Exo7

Equations différentielles linéaires

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 **

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle proposée :

1. $y' + y = 1$
2. $2y' - y = \cos x$
3. $y' - 2y = xe^{2x}$
4. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
5. $y'' + 4y = \cos(2x)$
6. $y'' + 2y' + 2y = \cos x \operatorname{ch} x$.

Correction ▼ [005874]

Exercice 2 *** I

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   On suppose que quand x tend vers $+\infty$, $f' + \alpha f$ tend vers $\ell \in \mathbb{C}$. Montrer que $f(x)$ tend vers $\frac{\ell}{\alpha}$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty}(f + f' + f'')(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^n sur $\mathbb{R}$.
   On note D l'opérateur de dérivation. Soit P un polynôme de degré n unitaire dont tous les zéros ont des parties réelles strictement négatives. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}(P(D))(f)(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Correction ▼ [005875]

Exercice 3 *** I

Soit f une application de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f''(x) \geqslant 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Correction ▼ [005876]

Exercice 4 *** I

Résoudre sur l'intervalle I proposé :

1. $xy' - 2y = 0$ $(I = \mathbb{R})$
2. $xy' - y = 0$ $(I = \mathbb{R})$
3. $xy' + y = 0$ $(I = \mathbb{R})$
4. $xy' - 2y = x^3$ $(I =]0, +\infty[)$
5. $x^2 y' + 2xy = 1$ $(I = \mathbb{R})$
6. $2x(1-x)y' + (1-x)y = 1$ $(I =]-\infty, 0[,\ ]0, 1[,\ ]1, +\infty[,\ ]-\infty, 1[,\ ]0, +\infty[,\ \mathbb{R})$
7. $|x|y' + (x-1)y = x^3$ $(I = \mathbb{R})$.

Correction ▼ [005877]

Exercice 5 *** I

Déterminer le rayon de convergence puis calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{2n-1}x^n$ quand x appartient à l'intervalle ouvert de convergence. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}$.

Correction ▼ [005878]

Exercice 6 **

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = 4x-2y \\ y' = x+y \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} x' = x-y+\frac{1}{\cos t} \\ y' = 2x-y \end{array}\right.$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$
3. $\left\{\begin{array}{l} x' = 5x-2y+e^t \\ y' = -x+6y+t \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{l} x' = 5x+y-z \\ y' = 2x+4y-2z \\ z' = x-y+z \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{l} x' = 2x+y \\ y' = -x \\ z' = x+y+z \end{array}\right.$ (trouver la solution telle que $x(0)=0$, $y(0)=1$ et $z(0)=-1$).

Correction ▼ [005879]

Exercice 7 **

Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute solution de $X' = AX$, la fonction $t \mapsto \|X(t)\|_2$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction ▼ [005880]

Exercice 8 **

Résoudre les systèmes :

1. $\left\{\begin{array}{l} x' = -\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2t^2}y+2t \\ y' = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2t}y+t^2 \end{array}\right.$ sur $]0,+\infty[$
2. $\left\{\begin{array}{l} (t^2+1)x' = tx-y+2t^2-1 \\ (t^2+1)y' = x+ty+3t \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{sh}(2t)x' = \mathrm{ch}(2t)x-y \\ \mathrm{sh}(2t)y' = -x+\mathrm{ch}(2t)y \end{array}\right.$ sur $]0,+\infty[$ sachant qu'il existe une solution vérifiant $xy=1$.

Correction ▼ [005881]

Exercice 9 *** I

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$ sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ puis sur $\mathbb{R}$.
2. $(x^2+x)y''-2xy'+2y=0$ sur $]0,+\infty[$.
3. $4xy''-2y'+9x^2y=0$ sur $]0,+\infty[$.
4. $(1+x)y''-2y'+(1-x)y=xe^{-x}$ sur $]-1,+\infty[$.
5. $y''+4y'+4y=\frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$.
6. $4xy''+2y'-y=0$ sur $]0,+\infty[$.

Correction ▼ [005882]

Exercice 10 **

Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = e^x$.

Correction ▼ [005883]

Exercice 11 ***

Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ vérifiant $\forall x > 0$, $f'(x) = f\left(\frac{3}{16x}\right)$.

Correction ▼ [005884]

Exercice 12 *** I

Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt$.

Correction ▼ [005885]

Exercice 13 *** I

Montrer que $\forall x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, dt$.

Correction ▼ [005886]

Correction de l'exercice 1 ▲

Dans tout l'exercice, on note (E) l'équation différentielle considérée et (E_H) l'équation homogène associée.

1. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ forment un $\mathbb{R}$-espace affine de direction l'espace des solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ qui est de dimension 1. La fonction $x \mapsto 1$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est une solution non nulle de (E_H) sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto 1 + \lambda e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

2. Les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{x/2}$. Déterminons maintenant une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.
1ère solution. Il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto a\cos x + b\sin x$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit f une telle fonction. Alors, pour tout réel x,

$$2f'(x) - f(x) = 2(-a\sin x + b\cos x) - (a\cos x + b\sin x) = (-a+2b)\cos x + (-2a-b)\sin x.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2f'(x) - f(x) = \cos x \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} -a+2b = 1 \\ -2a-b = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftarrow a = -\frac{1}{5} \text{ et } b = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \tfrac{1}{5}(-\cos x + 2\sin x) + \lambda e^{x/2},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

2ème solution. Par la méthode de variation de la constante, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{x/2}$ où λ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit f une telle fonction.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur} \mathbb{R} &\Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2\left(\lambda'(x)e^{x/2} + \frac{1}{2}\lambda(x)e^{x/2}\right) - 2\lambda(x)e^{x/2} = \cos(x) \\ &\Leftarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}\cos x. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2}e^{-x/2}\cos x\,dx &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int e^{(-\frac{1}{2}+i)x}\,dx\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(-\frac{1}{2}+i)x}}{-\frac{1}{2}+i}\right) + C = \frac{1}{5}e^{-x/2}\mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)(-1-2i)\right) + C \\ &= \frac{1}{5}e^{-x/2}(-\cos x + 2\sin x) + C. \end{aligned}$$

Par suite, on peut prendre $\lambda(x) = \frac{1}{5}e^{-x/2}(-\cos x + 2\sin x)$ ce qui fournit la solution particulière $f_0(x) = \frac{1}{5}(-\cos x + 2\sin x)$.

3. Puisque les fonctions $x \mapsto -2$ et $x \mapsto xe^{2x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - 2f(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) = x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{-2x}f)'(x \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-2x}f(x) = \frac{x^2}{2} + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \lambda\right)e^{2x}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\tfrac{x^2}{2} + \lambda\right)e^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

4. L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation homogène $y''-4y'+4y=0$ est $z^2-4z+4=0$ et admet $z_0=2$ pour racine double. On sait que les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto(\lambda x+\mu)e^{2x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
   Puisque 2 est racine double de l'équation caractéristique, l'équation $y''-4y'+4y=e^{2x}$ admet une solution particulière f_0 de la forme : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_0(x)=ax^2e^{2x}$, $a\in\mathbb{R}$. La formule de LEIBNIZ fournit pour tout réel x,
   $$f_0''(x)-4f_0'(x)+4f_0(x)=a(4x^2+8x+2)e^{2x}-4a(2x^2+2x)e^{2x}+4ax^2e^{2x}=2ae^{2x},$$
   et f_0 est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a=\frac{1}{2}$.
   $$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\left\{x\mapsto\left(\frac{x^2}{2}+\lambda x+\mu\right)e^{2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

5. L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation homogène $y''+4y=0$ est $z^2+4=0$ et admet deux racines non réelles conjuguées $z_1=2i$ et $z_2=\overline{z_1}=-2i$. On sait que les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
   Une solution réelle de l'équation $y''+4y=\cos(2x)$ est la partie réelle d'une solution de l'équation $y''+4y=e^{2ix}$. Puisque le nombre $2i$ est racine simple de (E_c), cette dernière équation admet une solution de la forme $f_1\ :\ x\mapsto axe^{2ix}$, $a\in\mathbb{C}$. La formule de LEIBNIZ fournit pour tout réel x,
   $$f_1''(x)+4f_1(x)=a((-4x+4i)e^{2ix}+4xe^{2ix})=4iae^{2ix}.$$
   et f_1 est solution de $y''+4y=e^{2ix}$ si et seulement si $a=\frac{1}{4i}$. On obtient $f_1(x)=\frac{1}{4i}xe^{2ix}=\frac{1}{4}x(-i\cos(2x)+\sin(2x))$ ce qui fournit une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$: $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_0(x)=\frac{1}{4}x\sin(2x)$.
   $$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\left\{x\mapsto\tfrac{1}{4}x\sin(2x)+\lambda\cos(2x)+\mu\sin(2x),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

