Quadriques

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 ** I

Nature et « éléments caractéristiques » de la quadrique $(\mathscr{S})$ dont une équation dans un repère orthonormé donné $\mathscr{R} = (O, i, j, k)$ de l'espace de dimension 3 est :

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4x + 4y - 1 = 0$.
2. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 1 = 0$.
3. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$.
4. $x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 2x + 4y = 0$.
5. $x^2 - 4x - 3y - 2 = 0$.
6. $7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz - 36x + 72y - 108z + 36 = 0$.
7. $(x-y)(y-z) + (y-z)(z-x) + (z-x)(x-y) + (x-y) = 0$.
8. $xy + yz = 1$.
9. $xy + yz + zx + 2y + 1 = 0$.

Correction ▼ [005825]

Exercice 2 **

Déterminer la quadrique contenant le point $A(2,3,2)$ et les deux paraboles $(\mathscr{P})$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ y^2 = 2x \end{array}\right.$ et $(\mathscr{P}')$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y^2 = 2z \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005826]

Exercice 3 ***

Démontrer que toute équation du second degré symétrique en x, y et z est l'équation d'une surface de révolution (une surface $(\mathscr{S})$ est dite de révolution d'axe $(\mathscr{D})$ si et seulement si $(\mathscr{S})$ est invariante par toute rotation d'axe $(\mathscr{D})$).

Correction ▼ [005827]

Exercice 4 ***

Former l'équation de la surface de révolution $(\mathscr{S})$ engendrée par la rotation de la droite $(\mathscr{D})$ $\left\{\begin{array}{l} x = z+2 \\ y = 2z+1 \end{array}\right.$ autour de la droite (Δ) d'équations $x = y = z$. Quelle surface obtient-on ?

Correction ▼ [005828]

Exercice 5 ***

Equation du cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$ dans les cas suivants :

1. $S(0,0,0)$ et $(\mathscr{C}) : x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ t \in \mathbb{R}^*$.
2. $S(1,-1,0)$ et $(\mathscr{C}) : \left\{\begin{array}{l} y + z = 1 \\ x^2 + y^2 = z \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005829]

Exercice 6 ***

Trouver une équation du cône de sommet S circonscrit à la surface $(\mathscr{S})$ quand

1. $S(0,5,0)$ et $(\mathscr{S}) : x^2+y^2+z^2=9$,
2. $S(0,0,0)$ et $(\mathscr{S}) : x^2+xy+z-1=0$. (Préciser la courbe de contact.)

(**Définitions.** Le cône $(\mathscr{C})$ de sommet S circonscrit à la surface $(\mathscr{S})$ est la réunion des tangentes à $(\mathscr{S})$ passant par S. D'autre part, une droite est tangente à la surface $(\mathscr{S})$ en un point M si et seulement si elle passe par M et est contenue dans le plan tangent à $(\mathscr{S})$ en M).

Correction ▼ [005830]

Exercice 7 ***

Pour quelles valeurs de λ la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $x(\lambda-y)+y(\lambda-z)+z(\lambda-x)-\lambda=0$ est-elle un cône du second degré ? En préciser alors le sommet et une directrice.

Correction ▼ [005831]

Exercice 8 *

Montrer que l'arc paramétré $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}e^t(\cos t-\sin t) \\ y=\frac{1}{2}e^t(\cos t+\sin t) \\ z=e^t \end{array}\right.$ est tracé sur un cône du second degré de sommet O.

Correction ▼ [005832]

Exercice 9 ***

Equation cartésienne du cylindre $(\mathscr{C})$ de direction $\overrightarrow{u}$ et de directrice (C) dans les cas suivants :

1. $\overrightarrow{u}(1,0,1)$ et $(C) : x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ z=a\sin t\cos t$ (a et b tous deux non nuls).
2. $\overrightarrow{u}(0,1,1)$ et $(C) : \left\{\begin{array}{l} y+z=1 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005833]

Exercice 10 **

Equation du cylindre $(\mathscr{C})$ de section droite la courbe (C) d'équations $\left\{\begin{array}{l} z=x \\ 2x^2+y^2=1 \end{array}\right.$

Correction ▼ [005834]

Exercice 11 ** I

Equation cartésienne du cylindre de révolution $(\mathscr{C})$ de rayon R et d'axe $(\mathscr{D})$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x=z+2 \\ y=z+1 \end{array}\right.$. Déterminer R pour que la droite (Oz) soit tangente au cylindre.

Correction ▼ [005835]

Exercice 12 *

Trouver les plans tangents à l'ellipsoïde d'équation $x^2+2y^2+3z^2=21$ qui sont parallèles au plan d'équation $x+4y+6z=0$.

