M.K.T

E.N.S.P. ..... *Niveau II/Année 2018-19, Session de Rattrapage* .... ND/NG

*** U.E. MAT 217 « *Séries et Intégrales généralisées* » ***

***** Examen Final *(3H 00mn)* *****

1. *TOUT DOCUMENT INTERDIT*.
2. Le correcteur appréciera le SOIN apporté à la REDACTION et à la PRESENTATION du devoir.
3. Toute réponse doit être justifiée, mais éviter des explications INUTILEMENT KILOMETRIQUES.
4. L'objectif ici ne doit pas être de chercher à traiter à tout prix toute l'épreuve, en sprintant inconsidérément et en bâclant. Mais, plutôt, d'en couvrir une part significative de manière convaincante.

****** *EXERCICE 1* (3,5 POINTS) ****** On pose : $B = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(3n)}{\operatorname{sh}(5n) + \operatorname{ch}(5n)}$.

1°) Sans calculer B, montrer que $B \in \mathbb{R}$.

2°) Calculer B, puis donner l'interprétation pratique de la valeur de B ainsi trouvée.

****** *EXERCICE 2* (5 POINTS) ****** Soit la *série de fonctions* : $\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n \operatorname{ch}(3n)}{(\operatorname{Arctg} n)^3 + \sqrt[4]{\ln n}}$.

1°) a) Calculer la limite du quotient $\frac{\ln(n+1)}{\ln n}$ quand $n \longrightarrow +\infty$. N.B. ***Mais sans bâcler le calcul !!!***

b) En déduire le *domaine de convergence* de la série de fonctions dans $\mathbb{R}$.

2°) Donner un intervalle $]-a\,,\,a[$ $(a > 0)$, quelconque, sur lequel la fonction-somme S de cette série de fonctions est *continue*. N.B. ***Démontrer la réponse donnée.***

****** *EXERCICE 3* (6 POINTS) ****** Soit la série numérique $T = \sum_{n \geqslant 0} e^{-5\sqrt{n}}$.

1°) Pour chacun des critères de convergence suivants des séries numériques, dire si la série T converge par ce critère : *(a) règle de Cauchy* ; *(b) critère des séries alternées* ; *(c) critère de comparaison avec une I.I.S. en* $+\infty$ (mais sans chercher à calculer la valeur de cette I.I.S. en $+\infty$) ; *(d) règle de d'Alembert*.

N.B. ***Pour chacun de ces critères, démontrer la réponse donnée.***

2°) a) Ecrire S_T, la somme de la série (*sans la calculer*) et donner l'*interprétation pratique* de sa valeur.

b) Utiliser 1°) ci-dessus pour calculer une *valeur approchée* de S_T à 5×10^{-6} près.

****** *EXERCICE 4* (6 POINTS) ****** *Ci-après, les parties I, II et III sont indépendantes.*

Soient : $J = \int_{-\sqrt{2}}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-2x^2}}$, $K = \int_0^{+\infty} e^{-4\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$, $L = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$.

$\boxed{\text{I}}$ - 1°) Sans calculer J, montrer que $J \in \mathbb{R}$. 2°) Calculer J.

$\boxed{\text{II}}$ - 1°) Sans calculer K, montrer que $K \in \mathbb{R}$. 2°) Calculer K.

$\boxed{\text{III}}$ - 1°) Sans calculer L, montrer que $L \in \mathbb{R}$. 2°) Calculer L.

****** *EXERCICE 5* (4,5 POINTS) ******

Etudier la nature des intégrales : *(1)* $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\operatorname{th} x)^5}$; *(2)* $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; *(3)* $\int_0^{+\infty} e^{-ix}\,\mathrm{d}x$.

FIN