République du Cameroun
Republic of Cameroun

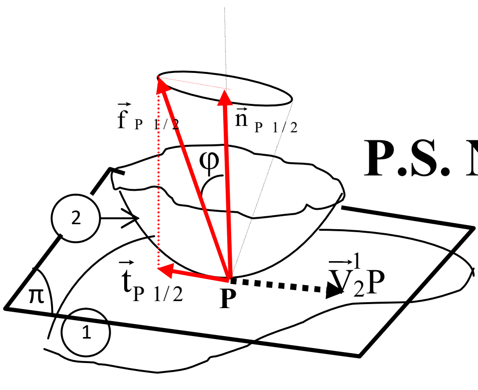
Université de Yaoundé I

University of Yaounde I

STATIQUE DU SOLIDE

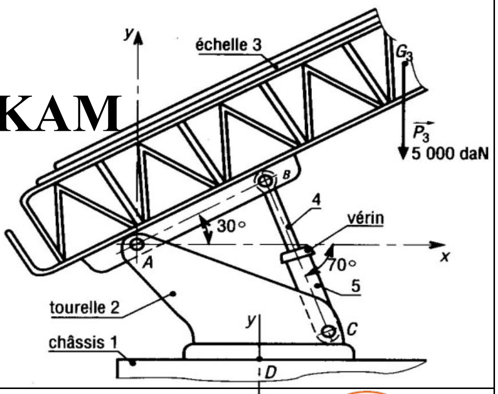
HYPERSTATISME ET MOBILITE DES MECANISMES

Ressource Pédagogique Mise en Ligne



Par

P.S. NGOHE-EKAM



Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de Yaoundé

PREAMBULE

Suite à la menace de propagation du Covid-19 (Corona virus Disease) dont le premier cas de contamination a été déclaré au mois de mars 2020 au Cameroun, des mesures sanitaires ont été édictées par monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, puis renforcées par une sortie médiatisée de monsieur le Premier Ministre (PM) du Cameroun. Le point commun de l'allocution de ces deux personnalités et relatif à l'enseignement supérieur fut la fermeture des établissements d'enseignement, dont l'Université de Yaoundé.

Monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, dans le souci que la fermeture de l'UY I ne soit pas une perche tendue aux étudiants paresseux pour se laisser aller à un certain sommeil intellectuel, instruit alors que les enseignants « mettent en ligne » leurs cours grâce au serveur du Centre Universitaire des Technologies de l'Information (CUTI) de l'UY I et que les étudiants visitent ce serveur à volonté pour télécharger les ressources pédagogiques (puisque c'est le terme le plus approprié) que les enseignants y auront déposé, ce téléchargement devant permette aux étudiants de continuer d'apprendre (à domicile) pendant la période de pseudo-confinement décrétée par monsieur le PM.

C'est ainsi que le présent document est conçu et mis en forme par l'auteur. Ce document fait partie de l'enseignement dispensé par l'auteur aux étudiants de niveau II de l'Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de l'UY I. L'auteur a valablement sectionné cet enseignement en modules qui constitueraient des chapitres de cours en présentiel. Et pour chaque module l'enseignant a produit trois documents en vue de faciliter l'apprentissage à distance :

- Des notes de cours
- Des exercices corrigés
- Des exercices non corrigés

L'idée principale du sectionnement de l'enseignement est de guider au mieux l'apprenant dans l'organisation de sa mémoire cognitive. En effet, il n'est pas bien d'exiger de l'apprenant une concentration trop longue, dépassant les six minutes reconnues par la plupart des experts en pédagogie, sans activité de restitution par exemple. L'apprenant est ainsi invité à ne pas rester trop longtemps sur les parties cours et exercices corrigés ; il peut y revenir en tant que de besoin. Cependant le traitement des exercices non corrigés étant une phase d'extériorisation de la connaissance emmagasinée, l'apprenant pourra et devrait y passer assez de temps de travail.

L'interaction de l'enseignant avec les apprenants est rendue possible grâce aux fora (plateformes d'enseignement à distance, groupe Whatsapp, liste de distribution par email, etc.) divers dans lesquels les apprenants sont invités à s'inscrire.

Pour finir, nous signalons que l'organisation actuelle de cet enseignement n'est pas vraiment une mise en ligne de cours, encore moins un MOOC, comme cela est fait dans la plupart des plateformes d'enseignement à distance. Nous essayons de faire une mise en ligne des ressources (dans le serveur de l'UY I), mais une mise en ligne suggérant une sorte de protocole d'apprentissage aux étudiants.

Yaoundé, le 21 mars 2020,

P.S. NGOHE-EKAM

Module 7 : HYPERSTATISME ET MOBILITE DES MECANISMES

A l’issue de ce module, l’apprenant devra être capable :

Il s’avère donc important, pour un mécanisme (à dimensionner) donné :

- d’identifier (localiser), quand elles existent, les inconnues de liaison d’un mécanisme qu’on ne peut déterminer par application du Principe Fondamental de la Statique à ce mécanisme
- de pouvoir proposer, éventuellement, des modifications pour rendre le mécanisme isostatique (c’est-à-dire solvable par application du Principe Fondamental de la Statique)
- de déterminer à quelles conditions géométriques correspondent les inconnues hyperstatiques.

Table des matières

I- HYPOTHESES

Pour simplifier l'étude, on fait les hypothèses suivantes :

1- Les pièces du mécanisme sont des solides indéformables
2- Les liaisons rencontrées sont sans frottement.
3- Ces liaisons sont à contact bilatéral, c'est-à-dire ce contact est supposé maintenu si le sens des actions mécaniques est inversé.
4- Toutes les pièces du mécanisme sont de masse négligeable c'est-à-dire, les effets d'inertie étant nuls, on pourra écrire pour tout sous-ensemble (e) de pièces d'un mécanisme : $[\mathscr{F}_{\bar{e}/e}] = [0]$.

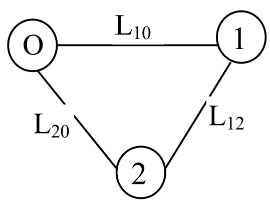
II- Schéma d'architecture d'un mécanisme

Le schéma d'architecture est destiné, pour un mécanisme donné, au calcul de torseurs d'action mécanique transmissible des différentes liaisons.

