Suites

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 ***IT

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\frac{u_0+u_1+...+u_n}{n+1}$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel ℓ, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ. Réciproque ?
2. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Réciproque ?
3. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

Correction ▼ [005220]

Exercice 2 ***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge au sens de CÉSARO et est monotone, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction ▼ [005221]

Exercice 3 **IT

Pour n entier naturel non nul, on pose $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ (série harmonique).

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln(n+1)<H_n<1+\ln(n)$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty}H_n$.
2. Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n=H_n-\ln(n)$ et $v_n=H_n-\ln(n+1)$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un réel $\gamma\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ (γ est appelée la constante d'EULER). Donner une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

Correction ▼ [005222]

Exercice 4 **

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_ku_{k+1}}=\frac{n+1}{u_0u_{n+1}}$.

Correction ▼ [005223]

Exercice 5 **

Calculer $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+...+k^2}$.

Correction ▼ [005224]

Exercice 6 ***

Soient a et b deux réels tels que $0<a<b$. On pose $u_0=a$ et $v_0=b$ puis, pour n entier naturel donné, $u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}v_n}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune est égale à $\frac{b\sin(\text{Arccos}(\frac{a}{b}))}{\text{Arccos}(\frac{a}{b})}$.

Correction ▼ [005225]

Exercice 7 **

Limite quand n tend vers $+\infty$ de

1. $\frac{\sin n}{n}$,
2. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,
3. $\frac{n!}{n^n}$,
4. $\frac{E\left((n+\frac{1}{2})^2\right)}{E\left((n-\frac{1}{2})^2\right)}$,
5. $\sqrt[n]{n^2}$,
6. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,
7. $\frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3}$,
8. $\prod_{k=1}^n 2^{k/2^k}$.

Correction ▼ [005226]

Exercice 8 **

Etudier la suite (u_n) définie par $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{2\sqrt{n+u_n}}$.

Correction ▼ [005227]

Exercice 9 **T Récurrences homographiques

Déterminer u_n en fonction de n quand la suite u vérifie :

1. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{u_n}{3-2u_n}$,
2. $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\frac{4(u_n-1)}{u_n}$ (ne pas se poser de questions d'existence).

Correction ▼ [005228]

Exercice 10 **

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par la donnée de u_0 et v_0 et les relations de récurrence

$$u_{n+1}=\frac{2u_n+v_n}{3} \text{ et } v_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}.$$

Etudier les suites u et v puis déterminer u_n et v_n en fonction de n en recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de u et v. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Correction ▼ [005229]

Exercice 11 **

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les suites définies par la donnée de u_0, v_0 et w_0 et les relations de récurrence

$$u_{n+1}=\frac{v_n+w_n}{2},\ v_{n+1}=\frac{u_n+w_n}{2} \text{ et } w_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}.$$

Etudier les suites u, v et w puis déterminer u_n, v_n et w_n en fonction de n en recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de u, v et w. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$, $\lim_{n\to+\infty} v_n$et $\lim_{n\to+\infty} w_n$.

Correction ▼ [005230]

Exercice 12 ***

Montrer que les suites définies par la donnée de u_0, v_0 et w_0 réels tels que $0<u_0<v_0<w_0$ et les relations de récurrence :

$$\frac{3}{u_{n+1}}=\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}+\frac{1}{w_n} \text{ et } v_{n+1}=\sqrt[3]{u_nv_nw_n} \text{ et } w_{n+1}=\frac{u_n+v_n+w_n}{3},$$

ont une limite commune que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Correction ▼ [005231]

Exercice 13 ***

Soit u une suite complexe et v la suite définie par $v_n = |u_n|$. On suppose que la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ converge vers un réel positif l. Montrer que si $0 \leq \ell < 1$, la suite (u_n) converge vers 0 et si $\ell > 1$, la suite (v_n) tend vers $+\infty$. Montrer que si $\ell = 1$, tout est possible.

Correction ▼ [005232]

Exercice 14 ***

1. Soit u une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel ℓ, alors $(\sqrt[n]{u_n})$ converge et a même limite.
2. Etudier la réciproque.
3. Application : limites de
   (a) $\sqrt[n]{C_{2n}^n}$,
   (b) $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$,
   (c) $\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$.

Correction ▼ [005233]

Exercice 15 *

Soient u et v deux suites de réels de $[0,1]$ telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Correction ▼ [005234]

Exercice 16 **

Montrer que si les suites (u_n^2) et (u_n^3) convergent alors (u_n) converge.

Correction ▼ [005235]

Exercice 17 ***T

Etudier les deux suites $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Correction ▼ [005236]

Exercice 18 **T

Etudier les deux suites $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.

Correction ▼ [005237]

Exercice 19

Etudier les deux suites $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$.

Correction ▼ [005238]

Exercice 20 **T

Déterminer u_n en fonction de n et de ses premiers termes dans chacun des cas suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = u_n$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n + 12$.
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{2}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
5. $\forall n \geq 2,\ u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + n^3$.
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0$.

7. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+4} - 2u_{n+3} + 2u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = n^5$.

Correction ▼ [005239]

Exercice 21 ****

On pose $u_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

Correction ▼ [005240]

Exercice 22 ***

Montrer que, pour $n \geq 2$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\ (n-1 \text{ radicaux}) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}\ (n-1 \text{ radicaux}).$$

En déduire $\lim_{n\to+\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$ (n radicaux).

Correction ▼ [005241]

Exercice 23 ***

1. Montrer que pour x réel strictement positif, on a : $\ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x)$.
2. Montrer que $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$ et en déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Correction ▼ [005242]

Exercice 24 ****

Soit $(u_n) = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$, une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel x. Montrer que les suites $(|p_n|)$ et (q_n) tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction ▼ [005243]

Exercice 25 **

Donner un exemple de suite (u_n) divergente, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, la suite (u_{kn}) converge.

Correction ▼ [005244]

Exercice 26 ***I

Soit f une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

Correction ▼ [005245]

Exercice 27 ***I

Soit u_n l'unique racine positive de l'équation $x^n + x - 1 = 0$. Etudier la suite (u_n).

Correction ▼ [005246]

Exercice 28 ****I

Etude des suites $(u_n) = (\cos na)$ et $(v_n) = (\sin na)$ où a est un réel donné.

1. Montrer que si $\frac{a}{2\pi}$ est rationnel, les suites u et v sont périodiques et montrer dans ce cas que (u_n) et (v_n) convergent si et seulement si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. On suppose dans cette question que $\frac{a}{2\pi}$ est irrationnel .
   (a) Montrer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge .
   (b) En utilisant différentes formules de trigonométrie fournissant des relations entre u_n et v_n, montrer par l'absurde que (u_n) et (v_n) divergent.

3. On suppose toujours que $\frac{a}{2\pi}$ est irrationnel. On veut montrer que l'ensemble des valeurs de la suite (u_n) (ou (v_n)) est dense dans $[-1,1]$, c'est-à-dire que $\forall x \in [-1,1]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}/\ |u_n - x| < \varepsilon$ (et de même pour v).
   (a) Montrer que le problème se ramène à démontrer que $\{na + 2k\pi,\ n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $E = \{na + 2k\pi,\ n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (par l'absurde en supposant que $\inf(E \cap \mathbb{R}_+^*) > 0$ pour en déduire que $\frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Q}$).
   (c) Conclure.

Correction ▼ [005247]

Exercice 29 ****

Montrer que l'ensemble E des réels de la forme $u_n = \sin(\ln(n))$, n entier naturel non nul, est dense dans $[-1,1]$.

Correction ▼ [005248]

Exercice 30 ***

Calculer $\inf_{\alpha \in]0,\pi[}(\sup_{n \in \mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|))$.

Correction ▼ [005249]

Exercice 31 **I

Soit (u_n) une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) tendant vers $+\infty$.

