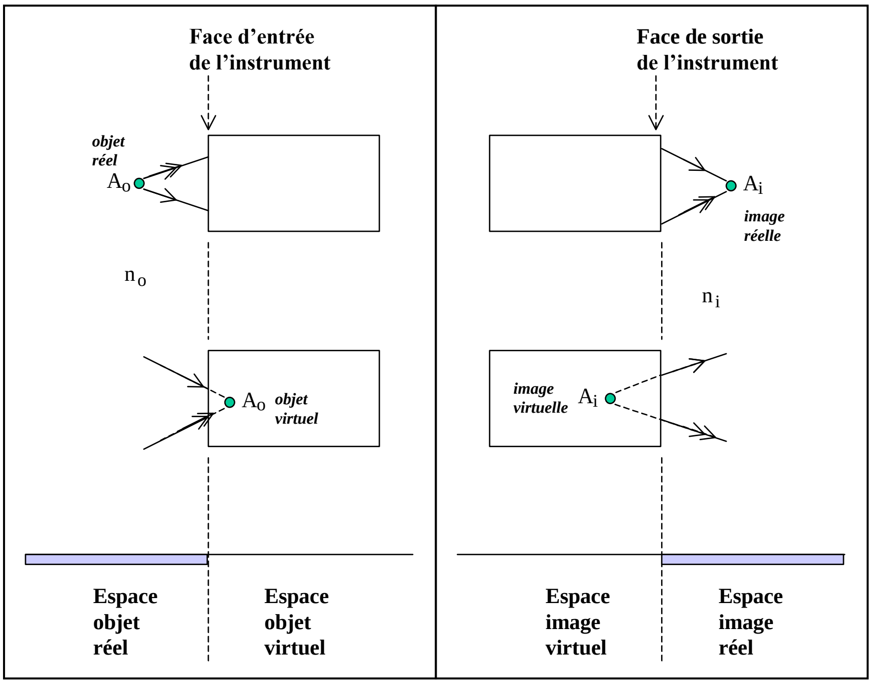
Chapitre 2

FORMATION DES IMAGES
STIGMATISME ET APPROXIMATION DE GAUSS

I. Introduction

Le rôle des instruments d'optique est de fournir des images qui soient aussi représentatives que possible des objets auxquels on s'intéresse. Dans un instrument d'optique, les rayons lumineux provenant d'un objet subissent une succession de réflexion et réfraction avant de former l'image dans un détecteur (œil, plaque photo, écran,etc). Les instruments d'optique sont constitués par une succession de milieux homogènes d'indices différents séparés par des dioptres ou des miroirs. Un ***instrument*** (S) est dit ***dioptrique*** s'il ne comporte que des dioptres ; s'il comporte aussi des miroirs, il est dit ***catadioptrique.*** Soit A_0 une source ponctuelle envoyant sur la face d'entrée de l'instrument des rayons lumineux dits ***« rayons incidents*** ». A_o peut être considéré pour (S) comme un ***objet***. Si après avoir traversé le système (S) les rayons lumineux correspondants, dits « rayons émergents » passent tous par le même point A_i, ce point A_i est dit ***image*** de A_o à travers le système (S). En fait deux cas sont à distinguer ; ou bien les rayons émergents passent effectivement par A_i, et on dit alors que A_i est ***l'image réelle*** de A_o, ou bien ce ne sont que les prolongements de ces rayons qui passent par A_i, et on dit alors que A_i est l'***image virtuelle*** de A_o. Un observateur situé à la sortie d'un l'instrument n'est sensible qu'à la direction des rayons qu'il reçoit. Pour l'observateur les rayons émergents semblent provenir d'un point A_i situé à l'intérieur de l'instrument, lorsque A_i est virtuelle. Une image virtuelle ne peut donc être reçue sur un écran.