Pour une bonne illustration des notions présentés dans ce paragraphe, nous allons considérer le système de commande d'une table en translation suivant : il est constitué d'une table (S_1), animée d'un mouvement de translation rectiligne d'axe $\vec{x}$ par rapport au bâti fixe (S_0) et d'une vis (S_2) en liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$ avec le bâti, la table et la vis ayant entre eux une liaison glissière hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$.

II-1 Graphe des liaisons (du mécanisme)

C'est un schéma où les parties du mécanisme (S_1, S_2, etc.) sont représentées, chacune, par son indice numérique encerclé, et où les liaisons entre ces différentes parties sont indiquées par des segments (de droites ou courbes), au-dessus desquels les liaisons sont indiquées par une lettre majuscule (généralement L) indicée par les solides (S_i) ; une nomenclature indique, à proximité du graphe, les différents types de liaisons représentées, comme on le voit ci-contre, pour le système de commande de notre table.



L_{10} : liaison glissière de direction $\vec{x}$
L_{20} : liaison pivot d'axe $(O, \vec{x})$
L_{12} : liaison glissière hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$

Fig. : Graphe des liaisons de la commande en translation d'une table

II-2 Schéma cinématique(du mécanisme)

Construit à partir du graphe des liaisons, le schéma cinématique d'un mécanisme permet de visualiser les mouvements relatifs des pièces principales d'un mécanisme. Les liaisons y sont représentées par leurs « représentation schématique ».

N.B. : On peut obtenir le schéma cinématique à partir du graphe des liaisons et réciproquement. La figure ci-contre montre le schéma cinématique de notre mécanisme de commande en translation de la table.

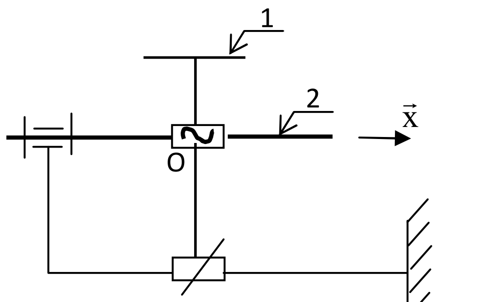
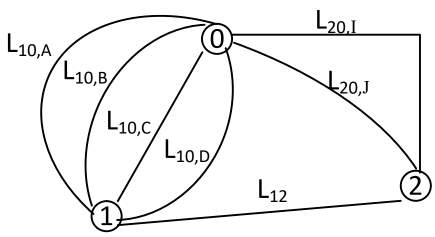


Fig. : Schéma cinématique de la commande en translation d'une table

II-3 Graphe des liaisons minimal et schéma cinématique minimal

Lorsque les liaisons placées en parallèle ou en série entre les pièces principales du mécanisme sont remplacées par leurs liaisons équivalentes, le ***graphe des liaisons*** est dit ***minimal*** ; et le schéma cinématique qui en découle est appelé ***schéma cinématique minimal***.

Ainsi, le graphe de liaison et le schéma cinématique ci-dessus sont tous les deux « minimal », du fait qu'il n'y figure point de liaisons ni en parallèle, ni en série.



L_{12} : liaison glissière hélicoïdale d'axe $(O, \vec{x})$

$L_{10,A}$: Liaison annulaire de centre A et de direction $\vec{x}$

$L_{10,B}$: Liaison annulaire de centre B et de direction $\vec{x}$

$L_{10,C}$: Liaison annulaire de centre C et de direction $\vec{x}$

$L_{10,D}$: Liaison annulaire de centre D et de direction $\vec{x}$

$L_{20,I}$: Liaison rotule de centre I

$L_{20,J}$: Liaison annulaire de centre J et de direction $\vec{x}$

Fig. : Graphe de liaisons d'architecture.

Par contre, si on envisage de réaliser :

- La liaison glissière L_{10} par association en parallèle entre la table et le bâti, de quatre douilles à billes A,B,C et D glissant sur deux tiges cylindriques parallèles, modélisables par des liaisons linéaires annulaires.
- La liaison pivot L_{20} par association en parallèle, entre la vis et le bâti, de deux roulements à billes I et J situés à chaque extrémité de la vis, modélisables, l'un par une liaison rotule et l'autre par une liaison linéaire annulaire, on obtient le graphe de liaison ci-dessus qui n'est pas minimal, mais qui est en fait appelé le ***graphe des liaisons d'architecture.***

II-4 Schéma d'architecture.

Le schéma d'architecture d'un mécanisme correspond à la représentation technologique du graphe des liaisons d'architecture. C'est donc un schéma très proche de la réalité technologique, conduit de façon analogique au schéma cinématique, mais où les liaisons occupent une position relative précise, définie par leur repère (local).

Sur le schéma d'architecture, on fait également figurer les actions mécaniques externes au mécanisme, de façon à permettre d'écrire le plus simplement possible, en lisant la figure, les équations scalaires traduisant le Principe Fondamental de la Statique.

Pour le mécanisme de commande en translation de la table, ci-dessus, le schéma d'architecture correspondant au graphe des liaisons d'architecture ci-dessus peut se présenter comme suit :

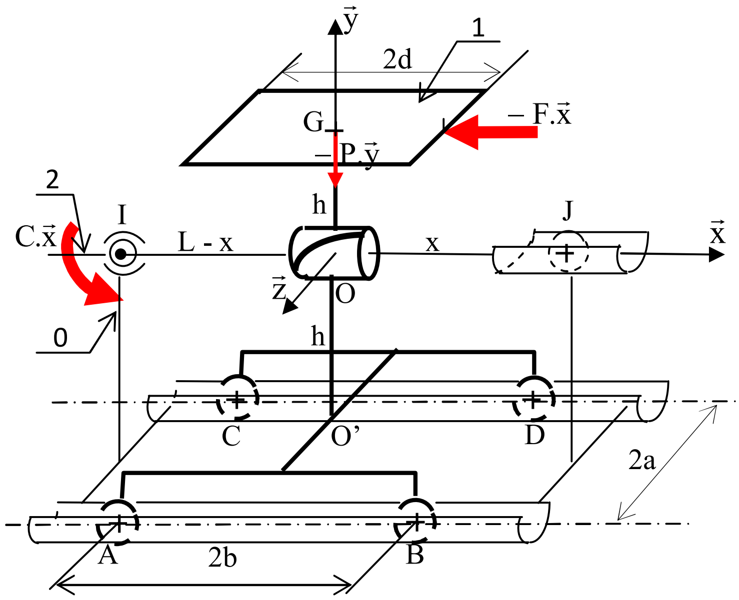


Fig.   : Schéma d'architecture de la commande en translation de la table

a) ***Remarques***

➢ Les torseurs d'action mécanique transmissible des différentes liaisons supposées sans frottement peuvent être définis (Principe de dualité) de la manière suivante :

