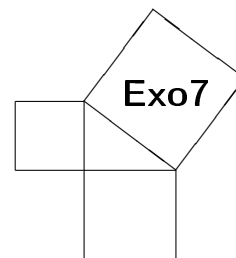


Devoir à la maison et sujet de partiel



Exercice 1

Soit \sqrt{d} non rationnel. Dans l'anneau

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{n + m\sqrt{d} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

on définit la "conjugaison" \bar{z} :

$$\text{si } z = n + m\sqrt{d}, \text{ alors } \bar{z} = n - m\sqrt{d}.$$

On peut aussi définir la norme $N_d : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \rightarrow \mathbb{Z}$ par $N_d(z) = z\bar{z} = (n + m\sqrt{d})(n - m\sqrt{d})$.

0. Montrer que les applications \bar{z} et $N_d(z)$ sont multiplicatives :

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad N_d(z_1 \cdot z_2) = N_d(z_1) \cdot N_d(z_2).$$

[Correction ▼](#)

[002309]

Exercice 2

1. Montrer que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est inversible ssi $N_d(z) = \pm 1$. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
2. Montrer que si $N_d(z) = \pm p$, où p est un premier, alors z est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Donner quelques exemples d'éléments irréductibles dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ pour $d = -1, 2, -6, p$, où p un premier.
3. On note $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Montrer que 3 et $2 + \sqrt{-5}$ sont irréductibles dans A .
4. Trouver tous les irréductibles de A de norme 9.
5. Trouver tous les diviseurs de 9 et de $3(2 + \sqrt{-5})$ dans l'anneau A à association près.
6. Trouver un $\text{pgcd}(3, 2 + \sqrt{-5})$, et montrer que 3 et $2 + \sqrt{-5}$ n'ont pas de ppcm dans l'anneau A .
7. Montrer que l'idéal $I = (3, 2 + \sqrt{-5}) \subset A$ n'est pas principal. Donc l'anneau A n'est pas principal. Est-il factoriel ?
8. Montrer que 9 et $3(2 + \sqrt{-5})$ n'ont pas de pgcd dans A . Possèdent-ils un ppcm ?

[Correction ▼](#)

[002310]

Exercice 3

Soit $\mathbb{Z}_{36} = \mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers modulo 36.

1. Décrire tous les éléments inversibles, tous les diviseurs de zéro et tous les éléments nilpotents de l'anneau \mathbb{Z}_{36} . (Un élément a d'un anneau A est dit nilpotent si il existe n tel que $a^n = 0$.)
2. Trouver tous les idéaux de l'anneau \mathbb{Z}_{36} .
3. Soit A un anneau arbitraire. Montrer que

$$(a \in A^\times \text{ et } b \in A^\times) \iff (a \cdot b) \in A^\times.$$

4. Donner un exemple d'un polynôme inversible de degré 1 sur \mathbb{Z}_{36} .
5. Décrire tous les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}_{36}[x]$.

[Correction ▼](#)

[002311]

Exercice 4

Montrer que les polynômes suivantes sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[x]$:

1. $P = x^{2004} + 4x^{2002} + 2000x^4 + 2002$;
2. $Q = x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 12x^3 + 3x^2 + 6x + 25$.

[Correction ▼](#)

[002312]

Exercice 5

Soit p un nombre premier impair. Montrer que la congruence $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ a une solution si et seulement si $p \equiv 1 \pmod{4}$.

[Correction ▼](#)

[002313]

Exercice 6

Soient $f = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$, $g = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ deux polynômes sur le corps \mathbb{Z}_2 .

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide trouver le p.g.c.d. de f et g et sa représentation linéaire.
2. Les polynômes f et g sont-ils irréductibles ?
3. Soit (g) l'idéal principal engendré par g . Combien d'éléments contient l'anneau quotient $A = \mathbb{Z}_2[x]/(g)$?
4. Soit $\pi : \mathbb{Z}_2[x] \rightarrow A$ la projection canonique. On pose $\pi(x) = \bar{x} \in A$. Trouver l'inverse de l'élément $\pi(f)$ dans l'anneau quotient A .
5. L'anneau quotient $B = \mathbb{Z}_2[x]/(f)$ est-il un corps ? Justifier la réponse, i.e. donner une démonstration si B est un corps ou trouver un élément non-inversible dans B dans le cas contraire.