Correction ▼ [005836]

Exercice 13 **

Trouver les plans tangents à la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $x-8yz=0$ et contenant la droite $(\mathscr{D})$

d'équations $\left\{\begin{array}{l} y=1 \\ x+4z+2=0 \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005837]

Exercice 14 ** I

1. Equation du cylindre de révolution $(\mathscr{C})$ d'axe la droite d'équations $x=y+1=3z-6$ et de rayon 3.
2. Equation du cône de révolution $(\mathscr{C})$ d'axe la droite d'équations $x=y+1=3z-6$, de sommet $S(0,-1,2)$ et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{3}$.

Correction ▼ [005838]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on pose $Q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2yz$.
Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $x^2+y^2+z^2-2yz=x^2+(y-z)^2=X^2+2Y^2$ en posant $X=x$, $Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(y-z)$ et $Z=\frac{1}{\sqrt{2}}(y+z)$ correspondant au changement de bases orthonormées de matrice $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.
Notons $\mathscr{R}'=(O,e_1,e_2,e_3)$ le repère orthonormé ainsi défini. La surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation dans $\mathscr{R}$? $X^2+2Y^2-4X+2\sqrt{2}(Y+Z)-1=0$ ou encore
$$(X-2)^2+2\left(Y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=-2\sqrt{2}\left(Z-\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$
La surface $(\mathscr{S})$ est un paraboloïde elliptique de sommet S de coordonnées $\left(2,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ dans $\mathscr{R}'$ et donc $(2,2,1)$ dans $\mathscr{R}$.
2. En posant $X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$ et $Z=z$, on obtient : $2X^2+Z^2=1$.
La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre elliptique d'axe (OY) ou encore d'axe la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l}y=-x\\z=0\end{array}\right.$.
3. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, posons $Q(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy+2xz$.
La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.
$$\begin{aligned}\chi_A&=\begin{vmatrix}1-X&-1&1\\-1&1-X&0\\1&0&1-X\end{vmatrix}=(1-X)^3+(X-1)+(X-1)=(1-X)((1-X)^2-2)\\&=(1-X)(1+\sqrt{2}-X)(1+\sqrt{2}-X).\end{aligned}$$
Q est de rang 3 et de signature $(2,1)$. La surface $(\mathscr{S})$ peut être un hyperboloïde à une ou deux nappes ou un cône de révolution.
$\mathrm{Ker}(A-I_3)=\mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.
$\mathrm{Ker}(A-(1+\sqrt{2})I_3)=\mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2=\frac{1}{2}(\sqrt{2},-1,1)$ et $\mathrm{Ker}(A-(1-\sqrt{2})I_3)=\mathrm{Vect}(e_3)$ où $e_3=\frac{1}{2}(\sqrt{2},1,-1)$
La matrice de passage correspondante est la matrice $P=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.
Déterminons une équation réduite de la surface $(\mathscr{S})$ dans le repère (O,e_1,e_2,e_3).

$$X^2+(1+\sqrt{2})Y^2+(1-\sqrt{2})Z^2+\frac{3}{\sqrt{2}}(Y+Z)-\frac{1}{2}(\sqrt{2}X-Y+Z)+\frac{1}{2}(\sqrt{2}X+Y-Z)+1=0$$

$$\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y^2+\frac{3+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}Y\right)+(1-\sqrt{2})\left(Z^2-\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}Z\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+\frac{3+\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})}\right)^2-\frac{(3+\sqrt{2})^2}{8(1+\sqrt{2})}+(1-\sqrt{2})\left(Z-\frac{3-\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{2})}\right)^2-\frac{(3-\sqrt{2})^2}{8(1-\sqrt{2})}+1=0$$

$$\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+(1-\sqrt{2})\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{11+6\sqrt{2}}{8(1+\sqrt{2})}+\frac{11-6\sqrt{2}}{8(1-\sqrt{2})}-1$$

$$\Leftrightarrow X^2+(1+\sqrt{2})\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+(1-\sqrt{2})\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=-\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{3}X^2-\frac{4(1+\sqrt{2})}{3}\left(Y+1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{4(\sqrt{2}-1)}{3}\left(Z-1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=1.$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde à deux nappes de centre de coordonnées $\left(0,-1+\frac{\sqrt{2}}{4},1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

4. On pose $X=\frac{1}{\sqrt{5}}(x-2y)$, $Y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x+y)$ et $Z=z$. Dans le repère $\mathscr{R}'$ ainsi défini, la surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation $5X^2+5Z^2-\frac{2}{\sqrt{5}}(X+2Y)+\frac{4}{\sqrt{5}}(-2X+Y)=0$ ou encore $5\left(X-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+5Z^2=1$.