$$[\mathscr{T}_{0/1}]_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_A \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ avec } \vec{R}_A = Y_A\vec{y} + Z_A\vec{z} \text{(car normal à la ligne de contact) et } \overrightarrow{OA} = -b\vec{x} - h\vec{y} + a\vec{z}$$

$$[\mathscr{T}_{0/1}]_B = \begin{Bmatrix} \vec{R}_B \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ avec } \vec{R}_B = Y_B\vec{y} + Z_B\vec{z} \text{ et } \overrightarrow{OB} = b\vec{x} - h\vec{y} + a\vec{z}$$

$$[\mathscr{T}_{0/1}]_C = \begin{Bmatrix} \vec{R}_C \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ avec } \vec{R}_C = Y_C\vec{y} + Z_C\vec{z} \text{ et } \overrightarrow{OC} = -b\vec{x} - h\vec{y} - a\vec{z}$$

$$[\mathscr{T}_{0/1}]_D = \begin{Bmatrix} \vec{R}_D \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ avec } \vec{R}_D = Y_D\vec{y} + Z_D\vec{z} \text{ et } \overrightarrow{OD} = b\vec{x} - h\vec{y} - a\vec{z}$$

$\left[\mathscr{F}_{0/2}\right]_I = \begin{cases} \vec{R}_I \\ \vec{0} \end{cases}$ avec $\vec{R}_I = X_I\vec{x} + Y_I\vec{y} + Z_I\vec{z}$ avec $\overrightarrow{OI} = -(L - x)\vec{x}$

$\left[\mathscr{F}_{0/2}\right]_J = \begin{cases} \vec{R}_J \\ \vec{0} \end{cases}$ avec $\vec{R}_J = Y_J\vec{y} + Z_J\vec{z}$ avec $\overrightarrow{OJ} = x \cdot \vec{x}$

$\left[\mathscr{F}_{1/2}\right]_O = \begin{cases} \vec{R}_O \\ \vec{\mathscr{M}}_O \end{cases}$ avec $\begin{cases} \vec{R}_O = X_0\vec{x} + Y_0\vec{y} + Z_0\vec{z} \\ \vec{\mathscr{M}}_O = pX_0\vec{x} + M_0\vec{y} + N_0\vec{z} \end{cases}$ car hélice à gauche de pas réduit p.

Les différentes composantes plückériennes introduites sont les ***inconnues de liaison*** ; ces inconnues sont, pour notre commande en translation de la table, au nombre de dix-huit.

- Les actions mécaniques extérieures au mécanisme sont :

- L'action mécanique du moteur sur l'arbre 2 : $\left[\mathscr{F}_{\text{moteur}/2}\right] = \begin{cases} \vec{0} \\ C \cdot \vec{x} \end{cases}$

- L'action mécanique du récepteur sur la table 1 : $\left[\mathscr{F}_{\text{récepteur}/1}\right] = \begin{cases} -F \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{cases}$ avec $\overrightarrow{OK} = d\vec{x} + h\vec{y}$

- L'action mécanique de la pesanteur sur la table 1 : $\left[\mathscr{F}_{g/1}\right]_G = \begin{cases} -P \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{cases}$ avec $\overrightarrow{OG} = h\vec{y}$

N.B. ***:*** l'action mécanique du sol, ou d'un autre support, sur le bâti (O) n'est pas définie, parce que non recherchée.

- Pour déterminer les (dix-huit) inconnues de liaison, on peut appliquer le Principe Fondamental de la Statique à la table (1) puis à la vis (2) ; mais aussi à l'ensemble $E = (1) \cup (2)$. Mais les équations obtenues ne sont pas indépendantes des précédentes ; en effet :

$$\left[\mathscr{F}_{\bar{1}/1}\right] = [0] \Rightarrow \left[\mathscr{F}_{2/1}\right] + \left[\mathscr{F}_{\bar{E}/1}\right] = [0] \qquad (1)$$

$$\left[\mathscr{F}_{\bar{2}/2}\right] = [0] \Rightarrow \left[\mathscr{F}_{1/2}\right] + \left[\mathscr{F}_{\bar{E}/2}\right] = [0] \qquad (2)$$

$$\left[\mathscr{F}_{\bar{E}/1}\right] + \left\{\mathscr{F}_{\bar{E}/2}\right\} = [0]$$

C'est-à-dire $\left[\mathscr{F}_{\bar{E}/E}\right] = [0]$

Ainsi, pour déterminer les dix-huit inconnues de liaison, nous disposons au maximum de douze équations algébriques indépendantes [trois issues de la nullité de $\sum \vec{R}$ sur (1), trois de la nullité de $\sum \vec{\mathscr{M}}$ sur (1), trois de la nullité de $\sum \vec{R}$ sur (2) et trois de la nullité de $\sum \vec{m}$ sur (2)]. Ceci montre que l'application du principe fondamental de la statique ne permet pas de déterminer toutes les inconnues de liaison ; on dit que le ***mécanisme*** est ***hyperstatique***. Et on appelle ***mécanisme isostatique***, un mécanisme pour lequel l'application du principe fondamental de la statique permet la détermination de toutes les inconnues de liaison.

Afin d'assurer un bon fonctionnement du mécanisme précédent et d'en simplifier la fabrication, il est plus simple de rendre ce mécanisme isostatique, ne serait-ce que partiellement, en ajoutant des d.d.l supplémentaires dans certaines liaisons, par l'induction de pièces intermédiaires ou de jeux entre les solides en présence. Dans certains mécanismes, on peut introduire des pièces déformables.

