Enoncés et corrections : Sandra Delaunay

Sujets de l'année 2006-2007

1 Devoir à la maison

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante, pour $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Lorsque A est diagonalisable, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et de A, puis U_n en fonction de U_0 et de A.

Correction ▼ [002591]

Exercice 2

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer $(A-2I_3)^2$, puis $(A-2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Correction ▼ [002592]

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de f.
2. Déterminer les vecteurs propres de f.
3. Soit $\vec{u}$ un vecteur propre de f pour la valeur propre 2. Trouver des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que
$$f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u} \text{ et } f(\vec{w}) = 2\vec{w} + \vec{v}.$$
4. Soit $\vec{e}$ un vecteur propre de f pour la valeur propre 1. Démontrer que $(\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Donner la matrice de f dans cette base.
5. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Correction ▼ [002593]

2 Partiel

Exercice 4

Soit A la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$.
3. Donner en le justifiant, mais sans calcul, le polynôme minimal de A.
4. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [002594]

Exercice 5

Soit A la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et déterminer les valeurs propres de A.
2. On note $\lambda_1 > \lambda_2$ les valeurs propres de A, E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés. Déterminer une base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\vec{\varepsilon}_1 \in E_1$, $\vec{\varepsilon}_2 \in E_2$, les deux vecteurs ayant des coordonnées de la forme $(1, y)$.
3. Soit $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on note (α, β) ses coordonnées dans la base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$A^n \vec{x} = \alpha \lambda_1^n \vec{\varepsilon}_1 + \beta \lambda_2^n \vec{\varepsilon}_2$$
4. Notons $A^n \vec{x} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Exprimer a_n et b_n en fonction de α, β, λ_1 et λ_2. En déduire que, si $\alpha \neq 0$, la suite $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers $+\infty$.
5. Expliquer, sans calcul, comment obtenir à partir des questions précédentes une approximation de $\sqrt{2}$ par une suite de nombres rationnels.

Correction ▼ [002595]

Exercice 6

Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On note B la matrice : $B = P(A) \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Démontrer que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A de valeur propre λ, alors $\vec{x}$ est un vecteur propre de B de valeur propre $P(\lambda)$.
2. Le but de cette question est de démontrer que les valeurs propres de B sont toutes de la forme $P(\lambda)$, avec λ valeur propre de A.

   Soit $\mu \in \mathbb{C}$, on décompose le polynôme $P(X) - \mu$ en produit de facteurs de degré 1 :
$$P(X) - \mu = a(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r).$$
   (a) Démontrer que
$$\det(B - \mu I_n) = a^n \det(A - \alpha_1 I_n) \cdots \det(A - \alpha_r I_n).$$
   (b) En déduire que si μ est valeur propre de B, alors il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$.
3. On note S_A l'ensemble des valeurs propres de A, démontrer que
$$S_B = \{P(\lambda) /\ \lambda \in S_A\}.$$

4. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A et soit $Q(X)$ le polynôme :
$$Q(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_r),$$
on note C la matrice $C = Q(A)$.
   (a) Démontrer que $S_C = \{0\}$.
   (b) En déduire que le polynôme caractéristique de C est $(-1)^n X^n$ et que $C^n = 0$.

Correction ▼ [002596]

3 Examen

Exercice 7

Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer $\exp tB$.
6. Donner les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.

Correction ▼ [002597]

Exercice 8

1. On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Donner sans calcul les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres.
2. On cherche à déterminer, s'il en existe, les matrices B telles que $\exp B = A$.
   (a) Montrer que si $A = \exp B$, alors $AB = BA$.
   (b) En déduire que la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de vecteurs propres de B.
   (c) Déterminer toutes les matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $\exp B = A$. Justifier.
3. Soit la matrice C,
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Montrer qu'il n'existe pas de matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $C = \exp D$.

4. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de C.
5. Supposons qu'il existe une matrice $E \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $E^2 = C$. Notons $Q_E(X)$ son polynôme minimal et $Q_C(X)$ le polynôme minimal de C.
   (a) Montrer que $Q_E(X)$ divise $Q_C(X^2)$.
   (b) En déduire que $E^3 = 0$ et que $C^2 = 0$.
   (c) Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas de matrice E telle que $E^2 = C$.
6. Soient F et G des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $F = \exp G$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice H telle que $H^n = F$.

Correction ▼ [002598]

4 Rattrapage

Exercice 9

Soit $m \in \mathbb{R}$, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A et montrer que les valeurs propres de A sont -1 et 1.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice est-elle diagonalisable ? (justifier). Déterminer suivant les valeurs de m le polynôme minimal de A (justifier).

Correction ▼ [002599]

Exercice 10

1. Donner un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$, diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (justifier).
2. Donner un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable, ni sur $\mathbb{C}$, ni sur $\mathbb{R}$ (justifier).

Correction ▼ [002600]

Exercice 11

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Exprimer les solutions du système différentiel $X' = AX$ dans une base de vecteurs propres et tracer ses trajectoires.

Correction ▼ [002601]

Exercice 12

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. Factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.

3. Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
4. Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
5. Calculer $\exp B$.

