# Etude de fonctions

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile  ** facile  *** difficulté moyenne  **** difficile  ***** très difficile
I : Incontournable  T : pour travailler et mémoriser le cours

## Exercice 1

Etude complète des fonctions suivantes

1. $f_1(x) = \frac{1+x^2}{x^3}(\text{Arctan}\,x - \frac{x}{1+x^2})$.
2. $f_2(x) = |\tan x| + \cos x$.
3. $f_3(x) = x - \ln\left|\frac{120+60x+12x^2+x^3}{120-60x+12x^2-x^3}\right|$.
4. $4_(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$.
5. $f_5(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.
6. $f_6(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.
7. $f_7(x) = e^{/\ln x}$.
8. $f_8(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.
9. $f_9(x) = \log_2(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6))$.
10. $f_{10}(x) = E(x) + (x-E(x))^2$.
11. $f_{11}(x) = \text{Arcsin}\sqrt{\frac{1}{2}-x} + \text{Arcsin}\sqrt{\frac{1}{2}+x}$.
12. $f_{12}(x) = \frac{\text{Arcsin}\,x}{x}$.
13. $f_{13}(x) = e^{1/x}\sqrt{x+4}$.
14. $f_{14}(x) = \text{Arccos}(\frac{1}{\text{ch}\,x})$.
15. $f_{15}(x) = \ln(y+\sqrt{y^2-1}) - \ln(\frac{1+x}{1-x})$ où $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$.
16. $f_{16}(x) = \ln|\text{sh}\,x - 1|$.
17. $f_{17}(x) = x^{(x^x)}$.
18. $f_{18}(x) = (\cos x + \sin x)^{1/x}$.
19. $f_{19}(x) = \sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2-1}$.
20. $f_{20}(x) = \text{Arcsin}(2x-1) + 2\,\text{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.
21. $f_{21}(x) = \ln(\text{ch}\,x)$.
22. $f_{22}(x) = 3^{2x-1} - 5.3^{x-1} - x\ln 3$.
23. $f_{23}(x) = \ln\left|\frac{1}{e^x-1}\right|$.

Correction ▼ [005443]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. $f_1$ est définie et de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux. De plus, $f_1$ est paire. On étudiera $f_1$ sur $[0,+\infty[$ (se méfier alors pour la dérivabilité en 0).

   **Etude en 0** (à gauche et à droite).

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^3}(1+x^2)[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)-x(1-x^2+x^4+o(x^4))] \\
&= (1+x^2)(\frac{2x^3}{3}-\frac{4x^5}{5}+o(x^5)) = (1+x^2)(\frac{2}{3}-\frac{4x^2}{5}+o(x^2)) \\
&= \frac{2}{3}-\frac{2x^2}{15}+o(x^2).
\end{aligned}
$$

   Par suite, $f_1$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f_1(0)=\frac{2}{3}$. Puisque $f_1$ admet en 0 un développement limité d'ordre 1, le prolongement encore noté $f_1$ est dérivable en 0 et $f_1'(0)=0$. $C_1$ admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à $(0x)$ d'équation $y=\frac{2}{3}$. Enfin, puisque $f(x)-\frac{2}{3}$ est, au voisinage de 0, du signe de $-\frac{2x^2}{15}$, la courbe est localement en dessous de sa tangente.

   **Etude en** $+\infty$ (et $-\infty$). $f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, et de même $f_1(x) \underset{x\to-\infty}{\to} 0$.

   **Dérivée, variations.**

   Pour $x>0$,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^2})(\text{Arctan}\,x-\frac{x}{1+x^2})+\frac{1+x^2}{x^3}(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}) \\
&= -\frac{3+x^2}{x^4}(\text{Arctan}\,x-\frac{x}{1+x^2})+\frac{1+x^2}{x^3}\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{3+x^2}{x^4}(-\text{Arctan}\,x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^4}{3+x^2}\frac{2}{x(1+x^2)}) \\
&= \frac{3+x^2}{x^4}(-\text{Arctan}\,x+\frac{x(3+x^2)+2x^3}{(1+x^2)(3+x^2))} = \frac{3+x^2}{x^4}g(x)
\end{aligned}
$$

   où, pour tout réel $x$, $g(x) = -\text{Arctan}\,x+\frac{3x}{3+x^2}$.