Pour notre mécanisme de commande en translation d'une table, on peut écrire :

1°) - Le Théorème du Moment Statique (T.M.S) appliqué à la vis 2, au point O, en projection sur $\vec{x}$ (car l'axe $(O,\vec{x})$ est l'axe de rotation de la vis 2) :

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x} \bullet \vec{\mathscr{M}}_{O\ \bar{2}/2} = 0}$$

Soit, avec $\bar{S}_2 = \{\text{moteur}, 0_I, 1, 0_J\}$:

$$\vec{x} \bullet \vec{\mathscr{M}}_{O\ \text{moteur}/2} + \vec{x} \bullet \vec{\mathscr{M}}_{O\ 0_I/2} + \vec{x} \bullet \vec{\mathscr{M}}_{O\ 1/2} + \vec{x} \bullet \vec{\mathscr{M}}_{O\ 0_J/2} = 0$$

D'où l'on tire $C + pX_O = 0$ (1)

<u>Remarque</u> ***:*** le choix de cette équation évite de faire intervenir l'action mécanique de 0/2.

2°) - Le Théorème de la Résultante Statique (T.R.S.) appliqué à la table 1, en projection sur $\vec{x}$ (car la direction de translation de la table est la direction $\vec{x}$) :

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x} \cdot \vec{R}_{\bar{1}/1} = 0}$$

Soit, avec $\bar{S}_1 = \{\text{récepteur}, g, 2, 0_A, 0_B, 0_C, 0_D\}$

$$\vec{x} \bullet \vec{R}_{\text{récepteur}/1} + \vec{x} \bullet R_{g/1} + \vec{x} \bullet \vec{R}_{2/1} + \vec{x} \bullet \vec{R}_{0_A/1} + \vec{x} \bullet \vec{R}_{0_B/1} + \vec{x} \bullet \vec{R}_{0_C/1} + \vec{x} \bullet \vec{R}_{0_D/1} = 0$$

D'où l'on tire $-F - X_O = 0$ (2)

Remarque : le choix de cette relation évite de faire intervenir l'action mécanique de 0/1.

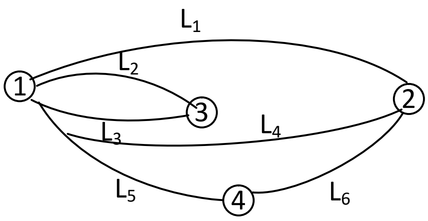
En éliminant X_0 entre les équations (1) et (2), on obtient la relation $\boxed{C = pF}$ appelée « **loi entrée-sortie statique** » du mécanisme.

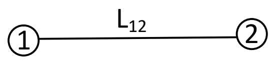
III- Liaison équivalente.

L'obtention du schéma cinématique minimal nécessite la réalisation du graphe des liaisons minimales ; or ce dernier est obtenu en remplaçant, par des liaisons équivalentes, les liaisons placées en parallèle ou en série entre les pièces principales du mécanisme étudié.

III-1 Définition :

Supposons qu'il existe, entre deux solides (S_1) et (S_2), plusieurs liaisons réalisées avec ou sans pièces intermédiaires. La liaison L_{12} équivalente à l'ensemble de ces liaisons (situées entre (S_1) et (S_2)) est la liaison théorique de référence L_{12} qui **a le même comportement que cette association de liaisons**, c'est-à-dire qui autorise le même mouvement et transmet la même action mécanique.





III-2 Notations

✓ Le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison L_i sera noté dans le repère local associé à la liaison, $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$:

$$[\mathscr{F}_i] = \begin{Bmatrix} \vec{R}_i \\ \vec{m}_{io} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i & L_i \\ y_i & M_i \\ z_i & N_i \end{Bmatrix}_{(R_i)}$$

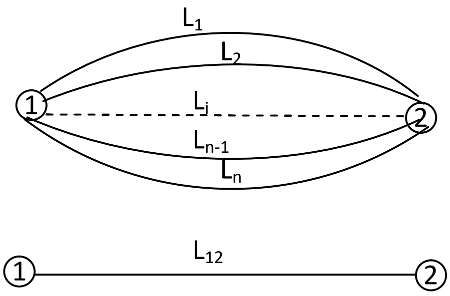
✓ Le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison cinématique équivalente aux liaisons placées entre les solides (S_1) et (S_2), dans un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ à définir, est noté :

$$[\mathscr{F}] = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{\mathscr{M}}_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x & L \\ y & M \\ z & N \end{Bmatrix}_{(R)}$$

<u>Remarque</u> ***:*** Parfois il est nécessaire de préciser de quelle action mécanique il s'agit entre deux solides en présence.

III-3 Liaison équivalente de n liaisons en parallèle

Supposons qu'il existe n liaisons, disposées en parallèle, entre deux solides (S_1) et (S_2) et que, en plus de l'action mécanique due à ces n liaisons, il s'exerce sur le solide (S_2) une action mécanique extérieure représentée par un torseur $[\mathcal{T}_0]$.



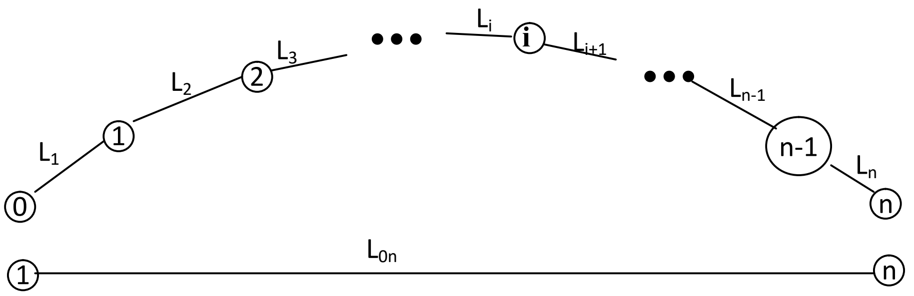
Alors, le torseur d'actions mécaniques transmissibles de la liaison équivalente à n liaisons en parallèle est la somme des torseurs d'actions mécaniques transmissibles de chacune des liaisons.

$$\boxed{[\mathcal{T}]_{//} = \sum_{i=1}^{n} [\mathcal{T}_i]}$$

Le **principe de dualité** conduit, pour le torseur cinématique équivalent, à l'égalité :

$$\boxed{[\mathcal{V}]_{//} = [\mathcal{V}_i] \ \forall i}$$

III-4 Liaison équivalente de n liaisons en série



Supposons qu'il existe n liaisons, disposées en série, entre deux solides (S_0) et (S_n), par l'intermédiaire de n-1 solides (S_i).

