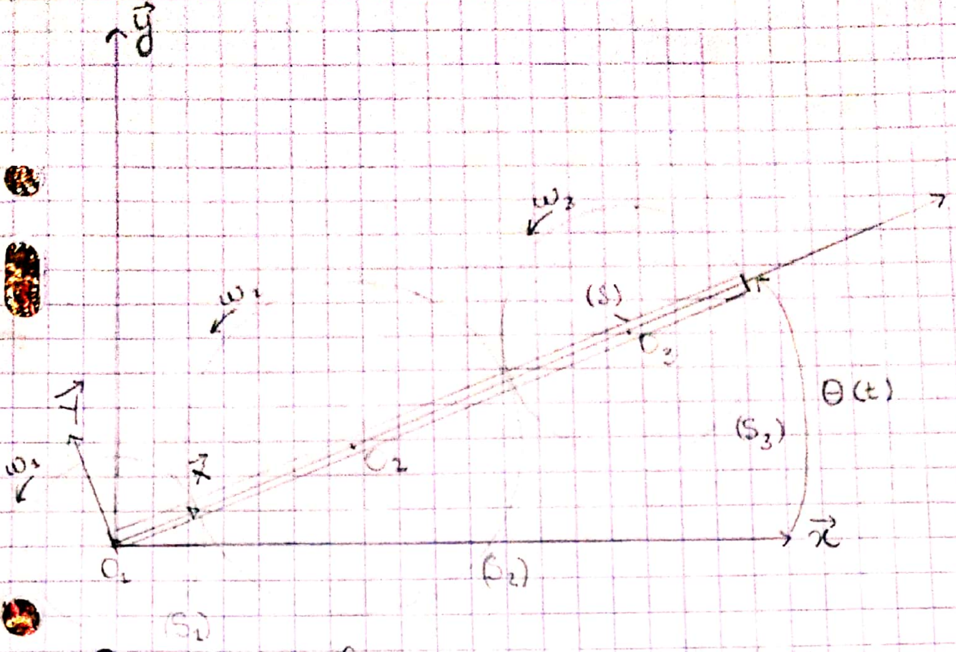
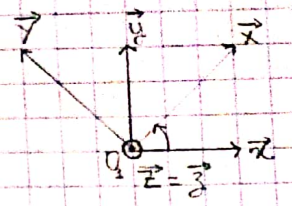




On définit le repère $R(O_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$\vec{\Omega}(S_1/R) = \omega_1 \vec{z}$; $\vec{\Omega}(S_2/R) = \omega_2 \vec{z}$; $\vec{\Omega}(S_3/R) = \omega_3 \vec{z}$

$R'(O_1, X, Y, Z)$ désigne le trièdre direct lié à la manivelle reperé par $\theta(t)$.

1- Etude cinematique de la manivelle $(S) = (O_2 O_3)$

a) Vecteur de rotation $\vec{\Omega}(S/R)$:

$$\vec{\Omega}(S/R) = \frac{d\theta(t)}{dt}\vec{z} = \dot{\theta}\vec{z}$$

b) Calcul des vitesses:

• $\vec{V}(O_1/R)$:

$$\vec{V}(O_1/R) = \vec{\omega}_1 \wedge \overrightarrow{O_1O_1} = \vec{0}$$

• $\vec{V}(O_2/R)$:

$$\vec{V}(O_2/R) = \vec{V}(O_1/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{O_2O_1}$$

$$= \dot{\theta}\vec{z} \wedge (r_1\vec{X} + r_2\vec{X})$$

$$\vec{V}(O_2/R) = \dot{\theta}(r_1 + r_2)\vec{Y}$$

• $\vec{V}(O_3/R)$:

$$\vec{V}(O_3/R) = \vec{V}(O_1/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{O_1O_3}$$

$$= \dot{\theta}\vec{z} \wedge (r_1\vec{X} + 2r_2\vec{X} + r_3\vec{X})$$

$$\vec{V}(O_3/R) = \dot{\theta}(r_1 + 2r_2 + r_3)\vec{Y}$$

Scanned with CamScanner

2- Etude cinématique du pignon (S_1):

Calcul de $\vec{V}(I \in S_1/R)$

$$\vec{V}(I \in S_1/R) = \vec{V}(O_1/R) + \vec{IO_1} \wedge \vec{\Omega}(S_1/R)$$
$$= -r_1 \vec{x} \wedge \omega_1 \vec{z}$$
$$\vec{V}(I \in S_1/R) = +r_1 \omega_1 \vec{Y}$$