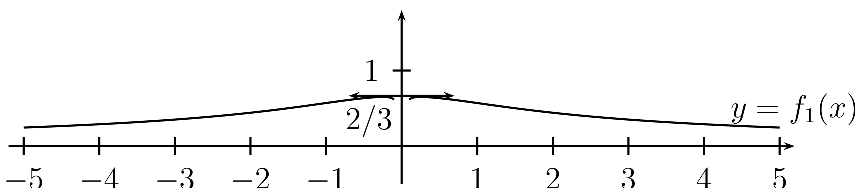
   $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x$ réel,

$$
g'(x) = 3\frac{(3+x^2)-2x^2}{(3+x^2)^2}-\frac{1+x^2}{=}\frac{3(3-x^2)(1+x^2)-(3+x^2)^2}{(1+x^2)(3+x^2)^2} = \frac{-4x^4}{(3+x^2)^2(1+x^2)}.
$$

   $g'$ est donc strictement négative sur $]0,+\infty[$ et par suite, $g$ est donc strictement décroisante sur $[0,+\infty[$. Puisque $g(0)=0$, pour $x>0$, $g(x)<0$. Finalement, $f_1'$ est strictement négative sur $]0,+\infty[$ et $f_1$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

   Le tableau de variations de $f_1$ n'apporte rien de plus.

   **Graphe**




2. $f_2$ est définie sur $D=\mathbb{R}\setminus(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$, paire et $2\pi$-périodique. $f_2$ est continue sur $D$ en vertu de théorèmes généraux. On étudie $f_2$ sur $[0,\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\pi]$.

   **Etude en** $\frac{\pi}{2}$.

   $f(x) \underset{x\to\pi/2}{\sim} |\tan x|$ et donc, $\lim_{x\to\pi/2} f(x) = +\infty$. $C_2$ admet la droite d'équation $x=\frac{\pi}{2}$ pour droite asymptote.

**Dérivabilité et dérivée.**

$f_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x\notin\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $f_2'(x)=\varepsilon\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x$ où $\varepsilon$ est le signe de $\tan x$.

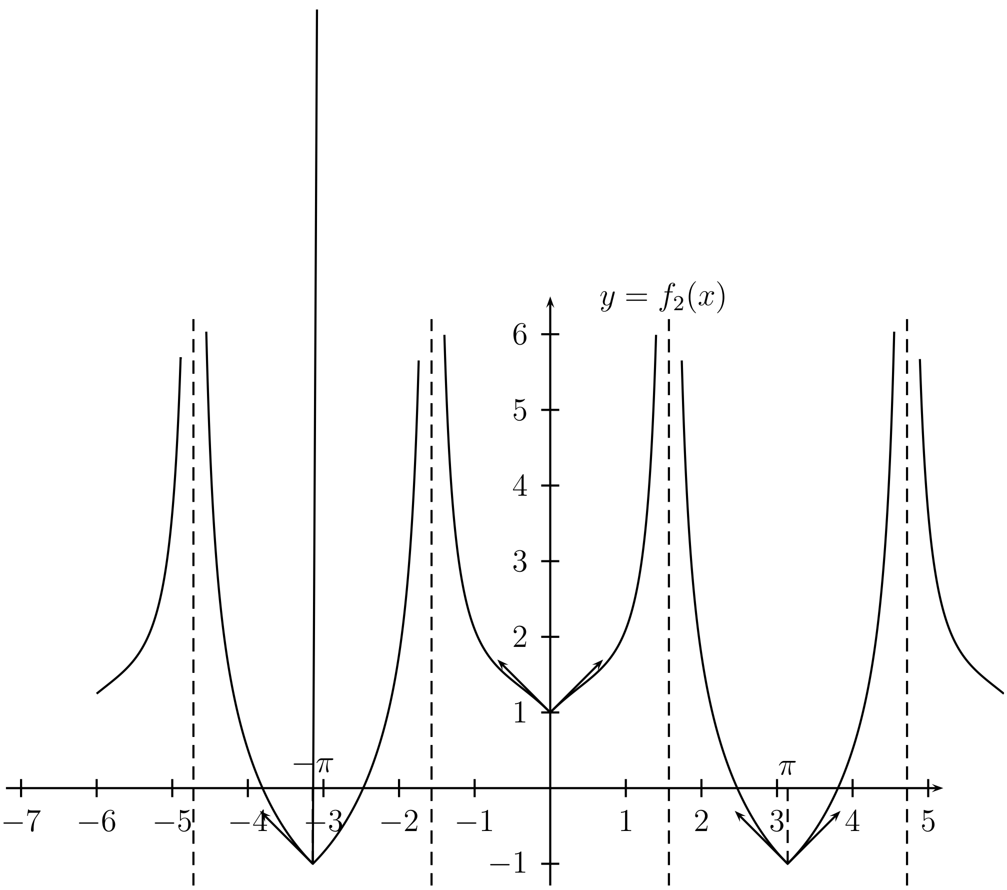
$f_2$ est aussi dérivable à droite en 0 et $(f_2)_d'(0)=1$. Par symétrie, $f_2$ est dérivable à gauche en 0 et $(f_2)_g'(0)=-1$. $f_2$ n'est pas dérivable en 0.