Alors les composantes du torseur d'action mécanique transmissibles de la liaison équivalente sont celles qui sont transmissibles par toutes les liaisons en série :

$$\boxed{[\mathcal{T}]_{\text{série}} = [\mathcal{T}_i] \ \forall i}$$

Le principe de la dualité conduit, en outre, à : $\boxed{[\mathcal{V}]_{\text{série}} = \sum_{i=1}^{n} [\mathcal{V}_i]}$

<u>Facile à retenir pour l'association des liaisons</u> :

Pour l'association en parallèle, l'individu subit l'action mécanique de tous les torseurs ; les torseurs d'action mécaniques s'additionnent donc pour traduire l'effet global ressenti :

$$\boxed{\left[\mathscr{F}\right]_{\text{paralléle}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathscr{F}_i\right]}$$

III-5 Relation entre nombre d'inconnues cinématique et nombre d'inconnues de liaison indépendantes

Soient : n_{Si} le nombre d'inconnues de liaison indépendantes
n_{Ci} le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes.

La dualité entre les torseurs $\left[F\right]$et $\left[v\right]$d'une liaison permet d'écrire (puissance nulle quel que soit le mouvement): $\boxed{n_{Ci} + n_{Si} = 6}$, relation vérifiée pour les différentes liaisons déjà rencontrées.

IV- STRUCTURE DES MECANISMES

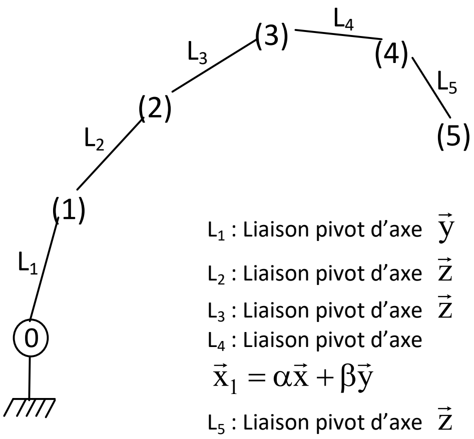
IV-1 Mécanisme en chaîne ouverte

a) Définition :

Un mécanisme en chaîne ouverte (on dit aussi simplement : une chaine ouverte) est constitué par n+1 solides assemblés par n liaisons en série.

b) Exemple :

Une pelleteuse de chantier, dont le graphe des liaisons et le schéma cinématique sont représentés ci-dessous est un mécanisme à chaîne ouverte.



L_1 : Liaison pivot d'axe $\vec{y}$

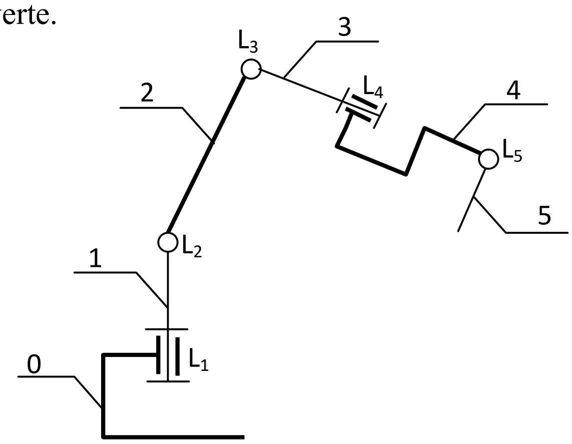
L_2 : Liaison pivot d'axe $\vec{z}$

L_3 : Liaison pivot d'axe $\vec{z}$

L_4 : Liaison pivot d'axe $\vec{x}_1 = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$

L_5 : Liaison pivot d'axe $\vec{z}$

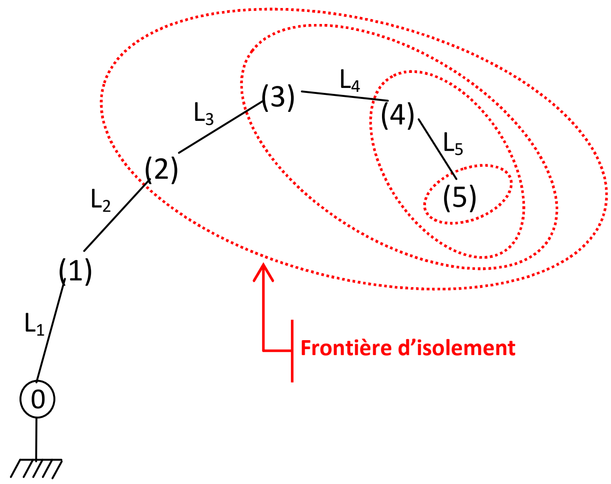
<u>Graphe des liaisons</u>



<u>Schéma cinématique</u>

c) ***Remarque :***

La résolution d'un mécanisme en chaîne ouverte, dans le but de déterminer les torseurs d'action mécanique transmissible des différentes liaisons, en fonction des actions mécaniques extérieures (au mécanisme), s'effectue en isolant successivement un solide, puis deux solides, puis trois, etc., à partir de l'extrémité libre de la chaîne ouverte (c'est-à-dire l'extrémité non reliée au bâti du mécanisme).



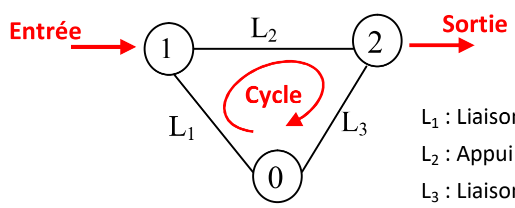
IV-2 Mécanisme en chaîne fermée simple

a)- ***Définition :***

Lorsque les solides extrêmes d'un assemblage en série de n+1 solides ont une liaison, la chaîne cinématique ainsi constituée est fermée et simple. Le mécanisme est dit à chaîne fermée simple.

b)- ***Exemple :***

Le réducteur à train d'engrenages, dont ce graphe de liaisons et le schéma cinématique sont représentés ci-dessous est un mécanisme à chaîne fermée simple.



