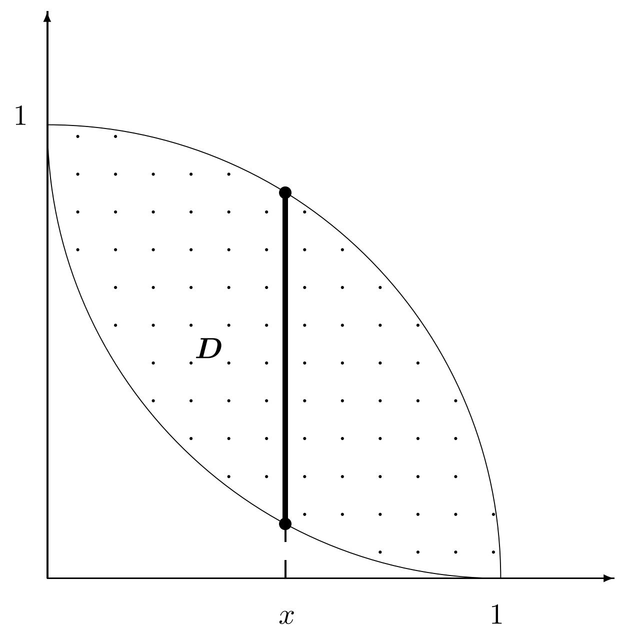
$$I = \int_{1/4}^{1} I_y(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{5}x^5 - 10x^4 + \frac{25}{3}x^3 - x\right]_{1/4}^{1} = \frac{441}{1280}\,.$$

14) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est l'ensemble des points du plan limité par les cercles d'équation

$$x^2+y^2=1 \quad \text{et} \quad (x-1)^2+(y-1)^2=1\,,$$

et

$$f(x,y)=xy\,.$$



Si (x,y) appartient à D, on a nécessairement $0 \le x \le 1$, et $0 \le y \le 1$. Alors La condition

$$x^2+y^2 \le 1\,,$$

équivaut à

$$y \le \sqrt{1-x^2}\,.$$

De même, la condition

$$(x-1)^2+(y-1)^2 \le 1\,,$$

équivaut à

$$|y-1| \le \sqrt{1-(x-1)^2}\,,$$

et, comme $y-1$ est négatif, à

$$1-y \le \sqrt{1-(x-1)^2}\,,$$

et enfin à

$$y \ge 1-\sqrt{1-(x-1)^2}\,.$$

Pour x compris entre 0 et 1, on calcule

$$
\begin{aligned}
I_y(x) &= \int\limits_{1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy \\
&= x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{x}{2}\left[(1-x^2)-[1-2\sqrt{1-(x-1)^2}+(1-(1-x)^2)]\right] \\
&= -x^2+x\sqrt{1-(x-1)^2}\,.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
I=\int\limits_0^1 I_y(x)\,dx=\int\limits_0^1 (x\sqrt{1-(x-1)^2}-x^2)\,dx=\int\limits_0^1 x\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx-\frac{1}{3}\,.
$$

On calcule l'intégrale restante en posant

$$
x=1-\sin t \quad \text{d'où} \quad dx=-\cos t\,dt\,.
$$

La variable x décrit $[\,0,\,1\,]$ lorsque la variable t décrit $[\,0,\,\pi/2\,]$. On en déduit

$$
I+\frac{1}{3}=\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin t)\cos^2 t\,dt=\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt-\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\,\cos^2 t\,dt=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt-\int\limits_0^{\pi/2}\sin t\,\cos^2 t\,dt\,.
$$

On obtient alors

$$
I=\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2}-\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\,.
$$

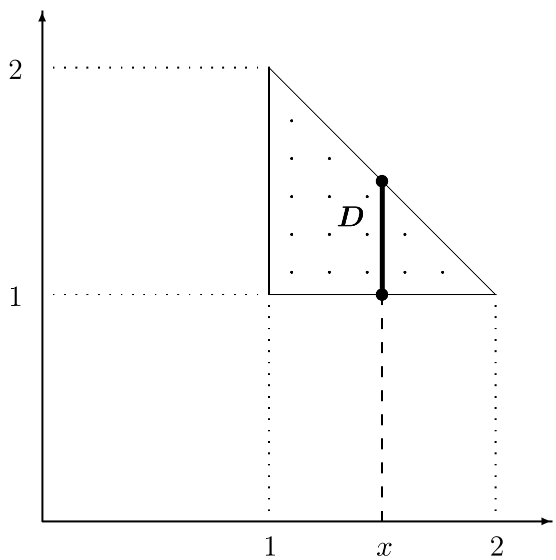
15) Calculer $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = \{(x,y)\,|\,x \geq 1\,,\ y \geq 1\,,\ x+y \leq 3\}\,,$$

et

$$f(x,y) = (x+y)^{-n} \quad (n \in \mathbb{Z})\,.$$



Lorsque x est compris entre 1 et 2, le nombre y varie de 1 à $3-x$. Donc

$$I_y(x) = \int_1^{3-x} (x+y)^{-n}\,dy\,.$$

Lorsque $n = 1$, on obtient

$$I_y(x) = \Big[\ln(x+y)\Big]_{y=1}^{y=3-x} = \ln 3 - \ln(x+1)\,.$$

puis

$$I = \int_1^2 I_y(x)\,dx = \ln 3 - \Big[(x+1)\ln(x+1) - x\Big]_1^2 = 2\ln 2 - 2\ln 3 + 1\,.$$

Lorsque $n \neq 1$, on obtient cette fois

$$I_y(x) = \left[\frac{(x+y)^{-n+1}}{1-n}\right]_{y=1}^{y=3-x} = \frac{1}{1-n}\left(3^{-n+1} - (x+1)^{-n+1}\right)\,.$$

On a alors

$$I = \int_1^2 I_y(x)\,dx = \frac{1}{1-n}\int_1^2 \left(3^{-n+1} - (x+1)^{-n+1}\right) dx = \frac{1}{1-n}\left(3^{-n+1} - \int_1^2 (x+1)^{-n+1}\,dx\right).$$

Lorsque $n = 2$, on trouve

$$I = -\left(\frac{1}{3} - \int_1^2 \frac{dx}{x+1}\right) = -\frac{1}{3} + \Big[\ln(x+1)\Big]_1^2 = \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{3}.$$

Lorsque $n \neq 1$ et $n \neq 2$, on trouve

$$I = \frac{1}{1-n}\left(3^{-n+1} - \left[\frac{(x+1)^{-n+2}}{2-n}\right]_1^2\right) = \frac{3^{-n+1}}{1-n} - \frac{3^{-n+2}}{(1-n)(2-n)} + \frac{2^{-n+2}}{(1-n)(2-n)}.$$

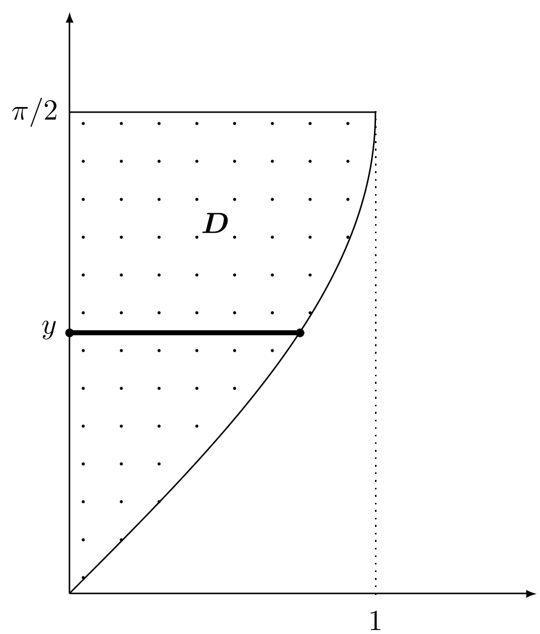
16) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = \left\{(x,y)\,|\,0 \le x \le \sin y\,,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}\,,$$

et

$$f(x,y) = x\cos y\,.$$



Lorsque y est compris entre 0 et $\pi/2$, le nombre x varie de 0 à $\sin y$. Donc

$$I_x(y) = \int_0^{\sin y} x\cos y\,dx = \left[\cos y\,\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\sin y} = \frac{\cos y\sin^2 y}{2}\,.$$

On a alors

$$I = \int_0^{\pi/2} I_x(y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos y\sin^2 y\,dy = \frac{1}{2}\,\left[\frac{\sin^3 y}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}\,.$$

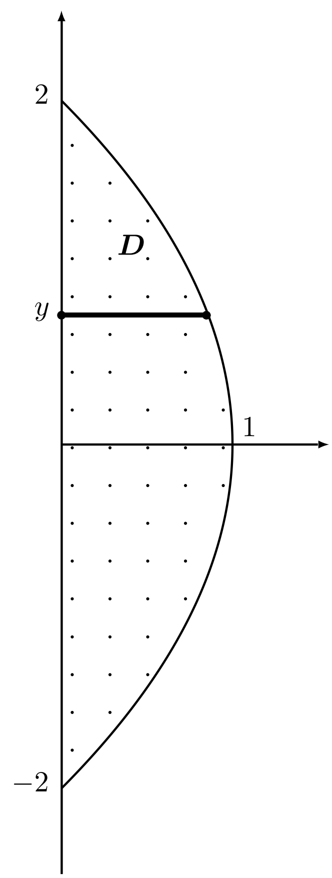
17) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = \left\{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1 - \frac{y^2}{4}\right\}\,,$$

et

$$f(x,y) = x^2 + y^2\,.$$



Lorsque y est compris entre -2 et 2, le nombre x varie de 0 à $1 - \dfrac{y^2}{4}$. Donc

$$I_x(y) = \int\limits_0^{1-y^2/4} (x^2+y^2)\,dx = \left[y^2x+\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1-y^2/4} = y^2\left(1-\frac{y^2}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{y^2}{4}\right)^3 = \frac{1}{3}+\frac{3y^2}{4}-\frac{3y^4}{16}-\frac{y^6}{192}\,.$$

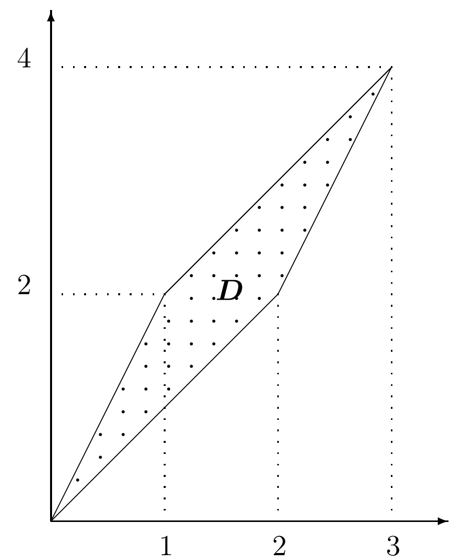
On a alors

$$I = \int\limits_{-2}^{2} I_x(y)\,dy = \int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{3y^2}{4}-\frac{3y^4}{16}-\frac{y^6}{192}\right)dy = \left[\frac{y}{3}+\frac{y^3}{4}-\frac{3y^5}{80}-\frac{y^7}{1344}\right]_{-2}^{2} = \frac{96}{35}\,.$$

18) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

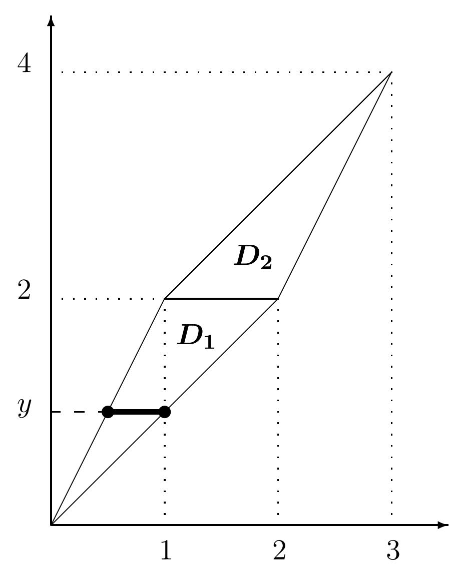
où D est le parallélogramme limité par les droites d'équation $y = x$, $y = 2x$, $y = x + 1$, $y = 2x - 2$ et

$$f(x,y) = (2x - y)^2\,.$$



On découpe le domaine en deux parties D_1 et D_2, séparées par la droite d'équation $y = 2$, et on intègre sur chacun de ces domaines en fixant tout d'abord y.

1) Sur D_1, lorsque y est fixé entre 0 et 2, le nombre x varie de $\dfrac{y}{2}$ à y.



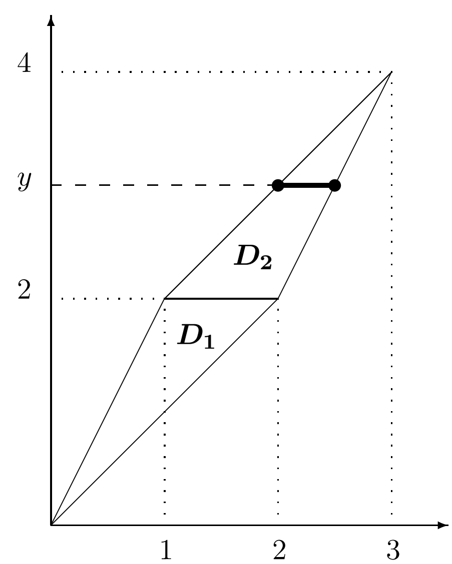
On calcule tout d'abord

$$(I_x)_1(y) = \int_{y/2}^{y} (2x-y)^2\,dx = \left[\frac{(2x-y)^3}{6}\right]_{x=y/2}^{x=y} = \frac{y^3}{6}\,,$$

alors

$$\iint_{D_1} (2x-y)^2\,dx\,dy = \int_0^2 (I_x)_1(y)\,dy = \int_0^2 \frac{y^3}{6}\,dy = \left[\frac{y^4}{24}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\,.$$

2) Sur D_2, lorsque y est fixé entre 2 et 4, le nombre x varie de $y-1$ à $\dfrac{y}{2}+1$.



On calcule tout d'abord

$$(I_x)_2(y) = \int_{y-1}^{y/2+1} (2x-y)^2\,dx = \left[\frac{(2x-y)^3}{6}\right]_{x=y-1}^{x=y/2+1} = \frac{8-(y-2)^3}{6}\,,$$

alors

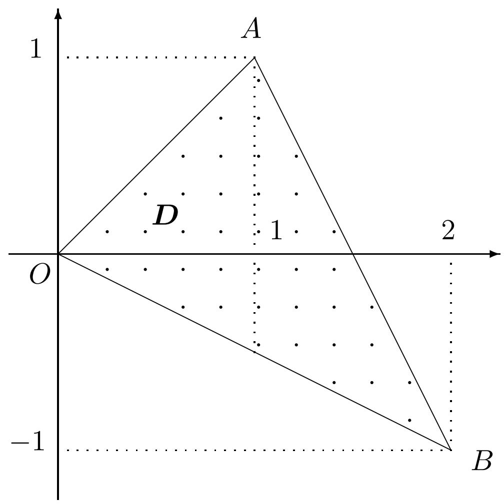
$$\iint_{D_2} (2x-y)^2\,dx\,dy = \int_2^4 (I_x)_2(y)\,dy = \int_2^4 \frac{8-(y-2)^3}{6}\,dy = \left[\frac{1}{6}\left(8y - \frac{(y-2)^4}{4}\right)\right]_2^4 = 2\,.$$

Finalement

$$I = \iint_{D_1} (2x-y)^2\,dx\,dy + \iint_{D_2} (2x-y)^2\,dx\,dy = \frac{8}{3}\,.$$

19) Calculer $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le triangle de sommets O, $A(1,1)$, $B(2,-1)$ et

$$f(x,y) = (x+2y)^2\,.$$

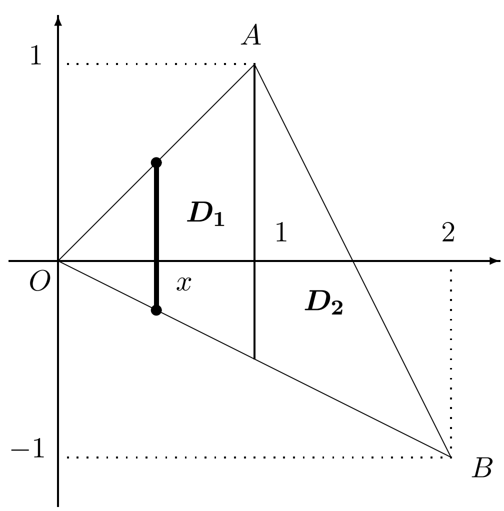


Les droites OA, OB et AB ont pour équations respectives

$$y = x \quad , \quad y = -\frac{x}{2} \quad \text{et} \quad y = -2x+3\,.$$

On sépare D en deux domaines limités par la droite d'équation $x = 1$.

1) Si x est compris entre 0 et 1.

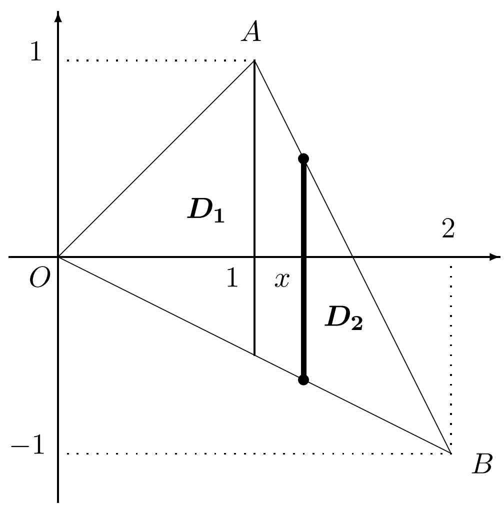


$$(I_y)_1(x) = \int_{-x/2}^{x} (x+2y)^2\,dy = \left[\frac{1}{6}(x+2y)^3\right]_{y=-x/2}^{y=x} = \frac{9x^3}{2}\,,$$

d'où

$$\iint_{D_1} (x+2y)^2\,dx\,dy = \int_0^1 (I_y)_1(x)\,dx = \int_0^1 \frac{9x^3}{2}\,dx = \frac{9}{8}\,.$$

2) Si x est compris entre 1 et 2.



$$(I_y)_2(x) = \int_{-x/2}^{-2x+3} (x+2y)^2\,dy = \left[\frac{1}{6}(x+2y)^3\right]_{y=-x/2}^{y=-2x+3} = \frac{9(2-x)^3}{2}\,.$$

D'où

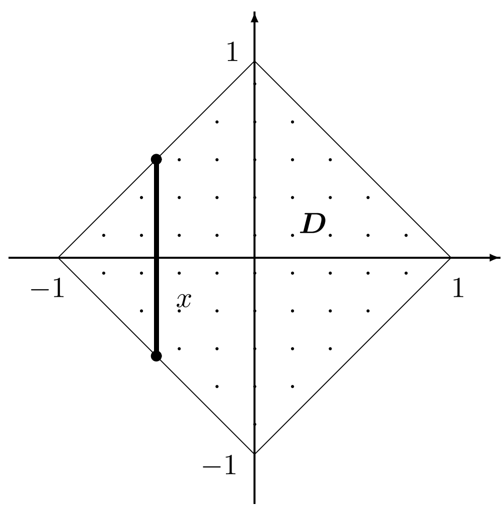
$$\iint_{D_2} (x+2y)^2\,dx\,dy = \int_1^2 (I_y)_2(x)\,dx = \int_1^2 \frac{9(2-x)^3}{2}\,dx = \left[\frac{-9(2-x)^4}{8}\right]_1^2 = \frac{9}{8}\,.$$

Alors

$$I = \iint_{D_1} (x+2y)^2\,dx\,dy + \iint_{D_2} (x+2y)^2\,dx\,dy = \frac{9}{4}\,.$$

20) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où
$$D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \leq 1\}\,.$$
et
$$f(x,y) = e^{x+y}\,.$$



Lorsque x est fixé entre -1 et 1, y varie de $|x|-1$ à $1-|x|$. On a donc

$$I_y(x) = \int\limits_{|x|-1}^{1-|x|} e^{x+y}\,dy = \left[e^{x+y}\right]_{y=|x|-1}^{y=1-|x|} = e^x\left(e^{1-|x|} - e^{|x|-1}\right)\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
I = \int\limits_{-1}^{1} I_y(x)\,dx &= \int\limits_{-1}^{1} e^x\left(e^{1-|x|} - e^{|x|-1}\right)dx \\
&= \int\limits_{-1}^{0} e^x\left(e^{1+x} - e^{-x-1}\right)dx + \int\limits_{0}^{1} e^x\left(e^{1-x} - e^{x-1}\right)dx \\
&= \int\limits_{-1}^{0} \left(e^{1+2x} - e^{-1}\right)dx + \int\limits_{0}^{1} \left(e - e^{2x-1}\right)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{2x+1} - xe^{-1}\right]_{-1}^{0} + \left[ex - \frac{1}{2}e^{2x-1}\right]_0^1 \\
&= \frac{e}{2} - \left(\frac{1}{2e} + \frac{1}{e}\right) + \left[\left(e - \frac{e}{2}\right) + \frac{1}{2e}\right] \\
&= e - \frac{1}{e} = 2\,\mathrm{sh}\,1\,.
\end{aligned}$$

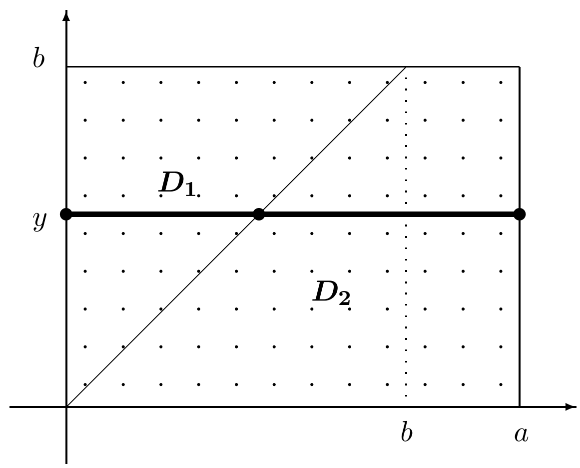
21) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = [\,0,\, a\,] \times [\,0,\, b\,] \quad (a > b)\,,$$

et

$$f(x,y) = |x-y|\,.$$



On sépare D en deux domaines limités par la droite d'équation $y = x$, et on intègre d'abord en x.

Sur D_1, on a

$$f(x,y) = y - x\,,$$

et lorsque y est compris entre 0 et b, on obtient

$$(I_x)_1(y) = \int\limits_0^y (y-x)\,dx = \left[\frac{-(y-x)^2}{2}\right]_{x=0}^{x=y} = \frac{y^2}{2}\,.$$

Puis

$$\iint\limits_{D_1} |x-y|\,dx\,dy = \int\limits_0^b (I_x)_1(y)\,dy = \frac{b^3}{6}\,.$$

Sur D_2, on a

$$f(x,y) = x - y\,,$$

et, lorsque y est compris entre 0 et b, on obtient

$$(I_x)_2(y) = \int\limits_y^a (x-y)\,dx = \left[\frac{(x-y)^2}{2}\right]_{x=y}^{x=a} = \frac{(y-a)^2}{2}\,.$$

Puis

$$\iint\limits_{D_2} |x-y|\,dx\,dy = \int\limits_0^b (I_x)_2(y)\,dy = \left[\frac{(y-a)^3}{6}\right]_0^b = \frac{(b-a)^3}{6} + \frac{a^3}{6}\,.$$

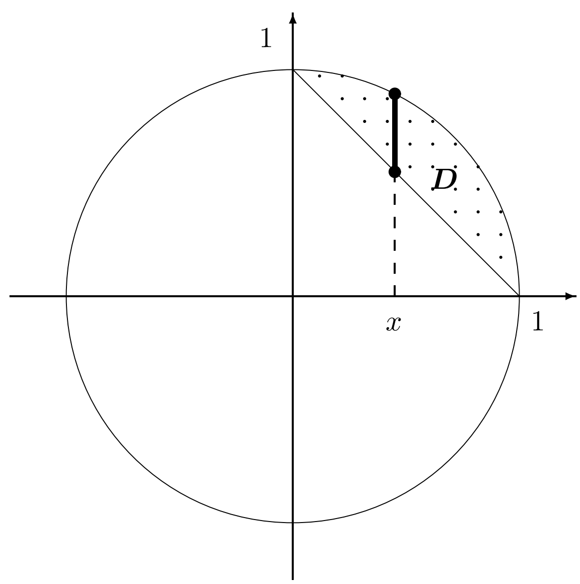
Alors

$$I = \iint\limits_{D_1} |x-y|\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} |x-y|\,dx\,dy = \frac{(b-a)^3}{6} + \frac{a^3}{6} + \frac{b^3}{6} = \frac{b^3}{3} + \frac{1}{2}ab(a-b)\,.$$

22) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est l'ensemble des points du disque de centre O et de rayon 1, tels que $x+y \geq 1$ et

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,.$$



La partie supérieure du cercle a pour équation $y=\sqrt{1-x^2}$. Pour x compris entre 0 et 1, le nombre y est compris entre $1-x$ et $\sqrt{1-x^2}$. On calcule

$$I_y(x) = \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \left[\frac{-x}{2(x^2+y^2)}\right]_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{2(2x^2-2x+1)} - \frac{x}{2}\,.$$

On a alors

$$I = \int\limits_0^1 I_y(x)\,dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{x}{2(2x^2-2x+1)} - \frac{x}{2}\right)dx\,.$$

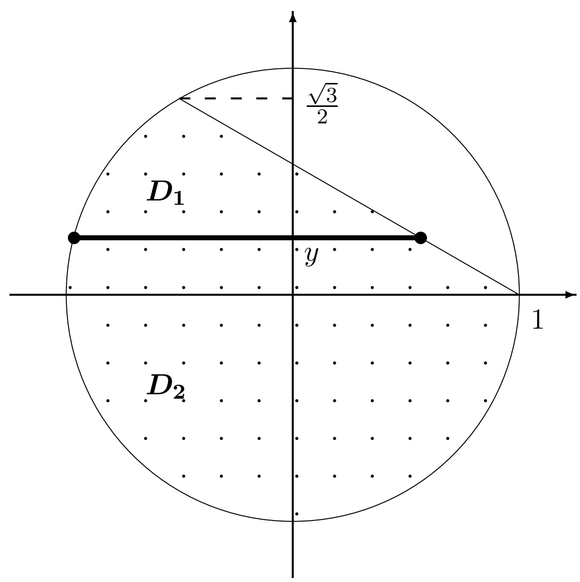
En faisant apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{8}\,\frac{4x-2}{2x^2-2x+1} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{2x^2-2x+1} - \frac{x}{2}\right)dx \\ &= \left[\frac{1}{8}\ln(2x^2-2x+1) + \frac{1}{4}\arctan(2x-1) - \frac{x^2}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\left(\arctan 1 - \arctan(-1)\right) - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

23) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est l'ensemble des points du disque de centre O et de rayon 1 tels que $x+\sqrt{3}\,y \leq 1$ et

$$f(x,y) = xy\,.$$



On sépare D en deux domaines limités par l'axe des x. Sur la partie inférieure qui est symétrique par rapport à Oy, on a

$$f(-x,y) = -f(x,y)\,,$$

donc

$$\iint\limits_{D_2} xy\,dx\,dy = 0\,,$$

et

$$I = \iint\limits_{D_1} xy\,dx\,dy\,.$$

Cherchons les points d'intersection de la droite et du cercle. Le système

$$\left\{\begin{array}{c} x+\sqrt{3}\,y = 1 \\ x^2+y^2 = 1 \end{array}\right.$$

équivaut à

$$\left\{\begin{array}{c} x+\sqrt{3}\,y = 1 \\ (1-\sqrt{3}\,y)^2+y^2 = 1 \end{array}\right.$$

La seconde équation s'écrit

$$4y^2 - 2\sqrt{3}\,y = 0\,,$$

et a pour solutions $y = 0$ et $y = \sqrt{3}/2$. La droite d'équation $x + \sqrt{3}\,y = 1$, coupe le cercle aux points de coordonnées $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ et $(1, 0)$ L'équation de la partie gauche du cercle est

$$x = -\sqrt{1 - y^2}\,.$$

Lorsque y est compris entre 0 et $\sqrt{3}/2$, on a donc

$$I_x(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-\sqrt{3}\,y} xy\,dx = \left[\frac{x^2 y}{2}\right]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=1-\sqrt{3}\,y} = \frac{y}{2}\left[(1-\sqrt{3}\,y)^2 - (1-y^2)\right] = 2y^3 - \sqrt{3}\,y^2\,.$$

Donc

$$I = \int_0^{\sqrt{3}/2} I_x(y)\,dy = \int_0^{\sqrt{3}/2} (2y^3 - \sqrt{3}\,y^2)\,dy = \left[\frac{y^4}{2} - \frac{\sqrt{3}\,y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{9}{32} - \frac{3}{8} = -\frac{3}{32}\,.$$

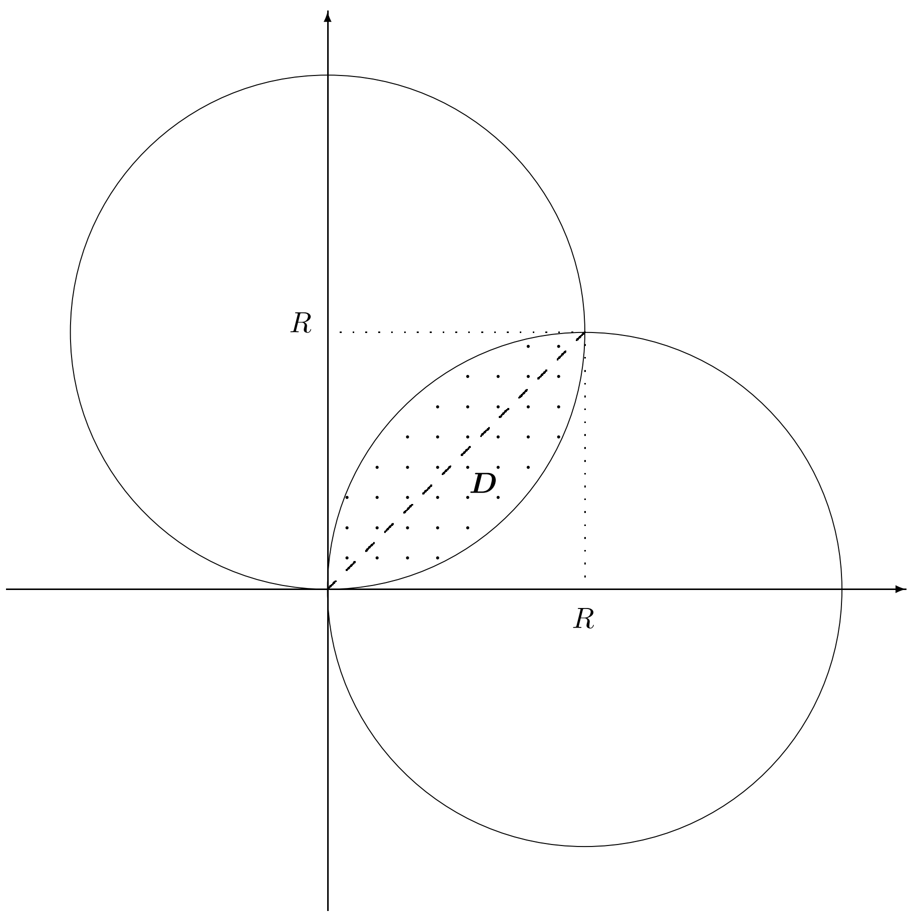
24) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est l'intersection des disques limités par les cercles d'équations réespectives

$$x^2 + y^2 - 2Rx = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 2Ry = 0\,,$$

et

$$f(x,y) = x^2 - y^2\,.$$



Le domaine D est symétrique par rapport à la première bissectrice. Sur D, on a

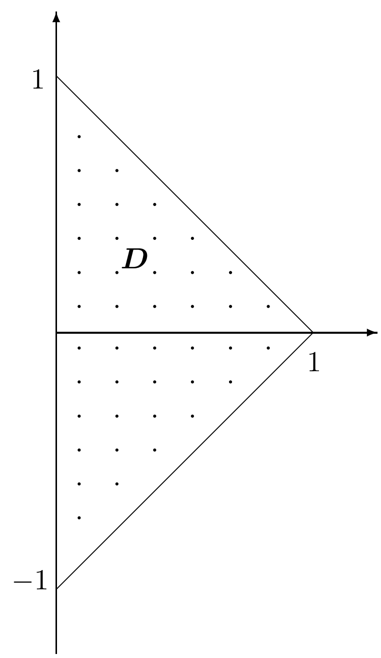
$$f(y,x) = -f(x,y)\,.$$

Alors nécessairement $I = 0$.

25) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est le triangle de sommets $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(0,-1)$ et

$$f(x,y) = x^6 y^5 \,.$$



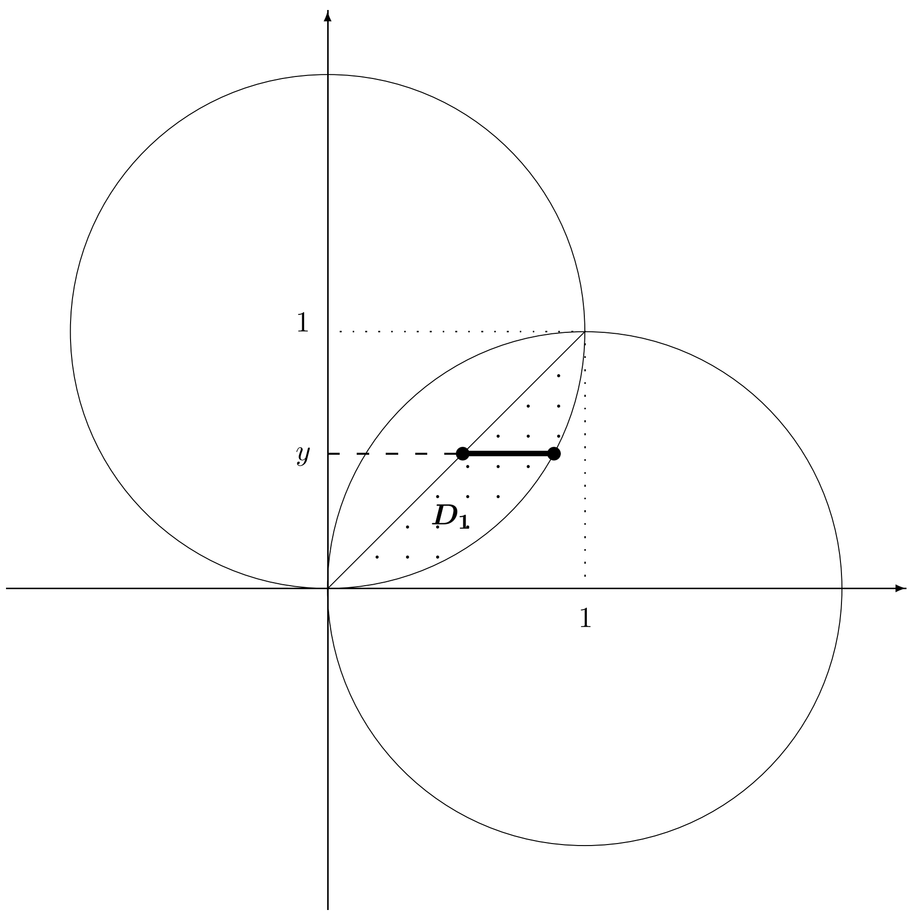
Le domaine D est symétrique par rapport à l'axe Ox. Sur D, on a

$$f(x,-y) = -f(x,y)\,.$$

Alors nécessairement $I = 0$.

26) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est l'intersection des disques de centre $(0,1)$ et $(1,0)$ et de rayon 1, et

$$f(x,y) = xy\,.$$



Le domaine D est symétrique par rapport à la première bissectrice. Sur D, on a

$$f(y,x) = f(x,y)\,.$$

On a donc

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

où D_1 est la partie du domaine D située sous la première bissectrice.

L'équation du cercle de centre $(0,1)$ est

$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

ou encore

$$x^2 + y^2 - 2y = 0\,.$$

La partie inférieure du cercle a donc pour équation

$$x = \sqrt{2y - y^2}\,.$$

Lorsque y est fixé entre 0 et 1, le nombre x varie de y à $\sqrt{2y - y^2}$ et donc

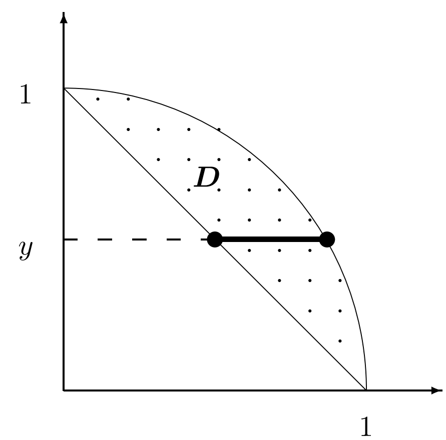
$$(I_x)_1(y) = \int_{y}^{\sqrt{2y-y^2}} xy\,dx = \left[y\,\frac{x^2}{2}\right]_{x=y}^{x=\sqrt{2y-y^2}} = y^2 - y^3\,.$$

Puis

$$I = 2\int_0^1 (I_x)_1(y)\,dy = 2\int_0^1 (y^2 - y^3)\,dy = 2\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}\,.$$

27) Calculer $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

où
$$D = \{(x,y)\,|\,x+y \geq 1\,,\; x^2+y^2 \leq 1\}\,,$$
et
$$f(x,y) = xy^2\,.$$



Lorsque y est compris entre 0 et 1, le nombre x varie de $1-y$ à $\sqrt{1-y^2}$. Donc

$$I_x(y) = \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2\,dx = y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1-y}^{x=\sqrt{1-y^2}} = \frac{y^2}{2}\left[(1-y^2)-(1-y)^2\right] = y^3-y^4\,.$$

On a alors

$$I = \int_0^1 I_x(y)\,dy = \int_0^1 (y^3-y^4)\,dy = \left[\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{1}{5} = \frac{1}{20}\,.$$

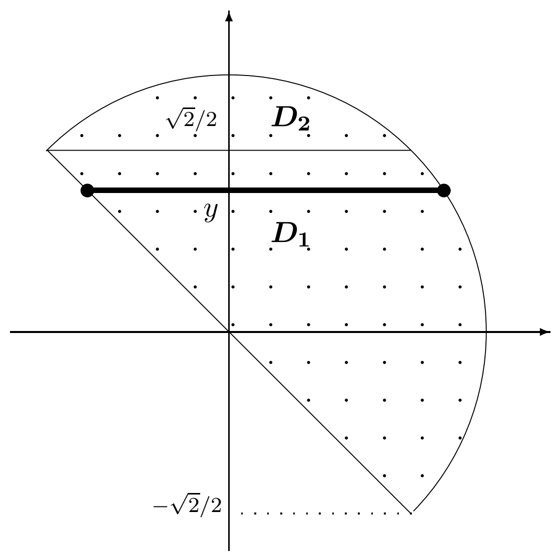
28) Calculer $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = \{(x,y)\,|\,x+y \geq 0\,,\,x^2+y^2 \leq 1\}\,,$$

et

$$f(x,y) = xy^2\,.$$



Lz cercle de centre O et de trayon 1 coupe la deuxième bissectrice aux points $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ et $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. On sépare le domaine en deux parties par le droite d'équation

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

La partie supérieure D_2 est symétrique par rapport à l'axe Oy et, sur D_2,

$$f(-x,y) = -f(x,y)\,.$$

Il en résulte que

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = 0\,.$$

L'intégrale I n'est autre que l'intégrale sur la partie inférieure D_1.

