Surfaces

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$.

1. Déterminer les plans tangents à la surface $\mathscr{S}$ parallèle au plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
2. Etudier localement la position relative de la surface $\mathscr{S}$ et de son plan tangent en chacun des points ainsi obtenu.
3. Etudier la position relative globale de la surface $\mathscr{S}$ et du plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Correction ▼ [005915]

Exercice 2

Trouver toutes les droites tracées sur la surface d'équations $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ puis vérifier que ces droites sont coplanaires. [005916]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, posons $f(x,y)=x^4-x^3+xy-y^2$ puis pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, posons $g(x,y,z)=z-f(x,y)$. $\mathscr{S}$ est la surface d'équation $z=f(x,y)$ ou encore $g(x,y,z)=0$.
La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, g\right)(x,y,z)=\begin{pmatrix}-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\\ \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x^3+3x^2-y\\ -x+2y\\ 1\end{pmatrix}\neq\overrightarrow{0}.$$

Donc, la surface $\mathscr{S}$ est régulière et en tout point (x_0,y_0,z_0) de la surface $\mathscr{S}$, le vecteur gradient est un vecteur normal au plan tangent $\mathscr{P}_0$ à la surface $\mathscr{S}$ en (x_0,y_0,z_0). Le plan

$$\mathscr{P}_0 \text{ parallèle à } \left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4x_0^3+3x_0^2-y_0=0\\ -x_0+2y_0=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_0=2y_0\\ -y_0(32y_0^2-12y_0+1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_0=2y_0\\ -y_0(32y_0^2-12y_0+1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow y_0=0=x_0 \text{ ou } (y_0=\frac{1}{4}\text{ et } x_0=\frac{1}{2}) \text{ ou } (y_0=\frac{1}{8}\text{ et } x_0=\frac{1}{4})$$

On obtient ainsi les trois points $O(0,0,0)$, $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},0\right)$ et $B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{256}\right)$.

2. La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$rt-s^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)^2=(12x^2-6x)(-2)-1^2=-24x^2+12x-1$$

• En O, le plan tangent est le plan $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. De plus, $(rt-s^2)(0,0)=-1<0$. Donc le point O est un point selle.

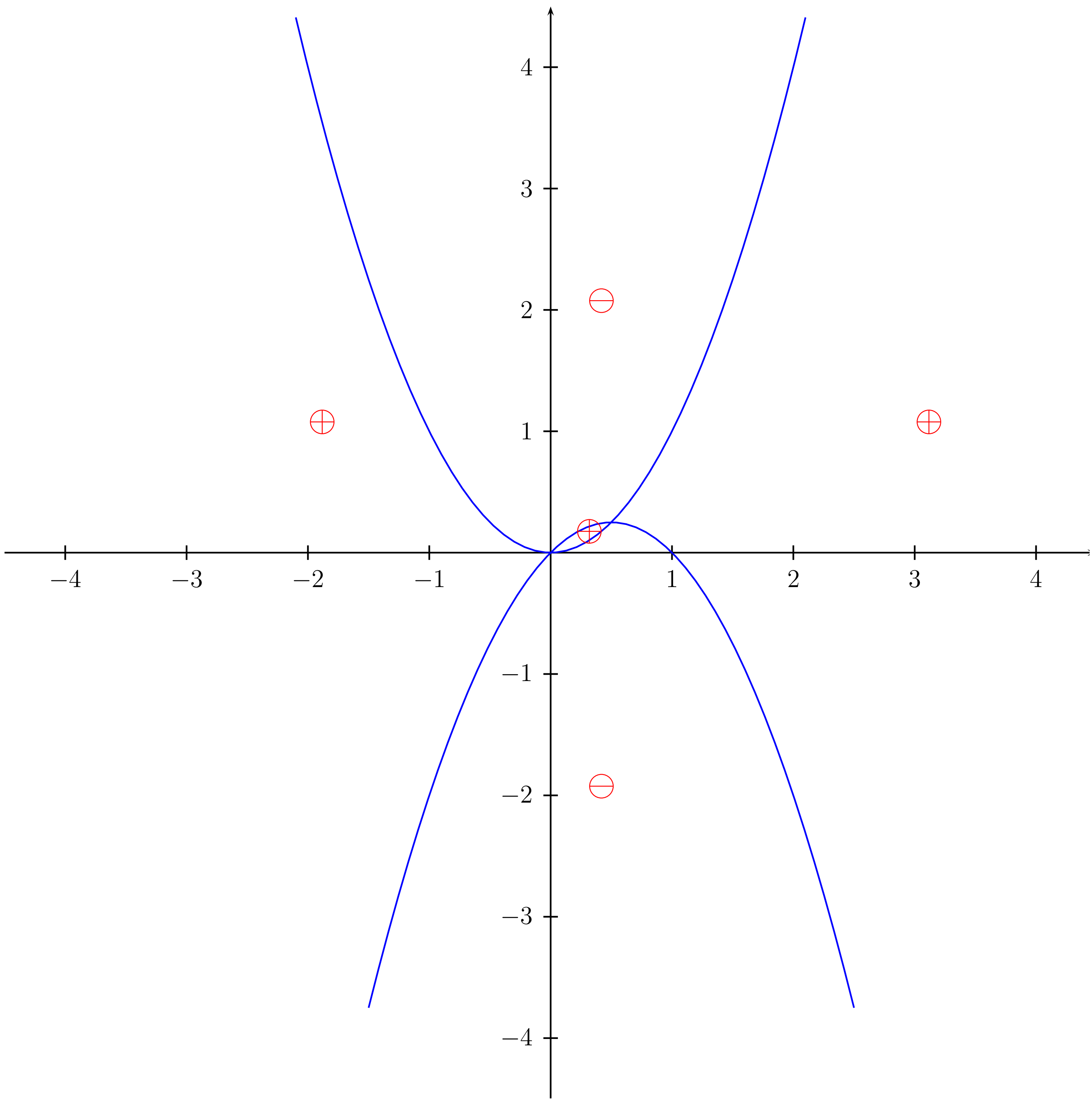
• En A, le plan tangent est aussi le plan $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. De plus, $(rt-s^2)\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=-1<0$. Donc le point A est un point selle.

• En B, le plan tangent est le plan d'équation $z=\frac{1}{256}$. De plus, $(rt-s^2)\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}>0$. Donc la surface $\mathscr{S}$ a une disposition en ballon au point B.

3. Il s'agit maintenant d'étudier le signe de $z=f(x,y)=x^4-x^3+xy-y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y)=x^4-x^3+xy-y^2=(x^4-y^2)-x(x^2-y)=(x^2-y)(x^2+y-x).$$

L'intersection de la surface $\mathscr{S}$ avec le plan $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ est donc la réunion des deux paraboles d'équations respectives $y=x^2$ et $y=-x^2+x$ dans le plan $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$. Représentons cette intersection ainsi que le signe de $f(x,y)$ $\oplus\ominus$.



4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4