CENTRE NATIONAL D'ORIENTATION ET DE PREPARATION AUX CONCOURS D'ENTREE DANS LES GRANDES ECOLES ET FACULTES DU CAMEROUN

Préparation au Concours d'Entrée en Troisième Année de l'ENSP et FGI

Fiche de Travaux Dirigés

probabilité

Avec Intelligentsia Corporation, Il suffit d'y croire !!!

698 222 277 / 671 839 797
fb : Intelligentsia Corporation
email : contact@intelligentsia-corporation.com

MARS 2018

" Vous n’êtes pas un passager sur le train de la vie, vous êtes

Instructions :

Il est recommandé à chaque étudiant de traiter les exercices de ce recueil (du moins ceux concernés par la séance) avant

Dénombrements

EXERCICE 1:

1. En utilisant la fonction $x \to (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k ; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k ; \sum_{k=0}^{n} k C_n^k ; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k .$$

2. Démontrer que :

- $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair
- $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7

EXERCICE 2:

Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y-a-t-il de femmes célibataires non syndiquées ?

EXERCICE 3:

Fogui et Michelle font partie d'une équipe de 8 joueurs (6 garçons et 2 filles). On décide de fabriquer un comité de 3 joueurs.

1. Combien y-a-t-il de comités possibles ?
2. Combien y-a-t-il de comités contenant exactement 2 garçons et 1 fille ?
3. Combien y-a-t-il de comités contenant au moins deux garçons ?
4. On veut que Fogui et Michelle soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?
5. On ne veut pas que Fogui et Michelle soient ensemble dans le comité. Combien y-a-t-il de comités possibles ?

EXERCICE 4:

Dans cet exercice, on attend des réponses qui ne sont pas des valeurs numériques, mais des expressions en termes de factorielles, sous la forme la plus simple possible.

1. Combien y-a-t-il de façons de répartir les 52 cartes d'un jeu entre 4 joueurs N, S, E, O, chacun possédant 13 cartes.
2. Parmi ces façons, combien y-en-a-t-il qui sont telles que chaque joueur n'a qu'une seule couleur (par exemple, N a les 13 piques, S a les 13 coeurs,...)?
3. Combien y-a-t-il de façons que deux joueurs quelconques aient chacun une seule couleur?
4. Combien y-a-t-il de façons que deux partenaires, c'est-à-dire (N,S) ou (E,O), aient chacun une seule couleur, les deux autres partenaires ayant des cartes quelconques.

EXERCICE 5:

On tire au hasard deux cartes dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de tirages avec deux cartes de couleur pique ?
2. Combien y a-t-il de tirages avec deux cartes de couleurs différentes(pique, cœur, carreau, trèfle) ?
3. Combien y a-t-il de tirages où la première carte soit un pique et la seconde un cœur ?
4. Combien y a-t-il de tirages avec un pique et un cœur ?
5. Combien y a-t-il de tirages avec un pique et un as ?

ProbabilitéS

EXERCICE 6:

Le joueur A possède deux dés à six faces, et le joueur B possède un dé à douze faces. Le joueur qui fait le plus grand score remporte la mise (match nul si égalité). Calculer la probabilité que A gagne et la probabilité d'avoir un match nul. Le jeu est-il équilibré ?

EXERCICE 7:

On considère une classe de n élèves. On suppose qu'il n'y a pas d'année bissextile.

1. Quelle est la probabilité, p_n, pour que deux élèves au moins aient la même date d'anniversaire ? Trouver le plus petit entier n_1 tel que $p_{n_1} \geq 0{,}5$. Calculer p_{366}.
2. Quelle est la probabilité, q_n, pour qu'au moins un élève ait la même date d'anniversaire que Mr MOFFO ? Calculer q_{n_1} et q_{366}.

EXERCICE 8:

Esdras et Bienvenue ont l'habitude de se retrouver chaque semaine autour d'un verre et de décider à pile ou face qui règle l'addition. Esdras se lamente d'avoir payé les quatre dernières additions et Bienvenue, pour faire plaisir à son ami, propose de modifier exceptionnellement la règle : "Esdras, tu vas lancer la pièce cinq fois et tu ne paieras que si on observe une suite d'au moins trois piles consécutifs ou d'au moins trois faces consécutives". Esdras se félicite d'avoir un si bon ami. A tort ou à raison ?