3- Etude cinématique du pignon (S_2):

a) Calcul de $\vec{V}(I \in S_2/R)$:

$$\vec{V}(I \in S_2/R) = \vec{V}(O_2/R) + \vec{\Omega}(S_2/R) \wedge \vec{O_2 I}$$

or $\vec{V}(O_2/R) = \vec{V}(O_1/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{O_1 O_2}$

$$\vec{V}(I \in S_2/R) = \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{O_1 O_2} + \vec{\Omega}(S_2/R) \wedge \vec{O_2 I}$$
$$= \dot{\theta} \vec{z} \wedge (r_1 + r_2) \vec{x} + \omega_2 \vec{z} \wedge (-r_2 \vec{x})$$
$$= \dot{\theta}(r_1 + r_2) \vec{Y} - \omega_2 r_2 \vec{Y}$$
$$\vec{V}(I \in S_2/R) = [(r_1 + r_2)\dot{\theta} - r_2 \omega_2] \vec{Y}$$

b) Calcul de $\vec{V}(J \in S_2/R)$:

$$\vec{V}(J \in S_2/R) = \vec{V}(O_2/R) + \vec{\Omega}(S_2/R) \wedge \vec{O_2 J}$$
$$= \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{O_1 O_2} + \omega_2 \vec{z} \wedge r_2 \vec{x}$$
$$= \dot{\theta}(r_1 + r_2) \vec{Y} + \omega_2 r_2 \vec{Y}$$
$$\vec{V}(J \in S_2/R) = [\dot{\theta}(r_1 + r_2) + \omega_2 r_2] \vec{Y}$$

4- Etude Cinématique du pignon (S_3):

Calcul de $\vec{V}(J \in S_3/R)$:

$$\vec{V}(J \in S_3/R) = \dot{\theta} \vec{z} \wedge (r_1 + r_2 + r_3) \vec{x} + \omega_3 \vec{z} \wedge (-r_3 \vec{x})$$
$$= (r_1 + 2r_2 + r_3) \dot{\theta} \vec{Y} - r_3 \omega_3 \vec{Y}$$
$$\vec{V}(J \in S_3/R) = [\dot{\theta}(r_1 + 2r_2 + r_3) - r_3 \omega_3] \vec{Y}$$

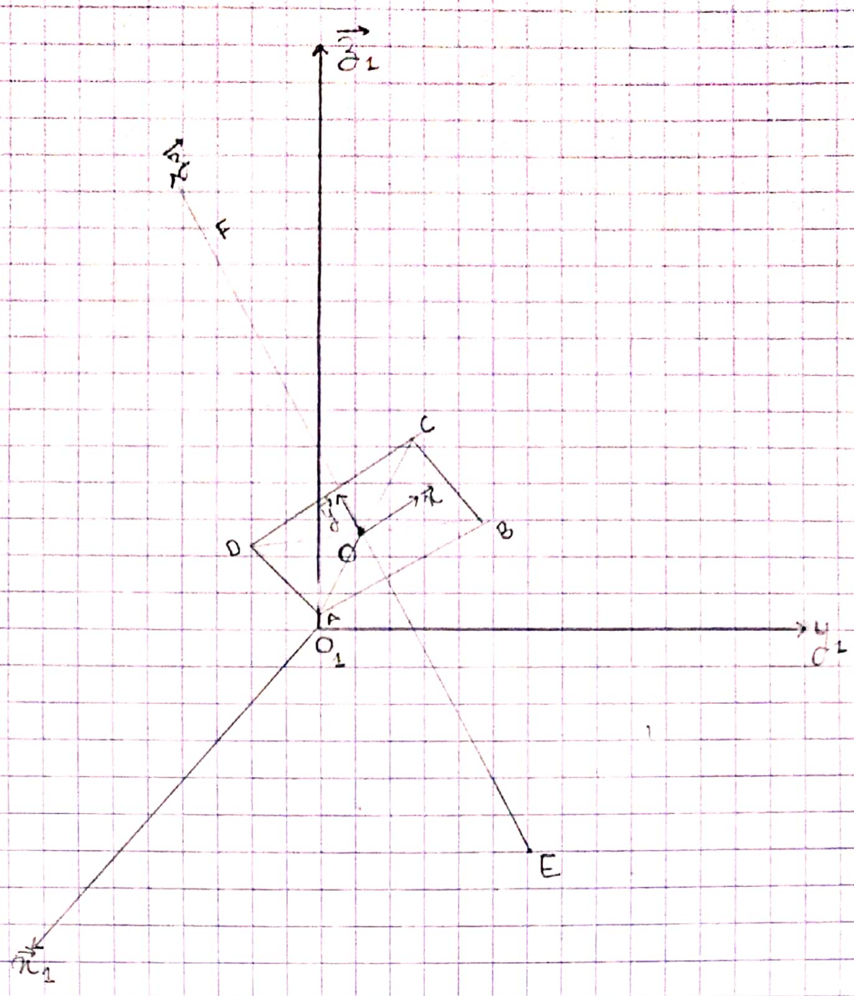
5- Cinématique de Contact entre I et J:

a) Vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1):

