

SOMMAIRE

CHAPITRE 1 GENERALITES SUR LES TORSEURS :	10
I- DEFINITIONS.....	11
II- NOTATION DES TORSEURS	11
II-1 <i>Notation vectorielle</i>	11
II-2 <i>Notation scalaire ou plückérienne</i>	12
II-3 <i>Notation duale</i>	12
III- PROPRIETES DES TORSEURS	12
III-1 <i>Equiprojectivité du champ des moments</i>	12
III-2 <i>Somme de deux torseurs</i>	13
III-3 <i>Egalité de deux torseurs</i>	13
IV- OPERATIONS SUR LES TORSEURS.....	14
IV-1 <i>Addition de deux torseurs en un point P</i>	14
IV-2 <i>Multiplication d'un torseur par un scalaire</i>	14
IV-3 <i>Produit scalaire de deux torseurs</i>	15
IV-4 <i>Produit torsoriel de deux torseurs</i>	16
IV-5 <i>Produit vectoriel de deux torseurs</i>	16
IV-6 <i>Différentielle d'un torseur</i>	16
IV-7 <i>Le carré d'un torseur</i>	17
V- TYPOLOGIE DES TORSEURS	17
V-1 <i>Le torseur nul</i> :.....	17
V-2 <i>Le torseur à moment ou torseur couple</i> :	18
V-3 <i>Le torseur à résultante ou torseur glisseur</i> :	18
VI- ELEMENTS CENTRAUX D'UN TORSEUR	18
VI-1 <i>Définitions</i>	18
VI-2 <i>Détermination analytique de l'axe central d'un torseur</i>	19
VI-3 <i>Propriétés</i>	20
VII- TORSEURS ASSOCIES A DES CHAMPS DE VECTEURS	21
VII-1 <i>Torseur associé à un champ discret fini de vecteurs</i>	22
VII-2 <i>Torseur associé à un champ continu de vecteurs</i>	22
VIII- EXERCICES RESOLUS DE GENERALITES SUR LES TORSEURS	23
VIII-1 <i>Exercice résolu n°1 : Coordonnées scalaires et axe central d'un [T]</i>	23
VIII-2 <i>Exercice résolu n°2 : Détermination d'un repère de réduction à partir des coordonnées plückériennes d'un [T]</i>	26
VIII-3 <i>Exercice résolu n°3 : torseur continu</i>	27
IX- JULIUS PLÜCKER - BIOGRAPHIE	29
CHAPITRE 2 LES TORSEURS UTILISES EN MECANIQUE.....	31
I- LE TORSEUR DES EFFORTS (OU DES ACTIONS MECANIQUES) APPLIQUES :	31
I-1 <i>Cas d'une distribution discrète d'effort</i>	31
I-2 <i>Cas d'une distribution continue d'effort</i>	32
II- LE TORSEUR DISTRIBUTEUR DES VITESSES OU TORSEUR CINEMATIQUE :	32
II-1 <i>Définition</i> :	32
II-2 <i>Remarques</i> :	33
III- LE TORSEUR DES QUANTITES DE MOUVEMENTS OU TORSEUR CINETIQUE	33
III-1 <i>Définition</i> :	33

III-2	<i>Expression :</i>	34
III-3	<i>Remarques :</i>	35
IV-	LE TORSEUR DES QUANTITES D'ACCELERATION OU TORSEUR DYNAMIQUE :	35
IV-1	<i>Définition :</i>	35
IV-2	<i>Remarques :</i>	36
V-	EXERCICES RÉSOLUS SUR LES TORSEURS UTILISÉS EN MÉCANIQUE	36
V-1	<i>Exercice résolu n°1 : torseur d'action mécanique à distribution continu d'effort</i>	36
V-2	<i>Exercice résolu n°2 : torseur distributeur des vitesses d'un solide</i>	37
V-3	<i>Exercice résolu n°3 : détermination du torseur cinétique d'un solide</i>	38
V-4	<i>Exercice résolu n°4 : détermination du torseur dynamique d'un solide en mouvement</i>	38
CHAPITRE 3 ROLE DES TORSEURS EN MECANIQUE		40
I-	ETUDE CINEMATIQUE DES MOUVEMENTS	40
I-1	<i>Equiprojectivité du champ des vitesses d'un solide</i>	40
I-2	<i>Le torseur cinématique d'un solide</i>	40
I-3	<i>Mouvements particuliers simples de solides</i>	42
a)	Le mouvement de translation d'un solide	42
b)	Le mouvement de rotation d'un solide	43
c)	Le mouvement hélicoïdal	44
d)	Le mouvement plan sur plan de solides	44
e)	Mouvement le plus général d'un solide	47
II-	ETUDE DYNAMIQUE DES MOUVEMENTS	50
II-1	<i>LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE</i>	50
II-2	<i>LES THEOREMES GENERAUX DE LA MECANIQUE</i>	50
a)	Le théorème de la résultante dynamique	50
b)	Le théorème du moment dynamique	51
II-3	<i>LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE POUR UN REFERENTIEL NON GALILEEN : les torseurs des forces d'inertie</i>	51
III-	CONSIDERATIONS ENERGETIQUES	52
III-1	<i>LA PUSSANCE DES EFFORTS EXTERIEURS</i>	52
a)	Puissance dans le cas d'une particule mobile (un point matériel)	52
b)	Puissance dans le cas d'un ensemble discret de points matériels	52
c)	Puissance des efforts extérieurs s'appliquant sur un solide	52
III-2	<i>L'ENERGIE CINETIQUE</i>	54
a)	L'énergie cinétique d'un point matériel	54
b)	L'énergie cinétique d'un ensemble fini de points matériels	54
c)	L'énergie cinétique d'un solide	54
d)	Théorème de l'Energie Cinétique	55
IV-	ETUDE DES SOLIDES EN EQUILIBRE	57
IV-1	<i>LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (P.F.S.)</i>	57
IV-2	<i>PRINCIPE DE TRANSMISSIBILITE DES FORCES (P.T.F.) EN STATIQUE</i>	57
V-	EXERCICES RÉSOLUS SUR LE RÔLE DES TORSEURS EN MÉCANIQUE	58
V-1	<i>Exercice résolu n°1 : utilisation de la FFCS (torseur cinématique)</i>	58
V-2	<i>Exercice résolu n°2 : utilisation du PFS (torseur des efforts appliqués)</i>	59
CHAPITRE 4 MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES		64
I-	SYSTEME MATERIEL A MASSE CONSERVATIVE	64
I-1	<i>Système matériel</i>	64
I-2	<i>Système matériel à masse conservative</i>	64
I-3	<i>Hypothèse de continuité de la matière</i>	65
I-4	<i>Milieu extérieur</i>	65

II-	CENTRE D'INERTIE	65
II-1	<i>Centre d'inertie dans le cas d'une répartition discrète de masse</i>	65
a)	Définition	65
b)	Détermination	66
c)	Remarque : interprétation du centre de masse	66
II-2	<i>Centre d'inertie dans le cas d'un solide (distribution continue de masse).....</i>	67
a)	Position du centre d'inertie dans un référentiel (R_i) quelconque	67
b)	Vitesse du centre d'inertie dans un référentiel (R_i) quelconque	67
c)	Accélération du centre d'inertie dans un référentiel (R_i) quelconque	68
II-3	<i>Centre d'inertie d'un ensemble de sous-systèmes disjoints : Cas d'un partitionnement.....</i>	68
II-4	<i>Centre d'inertie d'un système admettant un élément de symétrie</i>	68
II-5	<i>Théorèmes de Guldin.....</i>	68
a)	Le premier théorème de Guldin.....	69
b)	Le deuxième théorème de Guldin.....	69
III-	ACTIONS MECANIQUES	70
III-1	<i>Définition des actions mécaniques</i>	70
III-2	<i>Classification des actions mécaniques</i>	71
a)	Actions mécaniques à distance	71
b)	Actions mécaniques de contact	72
IV-	MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES.....	72
IV-1	<i>Modélisation locale</i>	73
IV-2	<i>Modélisation globale.....</i>	73
V-	QUELQUES ACTIONS MECANIQUES COURANTES.....	74
V-1	<i>Action mécanique de pesanteur.....</i>	74
a)	Modélisation locale	74
b)	Modélisation globale	74
V-2	<i>Action mécanique de contact surfacique</i>	75
a)	Modélisation locale	75
b)	Modélisation globale	75
c)	Lois de Coulomb	76
V-3	<i>Action mécanique de contact ponctuel</i>	78
a)	Torseur d'action mécanique	79
b)	Torseur cinématique	80
c)	Analogie avec les lois de Coulomb	81
V-4	<i>Torseurs d'actions mécaniques exercées par les liaisons usuelles</i>	83
a)	Torseurs cinématiques relatifs dus à certaines liaisons usuelles	83
b)	Torseurs d'efforts imposés par les liaisons normalisées sans frottement	94
VI-	EXERCICES RESOLUS DU CHAPITRE 4 : MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES.....	100
VII-	PAUL GULDIN - BIOGRAPHIE	103
VIII-	CHARLES-AUGUSTIN COULOMB - BIOGRAPHIE	105
CHAPITRE 5 PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE.....	108	
I-	DEFINITIONS.....	108
II-	THEOREMES GENERAUX DE LA STATIQUE	109
II-1	<i>Enoncé du principe fondamental de la statique</i>	109
II-2	<i>Condition nécessaire et suffisante d'équilibre</i>	109
II-3	<i>Théorème de la résultante statique</i>	109
II-4	<i>Théorème du moment statique</i>	110
II-5	<i>Théorème des Actions Mutuelles</i>	110
II-6	<i>Application à un solide en équilibre sous l'action de deux ou trois forces.....</i>	111
a)	Solide soumis à trois forces	111
b)	Solides soumis à deux forces	112

III- SCHÉMA D'ARCHITECTURE D'UN MÉCANISME	112
III-1 Graphe des liaisons (du mécanisme)	113
III-2 Schéma cinématique (du mécanisme)	114
III-3 Graphe des liaisons minimal et schéma cinématique minimal	114
III-4 Schéma d'architecture	115
IV- LIAISON ÉQUIVALENTE	118
IV-1 Notations	118
IV-2 Liaison équivalente de n liaisons en parallèle	119
IV-3 Liaison équivalente de n liaisons en série	121
V- METHODE DE RÉSOLUTION DES PROBLÈMES EN STATIQUE	122
VI- EXERCICES RÉSOLUS SUR LE PFS	124
VI-1 Exercice résolu n°1 : Torseur d'action exercé pour tenir une poutre (ISTGOV 260507)	124
VI-2 Exercice résolu n°2 : Tension d'un câble supportant une barre	127
CHEPITRE 6 STATIQUE GRAPHIQUE	130
I- PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE : CAS DES FORCES COPLANAIRES	130
I-1 Enoncé du Principe Fondamental de la Statistique (PFS)	130
I-2 Remarques	130
II- PRINCIPE DES ACTIONS MUTUELLES : P.A.M	131
III- PRINCIPE DE TRANSMISSIBILITÉ DES FORCES EN STATIQUE	131
III-1 Enoncé du Principe de Transmissibilité des Forces (P.T.F.)	131
III-2 Remarques	131
IV- MÉTHODES DE RÉSOLUTION GRAPHIQUE	132
IV-1 SOLIDE SOUMIS À TROIS FORCES CONCOURANTES	132
IV-2 SOLIDE SOUMIS À L'ACTION DE QUATRE FORCES ET PLUS	133
IV-3 MÉTHODE DU DYNAMIQUE ET DU FUNICULAIRE	134
IV-4 PROBLÈMES HYPERSTATIQUES	138
V- Systèmes triangulaires ou treillis, plans	139
V-1 Définition	139
V-2 Hypothèses	140
V-3 Relation entre nœuds et barres	140
a) Cas des appuis mobiles	140
b) Cas où la structure repose sur deux appuis fixes	141
V-4 Résolution par la méthode des nœuds	141
a) Technique de la méthode	141
b) Exemple	141
V-5 Résolution par la méthode de Cremona	143
a) Principe	143
b) Condition d'applicabilité	143
c) Technique de tracé d'un Cremona	144
d) Le Cremona final	146
e) Présentation des résultats	146
V-6 QUELQUES PROPRIÉTÉS SIMPLIFICATRICES	148
a) Nœud non chargé, à trois barres (non perpendiculaires) dont deux sont colinéaires	148
b) Nœud non chargé à quatre barres colinéaires deux à deux	148
c) Nœud non chargé à deux barres non colinéaires	149
d) Les barres de substitution	149
V-7 Résolution par la méthode des sections (Méthode de Ritter)	149
a) Intérêt	150
b) Principe de la méthode	150
c) Exemple	150

VI	<i>Exercice d'application :</i>	151
VI	LUIGI CREMONA - BIOGRAPHIE	153
CHAPITRE 7 HYPERSTATISME ET MOBILITE DES MECANISMES		154
I	HYPOTHESES	154
II	GRAPHE DES LIAISONS ET SCHEMA CINEMATIQUE D'UN MECANISME.....	154
II-1	<i>Graphe de liaisons (du mécanisme).....</i>	155
II-2	<i>Schéma cinématique (du mécanisme).....</i>	155
III	DUALITE ENTRE TORSEUR D'ACTION MECANIQUE TRANSMISSIBLE ET TORSEUR CINEMATIQUE D'UNE LIAISON.....	155
III-1	<i>INCONNUES DE LIAISON ET INCONNUES CINEMATIQUES.....</i>	155
III-2	<i>DUALITE ENTRE LES TORSEURS CINEMATIQUE ET D'ACTION MECANIQUE TRANSMISSIBLE</i>	156
a)	Puissance des actions mutuelles d'une liaison.....	156
b)	Equation algébrique de liaison.....	157
c)	Relation de dualité entre coordonnées plückériennes des torseurs $[F]$ et $[V]$	157
IV	LIAISON EQUIVALENTE	158
IV-1	<i>Définition.....</i>	158
IV-2	<i>Notations.....</i>	158
IV-3	<i>Association de liaisons en parallèle.....</i>	159
IV-4	<i>Association de liaisons en série</i>	160
IV-5	<i>Relation entre nombre d'inconnues cinématique et nombre d'inconnues de liaison indépendantes</i>	162
V	STRUCTURE DES MECANISMES	163
V-1	<i>Mécanisme en chaîne ouverte.....</i>	163
V-2	<i>Mécanisme en chaîne fermée simple</i>	164
V-3	<i>Mécanisme en chaîne fermée complexe</i>	165
VI	DEGRE D'HYPERSTATISME D'UN MECANISME	166
VI-1	<i>Système d'équations linéaires d'action mécanique d'un mécanisme</i>	166
VI-2	<i>Inconnues isostatiques et Inconnues hyperstatiques d'un mécanisme</i>	166
VI-3	<i>Définition du degré d'hyperstatisme d'un mécanisme</i>	167
VII	DEGRE DE MOBILITE D'UN MECANISME	170
VII-1	<i>Système d'équations linéaires de la cinématique d'un mécanisme</i>	170
VII-2	<i>Inconnues cinématiques principales et inconnues cinématiques supplémentaires d'un mécanisme</i>	171
VII-3	<i>Définition du degré de mobilité d'un mécanisme.....</i>	172
VII-4	<i>Application :</i>	172
VIII	RELATION ENTRE DEGRES D'HYPERSTATISME ET DE MOBILITE	174
VIII-1	<i>Dualité des études statique et cinématique d'un mécanisme</i>	174
VIII-2	<i>Relation entre degrés d'hyperstatisme et de mobilité</i>	175
VIII-3	<i>Mobilité utile et mobilité interne.....</i>	176

BIBLIOGRAPHIE

ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE

1°) J-D LARRALDE, Mécanique : statique . Collection des industries mécaniques,
édition Masson, tome 1 et tome 2

2°) JOSE-PHILIPPE PEREZ, Mécanique : point matériel, solide, fluides, Ed Masson

3°) JEAN LOUIS FANCHON, Guide de mécanique en sciences et technologies
industrielles , Ed Nathan

4°) YVES BREMONT, Mécanique 2 : statique, Ed ellipses

5°) PIERRE AGATI, Mécanique du solide en applications industrielles, Ed Dunod

6°) Jean-Philippe ANSERMET, Mécanique

Chapitre 1 GENERALITES SUR LES TORSEURS

Lors de nos premiers pas dans l'usage de la mathématique, nous avons tous manipulé des nombres. Au début (école primaire), c'était des nombres entiers (entiers naturels, donc l'ensemble IN) ; puis nous sommes passés aux fractions (fractions rationnelles, l'ensemble Q). Au niveau du Secondaire, il a été introduit des entiers relatifs (l'ensemble Z). Puis l'existence des nombres irrationnels a conduit à l'introduction des nombres réels (l'ensemble IR). L'Algèbre nous fait appeler tous ces nombres, des scalaires (éléments d'un corps, le corps des nombres réels). Mais quand on a évolué avec l'Algèbre, on a découvert qu'en associant des scalaires d'une certaine façon, par exemple en croisant deux axes de nombres réels, on arrivait à obtenir des grandeurs physiques d'un nouveau type, appelés des vecteurs, qui faciliteraient davantage les calculs et qui, pour le physicien, pourraient mieux représenter certaines grandeurs dont la traduction sous forme de scalaires uniquement n'autorisait pas toujours une bonne description ou interprétation. C'est le cas notamment de la vitesse qui a cessé d'être juste un scalaire, mais qu'il a fallu rendre vectorielle afin de pouvoir expliquer qu'un mouvement circulaire uniforme, par exemple, admette une accélération, bien que sa vitesse (scalaire) soit constante. Un vecteur, cela va sans dire, était dès lors représenté par un certain nombre de scalaires, ses composantes dans une base vectorielle. Plusieurs lois de la physique (loi d'Ohm, loi fondamentale de la dynamique, loi de Fourier, etc.), en passant de leur forme scalaire à la forme vectorielle se sont vues ainsi améliorées, voire généralisées, permettant par la même occasion de mieux interpréter certains phénomènes s'y rapportant. Après les vecteurs, l'Algèbre a continué de fournir aux physiciens d'autres outils parmi lesquels les torseurs qui, eux, ont pour composantes ou coordonnées des vecteurs. Avec les torseurs, de plus en plus de phénomènes physiques sont plus aisément interprétés et les lois qui les traduisent de moins en moins complexes. Par exemple l'équilibre d'un solide est désormais réalisé par la nullité d'un seul torseur, son torseur des forces extérieures alors qu'avec les vecteurs, cet équilibre était conditionné par la nullité de deux vecteurs.

Les torseurs, en réalité, sont des outils de modélisation (représentation et calcul), analogues aux vecteurs, utilisés pour :

- Représenter et manipuler des actions mécaniques,
- Caractériser le mouvement d'un solide,
- Formuler dans leur généralité des lois de la mécanique (lois de Newton notamment),
- Déterminer une puissance d'actions mécaniques,
- etc.

Le domaine d'utilisation privilégié des torseurs concerne les études des mécanismes dans l'espace, c'est-à-dire l'agencement (ou association) de plusieurs solides (ou pièces mécaniques), nécessitant des analyses détaillées en statique, en cinématique, en cinétique et en dynamique.

À l'issue de ce chapitre, l'apprenant devrait être capable :

- De définir correctement un torseur
- D'écrire convenablement (on parle de réduire) un torseur en un point ou dans un repère
- D'effectuer toute opération (pseudovectorielle) entre les torseurs
- De décrire la typologie générale des torseurs
- De déterminer un point central, l'axe central, le moment central et le pas réduit d'un torseur.

I- DEFINITIONS

On appelle **torseur**, la donnée de deux vecteurs dont :

- le premier est libre, noté \vec{R} et appelé **résultante (ou somme vectorielle, ou encore somme géométrique) du torseur**. En tant que vecteur libre, il a la même valeur en tout point de l'espace affine \mathcal{E} . C'est le **premier invariant du torseur**.
- le second est lié, donc prend des valeurs qui dépendent de la position P dans l'espace \mathcal{E} ; noté \vec{M}_P , il est et appelé **champ des moments du torseur**.

