République du Cameroun
Republic of Cameroun

Université de Yaoundé I

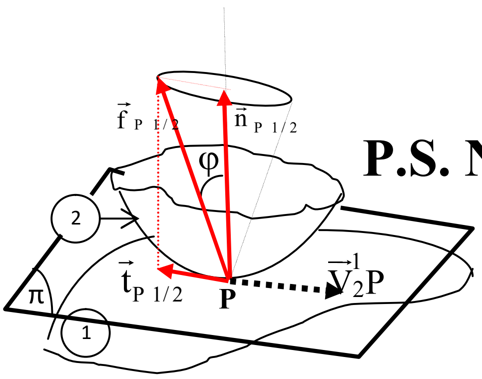
University of Yaounde I

STATIQUE DU SOLIDE

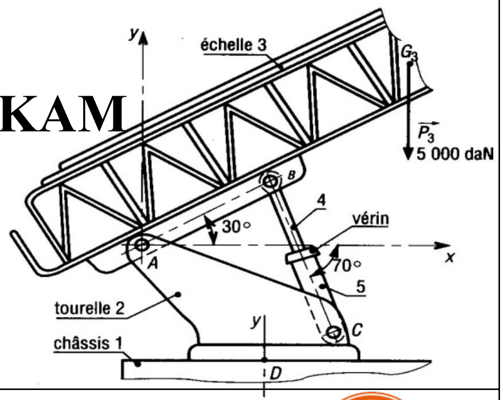
STATIQUE GRAPHIQUE

Ressource Pédagogique Mise en Ligne

Par



P.S. NGOHE-EKAM



Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de Yaoundé

PREAMBULE

Suite à la menace de propagation du Covid-19 (Corona virus Disease) dont le premier cas de contamination a été déclaré au mois de mars 2020 au Cameroun, des mesures sanitaires ont été édictées par monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, puis renforcées par une sortie médiatisée de monsieur le Premier Ministre (PM) du Cameroun. Le point commun de l'allocution de ces deux personnalités et relatif à l'enseignement supérieur fut la fermeture des établissements d'enseignement, dont l'Université de Yaoundé.

Monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, dans le souci que la fermeture de l'UY I ne soit pas une perche tendue aux étudiants paresseux pour se laisser aller à un certain sommeil intellectuel, instruit alors que les enseignants « mettent en ligne » leurs cours grâce au serveur du Centre Universitaire des Technologies de l'Information (CUTI) de l'UY I et que les étudiants visitent ce serveur à volonté pour télécharger les ressources pédagogiques (puisque c'est le terme le plus approprié) que les enseignants y auront déposé, ce téléchargement devant permette aux étudiants de continuer d'apprendre (à domicile) pendant la période de pseudo-confinement décrétée par monsieur le PM.

C'est ainsi que le présent document est conçu et mis en forme par l'auteur. Ce document fait partie de l'enseignement dispensé par l'auteur aux étudiants de niveau II de l'Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de l'UY I. L'auteur a valablement sectionné cet enseignement en modules qui constitueraient des chapitres de cours en présentiel. Et pour chaque module l'enseignant a produit trois documents en vue de faciliter l'apprentissage à distance :

- Des notes de cours
- Des exercices corrigés
- Des exercices non corrigés

L'idée principale du sectionnement de l'enseignement est de guider au mieux l'apprenant dans l'organisation de sa mémoire cognitive. En effet, il n'est pas bien d'exiger de l'apprenant une concentration trop longue, dépassant les six minutes reconnues par la plupart des experts en pédagogie, sans activité de restitution par exemple. L'apprenant est ainsi invité à ne pas rester trop longtemps sur les parties cours et exercices corrigés ; il peut y revenir en tant que de besoin. Cependant le traitement des exercices non corrigés étant une phase d'extériorisation de la connaissance emmagasinée, l'apprenant pourra et devrait y passer assez de temps de travail.

L'interaction de l'enseignant avec les apprenants est rendue possible grâce aux fora (plateformes d'enseignement à distance, groupe Whatsapp, liste de distribution par email, etc.) divers dans lesquels les apprenants sont invités à s'inscrire.

Pour finir, nous signalons que l'organisation actuelle de cet enseignement n'est pas vraiment une mise en ligne de cours, encore moins un MOOC, comme cela est fait dans la plupart des plateformes d'enseignement à distance. Nous essayons de faire une mise en ligne des ressources (dans le serveur de l'UY I), mais une mise en ligne suggérant une sorte de protocole d'apprentissage aux étudiants.

Yaoundé, le 21 mars 2020,

P.S. NGOHE-EKAM

Table des matières

PREAMBULE 2

MODULE 6 : STATIQUE GRAPHIQUE 4

I- PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE : CAS DES FORCES COPLANAIRES. 4

I-1 Enoncé du Principe Fondamental de la Statique (PFS) 4

I-2 Remarques : 4

II- PRINCIPE DES ACTIONS MUTUELLES :P.A.M. 4

III- PRINCIPE DE TRANSMISSIBILITE DES FORCES EN STATIQUE 5

III-1 Enoncé du Principe de Transmissibilité des Forces (P.T.F.) 5

III-2 Remarques : 5

IV- METHODES DE RESOLUTION GRAPHIQUE 5

IV-1 SOLIDE SOUMIS A TROIS FORCES CONCOURANTES 5

IV-2 SOLIDE SOUMIS A L'ACTION DE QUATRE FORCES ET PLUS 6

IV-3 METHODE DU DYNAMIQUE ET DU FUNICULAIRE 8

IV-4 PROBLEMES HYPERSTATIQUES. 10

V- SYSTEMES TRIANGULES OU TREILLIS, PLANS. 10

V-1 Définition 10

V-2 Hypothèses 11

V-3 Relation entre nœuds et barres 11

V-4 Résolution par la méthode des nœuds 12

V-5 Résolution par la méthode de Cremona 12

V-6 QUELQUES PROPRIETES SIMPLIFICATRICES 16

V-7 Résolution par la méthode des sections (Méthode de Ritter) 17

Module 6 : STATIQUE GRAPHIQUE

A l'issue de ce module, l'apprenant sera capable de :

- faire le choix de la méthode graphique la plus appropriée au type de problème qu'il aura à résoudre.
- résoudre sur une feuille (format A4 et autres) de problèmes de statiques pouvant se ramener au cas des actions (forces) s'exerçant toutes sur un même plan.

