NB: Présenter les algorithmes sous forme de fonction ou procédure. Il n'est pas nécessaire de préciser l'objectif de l'algorithme

Exercice 1 ***(9 pts) Connaissance du cours.***

1. *Citer 5 propriétés d'un bon algorithme. (1.25pts)*
2. *Dans l'approximation numérique des sommes des séries numériques, on cherche souvent à majorer le module $|R_N|$ du reste d'ordre N par une suite positive ϕ_N. (1.5 pts)*
   (a) *Donner trois propriétés que doit verifier ϕ_N;*
   (b) *Donner un exemple de suite ϕ_N lorsque la série converge par le critère:*
   (a) *de d'Alembert;*
   (b) *des séries alternées;*
   (c) *des séries trigonométriques.*
3. *Dans l'étude de la complexité des algorithmes, on utilise souvent les notation O, Ω et Θ. Donner leurs définitions. (0.75pt)*
4. *On souhaite trier un tableau de taille $n \in \mathbb{N}^*$ en applicant des algorithmes de tri. Completer en termes de complexité le tableau suivant: (2 pts)*

Algorithme	Cas Favorable	Cas Moyen	Cas Defavorable
Tri Sélection			
Tri Insertion			
Tri Bulle			
Tri Rapide			
Tri Fusion			

5. *Soient $f, g : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$. Montrer que: (1.5pts)*
   (a) *si $f(n) \in O(g(n))$, alors $g(n) \in \Omega(f(n))$;*
   (b) *si $f(n) \in O(g(n))$, alors $f(n) + g(n) \in O(g(n))$;*
   (c) *$f(n) + g(n) \in \Theta(\max(f(n), g(n))$.*
6. *Trouver le comportement asymptotique des fonctions suivantes: (2pts)*
   (a) *$C(n) = 3c(n-1) + 2$, c(0)=0.*
   (b) *$c(n) = 16c(\frac{n}{9}) + n^{3/2}\log n$;*
   (c) *$c(n) = 3c(\frac{n}{4}) + n$;*
   (d) *$c(n) = 4c(\frac{n}{2}) + n^2 \log n$;*

Exercice 2 ***(8.5 pts)*** *Le polynôme P de degré n est définie par: $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ avec $a_n \neq 0$.*

- *P est pair si tous les coefficients des monômes de puissance impaire de P sont nuls.*
- *P est impair si tous les coefficients des monômes de puissance paire de P sont nuls.*

1. *Définir un type auxiliaire **Poly**, permettant de représenter les polynômes (On admettra que les polynômes manipulés ont degré inférieur à une valeur prédéfinie **Nmax**)(0.25pt).*
2. *Décrire la méthode de Horner et écrire son algorithme pour évaluer P en un point t_0. On donnera le nombre d' opérations arithmétiques élémentaires.(0.25pt + 0.75pt)*

3. *Ecrire une version efficace de l'algorithme précédent pour évaluer un polynôme pair. Quel est le gain obtenu en terme d'opérations arithmétiques élémentaires? (1pts)*
4. *Concevoir et écrire un algorithme pour effectuer le produit de deux polynômes P et Q de degré n et m respectivement. Quel est le coût numérique de cet algorithme? (1.5pts + 0.25)*
5. *Adapter l'algorithme précédent au cas ou: (4.5 pts)*
   - *(a) P et Q sont pairs de degré $2n$ et $2m$ respectivement;*
   - *(b) P et Q sont impairs de degré $2n+1$ et $2m+1$ respectivement;*
   - *(c) P est pair de degré $2n$ et Q est impair de degré $2m+1$*

   On donnera dans chaque cas le coût numérique.

Exercice 3 ***(5 pts)*** *On se propose d'évaluer en un point $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ donné, la fonction $S(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par:*

$$S(x) = \int_0^x \frac{1-\cos(t^{3/2})}{t^{13/4}} dt.$$

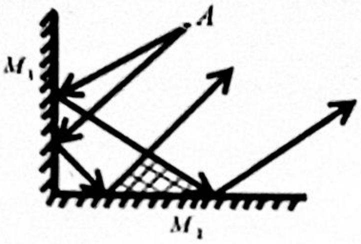
1. *Montrer que la fonction S est bien définie. (0.25pt)*
2. *En utilisant la série entière de la fonction cosinus développée en 0, Déterminer la suite $(a_n(x))_{n\geq 0}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, (2pts)*
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x).$$
3. *Pour $x > 0$ fixé, établir la relation de recurrence vérifiée par la suite $(a_n(x))_{n>0}$. (0.5pt)*
4. *Donner en fonction de x, une majoration du reste d'ordre N de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)$. (0.5pt)*
5. *Concevoir et écrire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $S(x_0)$ avec une incertitude absolue $< \epsilon$. (1.5pts)*

Contrôle Continu d'Optique

Durée (2h)

Exercice 1 : Questions de cours

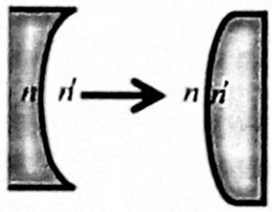
1)



A est une source lumineuse qui donne successivement les images A' et A'' à travers deux miroirs plans

1) Compléter la figure et retrouver les images A' et A''
2) Que voit l'œil placé dans la partie hachurée ?

2)



La figure ci-contre est constituée de deux dioptres sphérique séparant les milieux d'indices n et n'

1) Déterminer la nature du dioptre 1
2) On retourne le dioptre pour obtenir le dioptre 2. Déterminer la nature de ce dioptre et Commenter.