Les deux vecteurs étant en outre liés par la relation suivante appelée la **propriété fondamentale du torseur** (d'éléments \vec{R} et \vec{M}_P) :

$$\vec{M}_P = \vec{M}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{R} \quad \forall P, Q \in \mathcal{E}.$$

\vec{R} et \vec{M}_P sont appelés **éléments de réduction du torseur au point P**

II- NOTATION DES TORSEURS

II-1 Notation vectorielle.

Un torseur $[T]$ d'éléments de réduction \vec{R} et \vec{M}_P en un point P est généralement noté : $[T]_P = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_P \end{Bmatrix}$; c'est la **notation vectorielle (mieux tensorielle) du torseur**.
 \vec{R} et \vec{M}_P sont alors appelés les **coordonnées vectorielles** du torseur au point P.

II-2 Notation scalaire ou plückérienne.

Mais lorsque \vec{R} et \vec{M}_P sont exprimés dans une même base $B(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ par exemple si $\vec{R} = X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y + Z\vec{e}_z$ et $\vec{m}_P = L\vec{e}_x + M\vec{e}_y + N\vec{e}_z$, on peut aussi noter le torseur de la manière suivante au point P :

$$[T] = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{P(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{P(B)} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(P, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)}$$

X, Y, Z, L, M, et N sont les coordonnées scalaires du torseur en P dans la base (B) ; on les appelle aussi coordonnées plückériennes. On parle alors de la notation scalaire ou plückérienne du torseur.

II-3 Notation duale.

En **notation duale**, ce torseur peut s'écrire $[T]_P = \vec{R} + \varepsilon \vec{M}_P$ où ε est appelé **nombre dual absorbant** ou mieux **nilpotent**. La propriété fondamentale $\varepsilon^{n+2} = 0$ permet de faciliter les calculs entre torseurs.

III- PROPRIETES DES TORSEURS

Nous présentons, ici quelques propriétés immédiates relevant de la définition même des torseurs.

III-1 Equiprojectivité du champ des moments

$$\boxed{\vec{M}_P \cdot \overrightarrow{PQ} = \vec{M}_Q \cdot \overrightarrow{PQ}} \quad \forall (P, Q) \in \mathcal{E}^2.$$

En effet : $\vec{M}_P = \vec{M}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{R}$

$$\rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{M}_P = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{M}_Q + \underbrace{\overrightarrow{PQ} \cdot (\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{R})}_{\{ \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}, \vec{R} \}} \text{ produit mixte nul}$$

d'où $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{M}_P = \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{M}_Q$ c.q.f.d

Ainsi : le champ des moments d'un torseur est équiprojectif. On admettra réciproquement que tout champ vectoriel équiprojectif est le champ des moments d'un torseur.

Remarque : Un solide (indéformable) est caractérisé par le fait que la distance entre deux de ses points quelconques A et B est constante. On peut donc écrire :

$$\forall A, B \in (S), d(A, B)^2 = \|\overline{AB}\|^2 = \overline{AB} \bullet \overline{AB} = C^e$$

$$\rightarrow 0 = \frac{d}{dt} C^e = \frac{d}{dt} (\|\overline{AB}\|^2) = 2 \overline{AB} \bullet \frac{d}{dt} \overline{AB}$$

$$\text{c.à.d. : } \rightarrow 0 = \overline{AB} \bullet \frac{d}{dt} \overline{AB} = \overline{AB} \bullet \frac{d}{dt} (\overline{AO} + \overline{OB}) = \overline{AB} \bullet \left[\frac{d}{dt} \overline{AO} + \frac{d}{dt} \overline{OB} \right]$$

$$\rightarrow 0 = \overline{AB} \bullet \left[\frac{d}{dt} \overline{OB} - \frac{d}{dt} \overline{OA} \right] = \overline{AB} \bullet [\bar{V}(B) - \bar{V}(A)]$$

$$\rightarrow \overline{AB} \bullet \bar{V}(B) = \overline{AB} \bullet \bar{V}(A). D'où l'équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide$$

Ainsi, le champ des vitesses d'un solide est un champ des moments d'un torseur, le torseur distributeur des vitesses du solide. On verra plus loin que la résultante géométrique de ce torseur est le vecteur rotation instantanée du solide.

III-2 Somme de deux torseurs

$$\begin{aligned} [T_1] &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 \\ \vec{\mathcal{M}}_{1P} \end{array} \right\} \\ [T_2] &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_2 \\ \vec{\mathcal{M}}_{2P} \end{array} \right\} \end{aligned} \Rightarrow [T_1] + [T_2] = [T] \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{R} \\ \vec{\mathcal{M}}_{1P} + \vec{\mathcal{M}}_{2P} = \vec{\mathcal{M}}_P \end{array} \right\}; C'est un torseur, le torseur somme.$$

En effet, en notation duale,

$$[T_1]_p = \vec{R}_1 + \varepsilon \vec{\mathcal{M}}_{1P}$$

$$[T_2]_p = \vec{R}_2 + \varepsilon \vec{\mathcal{M}}_{2P}$$

$$[T_1]_p + [T_2]_p = (\vec{R}_1 + \vec{R}_2) + \varepsilon (\vec{\mathcal{M}}_1 + \vec{\mathcal{M}}_2) \Rightarrow [T_1]_p + [T_2]_p = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{\mathcal{M}}_{1P} + \vec{\mathcal{M}}_{2P} \end{array} \right\} \text{c.q.f.d.}$$

Nota : avant de faire toute opération entre deux torseurs, il faut au préalable les réduire au même point ; et si en plus on veut utiliser leurs coordonnées vectorielles, il faut exprimer ceux-ci dans la même base.

III-3 Égalité de deux torseurs

$$[T_1] = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{\mathcal{M}}_{1,p} \end{Bmatrix} [T_2] = \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{\mathcal{M}}_{2,p} \end{Bmatrix} \text{ alors : } [T_1] = [T_2] \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \exists O \text{ t.q. } \vec{\mathcal{M}}_{1,0} = \vec{\mathcal{M}}_{2,0} \end{cases}$$

Remarque : $[T_1] = [T_2] \Rightarrow \forall P \in S \vec{\mathcal{M}}_{1,p} = \vec{\mathcal{M}}_{2,p}$

$$\text{En effet, } \vec{R}_1 = \vec{R}_2 = \vec{R} \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_{1,0} = \vec{\mathcal{M}}_{2,0} = \vec{\mathcal{M}}_0 \rightarrow \begin{cases} \vec{\mathcal{M}}_{1,p} = \vec{\mathcal{M}}_{1,0} + \vec{PO} \wedge \vec{R}_1 = \vec{\mathcal{M}}_0 + \vec{PO} \wedge \vec{R} \\ \vec{\mathcal{M}}_{2,p} = \vec{\mathcal{M}}_{2,0} + \vec{PO} \wedge \vec{R}_2 = \vec{\mathcal{M}}_0 + \vec{PO} \wedge \vec{R} \end{cases}$$

D'où : $\vec{\mathcal{M}}_{1,p} = \vec{\mathcal{M}}_{2,p}$. Ainsi, si deux torseurs sont égaux en un point, ils seront égaux en tout point.

IV- OPERATIONS SUR LES TORSEURS

Dans une expression duale de la forme générale $a + \epsilon.b$, a est dit **partie réelle** et b est appelée **partie duale du nombre dual** $+ \epsilon.b \Rightarrow$ la résultante \vec{R} est la partie réelle du torseur et le moment $\vec{\mathcal{M}}$ sa partie duale.

La propriété fondamentale des nombres duals, à savoir $\epsilon^2 = 0$ (et par là $\epsilon^n = 0$, $n > 1$) permet d'effectuer, avec aisance, quantité d'opérations sur les torseurs.

IV-1 Addition de deux torseurs en un point P

$$\begin{aligned} [T_1] &= \vec{R}_1 + \epsilon \vec{\mathcal{M}}_1 \\ [T_2] &= \vec{R}_2 + \epsilon \vec{\mathcal{M}}_2 \end{aligned} \Rightarrow [T_1] + [T_2] = (\vec{R}_1 + \vec{R}_2) + \epsilon(\vec{\mathcal{M}}_1 + \vec{\mathcal{M}}_2); \text{ c'est encore un torseur, le torseur somme.}$$

Application : On verra plus loin que les torseurs distributeurs des vitesses des solides montés en série les uns après les autres, s'additionnent.

IV-2 Multiplication d'un torseur par un scalaire

$$k[T] = k(\vec{R} + \epsilon \vec{\mathcal{M}}) = k\vec{R} + \epsilon k \vec{\mathcal{M}} \Rightarrow k[T] = k\vec{R} + \epsilon k \vec{\mathcal{M}}; \text{ c'est encore un torseur.}$$

Application : Avec l'addition des torseurs des vitesses des solides montés en série, si ces torseurs sont identiques, l'opération devient une multiplication de torseur par un scalaire.

IV-3 Produit scalaire de deux torseurs

$$[T_1][T_2] = (\bar{R}_1 + \varepsilon \bar{\mathcal{M}}_1)(\bar{R}_2 + \varepsilon \bar{\mathcal{M}}_2) = \bar{R}_1 \cdot \bar{R}_2 + \varepsilon \bar{R}_1 \cdot \bar{\mathcal{M}}_2 + \varepsilon \bar{\mathcal{M}}_1 \cdot \bar{R}_2 + \varepsilon^2 \bar{\mathcal{M}}_1 \bar{\mathcal{M}}_2$$

$$\varepsilon^2 = 0 \rightarrow [T_1][T_2] = \bar{R}_1 \cdot \bar{R}_2 + \varepsilon (\bar{R}_1 \cdot \bar{\mathcal{M}}_2 + \bar{R}_2 \cdot \bar{\mathcal{M}}_1); \text{ c'est un nombre dual.}$$

On obtient ainsi un scalaire dual. Si ce scalaire est nul, on a deux **torseurs orthogonaux**.

Remarques :

(1) La partie duale $\bar{R}_1 \cdot \bar{\mathcal{M}}_2 + \bar{R}_2 \cdot \bar{\mathcal{M}}_1$ est le **comoment des torseurs** $[T_1]$ et $[T_2]$, qu'on note C_{12} ou encore $\text{Com}([T_1], [T_2])$ ou tout simplement $\text{dual}([T_1], [T_2])$. On l'appelle aussi souvent **produit torsoriel** de $[T_1]$ et $[T_2]$, ou tout simplement **produit des torseurs** $[T_1]$ et $[T_2]$; il est alors noté $[T_1] * [T_2]$.

(2) On montre que $[T_1] * [T_2]$ est un invariant pour les deux torseurs c.à.d. qu'il est indépendant du point P où les deux torseurs ont été réduits. En effet :

Soit à montrer que le comoment est un invariant des deux torseurs.

$$[T_1] = \bar{R}_1 + \varepsilon \bar{\mathcal{M}}_{1P} \text{ en } P \text{ et } [T_1] = \bar{R}_1 + \varepsilon \bar{\mathcal{M}}_{1Q} \text{ au point } Q$$

$$[T_2] = \bar{R}_2 + \varepsilon \bar{\mathcal{M}}_{2P} \text{ en } P \text{ et } [T_2] = \bar{R}_2 + \varepsilon \bar{\mathcal{M}}_{2Q} \text{ en } Q$$

$$[T_1]_p * [T_2]_p = \bar{R}_1 \cdot \bar{\mathcal{M}}_{2p} + \bar{R}_2 \cdot \bar{\mathcal{M}}_{1p}$$

$$= \bar{R}_1 \cdot (\bar{\mathcal{M}}_{2Q} + \overrightarrow{PQ} \wedge \bar{R}_2) + \bar{R}_2 \cdot (\bar{\mathcal{M}}_{1Q} + \overrightarrow{PQ} \wedge \bar{R}_1)$$

$$= \bar{R}_1 \cdot \bar{\mathcal{M}}_{2Q} + \bar{R}_1 \cdot (\overrightarrow{PQ} \wedge \bar{R}_2) + \bar{R}_2 \cdot \bar{\mathcal{M}}_{1Q} + \bar{R}_2 \cdot (\overrightarrow{PQ} \wedge \bar{R}_1)$$

$$= \bar{R}_1 \cdot \bar{\mathcal{M}}_{2Q} + \bar{R}_2 \cdot \bar{\mathcal{M}}_{1Q} + \underbrace{(\bar{R}_1, \overrightarrow{PQ}, \bar{R}_2)}_0 + \underbrace{(\bar{R}_2, \overrightarrow{PQ}, \bar{R}_1)}_0$$

$$= \bar{R}_1 \cdot \bar{\mathcal{M}}_{2Q} + \bar{R}_2 \cdot \bar{\mathcal{M}}_{1Q} = [T_1]_Q * [T_2]_Q$$

D'où :

$$[T_1]_p * [T_2]_p = [T_1]_Q * [T_2]_Q = [T_1] * [T_2]$$

Ainsi, pour le calcul de leur comoment, les torseurs peuvent être réduits tous les deux en n'importe quel point commun.

Application : On verra plus loin que l'énergie cinétique, dans sa forme la plus générale (Ec de translation et Ec de rotation) est obtenue par la moitié du produit du torseur des vitesses et du torseur des quantités de mouvement d'un solide. La puissance des

actions extérieures, quant à elle, sera le produit du torseur des vitesses avec le torseur des actions mécaniques.

IV-4 Produit torsoriel de deux torseurs

C'est l'application qui, à deux torseurs, associe leur comoment :

$$[T_1][T_2] \rightarrow [T_1]*[T_2] \text{ tel que : } [T_1]*[T_2] = \vec{R}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2 + \vec{R}_2 \cdot \vec{\mathcal{M}}_1$$

Remarques :

- on a montré ci-dessus que le comoment est invariant avec le point P où les deux torseurs ont été réduits
- on appelle automoment d'un torseur d'éléments de réduction \vec{R} et $\vec{\mathcal{M}}_P$, la moitié du comoment de ce torseur avec lui-même, c.à.d. le produit $\vec{R} \cdot \vec{\mathcal{M}}_P$; on le note $\text{Aut}([t])$ et il vaut $\frac{1}{2} \text{dual}([T].[T])$.

IV-5 Produit vectoriel de deux torseurs

C'est l'application qui, à deux torseurs associe la grandeur :

$$(\vec{R}_1 + \epsilon \vec{\mathcal{M}}_1) \wedge (\vec{R}_2 + \epsilon \vec{\mathcal{M}}_2) = \vec{R}_1 \wedge \vec{R}_2 + \epsilon (\vec{R}_1 \wedge \vec{\mathcal{M}}_2 - \vec{R}_2 \wedge \vec{\mathcal{M}}_1); \text{ c'est encore un torseur.}$$

- Ce produit est indépendant du point où on a exprimé les torseurs de départ.
- Lorsque le produit vectoriel est nul, les torseurs sont dits parallèles.
- On montre que le produit vectoriel de deux torseurs est orthogonal à chacun d'eux.

IV-6 Différentielle d'un torseur

$$d(\vec{R} + \epsilon \vec{\mathcal{M}}_P) = d\vec{R} + \epsilon d\vec{\mathcal{M}}_P$$

C'est encore un torseur, le torseur différentielle.

Application : *On verra plus loin que la 2^{ème} loi de Newton, dans sa forme plus générale lie le torseur des actions mécaniques extérieures à la dérivée dans un référentiel galiléen, par rapport au temps, du torseur des quantités de mouvement.*

Nota : Plusieurs autres développements sont possibles : on peut définir l'angle de deux torseurs, démontrer par la notation duale les théorèmes classiques relatifs aux torseurs, etc.

IV-7 Le carré d'un torseur

$$\text{C'est le torseur : } [T]^2 = [T][T] = \bar{R}^2 + \epsilon 2\bar{R}\bar{\mathcal{M}}$$

Avec :

$\bar{R}\bar{\mathcal{M}} \equiv \text{automoment du torseur } [T]$, noté encore $\Lambda([T])$ ou $\text{Aut}([T])$ ou tout simplement $\frac{1}{2} \text{dual}([T]^2)$.

- L'**automoment** $\text{Aut}([T]) = \bar{R}\bar{\mathcal{M}_p}$ est un invariant scalaire du torseur ; c'est le **second invariant du torseur**.

$$\begin{aligned} \text{En effet, } \bar{R}\bar{\mathcal{M}_p} &= \bar{R}(\bar{\mathcal{M}_p} + \overline{P}\overline{P}' \wedge \bar{R}) = \bar{R}\bar{\mathcal{M}_p} + \bar{R}(\overline{P}\overline{P}' \wedge \bar{R}) \\ &= \bar{R}\bar{\mathcal{M}_p} + (\bar{R}, \overline{P}\overline{P}', \bar{R}) \end{aligned}$$

D'où :

$$\bar{R}\bar{\mathcal{M}_p} = \bar{R}\bar{\mathcal{M}_{p'}} \quad \forall P, Q \in \mathcal{E}$$

V- TYPOLOGIE DES TORSEURS

Une considération particulière donne des appellations spéciales à certains torseurs, il s'agit du cas où l'automoment nul ($\bar{R}\bar{\mathcal{M}} = 0$).

Le produit scalaire de deux vecteurs étant nul lorsque, soit les deux sont nuls, soit l'un des vecteurs est nul, soit alors ils sont orthogonaux, on définit les torseurs particuliers suivants:

V-1 Le torseur nul :

C'est le torseur $[0] = \begin{Bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_{vp} \rightarrow [T] = \bar{0} + \epsilon \cdot \bar{0} = \epsilon \bar{0}$ en notation duale (N.B. : on ne peut omettre ϵ

dans cette écriture, au risque de confondre le torseur nul au vecteur nul qui est une grandeur d'une nature toute autre).

Application : On verra plus loin que l'équilibre d'un solide est traduite par la nullité du torseur des actions mécaniques extérieures appliquées à ce solide.

V-2 Le torseur à moment ou torseur couple :

C'est un torseur de résultante nulle. $[T] = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_P \end{Bmatrix}_{VP} \Rightarrow [T] = \epsilon \vec{M}_P$ en notation duale

Remarques :

- (1) *Le couple peut être formé par plusieurs torseurs (donc vecteurs résultantes géométriques) dont le torseur somme a une résultante nulle.*

(2) $\vec{M}_P = \vec{M}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{R}$ avec $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_Q \quad \forall (P, Q) \in \mathcal{E}$.

\Rightarrow *le couple est représenté uniquement par son moment en un point quelconque.* Ce torseur a la même écriture en tout point de l'espace.

Application : On verra plus loin que les actions mécaniques s'exerçant sur un arbre (arbre moteur, arbre de transmission, etc) se résument généralement par un torseur couple.

V-3 Le torseur à résultante ou torseur glisseur :

C'est un torseur pour lequel il existe au moins un point P_0 de l'espace où le moment est nul.

$$[T] = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \exists P_0 \text{ t.q. } \vec{M}_{P_0} = \vec{0} \end{Bmatrix} \Rightarrow \exists P_0 \text{ t.q. en } P_0 \quad [T] = \vec{R} + \epsilon \vec{0} \text{ en notation duale}$$

Remarque : $\forall P \in \mathcal{E}, \vec{M}_P = \vec{M}_{P_0} + \overrightarrow{PP_0} \wedge \vec{R} = \overrightarrow{PP_0} \wedge \vec{R} \Rightarrow$ *le moment d'un glisseur est toujours perpendiculaire à sa résultante (non nulle).* On reconnaît ainsi un glisseur en un point quelconque à l'aide de la perpendicularité de ses éléments de réduction en ce point.

Application : On verra plus loin que l'action mécanique de la pesanteur s'exerçant sur un corps, ayant un moment nul au centre de gravité (ou centre de masse) de ce corps est un glisseur. Les actions de pesanteur seront toujours définies comme des glisseurs aux centres de masse.

Nota : Un torseur qui n'est ni nul, ni un couple, ni un glisseur, est un torseur quelconque.