Notons en passant que la statique plane est particulièrement adaptée à la résolution des problèmes faisant intervenir des systèmes articulés avec barres, vérins et composants divers, ainsi que les structures de type treillis.

I- PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE : Cas des forces coplanaires.

I-1 Enoncé du Principe Fondamental de la Statique (PFS)

''Un solide indéformable en équilibre sous l'action de n forces extérieures $\vec{F}_i\left(i=1,\dots,n\right)$, reste en équilibre si et seulement si :

1°) - La somme vectorielle $\vec{R}$ de toutes ces forces extérieures est nulle

2°) - Le moment résultant $\vec{m}_I$ de toutes ces forces extérieures, en n'importe quel point I du plan, est nul.''

I-2 Remarques :

a) Ainsi équilibre $\rightarrow$ $\boxed{\begin{cases} \vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{0} \\ \vec{m}_I = \sum\limits_i m_I\left(\vec{F}_i\right) = \vec{0} \qquad \forall I \end{cases}}$

b) Dans le plan, la notion de moment scalaire ou algébrique est suffisante pour la résolution, contrairement à la statique dans l'espace où il est nécessaire d'utiliser la notion de vecteur moment.

II- PRINCIPE DES ACTIONS MUTUELLES :P.A.M.

<u>Enoncé</u> : ''Pour deux solides (S_1) et (S_2) interagissant entre eux, que ce soit par contact ou à distance, l'action exercée par (S_1) sur (S_2) est égale et opposée à l'action exercée par (S_2) sur (S_1). C'est-à-dire :

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}}$$

III- PRINCIPE DE TRANSMISSIBILITE DES FORCES EN STATIQUE

III-1 Enoncé du Principe de Transmissibilité des Forces (P.T.F.)

‘‘ L’équilibre (et de manière plus générale le mouvement) d’un solide (S) reste inchangé si la force $\vec{F}$ agissant en un point I de (S) est remplacée par une force $\vec{F}$ de même direction, même sens et même intensité, agissant en un point M quelconque appartenant au support ou ligne d’action de la force $\vec{F}$ ’’.

III-2 Remarques :

a) Le Principe de Transmissibilité des Forces (P.T.F) revient à dire que l’effet d’une force sur un solide (indéformable) dépend uniquement de sa ligne d’action, de son sens et de son intensité ; le point d’application sur la ligne d’action ne joue aucun rôle et n’a aucune influence en statique des solides.

b) Le Principe de Transmissibilité des Forces (P.T.F) n’est pas applicable en RDM (Résistance Des Matériaux)

IV- METHODES DE RESOLUTION GRAPHIQUE

IV-1 SOLIDE SOUMIS A TROIS FORCES CONCOURANTES

Règle : On sait que pour qu’un solide soumis à trois forces non parallèles soit en équilibre, les trois forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ doivent être concourantes au même point I et que la somme géométrique (ou vectorielle) des trois forces doit être nulle. Ce sont ces deux propriétés qui doivent être exploitées ; et **le problème est faisable si on n’a pas plus de trois inconnues**.

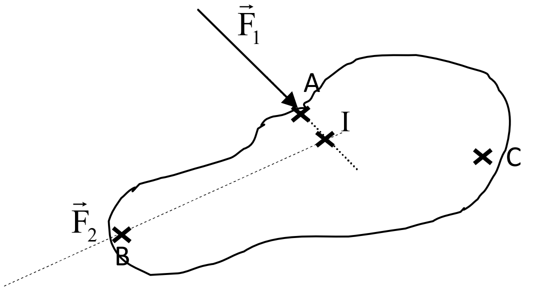
Exemple : Solide soumis à trois forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ dont on connaît les points d’application A, B, et C ; $\vec{F}_1$ est entièrement connu (direction, sens, et module), la direction de $\vec{F}_2$ est connue. On désire connaître :

- Le module de $\vec{F}_2$ (et son sens)
- La direction de $\vec{F}_3$
- Le module de $\vec{F}_3$ (et son sens)

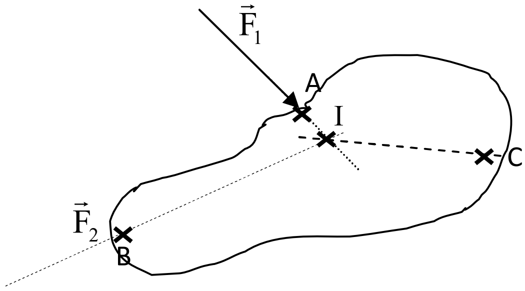
} Trois inconnues

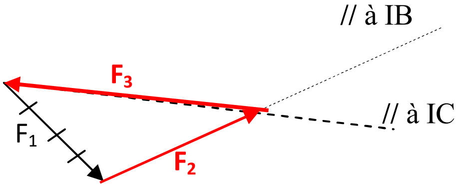
Résolution :

1) - Point de concours I



2) Direction de $\vec{F}_3$: (IC)





3) $\vec{F}_1$ tracé à une échelle connue, direction et sens respecté.
4) A partir d'une extrémité de $\vec{F}_1$ tracer une parallèle à IC
5) A partir de l'autre extrémité, tracer une parallèle à IB.
6) Les trois directions décrivent un triangle dont les côtés représentent $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$, à condition de respecter les différentes directions ; les sens des vecteurs sont ceux qui permettent de fermer entièrement le triangle du point de vue géométrique. Une simple mesure des longueurs (puis conversion en newton) et des inclinaisons relatives (par rapport aux axes du repère par exemple) permettent de décrire entièrement les actions cherchées.