De même, $f_2$ est dérivable à gauche et à droite en $\pi$ avec $(f_2)_g'(\pi)=-1$ et $(f_2)_d'(\pi)=1$, et n'est donc pas dérivable en $\pi$.

**Variations**.

$f_2$ est strictement décroissante sur $]\frac{\pi}{2},\pi]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $]\frac{\pi}{2},\pi]$. Puis, pour $x$ élément de $]0,\frac{\pi}{2}[$, $f_2'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x>1-1=0$. $f_2'$ est strictement positive sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et donc $f_2$ est strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

**Graphe.**




3. Pour $x$ réel, posons $P(x)=x^3+12x^2+60x+120$. Pour tout réel $x$, on a $P'(x)=3(x^2+8x+20)=3((x+4)^2+4)>0$. $P$ est une fonction polynôme de degré 3 strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule donc une et une seule fois en un certain réel noté $\alpha$. De plus, $P(-5)P(-4)<0$ et $\alpha\in]-5,-4[$.

   Enfin, $P$ est strictement négatif sur $]-\infty,\alpha[$ et strictement positif sur $]\alpha,+\infty[$.

   $f_3$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-\alpha,\alpha\}$, et pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-\alpha,\alpha\}$,

$$f_3(x)=x-\ln\left|\frac{P(x)}{P(-x)}\right|=x-\ln|P(x)|+\ln|P(-x)|.$$

   Notons que $f_3$ est impaire.

   **Dérivabilité et dérivée.**

   $f_3$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-\alpha,\alpha\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-\alpha,\alpha\}$,

$$f_3'(x)=1-\frac{P'(x)}{P(x)}-\frac{P'(-x)}{P(-x)}=\frac{P(x)P(-x)-P'(x)P(-x)-P'(-x)P(x)}{P(-x)P(x)}.$$

Puis,

$$
\begin{aligned}
&P(x)P(-x) - P'(x)P(-x) - P'(-x)P(x)\\
&\qquad = ((12x^2+120)+(x^3+60x))((12x^2+120)-(x^3+60x))\\
&\qquad -3((x^2+20)+8x)((12x^2+120)-(x^3+60x))) - 3((x^2+20)-8x))((12x^2+120)+(x^3+60x))\\
&\qquad = 144(x^2+10)^2 - x^2(x^2+60)^2 - 6((x^2+20)(12x^2+120)-(8x)(x^3+60x))\\
&\qquad = (-x^6+24x^4-720x^2+14400) - 6(4x^4-120x^2+2400) = -x^6,
\end{aligned}
$$

et donc $f_3'(x) = \frac{-x^6}{P(x)P(-x)}$.

**Etude en** $+\infty$.

$$f_3(x) - x \underset{x\to+\infty}{=} -\ln(1+\frac{12}{x}+o(\frac{1}{x})) + \ln(1-\frac{12}{x}+o(\frac{1}{x})) = -\frac{24}{x}+o(\frac{1}{x}).$$

On en déduit tout d'abord que $\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$ (resp.$\lim_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty$, puis que $C_3$ admet en $+\infty$ (resp.$-\infty$) la droite d'équation $y = x$ pour droite asymptote et que $C_3$ est au-dessous (resp. au-dessus) de cette droite au voisinage de $+\infty$ (resp.$-\infty$).