Correction ▼ [002602]

Correction de **l'exercice 1 ▲**

Soit $a \in \mathbb{R}$, notons A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}.$$

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence suivante, pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$$

1. *Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?*
   Calculons le polynôme caractéristique $P_A(X)$:

   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -a & 1+a-X \end{vmatrix} = -X(1+a-X) + a = X^2 - (1+a)X + a.$$

   La matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si le polynôme P_A admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$. En effet, si P_A admet une racine double r et A diagonalisable, alors l'endomorphisme de matrice A est égal à $r\mathrm{Id}_E$, ce qui n'est pas le cas. Calculons donc le discriminant du polynôme caractéristique.

   $$\Delta = (1+a)^2 - 4a = 1 + a^2 + 2a - 4a = 1 + a^2 - 2a = (1-a)^2.$$

   Ainsi la matrice A est diagonalisable pour tout $a \neq 1$.

2. *Lorsque A est diagonalisable, calculons A^n pour $n \in \mathbb{N}$.*
   Lorsque A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$, ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. Déterminons les matrices P et D. Pour cela calculons les deux valeurs propres de A, ce sont les racines du polynôme P_A, on a donc

   $$\lambda_1 = \frac{1+a+1-a}{2} = 1 \text{ et } \lambda_2 = \frac{1+a-1+a}{2} = a.$$

   Déterminons maintenant des vecteurs propres associés aux valeurs propres 1 et a. On cherche des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ tels que $A\vec{e}_1 = \vec{e}_1$ et $A\vec{e}_2 = a\vec{e}_2$.

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = x$$

   et

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = ax$$

   ainsi on peut choisir $\vec{e}_1 = (1,1)$ et $\vec{e}_2 = (1,a)$. On a alors

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\ P^{-1} = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a - a^n & a^n - 1 \\ a - a^{n+1} & a^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

3. *On suppose A diagonalisable. On note U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, on exprime U_{n+1} en fonction de U_n et de A, puis U_n en fonction de U_0 et de A.*
   On a, par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$, ainsi,

   $$U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AU_n.$$

   On a donc $U_1 = AU_0$, montrons par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^nU_0$. C'est vrai pour $n = 0$, $U_0 = A^0U_0 = IU_0 = U_0$ et pour $n = 1$. Soit n fixé pour lequel on suppose $U_n = A^nU_0$, on a alors $U^{n+1} = AU_n = A.A^nU_0 = A^{n+1}U_0$, le résultat est donc vrai pour tout entier naturel n.

La matrice A étant supposée diagonalisable, on a donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = A^n U_0 = PD^nP^{-1}U_0 = \frac{1}{a-1}\begin{pmatrix} a-a^n & a^n-1 \\ a-a^{n+1} & a^{n+1}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},$$

ainsi on peut exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, le terme général de la suite u_n en fonction des premiers termes u_0 et u_1, on a

$$u_n = \frac{1}{a-1}\left((a-a^n)u_0 + (a^n-1)u_1\right).$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

   Calculons son polynôme caractéristique

   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ -4 & 4-X & 0 \\ -2 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X)(X^2-4X+4) = (2-X)^3.$$

   la matrice A admet une unique valeur propre 2, si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice $2.I_3$, elle serait donc égale à $2I_3$ ce qui n'est pas le cas, elle n'est donc pas diagonalisable.

2. *Calculons $(A-2I_3)^2$, puis $(A-2I_3)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   On a

   $$(A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   ainsi, $(A-2I_3)^0 = I$, $(A-2I_3)^1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et, pour tout $n \geq 2$, on a $(A-2I_3)^n = 0$.

   On en déduit A^n

   Notons $B = A - 2I_3$, on a $A = A - 2I_3 + 2I_3 = B + 2I_3$ avec $B^n = 0$ pour $n \geq 2$. Par ailleurs, les matrices B et $2I_3$ commutent, ainsi

   $$A^n = (B+2I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (2I_3)^{n-k}$$

   où les C_n^k sont les coefficients du binôme de Newton :

   $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

   Or, pour $k \geq 2$, on a $B^k = 0$ d'où pour $n \geq 2$,

   $$\begin{aligned} A^n &= C_n^0 B^0 (2I_3)^n + C_n^1 B^1 (2I_3)^{n-1} \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} nB \\ &= 2^n I_3 + 2^{n-1} n(A-2I_3) \\ &= 2^n(1-n)I_3 + 2^{n-1} nA. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Démontrons que* 1 *et* 2 *sont des valeurs propres de* f.
   Pour cela montrons que $\det(A-I)=0$ et $\det(A-2I)=0$. On a

$$\det(A-I) = \begin{vmatrix} -9 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -9 & -3 & -3 \\ 6 & 2 & 2 \\ 26 & 7 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -9 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 26 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -9 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

   Et

$$\det(A-2I) = \begin{vmatrix} -10 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

   Ainsi, les réels 1 et 2 sont bien valeurs propres de la matrice A.