6. L'équation caractéristique (E_c) associée à l'équation (E_H) est $z^2+2z+2=0$ et admet deux racines non réelles conjuguées $z_1=-1+i$ et $z_2=\overline{z_1}=-1-i$. On sait que les solutions de (E_H) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x))e^{-x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
   Pour tout réel x, $\cos(x)\operatorname{ch}(x)=\operatorname{Re}\left(e^{ix}\operatorname{ch}(x)\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(e^{(1+i)x}+e^{(-1+i)x}\right)$. Notons (E_1) l'équation $y''+2y'+2y=e^{(1+i)x}$ et (E_2) l'équation $y''+2y'+2y=e^{(-1+i)x}$. Si f_1 est une solution de (E_1) et f_2 est une solution de (E_2) alors $f_0=\frac{1}{2}\operatorname{Re}(f_1+f_2)$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ d'après le principe de superposition des solutions.
   • (E_1) admet une solution particulière de la forme $f_1\ :\ x\mapsto ae^{(1+i)x}$, $a\in\mathbb{C}$. Pour tout réel x,
   $$f_1''(x)+2f_1'(x)+2f_1(x)=a((1+i)^2+2(1+i)+2)e^{(1+i)x}=a(4+4i)e^{(1+i)x}$$
   et f_1 est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a=\frac{1}{4+4i}=\frac{1-i}{8}$. On obtient $f_1(x)=\frac{1-i}{8}e^{(1+i)x}$.
   • (E_2) admet une solution particulière de la forme $f_2\ :\ x\mapsto axe^{(-1+i)x}$, $a\in\mathbb{C}$. La formule de LEIBNIZ fournit pour tout réel x,
   $$f_2''(x)+2f_2'(x)+2f_2(x)=a(((-1+i)^2x+2(-1+i))+2((-1+i)x+1)+2x)e^{(-1+i)x}=2iae^{(-1+i)x}$$
   et f_2 est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}$. On obtient $f_2(x)=-\frac{i}{2}e^{(-1+i)x}$.
   • Une solution particulière f_0 de (E) sur $\mathbb{R}$ est donc définie pour tout réel x par
   $$\begin{aligned}f_0(x)&=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{1-i}{8}e^{(1+i)x}-\frac{i}{2}e^{(-1+i)x}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{8}(1-i)(\cos(x)+i\sin(x))e^x-\frac{i}{2}(\cos(x)+i\sin(x))e^{-x}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}(\cos(x)+\sin(x))e^x+\frac{1}{2}\sin(x)e^{-x}\right)\end{aligned}$$
   $$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\left\{x\mapsto\tfrac{1}{16}(\cos(x)+\sin(x))e^x+\tfrac{1}{4}\sin(x)e^{-x}+(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x))e^{-x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Posons $g = f' + \alpha f$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + \alpha y = g$. De plus, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$. Ensuite,

$$\begin{aligned} f' + \alpha f = g &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{\alpha x} f'(x) + \alpha e^{\alpha x} f(x) = e^{\alpha x} g(x) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{\alpha x} f)'(x) = e^{\alpha x} g(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{\alpha x} f(x) = f(0) + \int_0^x e^{\alpha t} g(t)\, dt \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t} g(t)\, dt. \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ et que $|e^{-\alpha x}| = e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}$, $\lim_{x\to+\infty} f(0)e^{-\alpha x} = 0$. Vérifions alors que $\lim_{x\to+\infty} e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t} g(t)\, dt = \frac{\ell}{\alpha}$ sachant que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.
On suppose tout d'abord $\ell = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A_1 > 0$ tel que $\forall t \geqslant A_1$, $|g(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $x \geqslant A_1$,

$$\begin{aligned} \left| e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t} g(t)\, dt \right| &\leqslant e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t} g(t)\, dt\right| + e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\int_{A_1}^x e^{\mathrm{Re}(\alpha)t}|g(t)|\, dt \\ &\leqslant e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t} g(t)\, dt\right| + e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\int_{A_1}^x e^{\mathrm{Re}(\alpha)t} \times \frac{\varepsilon}{2}\, dt \\ &= e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t} g(t)\, dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - e^{-\mathrm{Re}(\alpha)(x-A_1)}\right) \\ &\leqslant e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t} g(t)\, dt\right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Maintenant $\lim_{x\to+\infty} e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t} g(t)\, dt\right| = 0$ et donc il existe $A \geqslant A_1$ tel que $\forall x > A$, $e^{-\mathrm{Re}(\alpha)x}\left|\int_0^{A_1} e^{\alpha t} g(t)\, dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $x > A$, on a $|e^{-\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t} g(t)\, dt| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a ainsi montré que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \frac{\ell}{\alpha}$.
On revient maintenant au cas général ℓ quelconque.

$$\begin{aligned} f' + \alpha f \underset{x\to+\infty}{\to} \ell \Rightarrow f' + \alpha f - \ell \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow \left(f - \frac{\ell}{\alpha}\right)' + \alpha\left(f - \frac{\ell}{\alpha}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \\ \Rightarrow f - \frac{\ell}{\alpha} \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow f \underset{x\to+\infty}{\to} \frac{\ell}{\alpha}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \forall \alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(\alpha) > 0,\ \lim_{x\to+\infty}(f'(x) + \alpha f(x)) = \ell \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\ell}{\alpha}.}$$

2. $f'' + f' + f = (f' - jf)' - j^2(f' - jf)$. D'après 1), comme $\mathrm{Re}(-j^2) = \mathrm{Re}(-j) = \frac{1}{2} > 0$,

$$f'' + f' + f \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow (f' - jf)' - j^2(f' - jf) \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow f' - jf \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \Rightarrow f \underset{x\to+\infty}{\to} 0.$$

$$\boxed{\forall f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \lim_{x\to+\infty}(f''(x) + f'(x) + f(x)) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

3. Montrons le résultat par récurrence sur n.
• Pour $n = 1$, c'est le 1) dans le cas particulier $\ell = 0$ (si $P = X - \alpha$, $P(D)(f) = f' - \alpha f$ avec $\mathrm{Re}(-\alpha) > 0$).
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat acquis pour n. Soit P un polynôme de degré $n+1$ dont les racines ont des parties réelles strictement négatives et tel que $\lim_{x\to+\infty}(P(D))(f)(x) = 0$. Soit α une racine de P. P s'écrit $P = (X - \alpha)Q$ où Q est un polynôme dont les racines ont toutes une partie réelle strictement négative. Puisque

$$P(D)(f) = ((D - \alpha Id) \circ (Q(D))(f) = (Q(D)(f))' - \alpha(Q(D)(f)) \underset{+\infty}{\to} 0,$$

on en déduit que $Q(D)(f) \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$ d'après le cas $n=1$ puis que $f \underset{+\infty}{\rightarrow} 0$ par hypothèse de récurrence.

Le résultat est démontré par récurrence.

Correction de l'exercice 3 ▲

On pose $g = f + f''$. Par hypothèse, la fonction g est une application continue et positive sur $\mathbb{R}$ et de plus, la fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = g$ sur $\mathbb{R}$. Résolvons cette équation différentielle, notée (E), sur $\mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. D'après la méthode de variation des constantes, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_0 \ : \ x \mapsto \lambda(x)\cos(x) + \mu(x)\sin(x)$ où de plus les fonctions λ et μ sont solutions du système

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda'\cos(x) + \mu'\sin(x) = 0 \\ -\lambda'\sin(x) + \mu'\cos(x) = g \end{array}\right. .$$

Les formules de CRAMER fournissent $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda'(x) = -g(x)\sin(x)$ et $\mu'(x) = g(x)\cos(x)$. On peut alors prendre $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda(x) = -\int_0^x g(t)\sin(t)\,dt$ et $\mu(x) = \int_0^x g(t)\cos(t)\,dt$ puis

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = -\cos(x)\int_0^x g(t)\sin(t)\,dt + \sin(x)\int_0^x g(t)\cos(t)\,dt = \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt.$$

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. La fonction f est l'une de ces solutions. Par suite, il existe $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda_0\cos(x) + \mu_0\sin(x) + \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt$ et donc pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) + f(x+\pi) &= \int_0^{x+\pi} g(t)\sin(x+\pi-t)\,dt + \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt = -\int_0^{x+\pi} g(t)\sin(x-t)\,dt + \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt \\ &= \int_x^{x+\pi} g(t)\sin(t-x)\,dt = \int_0^{\pi} g(u+x)\sin(u)\,du \geqslant 0. \end{aligned}$$

On a montré que si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f''(x) \geqslant 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Dans tout l'exercice, on note (E) l'équation proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

1. On note J l'un des deux intervalles $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$. Sur J, l'équation (E) s'écrit encore $y' - \frac{2}{x}y = 0$. Comme la fonction $x \mapsto -\frac{2}{x}$ est continue sur J, les solutions de (E) sur J constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1. Enfin, la fonction $x \mapsto x^2$ est une solution non nulle de (E) sur J et donc $\mathscr{S}_J = \left\{x \mapsto \lambda x^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

   Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 x^2 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \lambda_2 x^2 \text{ si } x < 0 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \\ \lambda_2 x^2 \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$.

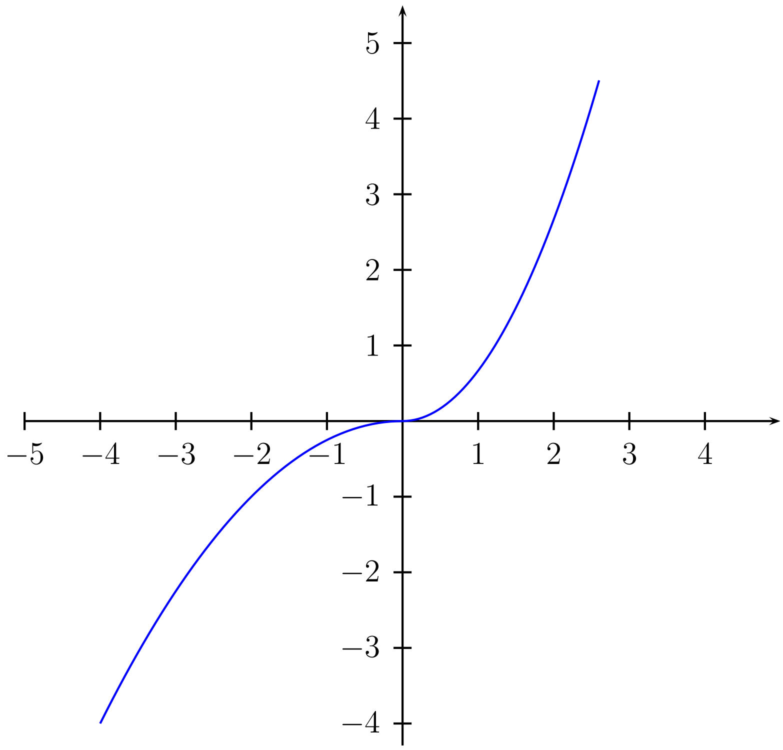
   Réciproquement, une telle fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, solution de (E) sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie encore l'équation (E) en 0 si de plus elle est dérivable en 0. Donc, une telle fonction est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

   Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 pour tout choix de λ_1 et λ_2 et donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ pour tout choix de λ_1 et λ_2.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \\ \lambda_2 x^2 \text{ si } x < 0 \end{array}\right.,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

On note que $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. En effet, pour toute solution f de (E) sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \lambda_1 \left\{ \begin{array}{l} x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{array} \right. + \lambda_2 \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \geqslant 0 \\ x^2 \text{ si } x < 0 \end{array} \right. = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$. Donc $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \text{Vect}(f_1, f_2)$ avec (f_1, f_2) clairement libre.