Correction ▼ [005250]

Exercice 32 ***

Soit (u_n) une suite de réels éléments de $]0,1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ (1-u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$. Montrer que (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Correction ▼ [005251]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 tel que, si $n \geq n_0$ alors $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit n un entier naturel strictement supérieur à n_0.

$$\begin{aligned}
|v_n - \ell| &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k - \ell \right| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (u_k - \ell) \right| \\
&\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k - \ell| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k - \ell| \\
&\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Maintenant, $\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell|$ est une expression constante quand n varie et donc, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| = 0$. Par suite, il existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que pour $n \geq n_1$, $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq n_1$, on a alors $|v_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon)$. La suite (v_n) est donc convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

$$\boxed{\text{Si la suite } u \text{ converge vers } \ell \text{ alors la suite } v \text{ converge vers } \ell.}$$

La réciproque est fausse. Pour n dans $\mathbb{N}$, posons $u_n = (-1)^n$. La suite (u_n) est divergente. D'autre part, pour n dans $\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k$ vaut 0 ou 1 suivant la parité de n et donc, dans tous les cas, $|v_n| \leq \frac{1}{n+1}$. Par suite, la suite (v_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

2. Si u est bornée, il existe un réel M tel que, pour tout naturel n, $|u_n| \leq M$. Pour n entier naturel donné, on a alors

$$|v_n| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} M = \frac{1}{n+1}(n+1)M = M.$$

La suite v est donc bornée.

$$\boxed{\text{Si la suite } u \text{ est bornée alors la suite } v \text{ est bornée.}}$$

La réciproque est fausse. Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n E\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} p \text{ si } n = 2p,\ p \in \mathbb{N} \\ -p \text{ si } n = 2p+1,\ p \in \mathbb{N} \end{cases}$.
u n'est pas bornée car la suite extraite (u_{2p}) tend vers $+\infty$ quand p tend vers $+\infty$. Mais, si n est impair, $v_n = 0$, et si n est pair, $v_n = \frac{1}{n+1} \times u_n = \frac{n}{2(n+1)}$, et dans tous les cas $|v_n| \leq \frac{1}{n+1}\frac{n}{2} \leq \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}$ et la suite v est bornée.

3. Si u est croissante, pour n entier naturel donné on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left((n+1) \sum_{k=0}^{n+1} u_k - (n+2) \sum_{k=0}^{n} u_k \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left((n+1)u_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} u_k \right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^{n} (u_{n+1} - u_k) \geq 0.
\end{aligned}$$

La suite v est donc croissante.

$$\boxed{\text{Si la suite } u \text{ est croissante alors la suite } v \text{ est croissante.}}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Supposons sans perte de généralité u croissante (quite à remplacer u par $-u$). Dans ce cas, ou bien u converge, ou bien u tend vers $+\infty$. Supposons que u tende vers $+\infty$, et montrons qu'il en est de même pour la suite v. Soit $A\in\mathbb{R}$. Il existe un rang n_0 tel que pour n naturel supérieur ou égal à n_0, $u_n\geq 2A$. Pour $n\geq n_0+1$, on a alors,

$$v_n=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n_0}u_k+\sum_{k=n_0+1}^{n}u_k\right)\geq\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}u_k+\frac{(n-n_0)2A}{n+1}$$

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}u_k+\frac{(n-n_0)2A}{n+1}$ tend vers $2A$ et donc, il existe un rang n_1 à partir duquel $v_n\geq\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0}u_k+\frac{(n-n_0)2A}{n+1}>A$. On a montré que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists n_1\in\mathbb{N}/\ (\forall n\in\mathbb{N})$, $(n\geq n_1\Rightarrow v_n>A)$. Par suite, $\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty$. Par contraposition, si v ne tend pas vers $+\infty$, la suite u ne tend pas vers $+\infty$ et donc converge, d'après la remarque initiale.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc, pour $k\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k+1}=(k+1-k)\frac{1}{k+1}\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx\leq(k+1-k)\frac{1}{k}=\frac{1}{k}.$$

Donc, pour $k\geq 1$, $\frac{1}{k}\geq\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx$ et, pour $k\geq 2$, $\frac{1}{k}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx$. En sommant ces inégalités, on obtient pour $n\geq 1$,

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geq\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\ln(n+1),$$

et pour $n\geq 2$,

$$H_n=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,dx=1+\int_1^{n}\frac{1}{x}\,dx=1+\ln n,$$

cette dernière inégalité restant vraie quand $n=1$. Donc,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ln(n+1)\leq H_n\leq 1+\ln n.}$$

2. Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx=\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x}\right)\,dx\leq 0$$

car la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ décroit sur $[n,n+1]$. De même,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+2)+\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}-\int_{n+1}^{n+2}\frac{1}{x}\,dx=\int_{n+1}^{n+2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{x}\right)\,dx\geq 0$$

car la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ décroit sur $[n+1,n+2]$. Enfin,

$$u_n-v_n=\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

et donc la suite $u-v$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Finalement, la suite u décroit, la suite v croit et la suite $u-v$ tend vers 0. On en déduit que les suites u et v sont adjacentes, et en particulier convergentes et de même limite. Notons γ cette limite. Pour tout entier naturel non nul n, on a $v_n\leq\gamma\leq u_n$, et en particulier, $v_3\leq\gamma\leq u_1$ avec $v_3=0,5...$ et $u_1=1$. Donc, $\gamma\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. Plus précisément, pour n entier naturel non nul donné, on a

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{10^{-2}}{2} \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 0,005 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq e^{0,005} - 1 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{e^{0,005}-1} = 199,5... \Leftrightarrow n \geq 200.$$

Donc $0 \leq \gamma - v_{100} \leq \frac{10^{-2}}{2}$ et une valeur approchée de v_{200} à $\frac{10^{-2}}{2}$ près (c'est-à-dire arrondie à la 3 ème décimale la plus proche) est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. On trouve $\gamma = 0,57$ à 10^{-2} près par défaut. Plus précisément,

$$\boxed{\gamma = 0,5772156649... \ (\gamma \text{ est la constante d'EULER}).}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit r la raison de la suite u. Pour tout entier naturel k, on a

$$\frac{r}{u_k u_{k+1}} = \frac{u_{k+1}-u_k}{u_k u_{k+1}} = \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}.$$

En sommant ces égalités, on obtient :

$$r\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}\right) = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}-u_0}{u_0 u_{n+1}} = \frac{(n+1)r}{u_0 u_{n+1}}.$$

Si $r \neq 0$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{(n+1)}{u_0 u_{n+1}}$, et si $r = 0$ (et $u_0 \neq 0$), u est constante et le résultat est immédiat.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit k un entier naturel non nul. On sait que $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Déterminons alors trois réels a, b et c tels que, pour entier naturel non nul k,

$$\frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} \ (*).$$

Pour k entier naturel non nul donné,

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} = \frac{a(k+1)(2k+1) + bk(2k+1) + ck(k+1)}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{(2a+2b+c)k^2 + (3a+b+c)k + a}{k(k+1)(2k+1)}.$$

Par suite,

$$(*) \Leftarrow \begin{cases} 2a+2b+c = 0 \\ 3a+b+c = 0 \\ a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 6 \\ c = -24 \end{cases},$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = 6\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right).$$

Ensuite, d'après l'exercice 3, quand n tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ puis

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = H_{n+1} - 1 = -1 + \ln(n+1) + \gamma + o(1) = \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \gamma - 1 + o(1) = \ln n + \gamma - 1 + o(1).$$

Enfin,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}=-1+\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=-1+H_{2n+1}-\frac{1}{2}H_n$$
$$=\ln(2n+1)+\gamma-\frac{1}{2}(\ln n+\gamma)-1+o(1)=\ln 2+\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)+\gamma-\frac{1}{2}\ln n-\frac{1}{2}\gamma-1+o(1)$$
$$=\frac{1}{2}\ln n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma-1+o(1)$$