Pour D_1, lorsque y est compris entre $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, le nombre x varie de $-y$ à $\sqrt{1-y^2}$. Donc

$$(I_x)_1(y) = \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2\,dx = y^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{y^2}{2}\left[(1-y^2)-y^2\right] = \frac{y^2}{2} - y^4\,.$$

On a alors

$$I = I_1 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (I_x)_1(y)\, dy\,,$$

et, en raison de la parité,

$$I = 2 \int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{y^2}{2} - y^4\right) dy = 2\left[\frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{30}\,.$$

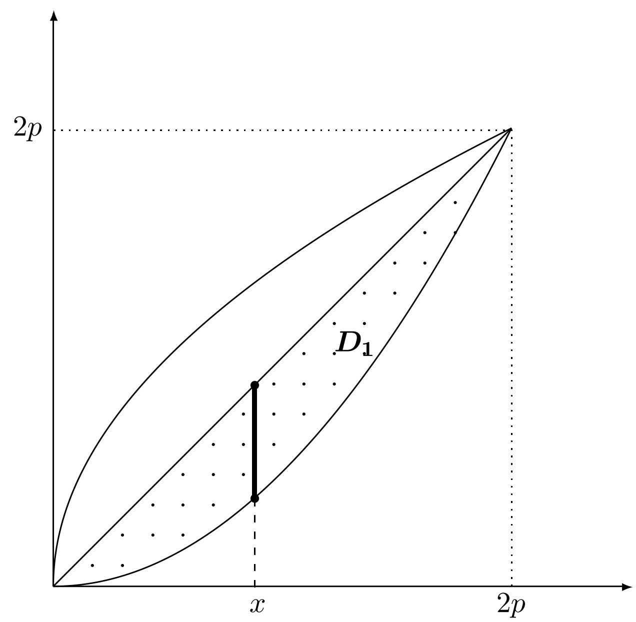
29) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est le domaine lmité par les paraboles d'équation

$$y^2 = 2px \quad \text{et} \quad x^2 = 2py\,,$$

et

$$f(x,y) = x^2 + y^2\,.$$



Le domaine D est symétrique par rapport à la première bissectrice. Sur D, on a

$$f(y,x) = f(x,y)\,.$$

On a donc

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

où D_1 est la partie du domaine D située sous la première bissectrice.
Lorsque x est fixé entre 0 et $2p$, alors y varie de $\dfrac{x^2}{2p}$ à x et donc

$$(I_y)_1(x) = \int\limits_{x^2/2p}^{x} (x^2+y^2)\,dy = \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2/2p}^{y=x} = x^3 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2p} - \frac{x^6}{24p^3}\,.$$

Puis

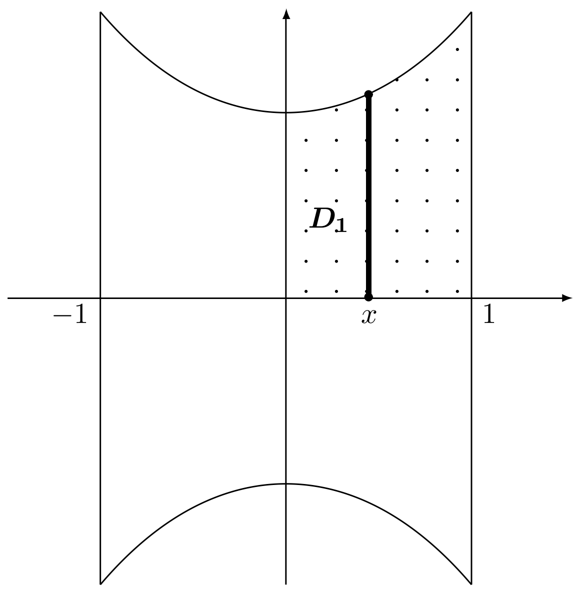
$$I = 2 \int_0^{2p} (I_y)_1(x)\,dx = 2 \int_0^{2p} \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{2p} - \frac{x^6}{24p^3} \right) dx\,,$$

et finalement

$$I = 2 \left[\frac{x^4}{3} - \frac{x^5}{10p} - \frac{x^7}{168p^3} \right]_0^{2p} = 2 \left(\frac{16p^4}{3} - \frac{16p^4}{5} - \frac{16p^4}{21} \right) = \frac{96p^4}{35}\,.$$

30) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où
$$D = \{(x,y)\,|\,|y| \le \operatorname{ch} x\,,\ |x| \le 1\}\,,$$
et
$$f(x,y) = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - y^2}\,.$$



Le domaine D est symétrique par rapport aux deux axes et la fonction f est paire en chacune de variables. On a donc
$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = 4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

où D_1 est la partie du domaine D située dans le quart de plan des coordonnées positives, c'est-à-dire
$$D_1 = \{(x,y)\,|\,0 \le y \le \operatorname{ch} x\,,\ 0 \le x \le 1\}\,.$$

Lorsque x est fixé entre 0 et 1, le nombre y varie de 0 à $\operatorname{ch} x$ et donc
$$(I_y)_1(x) = \int_0^{\operatorname{ch} x} \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - y^2}\,dy\,.$$

Pour calculer cette intégrale, cherchons une primitive de $\sqrt{A^2 - y^2}$. En intégrant par parties

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{A^2 - y^2}\, dy &= y\sqrt{A^2 - y^2} + \int \frac{y^2}{\sqrt{A^2 - y^2}}\, dy \\
&= y\sqrt{A^2 - y^2} + \int \frac{y^2 - A^2}{\sqrt{A^2 - y^2}}\, dy + \int \frac{A^2}{\sqrt{A^2 - y^2}}\, dy \\
&= y\sqrt{A^2 - y^2} + \int \frac{A^2}{\sqrt{A^2 - y^2}}\, dy - \int \sqrt{A^2 - y^2}\, dy\,.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\int \sqrt{A^2 - y^2}\, dy = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{A^2 - y^2} + \int \frac{A^2}{\sqrt{A^2 - y^2}}\, dy\right) = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{A^2 - y^2} + A^2 \arcsin \frac{y}{A}\right)\,.$$

Alors

$$(I_y)_1(x) = \frac{1}{2}\left[y\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - y^2} + \operatorname{ch}^2 x \arcsin \frac{y}{\operatorname{ch} x}\right]_{y=0}^{y=\operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x}{2} \arcsin 1 = \frac{\pi}{4} \operatorname{ch}^2 x\,.$$

et finalement

$$I = \pi \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\, dx = \pi \int_0^1 \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}\, dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\operatorname{sh} 2x}{2} + x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\,(2 + \operatorname{sh} 2)\,.$$

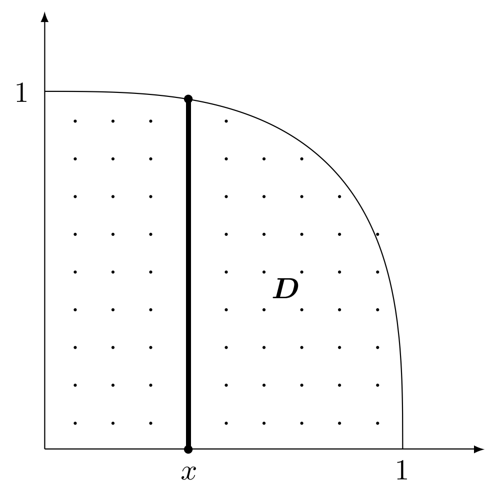
31) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = \{(x,y)\,|\,x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x^3 + y^3 \leq 1\}\,,$$

et

$$f(x,y) = x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,.$$



Lorsque x est fixé entre 0 et 1, le nombre y varie de 0 à $(1-x^3)^{1/3}$ et donc

$$I_y(x) = \int\limits_0^{(1-x^3)^{1/3}} x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dy = x^2\,\left[-\frac{2}{9}\,(1-x^3-y^3)^{3/2}\right]_{y=0}^{y=(1-x^3)^{1/3}} = \frac{2}{9}\,x^2(1-x^3)^{3/2}\,.$$

Puis

$$I = \int\limits_0^1 I_y(x)\,dx = \frac{2}{9}\int\limits_0^1 x^2(1-x^3)^{3/2}\,dx = -\frac{4}{135}\,\left[(1-x^3)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{135}\,.$$

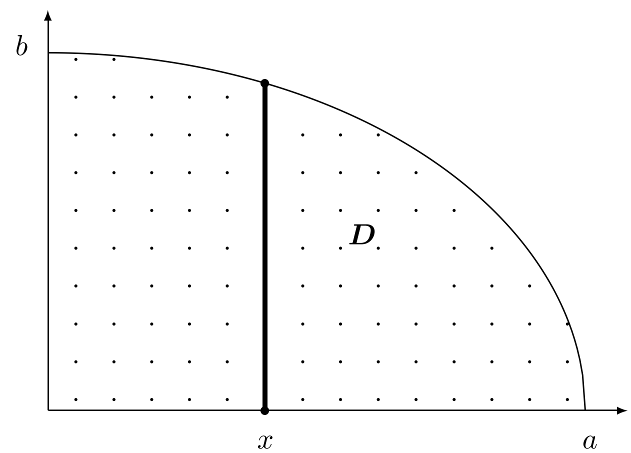
32) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = \left\{(x,y)\,|\,x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\} \quad (a > 0, b > 0)\,,$$

et

$$f(x,y) = xy\,.$$



Lorsque x est fixé entre 0 et a, le nombre y varie de 0 à $b(1 - x^2/a^2)^{1/2}$ et donc

$$I_y(x) = \int_0^{b(1-x^2/a^2)^{1/2}} xy\,dy = x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=b(1-x^2/a^2)^{1/2}} = \frac{b^2}{2}\,x\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\,.$$

Puis

$$I = \int_0^a I_y(x)\,dx = \frac{b^2}{2a^2}\int_0^a (xa^2 - x^3)\,dx = \frac{b^2}{2a^2}\left[\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a = \frac{b^2}{2a^2}\left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right) = \frac{a^2b^2}{8}\,.$$

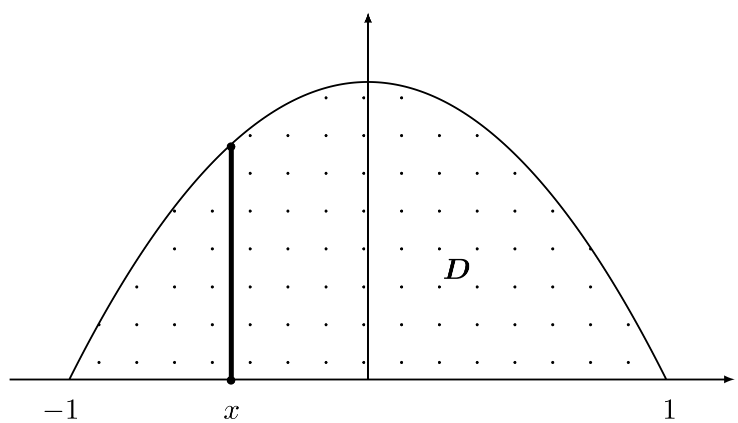
33) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = \{(x,y) \,|\, |x| \leq 1 \,,\, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}\,,$$

et

$$f(x,y) = x^2 y\,.$$



Lorsque x est fixé entre -1 et 1, le nombre y varie de 0 à $1 - x^2$ et donc

$$I_y(x) = \int_0^{1-x^2} x^2 y\,dy = x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x^2} = \frac{1}{2}\,x^2\,(1-x^2)^2\,.$$

Puis

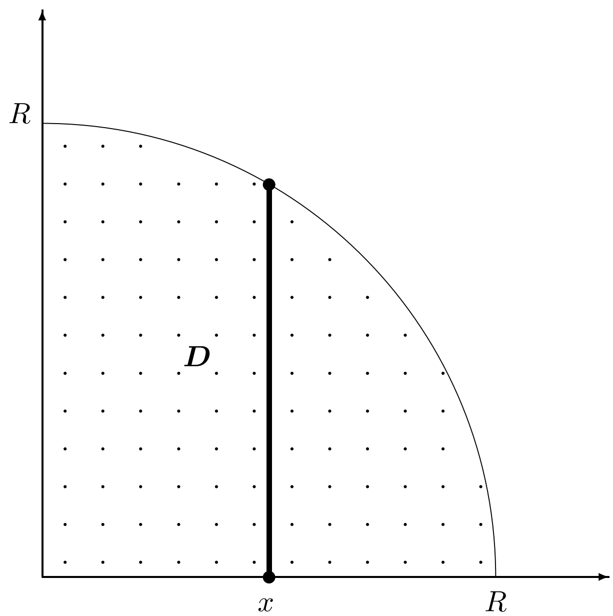
$$I = \int_{-1}^{1} I_y(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^6 - 2x^4 + x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^7}{7} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{105}\,.$$

34) Déterminer les coordonnées du centre de gravité G du quart de cercle

$$D = \{(x,y)\,|\,x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x^2+y^2 \leq R^2\} \quad (R>0)\,.$$

Par symétrie du problème, on a nécessairement $x_G = y_G$.

On calcule $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ avec $f(x,y) = y$.



Lorsque x est fixé entre 0 et R, alors y varie de 0 à $(R^2-x^2)^{1/2}$ et donc

$$I_y(x) = \int_0^{(R^2-x^2)^{1/2}} y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=(R^2-x^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}\,(R^2-x^2)\,.$$

Puis

$$I = \int_0^R I_y(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^R (R^2-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^R = \frac{1}{2}\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{R^3}{3}\,.$$

L'aire du quart de cercle valant

$$\mathscr{A} = \frac{\pi R^2}{4}\,,$$

on a donc

$$x_G = y_G = \frac{I}{\mathscr{A}} = \frac{4R}{3\pi}\,.$$

35) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le cercle de centre $(-1,0)$ et de rayon 1, et

$$f(x,y) = x\,.$$

On peut obtenir directement cette intégral en remarquant que

$$I = \mathscr{A}\,x_G$$

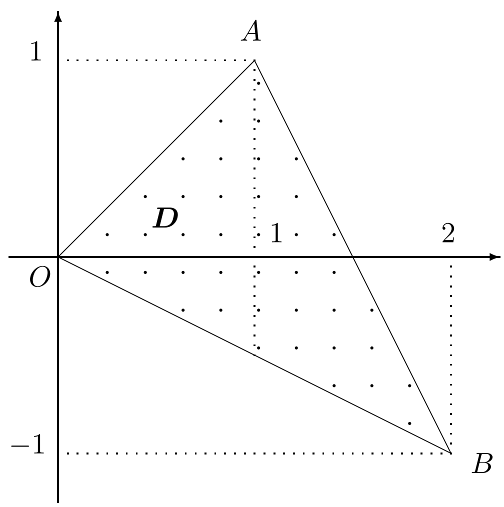
où G est le centre de gravité du cercle, donc son centre, et $\mathscr{A}$ est l'aire du cercle. On obtient donc

$$I = -\pi\,.$$

36) Calculer $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est le triangle de sommets O, $A(1,1)$, $B(2,-1)$ privé de l'origine et

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y}}\,.$$

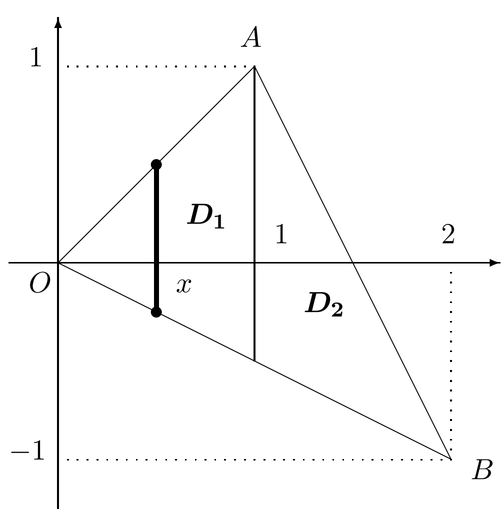


La fonction f est positive sur D. Les droites OA, OB et AB ont pour équations respectives

$$y = x \quad , \quad y = -\frac{x}{2} \quad \text{et} \quad y = -2x + 3\,.$$

On sépare D en deux domaines limités par la droite d'équation $x = 1$.

1) Si x est compris entre 0 et 1.

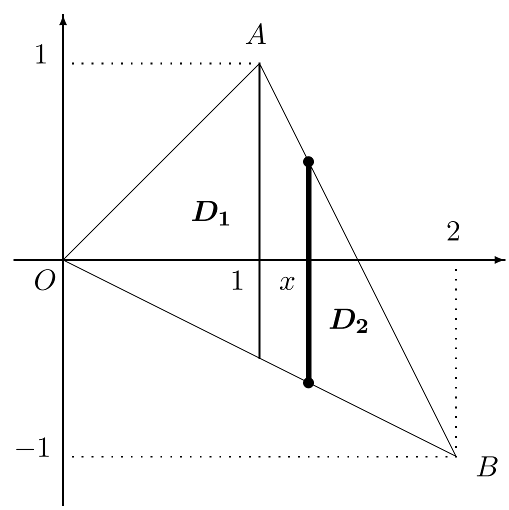


$$(I_y)_1(x) = \int\limits_{-x/2}^{x} \frac{dy}{\sqrt{x+y}} = \Big[2\sqrt{x+y}\Big]_{y=-x/2}^{y=x} = 2\left(\sqrt{2x} - \sqrt{\frac{x}{2}}\right) = \sqrt{2x}\,,$$

d'où

$$\iint\limits_{D_1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x+y}} = \int\limits_0^1 (I_y)_1(x)\,dx = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,dx = \sqrt{2}\left[\frac{2}{3}\,x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,.$$

2) Si x est compris entre 1 et 2.



$$(I_y)_2(x) = \int\limits_{-x/2}^{-2x+3} \frac{dy}{\sqrt{x+y}} = \Big[2\sqrt{x+y}\Big]_{y=-x/2}^{y=-2x+3} = 2\left(\sqrt{3-x} - \sqrt{\frac{x}{2}}\right)\,.$$

D'où

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_2} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x+y}} = \int\limits_1^2 (I_y)_2(x)\,dx \quad &= \quad 2\int\limits_1^2 \sqrt{3-x}\,dx - \sqrt{2}\int\limits_1^2 \sqrt{x}\,dx \\ &= \quad \left[-\frac{4}{3}\,(3-x)^{3/2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\,x^{3/2}\right]_1^2 \\ &= \quad \frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{8}{3} = -4 + \frac{10\sqrt{2}}{3}\,.\end{aligned}$$

Alors

$$I = \iint\limits_{D_1} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x+y}} + \iint\limits_{D_2} \frac{dx\,dy}{\sqrt{x+y}} = 4(\sqrt{2}-1)\,.$$

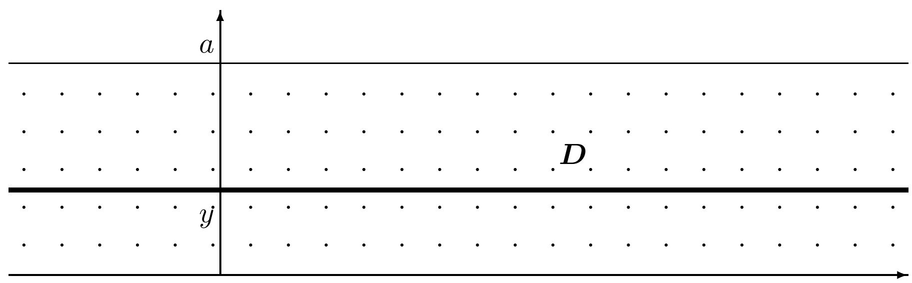
37) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = \{(x,y) \,|\, 0 \le y \le a\}\,,$$

et

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y}}{x^2y^2+1}\,.$$



On intègre une fonction continue positive sur une domaine non borné. On peut donc appliquer le théorème de Fubini.

Lorsque y est fixé entre 0 et a, le nombre x varie de $-\infty$ à $+\infty$ et donc

$$I_x(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{y}}{x^2y^2+1}\,dx = \sqrt{y}\,\left[\frac{1}{y}\,\arctan(xy)\right]_{x=-\infty}^{x=\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{y}}\,.$$

Puis

$$I = \int\limits_0^a I_x(y)\,dy = \pi\,\int\limits_0^a \frac{dy}{\sqrt{y}} = \pi\left[2\sqrt{y}\right]_0^a = 2\pi\sqrt{a}\,.$$

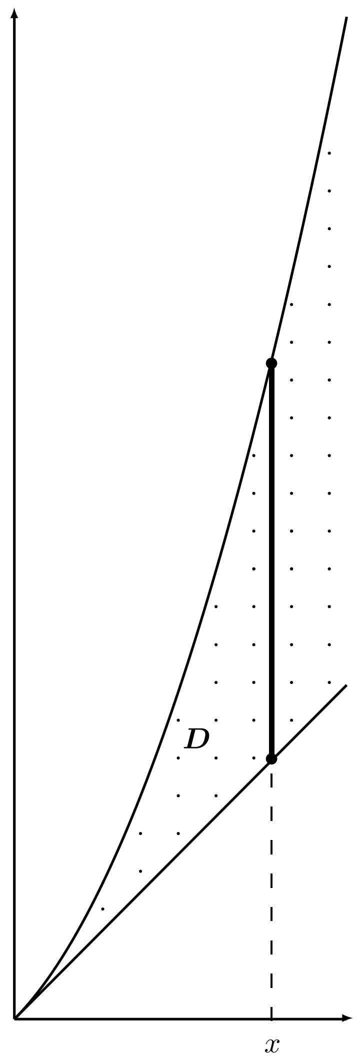
38) Calculer $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le y \le x + x^2\}\,,$$

et

$$f(x,y) = ye^{-x}\,.$$



On intègre une fonction continue positive sur une domaine non borné. On peut donc appliquer le théorème de Fubini.

Lorsque x est un nombre positif fixé, le nombre y varie de x à $x + x^2$ et donc

$$I_y(x) = \int_x^{x+x^2} ye^{-x}\, dy = e^{-x} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x}^{y=x+x^2} = e^{-x}\, \frac{(x+x^2)^2 - x^2}{2} = e^{-x}\, \frac{2x^3 + x^4}{2}\,.$$

Puis

$$I = \int_0^\infty I_y(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x}\,(2x^3 + x^4)\, dx\,.$$

En utilisant le fait que

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n\, dx = n!\,,$$

on en déduit

$$I = \frac{1}{2}\,(2 \cdot 3! + 4!) = 3 \cdot 3! = 18\,.$$

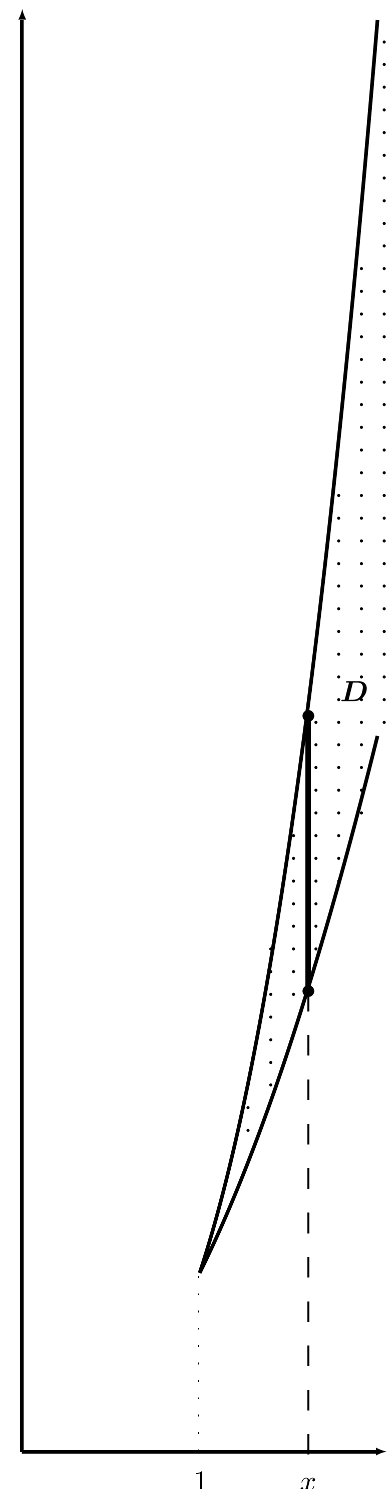
39) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = \{(x,y)\,|\,x \geq 1\,,\; x^2 \leq y \leq x^3\}\,,$$

et

$$f(x,y) = ye^{-x}\,.$$



On intègre une fonction continue positive sur une domaine non borné. On peut donc appliquer le théorème de Fubini.

Lorsque x est plus grand que 1, le nombre y varie de x^2 à x^3 et donc

$$I_y(x) = \int_{x^2}^{x^3} ye^{-x}\,dy = e^{-x}\,\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=x^3} = e^{-x}\,\frac{x^6 - x^4}{2}\,.$$

Puis

$$I = \int_1^\infty I_y(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty e^{-x}\,(x^6 - x^4)\,dx\,.$$

Posons

$$I_n = \int_1^\infty e^{-x}x^n\,dx\,.$$

En intégrant par parties

$$I_n = \Big[-x^n e^{-x}\Big]_1^\infty + \int_1^\infty nx^{n-1}e^{-x}\,dx = \frac{1}{e} + nI_{n-1}\,.$$

Comme

$$I_0 = \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}\,,$$

on déduit successivement

$$I_1 = \frac{2}{e} \quad , \quad I_2 = \frac{5}{e} \quad , \quad I_3 = \frac{16}{e} \quad , \quad I_4 = \frac{65}{e} \quad , \quad I_5 = \frac{326}{e} \quad \text{et} \quad I_6 = \frac{1957}{e}\,,$$

d'où

$$I = \frac{1}{2}\,(I_6 - I_4) = \frac{946}{e}\,.$$

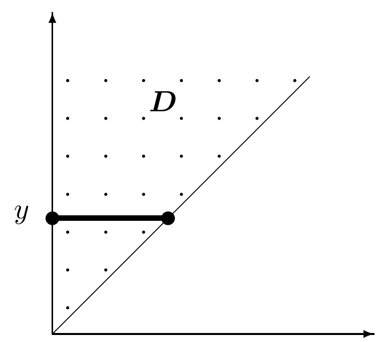
40) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = \{(x,y) \,|\, 0 \leq x \leq y\}\,,$$

et

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,.$$



On intègre une fonction continue positive sur une domaine non borné. On peut donc appliquer le théorème de Fubini.

Lorsque y est un nombre positif, le nombre x varie de 0 à y et donc

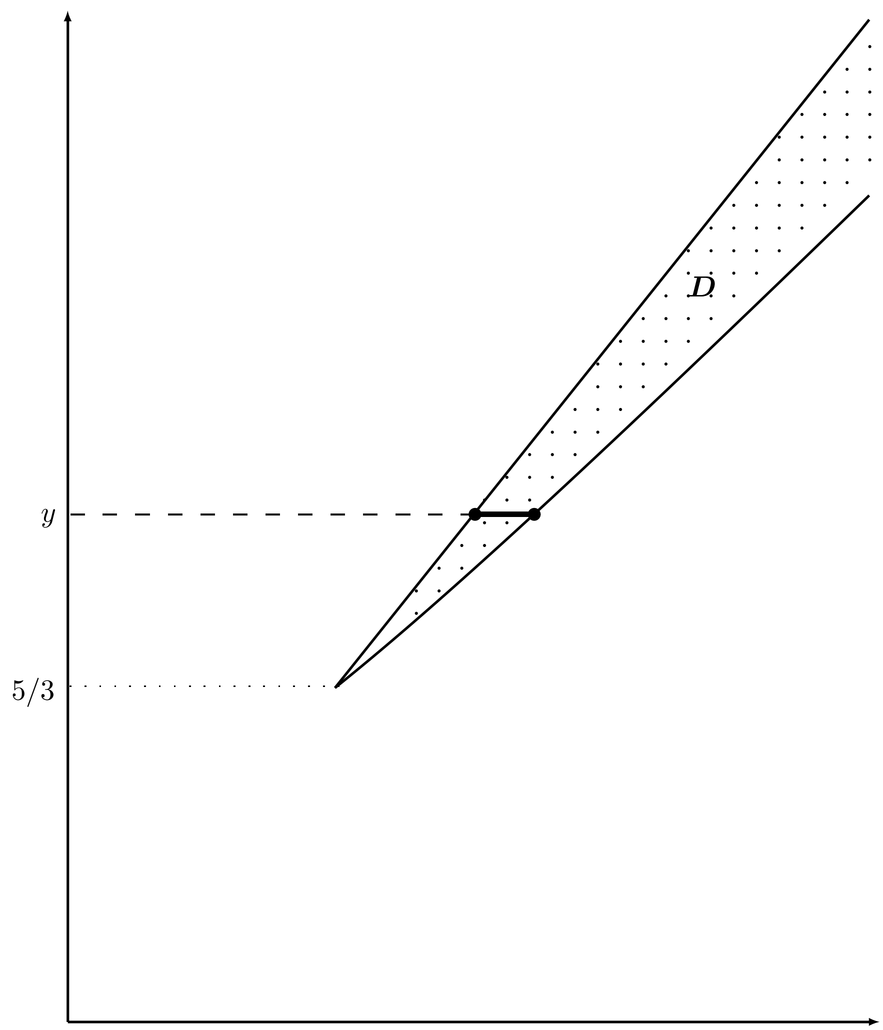
$$I_x(y) = \int_0^y \frac{dx}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1+y^2}\left[\arctan x\right]_{x=0}^{x=y} = \frac{\arctan y}{1+y^2}\,.$$

Puis

$$I = \int_0^\infty I_x(y)\,dy = \int_0^\infty \frac{\arctan y}{1+y^2}\,dy = \left[\frac{(\arctan y)^2}{2}\right]_0^\infty = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

41) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où
$$D = \left\{ (x,y) \mid \sqrt{x^2+1} \le y \le \frac{5x}{4} \right\},$$
et
$$f(x,y) = \frac{1}{x^3y^2}.$$

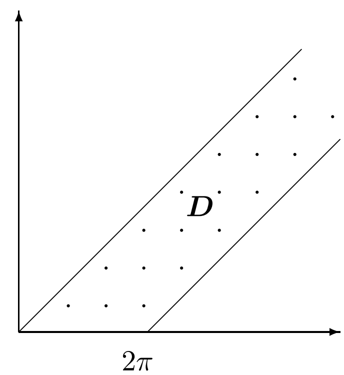


On intègre une fonction continue positive sur une domaine non borné. On peut donc appliquer le théorème de Fubini.

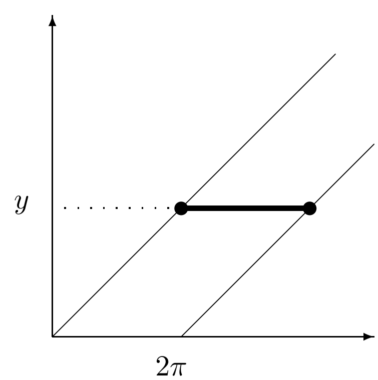
On constate tout d'abord que lorsque x est positif, l'hyperbole d'équation
$$y = \sqrt{x^2+1}$$

et la droite d'équation
$$y = \frac{5x}{4}$$
se coupent lorsque
$$\sqrt{x^2+1} = \frac{5x}{4}\,,$$
c'est-à-dire
$$x^2+1 = \frac{25x^2}{16}\,,$$
et donc
$$\frac{9x^2}{16} = 1\,,$$
soit
$$x = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad y = \frac{5}{3}\,.$$
Lorsque y est plus grand que $5/3$, le nombre x varie de $\dfrac{4y}{5}$ à $\sqrt{y^2-1}$ et donc
$$I_x(y) = \int\limits_{4y/5}^{\sqrt{y^2-1}} \frac{dx}{x^3y^2} = \frac{1}{y^2}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{x=4y/5}^{x=\sqrt{y^2-1}} = -\frac{1}{2y^2(y^2-1)} + \frac{25}{32y^4}\,.$$
Puis
$$I = \int\limits_{5/3}^{\infty} I_x(y)\,dy = -\int\limits_{5/3}^{\infty} \frac{dy}{2y^2(y^2-1)} + \frac{25}{32}\int\limits_{5/3}^{\infty} \frac{dy}{y^4}\,.$$
On décompose facilement en éléments simples
$$\frac{1}{y^2(y^2-1)} = \frac{1}{y^2-1} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) - \frac{1}{y^2}\,.$$
Donc
$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{5/3}^{\infty} \left(-\frac{1}{4(y-1)} + \frac{1}{4(y+1)} + \frac{1}{2y^2} + \frac{25}{32y^4}\right) dy \\ &= \left[\frac{1}{4}\ln\frac{y+1}{y-1} - \frac{1}{2y} - \frac{25}{96y^3}\right]_{5/3}^{\infty} \\ &= -\frac{\ln 2}{2} + \frac{3}{10} + \frac{9}{160} \\ &= \frac{57}{160} - \frac{\ln 2}{2}\,. \end{aligned}$$

42) Soit
$$D = \{(x,y) \,|\, 0 \leq y \leq x \leq y + 2\pi\}\,,$$
et
$$f(x,y) = \sin x \, \cos y\,.$$
Montrer que l'on ne peut appliquer le théorème de Fubini pour le calcul de $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

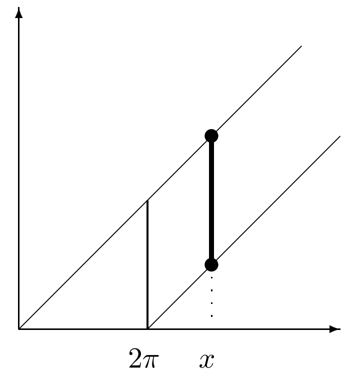


1) Intégration en x puis en y.



Lorsque y est fixé, le nombre x varie de y à $y + 2\pi$, et l'on a
$$I_x(y) = \int_y^{y+2\pi} \sin x \, \cos y \, dx = \Big[-\cos x \, \cos y \Big]_{x=y}^{x=y+2\pi} = 0\,,$$
donc
$$\int_0^\infty I_x(y)\,dy = 0\,.$$
2) Intégration en y puis en x. On partage le domaine D en deux parties.

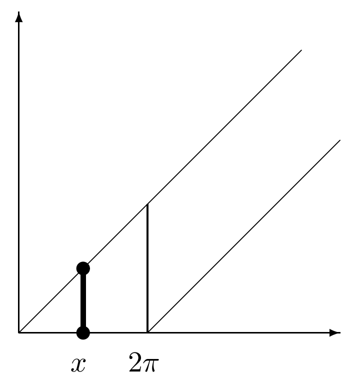
Lorsque x appartient à $[\,2\pi, +\infty\,[$.



Dans ce cas y varie de $x-2\pi$ à x et l'on a

$$I_y(x) = \int_{x-2\pi}^{x} \sin x \, \cos y \, dy = \Big[\sin x \sin y \Big]_{y=x-2\pi}^{y=x} = 0 \, .$$

Lorsque x appartient à $[\,0,\, 2\pi\,]$.



Dans ce cas y varie de 0 à x et l'on a

$$I_y(x) = \int_{0}^{x} \sin x \, \cos y \, dy = \Big[\sin x \sin y \Big]_{y=0}^{y=x} = \sin^2 x \, .$$

Alors

$$\int_0^{\infty} I_y(x) \, dx = \int_0^{2\pi} I_y(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \pi \, .$$

On constate que l'on n'a pas l'égalité

$$\int_0^{\infty} I_x(y) \, dy = \int_0^{\infty} I_y(x) \, dx \, .$$

Le théorème de Fubini ne s'applique pas, donc nécessairement

$$\iint_D |\sin x \, \cos y \,| \, dx \, dy = +\infty \, .$$

43) Soit
$$D =]\,0,\,1\,]^{\,2}\,,$$
et
$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$
Montrer que l'on ne peut appliquer le théorème de Fubini pour le calcul de $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

1) Intégration en y puis en x.

Si x est un nombre positif fixé, on a
$$I_y(x) = \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \int_0^1 \frac{dy}{x^2+y^2} - \int_0^1 \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,.$$
On intègre par parties la deuxième intégrale
$$\int_0^1 \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \left[-\frac{1}{y^2+x^2}\times y\right]_{y=0}^{y=1} + \int_0^1 \frac{dy}{y^2+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{dy}{y^2+x^2}\,,$$
donc
$$I_y(x) = \frac{1}{1+x^2}\,,$$
et par suite,
$$\int_0^1 I_y(x)\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\,.$$
2) Intégration en x puis en y.

