

Suites et séries d'intégrales

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable

Exercice 1 ** I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{si } x > \sqrt{n} \end{cases}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.
2. A l'aide de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, calculer l'intégrale de GAUSS $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

[Correction ▼](#)

[005738]

Exercice 2 **

Montrer que $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ et $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$.

[Correction ▼](#)

[005739]

Exercice 3 **

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

[Correction ▼](#)

[005740]

Exercice 4 **

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx$ en écrivant cette intégrale comme somme d'une série.

[Correction ▼](#)

[005741]

Exercice 5 **

Calculer $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$.

[Correction ▼](#)

[005742]

Exercice 6 **

1. Montrer que pour x réel de $[0, 1[$, $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
2. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

[Correction ▼](#)

[005743]

Exercice 7 *** I

Montrer que pour tout réel x , $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t} dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}$

[Correction ▼](#)

[005744]

Retrouver cette fiche et d'autres exercices de maths sur exo7.emath.fr

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $x \in [0, +\infty[$. Pour $n > x^2$, $f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right)$ et donc $f_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp(-x^2 + o(1))$. Donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

2. Chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et nulle au voisinage de $+\infty$. Donc chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, est intégrable sur $[0, +\infty[$.

La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$. Donc la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par convexité de la fonction exponentielle, $\forall u \in \mathbb{R}$, $1 + u \leq e^u$. Par suite, $\forall x \in [0, \sqrt{n}]$, $0 \leq 1 - \frac{x^2}{n} \leq e^{-x^2/n}$ puis par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur \mathbb{R}^+ , $0 \leq f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} = f(x)$.

D'autre part, pour $x > \sqrt{n}$, $f_n(x) = 0 \leq f(x)$. Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, +\infty[, |f_n(x)| \leq f(x).$$

En résumé,

- chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$,
- la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f sur $[0, +\infty[$ et la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$,
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leq f$, la fonction f étant intégrable sur $[0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $(\int_0^{+\infty} f_n(x) dx)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^{+\infty} f(x) dx$. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $t = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ et donc $\frac{x^2}{n} = \cos^2 t$ et $dx = -\sqrt{n} \sin t dt$, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 t)^n \times (-\sqrt{n} \sin t) dt = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t dt = \sqrt{n} W_{2n+1},$$

où W_n est la n -ème intégrale de WALLIS. Classiquement, $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ (voir Exercices Maths Sup) et donc

$$\frac{W_{2n+1}}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On a montré que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Pour $x \in]0, 1]$, $x^{-x} = e^{-x \ln(x)}$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-x} = 1$. Donc si on pose $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, f est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ et donc intégrable sur le segment $[0, 1]$.

Pour $x \in]0, 1]$, $x^{-x} = e^{-x \ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x \ln(x))^n}{n!}$. Posons alors $\forall x \in [0, 1]$, $f_0(x) = 1$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, 1]$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{(-x \ln(x))^n}{n!} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. La fonction f_0 est continue sur $[0, 1]$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $-x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, la fonction f_n est continue sur $[0, 1]$. En résumé, chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}$, est continue sur $[0, 1]$. De plus,

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Vérifions alors que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément vers f sur le segment $[0, 1]$. Pour $x \in [0, 1]$, posons $g(x) = \begin{cases} -x \ln x & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. La fonction g est continue sur le segment $[0, 1]$ et admet donc un maximum M sur ce segment. Pour $x \in [0, 1]$, on a $0 \leq g(x) \leq M$ (on peut montrer

que $M = g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$. Mais alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, 1], |f_n(x)| = \frac{(g(x))^n}{n!} \leq \frac{M^n}{n!}$ ce qui reste vrai pour $x = 0$. Comme la série numérique de terme général $\frac{M^n}{n!}$ converge, on a montré que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément vers f sur le segment $[0, 1]$.
D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, la série numérique de terme général $\int_0^1 f_n(x) dx$, converge et

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \quad (*).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $u = -\ln(x)$ puis $v = (n+1)u$, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!} \int_0^1 (-x \ln x)^n dx = \frac{1}{n!} \int_{+\infty}^0 (ue^{-u})^n \times (-e^{-u} du) = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u} du \\ &= \frac{1}{n!(n+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} v^n e^{-v} dv = \frac{\Gamma(n+1)}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

L'égalité (*) s'écrit alors $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

Remarque. Pour calculer $I_n = \int_0^1 \frac{(-x \ln x)^n}{n!} dx$, on peut aussi s'intéresser plus généralement à $J_{n,p} = \int_0^1 \frac{x^n (-\ln x)^p}{n!} dx$ que l'on calcule par récurrence grâce à une intégration par parties.