   La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre de révolution d'axe la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l}X=\frac{1}{\sqrt{5}}\\ Z=0\end{array}\right.$ dans $\mathscr{R}'$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
5. $x^2-4x-3y-2=0\Leftrightarrow(x-2)^2=3(y+2)$. La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre parabolique de direction (Oz).
6. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, posons $Q(x,y,z)=7x^2-2y^2+4z^2+4xy+20xz+16yz$. La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix}7&2&10\\2&-2&8\\10&8&4\end{pmatrix}$.

$$\chi_A=\begin{vmatrix}7-X&2&10\\2&-2-X&8\\10&8&4-X\end{vmatrix}=(7-X)(X^2-2X-72)-2(-2X-72)+10(10X+36)$$
$$=-X^3+9X^2+162X=-X(X+9)(X-18).$$

Donc Q est de rang 2 et de signature $(1,1)$.

$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(A)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}7x+2y+10z=0\\2x-2y+4z=0\\10x+8y+4z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-y=-4z\\5x+4y=-2z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=-2z\\y=2z\end{array}\right.$ et $\mathrm{Ker}(A)=\mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1=\frac{1}{3}(-2,2,1)$.

$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(A+9I_3)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}16x+2y+10z=0\\2x+7y+8z=0\\10x+8y+13z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-8x-5z\\z=-2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=2x\\z=-2x\end{array}\right.$ et $\mathrm{Ker}(A+9I_3)=\mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2=\frac{1}{3}(1,2,-2)$.

$\mathrm{Ker}(A-18I_3)=\mathrm{Vect}(e_3)$ où $e3=-e_1\wedge e_2=\frac{1}{3}(2,1,2)$.

La matrice de passage du changement de bases ainsi défini est $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1&2\\2&2&1\\1&-2&2\end{pmatrix}$.

Déterminons une équation réduite de la surface $(\mathscr{S})$ dans le repère $\mathscr{R}' = (O, e_1, e_2, e_3)$

$$\begin{aligned}
&7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz - 36x + 72y - 108z + 36 = 0\\
&\quad \Leftrightarrow -9Y^2 + 18Z^2 - 12(-2X + Y + 2Z) + 24(2X + 2Y + Z) - 36(X - 2Y + 2Z) + 36 = 0\\
&\quad \Leftrightarrow -9Y^2 + 18Z^2 + 36X + 108Y - 72Z + 36 = 0 \Leftrightarrow -Y^2 + 2Z^2 + 4X + 12Y - 8Z + 4 = 0\\
&\quad \Leftrightarrow 4(X+8) = (Y-6)^2 - 2(Z-2)^2.
\end{aligned}$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un paraboloïde hyperbolique. Son point selle est le point de cordonnées $(-8, 6, 2)$ dans le repère $\mathscr{R}'$.

7. La surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zx - x + y = 0$.
   Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, posons $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zx$. La matrice de Q dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Sp}(A) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$. Un base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de vecteurs propres est la famille de matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.
   Dans le repère $\mathscr{R}' = (O, e_1, e_2, e_3)$, la surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation cartésienne $\frac{3}{2}(X^2+Y^2) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z\right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z\right) = 0$ ou encore $\frac{3}{2}(X^2+Y^2) - \sqrt{2}X = 0$ ou enfin $\left(X - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + Y^2 = \frac{2}{9}$.
   La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre de révolution d'axe la droite d'équation $\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ Y = 0 \end{cases}$ dans le repère $\mathscr{R}'$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{3}$.
8. En posant $X = y$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y+z)$ (et $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y+z)$, $xy + yz = 0 \Leftrightarrow XY = \sqrt{2}$.
   La surface $(\mathscr{S})$ est un cylindre hyperbolique.
9. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, posons $Q(x,y,z) = xy + yz + zx$.
   La matrice de Q dans la base canonique (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$ est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Sp}(A) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ et donc la surface $(\mathscr{S})$ est soit un hyperboloïde à une ou deux nappes, soit un cône du second degré et dans tous les cas une surface de révolution (puisque les deux valeurs propres négatives sont égales) d'axe de direction $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(1,1,1)$ et passant par le point critique $\Omega(-1, 1, -1)$.
   Quand on se place dans le repère (Ω, i, j, k), la surface $(\mathscr{S})$ admet pour équation $XY + YZ + ZX + 2 = 0$ (car $f(-1,1,-1) = 2$) puis dans le repère (Ω, e_1, e_2, e_3), $-\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 + Z^2 + 2 = 0$ ou encore $\frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 - \frac{1}{2}Z^2 = 1$.
   La surface $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde de révolution à une nappe.