En permutant les rôles de x et de y dans le calcul précédent, on obtient que
$$\int_0^1 I_x(y)\,dy = -\frac{\pi}{4}\,.$$
On constate donc que l'on n'a pas l'égalité
$$\int_0^1 I_x(y)\,dy = \int_0^1 I_y(x)\,dx\,.$$
Le théorème de Fubini ne s'applique pas, donc nécessairement
$$\iint_D \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = +\infty\,.$$

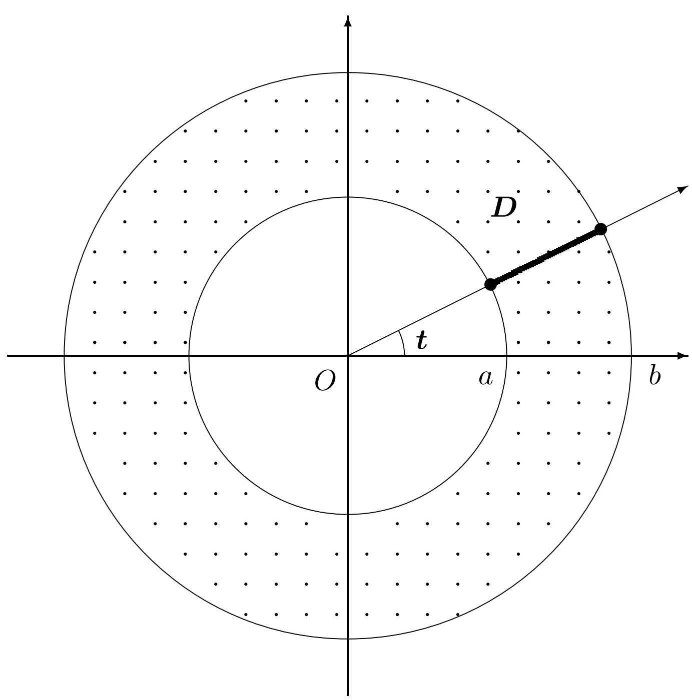
Chapitre 2

CHANGEMENT DE VARIABLES

2.1 Coordonnées polaires

44) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est la couronne limitée par les cercles de centre O et de rayons respectifs a et b $(0 < a < b)$ et

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}\,.$$



Le domaine D est obtenu lorsque les coordonnées polaires (r, t) parcourent le rectangle

$$\Delta = [\,a,\, b\,] \times [\,-\pi,\, \pi\,]\,.$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = \frac{1}{r^2}\,.$$

Donc

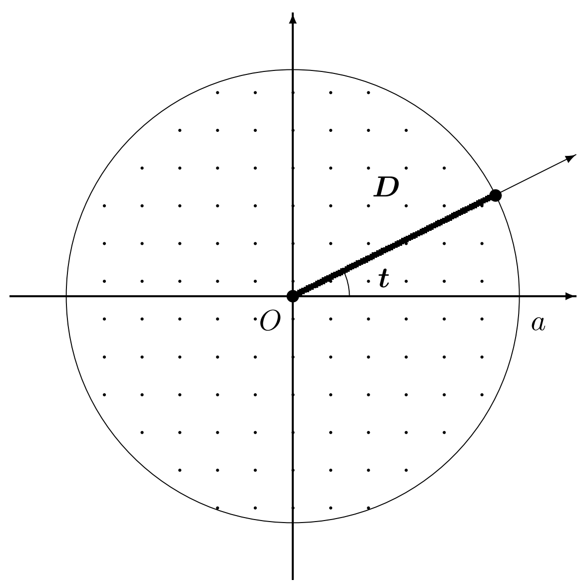
$$I = \iint\limits_{\Delta} f(r\cos t, r\sin t)\, r dr\, dt = \iint\limits_{\Delta} \frac{dr\, dt}{r}\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \iint\limits_{\Delta} \frac{dr\, dt}{r} = \left(\int\limits_a^b \frac{dr}{r} \right) \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} dt \right) = 2\pi \ln \frac{b}{a}\,.$$

45) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le disque de centre O et de rayon a et

$$f(x,y) = (x+y)^2 \,.$$



Le domaine D est obtenu lorsque les coordonnées polaires (r,t) parcourent le rectangle

$$\Delta = [\,0,\, a\,] \times [\,-\pi,\, \pi\,] \,.$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = (r\cos t + r\sin t)^2 = r^2(1+\sin 2t)\,.$$

Donc

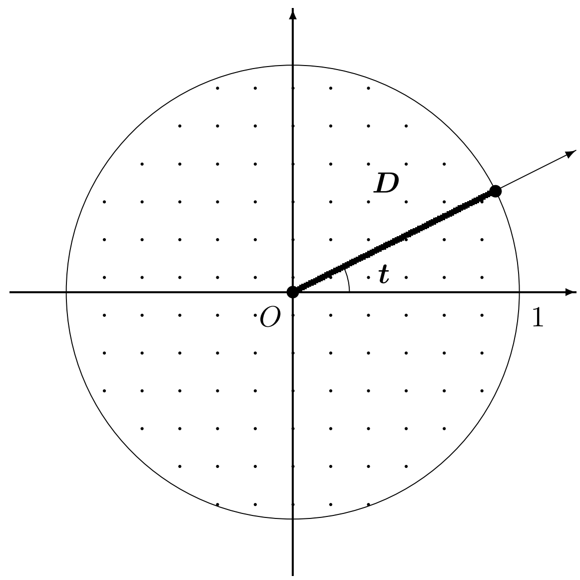
$$I = \iint\limits_\Delta f(r\cos t, r\sin t)\, r dr\, dt = \iint\limits_\Delta r^3(1+\sin 2t)\, dr\, dt \,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^a r^3\, dr\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} (1+\sin 2t)\, dt\right) = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \left[t - \frac{\cos 2t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi a^4}{2}\,.$$

46) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le disque de centre O et de rayon 1 et

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{(x^2+y^2+1)^2}\,.$$



Le domaine D est obtenu lorsque les coordonnées polaires (r,t) parcourent le rectangle

$$\Delta = [\,0,\,1\,] \times [\,-\pi,\,\pi\,]\,.$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = \frac{(r\cos t + r\sin t)^2}{(1+r^2)^2} = \frac{r^2(1+\sin 2t)}{(1+r^2)^2}\,.$$

Donc

$$I = \iint\limits_\Delta f(r\cos t, r\sin t)\,r dr\,dt = \iint\limits_\Delta \frac{r^3(1+\sin 2t)}{(1+r^2)^2}\,dr\,dt\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^1 \frac{r^3}{(1+r^2)^2}\,dr\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}(1+\sin 2t)\,dt\right)\,.$$

En effectuant le changement de variable $u = r^2$, on a $du = 2r dr$ donc

$$\int_0^1 \frac{r^3}{(1+r^2)^2}\,dr = \int_0^1 \frac{u}{2(1+u)^2}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2}\right)du\,,$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{r^3}{(1+r^2)^2}\, dr = \frac{1}{2}\left[\ln(1+u) + \frac{1}{1+u}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) .$$

Par ailleurs

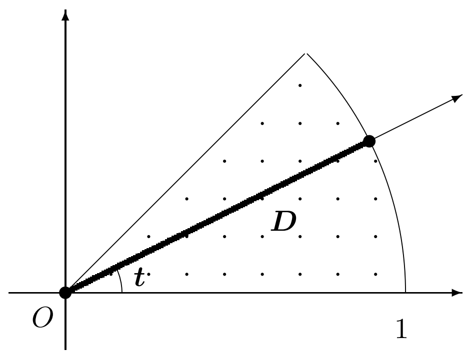
$$\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \sin 2t)\, dt = \left[t - \frac{\cos 2t}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi\,,$$

d'où

$$I = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) .$$

47) Calculer $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est l'ensemble des points du disque de centre O et de rayon 1, tels que $0 \le y \le x$

$$f(x,y) = 2x - y\,.$$



Le domaine D est obtenu lorsque les coordonnées polaires (r,t) parcourent le rectangle

$$\Delta = [\,0,\,1\,] \times [\,0,\,\pi/4\,]\,.$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = 2r\cos t - r\sin t\,.$$

Donc

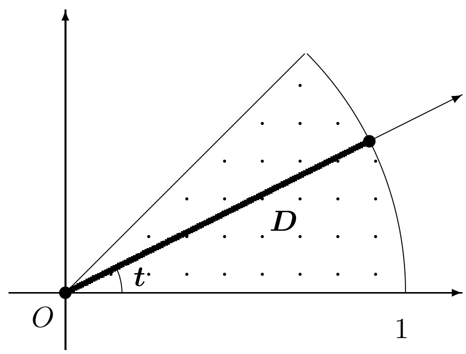
$$I = \iint_\Delta f(r\cos t, r\sin t)\,rdr\,dt = \iint_\Delta r^2(2\cos t - \sin t)\,dr\,dt\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_0^1 r^2\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/4}(2\cos t - \sin t)\,dt\right) == \frac{1}{3}\Big[2\sin t + \cos t\Big]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\,.$$

48) Calculer $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est l'ensemble des points du disque de centre O et de rayon 1, tels que $0 \le y \le x$

$$f(x,y) = (x-y)^2 .$$



Le domaine D est obtenu lorsque les coordonnées polaires (r,t) parcourent le rectangle

$$\Delta = [\,0,\,1\,] \times [\,0,\,\pi/4\,] .$$

D'autre part
$$f(r\cos t, r\sin t) = r^2(\cos t - \sin t)^2 = r^2(1-\sin 2t) .$$

Donc
$$I = \iint_\Delta f(r\cos t, r\sin t)\, r dr\, dt = \iint_\Delta r^3(1-\sin 2t)\,dr\,dt .$$

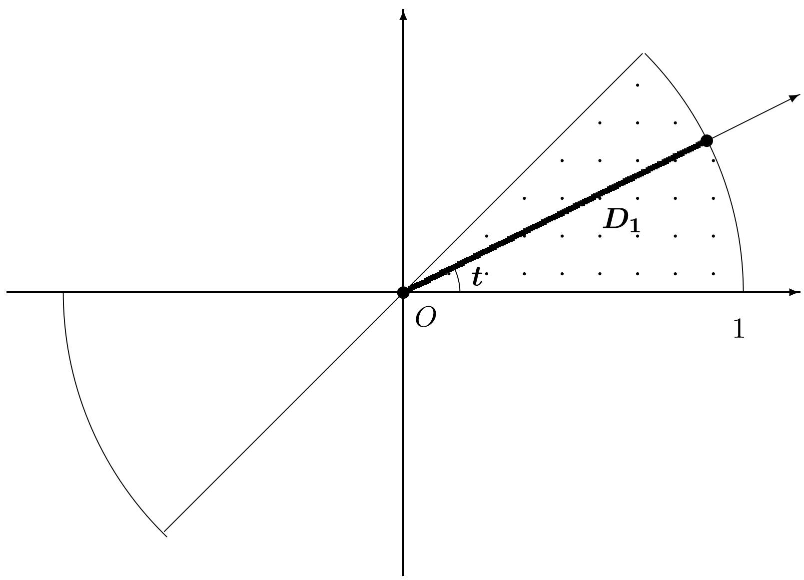
Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/4}(1-\sin 2t)\,dt\right) == \frac{1}{4}\left[t+\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi-2}{16} .$$

49) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est l'ensemble des points du disque de centre O et de rayon 1, limité par les droites d'équation $y=0$ et $y=x$, et

$$f(x,y) = (x+y)^2\,.$$



Le domaine est symétrique par rapport à O et d'autre part, pour tout couple (x,y) de D, on a

$$f(-x,-y) = f(x,y)\,.$$

On a donc

$$I = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

où D_1 est la partie du domaine située dans le quart de plan des coordonnées positives.

Le domaine D_1 est obtenu lorsque les coordonnées polaires (r,t) parcourent le rectangle

$$\Delta_1 = [\,0,\,1\,] \times [\,0,\,\pi/4\,]\,.$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = r^2(\cos t+\sin t)^2 = r^2(1+\sin 2t)\,.$$

Donc

$$I = 2\iint\limits_{\Delta_1} f(r\cos t, r\sin t)\,rdr\,dt = 2\iint\limits_{\Delta_1} r^3(1+\sin 2t)\,dr\,dt\,.$$

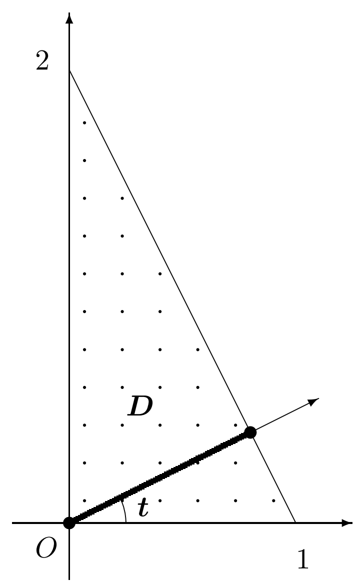
Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = 2\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/4}(1+\sin 2t)\,dt\right) = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi+2}{8}\,.$$

50) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est limité par les axes et la droite d'équation $y = -2x + 2$

$$f(x,y) = 2x + y\,.$$



Cherchons tout d'abord l'équation polaire de la droite d'équation cartésienne $y = -2x + 2$. On a

$$r \sin t = -2r \cos t + 2\,,$$

d'où

$$r = \frac{2}{\sin t + 2\cos t}\,.$$

Lorsque t est compris entre 0 et $\pi/2$, le nombre r varie de 0 à $\dfrac{2}{\sin t + 2\cos t}$. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \left\{ (r,t) \,|\, 0 \leq r \leq \frac{2}{\sin t + 2\cos t}\,,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\}\,.$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = r(2\cos t + \sin t)\,.$$

Donc

$$I = \iint\limits_\Delta f(r\cos t, r\sin t)\, r dr\, dt = \iint\limits_\Delta r^2(2\cos t + \sin t)\, dr\, dt\,.$$

On a tout d'abord

$$\begin{aligned}
I_r(t) &= \int_0^{\frac{2}{\sin t+2\cos t}} r^2(2\cos t+\sin t)\,dr \\
&= \left[\frac{r^3}{3}(2\cos t+\sin t)\right]_{r=0}^{r=\frac{2}{\sin t+2\cos t}} \\
&= \frac{8}{3(\sin t+2\cos t)^2} \\
&= \frac{8}{3}\,\frac{1}{\cos^2 t(\tan t+2)^2}\,.
\end{aligned}$$

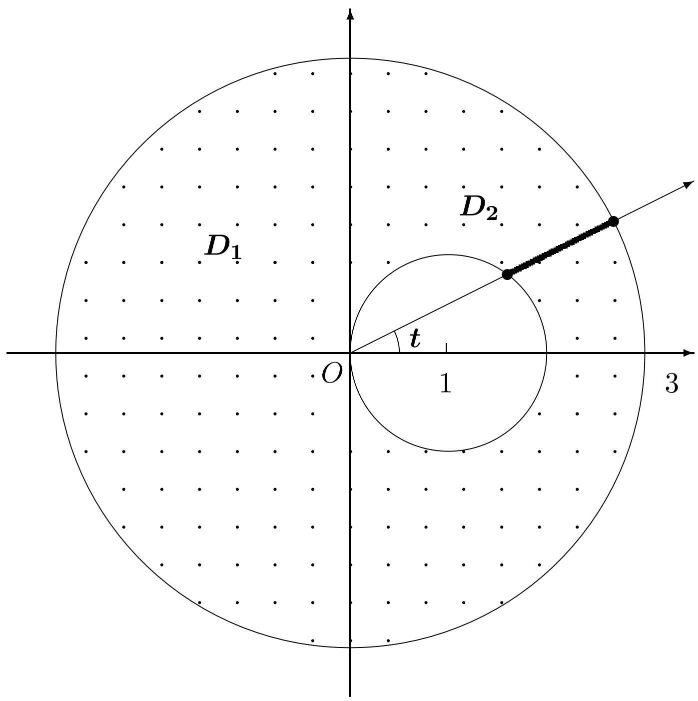
Donc

$$\begin{aligned}
I = \int_0^{\pi/2} I_r(t)\,dt &= \int_0^{\pi/2} \frac{8}{3}\,\frac{dt}{\cos^2 t(\tan t+2)^2} \\
&= \frac{8}{3}\left[\frac{-1}{\tan t+2}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{8}{3}\left[\lim_{t\to\pi/2}\frac{-1}{\tan t+2}+\frac{1}{2}\right] = \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

51) Calculer $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est limité par le cercle de centre O et de rayon 3 et le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1

$$f(x,y) = x^2 + y^2 .$$



On décompose le domaine en deux parties limitées par l'axe Oy. On a

$$f(r\cos t, r\sin t) = r^2 .$$

La partie D_1 est obtenue lorsque (r,t) parcourt le domaine

$$\Delta_1 = [\,0,\,3\,] \times [\,\pi/2,\,3\pi/2\,] ,$$

et on a

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta_1} f(r\cos t, r\sin t)\,r dr\,dt = \iint_{\Delta_1} r^3\,dr\,dt .$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement donc

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_0^3 r^3\,dr\right)\left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} dt\right) = \frac{81}{4}\,\pi .$$

Le petit cercle a comme équation cartésienne

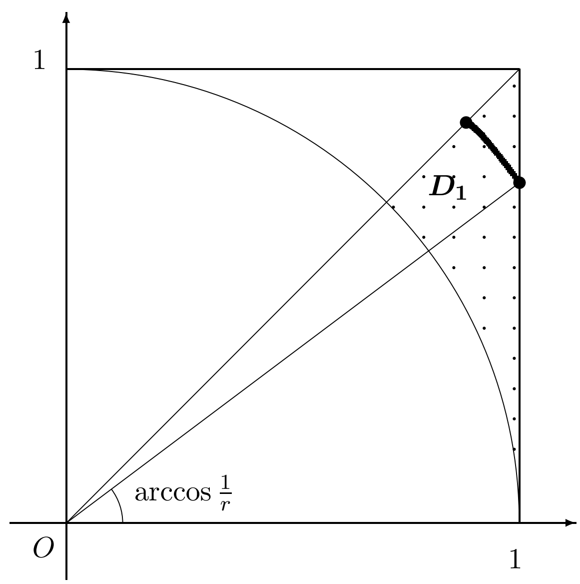
$$(x-1)^2 + y^2 = 1 ,$$

ou encore
$$x^2 + y^2 = 2x\,.$$
Donc, en coordonnées polaires,
$$r^2 = 2r\cos t\,,$$
soit
$$r = 2\cos t\,.$$
La partie D_2 est obtenue lorsque (r,t) parcourt le domaine
$$\Delta_2 = \left\{(r,t) \mid 2\cos t \le r \le 3\,,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right\}\,.$$
Lorsque t est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, on a
$$I_r(t) = \int\limits_{2\cos t}^{3} r^3\,dr = \frac{81 - 16\cos^4 t}{4}\,.$$
Donc
$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} I_r(t)\,dt = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{81 - 16\cos^4 t}{4}\,dt\,.$$
Mais, en linéarisant,
$$\begin{aligned}
\cos^4 t &= \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right) \\
&= \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2t + \cos 4t)\,.
\end{aligned}$$
Alors
$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy &= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4}\left[81 - 2(3 + 4\cos 2t + \cos 4t)\right]dt \\
&= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4}(75 - 8\cos 2t - 2\cos 4t)\,dt \\
&= \left[\frac{1}{4}\left(75t - 4\sin 2t - \frac{\sin 4t}{2}\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{75\pi}{4}\,.
\end{aligned}$$
Finalement
$$I = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{81\pi}{4} + \frac{75\pi}{4} = 39\pi\,.$$

52) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est l'ensemble des points du carré $[\,0,\,1\,] \times [\,0,\,1\,]$ extérieurs au cercle de centre O et de rayon 1, et

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,.$$



Le domaine est symétrique par rapport à la première bissectrice, et, quel que soit (x,y) dans D,

$$f(y,x) = f(x,y)\,.$$

Donc

$$I = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy\,,$$

où D_1 est la partie du domaine située sous la première bissectrice. On a

$$f(r\cos t, r\sin t) = \frac{r^2\cos t\sin t}{1+r^2} = \frac{r^2\sin 2t}{2(1+r^2)}\,.$$

La droite d'équation cartésienne $x = 1$, a pour équation polaire

$$r = \frac{1}{\cos t}\,.$$

En exprimant t en fonction de r, on a encore

$$t = \arccos\frac{1}{r}\,.$$

Le domaine D_1 est parcouru lorsque (r,t) décrit le domaine

$$\Delta_1 = \left\{(r,t) \mid \arccos\frac{1}{r} \le t \le \frac{\pi}{4}\,,\ 1 \le r \le \sqrt{2}\right\}\,.$$

Donc

$$I = 2 \iint_{\Delta_1} f(r\cos t, r\sin t)\, r dr\, dt = 2 \iint_{\Delta_1} \frac{r^3 \sin 2t}{2(1+r^2)}\, dt\,.$$

On commence à intégrer en t. Pour r compris entre 1 et $\sqrt{2}$, on a

$$\begin{aligned} I_t(r) &= \int_{\arccos(1/r)}^{\pi/4} \frac{r^3 \sin 2t}{2(1+r^2)}\, dt \\ &= \frac{r^3}{2(1+r^2)} \left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_{t=\arccos(1/r)}^{t=\pi/4} \\ &= \frac{r^3}{4(1+r^2)} \cos\left(2\arccos\frac{1}{r}\right)\,. \end{aligned}$$

Mais

$$\cos\left(2\arccos\frac{1}{r}\right) = 2\cos^2\left(\arccos\frac{1}{r}\right) - 1 = \frac{2}{r^2} - 1\,.$$

D'où

$$I_t(r) = \frac{r^3}{4(1+r^2)} \left(\frac{2}{r^2} - 1\right) = \frac{r}{4}\,\frac{2-r^2}{r^2+1}\,.$$

Alors

$$I = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2-r^2}{r^2+1}\,\frac{r dr}{4}\,,$$

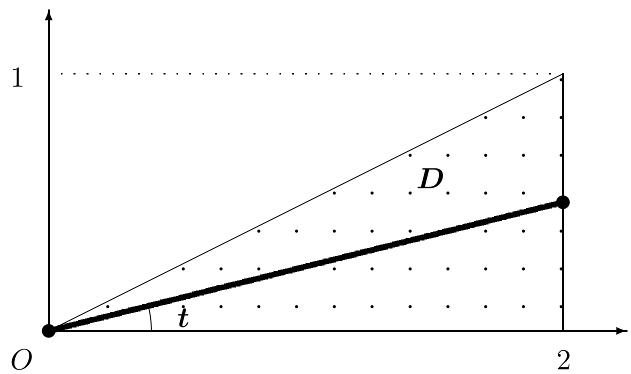
et en effectuant le changement de variable $u = r^2$, qui est tel que

$$du = 2r\, dr\,,$$

on obtient

$$I = \int_1^2 \frac{2-u}{u+1}\,\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int_1^2 \left(\frac{3}{u+1} - 1\right) du = \frac{1}{4}\Big[3\ln(u+1) - u\Big]_1^2 = \frac{1}{4}\left(3\ln\frac{3}{2} - 1\right)\,.$$

53) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le triangle de sommets O, $A(2,0)$, $B(2,1)$, et
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,.$$



La droite d'équation $x = 2$ a pour équation en cooordonnées polaires
$$r = \frac{2}{\cos t}\,,$$
et la droite OB fait un angle de $\arctan \frac{1}{2}$ avec Ox.

On intègre donc sur le domaine
$$\Delta = \left\{ (r,t) \,|\, 0 \le t \le \arctan\frac{1}{2}\,,\ 0 \le r \le \frac{2}{\cos t} \right\}\,.$$

D'autre part
$$f(r\cos t, r\sin t) = r\,.$$

On a donc
$$I = \iint\limits_\Delta f(r\cos t, r\sin t)\, r dr\, dt = \iint\limits_\Delta r^2\, dr\, dt\,.$$

On calcule tout d'abord
$$I_r(t) = \int\limits_0^{2/\cos t} r^2\, dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2/\cos t} = \frac{8}{3\cos^3 t}\,.$$

Alors
$$I = \frac{8}{3} \int\limits_0^{\arctan(1/2)} \frac{dt}{\cos^3 t} = \frac{8}{3} \int\limits_0^{\arctan(1/2)} \frac{\cos t\, dt}{(1-\sin^2 t)^2}\,.$$

Effectuons le changement de variable $u = \sin t$. On a tout d'abord

$$du = \cos t\, dt\,.$$

D'autre part, lorsque t vaut $\arctan \frac{1}{2}$, on a

$$u = \sin \arctan \frac{1}{2} = \cos \arctan \frac{1}{2}\, \tan \arctan \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

Alors

$$I = \frac{8}{3} \int\limits_0^{1/\sqrt{5}} \frac{du}{(u^2-1)^2}\,.$$

On a

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)\,,$$

puis

$$\frac{1}{(u^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{2}{(u-1)(u+1)}\right)\,,$$

d'où

$$\frac{1}{(u^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1}\right)\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} + \ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right]_0^{1/\sqrt{5}} \\
&= \frac{2}{3}\left[\frac{2u}{1-u^2} + \ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right]_0^{1/\sqrt{5}} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{3}\ln\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{4}{3}\ln\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,.
\end{aligned}$$

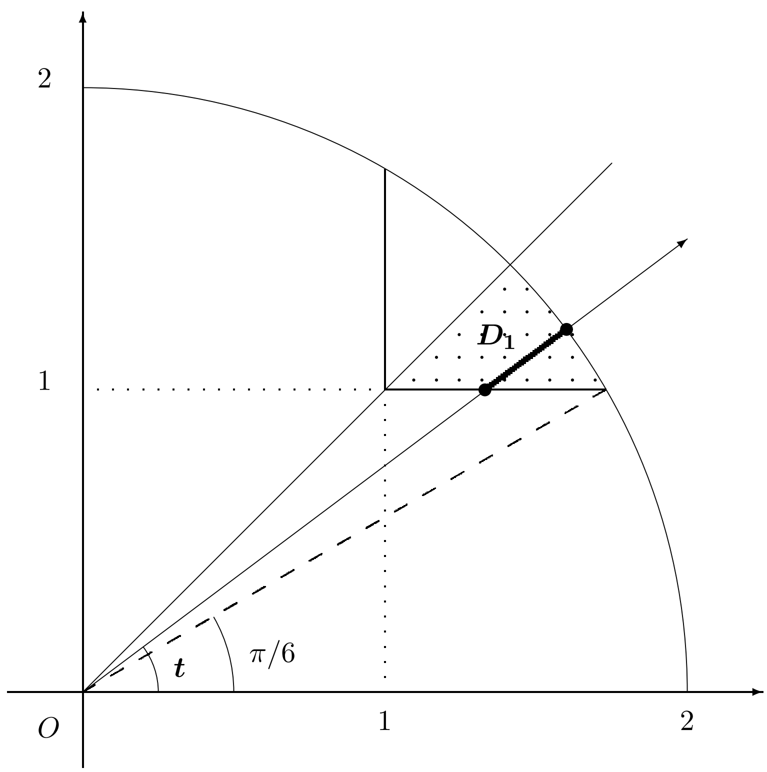
54) Calculer $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = \{(x,y) \mid x \geq 1\,,\ y \geq 1\,,\ x^2 + y^2 \leq 4\}\,,$$

et

$$f(x,y) = x^2 + y^2\,.$$



Le domaine D est symétrique par rapport à la première bissectrice, et, pour tout couple (x,y) de D, on a

$$f(x,y) = f(y,x)\,,$$

donc

$$I = 2 \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

où D_1 est la partie de D située sous la première bissectrice.

La droite d'équation $y = 1$ a pour équation polaire

$$r = \frac{1}{\sin t}\,.$$

D'autre part, le point d'intersection de cette droite et du cercle de centre O et de rayon 2 a pour coordonnées cartésiennes $(\sqrt{3}, 1)$ et pour coordonnées polaires $(2, \pi/6)$.

En utilisant les coordonnées polaires, on intègre donc sur le domaine

$$\Delta_1 = \left\{ (r,t) \mid \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}\,,\ \frac{1}{\sin t} \leq r \leq 2 \right\}.$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = r^2\,.$$

On a donc

$$I = 2 \iint\limits_{\Delta_1} f(r\cos t, r\sin t)\, r dr\, dt = 2 \iint\limits_{\Delta_1} r^3\, dr\, dt\,.$$

On calcule tout d'abord

$$(I_r)_1(t) = \int\limits_{1/\sin t}^{2} r^3\, dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=1/\sin t}^{r=2} = 4 - \frac{1}{4\sin^4 t}\,.$$

Puis

$$I = 2 \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} (I_r)_1(t)\, dt = 2 \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \left(4 - \frac{1}{4\sin^4 t} \right) dt = 8 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) - \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dt}{2\sin^4 t}\,.$$

Pour cette dernière intégrale, effectuons la changement de variable

$$u = \operatorname{cotan} t$$

pour lequel

$$du = -\frac{dt}{\sin^2 t}\,.$$

On a alors

$$\frac{1}{\sin^2 t} = 1 + \operatorname{cotan}^2 t = 1 + u^2\,,$$

ainsi que

$$\operatorname{cotan} \frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{cotan} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\,,$$

donc

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dt}{\sin^4 t} = \int\limits_{1}^{\sqrt{3}} (1 + u^2)\, du = \left[u + \frac{u^3}{3} \right]_1^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\,.$$

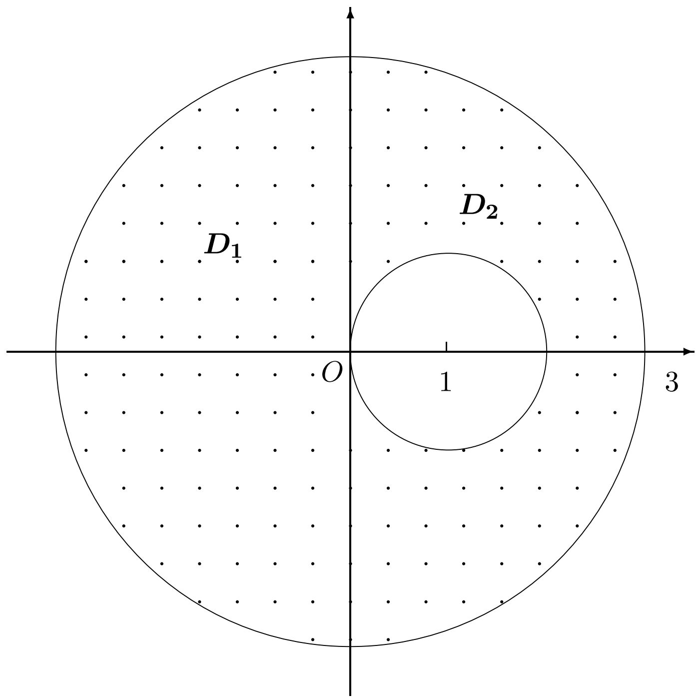
Finalement

$$I = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \left(2\sqrt{3} - \frac{4}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3} - \sqrt{3}\,.$$

55) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est le domaine intérieur au cercle de centre O et de rayon 3 et extérieur au cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,,$$



En coordonnées polaires, on a

$$f(r\cos t, r\sin t) = r\,.$$

Le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1 a pour équation cartésienne

$$(x-1)^2 + y^2 = 1\,,$$

ou encore

$$x^2 + y^2 = 2x\,,$$

ce qui donne en coordonnées polaires

$$r = 2\cos t\,.$$

On partage le domaine en deux parties D_1 et D_2, séparées par l'axe Oy.

1) Intégration sur D_1.

On intègre sur le domaine

$$\Delta_1 = \left\{(r,t)\,|\,0 \le r \le 3\,,\ \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}\right\}\,.$$

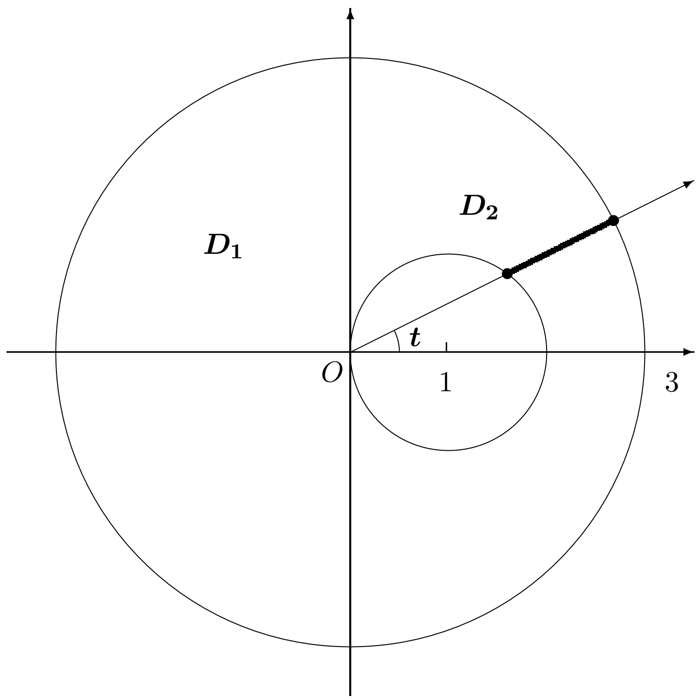
On a donc

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta_1} f(r\cos t, r\sin t) r\,dr\,dt = \iint_{\Delta_1} r^2\,dr\,dt\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I_1 = \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} dt\right)\left(\int_0^3 r^2\,dr\right) = 9\pi\,.$$

2) Intégration sur D_2.



Comme, pour tout couple (x,y) de D_2, on a,

$$f(x,-y) = f(x,y)\,,$$

il en résulte que

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{D_2'} f(x,y)\,dx\,dy\,,$$

où D_2' est la partie de D_2 située dans le demi-plan des ordonnées positives.

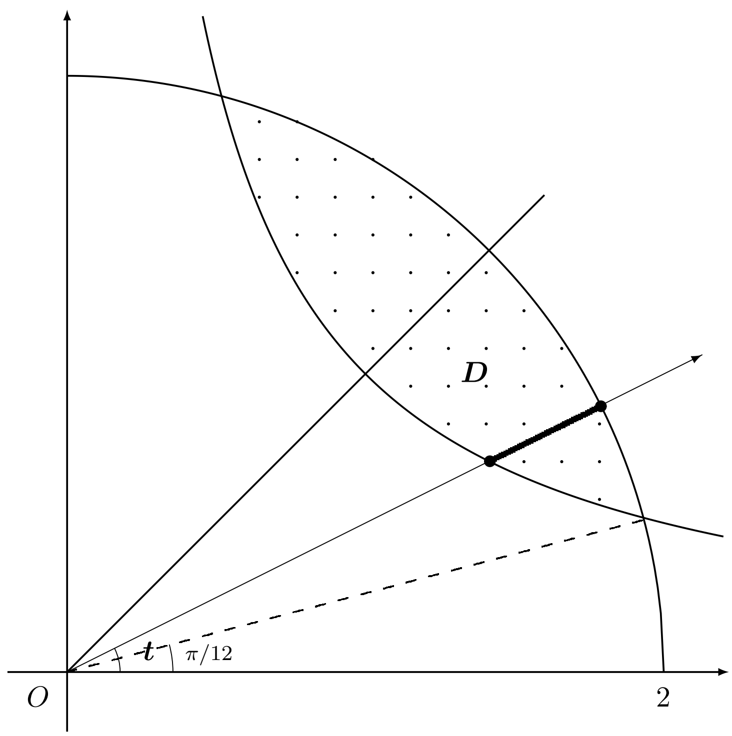
On intégre sur le domaine

$$\Delta_2' = \left\{(r,t)\,|\,2\cos t \le r \le 3\,,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right\}\,.$$

On a donc
$$\iint\limits_{D_2'} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Delta_2'} f(r\cos t, r\sin t) r\,dr\,dt = \iint\limits_{\Delta_2'} r^2\,dr\,dt\,.$$
On a tout d'abord
$$I_r(t) = \int\limits_{2\cos t}^{3} r^2\,dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=2\cos t}^{r=3} = 9 - \frac{8}{3}\cos^3 t\,,$$
puis
$$I_2 = 2\int\limits_0^{\pi/2} \left(9 - \frac{8}{3}\cos^3 t\right) dt\,.$$
Comme
$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t\,,$$
on en déduit
$$I_2 = 2\int\limits_0^{\pi/2} \left(9 - \frac{2}{3}(\cos 3t + 3\cos t)\right) dt = 2\left[9t - \frac{2}{3}\left(\frac{\sin 3t}{3} + 3\sin t\right)\right]_0^{\pi/2} = 9\pi - \frac{32}{9}\,.$$
Finalement
$$I = I_1 + I_2 = 18\pi - \frac{32}{9}\,.$$
Remarque : on aurait pu également calculer l'intégrale sur le grand cercle, ce qui donne 18π, et celle sur le petit, qui donne $32/9$, puis faire la différence.

56) Trouver l'aire du domaine

$$D = \{(x, y) \,|\, x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ xy \geq 1\,,\ x^2 + y^2 \leq 4\}\,.$$



La branche de l'hyperbole d'équation $xy = 1$ située dans le quart de plan des coordonnées positives a pour équation polaire

$$r^2 \sin t\, \cos t = 1\,,$$

donc

$$r = \sqrt{\frac{2}{\sin 2t}}\,.$$

Les intersections avec le cercle de centre O et de rayon 2 sont obtenues lorsque

$$\sqrt{\frac{2}{\sin 2t}} = 2\,,$$

donc

$$\sin 2t = \frac{1}{2}\,,$$

c'est-à-dire

$$t = \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad t = \frac{5\pi}{12}\,.$$

Comme le domaine est symétrique par rapport à la première bissectrice, on a

$$\mathscr{A} = 2 \iint_{\Delta} r\,dr\,dt\,,$$

où

$$\Delta = \left\{ (r,t) \mid \frac{\pi}{12} \leq t \leq \frac{\pi}{4}\,,\ \sqrt{\frac{2}{\sin 2t}} \leq r \leq 2 \right\}.$$

On calcule

$$I_r(t) = 2 \int_{\sqrt{\frac{2}{\sin 2t}}}^{2} r\,dr = \Big[r^2\Big]_{r=\sqrt{\frac{2}{\sin 2t}}}^{r=2} = 4 - \frac{2}{\sin 2t}\,,$$

d'où

$$\mathscr{A} = \int_{\pi/12}^{\pi/4} \left(4 - \frac{2}{\sin 2t}\right) dt = \int_{\pi/12}^{\pi/4} \left(4 - \frac{1 + \tan^2 t}{\tan t}\right) dt\,.$$

On obtient donc

$$\mathscr{A} = \Big[4t - \ln \tan t\Big]_{\pi/12}^{\pi/4} = \frac{2\pi}{3} + \ln \tan \frac{\pi}{12}\,.$$

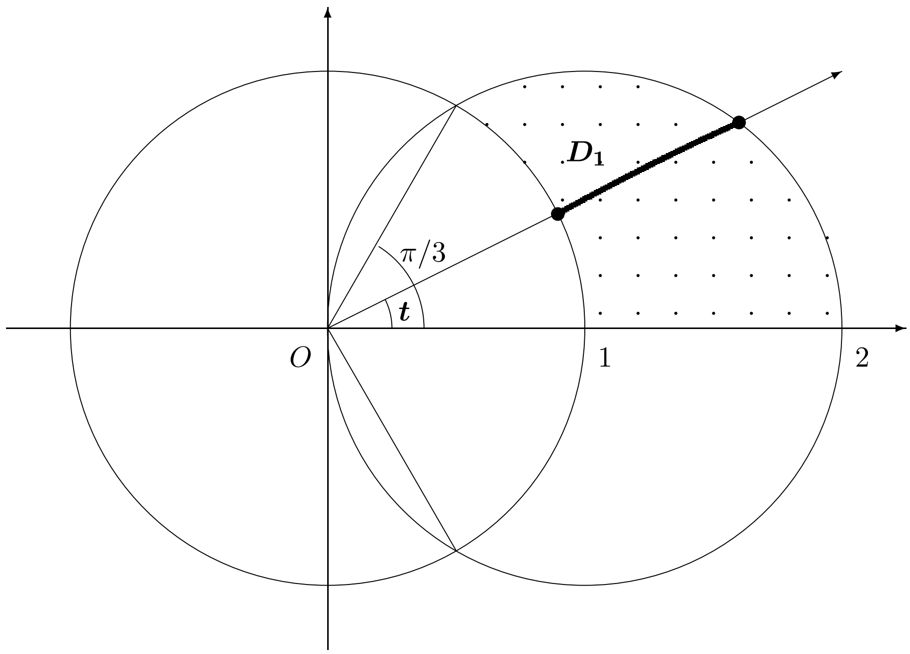
En écrivant

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2 \tan \dfrac{\pi}{12}}{1 - \tan^2 \dfrac{\pi}{12}}\,,$$

on obtient que $\tan \dfrac{\pi}{12}$ est la racine positive du trinôme $X^2 + 2\sqrt{3}\,X - 1$, c'est-à-dire $2 - \sqrt{3}$. Finalement

$$\mathscr{A} = \frac{2\pi}{3} + \ln(2 - \sqrt{3})\,.$$

57) Déterminer le centre de gravité G du domaine D intérieur au cercle de centre $(1,0)$ passant par O et extérieur au cercle de centre O et de rayon 1.



Pour des raisons de symétrie l'ordonnée y_G est nulle.

Le cercle de centre $(1,0)$ et passant par O a pour rayon 1. Son équation cartésienne est donc

$$(x-1)^2+y^2=1\,,$$

ou encore

$$x^2+y^2=2x\,,$$

ce qui donne en coordonnées polaires

$$r=2\cos t\,.$$

On calcule $I=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, où l'on prend successivement

$$f(x)=1 \quad \text{et} \quad f(x)=x\,.$$

Dans les deux cas, on a, pour tout couple (x,y) de D,

$$f(x,y)=f(x,-y)\,,$$

et donc

$$I=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy\,,$$

où D_1 est la partie du domaine située dans le quart de plan des coordonnées positives.

L'intersection des deux cercles dans D_1 a pour abscisse $1/2$ et correspond donc à un angle de $\pi/3$.

En coordonnées polaires, le domaine D_1 devient

$$\Delta_1 = \left\{(x,y)\,|\,0 \le t \le \frac{\pi}{3}\,,\, 1 \le r \le 2\cos t\right\}\,,$$

et l'on a

$$I = 2 \iint\limits_{\Delta_1} f(r\cos t, r\sin t) r\,dr\,dt\,.$$

1) Si $f(x,y) = 1$.

On a tout d'abord

$$I_r(t) = \int_1^{2\cos t} 2r\,dr = \Big[r^2\Big]_{r=1}^{r=2\cos t} = 4\cos^2 t - 1\,,$$

puis

$$\mathscr{A} = \int_0^{\pi/3} (4\cos^2 t - 1)\,dt = \int_0^{\pi/3} (2\cos 2t + 1)\,dt = \Big[t + \sin 2t\Big]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

2) Si $f(x,y) = x$.