VI- ELEMENTS CENTRAUX D'UN TORSEUR

VI-1 Définitions

On appelle **point central** d'un torseur, un point quelconque P de l'espace affine \mathcal{E} , où les éléments de réduction de ce torseur sont colinéaires : $P / \tilde{\mathcal{M}}_P \wedge \tilde{R} = \vec{0}$

On appelle **axe central** d'un torseur, le lieu des points centraux de ce torseur :
 $(\Delta) = \{P \in \mathcal{E} / \tilde{\mathcal{M}}_P \wedge \tilde{R} = \vec{0}\}$

Remarques :

(1) $\tilde{\mathcal{M}}_P \wedge \tilde{R} = \vec{0}$ avec $\tilde{R} \neq \vec{0} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_P = \lambda \tilde{R}$; λ est le *pas réduit* du torseur en P . On montre qu'il est invariant, c.à.d. indépendant du point P où on l'a calculé.

(2) Le moment en tout point central est le **moment central** du torseur.

Application : On verra plus loin que le centre de masse G d'un système est un point central du torseur des actions de pesanteur, que la verticale du lieu passant par G en est l'axe central et que le moment central de ce torseur (comme de tout glisseur) est nul.

VI-2 Détermination analytique de l'axe central d'un torseur

Soit à déterminer analytiquement l'axe central du torseur $[T] = \tilde{R} + \epsilon \tilde{m}_P$ avec $\tilde{R} \neq \vec{0}$

$$I \in (\Delta) \Leftrightarrow \tilde{m}_I = \lambda \tilde{R}, \lambda \in \text{IR.}$$

♦

$$\begin{aligned} \text{Or } \tilde{m}_I &= \tilde{m}_P + \overrightarrow{IP} \wedge \tilde{R} \Rightarrow \tilde{m}_I \wedge \tilde{R} = \tilde{m}_P \wedge \tilde{R} + (\overrightarrow{IP} \wedge \tilde{R}) \wedge \tilde{R} \\ &\Rightarrow \lambda \tilde{R} \wedge \tilde{R} = \tilde{m}_P \wedge \tilde{R} - \tilde{R} \wedge (\overrightarrow{IP} \wedge \tilde{R}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{0} = \tilde{m}_P \wedge \tilde{R} - [\overrightarrow{IP}(\tilde{R}, \tilde{R}) - \tilde{R}(\tilde{R}, \overrightarrow{IP})]$$

$$\Rightarrow \tilde{m}_P \wedge \tilde{R} = \tilde{R}^2 \cdot \overrightarrow{IP} - (\overrightarrow{IP}, \tilde{R}) \tilde{R}$$

Il existe une solution particulière I^* telle que $\overrightarrow{IP} \cdot \tilde{R} = 0$

$$\Rightarrow \tilde{m}_P \wedge \tilde{R} = \tilde{R}^2 \cdot I^* \overrightarrow{IP} \text{ c.à.d. } \tilde{R}^2 \cdot \overrightarrow{PI^*} = \tilde{R} \wedge \tilde{m}_P \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{PI^*} = \frac{\tilde{R} \wedge \tilde{m}_P}{\tilde{R}^2}}$$

Vérifions que ce point I^* appartient à l'axe central, c.à.d. que le moment en I^* est bien colinéaire à la résultante.

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{I^*} &= \tilde{m}_P + \overrightarrow{I^*P} \wedge \tilde{R} = \tilde{m}_P + \tilde{R} \wedge \overrightarrow{PI^*} = \tilde{m}_P + \tilde{R} \wedge \frac{\tilde{R} \wedge \tilde{m}_P}{\tilde{R}^2} \\ \Rightarrow \tilde{m}_{I^*} &= \tilde{m}_P + \frac{\tilde{R} \wedge (\tilde{R} \wedge \tilde{m}_P)}{\tilde{R}^2} = \tilde{m}_P + \frac{1}{\tilde{R}^2} [\tilde{R} \cdot (\tilde{R} \bullet \tilde{m}_P) - \tilde{m}_P \cdot (\tilde{R} \bullet \tilde{R})] \\ \Rightarrow \tilde{m}_{I^*} &= \tilde{m}_P + \frac{\tilde{R} \bullet \tilde{m}_P}{\tilde{R}^2} \cdot \tilde{R} - \tilde{m}_P = \frac{\tilde{R} \bullet \tilde{m}_P}{\tilde{R}^2} \cdot \tilde{R} \end{aligned}$$

Qui est bien colinéaire à la résultante.

L'axe central passe donc par ce point particulier I^* .

Soit à montrer que l'axe central (Δ) est dirigé par la résultante \vec{R} . C'est-à-dire à montrer que $\forall P, Q \in (\Delta) \quad \vec{PQ} \wedge \vec{R} = \vec{0}$.

$$\left. \begin{array}{l} \forall P \in \Delta \rightarrow \exists \lambda_P / \vec{m}_P = \lambda_P \cdot \vec{R} \\ \forall Q \in \Delta \rightarrow \exists \lambda_Q / \vec{m}_Q = \lambda_Q \cdot \vec{R} \end{array} \right\} \text{or } \vec{m}_Q = \vec{m}_P + \vec{QP} \wedge \vec{R} \rightarrow \lambda_Q \cdot \vec{R} = \lambda_P \cdot \vec{R} + \vec{QP} \wedge \vec{R} \\ \rightarrow (\lambda_Q - \lambda_P) \vec{R} = \vec{QP} \wedge \vec{R}$$

Discussion :

* Si $\lambda_Q - \lambda_P \neq 0$, $\vec{QP} \wedge \vec{R}$ égale un vecteur colinéaire à \vec{R} , contradiction ! Il vient donc $\lambda_Q = \lambda_P$. c.à.d. le pas réduit d'un torseur est invariant (par rapport au point où il est calculé sur l'axe central) ; c'est le troisième invariant du torseur.

* Avec $\lambda_Q = \lambda_P$, on déduit : $\vec{QP} \wedge \vec{R} = \vec{0}$ c.à.d. \vec{QP} et \vec{R} colinéaires. Donc, l'axe central est bien dirigé par \vec{R} .

Conclusion : L'axe central passe bien par le point particulier I^* et est colinéaire à la résultante \vec{R} ; on note alors : $\Delta(I^*, \vec{R})$.

Remarque : Détermination du pas réduit du torseur

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, avec : } \forall P, Q \in \Delta, \vec{m}_Q &= \vec{m}_P + \vec{QP} \wedge \vec{R} \rightarrow \vec{R} \cdot \vec{m}_Q = \vec{R} \cdot (\vec{m}_P + \vec{QP} \wedge \vec{R}) \\ &\Rightarrow \vec{R} \cdot \vec{R} = \vec{R} \cdot \vec{m}_P + \underbrace{\vec{R} \cdot (\vec{QP} \wedge \vec{R})}_0 \end{aligned}$$

$$\lambda \vec{R}^2 = \vec{R} \cdot \vec{m}_P \rightarrow \lambda = \frac{\vec{R} \cdot \vec{m}_P}{\vec{R}^2} \quad \forall P \in \Delta, \text{ puisque } \vec{R} \cdot \vec{m}_P, \text{ automoment, est un invariant du}$$

torseur, ce λ est lui-même invariant. On peut donc écrire simplement :

$$\boxed{\lambda = \frac{\vec{R} \cdot \vec{m}_P}{\vec{R}^2} \quad \forall P}$$

c'est la formule de détermination du *pas réduit du torseur*

VI-3 Propriétés

(1) - L'axe central est colinéaire à la résultante du torseur. Ce résultat est issu de la discussion précédente.

(2) - Le moment est partout égal sur l'axe central.

$$\text{En effet : } \tilde{\mathcal{M}}_P = \tilde{\mathcal{M}}_Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{R} \quad (1)$$

$$\text{Or : } \begin{cases} P \in (\Delta) \\ Q \in (\Delta) \\ (\Delta) \text{ dirigée par } \vec{R} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \parallel \vec{R} \text{ c.à.d. : } \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{R} = \vec{0} \quad (2)$$

$$(2) \text{ dans (1)} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_P = \tilde{\mathcal{M}}_Q \quad \text{D'où : } \boxed{\forall P, Q \in (\Delta), \quad \tilde{\mathcal{M}}_P = \tilde{\mathcal{M}}_Q}$$

C'est le **moment central** du torseur.

(3) - En tout point de l'axe central, la norme du moment du torseur est minimale.

En effet :

$$P_0 \in (\Delta) \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{P_0} = \lambda \vec{R}$$

$$\forall Q \in \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{M}}_Q = \tilde{\mathcal{M}}_{P_0} + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{R} = \lambda \vec{R} + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{R} \text{ somme de deux vecteurs}$$

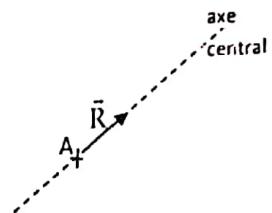


Figure: Axe central d'un torseur

perpendiculaires entre eux. Le théorème de Pythagore implique que :

$$\|\tilde{\mathcal{M}}_Q\|^2 = (\lambda \vec{R})^2 + (\overrightarrow{QP} \wedge \vec{R})^2 = (\tilde{\mathcal{M}}_{P_0})^2 + (\overrightarrow{QP} \wedge \vec{R})^2 \geq (\tilde{\mathcal{M}}_{P_0})^2$$

$$\text{c.à.d. : } \boxed{\forall Q \in \mathcal{E}, \|\tilde{\mathcal{M}}_Q\| \geq \|\tilde{\mathcal{M}}_{P_0}\| \quad \text{pour } P \in (\Delta)}$$

(4) - L'axe central d'un glisseur est le lieu des points où le moment est nul (en tant que valeur minimale). Il est de toute évidence colinéaire à la résultante \vec{R} . Un glisseur $[T] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{m}_A = \vec{0} \end{array} \right\}$

est alors représenté uniquement par (\vec{R}, A) ou (A, \vec{R}) .

Application: Cette propriété de minimalité du moment central donne toute son importance à l'axe central. Par exemple, pour tenir un objet pesant (seau d'eau à porter, charge quelconque à soulever, etc.), l'ouvrier devra opérer (placer ses bras par exemple) sur un point central du torseur de pesanteur afin de minimiser ses efforts.

VII- TORSEURS ASSOCIES A DES CHAMPS DE VECTEURS

VII-1 Torseur associé à un champ discret fini de vecteurs

Pour tout ensemble fini de n vecteurs $\vec{V}(M_i)$ définis en n points M_i , on peut définir un torseur en un point quelconque O de l'espace \mathcal{E} par :

- La résultante géométrique $\bar{R} = \sum_{i=1}^n \vec{V}(M_i)$
- Le moment en O : $\vec{m}_0 = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{V}(M_i)$

C'est le cas par exemple du torseur des forces discrètes appliquées à un solide.

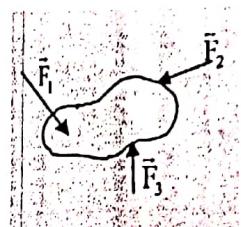


Figure 1: Répartition discrète d'effort

Remarque :

Pour vérifier ou montrer qu'on a bien un torseur, il suffit de vérifier que $\vec{m}_0 = \vec{m}_0 + \overrightarrow{OO'} \wedge \bar{R} \quad \forall O \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \vec{m}_0 &= \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{V}(M_i) = \sum_i (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}_i) \wedge \vec{V}(M_i) \\ &= \sum_i (\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{V}(M_i) + \overrightarrow{O'M}_i \wedge \vec{V}(M_i)) \\ &= \sum_i \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{V}(M_i) + \underbrace{\sum_i \overrightarrow{O'M}_i \wedge \vec{V}(M_i)}_{\vec{m}_0'} \\ &= \overrightarrow{OO'} \wedge \sum_i \vec{V}(M_i) + \vec{m}_0' \\ &= \overrightarrow{OO'} \wedge \bar{R} + \vec{m}_0' \end{aligned} \quad \text{d'où : } \vec{m}_0 = \vec{m}_0' + \overrightarrow{OO'} \wedge \bar{R} \quad \text{c.q.f.d.}$$

Application : L'action de la pesanteur sur un ensemble de plusieurs systèmes matériels regroupés en un sera globalement considérée comme le torseur des actions discrètes de pesanteur appliquées en chacun des centres de masse des systèmes considérés.

VII-2 Torseur associé à un champ continu de vecteurs

Un champ continu est caractérisé par une densité vectorielle, vecteur infiniment petit, qui dépend du point M où on se trouve. Pour recouvrir tout le champ, on a un nombre infini de vecteurs infiniment petits $d\vec{V}(M)$.

b - 1) Si la densité vectorielle est linéaire, on définit le torseur par :

$$\bar{R} = \int_I d\bar{V}(M) \text{ où } d\bar{V}(M) = \mu d\vec{l}; \mu \equiv \text{densité linéique} \quad \mu = \mu(x)$$

et $\bar{m}_0 = \int_I \overrightarrow{OM} \wedge d\bar{V}(M)$

b - 2) Si on a une distribution surfacique de vecteurs, avec une densité surfacique σ tel que le vecteur infinitésimal $d\bar{V}(M) = \sigma d\bar{S}$, $\sigma = \sigma(x, y)$, et $d\bar{S}$ l'élément de surface entourant le point M, alors le torseur est caractérisé par :

$$\bar{R} = \iint_{(\Sigma)} d\bar{V}(M)$$

$$\bar{m}_0 = \iint_{(\Sigma)} \overrightarrow{OM} \wedge d\bar{V}(M)$$

b - 3) Avec une répartition volumique de densité ρ , le vecteur élémentaire est $d\bar{V}(M) = \rho d\vec{v}$, $\rho = \rho(x, y, z)$ et le torseur est caractérisé par :

$$\bar{R} = \iiint_{(V)} d\bar{V}(M)$$

$$\bar{m}_0 = \iiint_{(V)} \overrightarrow{OM} \wedge d\bar{V}(M)$$

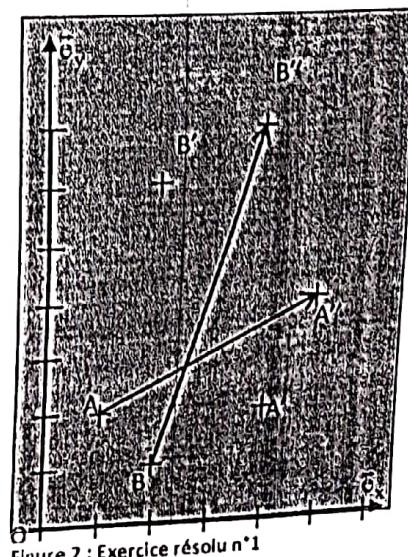
N.B. : Dans les trois cas ; on vérifie bien $\bar{m}_0 = \bar{m}_0 + \overrightarrow{OO'} \wedge \bar{R}$

Application : L'action de la pesanteur sur un solide sera généralement considérée comme le torseur des actions continues de pesanteur appliquées en chacun des points de ce solide.

VIII- EXERCICES RESOLUS DE GENERALITES SUR LES TORSEURS

VIII-1 Exercice résolu n°1 : Coordonnées scalaires et axe central d'un [T]

On donne dans un repère $R_1(0, \vec{c}_x, \vec{c}_y, \vec{c}_z)$, les points A(1, 2, 0) et B(2, 1, 0), et on considère l'ensemble des deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} constitués respectivement par les deux branches obliques AA'' (équipollent à OA', où AA' est horizontal



et de longueur 3m) et BB'' (équipollent à OB', où BB' est vertical ascendant de longueur 5 m). Voir schéma ci-contre à compléter.

1°) - Montrer que ces deux vecteurs peuvent constituer un torseur

2°) - Donner les coordonnées plückériennes de ce torseur dans $R_1(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

3°) - Donner les coordonnées plückériennes de ce torseur dans $R_2(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

4°) - Déterminer l'axe central (équations cartésiennes) de ce torseur dans (R_1) .

5°) - Déterminer tous les glisseurs qui lui sont perpendiculaires et dont l'origine O appartient à leurs axes centraux.

Solution :

1°) - Montrons que ces deux vecteurs peuvent constituer un torseur

Pour cela, construisons deux vecteurs \vec{R} libre et \vec{M} lié, tous les deux vérifiant la propriété

$$\vec{M}_P = \vec{M}_Q + \vec{PQ} \wedge \vec{R} \quad \forall P, Q$$

Posons $\vec{R} = \vec{U} + \vec{V}$ et $\vec{M} = \overline{PA} \wedge \vec{U} + \overline{PB} \wedge \vec{V}$. On a donc :

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ i+5 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \vec{R} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_1)} \quad \text{c'est un vecteur libre, car ses composantes dans } (R_1) \text{ sont}$$

indépendantes des coordonnées d'espace.

$$P(x, y, z), \vec{M} = \overline{PA} \wedge \vec{U} + \overline{PB} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1-x & 2-y & -z \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2-x & 1-y & -z \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2z+6z \\ * \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8z \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

qui est bien un vecteur lié, puisque ses composantes (du moins la première qui vaut $8z$) dépendent des coordonnées d'espace.

Reste alors à montrer la propriété : $\forall P, Q, \vec{M}_P = \vec{M}_Q + \vec{PQ} \wedge \vec{R}$

Nous avons défini $\vec{M} = \overline{PA} \wedge \vec{U} + \overline{PB} \wedge \vec{V}$; et donc $\vec{M}_Q = \overline{QA} \wedge \vec{U} + \overline{QB} \wedge \vec{V}$. Il vient

$$\begin{aligned} \vec{M}_Q &= \overline{QA} \wedge \vec{U} + \overline{QB} \wedge \vec{V} = (\overline{QP} + \overline{PA}) \wedge \vec{U} + (\overline{QP} + \overline{PB}) \wedge \vec{V} \\ &= \overline{QP} \wedge \vec{U} + \overline{PA} \wedge \vec{U} + \overline{QP} \wedge \vec{V} + \overline{PB} \wedge \vec{V} = \overline{QP} \wedge \vec{U} + \overline{QP} \wedge \vec{V} + \overline{PA} \wedge \vec{U} + \overline{PB} \wedge \vec{V} \\ &\rightarrow \vec{M}_Q = \overline{QP} \wedge (\vec{U} + \vec{V}) + (\overline{PA} \wedge \vec{U} + \overline{PB} \wedge \vec{V}) = \overline{QP} \wedge \vec{R} + \vec{M} \\ &\rightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_Q + \overline{QP} \wedge \vec{R} = \vec{M}_Q + \vec{PQ} \wedge \vec{R}. \text{ Ainsi : } \forall P, Q, \vec{M}_P = \vec{M}_Q + \vec{PQ} \wedge \vec{R} \end{aligned}$$

Conclusion : Les deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} permettent de constituer un torseur $[T] = \vec{R} + \epsilon, \vec{M}$ avec

$$\vec{R} = \vec{U} + \vec{V} \text{ et } \vec{M} = \overline{PA} \wedge \vec{U} + \overline{PB} \wedge \vec{V}, \quad \forall P \in \mathcal{E}$$

2°) - Donnons les coordonnées plückériennes de ce torseur dans $R_1(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

On a déjà $\vec{R} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_1)}$; il reste à déterminer

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = \overline{OA} \wedge \vec{U} + \overline{OB} \wedge \vec{V} . \vec{\mathcal{M}}_0 = \overline{OA} \wedge \vec{U} + \overline{OB} \wedge \vec{V}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1-0 & 2-0 & -0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2-0 & 1-0 & -0 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2-8)+(12-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

D'où : $[T] = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{(R_1)}$

3°) – Donnons les coordonnées plückériennes de ce torseur dans $R_2(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

On a toujours $\vec{R} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_1)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_2)}$; il reste à calculer $\vec{\mathcal{M}}_A$:

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{M}}_0 + \overline{AO} \wedge \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -1 & -2 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4+4=8 \end{bmatrix}_{(R_2)} \quad \text{D'où : } [T] = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}_{(R_2)}$$

4°) – Déterminons l'axe central (équations cartésiennes) de ce torseur.

$$\Delta(I^*, \vec{R}) \text{ avec } \overline{OI^*} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{\mathcal{M}}_0}{\vec{R}^2} = \frac{1}{6^2+8^2} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 32 \\ -24 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}_{(R_1)}$$

$$M(x, y, z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overline{I^* M} \wedge \vec{R} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x - 8/25 & y + 6/25 & z \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8z = 0 \\ 6z = 0 \\ 8(x - 8/25) - 6(y + 6/25) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 8x - 6y = \frac{64+36}{25} = 4 \end{cases} \quad \text{D'où : } (\Delta) : \begin{cases} 4x - 3y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

5°) – Déterminons tous les glisseurs qui lui sont perpendiculaires et dont O appartient à leurs axes centraux.

$$[T'] = \begin{bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{bmatrix}_{(R_1)} ; [T'] \perp [T] \Leftrightarrow [T'] \bullet [T] = 0 + \varepsilon 0 \text{ avec } [T] = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{(R_1)}$$

$$\text{Or } [T_1][T_2] = \bar{R}_1 \cdot \bar{R}_2 + \varepsilon (\bar{R}_1 \cdot \vec{m}_2 + \bar{R}_2 \cdot \vec{m}_1) \rightarrow (6X+8Y) + \varepsilon (4Z+6L+8M) = 0 + \varepsilon 0 \rightarrow \begin{cases} 6X+8Y=0 \\ 4Z+6L+8M=0 \end{cases}$$

Si maintenant, $[T']$ doit être un glisseur de support passant par O, son moment en O est

obligatoirement nul. $\rightarrow L = M = N = 0$. Il vient donc : $\begin{cases} Y = -\frac{3}{4}X \\ Z = 0 = L = M = N \end{cases}$

D'où la solution :

$$[T']_O = k(\bar{e}_x - \frac{3}{4}\bar{e}_y) + \varepsilon \bar{0}, \quad k \in \mathbb{R}$$

VIII-2 Exercice résolu n°2 : Détermination d'un repère de réduction à partir des coordonnées plückériennes d'un $[T]$

Retenant le torseur $[T]$ de l'exercice précédent, déterminer un repère $R_3(I, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tel que :

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ \mu & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{(R_3)} \quad \text{avec : } \lambda = 4 \text{ et } \mu = 6$$

Solution :

On cherche les coordonnées (p, q, r) de I, et les composantes des vecteurs \bar{x} , \bar{y} et \bar{z} .