Finalement, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2}=6\left(\ln n+\gamma+\ln n+\gamma-1-4\left(\frac{1}{2}\ln n+\ln 2+\frac{1}{2}\gamma-1\right)\right)=6(3-4\ln 2)+o(1).$$

Donc,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1^2+2^2+\ldots+k^2}=6(3-4\ln 2).}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Posons $\alpha=\text{Arccos}\,\frac{a}{b}$. α existe car $0<\frac{a}{b}<1$ et est élément de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. De plus, $a=b\cos\alpha$. Enfin, pour tout entier naturel n, $\frac{\alpha}{2^n}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc, $\cos\frac{\alpha}{2^n}>0$. On a $u_0=b\cos\alpha$ et $v_0=b$ puis $u_1=\frac{1}{2}(u_0+v_0)=\frac{b}{2}(1+\cos\alpha)=b\cos^2\frac{\alpha}{2}$ et $v_1=\sqrt{u_1v_0}=\sqrt{b\cos^2\frac{\alpha}{2}\times b}=b\cos\frac{\alpha}{2}$ puis $u_2=\frac{b}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(1+\cos\frac{\alpha}{2})=b\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2^2}$ et $v_2=\sqrt{b\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2^2}\times b\cos\frac{\alpha}{2}}=b\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}$... Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $v_n=b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}$ et $u_n=v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}$. C'est vrai pour $n=1$ et si pour $n\geq 1$ donné, on a $v_n=b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}$ et $u_n=v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}$ alors,

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}(v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}+v_n)=v_n\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

puis

$$v_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}v_n}=v_n\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}\ (\text{car }\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}>0),$$

et donc, $v_{n+1}=b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\frac{\alpha}{2^k}$ puis $u_{n+1}=v_{n+1}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$. On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}\text{ et }u_n=v_n\cos\frac{\alpha}{2^n}.}$$

Pour tout entier naturel non nul n, on a $v_n>0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}<1$. La suite v est donc strictement décroissante. Ensuite, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n>0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{v_{n+1}}{v_n}\frac{\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\alpha}{2^n}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\alpha}{2^n}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2^n}}\right)>\frac{1}{2}(1+1)=1.$$

La suite u est strictement croissante. Maintenant, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$v_n=b\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}=b\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2\sin\frac{\alpha}{2^k}}$$
$$=\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, $v_n \sim \frac{\sin\alpha}{2^n \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$, puis $u_n = v_n \cos\frac{\alpha}{2^n} \sim v_n \sim \frac{\sin\alpha}{\alpha}$. Ainsi, les suites u et v sont adjacentes de limite commune $b\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\mathrm{Arccos}\left(\frac{a}{b}\right)}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$. Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\frac{\sin n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.}$$

2. Quand n tend vers $+\infty$, $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim n \times \frac{1}{n} = 1$. Donc, $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ tend vers 1 puis, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+1/n)}$ tend vers $e^1 = e$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Pour n entier naturel non nul, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-n\ln(1+1/n)} = e^{-n(1/n+o(1/n))} = e^{-1+o(1)}$. Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{1}{e} = 0.36... < 1$. On sait alors que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.}$$

4. Pour $n \geq 1$, $\frac{(n+\frac{1}{2})^2-1}{(n-\frac{1}{2})^2} \leq u_n \leq \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2-1}$. Or, $\frac{(n+\frac{1}{2})^2-1}{(n-\frac{1}{2})^2}$ et $\frac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2-1}$ tendent vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc, d'après le théorème de la limite par encadrement, la suite u converge et a pour limite 1.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{E\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right)}{E\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right)} = 1.}$$

5. Quand n tend vers $+\infty$, $\sqrt[n]{n^2} = e^{\frac{1}{n}\ln(n^2)} = e^{2\ln n/n} = e^{o(1)}$, et donc $\sqrt[n]{n^2}$ tend vers 1.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.}$$

6. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$.
7. $\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \sim \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{6}$.
8. $\prod_{k=1}^n 2^{k/2^k} = 2^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}}}$. Pour x réel, posons $f(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et pour tout réel x,

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^n x^k\right)'(x) = \left(\sum_{k=0}^n x^k\right)'(x).$$

Pour $x \neq 1$, on a donc

$$f(x) = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

En particulier, $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n}+1}{(\frac{1}{2}-1)^2} \to 4$ (d'après un théorème de croissances comparées). Finalement,

$$\prod_{k=1}^n 2^{k/2^k} \to 2^{4/2} = 4.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{n+u_n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$
$$4(n+u_n) = (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2 \Leftrightarrow u_n = -n+\frac{1}{4}(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{4}(-2n+1+2\sqrt{n(n+1)})$$

Par suite, quand n tend vers $+\infty$,

$$u_n = -\frac{n}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{n^2+n} = \frac{1}{4}+\frac{n}{2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) = \frac{1}{4}+\frac{n}{2}\frac{1/n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$
$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+o(1) = \frac{1}{2}+o(1).$$

La suite (u_n) converge et a pour limite $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Calcul formel de u_n. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{x}{3-2x} = x \Leftrightarrow 2x^2-2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. Pour n entier naturel donné, on a alors

$$\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}-1}{\frac{u_n}{3-2u_n}} = \frac{3u_n-3}{u_n} = 3\frac{u_n-1}{u_n}.$$

Par suite, $\frac{u_n-1}{u_n} = 3^n\frac{u_0-1}{u_0}$, puis $u_n = \frac{u_0}{u_0-3^n(u_0-1)}$.

2. Calcul formel de u_n. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{4(x-1)}{x} = x \Leftrightarrow x^2-4x+4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Pour n entier naturel donné, on a alors

$$\frac{1}{u_{n+1}-2} = \frac{1}{\frac{4(u_n-1)}{u_n}-2} = \frac{u_n}{2(u_n-2)} = \frac{u_n-2+2}{2(u_n-2)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{u_n-2}.$$

Par suite, $\frac{1}{u_n-2} = \frac{n}{2}+\frac{1}{u_0-2}$, puis $u_n = 2+\frac{2(u_0-2)}{(u_0-2)n+2}$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases} u_{n+1}-u_n = \frac{1}{3}(v_n-u_n) \\ v_{n+1}-v_n = -\frac{1}{3}(v_n-u_n) \\ v_{n+1}-u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n-u_n) \end{cases}$. La dernière relation montre que la suite $v-u$ garde un signe constant puis les deux premières relations montrent que pour tout entier naturel n, $\text{sgn}(u_{n+1}-u_n) = \text{sgn}(v_n-u_n)$ et $\text{sgn}(v_{n+1}-v_n) = -\text{sgn}(v_n-u_n)$. Les suites u et v sont donc monotones de sens de variation opposés. Si par exemple $u_0 \leq v_0$, alors, pour tout naturel n, on a :

$$u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0.$$

Dans ce cas, la suite u est croissante et majorée par v_0 et donc converge vers un certain réel ℓ. De même, la suite v est décroissante et minorée par u_0 et donc converge vers un certain réel ℓ'. Enfin, puisque pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \frac{2u_n+v_n}{3}$, on obtient par passage à la limite quand n tend vers l'infini, $\ell = \frac{2\ell+\ell'}{3}$ et donc $\ell = \ell'$. Les suites u et v sont donc adjacentes. Si $u_0 > v_0$, il suffit d'échanger les rôles de u et v. **Calcul des suites u et v.** Pour n entier naturel donné, on a $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - u_n)$. La suite $v-u$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Pour tout naturel n, on a donc $v_n - u_n = \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)$. D'autre part, pour n entier naturel donné, $v_{n+1} + u_{n+1} = v_n + u_n$. La suite $v+u$ est constante et donc, pour tout entier naturel n, on a $v_n + u_n = v_0 + u_0$. En additionnant et en retranchant les deux égalités précédentes, on obtient pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{2}\left(v_0 + u_0 + \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{2}\left(v_0 + u_0 - \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)\right).$$

En particulier, $\ell = \ell' = \frac{u_0+v_0}{2}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - v_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_n - v_n)$ et donc, $u_n - v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)$. De même, en échangeant les rôles de u, v et w, $v_n - w_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - w_0)$ et $w_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (w_0 - v_0)$ (attention, cette dernière égalité n'est autre que la somme des deux premières et il manque encore une équation). On a aussi, $u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = u_n + v_n + w_n$ et donc, pour tout naturel n, $u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0$. Ainsi, u_n, v_n et w_n sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{l} v_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) \\ w_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (w_0 - u_0) \\ u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0 \end{array}\right. .$$

Par suite, pour tout entier naturel n, on a

$$\left\{\begin{array}{l} u_n = \frac{1}{3}\left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2u_0 - v_0 - w_0)\right) \\ v_n = \frac{1}{3}\left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-u_0 + 2v_0 - w_0)\right) \\ w_n = \frac{1}{3}\left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-u_0 - v_0 + 2w_0)\right) \end{array}\right. .$$

Les suites u, v et w convergent vers $\frac{u_0+v_0+w_0}{3}$.