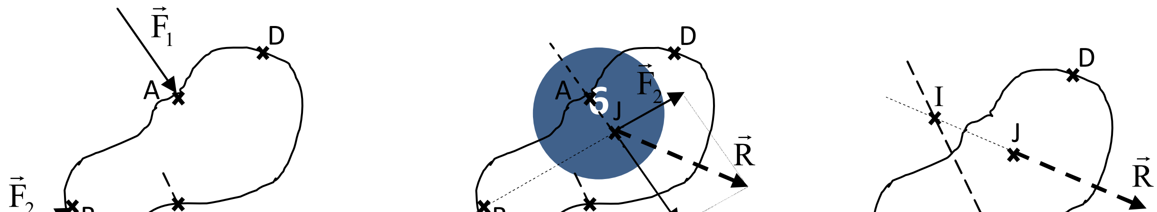
IV-2 SOLIDE SOUMIS A L'ACTION DE QUATRE FORCES ET PLUS

Si les forces ne sont pas parallèles, pour chaque équilibre étudié le nombre maximal d'inconnues qu'on peut déterminer est de trois. Au-delà, la résolution ne peut être que partielle ou impossible.

a) Résolution d'une direction et deux modules inconnus

Si deux forces seulement présentent des éléments inconnus (max trois en tout) et que toutes les autres forces sont connues :

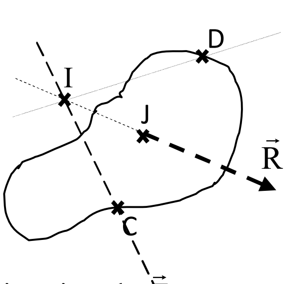
- On détermine (graphiquement) la résultante de toutes les forces connues
- On se ramène ainsi à trois forces concourantes et on résout comme au paragraphe IV-1

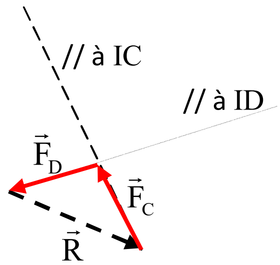


1 – Problème posé

2 – Résultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

3 – Point de concours I





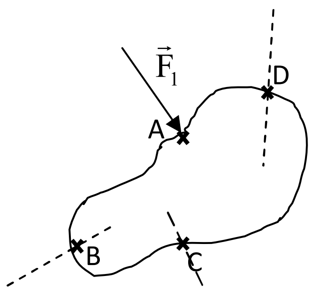
4 – Direction de $\vec{F}_D$.

5 – Fermeture du triangle et déduction des forces inconnues

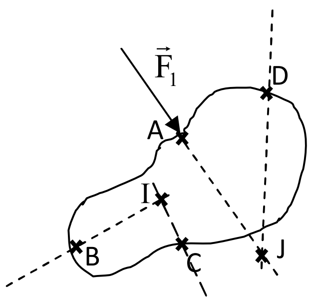
b) Résolution de trois modules inconnus (Méthode de Cullman)

C'est par exemple le cas où toutes les directions des forces sont connues, mais une seule force sur les quatre est complètement connue.

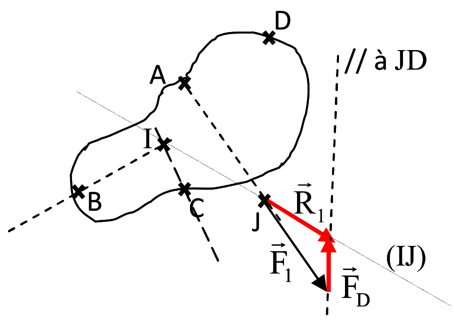
Alors, on met les quatre forces en deux groupes de deux forces concourantes (respectivement en I et J) afin de se ramener à deux résultantes $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ égales et opposées ayant la même ligne d'action (IJ).



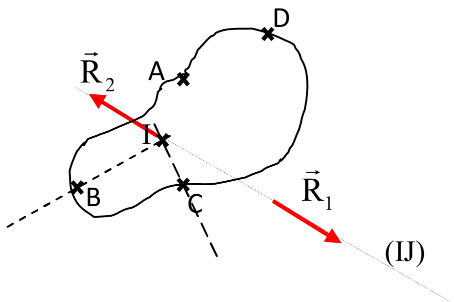
1 – Problème posé

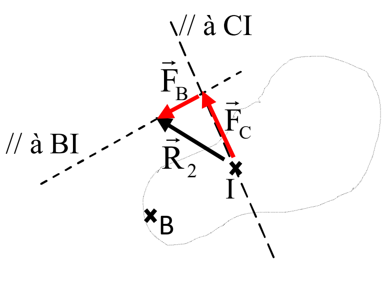


2 – Deux points de concours I et J



3 – Résultante $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_D$





4 – Résultante $\vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{R}_2 = -\vec{R}_1$.

5 – Fermeture du triangle et déduction de $\vec{F}_C$ et $\vec{F}_B$

IV-3 METHODE DU DYNAMIQUE ET DU FUNICULAIRE

Cette méthode purement graphique, est intéressante dès que le nombre de forces à manipuler est important ; elle permet de déterminer les résultantes et de résoudre les problèmes d'équilibre.

Dans cette méthode, les constructions graphiques sont effectuées en alternance sur le ***funiculaire*** (figure définissant la position géométriques forces) et sur le ***dynamique*** ou **polygone des forces** (figure définissant les intensités des forces).

a) ***Résultante d'un ensemble de forces***.