Correction de l'exercice 2 ▲

On cherche $(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j) \neq (0,\dots,0)$ tel que la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + 2gx + 2hy + 2iz + j = 0$ contienne la parabole $(\mathscr{P})$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, la parabole $(\mathscr{P}')$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = \frac{t^2}{2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, et le point $A(2,3,2)$.

$$\begin{aligned}(\mathscr{P})\subset(\mathscr{S}) &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ \frac{a}{4}t^4+bt^2+dt^3+gt^2+2ht+j=0 \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ \frac{a}{4}t^4+dt^3+(b+g)t^2+2ht+j=0\\ &\Leftrightarrow a=d=h=j=0 \text{ et } g=-b.\end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{P})$ est contenue dans $(\mathscr{S})$ si et seulement si $(\mathscr{S})$ a une équation de la forme $by^2+cz^2+2eyz+2fzx-2bx+2iz=0$ avec $(b,c,e,f,i)\neq(0,0,0,0,0)$.

$$\begin{aligned}(\mathscr{P}')\subset(\mathscr{S}) &\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ bt^2+\frac{c}{4}t^4+et^3+it^2=0 \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ \frac{c}{4}t^4+et^3+(b+i)t^2=0\\ &\Leftrightarrow c=e=0 \text{ et } i=-b.\end{aligned}$$

Donc $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{P}')$ sont contenues dans $(\mathscr{S})$ si et seulement si $(\mathscr{S})$ a une équation de la forme $by^2+2fzx-2bx-2bz=0$ avec $(b,f)\neq(0,0)$.
Enfin, $A\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow 9b+8f-4b-4b=0\Leftrightarrow b=-8f$ et $f\neq 0$. On trouve donc une et une seule quadrique à savoir la surface $(\mathscr{S})$ d'équation $-4y2+zx+8x+8z=0$.
En posant $X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+z)$, $Y=y$ et $Z=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-z)$, on obtient

$$\begin{aligned}-4y2+zx+8x+8z &= -4Y^2+\frac{1}{2}(X+Z)(X-Z)+8\sqrt{2}X\\ &=\frac{1}{2}\left(X+8\sqrt{2}\right)^2-4Y^2+\frac{1}{2}Z^2-64.\end{aligned}$$

Dans le nouveau repère ainsi défini, une équation cartésienne de la surface $(\mathscr{S})$ est $\frac{1}{128}\left(X+8\sqrt{2}\right)^2-\frac{1}{16}Y^2+\frac{1}{128}Z^2=1$ et $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde à deux nappes.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit $(\mathscr{S})$ une surface du second degré d'équation $f(x,y,z)=0$ où f est symétrique en x, y et z. Soient σ_1, σ_2 et σ_3 les trois fonctions symétriques élémentaires en x, y et z.
Puisque f est symétrique en x, y et z, f est un polynôme en σ_1, σ_2 et σ_3. f est d'autre part un polynôme de degré 2 en x, y et z et donc

$$\text{il existe } (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \text{ avec } (a,b)\neq(0,0) \text{ tel que } f=a\sigma_1^2+b\sigma_2+c\sigma_1+d.$$

Réciproquement, si f est de la forme ci-dessus, alors f est symétrique en x, y et z.
Puisque $\sigma_2=xy+yz+zx=\frac{1}{2}((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2))$, $(\mathscr{S})$ admet une une équation cartésienne de la forme :

$$\left(a+\tfrac{b}{2}\right)(x+y+z)^2-b(x^2+y^2+z^2)+c(x+y+z)+d=0 \text{ où } (a,b)\neq(0,0).$$

Soit $(\mathscr{D})$ la droite passant par O dirigée par $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ ($\overrightarrow{n}$ est vecteur normal à tout plan d'équation $x+y+z=k$, $k\in\mathbb{R}$) et soit r une rotation quelconque d'axe $(\mathscr{D})$.
Si M est un point de coordonnées (x,y,z) et $M'=r(M)$ a pour coordonnées (x',y',z') alors $x+y+z=x'+y'+z'$ car M et M' sont dans un plan perpendiculaire à $(\mathscr{D})$ et $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$ car une rotation est une isométrie et car $r(O)=O$.
Finalement, pour toute rotation r d'axe $(\mathscr{D})$, $M\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow r(M)\in(\mathscr{S})$ et donc la surface $(\mathscr{S})$ est une surface de révolution d'axe $(\mathscr{D})$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $A(a,b,c)$ un point quelconque de l'espace E_3.
Déterminons un système d'équation du cercle (C_A) d'axe (Δ) d'équations $x=y=z$ passant par A.
Ce cercle est par exemple l'intersection du plan passant par A de vecteur normal $(1,1,1)$ et de la sphère de centre O et de rayon OA.