<u>NB</u> : Précisez la comparaison entre les indices

3)

Une pièce de monnaie est au fond d'un verre vide. On voit juste le centre de la pièce, dans les conditions de la figure. Si on remplit le verre d'eau on verra une plus grande partie de la pièce. Pourquoi ?

4)

Je voudrais voir mon visage à l'endroit et agrandi à travers un miroir sphérique. Où dois je me placer ?

5)

Deux miroirs sphériques M_1 et M_2 sont placés face à face, leurs sommets respectifs étant confondus avec le foyer de l'autre miroir. Où se trouve l'image du sommet S_1 après réflexion sur les deux miroirs

Exercice 2

On réalise l'inclusion d'un insecte $\overline{AB}$ dans de la résine d'indice $n = 1.5$. L'indice de l'air est $n' = 1$. La surface Σ de la résine est une portion de sphère de rayon R et de centre de courbure C. L'insecte est placé à $1\ cm$ du sommet S à l'intérieur de la résine et l'on veut à travers la surface Σ en obtenir une image $\overline{A'B'}$ avec un grandissement transversal $|G_t| = 1.1$. Suivant le signe choisi pour G_t, il y a deux solutions. Dans chaque cas donner :

1) La position de l'image $\overline{A'B'}$ et sa nature, ainsi que le rayon de courbure $R = \overline{SC}$.
2) Représenter sommairement à l'échelle les positions de S, C, $\overline{AB}$ *et* $\overline{A'B'}$. Quelle est la « bonne solution » ?

Exercice 3

a) Un dioptre sphérique de $10\ cm$ de rayon de courbure sépare deux milieux d'indices $n = 1$ et $n' = 3/2$.

Après représentation du dioptre sphérique, déterminer la position des foyers F et F'.
Calculer p' et construire la position de l'image d'un objet $\overline{AB}$ placé à :

- $p = 60\ cm$ du sommet et réel
- $p = 10\ cm$ du sommet et réel
- $p = 5\ cm$ du sommet et virtuel

b) Mêmes questions si l'on inverse les indices
c) En vous appuyant sur les résultats des questions précédentes, complétez le tableau ci-après :

- Le dioptre est convergent

Objet	Image			
Localisation	**Type**	**Localisation**	**Orientation**	**Taille**
A est en avant de F				
A est en F				
A est entre F et S				
A est entre S et F'				
A est en arrière de F'				

- Le dioptre est divergent

Objet	Image			
Localisation	**Type**	**Localisation**	**Orientation**	**Taille**
A est en avant de F				
A est en F				
A est entre F et S				
A est entre S et F'				
A est en arrière de F'				

Année 2019-2020

Ecole Nationale Supérieure Ploytechnique
UE:MAT226 (Analyse dans les Espaces Vectoriels de Dimensions Finies)
Contrôle continu N°1, Date: 26/06/2019 Durée: 3h
Proposé par Pr E. TAKOU

Exercice 1. *8,5 points*
Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on note $\delta(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

1. *Démontrer que δ est une distance sur $\mathbb{R}$.*
2. *Déterminer la boule ouverte $B(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$ de $(\mathbb{R}, \delta)$.*
3. *Déterminer la boule ouverte $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{6})$ de $(\mathbb{R}, \delta)$.*
4. *La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de $(\mathbb{R}, \delta)$ définie par $x_n = \frac{1}{n}$ est-elle convergente dans $(\mathbb{R}, \delta)$? Déterminer sa limite le cas échéant.*
5. *La suite $(y_n)_{n\geq 1}$ de $(\mathbb{R}, \delta)$ définie par $y_n = n$ est-elle de Cauchy dans $(\mathbb{R}, \delta)$?*
6. *La suite $(y_n)_{n\geq 1}$ de $(\mathbb{R}, \delta)$ définie par $y_n = n$ est-elle convergente dans $(\mathbb{R}, \delta)$? Déterminer sa limite le cas échéant.*
7. *Peut-on tirer une conclusion sur la complétude de $(\mathbb{R}, \delta)$?*

Exercice 2. *3 points*
On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$

1. *Déterminer tous les points critiques de f.*
2. *Donner la nature de chaque point critique.*

Exercice 3. *8,5 points.*

1. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $a \in \mathbb{R}$ et Δ la droite d'équation $y = ax$.*
   - (a) *La fonction $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(x) = f(x, ax)$ admet-elle une limite quand x tend vers 0?*
   - (b) *Peut-on en déduire quelque chose quant à l'existence de la limite de f en $(0,0)$?*
   - (c) *Soit $t \neq 0$. La fonction $t \mapsto f(t^2, t)$ admet-elle une limite quand t tend vers 0?*
   - (d) *Quelle conclusion peut-on déduire quant à l'existence de la limite de f en $(0,0)$?*
2. *Etudier l'existence d'une limite en (0, 0) de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \frac{x^2y+x^2+y^2}{x^2+y^2}$.*
3. *Soient h définie de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\to \mathbb{R}$ par $h(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ Etudier l'existence de la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y)$ et calculer sa valeur le cas échéant.*
4. *On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.*
   - (a) *Montrer que f est continue en $(0,0)$.*
   - (b) *Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent et déterminer leurs valeurs.*
   - (c) *f est-elle différentiable en $(0,0)$? Déterminer sa différentielle le cas échéant.*

NB: L'important n'est pas de tout faire mais de bien faire tout ce que l'on peut faire.

