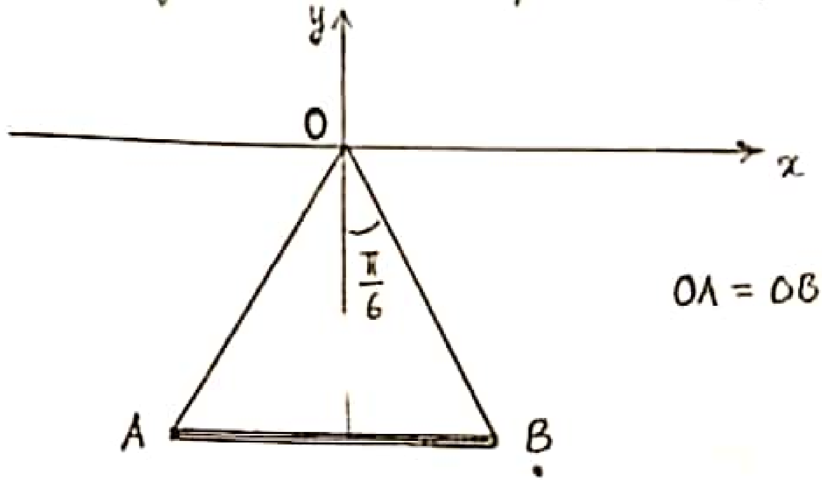
[redacted] 1996 - 1997	TEST DE SYNTHESE MECANIQUE ANALYTIQUE	27/06/97 Dr Kenmeugne E

PROBLEME 1

1ère partie : statique

Une barre pésante de masse m, homogène de longueur $AB = 2a$ est suspendue par deux fils sans masse OA et OB à un point fixe O, de telle sorte que le triangle OAB soit équilatéral.



$OA = OB = AB = 2a$

Calculer la tension dans les deux fils (OA et OB)

N.B. : On l'appellera T_0.

2ème partie : Cinématique

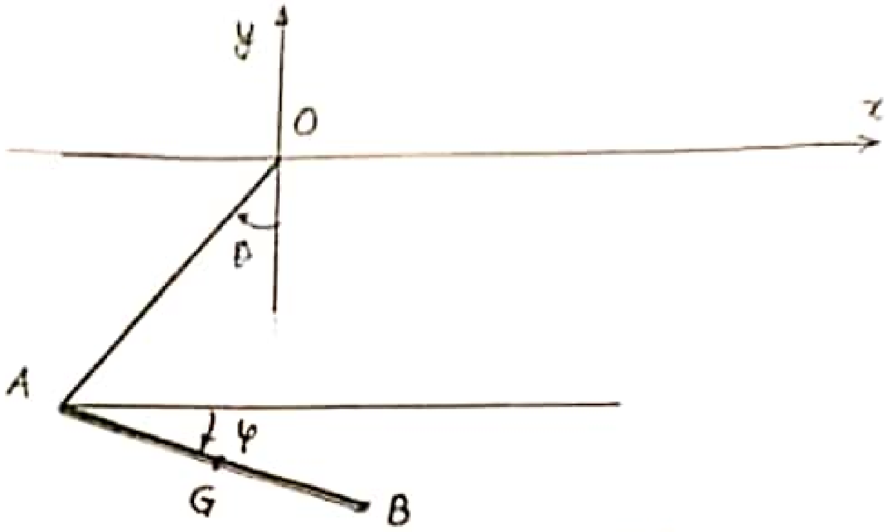
On sectionne le fil OB et on définit la position de la barre AB par les angles :

$$\theta = (-\vec{y}, OA) \quad \text{et} \quad \varphi = (\vec{x}, AB)$$

On rappelle que $OA = AB = 2a$

G est le centre de gravité de la barre AB

I- Dérivation directe dans $R(O, x, y, z)$



1) Exprimer les coordonnées de $G\begin{Bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{Bmatrix}_R$ en fonction de a, θ et φ.

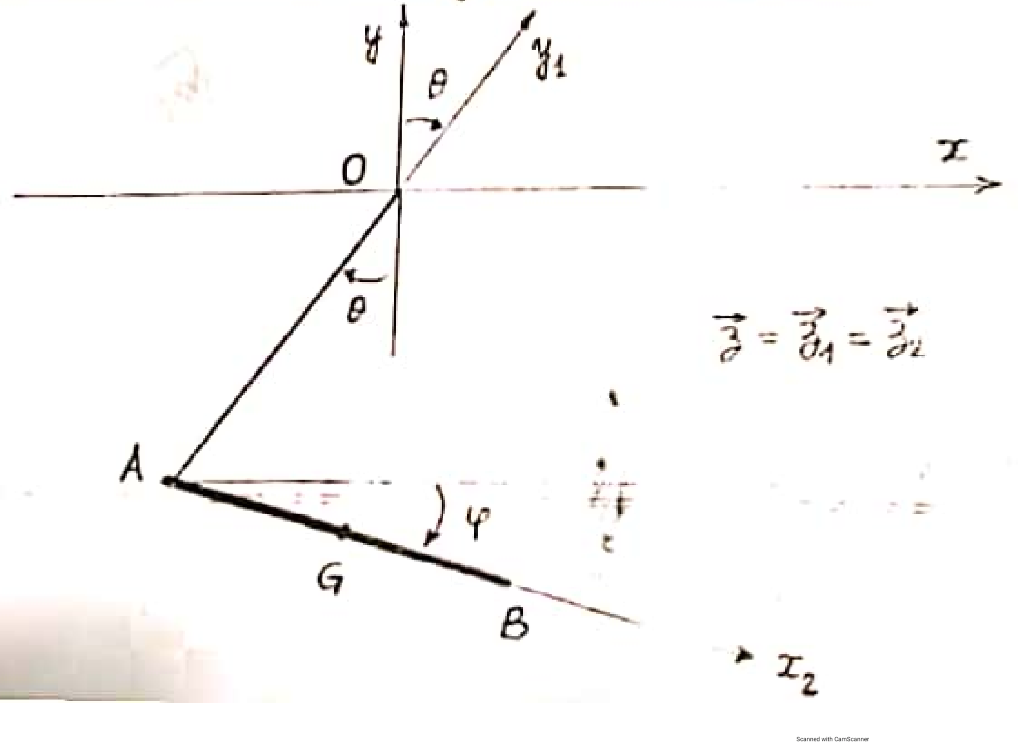
2) Calculer la vitesse de G : $\vec{V}(G/R)$

