UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET SCIENCES PHYSIQUES
EPREUVE DE PROBABILITES-STATISTIQUE

Contrôle Continu
Cycle Ingénieur II
Session 2019
Examinateur : Pr TEWA Jean Jules
Durée : 03h00- Novembre 2019

CONTRÔLE CONTINU DE PROBABILITÉS

Exercice 1 **(4pts) : *Calcul de probabilité***

Un émetteur envoie des messages en binaire. Chaque bit (0 ou 1) transmis doit passer par trois relais. À chaque relais, il y a 10% de chances que le bit transmis soit différent de celui reçu. On suppose que les relais opèrent de façon indépendante.

1) Si un 0 est envoyé par l'émetteur, quelle est la probabilité qu'un 0 soit transmis par chaque relais ?
2) Si un 0 est envoyé par l'émetteur, quelle est la probabilité qu'un 0 soit reçu par le récepteur ?
3) 60% des bits émis par l'émetteur sont des 0. Si un 0 et reçu par le récepteur, quelle est la probabilité qu'un 0 a été émis par l'émetteur ?

Exercice 2 **(5pts) : *Calcul de probabilité***

Soit $n > 1$ un entier. Soit X une v.a de densité f définie par : $f(x) = \begin{cases} a\,x^{n-1} & si\ 0 \leq x < 1; \\ 0 & sinon \end{cases}$

où a est une constante réelle.

1) Calculer a
2) Calculer l'espérance et la variance de X
3) Déterminer la fonction de répartition de X

Exercice 3 **(5pts) : *Calcul de probabilité***

Un grossiste en appareils ménagers est approvisionné par trois marques, notées respectivement M_1, M_2, M_3. La moitié des appareils de son stock provient de M_1, un huitième de M_2 et trois huitièmes de M_3. Ce grossiste sait que dans son stock, 13% des appareils de la marque M_1 sont rouges, que 5% des appareils de la marque M_2 sont rouges et que 10% des appareils de la marque M_3 le sont aussi. On choisit au hasard un appareil emballé dans le stock de ce grossiste.

1) Quelle est la probabilité qu'il vienne de M_3 ?
2) Quelle est la probabilité qu'il soit rouge sachant qu'il vienne de M_2 ?
3) Quelle est la probabilité que l'appareil choisi ne soit pas de couleur rouge ?
4) Après examen, on s'aperçoit que l'appareil choisi est de couleur rouge. Quelle est la probabilité qu'il soit de la marque M_1 ?

Exercice 4 **(6pts) : *Calcul de probabilité***

On tire au hasard et sans remise 5 cartes dans un jeu de 32 cartes (il y a 4 couleurs dans ce jeu et 8 hauteurs par couleurs). Calculer la probabilité pour que parmi les 5 cartes il y ait :

1) Cinq cartes de hauteur différente.
2) Exactement deux cartes de même hauteur (une paire).
3) Exactement trois cartes de même hauteur (un brelan).
4) Exactement quatre cartes de même hauteur (deux paires).
5) Un brelan et une paire.
6) Exactement deux paires.

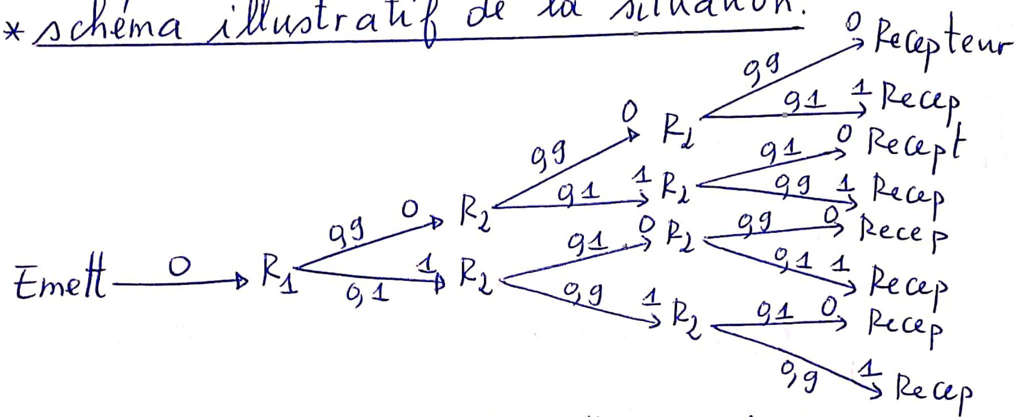
Contrôle continu de probabilité 2019/2020