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & 2 \\ \mu & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{(R_3)} \leftrightarrow \begin{cases} \bar{R} = \lambda \bar{x} + \mu \bar{y} & (1) \\ \vec{m}_I = 2 \bar{x} + \bar{y} + 4 \bar{z} & (2) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 6\bar{e}_x + 8\bar{e}_y = \lambda \bar{x} + \mu \bar{y} \\ \vec{m}_O + \overline{OI} \wedge \bar{R} = 2 \bar{x} + \bar{y} + 4 \bar{z} \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} 6\vec{e}_x + 8\vec{e}_y = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \\ 4\vec{e}_x + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ p & q & r \\ 6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{x} + \vec{y} + 4\vec{z} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 6\vec{e}_x + 8\vec{e}_y = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +8r \\ -6r \\ -8p+6q \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 6\vec{e}_x + 8\vec{e}_y = 4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +8r \\ -6r \\ -8p+6q \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6 = 4x_1 + 6y_1 & (1) \\ 8 = 4x_2 + 6y_2 & (2) \\ 0 = 4x_3 + 6y_3 & (3) \\ 8r = 2x_1 + y_1 + 4z_1 & (4) \\ -6r = 2x_2 + y_2 + 4z_2 & (5) \\ 4 - 8p + 6q = 2x_3 + y_3 + 4z_3 & (6) \end{cases}, \text{ système de 6 équations à 12 inconnues.}$$

La suite est un problème d'algèbre. On choisit des inconnues principales et on voit s'il est possible d'affecter des valeurs aléatoires aux inconnues secondaires (non principales) et obtenir la vérification du système, tout de même.

VIII-3 Exercice résolu n°3 : torseur continu

Soit le torseur charge continue linéaire de densité linéique uniforme de charge $\lambda(x) = \lambda_0$ N/m distribuée sur une première moitié AI du pont de longueur AB=L. On néglige l'action de la pesanteur sur le pont.

- 1°) Réduire ce torseur au point A
- 2°) Déterminer un point du pont qui appartient à l'axe central de ce torseur.

Solution :

1°) Réduisons au point A ce torseur :

Ce torseur distribution continue possède sur [AI] une densité de force $d\vec{f} = \lambda_0 dx (-\vec{e}_y)$. En

notation vectorielle : $[T] = \left[\begin{array}{c} \vec{R} = \int_{[AI]} d\vec{f} \\ \vec{m}_A = \int_{[AI]} \overrightarrow{AM} \wedge d\vec{f} \end{array} \right]$ avec :

$$\vec{R} = \int_{[AI]} -\lambda_0 dx \vec{e}_y = -\lambda_0 \vec{e}_y \int_{[AI]} dx = -\lambda_0 \vec{e}_y \cdot \frac{L}{2} = -\lambda_0 \frac{L}{2} \vec{e}_y,$$

$$\text{et } \vec{m}_A = \int_{[AI]} x \vec{e}_x \wedge \lambda_0 dx (-\vec{e}_y) = \int_{[AI]} -\lambda_0 x dx \vec{e}_z = -\lambda_0 \vec{e}_z \int_{x=0}^{L/2} x dx.$$

Ainsi :

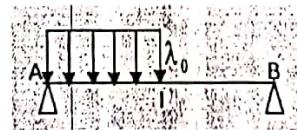
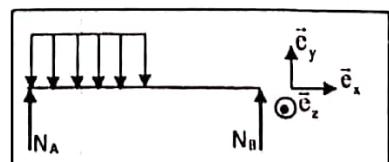


Figure 3: Exercice résolu n°3



$$[T] = \begin{cases} \vec{R} = -\lambda_0 \frac{L}{2} \vec{e}_y \\ \vec{m}_A = \frac{-\lambda_0 L^2}{8} \vec{e}_z \end{cases}$$

2°) Soit à trouver un point G de [A ; B] où le moment soit nul (minimum).

$$\vec{m}_G = \vec{m}_A + \overrightarrow{GA} \wedge \vec{R} = \frac{-\lambda_0 L^2}{8} \vec{e}_z + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -x & -y & -z \\ 0 & -\frac{\lambda_0 L}{2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-\lambda_0 L^2}{8} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_0 L}{2} z \\ 0 \\ \frac{\lambda_0 L}{2} x \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{m}_G = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda_0 L}{2} z \\ 0 \\ \frac{\lambda_0 L}{2} x - \frac{-\lambda_0 L^2}{8} \end{bmatrix}$$

qui est nul pour $z = 0$ et $x = \frac{L}{4}$. Et puisqu'il faut que G appartienne à [A ; B], $y = 0$. D'où :

$$G\left(\frac{L}{4}, 0, 0\right)$$

On conclut ainsi que l'axe central de ce torseur passe par le point $G\left(\frac{L}{4}, 0, 0\right)$ et est dirigé suivant la verticale \vec{e}_y .

IX- Julius Plücker - Biographie



Julius Plücker, en bref :

Données clés	
Naissance	1801 Elberfeld (Saint-Empire romain germanique)
Décès	22 mai 1868 (à 66 ans) Bonn (Prusse)
Nationalité	Allemand
Champs	Mathématiques
Institutions	Université de Bonn
Diplôme	Université de Marbourg Université de Paris Université Humboldt de Berlin Université de Heidelberg
Renommé pour	Formule de Plücker
Distinctions	Médaille Rumford (1866)

Julius Plücker (16 juin ou 16 juillet 1801 à Elberfeld, Saint-Empire romain germanique - 22 mai 1868 à Bonn, Prusse) est un mathématicien et un physicien allemand. Il a obtenu des résultats fondamentaux en géométrie analytique et fut un pionnier dans les recherches sur les rayons cathodiques qui aboutirent à la découverte de l'électron. Il a aussi beaucoup travaillé sur les courbes de Lamé.

Biographie

Plücker est né à Elberfeld (aujourd'hui incorporé à Wuppertal). Après des études à Düsseldorf et dans les universités de Bonn, Heidelberg et Berlin, il se rend à Paris en 1823, où il est influencé par la grande école des géomètres français, dont le fondateur Gaspard Monge venait juste de mourir. En 1825, il retourne à Bonn et en 1828 il devient professeur de mathématiques. La même année, il publie le premier tome de son *Analytisch-geometrische Entwickelungen (Développements analytico-géométriques)*, qui introduit pour la première fois sa méthode de la notation abrégée. En 1831, il publie le second volume, dans lequel il établit clairement les fondations du grand principe de dualité.

En 1847, Plücker devient professeur de physique à Bonn. En 1858, il publie la première de ses recherches classiques sur l'action des aimants sur la décharge électrique dans les gaz raréfiés. Il montre que la décharge provoque la formation d'une lueur fluorescente sur les parois de verre du tube à vide, et que l'on peut forcer la lueur à se décaler en appliquant un aimant sur le tube, créant ainsi un champ magnétique. Plus tard, on a montré que la lueur venait des rayons cathodiques.

Plücker, d'abord seul, puis en collaboration avec Johann Wilhelm Hittorf, fait de nombreuses découvertes importantes dans la spectroscopie des gaz. Il est le premier à utiliser le tube à

vide avec une partie capillaire (tube de Geissler) qui permet d'augmenter suffisamment la faible intensité des décharges électriques pour permettre l'étude spectroscopique. Il devance Robert Wilhelm Bunsen et Gustav Kirchhoff en annonçant que les lignes du spectre sont caractéristiques de la substance qui les a émises, et en montrant la valeur de cette découverte en Analyse chimique. Selon Hittorf, il fut le premier à voir les trois lignes du spectre de l'hydrogène, qui furent trouvées quelques mois après sa mort dans le spectre des protubérances solaires.

En 1865, Plücker retourne à la géométrie et invente alors ce qu'on appelait la géométrie des lignes au XIX^e siècle.

- En géométrie projective, les coordonnées plückeriennes sont un ensemble de coordonnées homogènes introduites d'abord pour plonger l'ensemble des lignes de l'espace projectif de dimension trois dans une quadrique dans l'espace projectif de dimension cinq. Leur construction utilise les mineurs 2×2 , ou de façon équivalente, la seconde puissance extérieure de l'espace vectoriel de dimension 4 sous-jacent. Les coordonnées de Plücker sont maintenant partie de la théorie des grassmanniennes, qui décrivent l'ensemble des sous-espaces de dimension k dans un espace de dimension n en toute généralité.
- En mécanique, on définit par coordonnées de Plücker, ou coordonnées Plückériennes, l'ensemble des 6 composantes d'une action mécanique de l'espace à 3 dimensions.

Plücker a reçu la Médaille Copley de la Royal Society en 1866.

Chapitre 2 *LES TORSEURS UTILISES EN MECANIQUE*

Toutes les fois qu'on peut associer deux champs de vecteurs \bar{R} et \bar{m} , le premier libre (donc ayant la même valeur en tout point de l'espace affine) et le second lié (c.à.d. dont la valeur dépend du point où il est considéré), les deux champs vérifiant la propriété fondamentale suivante : $\bar{m}_P = \bar{m}_Q + \bar{P}Q \wedge \bar{R} \quad \forall P, Q \in \mathcal{E}$, on dit qu'on est en présence d'un **torseur de coordonnées vectorielles** \bar{R} et \bar{m} au point P . \bar{m} est appelé champ des moments du torseur ainsi défini et \bar{R} sa résultante géométrique.

Dans le cas particulier de la mécanique, l'ingénieur utilise certains torseurs que nous nous proposons de présenter dans ce chapitre. Il s'agit notamment des torseurs suivants :

- Le torseur des efforts (ou des actions mécaniques/forces) appliqués que nous maîtrisons déjà.
- Le torseur distributeur des vitesses
- Le torseur des quantités de mouvement
- Le torseur des quantités d'accélération

Le rôle de ces différents torseurs sera explicité dans le chapitre suivant.

I- LE TORSEUR DES EFFORTS (OU DES ACTIONS MECANIQUES) APPLIQUES :

$$[\mathcal{T}]_O = \bar{F} + \epsilon \bar{m}_O$$

C'est le torseur auquel on est familier depuis le secondaire ; ses coordonnées vectorielles sont :

- Résultante = somme discrète (\sum_i) ou continue ($\int_{(s)}$) des forces appliquées,
- Moment = somme discrète ou continue des moments des forces appliquées.

Le torseur des efforts appliqués à un solide est un torseur dont la distribution peut être discrète ou continue (linéique, surfacique ou volumique).

I-1 Cas d'une distribution discrète d'effort

Soient n efforts \bar{F}_i s'appliquant en un nombre fini de n points M_i ; le torseur des efforts appliqués sur l'ensemble des n points est défini par :

- Sa résultante : $\bar{F} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$

-Son moment résultant en un point quelconque O : $\vec{m}_0 = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_i$

I-2 Cas d'une distribution continue d'effort

Dans ce cas on a une densité d'effort \bar{f}_M s'appliquant en un point M de l'espace de mesure μ ($\mu \in$ ligne, surface ou volume) ; l'effort élémentaire est $d\vec{F} = \bar{f}d\mu$ et le moment élémentaire $d\vec{m}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}$.

Le torseur des efforts appliqués est dans ce cas donné par :

- Sa résultante $\vec{F} = \int \bar{f}d\mu$
- Son moment résultant en un point quelconque O : $\vec{m}_0 = \int \overrightarrow{OM} \wedge \bar{f}d\mu$

II- LE TORSEUR DISTRIBUTEUR DES VITESSES OU TORSEUR CINÉMATIQUE :

$$[\dot{\gamma}_k]_M = \vec{\Omega}_k + \varepsilon \vec{V}_k(M)$$

II-1 Définition :

On a la formule classique de la composition des vitesses : $\vec{V}(M) = \vec{V}^k(M) + \vec{V}_k(M)$
avec $\vec{V}_k(M) = \vec{V}(O_k) + \vec{\Omega}_k \wedge \overrightarrow{O_k M}$.

Pour deux points A et B du solide (S_k) lié à (R_k), on a
 $\vec{V}^k(A) = \vec{V}^k(B) = \vec{0}$; et donc : $\vec{V}(A) = \vec{V}_k(A)$; $\vec{V}(B) = \vec{V}_k(B)$

$$\text{Or } \vec{V}_k(A) = \vec{V}(O_k) + \vec{\Omega}_k \wedge \overrightarrow{O_k A} \quad (1)$$

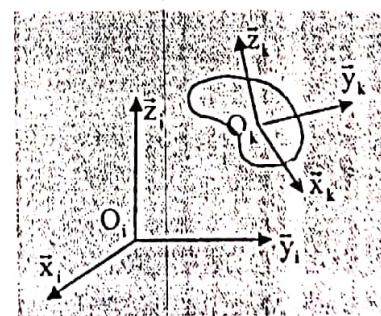
$$\text{et } \vec{V}_k(B) = \vec{V}(O_k) + \vec{\Omega}_k \wedge \overrightarrow{O_k B} \quad (2)$$

$$(2)-(1) \Rightarrow \vec{V}_k(B) - \vec{V}_k(A) = \vec{\Omega}_k \wedge (\overrightarrow{O_k B} - \overrightarrow{O_k A}) = \vec{\Omega}_k \wedge \overrightarrow{AB},$$

C'est-à-dire $\vec{V}_k(B) = \vec{V}_k(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_k$, soit en ajoutant d'un côté puis de l'autre les deux vecteurs nuls $\vec{V}^k(B)$ et $\vec{V}^k(A)$:

$$\vec{V}^k(B) + \vec{V}_k(B) = \vec{V}^k(A) + \vec{V}_k(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_k$$

Soit finalement :



$$\boxed{\bar{V}'(B) = \bar{V}'(\Lambda) + \bar{BA} \wedge \bar{\Omega}_k^i} \quad \forall \Lambda, B \in (S_k)(3)$$

Qui est connu sous l'appellation : *formule fondamentale de la cinématique du solide (F.F.C.S.)*.

(3) montre bien que le champ des vitesses d'un solide est un champ des moments (il sera donc équiprojectif) ; il définit par conséquent un torseur de résultante $\bar{\Omega}_k^i$ (le vecteur rotation instantanée du solide (S_k) par rapport à (S_i)) et de moment, en un point, la vitesse de ce point :

$$\boxed{[\gamma^i]_M = \bar{\Omega}_k^i + \varepsilon \bar{V}_k^i(M)}$$

N.B. : (R_i) est un référentiel qui peut être lié à un solide (S_i) quelconque ; ceci permet donc de parler du mouvement relatif des solides les uns par rapport aux autres.

Le torseur distributeur des vitesses du solide (S_k) dans son mouvement par rapport au solide (S_i) est alors noté en M : $\boxed{[\gamma^i]_M = \bar{\Omega}_k^i + \varepsilon \bar{V}_k^i(M)}.$

On l'appelle aussi **torseur champ des vitesses du solide (S_k) par rapport au solide (S_i)** ou encore **torseur cinématique du solide (S_k) dans son mouvement par rapport à (S_i)**.

C'est un torseur à distribution volumique.

II-2 Remarques :

(1) Puisque les vitesses se rapportent à un référentiel, il en est de même du torseur cinématique ; il est toujours donné pour (S), dans son mouvement par rapport à un référentiel donné.

(2) Avec $[\gamma'] = \bar{\Omega} + \varepsilon \bar{V}_0$, l'application de la relation de

Chasles : $\begin{cases} \bar{\Omega}_k^i = \bar{\Omega}_1^i + \bar{\Omega}_2^i + \dots + \bar{\Omega}_{k-1}^i \\ \bar{v}_k^i(M) = \bar{v}_1^i(M) + \bar{v}_2^i(M) + \dots + \bar{v}_{k-1}^i(M) \end{cases}$, montre que les torseurs cinématiques des

mouvements relatifs de n solides vérifient la relation : $\boxed{[\gamma']_n^1 = [\gamma']_1^1 + [\gamma']_2^1 + \dots + [\gamma']_{n-1}^1}$

C'est la relation de Chasles pour les torseurs cinématiques, ou relation cinématique du solide intermédiaire.

III- LE TORSEUR DES QUANTITES DE MOUVEMENTS OU TORSEUR CINETIQUE

III-1 Définition :

C'est le torseur :

$$[\mathcal{S}] = \vec{p} + c\vec{\sigma}_0$$

- La résultante ou somme géométrique du torseur est la quantité de mouvement du solide. On parle aussi de **résultante cinétique**.
- Le moment du torseur en un point est le **moment cinétique**.

Du fait que ses deux coordonnées vectorielles soient des grandeurs cinétiques, l'usage veut que le torseur des quantités de mouvement soit plutôt appelé **torseur cinétique**.

III-2 Expression :

- Pour un système matériel discret : n particules M_i de masse m_i et de vitesses \vec{V}_i

✓ $\vec{p} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ où $\vec{p}_i = m_i \vec{V}_i$

✓ $\vec{\sigma}_0 = \sum_i \vec{\sigma}_{0,i}$ où $\vec{\sigma}_{0,i} = \overline{OM}_i \wedge m_i \vec{V}_i$

Remarque : le moment cinétique au point O est souvent noté : \vec{L}_0 .

- Pour un système continu, cas d'une distribution continue de mesure μ (longueur, surface ou volume) et de densité de masse ρ , on a pour une quantité élémentaire de masse dm entourant le point M :

$$dm = \rho d\mu, \text{masse élémentaire}$$

$$d\vec{p} = \vec{V}_M dm, \text{quantité de mouvement élémentaire}$$

et $d\vec{\sigma}_0 = \overline{OM} \wedge d\vec{p}$, moment cinétique élémentaire en O ; c'est le moment de la quantité de mouvement.