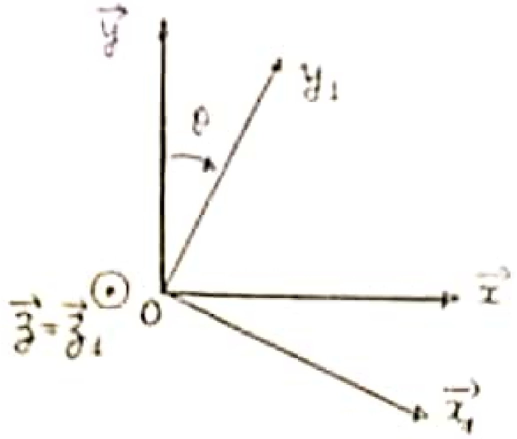
3) Calculer l'accélération de G : $\vec{a}(G/R)$

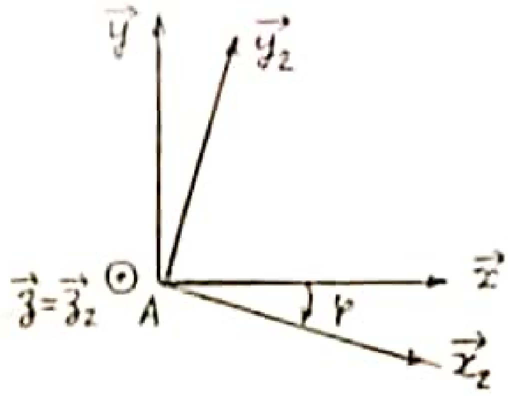
4) Ecrire les conditions initiales. Il s'agit de préciser θ, $\dot{\theta}$, φ et $\dot{\varphi}$ à l'instant $t = 0$.

5) Calculer alors $\vec{a}(G/R)$ à l'instant $t = 0$

-Dérivation avec changement de repère







On définit deux repères $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ et $\vec{R}_2(G,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$

par : $\overrightarrow{OA} = -2a\,\vec{y}_1$, $\vec{z}_1 = \vec{z}$ puis $\vec{x}_1 = \vec{y}_1 \wedge \vec{z}_1$

$\overrightarrow{AB} = 2a\,\vec{x}_2$, $\vec{z}_2 = \vec{z}$ puis $\vec{y}_2 = \vec{z}_2 \wedge \vec{x}_2$.

1) Calculer $\vec{\Omega}(R_1/R)$ et $\vec{\Omega}(R_2/R)$

2) Calculer la vitesse de G , $\vec{V}(G/R)$, puis exprimer le résultat dans R. [On utilisera la dérivation avec changement de repère].

3) Calculer **l'accélération** de G , $\vec{a}(G/R)$, puis exprimer le résultat dans R. [On procédera comme au 2°)].

$\underline{3^{ème}\ partie}$: Dynamique

Le fil OB étant sectionné, on se propose ici de déterminer dans quel rapport la tension T dans le fil OA est instantanément réduite.

On rappelle la matrice d'inertie de la barre AB en G ; exprimée dans le repère $R_2(G,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$:

$$\left[I_G(\text{barre AB})\right]_R = \frac{ma^2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ & & \frac{ma^2}{3} \end{pmatrix}_{R_2}$$

1- Calculer le moment cinétique $\sigma_G(S/R)$ de la barre AB en G, puis exprimer le résultat dans R

2- Calculer le moment dynamique $\delta_G(S/R)$ de la barre AB en G, puis exprimer le résultat dans R

3- Isoler la barre AB et écrire les torseurs des actions extérieures en G. On exprimera les elts des torseurs dans R.

4- Ecrire les théorèmes généraux de la dynamique (On pourra se servir de x, y ou de leurs dérivées successives, cf : cinématique).

5- En tenant compte des conditions initiales déjà trouvées dans l'étude cinématique, réécrire le système d'équations obtenu au 4°) à l'instant initial $t=0$.

6- Calculer $\ddot{\theta}$ et $\ddot{\varphi}$ à l'instant initial

7- Calculer T, puis dire dans quel rapport (T/T_0) la tension dans le fil OA est instantanément réduite lorsque le fil OB est sectionné.