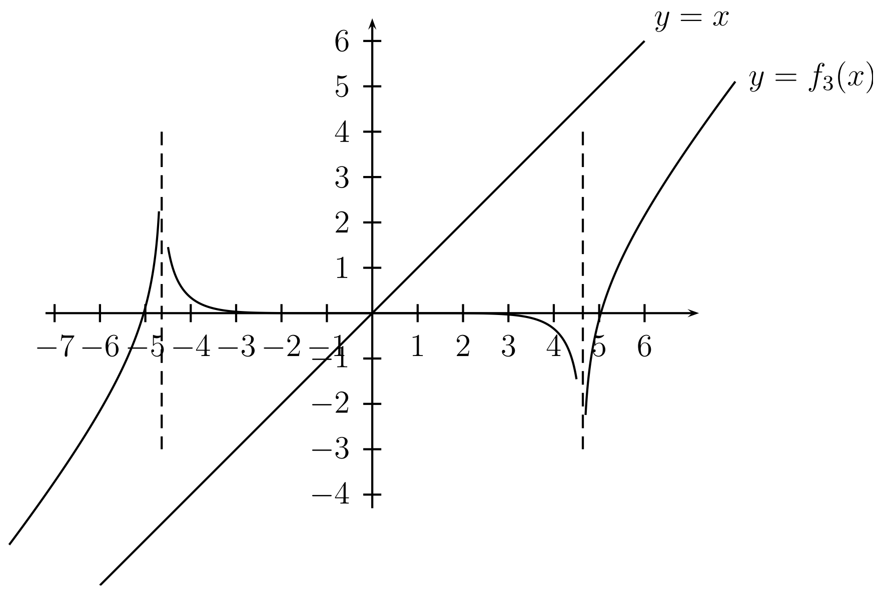
**Variations.**

D'une part, $f_3'(0) = 0$. D'autre part, pour $x > 0$, $P(x) > 0$. $f_3'$ est donc du signe de $-P(-x)$ sur $]0,+\infty[\setminus\{\alpha\}$. Ainsi, $f_3'$ est strictement négative sur $]0,\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha,+\infty[$.

On en déduit le tableau de variations de $f_3$.

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_3'(x)$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $f_3$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ $\Vert$ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Graphe**.




4. $f_4$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. De plus, pour $x \neq 0$,

$$f_4(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}e^{\frac{2/x}{1/x^2-1}} = \frac{1}{x}e^{-\frac{2x}{x^2-1}} = \frac{1}{f_4(x)}.$$

Ce genre de constatation peut servir à calculer $\lim_{x\to+\infty} f_4(x)$ si l'on connait $\lim_{x\to 0,\, x>0} f_4(x)$, obtenir les variations de $f_4$ sur $]0,1[$ si on les connait sur $]1,+\infty[$ ...

On peut aussi noter que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $f_4(-x)f_4(x)=-x^2$ et donc, pour $x\neq 0$, $f_4(-x)=\frac{-x^2}{f_4(x)}$. Cette constatation pourra être utile pour déduire l'étude de $f_4$ en $-1$ de l'étude en 1.

**Etude en $+\infty$ et $-\infty$.**

Puisque $\frac{2x}{x^2-1}\underset{x\to\pm\infty}{\to}0$, on a $f_4(x)\underset{x\to\pm\infty}{\sim}x$ ce qui montre déjà que $\lim_{x\to+\infty} f_4(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f_4(x)=-\infty$ et que $C_4$ admet en $+\infty$ et $-\infty$, une direction asymptotique d'équation $y=x$. Plus précisément,

$$\frac{2x}{x^2-1}\underset{x\to\pm\infty}{=}\frac{2}{x}(1-\frac{1}{x^2})^{-1}=\frac{2}{x}+o(\frac{1}{x^2}),$$

puis,

$$e^{\frac{2x}{x^2-1}}\underset{x\to\pm\infty}{=}1+(\frac{2}{x})+(\frac{2}{x})^2+o(\frac{1}{x^2})=1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+o(\frac{1}{x^2}).$$

On en déduit que

$$f_4(x)\underset{x\to\pm\infty}{=}x+2+\frac{2}{x}+o(\frac{1}{x}).$$

Par suite, $C_4$ admet la droite d'équation $y=x+2$ pour droite asymptote en $+\infty$ et $-\infty$. De plus, le signe de $f_4(x)-(x+2)$ étant localement le signe de $\frac{2}{x}$, $C_4$ est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ et au-dessous au voisinage de $-\infty$.

**Etude en 1 (et -1).**

Clairement, $\lim_{x\to 1,\, x>1} f_4(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to -1,\, x>-1} f_4(x)=-\infty$. Ensuite, $\lim_{x\to 1,\, x<1} f_4(x)=0$ et $\lim_{x\to -1,\, x<-1} f_4(x)=0$.

On prolonge $f_4$ par continuité à gauche en 1 en posant $f_4(1)=0$, et de même en $-1$ et on étudie la dérivabilité du prolongement encore noté $f_4$.

$f_4$ est continue sur $]-1,1]$, de classe $C^1$ sur $]-1,1[$ et pour $x\in]-1,1[$ (voir dérivée-variations),

$$f_4'(x)=\frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{(x^2-1)^2}e^{\frac{2x}{x^2-1}}\underset{x\to 1,\, x<1}{\to}0.$$

D'après un théorème classique d'analyse, $f_4$ est de classe $C^1$ sur $]-1,1]$ et en particulier dérivable à gauche en 1 et $f_g'(1)=0$.