Un exemple de graphe de solution est donné à la page suivante.



2. L'ensemble des solutions sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ est $\{x \mapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 x \text{ si } x \geqslant 0 \\ \lambda_2 x \text{ si } x < 0 \end{array} \right.$.

   Réciproquement, une telle fonction f est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

   Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$ et donc

   $$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

   Dans ce cas, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

3. L'ensemble des solutions sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ est $\{x \mapsto \frac{\lambda}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 /\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \lambda_2 x \text{ si } x < 0 \end{array} \right.$.

   Réciproquement, une telle fonction f est solution de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

   Il est géométriquement clair que f est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et donc

   $$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{0\}.}$$

   Dans ce cas, $\mathscr{S}_{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 0.

4. Soit f une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } J \Leftrightarrow \forall x \in J,\ xf'(x) - 2f(x) = x^3 \Leftrightarrow \forall x \in J,\ \frac{1}{x^2}f'(x) - \frac{2}{x^3}f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in J,\ \left(\frac{1}{x^2}f\right)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in J,\ \frac{f(x)}{x^2} = x + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in J,\ \frac{f(x)}{x^2} = x +$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in J,\ f(x) = x^3 + \lambda x^2.$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \{x \mapsto x^3 + \lambda x^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

5. Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2y' + 2xy = 1$ alors $0^2 \times f'(0) + 0 \times f(0) = 1$ ce qui est impossible. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \varnothing.}$$

6. • **Résolution sur** $]-\infty,0[$**,** $]0,1[$ **et** $]1,+\infty[$**.** Soit I l'un des trois intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. Sur I, l'équation (E) s'écrit encore $y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x(1-x)}$. Puisque les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2x}$ et $x \mapsto \frac{1}{2x(1-x)}$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur I. Pour $x \in I$, on note ε le signe de x sur I.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \frac{1}{2x}f(x) = \frac{1}{2x(1-x)} \Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{\frac{1}{2}\ln(\varepsilon x)}f'(x) + \frac{1}{2x}e^{\frac{1}{2}\ln(\varepsilon x)}f(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(\varepsilon x)}}{2x(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\sqrt{\varepsilon x}\, f)'(x) = \frac{\sqrt{\varepsilon x}}{2x(1-x)} \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\sqrt{\varepsilon x}\, f)'(x) = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}.$$

Déterminons alors les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}$ sur I. En posant $u = \sqrt{\varepsilon x}$ et donc $x = \varepsilon u^2$ puis $du = 2\varepsilon u du$.

$$\int \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\, dx = \int \frac{\varepsilon}{2u(1-\varepsilon u^2)} 2\varepsilon u\, du = \int \frac{1}{1-\varepsilon u^2}\, du.$$

-Résolution sur $]-\infty,0[$.
Dans ce cas, $\varepsilon = -1$ puis $\int \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\, dx = \int \frac{1}{1+u^2}\, du = \text{Arctan}(u) + \lambda = \text{Arctan}(\sqrt{-x}) + \lambda$. Par suite,

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ \sqrt{-x}f(x) = \text{Arctan}(\sqrt{-x}) + \lambda$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ f(x) = \frac{\text{Arctan}(\sqrt{-x}) + \lambda}{\sqrt{-x}}.$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,0[} = \left\{x \mapsto \frac{\text{Arctan}(\sqrt{-x})+\lambda}{\sqrt{-x}},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

-Résolution sur $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$.

Dans ce cas, $\varepsilon = 1$ puis $\int \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon x}(1-x)}\, dx = \int \frac{1}{1-u^2}\, du = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) \text{ si } x > 1 \\ \text{Argth}(\sqrt{x}) \text{ si } x \in]0,1[\end{array}\right. + \lambda$. Par suite,

-Résolution sur $]0,1[$ *et* $]1,+\infty[$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,1[} = \left\{x \mapsto \frac{\text{Argth}(\sqrt{x})+\lambda}{\sqrt{x}},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \text{ et } \mathscr{S}_{]1,+\infty[} = \left\{x \mapsto \frac{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)+\lambda}{\sqrt{x}},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

-Résolution sur $]0,+\infty[$ *et sur* $\mathbb{R}$. Si f est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$ ou sur $\mathbb{R}$, alors $0 \times f'(1) + 0 \times f(1) = 1$ ce qui
est impossible. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \varnothing \text{ et } \mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \varnothing.}$$

-Résolution sur $]-\infty,1[$. Si f est une solution de (E) sur $]-\infty,1[$, alors il existe nécessairement $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$\forall x\in]-\infty,1[,\ f(x)=\begin{cases}\frac{\text{Arctan}(\sqrt{-x})+\lambda}{\sqrt{-x}} \text{ si } x<0\\ 1 \text{ si } x=0\\ \frac{\text{Argth}(\sqrt{x})+\lambda}{\sqrt{x}} \text{ si } 0<x<1\end{cases}$. Réciproquement une telle fonction est solution si et seulement si elle est dérivable en 0.

Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{-x}}\left(\lambda_1+\sqrt{-x}-\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^3}{3}+o\left((\sqrt{-x})^3\right)\right)=\frac{\lambda_1}{\sqrt{-x}}+1+\frac{x}{3}+o(x)=\frac{\lambda_1}{\sqrt{-x}}+f(0)+\frac{x}{3}+o(x).$$

et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\lambda_2+\sqrt{x}+\frac{(\sqrt{x})^3}{3}+o\left((\sqrt{x})^3\right)\right)=\frac{\lambda_2}{\sqrt{x}}+1+\frac{x}{3}+o(x)=\frac{\lambda_2}{\sqrt{x}}+f(0)+\frac{x}{3}+o(x).$$

Par suite, f est dérivable à droite et à gauche en 0 si et seulement si $\lambda_1=\lambda_2=0$ et dans ce cas, quand x tend vers 0,
$f(x)=f(0)+\frac{x}{3}+o(x)$ ce qui montre que f est dérivable en 0. En résumé, f est solution de (E) sur $]-\infty,1[$ si et seulement si $\lambda_1=\lambda_2=0$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,1[}=\left\{x\mapsto\begin{cases}\frac{\text{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}} \text{ si } x<0\\ 1 \text{ si } x=0\\ \frac{\text{Argth}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \text{ si } 0<x<1\end{cases}\right\}.}$$

7. **Résolution de** (E) **sur** $]-\infty,0[$ **et sur** $]0,+\infty[$**.** Soit I l'un des deux intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$. On note ε le signe de x sur I. Sur I, (E) s'écrit encore $y'+\varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)y=\varepsilon x^2$. Puisque les deux fonctions $x\mapsto\varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)$ et $x\mapsto\varepsilon x^2$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1. Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ f'(x)+\varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)f(x)=\varepsilon x^2\\ &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ e^{\varepsilon x-\varepsilon\ln(\varepsilon x)}f'(x)+\varepsilon\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\varepsilon x-\varepsilon\ln(\varepsilon x)}f(x)=\varepsilon x^2e^{\varepsilon x-\varepsilon\ln(\varepsilon x)}\\ &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ \left((\varepsilon x)^{-\varepsilon}e^{\varepsilon x}f\right)'(x)=x^{-\varepsilon}x^2e^{\varepsilon x}\end{aligned}$$

• Si $I=]0,+\infty[$, $\varepsilon=1$ et

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ \left(\frac{e^x}{x}f\right)'(x)=xe^x \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]0,+\infty[,\ \frac{e^x}{x}f(x)=(x-1)e^x+\lambda\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=x^2-x+\lambda xe^{-x}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[}=\left\{x\mapsto x^2-x+\lambda xe^{-x},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

• Si $I=]-\infty,0[$, $\varepsilon=-1$ et

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ \left(-xe^{-x}f\right)'(x)=x^3e^{-x} \Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ \left(xe^{-x}f\right)'(x)=-x^3e^{-x}.$$

Or, $\int -x^3e^{-x}\,dx = x^3e^{-x} - 3\int x^2e^{-x}\,dx = (x^3+3x^2)e^{-x} - 6\int xe^{-x}\,dx = (x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}+\lambda$ et donc

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ xe^{-x}f(x) = (x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}+\lambda$$
$$\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ f(x) = x^2+3x+6+\frac{6+\lambda e^x}{x}.$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{x\mapsto x^2+3x+6+\tfrac{6+\lambda e^x}{x},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

Résolution de (E) sur $\mathbb{R}$. Si f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, nécessairement il existe $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} x^2-x+\lambda_1xe^{-x} \text{ si } x>0\\ 0 \text{ si } x=0\\ x^2+3x+6+\frac{6+\lambda_2e^x}{x} \text{ si } x<0\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} x^2-x+\lambda_1xe^{-x} \text{ si } x\geqslant 0\\ x^2+3x+6+\frac{6+\lambda_2e^x}{x} \text{ si } x<0\end{array}\right.$. Réciproquement, une telle fonction est solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f(x) = -x+o(x)+\lambda_1x(1+o(1)) = (\lambda_1-1)x+o(x)$. Par suite, f est dérivable à droite en 0 pour tout choix de λ_1 et $f'_d(0) = \lambda_1-1$.

Quand x tend vers 0 par valeurs inférieures,

$$f(x) = 6+3x+o(x)+\frac{6+\lambda_2\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x} = \frac{6+\lambda_2}{x}+6+\lambda_2+\left(3+\frac{\lambda_2}{2}\right)x+o(x)$$

Par suite, f est dérivable à gauche en 0 si et seulement si $\lambda_2 = -6$. Dans ce cas, quand x tend vers 0 par valeurs inférieures, $f(x) = o(x)$ et $f'_g(0) = 0$. Maintenant, f est dérivable en 0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_d(0) = f'_g(0)$. Ceci équivaut à $\lambda_2 = -6$ et $\lambda_1 = 1$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x\mapsto \left\{\begin{array}{l} x^2-x+xe^{-x} \text{ si } x\geqslant 0\\ x^2+3x+6+\frac{6(1-e^x)}{x} \text{ si } x<0\end{array}\right.\right\}.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

• Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $a_n = (-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{2n-1}$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\times\frac{n!^2}{(n+1)!^2}\times\frac{2n-1}{2n+1} = -\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\times\frac{2n-1}{2n+1} = -\frac{2(2n-1)}{n+1}.$$

Par suite, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\to} 4$ et d'après la règle de d'ALEMBERT, $R_a = \frac{1}{4}$. Pour x tel que la série converge, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{2n-1}x^n$.