Construction : (Ordre à respecter pour le tracé)

✓ Sur le dynamique (disposé à droite et c'est par lui qu'il faut commencer): - Choisir une échelle pour tracer les forces - A partir d'un point arbitraire A_0, tracer $\vec{F}_1 = \overrightarrow{A_0A_1}(40\text{kN})$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{A_1A_2}(30\text{kN})$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{A_2A_3}(20\text{kN})$etc., jusqu'à $\vec{F}_n = \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$. - Déduire la direction (droite A_0A_n) de la résultante $\vec{R}$ et son module : $\vec{R} = \overrightarrow{A_0A_n}$ - Choisir un point P quelconque du plan, appelé pôle, non trop près des forces. - Tracer les rayons polaires PA_0, PA_1, PA_2, … PA_n, et les numéroter (0, 1, 2, …, n)	✓ Sur le funiculaire (disposé à gauche): - Tracer les côtés du funiculaire : Choisir un point arbitraire K sur la ligne d'action de $\vec{F}_1$, tracer la demi-droite numérotée 0', s'achevant à K et parallèle au rayon polaire numéroté 0 (du dynamique). A partir de K, tracer le segment 1', parallèle au côté (rayon polaire) 1, issu de K et s'arrêtant à l'intersection avec la force suivante ($\vec{F}_2$). A partir de ce point d'intersection, tracer le segment 2', parallèle au côté 2 et s'arrêtant à l'intersection avec la prochaine force, etc. n' sera la demi-droite parallèle au côté n du dynamique et issue du pont d'intersection avec la dernière force. - Déterminer I, point de concours des côtés extrêmes (0' et n') du funiculaire (I est l'intersection de 0' et 3', pour l'exemple choisi) - La résultante $\vec{R}$ passe par I, sa ligne d'action est parallèle à $\overrightarrow{A_0A_n}$; son sens et son module sont ceux de $\overrightarrow{A_0A_n}$.

Remarques :

- Il y a parallélisme des forces entre les deux figures : $\vec{F}_1$ sur le funiculaire est parallèle à $\vec{F}_1 = \overrightarrow{A_0A_1}$ sur le dynamique.

- K est choisi de manière arbitraire sur la ligne d'action de $\vec{F_1}$; seulement, une fois que K est choisi, on s'assure que 0' et 1' se coupent en K, ce qui fixe définitivement K.

b) Equilibre d'un solide sous l'action des forces parallèles

On peut résoudre si on n'a au plus deux forces inconnues.

Construction : (Ordre à respecter pour le tracé)

➢ Sur le dynamique :	➢ Sur le plan funiculaire :
- Tout d'abord déterminer la résultante $\vec{R}$ des forces connues (Module, direction et sens sur un premier dynamique, puis point d'application ou mieux de passage I sur un premier funiculaire) comme précédemment. - Choisir une échelle des forces - A partir d'un point arbitraire A_1, tracer la résultante des forces connues $\vec{R} = \overrightarrow{A_1A_2}$, ici $\vec{R} = \vec{P} = \overrightarrow{A_1A_2}$ - Choisir un pôle arbitraire P, non trop près des forces. - Tracer les rayons polaires PA_1 et PA_2 et les numéroter (1 et 2) - Aller au funiculaire - De retour du funiculaire, tracer le rayon polaire 3, issu de P, colinéaire à (IJ) et coupant la résultante $\vec{R} = \overrightarrow{A_1A_2}$ en A_3. Déduire les forces inconnues par $\overrightarrow{A_2A_3}$ et $\overrightarrow{A_3A_1}$.	- Choisir une échelle des longueurs - Choisir un point arbitraire K sur la ligne d'action de la résultante $\vec{R}$ - Tracer 1' parallèle à 1, coupant $\vec{P}$ en K ; il coupe la ligne d'action de la première force inconnue en I. - Tracer 2' parallèle à 2 ; il coupe aussi $\vec{P}$ en K, mais la ligne d'action de la deuxième force inconnue en J. - Fermer le funiculaire en traçant la droite (IJ) ; les parties extrêmes (hors du segment [I, J] de cette droite sont numérotés 0' et 3'. - Rentrer au dynamique.

Propriété :

''Pour tout solide en équilibre, les côtes extrêmes du funiculaire sont confondus'' ;
la droite extrême est appelée ***ligne de fermeture***. Et on dit que le funiculaire est fermé.

Remarque 1 ***:***

Si sur le dynamique les forces respectent l'ordre $\vec{N}_A = \overrightarrow{A_3A_1}$, $\vec{P} = \overrightarrow{A_1A_2}$ et $\vec{N}_B = \overrightarrow{A_2A_3}$ avec $\vec{N}_A + \vec{P} + \vec{N}_B = \overrightarrow{A_3A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} = \vec{0}$, alors le point A_3 est situé sur $\vec{P}$ entre A_1 et A_2 et PA_3 est le rayon polaire parallèle à la ligne de fermeture (c'est-à-dire parallèle à IJ qui est 0' et 3', tous les deux confondus)

Les côtés extrême 0' et 3' du funiculaire sont confondus avec la ligne de fermeture. Ceci implique que, par analogie, les rayons polaires 0 et 3 sont confondus avec PA_3.

Remarque 2 :

les actions du dynamique situées entre deux rayons polaires (0 et 1), (1 et 2), (2 et 3), sont celles qui, sur le funiculaire, sont situées à l'intersection des lignes portant les repères équivalents (0' et 1'), (1' et 2'), (2' et 3').

c) *Equilibre d'un solide soumis à l'action de forces concourantes*

La résolution est analogue aux précédentes seulement, pour réussir la construction du funiculaire, il faut absolument faire passer la ligne de fermeture par le point d'application A, seul point connu de la direction de A. On doit avoir au maximum deux forces inconnues.

IV-4 PROBLEMES HYPERSTATIQUES

Un solide (ou un ensemble de solides) qui possède des liaisons ou des appuis surabondants par rapport à ce qui est strictement nécessaire au maintien de l'équilibre est dit ***statiquement indéterminable*** ou ***hyperstatique***.