De même, $f_4$ est dérivable à gauche en $-1$ et $f_g'(-1)=0$. $C_4$ admet en ces points des demi-tangentes parallèles à l'axe $(Ox)$.

**Dérivée. Variations.**

$f_4$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x\neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f_4'(x)}{f_4(x)}&=(\ln|f_4|)'(x)=(\ln|x|+\frac{2x}{x^2-1})'(x)=\frac{1}{x}+2\frac{(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2}\\&=\frac{(x^2-1)^2-2x(x^2+1)}{x(x^2-1)^2}=\frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{x(x^2-1)^2},\end{aligned}$$

et donc

$$\forall x\neq 0,\ f4'(x)=\frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{(x^2-1)^2}e^{\frac{2x}{x^2-1}},$$

ce qui reste vrai pour $x=0$ par continuité de $f_4'$ en 0.

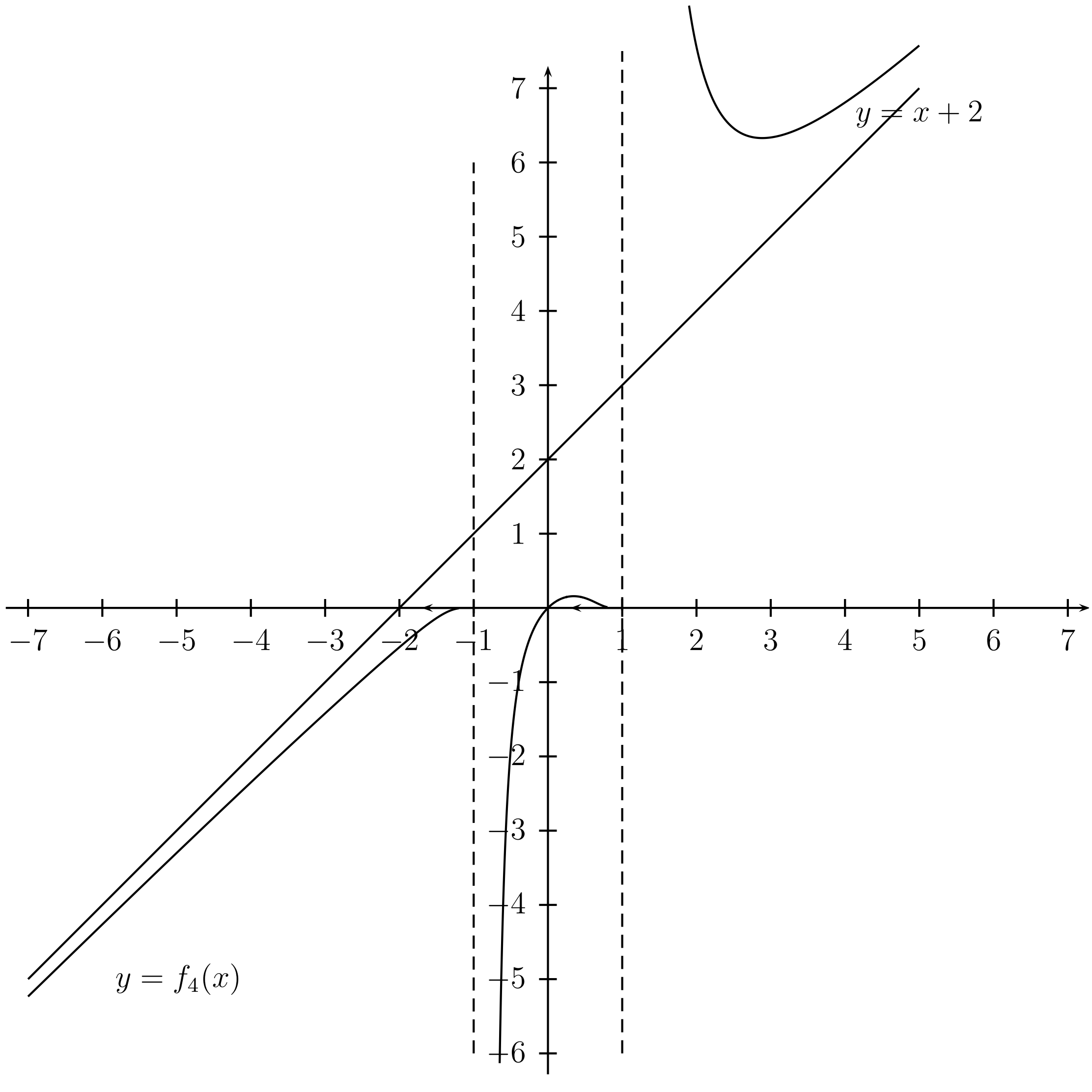
$f_4'$ est donc du signe de $P(x)=x^4-2x^3-2x^2-2x+1$. Or, pour $x\neq 0$,