Essai de correction:

Exercice 1: Calcul de probabilité

On a: Emetteur ("0" ou "1")

* schéma illustratif de la situation:



1) Si 0 est envoyé par l'emetteur, calculons la probabilité qu'un 0 soit transmis par chaque relais:

On a: $P=(0,9)\times(0,9\times0,1)\times(0,9\times0,1\times0,9\times0,1)$

$$\boxed{P=(0,9)^4\times(0,1)^3=6,561\times10^{-4}}$$

2) Si un 0 est envoyé par l'émetteur, calculons la probabilité qu'un 0 soit reçu par le recepteur:

$$P_{E_0}(R_0)=\frac{P(E_0\cap R_0)}{P(E_0)}=\frac{P_{R_0}(E_0)\times P(R_0)}{P(E_0)}$$

$$=(0,9)^3+0,9\times(0,1)^2+0,9\times(0,1)^2+0,9\times(0,1)^2$$

$$=(0,9)^3+\cancel{2}\,3\times0,9\times(0,1)^2=0,747$$

Donc $\boxed{P_{E_0}(R_0) = 0{,}747}$

3) $P(E_0) = 0{,}6$. Si un 0 est reçu par le recepteur, calculons la probabilité qu'un 0 a été émis par le recepteur:

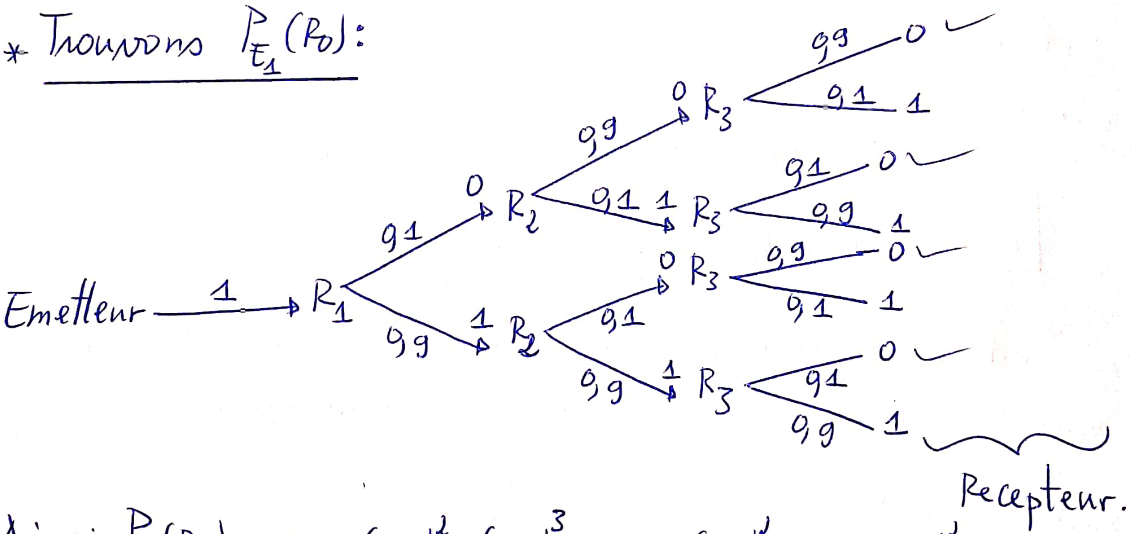
On a: $P_{R_0}(E_0) = \dfrac{P(E_0 \cap R_0)}{P(R_0)} = \dfrac{P_{E_0}(R_0) \times P(E_0)}{P(R_0)}$

