

République du Cameroun
Republic of Cameroon

Université de
Yaoundé I



University of
Yaounde I

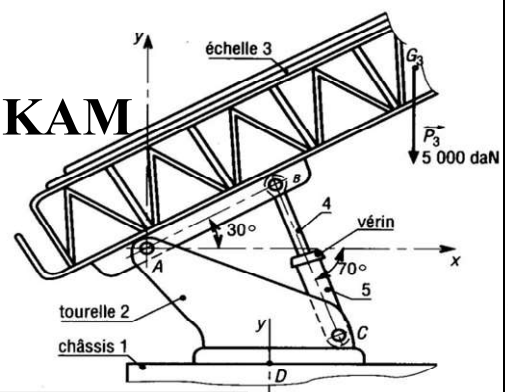
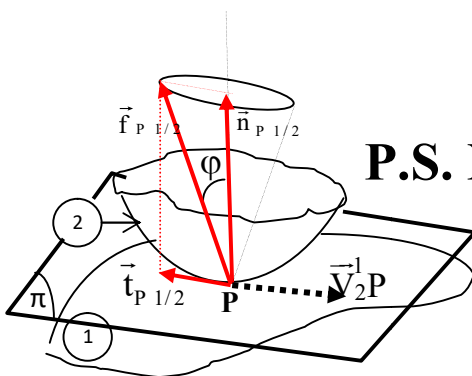
STATIQUE DU SOLIDE

MODELISATION DES ACTIONS MECANQUES

Ressource Pédagogique Mise en Ligne

Par

P.S. NGOHE-EKAM



**Ecole Nationale
Supérieure Polytechnique de Yaoundé**



PREAMBULE

Suite à la menace de propagation du Covid-19 (Corona virus Disease) dont le premier cas de contamination a été déclaré au mois de mars 2020 au Cameroun, des mesures sanitaires ont été édictées par monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, puis renforcées par une sortie médiatisée de monsieur le Premier Ministre (PM) du Cameroun. Le point commun de l'allocution de ces deux personnalités et relatif à l'enseignement supérieur fut la fermeture des établissements d'enseignement, dont l'Université de Yaoundé.

Monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, dans le souci que la fermeture de l'UY I ne soit pas une perche tendue aux étudiants paresseux pour se laisser aller à un certain sommeil intellectuel, instruit alors que les enseignants « mettent en ligne » leurs cours grâce au serveur du Centre Universitaire des Technologies de l'Information (CUTI) de l'UY I et que les étudiants visitent ce serveur à volonté pour télécharger les ressources pédagogiques (puisque c'est le terme le plus approprié) que les enseignants y auront déposé, ce téléchargement devant permettre aux étudiants de continuer d'apprendre (à domicile) pendant la période de pseudo-confinement décrétée par monsieur le PM.

C'est ainsi que le présent document est conçu et mis en forme par l'auteur. Ce document fait partie de l'enseignement dispensé par l'auteur aux étudiants de niveau II de l'Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de l'UY I. L'auteur a valablement sectionné cet enseignement en modules qui constitueraient des chapitres de cours en présentiel. Et pour chaque module l'enseignant a produit trois documents en vue de faciliter l'apprentissage à distance :

- Des notes de cours
- Des exercices corrigés
- Des exercices non corrigés

L'idée principale du sectionnement de l'enseignement est de guider au mieux l'apprenant dans l'organisation de sa mémoire cognitive. En effet, il n'est pas bien d'exiger de l'apprenant une concentration trop longue, dépassant les six minutes reconnues par la plupart des experts en pédagogie, sans activité de restitution par exemple. L'apprenant est ainsi invité à ne pas rester trop longtemps sur les parties cours et exercices corrigés ; il peut y revenir en tant que de besoin. Cependant le traitement des exercices non corrigés étant une phase d'extériorisation de la connaissance emmagasinée, l'apprenant pourra et devrait y passer assez de temps de travail.

L'interaction de l'enseignant avec les apprenants est rendue possible grâce aux fora (plateformes d'enseignement à distance, groupe Whatsapp, liste de distribution par email, etc.) divers dans lesquels les apprenants sont invités à s'inscrire.

Pour finir, nous signalons que l'organisation actuelle de cet enseignement n'est pas vraiment une mise en ligne de cours, encore moins un MOOC, comme cela est fait dans la plupart des plateformes d'enseignement à distance. Nous essayons de faire une mise en ligne des ressources (dans le serveur de l'UY I), mais une mise en ligne suggérant une sorte de protocole d'apprentissage aux étudiants.

Yaoundé, le 21 mars 2020,

P.S. NGOHE-EKAM

MODULE 4 : MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

A l'issue de ce module, l'apprenant devrait être capable de caractériser, d'un point de vue local, puis d'un point de vue global, les différentes actions mécaniques qui peuvent sur un solide.

Sommaire

PREAMBULE	2
MODULE 4 : MODELISATION DES ACTIONS MECANQUES	3
I- CENTRE D'INERTIE	5
I-1 Centre d'inertie dans le cas d'une répartition discrète de masse	5
I-2 Centre d'inertie dans le cas d'un solide (distribution continue de masse)	5
I-3 Centre d'inertie d'un ensemble de sous-systèmes disjoints : Cas d'un partitionnement	6
I-4 Centre d'inertie d'un système admettant un élément de symétrie	6
I-5 Théorèmes de Guldin	6
II- ACTIONS MECANQUES	7
II-1 Définition des actions mécaniques	7
II-2 Classification des actions mécaniques	7
III- MODELISATION DES ACTIONS MECANQUES	8
III-1 Modélisation locale	8
III-2 Modélisation globale	9
IV- QUELQUES ACTIONS MECANQUES COURANTES	9
IV-1 Action mécanique de pesanteur	9
IV-2 Action mécanique de contact surfacique	10
IV-3 Action mécanique de contact ponctuel	13
IV-4 Torseurs d'actions mécaniques exercées par les liaisons usuelles	16

I- CENTRE D'INERTIE

I-1 Centre d'inertie dans le cas d'une répartition discrète de masse

a) Définition

Soient n particules M_i de masses respectives m_i ; on appelle centre d'inertie du système constitué par les n masses discrètes, le **point unique** G , tel que :

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}.$$

b) Détermination

Le vecteur position du centre de masse est donné par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$$

I-2 Centre d'inertie dans le cas d'un solide (distribution continue de masse)

Le solide étant constitué d'une association continue d'un nombre infini de points matériels, on associera à chaque point M du solide une densité de masse (ou masse élémentaire) dm et on procèdera par une sommation continue encore appelée intégrale.

a) Position du centre d'inertie dans un référentiel (R_i) quelconque

On montre que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{M \in (S)} \overrightarrow{OM} dm \quad \forall O \in \mathcal{E};$

c'est – à – dire :

$$\vec{r}^i(G) = \frac{1}{m} \int_{M \in (S)} \vec{r}^i(M) dm.$$

b) Vitesse du centre d'inertie dans un référentiel (R_i) quelconque

On montre que dans un référentiel (R_i) quelconque :

$$\vec{V}^i(G) = \frac{1}{m} \int_{M \in (S)} \vec{V}^i(M) dm$$

c) Accélération du centre d'inertie dans un référentiel (R_j) quelconque

On montre de même que :

$$\overline{\Gamma}^i(G) = \frac{1}{m} \int_{M \in (S)} \overline{\Gamma}^i(M) dm$$

I-3 Centre d'inertie d'un ensemble de sous-systèmes disjoints : Cas d'un partitionnement

Pour n solides (S_i) de masses respectives m_i et de centres d'inertie G_i , notés respectivement $S_i(m_i, G_i)$, on considère le système $(S) = \sum_i (S_i)$ de masse $m = \sum_i m_i$; l'ensemble des $S_i(m_i, G_i)_{i=1,n}$ est un partitionnement de $S(m, G)$. Le centre d'inertie G de (S) est donné par : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum m_i \overrightarrow{OG_i}$.