On a tout d'abord

$$I_r(t) = \int_1^{2\cos t} 2r^2\cos t\,dr = \cos t\left[\frac{2r^3}{3}\right]_{r=1}^{r=2\cos t} = \frac{2}{3}\,(8\cos^4 t - \cos t)\,,$$

puis

$$x_G \times \mathscr{A} = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/3} (8\cos^4 t - \cos t)\,dt\,.$$

On linéarise

$$8\cos^4 t = 2(\cos 2t + 1)^2 = 2(\cos^2 2t + 2\cos 2t + 1) = \cos 4t + 4\cos 2t + 3\,.$$

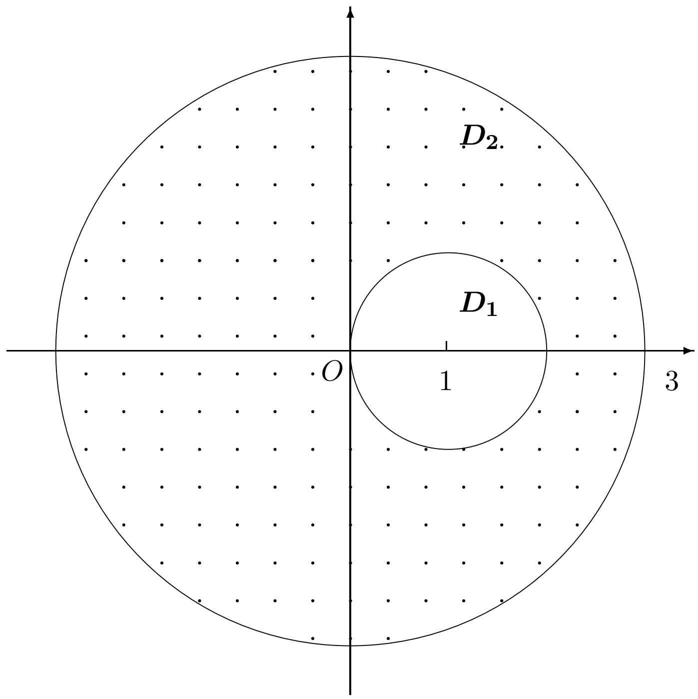
Donc

$$x_G \times \mathscr{A} = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/3} (\cos 4t + 4\cos 2t - \cos t + 3)\,dt = \frac{2}{3}\left[\frac{\sin 4t}{4} + 2\sin 2t - \sin t + 3t\right]_0^{\pi/3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

Alors

$$x_G = \frac{8\pi + 3\sqrt{3}}{4\pi + 6\sqrt{3}}\,.$$

58) Déterminer le centre de gravité G du domaine D intérieur au cercle de centre O et de rayon 3 et extérieur au cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.



Pour des raisons de symétrie l'ordonnée y_G est nulle.

Notons D_1 le domaine limité par le petit cercle et D_2 le domaine limité par le grand. On a alors

$$\mathscr{A}_D = \mathscr{A}_{D_2} - \mathscr{A}_{D_1} = 9\pi - \pi = 8\pi\,.$$

On a également

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy + \iint\limits_{D_1} x\,dx\,dy = \iint\limits_{D_2} x\,dx\,dy = 0\,,$$

car le centre de gravité du grand cercle est O. Donc

$$\iint\limits_D x\,dx\,dy = -\iint\limits_{D_1} x\,dx\,dy\,.$$

Mais le centre de gravité du petit cercle est le point $(1, 0)$, qui a pour abscisse $x_{D_1} = 1$. Donc

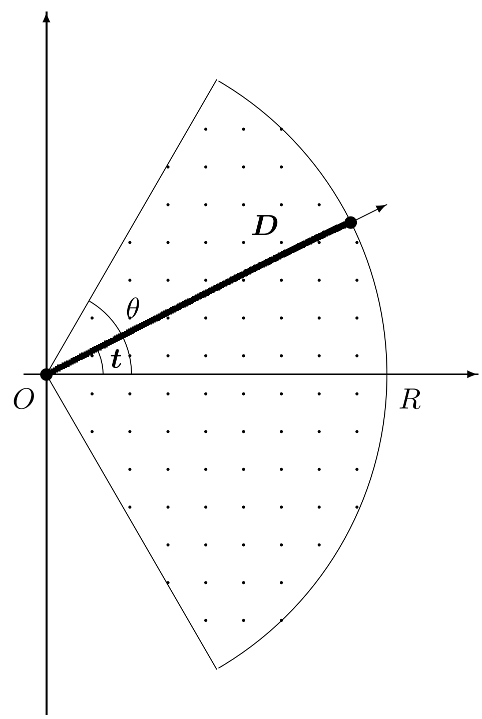
$$\iint\limits_{D_1} x\,dx\,dy = \mathscr{A}_{D_1} \times x_{D_1} = \pi\,.$$

On en déduit que

$$x_G = -\frac{\pi}{8\pi} = -\frac{1}{8}\,.$$

59) Déterminer le centre de gravité G d'un secteur circulaire D de rayon R et d'angle 2θ où $0 < \theta \leq \pi$.

Plaçons ce secteur en mettant le centre du cercle en O et en le positionnant symétriquement par rapport à Ox.



L'ordonnée du centre de gravité G est alors nulle.

En coordonnées polaires, on intègre sur

$$\Delta = \{(r,t) \mid 0 \leq r \leq R\,,\ -\theta \leq t \leq \theta\}\,.$$

On a alors, puisque les variables se séparent

$$I = \iint\limits_D x\,dx\,dy = \iint\limits_\Delta r^2 \cos t\,dr\,dt = \left(\int\limits_{-\theta}^{\theta} \cos t\,dt\right)\left(\int\limits_0^R r^2\,dr\right) = 2\sin\theta\,\frac{R^3}{3}\,,$$

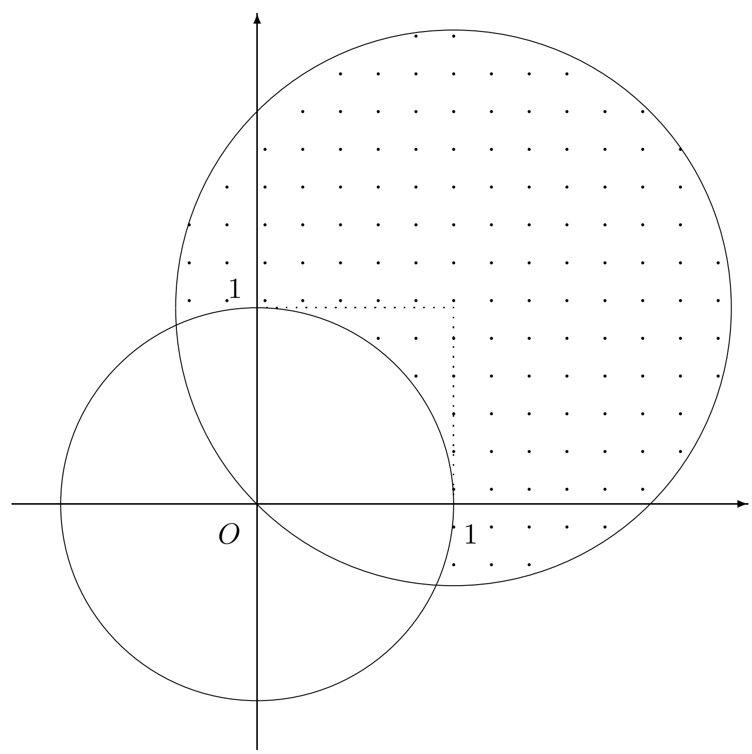
et

$$\mathscr{A} = \iint\limits_D dx\,dy = \iint\limits_\Delta r\,dr\,dt = \left(\int\limits_{-\theta}^{\theta} dt\right)\left(\int\limits_0^R r\,dr\right) = 2\theta\,\frac{R^2}{2}\,.$$

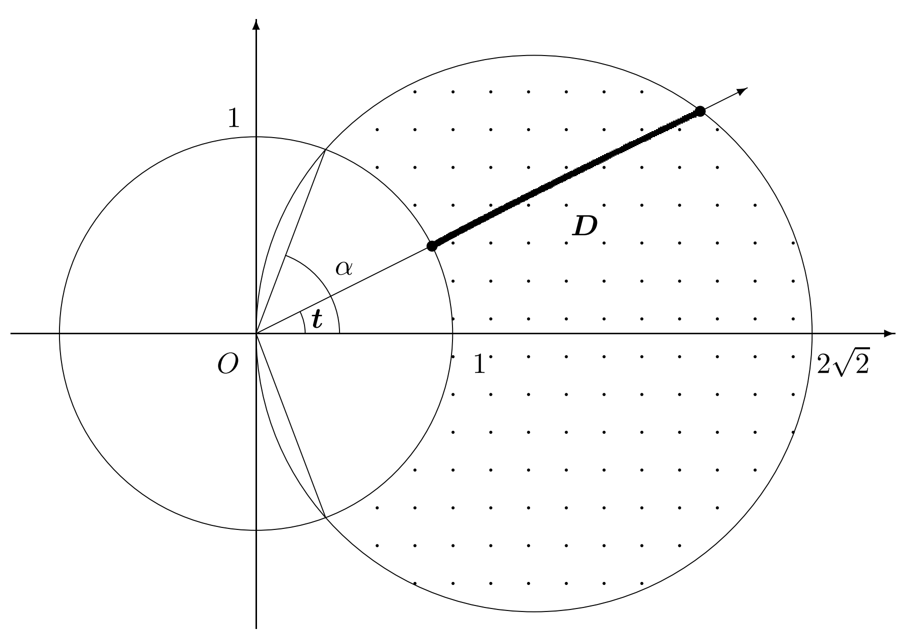
On obtient donc

$$x_G = \frac{I}{\mathscr{A}} = \frac{2R}{3}\,\frac{\sin\theta}{\theta}\,.$$

60) Déterminer l'aire du domaine D intérieur au cercle de centre $(1, 1)$ passant par O et extérieur au cercle de centre O et de rayon 1.



On a intérêt à faire tourner le dessin pour placer les centres des cercles sur Ox. On a alors un domaine D intérieur au cercle de centre $(\sqrt{2}, 0)$ passant par O et extérieur au cercle de centre O et de rayon 1.

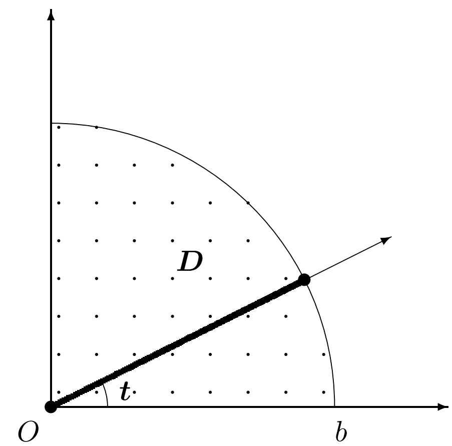


Le cercle extérieur a pour équation
$$(x-\sqrt{2})^2+y^2=2\,,$$
ou encore
$$x^2+y^2-2\sqrt{2}\,x=0\,.$$
L'intersection d'ordonnée positive des deux cercles s'obtient en résolvant le système
$$\left\{\begin{array}{ll} x^2+y^2 & =1\\ x^2+y^2 & =2\sqrt{2}\,x\end{array}\right.$$
qui donne immédiatement
$$x=\frac{\sqrt{2}}{4}\quad\text{et}\quad y=\frac{\sqrt{14}}{4}\,.$$
On a donc
$$\frac{y}{x}=\sqrt{7}\,,$$
et ce point a pour coordonnées polaires
$$r=1\quad\text{et}\quad t=\arctan\sqrt{7}\,.$$
Le cercle extérieur a pour équation polaire
$$r=2\sqrt{2}\,\cos t\,.$$
On intègre en coordonnées polaires sur le domaine
$$\Delta=\{(r,t)\,|\,1\leq r\leq 2\sqrt{2}\,\cos t\,,\,-\arctan\sqrt{7}\leq t\leq\arctan\sqrt{7}\}\,.$$
Notons
$$\arctan\sqrt{7}=\alpha\,.$$
On calcule
$$\mathscr{A}=\iint\limits_D dx\,dy=\iint\limits_\Delta r dr\,dt\,.$$
On a tout d'abord
$$I_r(t)=\int_1^{2\sqrt{2}\,\cos t} r\,dr=\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=1}^{r=2\sqrt{2}\,\cos t}=4\cos^2 t-\frac{1}{2}\,.$$
Alors
$$\mathscr{A}=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(4\cos^2 t-\frac{1}{2}\right)\,dt=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(2\cos 2t+\frac{3}{2}\right)\,dt=\left[\sin 2t+\frac{3t}{2}\right]_{-\alpha}^{+\alpha}\,,$$
d'où
$$\mathscr{A}=2\sin 2\alpha+3\arctan\sqrt{7}\,.$$
Mais
$$\sin(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{\sqrt{7}}{4}\,,$$
d'où
$$\mathscr{A}=\frac{\sqrt{7}}{2}+3\arctan\sqrt{7}\,.$$

61) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est le quart de cercle de centre O et de rayon b, situé dans le quart de plan des coordonnées positives, privé de l'origine, et

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}\,.$$



Le domaine D est obtenu lorsque les coordonnées polaires (r,t) parcourent le rectangle

$$\Delta =]\,0,\,b\,] \times [\,0,\,\pi/2\,]\,.$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = \frac{1}{r(\cos t + \sin t)}\,.$$

Donc

$$I = \iint\limits_\Delta f(r\cos t, r\sin t)\,rdr\,dt = \iint\limits_\Delta \frac{dr\,dt}{\sin t + \cos t}\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^b dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t + \cos t}\right) = b\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{2}\,\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}\,.$$

En écrivant

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}\,,$$

on obtient

$$I = \frac{b}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \frac{1 + \tan^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}{2\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right)}\,dt = \frac{b}{\sqrt{2}}\left[\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right|\right]_0^{\pi/2} = \frac{b}{\sqrt{2}}\,\ln\frac{\tan\frac{3\pi}{8}}{\tan\frac{\pi}{8}}\,.$$

En partant de

$$1 = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{2\,\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}\,,$$

on trouve que $\tan\dfrac{\pi}{8}$ est la racine positive du trinôme X^2+2X-1, donc

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1\,.$$

Par ailleurs

$$\tan\frac{3\pi}{8} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}+1\,.$$

d'où

$$I = \frac{b}{\sqrt{2}}\,\ln(\sqrt{2}+1)^2 = \sqrt{2}\,b\,\ln(\sqrt{2}+1)\,.$$

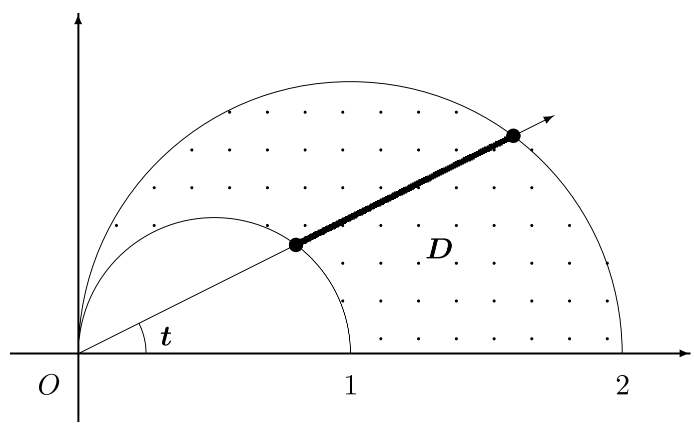
62) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

$$D = \{(x,y) \mid y \geq 0\,,\; x^2+y^2-x \geq 0\,,\; x^2+y^2-2x \leq 0\} \setminus \{(0,0)\}\,,$$

et

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}\,.$$



Le domaine D est la partie du plan comprise entre le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1, et le cercle de centre $(1/2,0)$ et de rayon $1/2$ située dans le demi-plan des y positifs.

Le premier cercle a pour équation polaire

$$r = \cos t\,,$$

et le second

$$r = 2\cos t\,.$$

On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \left\{(r,t) \mid 0 \leq t < \frac{\pi}{2}\,,\; \cos t \leq r \leq 2\cos t\right\}\,.$$

Utilisons les coordonnées polaires pour intégrer les fonctions positives sur D

$$f_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad f_2(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\,.$$

On a

$$f_1(r\cos t, r\sin t) = \frac{\cos t}{r} \quad \text{et} \quad f_2(r\cos t, r\sin t) = \frac{\sin t}{r}\,.$$

On a donc

$$I_1 = \iint\limits_\Delta f_1(r\cos t, r\sin t)\,r dr\,dt = \iint\limits_\Delta \cos t\,dr\,dt \quad \text{et} \quad I_2 = \iint\limits_\Delta f_2(r\cos t, r\sin t)\,r dr\,dt = \iint\limits_\Delta \sin t\,dr\,dt\,.$$

On a tout d'abord

$$(I_1)_r(t) = \int_{\cos t}^{2\cos t} \cos t \, dr = \cos^2 t \quad \text{et} \quad (I_2)r(t) = \int_{\cos t}^{2\cos t} \sin t \, dr = \cos t \sin t \, .$$

Puis

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} (I_1)r(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

et

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} (I_2)_r(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\, .$$

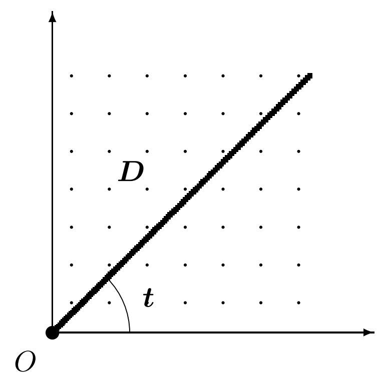
Finalement

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\pi - 2}{4}\, .$$

63) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le quart de plan des coordonnées positives privé de l'origine, et

$$f(x,y) = (x+y)^n e^{-(x+y)}\,,$$

où n est un nombre entier supérieur ou égal à -1.



La fonction f étant continue et positive, on peut intégrer en coordonnées polaires. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \left\{(r,t)\,|\,0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\,,\ r > 0\right\}\,.$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = r^n(\cos t + \sin t)^n e^{-r(\cos t+\sin t)}\,.$$

On a donc

$$I = \iint\limits_\Delta f(r\cos t, r\sin t)\,r dr\,dt = \iint\limits_\Delta r^{n+1}(\cos t+\sin t)^n e^{-r(\cos t+\sin t)}\,dr\,dt\,.$$

On a tout d'abord

$$I_r(t) = \int\limits_0^\infty r^{n+1}(\cos t+\sin t)^n e^{-r(\cos t+\sin t)}\,dr\,.$$

En effectuant le changement de variable

$$u = (\cos t + \sin t)r$$

on trouve

$$du = (\cos t + \sin t)\,dr\,,$$

donc

$$I_r(t) = \int\limits_0^\infty \frac{u^{n+1}e^{-u}}{(\cos t+\sin t)^2}\,du = \frac{(n+1)!}{(\cos t+\sin t)^2}\,,$$

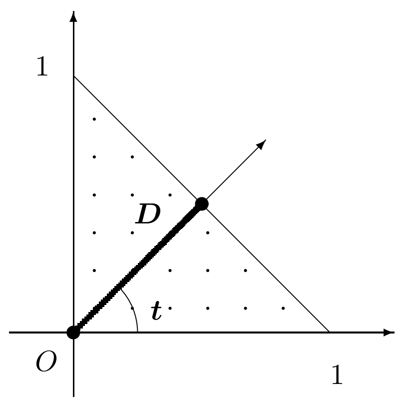
et par suite

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{(n+1)!}{(\cos t + \sin t)^2}\, dt = (n+1)! \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\cos^2 t (1 + \tan t)^2} = (n+1)! \left[-\frac{1}{1 + \tan t} \right]_0^{\pi/2} = (n+1)!\,.$$

64) Calculer $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est le triangle de sommets O, $A(0,1)$, $B(1,0)$ privé de l'origine, et

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$



Comme la fonction est continue et positive sur l'intérieur de D, on peut utiliser les coordonnées polaires.

La droite AB d'équation cartésienne $x+y=1$ a pour équation polaire

$$r = \frac{1}{\sin t + \cos t}\,.$$

On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \left\{(r,t)\,|\,0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\,,\ 0 < r \leq \frac{1}{\sin t + \cos t}\right\}\,.$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = r(\cos t + \sin t)^2\,.$$

On a donc

$$I = \iint_\Delta f(r\cos t, r\sin t)\,r dr\,dt = \iint_\Delta r^2(\cos t + \sin t)^2\,dr\,dt\,.$$

On a tout d'abord

$$I_r(t) = \int_0^{\frac{1}{\sin t+\cos t}} r^2(\cos t + \sin t)^2\ dr = (\cos t + \sin t)^2\ \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=\frac{1}{\sin t+\cos t}} = \frac{1}{3(\sin t + \cos t)}\,.$$

Puis

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t + \cos t}\,.$$

Intégrons ici en transformant en fonction de la tangente de l'angle moitié. (Il y a d'autres méthodes, voir ex. 61).

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}{1 + 2\tan \frac{t}{2} - \tan^2 \frac{t}{2}}\, dt\,.$$

En posant $u = \tan \dfrac{t}{2}$, qui donne donc

$$du = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2 \frac{t}{2}\right) dt\,,$$

on obtient

$$I = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{2}{1 + 2u - u^2}\, du\,.$$

La fraction rationnelle se décompose en éléments simples. Le dénominateur possède deux racines simples $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$. On a alors

$$I = \frac{\sqrt{2}}{6} \int_0^1 \left(\frac{1}{u - 1 + \sqrt{2}} - \frac{1}{u - 1 - \sqrt{2}}\right) du = \frac{\sqrt{2}}{6}\left[\ln\left|\frac{u - 1 + \sqrt{2}}{u - 1 - \sqrt{2}}\right|\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{6} \ln \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}\,.$$

Finalement

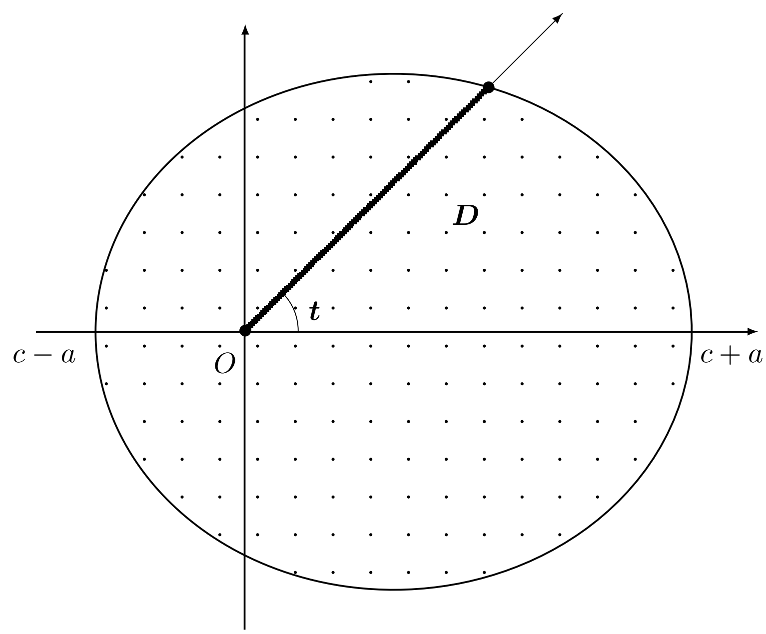
$$I = \frac{\sqrt{2}}{6} \ln(\sqrt{2} + 1)^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \ln(1 + \sqrt{2})\,.$$

65) Calculer $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le domaine limité par l'ellipse d'équation

$$\frac{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

où $a > b > 0$, privé de l'origine, et

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$



Nous noterons, comme il est usuel pour les ellipses,

$$c = \sqrt{a^2-b^2} \quad , \quad p = \frac{b^2}{a} \quad \text{et} \quad e = \frac{c}{a}\,.$$

On remarquera que $0 < e < 1$.

Comme

$$f(r\cos t, r\sin t) = \frac{1}{r}\,,$$

si l'on connaît l'équation polaire $r = \varphi(t)$ de l'ellipse, on sera amené à calculer en coordonnées polaires

$$I = \iint_\Delta f(r\cos t, r\sin t)\, r dr\, dt = \iint_\Delta dr\, dt\,,$$

sur le domaine

$$\Delta = \{(r,t)\,|\,0 < r \leq \varphi(t)\,,\ -\pi \leq t \leq \pi\}\,,$$

On aura alors

$$I_r(t) = \int_0^{\varphi(t)} dr = \varphi(t)\,,$$

et donc

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} I_r(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt\,.$$

En remplaçant x et y par $r\cos t$ et $r\sin t$ respectivement dans l'équation de l'ellipse, on trouve

$$\frac{r^2\cos^2 t - 2rc\cos t + c^2}{a^2} + \frac{r^2\sin^2 t}{b^2} = 1\,,$$

c'est-à-dire

$$r^2\left(\frac{\cos^2 t}{a^2} + \frac{\sin^2 t}{b^2}\right) - 2r\,\frac{c}{a^2}\,\cos t - \frac{b^2}{a^2} = 0\,.$$

On obtient un trinôme du second degré dont le discriminant réduit vaut

$$\delta' = \frac{a^2 - b^2}{a^4}\,\cos^2 t + \left(\frac{\cos^2 t}{a^2} + \frac{\sin^2 t}{b^2}\right)\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{a^2}\,.$$

La racine positive du trinôme est donc

$$r = \left(\frac{c}{a^2}\,\cos t + \frac{1}{a}\right)\left(\frac{\cos^2 t}{a^2} + \frac{\sin^2 t}{b^2}\right)^{-1} = b^2\,\frac{a + c\cos t}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,,$$

ce qui donne

$$r = b^2\,\frac{a + c\cos t}{a^2 - c^2\cos^2 t} = \frac{b^2}{a - c\cos t} = \frac{p}{1 - e\cos t}\,.$$

Il en résulte que

$$I = p\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1 - e\cos t}\,.$$

Or

$$\frac{1}{1 - e\cos t} = \frac{1}{1 - e\,\dfrac{1 - \tan^2\frac{t}{2}}{1 + \tan^2\frac{t}{2}}} = \frac{1 + \tan^2\frac{t}{2}}{(1+e)\tan^2\frac{t}{2} + 1 - e}\,,$$

donc, en effectuant le changement de variable $u = \tan\dfrac{t}{2}$ qui définit une bijection de $]-\pi,\,\pi\,[$ sur $]-\infty,\,\infty\,[$, et pour lequel

$$du = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{t}{2}\right)dt\,,$$

on obtient finalement

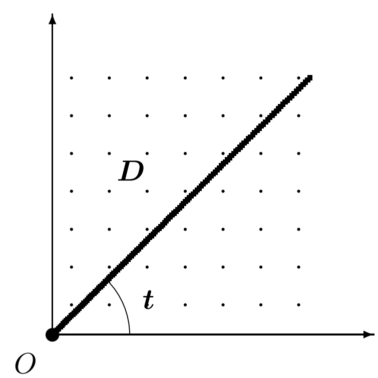
$$I = 2p\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1+e)u^2 + 1 - e} = 2p\left[\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\,\arctan\frac{(1+e)u}{\sqrt{1-e^2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2p\pi}{\sqrt{1-e^2}} = 2b\pi\,.$$

66) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est le quart de plan des coordonnées positives et

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2+p^2)^2}\,,$$

où p est un nombre réel strictement positif.



La fonction f étant continue et positive, on peut intégrer en coordonnées polaires. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \left\{(r,t)\,|\,0 \le t \le \frac{\pi}{2}\,,\; r \ge 0\right\}\,.$$

D'autre part

$$f(r\cos t, r\sin t) = \frac{1}{(r^2+p^2)^2}\,.$$

On a donc

$$I = \iint\limits_\Delta f(r\cos t, r\sin t)\,rdr\,dt = \iint\limits_\Delta \frac{rdrdt}{(r^2+p^2)^2}\,.$$

Comme on intègre sur un rectangle et que les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^{\pi/2} dt\right)\left(\int_0^\infty \frac{rdr}{(r^2+p^2)^2}\right) = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2(r^2+p^2)}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4p^2}\,.$$

67) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

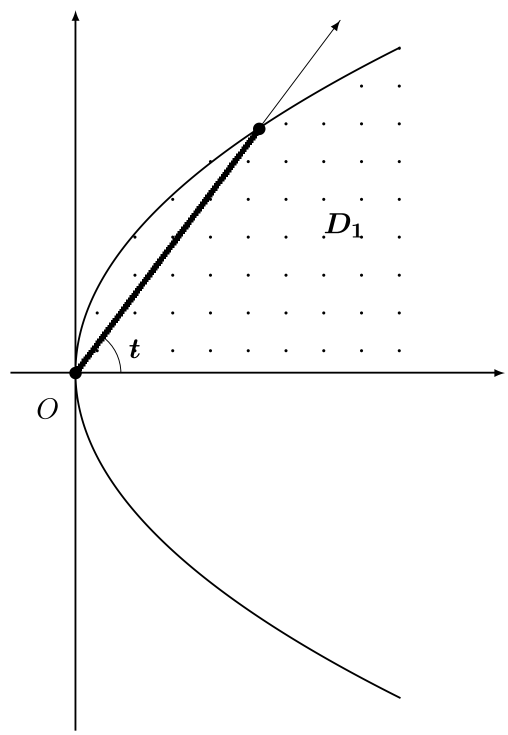
où

$$D = \{(x,y)\,|\,x \geq 0\,,\; y^2 \leq 2px\}\,,$$

et

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2+p^2)^2}\,,$$

où p est un nombre réel strictement positif.



On remarque que le domaine D est symétrique par rapport à Ox et que, si (x,y) appartient à D, on a

$$f(x,-y) = f(x,y)\,.$$

On a donc

$$I = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy$$

où D_1 est la partie du domaine D située dans le quart de plan des coordonnées positives.

La fonction f étant continue et positive, on peut intégrer en coordonnées polaires. Si $r = \varphi(t)$ est l'équation polaire de la parabole d'équation cartésienne $y^2 = 2px$. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta_1 = \left\{(r,t)\,|\,0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\,,\; 0 \leq r \leq \varphi(t)\right\}\,.$$

D'autre part
$$f(r\cos t, r\sin t) = \frac{1}{(r^2+p^2)^2}\,.$$
On a donc
$$I = 2\iint\limits_{\Delta_1} f(r\cos t, r\sin t)\, r dr\, dt = 2\iint\limits_{\Delta_1} \frac{r dr dt}{(r^2+p^2)^2}\,.$$
Cherchons l'équation polaire de la parabole. En remplaçant x et y par $r\cos t$ et $r\sin t$ respectivement dans l'équation de la parabole, on trouve
$$r^2\sin^2 t = 2pr\cos t\,,$$
d'où
$$r = \frac{2p\cos t}{\sin^2 t}\,.$$
On calcule tout d'abord
$$(I_r)_1(t) = \int\limits_0^{\frac{2p\cos t}{\sin^2 t}} \frac{r dr}{(r^2+p^2)^2} = \left[-\frac{1}{2(r^2+p^2)}\right]_{r=0}^{r=\frac{2p\cos t}{\sin^2 t}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 + \dfrac{4p^2\cos^2 t}{\sin^4 t}}\right)\,.$$
Alors
$$I = 2\int\limits_0^{\pi/2} (I_r)_1(t)\, dt = \frac{4}{p^2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t + 4\cos^2 t}\, dt\,.$$
Or
$$\frac{\cos^2 t}{\sin^4 t + 4\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t}{(1-\cos^2 t)^2 + 4\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t}{(\cos^2 t + 1)^2} = \frac{1+\tan^2 t}{(2+\tan^2 t)^2}\,.$$
En effectuant le changement de variable $u = \tan t$, qui réalise une bijection de $[\,0,\ \pi/2\,[$ sur $[\,0,\ +\infty\,[$, et pour lequel
$$du = (1+\tan^2 t)\, dt\,,$$
on obtient
$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin^4 t + 4\cos^2 t}\, dt = \int\limits_0^{\infty} \frac{du}{(u^2+2)^2}\,.$$
En intégrant par parties, on trouve
$$\int\limits_0^{\infty} \frac{du}{u^2+2} = \left[\frac{u}{u^2+2}\right]_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty} \frac{2u^2 du}{(u^2+2)^2} = 2\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{1}{u^2+2} - \frac{2}{(u^2+2)^2}\right) du\,.$$
On en déduit
$$\int\limits_0^{\infty} \frac{du}{(u^2+2)^2} = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\infty} \frac{du}{u^2+2} = \left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}\,.$$
Finalement
$$I = \frac{\pi\sqrt{2}}{4p^2}\,.$$

68) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le plan tout entier et
$$f(x,y) = e^{-x^2+2xy\cos a - y^2}\,,$$
où a n'est pas multiple entier de π.
En déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

La fonction intégrée est positive. En coordonnées polaires on intégre sur le domaine
$$\Delta = [\,0,\,\infty\,[\times[\,-\pi,\,\pi\,]\,,$$
et
$$f(r\cos t, r\sin t) = e^{-r^2(1-\sin 2t\,\cos a)}\,,$$
donc
$$I = \iint\limits_\Delta f(r\cos t, r\sin t)\,r dr\,dt = \iint\limits_\Delta r e^{-r^2(1-\sin 2t\,\cos a)}\,dr\,dt\,.$$
On calcule tout d'abord
$$I_r(t) = \int_0^\infty r e^{-r^2(1-\sin 2t\,\cos a)}\,dr = \left[-\frac{e^{-r^2(1-\sin 2t\,\cos a)}}{2(1-\sin 2t\,\cos a)}\right]_{r=0}^{r=\infty} = \frac{1}{2(1-\sin 2t\,\cos a)}\,.$$
On obtient ainsi une fonction de période π en la variable t. Alors
$$I = \int_{-\pi}^{\pi} I_r(t)\,dt = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{2(1-\sin 2t\,\cos a)}\,.$$
Or
$$\frac{1}{1-\sin 2t\,\cos a} = \frac{1}{1-\dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t}\,\cos a} = \frac{1+\tan^2 t}{\tan^2 t - 2\tan t\,\cos a + 1}\,.$$
En effectuant le changement de variable $u = \tan t$, qui réalise une bijection de $]\,-\pi/2,\,\pi/2\,[$ sur $]\,-\infty,\,+\infty\,[$, et pour lequel
$$du = (1+\tan^2 t)\,dt\,,$$
on obtient
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u^2 - 2u\cos a + 1} = \left[\frac{1}{|\sin a\,|}\,\arctan\frac{u-\cos a}{|\sin a\,|}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{|\sin a\,|}\,.$$
En particulier lorsque $a = \pi/2$, on obtient
$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \pi\,,$$

mais les variables se séparent et

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2,$$

d'où

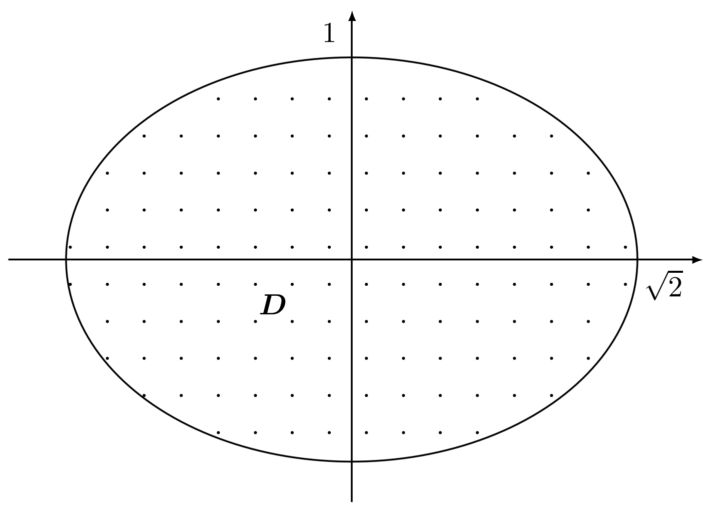
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

2.2 Coordonnées elliptiques

69) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est l'intérieur de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ et

$$f(x,y) = x^2 + y^2\,.$$



On utilise les coordonnées elliptiques

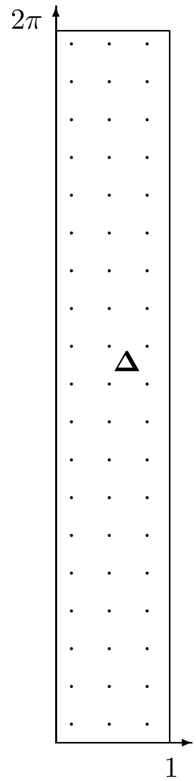
$$x = \sqrt{2}\,r\cos t \quad \text{et} \quad y = r\,\sin t\,,$$

pour lesquelles on obtient le déterminant jacobien

$$\frac{dx\,dy}{dr\,dt} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2}\,\cos t & -\sqrt{2}\,r\sin t \\ \sin t & r\,\cos t \end{vmatrix} = \sqrt{2}\,r\,.$$

On intègre sur le rectangle

$$\Delta = \{(r,t)\,|\,0 \le r \le 1\,,\,0 \le t \le 2\pi\}\,.$$



Par ailleurs

$$f(\sqrt{2}\,r\cos t, r\ \sin t) = 2r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t\,.$$

On a donc

$$I = \iint\limits_{\Delta} f(\sqrt{2}\,r\cos t, r\ \sin t)\left|\frac{dx\,dy}{dr\,dt}\right| dr\,dt = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{2}\,r^3(2\cos^2 t + \sin^2 t)\,dr\,dt\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^{2\pi}(2\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt\right)\left(\int_0^1 \sqrt{2}\,r^3\,dr\right)\,.$$

En linéarisant

$$2\cos^2 t + \sin^2 t = \cos^2 t + 1 = \frac{3 + \cos 2t}{2}\,,$$

donc

$$\int_0^{2\pi}(2\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3 + \cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left[3t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 3\pi\,.$$

On a également

$$\int_0^1 \sqrt{2}\,r^3\,dr = \left[\sqrt{2}\,\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

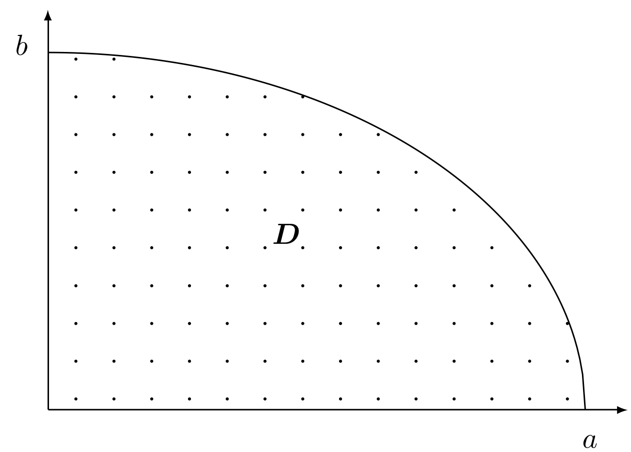
Finalement

$$I = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}\,.$$

70) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est l'intérieur du quart d'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ ($a > 0$ et $b > 0$) situé dans le quart de plan des coordonnées positives, et

$$f(x,y) = xy\,.$$



On utilise les coordonnées elliptiques

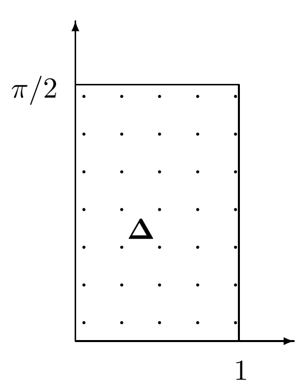
$$x = ar\cos t \quad \text{et} \quad y = br\sin t\,,$$

pour lesquelles on obtient le déterminant jacobien

$$\frac{dx\,dy}{dr\,dt} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & -ar\sin t \\ b\sin t & br\cos t \end{vmatrix} = abr\,.$$

On intègre sur le rectangle

$$\Delta = \left\{(r,t)\,|\,0 \leq r \leq 1\,,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right\}\,.$$



Par ailleurs

$$f(ar\cos t, br\sin t) = abr^2 \cos t \sin t\,.$$

On a donc

$$I = \iint\limits_{\Delta} f(ar\cos t, br\sin t) \left|\frac{dx\,dy}{dr\,dt}\right| \,dr\,dt = \iint\limits_{\Delta} a^2b^2r^3\, \cos t \sin t\,dr\,dt\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int\limits_0^{\pi/2} \cos t \sin t\,dt\right) \left(\int\limits_0^1 a^2b^2\,r^3\,dr\right) = \left(\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin 2t}{2}\,dt\right) \left(\int\limits_0^1 a^2b^2\,r^3\,dr\right)\,.$$

On a d'une part

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\,,$$

d'autre part

$$\int\limits_0^1 a^2b^2\,r^3\,dr = a^2b^2\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{a^2b^2}{4}\,.$$

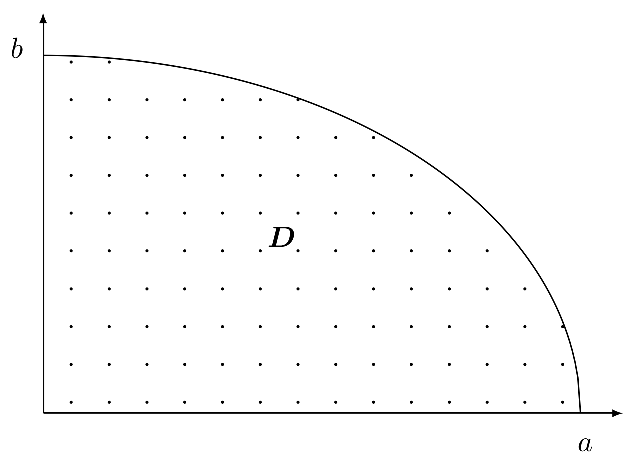
Finalement

$$I = \frac{a^2b^2}{8}\,.$$

71) Calculer $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

où D est l'intérieur du quart d'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ ($a > 0$ et $b > 0$) situé dans le quart de plan des coordonnées positives, et

$$f(x,y) = xy(b^2x^2 + a^2y^2)\,.$$



On utilise les coordonnées elliptiques

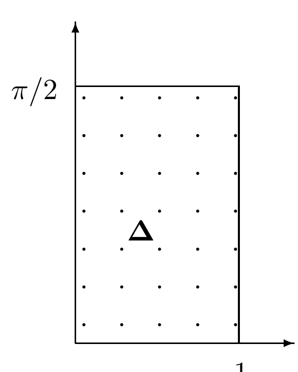
$$x = ar\cos t \quad \text{et} \quad y = br\sin t\,,$$

pour lesquelles on obtient le déterminant jacobien

$$\frac{dx\,dy}{dr\,dt} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & -ar\sin t \\ b\sin t & br\cos t \end{vmatrix} = abr\,.$$

On intègre sur le rectangle

$$\Delta = \left\{(r,t)\,|\,0 \leq r \leq 1\,,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right\}\,.$$



Par ailleurs

$$f(ar\cos t, br\sin t) = a^3b^3r^4\ \cos t\sin t\,.$$

On a donc

$$I = \iint\limits_{\Delta} f(ar\cos t, br\sin t)\left|\frac{dx\,dy}{dr\,dt}\right|\,dr\,dt = \iint\limits_{\Delta} a^4b^4r^5\ \cos t\sin t\,dr\,dt\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int\limits_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,dt\right)\left(\int\limits_0^1 a^4b^4\,r^5\,dr\right) = \left(\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin 2t}{2}\,dt\right)\left(\int\limits_0^1 a^4b^4\,r^5\,dr\right)\,.$$

On a d'une part

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\,,$$

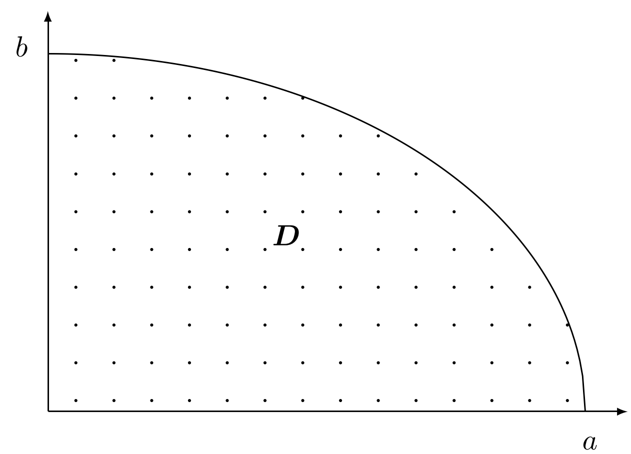
d'autre part

$$\int\limits_0^1 a^4b^4\,r^5\,dr = a^4b^4\,\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \frac{a^4b^4}{6}\,.$$

Finalement

$$I = \frac{a^4b^4}{12}\,.$$

72) Calculer les coordonnées du centre de gravité du domaine D, intérieur du quart d'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ ($a > 0$ et $b > 0$) situé dans le quart de plan des coordonnées positives.