Or $P(R_0) = P_{E_0}(R_0) \times P(E_0) + P_{\overline{E_0}}(R_0) \times P(\overline{E_0})$

$= P_{E_0}(R_0) \times P(E_0) + (1 - P(E_0)) \times P_{E_1}(R_0)$

Donc: $P_{R_0}(E_0) = \dfrac{P_{E_0}(R_0) \times P(E_0)}{P_{E_0}(R_0) \times P(E_0) + (1 - P(E_0)) \times P_{E_1}(R_0)}$

* <u>Trouvons $P_{E_1}(R_0)$:</u>



Ainsi, $P_{E_1}(R_0) = 0{,}1 \times (0{,}9)^2 + (0{,}1)^3 + 0{,}1 \times (0{,}9)^2 + 0{,}1 \times (0{,}9)^2$

$= (0{,}1)^3 + 3 \times 0{,}1 \times (0{,}9)^2$

donc: $P_{E_1}(R_0) = 0{,}244$

D'où : $\boxed{P_{R_0}(E_0) = \dfrac{P_{E_0}(R_0) \times P(E_0)}{P_{E_0}(R_0) \times P(E_0) + (1 - P(E_0)) \times P_{E_1}(R_0)}}$

<u>AN:</u> $P_{R_0}(E_0) = \dfrac{0{,}747 \times 0{,}6}{0{,}747 \times 0{,}6 + (1 - 0{,}6) \times 0{,}244} = \dfrac{0{,}4482}{0{,}5458}$

D'où $\boxed{P_{R_0}(E_0) = 0{,}82}$

<u>Exercice 2:</u> <u>Calcul de probabilité</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$; $n > 1$; X une v.a; $f(x) = \begin{cases} a x^{n-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ $a \in \mathbb{R}$.

1) Calculons a:

f est une fonction densité $\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$.

$$\Rightarrow \int_0^1 a x^{n-1}\, dx = 1$$

$$\Rightarrow a\left[\frac{1}{n} x^n\right]_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{n} = 1$$

$$\Rightarrow a = n.$$

D'où $\boxed{a = n}$

2) Calculons l'espérance mathématique et la variance de X.

On a: $\begin{cases} E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx. \\ V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \end{cases}$

* Espérance de X:

$$E(X) = \int_0^1 a\, x . x^{n-1}\, dx = a\int_0^1 x^n\, dx = a\left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 = a \times \frac{1}{n+1}$$

d'où $\boxed{E(X) = \frac{a}{n+1}}$

* Variance de X

On a: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \int_0^1 a x^2 . x^{n-1}\, dx - \left(\frac{a}{n+1}\right)^2$$

$$= a\int_0^1 x^{n+1}\, dx - \left(\frac{a}{n+1}\right)^2$$

$$= a\left[\frac{1}{n+2} x^{n+2}\right]_0^1 - \left(\frac{a}{n+1}\right)^2$$

$$= \frac{a}{n+2} - \left(\frac{a}{n+1}\right)^2$$

d'où $\boxed{V(X) = \frac{a}{n+2} - \left(\frac{a}{n+1}\right)^2}$

3) Déterminons la fonction de répartition de la variable aléatoire X. (Confér cahier).

Exercice 3 : Calcul de probabilité

On a : $P(M_1) = \frac{1}{2}$; $P(M_2) = \frac{1}{8}$; $P(M_3) = \frac{3}{8}$;

$P_{M_1}(R) = 0{,}13$; $P_{M_2}(R) = 0{,}05$; $P_{M_3}(R) = 0{,}1$.