Pour ces solides (ou ensembles de solides), les actions exercées ne peuvent pas être déterminées à partir des seules équations de la statique (P.F.S. notamment). En résistance des matériaux (traction, flexion, torsion, etc.), plusieurs exemples de problèmes hyperstatiques sont rencontrés et résolus à l'aide d'équations supplémentaires liées aux déformations.

Exemple de système hyperstatique : une poutre ABC en appui sur trois articulations fixes A, B et C. Ceci est un problème à six inconnues statiques A_X, A_Y, B_X, B_Y, C_X, C_Y, alors qu'on ne dispose que de trois équations scalaires pour la résolution.($\vec{x} \bullet \Sigma\vec{F} = 0$; $\vec{y} \bullet \Sigma\vec{F} = 0$ et $\vec{z} \bullet \Sigma\vec{m} = 0$)
On reviendra, au module suivant, sur la notion d'hyperstatisme.

V- SYSTEMES TRIANGULES OU TREILLIS, PLANS.

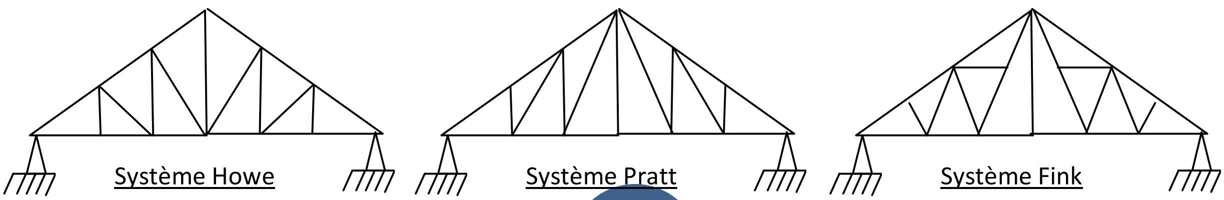
Ce paragraphe est une application générale de la statique plane.

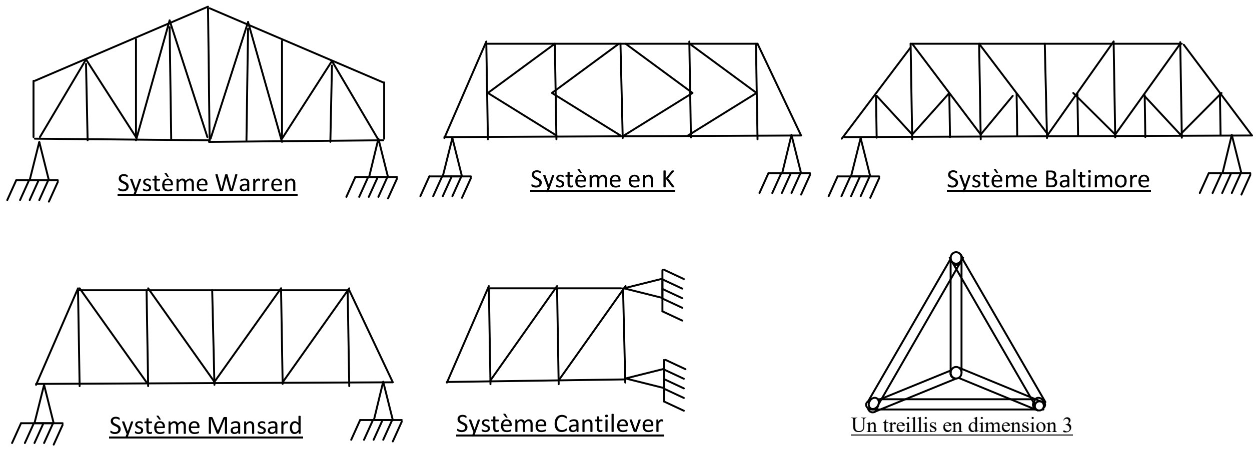
V-1 Définition

On a appelle ***treillis*** ou système triangulé, tout assemblage de barres rectilignes dont la figure de base est un triangle.

On appelle ***nœud***, le point de rencontre des barres.

On distingue plusieurs types de treillis:





V-2 Hypothèses

Par souci de facilité, l'étude des systèmes triangulés est généralement menée en faisant les ***hypothèses*** suivantes :

H_1 : Les assemblages sont supposés géométriquement invariables
H_2 : Toutes les forces sont contenues dans le plan de la structure
H_3 : Le poids des barres est négligé ; les forces agissent donc sur les nœuds uniquement
H_4 : Les nœuds sont équivalents à des liaisons pivots.

Remarque : Compte tenu des hypothèses précédentes, les barres sont uniquement soumises, soit à la traction, soit à la compression :

V-3 Relation entre nœuds et barres

Soit n le nombre de nœuds de la structure et b le nombre de barres, on distingue deux cas :

a) Cas des appuis mobiles

- Si $b = 2n-3$ la résolution est ***possible*** avec le Principe Fondamental de la Statique : le système est **isostatique**.
- Si $b < 2n-3$ la structure n'est pas rigide, il y a ***mobilité.***
- Si $b > 2n-3$ le système est ***hyperstatique***, il y a des contraintes internes.

b) Cas où la structure repose sur deux appuis fixes

- Si b = 2n-4 la résolution est ***possible*** avec le Principe Fondamental de la Statique : le système est **isostatique**.
- Si b < 2n-4 la structure n'est pas rigide, il y a ***mobilité***
- Si b > 2n-4 le système est ***hyperstatique***, il y a des contraintes internes

V-4 Résolution par la méthode des nœuds

Technique de la méthode

Afin de déterminer les actions dans toutes les barres d'une structure, on peut appliquer le Principe Fondamental de la Statique (plus précisément le Principe de la Résultante statique) pour étudier l'équilibre des nœuds successifs. On devra donc (sur le dynamique) construire une somme géométrique nulle.