Il vient ainsi pour le solide (S) dans un référentiel quelconque (R_j) :

Le vecteur position du centre d'inertie :

$$\vec{r}^j(G) = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}^j(G_i)$$

Le vecteur vitesse du centre d'inertie :

$$\vec{V}^j(G) = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{V}^j(G_i)$$

Le vecteur accélération du centre d'inertie :

$$\overline{\Gamma}^j(G) = \frac{1}{m} \sum_i m_i \overline{\Gamma}^j(G_i)$$

I-4 Centre d'inertie d'un système admettant un élément de symétrie

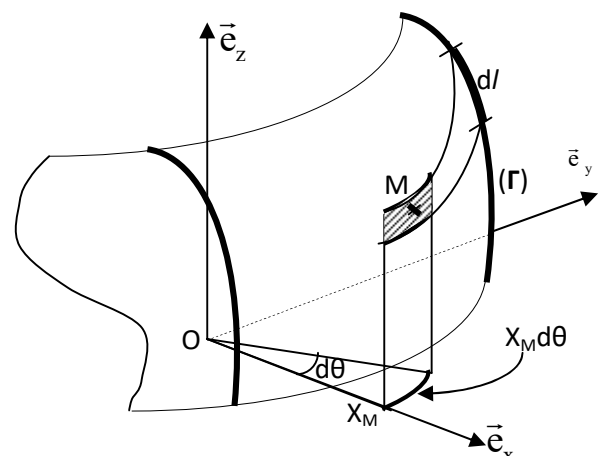
Dès qu'il y a un élément de symétrie (point, axe, plan, etc.) pour la distribution de masse du système, on parle de **symétrie matérielle** ; et le centre d'inertie G du système appartient à cet élément de symétrie.

I-5 Théorèmes de Guldin

a) Le premier théorème de Guldin

Énoncé :

“L'aire de la surface engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie”



Formule :

$$S = 2\pi X_G \times L$$

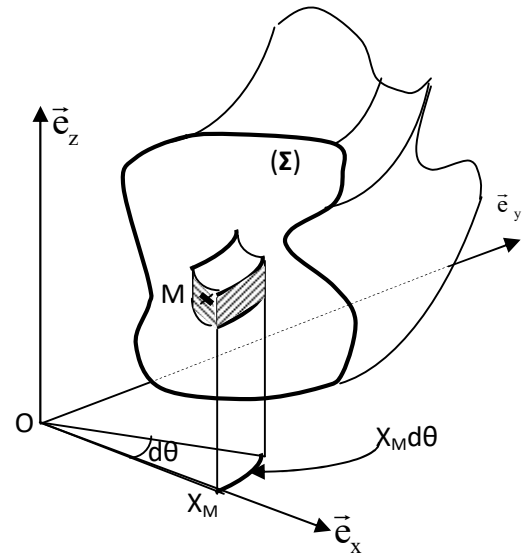
b) Le deuxième théorème de Guldin

Énoncé :

“La mesure du volume engendré par une surface plane tournant autour d’un axe de son plan, ne la traversant pas, est égale au produit de l’aire de cette surface par le périmètre du cercle décrit par son centre d’inertie”

Formule :

$$V = 2\pi X_G \cdot S$$



Remarque :

Pris dans le sens inverse, le théorème de Guldin est un outil rapide et efficace pour la détermination d’une surface de révolution à partir du centre de masse d’une courbe plane et pour la détermination un volume engendré, par révolution, par une répartition surfacique plane de masse

II- ACTIONS MECANIQUES

II-1 Définition des actions mécaniques

On appelle **action mécanique** toute cause susceptible de maintenir un système au repos, de créer ou de modifier un mouvement, ou alors de déformer un solide.

Ces actions sont schématisées ou modélisées par des forces, des moments, des couples, de pressions, des contraintes, des torseurs, etc.

II-2 Classification des actions mécaniques

On peut diviser les actions mécaniques en deux grandes familles : les actions à distance et les actions de contact, ces dernières étant les plus nombreuses et les plus diverses.

a) Actions mécaniques à distance

Elles sont essentiellement de deux types : gravitationnelle (loi universelle de l'attraction gravitationnelle) et électriques (électrostatiques ou électromagnétiques).

Ces *actions*, dites *volumiques*, s'exercent en chaque point P du système matériel.

b) Actions mécaniques de contact

Ce sont des actions qui naissent lorsque deux solides sont en contact. On peut les diviser en trois groupes :

- Les **actions** ou **charges concentrées** :

Chaque fois que l'effort de contact est concentré en un point ou sur une toute petite surface, l'action est schématisée par un vecteur-force. On parle de **charge ponctuelle**.

- Les actions réparties sur une ligne ou **charges linéiques**.
- Les actions réparties sur une surface ou **charges surfaciques**.

III- MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

La modélisation des actions mécaniques peut se faire soit du point de vue local, soit du point de vue global, suivant les objectifs visés par l'étude :

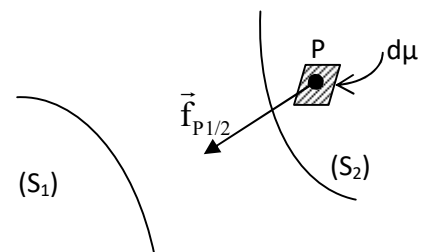
- La **modélisation locale** a pour but d'étudier l'action mécanique dans la zone où elle s'exerce (champ de pesanteur, champ des pressions de contact, champ des contraintes à l'intérieur d'un matériau, etc.).

- La **modélisation globale**, généralement faite par un torseur, vise à caractériser globalement l'action mécanique, dans le but par exemple d'appliquer le Principe Fondamental de la Statique.

-

III-1 Modélisation locale

Les actions mécaniques (de contact ou à distance) qu'exerce un système matériel S_1 sur un système matériel S_2 . ($S_1 \subset \overline{S_2}$) sont représentées, en tout point P de S_2 (ou d'une surface de S_2), par un **champ de glisseurs**. $(P, \vec{f}_{P1/2})$, défini relativement à une *mesure* μ .



Or *on définit la force* comme toute action mécanique modélisable par un glisseur.

On appelle *force élémentaire* de l'action mécanique de (S_1) sur (S_2) , au point P, le glisseur dont le vecteur associé est : $d\vec{F}_{P\ 1/2} = \vec{f}_{P\ 1/2} \cdot d\mu$

$\vec{f}_{P\ 1/2}$ est la *densité du champ de forces*, relativement à la mesure μ ;

si la mesure μ est une ligne (droite ou non), on aura une *densité linéique* de force. On parlera de *densité surfacique* de force, si la mesure μ est une surface (plane ou non) et de *densité volumique* si on a un volume.

Ainsi : *la modélisation locale des actions mécaniques est réalisée par des champs de forces.*

III-2 Modélisation globale

Les effets d'une force sur un solide dépendent de la position de la force par rapport au corps ; par exemple, si la force passe (sa droite d'action, en fait) par le centre d'inertie G du solide, ce dernier sera animé d'un mouvement de translation rectiligne, sous l'effet de cette force. Mais si la force ne passe pas par G, le solide est à la fois animé d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation.

Pour traduire, avec précision, les effets d'une force, compte tenu de sa position, on fait nécessairement intervenir la notion de moment (le moment de cette force par rapport à un point donné).