2. *Déterminons des vecteurs propres de* f *associés aux valeurs propres* 1 *et* 2.
   Soit $\vec{e}=(x,y,z,t)$ tel que $A\vec{e}=\vec{e}$, on résout alors le système

$$\begin{cases} -9x-3y-3z+t=0 \\ 6x+2y+2z-t=0 \\ 26x+7y+9z-2t=0 \\ t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ 26x+7y+9z=0 \\ t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-2y \\ z=5y \\ t=0 \end{cases},$$

   ce système représente une droite vectorielle engendrée, par exemple, par le vecteur $\vec{e}=(-2,1,5,0)$.
   Soit $\vec{u}=(x,y,z,t)$ tel que $A\vec{u}=2\vec{u}$, on résout

$$\begin{cases} -10x-3y-3z+t=0 \\ 6x+y+2z-t=0 \\ 26x+7y+8z-2t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x+3y+3z=0 \\ 6x+y+2z=0 \\ t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y=-2x \\ 3z=-8x \\ t=0 \end{cases},$$

   ce système représente une droite vectorielle engendrée, par exemple, par le vecteur $\vec{u}=(3,-2,-8,0)$.

3. *On considère le vecteur* $\vec{u}$ *précédent et on determine des vecteurs* $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ *tels que*

$$f(\vec{v}) = 2\vec{v}+\vec{u} \text{ et } f(\vec{w}) = 2\vec{w}+\vec{v}.$$

   Pour déterminer le vecteur $\vec{v}=(x,y,z,t)$, on résout le système

$$\begin{cases} -10x-3y-3z+t=3 \\ 6x+y+2z-t=-2 \\ 26x+7y+8z-2t=-8 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x+3y+3z=-3 \\ 6x+y+2z=-2 \\ t=0 \end{cases},$$

   le vecteur $\vec{v}=(0,0,-1,0)$ convient. Pour déterminer le vecteur $\vec{w}=(x,y,z,t)$, on résout le système

$$\begin{cases} -10x-3y-3z+t=0 \\ 6x+y+2z-t=0 \\ 26x+7y+8z-2t=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x+3y+3z=-1 \\ 6x+y+2z=-1 \\ t=-1 \end{cases},$$

   le vecteur $\vec{w}=(1/2,0,-2,-1)$ convient.

4. *Les vecteurs $\vec{e}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ceux définis précédemment. On démontre que $(\vec{e},\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et on donne la matrice de f dans cette base.*

   La matrice M des vecteurs $\vec{e},\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ dans la base cannonique est de rang 4 car son déterminant est non nul, en effet

$$\det M = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 1/2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -8 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

   Compte tenu des définitions des vecteurs $\vec{e},\vec{u},\vec{v},\vec{w}$, la matrice B de l'endomorphisme f dans la base $(\vec{e},\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

   D'après la question précédente, les valeurs propres de f sont 1, valeur propre simple, et 2 de multiplicité 3. Nous avons vu dans le b) que le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension $1 \neq 3$, ainsi, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. *On détermine et on factorise le polynôme caractéristique de A.*

   Soit P_A le polynôme caractéristique de A, on a

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} &= (4-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (4-X)(X^2-6X+8) \\ &= (4-X)(X-4)(X-2) \\ &= (2-X)(4-X)^2 \end{aligned}$$

2. *On démontre que A est diagonalisable et on détermine une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles $A = PDP^{-1}$.*

   Le polynôme P_A admet deux racines, donc la matrice A admet deux valeurs propres, $\lambda_1 = 2$, valeur propre simple et $\lambda_2 = 4$, valeur propre double. Déterminons les sous-espaces propres associés.

   Notons $E_1 = \{\vec{V} = (x,y,z)/A\vec{V} = 2\vec{V}\}$, on résout alors le système

$$\begin{cases} 3x - z = 2x \\ 2x + 4y + 2z = 2y \\ -x + 3z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} z = x \\ y = -2x \end{cases}$$

   Le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 2 est une droite vectorielle, dont un vecteur directeur est $\vec{e}_1 = (1,-2,1)$.

   Notons $E_2 = \{\vec{V} = (x,y,z)/A\vec{V} = 4\vec{V}\}$, on résout alors le système

$$\begin{cases} 3x - z = 4x \\ 2x + 4y + 2z = 4y \\ -x + 3z = 4z \end{cases} \iff z = -x$$

Le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 4 est le plan vectoriel, d'équation
$z = -x$ dont une base est donnée, par exemple par les vecteurs $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ et
$\vec{e}_3 = (1,0,-1)$. Remarquons que l'on pouvait lire directement sur la matrice A, le fait que le vecteur $\vec{e}_2$ est vecteur propre associé à la valeur propre 4.

Les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, par conséquent, l'espace $\mathbb{R}^3$ admet une base de vecteurs propres et la matrice A est diagonalisable.