Les rôles d'***objet*** et ***image*** dépendent du sens de propagation de la lumière. Autrement dit, les points A_o et A_i ont un caractère symétrique à cause du ***principe du retour inverse de la lumière.*** Selon ce principe, si A_i est l'image de A_o, et si en A_i on place une source lumineuse ponctuelle, les rayons issus de A_i vont passer par A_o qui est alors l'image de A_i. Pour tenir compte de cette symétrie, on dit que A_o et A_i sont conjugués par rapport à (S) ou encore que le système (S) est stigmatique pour le couple de points A_o et A_i.



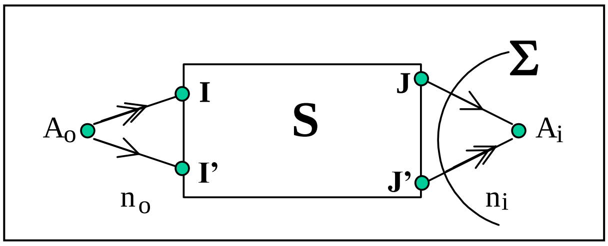
Si <u>TOUS les rayons</u> partant d'un objet ponctuel A_o émergent d'un instrument en passant un même point A_i, alors A_i constitue « l'image de A_o ». Dans ce cas, on dit que A_o et A_i constituent un couple de ***points conjugués***. On dit aussi que ***l'instrument*** considéré est ***rigoureusement stigmatique pour le couple de points A_o et A_i.***

II. Stigmatisme rigoureux

II.1. Condition de stigmatisme rigoureux

Nous allons exprimer la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système optique soit rigoureusement stigmatique.

II.1.a) Cas d'un objet réel et image réelle



Considérons la situation représentée dans la figure ci-contre. On cherche la condition dans laquelle tout rayon lumineux passant par A_o passe par A_i après avoir traversé un instrument S représenté schématiquement par

Dans le cas présent où A_o et A_i sont des points réels, les rayons incidents proviennent effectivement de A_o où l'on peut mettre une source lumineuse ponctuelle, et les rayons émergents doivent effectivement converger en A_i où l'on peut mettre un écran. Désignons par Σ une surface d'onde correspondant aux rayons issus de A_o, et située dans le milieu d'indice n_i. Par définition, tous les points de Σ sont séparés de A_o par le même chemin optique que nous désignerons par L_0. Pour que S soit rigoureusement stigmatique, il faut que TOUS les rayons issus de A_o convergent en A_i ; comme les rayons lumineux sont normaux aux surfaces d'onde (théorème de Malus), Σ doit être une sphère de centre A_i. Soit R le rayon de cette sphère. Le chemin optique s'écrit donc :

$$L(A_oA_i)=L_0+ n_i R=cste.$$

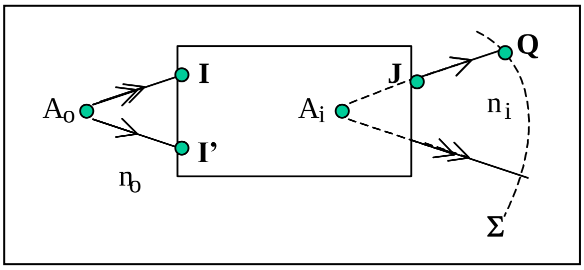
On peut aussi mettre *L* sous la forme suivante :

$$\boxed{L(A_oA_i)=n_0\overline{A_0I}+L(IJ)+n_i\overline{JA_i}=cste. \qquad (1)}$$

Autrement dit, si A_o et A_i sont conjugués, le chemin optique $L(A_oA_i)$ est une constante indépendante du rayon particulier allant de A_o à A_i.