Ainsi, les actions mécaniques exercées par un système matériel (S_1) sur un autre système matériel (S_2) ($S_1 \subset \overline{S_2}$) étant représentées localement par un champ de glisseurs $(P, \vec{f}_{P\ 1/2})$, défini relativement à une mesure μ , on devrait leur associer, en un point A quelconque, un

$$\text{torseur } [F_{1/2}] = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{1/2} \\ \mathcal{M}_{A\ 1/2} \end{array} \right\}$$

$$\text{avec :} \quad \vec{R}_{1/2} = \int_{P \in (S_2)} d\vec{F}_{P\ 1/2} = \int_{P \in (S_2)} \vec{f}_{P\ 1/2} \cdot d\mu$$

$$\text{et} \quad \mathcal{M}_{A\ 1/2} = \int_{P \in (S_2)} \overrightarrow{AP} \wedge d\vec{F}_{P\ 1/2} = \int_{P \in (S_2)} \overrightarrow{AP} \wedge d\vec{f}_{P\ 1/2} \cdot d\mu$$

Ce torseur, appelé torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) au point A, caractérise globalement l'action mécanique de (S_1) sur (S_2)

IV- QUELQUES ACTIONS MECANIQUES COURANTES

IV-1 Action mécanique de pesanteur

a) Modélisation locale

$(S_1) \equiv \text{Terre} \quad (S_2) \equiv \text{le corps, système étudié}$

Nous avons vu qu'avec pour densité massique $\vec{f}_{P\ 1/2}$ l'accélération de la pesanteur, le poids (élémentaire) du volume élémentaire entourant le point P est :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{P\ 1/2} &= \vec{g}.dm \\ &= \rho \vec{g} d\tau \text{ où } \rho \vec{g} \text{ est la densité volumique du champ de forces de la pesanteur} \end{aligned}$$

b) Modélisation globale

Le torseur continu d'action mécanique de la pesanteur s'écrit en un point A :

$$[\mathcal{F}_{1/2}]_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{1/2} \\ \vec{\mathcal{M}}_{A\ 1/2} \end{array} \right\} \text{ avec}$$

$$\boxed{\vec{R}_{1/2} = \int_{P \in (S_2)} \vec{g}.dm = m\vec{g}} \quad (\text{en supposant que la densité massique } g \text{ est uniforme sur}$$

$S_2)$

$$\text{et } \boxed{\vec{\mathcal{M}}_{A\ 1/2} = \int_{P \in (S_2)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{g}.dm = \left(\int_{P \in (S_2)} \overrightarrow{AP}.dm \right) \wedge \vec{g}}$$

Remarque :

Lorsqu'un solide est un assemblage hétérogène de solides homogènes, on peut accéder à son centre d'inertie par partitionnement : on considère chacun des solides comme une masse ponctuelle concentrée en son centre de gravité ; le centre de masse de l'ensemble est alors le barycentre des centres de gravité affectés des masses respectives comme coefficients.

IV-2 Action mécanique de contact surfacique

a) Modélisation locale

Supposons deux solides (S_1) et (S_2) en contact suivant une surface (Σ) . L'action mécanique de (S_1) sur (S_2) est représentée en chaque point P de (Σ) par la *densité surfacique* de forces $\vec{f}_{P\ 1/2}$

b) Modélisation globale

L'action mécanique de contact qu'exerce le système matériel (S_1) sur une surface (Σ) d'un système matériel (S_2) , définie localement par la densité surfacique des forces $\vec{f}_{P\ 1/2}$, est caractérisée, globalement, en un point A, par le torseur :

$$[\mathcal{F}_{1/2}]_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1/2} \\ \vec{m}_{A/2} \end{array} \right\} \text{ avec}$$

$$\vec{R}_{1/2} = \int_{P \in (S_2)} \vec{f}_{P/2} \cdot d\sigma \quad \text{et} \quad \vec{M}_{A/2} = \int_{P \in (S_2)} \vec{AP} \wedge \vec{f}_{P/2} \cdot d\sigma$$

c) Lois de Coulomb

En admettant l'existence, au point P, d'un plan tangent commun (π) aux deux solides (S_1) et (S_2) en contact, on peut poser :

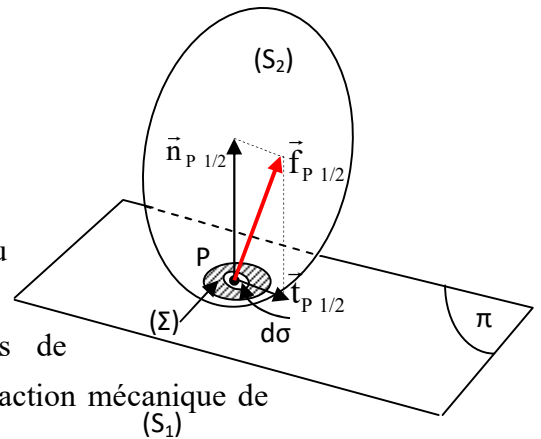
$$\vec{f}_{P/2} = \vec{n}_{P/2} + \vec{t}_{P/2} \quad \text{avec}$$

$\vec{n}_{P/2}$ perpendiculaire au plan (π) et

$\vec{t}_{P/2}$ parallèle au plan (π)

On a les définitions suivantes :

- $\vec{f}_{P/2} \equiv$ **densité surfacique** des forces de contact, au point P, de l'action mécanique de (S_1) sur (S_2).
- $\vec{n}_{P/2} \equiv$ **densité surfacique normale** des forces de contact, ou **pression de contact**, au point P, de l'action mécanique de (S_1) sur (S_2)
- $\vec{t}_{P/2} \equiv$ **densité surfacique tangentielle** des forces de contact, au point P, de l'action mécanique de (S_1) sur (S_2).



Afin d'énoncer les lois expérimentales de coulomb (sur le frottement et l'adhérence), on note $\vec{V}(P \in 2/1)$ ou mieux $\vec{V}_2^1 P$, la vitesse d'entraînement en P, du solide (S_2) dans son mouvement par rapport à (S_1).

$\vec{V}_2^1 P$ est appelé **vecteur vitesse de glissement**, au point P, du solide (S_2) dans son mouvement par rapport à (S_1).

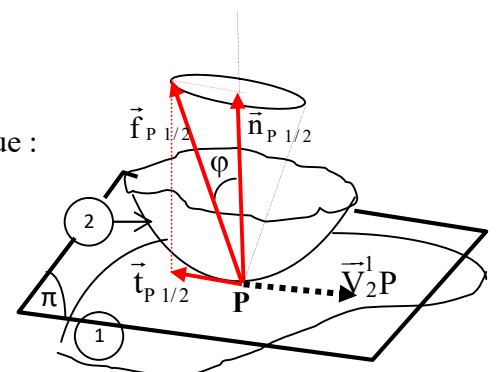
On dit qu'il y a **adhérence au point P**, entre (S_1) et (S_2) si et seulement si $\vec{V}_2^1 P = \vec{0}$; lorsque $\vec{V}_2^1 P \neq \vec{0}$, on dit qu'il y a **frottement au point P** entre (S_1) et (S_2).

Les lois de Coulomb donnent des informations sur les densités surfaciques normale et tangentielle des forces de contact, lorsqu'il y a frottement ou adhérence.

1^{er} cas : $\vec{V}_2^1 P \neq \vec{0}$ (glissement relatif au point P).

La densité surfacique des forces de contact, au point P, est telle que :

$$\vec{t}_{P/2} \wedge \vec{V}_2^1 P = \vec{0} \quad (1)$$



$$\vec{t}_{P\ 1/2} \bullet \vec{V}_2^1 P < 0 \quad (2)$$

$$\|\vec{t}_{P\ 1/2}\| = f \cdot \|\vec{n}_{P\ 1/2}\| \quad (3)$$

(1) et (2) montrent que $\vec{t}_{P\ 1/2}$ est colinéaire, mais de sens opposé, à $\vec{V}_2^1 P$

(3) traduit le fait que $\|\vec{t}_{P\ 1/2}\|$ et $\|\vec{n}_{P\ 1/2}\|$ sont proportionnelles, le coefficient de proportionnalité f étant appelé le **coefficient de frottement** des matériaux (S_1) et (S_2).