Notons P la matrice de passage, on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et, si D est la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

on a la relation

$$A = PDP^{-1}.$$

3. *On donne en le justifiant, mais sans calculs, le polynôme minimal de A.*
La matrice A est diagonalisable, donc son polynôme minimal n'a que des racines simples, par ailleurs les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres de A et le polynôme minimal est un polynôme unitaire qui divise le polynôme caractéristique. On a donc

$$Q_A(X) = (X-2)(X-4).$$

4. *On calcule A^n pour $n \in \mathbb{N}$.*
On a vu, dans la question 2), que $A = PDP^{-1}$, on a donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P^{-1}D^nP$, or

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix},$$

il nous reste à calculer P^{-1}. On sait que $P^{-1} = \frac{1}{\det P}{}^t\tilde{P}$, d'où

$$\det P = -2,\ \tilde{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} A^n &= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n+4^n & 0 & 2^n-4^n \\ 2(4^n-2^n) & 2.4^n & 2(4^n-2^n) \\ 2^n-4^n & 0 & 2^n+4^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Correction de **l'exercice 5 ▲**

Soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. *On calcule le polynôme caractéristique et on détermine les valeurs propres de A.*
   Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est égal à

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 2 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 2 = X^2 - 2X - 1.$$

   Calculons ses racines, le discriminant réduit de ce polynôme du second degré est égal à $\Delta' = (-1)^2 - (-1) = 2$, les racines sont donc

$$\lambda_1 = 1+\sqrt{2} \text{ et } \lambda_2 = 1-\sqrt{2},$$

   ce sont les valeurs propres de A.

2. On note $\lambda_1 > \lambda_2$ les valeurs propres de A, E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés. *On détermine une base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\vec{\varepsilon}_1 \in E_1$, $\vec{\varepsilon}_2 \in E_2$, les deux vecteurs ayant des coordonnées de la forme $(1, y)$.*
   On cherche $\vec{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ tel que $A.\vec{\varepsilon}_1 = (1+\sqrt{2})\vec{\varepsilon}_1$, on calcule donc y tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = (1+\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

   ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 1+y = 1+\sqrt{2} \\ 2+y = (1+\sqrt{2})y \end{cases}$$

   d'où $y = \sqrt{2}$ et $\vec{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
   On cherche $\vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ tel que $A.\vec{\varepsilon}_2 = (1-\sqrt{2})\vec{\varepsilon}_2$, on calcule donc y tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = (1-\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

   ce qui équivaut à

$$\begin{cases} 1+y = 1-\sqrt{2} \\ 2+y = (1-\sqrt{2})y \end{cases}$$

   d'où $y = -\sqrt{2}$ et $\vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

3. Soit $\vec{x}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on note (α, β) ses coordonnées dans la base $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$.*On démontre que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$A^n\vec{x} = \alpha\lambda_1^n\vec{\varepsilon}_1 + \beta\lambda_2^n\vec{\varepsilon}_2.$$

   On a $\vec{x} = \alpha\vec{\varepsilon}_1 + \beta\vec{\varepsilon}_2$, d'où, par linéarité $A\vec{x} = \alpha A\vec{\varepsilon}_1 + \beta A\vec{\varepsilon}_2$ et $A^n\vec{x} = \alpha A^n\vec{\varepsilon}_1 + \beta A^n\vec{\varepsilon}_2$. Or, on montre, par récurrence sur n, que $A^n\vec{\varepsilon}_1 = \lambda_1^n\vec{\varepsilon}_1$ et de même $A^n\vec{\varepsilon}_2 = \lambda_2^n\vec{\varepsilon}_2$. Pour $n = 1$, c'est la définition des vecteurs propres. Soit n fixé, tel que $A^n\vec{\varepsilon}_1 = \lambda_1^n\vec{\varepsilon}_1$, on a alors $A^{n+1}\vec{\varepsilon}_1 = A.A^n\vec{\varepsilon}_1 = \lambda_1^n A\vec{\varepsilon}_1 = \lambda_1^{n+1}\vec{\varepsilon}_1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n\vec{\varepsilon}_1 = \lambda_1^n\vec{\varepsilon}_1$, et, de même, $A^n\vec{\varepsilon}_2 = \lambda_2^n\vec{\varepsilon}_2$. D'où le résultat.

4. Notons $A^n\vec{x} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. *On exprime a_n et b_n en fonction de α, β, λ_1 et λ_2 et on en déduit que, si $\alpha \neq 0$, la suite $\frac{b_n}{a_n}$ tend vers $\sqrt{2}$ quand n tend vers $+\infty$.*
   D'après la question précédente et les vecteurs $\vec{\varepsilon}_1$ et $\vec{\varepsilon}_2$ obtenus en 2) on a

$$A^n\vec{x} = \alpha\lambda_1^n \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \beta\lambda_2^n \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

d'où
$$\begin{cases} a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n \\ b_n = \sqrt{2}(\alpha\lambda_1^n - \beta\lambda_2^n) \end{cases}$$
On suppose $\alpha \neq 0$, pour n assez grand, on a
$$\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{2}\frac{\alpha\lambda_1^n - \beta\lambda_2^n}{\alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n},$$
or,
$$|\lambda_1| = |1+\sqrt{2}| > 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \lambda_1^n = +\infty,$$
et
$$|\lambda_2| = |1-\sqrt{2}| < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \lambda_2^n = 0.$$
D'où l'équivalence
$$\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{2}\frac{\alpha\lambda_1^n - \beta\lambda_2^n}{\alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n} \sim \sqrt{2}\frac{\alpha\lambda_1^n}{\alpha\lambda_1^n} = \sqrt{2}.$$
On a donc bien
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \sqrt{2}.$$

5. *On explique, sans calcul, comment obtenir, à partir des questions précédentes, une approximation de $\sqrt{2}$ par une suite de nombres rationnels.*
La matrice A est à coefficients entiers, aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n est à coefficients entiers. Si l'on choisit un vecteur $\vec{x}$ à coordonnées entières dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors les coordonnées a_n et b_n du vecteur $A^n\vec{x}$ sont des entiers et elles nous fournissent une suite $\frac{b_n}{a_n}$ de nombres rationnels qui tend vers $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On note B la matrice : $B = P(A) \in M_n(\mathbb{C})$.