[Correction ▼](#)

[002314]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $z = n + m\sqrt{d}, z' = n' + m'\sqrt{d} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Alors

$$\begin{aligned}\overline{zz'} &= \overline{(n + m\sqrt{d})(n' + m'\sqrt{d})} \\ &= \overline{(nn' + mm'd) + (nm' + n'm)\sqrt{d}} \\ &= (nn' + mm'd) - (nm' + n'm)\sqrt{d} \\ &= (n - m\sqrt{d})(n' - m'\sqrt{d}) \\ &= \bar{z}\bar{z}'\end{aligned}$$

Donc $\forall z, z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}], \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$.

On a alors $\forall z, z' \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}], N(zz') = zz' \overline{zz'} = z\bar{z} z' \bar{z}' = N(z)N(z')$.

Correction de l'exercice 2 ▲

- Si $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est inversible :
Alors $zz^{-1} = 1$, donc $N(z)N(z^{-1}) = 1$. Comme $N(z) \in \mathbb{Z}$ et $N(z^{-1}) \in \mathbb{Z}$, on a donc $N(z) \in \{1, -1\}$.
– Si $N(z) = \pm 1$:
Alors $z\bar{z} = \pm 1$, donc $z(\pm\bar{z}) = 1$. Comme $\pm\bar{z} \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, z est inversible.
- Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ tels que $z = z_1 z_2$. Alors $N(z_1)N(z_2) = \pm p$. Comme $\pm p$ est irréductible sur \mathbb{Z} , on en déduit que $N(z_1) = \pm 1$ ou $N(z_2) = \pm 1$. D'après la question précédente, on a $z_1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$ ou $z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$: on en déduit que z est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
(Attention : p est premier donc irréductible dans \mathbb{Z} , mais peut être réductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$! cf. 2 dans $\mathbb{Z}[i]$.)
- On a $N(3) = N(2 + \sqrt{-5}) = 9$. On peut montrer en fait que tout élément z de norme 9 est irréductible : si $z = z_1 z_2$, alors $N(z_1)N(z_2) = 9$. Donc $\{N(z_1), N(z_2)\} = \{1, 9\}$ ou $\{3, 3\}$ (dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, la norme est toujours positive). Or pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2, n^2 + 5m^2 \neq 3$. En effet, si $|m| \geq 1, n^2 + 5m^2 \geq 5$ et pour $m = 0$, l'équation revient à $n^2 = 3$, qui n'a pas de solution entière. Ainsi, $N(z_1) = 1$ ou $N(z_2) = 1$, donc z_1 ou z_2 est inversible. z n'a donc pas de factorisation non triviale : z est irréductible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. En particulier, 3 et $2 + \sqrt{-5}$ le sont.
- Tout élément de A de norme 9 est irréductible. Il suffit donc de trouver tous les éléments de norme 9. Soit $z = n + m\sqrt{-5} \in A$. Si $|m| \geq 2$ ou $|n| \geq 4$, alors $N(z) > 9$. On cherche donc les éléments de norme 9 parmi les éléments $z = n + m\sqrt{-5}$ avec $|n| \leq 3$ et $|m| \leq 1$. Pour $m = 0$, les seules solutions sont $n = \pm 3$, pour $|m| = 1$, les solutions sont obtenues pour $|n| = 2$. Ainsi :

$$\forall z \in A : N(z) = 9 \Leftrightarrow z \in \{\pm 3, \pm(2 \pm \sqrt{5})\}$$

- On a $N(9) = 81$. Donc si $9 = z_1 z_2$ est une factorisation de 9 dans A , $N(z_1)N(z_2)$ est une factorisation de 81 (dans \mathbb{Z}), et plus précisément on a $\{N(z_1), N(z_2)\} \in \{\{1, 81\}, \{3, 27\}, \{9, 9\}\}$.

Si $N(z_1) = 1$ ou $N(z_2) = 1$, la factorisation est triviale.

A n'a pas d'élément de norme 3 donc la paire $\{3, 27\}$ n'est pas réalisable.

Si enfin $N(z_1) = N(z_2) = 9$, alors $z_1, z_2 \in \{\pm 3, \pm(2 \pm \sqrt{5})\}$. Comme $9 = 3 \cdot 3 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$, tous ces éléments sont diviseurs de 9.

Les diviseurs de 9 sont donc $\{\pm 1, \pm 3, \pm(2 \pm \sqrt{-5}), \pm 9\}$.

Comme $N(3(2 + \sqrt{-5})) = 81$, le même raisonnement montre que si $d \in A$ divise $3(2 + \sqrt{-5})$, alors $d \in \{\pm 1, \pm 3, \pm(2 \pm \sqrt{-5}), \pm 3(2 \pm \sqrt{-5})\}$.