Correction de l'exercice 12 ▲

Montrons tout d'abord que :

$$\forall (x,y,z) \in]0,+\infty[^3,\ (x \leq y \leq z \Rightarrow \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}).$$

Posons $m = \frac{x+y+z}{3}$, $g = \sqrt[3]{xyz}$ et $h = \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$. Soient y et z deux réels strictement positifs tels que $y \leq z$. Pour $x \in]0,y]$, posons

$$u(x) = \ln m - \ln g = \ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right) - \frac{1}{3}(\ln x + \ln y + \ln z).$$

u est dérivable sur $]0,y]$ et pour $x \in]0,y]$,

$$u'(x) = \frac{1}{x+y+z} - \frac{1}{3x} \leq \frac{1}{x+x+x} - \frac{1}{3x} = 0.$$

u est donc décroissante sur $]0,y]$ et pour x dans $]0,y]$, $u(x) \geq u(y) = \ln\left(\frac{2y+z}{3}\right) - \frac{1}{3}(2\ln y + \ln z)$. Soit z un réel strictement positif fixé. Pour $y \in]0,z]$, posons $v(y) = \ln\left(\frac{2y+z}{3}\right) - \frac{1}{3}(2\ln y + \ln z)$. v est dérivable sur $]0,z]$ et pour $y \in]0,z]$,

$$v'(y) = \frac{2}{2y+z} - \frac{2}{3z} \leq \frac{2}{3z} - \frac{2}{3z} = 0.$$

v est donc décroissante sur $]0,z]$ et pour y dans $]0,z]$, on a $v(y) \geq v(z) = 0$. On vient de montrer que $g \leq m$. En appliquant ce résultat à $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ et $\frac{1}{z}$, on obtient $\frac{1}{g} \leq \frac{1}{h}$ et donc $h \leq g$. Enfin, $m \leq \frac{z+z+z}{3} = z$ et $h \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}} = x$. Finalement,

$$\boxed{x \leq h \leq g \leq m \leq z.}$$

Ce résultat préliminaire étant établi, puisque $0 < u_0 < v_0 < w_0$, par récurrence, les suites u, v et w sont définies puis, pour tout naturel n, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$, et de plus $u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq w_{n+1} \leq w_n \leq w_0$. La suite u est croissante et majorée par w_0 et donc converge. La suite w est décroissante et minorée par u_0 et donc converge. Enfin, puisque pour tout entier naturel n, $v_n = 3w_{n+1} - u_n - w_n$, la suite v converge. Soient alors a, b et c les limites respectives des suites u, v et w. Puisque pour tout entier naturel n, on a $0 < u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n$, on a déjà par passage à la limite $0 < u_0 \leq a \leq b \leq c$. Toujours par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ b = \sqrt[3]{abc} \\ c = \frac{a+b+c}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2bc = ab + ac \\ b^2 = ac \\ a + b = 2c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = 2c - a \\ a^2 - 5ac + 4c^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (a = c \text{ et } b = c) \text{ ou } (a = 4c \text{ et } b = -2c).$$

$b = -2c$ est impossible car b et c sont strictement positifs et donc, $a = b = c$. Les suites u, v et w convergent vers une limite commune.

Correction de l'exercice 13 ▲

Supposons que la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ tende vers le réel positif ℓ.

- Supposons que $0 \leq \ell < 1$. Soit $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$.
  ε est un réel strictement positif et donc, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2})$.
  Pour $n \geq n_0$, par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient $|u_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Or, $0 < \frac{1+\ell}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$ et donc $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- Supposons que $\ell > 1$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} > \ell - \frac{\ell-1}{2} = \frac{1+\ell}{2})$. Mais alors, pour $n \geq n_0$, $|u_n| > \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Or, $\frac{1+\ell}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$, et donc $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que $|u_n|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit, pour α réel et n entier naturel non nul, $u_n = n^\alpha$. $\sqrt[n]{u_n} = e^{\alpha \frac{\ln n}{n}}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, et ceci pour toute valeur de α. Mais, si $\alpha < 0$, u_n tend vers 0, si $\alpha = 0$, u_n tend vers 1 et si $\alpha > 0$, u_n tend vers $+\infty$. Donc, si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Correction de l'exercice 14 ▲

1. Supposons $\ell > 0$. Soit ε un réel strictement positif, élément de $]0,\ell[$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq n_0 \Rightarrow 0 < \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2})$. Pour $n > n_0$, puisque $u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \frac{u_{n-2}}{u_{n-3}} \ldots \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} u_{n_0}$, on a $u_{n_0} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} \leq u_n \leq u_{n_0} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}$, et donc
$$(u_{n_0})^{1/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \sqrt[n]{u_n} \leq (u_{n_0})^{1/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$
Maintenant, le membre de gauche de cet encadrement tend vers $\ell - \frac{\varepsilon}{2}$, et le membre de droite rend vers $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, on peut trouver un entier naturel $n_1 \geq n_0$ tel que, pour $n \geq n_1$, $(u_{n_0})^{1/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) > \ell - \varepsilon$, et $(u_{n_0})^{1/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \ell + \varepsilon$. Pour $n \geq n_1$, on a alors $\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon$. On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N} / (\forall n \in \mathbb{N})$, $(n \geq n_1 \Rightarrow \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon)$. Donc, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers ℓ. On traite de façon analogue le cas $\ell = 0$.
2. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit u la suite définie par
$$\forall p \in \mathbb{N},\ u_{2p} = a^p b^p \text{ et } u_{2p+1} = a^{p+1} b^p.$$

(on part de 1 puis on multiplie alternativement par a ou b). Alors, $\sqrt[2p]{u_{2p}} = \sqrt{ab}$ et $\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}} = a^{\frac{p+1}{2p+1}} b^{\frac{p}{2p+1}} \to \sqrt{ab}$. Donc, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers $\sqrt{ab}$ (et en particulier converge). On a bien sûr $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = a$ et $\frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}} = b$. La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet donc deux suites extraites convergentes de limites distinctes et est ainsi divergente. La réciproque du 1) est donc fausse.

3. (a) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \binom{2n}{n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!}\frac{n!^2}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n+2}{n+1}.$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$, et donc $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$.

(b) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \frac{n^n}{n!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{n!}{(n+1)!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$, et donc $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$.

(c) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \frac{(3n)!}{n^{2n}n!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(3n+3)!}{(3n)!}\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$$
$$= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}.$$

Maintenant, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n} = e^{-2n\ln(1+1/n)} = e^{-2n(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{-2+o(1)}$, et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $27e^{-2}$. Par suite, $\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$ tend vers $\frac{27}{e^2}$.

Correction de l'exercice 15 ▲

D'après le théorème de la limite par encadrement :

$$0 \leq u_nv_n \leq u_n \leq 1 \Rightarrow u \text{ converge et tend vers } 1.$$

Il en est de même pour v en échangeant les rôles de u et v.