Alors :

✓ La masse « globale » du système est $m = \int dm = \int \rho d\mu$

✓ La résultante cinétique est $\vec{p} = \int \vec{V}_M \rho d\mu = \int \vec{V}_M dm$

✓ Le moment cinétique en O est $\vec{\sigma}_0 = \int \overline{OM} \wedge \vec{V}_M \rho d\mu = \int \overline{OM} \wedge \vec{V}_M dm$

Soit à vérifier qu'on a bien un torseur ; c'est-à-dire que $\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_B + \overline{AB} \wedge \vec{p} \quad \forall A, B \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_A &= \int \overline{AM} \wedge \vec{V}_M \rho d\mu = \int (\overline{AB} + \overline{BM}) \wedge \vec{V}_M \rho d\mu = \int \overline{AB} \wedge \vec{V}_M \rho d\mu + \int \overline{BM} \wedge \vec{V}_M \rho d\mu \\ &= \overline{AB} \wedge \int \vec{V}_M \rho d\mu + \int \overline{BM} \wedge \vec{V}_M \rho d\mu \\ &= \overline{AB} \wedge \vec{p} + \vec{\sigma}_B \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_B + \overline{AB} \wedge \vec{p}}$

Le torseur cinétique sera noté :

$$[\mathcal{V}] = \vec{p} + \epsilon \vec{\sigma}_0$$

III-3 Remarques :

(1) Puisque :

$$\vec{p} = \int_{(S)} \overrightarrow{V_M} dm = \int_{(S)} \frac{d(\overline{OM})}{dt} dm = \frac{d}{dt} \int_{(S)} \overline{OM} dm = \frac{d}{dt} [m \overline{OG}] = m \frac{d}{dt} [\overline{OG}] = m \vec{V}_G,$$

on a directement :

$$\vec{p} = m \vec{V}_G$$

Et, avec la propriété fondamentale des torseurs, on écrit :

$$\vec{\sigma}_0 = \vec{\sigma}_{0'} + \overline{OO'} \wedge m \vec{V}_G ; \forall O, O' \in \mathcal{E}$$

C'est la formule de changement d'origine (ou de point de référence) pour le moment cinétique d'un solide

(2) Puisque les vitesses se rapportent à un référentiel, il en est de même du torseur cinétique ; il est toujours donné pour (S) , dans son mouvement par rapport à un référentiel donné.

IV- LE TORSEUR DES QUANTITES D'ACCELERATION OU TORSEUR DYNAMIQUE :

$$[\mathcal{A}] = \vec{\Sigma} + \epsilon \vec{\delta}_0$$

IV-1 Définition :

Dans un référentiel galiléen, l'accélération d'un point M est notée $\vec{\Gamma}^*(M)$. Pour un système matériel continu (cas d'un solide), on définit pour une quantité élémentaire de masse dm entourant un point M quelconque :

- ✓ La quantité d'accélération élémentaire : $d\vec{\Sigma}^* = \vec{\Gamma}^*(M) dm$
- ✓ Le moment dynamique élémentaire au point O quelconque : $d\vec{\delta}_0^* = \overline{OM} \wedge \vec{\Gamma}^*(M) dm$

Le torseur dynamique $[\mathcal{A}]$ d'un solide a donc pour coordonnées vectorielles :

- ✓ La quantité d'accélération totale ou résultante dynamique ou somme dynamique $\vec{\Sigma}^* = \int_{M \in (S)} \vec{\Gamma}^*(M) dm = m \vec{\Gamma}^*(G)$ avec m : masse totale du solide (S) et G : son centre d'inertie.
- ✓ Le moment dynamique en un point O quelconque : $\vec{\delta}_0^* = \int_{M \in (S)} \overline{OM} \wedge \vec{\Gamma}^*(M) dm$

Et le **torseur dynamique** d'un solide sera noté : $\boxed{[\mathcal{M}] = \bar{\Sigma} + \varepsilon \bar{\delta}_0}$

IV-2 Remarques :

(1) — Grâce à la propriété fondamentale des torseurs, on peut écrire :

$$\bar{\delta}_0 = \bar{\delta}_0 + \overline{OO'} \wedge \bar{\Sigma}^g, \quad \text{c'est-à-dire : } \boxed{\bar{\delta}_0 = \bar{\delta}_0 + m \overline{OO'} \wedge \bar{\Gamma}^g(G)}$$

(2) - On a les relations suivantes entre les coordonnées vectorielles des torseurs cinétique et dynamique :

$$\boxed{\bar{\Sigma}^g = \frac{d^g}{dt} \bar{p}^g} \quad \text{et} \quad \boxed{\bar{\delta}_0^g = \frac{d^g}{dt} \bar{\sigma}_0^g + m \bar{V}_0^g \wedge \bar{V}_G^g}$$

En effet :

a) $\bar{\Sigma}^g = m \bar{\Gamma}^g(G) = m \frac{d^g}{dt} \bar{V}_G^g = \frac{d^g}{dt} (m \bar{V}_G^g) = \frac{d^g}{dt} \bar{p}^g$; c'est-à-dire : $\bar{\Sigma}^g = \frac{d^g}{dt} \bar{p}^g$

b) $\frac{d^g}{dt} \bar{\sigma}_0^g = \frac{d^g}{dt} \left(\int_{(S)} \overline{OM} \wedge \bar{V}_M^g dm \right) = \int_{(S)} \frac{d^g}{dt} (\overline{OM} \wedge \bar{V}_M^g) dm$ (masse est indépendante du temps)

$$= \int_{(S)} \frac{d^g}{dt} (\overline{OM}) \wedge \bar{V}_M^g dm + \int_{(S)} (\overline{OM} \wedge \frac{d^g}{dt} \bar{V}_M^g) dm$$

$$= \int_{(S)} \frac{d^g}{dt} (\overline{OO_g} + \overline{O_g M}) \wedge \bar{V}_M^g dm + \int_{(S)} \overline{OM} \wedge \bar{\Gamma}_M^g dm$$

$$= \int_{(S)} (\bar{V}_M^g - \bar{V}_0^g) \wedge \bar{V}_M^g dm + \bar{\delta}_0^g = \int_{(S)} -\bar{V}_0^g \wedge \bar{V}_M^g dm + \bar{\delta}_0^g = -\bar{V}_0^g \wedge \int_{(S)} \bar{V}_M^g dm + \bar{\delta}_0^g$$

$$= -\bar{V}_0^g \wedge m \bar{V}_G^g + \bar{\delta}_0^g ; \text{c'est-à-dire : } \bar{\delta}_0^g = \frac{d^g}{dt} \bar{\sigma}_0^g + m \bar{V}_0^g \wedge \bar{V}_G^g$$

(3) Si le point de référence O est fixe par rapport au référentiel galiléen (R_g) : $\bar{V}_0^g = \vec{0}$ et donc :

$$\boxed{\bar{\delta}_0^g = \frac{d^g}{dt} \bar{\sigma}_0^g}$$

(4) Si le point de référence O est le centre d'inertie : $\bar{V}_0^g \wedge \bar{V}_0^g = \vec{0}$ et donc : $\boxed{\bar{\delta}_0^g = \frac{d^g}{dt} \bar{\sigma}_0^g}.$

V- EXERCICES RESOLUS SUR LES TORSEURS UTILISES EN MECANIQUE

V-1 Exercice résolu n°1 : torseur d'action mécanique à distribution continu d'effort

On reprend ici le torseur charge continue de densité de force $d\vec{f} = -\lambda_0 dx \vec{e}_y$, sur une première moitié du pont AB. Dans le chapitre des généralités sur les torseurs, on a vu que ce torseur pouvait s'écrire en notation duale :

$$[T]_A = -\lambda_0 \frac{L}{2} \vec{e}_y + e \frac{-\lambda_0 L^2}{8} \vec{e}_z$$

Et que l'axe central de ce torseur passe par le point $G(\frac{L}{4}, 0, 0)$ et est dirigé suivant la verticale \vec{e}_y . En recherchant l'équation de la droite passant par ce point G et dirigée par \vec{e}_y , il vient que l'axe central de ce torseur a pour équations cartésiennes :

$$(\Delta): \begin{cases} x = \frac{L}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

V-2 Exercice résolu n°2 : torseur distributeur des vitesses d'un solide

Enoncé :

Un pendule simple est constitué d'une barre légère à l'extrémité de laquelle est accrochée un objet M de masse m. L'autre extrémité est fixée en O sur l'axe $\Delta(O, \vec{z}_i)$ d'un moteur qui fait tourner le pendule dans le plan vertical à la période T. On désire déterminer son torseur cinématique.

Solution : Si le pendule tourne avec une période T, la pulsation

est obtenue par $\omega = \frac{2\pi}{T}$; l'angle de rotation θ est obtenu à

l'aide de la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega = \frac{2\pi}{T}$. On déduit que le

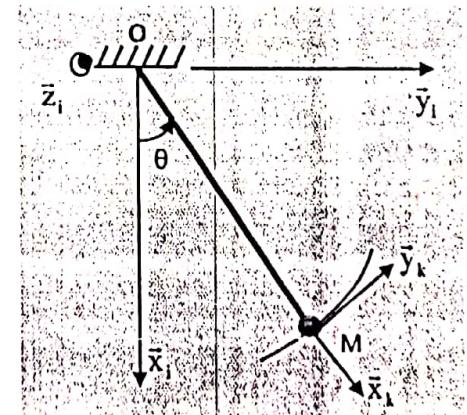
vecteur rotation instantanée du pendule (S_k) par rapport au repère fixe (R_i) est : $\vec{\Omega}_k^i = \dot{\theta} \vec{z}_i = \frac{2\pi}{T} \vec{z}_i$.

A ce vecteur, il suffit d'associer la vitesse d'un point quelconque de (S_k), par exemple le point O (de vitesse nulle). D'où le résultat :

$$\left[\begin{matrix} \gamma_k^i \\ \vec{V}_k^i \end{matrix} \right] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_k^i = \frac{2\pi}{T} \vec{z}_i \\ \vec{V}_k^i(O) = \vec{V}_k^i(O) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

Et si l'on désire réduire le torseur au point M (cas où on veut connaître la vitesse du point M), il suffit de chercher le moment de ce torseur en M :

$$\tilde{V}_k^i(M) = \tilde{V}_k^i(O) + \overline{MO} \wedge \vec{\Omega}_k^i = \overline{MO} \wedge \vec{\Omega}_k^i = -L \vec{x}_k \wedge \omega \vec{z}_i = L \omega \vec{y}_k ; \text{ et donc :}$$



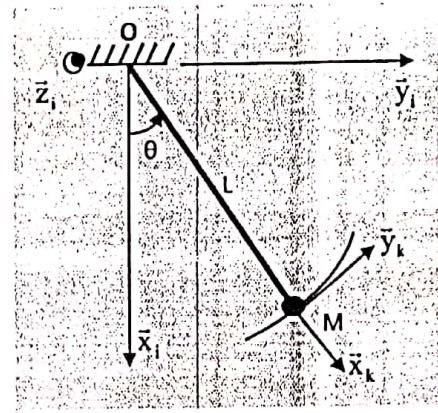
$$\left[\gamma^i_k \right] = \begin{cases} \bar{\Omega}_k^i = \frac{2\pi}{T} \bar{z}_i \\ \bar{V}_k^i(M) = \frac{2\pi L}{T} \bar{y}_k \end{cases}$$

V-3 Exercice résolu n°3 : détermination du torseur cinétique d'un solide

On reprend le pendule simple de longueur $OM = L$ et de masse m placée au bout M , la masse étant toute concentrée au point M ($G \equiv M$) et dont la vitesse imposée par l'arbre du moteur est $\bar{V}_k^i(M) = \frac{2\pi L}{T} \bar{y}_k$:

$G \equiv M \rightarrow \bar{V}_G = \bar{V}_M = \frac{2\pi L}{T} \bar{y}_k$; on a ainsi la quantité de mouvement du pendule: $\bar{p} = m\bar{V}_G = \frac{2\pi L m}{T} \bar{y}_k$ et le moment cinétique en O :

$$\bar{\sigma}_o = \overline{OG} \wedge m\bar{V}_G = L\bar{x}_k \wedge \frac{2\pi L}{T} m\bar{y}_k = \frac{2\pi L^2 m}{T} \bar{z}_k.$$



D'où le torseur cinétique du pendule :

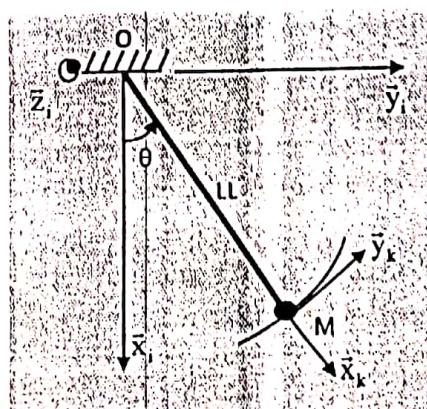
$$\left[\mathcal{G} \right] = \begin{cases} \bar{p} = \frac{2\pi L m}{T} \bar{y}_k \\ \bar{\sigma}_o = \frac{2\pi L^2 m}{T} \bar{z}_k \end{cases}$$

V-4 Exercice résolu n°4 : détermination du torseur dynamique d'un solide en mouvement

Soit à déterminer le torseur dynamique d'un pendule simple mis en rotation uniforme à la période T par un moteur d'axe horizontal.

* Somme dynamique :

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}' &= \frac{d^i}{dt} \bar{p}' = \frac{d^i}{dt} \left[\frac{2\pi L m}{T} \bar{y}_k \right] = \frac{2\pi L m}{T} \frac{d^i}{dt} \bar{y}_k \\ \rightarrow \bar{\Sigma}' &= \frac{2\pi L m}{T} \left(\frac{d^k}{dt} \bar{y}_k + \bar{\Omega}_k^i \wedge \bar{y}_k \right) = \frac{2\pi L m}{T} \left(\bar{\theta} + \frac{2\pi}{T} \bar{z}_k \wedge \bar{y}_k \right) \end{aligned}$$



$$\rightarrow \bar{\Sigma}^i = -\frac{4\pi^2}{T^2} L m \vec{x}_k$$

* Moment dynamique :

$$\ddot{\delta}_o^i = \frac{d^i}{dt} \vec{\sigma}_o^i + m \vec{V}_o^i \wedge \vec{V}_o^i ; \text{ ici } \vec{V}_o^i = \vec{0} \rightarrow \ddot{\delta}_o^i = \frac{d^i}{dt} \vec{\sigma}_o^i = \frac{d^i}{dt} \left(\frac{2\pi m L^2}{T} \vec{z}_i \right) = \vec{0} \rightarrow \underline{\ddot{\delta}_o^i = \vec{0}}$$

D'où le torseur dynamique :

$$[\mathcal{M}]_o = -\frac{4\pi^2}{T^2} L m \vec{x}_k + \epsilon \vec{0}$$

Chapitre 3 *ROLE DES TORSEURS EN MECANIQUE*

Il s'agit, dans ce paragraphe, d'examiner à quoi peuvent servir les quatre torseurs suivants :

- $[\mathcal{T}]$: torseur des efforts extérieurs appliqués à un solide : $[\mathcal{T}] = \vec{F} + \epsilon \vec{m}_0$
- $[\mathcal{V}]$: Torseur cinématique du solide : $[\mathcal{V}] = \vec{\Omega} + \epsilon \vec{V}_0$
- $[\mathcal{A}]$: Torseur cinétique du solide : $[\mathcal{A}] = \vec{p} + \epsilon \vec{\delta}_0$
- $[\mathcal{M}]$: Torseur dynamique du solide : $[\mathcal{M}] = \vec{\Sigma} + \epsilon \vec{\delta}_0$

I- ETUDE CINÉMATIQUE DES MOUVEMENTS

I-1 Equiprojectivité du champ des vitesses d'un solide

Un solide (indéformable) est caractérisé par le fait que la distance entre deux de ses points quelconques A et B est constante. On peut donc écrire :

$$\forall A, B \in (S), d(A, B)^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} = C^e$$

$$\rightarrow 0 = \frac{d}{dt} C^e = \frac{d}{dt} (\|\overrightarrow{AB}\|) = 2 \overrightarrow{AB} \bullet \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB}$$

$$\text{c.à.d. } \rightarrow 0 = \overrightarrow{AB} \bullet \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \bullet \frac{d}{dt} (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{AB} \bullet \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{AO} + \frac{d}{dt} \overrightarrow{OB} \right]$$

$$\rightarrow 0 = \overrightarrow{AB} \bullet \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{OB} - \frac{d}{dt} \overrightarrow{OA} \right] = \overrightarrow{AB} \bullet [\vec{V}(B) - \vec{V}(A)]$$

$$\rightarrow \overrightarrow{AB} \bullet \vec{V}(B) = \overrightarrow{AB} \bullet \vec{V}(A). \text{ D'où l'équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide}$$

Ainsi, le champ des vitesses d'un solide est un champ des moments d'un torseur, le torseur distributeur des vitesses du solide encore appelé « Torseur cinématique du solide ».

I-2 Le torseur cinématique d'un solide

C'est un torseur ayant pour champ des moments le champ des vitesses du solide ; il reste à déterminer le vecteur somme géométrique de ce torseur.

La composition des mouvements des points mobiles s'exprime par la relation :

$$\vec{V}^i(M) = \vec{V}^k(M) + \vec{V}_k^i(M)$$

où $\vec{V}_k^i(M) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M}$ est appelé vitesse d'entraînement de M, dans le mouvement relatif de (R_k) par rapport à (R_i). C'est aussi la vitesse, par rapport à (R_i), d'un point M qui serait fixe en (R_k).

Si on considère qu'un référentiel est un ensemble rigide de points fixes par rapport à un observateur, on peut à tout instant lier un référentiel à un solide et vice-versa. Un point fixe par rapport à (R_k) est donc tout simplement un point du solide (S_k) lié à (R_k). Dans ce sens, deux points quelconques A et B d'un solide (S_k), vérifiant successivement :

$$\vec{V}'(A) = \vec{V}^k(A) + \vec{V}_k^i(A) = \vec{V}_k^i(A) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k A} \quad (1)$$

$$\vec{V}'(B) = \vec{V}^k(B) + \vec{V}_k^i(B) = \vec{V}_k^i(B) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k B} \quad (2)$$

La différence des deux égalités donne :

$$\vec{V}'(A) - \vec{V}'(B) = \vec{V}_k^i(A) - \vec{V}_k^i(B) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k A} - \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k B} \text{ c'est - à - dire :}$$

$$\vec{V}'(A) - \vec{V}'(B) = \vec{V}_k^i(A) - \vec{V}_k^i(B) = \vec{\Omega}_k^i \wedge (\overrightarrow{O_k A} - \overrightarrow{O_k B}) = \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{BA} ;$$

d'où : $\forall A, B \in S_k, \vec{V}'(A) = \vec{V}'(B) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{\Omega}_k^i$ qui est bien la formule fondamentale d'un torseur, de somme géométrique $\vec{\Omega}_k^i$, vecteur rotation instantanée de (R_i) par rapport à (R_k).

On conclut ainsi que le torseur cinématique du mouvement d'un solide (S_k) par rapport au référentiel (R_i) ou mieux au solide (S_i) est de la forme duale :

$$\left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & 1 \\ & \cdot & 1 \end{smallmatrix} \right]_A = \vec{\Omega}_k^i + \varepsilon \vec{V}_k^i(A) = \vec{\Omega}_k^i + \varepsilon \vec{V}_{A \epsilon(S_k)}^i = \begin{cases} \tilde{S} = \vec{\Omega}_k^i \\ \tilde{v}_A = \vec{V}_{A \epsilon(S_k)}^i \end{cases}$$

Nota : L'axe central du torseur cinématique est appelé **axe de viration** [du mouvement de (S_k) par rapport à (S_i)].

Remarques :

(1) La présentation de l'étude du mouvement d'un solide sous forme de torseur permet d'exprimer la vitesse de n'importe quel point du solide aussitôt que l'on connaît la vitesse d'un point particulier du solide.