Remarque :

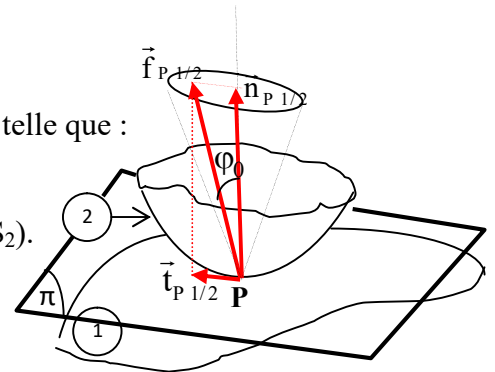
- L'angle φ tel que $f = \operatorname{tg} \varphi$ est appelé **angle de frottement** des matériaux (S_1) et (S_2)
- La densité surfacique des forces de contacts $\vec{f}_{P\ 1/2}$ se situe sur le bord d'un cône de révolution appelé **cône de frottement**, de sommet P, d'axe perpendiculaire au plan tangent (π) et de demi-angle au sommet φ

2^e cas : $\vec{V}_2^1 P = \vec{0}$ (pas de glissement relatif au point P)

Alors, la densité surfacique des forces de contact, au point P, est telle que :

$$\|\vec{t}_{P\ 1/2}\| \leq f_0 \|\vec{n}_{P\ 1/2}\| \quad (4)$$

Où f_0 est appelé **coefficient d'adhérence** des matériaux (S_1) et (S_2).



Remarque :

- L'angle φ_0 tel que $f_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$ est appelé **angle d'adhérence** des matériaux (S_1) et (S_2).
- La densité surfacique des forces de contact $\vec{f}_{P\ 1/2}$ se situe à l'intérieur ou sur le bord du cône de révolution, appelé **cône d'adhérence**, de sommet P, d'axe perpendiculaire au plan tangent (π) et de demi-angle au sommet φ_0 .

N.B. :

- Les quatre relations (1), (2), (3) et (4) ci-dessus constituent les **lois expérimentales de Coulomb**.
- Le coefficient d'adhérence f_0 est toujours supérieur du coefficient de frottement f . Mais étant donné le grand nombre de paramètres qui interviennent dans leur détermination, on considère souvent, pour simplifier les choses, que ces deux coefficients sont égaux.
- Dans l'hypothèse de contact sans adhérence et sans frottement ($f = f_0 = 0$) ou tout simplement lorsque f_0 est faible, la densité surfacique des forces de contact $\vec{f}_{P\ 1/2}$ est perpendiculaire au plan tangent.
- Selon que la surface de contact est sèche ou lubrifiée, la littérature donne davantage de valeurs de f et f_0 en fonction de la nature des matériaux en contact.

Matériaux en contact	f_0		f	
	à sec	lubrifié	à sec	lubrifié
acier sur acier	0,18	0,12	0,15	0,09
acier sur fonte	0,19	0,1	0,16	0,08 à 0,04
acier sur bronze	0,11	0,1	0,1	0,09
téflon sur acier	0,04	/	0,04	/
fonte sur bronze	/	0,1	0,2	0,08 à 0,04
nylon sur acier	/	/	0,35	0,12
bois sur bois	0,65	0,2	0,4 à 0,2	0,16 à 0,04
métaux sur bois	0,6 à 0,5	0,1	0,5 à 0,2	0,08 à 0,02
métaux sur glace	/	/	0,02	/
pneu voiture sur route	0,8	/	0,6	0,3 à 0,1 sur sol mouillé

Tableau extrait de J.L. FANCHON in Guide de Mécanique-Sciences et Technologies Industrielles

IV-3 Action mécanique de contact ponctuel

Le contact ponctuel est une liaison entre deux solides qui sont en contact en un nombre fini de points.

a) Torseur d'action mécanique.

L'action mécanique de contact qu'exerce le système matériel (S_1) en un point I d'un système matériel (S_2) est représentée, globalement, par le torseur : $[\mathcal{F}_{1/2}]_I = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{1/2} \\ \vec{\mathcal{M}}_{1/2} \end{array} \right\}$

$$\text{Avec : } \vec{R}_{1/2} = \vec{N}_{1/2} + \vec{T}_{1/2} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{M}}_{1/2} = \vec{\mathcal{M}}_{1/2}^n + \vec{\mathcal{M}}_{1/2}^r$$

On appelle :

$\vec{N}_{1/2} \equiv$ la composante normale de la résultante ou **effort normal**

$\vec{T}_{1/2} \equiv$ la composante tangentielle de la résultante ou **effort tangentiel**

$\vec{\mathcal{M}}_{1/2}^n \equiv$ la composante normale du moment en I ou **moment de pivotement**

$\vec{\mathcal{M}}_{1/2}^r \equiv$ la composante tangentielle du moment en I ou **moment du roulement**

Remarque : On peut obtenir ces vecteurs de manière intrinsèque par les formules ci-dessous :

$$\vec{N}_{1/2} = (\vec{R}_{1/2} \bullet \vec{n}) \bullet \vec{n} \quad (1)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{1/2}^n = (\vec{m}_{1/2} \bullet \vec{n}) \bullet \vec{n} \quad (2)$$

$$\vec{T}_{1/2} = (\vec{n} \wedge \vec{R}_{1/2}) \wedge \vec{n} \quad (3) \text{ et}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{1/2}^r = (\vec{n} \wedge \vec{\mathcal{M}}_{1/2}) \wedge \vec{n} \quad (4)$$

b) Torseur cinématique.

Afin d'énoncer, dans le cas du contact ponctuel, des lois analogues aux lois de Coulomb, on est obligé de faire un rappel du torseur cinématique du mouvement du solide

(S₂) par rapport à (S₁), soit : $[\mathcal{V}_{2/1}]_I = [\mathcal{V}_2]_I = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_2^I \\ \vec{V}_2^I I \end{Bmatrix}$ encore noté $\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{I \in 2/1} \end{Bmatrix}$

En posant :

$\vec{\Omega}_{n\ 2/1} = (\vec{\Omega}_N)_2^I = (\vec{\Omega}_2^I \bullet \vec{n})\vec{n}$, perpendiculaire au plan tangent commun (π)
, $\vec{\Omega}_{\tau\ 2/1} = (\vec{\Omega}_\tau)_2^I = (\vec{n} \wedge \vec{\Omega}_2^I) \wedge \vec{n}$, parallèle au plan tangent (π).

On a les définitions (appellations) suivantes :

$(\vec{\Omega}_N)_2^I \equiv$ le vecteur **vitesse angulaire de pivotement** de (S₂) par rapport à (S₁) on parle aussi de **vecteur rotation de pivotement**

$(\vec{\Omega}_T)_2^I \equiv$ le vecteur **vitesse angulaire de roulement** de (S₂) par rapport à (S₁) on parle aussi de **vecteur rotation de roulement**

$\vec{V}_2^I I \equiv$ le vecteur **vitesse de glissement** de (S₂) par rapport à (S₁), au point I

Remarques :

➤ la vitesse de glissement au point I est la différence des vitesses absolues des molécules de (S₂) et (S₁), qui sont en contact en I.

➤ Lorsque $\vec{\Omega}_2^I = \vec{0}$, (pas de pivotement ni de roulement) ; on ne peut avoir que du **glissement simple** entre les solides.

➤ Si $\vec{V}_2^I I = \vec{0}$ on n'a pas de glissement : roulement et pivotement sont possibles

- Si en plus $(\vec{\Omega}_N)_2^I = \vec{0}$ on a du **roulement simple** c'est-à-dire roulement sans glissement
- Si c'est plutôt $(\vec{\Omega}_T)_2^I = \vec{0}$ on a du **pivotement simple** c'est-à-dire pivotement sans glissement.