Si $(2 - \sqrt{-5})a = 3(2 + \sqrt{-5})$, alors $N(a) = 9$, donc $a = \pm 3$ ou $\pm(2 \pm \sqrt{-5})$. Comme A est intègre, si $a = \pm 3$, on obtient $2 - \sqrt{-5} = \pm(2 + \sqrt{-5})$, ce qui est faux. Si $a = \pm(2 + \sqrt{-5})$, on obtient $2 - \sqrt{-5} = \pm 3$, ce qui est faux. Si enfin $a = \pm(2 - \sqrt{-5})$, on obtient $\pm(-1 - 4\sqrt{-5}) = 6 + 3\sqrt{-5}$, ce qui est encore faux. Donc $2 - \sqrt{-5}$ ne divise pas $3(2 + \sqrt{-5})$ dans A . Tous les autres éléments de norme 9 divisent $3(2 + \sqrt{-5})$, donc, finalement :

Les diviseurs de $3(2 + \sqrt{-5})$ sont $\{\pm 1, \pm 3, \pm(2 + \sqrt{-5}), \pm 3(2 + \sqrt{-5})\}$.

(Attention : Le seul fait que 3 et $2 + \sqrt{-5}$ soient irréductibles ne permet pas de conclure ! Si l'anneau n'est pas factoriel, un produit d'irréductibles $p_1 p_2$ peut avoir d'autres diviseurs (à association près) que p_1 et p_2 ... cf $3 \cdot 3 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$!)

6. On connaît la liste des diviseurs de 3 et de $2 + \sqrt{-5}$. Les seuls qui soient communs sont 1 et -1 . On en déduit que 1 est un pgcd de 3 et $2 + \sqrt{-5}$.

9 et $3(2 + \sqrt{-5})$ sont des multiples communs de 3 et $2 + \sqrt{-5}$, donc si ces deux éléments admettent un ppcm m , on a $m|9$ et $m|3(2 + \sqrt{-5})$. On connaît la liste des diviseurs de 9 et $3(2 + \sqrt{-5})$: à association près, on en déduit que $m \in \{1, 3, 2 + \sqrt{-5}\}$. Comme $3|m$, la seule possibilité est $m = 3$, et comme $(2 + \sqrt{-5})|m$, la seule possibilité est $m = 2 + \sqrt{-5}$. Il y a donc contradiction :

3 et $2 + \sqrt{-5}$ n'ont pas de ppcm dans A .

7. Supposons I principal : soit $a \in A$ un générateur : $I = (a)$. Alors a est un diviseur commun à 3 et $2 + \sqrt{-5}$, donc $a = \pm 1$. (En particulier, $I = A$). Soient $u = u_1 + u_2\sqrt{-5}$ et $v = v_1 + v_2\sqrt{-5}$ deux éléments de A . On a :

$$\begin{aligned} 3u + (2 + \sqrt{-5})v = 1 &\Leftrightarrow (3u_1 + 2v_1 - 5v_2) + (3u_2 + v_1 + 2v_2)\sqrt{-5} = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 2v_1 - 5v_2 = 1 \\ 3u_2 + v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 \equiv 1[3] \\ v_1 - v_2 \equiv 0[3] \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\forall u, v \in A$, $3u + (2 + \sqrt{-5})v \neq 1$. Donc $1 \notin I$, ce qui est une contradiction : I n'est pas principal.

L'anneau A n'est pas principal puisqu'il a au moins un idéal non principal. Il n'est pas non plus factoriel, puisque $9 = 3 \cdot 3 = (2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})$ admet deux factorisations en irréductibles non équivalentes à association près.

8. – Les diviseurs communs de 9 et $3(2 + \sqrt{-5})$ sont $\{\pm 1, \pm 3, \pm(2 + \sqrt{-5})\}$. Si 9 et $3(2 + \sqrt{-5})$ admettent un pgcd d , alors d est dans cette liste, et divisible par tous les membres de cette liste. Mais 3 n'est pas divisible par $2 + \sqrt{-5}$ et $2 + \sqrt{-5}$ ne divise pas 3 : 9 et $2 + \sqrt{-5}$ n'ont pas de pgcd.
– Supposons que 9 et $3(2 + \sqrt{-5})$ admettent un ppcm M . Alors il existe des éléments $a, b \in A$ tels que $M = 9a = 3(2 + \sqrt{-5})b$. Notons $m = 3a = (2 + \sqrt{-5})b$ (A est intègre).
 m est un multiple commun de 3 et $2 + \sqrt{-5}$.
Soit k un multiple commun de 3 et $2 + \sqrt{-5}$. Alors $3k$ est un multiple commun de 9 et $3(2 + \sqrt{-5})$, donc $M|3k$: $\exists c \in A, 3k = Mc = 3mc$. On en déduit que $k = mc$ (A est intègre), donc $m|k$. On en déduit que m est un ppcm de 3 et $2 + \sqrt{-5}$, ce qui est impossible.