Université de Yaoundé I

Ecole Nationale Supérieure Polytechnique

Département de Mathématiques et Sciences Physiques

Contrôle continu de PHY 224 (Thermodynamique) Juin 2020

Durée : 2 h

Exercice 1 : *Coefficients thermoélastique – Equations d'état*

Calculer les coefficients thermoélastiques :

$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ Coefficient de dilatation à pression constante

$\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ Coefficient d'augmentation de pression à volume constant

$\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ Coefficient de compressibilité isotherme

1) pour le gaz d'équation d'état $P(V - nb) = nRT$

2) Le coefficient de dilatation à pression constante d'une substance est $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{3aT^3}{V}$; son coefficient de compressibilité isotherme est $\beta = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{b}{V}$; où a et b sont des constantes.

Trouver l'équation d'état $f(P;V;T) = 0$ de la substance.

Exercice 2 : *Transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait*

1) - Etablir, en coordonnées (P ; V), l'équation de l'adiabatique réversible du gaz parfait de constante γ.
Il sera tenu compte de la justification de chacune des équations que vous écrivez ou affirmations.
   - Réécrire cette équation en coordonnées (P ; T) et (T ; V)
2) Un récipient fermé par un piston mobile renferme 2 g d'hélium (gaz parfait monoatomique) dans les conditions (P_1 ; V_1). On opère une compression adiabatique de façon réversible qui amène le gaz dans les conditions (P_2 ; V_2). Sachant que P_1=1 bar ; V_1 = 10 L ; P_2 = 3 bar. Déterminer :

a) Le volume final V_2
b) Le travail échangé par le gaz avec le milieu extérieur
c) La variation d'énergie interne du gaz
d) Déduire la variation de température du gaz sans calculer sa température initiale.

On donne : $\gamma = C_p/C_v = 5/3$; $R = 8{,}31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$; M_{He}=4 g/mol.

Exercice 3 : *Etude d'un cycle de transformation – Premier principe*

Le cycle, réversible, de fonctionnement d'une machine thermique, parcouru par n moles de gaz parfait de constante γ, comprend les 4 temps suivants :

- Une compression adiabatique de A à B
- Une détente isotherme de B à C
- Une détente adiabatique de C à D
- Un refroidissement isobare de D à A

1) Ce cycle est-il moteur ou récepteur (machine frigorifique ou pompe à chaleur) Justifier votre réponse
2) Calculer les coordonnées P, T, V manquantes des points A, B, C, D.
3) Représenter l'allure du cycle dans le diagramme de Clapeyron.
4) Montrer que $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$.
5) Calculer les différents travaux et chaleurs échangés
6) Le premier principe est-il vérifié ?
7) Calculer la performance de la machine thermique
8) Calculer la performance de la nouvelle machine si le cycle était parcouru dans le sens contraire.

Données : n = 2 moles ; γ =1,4 ; P_A = 1 Atm ; T_A=350 K ; V_B = 42 L ; V_D = 60 L.
Prendre R= 8,31 J/K/mol.

E.N.S.P. .... *Niveau II 2019-20 / Semestre 2* .... ND/NG

******* U.E. MAT 227 « *Analyse Numérique* », Test n°1 *(3H 00mn)* *******

1. *Le correcteur appréciera le soin apporté à la rédaction et à la présentation du devoir*.
2. TOUT DOCUMENT INTERDIT (*SOUS QUELQUE FORMAT QUE CE SOIT*).
3. CALCULATRICES AUTORISEES, *SAUF LES PROGRAMMABLES*.
4. SOYEZ CLAIR ET PRECIS DANS LES REPONSES, mais CONCIS.
5. *L'objectif ici ne doit pas être de chercher à traiter à tout prix toute l'épreuve, mais, plutôt, d'en couvrir une part significative de manière convaincante.*
6. *Effort personnel apprécié, mais toute tricherie ou tentative de tricherie sera sévèrement sanctionnée*.

**** *EXERCICE 1* (5,5 POINTS) ****

Ci-après, les parties $\boxed{\text{I}}$ *et* $\boxed{\text{II}}$ *sont indépendantes.*

$\boxed{\text{I}}$ – Décrire un *problème mathématique* dont la résolution concrète requiert de faire appel à l'*Analyse numérique*, et dire comment cela se fera, puis préciser s'il y aura, ou pas, une *erreur de méthode* lors de cette résolution.

• N.B. *Pas plus de 7 lignes pour la réponse.*

$\boxed{\text{II}}$ – Un ordinateur calcule en utilisant le système de réels-machine $\mathcal{R} = \mathcal{R}(9, 9, -529, 524)$.

1°) a) Cela signifie que quels sont les nombres réels que cet ordinateur connaît et peut manipuler ?

b) Cela fait, en tout, combien de nombres réels ?

2°) a) Quand y aura-t-il **overflow** lors des calculs sur cet ordinateur ? Et **underflow** ?

b) Lorsqu'on veut rentrer un nombre réel x dans la mémoire de cet ordinateur, chacune des 2 situations ci-dessus peut se produire. Mais le cas favorable est celui où aucune des 2 ne se produit. Que fera alors l'ordinateur avec x et quelle sera l'*incertitude relative maximale* possible ?

3°) Est-ce que l'entier $25378 \in \mathcal{R}$ et comment le voit-on ?

Si oui, quels sont, respectivement, ses *prédécesseur* et *successeur dans* $\mathcal{R}$? Sont-ils aussi des entiers ?

**** *EXERCICE 2* (6 POINTS) ****

1°) a) Rappeler la définition de $\mathrm{pL}_{1,0,-2,4,-3,5}\,f$.

b) Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe d'une fonction continue (arbitraire, mais non triviale) sur $[-5, 6]$. Ensuite, sans calculs, superposer, sur ce graphique, une esquisse de la courbe de $\mathrm{pL}_{1,0,-2,4,-3,5}\,f$.