Correction de l'exercice 16 ▲

Si $u_n^2 \to 0$, alors $|u_n| = \sqrt{|u_n^2|} \to 0$ et donc $u_n \to 0$. Si $u_n^2 \to \ell \neq 0$, alors $(u_n) = (\frac{u_n^3}{u_n^2})$ converge. (L'exercice n'a d'intérêt que si la suite u est une suite complexe, car si u est une suite réelle, on écrit immédiatement $u_n = \sqrt[3]{u_n^3}$ (et non pas $u_n = \sqrt{u_n^2}$)).

Correction de l'exercice 17 ▲

Les suites u et v sont définies à partir du rang 1 et strictement positives. Pour tout naturel non nul n, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{(n+1)\ln(n+2)+n\ln n-(2n+1)\ln(n+1)}.$$

Pour x réel strictement positif, posons alors $f(x) = (x+1)\ln(x+2)+x\ln x-(2x+1)\ln(x+1)$. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{x+1}{x+2}+\ln(x+2)+1+\ln x-\frac{2x+1}{x+1}-2\ln(x+1)\\ &= \frac{x+2-1}{x+2}+\ln(x+2)+1+\ln x-\frac{2x+2-1}{x+1}-2\ln(x+1)\\ &= -\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}+\ln x+\ln(x+2)-2\ln(x+1).\end{aligned}$$

De même, f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x+1}\\ &= \frac{x(x+1)^2-x(x+2)^2+(x+1)^2(x+2)^2+x(x+1)^2(x+2)-2x(x+1)(x+2)^2}{x(x+1)^2(x+2)^2}\\ &= \frac{-2x^2-3x+(x^2+2x+1)(x^2+4x+4)+(x^2+2x)(x^2+2x+1)-2(x^2+x)(x^2+4x+4)}{x(x+1)^2(x+2)^2}\\ &= \frac{3x+4}{x(x+1)^2(x+2)^2}>0.\end{aligned}$$

f' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et donc, pour $x>0$,

$$f'(x)<\lim_{t\to+\infty}f'(t)=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t+2}+\frac{1}{t+1}+\ln\frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\right)=0.$$

Donc, f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Or, pour $x>0$,

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+1)\ln(x+2)+x\ln x-(2x+1)\ln(x+1)\\ &= (x+(x+1)-(2x+1))\ln x+(x+1)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-(2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\ &= \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+2\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}-2\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.\end{aligned}$$

On sait que $\lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$, et donc, quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $0+0+2-2=0$. Comme f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, pour tout réel $x>0$, on a $f(x)>\lim_{t\to+\infty}f(t)=0$. f est donc strictement positive sur $]0,+\infty[$. Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f(n)>0$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}=e^{f(n)}>1$. La suite u est strictement croissante. (Remarque. On pouvait aussi étudier directement la fonction $x\mapsto\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ sur $]0,+\infty[$.) On montre de manière analogue que la suite v est strictement décroissante. Enfin, puisque u_n tend vers e, et que $v_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$ tend vers e, les suites u et v sont adjacentes. (Remarque. En conséquence, pour tout entier naturel non nul n, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Par exemple, pour $n=10$, on obtient $\left(\frac{11}{10}\right)^{10}<e<\left(\frac{11}{10}\right)^{11}$ et donc, $2,59...<e<2,85...$ et pour $n=100$, on obtient $1,01^{100}<e<1,01^{101}$ et donc $2,70...<e<2,73...$ Ces deux suites convergent vers e lentement).

Correction de l'exercice 18 ▲

Il est immédiat que u croit strictement et que $v-u$ est strictement positive et tend vers 0. De plus, pour n entier naturel donné,

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)\times(n+1)!}-\frac{1}{n\times n!}=\frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1)\times(n+1)!}=\frac{-1}{n(n+1)\times(n+1)!}<0,$$

et la suite v est strictement décroissante. Les suites u et v sont donc adjacentes et convergent vers une limite commune (à savoir e).

(Remarque. Dans ce cas, la convergence est très rapide. On a pour tout entier naturel non nul n, $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n\times n!}$ et $n=5$ fournit par exemple $2,716... < e < 2,718...$).

Correction de l'exercice 19 ▲

Pour n entier naturel non nul donné, on a

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}} = 0.$$

De même,

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}} = 0.$$

La suite u est strictement croissante et la suite v est strictement décroissante. Enfin,

$$v_n-u_n = 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},$$

et la suite $v-u$ converge vers 0. Les suites u et v sont ainsi adjacentes et donc convergentes, de même limite.

Correction de l'exercice 20 ▲

1. L'équation caractéristique est $4z^2-4z-3=0$. Ses solutions sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Les suites cherchées sont les suites de la forme $(u_n)=\left(\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ où λ et μ sont deux réels (ou deux complexes si on cherche toutes les suites complexes). Si u_0 et u_1 sont les deux premiers termes de la suite u, λ et μ sont les solutions du système $\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=u_0\\ -\frac{\lambda}{2}+\frac{3\mu}{2}=u_1\end{array}\right.$ et donc $\lambda=\frac{1}{4}(3u_0-2u_1)$ et $\mu=\frac{1}{4}(u_0+2u_1)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{4}(3u_0-2u_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}(u_0+2u_1)\left(\frac{3}{2}\right)^n.}$$

2. Clairement $u_{2n}=\frac{1}{4^n}u_0$ et $u_{2n+1}=\frac{1}{4^n}u_1$ et donc $u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}(1+(-1)^n)u_0+2\times\frac{1}{2^n}(1-(-1)^n)u_1\right)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{2^{n+1}}\left((1+(-1)^n)u_0+2(1-(-1)^n)u_1\right).}$$

3. Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{3}{2}\right)^n$. Une solution particulière de l'équation proposée est une constante a telle que $4a=4a+3a+12$ et donc $a=-4$. Les solutions de l'équation proposée sont donc les suites de la forme $\left(-4+\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\mu\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ où λ et μ sont les solutions du système $\left\{\begin{array}{l}\lambda+\mu=4+u_0\\ -\frac{\lambda}{2}+\frac{3\mu}{2}=4+u_1\end{array}\right.$ et donc $\lambda=\frac{1}{4}(4+3u_0-2u_1)$ et $\mu=\frac{1}{4}(12+u_0+2u_1)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=-4+\frac{1}{4}(4+3u_0-2u_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}(12+u_0+2u_1)\left(\frac{3}{2}\right)^n.}$$

4. La suite $v=\frac{1}{u}$ est solution de la récurrence $2v_{n+2}=v_{n+1}-v_n$ et donc, (v_n) est de la forme $\left(\lambda\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n+\mu\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n\right)$ et donc $u_n=\frac{1}{\lambda\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n+\mu\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n}$.

5. Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $(\lambda+\mu 2^n)$. 1 est racine simple de l'équation caractéristique et donc il existe une solution particulière de l'équation proposée de la forme $u_n=an^4+bn^3+cn^2+dn$. Pour $n\geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
u_n-3u_{n-1}+2u_{n-2} &= (an^4+bn^3+cn^2+dn)-3(a(n-1)^4+b(n-1)^3+c(n-1)^2+d(n-1))\\
&\quad +2(a(n-2)^4+b(n-2)^3+c(n-2)^2+d(n-2))\\
&= a(n^4-3(n-1)^4+2(n-2)^4)+b(n^3-3(n-1)^3+2(n-2)^3)\\
&\quad +c(n^2-3(n-1)^2+2(n-2)^2)+d(n-3(n-1)+2(n-2))\\
&= a(-4n^3+30n^2-52n+29)+b(-3n^2+15n-13)+c(-2n+5)+d(-1)\\
&= n^3(-4a)+n^2(30a-3b)+n(-52a+15b-2c)+29a-13b+5c-d.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u \text{ est solution} &\Leftrightarrow -4a=1 \text{ et } 30a-3b=0 \text{ et } -52a+15b-2c=0 \text{ et } 29a-13b+5c-d=0\\
&\Leftrightarrow a=-\frac{1}{4},\ b=-\frac{5}{2},\ c=-\frac{49}{4},\ d=-36.
\end{aligned}$$

Les suites cherchées sont les suites de la forme $\left(-\frac{1}{4}(n^3+10n^2+49n+144)+\lambda+\mu 2^n\right)$.