Pour ce faire, on commencera par observer les nœuds, pour détecter celui ou ceux qui ont le moins d'inconnues (direction, sens et module des forces notamment) ; c'est par celui-là qu'on commence. Un nœud à plus de deux actions inconnues est à éviter.

On utilisera le fait que, si une barre relie deux nœuds (N_1 et N_2 par exemple), l'action de la barre (notée $\overrightarrow{N_1N_2}$) dans l'étude de l'équilibre de l'un des nœuds est opposée (même direction, même module ou longueur, mais sens contraire) à l'action de cette barre dans l'étude de l'équilibre du second nœud.

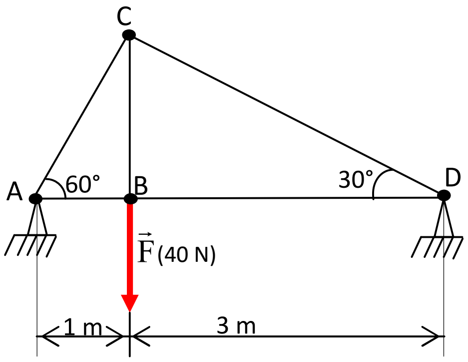
N.B. : Parfois, avant de démarrer la construction (résolution purement) graphique, il peut être nécessaire d'isoler d'abord la structure tout entière, de lui appliquer le P.R.S. par le funiculaire et le dynamique (c'est encore une méthode graphique) avant de commencer l'équilibre des nœuds successifs.

V-5 Résolution par la méthode de Cremona

a) Condition d'applicabilité :

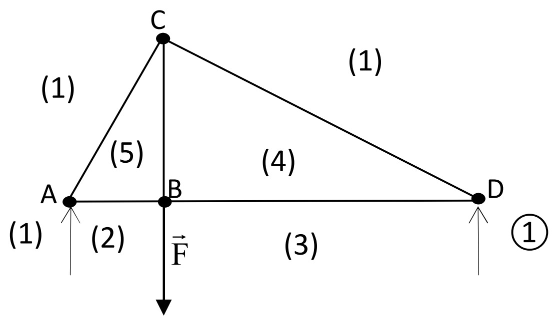
Ne pas avoir, pour un même nœud, plus de deux actions (modules) inconnues. Dans le cas contraire, isoler d'autres nœuds et, au besoin, utiliser la méthode des sections (voir plus loin), pour débloquer l'étude.

b) Technique de tracé d'un Cremona.



Nous allons présenter cette technique de tracé (par la méthode de Cremona) à travers l'exemple suivant : Soit à déterminer les efforts exercés dans toutes les barres de la structure représentée sur la figure ci-contre, où le nœud B est sollicité par un effort F=40 kN .

1 – On divise la structure en régions : les forces extérieures et les barres sont les frontières entre les différentes régions :



- La région (1) est limitée par $\vec{R}_A, \vec{R}_D, AC\ et\ \ CD$
- La région (2) est limitée par $\vec{R}_A, \vec{F}, AB$
- La région (3) est limitée par $\vec{F}, \vec{R}_D, BD$
- La région (4) est limitée par BD, DC, CB
- La région (5) est limitée par AB, BC, CA

2 – On trace le Cremona au fur et à mesure que l'on effectue l'étude graphique de l'équilibre des nœuds successifs.

N.B. : le choix d'une échelle des forces est nécessaire pour réaliser les constructions.

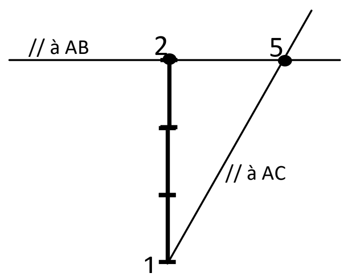
3 - Pour l'équilibre du nœud A, les régions rencontrées successivement, par rotation dans le sens trigonométrique sont : (1) – (2) – (5) – (1) ;

A ces régions correspondent (à travers les frontières) les actions suivantes :

- N_A entre les régions (1) et (2)
- La barre AB entre (2) et (5)
- La barre AC entre (5) et (1)

L'équilibre du nœud A permet le tracé des segments 1-2, 2-5 et 5-1 du graphe de la manière suivante :

- A partir d'un point arbitraire ''1'', on trace le vecteur $\overrightarrow{1-2} = \vec{N}_A$ qui a au préalable été donné par isolement de la structure tout entière et à l'aide de l'utilisation du funiculaire et du dynamique (N_A = 30 kN) .D'où les points ''1'' et ''2'' du Cremona.



- Sachant que (l'action de) la barre AB est horizontale, on trace, à partir de ''2'', une droite horizontale (notée : // à AB). On sait que ''5'' appartient à cette droite. L'action de la barre AB au nœud A sera le vecteur $\overrightarrow{2-5}$ encore inconnu, pour le moment.

- L'action de la barre AC au nœud A sera, elle, obtenue à l'aide du vecteur $\overrightarrow{5-1}$. On trace alors la parallèle à AC (notée : // à AC), issue du point déjà connu ''1''. Sachant que ''5'' appartient aussi à cette nouvelle droite, on déduit la position de ''5'' par intersection avec la première droite (notée : // à AB).

A ce stade, l'équilibre du nœud A est terminé; on peut, par mesure des longueurs (et avec l'échelle revenir aux modules en newtons) et des angles, remplir les lignes de résultats correspondant aux actions suivantes :

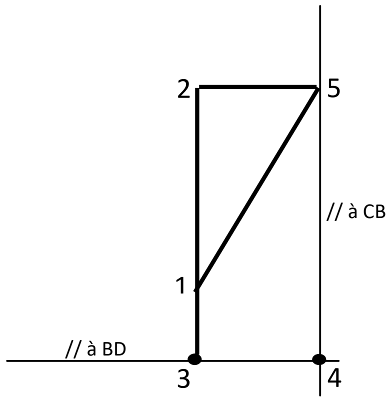
- Action de la barre AB sur le nœud A (vecteur $\overrightarrow{2-5}$)
- Action de la barre AC sur le nœud A (vecteur $\overrightarrow{5-1}$)

N.B. *:* le point 5 a été déduit par construction, en tant qu'intersection entre 2-5 et 1-5 (barre AB et barre AC) ; ce principe sera utilisé tout au long de la construction du Cremona.