• Soit $x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $(n+1)a_{n+1}+4na_n = 2a_n$. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, on multiplie les deux membres de cette égalité par x^n puis on somme sur n. On obtient $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + 4x\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ ou encore $(1+4x)f'(x) = 2f(x)$. De plus $f(0) = a_0 = 1$. Mais alors

$$\forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\ (1+4x)f'(x) = 2f(x) \Rightarrow \forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\ e^{-\frac{1}{2}\ln(1+4x)}f'(x) - \frac{2}{1+4x}e^{-\frac{1}{2}\ln(1+4x)}f(x) = 0$$
$$\Rightarrow \forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\ \left(\frac{f}{\sqrt{1+4x}}\right)'(x) = 0 \Rightarrow \forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\ \frac{f(x)}{\sqrt{1+4x}} = \frac{f(0)}{\sqrt{1+0}}$$
$$\Rightarrow \forall x\in\left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[,\ f(x) = \sqrt{1+4x}.$$

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[, \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{C_{2n}^n}{2n-1} x^n = \sqrt{1+4x}.}$$

• Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{C_{2n}^n}{(2n-1)4^n}$. La suite u est strictement positive à partir du rang 1 et pour $n \geqslant 1$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(2n-1)}{4(n+1)} = \frac{2n-1}{2n+2} < 1.$$

Ainsi, la suite u est décroissante à partir du rang 1. De plus, d'après la formule de STIRLING,

$$u_n = \frac{(2n)!}{n!^2(2n-1)4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}(2\pi n)(2n)4^n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}.$$

Par suite, $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. En résumé, la suite u est positive et décroissante à partir du rang 1 et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. On en déduit que la série numérique de terme général $(-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{(2n-1)4^n} = (-1)^{n-1}u_n$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées (théorème de LEIBNIZ).

• La fonction f est donc définie en $\frac{1}{4}$. Vérifions que f est continue en $\frac{1}{4}$.

Pour $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = a_n x_n = (-1)^{n-1}\frac{C_{2n}^n}{2n-1}x^n$. Pour chaque x de $\left]0, \frac{1}{4}\right]$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et la suite $((-1)^{n-1}f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir du rang 1. Ensuite, pour $n \geqslant 1$ et $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$,

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| x = \frac{2(2n-1)}{n+1}x \leqslant \frac{2(2n-1)}{n+1} \times \frac{1}{4} = \frac{4n-2}{4n+4} < 1$$

On en déduit que pour chaque x de $\left]0, \frac{1}{4}\right]$, la suite numérique $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît à partir du rang 1. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour $n \geqslant 1$ et $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leqslant |f_{n+1}(x)| = |a_{n+1}|x^{n+1} \leqslant \frac{|a_{n+1}|}{4^{n+1}} = u_{n+1},$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Sup}\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right|, \ x \in \left]0, \frac{1}{4}\right]\right\} \leqslant u_{n+1}$. Puisque la suite (u_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a montré que la série de fonction de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers f sur $\left]0, \frac{1}{4}\right]$. Puisque chaque fonction f_n est continue sur $\left]0, \frac{1}{4}\right]$, f est continue sur $\left]0, \frac{1}{4}\right]$ et en particulier en $\frac{1}{4}$.

Mais alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}C_{2n}^n}{(2n-1)4^n} = f\left(\frac{1}{4}\right) = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{4} \\ x<\frac{1}{4}}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{4} \\ x<\frac{1}{4}}} \sqrt{1+4x} = \sqrt{1+4\times\frac{1}{4}} = \sqrt{2}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}C_{2n}^n}{(2n-1)4^n} = \sqrt{2}.}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   $\chi_A = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$ puis $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(2,3)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ puis $X_1 = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{array}{l} x'=4x-2y \\ y'=x+y \end{array}\right. \Leftrightarrow X'=AX \Leftrightarrow X'=PDP^{-1}X \Leftrightarrow P^{-1}X'=DP^{-1}X \Leftrightarrow (P^{-1}X)'=D(P^{-1}X) \Leftrightarrow X_1'=DX_1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1'=2x_1 \\ y_1'=3y_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} x_1(t)=ae^{2t} \\ y_1(t)=be^{3t} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ae^{2t} \\ be^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae^{2t}+2be^{3t} \\ ae^{2t}+be^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{t\mapsto\begin{pmatrix} ae^{2t}+2be^{3t} \\ ae^{2t}+be^{3t} \end{pmatrix},\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

2. Puisque la fonction $t\mapsto\begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, les solutions réelles sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ du système proposé constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

   Résolution du système homogène associé. Posons $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\chi_A=\lambda^2+1=(\lambda-i)(\lambda+i)$ et en particulier A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Un vecteur propre de A associé à la valeur propre i est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ et un vecteur propre de A associé à la valeur propre $-i$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$. On sait alors que les solutions complexes sur $\mathbb{R}$ du système homogène associé sont les fonctions de la forme $X\ :\ t\mapsto ae^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}+be^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$, $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.

   Déterminons alors les solutions réelles du système homogène.

$$X \text{ réelle} \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ ae^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}+be^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}=\overline{a}e^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}+\overline{b}e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow b=\overline{a} \text{ (car la famille de fonctions } (e^{it},e^{-it}) \text{ est libre.)}$$

   Les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ du système homogène sont les fonctions de la forme $X\ :\ t\mapsto ae^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}+\overline{a}e^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}=2\mathrm{Re}\left(ae^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}\right)$, $a\in\mathbb{C}$. En posant $a=\lambda+i\mu$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$,

$$2\mathrm{Re}\left(ae^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}\right)=2\mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} (\lambda+i\mu)(\cos t+i\sin t) \\ (\lambda+i\mu)(1-i)(\cos t+i\sin t) \end{pmatrix}\right)=$$
$$2\begin{pmatrix} \lambda\cos t-\mu\sin t \\ \lambda(\cos t+\sin t)+\mu(\cos t-\sin t) \end{pmatrix}.$$

   Maintenant, le couple (λ,μ) décrit $\mathbb{R}^2$ si et seulement si le couple $(2\lambda,2\mu)$ décrit $\mathbb{R}^2$ et en renommant les constantes λ et μ, on obtient les solutions réelles du système homogène : $t\mapsto\lambda\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t+\sin t \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t-\sin t \end{pmatrix}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

   Résolution du système. D'après la méthode de variation de la constante, il existe une solution particulière du système de la forme $t\mapsto\lambda(t)\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t+\sin t \end{pmatrix}+\mu(t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t-\sin t \end{pmatrix}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ telles que pour tout réel t de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\lambda'(t)\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t+\sin t \end{pmatrix}+$

$\mu'(t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t-\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$. Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(t) = \frac{1}{\cos t}(\cos t-\sin t) = 1-\frac{\sin t}{\cos t}$ et $\mu'(t) = -\frac{1}{\cos t}(\cos t+\sin t) = -1-\frac{\sin t}{\cos t}$. On peut prendre $\lambda(t) = t+\ln(\cos t)$ et $\mu(t) = -t+\ln(\cos t)$ et on obtient la solution particulière

$$X(t) = (t+\ln(\cos t))\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t+\sin t \end{pmatrix} + (-t+\ln(\cos t))\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t-\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(\cos t+\sin t)+\ln(\cos t)(\cos t-\sin t) \\ 2t\sin t+2\cos t\ln(\cos t) \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} = \left\{t\mapsto \begin{pmatrix} t(\cos t+\sin t)+\ln(\cos t)(\cos t-\sin t)+\lambda\cos t-\mu\sin t \\ 2t\sin t+2\cos t\ln(\cos t)+\lambda(\cos t+\sin t)+\mu(\cos t-\sin t) \end{pmatrix},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

3. Puisque la fonction $t\mapsto \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$ est continue sur $\mathbb{R}$, les solutions sur $\mathbb{R}$ du système proposé constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

   Résolution du système homogène associé. Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. $\chi_A = \lambda^2-11\lambda+28 = (\lambda-4)(\lambda-7)$. Un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 4 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 7 est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ces vecteurs fournissent des combinaisons linéaires intéressantes des équations :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = 5x-2y+e^t \\ y' = -x+6y+t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x+y)' = 4(x+y)+e^t+t \\ (x-2y)' = 7(x-2y)+e^t-2t \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} x(t)+y(t) = -\frac{e^t}{3}-\frac{t}{4}-\frac{1}{16}+\lambda e^{4t} \\ x(t)-2y(t) = -\frac{e^t}{6}+\frac{2t}{7}+\frac{2}{49}+\mu e^{7t} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall t\in\mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} x(t) = -\frac{5e^t}{6}-\frac{3t}{14}-\frac{33}{392}++2\lambda e^{4t}+\mu e^{4t} \\ y(t) = -\frac{e^t}{6}\frac{15t}{28}-\frac{81}{784}+\lambda e^{4t}-\mu e^{7t} \end{array}\right.$$

4. Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+2)-2(-\lambda)+(-\lambda+2) = -\lambda^3+10\lambda^2-26\lambda+12$$
$$= -(\lambda-6)(\lambda^2-4\lambda+2) = -(\lambda-6)(\lambda-2+\sqrt{2})(\lambda-2-\sqrt{2}),$$

   et en particulier A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

$$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(A-6I)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} -x+y-z=0 \\ 2x-2y-2z=0 \\ x-y-5z=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow z=0 \text{ et } x=y.$$

   $\mathrm{Ker}(A-6I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,1,0)$.

$$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(A-(2+\sqrt{2})I)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(3-\sqrt{2})x+y-z=0\\2x+(2-\sqrt{2})y-2z=0\\x-y-(1+\sqrt{2})z=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=(3-\sqrt{2})x+y\\2x+(2-\sqrt{2})y-2((3-\sqrt{2})x+y)=0\\x-y-(1+\sqrt{2})((3-\sqrt{2})x+y)=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=(3-\sqrt{2})x+y\\(-4+2\sqrt{2})x-\sqrt{2}y=0\\-2\sqrt{2}x-(2+\sqrt{2})y=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}z=(3-\sqrt{2})x+y\\y=(-2\sqrt{2}+2)x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=(-2\sqrt{2}+2)x\\z=(5-3\sqrt{2})x\end{array}\right..$$

$\mathrm{Ker}(A-(2+\sqrt{2})I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,2-2\sqrt{2},5-3\sqrt{2})$. Un calcul conjugué montre alors que $\mathrm{Ker}(A-(2-\sqrt{2})I)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,2+2\sqrt{2},5+3\sqrt{2})$.