1. *On démontre que si $\vec{x}$ est un vecteur propre de A de valeur propre λ, alors $\vec{x}$ est un vecteur propre de B de valeur propre $P(\lambda)$.*
Soit $\vec{x} \neq 0$ tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, notons $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, on a
$$P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d,$$
où I_n désigne la matrice unité.
Or, pour $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k\vec{x} = \lambda^k\vec{x}$, d'où
$$B\vec{x} = P(A)\vec{x} = \sum_{k=0}^d a_k A^k\vec{x} = \left(\sum_{k=0}^d a_k\lambda^k\right)\vec{x} = P(\lambda)\vec{x},$$
ce qui prouve que $\vec{x}$ est un vecteur propre de la matrice $B = P(A)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.
2. Le but de cette question est de démontrer que les valeurs propres de B sont toutes de la forme $P(\lambda)$, avec λ valeur propre de A.
Soit $\mu \in \mathbb{C}$, on décompose le polynôme $P(X) - \mu$ en produit de facteurs de degré 1 :
$$P(X) - \mu = a(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_r).$$

(a) *On démontre que* $\det(B-\mu I_n) = a^n \det(A-\alpha_1 I_n)\cdots\det(A-\alpha_r I_n)$.
Compte tenu de la décomposition du polynôme $P(X)-\mu$, on a

$$P(A)-\mu I_n = aI_n(A-\alpha_1 I_n)\cdots(A-\alpha_r I_n)$$

d'où

$$\det(B-\mu I_n) = a^n \det(A-\alpha_1 I_n)\cdots\det(A-\alpha_r I_n)$$

car le déterminant est une forme multilinéaire (d'où le a^n) et le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit de leurs déterminants.

(b) *On en déduit que si μ est valeur propre de B, alors il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$.*
Si μ est une valeur propre de B, alors, par définition, $\det(B-\mu I_n) = 0$, ainsi, compte tenu de la question précédente, il existe un α_i, $1 \leq i \leq r$, tel que $\det(A-\alpha_i I_n) = 0$, c'est-à-dire que l'un des α_i, $1 \leq i \leq r$, est valeur propre de A. Or, pour $1 \leq i \leq r$, $P(\alpha_i)-\mu = 0$ donc si μ est une valeur propre de B, on a $\mu = P(\alpha_i)$ où α_i est une valeur propre de A.

3. On note S_A l'ensemble des valeurs propres de A. *On démontre que*

$$S_B = \{P(\lambda)/\ \lambda \in S_A\}.$$

Soit λ une valeur propre de A, on a démontré en 1) que $P(\lambda)$ est une valeur propre de B, ainsi $\{P(\lambda)/\ \lambda \in S_A\} \subset S_B$. Réciproquement, si μ est une valeur propre de B alors, d'après 2), il existe une valeur propre λ de A telle que $\mu = P(\lambda)$, ainsi on a $S_B \subset \{P(\lambda)/\ \lambda \in S_A\}$, d'où l'égalité des deux ensembles.

4. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ les valeurs propres de A et soit $Q(X)$ le polynôme

$$Q(X) = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_r),$$

on note C la matrice $C = Q(A)$.

(a) *On démontre que* $S_C = \{0\}$.
D'après la question précédente, on a $S_C = \{Q(\lambda)/\ \lambda \in S_A\}$. Or, par définition du polynôme $Q(X)$, on a $Q(\lambda) = 0$ pour toute valeur propre λ de A, ainsi, $S_C = \{0\}$.

(b) *On en déduit que le polynôme caractéristique de C est $(-1)^n X^n$ et que $C^n = 0$.*
Les valeurs propres de C sont les racines de son polynôme caractéristique, or C admet une unique valeur propre : 0, ainsi $P_C(X) = (-1)^n X^n$. Par ailleurs, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_C(C) = 0$, ainsi $(-1)^n C^n = 0$, donc $C^n = 0$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. *Factorisons le polynôme caractéristique de A.*
Le polynôme caractéristique de A est le polynôme

$$\begin{aligned} P_A(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 0 & -1 \\ -1 & 1-X & 1 \\ 0 & -1 & -X \end{vmatrix} &= (2-X)\begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ -1 & -X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1-X \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(X^2-X+1)-1 \\ &= -X^3+3X^2-3X+1 = (1-X)^3 \end{aligned}$$

2. *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.*

   La matrice A admet une unique valeur propre $\lambda = 1$, comme $A \neq I$, elle n'est pas diagonalisable. Son sous-espace caractéristique est égal à $\ker(A - I_3)^3 = \mathbb{R}^3$. En effet, d'après le théorème de Hamilton-Cayley, on a $P_A(A) = 0$, c'est-à-dire $(A - I_3)^3 = 0$. Son sous-espace propre est égal à $\ker(A - I_3)$.

   $$\ker(A - I_3) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 / \, A\vec{u} = \vec{u}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \, x = z = -y\}.$$

   C'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}_1 = (1,-1,1)$.