EXERCICE 9:

Une urne contient r boules rouges et b boules bleues.

1. On tire avec remise $p \in \mathbb{N}^*$ boules. Calculer la probabilité pour qu'il y ait p_r

boules rouges et p_b boules bleues ($p_r + p_b = p$).

2. On tire sans remise $p \leq r + b$ boules. Calculer la probabilité pour qu'il y ait p_r boules rouges et p_b boules bleues ($p_r \leq r$, $p_b \leq b$ et $p_r + p_b = p$).

Calculer, dans les deux cas, les probabilités limites quand $r \rightarrow$, $b \rightarrow$ et $\frac{r}{b+r} \rightarrow \quad \in \ ]0,1[$.

EXERCICE 10:

Afin de savoir si les élèves travaillent indépendamment ou en groupe, un enseignant donne m exercices à une classe de n élèves et demande à chaque élève de choisir k exercices parmi les m.

1. Calculer la probabilité pour que les élèves aient tous choisi une combinaison fixée de k exercices.
2. Calculer la probabilité pour que tous les élèves aient choisi les k mêmes exercices.
3. Calculer la probabilité pour qu'une combinaison fixée à l'avance, n'ait pas été choisie.
4. Calculer la probabilité pour qu'il existe au moins une combinaison de k exercices qui n'ait pas été choisie.

A.N. Donner les résultats pour $n = 20$, $m = 4$, $k = 2$. Comparer les valeurs pour les questions 1 et 2 puis 3 et 4. Que peut dire l'enseignant si tous les élèves ont choisi la même combinaison de 2 exercices ?

EXERCICE 11:

On suppose que l'on a autant de chance d'avoir une fille ou un garçon à la naissance. Votre voisin de palier vous dit qu'il a deux enfants.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un garçon ?
2. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant que l'ainée est une fille ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon, sachant qu'il a au moins une fille ?
4. Vous téléphonez à votre voisin. Une fille décroche le téléphone. Vous savez que dans les familles avec un garçon et une fille, la fille décroche le téléphone avec probabilité p, quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?
5. Vous sonnez à la porte de votre voisin. Une fille ouvre la porte. Sachant que l'aîné(e) ouvre la porte avec probabilité p, et ce indépendamment de la répartition de la famille, quelle est la probabilité que votre voisin ait un garçon ?

EXERCICE 12:

Les laboratoires pharmaceutiques indiquent pour chaque test sa sensibilité α, qui est la probabilité que le test soit positif si le sujet est malade, et sa spécificité β, qui est la probabilité que le test soit négatif si le sujet est sain. Sachant qu'en moyenne il y a un malade sur 1000 personnes, calculer la probabilité pour que vous soyez un sujet sain alors que votre test est positif, avec $\alpha = 98\%$ et $\beta = 97\%$. Calculer la probabilité d'être malade alors que le test est négatif. Concluez.

EXERCICE 13:

Le gène qui détermine la couleur bleue des yeux est récessif. Pour avoir les yeux bleus, il faut donc avoir le génotype bb. Les génotypes mm et bm donnent des yeux marron. On suppose que les parents transmettent indifféremment un de leurs gènes à leurs enfants. La sœur et la femme d'Adrien ont les yeux bleus, mais ses parents ont les yeux marrons.

1. Quelle est la probabilité pour qu'Adrien ait les yeux bleus ?
2. Quelle est la probabilité que le premier enfant d'Adrien ait les yeux bleus sachant qu'Adrien a les yeux marrons ?
3. Quelle est la probabilité pour que le deuxième enfant d'Adrien ait les yeux bleus sachant que le premier a les yeux marrons ?

Comment expliquez-vous la différence des résultats entre les deux dernières questions ?