L_1 : Liaison pivot d'axe $\vec{x}$

L_2 : Appui plan d'axe $\vec{z}$

L_3 : Liaison pivot d'axe $\vec{x}$

Graphe des liaisons

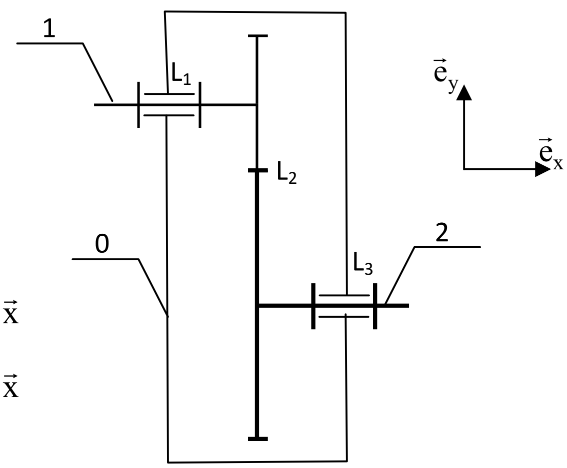


Schéma cinématique

c)- ***Remarque :***

- Une chaîne fermée est aussi appelée ***cycle*** ou ***boucle***
- En chaîne fermée simple, on a n+1 liaisons entre n+1 solides en série.

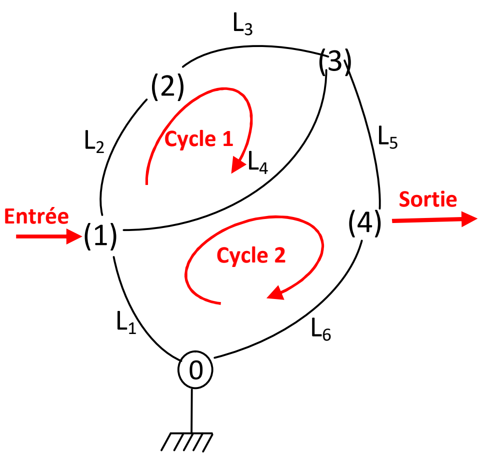
IV-3 Mécanisme en chaîne fermée complexe

a)-. Définition :

Lorsque la chaîne cinématique d'un mécanisme est constituée d'au moins deux chaînes fermées simples imbriquées entre elles, on est en présence d'un mécanisme à chaîne fermée complexe.

b)-. Exemple :

La réducteur à train épicycloïdal, dont le graphe de liaison et le schéma cinématique sont représentés ci-dessous est un mécanisme à deux chaînes fermées simples imbriquées ; c'est un mécanisme à chaîne fermée complexe.



Graphe des liaisons

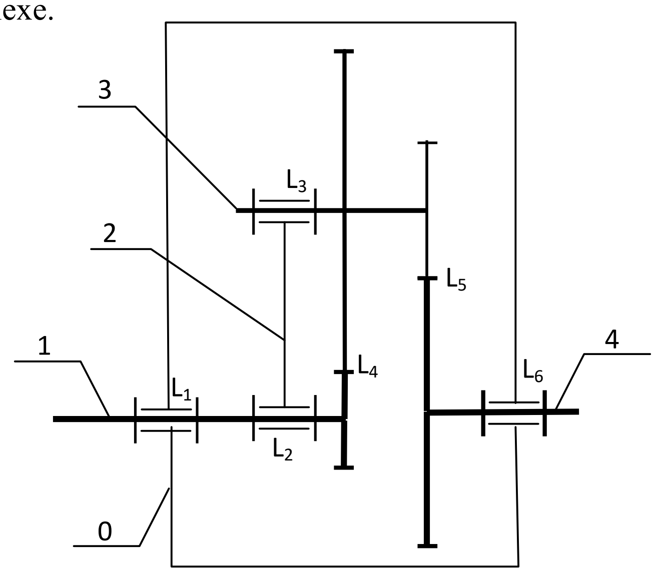


Schéma cinématique

c)-. Remarque :

- La théorie des graphes donne le nombre γ de cycles indépendants d'une chaîne fermée complexe par la relation : $\boldsymbol{\gamma = L - N + 1}$ où L est le nombre de liaisons et N le nombre de solides.(pour le train épicycloïdal ci-dessus : $L = 6$ et $N = 5 \rightarrow \gamma = 2$)

V- DEGRE D'HYPERSTATISME D'UN MECANISME

V-1 Système d'équations linéaires d'action mécanique d'un mécanisme

Lorsque, pour un mécanisme donné, on désigne par :

N : le nombre de solides (bâti compris) constituant le mécanisme

L : le nombre de liaisons L_i (supposées sans frottement) entre ces solides

n_{Si} : le nombre d'inconnues de liaison indépendantes (du torseur d'action mécanique transmissible) de la liaison L_i.

On obtient, pour l'ensemble des liaisons du mécanisme :

$\boxed{I_S = \sum_{i=1}^{L} n_{si}}$ inconnues de liaison ;

L'application systématique du Principe Fondamental de la Statique (P.F.S) à chaque solide, sauf le bâti pour lequel on ne recherche pas l'action mécanique de son support, permet d'obtenir

$\boxed{E_S = 6(N-1)}$ équations algébriques qui constituent le ***système d'équations linéaires d'action mécanique*** du mécanisme.