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/R) - \vec{V}(I \in S_1/R)$$

b) Vitesse de glissement de (S_3) par rapport à (S_2):

$$\vec{V}(J \in S_3/S_2) = \vec{V}(J \in S_3/R) - \vec{V}(J \in S_2/R)$$



1 - Condition géometrique de contact :

On pose $\overrightarrow{O_1E} = x_E \vec{x}_1 + y_E \vec{y}_1 + z_E \vec{z}_1$

Il y a conctact entre (S) et $(Ox_1 y_1)$ si $z_E = 0$

2- Calcul de $\vec{\Omega}(S/R_1)$:

• $\vec{\Omega}(S/R_1)$ dans R_2 :

D'après la décompontion des angles d'Euler :

$\vec{\Omega}(S/R_1) = \dot{\psi} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{z}$ or $\vec{z} = \cos\theta \vec{z}_1 - \sin\theta \vec{v}$

$\vec{\Omega}(S/R_1) = \dot{\theta} \vec{u} - \dot{\varphi} \sin\theta \vec{v} + (\dot{\psi} + \cos\theta) \vec{z}_1$

• $\vec{\Omega}(S/R_1)$ dans R_3 :

$\vec{\Omega}(S/R_1) = \dot{\psi} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{z}$ or $\vec{z}_1 = \cos\theta \vec{z} + \sin\theta \vec{w}$

$\vec{\Omega}(S/R_1) = \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\psi} \sin\theta \vec{w} + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}) \vec{z}$

3- Calcul de $d(\vec{\Omega}(S/R_1))/dt|_{R_1}$ dans R_3 :

* $d(\vec{\Omega}/R_1)/dt|_{R_2}$ par ses composantes dans R_2

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}(S/R_1)}{dt}\right|_{R_1} = \dot{\theta}\frac{d\vec{u}}{dt} + \ddot{\theta}\vec{u} - \frac{d\dot{\psi}\sin\theta}{dt}\vec{v} - \dot{\psi}\sin\theta\frac{d\vec{v}}{dt} + (\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{z_1}$$

or on a :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d(\cos\psi\vec{x_1} + \sin\psi\vec{y_1})}{dt} = -\dot{\psi}(\sin\psi\vec{x_1} + \cos\psi\vec{y_1}) = \dot{\psi}\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(-\sin\psi\vec{x_1} + \cos\psi\vec{y_1})}{dt} = \dot{\psi}(-\cos\psi\vec{x_1} - \sin\psi\vec{y_1}) = -\dot{\psi}\vec{u}$$

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}(S/R_1)}{dt}\right|_{R_1} = \dot{\theta}\dot{\psi}\vec{v} + \dot{\psi}\dot{\psi}\sin\theta\vec{u} - (\ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{v} + (\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{z_1} + \ddot{\theta}\vec{u}$$

$$d\vec{\Omega}(S/R_1) = \begin{cases} \ddot{\theta} + \dot{\psi}\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\theta}\dot{\psi} - \ddot{\psi}\sin\theta - \dot{\psi}\cos\theta \\ \ddot{\psi} + \ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta \end{cases}$$

* $d\vec{\Omega}(S/R_1)/dt|_{R_1}$ par ses composantes dans R_3 :

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}(S/R)}{dt}\right|_{R_1} = \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\varphi}\frac{d\vec{u}}{dt} + \dot{\psi}\sin\theta\frac{d\vec{w}}{dt} + \ddot{\psi}\sin\theta\vec{w} + \dot{\psi}\cos\theta\vec{w} + (\ddot{\psi}\cos\theta - \dot{\psi}\sin\theta + \dot{\varphi})\vec{z}$$

$$\vec{v} = \cos\theta\vec{w} - \sin\theta\vec{z}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\psi}(-\sin\psi\vec{x_1} + \cos\psi\vec{y_1}) = \dot{\psi}\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \dot{\theta}(-\sin\theta\vec{v} + \cos\theta\vec{z_1}) = \dot{\theta}\vec{z}$$

$$\left.\frac{d\vec{\Omega}(S/R)}{dt}\right|_{R_1} = \dot{\theta}\vec{u} + (\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta + \ddot{\psi}\sin\theta + \dot{\psi}\cos\theta)\vec{w} + (\dot{\theta} + \ddot{\psi}\cos\theta - \sin\theta - \dot{\psi}\sin\theta + \dot{\varphi})\vec{z}$$