On sait alors que les solutions du système homogène $t\mapsto ae^{6t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+be^{(2+\sqrt{2})t}\begin{pmatrix}1\\2-2\sqrt{2}\\5-3\sqrt{2})\end{pmatrix}+$ $ce^{(2-\sqrt{2})t}\begin{pmatrix}1\\2+2\sqrt{2}\\5+3\sqrt{2})\end{pmatrix}$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

5. Posons $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$. $\chi_A=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\-1&-\lambda&0\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)=(1-\lambda)^3$. Le théorème de CAYLEY-HAMILTON permet alors d'affirmer que $(A-I)^3=0$.
On sait que les solutions du système $X'=AX$ sont les fonctions de la forme $t\mapsto e^{tA}X_0$ où $X_0\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Or, pour $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}e^{tA}&=e^{t(A-I)}\times e^{tI}\text{ (car les matrices }t(A-I)\text{ et }tI\text{ commutent)}\\&=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}(A-I)^n\right)\times e^tI=e^t\left(\sum_{n=0}^{2}\frac{t^n}{n!}(A-I)^n\right)\\&=e^t\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}+\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix}\right)\\&=e^t\begin{pmatrix}1+t&t&0\\-t&1-t&0\\t&t&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Les solutions du système sont les fonctions de la forme $t\mapsto e^{tA}X_0=e^t\begin{pmatrix}1+t&t&0\\-t&1-t&0\\t&t&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}(a+(a+b)t)e^t\\(b-(a+b)t)e^t\\((a+b)t+c)e^t\end{pmatrix}$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Maintenant,

$$\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\\z(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0\\b=1\\c=-1\end{array}\right..$$

La solution cherchée est $t\mapsto\begin{pmatrix}te^t\\(1-t)e^t\\(t-1)e^t\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $g(t) = \|X(t)\|_2^2 = (X(t)|X(t))$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t

$$g'(t) = 2(X(t)|X'(t)) = 2(X(t)|AX(t)) = 2^t X(t)AX(t) \geqslant 0.$$

Ainsi, la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de la fonction $\sqrt{g}\ :\ t \mapsto \|X(t)\|_2$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Puisque les fonctions $t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} & \frac{1}{2t^2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$ sont continues sur $]0,+\infty[$, l'ensemble des solutions sur $]0,+\infty[$ du système proposé est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.
Résolution du système homogène associé. Le couple de fonctions $(x,y) = (1,t)$ est solution du système homogène associé sur $]0,+\infty[$. Pour chaque réel strictement positif t, les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituent une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ car $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Cherchons alors les solutions du système homogène sous la forme $t \mapsto \alpha(t)\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \beta(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ t\alpha(t)+\beta(t) \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} x' = -\frac{1}{2t}x + \frac{1}{2t^2}y \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2t}y \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha' = -\frac{1}{2t}\alpha + \frac{1}{2t^2}(t\alpha+\beta) \\ t\alpha' + \alpha + \beta' = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2t}(t\alpha+\beta) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha' = \frac{\beta}{2t^2} \\ t\alpha' + \beta' = \frac{\beta}{2t} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha' = \frac{\beta}{2t^2} \\ \frac{\beta}{2t} + \beta' = \frac{\beta}{2t} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \beta' = 0 \\ \alpha' = \frac{\beta}{2t^2} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 /\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \left\{\begin{array}{l} \beta(t) = \lambda \\ \alpha'(t) = \frac{\lambda}{2t^2} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 /\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \left\{\begin{array}{l} \beta(t) = \lambda \\ \alpha(t) = -\frac{\lambda}{2t} + \mu \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 /\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \left\{\begin{array}{l} x(t) = -\frac{\lambda}{2t} + \mu \\ y(t) = \frac{\lambda}{2} + \mu t \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Maintenant, pour tout réel strictement positif t, $w(t) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2t} & 1 \\ \frac{1}{2} & t \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ et donc les deux fonctions $t \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ sont deux solutions indépendantes du système homogène sur $]0,+\infty[$. Les solutions sur $]0,+\infty[$ du système homogène sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda\begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$.
Recherche d'une solution particulière du système par la méthode de variations des constantes. Il existe une solution particulière du système de la forme $t \mapsto \lambda(t)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu(t)\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ telles que pour tout réel strictement positif t, $\lambda'(t)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$. Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(t) = \frac{1}{-1}\begin{vmatrix} 2t & 1 \\ t^2 & t \end{vmatrix} = -t^2$ et $\mu'(t) =$

$\frac{1}{-1}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2t} & 2t \\ \frac{1}{2} & t^2 \end{vmatrix} = \frac{3t}{2}$. On peut prendre $\lambda(t) = -\frac{t^3}{3}$ et $\mu(t) = \frac{3t^2}{4}$ et on obtient la solution particulière $X(t) = -\frac{t^3}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{3t^2}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11t^2/12 \\ 7t^3/12 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{11t^2}{12} - \frac{\lambda}{2t} + \mu \\ \frac{7t^3}{12} + \frac{\lambda}{2} + \mu t \end{pmatrix},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

2. Puisque les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} 2t^2-1 \\ 3t \end{pmatrix}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ du système proposé est un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.
Résolution du système homogène associé. Les couples de fonctions $X_1 = (x,y) = (t,-1)$ et $(x,y) = (1,t)$ sont solutions du système homogène associé sur $\mathbb{R}$. De plus, pour chaque réel t, $w(t) = \begin{vmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2+1 \neq 0$. Le couple de fonctions (X_1, X_2) est donc un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$ du système homogène $X' = AX$. Les fonctions solutions du système homogène $X' = AX$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.
Recherche d'une solution particulière du système par la méthode de variation de la constante.
Il existe une solution particulière du système de la forme $t \mapsto \lambda(t)\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu(t)\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel t, $\lambda'(t)\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} + \mu'(t)\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} 2t^2-1 \\ 3t \end{pmatrix}$. Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(t) = \frac{1}{t^2+1}\begin{vmatrix} (2t^2-1)/(t^2+1) & 1 \\ 3t/(t^2+1) & t \end{vmatrix} = \frac{2t^3+2t}{(t^2+1)^2} = \frac{2t}{t^2+1}$ et $\mu'(t) = \frac{1}{t^2+1}\begin{vmatrix} t & (2t^2-1)/(t^2+1) \\ -1 & 3t/(t^2+1) \end{vmatrix} = \frac{5t^2-1}{(t^2+1)^2}$. On peut déjà prendre $\lambda(t) = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$. Ensuite, $\int \frac{5t^2-1}{(t^2+1)^2}\,dt = 5\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - 6\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$ puis

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{t}{t^2+1} - \int t \times \frac{-2t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{t}{t^2+1} + 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt,$$

et donc $\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \mathrm{Arctan}\,t\right) + C$. On peut prendre $\mu(t) = \frac{2t}{t^2+1} - 3\,\mathrm{Arctan}\,t$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{t}{2}\ln(1+t^2) + \frac{2t}{t^2+1} - 3\,\mathrm{Arctan}\,t + \lambda t + \mu \\ -\frac{t}{2}\ln(1+t^2) + \frac{2t^2}{t^2+1} - 3t\,\mathrm{Arctan}\,t - \lambda + \mu t \end{pmatrix},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

3. Si de plus $y = \frac{1}{x}$, le système s'écrit $\begin{cases} \mathrm{sh}(2t)x' = \mathrm{ch}(2t)x - \frac{1}{x} \\ -\mathrm{sh}(2t)\frac{x'}{x^2} = -x + \mathrm{ch}(2t)\frac{1}{x} \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} \mathrm{sh}(2t)x' = \mathrm{ch}(2t)x - \frac{1}{x} \\ \mathrm{sh}(2t)x' = x^3 - \mathrm{ch}(2t)x \end{cases}$.
On obtient $x^3 - \mathrm{ch}(2t)x = \mathrm{ch}(2t)x - \frac{1}{x}$ ou encore $x^4 - 2\,\mathrm{ch}(2t)x^2 + 1 = 0$. Ensuite,

$$x^4 - 2\,\mathrm{ch}(2t)x^2 + 1 = (x^2 - \mathrm{ch}(2t))^2 - \mathrm{sh}^2(2t) = (x^2 - e^{2t})(x^2 - e^{-2t}) = (x-e^t)(x+e^t)(x-e^{-t})(x+e^{-t}).$$

Ainsi, nécessairement $(x,y) \in \{(e^t, e^{-t}), (e^{-t}, e^t), (-e^t, -e^{-t}), (-e^{-t}, e^t)\}$. Réciproquement, si $(x,y) = (e^t, e^{-t})$,

$$\mathrm{ch}(2t)x - y = \frac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) - e^{-t} = \frac{1}{2}(e^{3t} - e^{-t}) = \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^t = \mathrm{sh}(2t)e^t = \mathrm{sh}(2t)x'$$

et

$$-x + \mathrm{ch}(2t)y = -e^t + \frac{1}{2}(e^t + e^{-3t}) = \frac{1}{2}(-e^t + e^{-3t}) = -\frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^{-t} = -\mathrm{sh}(2t)e^{-t} = \mathrm{sh}(2t)y'.$$