(2) Mouvement d'un solide par rapport à plusieurs repères (ou solides) : A un solide quelconque (S_n)_{n=0,1,2,3...} on lie généralement un repère (R_n). On peut alors décrire le mouvement d'un solide (S_k) par rapport à un solide quelconque (S_n) par le torseur $\left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & 1 \\ & \cdot & 1 \end{smallmatrix} \right]$ tel que $\left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & 1 \\ & \cdot & 1 \end{smallmatrix} \right]_A = \vec{\Omega}_k^i + \varepsilon \vec{V}_k^i(A) = \vec{\Omega}_k^i + \varepsilon \vec{V}_{A \epsilon(S_n)}^i$; mais les solides (S_n) peuvent aussi bien être en mouvement les uns par rapport aux autres, ces mouvements étant décrits par les torseurs successifs $\left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & 0 \\ & \cdot & 1 \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & 1 \\ & \cdot & 2 \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & 2 \\ & \cdot & 3 \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & 3 \\ & \cdot & 4 \end{smallmatrix} \right]$, etc. Les propriétés des vecteurs $\vec{\Omega}_k^i$ et \vec{V}_k^i , relatives aux repères intermédiaires se traduisent sous forme torsiorelle par :

$$\left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & k \\ & \cdot & k \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & 0 \\ & \cdot & 1 \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & 1 \\ & \cdot & 2 \end{smallmatrix} \right] + \dots + \left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & n-1 \\ & \cdot & n \end{smallmatrix} \right] + \left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & n \\ & \cdot & k \end{smallmatrix} \right]$$

Nota : - on retiendra que les torseurs doivent être réduits au même point, c.à.d. :

$$\left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & k \\ & \cdot & k \end{smallmatrix} \right]_A = \left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & 0 \\ & \cdot & 1 \end{smallmatrix} \right]_A + \left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & 1 \\ & \cdot & 2 \end{smallmatrix} \right]_A + \dots + \left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & n-1 \\ & \cdot & n \end{smallmatrix} \right]_A + \left[\begin{smallmatrix} \gamma & \cdot & n \\ & \cdot & k \end{smallmatrix} \right]_A$$

- le vecteur $\vec{V}_k^i(\Lambda) = \vec{V}_k^i \wedge = \vec{V}_{\Lambda \in (S_k)}^i$ est la vitesse du point de (S_i) qui se trouve confondu avec le point Λ de (S_k) à l'instant t donné ; $\vec{V}_k^i(\Lambda) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k \Lambda}$

I-3 Mouvements particuliers simples de solides

De manière générale, l'étude cinématique des mouvements est fondée sur ce torseur cinématique, notamment sur les propriétés de ses vecteurs résultante géométrique $\vec{\Omega}_k^i$ et moment $\vec{V}_k^i(\Lambda \in S_k)$. D'autre part, les liaisons entre solides, dans les systèmes mécaniques, imposent aux solides des mouvements particuliers dont l'étude est indispensable pour définir les performances des systèmes. Parmi ces mouvements particuliers, nous présentons dans la suite, à l'aide de leurs torseurs cinématiques, les plus fréquents, à savoir :

- Le mouvement de translation
- Le mouvement de rotation
- Le mouvement hélicoïdal
- Les mouvements plan sur plan.

a) Le mouvement de translation d'un solide

Les solides (S_1) et (S_2) sont respectivement liés aux référentiels $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $R_2(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

Définition :

(S_2) est en translation par rapport à (S_1) si le torseur cinématique de (S_2) dans son mouvement par rapport à (S_1) est de la forme :

$$\left[\begin{smallmatrix} \vec{\Omega}_2^1 \\ \vec{V}_2^1 \end{smallmatrix} \right] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_2^1 = \vec{0} \\ \vec{V}_2^1 p \end{array} \right\}$$

$\vec{\Omega}_2^1 = \vec{0} \Rightarrow (R_2)$ garde une orientation fixe par rapport à (R_1) ; c'est le cas particulier où les axes de (R_2) restent parallèles à ceux de (R_1) .

$\vec{\Omega}_2^1 = \vec{0} \Rightarrow$ le torseur cinématique d'un mouvement de translation est un couple.

Propriété :

Tous les points du solide (S_2) ont une même vitesse lors de la translation.

En effet : $\forall P, Q \quad \vec{V}_2^1 p = \vec{V}_2^1 Q + \vec{PQ} \wedge \vec{\Omega}_2^1 = \vec{V}_2^1 Q$

Remarques :

1) Tous les points du solide (S_2) ont la même accélération : $\vec{\Gamma}_2^1(\Lambda) = \vec{\Gamma}_2^1(B)$

2) Les vitesses étant identiques, les trajectoires des points du solide en translation sont superposables. La nature de la trajectoire d'un point de solide (exemple O_2) permet de qualifier le type de translation :

- Si la trajectoire de O_2 est une droite, on a une translation rectiligne.
- Si la trajectoire de O_2 est un cercle, on a une translation circulaire.
- Si la trajectoire de O_2 est une courbe, on a une translation curviligne ; les translations circulaire, elliptique, parabolique etc., en sont des cas particuliers.

b) Le mouvement de rotation d'un solide

Définitions :

- (S_2) est en **rotation autour d'un point O_1** de (S_1) si le torseur cinématique de (S_2) dans son mouvement par rapport à (S_1) réduit en O_1 , est de la forme :

$$[\mathcal{V}_2^1] = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_2^1 \\ \bar{v}_2^1 O_1 = \bar{0} \end{array} \right\}$$

- (S_2) est en **rotation autour d'un axe $\Delta(O_1, \vec{u})$** de (S_1) si ce torseur a plutôt la forme :

$$[\mathcal{V}_2^1] = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_2^1 \\ \bar{v}_2^1 p = \bar{0} \end{array} \right\}_{p \in \Delta} \text{ en tout point } P \in \Delta(O_1, \vec{u}) ; \text{ c.à.d. : } (S_2) \text{ est en rotation autour de tout point}$$

de l'axe (O_1, \vec{u}) .

Propriétés :

- Puisqu'il existe un point O_1 pour lequel ce $\bar{m}_{O_1} = \bar{0}$, le torseur cinématique est un glisseur ; et là où (lorsque) le moment n'est pas nul, ce moment est perpendiculaire à $\bar{\Omega}$.

En effet, $\bar{m}_P = \bar{m}_O + \overrightarrow{PO} \wedge \bar{R} \stackrel{\text{si } \bar{m}_O = \bar{0}}{=} \overrightarrow{PO} \wedge \bar{R}$, qui est bien orthogonal à $\bar{R} = \bar{\Omega}$.

D'où : (S_2) en rotation par rapport à $O_1 \Rightarrow \forall P \in (S_2) : \bar{\Omega}_2^1 \cdot \bar{v}_2^1(P) = 0$

- Dans le cas d'une rotation autour d'un axe $\Delta(O_1, \vec{u})$ de (S_1) :

$$\forall P, Q \in \Delta(O_1, \vec{u}) \left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_2^1 P = \bar{v}_2^1 Q = \bar{0} \\ \bar{v}_2^1 P = \bar{v}_2^1 Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \bar{\Omega}_2^1 \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \wedge \bar{\Omega}_2^1 = \bar{0} \Rightarrow \boxed{\bar{\Omega}_2^1 \text{ colinéaire à } \Delta(O_1, \vec{u})}$$

$\Delta(O_1, \vec{u})$ est appelé **Axe Instantané de Rotation (A.I.R)** de (S_2) par rapport à (S_1) .

Remarque :

La propriété $\forall P, \bar{\Omega}_2^1 \cdot \bar{v}_2^1(P) = 0$ permet de représenter graphiquement un vecteur vitesse lors d'un mouvement de rotation.

c) Le mouvement hélicoïdal

Définition :

(S_2) est animé d'un mouvement hélicoïdal d'axe $\Delta(O_1, \vec{z}_1)$ et de pas λ par rapport à (S_1) si le torseur cinématique est de la forme suivante :

$$[\dot{\gamma}_2] = \begin{cases} \vec{\Omega}_2^1 = \omega \vec{z}_1 \\ \vec{V}_2^1 P = L \omega \sin(\omega t + \phi) \vec{x}_1 - L \omega \cos(\omega t + \phi) \vec{y}_1 + \lambda \omega \vec{z}_1 \end{cases}$$

Où L est la distance du point P à l'axe $\Delta(O_1, \vec{z}_1)$.

Remarque :

Le mouvement de (S_2) est la combinaison d'un mouvement de rotation circulaire autour de \vec{z}_1 et un mouvement de translation suivant \vec{z}_1 .

En effet, soient H et H' les projets respectifs sur (O_1, \vec{z}_1) et $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ de $P \in (S_2)$.

$\vec{r}_1(P) = \overrightarrow{O_1 P} = \overrightarrow{O_1 H} + \overrightarrow{O_1 H'}$; de $\rightarrow \vec{V}_2^1 P = \lambda \omega \vec{z}_1 + L \omega \sin(\omega t + \phi) \vec{x}_1 - L \omega \cos(\omega t + \phi) \vec{y}_1$, on extrait : $\vec{V}_1(H) = \lambda \omega \vec{z}_1$ et $\vec{V}_1(H') = L \omega \sin(\omega t + \phi) \vec{x}_1 - L \omega \cos(\omega t + \phi) \vec{y}_1$. Il vient donc que H effectue une translation suivant \vec{z}_1 alors que H' effectue une rotation circulaire autour de \vec{z}_1 .

Propriété :

1°) Tous les points du solide (S_2) situés sur l'axe $\Delta(O_1, \vec{z}_1)$ effectuent uniquement une translation (suivant cet axe).

En effet, soit I un de ces points ; il est à une distance $L = 0$.

$\rightarrow \vec{V}_2^1 I = \lambda \omega \vec{z}_1 + 0 \times \omega \sin(\omega t + \phi) \vec{x}_1 - 0 \times \omega \cos(\omega t + \phi) \vec{y}_1 \rightarrow \vec{V}_2^1 I = \lambda \omega \vec{z}_1$; I se déplace donc sur $\Delta(O_1, \vec{z}_1)$.

2°) Le projeté H' du point P dans le plan $\Pi(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1)$ décrit un cercle

En effet : $\vec{V}_1(H') = L \omega \sin(\omega t + \phi) \vec{x}_1 - L \omega \cos(\omega t + \phi) \vec{y}_1$

$\rightarrow \vec{r}_1(H') = -L \cos(\omega t + \phi) \vec{x}_1 + L \sin(\omega t + \phi) \vec{y}_1$, qui est le rayon vecteur d'une particule effectuant un mouvement circulaire.

d) Le mouvement plan sur plan de solides

Définition :

(S_2) est animé d'un mouvement plan sur plan de normale \vec{Z} par rapport à (S_1) si le torseur cinématique [en un point P quelconque de (S_2)] est de la forme :

$$\left[\begin{matrix} \gamma_2 \\ \gamma_2^1 \end{matrix} \right] = \left\{ \begin{matrix} \omega_2^1 \bar{z}_1 \\ u_p \bar{x}_1 + v_p \bar{y}_1 \end{matrix} \right\}_{\forall P \in (S_2)}, \text{ soit encore : } \left[\begin{matrix} \gamma_2 \\ \gamma_2^1 \end{matrix} \right] = \left\{ \begin{matrix} \tilde{\Omega}_2^1 = \omega_2^1 \bar{z}_1 = \omega_{2/1} \bar{z}_1 \\ \tilde{V}_{2P}^1 = u_p \bar{x}_1 + v_p \bar{y}_1 \end{matrix} \right.$$

Axe et Centre Instantanés de Rotation :

Dans un mouvement plan sur plan de (S_2) par rapport à (S_1) , $\forall P \in (S_2)$: $\tilde{\Omega}_2^1 \cdot \tilde{V}_{2P}^1 = 0$ et $\tilde{\Omega}_2^1$ a une direction fixe \bar{z}_1 (la "normale" du mouvement).

Ce mouvement est donc à tout instant un mouvement de rotation autour d'un axe (I, \bar{z}_1) d'après la première propriété d'un mouvement de rotation; $\Delta(I, \bar{z}_1)$ est appelé **Axe Instantané de Rotation (A.I.R)** de (S_2) dans son mouvement par rapport à (S_1) .

Tous les points Q de l'AIR sont tels que $\tilde{V}_2^1 Q = \vec{0}$; on peut particulariser un point I d'un plan d'étude privilégié (exemple le plan de symétrie) et rechercher I appartenant à ce plan tel que $\tilde{V}_2^1 I = \vec{0}$. Ce point particulier I est appelé **Centre Instantané de Rotation (C.I.R)** des points de (S_2) appartenant à ce plan d'étude privilégié.

Propriétés : (détermination du C.I.R.)

Soit un point quelconque P de (S_2) pris dans le plan privilégié où on recherche I.

$$\tilde{V}_2^1 P = \tilde{V}_2^1 I + \tilde{P}I \wedge \tilde{\Omega}_2^1 = \vec{0} \text{ avec } \tilde{V}_2^1 I = \vec{0} \Rightarrow \tilde{V}_2^1 P = \tilde{P}I \wedge \tilde{\Omega}_2^1 \Rightarrow \tilde{P}I \perp \tilde{V}_2^1 P \quad \forall P \in (S_2)$$

P₁:

Le CIR, I, se trouve à l'intersection des normales aux vitesses de deux points quelconques de (S_2) .

N.B : Dans un mouvement plan de (S_2) par rapport à (S_1) , le champ des vitesses de (S_2) par rapport à (S_1) est tel que toutes les normales aux vitesses sont concourantes en I.

Cette propriété est valablement exploitée dans la résolution graphique des problèmes de cinématique.

P₂ : (Théorème des trois plans glissants).

« Dans les mouvements plans relatifs de trois solides (S_0) , (S_1) , (S_2) les trois CIR I_{12} , I_{10} , I_{20} sont alignés »

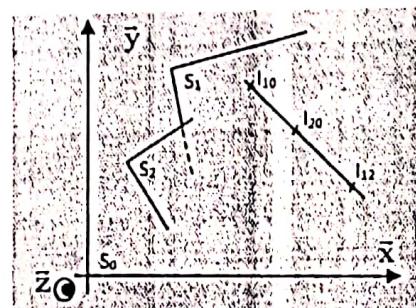
En effet :

$$I_{12} \text{ C.I.R des mouvements de } (S_1) \text{ par rapport à } (S_2) \rightarrow \tilde{V}_1^2 I_{12} = \vec{0}, \rightarrow \vec{0} = \tilde{V}_1^2 I_{12} = \tilde{V}_0^2 I_{12} + \tilde{V}_1^0 I_{12} \quad (1)$$

$$\text{Or } I_{12} \in (S_1) \rightarrow \tilde{V}_1^0 I_{12} = \tilde{V}_1^0 I_{10} + \tilde{I}_{12} \tilde{I}_{10} \wedge \tilde{\Omega}_1^0, \text{ avec } \tilde{\Omega}_1^0 = \omega_{10} \bar{z}. \quad (\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \bar{z})$$

$\rightarrow \tilde{V}_1^0 I_{12} = \tilde{I}_{12} \tilde{I}_{10} \wedge \omega_{10} \bar{z}$ car $\tilde{V}_1^0 I_{10} = \vec{0}$ du fait que I₁₀ soit CIR du mouvement de S₁ par rapport à S₀.

$$\text{De même : } \tilde{V}_0^2 I_{12} = \tilde{V}_0^2 I_{20} + \tilde{I}_{12} \tilde{I}_{20} \wedge \tilde{\Omega}_0^2 \text{ avec } \tilde{\Omega}_0^2 = \omega_{02} \bar{z}$$



$\rightarrow \dot{V}_0^2 I_{12} = \overrightarrow{I_{12} I_{20}} \wedge \omega_{02} \vec{z}$ du fait que I_{20} soit le CIR du mouvement de S_0 par rapport à S_2 .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } (1) \Rightarrow \vec{0} &= \overrightarrow{I_{12} I_{10}} \wedge \omega_{10} \vec{z} + \overrightarrow{I_{12} I_{20}} \wedge \omega_{02} \vec{z} \\ &= (\omega_{10} \overrightarrow{I_{12} I_{10}} + \omega_{02} \overrightarrow{I_{12} I_{20}}) \wedge \vec{z} = \vec{0} \\ \rightarrow \omega_{10} \overrightarrow{I_{12} I_{10}} + \omega_{02} \overrightarrow{I_{12} I_{20}} &= \vec{0} \text{ car non colinéaire à } \vec{z} \rightarrow \omega_{10} \overrightarrow{I_{12} I_{10}} - \omega_{20} \overrightarrow{I_{12} I_{20}} = \vec{0} \\ \rightarrow \overrightarrow{I_{12} I_{10}} &= -\frac{\omega_{02}}{\omega_{10}} \overrightarrow{I_{12} I_{20}} \text{ ou } \overrightarrow{I_{12} I_{10}} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} \overrightarrow{I_{12} I_{20}} \Rightarrow I_{12}, I_{10} \text{ et } I_{20} \text{ sont alignés} \end{aligned}$$

N.B : Cette propriété est valablement exploitée dans la résolution graphique des problèmes de cinématique.

P₃:

« Le module de la vitesse d'un point P est proportionnel à sa distance par rapport à l'A.I.R. »

$$\begin{aligned} \text{En effet } \dot{V}_2^1 p &= \dot{V}_2^1 I_{12} + \overrightarrow{PI_{12}} \wedge \vec{\Omega}_2^1 = \overrightarrow{PI_{12}} \wedge \vec{\Omega}_2^1 \\ \Rightarrow \|\dot{V}_2^1 p\| &= \|\overrightarrow{PI_{12}}\| \cdot \|\vec{\Omega}_2^1\| \cdot \sin(\overrightarrow{PI_{12}}, \vec{\Omega}_2^1) \text{ qui est proportionnel à } \|\overrightarrow{PI_{12}}\| \sin \alpha \end{aligned}$$

N.B : Cette propriété permet une représentation graphique du champ des vecteurs vitesses et est ainsi valablement exploitée dans la résolution graphique des problèmes de cinématique.

Surfaces axoïdes dans un Mouvement Plan sur Plan : Base et Roulante du mouvement

- Définitions

Dans le mouvement plan sur plan de (S_2) par rapport (S_1), l'A.I.R $\Delta(I, \vec{z}_1)$ de (S_2) dans son mouvement par rapport à (S_1) change de position à chaque instant. $\Delta(I, \vec{z}_1)$ engendre donc sur (S_1) et (S_2) deux surfaces réglées, c.à.d. engendrées par une droite, (Σ_1) et (Σ_2) appelées surfaces axoïdes de ce mouvement.

Dans ce mouvement pour lequel (S_1) est pris pour référence (i.e. fixe), on appelle :

- Surface axoïde **base** ou simplement **Base du mouvement** : la surface axoïde (Σ_1) ; c'est le lieu du centre instantané de rotation (CIR) I dans (S_1)
- Surface axoïde **roulante** ou simplement **Roulante du mouvement** : la surface axoïde (Σ_2) ; c'est le lieu du centre instantané de rotation (CIR) I dans (S_2)

- Propriétés

$$1) \quad \dot{V}_2^1 I = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \text{La base et la roulante sont à tout instant tangent en I} \\ \text{La roulante roule sans glisser sur la base} \end{cases}$$

2) Au cours d'un mouvement plan sur plan de (S_2) par rapport à (S_1), la base est une courbe plane liée à (S_1) et la roulante est une courbe plane liée à (S_2).

⇒ Le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) peut être étudié comme le mouvement de la rouleante par rapport à la base.

Cette analyse est très utile lorsque base et rouleante sont des cercles ou des droites ; elle trouve en particulier son application dans l'étude des engrenages.

e) Mouvement le plus général d'un solide

On sait $\forall P, Q \in (S_2)$: $\vec{V}_2^1 P = \vec{V}_2^1 Q + \overrightarrow{PQ} \wedge \vec{\Omega}_2^1$. En utilisant un point H de l'axe de vibration, axe central du torseur cinématique, $\vec{V}_2^1 H = \lambda \vec{\Omega}_2^1$; et donc :

$$\forall P \in (S_2), \vec{V}_2^1 P = \lambda \vec{\Omega}_2^1 + \overrightarrow{PH} \wedge \vec{\Omega}_2^1.$$

Ainsi :

- (1) Si à un instant t donné $\vec{\Omega}_2^1 = \vec{0}$, le mouvement de (S_2) est tangent à un mouvement de translation à cet instant t ;
- (2) Si à un instant t donné $\vec{\Omega}_2^1 \neq \vec{0}$ et $\vec{V}_2^1 H = \vec{0}$, le mouvement de (S_2) est tangent à une rotation d'axe (Δ) à cet instant ;
- (3) Si à un instant t donné $\vec{\Omega}_2^1 \neq \vec{0}$ et $\vec{V}_2^1 H \neq \vec{0}$, le mouvement tangent à un mouvement hélicoïdal d'A.I.R. (Δ) à cet instant t .