$$P(x) = x^2((x^2+\frac{1}{x^2}) - 2(x+\frac{1}{x}) - 2) = x^2((x+\frac{1}{x})^2 - 2(x+\frac{1}{x}) - 4) =$$
$$= x^2(x+\frac{1}{x} - (1-\sqrt{5})(x+\frac{1}{x} - (1+\sqrt{5})) = (x^2-(1-\sqrt{5})x+1)(x^2-(1+\sqrt{5})x+1),$$

ce qui reste vrai pour $x = 0$.
Le premier trinôme a un discriminant égal à $(\sqrt{5}-1)^2 - 4 = 2 - 2\sqrt{5} < 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - (1-\sqrt{5})x + 1 > 0$.
Le deuxième trinôme a un discriminant égal à $(\sqrt{5}+1)^2 - 4 = 2 + 2\sqrt{5} > 0$ et admet donc deux racines réelles $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}+\sqrt{2+\sqrt{5}})2,89... > 1$ et $\beta = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}-\sqrt{2+2\sqrt{5}}) = \frac{1}{\alpha}0,34... \in ]0,1[$. On en déduit le tableau de variation de $f_4$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | $0$ | | $\beta$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_4'(x)$ | | $+$ | ‖ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_4$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ ‖ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0,15...$ | ↘ | $0$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $6,34...$ | ↗ | $+\infty$ |

**Graphe.**



5. Si $x>0$, $e^x-1>0$ et si $x<0$, $e^x-1<0$. Donc, pour $x\neq 0$, $>0$ et $f_5$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour $x\neq 0$,

$$f_5(-x)=-\frac{1}{x}\ln\frac{e^{-x}-1}{-x}=-\frac{1}{x}\ln(e^{-x})-\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}=1-f(x).$$

Donc, pour tout réel non nul $x$, $f(x)+f(-x)=1$. Le point de coordonnées $(0,\frac{1}{2})$ est centre de symétrie de $C_5$.

**Etude en 0.**

$$f_5(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{1}{x}\ln(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2))=\frac{1}{x}((\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6})-\frac{1}{2}(\frac{x}{2})^2+o(x^2))=\frac{1}{2}+\frac{1}{24}x+o(x).$$

Ainsi, $f_5$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f_5(0)=\frac{1}{2}$. Le prolongement, encore noté $f_5$, admet en 0 un développement limité d'ordre 1 et est donc dérivable en 0 avec $f_5'(0)=\frac{1}{24}$. Une équation de la tangente à $C_5$ en le point d'abscisse 0 est $y=\frac{1}{24}x+\frac{1}{2}$. Par symétrie, ce point est un point d'inflexion.

**Etude en $+\infty$.**

$$f_5(x)\underset{x\to+\infty}{=}\frac{1}{x}(\ln(e^x)+\ln(1-e^{-x})-\ln x)=1-\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln(1-e^{-x}}{x}=1+o(1).$$

Donc, $\lim_{x\to+\infty}f_5(x)=1$. Par symétrie, $\lim_{x\to-\infty}f_5(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-f_5(-x))=1-1=0$.

**Dérivée. Variations.**

$f_5$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux (et donc sur $\mathbb{R}$) et pour $x\neq 0$, (puisque $\ln\frac{e^x-1}{x}=\ln\left|\frac{e^x-1}{x}\right|=\ln|e^x-1|-\ln|x|$),

$$f_5'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln\frac{e^x-1}{x}+\frac{1}{x}(\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}(-\ln\frac{e^x-1}{x}+\frac{xe^x}{e^x-1}-1).$$

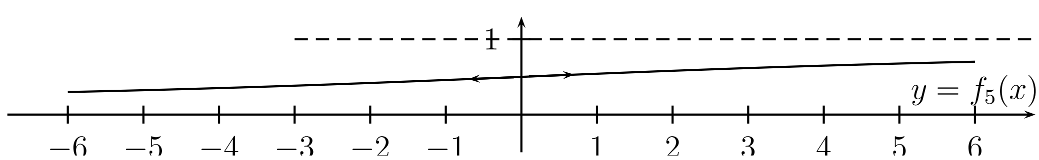
$f_5'$ est, sur $\mathbb{R}^*$, du signe de $g(x)=-\ln\frac{e^x-1}{x}+\frac{xe^x}{e^x-1}+-1$. $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour $x$ réel non nul,