Donc le couple $X_1 = (x,y) = (e^t, e^{-t})$ est une solution non nulle du système. De même, si $(x,y) = (e^{-t}, e^t)$,

$$\operatorname{ch}(2t)x - y = \tfrac{1}{2}(e^t + e^{-3t}) - e^t = \tfrac{1}{2}(-e^t - e^{-3t}) = -\tfrac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^{-t} = -\operatorname{sh}(2t)e^{-t} = \operatorname{sh}(2t)x'$$

et

$$-x + \operatorname{ch}(2t)y = -e^{-t} + \tfrac{1}{2}(e^{3t} + e^{-t}) = \tfrac{1}{2}(e^{3t} - e^{-t}) = \tfrac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t})e^t = \operatorname{sh}(2t)e^t = \operatorname{sh}(2t)y'.$$

Donc le couple $X_2 = (x, y) = (e^{-t}, e^t)$ est une solution non nulle du système. Enfin, $w(t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^{-t} & e^t \end{vmatrix} = e^{2t} - e^{-2t} = 2\operatorname{sh}(2t) \neq 0$ et le couple (X_1, X_2) est un système fondamental de solutions sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{ t \mapsto \begin{pmatrix} \lambda e^t + \mu e^{-t} \\ \lambda e^{-t} + \mu e^t \end{pmatrix}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Sur $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, (E) s'écrit $y'' + \frac{4x-2}{2x+1}y' - \frac{8}{2x+1}y = 0$. Puisque les deux fonctions $x \mapsto \frac{4x-2}{2x+1}$ et $x \mapsto -\frac{8}{2x+1}$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I forment un$\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
Recherche d'une solution polynomiale non nulle de (E)**.** Soit P un éventuel polynôme non nul solution de (E). On note n son degré. Le polynôme $Q = (2X+1)P'' + (4X-2)P' - 8P$ est de degré au plus n. De plus, le coefficient de X^n dans Q est $(4n-8)\operatorname{dom}(P)$. Si P est solution de (E), on a nécessairement $(4n-8)\operatorname{dom}(P) = 0$ et donc $n = 2$.
Posons alors $P = aX^2 + bX + c$.
$$(2X+1)P'' + (4X-2)P' - 8P = (2X+1)(2a) + (4X-2)(2aX+b) - 8(aX^2+bX+c) = \\ -4bX + 2a - 2b - 8c$$
Par suite, P est solution de (E) sur I si et seulement si $-4b = 2a - 2b - 8c = 0$ ce qui équivaut à $b = 0$ et $a = 4c$. La fonction $f_1 \ : \ x \mapsto 4x^2 + 1$ est donc une solution non nulle de (E) sur I.
Recherche d'une solution particulière de la forme $f_\alpha \ : \ x \mapsto e^{\alpha x}$**,** $\alpha \in \mathbb{C}$**.**
$$(2x+1)(e^{\alpha x})'' + (4x-2)(e^{\alpha x})' - 8e^{\alpha x} = \left(\alpha^2(2x+1) + \alpha(4x-2) - 8\right)e^{\alpha x} = \\ \left(2\alpha(\alpha+2)x + \alpha^2 - 2\alpha - 8\right)e^{\alpha x}$$
Par suite, f_α est solution de (E) sur I si et seulement si $2\alpha(\alpha+2) = \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0$ ce qui équivaut à $\alpha = -2$. Ainsi, la fonction $f_2 \ : \ x \mapsto e^{-2x}$ est solution de (E) sur I.
Résolution de (E) **sur** $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$**.** Vérifions que le couple (f_1, f_2) est un système fondamental de solution de (E) sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Pour $x > -\frac{1}{2}$,
$$w(x) = \begin{vmatrix} 4x^2+1 & e^{-2x} \\ 8x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = (-8x^2 - 8x - 2)e^{-2x} = -2(2x+1)^2 e^{-2x} \neq 0.$$
Donc le couple (f_1, f_2) est un système fondamental de solution de (E) sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et
$$\boxed{\mathscr{S}_{\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[} = \left\{x \mapsto \lambda(4x^2+1) + \mu e^{-2x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$
Résolution de (E) **sur** $\mathbb{R}$**.** On a aussi $\mathscr{S}_{\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[} = \left\{x \mapsto \lambda(4x^2+1) + \mu e^{-2x}, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \lambda_1(4x^2+1) + \mu_1 e^{-2x} \text{ si } x \leqslant \\ \lambda_2(4x^2+1) + \mu_2 e^{-2x} \text{ si } x > \end{cases}$
(par continuité à gauche en $-\frac{1}{2}$).
f ainsi définie est deux fois dérivables sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, solution de (E) sur chacun de ces deux intervalles et vérifie encore (E) en $x = -\frac{1}{2}$ si de plus f est deux fois dérivable en $-\frac{1}{2}$.
En résumé, f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est deux fois dérivables en $-\frac{1}{2}$.
f est déjà deux fois dérivable à droite et à gauche en $-\frac{1}{2}$. De plus, en posant $h = x + \frac{1}{2}$ ou encore $x = -\frac{1}{2} + h$, on obtient quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ par valeurs inférieures

$$f(x)=\lambda_1(2-4h+4h^2)+\mu_1 e e^{-2h}=(2\lambda_1+e\mu_1)+(-4\lambda_1-2e\mu_1)h+(4\lambda_1+2e\mu_1)h^2+o(h^2),$$

et de même quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ par valeurs supérieures, $f(x)=(2\lambda_2+e\mu_2)+(-4\lambda_2-2e\mu_2)h+(4\lambda_2+2e\mu_2)h^2+o(h^2)$. Par suite, f est deux fois dérivable en $-\frac{1}{2}$ si et seulement si $2\lambda_1+e\mu_1=2\lambda_2+e\mu_2$ ou encore $\mu_2=\frac{2}{e}(\lambda_1+\lambda_2)+\mu_1$.

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto\left\{\begin{array}{l} a(4x^2+1)+be^{-2x} \text{ si } x\leqslant -\frac{1}{2} \\ c(4x^2+1)+\left(\frac{2}{e}(a+c)-b\right)e^{-2x} \text{ si } x>-\frac{1}{2}\end{array}\right.$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Ainsi, l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ est de dimension 3 et une base de cet espace est par exemple (f_1,f_2,f_3) où $f_1\ :\ x\mapsto\left\{\begin{array}{l} 4x^2+1 \text{ si } x\leqslant -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{e}e^{-2x} \text{ si } x>-\frac{1}{2}\end{array}\right.$, $f_2\ :\ x\mapsto\left\{\begin{array}{l} e^{-2x} \text{ si } x\leqslant -\frac{1}{2} \\ -e^{-2x} \text{ si } x>-\frac{1}{2}\end{array}\right.$ et $f_3\ :\ x\mapsto\left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x\leqslant -\frac{1}{2} \\ 4x^2+1+\frac{2}{e}e^{-2x} \text{ si } x>-\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

2. Sur $I=]0,+\infty[$, l'équation (E) s'écrit $y''-\frac{2}{x+1}y'+\frac{2}{x(x+1)}y=0$. Puisque les deux fonctions $x\mapsto-\frac{2}{x+1}$ et $x\mapsto\frac{2}{x(x+1)}$ sont continues sur I, les solutions de (E) sur I forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
La fonction $f_1\ :\ x\mapsto x$ est solution de (E) sur I. Posons alors $y=f_1z$. Puisque la fonction f_1 ne s'annule pas sur I, la fonction y est deux fois dérivables sur I si et seulement si la fonction z est deux fois dérivables sur I. De plus, d'après la formule de LEIBNIZ,

$$\begin{aligned}(x^2+x)y''-2y'+2y&=(x^2+x)(f_1''z+2f_1'z'+f_1z'')-2x(f_1'z+f_1z')+2f_1z\\&=(x^2+x)f_1z''+(2(x^2+x)f_1'-2xf_1)z'+((x^2+x)f_1''-2f_1'+2f_1)z\\&=(x^3+x^2)z''+2xz'.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I&\Leftrightarrow\forall x\in I,\ (x^3+x^2)z''(x)+2xz'(x)=0\\&\Leftrightarrow\forall x\in I,\ z''(x)+\frac{2}{x(x+1)}z'(x)=0\Leftrightarrow\forall x\in I,\ \left(e^{2\ln|x|-2\ln|x+1|}z'\right)'(x)=0\\&\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ z'(x)=\lambda\left(\frac{x+1}{x}\right)^2\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in I,\ z(x)=\lambda\left(x+2\ln|x|-\frac{1}{x}\right)+\mu\\&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x\in I,\ y(x)=\lambda(x^2+2x\ln|x|-1)+\mu x.\end{aligned}$$

3. Cherchons les solutions développables en série entière. Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx_n$ une série entière dont le rayon R est supposé à priori strictement positif. Pour $x\in]-R,R[$,

$$\begin{aligned}4xf''(x)-2f'(x)+9x^2f(x)&=4x\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+9x^2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\\&=4\sum_{n=1}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}-2\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+9\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}2n(2n-3)a_nx^{n-1}+9\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+2}=\sum_{n=1}^{+\infty}2n(2n-3)a_nx^{n-1}+9\sum_{n=3}^{+\infty}a_{n-3}x^{n-1}\\&=-a_1+4a_2x+\sum_{n=3}^{+\infty}(2n(2n-3)a_n+9a_{n-3})x^{n-1}\end{aligned}$$

Par suite, f est solution de (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si $a_1=a_2=0$ et $\forall n\geqslant 3$, $2n(2n-3)a_n+9a_{n-3}=0$ ce qui s'écrit encore

$$a_1=a_2=0 \text{ et } \forall n\geqslant 3,\ a_n=-\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}.$$