Un système d'équations de (C_A) est $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=a+b+c \\ x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2 \end{array}\right.$.
Déterminons alors une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $M(x,y,z)$ soit un point de $(\mathscr{S})$ est $(C_M)\cap(\mathscr{D})\neq\varnothing$. Donc

$$M\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3/\left\{\begin{array}{l} x+y+z=\alpha+\beta+\gamma \\ x^2+y^2+z^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\ \alpha=\gamma+2 \\ \beta=2\gamma+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3/\left\{\begin{array}{l} \alpha=\gamma+2 \\ \beta=2\gamma+1 \\ x+y+z=\gamma+2+2\gamma+1+\gamma \\ x^2+y^2+z^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3/\left\{\begin{array}{l} \alpha=\gamma+2 \\ \beta=2\gamma+1 \\ \gamma=\frac{1}{4}(x+y+z-3) \\ x^2+y^2+z^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{4}(x+y+z-3)+2\right)^2+\left(\frac{2}{4}(x+y+z-3)+1\right)^2+\left(\frac{1}{4}(x+y+z-3)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2)=(x+y+z+5)^2+4(x+y+z-1)^2+(x+y+z-3)^2$$

$$\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2)=6(x+y+z)^2-2(x+y+z)+38$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2+y^2+z^2)-6(xy+yz+zx)-(x+y+z)-19=0.$$

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } (\mathscr{S}) \text{ est } 5(x^2+y^2+z^2)-6(xy+yz+zx)-(x+y+z)-19=0.}$$

La matrice de la forme quadratique $(x,y,z)\mapsto 5(x^2+y^2+z^2)-6(xy+yz+zx)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont 8, valeur propre d'ordre 2 associée au plan d'équation $x+y+z=0$ et -1 valeur propre d'ordre 1 associé à la droite d'équation. Dans le repère $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ où $\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$ et $\overrightarrow{e_3}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

$$M\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow 8x'^2+8y'^2-z'^2-\sqrt{3}z'-19=0\Leftrightarrow 8\left(x'-\frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2 8y'^2-z'^2=19+\frac{3}{32}.$$

La surface $(\mathscr{S})$ est un hyperboloïde à une nappe.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. On note $(\mathscr{S})$ le cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{S})\setminus\{O\}\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*/\ O+\lambda\overrightarrow{OM}\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*,\ \exists t\in\mathbb{R}^*/\left\{\begin{array}{l} \lambda x=t \\ \lambda y=t^2 \\ \lambda z=t^3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}^*,\ \exists t\in\mathbb{R}^*/\left\{\begin{array}{l} t=\lambda x \\ y=\lambda x^2 \\ z=\lambda^2x^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\neq 0 \text{ et } y\neq 0 \text{ et } z=\left(\frac{y}{x^2}\right)^2x^3$$

$$\Leftrightarrow x\neq 0 \text{ et } y\neq 0 \text{ et } z=y^2x.$$

Si on récupère le point O, $M(x,y,z)\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow(x=y=0 \text{ ou } xy\neq 0)$ et $z=y^2x$.
On peut noter que la surface d'équation $z=y^2x$ est la réunion du cône, sommet O compris, et des axes (Ox) et (Oy) qui ne font pas partie du cône (à l'exception du point O).

2. On note $(\mathscr{S})$ le cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$.

$$\begin{aligned}M(x,y,z) \in (\mathscr{S})\setminus\{S\} &\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}^*/\ S+\lambda\overrightarrow{SM} \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}^*/\ (1+\lambda(x-1),-1+\lambda(y+1),\lambda z) \in (\mathscr{C})\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}^*/ \left\{\begin{array}{l} -1+\lambda(y+1)+\lambda z = 1\\ (1+\lambda(x-1))^2+(-1+\lambda(y+1))^2 = \lambda z\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left(1+\frac{2}{y+z+1}(x-1)\right)^2+\left(-1+\frac{2}{y+z+1}(y+1)\right)^2 = \frac{2}{y+z+1}z\\
&\Leftrightarrow (2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2 = 2(y+z+1)z \text{ et } y+z+1\neq 0.\end{aligned}$$

En résumé, $M(x,y,z)$ est dans $(\mathscr{S})$ si et seulement si $M=S$ ou $M\neq S$ et $(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2 = 2(y+z+1)z$ et $y+z+1\neq 0$.
Maintenant le point $S(1,-1,0)$ est dans le plan (P) d'équation $y+z+1=0$ et la courbe $(\mathscr{C})$ n'a aucun point dans ce plan. Donc la surface $(\mathscr{S})$ contient un et un seul point de ce plan.
Notons alors $(\mathscr{S}')$ la surface d'équation $(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2 = 2(y+z+1)z$ et vérifions que l'intersection de $(\mathscr{S}')$ et de (P) est $\{S\}$. Ceci montrera que $(\mathscr{S}') = (\mathscr{S})$.

$$\begin{aligned}M(x,y,z) \in (\mathscr{S})\cap(P) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y+z+1=0\\ (2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2 = 2(y+z+1)z\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y+z+1=0\\ 2x+y+z-1=0\\ y-z+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-1\\ z=0\\ x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow M=S\end{aligned}$$

Finalement $(\mathscr{S}') = (\mathscr{S})$. Une équation de $(\mathscr{S})$ est donc $(2x+y+z-1)^2+(y-z+1)^2 = 2(y+z+1)z$ ou encore $4x^2+2y^2+4xy+4xz-2yz-4x+2y-6z+2=0$. $(\mathscr{S})$ est donc un cône du second degré.

