République du Cameroun
Republic of Cameroun

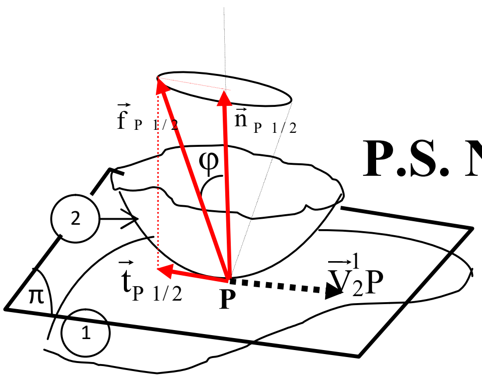
Université de Yaoundé I

University of Yaounde I

STATIQUE DU SOLIDE

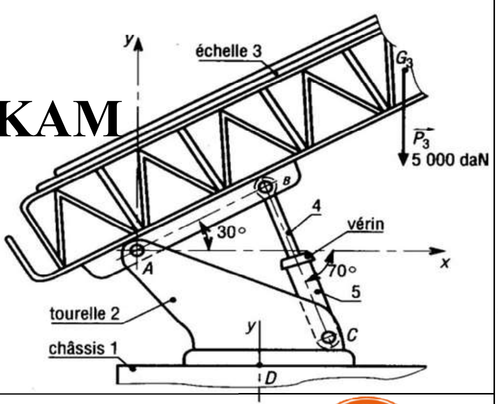
GENERALITES SUR LES TORSEURS
- EXERCICES NON RESOLUS -

Ressource Pédagogique Mise en Ligne



Par

P.S. NGOHE-EKAM



Ecole Nationale
Supérieure Polytechnique de Yaoundé

PREAMBULE

Suite à la menace de propagation du Covid-19 (Corona virus Disease) dont le premier cas de contamination a été déclaré au mois de mars 2020 au Cameroun, des mesures sanitaires ont été édictées par monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, puis renforcées par une sortie médiatisée de monsieur le Premier Ministre (PM) du Cameroun. Le point commun de l'allocution de ces deux personnalités et relatif à l'enseignement supérieur fut la fermeture des établissements d'enseignement, dont l'Université de Yaoundé.

Monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, dans le souci que la fermeture de l'UY I ne soit pas une perche tendue aux étudiants paresseux pour se laisser aller à un certain sommeil intellectuel, instruit alors que les enseignants « mettent en ligne » leurs cours grâce au serveur du Centre Universitaire des Technologies de l'Information (CUTI) de l'UY I et que les étudiants visitent ce serveur à volonté pour télécharger les ressources pédagogiques (puisque c'est le terme le plus approprié) que les enseignants y auront déposé, ce téléchargement devant permette aux étudiants de continuer d'apprendre (à domicile) pendant la période de pseudo-confinement décrétée par monsieur le PM.

C'est ainsi que le présent document est conçu et mis en forme par l'auteur. Ce document fait partie de l'enseignement dispensé par l'auteur aux étudiants de niveau II de l'Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de l'UY I. L'auteur a valablement sectionné cet enseignement en modules qui constitueraient des chapitres de cours en présentiel. Et pour chaque module l'enseignant a produit trois documents en vue de faciliter l'apprentissage à distance :

- Des notes de cours
- Des exercices corrigés
- Des exercices non corrigés

L'idée principale du sectionnement de l'enseignement est de guider au mieux l'apprenant dans l'organisation de sa mémoire cognitive. En effet, il n'est pas bien d'exiger de l'apprenant une concentration trop longue, dépassant les six minutes reconnues par la plupart des experts en pédagogie, sans activité de restitution par exemple. L'apprenant est ainsi invité à ne pas rester trop longtemps sur les parties cours et exercices corrigés ; il peut y revenir en tant que de besoin. Cependant le traitement des exercices non corrigés étant une phase d'extériorisation de la connaissance emmagasinée, l'apprenant pourra et devrait y passer assez de temps de travail.

L'interaction de l'enseignant avec les apprenants est rendue possible grâce aux fora (plateformes d'enseignement à distance, groupe Whatsapp, liste de distribution par email, etc.) divers dans lesquels les apprenants sont invités à s'inscrire.

Pour finir, nous signalons que l'organisation actuelle de cet enseignement n'est pas vraiment une mise en ligne de cours, encore moins un MOOC, comme cela est fait dans la plupart des plateformes d'enseignement à distance. Nous essayons de faire une mise en ligne des ressources (dans le serveur de l'UY I), mais une mise en ligne suggérant une sorte de protocole d'apprentissage aux étudiants.

Yaoundé, le 21 mars 2020,

P.S. NGOHE-EKAM

EXERCICES NON RESOLUS DE GENERALITES SUR LES TORSEURS

***Exercice 1* :**

On définit un torseur comme la donnée de deux vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{m}_p$, le premier étant libre et le second lié (valeur dépendant du point P de l'espace où il est évalué), tels que, en deux points quelconque P et Q de l'espace affine $\mathscr{E}$ on ait : $\vec{m}_p = \vec{m}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{R}$.

Le torseur $[T]$ d'éléments de réduction $\vec{R}$ et $\vec{m}_p$ en un point P est noté $[T] = \vec{R} + \varepsilon\vec{m}_p$ où ε est le nombre dual absorbant (=de puissance entière nulle si supérieure à 1).