Les conditions $a_1=0$ et $\forall n\geqslant 3$, $a_n=-\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}$ sont équivalentes à $\forall p\in\mathbb{N}$, $a_{3p+1}=0$ et les conditions $a_2=0$ et $\forall n\geqslant 3$, $a_n=-\frac{9}{2n(2n-3)}a_{n-3}$ sont équivalentes à $\forall p\in\mathbb{N}$, $a_{3p+2}=0$.
Enfin les conditions $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $a_{3p}=-\frac{9}{6p(6p-3)}a_{3p-3}=-\frac{1}{2p(2p-1)}a_{3(p-1)}$ sont équivalentes pour $p\geqslant 1$ à

$$a_{3p}=-\frac{1}{2p(2p-1)}\times-\frac{1}{(2p-2)(2p-3)}\times\ldots\times-\frac{1}{2\times 1}a_0=\frac{(-1)^p}{(2p)!}a_0.$$

En résumé, sous l'hypothèse $R>0$, f est solution de (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si $\forall x\in]-R,R[$, $f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{3p}$.
Réciproquement, puisque pour tout réel x, $\lim_{x\to+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{3p}=0$ d'après un théorème de croissances comparées, $R=+\infty$ pour tout choix de a_0 ce qui valide les calculs précédents sur $\mathbb{R}$.
Les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{3n}$, $x\in\mathbb{R}$. Ensuite, pour $x>0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{3n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x^{3/2})^{2n}=\cos\left(x^{3/2}\right).$$

Donc la fonction $x\mapsto\cos\left(x^{3/2}\right)$ est une solution de (E) sur $]0,+\infty[$. La forme de cette solution nous invite à changer de variable en posant $t=x^{3/2}$. Plus précisément, pour $x>0$, posons $y(x)=z(x^{3/2})=z(t)$. Puisque l'application $\varphi\,:\,x\mapsto x^{3/2}$ est un C^2-difféomorphisme de $]0,+\infty[$ sur lui-même, la fonction y est deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$ si et seulement si la fonction est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.
Pour $x>0$, on a $y(x)=z(x^{3/2})$ puis $y'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}z'(x^{3/2})$ puis $y''(x)=\frac{3}{4}x^{-1/2}z'(x^{3/2})+\frac{9}{4}xz''(x^{3/2})$ et donc

$$\begin{aligned}4xy''(x)-2y'(x)+9x^2y(x)&=4x\left(\frac{3}{4}x^{-1/2}z'(x^{3/2})+\frac{9}{4}xz''(x^{3/2})\right)-2\left(\frac{3}{2}x^{1/2}z'(x^{3/2})\right)+9x^2z(x^{3/2})\\&=9x^2(z''(x^{3/2})+z(x^{3/2})).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}y\text{ solution de }(E)\text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow\forall x>0,\ 9x^2(z''(x^{3/2})+z(x^{3/2}))=0\Leftrightarrow\forall t>0,\ z''(t)+z(t)=0\\&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall t>0,\ z(t)=\lambda\cos t+\mu\sin t\\&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x>0,\ y(x)=\lambda\cos(x^{3/2})+\mu\sin(x^{3/2}).\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[}=\left\{x\mapsto\lambda\cos(x^{3/2})+\mu\sin(x^{3/2}),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

4. Puisque les fonctions $x\mapsto-\frac{2}{1+x}$, $x\mapsto\frac{1-x}{1+x}$ et $x\mapsto\frac{xe^{-x}}{1+x}$ sont continues sur $]-1,+\infty[$, les solutions de (E) sur $]-1,+\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.
Résolution de l'équation homogène.
La fonction $f_1\,:\,x\mapsto e^x$ est solution sur $]-1,+\infty[$ de l'équation $(1+x)y''-2y'+(1-x)y=0$. Posons alors $y=f_1z$. Puisque la fonction f_1 ne s'annule pas sur $]-1,+\infty[$, la fonction y est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$ si et seulement si la fonction z est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$. De plus, la formule de LEIBNIZ permet d'écrire pour $x>-1$

$$\begin{aligned}(1+x)y''(x)-2y'(x)+(1-x)y(x)&=(1+x)(f_1''z(x)+2f_1'(x)z'(x)+f_1(x)z''(x))-2(f_1'(x)z(x)+f_1(x)z'(x))\\&\quad+(1-x)f_1(x)z(x)\\&=(1+x)f_1(x)z''(x)+(2(1+x)f_1'(x)-2f_1(x))z'(x)=((1+x)z''(x)+2xz'(x))e^x.\end{aligned}$$

Par suite,

y solution de (E_H) sur $]-1,+\infty[\Leftrightarrow \forall x>-1,\ (1+x)z''(x)+2xz'(x)=0 \Leftrightarrow \forall x>-1,\ z''(x)+\left(2-\dfrac{2}{1+x}\right)z'(x)=0$

$$\Leftrightarrow \forall x>-1,\ e^{2x-2\ln(1+x)}z''(x)+\left(2-\frac{2}{1+x}\right)e^{2x-2\ln(1+x)}z'(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \forall x>-1,\ \left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^2}z'\right)'(x)=0 \Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x>-1,\ z'(x)=\lambda(x+1)^2e^{-2x}.$$

Maintenant

$$\int (x+1)^2e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x}+\int (x+1)e^{-2x}\,dx=-\frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x}-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx$$
$$=\left(-\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{4}\right)e^{-2x}+C=\left(-\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{2}-\frac{5}{4}\right)e^{-2x}+C=-\frac{1}{4}(2x^2+6x+5)e^{-2x}.$$

On en déduit que

$$y \text{ solution de } (E_H) \text{ sur }]-1,+\infty[\ \Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x>-1,\ z'(x)=\lambda(x+1)^2e^{-2x}$$
$$\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x>-1,\ z(x)=-\frac{\lambda}{4}(2x^2+6x+5)e^{-2x}+\mu$$
$$\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall x>-1,\ y(x)=-\frac{\lambda}{4}(2x^2+6x+5)e^{-x}+\mu e^{x}.$$

Maintenant, λ décrit $\mathbb{R}$ si et seulement si $-\frac{\lambda}{4}$ décrit $\mathbb{R}$ et en renommant la constante λ, les solutions de (E_H) sur $]-1,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto \lambda(2x^2+6x+5)e^{-x}+\mu e^{x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Recherche d'une solution particulière de (E). Au vu du second membre, on peut chercher une solution particulière de la forme $f_0\ :\ x\mapsto (ax+b)e^{-x}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$$(1+x)((ax+b)e^{-x})''-2((ax+b)e^{-x})'+(1-x)(ax+b)e^{-x}=((1+x)((ax+b)-2a)-2(-(ax+b)+a)$$
$$+(1-x)(ax+b))e^{-x}$$
$$=(2bx+(4b-4a))e^{-x}.$$

Par suite, f_0 est solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ si et seulement si $2b=1$ et $4b-4a=0$ ce qui équivaut à $a=b=\frac{1}{2}$. Une solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ est $x\mapsto \frac{x+1}{2}e^{-x}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-1,+\infty[}=\left\{x\mapsto \lambda(2x^2+6x+5)e^{-x}+\mu e^{x}+\tfrac{x+1}{2}e^{-x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

5. Puisque la fonction $x\mapsto \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

   L'équation caractéristique de l'équation homogène est $z^2+4z+4=0$. Puisque cette équation admet -2 pour racine double, les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $x\mapsto \lambda e^{-2x}+\mu xe^{-2x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

   D'après la méthode de variation de la constante, il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x\mapsto \lambda(x)e^{-2x}+\mu(x)xe^{-2x}$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda'(x)e^{-2x}+\mu'(x)xe^{-2x}=0\\ -2\lambda'(x)e^{-2x}+\mu'(x)(-2x+1)e^{-2x}=\frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}}\end{array}\right..$$

Les formules de CRAMER fournissent $\lambda'(x) = \frac{1}{e^{-4x}}\begin{vmatrix} 0 & xe^{-2x} \\ \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}} & (-2x+1)e^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $\mu'(x) = \frac{1}{e^{-4x}}\begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & \frac{e^{-2x}}{\sqrt{x^2+1}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. On peut prendre $\lambda(x) = -\sqrt{x^2+1}$ et $\mu(x) = \mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ puis $f_0(x) = \left(-\sqrt{x^2+1}+x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)e^{-2x}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\lambda+\mu x+\left(-\sqrt{x^2+1}+x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\right)e^{-2x},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}.}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit f une éventuelle solution. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = -f(-x)+e^x$. On en déduit que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ ou encore que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. En dérivant l'égalité initiale, on obtient pour tout réel x

$$f''(x) = f'(-x)+e^x = -f(x)+e^{-x}+e^x,$$

et donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+y = 2\mathrm{ch}(x)$. Par suite, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{ch}(x)+\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$.
Réciproquement, soit f une telle fonction. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x)+f(-x) = (\mathrm{sh}(x)-\lambda\sin(x)+\mu\cos(x))+(\mathrm{ch}(x)+\lambda\cos(x)-\mu\sin(x)) = e^x+(\lambda+\mu)(\cos(x)-\sin(x)),$$

et f est solution si et seulement si $\lambda+\mu = 0$.
Les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $x\mapsto \mathrm{ch}(x)+\lambda(\cos(x)-\sin(x))$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

Soit f une éventuelle solution. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $f'(x) = f\left(\frac{3}{16x}\right)$. On en déduit que f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ ou encore que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. En dérivant l'égalité initiale, on obtient pour tout réel x

$$f''(x) = -\frac{3}{16x^2}f'\left(\frac{3}{16x}\right) = -\frac{3}{16x^2}f\left(\frac{3/16}{(3/16)/x}\right) = -\frac{3}{16x^2}f(x),$$

et donc f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $x^2y''+\frac{3}{16}y = 0$ (E). Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Cherchons une solution particulière de (E) sur $]0,+\infty[$ de la forme $g_\alpha\ :\ x\mapsto x^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$f_\alpha \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[\Leftrightarrow \forall x>0,\ x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+\frac{3}{16}x^\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha+\frac{3}{16} = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4} \text{ ou } \alpha = \frac{3}{4}.$$