➤ La vitesse d'un point M quelconque du solide (S₂) étant donnée par :

$\vec{V}_2^I M = \vec{V}_2^I I + \vec{MI} \wedge \vec{\Omega}_2^I$ et avec $\vec{\Omega}_2^I = (\vec{\Omega}_N)_2^I + (\vec{\Omega}_T)_2^I$, on a :

$\vec{V}_2^I M = \vec{V}_2^I I + \vec{MI} \wedge (\vec{\Omega}_N)_2^I + \vec{MI} \wedge (\vec{\Omega}_T)_2^I$

$\vec{V}_2^I I \rightarrow$ représente le glissement

$(\vec{\Omega}_N)_2^I \rightarrow$ représente le pivotement

$(\vec{\Omega}_T)_2^I \rightarrow$ représente le roulement

Ainsi, le mouvement relatif d'un solide (S₂) par rapport à un autre (S₁) est la somme de trois mouvements :

- Un mouvement de translation parallèle au plan tangent et appelé **glissement**
- Une rotation autour de la normale en I au plan tangent et appelée **pivotement**
- Une rotation autour d'une droite du plan vectoriel tangent et appelée **roulement**

c) Analogie avec les lois de Coulomb

On a les relations ci-dessous entre le torseur d'action mécanique exercée par (S₁) sur (S₂) et le torseur cinématique de (S₂) par rapport à (S₁), relations écrites sans distinguer les notions d'adhérence et de frottement, par soucis de simplification.

✓ S'il y a **glissement** : $(\vec{V}_{1/2/1} \neq \vec{0})$:

$$\vec{V}_{1/2/1} \wedge \vec{T}_{1/2} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{V}_{1/2/1} \bullet \vec{T}_{1/2} < 0 \quad (2)$$

$$\|\vec{T}_{1/2}\| = f \cdot \|\vec{N}_{1/2}\| \quad (3)$$

✓ S'il n'y a **pas de glissement** ($\vec{V}_{1/2/1} = \vec{0}$) :

$$\|\vec{T}_{1/2}\| \leq f \|\vec{N}_{1/2}\| \quad (4)$$

f est le **coefficient de frottement** entre (S₁) et (S₂)

✓ S'il y a **pivotement** ($(\vec{\Omega}_N)_2 \neq \vec{0}$) :

$$\vec{\Omega}_{n/2/1} \bullet \vec{\mathcal{M}}_{1/2}^n < 0 \quad (5)$$

$$\|\vec{\mathcal{M}}_{1/2}^n\| = \delta \cdot \|\vec{N}_{1/2}\| \quad (6)$$

✓ S'il n'y a **pas de pivotement** ($(\vec{\Omega}_N)_2 = \vec{0}$) :

$$\|\vec{\mathcal{M}}_{1/2}^n\| \leq \delta \cdot \|\vec{N}_{1/2}\| \quad (7)$$

δ est le **paramètre de résistance au pivotement**, homogène à une longueur

✓ S'il y a **roulement** ($(\vec{\Omega}_T)_2 \neq \vec{0}$) :

$$(\vec{\Omega}_T)_2 \wedge \vec{\mathcal{M}}_{1/2}^t = \vec{0} \quad (8)$$

$$\vec{\Omega}_{t/2/1} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{1/2}^t < 0 \quad (9)$$

$$\|\vec{\mathcal{M}}_{1/2}^t\| = \eta \cdot \|\vec{N}_{1/2}\| \quad (10)$$

✓ S'il n'y a **pas de roulement** ($\vec{\Omega}_{t/2/1} = \vec{0}$) :

$$\|\vec{\mathcal{M}}_{1/2}^t\| \leq \eta \cdot \|\vec{N}_{1/2}\| \quad (11)$$

η est le **paramètre de résistance au roulement**, homogène à une longueur.

Remarques :

- Les relations (1), (2),..., (11) ci-dessus liant le torseur d'action mécanique de (S₁) sur (S₂) au torseur cinématique de (S₂) dans son mouvement relatif par rapport à (S₁), sont une extension des lois de Coulomb.

- Dans l'hypothèse du contact rigoureusement ponctuel, on suppose que le moment du torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) est nul au point de contact I. L'action mécanique de (S_1) sur (S_2) est alors représentée par le glisseur $[\mathcal{F}_{1/2}]_I = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1/2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$.

- Quand on a un contact linéique entre les deux solides, l'action mécanique de contact est modélisée par une densité linéique de forces. Et pour certains types de contact, par exemple suivant une droite entre un cylindre de révolution et un plan, on peut introduire la notion de moment de roulement, comme précédemment.

IV-4 Torseurs d'actions mécaniques exercées par les liaisons usuelles

a) Torseurs cinématiques relatifs dus à certaines liaisons usuelles

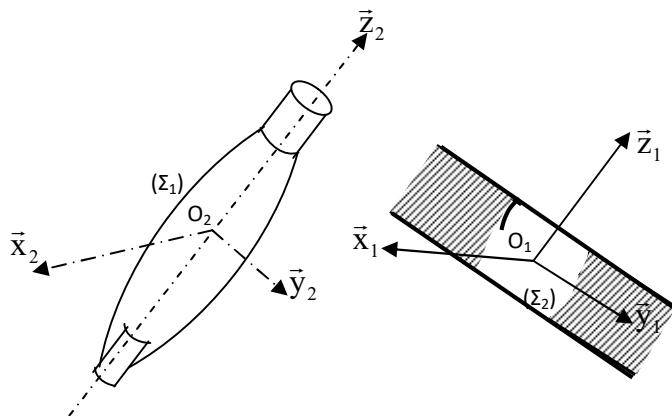
Parmi toutes les liaisons imaginables seules dix ont été reconnues indépendantes de la technologie utilisée, par la norme NF EN ISO 3952_1 (mai 95), nous les présentons ci-dessous et les accompagnons des particularités qu'elles imposent au torseur cinématique relatif. Rappelons que sont négligés, dans cet effort de modélisation, les jeux entre solides, les déformations et défauts géométriques divers dus à l'usure des pièces.

a-1) La liaison pivot ou liaison rotoïde de centre O_2 et d'axe \vec{z}

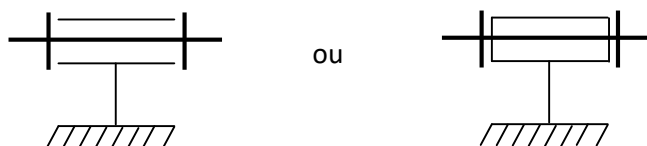
Définition

C'est une liaison telle qu'une surface de révolution non cylindrique (Σ_2) liée au solide (S_2) reste en coïncidence avec une surface de révolution (Σ_1) liée à (S_1) .

Représentation géométrique



Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique :

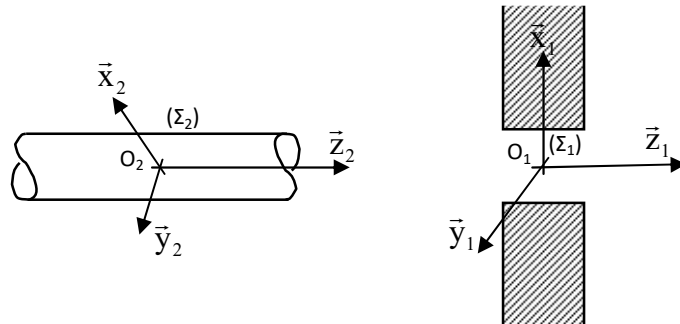
$$[\mathcal{V}] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_2^1 = \omega \vec{z} \\ \vec{V}_2^1(p) = \vec{0} \end{array} \right\}_{p \in \text{axe}}$$

a-2) La liaison pivot glissant ou liaison verrou ou liaison cylindrique d'axe \vec{z}

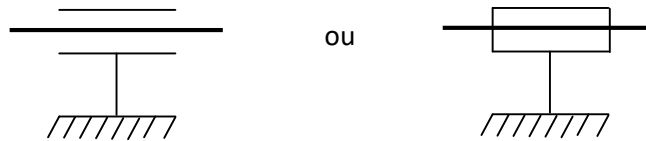
Définition

C'est une liaison pivot telle que les surfaces en contact sont des surfaces cylindriques de révolution (avec donc liberté de mouvement selon l'axe de révolution \vec{z}).