EXERCICE 14:

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de clés USB. 5% des boites sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boites abîmées contiennent au moins une clé défectueuse.
- 98% des boites non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : « la boite est abîmée » et par D l'événement « la boite achetée contient au moins une clé défectueuse ».

Donner les probabilités de $P(A)$, $P(A)$, $P(D|A)$, $P(D|A)$, $P(D|A)$ et $P(D|A)$. En déduire la probabilité de D.

Le client constate qu'un des clés achetées est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abîmée ?

EXERCICE 15:

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2. Le pourcentage de pièces défectueuses est 6% pour l'atelier 1 et 9% pour l'atelier 2. On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée. Déterminer

1. La probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 ;
2. La probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 et est défectueuse ;

3. La probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse.

EXERCICE 16:

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité 1/3. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième lecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième lecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

EXERCICE 17:

Un gène présent dans une population est formé de 2 allèles A et a. Un individu peut donc avoir l'un des trois génotypes suivants : AA, Aa, aa. Un enfant lors de la conception hérite d'un allèle de chacun de ses parents, chacun d'eux étant choisi au hasard. Ainsi si le père est du type AA et la mère de type Aa, les enfants peuvent être du type AA ou Aa. On considère une population (génération 0) et on note p_0, q_0 et r_0 les proportions respectives de chacun des phénotypes AA, Aa et aa. On admet que les couples se forment au hasard indépendamment des génotypes considérés.

1. Donner, en fonction de p_0, q_0 et r_0 la probabilité p_1 qu'un enfant de la génération 1 ait un génotype AA.
2. Donner de même r_1, puis q_1.
3. Démontrer que p_1, q_1 et r_1 s'expriment uniquement en fonction de $\alpha = p_0 - r_0$. Que peut-on dire de $p_1 - r_1$.

Donner les probabilités p_2,q_2 et r_2 qu'un enfant de la génération 2 ait pour génotype respectivement AA, Aa et aa. Que peut-on conclure ?

EXERCICE 18:

Un joueur décide de jouer aux machines à sous. Il va jouer sur deux machines A et B qui sont réglées de la façon suivante :

- La probabilité de gagner sur la machine A est de 15 ;
- La probabilité de gagner sur la machine B est de 110.

Comme le joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents, mais ne sait pas laquelle est la plus favorable, il décide d'adopter la stratégie suivante :

- Il commence par choisir une machine au hasard ;
- Après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre, il rejoue sur la même

machine s'il vient de gagner.

On définit pour tout $k \geq 1$ les événements suivants :

- G_k : "Le joueur gagne la k-ième partie".
- A_k : "La k-ième partie se déroule sur la machine A".

1. Déterminer la probabilité de gagner la première partie.
2. Déterminer la probabilité de gagner la deuxième partie.
3. Sachant que la deuxième partie a été gagnée, quelle est la probabilité que la première partie ait eu lieu sur la machine A ?
4. Soit $k \geq 1$.
   a) Exprimer $P(G_k)$ en fonction de $P(A_k)$.
   b) Montrer que $P(Ak + 1) = -\frac{7}{10}P(A_k) + \frac{9}{10}$.
   c) En déduire $P(A_k)$ puis $P(G_k)$ en fonction de k.

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} P\left(G_k\right)$. Calculer S_n puis déterminer la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand $n \to +\infty$.

VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

EXERCICE 19:

On effectue une enquête sur la qualité de $N = 100$ hôpitaux qui ont tous pratiqué $n = 10$ opérations de l'appendicite. On sait que le taux de réussite de cette opération est de $\tau = 97,5\%$.

1. Sur l'année 1998 un hôpital a eu 3 échecs. Peut-on dire que l'hôpital est mauvais ?
2. Quelle est la probabilité pour que ce même l'hôpital ait 3 échecs en 1999 ? Conclusion.
3. Un hôpital a eu 3 échecs en 1997 et 3 échecs en 1998. Que peut-on dire de cet hôpital ?

EXERCICE 20:

Soit T_1 et T_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre p_1 et p_2.