6. Pour tout complexe z, $z^3-6z^2+11z-6=(z-1)(z-2)(z-3)$ et les suites solutions sont les suites de la forme $(\alpha+\beta 2^n+\gamma 3^n)$.
7. Pour tout complexe z, $z^4-2z^3+2z^2-2z+1=(z^2+1)^2-2z(z^2+1)=(z-1)^2(z^2+1)$. Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $\alpha+\beta n+\gamma i^n+\delta(-i)^n$. 1 est racine double de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $u_n=an^7+bn^6+cn^5+dn^4+en^3+fn^2$. Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+4}-2u_{n+3}+2u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n &= a((n+4)^7-2(n+3)^7+2(n+2)^7-2(n+1)^7+n^7)\\
&\quad +b((n+4)^6-2(n+3)^6+2(n+2)^6-2(n+1)^6+n^6)\\
&\quad +c((n+4)^5-2(n+3)^5+2(n+2)^5-2(n+1)^5+n^5)\\
&\quad +d((n+4)^4-2(n+3)^4+2(n+2)^4-2(n+1)^4+n^4)\\
&\quad +e((n+4)^3-2(n+3)^3+2(n+2)^3-2(n+1)^3+n^3)\\
&\quad +f((n+4)^2-2(n+3)^2+2(n+2)^2-2(n+1)^2+n^2)\\
&= a(84n^5+840n^4+4340n^3+12600n^2+19348n+12264)\\
&\quad +b(60n^4+480n^3+1860n^2+3600n+2764)\\
&\quad +c(40n^3+240n^2+620n+600)+d(24n^2+96n+124)+e(12n+24)+4f\\
&= n^5(84a)+n^4(840a+60b)+n^3(4340a+480b+40c)+n^2(12600a+1860b+240c+24d)\\
&\quad +n(19348a+3600b+620c+96d+12e)+(12264a+2764b+600c+124d+24e+4f)
\end{aligned}$$

u est solution si et seulement si $84a=1$ et donc $a=\frac{1}{84}$, puis $840a+60b=0$ et donc $b=-\frac{1}{6}$, puis $4340a+480b+40c=0$ et donc $c=\frac{17}{24}$, puis $12600a+1860b+240c+24d=0$ et donc $d=-\frac{5}{12}$ puis $19348a+3600b+620c+96d+12e=0$ et donc $e=-\frac{59}{24}$ puis $12264a+2764b+600c+124d+24e+4f=0$ et donc $f=\frac{1}{12}$. La solution générale de l'équation avec second membre est donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{168}(2n^7-28n^6+119n^5-70n^4-413n^3+14n^2)+\alpha+\beta n+\gamma i^n+\delta(-i)^n,\ (\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{C}^4.$$

Correction de l'exercice 21 ▲

Tout d'abord , on montre facilement par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, u_n existe et $u_n\geq 1$. Mais alors, pour tout entier naturel non nul n, $1\leq u_{n+1}=1+\frac{n}{u_n}\leq 1+n$. Par suite, pour $n\geq 2$, $1\leq u_n\leq n$, ce qui reste vrai pour $n=1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq u_n \leq n.$$

Supposons momentanément que la suite $(u_n - \sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge vers un réel ℓ. Dans ce cas :

$$1+\frac{n}{u_n} = 1+\frac{n}{\sqrt{n}+\ell+o(1)} = 1+\sqrt{n}\frac{1}{1+\frac{\ell}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1+\sqrt{n}\left(1-\frac{\ell}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sqrt{n}+1-\ell+o(1).$$

D'autre part,

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1}+\ell+o(1) = \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}+\ell+o(1) = \sqrt{n}+\ell+o(1),$$

et donc $\ell-(1-\ell) = o(1)$ ou encore $2\ell-1=0$. Donc, si la suite $(u_n-\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge vers un réel ℓ, alors $\ell = \frac{1}{2}$. Il reste à démontrer que la suite $(u_n-\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge. On note que pour tout entier naturel non nul,

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{u_n}(-u_n^2+u_n+n) = \frac{1}{u_n}\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})-u_n\right)\left(u_n-\frac{1}{2}(1-\sqrt{4n+1})\right).$$

Montrons par récurrence que pour $n \geq 1$, $\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3}) \leq u_n \leq \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})$. Posons $v_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3})$ et $w_n = \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1})$.
Si $n=1$, $v_1 = 1 \leq u_1 = 1 \leq \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = w_1$.
Soit $n \geq 1$. Supposons que $v_n \leq u_n \leq w_n$. Alors,

$$1+\frac{2n}{\sqrt{4n+1}+1} \leq u_{n+1} = 1+\frac{n}{u_n} \leq 1+\frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1}.$$

Mais, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{sgn}\Big(\frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+5})-(1+\frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1})\Big) &= \mathrm{sgn}((1+\sqrt{4n+5})(1+\sqrt{4n-3})-2(2n+1+\sqrt{4n-3}))\\
&= \mathrm{sgn}(\sqrt{4n+5}(1+\sqrt{4n-3})-(4n+1+\sqrt{4n-3}))\\
&= \mathrm{sgn}((4n+5)(1+\sqrt{4n-3})^2-(4n+1+\sqrt{4n-3})^2) \text{ (par croissance de } x\mapsto x^2 \text{ sur } [0,+\infty[)\\
&= \mathrm{sgn}((4n+5)(4n-2+2\sqrt{4n-3})-((4n+1)^2+2(4n+1)\sqrt{4n-3}+4n-3))\\
&= \mathrm{sgn}(-8+8\sqrt{4n-3}) = \mathrm{sgn}(\sqrt{4n-3}-1) = \mathrm{sgn}((4n-3)-1) = \mathrm{sgn}(n-1) = +
\end{aligned}$$

Donc, $u_{n+1} \leq 1+1+\frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1} \leq w_{n+1}$.
D'autre part,

$$1+\frac{2n}{\sqrt{4n+1}+1} = \frac{2n+1+\sqrt{4n+1}}{\sqrt{4n+1}+1} = \frac{(\sqrt{4n+1}+1)^2}{2(\sqrt{4n+1}+1)} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1}) = v_{n+1},$$

et donc $v_{n+1} \leq u_{n+1} \leq w_{n+1}$.
On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n-3}) \leq u_n \leq \frac{1}{2}(1+\sqrt{4n+1}),$$

(ce qui montre au passage que u est croissante).
Donc, pour $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2}+\sqrt{n-\frac{3}{4}}-\sqrt{n} \leq u_n-\sqrt{n} \leq \frac{1}{2}+\sqrt{n+\frac{1}{4}}-\sqrt{n},$$

ou encore, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\sqrt{n}} \leq u_n-\sqrt{n} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{4}}+\sqrt{n}}.$$

Maintenant, comme les deux suites $(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{n-\frac{3}{4}}+\sqrt{n}})$ et $(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{4}}+\sqrt{n}})$ convergent toutes deux vers $\frac{1}{2}$, d'après le théorème de la limite par encadrements, la suite $(u_n-\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 22 ▲

L'égalité proposée est vraie pour $n=2$ car $\cos\frac{\pi}{2^2}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit $n\geq 2$. Supposons que $\cos(\frac{\pi}{2^n})=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux).
Alors, puisque $\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})>0$ (car $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ est dans $]0,\frac{\pi}{2}[$),

$$\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})=\sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2^n})}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}})}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}},\ (n\text{ radicaux}).$$

On a montré par récurrence que, pour $n\geq 2$, $\cos(\frac{\pi}{2^n})=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux).
Ensuite, pour $n\geq 2$,

$$\sin(\frac{\pi}{2^n})=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos(\frac{\pi}{2^{n-1}})}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}\ (n-1\text{ radicaux})$$

Enfin,

$$2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}=2^n.2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\sim 2^{n+1}\frac{\pi}{2^{n+1}}=\pi.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty}2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots\sqrt{2}}}=\pi$.