Correction de l'exercice 6 ▲

Notons (C) le cône de sommet S circonscrit à la surface $(\mathscr{S})$.

1. Ici $(\mathscr{S})$ est la sphère de centre O et de rayon 3 et le point S est extérieur à cette sphère. Donc

$$\begin{aligned}M(x,y,z)\in(C) &\Leftrightarrow M=S \text{ ou } M\neq S \text{ et } d(O,(SM))=3 \Leftrightarrow M=S \text{ ou } M\neq S \text{ et } \|\overrightarrow{SO}\wedge\overrightarrow{SM}\| = 3\|\overrightarrow{SM}\|\\
&\Leftrightarrow \|\overrightarrow{SO}\wedge\overrightarrow{SM}\| = 3\|\overrightarrow{SM}\| \Leftrightarrow \|(0,5,0)\wedge(x,y-5,z)\| = 3\|(x,y-5,z)\|\\
&\Leftrightarrow (5z)^2+(5x)^2 = 9(x^2+(y-5)^2+z^2) \Leftrightarrow 16x^2-9(y-5)^2+16z^2=0.\end{aligned}$$

2. Soit $M_0(x_0,y_0,z_0)$ un point de $(\mathscr{S})$ (c'est-à-dire tel que $x_0^2+x_0y_0+z_0-1=0$). $(\mathscr{S})$ est une surface du second degré. Une équation du plan tangent à $(\mathscr{S})$ en M_0 est fournie par la règle de dédoublement des termes :

$$xx_0+\tfrac{1}{2}(y_0x+x_0y)+\tfrac{1}{2}(z+z_0)-1=0.$$

Ce plan tangent contient le point $S(0,0,0)$ si et seulement si $z_0=2$ ce qui montre déjà que la courbe de contact admet pour système d'équations $\left\{\begin{array}{l} x^2+xy+z-1=0\\ z=2\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} x^2+xy+1=0\\ z=2\end{array}\right.$. C'est une hyperbole du plan d'équation $z=2$.
Le cône de sommet S circonscrit à $(\mathscr{S})$ est alors le cône de sommet S et de directrice $(\mathscr{C})$ d'équations $\left\{\begin{array}{l} x^2+xy+1=0\\ z=2\end{array}\right.$. On trouve la surface d'équation $4x^2+4xy+z^2=0$. C'est un cône du second degré.

Correction de l'exercice 7 ▲

Une équation de $(\mathscr{S})$ est encore $xy+yz+zx-\lambda x-\lambda y-\lambda z+\lambda=0$.

La matrice de la forme quadratique $Q\ :\ (x,y,z)\mapsto xy+yz+zx$ dans la base (i,j,k) est $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ est les valeurs propres de cette matrice sont $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et 1. Le rang de Q est 3 et sa signature est $(1,2)$. La surface $(\mathscr{S})$ est à priori soit un hyperboloïde, soit un cône du second degré. Donc $(\mathscr{S})$ est un cône du second degré si et seulement si son (unique) centre de symétrie qui est aussi l'unique point critique de la fonction $f\ :\ (x,y,z)\mapsto x(\lambda-y)+y(\lambda-z)+z(\lambda-x)-\lambda$ appartient à $(\mathscr{S})$.

Point critique.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=0\\\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=0\\\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y+z=\lambda\\z+x=\lambda\\x+y=\lambda\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y=z=\frac{\lambda}{2}.$$

On note alors Ω le point de coordonnées $\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$.

$(\mathscr{S})$ est un cône $\Leftrightarrow\Omega\in(\mathscr{S})\Leftrightarrow\frac{3\lambda^2}{4}-\lambda=0\Leftrightarrow\lambda\in\left\{0,\frac{4}{3}\right\}$.

• Si $\lambda=0$, $(\mathscr{S})$ admet pour équation $xy+yz+zx=0$. Dans le repère (O,X,Y,Z) où $X=/dfrac1\sqrt{2}(x-y)$, $Y=\frac{1}{\sqrt{6}}(x+y-2z)$ et $Z=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z)$, $(\mathscr{S})$ admet pour équation cartésienne $-\frac{1}{2}X^2-\frac{1}{2}Y^2+\frac{1}{2}Z^2=0$ ou encore $(\mathscr{S})$ est le cône de révolution de sommet O et de section droite le cercle d'équations $\left\{\begin{array}{l}Z=1\\X^2+Y^2+Z^2=3\end{array}\right.$ dans (O,X,Y,Z) ou encore $\left\{\begin{array}{l}x+y+z=\sqrt{3}\\x^2+y^2+z^2=3\end{array}\right.$ dans (O,x,y,z).