3. *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est*

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

   Le vecteur $\vec{u}_1$ vérifie $A\vec{u}_1 = u_1$, on cherche un vecteur $\vec{u}_2 = (x,y,z)$ tel que $A\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

   $$\begin{aligned} A\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 &\iff \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ 1+z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x+y+z \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ 1+z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   On obtient donc $z - x = z + y = -1$, le vecteur $\vec{u}_2 = (1,-1,0)$ convient. On cherche alors un vecteur $\vec{u}_3 = (x,y,z)$ tel que $A\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

   $$A\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \iff \begin{pmatrix} 2x - z \\ -x+y+z \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ z \end{pmatrix}$$

   on obtient alors $x + y = x - z = 1$. Le vecteur $\vec{u}_3 = (1,0,0)$ convient. Ainsi, dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la matrice de f est égale à B. La matrice P cherchée est

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   on a bien $A = PBP^{-1}$ et $B = P^{-1}AP$.

4. *Ecrivons la décomposition de Dunford de B.*

   On a

   $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3 + N$$

   Si $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$. La matrice I_3 est diagonale, la matrice N est nilpotente, les matrices I_3 et N commutent, c'est donc bien la décomposition de Dunford de B.

5. *Pour $t \in \mathbb{R}$, calculons* $\exp tB$.

   On a, pour $t \in \mathbb{R}$, $tB = tI_3 + tN$, ainsi $\exp tB = \exp(tI_3 + tN) = (\exp tI_3)(\exp tN)$ car les matrices tI_3 et tN commutent. Par ailleurs, $\exp tI_3 = e^t I_3$ et $\exp tN = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2$. On a donc

   $$\exp tB = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. *Donnons les solutions des systèmes différentiels $Y' = BY$ et $X' = AX$.*
   Intégrons le système $Y' = BY$, sa solution générale s'écrit
   $$Y(t) = (\exp tB)Y_0,$$
   où Y_0 est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
   Intégrons alors le système $X' = AX$. Remarquons que si PY est solution de $X' = AX$, on a
   $$(PY)' = A(PY) \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = BY$$
   ainsi Y est solution de $Y' = BY$, la solution générale du système $X' = AX$ sécrit donc
   $$\begin{aligned} X(t) = P(\exp tB)Y_0 &= e^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0 \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1 & t+1 & t^2/2+t+1 \\ -1 & -t-1 & -t^2/2-t \\ 1 & t & t^2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   où $Y_0 = (a,b,c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Ou encore
   $$\begin{cases} x(t) = e^t(a + b(t+1) + c(t^2/2+t+1)) \\ y(t) = e^t(-a - b(t+1) - c(t^2/2+t)) \\ z(t) = e^t(a + bt + ct^2/2) \end{cases}$$
   ou encore
   $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \\ e^t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} e^t(t+1) \\ -e^t(t+1) \\ te^t \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} e^t(t^2/2+t+1) \\ -e^t(t^2/2+t) \\ e^t t^2/2 \end{pmatrix}$$
   avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit A la matrice
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Donnons sans calcul les valeurs propres de A et une base de vecteurs propres.
   La matrice A est diagonale dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $A\vec{e}_1 = \vec{e}_1$, $A\vec{e}_2 = 2\vec{e}_2$ et $A\vec{e}_3 = 3\vec{e}_3$. Les valeurs propres de A sont les réels 1, 2 et 3 et les sous-espaces propres associés sont les droites vectorielles engendrées respectivement par $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.
2. On cherche à déterminer, s'il en existe, les matrices B telles que $\exp B = A$.
   (a) *Montrons que si $A = \exp B$, alors $AB = BA$.*
   On suppose qu'il existe B telle que $A = \exp B$. On a alors, par définition,
   $$A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} B^k, \text{ d'où } AB = BA = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} B^{k+1}$$
   (b) *On en déduit que la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de vecteurs propres de B.*
   On a $(BA)\vec{e}_1 = B(A\vec{e}_1) = B\vec{e}_1$, mais $BA = AB$, on a donc $B\vec{e}_1 = (AB)\vec{e}_1 = A(B\vec{e}_1)$. Ce qui prouve que $B\vec{e}_1$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1, il est donc colinéaire à $\vec{e}_1$, ainsi, $\vec{e}_1$ est bien un vecteur propre de B. De même, $BA\vec{e}_2 = 2B\vec{e}_2 = AB\vec{e}_2$ donc $B\vec{e}_2$ est colinéaire à $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_2$ est un vecteur propre de B. Et aussi, $BA\vec{e}_3 = 3B\vec{e}_3 = AB\vec{e}_3$ d'où $B\vec{e}_3$ colinéaire à $\vec{e}_3$ et $\vec{e}_3$ vecteur propre de B.

(c) *Déterminons les matrices $B \in M_3(\mathbb{R})$ telles que* $\exp B = A$.

Les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ étant vecteurs propres de B, la matrice B est diagonale dans la base canonique, il existe donc des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \text{ ainsi } \exp B = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ce qui implique $e^{\lambda_1} = 1$, $e^{\lambda_2} = 2$ et $e^{\lambda_3} = 3$ et donc $\lambda_1 = \ln 1 = 0$, $\lambda_2 = \ln 2$ et $\lambda_3 = \ln 3$ d'où l'existence d'une unique matrice B telle que $\exp B = A$, c'est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ln 2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln 3 \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice C,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons qu'il n'existe pas de matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $C = \exp D$.