2°) a) Calculer $\mathrm{pL}_{1,0,-2,4,-3,5}\,f$ *sous forme de Newton* pour les données :

$$f(1) = -2, \quad f(0) = -2, \quad f(-2) = 0, \quad f(4) = 2, \quad f(-3) = -2, \quad f(5) = -2.$$

• N.B. *Garder les points d'interpolation dans l'ordre donné.*

b) On obtient ainsi $\mathrm{pL}_{1,0,-2,4,-3,5}\,f$ dans quelle *base* et de quel *espace vectoriel* ?

c) Écrire le *schéma de Hörner* de $\mathrm{pL}_{1,0,-2,4,-3,5}\,f$ dans cette base là.

3°) a) Même sans calcul, on était sûr, d'avance, que $\mathrm{pL}_{1,0,-2,4,-3,5}\,f$ s'annule en $x = -2$. Pourquoi ?

b) *Sans nouveaux calculs*, mais en vous justifiant clairement, extraire, des calculs effectués en 2°) a) ci-dessus, une expression de $\mathrm{pL}_{1,0,-2,4,-3,5}\,f$ sur IR montrant directement que ce polynôme s'annule en $x = -2$.

**** *EXERCICE 3* (5 POINTS) ****

Soit $P \in \mathrm{IR}[x]$ donné par : $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

On veut écrire un ***algorithme efficace de calcul*** de la valeur du polynôme P en un réel x arbitraire donné.

1°) Quels sont les *données nécessaires* et le *résultat attendu* pour ce calcul ?

2°) Montrer que $P(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, où les réels $u_0, \cdots, u_n$ peuvent se calculer par récurrence à partir des données.

3°) Si on veut être efficace ici, il y a une expression mathématique E que l'algorithme (*qu'on veut concevoir*) sera obligé de calculer d'entrée, en stockant sa valeur. Laquelle, pourquoi et comment ?

4°) a) Trouver le *schéma de Hörner* approprié ici.

b) A base de ce schéma, donner alors des formules de calcul permettant d'aboutir au résultat attendu ici.

c) En déduire une *analyse mathématique* pertinente permettant de mettre clairement en évidence comment on peut calculer le résultat visé à partir des données disponibles.

d) Écrire l'algorithme correspondant à cette analyse, puis donner son coût numérique.

5°) On peut considérer que $P(x)$ donne une valeur approchée en x de quelle fonction classique ? Pourquoi ?

**** *EXERCICE 4* (7,5 POINTS) ****

n considère une fonction $f : \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR}$ et $x_1, \cdots, x_n \in \mathcal{D}_f$, 2 à 2 distincts, puis on pose $P = \mathrm{pL}_{x_1 \cdots x_n} f$.

I – 1°) a) Rappeler la définition de P.

b) Quelles données faut-il pour calculer la valeur de P en un réel x donné et quel est le résultat attendu ?

2°) Supposons avoir déjà $Q = \mathrm{pL}_{x_2 \cdots x_n} f$. Par quelle formule peut-on en déduire P ? Démontrer cette formule.

II – On veut déterminer l'expression de P selon les puissances croissantes de la variable x.

1°) Montrer que ceci revient à résoudre un système linéaire (S) dont on précisera les inconnues et expliquera pourquoi ce sont, effectivement, les inconnues du système.

2°) Mettre (S) sous forme matricielle.

3°) Résoudre (S) requiert de préalablement mettre en place un algorithme de calcul des coefficients de sa matrice.

a) Trouver des formules de calcul des coefficients de cette matrice *qui n'utilisent que des multiplications*.

b) En déduire une *analyse mathématique* pertinente permettant de mettre clairement en évidence comment on peut calculer tous ces coefficients.

c) A base de cela, écrire un algorithme qui calcule tous les coefficients de la matrice. Coût numérique ?

4°) Quel avantage y a-t-il à ce que cet algorithme ne fasse que des multiplications et ne fasse pas appel, comme alternative, à des évaluations de la *fonction puisssance* ?

5°) a) Cependant, il est possible qu'il y ait des *erreurs de données* dans cet algorithme. Cela voudrait dire quoi ?

b) Mais qu'il y ait ou pas des erreurs de données, un autre type d'erreurs va intervenir par la suite. Lesquelles, à quel moment vont-elles intervenir et quelle en est la cause ?

c) Dire s'il y a, ou pas, une *erreur de méthode* dans cet algorithme, en vous justifiant.

6°) a) Pourquoi cette manière de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange est peu recommandée ?

b) Décrire, *dans les grandes lignes*, une alternative plus efficace.

.... *FIN* ....

Ecole Nationale Supérieure Polytechnique Année 2019-2020
UE: Analyse dans les espaces vectoriels de dimension finie(MAT226), Examen Final
Date: 06-07-2020, Durée:3h
Proposée par Pr E. TAKOU

Exercice 1. *5 points*
On pose $X =]0, +\infty[$. *Pour* $x, y \in X$, *on note* $d(x,y) = |\ln(x) - \ln(y)|$.

1. *Montrer que* d *est une distance sur* X.
2. *Déterminer la boule ouverte* $B_d(\frac{1}{e}, 1)$ *de* (X, d).
3. *On pose* $A =]0, \frac{1}{e}[$ *et* $B = [2, +\infty[$.
   (a) A *est-elle bornée dans* (X,d) ?
   (b) B *est-elle bornée dans* (X,d) ?
   (c) A *est-elle fermée dans* (X,d) ? *ouverte dans* (X,d) ?
   (d) B *est-elle fermée dans* (X,d) ? *ouverte dans* (X,d) ?