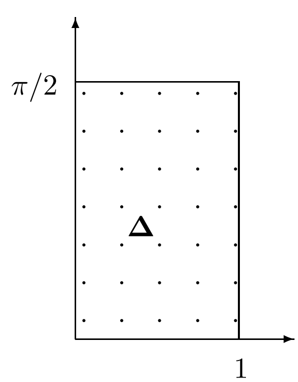
On utilise les coordonnées elliptiques

$$x = ar\cos t \quad \text{et} \quad y = br\sin t\,,$$

pour lesquelles on obtient le déterminant jacobien

$$\frac{dx\,dy}{dr\,dt} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos t & -ar\sin t \\ b\sin t & br\cos t \end{vmatrix} = abr\,.$$

On intègre sur le rectangle



$$\Delta = \left\{(r,t)\,|\,0 \leq r \leq 1\,,\ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right\}\,,$$

avec successivement

$$f(x,y) = 1 \quad \text{et} \quad f(x,y) = x\,.$$

1) $f(x,y)=1$.

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$\mathscr{A}=\iint\limits_{\Delta}\left|\frac{dx\,dy}{dr\,dt}\right|dr\,dt=\iint\limits_{\Delta}abr\,dr\,dt=\left(\int\limits_0^{\pi/2}dt\right)\left(\int\limits_0^{1}abr\,dr\right)=\frac{\pi}{2}\,ab\,\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1=\frac{\pi ab}{4}\,.$$

2) $f(x,y)=x$.

On a ici

$$f(ar\cos t, br\sin t)=ar\ \cos t\,.$$

On a donc

$$I=\iint\limits_{\Delta}f(ar\cos t, br\sin t)\left|\frac{dx\,dy}{dr\,dt}\right|dr\,dt=\iint\limits_{\Delta}a^2br^2\ \cos t\,dr\,dt\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I=\left(\int\limits_0^{\pi/2}\cos t\,dt\right)\left(\int\limits_0^{1}a^2b\,r^2\,dr\right)\,.$$

On a d'une part

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos t\,dt=\Big[\sin t\Big]_0^{\pi/2}=1$$

d'autre part

$$\int\limits_0^{1}a^2b\,r^2\,dr=a^2b\,\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1=\frac{a^2b}{3}\,.$$

Finalement

$$x_G=\frac{I}{\mathscr{A}}=\frac{4a}{3\pi}\,.$$

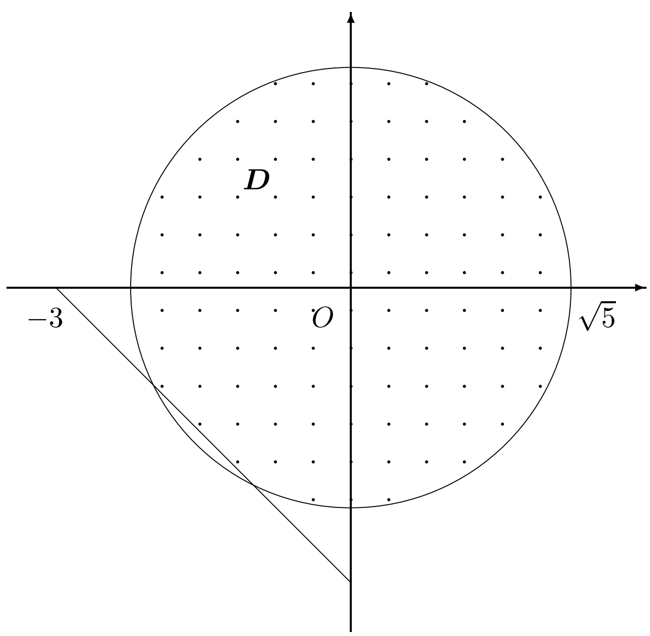
En permutant les rôles de a et b, on aura également

$$y_G=\frac{4b}{3\pi}\,.$$

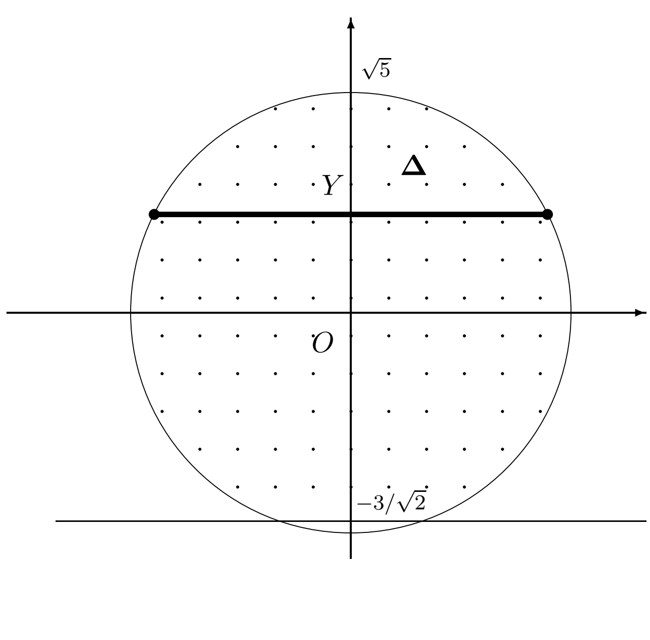
2.3 Isométries

73) Calculer $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le domaine contenant O limité par le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{5}$ et la droite d'équation $y = -x - 3$, et

$$f(x,y) = x + y\,.$$



On effectue une rotation de centre O et d'angle $\pi/4$, ramenant la droite à l'horizontal.



On a donc le changement de variables

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x-y) \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x+y)\,.$$

Ce changement de variables est donné par une matrice orthogonale et le déterminant jacobien vaut 1.

La droite d'équation

$$x+y=-3$$

a pour équation dans le nouveau repère

$$Y = -\frac{3}{\sqrt{2}}\,.$$

Le cercle d'équation

$$x^2+y^2=5$$

a pour équation dans le nouveau repère

$$X^2+Y^2=5\,.$$

Par ailleurs

$$f(x,y)=\sqrt{2}\,Y\,.$$

On intègre sur le domaine

$$\Delta = \left\{(X,Y)\mid -\sqrt{5-Y^2} \leq X \leq \sqrt{5-Y^2}\,,\, -\frac{3}{\sqrt{2}} \leq Y \leq \sqrt{5}\right\}\,,$$

et

$$I = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{2}\,Y\,dx\,dy\,.$$

Pour Y fixé dans $[-3/\sqrt{2},\ \sqrt{5}\,]$ on calcule tout d'abord

$$I_X(Y) = \int\limits_{-\sqrt{5-Y^2}}^{\sqrt{5-Y^2}} \sqrt{2}\,Y\,dX = 2\sqrt{2}\,Y\,\sqrt{5-Y^2}\,,$$

puis

$$I = \int\limits_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{5}} I_X(Y)\,dY = \int\limits_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{5}} 2\sqrt{2}Y\,\sqrt{5-Y^2}\,dY = \sqrt{2}\,\left[-\frac{2}{3}\,(5-Y^2)^{3/2}\right]_{-\frac{3}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\left(5-\frac{9}{2}\right)^{3/2} = \frac{1}{3}\,.$$

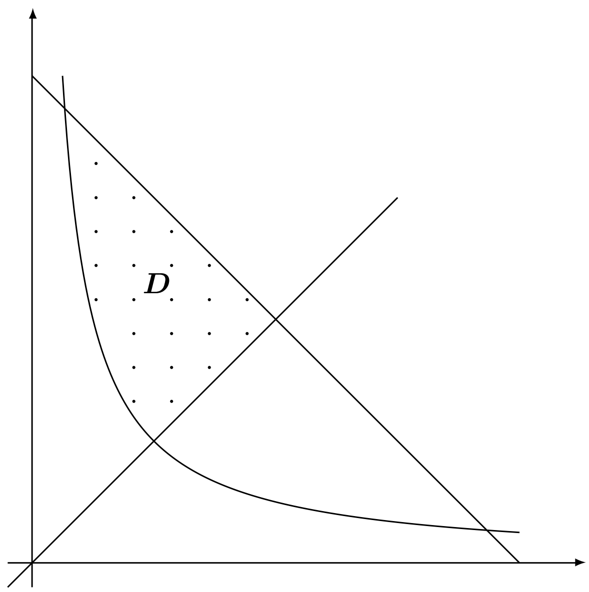
74) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

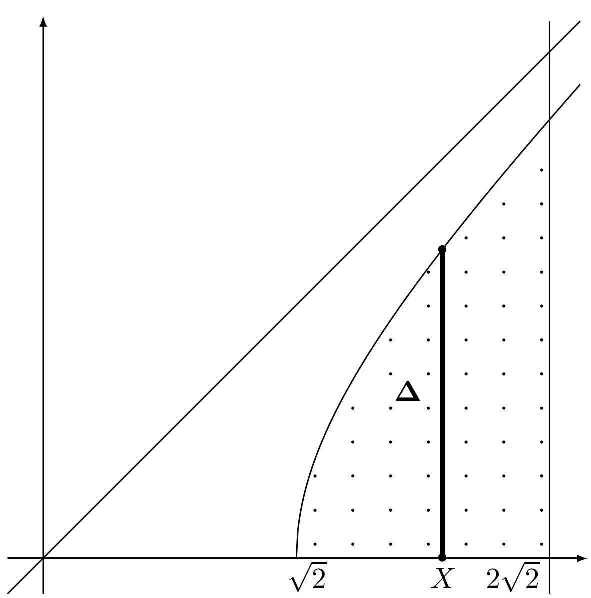
$$D = \{(x,y)\,|\,0 \leq x+y \leq 4\,,\ 0 \leq x \leq y\,,\ xy \geq 1\}\,,$$

et

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)\cos(xy)\,.$$



On effectue une rotation de centre O et d'angle $-\pi/4$, ramenant la première bissectrice à l'horizontal.



On a donc le changement de variables

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x+y) \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-x+y)\,.$$

Ce changement de variable est donné par une matrice orthogonale et le déterminant jacobien vaut 1.

La droite d'équation

$$x+y=4$$

a pour équation dans le nouveau repère

$$X = 2\sqrt{2}\,.$$

Par ailleurs, puisque

$$X^2 - Y^2 = 2xy\,,$$

l'hyperbole d'équation

$$xy = 1$$

a pour équation dans le nouveau repère

$$X^2 - Y^2 = 2\,.$$

La branche située dans le quart de plan des coordonnées positives a donc pour équation

$$Y = \sqrt{X^2-2}\,.$$

On a également

$$(x+y)(x-y) = -2XY\,,$$

donc

$$f(x,y) = -2XY\,\cos\frac{X^2-Y^2}{2}\,.$$

Le point de coordonnées $(1,1)$ est transformé en le point de coordonnées $(\sqrt{2},0)$.

On intègre sur le domaine

$$\Delta = \left\{(X,Y)\,|\,\sqrt{2} \le X \le 2\sqrt{2}\,,\, 0 \le Y \le \sqrt{X^2-2}\right\}\,,$$

et

$$I = \iint\limits_{\Delta} -2XY\,\cos\frac{X^2-Y^2}{2}\,dx\,dy\,.$$

On calcule tout d'abord

$$I_Y(X) = \int\limits_0^{\sqrt{X^2-2}} -2XY\,\cos\frac{X^2-Y^2}{2}\,dY = \left[2X\,\sin\frac{X^2-Y^2}{2}\right]_{Y=0}^{Y=\sqrt{X^2-2}} = 2X\sin 1 - 2X\,\sin\frac{X^2}{2}\,.$$

puis

$$I = \int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} I_Y(X)\,dX = \int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(2X\sin 1 - 2X\,\sin\frac{X^2}{2}\right)\,dX = \left[X^2\sin 1 + 2\,\cos\frac{X^2}{2}\right]_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\,.$$

Finalement

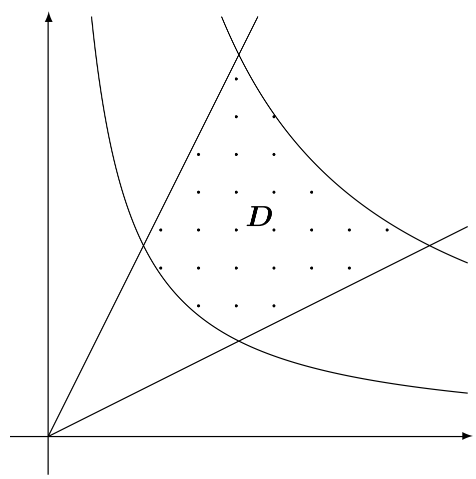
$$I = 2\cos 4 - 2\,\cos 1 + 6\sin 1\,.$$

2.4 Changements de variables divers

75) Déterminer le centre de gravité du domaine D situé dans le quart de plan des coordonnées positives, limité par les courbes d'équation

$$y = a^2 x \quad , \quad y = \frac{x}{a^2} \quad , \quad xy = b^2 \quad , \quad xy = \frac{1}{b^2} \, ,$$

où $1 < a < b$.



Effectuons le changement de variables

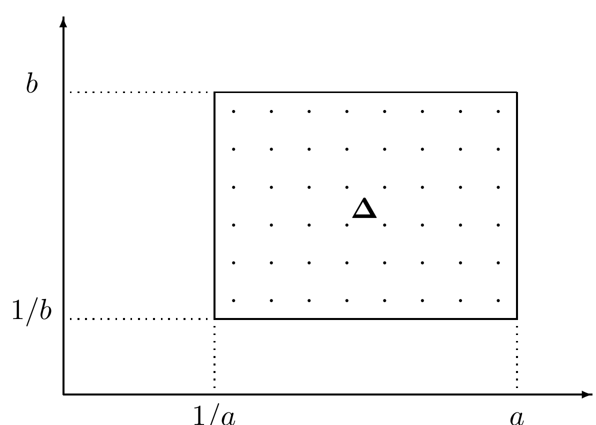
$$X = \sqrt{\frac{y}{x}} \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{xy} \, ,$$

qui donne

$$x = \frac{Y}{X} \quad \text{et} \quad y = XY \, .$$

Le domaine D se transforme dans le rectangle

$$\Delta = \left\{ (X,Y) \,|\, \frac{1}{a} < X < a \, , \, \frac{1}{b} < Y < b \right\} \, .$$



et

$$\Phi(X,Y) = \left(\frac{Y}{X}, XY\right).$$

On obtient le déterminant jacobien

$$\frac{dx\,dy}{dX\,dY} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial x}{\partial Y} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial X} & \dfrac{\partial y}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{Y}{X^2} & \dfrac{1}{X} \\[2ex] Y & X \end{vmatrix} = -2\,\frac{Y}{X}.$$

Pour le calcul de l'aire, on obtient

$$\mathscr{A} = \iint_D dxdy = \iint_\Delta \left|\frac{dx\,dy}{dX\,dY}\right| dX\,dY = \iint_\Delta 2\,\frac{Y}{X}\,dX\,dY.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$\mathscr{A} = \left(\int_{1/a}^{a} \frac{dX}{X}\right)\left(\int_{1/b}^{b} 2Y\,dY\right) = 2\left(b^2 - \frac{1}{b^2}\right)\ln a.$$

De même

$$I_x = \iint_D x\,dxdy = \iint_\Delta \left|\frac{dx\,dy}{dX\,dY}\right| \frac{Y}{X}\,dX\,dY = \iint_\Delta 2\frac{Y^2}{X^2}\,dX\,dY.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_{1/a}^{a} \frac{dX}{X^2}\right)\left(\int_{1/b}^{b} 2Y^2\,dY\right) = \frac{2}{3}\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b^3 - \frac{1}{b^3}\right).$$

Enfin

$$I_y = \iint_D y\,dxdy = \iint_\Delta \left|\frac{dx\,dy}{dX\,dY}\right| Y X\,dX\,dY = \iint_\Delta 2Y^2\,dX\,dY.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

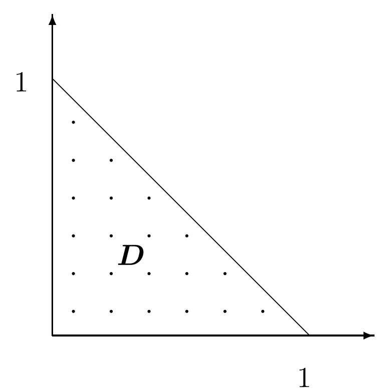
$$I = \left(\int_{1/a}^{a} dX\right)\left(\int_{1/b}^{b} 2Y^2\,dY\right) = \frac{2}{3}\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b^3 - \frac{1}{b^3}\right).$$

On trouve donc

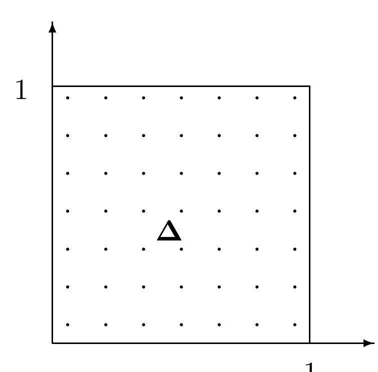
$$x_G = y_G = \frac{1}{3}\,\frac{\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b^3 - \frac{1}{b^3}\right)}{\left(b^2 - \frac{1}{b^2}\right)\ln a} = \frac{1}{3}\,\frac{\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(b^2 + 1 + \frac{1}{b^2}\right)}{\left(b + \frac{1}{b}\right)\ln a}.$$

76) Calculer $I = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

où
$$D = \{(x,y) \,|\, x > 0\,,\ y > 0\,,\ x + y < 1\}\,.$$
et
$$f(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x}}\,\ln(1 - x - y)\,,$$
en utilisant le changement de variables
$$x = X(1-Y) \quad \text{et} \quad y = XY\,.$$



On a également
$$X = x + y \quad \text{et} \quad Y = \frac{y}{x+y}\,.$$
Si (x,y) appartient à D, alors $X < 1$, $XY > 0$ et $X(1-Y) > 0$, ce qui implique $0 < X < 1$ et $0 < Y < 1$. Le couple (X,Y) appartient au carré
$$\Delta =]\,0,\,1\,[^2\,.$$
Inversement, si (X,Y) appartient à Δ, alors $0 < x + y < 1$, puis
$$0 < \frac{y}{x+y} < 1$$
donc $y > 0$ et $y < x + y$ ce qui montre que $x > 0$. Il en résulte que (x,y) est dans D.



On obtient le déterminant jacobien

$$\frac{dx\,dy}{dX\,dY} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial x}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial y}{\partial X} & \dfrac{\partial y}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-Y & -X \\ Y & X \end{vmatrix} = X\,.$$

D'autre part

$$f(x,y) = \frac{XY}{\sqrt{X(1-Y)}}\,\ln(1-X)\,.$$

Alors

$$I = \iint\limits_{\Delta} \left|\frac{dx\,dy}{dX\,dY}\right| \frac{XY}{\sqrt{X(1-Y)}}\,\ln(1-X)\,dX\,dY = \iint\limits_{\Delta} \frac{X^{3/2}\,Y}{\sqrt{1-Y}}\,\ln(1-X)\,dX\,dY\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^1 X^{3/2}\,\ln(1-X)\,dX\right)\left(\int_0^1 \frac{Y}{\sqrt{1-Y}}\,dY\right)\,.$$

Tout d'abord

$$I_1 = \int_0^1 \frac{Y}{\sqrt{1-Y}}\,dY = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1-Y}} - \sqrt{1-Y}\right)\,dY = \left[-2\sqrt{1-Y} + \frac{2}{3}\,(1-Y)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\,.$$

Ensuite, en effectuant le changement de variable $X = t^2$, qui donne $dX = 2t\,dt$, on a

$$I_2 = \int_0^1 X^{3/2}\,\ln(1-X)\,dX = 2\int_0^1 t^4\,\ln(1-t^2)\,dt\,.$$

En intégrant par parties

$$\int t^4\,\ln(1-t^2)\,dt = \frac{t^5}{5}\,\ln(1-t^2) + \int \frac{t^5}{5}\,\frac{2t}{1-t^2}\,dt\,.$$

Mais

$$\frac{t^6}{1-t^2} = -\frac{1-t^6}{1-t^2} + \frac{1}{1-t^2} = -(t^4+t^2+1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int t^4\,\ln(1-t^2)\,dt &= \frac{1}{5}\left(t^5\ln(1-t^2) - \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} - 2t + \ln\frac{1+t}{1-t}\right)\\ &= \frac{1}{5}\left((t^5-1)\,\ln(1-t) + (t^5+1)\,\ln(1+t) - \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} - 2t\right)\,.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[\frac{2}{5}\left((t^5-1)\ \ln(1-t)+(t^5+1)\ \ln(1+t)-\frac{2t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}-2t\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{5}\left(2\ln 2-\frac{2}{5}-\frac{2}{3}-2\right)=\frac{2}{5}\left(2\ln 2-\frac{46}{15}\right). \end{aligned}$$

Finalement

$$I = I_1 \times I_2 = \frac{8}{15}\left(2\ln 2-\frac{46}{15}\right).$$

77) Soit a un nombre réel strictement positif. Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

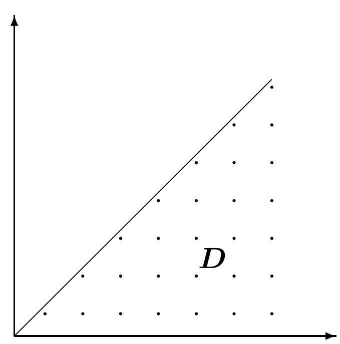
$$D = \{(x,y)\,|\,0 < y < x\}\,.$$

et

$$f(x,y) = \frac{(x-y)^a}{(x+y)^a(1+(x^2-y^2)^2)}\,,$$

en utilisant le changement de variables

$$X = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{et} \quad Y = x^2 - y^2\,.$$

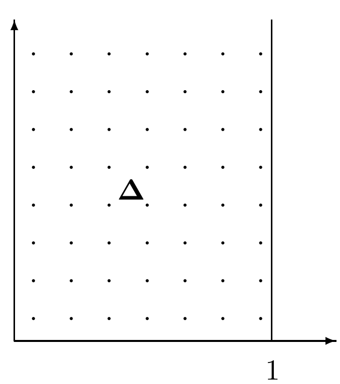


Si (x,y) appartient à D, on a alors

$$Y > 0 \quad \text{et} \quad 0 < X < 1\,,$$

donc (X,Y) appartient à

$$\Delta = \{(X,Y)\,|\,0 < X < 1\,,\, Y > 0\}\,.$$



Montrons que l'application Ψ définie par

$$\Psi(x,y) = \left(\frac{x-y}{x+y}, x^2-y^2\right)\,,$$

est une bijection de D sur Δ.

Si (X, Y) appartient à Δ, considérons le système

$$\left\{\begin{array}{l} X = \dfrac{x-y}{x+y} \\ \\ Y = x^2 - y^2 \end{array}\right.$$

alors

$$1 - X = \frac{2y}{x+y} > 0 \quad \text{et} \quad Y = (x-y)(x+y) > 0\,.$$

Les nombres y, $x+y$, $x-y$ sont de même signe. Le système conduit à

$$XY = (x-y)^2 \quad \text{et} \quad \frac{Y}{X} = (x+y)^2\,.$$

Si l'on cherche une solution dans D, les nombres $x+y$ et $x-y$ sont alors positifs et l'on a

$$x - y = \sqrt{XY} \quad \text{et} \quad x + y = \sqrt{\frac{Y}{X}}\,,$$

donc

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{Y}{X}} + \sqrt{XY}\right) \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{Y}{X}} - \sqrt{XY}\right)\,.$$

Le système a une solution au plus dans D.

Si (X, Y) est dans Δ, posons

$$\Phi(X, Y) = (x, y) = \left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{Y}{X}} + \sqrt{XY}\right), \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{Y}{X}} - \sqrt{XY}\right)\right)\,.$$

On a de manière évidente $x > y$. Par ailleurs

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Y}{X}}\,(1 - X) > 0\,.$$

Donc (x, y) est dans D.

En remontant les calculs précédents, on a

$$x - y = \sqrt{XY} \quad \text{et} \quad x + y = \sqrt{\frac{Y}{X}}\,,$$

puis

$$\frac{x-y}{x+y} = \sqrt{X^2} = X \quad \text{et} \quad (x-y)(x+y) = \sqrt{Y^2} = Y\,,$$

donc

$$\Psi\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{Y}{X}} + \sqrt{XY}\right), \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{Y}{X}} - \sqrt{XY}\right)\right) = (X, Y)\,.$$

On obtient le déterminant jacobien

$$\frac{dX\,dY}{dx\,dy} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{2y}{(x+y)^2} & -\dfrac{2x}{(x+y)^2} \\ \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = 4\,\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2} = 4X\,.$$

Donc

$$\frac{dx\,dy}{dX\,dY} = \frac{1}{4X}\,.$$

D'autre part

$$f(x,y) = \frac{X^a}{1+Y^2}\,.$$

Alors

$$I = \iint\limits_{\Delta} f(x,y)\left|\frac{dx\,dy}{dX\,dY}\right| dX\,dY = \iint\limits_{\Delta} \frac{1}{4}\,\frac{X^{a-1}}{1+Y^2}\,dX\,dY\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 X^{a-1}\,dX\right)\left(\int_0^\infty \frac{dY}{1+Y^2}\right) = \frac{\pi}{8a}\,.$$

78) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$

où

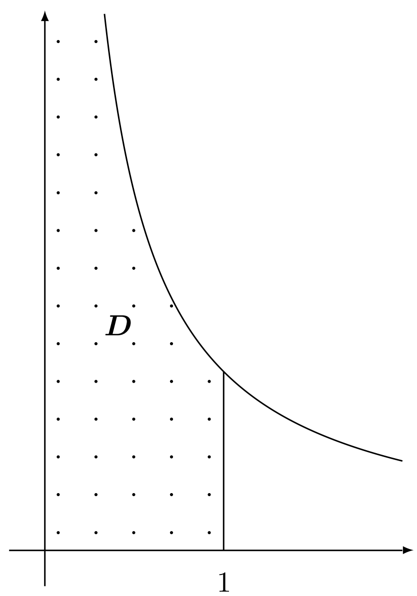
$$D = \left\{(x,y)\,|\,0 < x < 1\,,\,0 < y < \frac{1}{x}\right\}.$$

et

$$f(x,y) = x^{-1/4}y^{-1/2}\,,$$

en utilisant le changement de variables

$$x = X \quad \text{et} \quad y = \frac{Y}{X}\,.$$

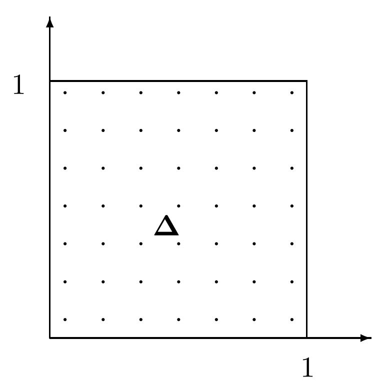


On a donc

$$X = x \quad \text{et} \quad Y = xy\,,$$

et l'on constate que (x,y) appartient à D, si et seulement si (X,Y) appartient à

$$\Delta =]\,0,\,1\,[^2\,.$$



On obtient le déterminant jacobien

$$\frac{dx\,dy}{dX\,dY} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial x}{\partial Y} \\[2ex] \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\[2ex] -\dfrac{Y}{X^2} & \dfrac{1}{X} \end{vmatrix} = \frac{1}{X}\,.$$

D'autre part

$$f(x,y) = X^{-1/4}\,\left(\frac{Y}{X}\right)^{-1/2} = X^{1/4}\,Y^{-1/2}\,.$$

On calcule donc

$$I = \iint\limits_{\Delta} f\left(X, \frac{Y}{X}\right)\,\left|\frac{dx\,dy}{dX\,dY}\right|\,dX\,dY = \iint\limits_{\Delta} X^{-3/4}\,Y^{-1/2}\,dX\,dY\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^1 X^{-3/4}\,dX\right)\,\left(\int_0^1 Y^{-1/2}\,dy\right) = \Big[4X^{1/4}\Big]_0^1\,\Big[2Y^{1/2}\Big]_0^1 = 8\,.$$

79) Calculer $I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$
où D est le domaine situé dans le demi-plan des ordonnées positives, limité par les courbes d'équation

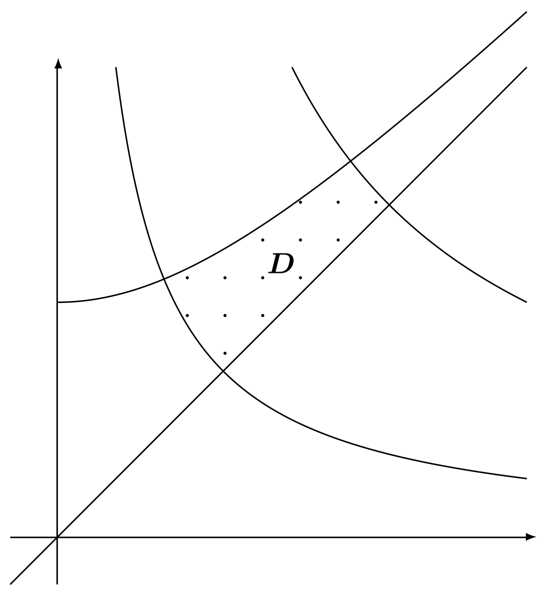
$$y = x \quad , \quad xy = a \quad , \quad y^2 - x^2 = 1 \quad , \quad xy = b\,,$$

où $0 < a < b$, et

$$f(x,y) = (y^2 - x^2)^{xy}\,(x^2 + y^2)\,,$$

en utilisant le changement de variables

$$X = xy \quad \text{et} \quad Y = y^2 - x^2\,.$$



On obtient le déterminant jacobien

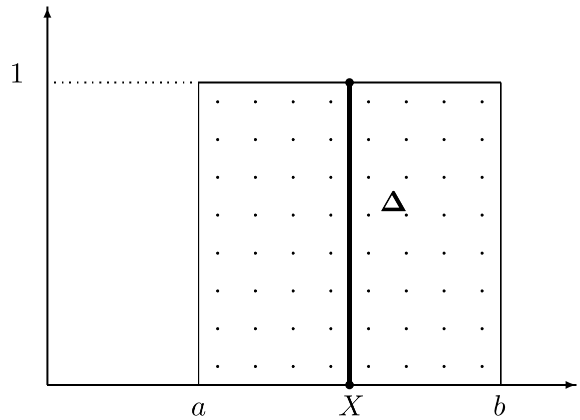
$$\frac{dX\,dY}{dx\,dy} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial x} & \dfrac{\partial X}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} & \dfrac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \\ -2x & 2y \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2)\,.$$

Le domaine D se transforme dans le rectangle

$$\Delta = \{(X,Y)\,|\, a < X < b\,,\, 0 < Y < 1\}\,.$$

Par ailleurs

$$f(x,y)\left|\frac{dx\,dy}{dX\,dY}\right| = (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\,Y^X\,.$$



On a donc

$$I = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} Y^X \, dX \, dY \, .$$

On obtient tout d'abord

$$I_Y(X) = \frac{1}{2} \int_0^1 Y^X \, dY = \frac{1}{2} \left[\frac{Y^{X+1}}{X+1} \right]_{Y=0}^{Y=1} = \frac{1}{2} \, \frac{1}{X+1} \, ,$$

puis

$$I = \int_a^b I_Y(X) \, dX = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{dX}{X+1} = \frac{1}{2} \Big[\ln(X+1) \Big]_a^b = \frac{1}{2} \, \ln \frac{b+1}{a+1} \, .$$

80) Soit t, α et β trois nombres réels strictement positifs. On pose

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\,dx \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx\,.$$

Montrer que

$$\Gamma(\alpha+\beta)\,\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,.$$

En déduire $\Gamma(1/2)$.

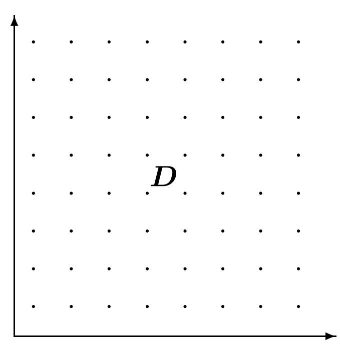
Remarquons que les deux intégrales $\Gamma(t)$ et $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ sont convergentes.

Considérons la fonction f continue positive, définie sur le domaine

$$D =]\,0,\,+\infty\,[^{\,2}$$

par

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} x^{\alpha-1}\,y^{\beta-1}\,.$$



Comme les variables se séparent, on a

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \left(\int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y} y^{\beta-1}\,dy\right) = \Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,.$$

Effectuons le changement de variables

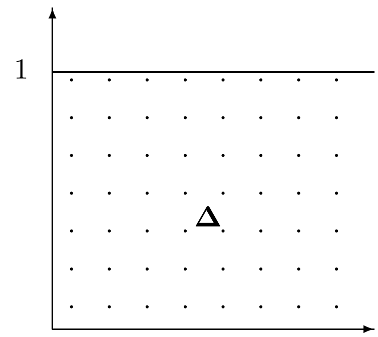
$$X = x+y \quad \text{et} \quad Y = \frac{x}{x+y}\,.$$

Il établit une bijection de D sur le domaine

$$\Delta =]\,0,\,\infty\,[\,\times\,]\,0,\,1\,[\,,$$

car on a alors

$$x = XY \quad y = (1-Y)X\,.$$



On obtient le déterminant jacobien

$$\frac{dx\,dy}{dX\,dY} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial X} & \dfrac{\partial x}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial y}{\partial X} & \dfrac{\partial y}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y & X \\ 1-Y & -X \end{vmatrix} = -X\,.$$

D'autre part

$$f(x,y) = f(XY,(1-Y)X) = e^{-X}(XY)^{\alpha-1}\big[(1-Y)X\big]^{\beta-1}\,.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Delta f(XY,(1-Y)X \left|\frac{dx\,dy}{dX\,dY}\right| dX\,dY \\ &= \iint_\Delta e^{-X}(XY)^{\alpha-1}\big[(1-Y)X\big]^{\beta-1} \left|\frac{dx\,dy}{dX\,dY}\right| dX\,dY \\ &= \iint_\Delta e^{-X}X^{\alpha+\beta-1}\,Y^{\alpha-1}(1-Y)^{\beta-1}\,dX\,dY\,. \end{aligned}$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^\infty e^{-X}X^{\alpha+\beta-1}\,dX\right)\left(\int_0^1 Y^{\alpha-1}(1-Y)^{\beta-1}\,dY\right) = \Gamma(\alpha+\beta)\,\mathrm{B}(\alpha,\beta)\,.$$

Deuxième partie

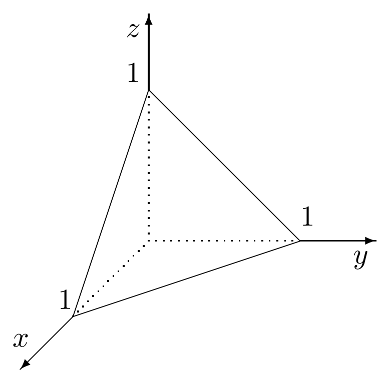
INTEGRATION DANS $\mathbb{R}^3$

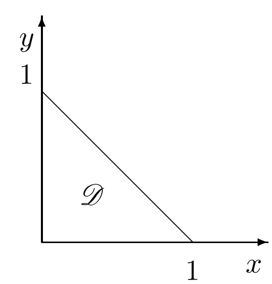
Chapitre 3

THEOREME DE FUBINI

81) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
où D est le domaine limité par les plans d'équation $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ et

$$f(x,y,z) = (x+y+z)^2\,.$$





La projection du domaine D sur le plan xOy est le domaine $\mathscr{D}$ limité par les axes et la droite d'équation $x+y=1$.