Représentation géométrique



Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

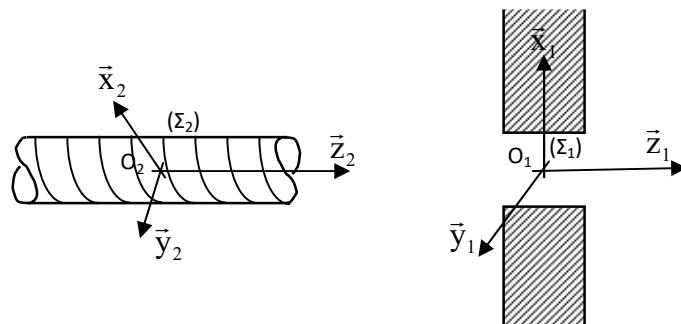
$$[\mathcal{V}] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} = \omega \vec{z} \\ \vec{V}_p = V \vec{z} \end{array} \right\}_{p \in \text{axe}}$$

a-3) La liaison hélicoïdale d'axe \vec{z}

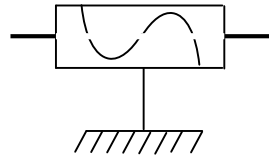
Définition

C'est une liaison pour laquelle les surfaces en contact sont des surfaces hélicoïdales (exemple le système vis-écrou).

Représentation géométrique



Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

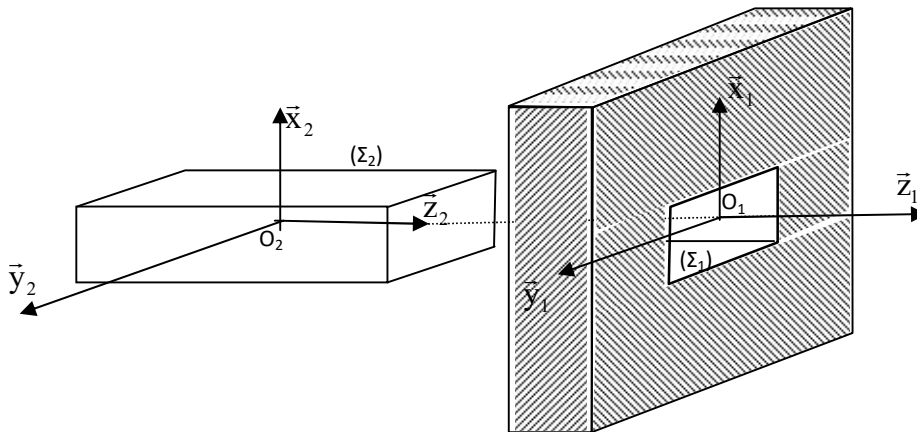
$$[\mathcal{V}] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} = \omega \vec{z} \\ \vec{V}_P = p\omega \vec{z} \end{array} \right\}_{P \in \text{axe}} ; p \text{ est le pas cinématique en m/rad.}$$

a-4) La liaison glissière ou liaison prismatique d'axe \vec{z}

Définition

C'est une liaison telle que les surfaces en contact sont des surfaces prismatiques.

Représentation géométrique



Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

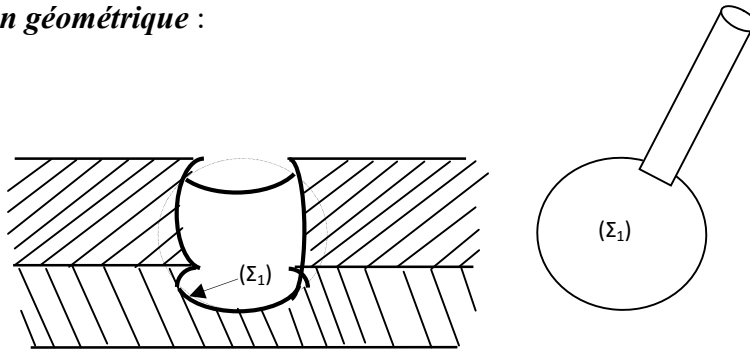
$$[\mathcal{V}] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} = \vec{0} \\ \vec{V}_P = V \vec{z} \end{array} \right\}_{P \in \text{axe}}$$

a-5) La liaison sphérique ou liaison rotule de centre O_2

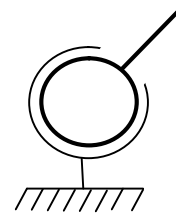
Définition :

C'est une liaison pour laquelle les surfaces en contact sont sphériques et de centres O_1 et O_2 confondus.

Représentation géométrique :



Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

$$[\mathcal{V}] = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_{O_2} = \vec{0} \end{array} \right\}_{O_2 \text{ centre des sphères}}$$

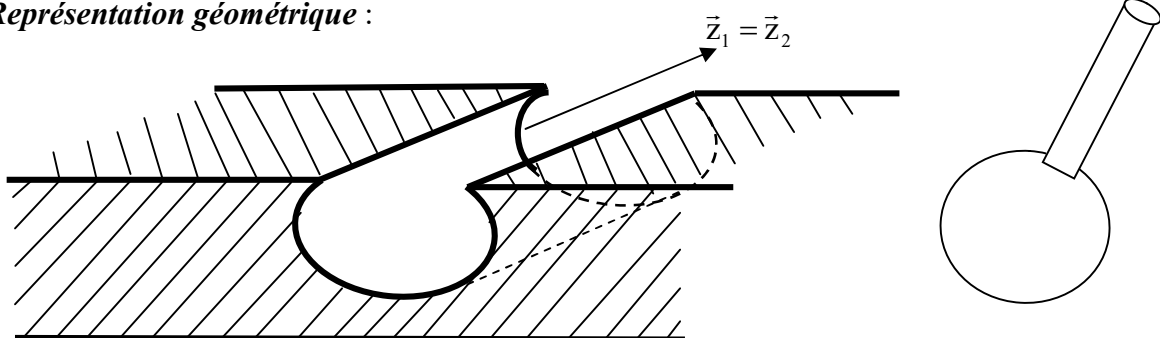
Exemple : la rotule de direction des voitures

a-6) La liaison sphère cylindre ou liaison gouttière ou liaison linéaire annulaire d'axe \vec{z} ou de direction \vec{z}

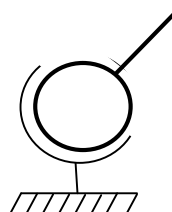
Définition

C'est une liaison où l'une des surfaces en contact est sphérique et l'autre cylindrique

Représentation géométrique :



Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

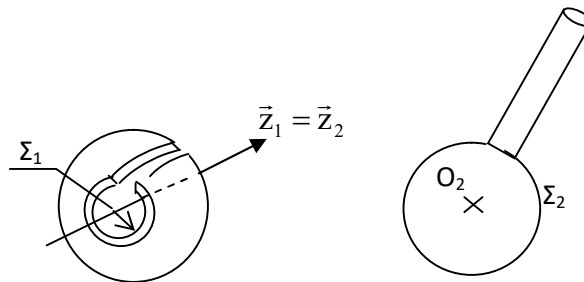
$$[\mathcal{V}] = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_{O_2} = V\vec{z} \end{array} \right\}_{O_2 \text{ centre de la sphère}}$$

a-7) La liaison sphérique à doigt de centre O_2 et d'axe \vec{z}

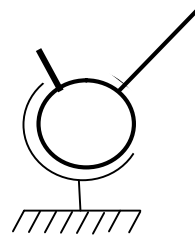
Définition

C'est une liaison sphérique où la présence d'un doigt empêche la rotation suivant un axe