Les deux fonctions $f_1\ :\ x\mapsto x^{1/4}$ et $f_2\ :\ x\mapsto x^{3/4}$ sont solutions de (E) sur $]0,+\infty[$. Le wronskien de ces solutions est $w(x) = \begin{vmatrix} x^{1/4} & x^{3/4} \\ \frac{1}{4}x^{-3/4} & \frac{3}{4}x^{-1/4} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\neq 0$ et donc (f_1,f_2) est un système fondamental de solutions de (E) sur $]0,+\infty[$. Ainsi, si f est solution du problème, nécessairement $\exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x>0$, $f(x) = \lambda_1x^{1/4}+\lambda_2x^{3/4}$.
Réciproquement, soit f une telle fonction.
Pour tout réel $x>0$, $f'(x) = \frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4}+\frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4}$ et $f\left(\frac{3}{16x}\right) = \frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4}+\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4}$. Donc

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\Leftrightarrow \forall x>0,\ \frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4}+\frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4}=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4}+\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4}\\
&\Leftrightarrow \forall x>0,\ \frac{\lambda_1}{4}x^{-3/4}+\frac{3\lambda_2}{4}x^{-1/4}=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{-1/4}+\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{-3/4}\\
&\Leftrightarrow \forall x>0,\ \frac{\lambda_1}{4}x^{1/4}+\frac{3\lambda_2}{4}x^{3/4}=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2}x^{3/4}+\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8}x^{1/4} \text{ (après multiplication par } x)\\
&\Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{4}=\frac{3^{3/4}\lambda_2}{8} \text{ et } \frac{3\lambda_2}{4}=\frac{3^{1/4}\lambda_1}{2} \Leftrightarrow \lambda_2=\frac{2}{3^{3/4}}\lambda_1.
\end{aligned}$$

Les fonctions solutions sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda\left(x^{1/4}+2\left(\frac{x}{3}\right)^{3/4}\right)$.

Correction de l'exercice 12 ▲

La fonction nulle est solution. Dorénavant, f est une éventuelle solution non nulle. Il existe donc $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)\neq 0$.

• L'égalité $f(x_0)f(0)=\int_{x_0-0}^{x_0+0}f(t)\,dt=0$ fournit $f(0)=0$.

• Pour tout réel y, $\int_{-y}^{y}f(t)\,dt=f(0)f(y)=0$. Maintenant, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction $y\mapsto\int_{-y}^{y}f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. En dérivant, on obtient pour tout réel y, $f(y)+f(-y)=0$ et donc f est impaire.

• Pour tout réel y, on a alors $f(y)=\frac{1}{f(x_0)}\int_{x_0-y}^{x_0+y}f(t)\,dt$. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto\frac{1}{f(x_0)}\int_{x_0-y}^{x_0+y}f(t)\,dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de f. Mais alors la fonction $x\mapsto\frac{1}{f(x_0)}\int_{x_0-y}^{x_0+y}f(t)\,dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et il en est de même de f.

$$f \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

• En dérivant à y fixé ou x fixé l'égalité $f(x)f(y)=\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,dt$, on obtient pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f'(x)f(y)=f(x+y)-f(x-y)$ et $f(x)f'(y)=f(x+y)+f(x-y)$. En dérivant la première égalité à y fixé et la deuxième à x fixé, on obtient pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f''(x)f(y)=f'(x+y)-f'(x-y)=f(x)f''(y)$. En particulier, pour tout réel x, $f''(x)f(x_0)-f(x)f''(x_0)=0$ ou encore $f''(x)-kf(x)=0$ où $f=\frac{f''(x_0)}{f(x_0}$.

$$f \text{ est solution d'une équation différentielle du type } y''-ky=0.$$

• f est donc de l'un des types suivants : $x\mapsto\lambda\cos(\omega x)+\mu\sin(\omega x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $\omega>0$ ou $x\mapsto ax+b$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ou $x\mapsto\lambda\,\mathrm{ch}(\omega x)+\mu\,\mathrm{sh}(\omega x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $\omega>0$ (suivant que $k>0$, $k=0$ ou $k<0$). De plus, f étant impaire, f est nécessairement de l'un des types suivants :

$$x\mapsto\lambda\sin(\omega x),\ \lambda\in\mathbb{R}^* \text{ et } \omega>0 \text{ ou } x\mapsto ax,\ a\in\mathbb{R}* \text{ ou } x\mapsto\lambda\,\mathrm{sh}(\omega x),\ \lambda\in\mathbb{R} \text{ et } \omega>0.$$

Réciproquement,
- si $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}^*$ alors $f(x)f(y)=a^2xy$ et $\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,dt=\frac{a}{2}((x+y)^2-(x-y)^2)=2axy$. Donc f est solution si
et seulement si $a=2$. On obtient la fonction solution $x\mapsto 2x$.
- si $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\lambda\sin(\omega x)$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et $\omega>0$, alors $f(x)f(y)=\lambda^2\sin(\omega x)\sin(\omega y)$ et $\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,dt=\frac{\lambda}{\omega}(\cos(\omega(x-y))-\cos(\omega(x+y)))=\frac{2\lambda}{\omega}\sin(\omega x)\sin(\omega y)$. Donc f est solution si et seulement si $\lambda=\frac{2}{\omega}$.
On obtient les fonctions solutions $x\mapsto\frac{2}{\omega}\sin(\omega x)$, $\omega>0$.
- si $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\lambda\,\mathrm{sh}(\omega x)$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et $\omega>0$, alors $f(x)f(y)=\lambda^2\,\mathrm{sh}(\omega x)\,\mathrm{sh}(\omega y)$ et $\int_{x-y}^{x+y}f(t)\,dt=\frac{\lambda}{\omega}(\mathrm{ch}(\omega(x+y))-\mathrm{ch}(\omega(x-y)))=\frac{2\lambda}{\omega}\mathrm{sh}(\omega x)\,\mathrm{sh}(\omega y)$. Donc f est solution si et seulement si $\lambda=\frac{2}{\omega}$.
On obtient les fonctions solutions $x\mapsto\frac{2}{\omega}\mathrm{sh}(\omega x)$, $\omega>0$.

Correction de l'exercice 13 ▲

Existence de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$**.** Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est dominée par $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On en déduit que

$$F \text{ est définie sur }]0,+\infty[.$$

Dérivées de F**.** Soient $a > 0$ puis $\Phi : \begin{array}{ccc} [a,+\infty[\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \frac{e^{-tx}}{1+t^2} \end{array}$.

• Pour tout réel $x \in [a,+\infty[$, la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$.

• La fonction Φ admet sur $[a,+\infty[\times[0,+\infty[$ des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 par rapport à sa première variable x et pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t) = -\frac{te^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}.$$

De plus

- pour tout $x \in [a,+\infty[$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, les fonctions $x \mapsto \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $[0,+\infty[$.
- pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times[0,+\infty[$, $\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{te^{-ta}}{1+t^2} = \varphi_1(t)$ et $\left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \frac{t^2e^{-ta}}{1+t^2} = \varphi_2(t)$ où les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et intégrables sur $[0,+\infty[$ car sont dominées en $+\infty$ par $\frac{1}{t^2}$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de LEIBNIZ), F est deux fois dérivable sur $[a,+\infty[$ et les dérivées de F s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout réel $a > 0$, F est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$, $F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$.

$$\forall x > 0,\ F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-tx}}{1+t^2}\,dt.$$

Equation différentielle vérifiée par F**.** Pour $x > 0$, $F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \left[-\frac{1}{x}e^{-tx}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$.

$$\forall x > 0,\ F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}.$$

Existence de $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$**.** Soit $a > 0$. Montrons l'existence de $\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ et $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$.

Soit $A > a$. Une intégration par parties fournit $\int_a^A \frac{\sin u}{u}\,du = -\frac{\cos a}{a} + \frac{\cos A}{A} - \int_a^A \frac{\cos u}{u^2}\,du$. Puisque $\left|\frac{\cos A}{A}\right| \leqslant \frac{1}{A}$, on a $\lim_{A\to+\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$. D'autre part, puisque $\forall u \geqslant a$, $\left|\frac{\cos u}{u^2}\right| \leqslant \frac{1}{u^2}$, la fonction $u \mapsto \frac{\cos u}{u^2}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ et en particulier, $\int_a^A \frac{\cos u}{u^2}\,du$ a une limite quand A tend vers $+\infty$. On en déduit que $\int_a^A \frac{\sin u}{u}\,du$ a une limite quand A tend vers $+\infty$ ou encore que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ converge en $+\infty$. De même, $\int_a^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ converge en $+\infty$.
Mais alors, pour $x > 0$,

$$\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt = G(x) \text{ existe.}$$

$$G \text{ est définie sur }]0,+\infty[.$$

Equation différentielle vérifiée par G**.** Puisque la fonction $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ est continue sur $]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \int_1^x \frac{\sin u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. De même, la fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ puis G est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout réel $x > 0$,

$$G'(x) = -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \frac{\cos x \sin x}{x} - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du + \frac{\cos x \sin x}{x} = -\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du - \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du,$$

puis en redérivant

$$G''(x) = -\cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du + \frac{\sin^2 x}{x} + \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,du + \frac{\cos^2 x}{x} = -G(x) + \frac{1}{x}.$$

$$\forall x > 0,\ G''(x) + G(x) = \frac{1}{x}.$$

Limites de F et G en $+\infty$. Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du$ sont deux intégrales convergentes, $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\, du = 0$. Puisque les fonctions sinus et cosinus sont bornées sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$.

Pour tout réel $x > 0$, $|F(x)| = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dt = \frac{1}{x}$ et donc $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} G(x) = 0.$$

Egalité de F et G. D'après ce qui précède, $(F-G)'' + (F-G) = 0$ et donc il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x > 0$, $F(x) - G(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$. Si $(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, alors $\lambda \cos x + \mu \sin x = \sqrt{\lambda^2+\mu^2} \cos(x - x_0)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} F(x) - G(x) = 0$, on a nécessairement $\lambda = \mu = 0$ et donc $F - G = 0$. On a montré que

$$\boxed{\forall x > 0,\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, dt.}$$

Remarque. On peut montrer que l'égalité persiste quand $x = 0$ (par continuité) et on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.