Correction de l'exercice 23 ▲

1. Pour x réel positif, posons $f(x)=x-\ln(1+x)$ et $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$. f et g sont dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour $x>0$, on a

$$f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}>0,$$

et

$$g'(x)=\ln(x+1)+1-1=\ln(x+1)>0.$$

f et g sont donc strictement croissantes sur $[0,+\infty[$ et en particulier, pour $x>0$, $f(x)>f(0)=0$ et de même, $g(x)>g(0)=0$. Finalement, f et g sont strictement positives sur $]0,+\infty[$ ou encore,

$$\forall x>0,\ \ln(1+x)<x<(1+x)\ln(1+x).$$

2. Soit k un entier naturel non nul.
D'après 1), $\ln(1+\frac{1}{k})<\frac{1}{k}<(1+\frac{1}{k})\ln(1+\frac{1}{k})$, ce qui fournit $k\ln(1+\frac{1}{k})<1<(k+1)Ln(1+\frac{1}{k})$, puis, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ 0<(1+\frac{1}{k})^k<e<(1+\frac{1}{k})^{k+1}.$$

En multipliant membre à membre ces encadrements, on obtient pour tout naturel non nul n :

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k < e^n < \prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^{k+1}.$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^k = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^{k-1}}{\prod_{k=1}^{n} k^k} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

De même,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k})^{k+1} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^k}{\prod_{k=1}^{n} k^{k+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{e}\frac{n+1}{n} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{e}\frac{n+1}{n}(n+1)^{1/n}.$$

D'après le théorème de la limite par encadrements, comme $\frac{n+1}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini de même que $(n+1)^{1/n} = e^{\ln(n+1)/n}$, on a montré que $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ tend vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 24 ▲

Soit x un irrationnel et $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels tendant vers x (p_n entier relatif et q_n entier naturel non nul, la fraction $\frac{p_n}{q_n}$ n'étant pas nécessairement irréductible). Supposons que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers $+\infty$. Donc :

$$\exists A > 0/\ (\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \geq n_0/\ q_n \geq A)$$

ou encore, il existe une suite extraite $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est bornée.
La suite $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels qui est bornée, et donc cette suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Mais alors, on peut extraire de la suite $(q_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et donc de la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui est constante et en particulier convergente.
La suite $(p_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}})_{n\in\mathbb{N}}(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite d'entiers relatifs convergente et est donc constante à partir d'un certain rang.
Ainsi, on peut extraire de la suite $(p_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(p_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ constante. La suite $((q_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est également constante car extraite de la suite constante $(q_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et finalement, on a extrait de la suite $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ constante.
Mais la suite $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x et donc la suite extraite $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x. Puisque $(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}} = x$ et donc x est rationnel. Contradiction .
Donc la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Enfin si $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$, on peut extraire de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite bornée $(p_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Mais alors, la suite $(\frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $x = 0$ contredisant l'irrationnalité de x.
Donc, la suite $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+_infty$.

Correction de l'exercice 25 ▲

On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, $u_4 = 0$, $u_5 = 1$,... c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ n'est pas premier} \\ 1 \text{ si } n \text{ est premier} \end{cases}.$$

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $n \geq 2$, l'entier kn est composé et donc, pour $n \geq 2$, $u_{kn} = 0$. En particulier, la suite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0. Maintenant, l'ensemble des nombres premiers est infini et si p_n est le n-ième nombre premier, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. La suite $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et est constante égale à 1. En particulier, la suite $(u_{p_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

admet au moins deux suites extraites convergentes de limites distinctes et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge bien que toutes les suites $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 pour $k \geq 2$.

Correction de l'exercice 26 ▲

Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même, injective. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.
Soient A un réel puis $m = \text{Max}(0, 1+E(A))$.
Puisque f est injective, on a $\text{card}(f^{-1}(\{0,1,\dots,m\}) \geq m+1$. En particulier, $f^{-1}(\{0,1,\dots,m\})$ est fini (éventuellement vide).
Posons $n_0 = 1 + \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } f^{-1}(\{0,1,\dots,m\}) = \emptyset \\ \text{Max} f^{-1}(\{0,1,\dots,m\}) \text{ sinon} \end{array}\right.$.
Par définition de n_0, si $n \geq n_0$, n n'est pas élément de $f^{-1}(\{0,1,\dots,m\})$ et donc $f(n) > m > A$.
On a montré que $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ (\forall n \in \mathbb{N})$, $(n \geq n_0 \Rightarrow f(n) > A)$ ou encore $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

Correction de l'exercice 27 ▲

Pour n naturel non nul et x réel positif, posons $f_n(x) = x^n + x - 1$.
Pour $x \geq 0$, $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ et donc $u_1 = \frac{1}{2}$.
Pour $n \geq 2$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour $x \geq 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$.
f_n est ainsi continue et strictemnt croissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $f_n(\mathbb{R}^+) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f_n(x)[= [-1,+\infty[$, et en particulier,

$$\exists! x \in [0,+\infty[/\ f_n(x) = 0.$$

Soit u_n ce nombre. Puisque $f_n(0) = -1 < 0$ et que $f_n(1) = 1 > 0$, par stricte croissance de f_n sur $[0,+\infty[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1.$$

La suite u est donc bornée.
Ensuite, pour n entier naturel donné et puisque $0 < u_n < 1$:

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 < u_n^n + u_n - 1 = f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

et donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ puis, par stricte croissance de f_{n+1} sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}.$$

La suite u est bornée et strictement croissante. Donc, la suite u converge vers un réel ℓ, élément de $[0,1]$.
Si $0 \leq \ell < 1$, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a : $u_n \leq \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}$. Mais alors, pour $n \geq n_0$, on a $1 - u_n = u_n^n \leq (\frac{1+\ell}{2})^n$ et quand n tend vers vers $+\infty$, on obtient $1 - \ell \leq 0$ ce qui est en contradiction avec $0 \leq \ell < 1$. Donc, $\ell = 1$.

Correction de l'exercice 28 ▲

1. Posons $a = \frac{2p\pi}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(p,q) = 1$. Pour tout entier naturel n, on a

$$u_{n+q} = \cos\left((n+q)\frac{2p\pi}{q}\right) = \cos\left(n\frac{2p\pi}{q} + 2p\pi\right) = \cos(na) = u_n.$$

   La suite u est donc q-périodique et de même la suite v est q-périodique. Maintenant, une suite périodique converge si et seulement si elle est constante (en effet, soient T une période strictement positive de u et ℓ la limite de u. Soit $k \in \{0,\dots,T-1\}$. $|u_k - u_0| = |u_{k+nT} - u_{nT}| \to |\ell - \ell| = 0$ quand n tend vers l'infini). Or, si $a = \frac{2p\pi}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $\text{PGCD}(p,q) = 1$ et $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$, alors $u_1 \neq u_0$ et la suite u n'est pas constante et donc diverge, et si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$, la suite u est constante et donc converge.

2. (a) et b)) Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \sin((n+1)a) = \sin(na)\cos a + \cos(na)\sin a = u_n \sin a + v_n \cos a.$$

Puisque $\frac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$, $\sin a \neq 0$ et donc $u_n = \frac{v_{n+1} - v_n \cos a}{\sin a}$. Par suite, si v converge alors u converge. De même, à partir de $\cos((n+1)a) = \cos(na)\cos a - \sin(na)\sin a$, on voit que si u converge alors v converge. Les suites u et v sont donc simultanément convergentes ou divergentes.