Lorsque (x,y) appartient à $\mathscr{D}$, on a

$$I_z(x,y) = \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)^2\,dz = \left[\frac{(x+y+z)^3}{3}\right]_{z=0}^{z=1-x-y} = \frac{1}{3}\big(1-(x+y)^3\big)\,.$$

On calcule alors l'intégrale double

$$I = \iint_{\mathscr{D}} \frac{1}{3}\left(1-(x+y)^3\right)\,dx\,dy\,.$$

Lorsque x est compris entre 0 et 1, on a

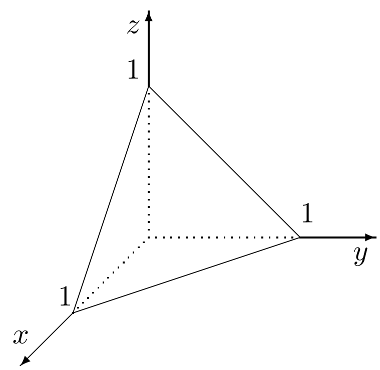
$$I_{zy}(x) = \int_0^{1-x} I_z(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} \frac{1}{3}\left(1-(x+y)^3\right)\,dy = \frac{1}{3}\left[y-\frac{(x+y)^4}{4}\right]_{y=0}^{y=1-x} = \frac{1}{4}-\frac{x}{3}+\frac{1}{12}x^4\,.$$

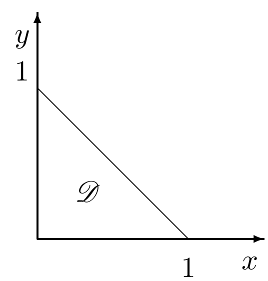
Alors

$$I = \int_0^1 I_{zy}(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}-\frac{x}{3}+\frac{1}{12}x^4\right)\,dx = \left[\frac{x}{4}-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{60}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{10}\,.$$

82) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
où D est le domaine limité par les plans d'équation $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ et

$$f(x,y,z) = e^{x+y+z}\,.$$





La projection du domaine D sur le plan xOy est le domaine $\mathscr{D}$ limité par les axes et la droite d'équation $x+y=1$.

Lorsque (x,y) appartient à $\mathscr{D}$, on a

$$I_z(x,y) = \int_0^{1-x-y} e^{x+y+z}\,dz = \Big[e^{x+y+z}\Big]_{z=0}^{z=1-x-y} = e - e^{x+y}\,.$$

On calcule alors l'intégrale double

$$I = \iint\limits_{\mathscr{D}} \left(e - e^{x+y}\right)\,dx\,dy\,.$$

Lorsque x est compris entre 0 et 1, on a

$$I_{zy}(x) = \int_0^{1-x} I_z(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} \left(e - e^{x+y}\right)\,dy = \Big[ey - e^{x+y}\Big]_{y=0}^{y=1-x} = e(1-x) - e + e^x = e^x - ex\,.$$

Alors

$$I = \int_0^1 I_{zy}(x)\,dx = \int_0^1 (e^x - ex)\,dx = \left[e^x - \frac{ex^2}{2}\right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1\,.$$

83) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

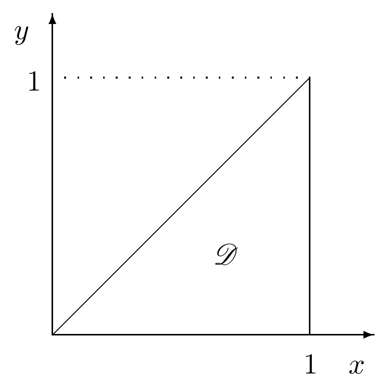
où

$$D = \{(x,y,z)\,|\,0 \leq z \leq x^2+y^2\,,\ 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$

et

$$f(x,y,z) = x+y+z\,.$$

La projection du domaine D sur le plan xOy est le domaine $\mathscr{D}$ limité par Ox et les droites d'équation $y = x$ et $x = 1$.



Lorsque (x,y) appartient à $\mathscr{D}$, on a

$$I_z(x,y) = \int\limits_0^{x^2+y^2} (x+y+z)\,dz = \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=x^2+y^2} = (x+y)(x^2+y^2) + \frac{(x^2+y^2)^2}{2}\,.$$

On a donc

$$I_z(x,y) = \frac{1}{2}\,(x^4+y^4) + x^3 + xy^2 + yx^2 + y^3 + x^2y^2\,.$$

On calcule alors l'intégrale double

$$I = \iint\limits_{\mathscr{D}} I_z(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Lorsque x est compris entre 0 et 1, on a

$$
\begin{aligned}
I_{zy}(x) &= \int_0^x I_z(x,y)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^x \big(y^4 + 2y^3 + 2(x^2+x)y^2 + 2x^2y + (x^4+2x^3)\big)\,dy \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{y^5}{5} + \frac{y^4}{2} + 2(x^2+x)\,\frac{y^3}{3} + x^2y^2 + (x^4+2x^3)y\right]_{y=0}^{y=x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + 2(x^2+x)\,\frac{x^3}{3} + x^4 + (x^4+2x^3)x\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{14x^5}{15} + \frac{25x^4}{12}\right)\,.
\end{aligned}
$$

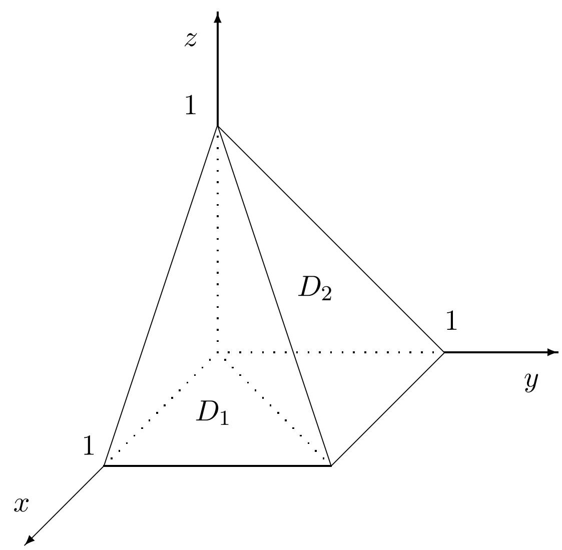
Alors

$$
I = \int_0^1 I_{zy}(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{14x^5}{15} + \frac{25x^4}{12}\right)dx = \left[\frac{7x^6}{45} + \frac{5x^5}{12}\right]_0^1 = \frac{103}{180}\,.
$$

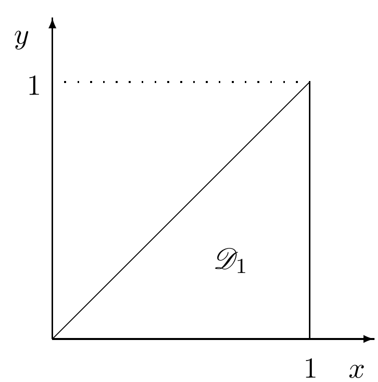
84) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
où D est le domaine limité par les plans d'équation $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+z=1$, $y+z=1$ et

$$f(x,y,z) = (x-y+z)^2 \,.$$

On sépare le domaine en deux parties grâce au plan d'équation $y=z$.



1) La projection du domaine D_1 sur le plan xOy est le triangle $\mathscr{D}_1$ limité par Ox et les droites d'équation $y=x$ et $x=1$.



Lorsque (x,y) appartient à $\mathscr{D}_1$, on a

$$I_z(x,y) = \int\limits_0^{1-x} (x-y+z)^2\,dz = \frac{1}{3}\Big[(x-y+z)^3\Big]_{z=0}^{z=1-x} = \frac{1}{3}\left((1-y)^3 - (x-y)^3\right).$$

On calcule alors l'intégrale double

$$I_1 = \frac{1}{3} \iint\limits_{\mathscr{D}_1} \left((1-y)^3 - (x-y)^3\right)\, dx\, dy\,.$$

Lorsque x est compris entre 0 et 1, on a

$$I_{zy}(x) = \int\limits_0^x I_z(x,y)\, dy = \frac{1}{3} \int\limits_0^x \left((1-y)^3 - (x-y)^3\right)\, dy = \frac{1}{3} \left[-\frac{(1-y)^4}{4} + \frac{(x-y)^4}{4}\right]_{y=0}^{y=x},$$

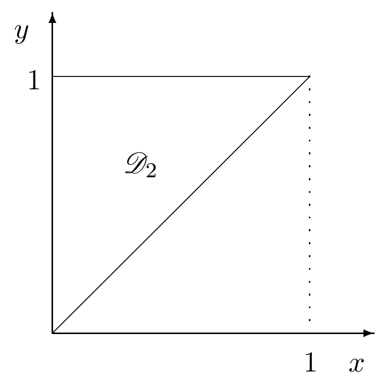
d'où

$$I_{zy}(x) = \frac{1}{12}\,(-(1-x)^4 + 1 - x^4)\,.$$

Alors

$$I_1 = \int\limits_0^1 I_{zy}(x)\, dx = \frac{1}{12} \int\limits_0^1 (-(x-1)^4 + 1 - x^4)\, dx = \frac{1}{12} \left[-\frac{(x-1)^5}{5} + x - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{20}\,.$$

2) La projection du domaine D_2 sur le plan xOy est le triangle $\mathscr{D}_2$ limité par Oy et les droites d'équation $y = x$ et $y = 1$.



Lorsque (x,y) appartient à $\mathscr{D}_2$, on a

$$I_z(x,y) = \int\limits_0^{1-y} (x-y+z)^2\, dz = \frac{1}{3}\Big[(x-y+z)^3\Big]_{z=0}^{z=1-y} = \frac{1}{3}\left((x+1-2y)^3 - (x-y)^3\right).$$

On calcule ensuite l'intégrale double

$$I_2 = \frac{1}{3} \iint\limits_{\mathscr{D}_2} \left((x+1-2y)^3 - (x-y)^3\right)\, dx\, dy\,.$$

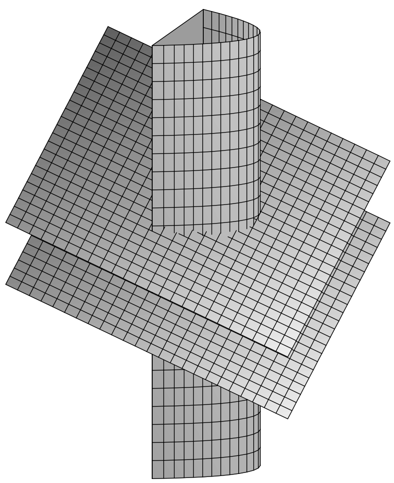
Lorsque y est compris entre 0 et 1, on a

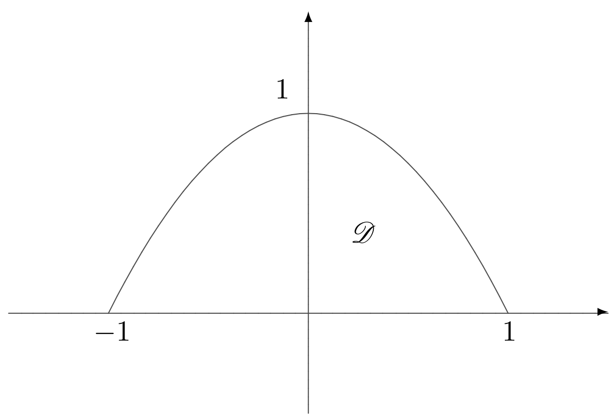
$$I_{zx}(y) = \int\limits_0^y I_z(x,y)\, dx = \frac{1}{3} \int\limits_0^y \left((x+1-2y)^3 - (x-y)^3\right)\, dx = \frac{1}{3} \left[\frac{(x+1-2y)^4}{4} - \frac{(x-y)^4}{4}\right]_{x=0}^{x=y}$$

d'où
$$I_{zx}(y) = \frac{1}{12}\left((1-y)^4 - (1-2y)^4 + y^4\right).$$
Alors
$$I_2 = \int_0^1 I_{zx}(y)\,dy = \frac{1}{12}\int_0^1 \left((y-1)^4 - (2y-1)^4 + y^4\right) dy = \frac{1}{12}\left[\frac{(y-1)^5}{5} - \frac{(2y-1)^5}{10} + \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{60}.$$
Finalement
$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{20} + \frac{1}{60} = \frac{1}{15}.$$

85) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

où
$$D = \{(x,y,z)\,|\,0 \le y \le 1 - x^2\,,\ |x+y+z| \le 1\,,$$
et
$$f(x,y,z) = x^2 y\,.$$





Le domaine D est limité par les deux plans d'équations respectives $x+y+z=1$ et $x+y+z=-1$. Sa projection sur les plan xOy est le domaine $\mathscr{D}$ limité par l'axe Ox et la parabole d'équation $y = 1-x^2$.

Si (x,y) est un point de $\mathscr{D}$, on calcule alors
$$I_z(x,y) = \int\limits_{-1-x-y}^{1-x-y} x^2 y\,dz = 2x^2 y\ .$$
Puis on calcule l'intégrale double
$$I = \iint\limits_{\mathscr{D}} I_z(x,y)\,dx\,dy\,.$$
Donc
$$I_{zy}(x) = \int\limits_0^{1-x^2} 2x^2 y\,dy = \Big[x^2 y^2\Big]_{y=0}^{y=1-x^2} = x^2(1-x^2)^2\,,$$

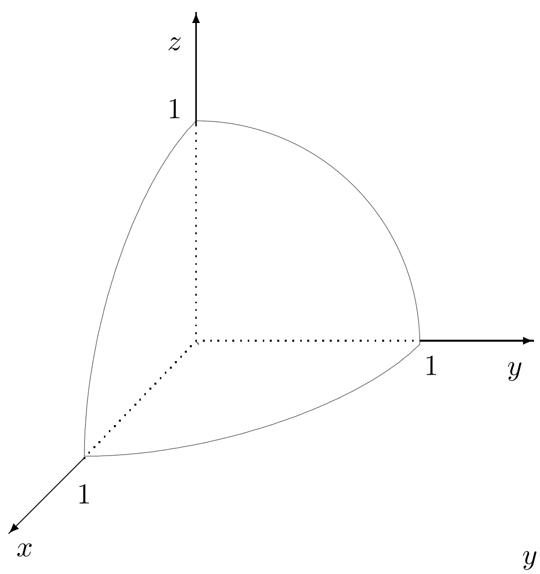
et finalement

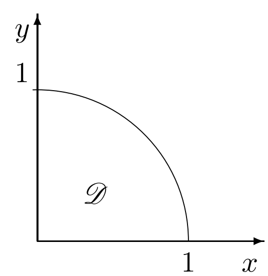
$$I = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)^2\,dx = \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^4 + x^6)\,dx = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) = \frac{16}{105}\,.$$

86) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

où D est le domaine limité par les plans d'équation $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, et la sphère de centre O et de rayon 1, dont les points ont des coordonnées positives

$$f(x,y,z) = xyz\,.$$





La projection sur les plan xOy du domaine D est le domaine $\mathscr{D}$ situé dans le quart de plan $x \geq 0$, $y \geq 0$, limité par les axes et le cercle d' équation $x^2 + y^2 = 1$.

Si (x,y) est un point de $\mathscr{D}$, on calcule alors

$$I_z(x,y) = \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz = \frac{1}{2}xy(1 - x^2 - y^2)\,.$$

On calcule ensuite l'intégrale double

$$I = \iint\limits_{\mathscr{D}} I_z(x,y)\,dx\,dy\,.$$

Donc

$$\begin{aligned} I_{zy}(x) &= \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} xy(1-x^2-y^2)\,dy \\ &= \frac{x}{2} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \big((1-x^2)y - y^3\big)\,dy \\ &= \frac{x}{2} \left[(1-x^2)\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x(1-x^2)^2}{8}\,. \end{aligned}$$

Finalement

$$I = \int_0^1 \frac{x(1-x^2)^2}{8}\,dx = \left[-\frac{(1-x^2)^3}{48}\right]_0^1 = \frac{1}{48}\,.$$

87) Soit $\mathscr{D}$ une partie du demi-plan xOy d'ordonnées positives, d'aire $\mathscr{A}(\mathscr{D})$ et de centre de gravité G, et soit
$$D = \{(x,y,z) \,|\, 0 \leq z \leq \lambda y + \mu \,,\ (x,y) \in \mathscr{D}\}$$
(cylindre tronqué), où λ et μ sont des nombres positifs. Montrer que
$$\mathscr{V}(D) = (\lambda y_G + \mu)\,\mathscr{A}(\mathscr{D})\,.$$
Application : $\mathscr{D}$ est limité par l'ellipse d'équation
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-c)^2}{b^2} = 1$$
où $c > b > 0$ et $a > 0$.

On calcule
$$\mathscr{V}(D) = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz\,.$$
Lorsque (x,y) appartient à $\mathscr{D}$, on a
$$I_z(x,y) = \int\limits_0^{\lambda y+\mu} dz = \lambda y + \mu\,.$$
Alors
$$\mathscr{V}(D) = \iint\limits_{\mathscr{D}} I_z(x,y)\,dx\,dy = \lambda \iint\limits_{\mathscr{D}} y\,dx\,dy + \mu \iint\limits_{\mathscr{D}} dx\,dy = \lambda\,\mathscr{A}(\mathscr{D})\,y_G + \mu\,\mathscr{A}(\mathscr{D})\,.$$
Pour l'ellipse
$$\mathscr{A}(\mathscr{D}) = \pi ab \quad \text{et} \quad y_G = c\,,$$
d'où
$$\mathscr{V}(D) = \pi ab(\lambda c + \mu)\,.$$

88) Soit D un domaine de $\mathbb{R}^3$ tel que, pour tout z compris entre a et b, $(a < b)$, l'intersection de D et du plan orthogonal à Oz ait pour aire $S(z)$.
Montrer que si S est un polynôme de degré au plus 3, le volume $\mathscr{V}$ de D est donné par la formule

$$\mathscr{V} = \frac{1}{6}(b-a)\left[S(a) + S(b) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

Retrouver le volume d'un cône de hauteur h dont la base a pour aire $\mathscr{A}$.

Le théorème de Fubini permet d'écrire

$$\mathscr{V} = \int_a^b S(z)\,dz.$$

Posons

$$\mathscr{V}' = \frac{1}{6}(b-a)\left[S(a) + S(b) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

Ces deux expressions étant linéaires en S, il suffit de démontrer leur égalité pour $S(z) = z^p$ où $\leq p \leq 3$. On a dans ce cas

$$\mathscr{V} = \int_a^b z^p\,dz = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1},$$

et

$$\mathscr{V}' = \frac{1}{6}(b-a)\left[a^p + b^p + 4\,\frac{(a+b)^p}{2^p}\right].$$

Si $p = 0$, on obtient

$$\mathscr{V}' = b - a = \mathscr{V}.$$

Si $p = 1$, on obtient

$$\mathscr{V}' = \frac{1}{6}(b-a)\left[a + b + 4\,\frac{(a+b)}{2}\right] = \frac{(a+b)(b-a)}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2} = \mathscr{V}.$$

Si $p = 2$, on obtient

$$\mathscr{V}' = \frac{1}{6}(b-a)\left[a^2 + b^2 + 4\,\frac{(a+b)^2}{4}\right] = \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3} = \mathscr{V}.$$

Enfin Si $p = 3$, on obtient

$$\mathscr{V}' = \frac{1}{6}(b-a)\left[a^3 + b^3 + 4\,\frac{(a+b)^3}{8}\right] = \frac{(b-a)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)}{4} = \frac{b^4 - a^4}{4} = \mathscr{V}.$$

Pour un cône, posons $a = 0$ et $b = h$. On a $S(a) = \mathscr{A}$. Lorsque z est compris entre 0 et h, l'intersection du cône et du plan orthogonal à Oz s'obtient à partir de la base par une homothétie dont le centre est le sommet du cône et le rapport $\dfrac{h-z}{h}$. Alors

$$S(z) = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 S(a)\,.$$

C'est donc un polynôme de degré 2 en z. Alors

$$S(h/2) = \frac{1}{4}\,,$$

et l'application de la formule obtenue donne

$$\mathscr{V} = \frac{h}{3}\,\mathscr{A}\,.$$

89) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

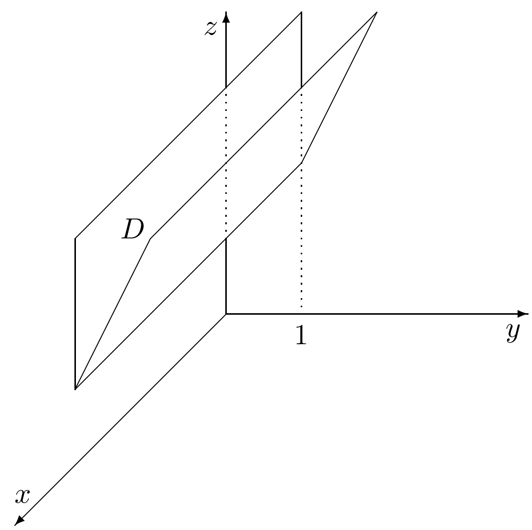
où

$$D = \{(x,y,z) \mid x \geq 0\,,\ y \geq 1\,,\ z \geq 2y\}\,,$$

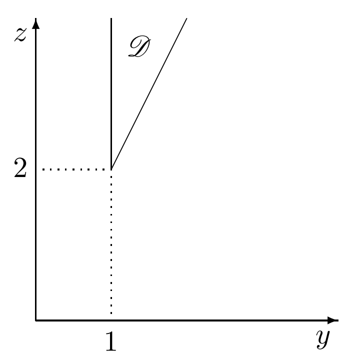
et

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(x+y+z)^4}\,.$$

La fonction f est positive sur D.



La projection sur le plan yOz est alors le domaine $\mathscr{D}$ limité par les droites $y = 1$ et $z = 2y$.



Lorsque (y,z) appartient à $\mathscr{D}$, on a

$$I_x(y,z) = \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(x+y+z)^4} = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(x+y+z)^3}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(y+z)^3}\,.$$

On calcule alors l'intégrale double

$$I = \iint\limits_{\mathscr{D}} I_x(y,z)\,dy\,dz = \frac{1}{3}\iint\limits_{\mathscr{D}} \frac{dy\,dz}{(y+z)^3}\,.$$

Lorsque x est positif

$$I_{xz}(y) = \int\limits_{2y}^{\infty} I_x(y,z)\,dz = \frac{1}{3}\int\limits_{2y}^{\infty} \frac{dy}{(y+z)^3} = -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{(y+z)^2}\right]_{z=2y}^{z=\infty} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{(3y)^2}\,.$$

Alors

$$I = \int\limits_{1}^{\infty} I_{xz}(y)\,dy = \frac{1}{54}\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{54}\left[-\frac{1}{y}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{54}\,.$$

Chapitre 4

CHANGEMENT DE VARIABLES

4.1 Coordonnées cylindriques

90) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\,dz$

où

$$D = \{(x,y,z)\,|\,0 \leq z \leq 1\,,\; x^2+y^2 \leq z^2\}\,,$$

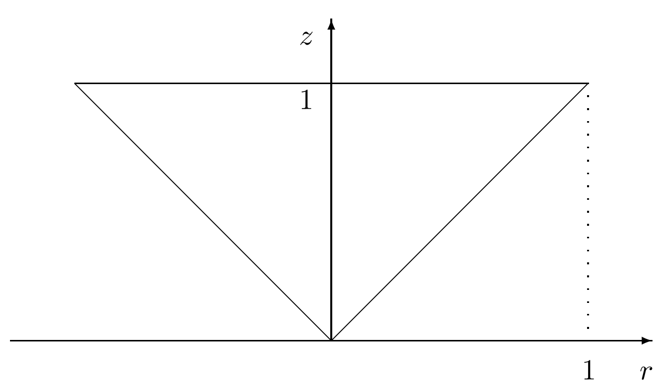
et

$$f(x,y,z) = |xyz|\,.$$

Le domaine D est invariant par rotation d'axe Oz. On utilise les coordonnées cylindriques.

$$x = r\cos t\ ,\ \ y = r\sin t\ ,\ \ z\,.$$

Le dessin suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz.



Le cône d'équation cartésienne $x^2+y^2=z^2$ a pour équation cylindrique $r=z$. On intègre donc sur le domaine
$$\Delta = \{(r,t,z)\,|\,0\le r\le z\le 1\,,\ -\pi\le t\le \pi\}\,,$$
et
$$f(r\cos t, r\sin t, z) = r^2|\cos t\sin t\,|z = \frac{r^2}{2}\,|\sin 2t\,|\,z\,.$$
Donc
$$I = \iiint\limits_{\Delta} f(r\cos t, r\sin t, z)\,r\,dr\,dt\,dz = \iiint\limits_{\Delta} \frac{r^3}{2}\,|\sin 2t\,|\,z\,dr\,dt\,dz\,.$$
Lorsque (z,t) est fixé dans $\Delta_1 = [\,0,\,1\,]\times[\,-\pi,\,\pi\,]$, la variable r est comprise entre 0 et z. On calcule tout d'abord
$$I_r(z,t) = \int_0^z \frac{r^3}{2}\,|\sin 2t\,|\,z\,dr = \left[\frac{r^4}{8}\,|\sin 2t\,|\,z\right]_{r=0}^{r=z} = \frac{z^5}{8}\,|\sin 2t\,|\,.$$
Alors
$$I = \iint\limits_{\Delta_1} I_r(z,t)\,dz\,dt\,.$$
Comme les variables se séparent, on a immédiatement
$$I = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\sin 2t\,|\,dt\right)\,\left(\int_0^1 \frac{z^5}{8}\,,dz\right)\,.$$
Comme la fonction qui à t associe $|\sin 2t\,|$ est de période $\pi/2$,
$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin 2t\,|\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt = \Big[-2\cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = 4\,.$$
Par ailleurs,
$$\int_0^1 z^5\,dz = \frac{1}{6}\,,$$
d'où
$$I = \frac{1}{12}\,.$$

91) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\,dz$

où

$$D = \{(x,y,z)\,|\,z \geq 0\,,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}\,,$$

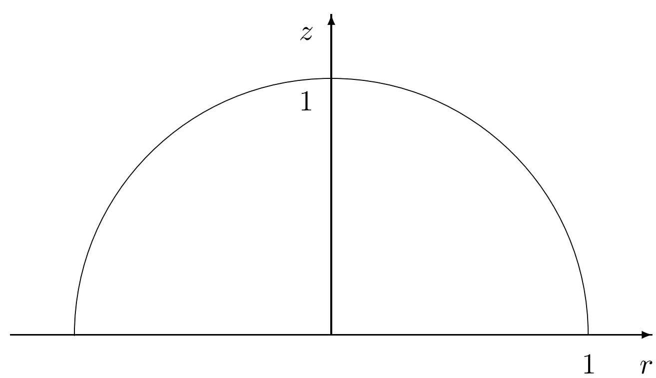
et

$$f(x,y,z) = z\,\cos(x^2+y^2)\,.$$

Le domaine D est invariant par rotation d'axe Oz (demi-sphère). On utilise les coordonnées cylindriques.

$$x = r\cos t\ ,\ \ y = r\sin t\ ,\ \ z\,.$$

Le dessin suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz.



La sphère d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2 = 1$ a pour équation cylindrique $r^2+z^2 = 1$. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \{(r,t,z)\,|\,r^2+z^2 \leq 1\,,\ -\pi \leq t \leq \pi\,,\ z \geq 0\,,\ r \geq 0\}\,,$$

et

$$f(r\cos t, r\sin t, z) = z\cos r^2\,.$$

Donc

$$I = \iiint\limits_\Delta f(r\cos t, r\sin t, z)\,r\,dr\,dt\,dz = \iiint\limits_\Delta zr\cos r^2\ dr\,dt\,dz\,.$$

Lorsque r et t sont fixés dans $\Delta_1 = [\,0,\,1\,] \times [\,-\pi,\,\pi\,]$, la variable z est comprise entre 0 et $\sqrt{1-r^2}$. On calcule tout d'abord

$$I_z(r,t) = \int\limits_0^{\sqrt{1-r^2}} zr\cos r^2\,dz = \left[\frac{z^2}{2}\,r\cos r^2\right]_{z=0}^{z=\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{2}\,(1-r^2)\,r\cos r^2\,.$$

Alors

$$I = \iint\limits_{\Delta_1} I_z(r,t)\,dr\,dt\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_{-\pi}^{\pi} dt \right) \left(\int_0^1 \frac{1}{2} (1 - r^2)\, r \cos r^2 \, dr \right) = \pi \int_0^1 (1 - r^2)\, r \cos r^2 \, dr\,.$$

Pour calculer cette intégrale, effectuons le changement de variable $u = r^2$. Alors $du = 2rdr$, et

$$I = \pi \int_0^1 (1 - u) \cos u \, \frac{du}{2}\,.$$

On intègre par parties

$$I = \frac{\pi}{2} \left\{ \Big[(1 - u) \sin u \Big]_0^1 + \int_0^1 \sin u \, du \right\} = \frac{\pi}{2} \Big[-\cos u \Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} (1 - \cos 1)\,.$$

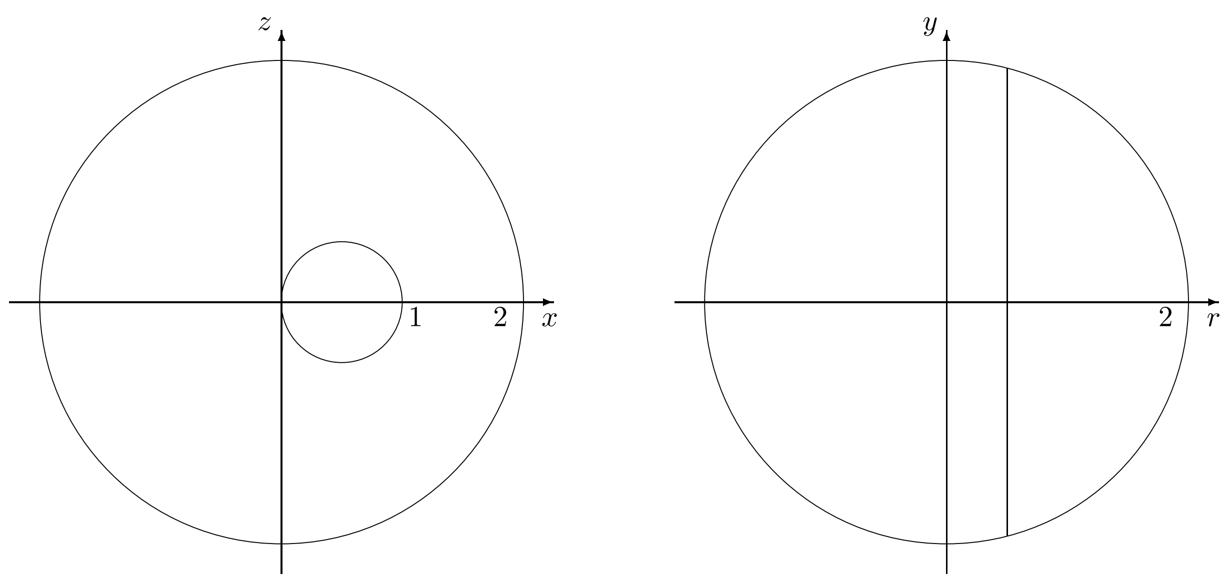
92) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\,dz$

où
$$D = \{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2 \le 4\,,\ x^2+z^2 \le x\}\,,$$

où $a > 0$, et
$$f(x,y,z) = x\,|z|\,.$$

On utilise les coordonnées cylindriques.
$$x = r\cos t\ ,\ \ z = r\sin t\ ,\ \ y\,.$$

Le dessin de gauche représente la projection de D sur xOz, celui de droite l'intersection de D avec le plan rOy.



Le cylindre d'équation cartésienne $x^2+z^2 = x$ a pour équation cylindrique $r = \cos t$ où t est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, et la sphère d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2 = 4$ a pour équation sphérique $r^2+y^2 = 4$. On intègre donc sur le domaine
$$\Delta = \left\{(r,t,z)\,|\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\,,\ r^2+y^2 \le 4\,,\ 0 \le r \le \cos t\right\}\ ,$$

et
$$f(r\cos t, r\sin t, z) = r^2\cos t\,|\sin t\,|\,.$$

Donc
$$I = \iiint\limits_\Delta f(r\cos t, r\sin t, z)\,r\,dr\,dt\,dz = \iiint\limits_\Delta r^3\cos t\,|\sin t\,|\,dr\,dt\,dz\,.$$

Pour (t, r) fixé dans $\Delta_1 = \left\{(r,t) \,|\, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\,, 0 \leq r \leq \cos t\right\}$, on calcule tout d'abord

$$I_z(t,r) = \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r^3 \cos t \,|\sin t\,|\, dz = 2r^3 \cos t \,|\sin t\,| \sqrt{4-r^2}\,.$$

Alors

$$I = \iint_{\Delta_1} I_z(t,r)\, dt\, dr\,.$$

On obtient tout d'abord

$$I_r(t) = \int_0^{\cos t} 2r^3 \cos t \,|\sin t\,| \sqrt{4-r^2}\, dr\,.$$

En effectuant le changement de variable $u = r^2$, donc $du = 2rdr$, on obtient

$$I_r(t) = \int_0^{\cos^2 t} \cos t \,|\sin t\,|\, u\sqrt{4-u}\, du\,,$$

que l'on intègre par parties

$$\begin{aligned}
I_r(t) &= \cos t \,|\sin t\,| \left\{ \left[-\frac{2}{3}\, u(4-u)^{3/2} \right]_{u=0}^{u=\cos^2 t} + \frac{2}{3} \int_0^{\cos^2 t} (4-u)^{3/2}\, du \right\} \\
&= \cos t \,|\sin t\,| \left[-\frac{2}{3}\, u(4-u)^{3/2} - \frac{4}{15}\,(4-u)^{5/2} \right]_{u=0}^{u=\cos^2 t} \\
&= \cos t \,|\sin t\,| \left(\frac{128}{15} - \frac{2}{3} \cos^2 u\, (4-\cos^2 u)^{3/2} - \frac{4}{15}\,(4-\cos^2 u)^{5/2} \right)\,.
\end{aligned}$$

Pour finir, et en utilisant la parité,

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \cos t\, \sin t \left(\frac{128}{15} - \frac{2}{3} \cos^2 t\,(4-\cos^2 t)^{3/2} - \frac{4}{15}\,(4-\cos^2 t)^{5/2} \right) dt\,.$$

En effectuant le changement de variable $v = \cos^2 t$, on a $dv = -2\sin t \cos t\, dt$ d'où

$$I = \int_0^1 \left(\frac{128}{15} - \frac{2}{3}\, v\,(4-v)^{3/2} - \frac{4}{15}\,(4-v)^{5/2} \right) dv\,.$$

En intégrant par parties

$$\int v\,(4-v)^{3/2}\, dv = -\frac{2}{5}\, v(4-v)^{5/2} + \frac{2}{5} \int (4-v)^{5/2}\, dv = -\frac{2}{5}\, v(4-v)^{5/2} - \frac{4}{35}\,(4-v)^{7/2}\,,$$

d'où

$$
\begin{aligned}
I &= \left[\frac{128}{15}\,v + \frac{4}{15}\,v(4-v)^{5/2} + \frac{16}{105}\,(4-v)^{7/2}\right]_0^1 \\
&= \frac{128}{15} + \frac{4}{15}\,3^{5/2} + \frac{16}{105}\,3^{7/2} - \frac{16}{105}\,4^{7/2} \\
&= \frac{128}{15} + \frac{12}{5}\,\sqrt{3} + \frac{144}{35}\sqrt{3} - \frac{128 \times 16}{105} \\
&= \frac{228\,\sqrt{3} - 384}{35}\,.
\end{aligned}
$$

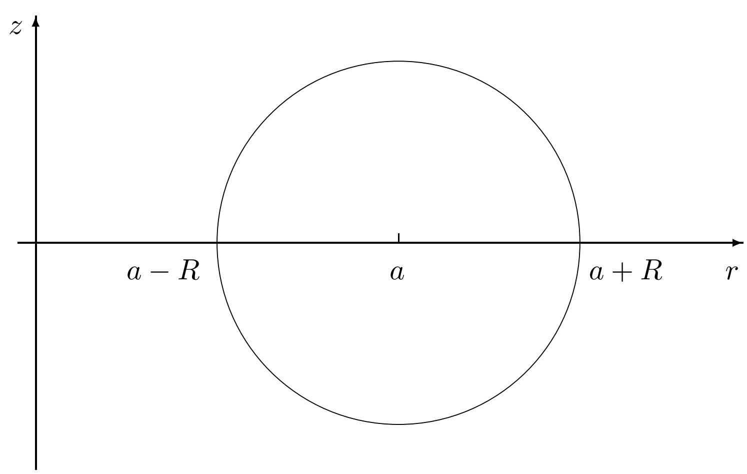
93) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\,dz$
où D est le tore engendré en faisant tourner autour de Oz, le disque limité par le cercle d'équation $(x-a)^2 + z^2 = R^2$ $(0 < R \leq a)$, et

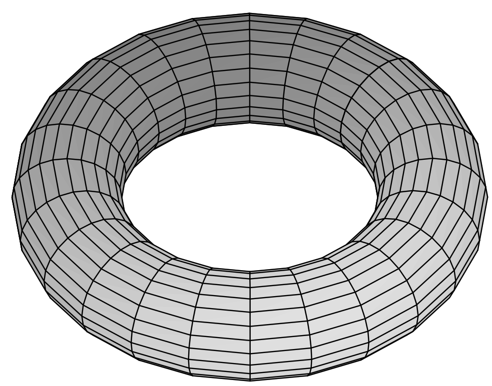
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2\,.$$

On utilise les coordonnées cylindriques.

$$x = r\cos t\ ,\ \ y = r\sin t\ ,\ \ z\,.$$

Le dessin de gauche suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz.