4). Calculer $\vec{V}(O/R_1)$:

Dans R_1 : $\vec{\Omega}(S/R_1) = [\dot{\theta}\cos\psi - \dot{\varphi}(\sin\theta\sin\psi)]\vec{x_1} + [\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}(\sin\theta\cos\psi)]\vec{y_1} + (\dot{\psi} + \cos\theta)$

$\vec{V}(O/R_1) = \vec{V}(O_1/R_1) + \vec{\Omega}(S/R_1) \wedge \vec{O_1O}$ avec $\vec{O_1O} = (X, Y, Z)$

$\vec{V}(O/R_1) = \vec{\Omega}(S/R_1) \wedge \vec{O_1O}$

Pas encore.

$$\vec{V}(O/R_1) \begin{cases} Z(\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}(\sin\theta\cos\psi)) - Y(\dot{\psi}\cos\theta) \\ X(\dot{\psi} + \cos\theta) - Z(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}(\sin\theta\sin\psi)) \\ Y(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}(\sin\theta\sin\psi)) - X(\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}(\sin\theta\cos\psi)) \end{cases}$$

$$\vec{V}(O/R_1) = \dot{X}\vec{x_1} + \dot{Y}\vec{y_1} + \dot{Z}\vec{z_1}$$

Scanned with CamScanner

$\uparrow y$

- Calculer $V(\vec{E}/R)$:

$$\vec{V}(E/R_1) = \vec{V}(O/R_1) + \vec{V}(E/R) + \vec{\Omega}(S/R_1) \wedge \vec{OE}$$ or $\vec{OE} = X_0 \vec{x_1} + Y_0 \vec{y_1}$

$$= \vec{V}(O/R_1) + \vec{\Omega}(S/R_1) \wedge \vec{OE}$$

$$= \vec{\Omega}(S/R_1) \wedge \vec{O_1O} + \vec{\Omega}(S/R_1) \wedge \vec{OE}$$

$$= \vec{\Omega}(S/R_1) \wedge \vec{O_1E}$$

Vous avez pigé;

$\vec{V}(E/R) = \vec{V}(O/R_1) + \vec{\Omega}(S/R_1) \wedge \vec{O_1E}$

$$\vec{V}(E/R_1) \begin{cases} -Y_0(\dot{\varphi}\cos\theta) \\ X_0(\dot{\varphi} + \cos\theta) \\ Y_0(\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\varphi}(\sin\theta\sin\varphi)) - X_0(\dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta) \end{cases}$$

- Condition de non-glissement :

S ne glisse pas si $\vec{V}(E \in S/R_1) = \vec{0}$ $(\vec{V}(E/R_1) = \vec{0})$

- $\vec{V}(I/R) = \vec{V}(E \in (O_1 \vec{x_1}, \vec{y_1})) = \vec{0}$ donc $\vec{V}(I/R_1) < \vec{V}(E/R_1)$

5- On suppose E fixe dans R_1 :

a) Ecrivons $\vec{V}(O/R_1)$ en fonction de $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ et θ

Dans R_1 : $\vec{\Omega}(S/R_1) = [\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\varphi}(\sin\theta\sin\varphi)]\vec{x_1} + [\dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\varphi}(\sin\theta\cos\varphi)]\vec{y_1} + (\dot{\varphi} + \cos\theta)$

$$\vec{V}(O/R_1) = \vec{V}(O_1/R_1) + \vec{\Omega}(S/R_1) \wedge \vec{O_1O}$$

$$= \vec{\Omega}(S/R_1) \wedge \vec{O_1O}$$

$$\vec{V}(O/R_1) \begin{cases} Z(\dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\varphi}(\sin\theta\cos\varphi)) - Y(\dot{\varphi}\cos\theta) \\ X(\dot{\varphi} + \cos\theta) - Z(\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\varphi}(\sin\theta\sin\varphi)) \\ Y(\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\varphi}(\sin\theta\sin\varphi)) - X(\dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\varphi}(\sin\theta\cos\varphi)) \end{cases}$$

- Calcul de $\vec{\Gamma}(O/R_1)$:

$$\vec{\Gamma}(O/R_1) = \frac{d\vec{V}(O/R_1)}{dt}$$

b) Calcul des vitesses de G :

c) C'est le cours. Flemme.