Supposons que la suite u converge, alors la suite v converge. Soient ℓ et ℓ' les limites respectives de u et v. D'après ce qui précède, ℓ et ℓ' sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l} \ell \sin a + \ell' \cos a = \ell' \\ \ell \cos a - \ell' \sin a = \ell. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \ell \sin a + \ell'(\cos a - 1) = 0 \\ \ell(\cos a - 1) - \ell' \sin a = 0. \end{array}\right. .$$

Le déterminant de ce système vaut $-\sin^2 a - (\cos a - 1)^2 < 0$ car $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Ce système admet donc l'unique solution $\ell = \ell' = 0$ ce qui contredit l'égalité $\ell^2 + \ell'^2 = 1$. Donc, les suites u et v divergent.

3. (a) Soit $E' = \{na + 2k\pi,\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}\}$. Supposons que E' est dense dans $\mathbb{R}$ et montrons que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et $\{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ sont dense dans $[-1,1]$.

Soient x un réel de $[-1,1]$ et $b = \operatorname{Arccos} x$, de sorte que $b \in [0,\pi]$ et que $x = \cos b$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour n entier naturel et k entier relatif donnés, on a :

$$\begin{aligned} |u_n - x| &= |\cos(na) - \cos b| = |\cos(na + 2k\pi) - \cos b| = 2|\sin(\frac{na + 2k\pi - b}{2})\sin(\frac{na + 2k\pi + b}{2})| \\ &\leq 2\left|\frac{na + 2k\pi - b}{2}\right| \text{ (l'inégalité } |\sin x| \leq |x| \text{ valable pour tout réel } x \text{ est classique)} \\ &= |na + 2k\pi - b| \end{aligned}$$

En résumé, $\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - x| \leq |na + 2k\pi - b|$. Maintenant, si E' est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}|$ tels que $|na + 2k\pi - b| < \varepsilon$ et donc $|u_n - x| < \varepsilon$.

Finalement, $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$. De même, on montre que $\{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Il reste donc à démontrer que E' est dense dans $\mathbb{R}$.

(b) Soit $E = \{na + 2k\pi,\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$. E est un sous groupe non nul de $(\mathbb{R}, +)$ et donc est soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha = \inf(E \cap]0, +\infty[) > 0$, soit dense dans $\mathbb{R}$ si $\inf(E \cap]0, +\infty[) = 0$.

Supposons par l'absurde que $\inf(E \cap]0, +\infty[) > 0$. Puisque $E = \alpha\mathbb{Z}$ et que 2π est dans E, il existe un entier naturel non nul q tel que $2\pi = q\alpha$, et donc tel que $\alpha = \frac{2\pi}{q}$.

Mais alors, a étant aussi dans E, il existe un entier relatif p tel que $a = p\alpha = \frac{2p\pi}{q} \in 2\pi\mathbb{Q}$. Ceci est exclu et donc, E est dense dans $\mathbb{R}$.

(c) Soit x dans $[-1,1]$. D'après ce qui précède, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|\cos(na) - x| < \varepsilon$ et donc $|u_{|n|} - x| < \varepsilon$, ce qui montre que $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$. De même, $\{v_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Correction de l'exercice 29 ▲

Soit x dans $[-1,1]$ et $\varepsilon > 0$.

Soit $\theta = \operatorname{Arcsin} x$ (donc θ est élément de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $x = \sin\theta$). Pour k entier naturel non nul donné, il existe un entier n_k tel que $\ln(n_k) \leq \theta + 2k\pi < \ln(n_k + 1)$ à savoir $n_k = E(e^{\theta + 2k\pi})$.

Mais,

$$0 < \ln(n_k + 1) - \ln(n_k) = \ln(1 + \frac{1}{n_k}) < \frac{1}{n_k}$$

(d'après l'inégalité classique $\ln(1+x) < x$ pour $x > 0$, obtenue par exemple par l'étude de la fonction $f\ :\ x \mapsto \ln(1+x) - x$). Donc,

$$0 \leq \theta + 2k\pi - \ln(n_k) < \ln(n_k+1) - \ln(n_k) < \frac{1}{n_k},$$

puis

$$\begin{aligned}|\sin(\theta) - \sin(\ln(n_k))| &= 2|\sin(\frac{\theta+2k\pi-\ln(n_k)}{2})\cos(\frac{\theta+2k\pi+\ln(n_k)}{2})| \\ &\leq 2\left|\frac{\theta+2k\pi-\ln(n_k)}{2}\right| = |\theta+2k\pi-\ln(n_k)| < \frac{1}{n_k}.\end{aligned}$$

Soit alors ε un réel strictement positif.
Puisque $n_k = E(e^{\theta+2k\pi})$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$, on peut trouver un entier k tel que $\frac{1}{n_k} < \varepsilon$ et pour cet entier k, on a $|\sin\theta - \sin(\ln(n_k))| < \varepsilon$.
On a montré que $\forall x \in [-1,1]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^* / |x - \sin(\ln n)| < \varepsilon$, et donc $\{\sin(\ln n),\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Correction de l'exercice 30 ▲

Pour $\alpha \in]0,\pi[$, posons $f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|)$. $\{(\sin(n\alpha),\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée (par 1) de $\mathbb{R}$. Donc, pour tout réel α de $]0,\pi[$, $f(\alpha)$ existe dans $\mathbb{R}$.
Si α est dans $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$,

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|) \geq \sin\alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = f(\frac{\pi}{3}).$$

Si α est dans $]0, \frac{\pi}{3}]$. Soit n_0 l'entier naturel tel que $(n_0-1)\alpha < \frac{\pi}{3} \leq n_0\alpha$ (n_0 existe car la suite $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante). Alors,

$$\frac{\pi}{3} \leq n_0\alpha = (n_0-1)\alpha + \alpha < \frac{\pi}{3} + \alpha \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Mais alors,

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|) \geq |\sin(n_0\alpha)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = f(\frac{\pi}{3}).$$

Si α est dans $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$, on note que

$$f(\alpha) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n(\pi-\alpha)|) = f(\pi-\alpha) \geq f(\frac{\pi}{3}),$$

car $\pi - \alpha$ est dans $]0, \frac{\pi}{3}]$.
On a montré que $\forall \alpha \in]0,\pi[,\ f(\alpha) \geq f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc, $\inf_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|))$ existe dans $\mathbb{R}$ et

$$\inf_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|)) = \mathrm{Min}_{\alpha\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(|\sin(n\alpha)|)) = f(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Correction de l'exercice 31 ▲

La suite u n'est pas majorée. Donc, $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}/\ u_n > M$. En particulier, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\ u_{n_0} \geq 0$.
Soit $k = 0$. Supposons avoir construit des entiers $n_0, n_1, \ldots, n_k$ tels que $n_0 < n_1 < \ldots < n_k$ et $\forall i \in \{0,\ldots,k\}$, $u_{n_i} \geq i$.
On ne peut avoir : $\forall n > n_k$, $u_n < k+1$ car sinon la suite u est majorée par le nombre $\mathrm{Max}\{u_0, u_1, \ldots, u_{n_k}, k+1\}$).
Par suite, $\exists n_{k+1} > n_k/\ u_{n_{k+1}} \geq k+1$.
On vient de construire par récurrence une suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite u telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{n_k} \geq k$ et en particulier telle que $\lim_{k\to+\infty} u_{n_k} = +\infty$.

Correction de l'exercice 32 ▲

Si u converge vers un réel ℓ, alors $\ell \in [0,1]$ puis, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, $\ell(1-\ell) \geq \frac{1}{4}$, et donc $(\ell - \frac{1}{2})^2 \leq 0$ et finalement $\ell = \frac{1}{2}$. Par suite, si u converge, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
De plus, puisque la suite u est à valeurs dans $]0,1[$, pour n naturel donné, on a :

$$u_n(1-u_n) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - u_n)^2 \leq \frac{1}{4} < u_{n+1}(1-u_n),$$

et puisque $1-u_n > 0$, on a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$.
u est croissante et majorée. Donc u converge et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ (amusant).