Le travail qui précède permet encore d'écrire

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x \ln x)^n}{n!} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \text{ et } \int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Pour $x > 0$, posons $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$. f est continue sur $]0, +\infty[$.

Ensuite, pour tout réel strictement positif x , on a $0 < e^{-x} < 1$ et donc

$$\frac{x^2}{e^x - 1} = \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = x^2 e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, posons $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$. Chaque fonction $f_n, n \in \mathbb{N}^*$, est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$. En particulier, chaque fonction $f_n, n \in \mathbb{N}^*$, est intégrable sur $]0, +\infty[$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx} dx = \frac{1}{n^3} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = \frac{\Gamma(3)}{n^3} = \frac{2}{n^3},$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente.

En résumé,

- chaque fonction $f_n, n \in \mathbb{N}^*$, est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$,
- la série de fonctions de terme général $f_n, n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction f sur $]0, +\infty[$ et la fonction f

est continue sur $]0, +\infty[$.

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0, +\infty[$, la série numérique de terme général $\int_0^1 f_n(x) dx, n \in \mathbb{N}^*$, converge et

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$$

On a montré que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

C'est presque le même exercice que l'exercice 3. Pour tout réel $x > 0$,

$$\frac{x}{\operatorname{sh} x} = \frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}} = 2xe^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x},$$

puis avec la même démarche que dans l'exercice précédent

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} \int_0^{+\infty} ue^{-u} du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\Gamma(2)}{(2n+1)^2} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{4} \right) \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx = \frac{\pi^2}{4}.$

Correction de l'exercice 5 ▲

Ici, le plus simple est peut-être de ne pas utiliser de théorème d'intégration terme à terme. La fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ est continue sur $]0, 1]$. De plus, quand x tend vers 0, $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln x = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. On en déduit que f est intégrable sur $]0, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{\ln x}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} \ln x + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x}{1+x^2}.$$

Maintenant, chacune des fonctions $f_k : x \mapsto (-1)^k x^{2k} \ln x$, $0 \leq k \leq n$, est intégrable sur $]0, 1]$ car continue sur $]0, 1]$ et négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers 0. On en déduit encore que la fonction $g_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $g_n = f - \sum_{k=0}^n f_k$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{2k} \ln x dx + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x}{1+x^2} dx.$$

La fonction $h : x \mapsto \frac{x \ln x}{1+x^2}$ est continue sur $]0, 1]$ et prolongeable par continuité en 0. On en déduit que la fonction h est bornée sur $]0, 1]$. Soit M un majorant de la fonction $|h|$ sur $]0, 1]$. Pour tout entier naturel n , on a alors

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x}{1+x^2} dx \right| \leq \int_0^1 x^{2n} \left| \frac{x \ln x}{1+x^2} \right| dx \leq M \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{M}{2n+1}.$$

En particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x}{1+x^2} dx = 0$. Ceci montre que la série numérique de terme général $(-1)^k \int_0^1 x^{2k} \ln x dx$, $k \in \mathbb{N}$, converge et que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^1 x^{2k} \ln x dx.$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. Les deux fonctions $x \mapsto \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et $x \mapsto \ln x$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_{\varepsilon}^1 x^{2n} \ln x dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ln x \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{1}{2n+1} \int_{\varepsilon}^1 x^{2n} dx = -\frac{\varepsilon^{2n+1}}{2n+1} \ln \varepsilon - \frac{1}{(2n+1)^2} (1 - \varepsilon^{2n+1}).$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $\int_0^1 x^{2n} \ln x dx = -\frac{1}{(2n+1)^2}$. Par suite,

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = -\frac{\pi}{4}.$$

Vérifions maintenant l'intégrabilité de la fonction f sur $]0, +\infty[$. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ et on sait déjà que f est intégrable sur $]0, 1]$. De plus, $x^{3/2}f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ et donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$. Ceci montre que la fonction f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et finalement sur $]0, +\infty[$. Pour calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$, la méthode précédente ne marche plus du tout car pour $x > 1$, x^n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. C'est une toute autre idée qui permet d'aller au bout. On pose $u = \frac{1}{x}$ et on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+\frac{1}{u^2}} \times \frac{-du}{u^2} = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2} du = -I,$$

et donc $I = 0$.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -\frac{\pi}{4} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soit $x \in [0, 1[$. Pour tout réel t de $[0, x]$, on a $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$. Maintenant, pour tout réel $t \in [0, x]$ et tout entier naturel n , on a $|t|^n \leq x^n$. Puisque la série numérique de terme général x^n converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général $t \mapsto t^n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0, x]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut affirmer que