4 - Pour l'équilibre du nœud B, on a les régions : (2) – (3) – (4) – (5) – (2).

Donc les actions :

- F (40 kN) entre (2) et (3) : on marque donc le point ''3'' à partir de ''2'' de sorte que $\overrightarrow{2-3} = \vec{F}$ (verticale, descendante, et de module 40 kN)
- Barre BD entre (3) et (4) : on trace la // à BD passant par ''3'' ; ''4'' y appartient.
- Barre CB entre (4) et (5) : on trace la // à CB passant par ''5'' ; ''4'' y appartient. L'intersection des deux ''parallèles'' donne le point ''4''
- Barre BA entre (5) et (2).



L'équilibre du nœud B permet le tracé des segments 2-3, 3-4, 4-5 et 5-2.

A ce stade, l'équilibre du nœud B est terminé; par mesure des longueurs et des angles, on peut remplir les lignes de résultats correspondant aux actions suivantes :

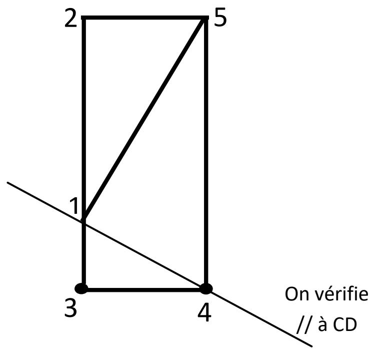
- Action de la barre BD sur le nœud B (vecteur $\overrightarrow{3-4}$)
- Action de la barre CB sur le nœud B (vecteur $\overrightarrow{4-5}$)
- Action de la barre AB sur le nœud B (vecteur $\overrightarrow{5-2}$)

5 - Pour le nœud D, on a les régions : (3) – (1) – (4) – (3) et les actions :

- N_D entre (3) et (1)
- Barre CD entre (1) et (4)
- Barre BD entre (4) et (3)

Tous ces points étant déjà marqués sur notre graphe (en fait Cremona), on obtient directement les actions y relatives :

- Appui en D : (vecteur $\overrightarrow{3-1}$) ; on vérifie qu'on a encore le résultat donné au début par le dynamique et le funiculaire



- Action de la barre CD sur le nœud D (vecteur $\overrightarrow{1-4}$)
- Action de la barre BD sur le nœud D (vecteur $\overrightarrow{4-3}$)

N.B. : Sur notre cas on vérifie 1-4 parallèle à CD

6 - Pour le nœud C, on a les régions (1) – (5) – (4) – (1) et les actions suivantes :

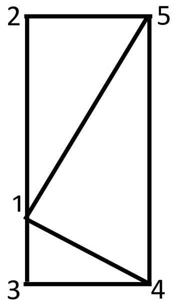
- Barre AC entre (1) et (5)
- Barre BC entre (5) et (5)

- Barre CD entre (4) et (1).

Tous ces points étant déjà marqués sur notre graphe (en fait Cremona), on obtient directement les actions y relatives :

- Action de la barre AC sur le nœud C (vecteur $\overrightarrow{1-5}$)
- Action de la barre BC sur le nœud C (vecteur $\overrightarrow{5-4}$)
- Action de la barre DC sur le nœud C (vecteur $\overrightarrow{4-1}$)

N.B. : Tous les points ayant déjà été placés après l'équilibre du nœud B, on se contente ici de bien vérifier le parallélisme …



c) Le Cremona final

Quand on a fini d'étudier l'équilibre (détermination des actions inconnues, mais aussi vérification des parallélismes prévisibles ou attendus) de tous les nœuds de la structure, on obtient le Cremona final, qui est une figure toujours fermée, débarrassée de toutes les lignes de construction.

d) Présentation des résultats

L'évolution de la construction du Cremona est accompagnée par un tableau comme celui ci-dessous, qui est rempli au fur et à mesure que les différentes actions sont déterminées.

N° ordre	Effort		Direction (angle avec l'axe des x>0)	Sens	Intensité (kN)	Sollicitation	
						Compression	Traction
1	Action de l'appui en A		90°	Bas →Haut	30		
2	Action de l'appui en B		90°	B → H	10		
	Action de la barre	**Sur le nœud**					
3	AB	A	0°	Gauche →Droite	17,33		X
4	AB	B	0°	D → G	17,33		X
5	BD	D	0°	D→G	17,33		X
6	BD	B	0°	G→D	17,33		X
7	DC	C	120°	B → H	20,00	X	
8	DC	D	120°	H → B	20,00	X	
9	AC	A	60°	H → B	33,33	X	
10	AC	C	60°	B →H	33,33	X	
11	BC	B	90°	B → H	40,00		X
12	BC	C	90°	H → B	40,00		X
13							
etc.	etc.	etc.					

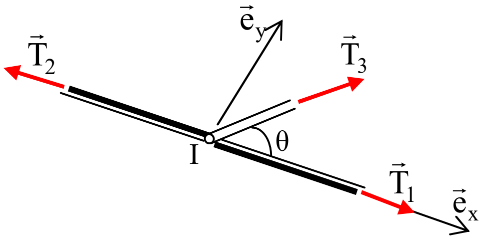
Remarque *:*

La méthode des nœuds peut être utilisée sans faire de Cremona ; cependant au-delà d'un certain nombre (sept par-là) de nœuds, le Cremona simplifie considérablement le travail et diminue le temps d'étude. Toutefois, si les barres sont trop nombreuses, on fait un recours avantageux aux logiciels de calcul.

