UNIVERSITE DE YAOUNDE I
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET SCIENCES PHYSIQUES
EPREUVE DE PROBABILITES-STATISTIQUE

Examen final
Cycle Ingénieur II
Session Normale 2017
Examinateur : Pr TEWA Jean Jules
Durée : 03h00- Janvier 2017

Exercice 1 (4pts) : Soit un couple de variables aléatoires discrètes dont la loi est définie dans le tableau ci-dessous :

X/Y	1	2	3	4
1	0,08	0,04	0,16	0,12
2	0,04	0,02	0,08	0,06
3	0,08	0,04	0,16	0,12

1) Déterminer les lois marginales de ce couple.
2) Etudier l'indépendance des variables aléatoires X et Y.
3) Calculer la covariance du couple (X, Y).
4) Déterminer les lois conditionnelles de X sachant que $Y = 2$, et de Y sachant que $X \in \{1,3\}$.
5) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y/X (Ysachant X) et en déduire $E(Y/X)$.
6) Calculer $E(E(Y/X))$ et comparer cette valeur à $E(Y)$.

Exercice 2 (5pts) : Une urne contient a boules rouges et b boules blanches ($a \geq 1, b \geq 1$). À chaque tirage on choisit une boule au hasard dans l'urne. La boule est ensuite remise dans l'urne et on ajoute une boule de la même couleur. On note R_n l'événement « tirer une boule rouge au $n^{ième}$ tirage » et B_n l'événement « tirer une boule blanche au $n^{ième}$ tirage », avec $n \geq 1$. On considère les variables aléatoires X_n définies par $X_n = 1$ si R_n est réalisé et $X_n = 0$ si B_n est réalisé.

1) Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance mathématique.
2) Calculer $P_{R_1}(R_2)$, $P_{B_1}(R_2)$ et en déduire la loi de X_2.
3) On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$.
   a) Définir l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des valeurs que peut prendre S_n. Si $S_n = k$, quel est le contenu de l'urne juste après le $n^{ième}$ tirage ?
   b) En déduire $P_{A_k}(R_{n+1})$ où A_k est l'événement $\{S_n = k\}$.
   c) Déterminer la relation entre $P(R_{n+1})$ et $P(X_{n+1} = 1)$, entre $P(A_k)$ et $P(S_n = k)$. En déduire l'expression de $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de a, b, n et $E(S_n)$.
4) On considère l'hypothèse de récurrence suivante :
   P_n : les variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ont la même loi que X_1
   a) Si P_n est vrai calculer $E(S_n)$
   b) Montrer que P_n est vrai pour tout $n \geq 1$.

Exercice 3 (11pts) : Dans certains accidents de la route, les chocs peuvent être latéraux ou frontaux : ces deux états sont résumés par la variable aléatoire X à deux valeurs 0 et 1. Le choc latéral correspond à $X = 0$ et le choc frontal à $X = 1$. La gravité de l'accident est décrite par la variable aléatoire Y à trois valeurs 1, 2 et 3. Une enquête réalisée sur un grand nombre d'accidents conduit au tableau ci-contre donnant la loi de probabilité conjointe du couple (X, Y) :

Y/X	0	1
1	0,10	0,15
2	0,08	0,25
3	0,02	0,40

1) Calculer les probabilités suivantes : $P(X = 0, Y \geq 2)$, $P_{Y\geq 2}(X = 0)$
2) Calculer les lois de probabilité marginales de X et Y, ainsi que leurs espérances mathématiques et leurs variances.
3) Étudier l'indépendance des variables aléatoires X et Y.

4) Calculer les probabilités suivantes : $P(X = 0, Y \geq 2)$, $P_{Y\geq 2}(X = 0)$
5) Calculer les lois de probabilité marginales de X et Y, ainsi que leurs espérances et leurs variances.
6) Étudier l'indépendance des variables aléatoires X et Y.
7) Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z = XY$ et calculer $E(Z)$ et $Var\ (Z)$.
8) Calculer la covariance $Cov(X, Y)$ et le coefficient de corrélation linéaire ρ. Que peut-on conclure ?
9) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $T = X + Y$.
10) On définit une fonction de gravité $G = aX + bY$, où $a = 0{,}2$ et $b = 0{,}8$. Calculer $E(G)$ et $Var\ (G$