1. Calculer et reconnaître la loi de $\min(T_1, T_2)$.
2. Calculer la loi jointe de $\min(T_1, T_2)$ et $T_1 - T_2$.

3. En déduire que $\min(T_1, T_2)$ est indépendant de $1\{T_1 \leq T_2\}$. Quelle est la loi de $1\{T_1 \leq T_2\}$?

4. Déduire également de la question 2 que $R = \max(T_1, T_2) - \min(T_1, T_2)$ est indépendant de $\min(T_1, T_2)$.

5. Calculer la loi de R conditionnellement à $\{R \neq 0\}$. Reconnaître cette loi quand $p_1 = p_2$.

EXERCICE 21:

On désire modéliser le temps d'attente d'une panne de machine à l'aide d'une variable aléatoire sans mémoire : la probabilité pour que la machine tombe en panne après la date $k + n$ sachant qu'elle fonctionne à l'instant n est indépendante de n.

1. Montrer que la loi géométrique de paramètre p est sans mémoire c'est-à-dire que $P(X > k + n|X > n)$ est indépendante de n.

2. Caractériser toutes les lois des variables aléatoires X à valeurs dans N qui sont sans mémoire. On pourra calculer $P(X > 1 + n)$ en fonction de $P(X > 0)$.

3. Caractériser toutes les lois des variables aléatoires X à valeurs dans N qui sont sans mémoire.

EXERCICE 22:

1. On lance quatre fois une pièce juste et on note X la variable aléatoire « nombre de séquences pile-face obtenues ». Par exemple, si on obtient successivement : pile, pile, face, pile, X prend la valeur 1 ; si on obtient successivement : face, pile, pile, pile, X prend la valeur 0 ; si on obtient successivement : pile, face, pile, face, X prend la valeur 2. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. On lance un dé juste, au plus cinq fois, en s'arrêtant (éventuellement) dès qu'on a obtenu un 6 et on note Y la variable aléatoire « nombre de lancers effectués ». Déterminer la loi de probabilité de Y.

EXERCICE 23:

On considère deux urnes contenant chacune b boules bleues et r boules rouges. On note X le nombre de fois où quand on retire une boule de chacune des deux urnes (sans remise), les deux boules sont de la même couleur.

1. Calculer la loi de X.

2. La loi explicite de X ne permet pas de calculer facilement son espérance ou sa variance. Pour cela on introduit les variables $Y_1, \ldots, Y_n$ où $Y_i = 1$ si les $i_{ème}$ boules des deux urnes sont de la même couleur. Calculer la loi de $Y_1, \ldots, Y_{b+r}$.

3. En déduire que les variables $Y_1, \ldots, Y_{b+r}$ ont même loi.
4. Calculer E[X] et Var(X).

EXERCICE 24:

Deux joueurs A et B jouent à pile ou face. La mise est de 1 Euro. La probabilité que A gagne la mise est $p \in]0, 1[$. A possède a Euro et B, b Euro. Le jeu s'arrête quand l'un des deux joueurs est ruiné. On note T l'instant où le jeu s'arrête.

1. Montrer que presque sûrement T est fini. (On pourra comparer T avec le temps d'attente de b + a piles successifs.)
2. On note R l'évènement suivant : A est ruiné avant B. On désire calculer la probabilité de R. On note h(x) la probabilité que A soit ruiné avant qu'il ne possède a + b, alors qu'il possède maintenant x. Ainsi h(a) = P(R). Calculer h(0) et h(a + b).
3. Montrer que : pour $0 < x < a + b$, $h(x) = p\,h(x+1) + (1-p)\,h(x-1)$.
4. En déduire que :
   $h(x + 1) - h(x) = p-1(1 - p)[h(x) - h(x - 1)], 0 < x < a + b$.
5. Montrer que si $p = \frac{1}{2}$, alors $P(R) = \frac{b}{a + b}$.
6. Montrer que si $p \neq \frac{1}{2}$, alors $h(x) = \frac{\rho^{a+b} - \rho^{x}}{\rho^{a+b} - 1}$, où $\rho = \frac{1 - p}{p}$.
   En déduire que $P(R) = \frac{\rho^{a+b} - \rho^{a}}{\rho^{a+b} - 1}$). Quelle est la limite de P(R) quand $p \to ½$?