II.1.b) Cas d'un objet réel et image virtuelle

Considérons la situation représentée dans la figure ci-contre, où l'objet A_o est réel et l'image A_i virtuelle. Entre A_o et la surface d'onde Σ, le chemin optique a la même valeur quelque soit le rayon considéré ;



$$L(A_oQ)=n_0\overline{A_oI}+L(IJ)+n_i\overline{JQ}=cste.$$

Or $n_i\overline{JQ}=n_i\overline{JA_i}+n_i\overline{A_iQ} \quad \Rightarrow \quad L(A_oQ)=n_0\overline{A_oI}+L(IJ)+n_i\overline{JA_i}+n_i\overline{A_iQ}=cste.$

Comme A_i et Σ constituent des surfaces d'onde, $n_i A_i Q$ a la même valeur pour tous les rayons. Cela implique que

$$n_0 \overline{A_o I} + L(IJ) + n_i \overline{JA_i} = cste = L(A_o A_i)$$

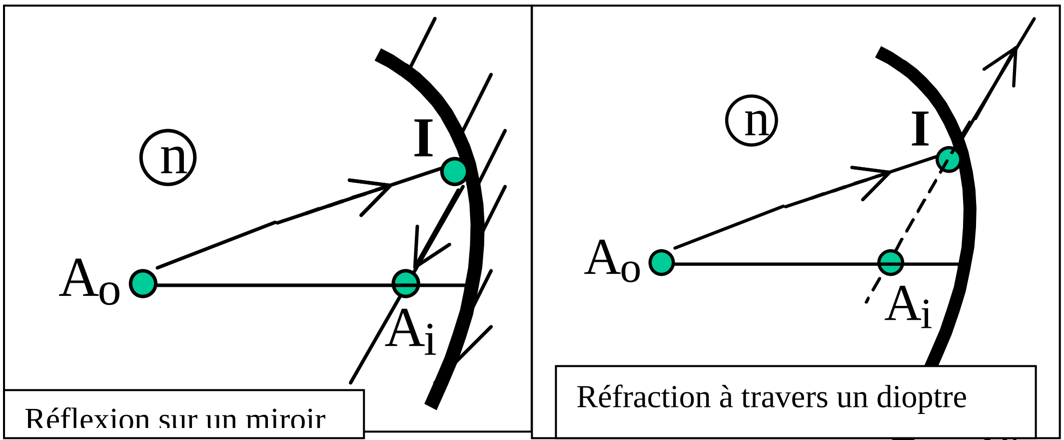
Cette relation est la même que la relation (1) où l'image est réelle. On peut donc utiliser la relation (1) dans tous les cas, à condition que les grandeurs $\overline{A_o I}$ *et* $\overline{JA_i}$ soient traitées comme des quantités algébriques (comptées positivement dans le sens de propagation de la lumière et négativement dans le sens inverse). Par exemple, la quantité $\overline{JA_i} > 0$ dans le cas II.1.a), alors que $\overline{JA_i} < 0$ dans le cas II.1.b).

De manière générale, la condition nécessaire et suffisante de stigmatisme rigoureux s'écrit

$$\boxed{L(A_o A_i) = cste \qquad (2)}$$

III. Exemples d'instruments rigoureusement stigmatiques

Nous allons nous limiter au cas de systèmes tels qu'en allant de A_o à A_i le rayon lumineux ne subisse qu'une réflexion ou une réfraction. Dans ce cas le système optique se réduit alors à un miroir ou à un dioptre, dont nous allons préciser la forme dans différents cas.



Réflexion sur un miroir — Réfraction à travers un dioptre

Les rayons réfléchi et réfracté étant dans le plan d'incidence, la figure se trace dans un plan que l'on peut faire tourner autour de la droite $A_o A_i$: les surfaces cherchées sont donc de révolution autour de cette droite. Par conséquent, on peut les caractériser par leur trace dans le plan méridien, c'est-à-dire, le plan de la figure contenant $A_o A_i$.