Puisque $(\mathscr{S})$ est un cône de révolution de sommet O et d'axe la droite d'équations $x=y=z$, il est plus interessant de fournir le demi angle au sommet θ. Le point $A(1,1,1)$ est sur l'axe et le point $M(2,2-1)$ est sur le cône. Donc $\theta=\text{Arccos}\left(\frac{\left|\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}\right|}{OA\times OM}\right)=\text{Arccos}\left(\frac{3}{3\sqrt{3}}\right)=\text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

• Si $\lambda=\frac{4}{3}$, $(\mathscr{S})$ admet pour équation $xy+yz+zx-\frac{4}{3}(x+y+z)+\frac{4}{3}=0$ dans (O,i,j,k) ou encore $XY+XZ+YZ=0$ dans (Ω,i,j,k) ce qui ramène au cas précédent.

Correction de l'exercice 8 ▲

Pour tout réel t, $(x(t))^2+(y(t))^2=\frac{1}{4}e^{2t}((\cos t-\sin t)^2+(\cos t+\sin t)^2)=\frac{1}{2}e^{2t}=\frac{1}{2}(z(t))^2$ et le support de l'arc considéré est contenu dans le cône de révolution d'équation $z^2=2(x^2+y^2)$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{C})\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists m\in(C)/\ M=m+\lambda\overrightarrow{u}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists t\in\mathbb{R}/\left\{\begin{array}{l}x=a\cos t+\lambda\\y=b\sin t\\z=a\cos t\sin t+\lambda\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists t\in\mathbb{R}/\left\{\begin{array}{l}\lambda=x-a\cos t\\y=b\sin t\\z=a\cos t\sin t+x-a\cos t\end{array}\right.\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}/\left\{\begin{array}{l}y=b\sin t\\z=a\cos t\sin t+x-a\cos t\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}/\left\{\begin{array}{l}y=b\sin t\\z-x=a\cos t(\sin t-1)\end{array}\right.\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}/\left\{\begin{array}{l}y=b\sin t\\b(z-x)=a\cos t(y-b)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow b^4(z-x)^2+y^2a^2(y-b)^2=a^2b^2(y-b)^2.$$

En effet,

• $\Rightarrow$ / s'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $y=b\sin t$ et $b(z-x)=a\cos t(y-b)$ alors

$$b^4(z-x)^2+y^2a^2(y-b)^2 = b^2a^2\cos^2 t(y-b)^2+b^2\sin^2 ta^2(y-b)^2 = a^2b^2(y-b)^2(\cos^2 t+\sin^2 t)$$
$$= a^2b^2(y-b)^2.$$

• $\Leftarrow$ / Réciproquement, si $b^4(z-x)^2+y^2a^2(y-b)^2 = a^2b^2(y-b)^2$ alors $b^4(z-x)^2 = a^2(y-b)^2(b^2-y^2)$ et donc
ou bien $y=b$, ou bien $b^2-y^2 \geqslant 0$. Par suite, il existe un réel t tel que $y = b\sin t = b\sin(\pi-t)$ puis

$$b^4(z-x)^2 = a^2(y-b)^2(b^2-y^2) \Rightarrow b^4(z-x)^2 = a^2(b\sin t-b)^2b^2\cos^2 t \Rightarrow b(z-x) = \pm a\cos t(b\sin t-b)$$
$$\Rightarrow b(z-x) = a\cos t(y-b) \text{ ou } b(z-x) = a\cos(\pi-t)(y-b)$$

et il existe un réel t' tel que $y = b\sin t'$ et $b(z-x) = a\cos t'(y-b)$.

2.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{C}) \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists m\in(C)/\ M = m+\lambda\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3/\ \left\{\begin{array}{l} x=X\\ y=Y+\lambda\\ z=Z+\lambda\\ Y+Z=1\\ X^2+Y^2=1\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l}(y-\lambda)+(z-\lambda)=1\\ x^2+(y-\lambda)^2=1\end{array}\right. \Leftrightarrow x^2+\left(y-\frac{1}{2}(y+z-1)\right)^2=1$$
$$\Leftrightarrow 4x^2+(y-z+1)^2=4.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

La direction du cylindre est orthogonale au plan d'équation $z=x$ et est donc engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u}(1,0,-1)$.

$$M(x,y,z)\in(\mathscr{C}) \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists m\in(C)/\ M = m+\lambda\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ \exists(X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3/\ \left\{\begin{array}{l} x=X-\lambda\\ y=Y\\ z=Z+\lambda\\ Z=X\\ 2X^2+Y^2=1\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \left\{\begin{array}{l} z-\lambda=x+\lambda\\ 2(x+\lambda)^2+y^2=1\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x+\frac{1}{2}(z-x)\right)^2+y^2=1 \Leftrightarrow (x+z)^2+2y^2=2.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Un repère de $(\mathscr{D})$ est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(2,1,0)$ et $\overrightarrow{u}(1,1,1)$.