EXERCICE 25:

On considère un central téléphonique d'une entreprise de vente par correspondance. Il y a un grand nombre de communications téléphoniques par jour en France. Un faible pourcentage est destiné à l'entreprise de VPC. On modélise donc le nombre N de communications téléphoniques que reçoit l'entreprise par jour à l'aide d'une variable aléatoire de Poisson de paramètre θ. L'entreprise possède un service de vente et un service après-vente. Chaque communication a une probabilité p de concerner le service de vente.

1. Calculer la loi de N_V du nombre de communications par jour que reçoit le service de vente, à l'aide des fonctions génératrices.
2. Calculer la loi de (N_V, N_A), où N_A est le nombre de communications par jour que reçoit le service après-vente.
3. En déduire la loi de la somme de deux variables de Poisson indépendantes de paramètre θ_1 et θ_2.

EXERCICE 26:

Un fumeur a dans chacune de ses deux poches une boite d'allumettes qui contient initialement N allumettes. A chaque fois qu'il veut fumer une cigarette, il choisit au hasard une de ses deux poches et prend une allumette dans la boite qui s'y trouve.

1. Lorsqu'il ne trouve plus d'allumette dans la boite qu'il a choisie, quelle est la probabilité pour qu'il reste k allumettes dans l'autre boîte ?
2. Le fumeur cherche alors une allumette dans son autre poche. Quelle est la probabilité pour que l'autre boîte soit vide, ce qui suffit à gâcher la journée ?

Application numérique : N = 20 (la boîte plate), N = 40 (la petite boîte).

VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

EXERCICE 27:

Soit X une variable aléatoire continue de densité $cx(1 - x)1_{[0,1]}(x)$. Déterminer c, puis calculer E[X], Var(X) et $E[\frac{1}{X}]$.

EXERCICE 28:

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}1_{x>0}$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire continue dont la loi a pour densité f. Montrer que $Y = X^2$ est une variable aléatoire continue, dont on précisera la densité. Reconnaitre la loi de Y.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y

EXERCICE 29:

On considère la fonction fdéfinie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}-\lambda x^2 & \text{si } x\in[-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le réel λ pour que fsoit une densité de probabilité.
2. Soit Xune va. De densitéf. CalculerE(X) et V(X).
3. Déterminer un intervalle I de centre 0 et de longueur 2ltel queP(X ∈ I) ≥ 0.5.

Quelle est la probabilité exacte de l'évènement {X∈I} ?

EXERCICE 30:

Soit le circuit électronique représenté figure 3, où C_1,C_2 et C_3sont des composants électroniques. Ce système fonctionne si et seulement si C_1fonctionne ainsi que C_2 ou C_3. Pour tout i ∈ {1,2,3}, la durée de vie V_i du composant C_i suit une loi exponentielle de paramètre λ > 0. On suppose les variables V_i mutuellement indépendantes.

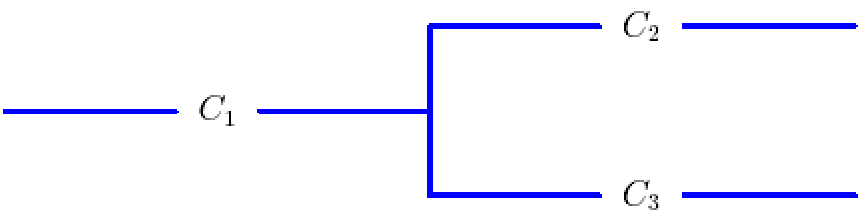

FIG. 3 – Circuit électronique

1. Exprimer la durée de vie V du circuit à l'aide de V_1,V_2 et V_3.
2. Calculer la fonction de répartition et la densité de V.

EXERCICE 31:

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, des troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident.