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$\forall t \in [0, 1[, -\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}.$$

2. Par suite, pour $t \in]0, 1[$,

$$\frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1} \ln t}{n}.$$

Pour $t \in]0, 1[$, posons $f(t) = \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ puis pour $t \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(t) = -\frac{t^{n-1} \ln t}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $]0, 1[$ et négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0. La fonction f_n est donc intégrable sur $]0, 1[$. En particulier, la fonction f_n est donc intégrable sur $]0, 1[$. Calculons alors $\int_0^1 f_n(t) dt$.

Soit $a \in]0, 1[$. Les deux fonctions $t \mapsto \frac{t^n}{n}$ et $t \mapsto -\ln t$ sont de classe C^1 sur le segment $[a, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_a^1 t^{n-1} (-\ln t) dt = \left[-\frac{t^n \ln t}{n} \right]_a^1 + \frac{1}{n} \int_a^1 t^{n-1} dt = \frac{a^n \ln a}{n} + \frac{1}{n^2} (1 - a^n).$$

Quand a tend vers 0, on obtient $\int_0^1 -t^{n-1} \ln t dt = \frac{1}{n^2}$ et donc $\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{1}{n^3}$. Puisque la fonction f_n est positive sur $]0, 1[$, on a encore $\int_0^1 |f_n(t)| dt = \frac{1}{n^3}$. On en déduit que la série numérique de terme général $\int_0^1 |f_n(t)| dt$ converge.

En résumé,

- chaque fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0, 1[$,
- la série de fonctions de terme général f_n , $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction f sur $]0, 1[$ et la fonction f

est continue sur $]0, 1[$,

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)| dt < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n-1} \ln t}{n} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Existence de l'intégrale. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f : t \mapsto \frac{\cos(xt)}{\cosh t}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, pour tout réel positif t , $|f(t)| \leq \frac{1}{\cosh t}$ et donc $|f(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{e^t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que la fonction f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Pour tout réel x , $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\cosh t} dt$ existe.

Convergence de la série. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n(x) = \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_n(x) - u_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2} - \frac{2n+3}{(2n+3)^2+x^2} = \frac{(2n+1)((2n+3)^2+x^2) - (2n+3)((2n+1)^2+x^2)}{((2n+1)^2+x^2)((2n+3)^2+x^2)} \\ &= \frac{2(2n+1)(2n+3) - 2x^2}{((2n+1)^2+x^2)((2n+3)^2+x^2)}. \end{aligned}$$

Puisque le numérateur de cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, cette expression est positive pour n grand. On en déduit que la suite $(u_n(x))$ décroît à partir d'un certain rang. D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$.

On en déduit que la série de terme général $(-1)^n u_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Pour tout réel x , la série de terme général $(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$ converge.

Egalité de l'intégrale et de la somme de la série. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in]0, +\infty[$, on a $e^{-t} \in]0, 1[$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{\cos(xt)}{\cosh t} &= \frac{2\cos(xt)e^{-t}}{1+e^{-2t}} = 2\cos(xt)e^{-t} \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-2kt} + (-1)^{n+1} \frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}} \\ &= 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \cos(xt) e^{-(2k+1)t} + (-1)^{n+1} \frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \cos(xt)e^{-(2k+1)t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit encore que la fonction $t \mapsto (-1)^{n+1} \frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\cosh t} dt = 2 \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-(2k+1)t} dt + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}} dt.$$

Ensuite, $\left| \int_0^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t} dt = \frac{1}{2n+3}$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}} dt = 0$ puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\cosh t} dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-(2n+1)t} dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-(2n+1)t} dt &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{ixt} e^{-(2n+1)t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-(2n+1)+ix)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{(-(2n+1)+ix)t}}{-(2n+1)+ix} \right]_0^{+\infty} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{(2n+1)-ix} \left(1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(-(2n+1)+ix)t} \right) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{(2n+1)-ix} \right) \quad (\text{car } |e^{(-(2n+1)+ix)t}| = e^{-(2n+1)t} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{2n+1+ix}{(2n+1)^2+x^2} \right) = \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}. \end{aligned}$$

On a enfin montré que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{t} dt = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}.$$