$$M\in(\mathscr{C}) \Leftrightarrow d(M,(\mathscr{D}))=R \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\|^2 = R^2\|\overrightarrow{u}\|^2 \Leftrightarrow \|(x-2,y-1,z)\wedge(1,1,1)\|^2 = R^2\|(1,1,1)\|^2$$
$$\Leftrightarrow (y-z-1)^2+(x-z-2)^2+(x-y-1)^2 = 3R^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-2xy-2xz-2yz-6x+6z+6-3R^2=0.$$

La droite (Oz) est tangente à $(\mathscr{C})$ si et seulement si $d((Oz),(\mathscr{D}))=R$.

$$(Oz) \text{ est tangente à } (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \frac{\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{k},\overrightarrow{u}\right]^2}{\left\|\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{u}\right\|^2} = R^2 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right|^2 = \|(-1,1,0\|^2 \Leftrightarrow 1 = 2R^2 \Leftrightarrow R = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

En un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de l'ellipsoïde la règle de dédoublement des termes fournit une équation du plan tangent : $xx_0+2yy_0+3zz_0=21$.
Ce plan est parallèle au plan d'équation $x+4y+6z=0$ si et seulement si le vecteur $(x_0,2y_0,3z_0)$ est colinéaire au vecteur $(1,4,6)$ ou encore si et seulement si $2x_0=y_0=z_0$.
Enfin le point $(x_0,2x_0,2x_0)$ est sur l'ellipsoïde si et seulement si $x_0^2+8x_0^2+12x_0^2=21$ ce qui équivaut à $x_0^2=1$.
Les plans cherchés sont les deux plans d'équations respectives $x+4y+6z=21$ et $x+4y+6z=-21$.

Correction de l'exercice 13 ▲

Le plan tangent (P_0) en (x_0,y_0,z_0) tel que $x_0-8y_0z_0=0$ admet pour équation $(x+x_0)-8(z_0y+y_0z)=0$ ou encore $x-8z_0y-8y_0z+8y_0z_0=0$.
Un repère de $(\mathscr{D})$ est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(-2,1,0)$ et $\overrightarrow{u}(4,0,-1)$.

$$\begin{aligned}(\mathscr{D})\subset(P_0) &\Leftrightarrow \forall\lambda\in\mathbb{R},\ (-2+4\lambda)-8z_0+8y_0\lambda+8y_0z_0=0 \Leftrightarrow \forall\lambda\in\mathbb{R},\ (8y_0+4)\lambda+8y_0z_0-8z_0-2=0\\ &\Leftrightarrow 8y_0+4=0 \text{ et } 8y_0z_0-8z_0-2=0 \Leftrightarrow y_0=-\frac{1}{2} \text{ et } z_0=-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

On trouve un et un seul plan tangent contenant la droite $(\mathscr{D})$, à savoir le plan tangent à $(\mathscr{S})$ en $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{2},-\frac{1}{6}\right)$ d'équation $3x+4y+12z+2=0$.

Correction de l'exercice 14 ▲

1. Un repère de $(\mathscr{D})$ est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(0,-1,2)$ et $\overrightarrow{u}(3,3,1)$.

$$\begin{aligned}M(x,y,z)\in(\mathscr{C}) &\Leftrightarrow d(M,(\mathscr{D}))=3 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\right\|^2 = 9\|\overrightarrow{u}\|^2\\ &\Leftrightarrow \|(x,y+1,z-2)\wedge(3,3,1)\|^2 = 9\times 19 \Leftrightarrow (y-3z+7)^2+(x-3z+6)^2+9(x-y-1)^2=171.\end{aligned}$$

2. Un repère de $(\mathscr{D})$ est $(A,\overrightarrow{u})$ où $A(0,-1,2)$ et $\overrightarrow{u}(3,3,1)$. De plus, $S=A$.

$$\begin{aligned}M(x,y,z)\in(\mathscr{C}) &\Leftrightarrow M=A \text{ ou } M\neq A \text{ et } \frac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}\right|}{AM\times\|\overrightarrow{u}\|} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}\right)^2 = \frac{1}{4}AM^2\|\overrightarrow{u}\|^2\\ &\Leftrightarrow 4(3x+3(y+1)+(z-2))^2 = 19(x^2+(y+1)^2+(z-2)^2)\\ &\Leftrightarrow 4(3x+3y+z+1)^2-19(x^2+(y+1)^2+(z-2)^2)=0\\ &\Leftrightarrow 17x^2+17y^2-15z^2+72xy+24xz+24yz+24x-14y+84z-91=0.\end{aligned}$$