On admet que la variable D suit une loi de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ Ae^{-\frac{x}{82}} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}.$$

1. Déterminer la constante A pour que la fonction f soit une densité de probabilité.
2. Calculer la probabilité pour que la distance parcourue sans incident soit comprise entre 50 et 100 km, soit supérieure à 25 km.
3. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains km ? Comparez avec le résultat précédent.
4. On veut déterminer la distance moyenne parcourue sans incident. A l'aide d'une intégration par partie, calculer l'espérance $E(D) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.
5. L'entreprise possède n autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle donné par la densité f. On note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d km. Montrer que X_d suit une loi binomiale et déterminez les paramètres. En déduire le nombre moyen d'autocars n'ayant subi

aucun incident après avoir parcouru d km.

EXERCICE 32:

La longueur des tiges de chrysanthèmes en fleurs coupées intervient dans le classement par catégorie. Pour simplifier, on supposera par la suite que cette longueur sera le seul critère de classement. Un chrysanthème sera classé en catégorie extra si la longueur de sa tige est supérieure ou égale à 80cm. Au 1er décembre, on évalue la production d'une certaine serre à 6000 chrysanthèmes pour le mois. A cette époque, les chrysanthèmes classés en catégorie extra, sont payés au producteur 26 euros les dix, et les autres 16 euros les dix seulement. La qualité de la production ayant été étudiée sur un échantillon de 100 tiges coupées de chrysanthèmes, on en conclut que la longueur des tiges coupées est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne 92cm et d'écart-type 8cm.

2. Quelle est la probabilité pour qu'une fleur soit classée en catégorie extra ?
3. Quelle est l'espérance mathématique du nombre de fleurs qui seront classées en catégorie extra sur les 6000 fleurs de la production de décembre ?
4. En déduire l'espérance de la recette pour le total de la production de la serre pendant ce mois

EXERCICE 33:

La durée de vie, exprimée en années, d'un circuit ´électronique est une variable aléatoire T dont la fonction de répartition F est définie par : $F(t) = (1 - e^{-\frac{t^2}{2}})1\{t \geq 0\}$.

1. Donner la densité de probabilité f de T. Calculer E[T].
2. Sachant que le circuit a déjà fonctionné durant 1 an, quelle est la probabilité qu'il continue à fonctionner encore durant au moins 2 ans ? La loi est-elle sans mémoire ?

Un équipement électronique E est composé de 10 circuits identiques et indépendants. Au circuit i ($1 \leq i \leq 10$) est associée la variable aléatoire X_i, avec $X_i = 1$ si la durée de vie du circuit i est inférieure à un an et $X_i = 0$ sinon.

3. Quelle est la loi du nombre, N, de circuits de E dont la durée de vie est inférieure à 1 an ?
4. L'´équipement E est dit en série si la défaillance de l'un de ses circuits entraîne sa défaillance. Quelle est alors la probabilité qu'il soit défaillant avant 1 an ?
5. L'équipement E est dit en parallèle si sa défaillance ne peut se produire que si tous ses circuits sont défaillants. Quelle est alors la probabilité qu'il soit défaillant avant 1 an ?

EXERCICE 34:

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [-1, 1].
   a) Montrer que |X| est une variable aléatoire à densité et donner une densité de |X|.
   b) Montrer que X^2est une variable aléatoire à densité et donner une densité de X^2.

2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

Montrer que X^2 est une variable aléatoire à densité et donner une densité de X^2.

Indication: Introduire la fonction de répartition Φ de X et s'intéresser à la régularité de Φ

3. Soit c un réel. On considère la fonction f suivante :

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{c}{x(x+1)} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité.

b) Justifier qu'il existe un espace probabilisé (Ω, A, P) et une variable aléatoire X de densité f telle que $X(\Omega) \subset [1, +\infty[$.

EXERCICE 35:

On considère la fonction f suivante :

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit ϕ la fonction suivante :

$$\phi: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$$

a) Etudier les variations de ϕ et montrer que ϕ réalise une bijection de R sur $]-1, 1[$.

b) Donner l'expression de la bijection réciproque de ϕ.

On pose $Y = \phi(X)$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y.