Le tore a pour équation cylindrique $(r-a)^2 + z^2 \leq R^2$. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \{(r,t,z) \mid -\pi \leq t \leq \pi\,,\ (r-a)^2 + z^2 \leq R^2\}\,,$$

et

$$f(r\cos t, r\sin t, z) = r^2\,.$$

On a donc

$$I = \iiint\limits_\Delta r^3\,dr\,dt\,dz\,.$$

Si l'on fixe (r,t) dans $\Delta_1 = [\,a-R,\,a+R\,] \times [\,-\pi,\,\pi\,]$, le nombre z varie de $-\sqrt{R^2-(r-a)^2}$ à $\sqrt{R^2-(r-a)^2}$ et

$$I_z(r,t) = \int\limits_{-\sqrt{R^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{R^2-(r-a)^2}} dz = 2\sqrt{R^2-(r-a)^2}\,.$$

Alors

$$I = \iint\limits_{\Delta_1} 2\sqrt{R^2-(r-a)^2}\, r^3 dr\, dt\,.$$

Comme les variables se séparent, on a

$$I = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} dt\right)\left(\int\limits_{a-R}^{a+R} 2\sqrt{R^2-(r-a)^2}\, r dr\right) = 4\pi \int\limits_{a-R}^{a+R} \sqrt{R^2-(r-a)^2}\, r^3 dr\,.$$

Effectuons le changement de variable $r = a + R\sin u$ où u varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$. On a $dr = R\cos u\, du$, et

$$\begin{aligned} I &= 4\pi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (a+R\sin u)^3 R^2 \cos^2 u\, du \\ &= 4\pi R^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (a^3 + 3aR^2\sin^2 u)\cos^2 u\, du + 4\pi R^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (3a^2 R\sin u + R^3\sin^3 u)\cos^2 u\, du\,. \end{aligned}$$

En raison de la parité de la fonction, la dernière intégrale est nulle. Donc

$$\begin{aligned} I &= 4\pi R^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (a^3 + 3aR^2\sin^2 u)\cos^2 u\, du \\ &= 4\pi R^2 a^3 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u\, du + 3\pi R^4 a \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2u\, du \\ &= 4\pi R^2 a^3 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2u}{2}\, du + 3\pi R^4 a \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-\cos 4u}{2}\, du \\ &= 4\pi R^2 a^3 \left[\frac{1}{2}\left(u + \frac{\sin 2u}{2}\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + 3\pi R^4 a \left[\frac{1}{2}\left(u - \frac{\sin 4u}{4}\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 4\pi R^2 a^3\, \frac{\pi}{2} + 3\pi R^4 a\, \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2}\, \pi^2 R^2 a(4a^2 + 3R^2)\,. \end{aligned}$$

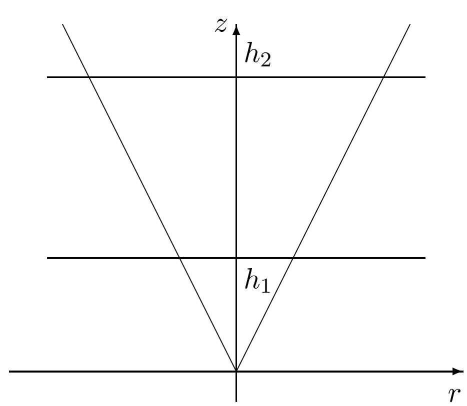
94) Calculer le volume $\mathscr{V} = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz$ d'un tronc de cône de révolution.

Prenons un cône de sommet O et d'axe de révolution Oz. L'équation du cône est alors $x^2 + y^2 = \lambda z^2$ $(\lambda > 0)$. Coupons par les plans d'équation $z = h_1$ et $z = h_2$.

On utilise les coordonnées cylindriques

$$x = r\cos t\ ,\ \ y = r\sin t\ ,\ \ z\,.$$

Le dessin suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz.



La cône a pour équation équation cylindrique $r = \lambda z$. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \{(r,t,z)\,|\,0 \leq r \leq \lambda z\,,\ -\pi \leq t \leq \pi\,,\ h_1 \leq z \leq h_2\}\,,$$

et

$$\mathscr{V} = \iiint\limits_\Delta r\,dr\,dt\,dz\,.$$

Si (t,z) appartient à $\Delta_1 = [\,-\pi,\,\pi\,] \times [\,h_1,\,h_2\,]$ on calcule tout d'abord

$$I_r(t,z) = \int\limits_0^{\lambda z} r\,dr = \lambda^2\,\frac{z^2}{2}\,,$$

Alors

$$\mathscr{V} = \int\limits_{\Delta_1} \lambda^2\,\frac{z^2}{2}\,dz\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$\mathscr{V} = \iint\limits_{\Delta_1} I_r(t,z)\,dt\,dz = \frac{\lambda^2}{2}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} dt\right)\left(\int\limits_{h_1}^{h_2} z^2\,dz\right) = \frac{\lambda^2\pi}{3}\,(h_2^3 - h_1^3)\,.$$

On peut écrire

$$\mathscr{V} = \frac{\pi}{3}\,(h_2 - h_1)(\lambda^2 h_2^2 + \lambda^2 h_1 h_2 + \lambda^2 h_1^2)\,.$$

Alors, en notant $h = h_2 - h_1$ la hauteur du tronc de cône, et $R_2 = \lambda h_2$ et $R_1 = \lambda h_1$ les rayons des cercles limitant le tronc de cône, on obtient

$$\mathscr{V} = \frac{h\pi}{3}\,(R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2)\,.$$

En particulier

$$\mathscr{V} = \frac{h\pi}{3}\,R_2^2\,,$$

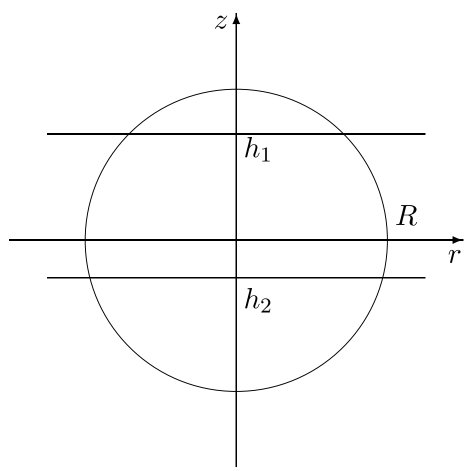
pour le cône.

95) Calculer le volume $\mathscr{V} = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz$ de la partie de la sphère de centre O et de rayon R, comprise entre les plans d'équation $z = h_1$ et $z = h_2$ ($R \geq h_1 > h_2 \geq -R$).

On utilise les coordonnées cylindriques

$$x = r\cos t\ ,\ y = r\sin t\ ,\ z\,.$$

Le dessin suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz.



La sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ a pour équation cylindrique $r^2 + z^2 = R^2$. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \{(r,t,z)\,|\,h_2 \leq z \leq h_1\,,\ -\pi \leq t \leq \pi\,,\ 0 \leq r \leq \sqrt{R^2 - z^2}\}\,,$$

et

$$\mathscr{V} = \iiint\limits_\Delta r\,dr\,dt\,dz\,.$$

La projection de Δ sur le plan tOz est le rectangle $\Delta_1 = [\,-\pi,\ \pi\,] \times [\,h_1,\ h_2\,]$. Lorsque (t,z) appartient à Δ_1 on a

$$I_r(t,z) = \int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,dr = \frac{1}{2}(R^2 - z^2)\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$\mathscr{V} = \iint\limits_{\Delta_1} I_r(t,z)\,dt\,dz =, \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} dt\right) \left(\int\limits_{h_2}^{h_1} \frac{1}{2}(R^2 - z^2)\,dz\right) = \pi\left[R^2(h_1 - h_2) - \frac{1}{3}(h_1^3 - h_2^3)\right]\,.$$

Remarque : si $h_1 = R$ et $h_2 = -R$, on retrouve le volume de la sphère

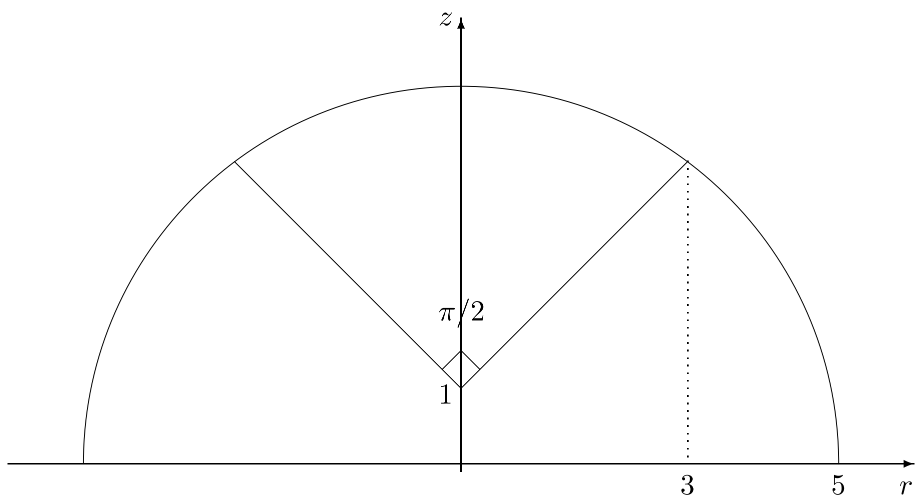
$$\mathscr{V} = \frac{4}{3}\pi R^3\,.$$

96) Calculer le volume $\mathscr{V} = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz$ de la partie limitée par la sphère de centre O et de rayon 5 et le demi-cône supérieur de sommet $\Omega(0,0,1)$ et d'angle $2\alpha = \pi/2$.

On utilise les coordonnées cylindriques

$$x = r\cos t\ ,\ y = r\sin t\ ,\ z\,.$$

Le dessin suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz.



Lorsque t est fixé, la génératrice du cône a pour équation cylindrique $z = r + 1$. La sphère a pour équation $r^2 + z^2 = 25$. Pour l'intersection on a donc,

$$r^2 + (r+1)^2 = 25\,,$$

soit

$$2r^2 + 2r - 24 = 0\,.$$

On trouve $r = 3$. On intègre sur le domaine

$$\Delta = \{(r,t,z)\,|\,r+1 \leq z \leq \sqrt{25 - z^2}\,,\,0 \leq r \leq 3\,,\,-\pi \leq t \leq \pi\}\,.$$

et

$$\mathscr{V} = \iiint\limits_\Delta r\,dr\,dt\,dz\,.$$

La projection de ce domaine sur le plan rOt est le rectangle

$$\Delta_1 = [\,0,\,3\,] \times [\,-\pi,\,\pi\,]\,.$$

Lorsque (r,t) est dans Δ_1, on calcule

$$I_z(r,t) = \int\limits_{r+1}^{\sqrt{25-r^2}} r\,dz = r(\sqrt{25 - r^2} - (r+1))\,.$$

Alors

$$\mathscr{V} = \iint\limits_{\Delta_1} I_z(r,t)\, dr\, dt\,.$$

Mais Δ_1 est un rectangle, et les variables sont séparées, donc

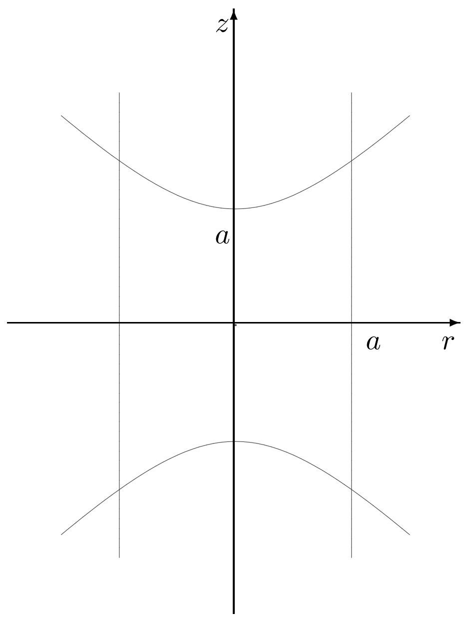
$$\begin{aligned}
\mathscr{V} &= \left(\int_0^3 r(\sqrt{25-r^2}-(r+1))\, dr\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} dt\right) \\
&= 2\pi\left[-\frac{1}{3}(25-r^2)^{3/2}-\frac{r^3}{3}-\frac{r^2}{2}\right]_0^3 \\
&= \frac{41\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

97) Calculer le volume $\mathscr{V} = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz$ de la partie limitée par le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ et l'hyperboloïde d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$ $(a > o)$.

On utilise les coordonnées cylindriques

$$x = r\cos t\ ,\ y = r\sin t\ ,\ z\,.$$

Le dessin suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz.



L'hyperboloïde a pour équation $z^2 - r^2 = a^2$ et le cylindre $r = a$. On intègre sur le domaine

$$\Delta = \left\{(r, t, z) \mid -\sqrt{a^2 + r^2} \le z \le \sqrt{a^2 + r^2}\,,\ 0 \le r \le a\,,\ -\pi \le t \le \pi\right\}$$

et

$$\mathscr{V} = \iiint\limits_\Delta r\,dr\,dt\,dz\,.$$

La projection de ce domaine sur le plan rOt est le rectangle

$$\Delta_1 = [\,0,\, a\,] \times [\,-\pi,\, \pi\,]\ .$$

Lorsque (r, t) est dans Δ_1, on calcule

$$I_z(r, t) = \int_{-\sqrt{a^2+r^2}}^{\sqrt{a^2+r^2}} r\,dz = 2r\sqrt{a^2 + r^2}\,.$$

Alors

$$\mathscr{V} = \iint\limits_{\Delta_1} I_z(r,t)\,dr\,dt\,.$$

Mais Δ_1 est un rectangle, et les variables sont séparées, donc

$$\begin{aligned}\mathscr{V} &= \left(\int_0^a 2r\sqrt{a^2+r^2}\,dr\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} dt\right)\\ &= 2\pi\left[\frac{2}{3}(a^2+r^2)^{3/2}\right]_0^a\\ &= \frac{4\pi}{3}a^3(2\sqrt{2}-1)\,.\end{aligned}$$

98) Calculer le volume $\mathscr{V} = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz$ du domaine D limité par le cône de révolution d'équation

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}\,,$$

l'hyperboloïde d'équation

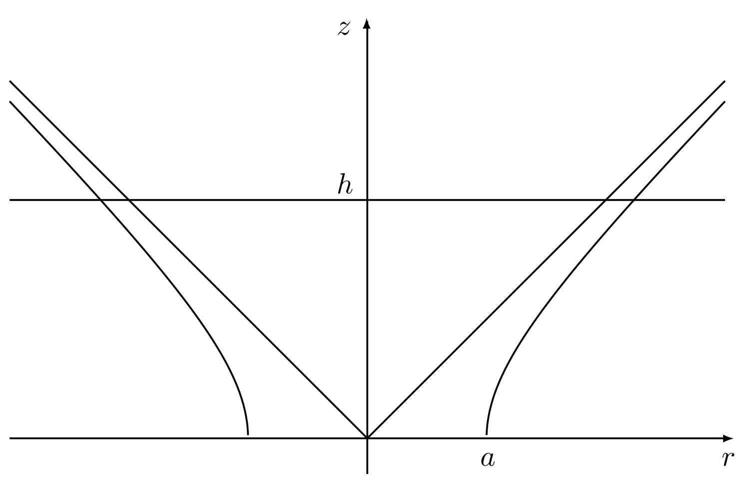
$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

et les plans d'équation $z=0$ et $z=h$ où $h>0$, $a>0$ et $c>0$.

On utilise les coordonnées cylindriques

$$x = r\cos t\ ,\ \ y = r\sin t\ ,\ \ z\,.$$

Le dessin suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz.



Le cône a pour équation $r = \dfrac{az}{c}$ et l'hyperboloïde $r^2 = \dfrac{a^2}{c^2}\,(z^2+c^2)$. Lorsque t et z sont fixés dans $\Delta_1 = [\,-\pi,\,\pi\,]\times[\,0,\,h\,]$, on calcule

$$I_r(t,z) = \int\limits_{az/c}^{a\sqrt{z^2+c^2}/c} r\,dr = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{c^2}\,(z^2+c^2-z^2) = \frac{a^2}{2}\,.$$

On a donc

$$\mathscr{V} = \iiint\limits_{\Delta} r\,dr\,dt\,dz\,.$$

Alors

$$\mathscr{V} = \iint\limits_{\Delta_1} I_r(t,z)\,dt\,dz = \frac{a^2}{2}\iint\limits_{\Delta_1} dt\,dz = \frac{a^2}{2}\,\mathscr{A}(\Delta_1) = \frac{a^2}{2}\,2\pi h = \pi a^2 h\,.$$

99) Calculer le volume $\mathscr{V} = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz$ du domaine D limité par le cône de révolution d'équation

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}\,,$$

l'hyperboloïde d'équation

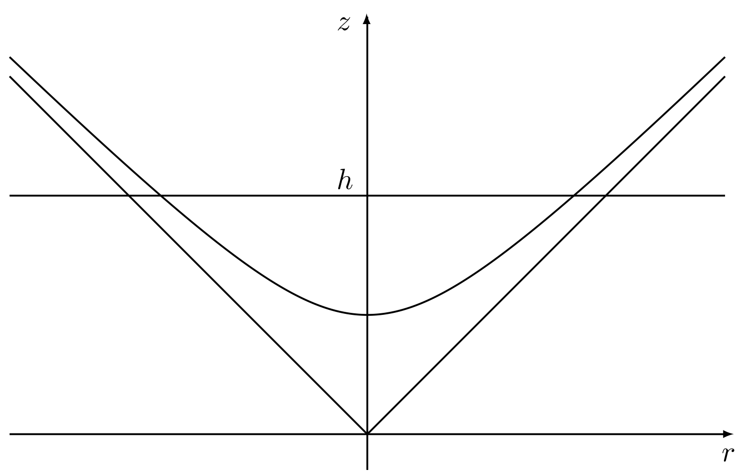
$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

et le plan d'équation $z = h$ où $h > c > 0$ et $a > 0$.

On utilise les coordonnées cylindriques

$$x = r\cos t\ ,\ y = r\sin t\ ,\ z\,.$$

Le dessin suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz.



Le cône a pour équation $r = \dfrac{az}{c}$ et l'hyperboloïde $r^2 = \dfrac{a^2}{c^2}\,(z^2 - c^2)\,.$

On sépare le domaine en deux parties séparées par le plan d'équation $z = c$.

Pour la partie supérieure, lorsque t et z sont fixés dans $\Delta_1 = [\,-\pi,\,\pi\,] \times [\,c,\,h\,]$, on calcule

$$I_r(t,z) = \int\limits_{a\sqrt{z^2-c^2}/c}^{az/c} r\,dr = \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{c^2}\,(z^2 - (z^2 - c^2)) = \frac{a^2}{2}\,.$$

On a donc

$$\mathscr{V}_1 = \iiint\limits_{\Delta_1} r\,dr\,dt\,dz\,.$$

Alors
$$\mathscr{V} = \iint_{\Delta_1} I_r(t,z)\,dt\,dz = \frac{a^2}{2} \iint_{\Delta_1} dt\,dz = \frac{a^2}{2}\,\mathscr{A}(\Delta_1) = \frac{a^2}{2}\,2\pi(h-c) = \pi a^2(h-c)\,.$$
Pour la partie inférieure, on a le volume d'un cône de hauteur c. Le cercle de base a pour rayon r, donc
$$\mathscr{V}' = \frac{1}{3}\,\pi a^2 c\,.$$
Alors
$$\mathscr{V}(D) = \pi a^2 \left(h - \frac{2c}{3}\right)\,.$$

100) Calculer le volume $\mathscr{V} = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz$ du domaine D limité par le paraboloïde d'équation

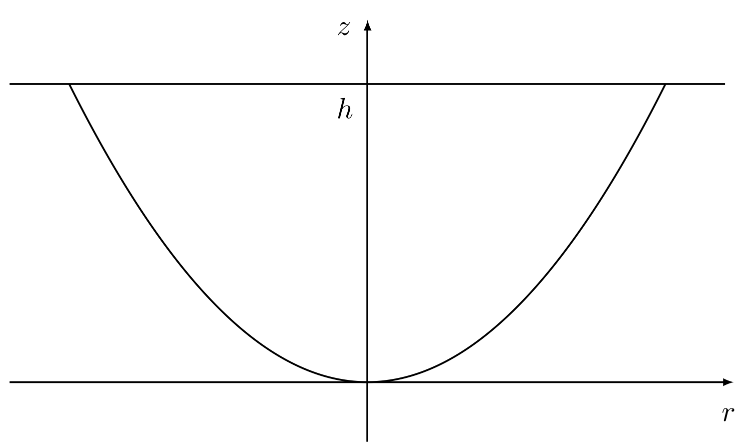
$$z = a(x^2 + y^2)\,,$$

et le plan d'équation $z = h$ où $a > 0$ et $h > 0$.

On utilise les coordonnées cylindriques

$$x = r\cos t\ ,\ \ y = r\sin t\ ,\ \ z\,.$$

Le dessin suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz.



Le paraboloïde a pour équation $z = ar^2$. Lorsque t et z sont fixés dans $\Delta_1 = [-\pi,\,\pi] \times [0,\,h]$, on calcule

$$I_r(t,z) = \int\limits_0^{\sqrt{z/a}} r\,dr = \frac{z}{2a}\,.$$

On a donc

$$\mathscr{V} = \iiint\limits_\Delta r\,dr\,dt\,dz\,.$$

Alors

$$\mathscr{V} = \iint\limits_{\Delta_1} I_r(t,z)\,dt\,dz = \frac{1}{2a}\iint\limits_{\Delta_1} z\,dt\,dz\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

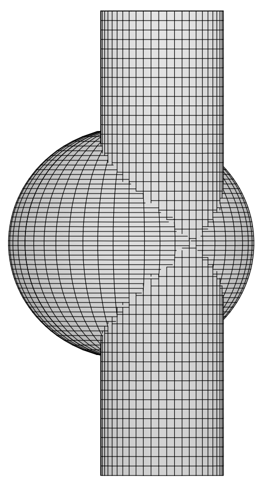
$$\mathscr{V} = \frac{1}{2a}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} dt\right)\left(\int\limits_0^h z\,dz,\right) = \frac{\pi h^2}{2a}\,.$$

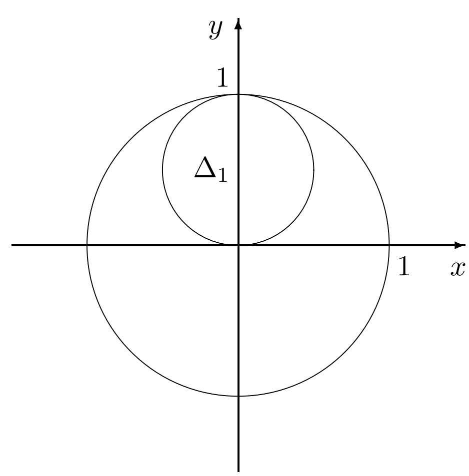
101) Calculer le volume $\mathscr{V} = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz$ de la partie limitée par la sphère de centre O et de rayon 1 et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 - y = 0$ (Fenêtre de Viviani).

On utilise les coordonnées cylindriques

$$x = r\cos t\ ,\ y = r\sin t\ ,\ z\,.$$

Le dessin de droite représente la projection de D sur le plan xOy.





La sphère d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2=1$ a pour équation cylindrique $r^2+z^2=1$ et le cylindre d'équation cartésienne $x^2+y^2-y=0$, a pour équation cylindrique $r=\sin t$. On intègre sur le domaine

$$\Delta = \left\{(r,t,z)\mid -\sqrt{1-r^2} \le z \le \sqrt{1-r^2}\,,\ 0 \le r \le \sin t\,,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right\}\,.$$

On a donc

$$\mathscr{V} = \iiint\limits_\Delta r\,dr\,dt\,dz\,.$$

La projection de ce domaine sur le plan rOt est le domaine

$$\Delta_1 = \left\{ (r,t) \,|\, 0 \le r \le \sin t\,,\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \right\}\,.$$

Lorsque (r,t) appartient à Δ_1, on calcule

$$I_z(r,t) = \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r\,dz = 2r\sqrt{1-r^2}\,,$$

Alors

$$\mathscr{V} = \iint_{\Delta_1} I_z(r,t)\,dr\,dt\,.$$

Si t est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, on calcule donc,

$$I_{rz}(t) = \int_0^{\sin t} 2r\sqrt{1-r^2}\,dr = \left[-\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{r=\sin t} = \frac{2}{3}(1-\cos^3 t)\,.$$

Donc

$$\mathscr{V} = \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\cos^3 t)\,dt\,.$$

En linéarisant

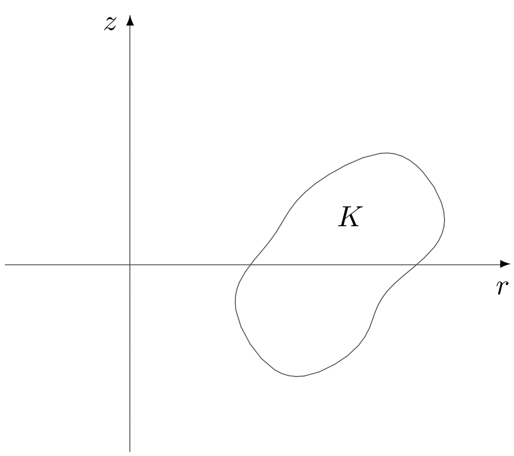
$$\cos^3 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}(e^{3it}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-3it}) = \frac{1}{4}(\cos 3t + 3\cos t)\,.$$

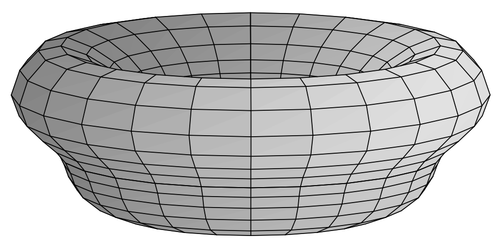
Donc

$$\begin{aligned} \mathscr{V} &= \frac{2}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \frac{\cos 3t + 3\cos t}{4} \right) dt \\ &= \frac{2}{3} \left[t - \frac{1}{4} \left(\frac{\sin 3t}{3} + 3\sin t \right) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}\,. \end{aligned}$$

102) Soit K un domaine du demi-plan $\{(x,z)\,|\,x \geq 0\}$. On note $\mathscr{A}$ son aire et x_G l'abscisse de son centre de gravité. Montrer que le volume du domaine D obtenu en faisant tourner K autour de l'axe Oz est donné par la formule
$$\mathscr{V} = 2\pi x_G \mathscr{A}\ .$$
(Deuxième théorème de Guldin).
Application : trouver le volume du tore engendré en faisant tourner autour de Oz, le disque limité par le cercle d'équation $(x-a)^2 + z^2 = R^2$ $(0 < R \leq a)$.

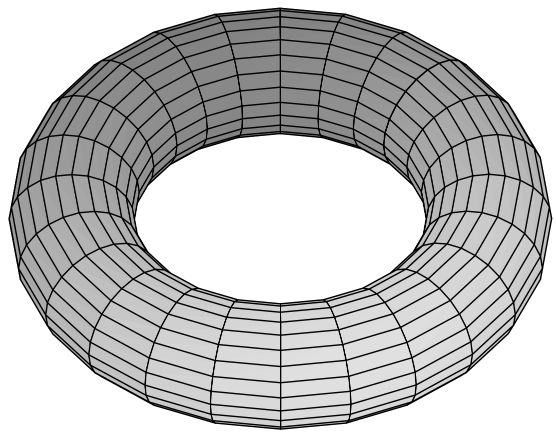
On utilise les coordonnées cylindriques
$$x = r\cos t\ ,\ y = r\sin t\ ,\ z\ .$$
Le dessin de gauche représente l'intersection de D avec le plan rOz.





On obtient
$$\mathscr{V} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} dt\right)\left(\iint_{K_t} r\,drdz\right) = 2\pi \iint_{K_t} r\,drdz\,,$$
où K_t est l'intersection de D avec le plan vertical rOz, faisant un angle t avec xOz. On a donc, en notant $\mathscr{A}(K_t)$ l'aire de K_t et $r_{G(K_t)}$ l'abscisse, dans le plan rOz du centre de gravité $G(K_t)$ de ce domaine,
$$\iint_{K_t} r\,drdz = \mathscr{A}(K_t) r_{G(K_t)}\,.$$
Mais K_t et K sont isométriques, donc $\mathscr{A}(K_t) = \mathscr{A}$ et $r_{G(K_t)} = x_G$. Alors
$$\iint_{K_t} r\,drdz = \mathscr{A} x_G\,.$$
On obtient donc le résultat voulu.

Si K est le cercle de centre G de coordonnées $(a, 0)$ et de rayon R, on a $\mathscr{A} = \pi R^2$ et $x_G = a$, donc $\mathscr{V} = 2a\pi^2 R^2$.



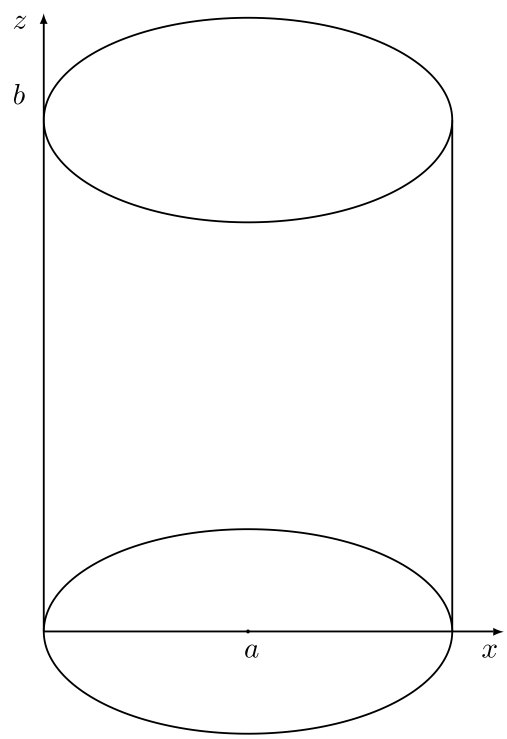
103) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\,dz$

où
$$D = \{(x,y,z)\,|\,0 < z \leq b\,,\ 0 < x^2 + y^2 \leq 2ax\}\,,$$

où $a > 0$, et
$$f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

La fonction est positive et on intègre sur un cylindre. On utilise les coordonnées cylindriques.

$$x = r\cos t\ ,\ \ y = r\sin t\ ,\ \ z\,.$$



Le cylindre d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 2ax$ a pour équation cylindrique $r = 2a\cos t$ où t est compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \left\{(r,t,z)\,|\, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\,,\ 0 < z < b\,,\ 0 < r < 2a\cos t\right\}\ ,$$

et
$$f(r\cos t, r\sin t, z) = \frac{z}{r}\,.$$

Donc
$$I = \iiint\limits_\Delta f(r\cos t, r\sin t, z)\,r\,dr\,dt\,dz = \iiint\limits_\Delta z\,dr\,dt\,dz\,.$$

Pour (t, z) fixé dans $\Delta_1 = [-\pi/2,\, \pi/2] \times]\,0,\, b\,]$ on calcule tout d'abord

$$I_r(t, z) = \int_0^{2a\cos t} z\, dr = 2az\cos t\,,$$

Alors

$$I = \iint_{\Delta_1} I_r(t, z)\, dt\, dz\,.$$

Comme les intégrales se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^b z\, dz \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2a\cos t\, dt \right) = 2ab^2\pi\,.$$

104) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy\,dz$

où

$$D = \{(x,y,z) \,|\, 0 < x^2+y^2 \leq z \leq 1\}\,,$$

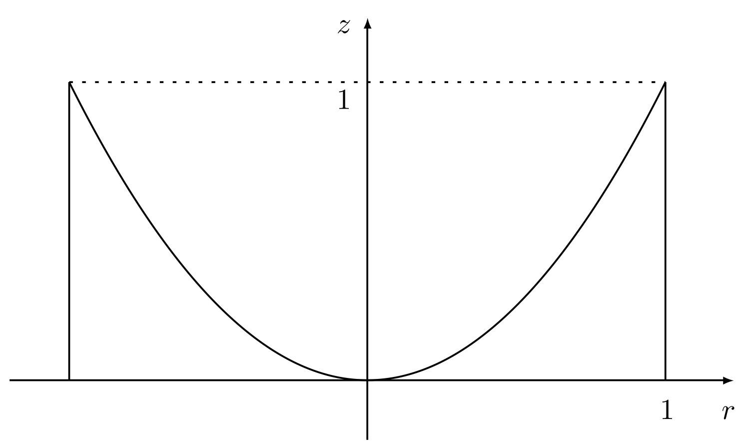
et

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^a}\ ,\ (a<2)\,.$$

La fonction f est positive, et le domaine D est invariant par rotation d'axe Oz. On utilise les coordonnées cylindriques.

$$x = r\cos t\ ,\ y = r\sin t\ ,\ z\,.$$

Le dessin suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz.



Le paraboloïde de révolution d'équation cartésienne $x^2+y^2 = z$ a pour équation cylindrique $z = r^2$. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = \{(r,t,z) \,|\, 0 < r^2 \leq z \leq 1\,,\ -\pi \leq t \leq \pi\,,\ r > 0\}\,,$$

et

$$f(r\cos t, r\sin t, z) = \frac{r^2\cos^2 t}{r^{2a}} = \frac{\cos^2 t}{r^{2a-2}}\,.$$

Donc

$$I = \iiint\limits_\Delta f(r\cos t, r\sin t, z)\,r\,dr\,dt\,dz = \iiint\limits_\Delta \frac{\cos^2 t}{r^{2a-3}}\,dr\,dt\,dz\,.$$

Lorsque z et t sont fixés dans $\Delta_1 =]\,0,\,1\,] \times [\,-\pi,\,\pi\,]$, la variable r est comprise entre 0 et $\sqrt{z}$. On calcule tout d'abord

$$I_r(z,t) = \int_0^{\sqrt{z}} \frac{\cos^2 t}{r^{2a-3}}\,dr = \left[\frac{\cos^2 t}{(4-2a)r^{2a-4}}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{z}} = \frac{1}{4-2a}\,\frac{\cos^2 t}{z^{a-2}}\,.$$

Alors
$$I = \iint_{\Delta_1} I_r(z,t)\, dz\, dt\,.$$
Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \frac{1}{4-2a}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt\right)\left(\int_0^1 \frac{dz}{z^{a-2}}\right) = \frac{1}{4-2a}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt\right)\left(\int_0^1 \frac{dz}{z^{a-2}}\right) = \frac{\pi}{2(3-a)(2-a)}\,.$$

4.2 Coordonnées sphériques

105) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
où D est la sphère de centre O et de rayon R, et

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2\,.$$

On utilise les coordonnées sphériques

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi\ ,\ y = \rho\sin\theta\cos\varphi\ ,\ z = \rho\sin\varphi\,.$$

On intègre sur le domaine

$$\Delta = [\,0,\ R\,] \times [\,-\pi,\ \pi\,] \times [\,-\pi/2,\ \pi/2\,]\ ,$$

et

$$f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \rho^2\,.$$

Alors

$$I = \iiint\limits_\Delta f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \iiint\limits_\Delta \rho^4\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^R \rho^4\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi\right) = \frac{4\pi R^5}{5}\,.$$

106) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
où D est la sphère de centre O et de rayon R, et

$$f(x,y,z) = \sqrt{R^2 - (x^2+y^2+z^2)}\,.$$

On utilise les coordonnées sphériques

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi\ ,\ \ y = \rho\sin\theta\cos\varphi\ ,\ \ z = \rho\sin\varphi\,.$$

On intègre sur le domaine

$$\Delta = [\,0,\, R\,] \times [\,-\pi,\, \pi\,] \times [\,-\pi/2,\, \pi/2\,]\ ,$$

et

$$f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \sqrt{R^2-\rho^2}\,.$$

Alors

$$I = \iiint\limits_\Delta f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \iiint\limits_\Delta \rho^2\cos\varphi\,\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho\,d\theta\,d\varphi\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^R \rho^2\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi\right) = 4\pi\int_0^R \rho^2\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho\,.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on peut faire le changement de variable $\rho = R\sin u$, pour u variant de 0 à $\pi/2$. On a alors $d\rho = R\cos u\,du$ et

$$I = 4\pi\int_0^{\pi/2} R^2\sin^2 u\,R^2\cos^2 u\,du = \pi\int_0^{\pi/2} R^4\sin^2 2u = \pi R^4\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4u}{2}\,du = \frac{\pi^2 R^4}{4}\,.$$

107) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
où D est la sphère de centre O et de rayon R, et

$$f(x,y,z) = (ax+by+cz)^2\,.$$

On remarque tout d'abord qu'en raison des symétries du domaine D

$$\iiint\limits_D xy\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D yz\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D zx\,dx\,dy\,dz = 0\,,$$

et que

$$\iiint\limits_D x^2\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D y^2\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_D z^2\,dx\,dy\,dz\,.$$

Alors

$$I = (a^2+b^2+c^2)\iiint\limits_D z^2\;dx\,dy\,dz\,.$$

Si l'on pose

$$g(x,y,z) = z^2\,,$$

on a donc

$$I = (a^2+b^2+c^2)\iiint\limits_D g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

On utilise les coordonnées sphériques

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi\;,\; y = \rho\sin\theta\cos\varphi\;,\; z = \rho\sin\varphi\,.$$

On intègre sur le domaine

$$\Delta = [\,0,\,1\,]\times[\,-\pi,\,\pi\,]\times[\,-\pi/2,\,\pi/2\,]\;,$$

et

$$g(\rho\cos\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\varphi) = \rho^2\sin^2\varphi\,.$$

Alors

$$J = \iiint\limits_\Delta g(\rho\cos\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \iiint\limits_\Delta \rho^2\sin^2\varphi\,\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

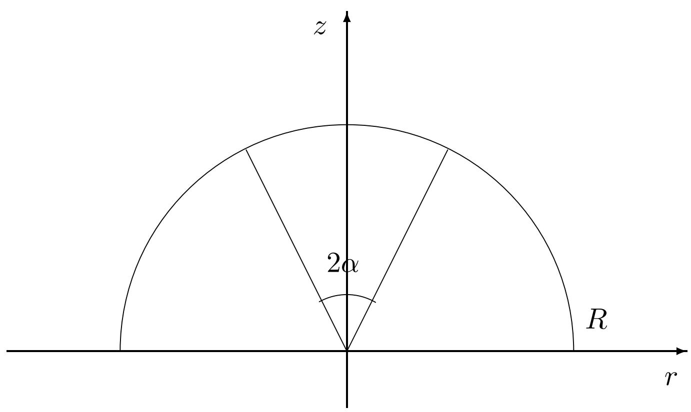
$$J = \left(\int_0^1 \rho^4\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,\sin^2\varphi\,d\varphi\right) = \frac{2\pi}{5}\left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4\pi}{15}\,,$$

d'où

$$I = (a^2+b^2+c^2)\,\frac{4\pi}{15}\,.$$

108) Calculer le volume $\mathscr{V} = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz$ du secteur sphérique, limité par la sphère de centre O et de rayon R et le demi-cône supérieur de sommet O et d'angle 2α.

Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, le dessin suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz.



On utilise les coordonnées sphériques

$$x = \rho \cos\theta \cos\varphi\ ,\ y = \rho \sin\theta \cos\varphi\ ,\ z = \rho \sin\varphi\,.$$

La sphère d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ a pour équation sphérique $\rho = R$. Le demi-cône supérieur est caractérisé par $\pi/2 - \alpha \leq \varphi \leq \pi/2$. On intègre donc sur le domaine

$$\Delta = [\,0,\,R\,] \times [\,-\pi,\,\pi\,] \times [\,\pi/2 - \alpha,\,\pi/2\,]\,.$$

et

$$\mathscr{V} = \iiint\limits_\Delta \rho^2 \cos\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi\,.$$

Comme les variables sont séparées on a immédiatement

$$\mathscr{V} = \left(\int_0^R \rho^2\, d\rho\right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right) \left(\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi\right) = \frac{2\pi}{3} R^3 (1 - \cos\alpha)\,.$$

Remarque : si $\alpha = \pi$, on retrouve le volume de la sphère.

109) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

où
$$D = \{(x,y,z) \mid z > 0\,,\ x^2+y^2+z^2 < R^2\}\,,$$
où $R > 0$, et
$$f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

On utilise les coordonnées sphériques
$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi\ ,\ y = \rho\sin\theta\cos\varphi\ ,\ z = \rho\sin\varphi\,.$$
On intègre sur le domaine
$$\Delta =]\,0,\ R\,[\times]\,-\pi,\ \pi\,[\times]\,0,\ \pi/2\,[\ ,$$
et
$$f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \tan\varphi\,.$$
Alors
$$I = \iiint\limits_\Delta f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \iiint\limits_\Delta \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi\,.$$
Comme les variables se séparent, on a immédiatement
$$I = \left(\int_0^R \rho^2 d\rho\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\,d\varphi\right) = 2\pi\,\frac{R^3}{3}\,.$$

110) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$,
où D est la sphère de centre O et de rayon R privée de l'origine, et

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

On utilise les coordonnées sphériques

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi\ ,\ \ y = \rho\sin\theta\cos\varphi\ ,\ \ z = \rho\sin\varphi\,.$$

On intègre sur le domaine

$$\Delta =]\,0,\ R\,]\ \times\ [\,-\pi,\ \pi\,]\ \times\ [\,-\pi/2,\ \pi/2\,]\ ,$$

et

$$f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \frac{1}{\rho}\,.$$

Alors

$$I = \iiint\limits_\Delta f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \iiint\limits_\Delta \rho\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^R \rho\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\right) = 2\pi\,R^2\,.$$

111) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

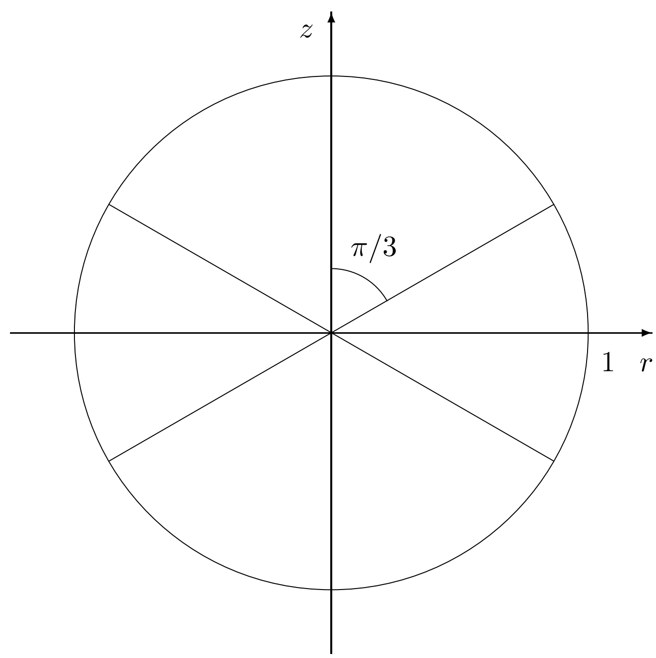
où D est le domaine intérieur à la sphère de centre O et de rayon 1, et extérieur au cône de révolution d'axe Oz et de demi-angle au sommet $\pi/3$, et

$$f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}\,.$$

On utilise les coordonnées sphériques

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi\ ,\ \ y = \rho\sin\theta\cos\varphi\ ,\ \ z = \rho\sin\varphi\,.$$

Si $r = \sqrt{x^2+y^2}$, le dessin suivant représente l'intersection de D avec le plan rOz.



On intègre sur le domaine

$$\Delta =]\,0,\ 1\,] \times [\,-\pi,\ \pi\,] \times [\,-\pi/6,\ \pi/6\,]\ ,$$

et

$$f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \cos^2\varphi, .$$

Alors

$$I = \iiint\limits_\Delta f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \iiint\limits_\Delta \rho^2\cos^3\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi\,.$$

Comme les variables se séprent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^1 \rho^2 \, d\rho \right) \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right) \left(\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos\varphi (1 - \sin^2\varphi) \, d\varphi \right) = \frac{2\pi}{3} \left[\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3} \right]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{11\pi}{18} \, .$$

112) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

où D est la sphère de centre O et de rayon 1 privée du point $(0,0,1)$, et

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}\,.$$

On utilise les coordonnées sphériques

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi\ ,\ \ y = \rho\sin\theta\cos\varphi\ ,\ \ z = \rho\sin\varphi\,.$$

On intègre sur le domaine

$$\Delta = [\,0,\,1\,]\times[\,-\pi,\,\pi\,]\times[\,-\pi/2,\,\pi/2\,[\ ,$$

et

$$f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = \frac{1}{\rho^2 - 2\rho\,\sin\varphi + 1}\,.$$

Alors

$$I = \iiint\limits_\Delta f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = \iiint\limits_\Delta \frac{\rho^2\cos\varphi}{\rho^2 - 2\rho\,\sin\varphi + 1}\,d\rho\,d\theta\,d\varphi\,.$$

Si (ρ,θ) appartient à $\Delta_1 = [\,0,\,1\,]\times[\,-\pi,\,\pi\,]$, on calcule tout d'abord,

$$\begin{aligned}
I_\varphi(\rho,\theta) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^2\cos\varphi}{\rho^2 - 2\rho\,\sin\varphi + 1}\,d\varphi \\
&= \Big[-\rho\,\sqrt{\rho^2 - 2\rho\,\sin\varphi + 1}\Big]_{\varphi=-\pi/2}^{\varphi=\pi/2} \\
&= -\rho\,\sqrt{\rho^2 - 2\rho + 1} + \rho\,\sqrt{\rho^2 + 2\rho + 1} \\
&= \rho\,\big[\sqrt{(\rho+1)^2} - \sqrt{(\rho-1)^2}\big] \\
&= \rho\,\big[(\rho+1) - (1-\rho)\big] \\
&= 2\rho^2\,.
\end{aligned}$$

Puis

$$I = \int\limits_{\Delta_1} 2\rho^2\,d\rho\,d\theta = 2\left(\int_0^1 \rho^2\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right) = \frac{4\pi}{3}\,.$$

4.3 Changements de variables divers

113) Calculer le volume de l'ellipsoïde D d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1\,.$$

où $a>0$, $b>0$ et $c>0$.

En posant

$$X=\frac{x}{a}\ ,\ Y=\frac{y}{b}\ ,\ Z=\frac{z}{c}\,,$$

l'ellipsoïde a pour équation

$$X^2+Y^2+Z^2\leq 1\,,$$

ce qui est l'équation d'une sphère Δ de centre O et de rayon 1 de volume $\mathscr{V}(\Delta)=4\pi/3$.

Le déterminant jacobien vaut alors

$$\frac{dx\,dy\,dz}{dX\,dY\,dZ}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}=abc\,.$$

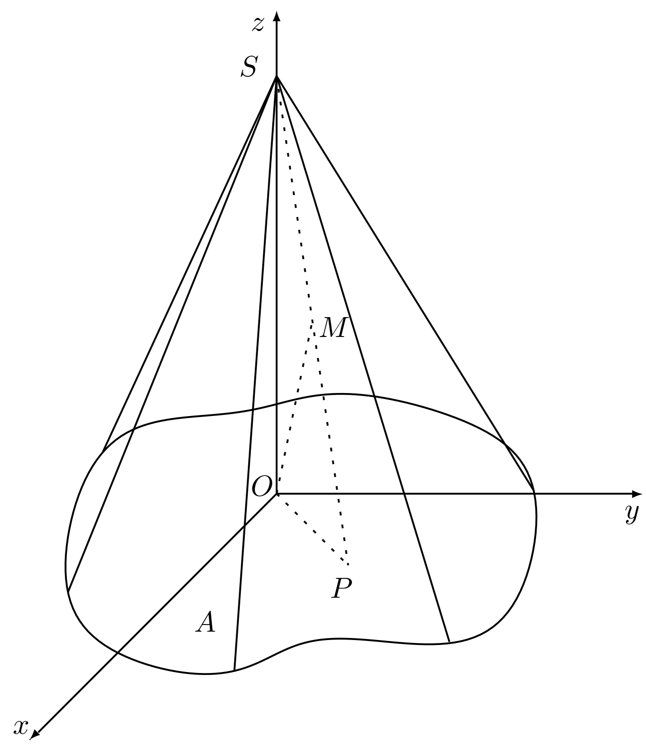
Donc

$$\mathscr{V}(D)=abc\iiint\limits_{\Delta}dX\,dY\,dZ=abc\mathscr{V}(\Delta)=\frac{4}{3}\,\pi abc\,.$$

114) Soit A un domaine situé dans un plan, d'aire $\mathscr{A}(A)$, et S un point situé à une distance h de ce plan. Montrer que le volume du domaine D limité par le cône de sommet S et de base A vaut

$$\mathscr{V}(D) = \frac{1}{3}\, h \times \mathscr{A}(A)\,.$$

On choisit un repère (O, x, y, z) tel que le plan contenant A soit xOy, et tel que S ait pour coordonnées $(0, 0, h)$.



Soit M un point de D de coordonnées (x, y, z). La droite SM coupe le plan xOy au point P de coordonnées $(X, Y, 0)$. Il existe un nombre λ dans $[\,0,\,1\,]$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = \lambda\, \overrightarrow{OP} + (1-\lambda)\, \overrightarrow{OS}\,,$$

c'est-à-dire

$$x = \lambda X \ ,\ y = \lambda Y \ ,\ z = (1-\lambda)h\,.$$

Lorsque le point (X, Y, λ) décrit $\Delta = A \times [\,0,\,1\,]$ on obtient ainsi un paramétrage de D.

Le déterminant jacobien vaut alors

$$\frac{dx\,dy\,dz}{dX\,dY\,d\lambda} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & X \\ 0 & \lambda & Y \\ 0 & 0 & -h \end{vmatrix} = -\lambda^2 h\,.$$

Donc

$$\mathscr{V}(D) = \iiint\limits_{D} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{\Delta} \left| \frac{dx\,dy\,dz}{dX\,dY, d\lambda} \right| dX\,dY\,d\lambda = \iiint\limits_{\Delta} \lambda^2 h\,dX\,dY\,d\lambda\,.$$

Alors

$$\mathscr{V}(D) = h \left(\int\limits_0^1 \lambda^2\,d\lambda \right) \left(\iint\limits_A dX\,dY \right) = \frac{h}{3}\,\mathscr{A}(A)\,.$$

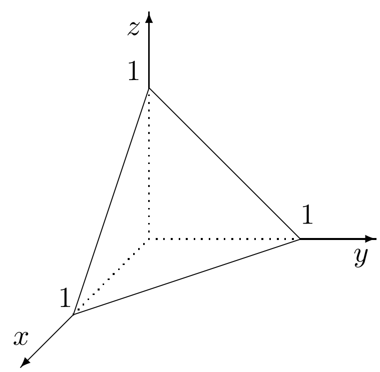
115) Calculer $I = \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

où D est limité par les plans d'équation $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ et

$$f(x,y,z) = xyz(1-x-y-z)\,,$$

en utilisant le changement de variables

$$x = u(1-v)\ ,\ y = uv(1-w)\ ,\ z = uvw\,.$$



Remarquons que les systèmes

$$\begin{cases} x = u - uv \\ y = uv - uvw \\ z = uvw \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x+y+z = u \\ y+z = uv \\ z = uvw \end{cases}$$

sont équivalents. Donc si (x,y,z) appartient à l'intérieur du domaine D, on a encore

$$\begin{cases} u = x+y+z \\ v = \dfrac{y+z}{x+y+z} \\ w = \dfrac{z}{y+z} \end{cases}.$$

L'application Φ définie par

$$\Phi(u,v,w) = (u-uv, uv-uvw, uvw)$$

réalise une bijection de $\Delta =]\,0,\,1\,[^3$ sur l'intérieur de D.

Le déterminant jacobien vaut alors

$$\frac{dx\,dy\,dz}{du\,dv\,dw} = \begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v(1-w) & u(1-w) & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix}.$$

En mettant u en facteur dans la deuxième colonne et uv dans la troisième,

$$\frac{dx\,dy\,dz}{du\,dv\,dw} = u^2 v \begin{vmatrix} 1-v & -1 & 0 \\ v(1-w) & 1-w & -1 \\ vw & w & 1 \end{vmatrix},$$

puis en additionnant la troisième ligne à la deuxième

$$\frac{dx\,dy\,dz}{du\,dv\,dw} = u^2 v \begin{vmatrix} 1-v & -1 & 0 \\ v & 1 & 0 \\ vw & w & 1 \end{vmatrix} = u^2 v\,.$$

On a également

$$f(u(1-v), uv(1-w), uvw) = u^3 v^2 w (1-u)(1-v)(1-w)\,.$$

Alors

$$I = \iiint_\Delta f(u(1-v), uv(1-w), uvw)\, u^2 v\, du\,dv\,dw = \iiint_\Delta u^5 v^3 w (1-u)(1-v)(1-w)\, du\,dv\,dw\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$I = \left(\int_0^1 (u^5 - u^6)\, du\right) \left(\int_0^1 (v^3 - v^4)\, dv\right) \left(\int_0^1 (w - w^2)\, dw\right),$$

ce qui donne

$$I = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{7\times 6}\,\frac{1}{5\times 4}\,\frac{1}{3\times 2} = \frac{1}{7!}\,.$$

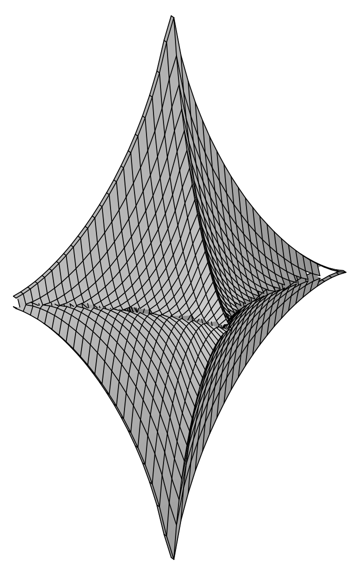
116) Calculer le volume $\mathscr{V} = \iiint\limits_D dx\,dy\,dz$ du domaine D limité par la surface d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1\,,$$

où $a > 0$, $b >$, et $c > 0$, en utilisant le changement de variables

$$x = a\rho(\cos\theta\cos\varphi)^3\,,\ y = b\rho(\sin\theta\cos\varphi)^3\,,\ z = c\rho(\sin\varphi)^3\,,$$

où (ρ, t, φ) décrit $[\,0,\,1\,] \times [\,-\pi,\,\pi\,] \times [\,-\pi/2,\,\pi/2\,]$.



Le changement de variables utilisé est analogue aux coordonnées sphériques. Le déterminant jacobien vaut alors

$$\frac{dx\,dy\,dz}{d\rho\,d\theta\,d\varphi} = \begin{vmatrix} a\cos^3\varphi\cos^3\theta & -3a\rho\cos^3\varphi\cos^2\theta\sin\theta & -3a\rho\cos^2\varphi\cos^3\theta\sin\varphi \\ b\cos^3\varphi\sin^3\theta & 3b\rho\cos^3\varphi\sin^2\theta\cos\theta & -3b\rho\cos^2\varphi\sin^3\theta\sin\varphi \\ c\sin^3\varphi & 0 & 3c\rho\sin^2\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}.$$

En mettant en facteur $a\cos^2\varphi\cos^2\theta$ dans la première ligne, $b\cos^2\varphi\sin^2\theta$ dans la deuxième et $c\sin^2\varphi$ dans la troisième, on obtient

$$\frac{dx\,dy\,dz}{d\rho\,d\theta\,d\varphi} = abc\cos^4\varphi\sin^2\varphi\cos^2\theta\sin^2\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -3\rho\cos\varphi\sin\theta & -3\rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\theta & 3\rho\cos\varphi\cos\theta & -3\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & 3\rho\cos\varphi \end{vmatrix}.$$

En mettant alors 3ρ en facteur dans les deuxième et troisième colonne, on trouve

$$\frac{dx\,dy\,dz}{d\rho\,d\theta\,d\varphi} = 9\rho^2 abc\cos^4\varphi\sin^2\varphi\cos^2\theta\sin^2\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta & -\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{vmatrix}.$$

Mais le déterminant restant n'est autre que celui qui apparaît dans le calcul du jacobien des coordonnées sphériques et vaut $\cos\varphi$. Donc

$$\frac{dx\,dy\,dz}{d\rho\,d\theta\,d\varphi} = 9abc\rho^2\cos^5\varphi\sin^2\varphi\cos^2\theta\sin^2\theta\,.$$

On en déduit alors, puisque les variables sont séparées, que

$$\mathscr{V} = 9abc\left(\int_0^1 \rho^2\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\right).$$

On obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 4t)\,d\theta = \frac{\pi}{4}\,,$$

et, en posant $u = \sin\varphi$, donc $du = \cos\varphi\,d\varphi$,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^5\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi(1-\sin^2\varphi)^2\sin^2\varphi\,d\varphi \\ &= \int_{-1}^{1}(1-u^2)^2u^2\,du \\ &= \int_{-1}^{1}(u^2-2u^4+u^6)\,du = \frac{16}{105}\,. \end{aligned}$$

Finalement

$$\mathscr{V} = 9abc\,\frac{1}{3}\,\frac{\pi}{4}\,\frac{16}{105} = 4\pi\frac{abc}{35}\,.$$

Troisième partie

INTEGRATION DANS $\mathbb{R}^p$

Chapitre 5

THEOREME DE FUBINI

117) Calculer $I = \int\limits_D \cdots \int f(x_1, \ldots, x_p)\, dx_1 \cdots dx_p$
où
$$D = [\,0,\, 1\,]^{\,p}\,,$$
et
$$f(x_1, \ldots, x_p) = \prod_{k=1}^{p} x_k^k\,.$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement
$$I = \prod_{k=1}^{p} \left(\int_0^1 x_k^k\, dx_k \right) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(p+1)!}\,.$$

118) Calculer $I = \int\cdots\int_D f(x_1,\dots,x_p)\,dx_1\cdots dx_p$

où
$$D = [0,\,1]^p\,,$$
et
$$f(x_1,\dots,x_p) = \left(\sum_{k=1}^p x_k\right)^2\,.$$

On a donc
$$f(x_1,\dots,x_p) = \sum_{k=1}^p x_k^2 + \sum_{1\le i\ne j\le p} x_i x_j\,.$$
Pour des raisons de symétrie du domaine, on a, si $1\le k\le p$,
$$\int\cdots\int_D x_k^2\,dx_1\cdots dx_p = \int\cdots\int_D x_1^2\,dx_1\cdots dx_p\,,$$
et, si $1\le i\ne j\le p$,
$$\int\cdots\int_D x_i x_j\,dx_1\cdots dx_p = \int\cdots\int_D x_1x_2\,dx_1\cdots dx_p\,.$$
Remarquons qu'il y a $p(p-1)$ couples (i,j) vérifiant $1\le i\ne j\le p$.

Comme les variables se séparent, on obtient alors
$$\int\cdots\int_D x_1^2\,dx_1\cdots dx_p = \left(\int_0^1 x_1^2\,dx_1\right)\prod_{k=2}^p\left(\int_0^1 dx_k\right) = \frac{1}{3}\,,$$
et
$$\int\cdots\int_D x_1x_2\,dx_1\cdots dx_p = \left(\int_0^1 x_1\,dx_1\right)\left(\int_0^1 x_2\,dx_2\right)\prod_{k=3}^p\left(\int_0^1 dx_k\right) = \frac{1}{4}\,.$$
Alors
$$I = p\int\cdots\int_D x_1^2\,dx_1\cdots dx_p + p(p-1)\int\cdots\int_D x_1x_2\,dx_1\cdots dx_p = \frac{p}{3}+\frac{p(p-1)}{4} = \frac{3p^2+p}{12}\,.$$

119) Calculer $I_p = \int\cdots\int_{D_p} f(x_1,\ldots,x_p)\,dx_1\cdots dx_p$

où

$$D_p = [\,0,\,\pi\,]^{\,p}\,,$$

et

$$f(x_1,\ldots,x_p) = \sin\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right)\,.$$

Supposons $p \geq 2$. On a tout d'abord

$$\begin{aligned}(I_p)_{x_p}(x_1,\ldots,x_{p-1}) &= \int_0^\pi \sin\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right)\,dx_p = \left[-\cos\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right)\right]_{x_p=0}^{x_p=\pi}\\ &= -\cos\left(\pi+\sum_{k=1}^{p-1} x_k\right)+\cos\left(\sum_{k=1}^{p-1} x_k\right) = 2\,\cos\left(\sum_{k=1}^{p-1} x_k\right)\,.\end{aligned}$$

Si maintenant $p \geq 3$, on obtient

$$\begin{aligned}(I_p)_{(x_{p-1},x_p)}(x_1,\ldots,x_{p-2}) &= 2\int_0^\pi \cos\left(\sum_{k=1}^{p-1} x_k\right)\,dx_{p-1} = 2\left[\sin\left(\sum_{k=1}^{p-1} x_k\right)\right]_{x_{p-1}=0}^{x_{p-1}=\pi}\\ &= 2\sin\left(\pi+\sum_{k=1}^{p-2} x_k\right)-2\sin\left(\sum_{k=1}^{p-2} x_k\right) = -4\,\sin\left(\sum_{k=1}^{p-2} x_k\right)\,.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}I_p &= \int\cdots\int_{D_{p-2}} (I_p)_{(x_{p-1},x_p)}(x_1,\ldots,x_{p-2})\,dx_1\cdots dx_{p-2}\\ &= -4\int\cdots\int_{D_{p-2}} \sin\left(\sum_{k=1}^{p-2} x_k\right)\,dx_1\cdots dx_{p-2} = -4\,I_{p-2}\,.\end{aligned}$$

D'autre part

$$I_1 = \int_0^\pi \sin x_1\,dx_1 = -2 \quad\text{et}\quad I_2 = 2\int_0^\pi \cos x_1\,dx_1 = 0\,.$$

Pour tout $s \geq 1$, on a donc

$$I_{2s-1} = (-1)^s 2^{2s-1} \quad\text{et}\quad I_{2s} = 0\,.$$

Remarque : la nullité de I_{2s} était prévisible car, si $p = 2s$, le changement de variables

$$\Phi(x_1,\cdots,x_p) = (\pi-x_1,\cdots,\pi-x_p)$$

est une isométrie de D_p et

$$f(\pi-x_1,\cdots,\pi-x_p) = \sin\left(p\pi-\sum_{k=1}^{p} x_k\right) = -\sin\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) = -f(x_1,\ldots,x_p)\,.$$

120) Soit D_p le domaine

$$D_p = \{(x_1, \dots, x_p) \,|\, 0 \leq x_p \leq x_{p-1} \leq \cdots \leq x_1 \leq 1\},$$

et f une fonction continue sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Montrer que

$$I = \int_{D_p} \cdots \int f(x_1) \cdots f(x_p)\, dx_1 \cdots dx_p = \frac{1}{p!} \left(\int_0^1 f(t)\, dt \right)^p .$$

Application.
a) Calculer le volume $\mathscr{V}_p$ de D_p
b) Calculer I lorsque $f(t) = t^\alpha$ $(\alpha > -1)$
c) Calculer I lorsque $f(t) = e^t$

Si $0 \leq t \leq 1$, posons

$$F(t) = \int_0^t f(u)\, du .$$

Lorsque $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est fixé dans

$$D_{p-1} = \{(x_1, \dots, x_{p-1}) \,|\, 0 \leq x_{p-1} \leq \cdots \leq x_1 \leq 1\},$$

le nombre x_p varie de 0 à x_{p-1}. On calcule

$$\begin{aligned} I_{x_p}(x_1, \dots, x_{p-1}) &= \int_0^{x_{p-1}} f(x_1) \cdots f(x_{p-1}) f(x_p)\, dx_p \\ &= f(x_1) \cdots f(x_{p-1}) \int_0^{x_{p-1}} f(x_p)\, dx_p \\ &= f(x_1) \cdots f(x_{p-1})\, F(x_{p-1}) . \end{aligned}$$

Donc

$$I = \int_{D_{p-1}} \cdots \int f(x_1) \cdots f(x_{p-1}) F(x_{p-1})\, dx_1 \cdots dx_{p-1} .$$

On montre alors par récurrence que, si $1 \leq k \leq p-1$, on a

$$I = \int_{D_{p-k}} \cdots \int f(x_1) \cdots f(x_{p-k})\, \frac{F(x_{p-k})^k}{k!}\, dx_1 \cdots dx_{p-k} . \tag{5.1}$$

C'est vrai si $k=1$. Supposons la formule vraie à l'ordre k. On calcule alors

$$\begin{aligned} I_{x_{p-k},\cdots,x_p}(x_1,\ldots,x_{p-k-1}) &= \int_0^{x_{p-k-1}} f(x_1)\cdots f(x_{p-k-1})\,f(x_{p-k})\,\frac{F(x_{p-k})^k}{k!}\,dx_{p-k} \\ &= f(x_1)\cdots f(x_{p-k-1}) \int_0^{x_{p-k-1}} f(x_{p-k})\,\frac{F(x_{p-k})^k}{k!}\,dx_{p-k}\,, \end{aligned}$$

et, puisque f est la dérivée de F,

$$I_{x_{p-k},\cdots,x_p}(x_1,\ldots,x_{p-k-1}) = f(x_1)\cdots f(x_{p-k-1})\,\frac{F(x_{p-k-1})^{k+1}}{(k+1)!}\,.$$

Donc

$$I = \int\cdots\int_{D_{p-k-1}} f(x_1)\cdots f(x_{p-k-1})\,\frac{F(x_{p-k-1})^{k+1}}{(k+1)!}\,dx_1\cdots dx_{p-k-1}\,,$$

ce qui donne la formule au rang $k+1$.

Si l'on applique la formule (5.1) lorsque $k=p-1$, on trouve alors

$$I = \int_0^1 f(x_1)\,\frac{F(x_1)^{p-1}}{(p-1)!}\,dx_1 = \frac{F(1)^p}{p!} = \frac{1}{p!}\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)^p\,.$$

Application.

a) On obtient le volume de D_p en prenant $f=1$, ce qui donne

$$\mathscr{V}_p = \frac{1}{p!}\,.$$

b) Si $f(t)=t^\alpha$, alors $F(t)=\dfrac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ et donc

$$I = \frac{1}{p!}\,\frac{1}{(\alpha+1)^p}\,.$$

c) Si $f(t)=e^t$, alors $F(t)=e^t-1$ et donc

$$I = \frac{1}{p!}\,(e-1)^p\,.$$

Chapitre 6

CHANGEMENT DE VARIABLES

121) Calculer $I = \int_D \cdots \int f(x_1, \dots, x_p)\, dx_1 \cdots dx_p$

où

$$D = [\,0,\, 1\,]^{\,p}\,,$$

et

$$f(x_1, \dots, x_p) = \prod_{1 \le i < j \le p} (x_i - x_j)\,.$$

Le changement de variables

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p) = (x_2, x_1, x_3, \dots x_p)\,,$$

qui échange les deux premières variables, est une isométrie du domaine D. D'autre part, en écrivant

$$f(x_1, \dots, x_p) = (x_1 - x_2) \left(\prod_{k=3}^{p} (x_1 - x_k)(x_2 - x_k) \right) \prod_{3 \le i < j \le p} (x_i - x_j)\,,$$

on obtient immédiatement

$$f(x_2, x_1, x_3, \dots x_p) = -f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p)\,.$$

Alors

$$I = \int_D \cdots \int f(x_1, \dots, x_p)\, dx_1 \cdots dx_p = 0\,.$$

122) Calculer $I = \int \cdots \int_D f(x_1, \ldots, x_p)\, dx_1 \cdots dx_p$

où

$$D = \{(x_1, \ldots, x_p) \,|\, x_1 \geq 0\,, \ldots, x_p \geq 0\,,\; x_1 + \cdots + x_p \leq 1\}\,,$$

et

$$f(x_1, \ldots, x_p) = x_1 \cdots x_p(1 - x_1 - \cdots - x_p)\,,$$

en utilisant le changement de variables

$x_1 = u_1(1-u_2)\ ,\ldots\ ,x_i = u_1 \cdots u_i(1-u_{i+1})\ ,\ldots\ ,x_{p-1} = u_1 \cdots u_{p-1}(1-u_p)\ ,\ldots\ ,x_p = u_1 \cdots u_p\,.$

Remarquons que les systèmes

$$\begin{cases} x_1 = u_1 - u_1u_2 \\ x_2 = u_1u_2 - u_1u_2u_3 \\ \cdots\cdots \\ x_i = u_1 \cdots u_i - u_1 \cdots u_iu_{i+1} \\ \cdots\cdots \\ x_p = u_1 \cdots u_p \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 + \cdots + x_p = u_1 \\ x_2 + \cdots + x_p = u_1u_2 \\ \cdots\cdots \\ x_i + \cdots + x_p = u_1 \cdots u_i \\ \cdots\cdots \\ x_p = u_1 \cdots u_p \end{cases}$$

sont équivalents. Donc si $(x_1, \ldots, x_p)$ appartient à l'intérieur du domaine D, on a encore

$$\begin{cases} u_1 = x_1 + \cdots + x_p \\ u_2 = \dfrac{x_2 + \cdots x_p}{x_1 + \cdots + x_p} \\ \cdots\cdots \\ u_i = \dfrac{x_i + \cdots + x_p}{x_{i-1} + \cdots + x_p} \\ \cdots\cdots \\ u_p = \dfrac{x_p}{x_{p-1} + x_p} \end{cases} .$$

L'application Φ définie par

$$\Phi(u_1, \ldots, u_p) = (u_1(1-u_2), \ldots, u_1 \cdots u_i(1-u_{i+1}), \ldots, u_1 \cdots u_p)$$

réalise une bijection de $\Delta =]\,0,\,1\,[^p$ sur l'intérieur de D.

Pour calculer le jacobien introduisons les variables

$$X_1 = u_1\ ,\ X_2 = u_1u_2\ ,\ \ldots\ ,\ X_p = u_1 \cdots u_p\,.$$

Si l'on pose

$$\Psi_1(u_1, \ldots, u_p) = (u_1, \ldots, u_1 \cdots u_p) \quad \text{et} \quad \Psi_2(X_1, \cdots, X_p) = (X_1 - X_2, \ldots, X_{p-1} - X_p, X_p)$$

on a alors

$$\Phi = \Psi_2 \circ \Psi_1\,.$$

Le déterminant de l'application linéaire Ψ_2 vaut 1, car c'est celui d'une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux valent 1. Le déterminant jacobien de Φ est donc aussi celui de Ψ_1.

Le déterminant jacobien de Ψ_1 est celui d'une matrice triangulaire inférieure

$$\frac{dX_1 \cdots dX_p}{du_1 \cdots du_p} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_2 & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ u_2 u_3 & u_1 u_3 & u_1 u_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & * & * & u_1 \cdots u_{p-1} \end{vmatrix} .$$

On obtient finalement

$$\frac{dx_1 \cdots dx_p}{du_1 \cdots du_p} = \frac{dX_1 \cdots dX_p}{du_1 \cdots du_p} = u_1^{p-1} u_2^{p-2} \cdots u_{p-1} = \prod_{k=1}^{p} u_k^{p-k} .$$

On a également

$$f(u_1(1-u_2), u_1 u_2(1-u_3), \ldots, u_1 \cdots u_p) = u_1^p u_2^{p-1} \cdots u_p (1-u_1)(1-u_2) \cdots (1-u_p) = \prod_{k=1}^{p} \left(u_k^{p+1-k}(1-u_k) \right) .$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Delta} \cdots \int f(u_1(1-u_2), u_1 u_2(1-u_3), \ldots, u_1 \cdots u_p)\, u_1^{p-1} u_2^{p-2} \cdots u_{p-1}\, du_1 \cdots du_p \\ &= \int_{\Delta} \cdots \int \prod_{k=1}^{p} \left(u_k^{2p+1-2k}(1-u_k) \right) du_1 \cdots du_p . \end{aligned}$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement

$$\begin{aligned} I &= \prod_{k=1}^{p} \left(\int_0^1 \left(u_k^{2(p-k)+1} - u_k^{2(p-k)+2} \right) dx_k \right) \\ &= \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{2(p-k)+2} - \frac{1}{2(p-k)+3} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(2(p-k)+2)(2(p-k)+3)} \\ &= \prod_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(2k+2)(2k+3)} \\ &= \frac{1}{(2p+1)!} . \end{aligned}$$

123) Calculer le volume $\mathscr{V}_p$ de l'hypersphère

$$S_p = \left\{ (x_1, \ldots, x_p) \mid \sum_{i=1}^{p} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

en utilisant le changement de variables, généralistion des coordonnées sphériques, déterminé par l'application Φ_p de $\mathbb{R}^p$ dans lui même définie par

$$\Phi_p(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1}) = (x_1, \ldots, x_p)$$

où, si $1 \leq i \leq p$, on a

$$x_i = \rho \sin \theta_i \prod_{j=1}^{i-1} \cos \theta_j \,.$$

avec la convention

$$\theta_p = \frac{\pi}{2} \,.$$

La sphère est obtenue lorsque $(\rho, \theta_1, \cdots, \theta_{p-1})$ décrit le domaine

$$\Delta_p = [\,0,\, 1\,] \times [\,-\pi/2,\, \pi/2\,]^{\,p-2} \times [\,0,\, 2\pi\,] \,.$$

Pour le calcul du jacobien de Φ_p, on se place dans $\overset{\circ}{\Delta}_p \setminus \{(\rho, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1}) \mid \theta_1 \cdots \theta_{p-1} = 0\}$. Le résultat restera valable par continuité dans $\overset{\circ}{\Delta}_p$.

On calcule les dérivées partielles. Tout d'abord, si $1 \leq i \leq p$, on a

$$\frac{\partial x_i}{\partial \rho} = \sin \theta_i \prod_{j=1}^{i-1} \cos \theta_j = \frac{x_i}{\rho} \,.$$

Ensuite, si $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq p-1$,

$$\frac{\partial x_i}{\partial \theta_j} = \begin{cases} \rho \sin \theta_i \left(\displaystyle\prod_{\substack{1 \leq k \leq i-1 \\ k \neq j}} \cos \theta_k \right) (-\sin \theta_j) = -x_i \tan \theta_j & \text{si } j < i \\[2ex] \rho \cos \theta_i \displaystyle\prod_{1 \leq k \leq i-1} \cos \theta_k = x_i \operatorname{cotan} \theta_i & \text{si } j = i \\[2ex] 0 & \text{si } j > i \end{cases} .$$

On a donc à calculer le déterminant jacobien suivant :

$$J\Phi_p = \begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{\rho} & x_1 \operatorname{cotan}\theta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \dfrac{x_2}{\rho} & -x_2\tan\theta_1 & x_2\operatorname{cotan}\theta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \\ \dfrac{x_{p-1}}{\rho} & -x_{p-1}\tan\theta_1 & \cdots & \cdots & -x_{p-1}\tan\theta_{p-2} & x_{p-1}\operatorname{cotan}\theta_{p-1} \\ \dfrac{x_p}{\rho} & -x_p\tan\theta_1 & \cdots & \cdots & \cdots & -x_p\tan\theta_{p-1} \end{vmatrix}$$

qui s'écrit, en mettant, pour tout i compris entre 1 et p, le nombre x_i en facteur dans la $i-$ème ligne, et en mettant $1/\rho$ en facteur dans la première colonne

$$J\Phi_p = \rho^{-1} x_1 \cdots x_p \, D_p \,,$$

où

$$D_p = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{cotan}\theta_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -\tan\theta_1 & \operatorname{cotan}\theta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 \\ 1 & -\tan\theta_1 & \cdots & \cdots & -\tan\theta_{p-2} & \operatorname{cotan}\theta_{p-1} \\ 1 & -\tan\theta_1 & \cdots & \cdots & -\tan\theta_{p-2} & -\tan\theta_{p-1} \end{vmatrix} .$$

Si on développe D_p par rapport à la dernière colonne, on obtient, pour $p \geq 2$,

$$D_p = -\operatorname{cotan}\theta_{p-1} D_{p-1} - \tan\theta_{p-1} D_{p-1} \,,$$

ce qui donne

$$D_p = -(\sin\theta_{p-1}\cos\theta_{p-1})^{-1} D_{p-1} \,.$$

En partant de $D_1 = 1$, on en déduit la valeur de D_p

$$D_p = (-1)^{p-1} \left(\prod_{k=1}^{p-1} \sin\theta_k \cos\theta_k \right)^{-1} .$$

On passe alors à $J\Phi_p$ que l'on peut écrire

$$J\Phi_p = (-1)^{p-1} \left(\prod_{k=2}^{p} \frac{x_k}{\sin\theta_k \cos\theta_{k-1}} \right) \frac{x_1}{\rho \sin\theta_1} ,$$

ou encore

$$J\Phi_p = (-1)^{p-1} \prod_{k=2}^{p} \left(\rho \prod_{j=1}^{k-2} \cos\theta_j \right) = (-\rho)^{p-1} \prod_{k=3}^{p} \left(\prod_{j=1}^{k-2} \cos\theta_j \right) .$$

En inversant les produits

$$J\Phi_p = (-\rho)^{p-1} \prod_{j=1}^{p-2} \left(\prod_{k=j+2}^{p} \cos\theta_j \right) = (-\rho)^{p-1} \prod_{j=1}^{p-2} \cos^{p-j-1}\theta_j ,$$

et finalement, en posant $k = p - j - 1$,

$$J\Phi_p = (-\rho)^{p-1} \prod_{k=1}^{p-2} \cos^k \theta_{p-1-k} .$$

Ce jacobien est non nul dans $\mathring{\Delta}_p$, et Φ_p est un difféomorphisme de $\mathring{\Delta}_p$ sur $\Phi_p(\mathring{\Delta}_p)$.

Alors le volume $\mathscr{V}_p$ de la sphère vaut

$$\mathscr{V}_p = \int_{S_p} dx_1 \cdots dx_p = \int_{\Delta_p} \rho^{p-1} \prod_{k=1}^{p-2} \cos^k \theta_{p-1-k} \, d\rho \, d\theta_1 \cdots d\theta_{p-1} .$$

Comme les variables se séparent, on a immédiatement,

$$\mathscr{V}_p = \left(\int_0^1 \rho^{p-1} d\rho \right) \prod_{k=1}^{p-2} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^k \theta_{p-1-k} \, d\theta_{p-1-k} \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta_{p-1} \right) = 2^{p-1} \frac{\pi}{p} \prod_{k=1}^{p-2} I_k ,$$

où I_k désigne l'intégrale de Wallis

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \cos^k t \, dt .$$

Un calcul classique donne

$$I_k = \begin{cases} \dfrac{2p-1}{2p} \dfrac{2p-3}{2p-2} \cdots \dfrac{1}{2} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } k = 2p \\ \dfrac{2p}{2p+1} \dfrac{2p-2}{2p-1} \cdots \dfrac{2}{3} = \dfrac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} & \text{si } k = 2p+1 \end{cases} .$$

Calculons le produit

$$P_p = \prod_{k=1}^{p} I_k .$$

Tout d'abord,

$$P_{2s} = \prod_{k=1}^{s} (I_{2k-1} I_{2k}) \, .$$

Or

$$I_{2k-1} I_{2k} = \left(\frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{2}{3} \right) \left(\frac{2k-1}{2k} \cdots \frac{1}{2} \, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4k} \, ,$$

donc

$$P_{2s} = \prod_{k=1}^{s} \frac{\pi}{4k} = \frac{\pi^s}{4^s s!} \, .$$

Ensuite

$$P_{2s+1} = P_{2s} I_{2s+1} = \frac{\pi^s}{4^s s!} \, \frac{4^s (s!)^2}{(2s+1)!} = \frac{s! \pi^s}{(2s+1)!} \, .$$

On en déduit finalement

$$\mathscr{V}_{2s} = \pi \, \frac{2^{2s-1}}{2s} \, P_{2s-2} = \frac{\pi^s}{s!}$$

et

$$\mathscr{V}_{2s+1} = \pi \, \frac{2^{2s}}{2s+1} \, P_{2s-1} = \frac{2^{2s+1} \pi^s s!}{(2s+1)!} \, .$$

En particulier on retrouve

$$\mathscr{V}_1 = 2 \quad \text{longueur de l'intervalle} \, [\, -1, \, 1 \,]$$

$$\mathscr{V}_2 = \pi \quad \text{aire du cercle de rayon 1}$$

$$\mathscr{V}_3 = \frac{4\pi}{3} \quad \text{volume de la sphère de rayon 1}$$

et ensuite

$$\mathscr{V}_4 = \frac{\pi^2}{2} \, .$$