Quelque soit la matrice D, la matrice $\exp D$ est inversible d'inverse $\exp(-D)$, or, il est clair que la matrice C n'est pas inversible, son déterminant est nul, ainsi, il n'existe pas de matrice D telle que $C = \exp D$.

4. *Calculons le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de C.*

Soit $P_C(X)$ le polynôme caractéristique de C, on a

$$P_C(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 0 \\ 0 & -X & 1 \\ 0 & 0 & -X \end{vmatrix} = -X \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 0 & -X \end{vmatrix} = -X^3.$$

Le polynôme minimal Q_C de C est unitaire, divise son polynôme caractéristique P_C et s'annule en C, or $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$, mais $C^3 = 0$, d'où $Q_C(X) = X^3$.

5. Supposons qu'il existe une matrice $E \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $E^2 = C$. Notons $Q_E(X)$ son polynôme minimal et $Q_C(X)$ le polynôme minimal de C.

(a) *Montrons que $Q_E(X)$ divise $Q_C(X^2)$.*

On a $Q_C(C) = Q_C(E^2) = 0$, ainsi le polynôme $S(X) = Q_C(X^2)$ s'annule en E, ce qui prouve que $Q_E(X)$, polynôme minimal de E, divise $Q_C(X^2)$.

(b) *On en déduit que $E^3 = 0$ et que $C^2 = 0$.*

Le polynôme minimal de E divise $Q_C(X^2) = -X^6$, or son degré est inférieur ou égal à 3, par ailleurs on suppose $E^2 = C$ donc $E^2 \neq 0$ ainsi, on a bien $Q_E(X) = X^3$ et $E^3 = 0$, or, $E^3 = 0$ implique $E^4 = 0$ et, comme $E^4 = C^2$, on a $C^2 = 0$.

(c) *On déduit de ce qui précède qu'il n'existe pas de matrice E telle que $E^2 = C$.*

Si une telle matrice existe, alors on a vu qu'elle vérifie $E^3 = 0$, ainsi on a $E^4 = 0$, or $E^4 = C^2 \neq 0$, d'où la conclusion.

6. Soient F et G des matrices de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $F = \exp G$. *Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice H telle que $H^n = F$.*

Soit $F = \exp G$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H = \exp \frac{1}{n} G$, on a

$$H^n = \left(\exp \frac{1}{n} G\right)^n = \exp \frac{n}{n} G = \exp G = F.$$

Correction de **l'exercice 9 ▲**

Soit $m \in \mathbb{R}$, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & 1+m & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Factorisons le polynôme caractéristique de A et montrons que les valeurs propres de A sont* -1 *et* 1. (1,5 points)

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ -m & -m-X & -1 \\ m & m-1 & -X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+m-X & 1+m & 1 \\ -m & -m-X & -1 \\ 0 & -X-1 & -X-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+m-X & m & 1 \\ -m & 1-m-X & -1 \\ 0 & 0 & -X-1 \end{vmatrix} \\ &= (-X-1) \begin{vmatrix} 1+m-X & m \\ -m & 1-m-X \end{vmatrix} \\ &= -(1+X)\left((1-X)^2 - m^2 + m^2\right) \\ &= -(1+X)(1-X)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de la matrice A sont -1, valeur propre simple, et 1, valeur propre double.

2. *Pour quelles valeurs de m la matrice est-elle diagonalisable ?* (1,5 points)

La matrice A est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 2. Déterminons donc ce sous-espace propre $E_1 = \{\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = \vec{u}\}$.

$$\begin{aligned} A\vec{u} = \vec{u} &\iff \begin{cases} mx + (1+m)y + z = 0 \\ -mx - (1+m)y - z = 0 \\ mx + (m-1)y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} mx + (1+m)y + z = 0 \\ mx + (m-1)y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ 2mx + 2my = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y + z = 0 \\ m(x+y) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'espace E_1 est de dimension 2 si et seulement si $m = 0$, c'est alors le plan d'équation $y + z = 0$, sinon c'est une droite, intersection des deux plans $y + z = 0$ et $x + y = 0$.

Déterminons suivant les valeurs de m le polynôme minimal de A. (1 point)

Si $m = 0$, la matrice A est diagonalisable, son polynôme minimal n'a que des racines simples, il est égal à

$$Q(X) = (X-1)(X+1).$$

Si $m \neq 0$, la matrice A n'est pas diagonalisable, son polynôme minimal ne peut pas avoir uniquement des racines simples, il est donc égal à

$$Q(X) = (X-1)^2(X+1).$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. *Donnons un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$, diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.* (2 points)

   Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est égal à
   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1.$$
   Le polynôme caractéristique de A admet deux racines complexes conjuguées distinctes i et $-i$ elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}$.