Exercice 2. *8 points.*

1. *Les fonctions suivantes admettent-elles une limite en* M_0 ? *Calculer la limite le cas échéant.*
   (a) $f(x,y) = \frac{1+x+y}{x^2-y^2}$ *en* $M_0(0,0)$
   (b) $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ *en* $M_0(0,0)$
   (c) $f(x,y) = \frac{\sin((x-2)(y+1))}{(x-2)^2+(y+1)^2}$ *en* $M_0(2,-1)$
2. *Soit la fonction* f *définie de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}$ *par* $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) *Montrer que* f *est continue en* $(0,0)$.
   (b) f *admet-elle les dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *en* $(0,0)$? *Déterminer ces valeurs le cas échéant.*
   (c) *Pour* $(x,y) \neq (0,0)$, *déterminer* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
   (d) f *est-elle de classe* C^1 *au voisinage de* $(0,0)$?
   (e) f *est-elle différentiable au voisinage de* $(0,0)$? *Déterminer sa différentielle en* $(0,0)$ *le cas échéant.*
3. *Soit la fonction* g *définie de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}$ *par* $g(x,y) = x^4 + y^3 - 3y - 2$. *Déterminer les points critiques de* g *ainsi que la nature de chaque point critique.*
4. *Soit la fonction* h *définie de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}$ *par* $h(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2y - y^3$. *Déterminer les points critiques de* h *ainsi que la nature de chaque point critique.*

Exercice 3. *7 points*

1. *Représenter le domaine du plan délimité par les courbes d'équations* $x = \frac{1}{2}$, $y = x^2$ *et* $xy = 1$ *puis calculer son aire.*
2. *Calculer* $\iint_D x^2y\,dxdy$ *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, x + y \leq 1, y - x \leq 1\}$.
3. *Calculer* $\iint_D xy^2\,dxdy$ *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
4. *Calculer* $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ *où* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ *avec* $R > 0$.
5. *Calculer* $\iiint_D xy\,dxdydz$ *où* D *est le domaine délimité par le tétraèdre* $OIJK$.

NB: Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction. D'autre part, l'essentiel n'est pas de tout faire, mais de bien faire tout ce que l'on peut faire.

Université de Yaoundé I **Ecole Nationale Supérieure Polytechnique**

Département de Mathématiques et Sciences Physiques

Examen de PHY 224 (Thermodynamique) Durée : 2 h 30
Session normale Juillet 2020

Exercice 1 :

L'équation d'état d'une mole d'un gaz est $P(V-B)=RT$.

1) Sachant que, pour toute substance, le coefficient calorimétrique $l = T\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$, écrire l'expression dU de la différentielle de l'énergie interne de ce gaz.
2) Ce gaz subit une détente de Joule à l'issue de laquelle son volume a doublé.
   - Indiquer les caractéristiques d'une détente de joule
   - En déduire la température finale T2 de ce gaz dont la température initiale est T1
   - Calculer la variation d'entropie du système
   - Montrer que la transformation est irréversible

AN : T1 = 300 K ; prendre R= 8,31 J/mol.

Exercice 2 :
considerons le cycle d'un moteur constitué des 3 trajets suivant :
Supposons le cycle d'un moteur constitué de 3 trajets schématisé ci-contre :
gaz monoatomique $\gamma = \frac{5}{3}$

- Une compression isotherme de A à B
- Un réchauffement linéaire de B à C
- Une détente adiabatique de C à A

1- Calculer le travail échangé sur le cycle et en déduire la chaleur échangée.
2- Calculer le rendement du moteur pour le cas particulier
3- Calculer les entropies S_B, S_C en considérant SA =0J/K^{-1} et tracer l'allure du cycle dans le diagramme entropique.

AN : PA=1 atm, VA= 1 L ; TA= 300K ; PB=2 atm ; PC= 2,5 atm ; prendre R=8,31J/mol.

Exercice 3 :

Dans un récipient calorifugé, on mélange à la pression atmosphérique un litre d'eau à 80 °C et 500 g de vapeur à 100°C.

1-Calculer l'état final

2-Calculer l'entropie créée.

AN : Chaleur latente de vaporisation de l'eau à la pression atmosphérique : Lv=2250 kJ/kg ; c=4,18 kJ/kg.deg

Exercice 4 :

Un cylindre de volume V0, isolé, contient une mole d'air (gaz parfait diatomique) à la température T1 et sous la pression P1. On y perce un petit trou et l'air s'échappe dans l'atmosphère de température Ta et de pression Pa.

1) Calculer l'état final du système (air dans le cylindre à l'état initial) dans les 2 cas suivants :
a) On considère qu'il y'a contact thermique entre l'air dans le cylindre et l'atmosphère
b) On considère qu'il n'y a pas contact thermique entre l'atmosphère et le gaz dans le cylindre et que le gaz s'échappe très lentement du cylindre.
c) Calculer le travail échangé par le système. Dans les 2 cas.

AN : Pa= 1 atm ; Ta=300K ; P1=2 atm ; T1=350 K ; Vo=1 L ; Prendre R=8,31 J/mol.