1) Montrer que le champ des moments d'un torseur est équiprojectif. (on admettra désormais que tout champ équiprojectif est un champ de moments)

2) Déterminer, en fonction des coordonnées vectorielles respectives $\vec{R}_1$, $\vec{m}_{1p}$, $\vec{R}_2$ et $\vec{m}_{2p}$ de deux torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$, les grandeurs suivantes :

a) Produit du scalaire λ par le torseur $[T_1]$

b) Produit scalaire des torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$

c) Produit vectoriel des torseurs $[T_1]$ et $[T_2]$

d) Produit mixte des torseurs $[T_1], [T_2]$ et $[T_3]$ pris dans cet ordre, où $[T_3] = \vec{R}_3 + \varepsilon\vec{m}_{3p}$

e) La formule suivante du double produit vectoriel est-elle vérifiée pour les torseurs $[A], [B], [C]$:

$$[A] \wedge ([B] \wedge [C]) = [B] \bullet ([A] \bullet [C]) - [C] \bullet ([A] \bullet [B]) \text{ ?}$$

3) Proposer une formule pour le produit mixte de trois torseurs $[A], [B]$ et $[C]$

***Exercice 2*:** Somme de deux torseurs

Donner la relation entre les réels α, β, γ, λ, μ, a, b et c pour que la différence des deux torseurs suivants soient un glisseur :

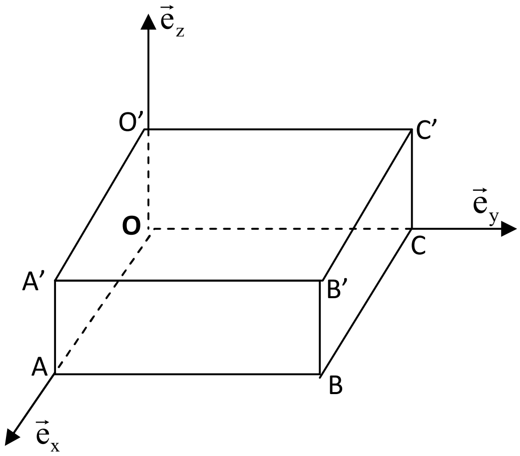
$$[T_1]_O = \begin{cases} \vec{R}_1 = 2\vec{e}_z - \vec{e}_x \\ \vec{\mathscr{M}}_1 = \lambda\vec{e}_y \end{cases} \text{ et } [T_2]_A = \begin{cases} \vec{R}_1 = \alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y + \gamma\vec{e}_z \\ \vec{\mathscr{M}}_2 = \lambda\vec{e}_x + \mu\vec{e}_y \end{cases}$$

On considèrera A(a,b,c) dans un repère $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

***Exercice 3* :**

Soit le parallélépipède d'arêtes a, b, et c ci-contre. Déterminer :

- les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO'}$ et $\overrightarrow{AC'}$



- les produits scalaires $\overrightarrow{OO'}\bullet\overrightarrow{OB'}$; $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{O'B}$ et les produits vectoriels $\overrightarrow{OO'}\wedge\overrightarrow{OB'}$; $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{O'B}$
- les produits mixtes $\left(\overrightarrow{O'C'},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OO'}\right)$, $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ et $\left(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\overrightarrow{OB}\right)$
- l'aire des triangles $O'BC'$ et OAB
- les volumes du parallélépipède bâti sur les vecteurs $\vec{e}_x$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OB}$
- les angles $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CB'},\overrightarrow{CC'}\right)$
- $\vec{m}_0\overrightarrow{AB}$, $\vec{m}_{0'}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{m}_{C'}\overrightarrow{AB}$
- Vérifier la formule
  $\vec{m}_I\vec{F}=\vec{m}_J\vec{F}+\overrightarrow{IJ}\wedge\vec{F}$ pour $\vec{F}=\overrightarrow{AB}$; $I,J\in\{O,O',C\}$

Exercice 4 : Propriétés de l'axe central

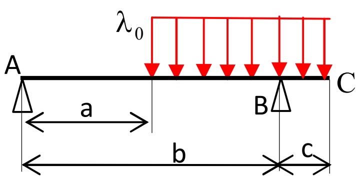
1) Montrer que l'axe central, lieu des points de l'espace où les éléments de réductions d'un torseur sont colinéaires, est aussi le lieu où le moment du torseur est minimal (en module).
2) Montrer que l'axe central est dirigé (colinéaire) par la résultante $\vec{R}$ du torseur.
3) Montrer que le moment d'un torseur est le même (en vecteur) partout sur son axe central.

Exercice 5: Définition, notations, typologie et éléments centraux d'un torseur

On considère deux vecteurs $\vec{U}=3\vec{e}_x$ et $\vec{V}=5\vec{e}_y$ respectivement liés aux points A(1, 2,0) et B(2, 1, 0), dans un repère $R_1(O,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$.

1°) Quels sont au point O les coordonnées vectorielles du torseur [T] constitué géométriquement par l'ensemble de ces deux vecteurs ?
2°) Donner la notation duale de ce torseur en B
3°) Quelle est la dernière coordonnée plückérienne de ce torseur dans le repère $R_2(A,\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$?
4°) Donner trois points centraux pour ce torseur ayant dans (R_1)des coordonnées qui vérifient: $X_1 = 0$, $X_2 = 4/5$ et $Y_3 = 0$
5°) Donner l'équation cartésienne dans le repère (R_1) de l'axe central de ce torseur.
6°) Déterminer pour ce torseur :
a) le pas réduit b) l'automoment c) sa nature
9°) Déterminer tous les glisseurs perpendiculaires à ce torseur et dont les axes centraux contiennent le point O.

Exercice 6 : Charge continue uniforme



Un effort continu (linéaire) de densité linéique uniforme de charge $\lambda(x) = \lambda_0 \quad N/m$ est distribué sur un pont AB conformément à la figure ci-contre. Déterminer les réactions $\vec{N}_A$ et $\vec{N}_B$ des appuis de A et B sur le pont.