Nota : Dans un même référentiel, les mouvements de deux solides sont tangents, à un instant t donné, lorsqu'ils ont le même champ des vitesses.

(4) Mouvements relatifs de solides en contact

• Vitesse de glissement au contact de deux solides

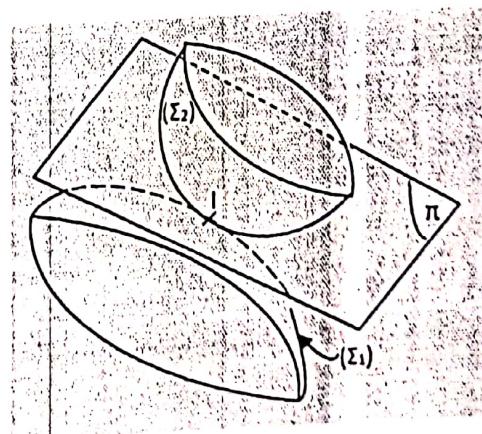
On s'intéresse au champ des moments $\vec{V}_2^1(P)$ du torseur cinématique du solide (S_2) dans son mouvement par rapport à (S_1) .

Définition :

Soit un solide (S_2) en mouvement relatif par rapport à (S_1) . Considérons que la surface (Σ_2) de (S_2) reste en contact ponctuel avec la surface (Σ_1) limitant (S_1) .

Désignons par I le point de contact des deux surfaces et limitons-nous au cas où (Σ_1) et (Σ_2) admettent en I un plan tangent commun (π).

On appelle *vitesse de glissement* de (S_2) par rapport à (S_1) au point I , dans un référentiel (R_0) , le vecteur $\vec{G}^o(I) = \vec{V}_2^o(I) - \vec{V}_1^o(I) = \vec{V}_2^1(I)$.



C'est la différence des vitesses des molécules de (S_2) et de (S_1) qui sont en contact en I.

Propriétés :

P_1 : la vitesse de glissement est indépendante du référentiel.

En effet :

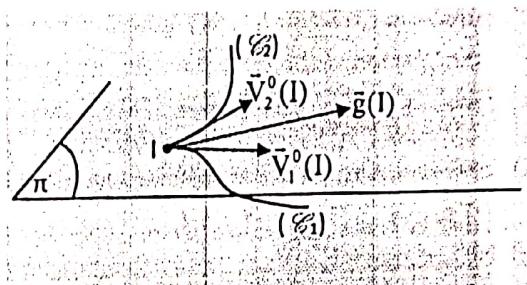
$$\left. \begin{array}{l} \bar{G}^o(I) = \bar{V}_2^o(I) - \bar{V}_1^o(I) = \bar{V}_2^l(I) \\ \bar{G}^k(I) = \bar{V}_2^k(I) - \bar{V}_1^k(I) = \bar{V}_2^l(I) \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{G}^o = \bar{G}^k \quad \forall o, k \in \mathbb{N}$$

P_2 : La vitesse de glissement est dans le plan tangent commun aux deux surfaces en contact.

En effet, pendant le mouvement de (S_1), I se déplace sur (S_1) suivant une courbe (\mathcal{C}_1) et sur (S_2) suivant une courbe (\mathcal{C}_2).

La vitesse du point I par rapport à (S_1) est portée par (\mathcal{C}_1) : $\bar{V}_2^o(I)$ appartient donc au plan (π) ; de même la vitesse du point I par rapport à (S_2) est portée par (\mathcal{C}_2) : $\bar{V}_1^o(I)$ appartient donc aussi au plan (π).

$\bar{G}^o(I)$ qui est leur différence appartient donc nécessairement à (π).



- **Vitesse de roulement et vitesse de pivotement au contact de deux solides**

On s'intéresse, cette fois, au vecteur résultante cinématique $\bar{\Omega}_2^l$ du torseur cinématique du solide (S_2) dans son mouvement par rapport à (S_1).

Définition :

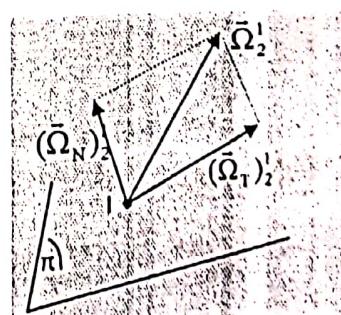
Le vecteur rotation du solide (S_2) par rapport à (S_1), noté $\bar{\Omega}_2^l$ peut être décomposé (projété) sur le plan tangent (π) et sur la normale \bar{n} à la surface (Σ_1) :

$$\bar{\Omega}_2^l = (\bar{\Omega}_2^l)_N + (\bar{\Omega}_2^l)_T = (\bar{\Omega}_N)_2 + (\bar{\Omega}_T)_2$$

alors on définit :

$(\bar{\Omega}_N)_2 \equiv$ vitesse angulaire de pivotement de (S_2) par rapport à (S_1)

$(\bar{\Omega}_T)_2 \equiv$ vitesse angulaire de roulement de (S_2) par rapport à (S_1)



Détermination :

On peut obtenir ces vecteurs de manière intrinsèque par :

$$(\bar{\Omega}_N)_2 = (\bar{\Omega}_2^l \cdot \bar{n}) \cdot \bar{n} = (\bar{n} \cdot \bar{\Omega}_2^l) \cdot \bar{n} \quad (\text{projection sur } \bar{n})$$

$$(\bar{\Omega}_T)_2 = -\bar{n} \wedge (\bar{n} \wedge \bar{\Omega}_2^l) = (\bar{n} \wedge \bar{\Omega}_2^l) \wedge \bar{n}$$

En effet :

$$\begin{aligned}\vec{\Omega}_k^i \cdot (\vec{n} \cdot \vec{\Omega}_k^i) \cdot \vec{n} &= \vec{\Omega}_2^i (\vec{n} \cdot \vec{n}) - (\vec{n} \cdot \vec{\Omega}_k^i) \cdot \vec{n} = -(\vec{n} \cdot \vec{\Omega}_k^i) \cdot \vec{n} + \vec{\Omega}_2^i (\vec{n} \cdot \vec{n}) \\ &= -\vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \vec{\Omega}_k^i) + \vec{\Omega}_2^i (\vec{n} \cdot \vec{n}) = -[\vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{\Omega}_2^i) - \vec{\Omega}_2^i (\vec{n} \cdot \vec{n})] \\ &= -\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{\Omega}_2^i) = (\vec{n} \wedge \vec{\Omega}_2^i) \wedge \vec{n}\end{aligned}$$

c.à.d. : $\vec{\Omega}_k^i = (\vec{n} \wedge \vec{\Omega}_2^i) \wedge \vec{n} + (\vec{n} \cdot \vec{\Omega}_k^i) \cdot \vec{n}$

Or $(\vec{n} \cdot \vec{\Omega}_2^i) \cdot \vec{n}$ est porté par la normale et $(\vec{n} \wedge \vec{\Omega}_2^i) \wedge \vec{n}$ est dans le plan tangent. On pose alors :

$$(\vec{\Omega}_N)_2^i = (\vec{n} \cdot \vec{\Omega}_2^i) \cdot \vec{n} \text{ et } (\vec{\Omega}_T)_2^i = (\vec{n} \wedge \vec{\Omega}_2^i) \wedge \vec{n} \text{ pour avoir : } \boxed{\vec{\Omega}_k^i = (\vec{\Omega}_N)_2^i + (\vec{\Omega}_T)_2^i}$$

• Mouvements relatifs de solides

Au regard des deux coordonnées vectorielles $\vec{\Omega}_2^i$ et $\vec{V}_2^i(O_2)$ du torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) , certains mouvements élémentaires peuvent être définis :

- Lorsque $\vec{\Omega}_2^i = \vec{0}$, roulement et pivotement sont impossibles ; on ne peut avoir que **glissement simple** entre les solides
- Si $\vec{V}_2^i(I) = \vec{0}$ on n'a pas de glissement ; **roulement et pivotement sont possibles** :
 - ✓ Si en plus $\vec{\Omega}_N = \vec{0}$, on a **roulement simple** (c.à.d. roulement sans glissement)
 - ✓ Si c'est plutôt $\vec{\Omega}_T = \vec{0}$, on a **pivotement simple** (c.à.d. pivotement sans glissement)

Par ailleurs, la vitesse d'un point quelconque M du solide est donnée

par : $\vec{V}_M = \vec{V}_I + \vec{MI} \wedge \vec{\Omega}$; et avec l'égalité : $\vec{\Omega}_k^i = (\vec{\Omega}_N)_2^i + (\vec{\Omega}_T)_2^i$, on peut écrire :

$$\boxed{\vec{V}_M = \vec{V}_I + \vec{MI} \wedge \vec{\Omega}_N + \vec{MI} \wedge \vec{\Omega}_T}$$

Ainsi la vitesse d'un point quelconque du solide peut donc être considérée comme la somme des trois vitesses issues de trois mouvements :

- Un **mouvement de translation** parallèle au plan tangent, appelé **glissement**
- Un mouvement de rotation autour de la normale en I au plan tangent, appelé **pivotement**.
- Un mouvement de rotation autour d'une droite du plan vectoriel tangent, appelé **roulement**.

Lorsqu'on s'intéresse au mouvement relatif du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) , on a bien la propriété fondamentale des champs de moments : $\vec{V}_2^i(M) = \vec{V}_2^i(I) + \vec{MI} \wedge \vec{\Omega}_2^i$, où I est

le point de contact entre (S_2) et (S_1) ; et avec $\bar{\Omega}_k^i = (\bar{\Omega}_N)^i_2 + (\bar{\Omega}_T)^i_2$ on peut écrire :

$$\bar{V}_2^i(M) = \bar{V}_2^i(I) + \bar{M}I \wedge (\bar{\Omega}_2^i)_N + \bar{M}I \wedge (\bar{\Omega}_2^i)_T$$

On a ainsi les mouvements relatifs suivants :

$\bar{V}_{21}^i = \bar{V}_2^i(I)$ est la *vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1) en I* ;

$\bar{M}I \wedge (\bar{\Omega}_2^i)_N$ est la *vitesse de pivotement de (S_2) par rapport à (S_1) en I et*

$\bar{M}I \wedge (\bar{\Omega}_2^i)_T$ est la *vitesse de roulement de (S_2) par rapport à (S_1) en I*.

II- ETUDE DYNAMIQUE DES MOUVEMENTS

II-1 LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Le principe fondamental de la dynamique (P.F.D) valable dans tout référentiel galiléen, comme dans le référentiel absolu, s'écrit de la manière suivante :

$$[\mathcal{F}] = [\mathcal{M}]$$

Enoncé : « Il existe au moins un référentiel absolu (ou galiléen) dans lequel le torseur des quantités d'accélérations d'un solide quelconque (S) s'identifie au torseur des efforts extérieurs appliqués à (S) »

II-2 LES THEOREMES GENERAUX DE LA MECANIQUE

Lorsqu'on restreint le PFD à l'une ou l'autre des coordonnées vectorielles des torseurs, on parle des théorèmes généraux de la dynamique :

a) Le théorème de la résultante dynamique :

$$\bar{F} = \bar{\Sigma};$$

Le TRD est l'équivalent du PFD pour les mouvements de translation.

Par ailleurs, en tenant compte du fait que : $\bar{\Sigma} = m\bar{\Gamma}_G^x$, le TRD prend la forme : $\bar{F} = m\bar{\Gamma}^x(G)$; le TRD est donc aussi appelé le **théorème du centre d'inertie ou du centre de masse**, ou du

centre de gravité ; or $m\vec{\Gamma}^k(G) = \frac{d^k}{dt} \vec{p}$. Ceci confère aussi souvent au TRD l'appellation de théorème de la résultante cinétique : $\vec{F} = \frac{d^g}{dt} \vec{p}$.

b) Le théorème du moment dynamique :

$$\vec{m}_0 = \vec{\delta}_0;$$

le TMD est l'équivalent du PFD pour les mouvements de rotation.

Par ailleurs, compte tenu de la relation suivante entre le moment dynamique et le moment cinétique : $\vec{\delta}_0 = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_0 + \vec{V}_0 \wedge m\vec{V}_G$, le TMD prend aussi la forme : $\vec{m}_0 = \frac{d^g}{dt} \vec{\sigma}_0 + \vec{V}_0 \wedge m\vec{V}_G$, soit donc : $\frac{d^k}{dt} \vec{\sigma}_0 = \vec{m}_0 - \vec{V}_0 \wedge m\vec{V}_G$; ce qui lui confère l'appellation de théorème du moment cinétique.

Et lorsque le point O est fixe dans (R_g) ou que le point de référence pour le calcul du moment est le centre de masse G (dans ce cas : $\vec{V}_0 \wedge m\vec{V}_G = \vec{0}$), on retrouve la forme rencontrée au secondaire pour le TMC : $\frac{d^g}{dt} \vec{\sigma}_0 = \vec{m}_0$.

Ainsi, avec le (P.F.D.), on peut résoudre deux types de problèmes :

- ✓ Le mouvement est connu c'est-à-dire le torseur cinétique est connu. \Rightarrow Alors, on peut déterminer le torseur des efforts extérieurs à appliquer au système pour avoir (obtenir) un tel mouvement.
- ✓ Le torseur des efforts extérieurs est connu \Rightarrow Alors par intégration (généralement d'un système différentiel du second ordre) on peut connaître le mouvement du solide si on connaît les conditions aux limites (notamment : position à $t = 0$; [V] à $t = 0$).

II-3 LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE POUR UN REFERENTIEL NON GALILEEN : les torseurs des forces d'inertie

La composition des mouvements donne pour les accélérations : $\vec{\Gamma}^k(M) = \vec{\Gamma}^k(M) + \vec{\Gamma}_k(M) + \vec{\Gamma}_C(M)$; c.à.d. : $\vec{\Gamma}^k(M) = \vec{\Gamma}^k(M) - \vec{\Gamma}_k(M) - \vec{\Gamma}_C(M)$ où $\vec{\Gamma}_k(M)$ est l'accélération relative d'un point M dans le mouvement relatif de (R_k) par rapport à (R_g), et $\vec{\Gamma}_C(M)$ l'accélération de Coriolis d'un point M dans le mouvement relatif de (R_k) par rapport à (R_g).

Par définition :

$\vec{F}_e(M) = -m\vec{\Gamma}'_k(M)$ est la force d'inertie d'entraînement s'exerçant sur une particule M de masse m ;

$\vec{F}_c(M) = -m\vec{\Gamma}_c(M)$ est la force d'inertie de Coriolis s'exerçant sur une particule M de masse m.

En considérant que le point courant M du solide (S) est entouré d'une masse élémentaire dm, on déduit le **torseur des efforts d'inertie d'entraînement** et le **torseur des efforts d'inertie de Coriolis** respectivement de la manière suivante :

$$[\mathcal{R}_e] = \begin{cases} \vec{F}_e = - \int_{M \in (S)} \vec{\Gamma}'_k(M) dm \\ \vec{m}_{e,\theta} = - \int_{M \in (S)} \overline{OM} \wedge \vec{\Gamma}'_k(M) dm \end{cases}$$

et

$$[\mathcal{R}_c] = \begin{cases} \vec{F}_c = - \int_{M \in (S)} \vec{\Gamma}_c(M) dm \\ \vec{m}_{c,\theta} = - \int_{M \in (S)} \overline{OM} \wedge \vec{\Gamma}_c(M) dm \end{cases}$$

Ainsi, on peut appliquer le PFD à tout référentiel, en tenant juste compte des efforts des effets d'inertie lorsque ces derniers existent (cas des référentiels non galiléens).

III- CONSIDERATIONS ENERGETIQUES

III-1 LA PUISSANCE DES EFFORTS EXTERIEURS

a) Puissance dans le cas d'une particule mobile (un point matériel)

Pour une particule M soumise à une force \vec{F} , la puissance développée par la force $P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}$ est obtenue, à un instant donné, par le produit scalaire de la force et de la vitesse de la particule : $P = \vec{F} \cdot \vec{V}$

b) Puissance dans le cas d'un ensemble discret de points matériels

Pour un ensemble discret de n points M_i , animés respectivement des vitesses $\vec{V}_i = \vec{V}(M_i)$ et soumis aux forces \vec{F}_i , la puissance globale des forces appliquées est la somme des différentes puissances. Elle est ainsi donnée par :

$$P = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{V}_i$$

c) Puissance des efforts extérieurs s'appliquant sur un solide

Quand on est en présence d'un solide (milieu continu constitué d'un nombre infini de points M), la puissance totale est la somme infinie des puissances déployées en chacun des points.

Or un point M du solide, étant soumis à la force élémentaire $d\vec{F}$ et ayant une vitesse \vec{V}_M , subi une puissance infinitésimale développée par cette force donnée par l'expression : $dP = \vec{V}_M \cdot d\vec{F}$.

Et pour tout le solide on a la somme continue : $P = \int_{M \in (S)} \vec{V}_M \cdot d\vec{F}$.

Or, la composition des vitesses entre le point courant M et un point quelconque O du solide (S) permet d'écrire : $\vec{V}_M = \vec{V}_O + \overrightarrow{MO} \wedge \vec{\Omega}_S$

On a ainsi :

$$dP = \vec{V}_M \cdot d\vec{F} = \vec{V}_O \cdot d\vec{F} + (\overrightarrow{MO} \wedge \vec{\Omega}_S) \cdot d\vec{F} = \vec{V}_O \cdot d\vec{F} + (\overrightarrow{MO}, \vec{\Omega}_S, d\vec{F}) = \vec{V}_O \cdot d\vec{F} + (d\vec{F}, \overrightarrow{MO}, \vec{\Omega}_S).$$

Soit donc : $dP = \vec{V}_M \cdot d\vec{F} = \vec{V}_O \cdot d\vec{F} + (d\vec{F} \wedge \overrightarrow{MO}) \cdot \vec{\Omega}_S$.

L'intégration de cette puissance élémentaire sur tout le solide (S)

donne : $P = \int_{M \in (S)} \vec{V}_M \cdot d\vec{F} = \int_{M \in (S)} \vec{V}_O \cdot d\vec{F} + \int_{M \in (S)} (d\vec{F} \wedge \overrightarrow{MO}) \cdot \vec{\Omega}_S$

$$= \vec{V}_O \cdot \int_{M \in (S)} d\vec{F} + \vec{\Omega}_S \cdot \int_{M \in (S)} d\vec{F} \wedge \overrightarrow{MO} = \vec{V}_O \cdot \int_{M \in (S)} d\vec{F} + \vec{\Omega}_S \cdot \int_{M \in (S)} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}$$

$$\rightarrow P = \vec{V}_O \cdot \vec{F} + \vec{\Omega}_S \cdot \vec{m}_0$$

Ainsi, la puissance développée par les actions mécaniques extérieures s'exerçant sur un solide peut être obtenue par :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}_O + \vec{\Omega}_S \cdot \vec{m}_0 \quad \forall O \in (S)$$

Cette expression peut être contractée comme suit : $P = [\vec{F}]^*[\vec{V}_O]$; c'est le produit torsoriel ou comoment des torseurs des efforts extérieurs et des vitesses.

Remarques :

(1) En tant que comoment, la puissance développée est un invariant des deux torseurs ; il est donc indépendant du point où les deux torseurs ont été réduits. Si le point de référence est le centre d'inertie G du solide, on a :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}_G + \vec{\Omega}_S \cdot \vec{m}_G$$

(2) Dans le cas particulier où le solide est en translation, $\vec{\Omega}_S = \vec{0}$, et donc : $P = \vec{F} \cdot \vec{V}_G$

(3) Si le solide est plutôt en rotation autour d'un axe fixe (O, z), $\vec{V}_O = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}_S = \omega \vec{z}$; il vient donc : $P = \omega \vec{m}_O \cdot \vec{z}$.

III-2 L'ENERGIE CINETIQUE

a) L'énergie cinétique d'un point matériel

Pour une particule M de masse m animée d'une vitesse \vec{V} , l'énergie cinétique possédée par la particule est c'est le scalaire : $E_C = \frac{1}{2} \cdot (m\vec{V}) \cdot \vec{V}$;

Ainsi, l'énergie cinétique fait intervenir la quantité de mouvement et la vitesse de la particule.