VB: Présenter les algorithmes sous forme de fonction ou procédure. Il n'est pas nécessaire de préciser l'objectif de l'algorithme

xercice 1 ***(8.75 pts) Connaissance du cours.***

1. *Qu'est ce que la complexité d'un algorithme? Quel est sont rôle? (0.5pts)*

2. *On considère le tri par insertion d'un vecteur T de réels, de taille n. (2.5 pts)*

   (a) *Quel est le principe du tri par insertion?;*

   (b) *Dresser un tableau (comme dans le cours) illustrant l'application du tri par insertion au vecteur $T =$ [8, 4, 10, 12, 3, 22];*

   (c) *Dans quel situation a-t-on le : (a) le plus favorable? (b) le plus défavorable? Quelle est la complexité de cette méthode dans ces cas?*

3. *Soient $a \geq 1$, $b > 1$ et $f(n)$ une fonction définie sur $\mathbb{N}$. Soit $T(n)$ la fonction définie par la récurrence suivante*

$$T(n) = aT(n/b) + f(n) \tag{1}$$

   où le terme n/b signifie soit $\lfloor n/b \rfloor$, soit $\lceil n/b \rceil$. Énoncer le Théorème Général (Master Theorem) pour déterminer l'ordre de grandeur de T (0.75pts)

4. *Remplir le tableau suivant par vrai ou faux. Le résultat sera donner sous forme d'une matrice booléenne $A = (a_{ij})$, où a_{ij} est la valeur de vérité de la ligne i et de la colonne j: (2pts)*

			1	2	3
	$f(n)$	$g(n)$	$g = O(f)$	$g = \Omega(f)$	$f = \Theta(g)$
1	$n^{1/100}$	$\sqrt{n}$			
2	$\ln(n)$	$\ln^2(n)$			
3	$\sqrt{n}$	$\ln^2(n)$			
4	2^n	$n!$			
5	$\log_2(n)$	$\log_3(n)$			
6	$2^{\ln(n)}$	n^2			
7	2^n	$n^{\ln\ln(n)}$			
8	$2^{\sqrt{\ln(n)}}$	$\sqrt{n}$			

rouver le comportement asymptotique des fonctions suivantes: (3pts)

1. $C(n) = 4c(n-1) + 5$, *c(0)=0.*

2. $c(n) = 6c(\frac{n}{3}) + n^2 \log n$;

3. $c(n) = 2c(\frac{n}{2}) + 10^n + n!$;

4. $c(n) = 27c(\frac{n}{3}) + n^\alpha \log n$, $\alpha > 0$ *(on discutera en fonction des valeurs de alpha);*

xercice 2 ***(8 pts)*** *On considère les matrices A et B de tailles $n \times p$ et $p \times m$ respectivement. Soient u et v eux vecteurs de taille p. On suppose qu'il existe un type* ***Matrice*** *et un type* ***Vecteur*** *permettant de représenter s matrices et les vecteurs respectivement.*

1. *Déterminer le coût de calcul:*

   (a) *du produit AB (0.5pt)*

   (b) *du produit αA, où α est un scalaire (0.25)*

   (c) *de la somme $A + B$ (0.5pt)*

   (d) *du produit Au (0.5pt)*

   (e) *de la somme $u + v$ (0.25pt)*

2. *On suppose que dans la suite que $n = m = p$. On considère la fonction matricielle suivante:*

$$P_N(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k, \quad X^0 = I_n, \quad a_k \in \mathbb{R},$$

où X est une matrice carrée d'ordre n et I_n est la matrice identité d'ordre n. On suppose qu'on dispose des procédures suivantes:
ProdMat(A,B,C,n); MatScal(A,α,C,n); SomMat(A,B,C,n);
MatVect(A,v,u,n)** et **SomVect(u,v,c,n)
permettant de calculer respectivement: $C = AB$, $C = \alpha A$, $C = A + B$, $u = Av$ et $c = u + v$.

(a) *En s'inspirant de l'algorithme de Horner pour l'évaluation des polynômes réels, proposer un algorithme pour calculer $P(A)$ (on utilisera des procédures données ci-dessus). (1.5pt)*
(b) *Quel est le coût cet algorithme numérique. (1pt)*
(c) *Soit u un vecteur de taille n. En utilisant l'algorithme ci-dessus, quel est le coût de calcul $P(A)u$ (0.5pt).*
(d) *Proposer un algorithme pour le calcul du produit $P(A)u$ n'utilisant que le produit matrice vecteur et la somme des vecteurs (on pourra faire une adaptation de la méthode des puissances successives). Déterminer le coût de cet algorithme (2pts).*
(e) *Comparer l'efficacité relative des deux approches (1pt)*

xercice 3 ***(6 pts)*** *On se propose calculer la valeur approchée de l'intégrale suivante:*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-\sin^2(t))dt.$$

1. *Montrer que $I \in \mathbb{R}$ (0.25pt)*

2. *En utilisant la série entière de la fonction exponentielle développée en 0, Montrer que (2pts)*

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n J_n,$$

où a_n $(n \geq 0)$, est une suite à déterminer et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n} dt.$

3. *Montrer que pour tout $n > 0$, $(2n)J_n = (2n-1)J_{n-1}$ et déterminer en fonction de n, l'expression de J_n. (1.5pts)*

4. *Établir la relation de recurrence vérifiée par la suite $(a_n J_n)_{n>0}$. (0.5pt)*

5. *Donner une majoration du reste d'ordre N de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n J_n$. (0.5pt)*

6. *Concevoir et écrire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $S(x_0)$ avec une incertitude absolue $< \epsilon$. (1.5pts)*

Ecole Nationale Supérieure Polytechnique **Année Académique 2019/2020**

Optique Géométrique **Session normale 2020**

Durée : 2H

Exercice 1

On fabrique une lentille mince convergente dans un verre d'indice $n = 1.5$. Les rayons de courbure des surfaces sont de 20 et $50\ cm$.

1) Dessiner les différentes configurations
2) Dans chaque cas, calculer la vergence de la lentille

Exercice 2

On réalise l'inclusion d'un insecte $\overline{AB}$ dans de la résine d'indice $n = 1.5$. L'indice de l'air est $n' = 1$. La surface Σ de la résine est une portion de sphère de rayon R et de centre de courbure C. L'insecte est placé à $1\ cm$ du sommet S à l'intérieur de la résine et l'on veut à travers la surface Σ en obtenir une image $\overline{A'B'}$ avec un grandissement transversal $|G_t| = 1.1$. Suivant le signe choisi pour G_t, il y a deux solutions. Dans chaque cas donner :

1) La position de l'image $\overline{A'B'}$ et sa nature, ainsi que le rayon de courbure $R = \overline{SC}$.
2) En déduire la vergence du dioptre et la position des foyers F *et* F',
3) Représenter sommairement à l'échelle les positions de S, C, F, F', $\overline{AB}$ *et* $\overline{A'B'}$. Quelle est la « bonne solution » ?

Exercice 3

Un système optique d'indice n, placé dans l'air, est limité par deux dioptres sphériques de rayons $\overline{S_1C_1}$ et $\overline{S_2C_2}$. On donne $n = 1.5$; $\overline{S_1C_1} = 10cm$; $\overline{S_2C_2} = -20cm$ et $\overline{S_1S_2} = +50cm$

1) Calculer
   - Les distances focales f_1 **et** f_1' du premier dioptre
   - Les distances focales f_2 **et** f_2' du second dioptre
   -
2) On remplace les deux dioptres par un système équivalent caractérisé par les foyers F, F', les plans principaux H, H', les points nodaux N, N' et le centre optique O
   a) Calculer la vergence et les distances focales du système
   b) Sur un papier millimétré, placer les dioptres avec les centres de courbure et leurs foyers respectifs. Retrouver les plans principaux par construction. Un plan par figure. En déduire le centre optique du système.
   c) Un objet $\overline{AB}$ de $2cm$ de hauteur est placé sur l'axe du système tel que : $\overline{S_1A} = -25cm$
      - Déterminer graphiquement l'image $\overline{A'B'}$ à l'aide des 3 rayons particuliers
      - Donner la valeur numérique du grandissement G_t
   d) Déterminer les éléments de la matrice de transfert en vous appuyant sur les résultats des questions précédentes.

The university of Yaounde 1
National Advanced School of Engineering (ENSP)
MSP: Level 2 U.E HUM 220.
English language expression examination
Second semester 2020. Time: 1hour

1) Explain exactly what you understand by this statement: '**Different substances have different coefficients of expansion**' (4pts)

2) Explain the different methods of heat transmission with examples (**4pts**)

3) What is the advantage of building a bridge with concrete and not with steel? **(2pts)**

4) Describe a simple experiment to show that the specific heats of aluminium and copper are different. NB aluminium (Al) =900 J/kg °C and copper (Cu) =400J/kg °C (**5pts**)

4) Heating a substance does not always raise its temperature. Explain (**5pts**)

E.N.S.P. .... *Niveau II 2019-20 / Semestre 2* .... ND/NG

***** U.E. MAT 227 « *Analyse Numérique* », Examen Final *(3H 00mn)* *****

1. *Le correcteur appréciera le soin apporté à la rédaction et à la présentation du devoir*.
2. TOUT DOCUMENT INTERDIT (*SOUS QUELQUE FORMAT QUE CE SOIT*).
3. CALCULATRICES AUTORISEES, *SAUF LES PROGRAMMABLES*.
4. SOYEZ CLAIR ET PRECIS DANS LES REPONSES, mais CONCIS.
5. *L'objectif ici ne doit pas être de chercher à traiter à tout prix toute l'épreuve, mais, plutôt, d'en couvrir une part significative de manière convaincante.*
6. *Effort personnel apprécié, mais toute tricherie ou tentative de tricherie sera sévèrement sanctionnée*

**** *EXERCICE 1* (5 POINTS) ****

1°) Rappeler la définition de $\mathrm{pL}_{1,0,-2,4,-3,5}f$.

••• *Dans la suite, on considère* $\mathrm{pL}_{1,0,-2,4,-3,5}f$ *avec les données :*

$$f(1) = -2, \quad f(0) = -2, \quad f(-2) = 0, \quad f(4) = 2, \quad f(-3) = -2, \quad f(5) = -2.$$

2°) Même sans calculer $\mathrm{pL}_{1,0,-2,4,-3,5}f$, pourquoi est-on sûr, d'avance, qu'il existe un polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathrm{IR}, \ (\mathrm{pL}_{1,0,-2,4,-3,5}f)(x) + 2 = x(x+3)(x-1)(x-5)\cdot Q(x) \ ?$$

3°) Calculer $\mathrm{pL}_{1,0,-2,4,-3,5}f$ *sous forme de Newton* en prenant les points d'interpolation dans un ordre permettant de déduire ensuite, rapidement, le polynôme Q de 2°) ci-dessus.

**** *EXERCICE 2* (7 POINTS) ****

Soit $P \in \mathrm{IR}[x]$ donné par : $P(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

On veut écrire un *algorithme efficace de calcul* de la valeur du polynôme P en un réel x arbitraire donné.

1°) Quels sont les *données nécessaires* et le *résultat attendu* pour ce calcul ?

2°) Montrer que $P(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, où les réels $u_0, \cdots, u_n$ peuvent se calculer par récurrence à partir des données, puis dire comment et dans quel ordre.

3°) Si on veut être efficace ici, il y a une expression mathématique E que l'algorithme (*qu'on veut concevoir*) sera obligé de calculer d'entrée, en stockant sa valeur. Laquelle, pourquoi et comment ?

N.B. *Eviter de bâcler : analyser la situation en fonction de la réponse donnée en 2°) !*

4°) On veut adpater ici, *efficacement*, le classique *algorithme selon les puissances croissantes* pour calculer la valeur de P en x.

a) Donner alors le *principe d'action* et les *formules de calcul* permettant d'aboutir au résultat attendu.

b) En déduire une *analyse mathématique* pertinente permettant de mettre clairemment en évidence comment on peut calculer le résultat visé à partir des données disponibles.

c) Ecrire l'algorithme correspondant à cette analyse.

d) Coût numérique de cet algorithme.

**** *EXERCICE 3* (3 POINTS) ****

1°) a) Décrire une situation concrète où se pose la problématique de l'*approximation numérique* d'une fonction $f : \mathrm{IR} \longrightarrow \mathrm{IR}$ à partir d'une *information partielle* disponible sur cette fonction, en précisant bien quelle est cette information partielle, et quelle pourrait être l'*information manquante*.

b) Illustrer cette situation par un graphique clair et lisible (et avec une légende informative).

2°) a) Que peut-on alors chercher à faire à partir de l'information disponible sur f ?

N.B. Donner, brièvement, les 2 cas de figure d'intérêt, en pratique.

b) Pour chacun de ces cas de figure, dire, brièvement, ce qu'on fait pour le résoudre en pratique.

****** EXERCICE 4 (10 POINTS) ******

Soit $\mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$, l'ensemble des matrices carrées, à n lignes et n colonnes, à coefficients dans IR.
On s'intéresse ici à un système linéaire dans IR^n :

$$\mathrm{A.X} = \mathrm{b} \quad (S),$$

avec une matrice du système $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathrm{IR})$ inversible. On notera, respectivement :

1. $a_{ij} \in \mathrm{IR}$, les *coefficients* de la matrice A, avec $i, j \in [\,1\,(1)\,n\,]$;

2. $x_i \in \mathrm{IR}$, les *coordonnées* du vecteur $\mathrm{X} \in \mathrm{IR}^n$, avec $i \in [\,1\,(1)\,n\,]$;

3. $b_i \in \mathrm{IR}$, les *coordonnées* du vecteur $\mathrm{b} \in \mathrm{IR}^n$, avec $i \in [\,1\,(1)\,n\,]$.

I - *Préliminaires.*

1°) a) Lors du *premier Cours de cette U.E.*, il a été expliqué qu'est-ce qui peut motiver à devoir s'intéresser à la résolution d'un système linéaire comme (S) en *Analyse Numérique*, bien que ce soit, en fait, un problème entièrement résolu du point de vue de la théorie de l'*Algèbre Linéaire*. Quelle est cette motivation ?

b) Un exemple concret de cette motivation a même été donné lors de ce Cours. Lequel ?

c) Mais un autre exemple concret a été mis en évidence lors du Cours sur l'*interpolation de Lagrange*. Lequel ?

d) Si vous avez parcouru le document du Cours sur l'*Approximation numérique d'une fonction* qui vous a été remis, un autre exemple concret y apparaît. Lequel ?

2°) a) Lorsqu'on veut résoudre (S), quelles sont les *données nécessaires* et le *résultat attendu* ?

b) S'il y a des erreurs sur ces données, cela voudrait dire quoi et quelle(s) conséquence(s) cela pourra-t-il avoir sur la résolution de (S) ?

••• *On examine, ci-après, un type particulier de matrice* A *pour lequel les connaissances de base d'*Algèbre Linéaire *suffisent pour construire un algorithme efficace de résolution du système linéaire* (S)*, sans qu'il ne soit nécessaire de faire appel ni à la* méthode du pivot de Gauss, *ni à d'autres connaissances spécifiques d'*Analyse Numérique *en la matière.*

II - *Cas où* A *est une matrice triangulaire supérieure.*

1°) Juste pour illustration, écrire la matrice A pour le cas $n = 5$.

•• *Dans toute la suite, on se placera dans le cas* $n \in \mathrm{IN}^*$*, quelconque.*

2°) a) Ecrire l'aspect général de la matrice A.

b) Détailler alors les équations du système linéaire (S) dans ce cas.

3°) Pour une telle matrice A, comment voit-on qu'elle est inversible (comme il a été supposé d'entrée) ?

4°) Compte tenu de ce qui précède :

a) Il y a une inconnue du système (S) dont le calcul de la valeur est immédiat ici. Laquelle et comment ?

b) Une fois obtenue la valeur de cette inconnue là, il y a une autre inconnue du système (S) dont le calcul de la valeur devient immédiat. Laquelle et comment ?

c) Une fois obtenue la valeur des 2 inconnues ci-dessus, il y en a une autre dont le calcul de la valeur devient immédiat. Laquelle et comment ?

5°) a) Généraliser ce raisonnement pour dire comment calculer les valeurs de toutes les inconnues de (S).

b) En déduire un algorithme qui résoud (S). N.B. *Analyse mathématique non demandée.*

c) Déterminer le coût numérique de cet algorithme.

6°) Lors des calculs de cet algorithme par ordinateur, il y aura certainement des *erreurs d'arrondi.*

a) Pourquoi ?

b) A quel moment va apparaître la $1^{\text{ère}}$ erreur d'arrondi ?

c) Et la $2^{\text{ème}}$? La $3^{\text{ème}}$? La $4^{\text{ème}}$?

d) En tout, combien d'erreurs d'arrondi fera l'algorithme ?

.... *FIN* ....