III.1. Stigmatisme par réflexion

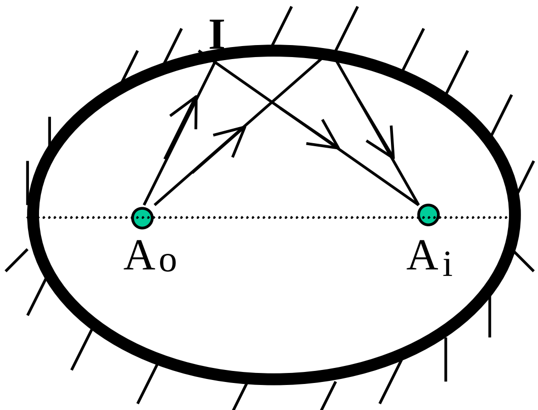
Les points I doivent satisfaire la condition

$$L(A_o A_i) = n(\overline{A_o I} + \overline{IA_i}) = cste$$
$$\Rightarrow \overline{A_o I} + \overline{IA_i} = cste$$

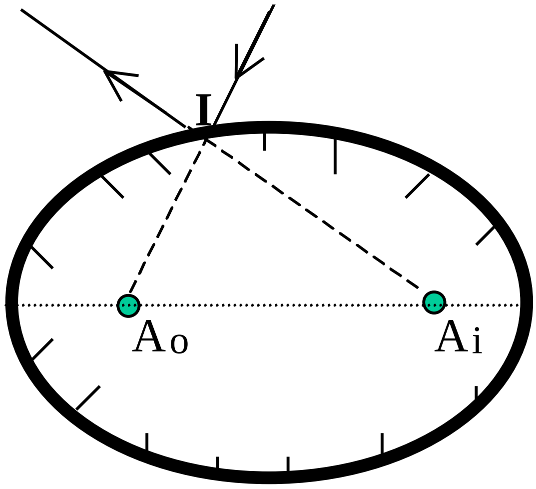
Examinons les différents cas possibles

III.1.a) A$_o$ et A$_i$ sont de même nature.

La condition de stigmatisme ($\overline{A_o I} + \overline{IA_i} = cste$ quelque soit I) conduit à un ellipsoïde de révolution de foyers A$_o$ et A$_i$. Dans un plan méridien le lieu des points I est donc une ellipse de foyers A$_o$ et A$_i$.



A$_o$ et A$_i$ sont réels



A$_o$ et A$_i$ sont virtuels

III.1.b) A$_o$ et A$_i$ sont de natures différentes

La condition de stigmatisme s'écrit

$$\overline{A_o I} + \overline{IA_i} = cste\,,$$

où les grandeurs $\overline{A_o I}$ *et* $\overline{IA_i}$ sont de signes contraires. En utilisant des grandeurs de même signe, cette condition devient

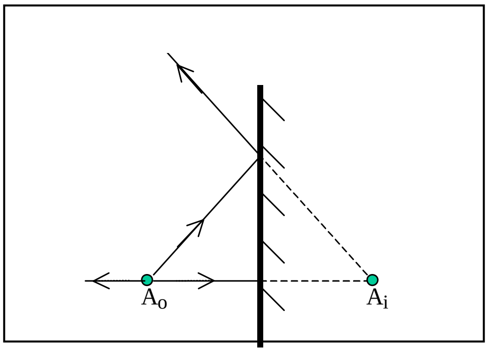
$$\overline{IA_i} - \overline{IA_o} = cste\,.$$

* Si la constante est nulle, la condition de stigmatisme s'écrit

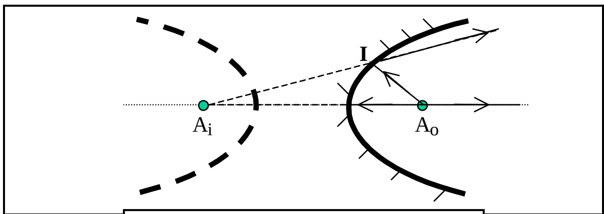
$$\overline{A_o I} = \overline{IA_i}$$

Dans ce cas, le lieu des points I est le plan médiateur de $A_o A_i$, il s'agit d'un ***miroir plan.***

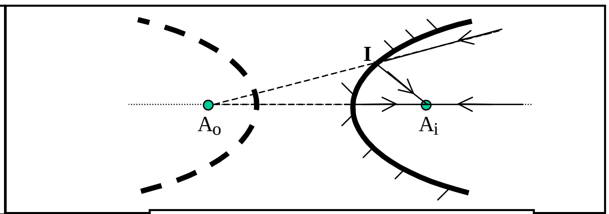
Le miroir plan est donc parfaitement stigmatique pour tout couple de points symétriques par rapport à son plan ; un des points est réel, l'autre est virtuel.



* Si la constante n'est pas nulle, la condition $\overline{IA_i} - \overline{IA_o} = cste$ définit dans un plan méridien une hyperbole de foyers A$_o$ et A$_i$, comme l'illustrent les figures ci-après :



Objet réel, image virtuel



Objet virtuel, image réelle

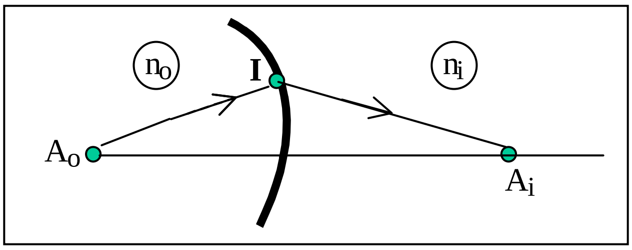
III.2. Stigmatisme par réfraction

Etant donnés deux points A_o et A_i, on cherche à déterminer la surface d'un dioptre rigoureusement stigmatique pour ces deux points, et séparant un milieu d'indice n_o d'un milieu d'indice n_i. La condition de stigmatisme s'écrit :

$$L(A_oA_i) = n_o\overline{A_oI} + n_i\overline{IA_i} = cste$$

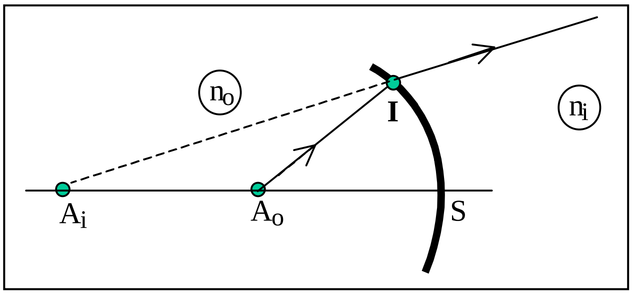
III.2.a) A_o et A_i sont de même nature

La condition de stigmatisme s'écrit :
$n_o\overline{A_oI} + n_i\overline{IA_i} = cste \;>0$,
ce qui conduit à une courbe connue sous le nom de ***ovale de Descartes.*** La surface correspondante est pratiquement irréalisable.



III.2.b) A_o et A_i sont de natures différentes

La condition de stigmatisme s'écrit :
$n_o\overline{A_oI} - n_i\overline{IA_i} = cste$
Si la constante n'est pas nulle la surface correspondante est encore une ***ovale de Descartes,*** qui est sans intérêt à cause des difficultés expérimentales de sa réalisation.



Par contre, si la constante est nulle la condition de stigmatisme s'écrit

$$\frac{\overline{A_oI}}{\overline{IA_i}} = \frac{n_i}{n_o} \qquad (3)$$

D'après les règles de géométrie, le lieu des points I dont le rapport des distances à deux points fixes A_o et A_i est constant, est un cercle dont le centre est sur l'axe A_oA_i. La surface cherchée est un ***dioptre sphérique***. La relation (3) permet de trouver la position de ce dioptre par rapport aux points A_o et A_i.

Il s'agit d'un dioptre sphérique de centre C et de rayon $\overline{CS}$, orienté dans le sens positif de la lumière, rigoureusement stigmatique pour le couple de points A_o et A_i, et défini par :

$$\frac{\overline{CA_o}}{\overline{CS}} = -\frac{n_i}{n_o} \quad et \quad \frac{\overline{CA_i}}{\overline{CS}} = -\frac{n_o}{n_i}$$

Les deux points A_o et A_i ainsi définis sont appelés ***points de Weierstrass*** (ou points de Young) du dioptre sphérique.

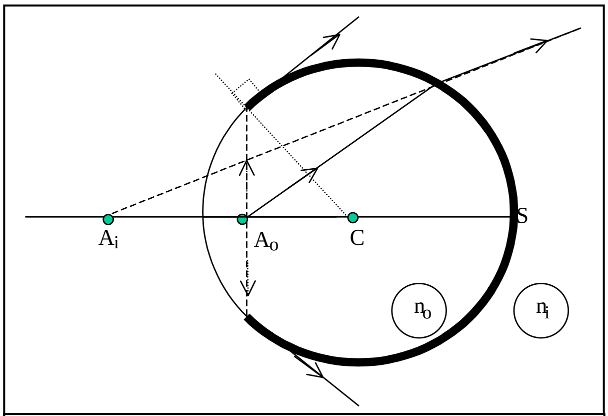
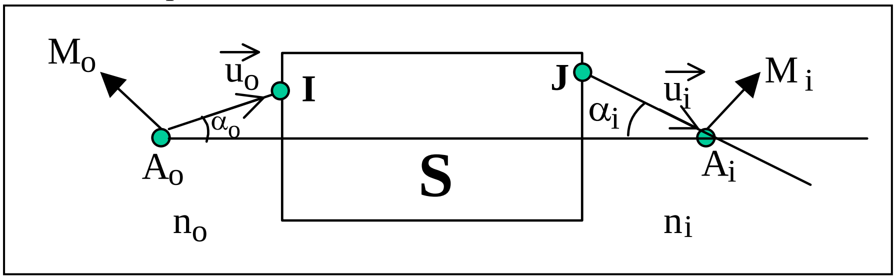


Illustration des points de Weierstrass pour $n_o > n_i$

VI. Stigmatisme approché

En général, le but d'un instrument d'optique ne se limite pas à obtenir une image ponctuelle d'un objet ponctuel ; il s'agit d'obtenir une image étendue d'un objet étendu. Excepté le miroir plan, il est extrêmement difficile voire pratiquement impossible d'obtenir des surfaces stigmatiques simples pour plus d'un couple de points. En général, on doit se contenter d'un stigmatisme approché. Nous allons nous limiter aux systèmes qui possèdent une symétrie de révolution. On peut se contenter d'une représentation de tels systèmes dans un plan contenant l'axe de révolution.



Nous allons voir comment s'obtiennent les conditions de stigmatisme approché. Soit A_oA_i un couple de points situés sur l'axe optique Oz d'un système centré. Le chemin optique entre A_o et A_i s'écrit :

$$L(A_oA_i) = n_0\overline{A_0I} + L(IJ) + n_i\overline{JA_i} = n_0A_0I + L(IJ) + n_iJA_i = cste.$$

$$= n_0(A_0I) + n_1(II_1) + n_2(I_1I_2) + n_3(I_2I_3) + \cdots + n_N(I_{N-1}J) + n_iJA_i = cste$$

Comme les points M_o et M_i , respectivement voisins de A_o et A_i, forment aussi un couple de points conjugués, on a

$L(M_oM_i) = cste$ d'où $L(M_oM_i) - L(A_oA_i) = cste$

Par ailleurs, cette différence de chemin optique s'écrit aussi

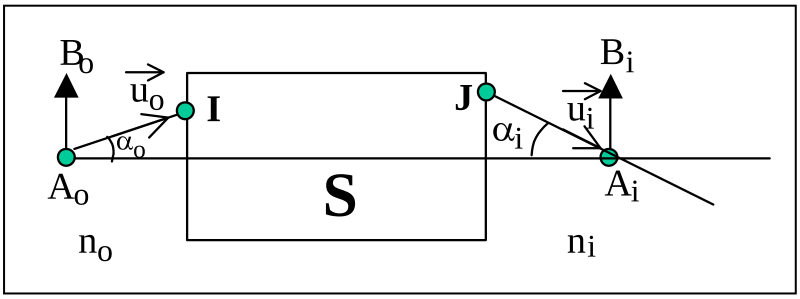
$$\Delta L = n_o\vec{u}_o.(\Delta\vec{I} - \Delta\vec{A}_o) + n_1\vec{u}_1.(\Delta\vec{I}_1 - \Delta\vec{I}) + n_2\vec{u}_2.(\Delta\vec{I}_2 - \Delta\vec{I}_1) + \cdots + n_i\vec{u}_i.(\Delta\vec{A}_i - \Delta\vec{J})$$

$$= -n_o\vec{u}_o.\overrightarrow{A_oM_o} + (n_o\vec{u}_o - n_1\vec{u}_1).\Delta\vec{I} + (n_1\vec{u}_1 - n_2\vec{u}_2).\Delta\vec{I}_1 + \cdots + n_i\vec{u}_i.\overrightarrow{A_iM_i}$$

Dans cette expression tous les termes intermédiaires s'annulent en vertu de la loi vectorielle de Snell-Descartes appliquée sur chacune des surfaces rencontrées. Il en résulte que

$$\boxed{\Delta L = n_i\vec{u}_i.\overrightarrow{A_iM_i} - n_o\vec{u}_o.\overrightarrow{A_oM_o} = cste}$$

IV. 1. Aplanétisme : condition des sinus d'Abbe



Nous allons considérer ici une situation assez fréquente où le but est d'obtenir à l'aide d'un instrument une image plane d'un objet plan perpendiculaire à l'axe (cas de l'appareil photographique). Nous cherchons la condition dans laquelle un petit objet A_oB_o perpendiculaire à l'axe donnera une image A_iB_i elle aussi perpendiculaire à l'axe. La condition cherchée s'appelle ***condition d'aplanétisme***. En Appliquant la formule ci-dessus au couple de points B_oB_i (B_o=M_o , B_i=M_i), on obtient

$$\begin{aligned}\Delta L &= n_i\,\vec{u_i}.\overrightarrow{A_iB_i} - n_o\,\vec{u_o}.\overrightarrow{A_oB_o}\\ &= n_i\,A_iB_i\cos(\pi/2-\alpha_i) - n_o\,A_oB_o\cos(\pi/2-\alpha_o)\\ &= n_i\,A_iB_i\sin(\alpha_i) - n_o\,A_oB_o\sin(\alpha_o) = cste = 0\end{aligned}$$

La cste correspond à $\alpha_o = 0$ (rayon incident correspondant à l'axe optique). Ce rayon traverse sans être devié ($\alpha_i = 0$).

Pour que le stigmatisme se conserve dans le plan de front perpendiculaire à l'axe, il faut donc que :

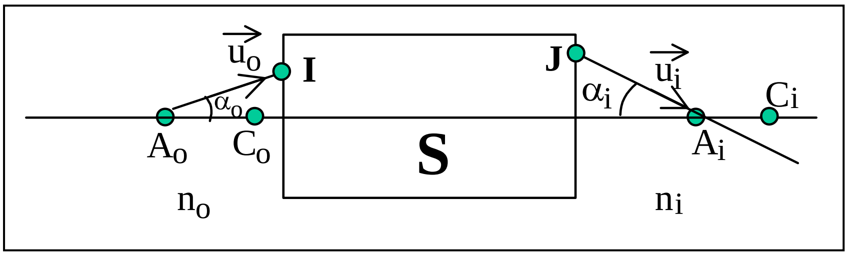
$$\boxed{n_i\,A_iB_i\sin(\alpha_i) = n_o\,A_oB_o\sin(\alpha_o) \qquad (4)}$$

C'est relation est appelée **condition d'aplanétisme** ou ***condition des sinus d'Abbe***. Le rapport $\frac{A_iB_i}{A_oB_o}$ correspond au grandissement transversal :

$$\boxed{G_t = \frac{A_iB_i}{A_oB_o} = \frac{n_o\sin(\alpha_o)}{n_i\sin(\alpha_i)}}$$

IV. 2. Condition d'Herschell

Dans certains instruments d'optique, tels que les viseurs, le but recherché est de former l'image de l'objet sur l'axe. Le problème, représenté dans la figure ci-après, consiste à se demander à quelle condition un point C_o situé sur l'axe et voisin de A_o, donnera une image C_i située sur l'axe et voisine de A_i. Cette condition va correspondre à la conservation du stigmatisme le long de l'axe optique.