1) Probabilité que l'appareil provienne de M_3

$$\boxed{P(M_3) = \frac{3}{8}}$$

2) Probabilité qu'il soit rouge sachant qu'il vient de M_2

$$\boxed{P_{M_2}(R) = 0{,}05}$$

3) Probabilité qu'il ne soit pas rouge :

On a :

$$P(\overline{R}) = 1 - P(R)$$

or $P(R) = P_{M_1}(R)P(M_1) + P_{M_2}(R)P(M_2) + P_{M_3}(R)P(M_3)$

$$= 0{,}13 \times \frac{1}{2} + 0{,}05 \times \frac{1}{8} + 0{,}1 \times \frac{3}{8}$$

$$P(R) = 0{,}10875$$

Donc : $P(\overline{R}) = 1 - 0{,}10875 = 0{,}89125$

D'où $\boxed{P(\overline{R}) = 0{,}89125}$

4) On sait que l'appareil est rouge. Calculons la probabilité qu'il soit de la marque M_1 :

Soit $P_R(M_1) = \dfrac{P(R \cap M_1)}{P(R)} = \dfrac{P_{M_1}(R) \times P(M_1)}{P(R)}$

donc : $\boxed{P_R(M_1) = \dfrac{P_{M_1}(R) \times P(M_1)}{P(R)} = \dfrac{P_{M_1}(R) \times P(M_1)}{1 - P(\bar{R})}}$

AN : $P_R(M_1) = \dfrac{0{,}13 \times 0{,}5}{0{,}10875} = 0{,}598$

D'où $\boxed{P_R(M_1) = 0{,}5977}$

Exercice 4 : Calcul de probabilité

On tire au hasard et sans remise 5 cartes dans 32.

- 4 couleurs
- 8 hauteurs par couleur.

Calculons la probabilité pour que parmi les 5 cartes il y ait :

1) cinq cartes de hauteur différente :

→ Cas possibles : A_{32}^5.

→ Cas favorables : $A_8^5 \times A_4^1$

Donc $\boxed{P = \dfrac{A_4^1 \times A_8^5}{A_{32}^5}}$ AN : $P = \dfrac{224}{201376} = 1{,}1 \times 10^{-3}$

donc $\boxed{P = 1{,}1 \times 10^{-3}}$

2) Exactement deux cartes de même hauteur (une paire)

- choisissons la hauteur avec laquelle on va former notre paire : A_8^1 (dans ce choix on choisit toutes les hauteurs identiques et on a 4 cartes de même hauteur).
- formons notre paire de carte : A_4^2
- Pour les autres (3) cartes, les prendre dans chaque hauteur differente de celle déjà utilisée : $A_7^1 \times A_6^1 \times A_5^1$

Ainsi;

→ Cas favorable : $A_8^1 A_4^2 A_7^1 A_6^1 A_5^1 = A_4^2 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$

$= 8 \times 7 \times 36 \times 5$

$= 10080$

donc :

$$\boxed{P = \frac{10080}{201376} \approx 0,05}$$

3) Exactement 03 cartes de même hauteur (un brelan)

→ Cas favorable : $A_8^1 A_4^3 (A_7^1)(A_6^1) = 8 \times 7 \times 6 \times 4 = 1344$

donc : $\boxed{P = \frac{1344}{201376} \approx 6,67 \times 10^{-3}}$

4) Exactement 04 cartes de même hauteur (deux paires)

→ Cas favorables : $A_8^1 A_4^4 (A_7^1) = 8 \times 7 = 56$

donc $\boxed{P = \frac{56}{201376} \approx 2,78 \times 10^{-4}}$

5) Un brelan et une paire:

→ Cas favorables: $A_8^1 A_4^2 \times (A_7^1 A_4^3) = 8 \times 7 \times 6 \times 4 = 1344$.

donc $\boxed{P = \frac{1344}{201376} \simeq 6,67 \times 10^{-3}}$

6) Exactement deux paires:

→ Cas favorables: $A_8^1 A_4^2 (A_7^1 A_4^2) A_6^1 = 8 \times 7 \times 36 \times 6 = 12096$

donc $\boxed{P = \frac{12096}{201376} \simeq 0,06}$

NB:

dégré de sureté	Exercice
90 %	Exercice 1
99,5 %	Exercice 2
99,9 %	Exercice 3
15,1 %	Exercice 4