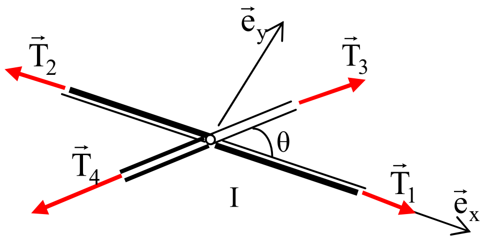
V-6 QUELQUES PROPRIETES SIMPLIFICATRICES

a) Nœud non chargé, à trois barres (non perpendiculaires) dont deux sont colinéaires

Lorsqu'il n'y a pas de charge sur un nœud à trois barres dont deux sont colinéaires, les efforts dans les barres colinéaires sont directement opposées ($\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$) et l'effort dans la troisième barre est nul($\vec{T}_3 = \vec{0}$).



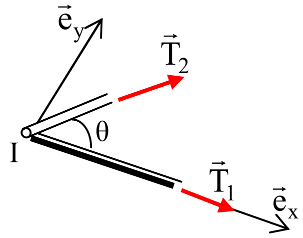
b) Nœud non chargé à quatre barres colinéaires deux à deux



Lorsqu'il n'y a pas de charge extérieure à un nœud à quatre barres colinéaires deux à deux, les actions colinéaires sont opposées deux à deux.

c) Nœud non chargé à deux barres non colinéaires

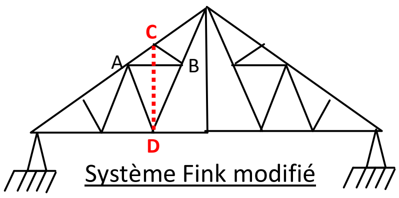
Lorsqu'il n'y a pas de charge extérieure à un nœud à deux barres non colinéaires, les efforts dans ces barres sont nuls.



d) Les barres de substitution

Il arrive, dans certaines situations, que le tracé des crémonas ne soit pas directement possible.

Afin de rendre possible les tracés, on peut utiliser ***une barre de substitution*** à la place de deux ou plusieurs barres de la structure initiale ; et dans ce cas, la seule condition à vérifier, c'est ***que la structure conserve sa rigidité.***



Exemple : pour la structure Fink légèrement modifiée ci-dessus, les barres AB et BC peuvent être remplacées par la barre CD, le temps de calculer les actions sur toutes les autres barres.

V-7 Résolution par la méthode des sections (Méthode de Ritter)

a) Intérêt :

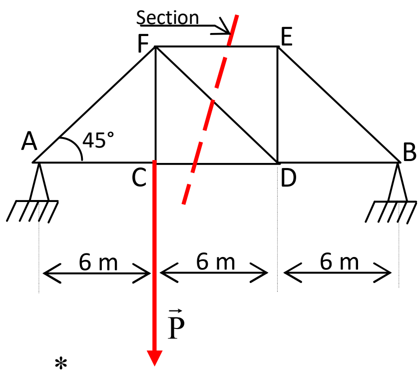
La méthode des sections ou méthode de Ritter est avantageuse surtout lorsqu'on recherche une action (éventuellement deux ou trois) s'exerçant dans l'une des barres d'une structure. Mais dès que le nombre d'actions recherchées est élevé, les sections deviennent complexes.

b) Principe de la méthode :

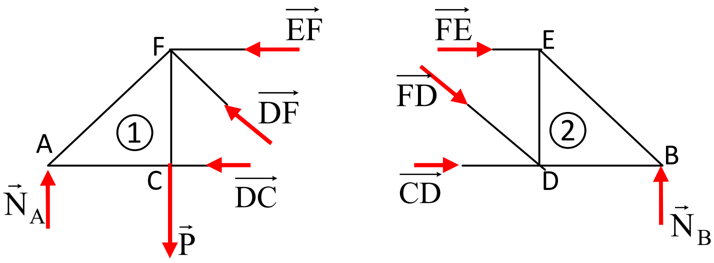
- Effectuer dans la structure une coupure (section) fictive passant par la barre dont on veut déterminer les actions, cette coupure engageant au plus trois barres non sécantes (c.à.d. non concourantes en un même nœud).
- Etudier ensuite l'équilibre des (deux) sous systèmes ainsi obtenus (surtout T.M.S. en un point de concours de deux des trois barres coupées).

c) Exemple :

Soit à déterminer, pour le système ci-contre, l'action exercée dans la barre FD, l'étude de l'équilibre de l'ensemble, avec P = 18 kN, ayant donné les réactions verticales $N_A = 12\ \text{kN}$ $N_B = 6\ \text{kN}$.



- Une section oblique fictive coupant les barres FE, FD et CD, non sécantes divise la structure en deux sous-systèmes :



* Le système 1 subit l'action de cinq forces extérieures : $\vec{N}_A$ et $\vec{p}$ qui sont entièrement connues et $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{CD}$ dont les directions sont connues.

* Le système 2 subit l'action de 4 forces extérieures : $\vec{N}_B$ qui est entièrement connue et $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DC}$ dont les directions sont connues.

Dans les deux sous-systèmes, on est en présence de trois modules inconnus, la résolution est bien possible. Et dans le cas de la résolution graphique, on utilisera absolument la méthode de Cullman (confère paragraphe IV-2-b).

Pour la résolution, en constatant que le système deux ② a moins de forces extérieures, on le choisira pour une résolution plus facile.

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{FE} + \vec{N}_B = \vec{R}_1 & \text{appliqué en I (point de concours)} \\ \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FD} = \vec{R}_2 & \text{appliqué en } J \equiv D \text{ (point de concours)} \end{cases}$$

Et $\vec{R}_2 = -\vec{R}_1$ ceci implique que les deux sont dirigées suivant la droite (IJ) et opposés entre eux

Il vient que la barre FD est soumise à une compression de 8,5 kN.

N.B : le polygone des forces permet d'obtenir aussi directement

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{DC}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{FE}\right\| = 12 \text{ kN}}$$