Correction de l'exercice 3 ▲

- \bar{n} est inversible ssi $\text{pgcd}(n, 36) = 1$ (Bezout !), i.e. $\bar{n} \in \{\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 11, \pm 13, \pm 17\}$. Les autres éléments sont tous des diviseurs de 0 puisque \bar{n} divise 0 ssi $\text{pgcd}(n, 36) \neq 1$. Enfin, \bar{n} est nilpotent ssi $2|n$ et $3|n$, donc ssi $6|n$, soit $\bar{n} \in \{0, \pm 6, \pm 12, \pm 18\}$.
- Montrons que l'ensemble \mathcal{I} des idéaux de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{D} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ des diviseurs (positifs) de 36.
Considérons l'application $\phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{I}$ définie par $\phi(d) = (\bar{d})$.
Injectivité : Si $\phi(d) = \phi(d')$, alors $\exists a, b \in \mathbb{Z}, d = d'a + 36b$. Comme $d|36$, on en déduit que $d|d'$. De même, on a $d'|d$, et donc $d = d'$.
Surjectivité : Soit $I \in \mathcal{I}$. $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ est principal, donc $\exists a \in \mathbb{Z}, I = (\bar{a})$. Soit $d = \text{pgcd}(a, 36)$. Notons $a = da'$: $\text{pgcd}(a', 36) = 1$. On en déduit que \bar{a}' est inversible dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$. Alors $\bar{d} \sim \bar{a}$ dans $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$. On en déduit que $I = (\bar{d}) = \phi(d)$.
Finalement, il y a donc 9 idéaux dans \mathbb{Z}_{36} :
– $(\bar{1}) = \mathbb{Z}_{36}$,
– $(\bar{2}) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 14, \pm 16, \pm 18\}$,

- $(\overline{3}) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 15, 18\}$,
 - $(\overline{4}) = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \pm 16\}$,
 - $(\overline{6}) = \{0, \pm 6, \pm 12\}$
 - $(\overline{9}) = \{0, \pm 9, 18\}$
 - $(\overline{12}) = \{0, \pm 12\}$
 - $(\overline{18}) = \{0, 18\}$
 - $(\overline{36}) = \{0\}$,
3. Si $a, b \in A^\times$, alors $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = 1$ donc $ab \in A^\times$.
Si $ab \in A^\times$, soit $c = (ab)^{-1}$. Alors $a(bc) = 1$ donc $a \in A^\times$ et $b(ac) = 1$ donc $b \in A^\times$.
4. On a $(6x+1)(-6x+1) = 1$ dans $\mathbb{Z}_{36}[x]$, donc $18x+1$ y est inversible.
5. Soit f un inversible de $\mathbb{Z}_{36}[x]$. Choisissons $P \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $\bar{P} = f$ et $Q \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $\bar{Q} = f^{-1}$.

La projection $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ se factorise par $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{36} \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Ces projections sont bien définies, et sont des morphismes d'anneaux. Notons $P_{[2]}$ la réduction de P modulo 2 : on a alors $P_{[2]}Q_{[2]} = (PQ)_{[2]} = 1$, et comme \mathbb{Z}_2 est un corps, $P_{[2]} = 1$, $Q_{[2]} = 1$. On en déduit que 2 divise tous les coefficients de P , sauf celui de degré 0. De même, en considérant la réduction modulo 3, on obtient que 3 divise tous les coefficients de P , sauf celui de degré 0. Finalement, 6 divise tous les coefficients de P sauf celui de degré 0, qui est inversible modulo 36 : à association (dans \mathbb{Z}_{36}) près, f est donc de la forme :

$$f = \sum_{i=1}^d 6a_i x^i + 1, \quad (a_i) \in \mathbb{Z}_{36}.$$

Réciproquement, si f est de cette forme, c'est à dire $f = 1 + 6xf_1$, avec $f_1 \in \mathbb{Z}_{36}[x]$, alors :