2. *Donnons un exemple de matrice dans $M_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable, ni sur $\mathbb{C}$, ni sur $\mathbb{R}$.* (2 points)

   Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est égal à
   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2.$$
   Le polynôme caractéristique de A admet une racine double 1, la matrice A admet l'unique valeur propre 1, or, elle n'est pas égale à l'identité, par conséquent, elle n'est diagonalisable, ni sur $\mathbb{C}$, ni sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

Soit A la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Diagonalisons la matrice A.* (2 points)

   Son polynôme caractéristique est égal à
   $$P_A(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 - 1 = (X-1)(X+1).$$
   La matrice A admet deux valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

   Déterminons une base de vecteurs propres de A.

   Soit $\vec{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$A\vec{u} = \vec{u} \iff x = y \text{ et } A\vec{u} = -\vec{u} \iff x = -y.$$
   Notons $\vec{u}_1 = (1,1)$ et $\vec{u}_2 = (-1,1)$, le vecteur $\vec{u}_1$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et le vecteur $\vec{u}_2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -1, ils sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, on a $A = PDP^{-1}$, où
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. *Exprimons les solutions du système différentiel $X' = AX$ dans une base de vecteurs propres et traçons ses trajectoires.* (3 points)

   Soit Y tel que $PY = X$, on a alors
   $$X' = AX \iff PY' = APY \iff Y' = P^{-1}APY \iff Y' = DY.$$
   Les solutions du système différentiel $X' = AX$ dans la base de vecteurs propres $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ sont les solutions du système $Y' = DY$. Si $Y = (x,y)$, on a $x'(t) = x(t)$ et $y'(t) = -y(t)$, ainsi, les solutions du système sont $x(t) = ae^t$ et $y(t) = be^{-t}$ où a et b sont des constantes réelles arbitraires. Les trajectoires, exprimées dans la base de vecteurs propres $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, sont donc les courbes d'équation $y = c/x$ avec $c \in \mathbb{R}$, ce sont des branches d'hyperboles.

Correction de **l'exercice 12 ▲**

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

1. *Factorisons le polynôme caractéristique de A.* (1 point)
   On a
   $$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 4 \\ -1 & 3-X & -1 \\ -2 & -1 & -3-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 1+X & -1 & -3-X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1-X & 2 & 4 \\ 0 & 3-X & -1 \\ 0 & 1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (-1-X)(X^2-4X+4) = -(X+1)(X-2)^2 \end{aligned}$$
   Les valeurs propres de la matrice A sont $\lambda_1 = -1$, valeur propre simple et $\lambda_2 = 2$, valeur propre double.
2. *Déterminons les sous-espaces propres et caractéristiques de A.* (2 points)
   Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est le sous-espace vectoriel E_{-1} défini par
   $$E_{-1} = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = -u\}.$$
   Soit $\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
   $$\vec{u} \in E_{-1} \iff \begin{cases} 4x+2y+4z = 0 \\ -x+4y-z = 0 \\ -2x-y-2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+y+2z = 0 \\ x-4y+z = 0 \end{cases}$$
   L'espace E_{-1} est une droite vectorielle dont un vecteur directeur est donné par
   $$\vec{u}_1 = (1,0,-1).$$
   Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est le sous-espace vectoriel E_2 défini par
   $$E_2 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = 2u\}.$$
   Soit $\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,
   $$\vec{u} \in E_2 \iff \begin{cases} x+2y+4z = 0 \\ -x+y-z = 0 \\ -2x-y-5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+4z = 0 \\ x-y+z = 0 \end{cases}$$
   L'espace E_2 est une droite vectorielle dont un vecteur directeur est donné par
   $$\vec{u}_2 = (2,1,-1).$$
   Le sous-espace E_2 étant de dimension 1, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Le sous-espace caractéristique N_{-1} associé à la valeur propre -1 est égal au sous-espace propre E_{-1}. Le sous-espace caractéristique N_2 associé à la valeur propre 2 est égal à

$$N_2 = \ker(A-2I)^2.$$

Déterminons-le

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

D'où $\ker(A-2I)^2 = \{(x,y,z)\mathbb{R}^3,\ x+2z=0\}$, c'est le plan vectoriel d'équation $x+2z=0$.

3. *Démontrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est* (1 point)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, vecteurs propres associés aux valeurs propres -1 et 2 conviennent pour les deux premiers vecteurs de la base recherchée, on va alors chercher un vecteur $\vec{u}_3 \in \ker(A-2I)^2$ tel que $A\vec{u}_3 = \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$, notons $\vec{u}_3 = (-2z, y, z)$, on détermine y et z tels que

$$\begin{pmatrix} 2y-2z \\ 3y+z \\ -y+z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4z \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

on obtient $y+z=1$, le vecteur $\vec{u}_3 = (0,1,0)$ convient.

Trouvons une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. (1 point)

La matrice de passage P qui exprime la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ répond à la question,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. *Ecrivons la décomposition de Dunford de B.* (1 point)

On a

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N},$$

la matrice D est diagonale, la matrice N est nilpotente, $N^2 = 0$, et $ND = DN$, c'est donc bien la décomposition de Dunford de la matrice B.

5. *Calculons* $\exp B$. (1 point)

Compte tenu de la question précédente, on a $B = N + D$, avec $DN = ND$, ainsi $\exp B = \exp D \exp N$, or

$$\exp D = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix} \text{ et } \exp N = I + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\exp B = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$