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\frac{e^x}{e^x-1}+\frac{1}{x}+\frac{(e^x+xe^x)(e^x-1)-xe^x.e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{-xe^x(e^x-1)+(e^x-1)^2+xe^x(e^x-x-1)}{x(e^x-1)^2}\\&=\frac{(e^x-1)^2-x^2e^x}{x(e^x-1)^2}=\frac{(e^{x/2}-e^{-x/2})^2-x^2}{x(e^{x/2}-e^{-x/2})^2}\\&=\frac{(2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2})^2-x^2}{x(2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2})^2}=\frac{\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{2}-(\frac{x}{2})^2}{x\,\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

L'inégalité $\mathrm{sh}x>x$, valable pour $x>0$, est classique (par exemple, la formule de TAYLOR-LAPLACE à l'ordre 1 fournit pour $x>0$, $\mathrm{sh}x=x+\int_0^x(x-t)\,\mathrm{sh}t\,dt>x$.) Par suite, $g'$ est strictement positive sur $]0,+\infty[$, et donc $g$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. En tenant compte de $g(0^+)=0$, $g$ est donc strictement positive sur $]0,+\infty[$. Il en est de même de $f_5'$ et $f_5$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Par symétrie et continuité en 0, $f_5$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**Graphe.**




6. $f_6$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\{-1,1\}$ en vertu de théorèmes généraux.

**Etude en 1.**

$f_6(x)-f_6(1)=x-1+\sqrt{|x^2-1|}\underset{x\to 1}{\sim}\sqrt{2}\sqrt{|x-1|}$, ce qui montre que $f_6$ n'est pas dérivable en 1 mais que $C_6$ admet au point d'abscisse 1 deux demi-tangentes parallèles à $(Oy)$.

**Etude en -1.**

$f_6(x) - f_6(-1) = x + 1 + \sqrt{|x^2-1|} \underset{x \to -1}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{|x+1|}$, ce qui montre que $f_6$ n'est pas dérivable en $-1$ mais que $C_6$ admet au point d'abscisse $-1$ deux demi-tangentes parallèles à $(Oy)$.

**Etude en** $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$f_6(x) = x + x(1 - \frac{1}{x^2})^{1/2} = x + x(1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = 2x - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}),$$

ce qui montre tout à la fois que $\lim_{x \to +\infty} f_6(x) = +\infty$, puis que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à $C_6$ en $+\infty$ et que $C_6$ est au-dessous de cette droite au voisinage de $+\infty$.

**Etude en** $-\infty$.

Au voisinage de $-\infty$, on a, $f_6(x) = x - x(1 + o(\frac{1}{x})) = o(1)$, et $\lim_{x \to -\infty} f_6(x) = 0$.

**Dérivée. Variations.**

Soit $\varepsilon$ le signe de $x^2 - 1$. Pour $x \neq \pm 1$,

$$f_6'(x) = 1 + \frac{2\varepsilon x}{2\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}} = \frac{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)} + \varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}}.$$

Si $-1 < x \leq 0$, (de sorte que $\varepsilon x > 0$) ou $x > 1$, $f_6'(x) > 0$.

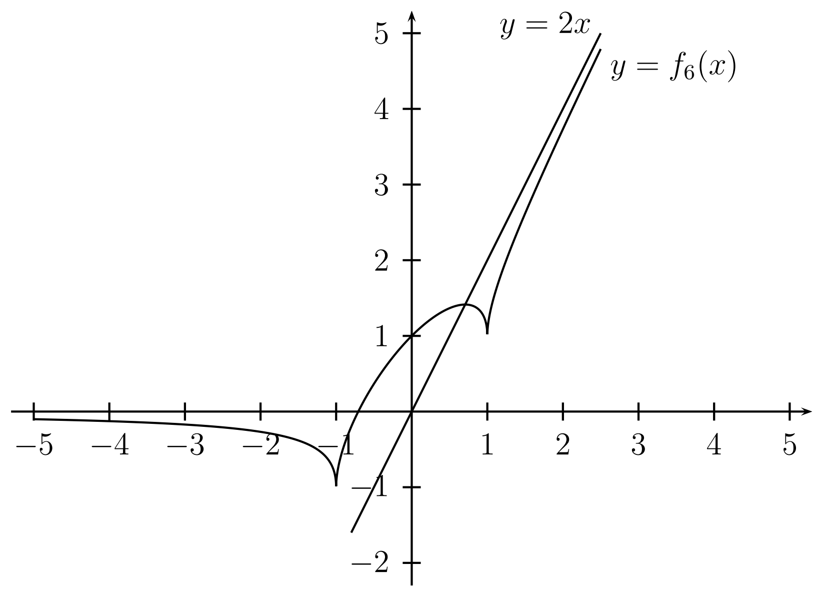
Si $x < -1$, $\text{sgn}(f_6'(x)) = \text{sgn}(x + \sqrt{x^2-1}) = \text{sgn}(\frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}} = -$ et $f_6'(x) < 0$.