V-2 Inconnues isostatiques et Inconnues hyperstatiques d'un mécanisme

Le système d'équations linéaires d'action mécanique du mécanisme est un système de E_S équations à I_S inconnues, qu'on peut écrire sous la forme matricielle :

$$[A].[X]=[B]$$

Où :

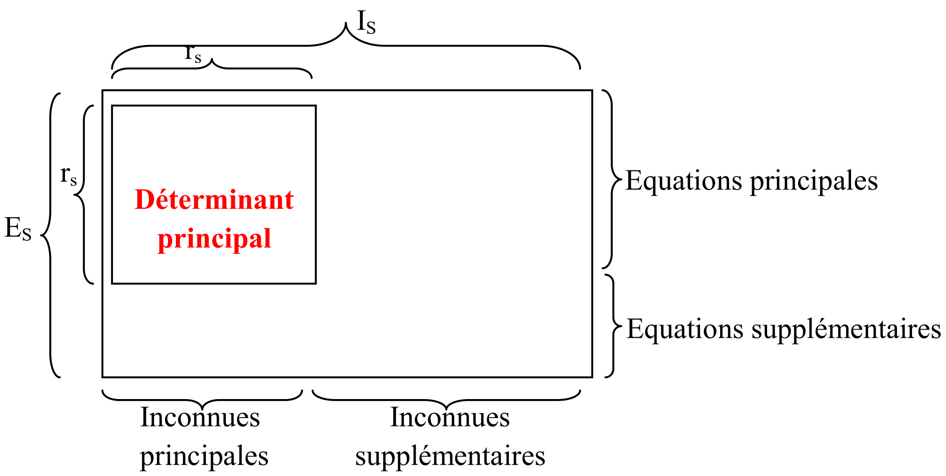
$[A]$ est une matrice (rectangulaire : E_S lignes, I_S colonnes ; généralement $I_S \geq E_S$) appelée ***matrice des coefficients géométriques*** du mécanisme.

$[X]$ est une matrice unicolonne, appelée ***matrice des inconnues de liaison***

$[B]$ est une matrice unicolonne, appelée ***matrice des actions mécaniques extérieures***

Le rang r_S du système d'équations considéré, c'est-à-dire l'ordre du déterminant principal de [A], indique le nombre d'équations indépendantes.

On peut donc ranger les r_S équations principales (issue du déterminant principal) dans les premières lignes du système d'équations et ranger les r_S inconnues correspondantes dans les premières colonnes ; la matrice [A] peut ainsi être schématisée comme suit :



Les inconnues de liaison principales sont appelées ***inconnues isostatiques*** du mécanisme et les autres, supplémentaires, sont dites ***inconnues hyperstatiques*** du mécanisme.

Remarque **:**

- On peut donc déterminer (calculer) r_S inconnues de liaisons (inconnues principales ou isostatiques) en fonction de $I_S - r_S$ autres inconnues de liaisons (inconnues supplémentaires ou hyperstatiques) à priori quelconque (c'est-à-dire choisis arbitrairement.)

V-3 Définition du degré d'hyperstatisme d'un mécanisme

Le degré d'hyperstatisme h d'un mécanisme est la différence entre les nombres I_S d'inconnues de liaison et r_S de relations indépendantes entre ces inconnues :

$$\boxed{h = I_S - r_s}$$

Ainsi :

h = 0 le mécanisme est **isostatique**

h > 0 le mécanisme est **hyperstatique de degré h**

VI- DEGRE DE MOBILITE D'UN MECANISME

VI-1 Système d'équations linéaires de la cinématique d'un mécanisme

Lorsque, pour un mécanisme donné, on désigne par :

γ : le nombre de cycles indépendants

L : le nombre de liaisons L_i (supposées sans frottement)

n_{ci} : le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes (du torseur cinématique) de la liaison L_i ; ($n_{C_i} = 6 - n_{S_i}$)

On obtient, pour l'ensemble des liaisons du mécanisme :

$$\boxed{I_C = \sum_{i=1}^{L} n_{C_i}}$$ inconnues cinématiques.

L'écriture systématique de la fermeture cinématique de chaque cycle, c'est-à-dire une relation de la forme $\sum_i [v_i] = [0]$, permet d'obtenir

$$\boxed{E_C = 6\gamma}$$ équations algébriques qui constituent **le système d'équations linéaires de la cinématique** du mécanisme.

VI-2 Inconnues cinématiques principales et inconnues cinématiques supplémentaires d'un mécanisme

Le système d'équations linéaires de la cinématique du mécanisme est un système homogène de E_C équations à I_C inconnues, qu'on peut écrire sous la forme matricielle :

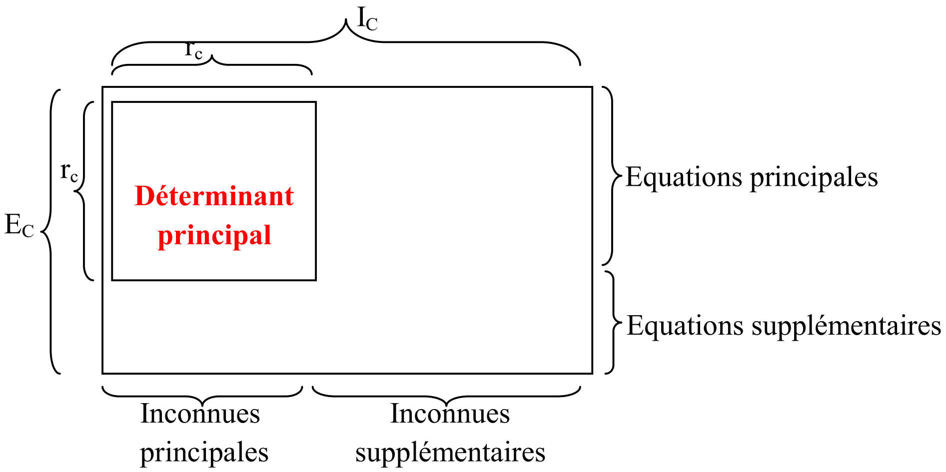
$$[A].[X] = [0]$$

Où :

- $[A]$ est la matrice des coefficients géométriques du mécanisme (E_C lignes, I_C colonnes).
- $[X]$ est la matrice unicolonne des ***inconnues cinématiques*** du mécanisme.

Le rang r_C du système d'équation considéré, c'est-à-dire l'ordre du déterminant principal de [A], indique le nombre d'équations indépendantes.

On peut donc ranger r_C équations principales (issues du déterminant principal) dans les premières lignes du système d'équations, et ranger les r_C inconnues principales correspondantes dans les premières colonnes ; la matrice est alors schématisée par :



Remarque *:*

- On peut donc déterminer r_C inconnues principales en fonction des $I_C - r_C$ inconnues supplémentaires choisies arbitrairement (mais qu'il faut imposer pour connaître les inconnues principales). Autrement dit, si les $I_C - r_C$ composantes de mouvement sont définies (connues), les autres r_C composantes de mouvement dans les liaisons du mécanisme pourront être déterminées.