Représentation géométrique



Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

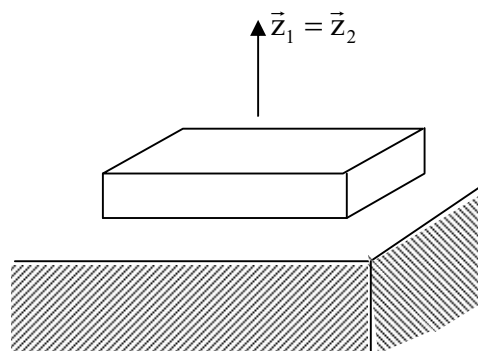
$$[\mathcal{V}] = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega} = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} \\ \vec{V}_{O_2} = 0 \end{array} \right\}_{O_2 \text{ centre des sphères}} \quad \text{donc } \vec{\Omega} \text{ tel que } \vec{\Omega} \cdot \vec{z} = 0$$

a-8) La liaison appui plan de normale \vec{z}

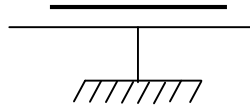
Définition :

C'est une liaison pour laquelle les surfaces de contact sont planes

Représentation géométrique



Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

$$[\mathcal{V}] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} = \omega \vec{z} \\ \vec{V}_P \end{array} \right\}_{P \in (S_2)}$$

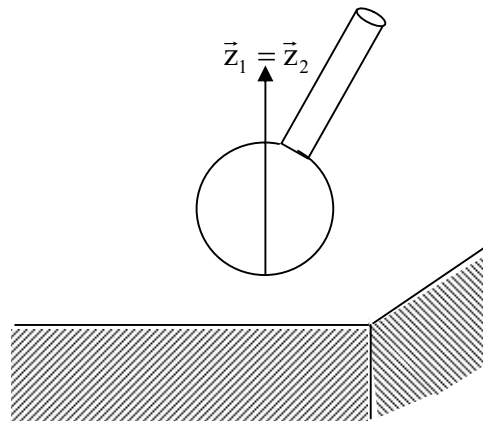
N.B. : $\forall P, \vec{V}_P \cdot \vec{z} = 0$

a-9) La liaison sphère-plan ou liaison ponctuelle de normale \vec{z}

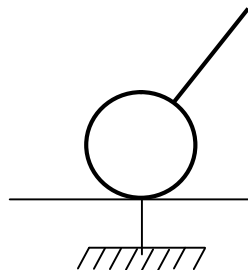
Définition

C'est une liaison où l'une des surfaces est plane et l'autre une sphère ; le contact a lieu uniquement en un point commun aux deux surfaces

Représentation géométrique



Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

$$[\mathcal{V}] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega} \\ \vec{V}_P \end{array} \right\}_{P \in (S_2)}$$

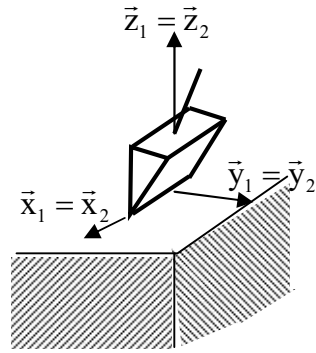
N.B. : pour P appartenant à la normale de contact $\vec{V}_P \cdot \vec{z} = 0$

a-10) La liaison linéaire rectiligne d'axe (O, \vec{x}) et de normale (O, \vec{z})

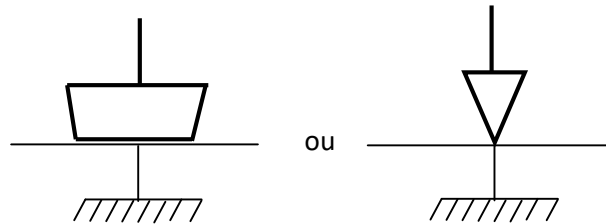
Définition

C'est une liaison où le contact a lieu suivant une droite (segment de droite)

Représentation géométrique :



Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

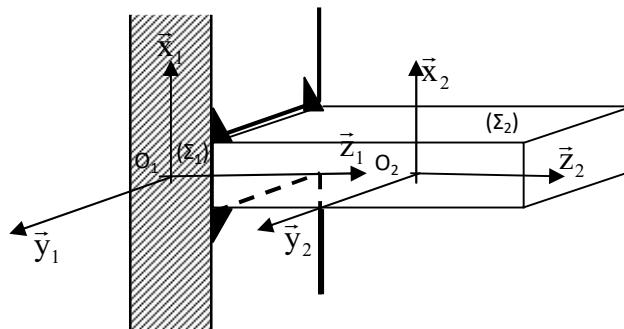
$$[\mathcal{A}_2^1] = \begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{y} = 0 \\ \vec{V}_p \cdot \vec{z} = 0 \quad \forall P \in (S_2) \end{cases}$$

***a-11)* La liaison encastrement**

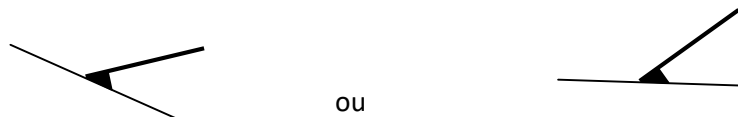
Définition

C'est une liaison où l'un des solides est encastré, incrusté, soudé, dans l'autre.

Représentation géométrique :



Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

$$[\mathcal{Z}_2^r] = \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{0} \end{cases}$$

b) Torseurs d'efforts imposés par les liaisons normalisées sans frottement

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de présenter les torseurs qui modélisent globalement les actions mécaniques de contact entre deux solides ; avec l'hypothèse simplificatrice de non-frottement.

b-1) Dualité entre le torseur cinématique relatif et le torseur des efforts imposés par les liaisons

1) – Définitions : Pour une liaison L_i , les coordonnées plückériennes $X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i$ non nulles du torseur des actions mécaniques transmissibles ou imposées sont appelées **inconnues de liaison** de la liaison L_i ; on appelle **inconnues cinématiques** de la liaison L_i , les coordonnées plückériennes non nulles du torseur cinématique de cette liaison i .

2) – Puissance des actions mutuelles d'une liaison : en Dynamique on sait que la puissance des actions mutuelles d'une liaison se met sous la forme de la partie duale du produit scalaire des torseurs d'actions mécaniques et cinématique : $\text{dual}([\mathcal{F}] \cdot [\mathcal{V}])$ (c.à.d. comoment des deux torseurs) ; pour la liaison L_i , on aura donc comme puissance des actions mutuelles : $\text{com}([\mathcal{F}_i], [\mathcal{V}])$.

3) – Equation algébrique de liaison : Lorsque le frottement est négligé dans une liaison, on montre en Dynamique que la puissance des actions mutuelles de la liaison est nulle.

$$\text{Ainsi, pour une liaison } L_i, \text{ de torseurs } [\mathcal{F}_i]_{O_i} = \begin{Bmatrix} X_i & L_i \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{Bmatrix}_{(R_i)}$$

$$\text{et } [\mathcal{V}]_{O_i} = \begin{Bmatrix} \Omega_{X_i} & V_{X_i} \\ \Omega_{Y_i} & V_{Y_i} \\ \Omega_{Z_i} & V_{Z_i} \end{Bmatrix}_{(R_i)}$$

les inconnues de liaison et les inconnues cinématiques vérifient **l'équation algébrique de liaison** :

$$X_i V_{x_i} + Y_i V_{y_i} + Z_i V_{z_i} + L_i \Omega_{X_i} + M_i \Omega_{Y_i} + N_i \Omega_{Z_i} = 0 \quad (1)$$

L'absence de frottement sur la liaison impose donc l'équation algébrique de liaison ci-dessus, quel que soit le mouvement relatif entre les pièces, c'est-à-dire quel que soit les valeurs que peuvent prendre les coordonnées plückérienne du torseur cinématique.