Si $0 \leq x < 1$. $\text{sgn}(f_6'(x)) = \text{sgn}(-x + \sqrt{x^2-1}) = \text{sgn}(-x^2 - (x^2-1)) = \text{sgn}(\frac{1}{\sqrt{2}} - x)$.

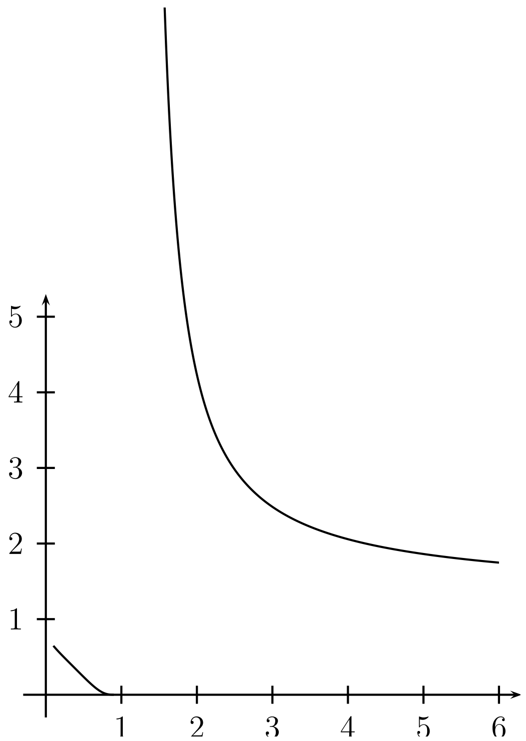
D'où le tableau de variations de $f_6$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1/\sqrt{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_6'(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $f_6$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $-\infty$ |

**Graphe.**



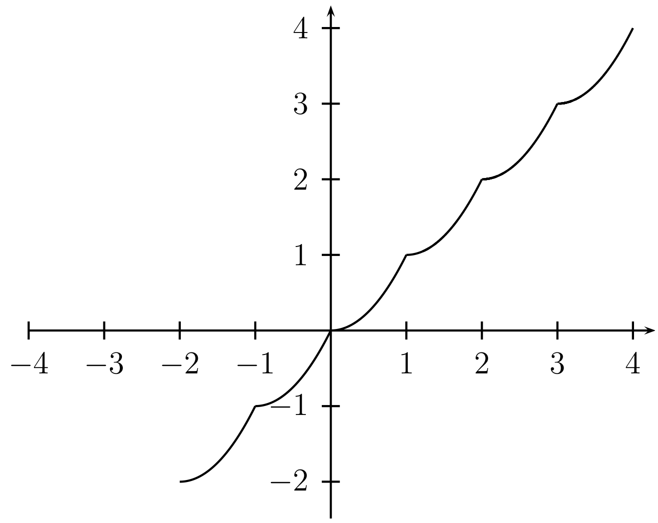
7.



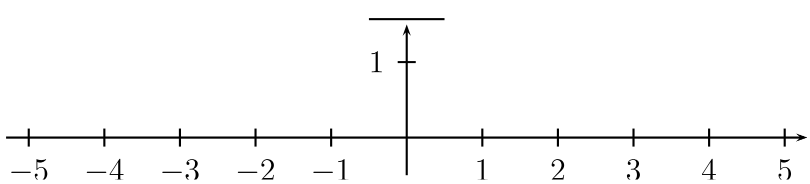

8.

9.

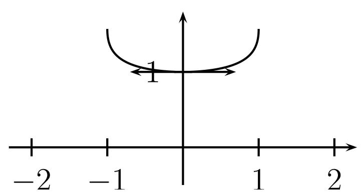
10.




11.




12.




13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23.