On peut appliquer ici la même méthode que dans le paragraphe précédent, mais avec C_o et C_i au lieu de M_o et M_i. On obtient

$$\begin{aligned}\Delta L &= n_i\,\vec{u_i}.\overrightarrow{A_iC_i} - n_o\,\vec{u_o}.\overrightarrow{A_oC_o}\\ &= n_i\,A_iC_i\cos(\alpha_i) - n_o\,A_oC_o\cos(\alpha_o) = cste = n_i\,A_iC_i - n_o\,A_oC_o\\ &\Rightarrow n_i\,A_iC_i\left[\cos(\alpha_i)-1\right] - n_o\,A_oC_o\left[\cos(\alpha_o)-1\right] = 0\end{aligned}$$

Ce qui équivaut à :

$$\boxed{n_i\,A_iC_i\sin^2(\alpha_i/2) = n_o\,A_oC_o\sin^2(\alpha_o/2) \qquad (5)}$$

C'est relation est appelée **condition d'Herschel.** Le rapport $\frac{A_iC_i}{A_oC_o}$ correspond au grandissement longitudinal :

$$\boxed{G_l = \frac{A_iC_i}{A_oC_o} = \frac{n_o \sin^2(\alpha_o/2)}{n_i \sin^2(\alpha_i/2)}}$$

IV. 3. Stigmatisme tridimensionnel

La conservation du stigmatisme dans des volumes entourant respectivement des points conjugués A_o et A_i suppose que les conditions d'Abbe et Herschel soient simultanément vérifiées. Les relations

$G_t^{\,2} = \frac{n_o^2 \sin^2(\alpha_o)}{n_i^2 \sin^2(\alpha_i)}$ et $G_l = \frac{A_iC_i}{A_oC_o} = \frac{n_o \sin^2(\alpha_o/2)}{n_i \sin^2(\alpha_i/2)}$ donnent

$$\frac{\cos^2(\alpha_o/2)}{\cos^2(\alpha_i/2)} = \frac{n_i G_t^2}{n_o G_l}$$

Cette relation doit être satisfaite pour tout α_o, et en particulier pour $\alpha_o=0$ ($\alpha_i=0$) : On a donc

$$\frac{\cos^2(\alpha_o/2)}{\cos^2(\alpha_i/2)} = 1 \qquad et \qquad \frac{G_t^2}{G_l} = \frac{n_o}{n_i}$$

La relation sur les cosinus ne peut en toute rigueur se réaliser que pour $|\alpha_o| = |\alpha_i|$.

V. Approximation de Gauss

Lorsque $|\alpha_o| = |\alpha_i|$ le stigmatisme en volume est réalisé, mais dans ce cas le grandissement ne peut prendre qu'une seule valeur :

$$G_t = \pm n_o / n_i\,,$$

Cette situation ne présente qu'un intérêt très limité. Pour obtenir une condition moins stricte il faut modifier la condition précédente en la remettant sous la forme suivante :

$\frac{\cos(\alpha_o/2)}{\cos(\alpha_i/2)} \approx 1 \;\Rightarrow\; \frac{1-\alpha_o^2/2}{1-\alpha_i^2/2} \approx 1 \Rightarrow \alpha_o^2 - \alpha_i^2 \approx \varepsilon^2$ ***Cette condition se vérifie pour des angles petits et donc pour des rayons faiblement inclinés par rapport à l'axe du système. Cette condition correspond à l'approximation de Gauss.***