VI-3 Définition du degré de mobilité d'un mécanisme.

Le degré de mobilité m d'un mécanisme est la différence entre le nombre I_C d'inconnues cinématiques et r_C de relations indépendantes entre ces inconnues :

$$\boxed{m = I_C - r_C}$$

Ainsi, si :

M = 0 le mécanisme est ***immobile*** (ou suivant le cas, la liaison est complète ou rigide)

M > 0 le mécanisme est ***mobile à m degrés de mobilité*** ; pour sa position d'équilibre.

VII- RELATION ENTRE DEGRES D'HYPERSTATISME ET DE MOBILITE

VII-1 Dualité des études statique et cinématique d'un mécanisme

- Dans l'étude statique, les $E_S - r_S$ équations supplémentaires expriment les relations que doivent vérifier les actions mécaniques extérieures au mécanisme, pour que ce dernier soit en équilibre.
- L'application du Théorème de l'Energie Cinétique à la chaine cinématique du mécanisme, pour une évolution quasi-statique, impose d'écrire que la puissance des actions intérieures est nulle, les liaisons étant sans frottement.

Il vient donc, pour un mécanisme constitué de N solides, l'équation scalaire sous forme abrégée suivante :

$$\sum_{i=1}^{L} \left(F_i V_i + m_i.\Omega_i\right) = 0$$

Parmi les composantes V_i ou Ω_i des torseurs cinématiques des liaisons, les r_C inconnues principales s'obtiennent en fonction des inconnues supplémentaires qui sont en nombre égal au degré de mobilité m du mécanisme.

Conséquence : les composantes V_i et Ω_i peuvent s'exprimer en fonction des m composantes indépendants, notées U_J.

Si on pose :

$$V_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} U_j$$

et ,

$$\Omega_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_{ij} U_j$$

la puissance des actions mécaniques extérieures devient :

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{m} \left(F_i \lambda_{ij} + m_i \mu_{ij}\right) U_j = 0$$

Or cette puissance doit être nulle quelles que soient les composantes U_j ; et pour qu'il en soit ainsi, les m relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{N} F_i \lambda_{i1} + m_i \mu_{i1} = 0 \qquad (j = 1)$$

$$\sum_{i=1}^{N} F_i \lambda_{i2} + m_i \mu_{i2} = 0 \qquad (j = 2)$$

……………………..

$$\sum_{i=1}^{N} F_i \lambda_{im} + m_i \mu_{im} = 0 \qquad (j = m)$$

doivent être vérifiées.

Ces m relations entre les actions mécaniques extérieures sont (exactement) celles données par les $E_S - r_S$ équations supplémentaires de l'étude statique.

Il vient donc que le degré de mobilité m du mécanisme est également donné par : $\boxed{m = E_s - r_s}$

Ce qui exprime la **dualité** (complémentarité) des études statique et cinématique d'un mécanisme.

VII-2 Relation entre degrés d'hyperstatisme et de mobilité

On a :

- Le degré de mobilité donné par la nouvelle relation $m = E_S - r_S$
- Le degré d'hyperstatisme : $h = I_S - r_S$

$\Rightarrow \; m - h = E_S - I_S \; (1)$

or $E_S = 6(N-1)$ N ≡ nombre de solides (bâti compris)

$$I_S = \sum_{i=1}^{L} n_{Si} = \sum_{i=1}^{L} \left(6 - n_{C_i}\right) = 6L - \sum_{i=1}^{L} n_{C_i} = 6L - I_C \qquad (\text{car } n_{S_i} + n_{C_i} = 6)$$

$$\Rightarrow \; m - h = E_S - I_S = 6(N-1) - (6L - I_C) = I_C - 6[L - N + 1]$$

$= I_C - 6\gamma$ avec $L - N + 1 = \gamma \equiv$ nombre de cycles indépendants

N : nombre de solides

L : nombre de liaisons

$= I_C - E_C$

C'est-à-dire $m - h = I_C - E_C$ (2)

(1) et (2) conduisent ainsi à la ***relation entre le degré d'hyperstatisme et le degré de mobilité*** encore appelée ***formule de mobilité*** :

$$\boxed{m - h = E_S - I_S = I_C - E_C}$$

Remarques **:**

- (2) implique $\boxed{h = m + 6\gamma - I_C}$ qui est la **deuxième forme de la formule de mobilité**
- Dans le cadre d'une modélisation plane $E_C = 3\gamma$, et donc la formule de mobilité devient

$$\boxed{h = m + 3\gamma - I_C}$$

- E_C est le nombre d'équations algébriques issues de l'écriture de la fermeture cinématique de chaque solide ; dans l'espace $E_C = 6(N - 1)$ où $N-1$ est le nombre de solides, bâti non compris.

Dans le plan $E_C = 3(N - 1)$. En plus γ, le nombre de cycles indépendant est égal à N-1.

VII-3 Mobilité utile et mobilité interne

Les deux dernières équations ci-dessus permettent de connaître rapidement le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme, une fois que son degré de mobilité est déterminé.

Si on appelle :

- m_u : ***degré de mobilité utile*** du mécanisme, le nombre de paramètres cinématiques qu'il faut figer pour immobiliser le mécanisme (généralement 1 ou 2, exemple la rotation d'un arbre moteur).

m_i : ***degré de mobilité interne*** du mécanisme, le nombre de paramètres cinématiques supplémentaires qu'il faut figer pour bloquer toutes les pièces du mécanisme (en repérant les mouvements indépendants de certains solides) n'ayant aucune influence sur le mouvement des autres solides : exemple de la bielle tournant sur elle-même entre deux liaisons rotules)

On peut poser : $\boxed{m = m_u + m_i}$

Ainsi, la détermination rapide (parfois intuitive) de m conduit à l'obtention rapide de h (degré d'hyperstatisme).

N.B : La donnée du degré d'hyperstatisme ne permet pas d'en connaître la cause ; une étude statique est toujours nécessaire pour identifier les inconnues hyperstatiques.