Or, pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire d'avoir la nullité, dans l'équation (1), des termes en facteur avec les inconnues cinématiques de liaison (coordonnées plückériennes non nulles du torseur d'action mécanique transmissible). C'est cela la dualité.

Ainsi par exemple, pour une liaison appui plan, $Y_i = Z_i = 0$ et $L_i = 0$

(1) $\Rightarrow X_i V_{Xi} + M_i \Omega_{Yi} + N_i \Omega_{Zi} = 0$ (avec $X_i \neq 0$; $M_i \neq 0$; $N_i \neq 0$). Qui doit être vérifié en particulier pour les mouvements relatifs ci-dessous :

- $(\Omega_{Yi} = \Omega_{Zi} = 0) \Rightarrow V_{Xi} = 0$ (donc $V_{Yi} \neq 0$; $V_{Zi} \neq 0$)
- $(V_{Xi} = 0 \text{ et } \Omega_{Zi} = 0) \Rightarrow \Omega_{Yi} = 0$ (donc $\Omega_{Xi} \neq 0$)
- $(V_{Xi} = 0 \text{ et } \Omega_{Yi} = 0) \Rightarrow \Omega_{Zi} = 0$ (donc $\Omega_{Xi} \neq 0$)

Ainsi, aux termes (coordonnées plückériennes) non nuls du torseur d'action mécanique, correspondent des termes nuls en dual (résultante et moment permutés) du torseur cinématique, et aux termes nuls des termes non nuls, et vice-versa. C'est la dualité entre les deux torseurs $[\mathcal{F}]$ et $[\mathcal{V}]$. C'est **le principe de la dualité** ; il s'énonce de la manière suivante :

« Entre les torseurs cinématique et d'action mécanique, la nullité d'une composante scalaire de la résultante de l'un entraîne la non-nullité de la composante de même ordre du moment de l'autre, et vice versa »

b-2) Récapitulatif des torseurs cinématiques et des efforts imposés par les liaisons

La dualité entre le torseur des efforts et le torseur cinématique, appliqué à tous les types de liaison conduit au tableau récapitulatif ci-dessous.

Liaison pivot (ou liaison rotoïde) de centre O et d'axe \vec{z}	
$[\mathcal{V}_2] = \begin{cases} \vec{\Omega}_2^1 = \omega \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_2^1 P = \vec{0} \end{cases} \text{ en } P \in \text{axe}$	$\rightarrow [\mathcal{F}_{1/2}] = \begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{\mathcal{M}}_P = L\vec{x} + M\vec{y} \end{cases} \text{ en } P \in \text{axe}$
Liaison pivot glissant (ou liaison verrou ou liaison cylindrique) d'axe \vec{z}	
$[\mathcal{V}_2] = \begin{cases} \vec{\Omega}_2^1 = \omega \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_2^1 P = V \cdot \vec{z} \end{cases} \text{ en } P \in \text{axe}$	$\rightarrow [\mathcal{F}_{1/2}] = \begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} \\ \vec{\mathcal{M}}_P = L\vec{x} + M\vec{y} \end{cases} \text{ en } P \in \text{axe}$
Liaison hélicoïdale d'axe \vec{z}	
On a $[\mathcal{V}_2] = \begin{cases} \vec{\Omega}_2^1 = \omega \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_P = p\omega \cdot \vec{z} \end{cases} \text{ en } P \in \text{axe} \rightarrow [\mathcal{F}_{1/2}] = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{\mathcal{M}}_P \end{cases} \text{ tel que } \vec{\mathcal{M}}_P \cdot \vec{z} + p \cdot \vec{R} \cdot \vec{z} = 0 \text{ si l'hélice est à droite, où } p \text{ est le pas cinématique de l'hélice (en m/rad) ; pour une hélice à}$	

gauche on aura plutôt : $\vec{\mathcal{M}}_p \cdot \vec{z} - p \cdot \vec{R} \cdot \vec{z} = 0$

Liaison glissière (ou liaison prismatique) **d'axe** \vec{z}

$$[\mathcal{R}_2] = \begin{cases} \vec{\Omega}_2^1 = \vec{0} \\ \vec{V}_p = V \cdot \vec{z} \text{ en } P \in \text{axe} \end{cases} \rightarrow [\mathcal{A}_{1/2}] = \begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} \\ \vec{\mathcal{M}}_p = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \text{ en } P \in \text{axe} \end{cases}$$

Liaison rotule (ou liaison sphérique) **de centre** O

$$[\mathcal{R}_2] = \begin{cases} \vec{\Omega}_2^1 \\ \vec{V}_O = \vec{0} \end{cases} \text{ en } O \text{ centre des sphères} \rightarrow [\mathcal{A}_{1/2}] = \begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0} \end{cases} \text{ en } O \text{ centre des sphères}$$

Liaison gouttière (ou liaison sphère cylindre) **d'axe** \vec{z}

$$[\mathcal{R}_2] = \begin{cases} \vec{\Omega}_2^1 \\ \vec{V}_{O_2} = V \cdot \vec{z} \end{cases} \rightarrow [\mathcal{A}_{1/2}] = \begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O_2} = \vec{0} \end{cases} \text{ en } O_2 \text{ centre de la sphère}$$

Liaison sphérique à doigt **d'axe** \vec{z}

$$[\mathcal{R}_2] = \begin{cases} \vec{\Omega}_2^1 = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} \\ \vec{V}_{O_2} = \vec{0} \end{cases} \rightarrow [\mathcal{A}_{1/2}] = \begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{\mathcal{M}}_{O_2} = N\vec{z} \end{cases} \text{ en } O_2 \text{ centre des sphères}$$

Liaison appui plan de normale \vec{z}

$$[\mathcal{R}_2] = \begin{cases} \vec{\Omega}_2^1 = \omega \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_p = V_x \vec{x} + V_y \vec{y} \end{cases} \forall P \in (S_2) \rightarrow [\mathcal{A}_{1/2}] = \begin{cases} \vec{R} = Z\vec{z} \\ \vec{\mathcal{M}}_p = L\vec{x} + M\vec{y} \end{cases} \forall P \in (S_2)$$

Liaison ponctuelle (ou liaison sphère plan) **de normale** \vec{z}

$$[\mathcal{R}_2] = \begin{cases} \vec{\Omega}_2^1 \\ \vec{V}_p = V_x \vec{x} + V_y \vec{y} \end{cases} \forall P \in \text{normale} \rightarrow [\mathcal{A}_{1/2}] = \begin{cases} \vec{R} = Z\vec{z} \\ \vec{\mathcal{M}}_p = \vec{0} \end{cases} \forall P \in \text{normale}$$

Autres liaisons :

➤ Liaison linéaire rectiligne d'axe (O, \vec{x}) et de normale (O, \vec{z})

$$[\mathcal{V}_2^r] = \begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{y} = 0 \\ \vec{V}_p \cdot \vec{z} = 0 \forall P \in (S_2) \end{cases} \rightarrow [\mathcal{F}_{1/2}] = \begin{cases} \vec{R} = Z \cdot \vec{z} \\ \vec{M}_p = M \cdot \vec{y} \forall P \in (S_2) \end{cases}$$

➤ Liaison encastrement

$$[\mathcal{V}_2^r] = \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{0} \end{cases} \rightarrow [\mathcal{F}_{1/2}] = \begin{cases} \vec{R} \\ \vec{M}_p \forall P \in (S_2) \end{cases}$$