Nota : On appelle force vive d'un système la quantité $2E_C$.

b) L'énergie cinétique d'un ensemble fini de points matériels

Quand on est en présence de n points M_i , de vitesses et masses respectives $\vec{V}_i = \vec{V}(M_i)$ et m_i , l'énergie cinétique totale du système est le somme discrète :

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \cdot \vec{V}_i$$

où $\vec{p}_i = m_i \vec{V}_i$ est la quantité de mouvement de la particule M_i .

c) L'énergie cinétique d'un solide

Le solide étant considéré comme un ensemble continu de points matériels M de vitesse \vec{V}_M et entouré d'une masse élémentaire dm , son énergie cinétique est donnée par :

$$E_C = \frac{1}{2} \int_{M \in (S)} \vec{V}_M \cdot (\vec{V}_M dm)$$

Remarque :

$$\begin{aligned} 2E_C &= \int_{M \in (S)} \vec{V}_M \cdot (\vec{V}_M dm) = \int_{M \in (S)} (\vec{V}_O + \overrightarrow{MO} \wedge \vec{\Omega}_S) \cdot (\vec{V}_M dm) = \int_{M \in (S)} (\vec{V}_O + \overrightarrow{MO} \wedge \vec{\Omega}_S) \cdot (\vec{V}_M dm) \\ &= \int_{M \in (S)} \vec{V}_O \cdot \vec{V}_M dm + \int_{M \in (S)} (\overrightarrow{MO} \wedge \vec{\Omega}_S) \cdot (\vec{V}_M dm) = \int_{M \in (S)} \vec{V}_O \cdot \vec{V}_M dm + \int_{M \in (S)} (\vec{V}_M dm) \cdot (\overrightarrow{MO} \wedge \vec{\Omega}_S) \\ &= \vec{V}_O \cdot \int_{M \in (S)} \vec{V}_M dm + \int_{M \in (S)} (\vec{V}_M dm) \cdot (\vec{\Omega}_S \wedge \overrightarrow{OM}) = \vec{V}_O \cdot \int_{M \in (S)} \vec{V}_M dm + \int_{M \in (S)} \vec{\Omega}_S \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_M dm) \\ &= \vec{V}_O \cdot \int_{M \in (S)} \vec{V}_M dm + \vec{\Omega}_S \cdot \int_{M \in (S)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_M dm = \vec{V}_O \cdot m \vec{V}_G + \vec{\Omega}_S \cdot \vec{\sigma}_O = \vec{V}_O \cdot \vec{p} + \vec{\Omega}_S \cdot \vec{\sigma}_O, \text{ produit torsoriel} \end{aligned}$$

ou comoment de $[\mathcal{M}]_0 = \begin{cases} \vec{p} = \int_{M \in (S)} \vec{V}_M dm \\ \vec{\sigma}_O = \int_{M \in (S)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_M dm \end{cases}$ et de $[\mathcal{H}]_0 = [\mathcal{D}]_0 = \begin{cases} \vec{\Omega}_S \\ \vec{V}_O \end{cases}$

C'est-à-dire : $2E_c = [\mathcal{P}]_0 * [\mathcal{V}]_0$.

Ainsi, pour un solide l'énergie cinétique est la moitié du produit torsoriel ou comoment des torseurs cinétique et cinématique :

$$E_c = \frac{1}{2} [\mathcal{P}] * [\mathcal{V}]$$

Remarques :

(1) La quantité $2E_c$ est souvent appelée « force vive » du solide en mouvement.

(2) - Puisqu'il s'agit d'un comoment, il est indépendant du point choisi pour réduire les 2 torseurs. En réduisant les deux torseurs en G, centre de masse :

On sait que : $[\mathcal{P}]_G = \begin{cases} \vec{p} = m\vec{V}_G \\ \vec{\sigma}_G = [I]_{G,(S)} \cdot [\vec{\Omega}_S] \end{cases}$ et $[\mathcal{V}] = \begin{cases} \vec{\Omega}_S \\ \vec{V}_G \end{cases}$; il vient donc :

$$E_c = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_S \cdot ([I]_{G,(S)} \cdot [\vec{\Omega}_S])$$

E_c de translation E_c de rotation

C'est le théorème de Koenig pour l'énergie cinétique.

(3) - Si par contre le solide possède un point fixe O_0 ($\vec{V}_{O_0} = \vec{0}$) on peut réduire les deux torseurs en O_0 et obtenir le comoment sous une forme plus simple. Il vient donc :

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_S \cdot ([I]_{O_0,(S)} \cdot [\vec{\Omega}_S])$$

C'est-à-dire encore :

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_S \cdot \vec{\sigma}_o$$

d) Théorème de l'Energie Cinétique

Dans le cas d'un point matériel M de masse m , soumis à une force \vec{F} , et animé d'une vitesse \vec{V} , la puissance développée par la force appliquée est $p = \vec{F} \cdot \vec{V}$ et l'énergie cinétique de la particule est $E_c = \frac{1}{2} m \vec{V}^2$.

On a : $dE_c = \frac{1}{2} m \times 2\vec{V} \cdot d\vec{V} = m\vec{V} \cdot d\vec{V} = \vec{V} \cdot d(m\vec{V})$

$\rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \vec{V} \cdot \frac{d(m\vec{V})}{dt}$; or dans un référentiel galiléen $\frac{d^g}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F}$

On aura donc dans un référentiel galiléen : $\frac{dE_C}{dt} = \vec{V} \cdot \vec{F} = \vec{F} \cdot \vec{V} = P$ c.à.d. : $\boxed{\frac{dE_C}{dt} = P}$.

D'où l'énoncé :

« Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la puissance développée par les forces extérieures appliquées à la particule matérielle ».

Remarques :

(1) - L'intégration des deux membres de l'égalité précédente donne la forme du théorème de l'énergie cinétique énoncé au secondaire : « La variation de l'énergie cinétique dans un intervalle de temps est égale au travail effectué pendant ce temps par les forces extérieures appliquées ».

(2) - Le théorème de l'énergie cinétique énoncé ci-haut pour la particule reste inchangé pour un nombre fini ou infini (donc cas d'un solide) de points M. On l'énonce ainsi que suit : « Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un solide est égale à la puissance développée par les forces extérieures appliquées au solide ».

En effet : la puissance est $P = [\mathcal{P}] * [\mathcal{V}]$; or d'après le PFD : $[\mathcal{P}] = [\mathcal{W}]$. Donc :

$$P = [\mathcal{W}] * [\mathcal{V}] \text{ avec } [\mathcal{W}] = \begin{cases} \bar{\Sigma}^g = \int_{(S)} \bar{\Gamma}_M^g dm \\ \bar{\delta}_M^g = \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \bar{\Gamma}_M^g dm \end{cases} \text{ et } [\mathcal{V}] = \begin{cases} \bar{\Omega}_S \\ \bar{V}_O^g \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow P &= \bar{V}_O^g \cdot \int_{(S)} \bar{\Gamma}_M^g dm + \bar{\Omega}_S \cdot \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \bar{\Gamma}_M^g dm = \bar{V}_O^g \cdot \int_{(S)} \frac{d^g}{dt} \bar{V}_M^g dm + \bar{\Omega}_S \cdot \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d^g}{dt} \bar{V}_M^g dm \\ &= \int_{(S)} \bar{V}_O^g \cdot \frac{d^g}{dt} \bar{V}_M^g dm + \int_{(S)} \bar{\Omega}_S \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge \frac{d^g}{dt} \bar{V}_M^g) dm \\ &= \int_{(S)} \bar{V}_O^g \cdot \frac{d^g}{dt} \bar{V}_M^g dm + \int_{(S)} \bar{V}_M^g \cdot (\bar{\Omega}_S \wedge \dot{\overrightarrow{OM}}) dm \\ &= \int_{(S)} \bar{V}_O^g \cdot \frac{d^g}{dt} \bar{V}_M^g dm + \int_{(S)} \bar{V}_M^g \cdot (\overrightarrow{MO} \wedge \bar{\Omega}_S) dm = \int_{(S)} (\bar{V}_O^g + \overrightarrow{MO} \wedge \bar{\Omega}_S) \cdot \frac{d^g}{dt} \bar{V}_M^g dm \\ &= \int_{(S)} \bar{V}_M^g \cdot \frac{d^g}{dt} \bar{V}_M^g dm = \int_{(S)} \frac{1}{2!} \frac{d^g}{dt} (\bar{V}_M^g \cdot \bar{V}_M^g dm) = \frac{d^g}{dt} \int_{(S)} \frac{1}{2} (\bar{V}_M^g \cdot \bar{V}_M^g dm) = \frac{d^g}{dt} E_C \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{P = \frac{d^g}{dt} E_C}$

(3) En général, la force extérieure \vec{F} dépend de la position, de la vitesse et du temps. Le travail de la force ne peut être déterminé qu'après avoir au préalable déterminé le mouvement (i.e. la vitesse); donc l'énergie cinétique (par multiplication de la masse avec le carré de la vitesse). Le TEC n'est donc pas utile dans ce cas.

(4) Par contre, si \vec{F} ne dépend que de la position de M, le TEC conduit à une équation à variables séparables qui détermine l'équation du mouvement.

(5) Lorsque la force dérive d'un potentiel V ($\vec{F} = -\nabla V$), on dit que la force est conservative; la forme différentielle $\frac{dE_c}{dt} = P$ permet d'écrire $dE_c = P \cdot dt = dW =$

$\vec{F} \cdot d\vec{l} = -\nabla V \cdot d\vec{l} = -dV$, c'est-à-dire : $dE_c + dV = 0$, soit donc : $E_c + V = C^e$. Or la somme des énergies cinétique et potentielle constitue l'énergie mécanique. On peut donc énoncer le principe de la conservation de l'énergie mécanique de la manière suivante : « *l'énergie mécanique d'un solide soumis à des forces conservatives reste constante* ».

Nota : dans un système de solides en contact entre eux et avec des obstacles fixes, le travail des forces de contact est essentiellement résistant (négatif); il provoque par conséquent une diminution de l'énergie cinétique, donc de l'énergie mécanique.

IV- ETUDE DES SOLIDES EN EQUILIBRE

IV-1 LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (P.F.S.)

Lorsque le torseur cinématique, donc aussi cinématique est nul, le torseur dynamique s'annule et le PFD devient le principe Fondamental de la Statique (P.F.S.) : $[\mathcal{F}] = [\emptyset]$

Le PFS s'énonce ainsi : "la condition nécessaire et suffisante (CNS) pour qu'un système de solides initialement au repos (immobiles) l'un par rapport à l'autre soit en équilibre est que le torseur des forces extérieures appliquées à chaque solide soit nul", c.à.d. : $[\mathcal{R}] = [0]$ pour chaque solide.

Remarque : Ce paragraphe est une introduction du chapitre 05 qui globalisera l'utilisation des torseurs dans l'étude des équilibres des corps et l'application de ce principe dans les cas fréquents de problèmes plans.

IV-2 PRINCIPE DE TRANSMISSIBILITE DES FORCES (P.T.F.) EN STATIQUE

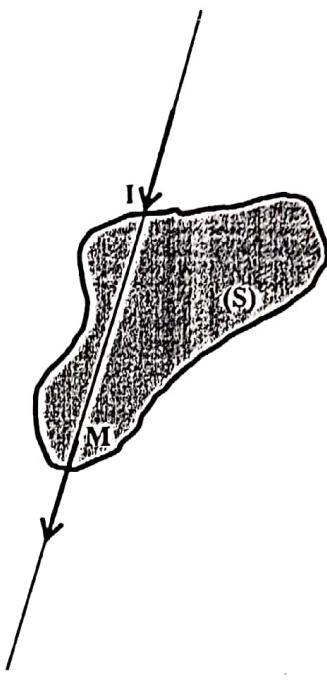
Enoncé :

“ L'équilibre (et de manière plus générale le mouvement) d'un solide (S) reste inchangé si la force \vec{F} agissant en un point I de (S) est remplacée par une force \vec{F}' de même direction, même sens et même intensité, agissant en un point M quelconque appartenant au support ou ligne d'action de la force \vec{F} ”.

Remarques :

(1) Le Principe de Transmissibilité des Forces (P.T.F) revient à dire que l'effet d'une force sur un solide (indéformable) dépend uniquement de sa ligne d'action, de son sens et de son intensité ; le point d'application sur la ligne d'action ne joue aucun rôle et n'a aucune influence en statique des solides.

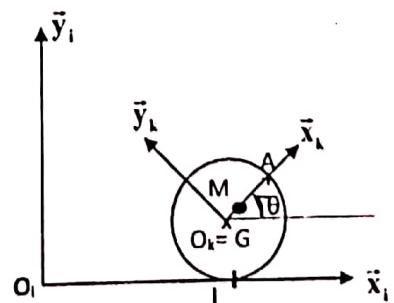
(2) Le Principe de Transmissibilité des Forces (P.T.F) n'est pas applicable en RDM (Résistance Des Matériaux) du fait que le déplacement des forces peut transformer la nature des efforts intérieurs, par exemple, deux forces exerçant des tensions aux extrémités d'une barre, si elles sont déplacées l'une occupant la place de l'autre, la barre devient plutôt comprimée.



V. EXERCICES RESOLUS SUR LE ROLE DES TORSEURS EN MECANIQUE

V-1 Exercice résolu n°1 : utilisation de la FFCS (torseur cinématique)

Soit une roue de rayon R qui roule sans glisser sur un sol et se déplace à la vitesse constante V_0 par rapport au sol (vitesse du centre de masse G). Sachant qu'au point de contact I entre la roue et le sol, l'absence du glissement se traduit par une vitesse nulle pour le point I de la roue, par rapport au sol, utiliser la formule fondamentale de la cinématique du solide pour trouver l'expression (en fonction de V_0 , R et t) de l'angle θ que fait le rayon $[GA]$ avec l'axe des x (on supposera qu'à $t = 0$, le rayon $[GA]$



est horizontal et orienté dans le sens du mouvement).

En effet, si on définit (voir figure ci-contre) deux référentiels : $R_i(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ lié au sol, donc fixe, et $R_k(O_k \equiv G, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ lié à la roue tel que \vec{x}_k soit dirigé selon un rayon [GA] et \vec{x}_i dans le sens du mouvement, le torseur cinématique de la roue, réduit au point G est :

$$[\mathcal{T}_k^i]_G = \begin{cases} \vec{\Omega}_k^i = \dot{\theta} \vec{z}_i \\ \vec{V}_k^i G = V_0 \vec{x}_i \end{cases}; \text{ la FCS donne le moment en I de la manière suivante :}$$

$$\vec{V}_k^i I = \vec{V}_k^i G + \vec{IG} \wedge \vec{\Omega}_k^i = V_0 \vec{x}_i + R \vec{y}_i \wedge \dot{\theta} \vec{z}_i, \text{ c.à.d. : } \vec{V}_k^i I = \left(V_0 + R \dot{\theta} \right) \vec{x}_i. \text{ Le non glissement}$$

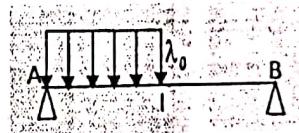
$$\left(\vec{V}_k^i I = \vec{0} \right) \text{ conduit alors à } \dot{\theta} = -\frac{V_0}{R}; \text{ soit } \theta = -\frac{V_0}{R} t + \theta_0. \text{ Et comme } \theta(t=0)=0, \text{ on obtient}$$

finalement $\boxed{\theta = -\frac{V_0}{R} t}$ qui est la loi de variation de l'angle θ avec le temps.

V-2 Exercice résolu n°2 : utilisation du PFS (torseur des efforts appliqués)



Soit à déterminer les réactions \vec{N}_A et \vec{N}_B des appuis de A et B sur un pont de longueur AB=L et de densité linéaire uniforme de charge $\lambda(x) = \lambda_0 N/m$ distribuée sur une première moitié AI du pont.



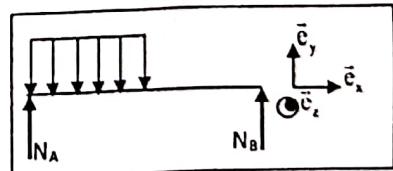
Solution : le pont est soumis à trois torseurs élémentaires (on néglige l'action de la pesanteur sur le pont) :

- Le torseur réaction en A : $[\mathcal{T}_1] = \begin{cases} \vec{R}_1 \\ \vec{m}_{IA} \end{cases}$ tel que $\vec{R}_1 = N_A \vec{e}_y$ et $\vec{m}_{IA} = \vec{0}$

- Le torseur réaction en B : $[\mathcal{T}_2] = \begin{cases} \vec{R}_2 = N_B \vec{e}_y \\ \vec{m}_{IB} = \vec{0} \end{cases}$

- Le torseur distribution continue de force sur le segment [AI] et de densité de force $d\vec{F} = \lambda_0 dx (-\vec{e}_y)$ tel que

$$[\mathcal{T}_3] = \begin{cases} \vec{R}_3 = \int_{[AI]} d\vec{F} \\ \vec{m}_{3A} = \int_{[AI]} \overline{AM} \wedge d\vec{F} \end{cases}$$



En exprimant tous les vecteurs dans le repère $R(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$,

1°). Réduisons les trois torseurs en A :

$$[\mathcal{T}_1] = \begin{cases} \vec{R}_1 = N_A \vec{e}_y \\ \vec{m}_{IA} = \vec{0} \end{cases}$$

$$[T_2] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_2 = N_B \vec{e}_y \\ \vec{m}_{2A} = \vec{m}_{2B} + \overline{\Delta B} \wedge \vec{R}_2 = \overline{\Delta B} \wedge \vec{R}_2 = L \vec{e}_x \wedge N_B \vec{e}_y = L N_B \vec{e}_z \end{array} \right\}$$

$$[T_3] = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_3 = \int_{[AI]} -\lambda_0 dx \vec{e}_y = -\lambda_0 \vec{e}_y \int_{[AI]} dx = -\lambda_0 \vec{e}_y \cdot \frac{L}{2} = -\lambda_0 \frac{L}{2} \vec{e}_y \\ \vec{m}_{3A} = \int_{[AI]} x \vec{e}_x \wedge \lambda_0 dx (-\vec{e}_y) = \int_{[AI]} -\lambda_0 x dx \vec{e}_z = -\lambda_0 \vec{e}_z \int_{x=0}^{L/2} x dx \end{array} \right.$$

$$\vec{m}_{3A} = -\lambda_0 \frac{1}{2} \left[x^2 \right]_0^{L/2} \vec{e}_z = -\frac{\lambda_0}{2} \times \frac{L^2}{4} \vec{e}_z = -\frac{\lambda_0 L^2}{8} \vec{e}_z$$

2°) - Exprimons le fait que le pont est en équilibre, donc qu'il est soumis à un torseur résultant nul,

réduit en A : $\begin{cases} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{R}_3 = \vec{0} & (1) \\ \vec{m}_{1A} + \vec{m}_{2A} + \vec{m}_{3A} = \vec{0} & (2) \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow N_A \vec{e}_y + N_B \vec{e}_y - \lambda_0 \frac{L}{2} \vec{e}_y = \vec{0} \rightarrow N_A + N_B = \lambda_0 \frac{L}{2}$$

$$(2) \Rightarrow \vec{0} + L N_B \vec{e}_z - \lambda_0 \frac{L^2}{8} \vec{e}_z = 0 \rightarrow L N_B = \lambda_0 \frac{L^2}{8} \Rightarrow N_B = \lambda_0 \frac{L}{8} ; \text{ et par suite : } \Rightarrow N_A = 3\lambda_0 \frac{L}{8}$$

D'où :

$$N_A = \frac{3}{8} \lambda_0 L$$

et

$$N_B = \frac{1}{8} \lambda_0 L$$

Isaac Newton - Biographie

Isaac Newton



Portrait d'Isaac Newton
âgé de 46 ans par Godfrey Kneller (1689).

Données clés	
Naissance	25 décembre 1642 ^{N 1} Woolsthorpe, Lincolnshire Royaume d'Angleterre
Décès	20 mars 1727 (à 84 ans) ^{N 1} