

## Méthode de Gauss. Factorisation LU et de Cholesky

### Exercice 1 Taille des éléments dans l'élimination de Gauss

Notons  $\tilde{A}_k$  la matrice carrée d'ordre  $(n - k + 1)$  formée des éléments  $a_{ij}^k, k \leq i, j \leq n$  de la matrice  $A_k = (a_{ij}^k)$  obtenue comme résultat de la  $(k - 1)$ -ème étape de l'élimination de Gauss. On suppose  $A = A_1$  symétrique définie positive.

1. Notant  $(.,.)$  le produit scalaire euclidien et  $v' \in \mathbb{R}^{n-k}$  le vecteur formé par les  $(n - k)$  dernières composantes d'un vecteur  $v = (v_i)_{i=k}^n \in \mathbb{R}^{n-k+1}$  quelconque, établir l'identité

$$(\tilde{A}_k v, v) = (\tilde{A}_{k+1} v', v') + \frac{1}{a_{kk}^k} \left| a_{kk}^k v_k + \sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i \right|^2.$$

2. Montrer que chaque matrice  $\tilde{A}_k$  est symétrique définie positive.
3. Etablir les inégalités suivantes :

$$0 < a_{ii}^{k+1} \leq a_{ii}^k, \quad k+1 \leq i \leq n$$

$$\max_{k+1 \leq i \leq n} a_{ii}^{k+1} = \max_{k+1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}^{k+1}| \leq \max_{k \leq i, j \leq n} |a_{ij}^k| = \max_{k \leq i \leq n} a_{ii}^k$$

Correction ▼

[002222]

### Exercice 2 Stratégie de pivotage

1. Montrer que pour une matrice quelconque  $A = (a_{ij})$  de type  $(2 \times 2)$  on a

$$\text{cond}_2(A) = \sigma + (\sigma^2 - 1)^{1/2} \text{ avec } \sigma = \frac{\sum_{i,j=1}^2 |a_{ij}|^2}{2|\det(A)|}$$

2. Calculer les conditionnements  $\text{cond}_p(.)$  pour  $p = 1, 2, \infty$  des matrices exactes obtenues à la première étape de la procédure d'élimination de Gauss pour résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} 10^{-4}u_1 + u_2 = 1 \\ u_1 + u_2 = 2 \end{cases}$$

selon que l'on commence, ou non, par échanger les deux équations. Conclusion ?

[002223]

### Exercice 3 Factorisation LU d'une matrice bande

Montrer que la factorisation LU préserve la structure des matrices bande au sens suivant :

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } |i - j| \geq p \Rightarrow \begin{cases} l_{ij} = 0 & \text{pour } i - j \geq p \\ u_{ij} = 0 & \text{pour } j - i \geq p \end{cases}$$

Correction ▼

[002224]

### Exercice 4 Factorisation d'une matrice symétrique

Soit  $A$  une matrice symétrique inversible admettant une factorisation LU. Montrer que l'on peut écrire  $A$  sous la forme

$$A = B\tilde{B}^T \text{ où}$$

- $B$  est une matrice triangulaire inférieure ;
- $\tilde{B}$  est une matrice où chaque colonne est soit égale à la colonne correspondante de  $B$ , soit égale à la colonne correspondante de  $B$  changée de signe.

Application numérique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction ▼

[002225]

### Exercice 5 Quelques factorisations LU

1. Soit  $A = LU$  la décomposition LU d'une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  avec  $|l_{ij}| \leq 1$ . Soient  $a_i^T$  et  $u_i^T$  les lignes  $i$  de  $A$  et  $U$  respectivement. Montrer que

$$u_i^T = a_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^T$$

et que

$$\|U\|_{\infty} \leq 2^{n-1} \|A\|_{\infty}$$

2. Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ ou } j = n \\ -1 & \text{si } i > j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $A$  a une décomposition LU avec  $|l_{ij}| \leq 1$  et  $u_{nn} = 2^{n-1}$ .

[002226]

### Exercice 6

On suppose  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  inversible. Montrer que si  $PA\Pi = LU$  est obtenue par la méthode de Gauss avec pivotage total, alors

$$\begin{aligned} \forall i, j = 1, \dots, n \quad |l_{ij}| &\leq 1 \\ \forall i = 1, \dots, n, \forall j = i, \dots, n, \quad |u_{ij}| &\leq |u_{ii}| \end{aligned}$$

[002227]

### Exercice 7

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $A^T$  soit à diagonale strictement dominante. Montrer que  $A$  admet une décomposition LU avec  $L^T$  à diagonale strictement dominante.

Correction ▼

[002228]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. A la  $k$ -ème étape de l'élimination de Gauss, l'élément  $a_{ij}^{k+1}$  est donné par

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \frac{a_{kj}^k a_{ik}^k}{a_{kk}^k} \quad k+1 \leq i, j \leq n$$

et on remarque immédiatement par récurrence que toutes les matrices  $\tilde{A}_k$  sont symétriques. On a

$$(\tilde{A}_{k+1} v', v') = \sum_{i=k+1}^n v_i \left( \sum_{j=k+1}^n a_{ij}^{(k)} v_j \right) - \frac{1}{a_{kk}^k} \left( \sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i \right)^2$$

$$(\tilde{A}_k v, v) = \sum_{i=k+1}^n v_i \left( \sum_{j=k+1}^n a_{ij}^k v_j \right) + \sum_{i=k+1}^n (a_{ik}^k + a_{ki}^k) v_i v_k + a_{kk}^k v_k^2$$

Par symétrie  $a_{ik}^k = a_{ki}^k$  et donc

$$(\tilde{A}_k v, v) = (\tilde{A}_{k+1} v', v') + \frac{1}{a_{kk}^k} \left[ \left( \sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i \right)^2 + 2v_k \sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i a_{kk}^k + (a_{kk}^k)^2 v_k^2 \right] =$$

$$(\tilde{A}_{k+1} v', v') + \frac{1}{a_{kk}^k} \left[ a_{kk}^k v_k + \sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i \right]^2$$

2. Faisons un raisonnement par récurrence

- $\tilde{A}_1$  est symétrique définie positive ;
- Par hypothèse supposons que  $\tilde{A}_k$  est définie positive ;
- Supposons par absurde que  $\tilde{A}_{k+1}$  ne soit pas définie positive : alors  $\exists v' \neq 0 : (\tilde{A}_{k+1} v', v') \leq 0$ . On définit le vecteur  $v \in \mathbb{R}^{n-k+1}$  par :
  - $v_i = v'_i, \quad k+1 \leq i \leq n$
  - $v_k$  est solution de  $a_{kk}^k + \sum_{i=k+1}^n a_{ik}^k v_i = 0$
 Alors  $(\tilde{A}_k v, v) = 0$  et  $v \neq 0$  ; donc  $\tilde{A}_k$  n'est pas définie positive, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.

3. Première inégalité : en utilisant la relation d'élimination on obtient :  $a_{ii}^{k+1} = a_{ii}^k - \frac{|a_{ki}^k|^2}{a_{kk}^k}$

- une matrice définie positive a tous ses éléments diagonaux strictement positifs, donc  $a_{ii}^{k+1} > 0$
- $|a_{ki}^k|^2 / |a_{kk}^k|^2 \geq 0, \quad k+1 \leq i \leq n$
- donc  $a_{ii}^{k+1} \leq a_{ii}^k, k+1 \leq i$

Deuxième inégalité : supposons qu'il existe un élément  $a_{ij}^k, i < j$  tel que  $|a_{ij}^k| \geq \max_{k \leq l \leq n} a_{il}^k$ . On considère le vecteur  $v \neq 0$  défini par

$$v_i = 1, v_j = -\text{sign}(a_{ij}^k), v_l = 0 \quad l \neq i, j$$

Alors

$$(\tilde{A}_k v, v) = (a_{ii}^k - |a_{ij}^k|) - (|a_{ij}^k| - a_{jj}^k) \leq 0$$

ce qui est impossible. Donc

$$\max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}^k| = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}^k|$$

## Correction de l'exercice 3 ▲

Montrons par récurrence que  $A_n = U$  est une matrice bande.

$$A_1 = A, \quad A_{k+1} = L_k A_k = L_k L_{k-1} \cdots L_1 A, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Supposons que  $A_k$  est une matrice bande i.e.,  $a_{ij}^k = 0$  pour  $|i-j| \geq p$  et montrons que  $A_{k+1}$  est une matrice bande.

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k - \frac{a_{ik}^k a_{kj}^k}{a_{kk}^k}$$

Soit  $|i-j| \geq p \Leftrightarrow |(i-k) - (j-k)| \geq p$ . On considère deux cas :

- $k+1 \leq i \leq n$  et  $k \leq j \leq n$ . Alors  $i-k \geq p$  ou  $j-k \geq p \Rightarrow a_{ik}^k a_{kj}^k = 0 \Rightarrow a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k = 0$
- $i \leq k$  ou  $j \leq k-1$  alors  $a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k = 0$

donc  $A_{k+1}$  est une matrice bande et  $U$  est une matrice bande. On a  $A = LU$  et la matrice triangulaire inférieure  $L$  a pour éléments  $l_{ij} = a_{ij}^j / a_{jj}^j$ ,  $j \leq i \leq n$ . Toutes les matrices  $A_j$  étant des matrices bandes on a  $a_{ij}^j = 0$  pour  $i - j \geq p \Rightarrow l_{ij} = 0$  pour  $i - j \geq p$ .

---

#### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $LU$  la factorisation  $LU$  de  $A$ . On va intercaler dans cette factorisation la matrice réelle  $\Lambda = \text{diag}(\sqrt{|u_{ii}|})$ .  $A = (L\Lambda)(\Lambda^{-1}U) = BC$ . La symétrie de  $A$  entraîne  $BC = C^T B^T$ . On a

$C(B^T)^{-1}$  matrice triangulaire supérieure,  $B^{-1}C^T$  matrice triangulaire inférieure et  $C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^T$  et donc  $C(B^T)^{-1} = B^{-1}C^T \text{diag}(\text{sign}(u_{ii})) = S \Rightarrow C(B^T)^{-1}S^{-1} = I = S^{-1}B^{-1}C^T \Leftrightarrow C^T = BS = \tilde{B}$ . Donc  $A$  peut être mise sous la forme

$$A = B\tilde{B}^T \text{ avec } \tilde{B} = BS$$

i.e. la  $i$ -ème colonne de  $\tilde{B}$  est égale à la  $i$ -ème colonne de  $B$  affectée du signe de  $u_{ii}$

Application numérique :

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ & -1 & 2 & 1 \\ & & -1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$


---

#### Correction de l'exercice 7 ▲

$$A = A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & u^T \\ v & B_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = (b_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$$

$A^T$  étant à diagonale strictement dominante on a :

$$|\alpha| > \sum_{i=1}^{n-1} |v_i|, \quad |u_i| + \sum_{j \neq i} |b_{ji}| < |b_{ii}|$$

Il suffit de montrer que

- la première colonne de  $L$  vérifie  $|l_{11}| > \sum_{i \neq 1} |l_{i1}|$
- $B_2$  est telle que

$$A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & u^T \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad C = B_2 = B_1 - \frac{1}{\alpha} v u^T$$

vérifie  $|c_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ji}|$  avec  $C_{ij} = B_{ij} - \frac{1}{\alpha} v_i u_j$  et itérer.

- première colonne de  $L$  :  $l_{i1} = v_i / \alpha \Rightarrow \sum_{i=2}^n |l_{i1}| = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|v_i|}{\alpha} < 1$
- $\sum_{i \neq j} |c_{ij}| = \sum_{i \neq j} |b_{ij} - \frac{1}{\alpha} v_i w_j| \leq \sum_{i \neq j} |b_{ij}| + \frac{1}{|\alpha|} |w_j| \sum_{i \neq j} |v_i|$

$$\leq |b_{jj}| - |u_j| + \frac{1}{|\alpha|} |u_j| (|\alpha| - |v_j|) \leq \left| b_{jj} - \frac{1}{\alpha} u_j v_j \right| = |c_{jj}|$$

donc  $B_2^T$  est de diagonale strictement dominante. La démonstration se finit par récurrence.

---