$$(1 + 6xf_1)(1 - 6xf_1) = 1$$

donc f est inversible.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Le critère d'Eisenstein avec 2 pour module donne directement le résultat.
2. La réduction modulo 2 de Q est $Q_{[2]} = x^6 + x^2 + 1$, qui n'a pas de racine, et n'est pas divisible par $x^2 + x + 1$, le seul irréductible de degré 2 de $\mathbb{Z}_2[x]$. Ainsi, $Q_{[2]}$ est soit irréductible, auquel cas Q l'est aussi sur \mathbb{Z} , soit le produit de deux irréductibles de degré 3.
Si $Q_{[2]}$ n'est pas irréductible, on considère la réduction modulo 3 de Q : $Q_{[3]} = x^6 + 1 = (x^2 + 1)^3$. $x^2 + 1$ est irréductible sur \mathbb{Z}_3 , car il est de degré 2 et n'a pas de racine. Soit $Q = RS$ une factorisation non triviale de Q sur \mathbb{Z} . On peut supposer R et S unitaires. Alors, en considérant la réduction modulo 2, on obtient que $R_{[2]}$ et $S_{[2]}$ sont deux irréductibles de degré 3 de $\mathbb{Z}_2[x]$. En particulier $\deg(R) = \deg(R_{[2]}) = 3$ (car R est unitaire) et $\deg(S) = \deg(S_{[2]}) = 3$. Cependant, la réduction modulo 3 de Q n'admet pas de factorisation suivant deux polynômes de degré 3. C'est une contradiction : on en déduit que Q n'a pas de factorisation non triviale.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit p un nombre premier impair. Notons $p = 2m + 1$. On a

$$(m!)^2 \equiv (-1)^{m+1} [p]$$

en effet, (modulo p) :

$$\begin{aligned} (p-1)! &= \prod_{k=1}^{2m} k = m! \prod_{k=1}^m (m+k) \\ &= m! \prod_{k=1}^m (m+k-p) = m! \prod_{k=1}^m (-k) \\ &= (-1)^m (m!)^2 \end{aligned}$$

Or, dans $\mathbb{Z}_p[x]$, $1^{-1} = 1$ et $(p-1)^{-1} = p-1$, donc $\forall k \in \{2, \dots, p-2\}$, $k^{-1} \in \{2, \dots, p-2\}$. Ainsi, $\prod_{k=2}^{p-1} k \equiv 1[p]$, et donc $(p-1)! \equiv -1[p]$. D'où le résultat.

- Si $p \equiv 1[4]$, $(-1)^{m+1} = -1$, et donc $m!$ est une solution de $x^2 \equiv -1[p]$.
- Si cette équation a une solution, alors $x^{2m} \equiv 1[p]$, et comme $x^{p-1} \equiv 1[p]$, $1 \equiv (-1)^m[p]$. On en déduit que m est pair, donc $p \equiv 1[4]$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1.

$$\begin{aligned} f &= g(x^3 + x + 1) + (x^2 + x) \\ g &= (x^2 + x)x + 1 \end{aligned}$$

donc $\text{pgcd}(f, g) = 1$ et

$$1 = g - (x^2 + x)x = g - (f - g(x^3 + x + 1))x = (x^4 + x^2 + x + 1)g - xf$$

2. $f = (x^4 + x + 1)(x^2 + x + 1)$ donc f n'est pas irréductible.
 g est de degré 3 et n'a pas de racine, donc g est irréductible.
3. Les éléments de A sont en bijection avec les polynômes de $\mathbb{Z}_2[x]$ de degré $< \deg(g) = 3$. Il y a 8 polynômes de degré au plus 2 sur \mathbb{Z}_2 , donc A a 8 éléments.
4. On utilise la représentation linéaire $uf + vg = 1$ de $\text{pgcd}(f, g)$ obtenue plus haut. $uf = 1 + vg$, donc $\bar{u}\bar{f} = \bar{1} + \bar{0} = \bar{1}$. Donc $(\bar{f})^{-1} = \bar{u} = \bar{x}$.
5. Soit $f_1 = x^2 + x + 1$ et $f_2 = x^4 + x + 1$. Alors $f_1 f_2 = f$ donc $\bar{f}_1 \bar{f}_2 = \bar{0}$. Pourtant, f ne divise ni f_1 ni f_2 , donc $\bar{f}_1 \neq \bar{0}$ et $\bar{f}_2 \neq \bar{0}$: B n'est pas intègre, donc B n'est pas un corps.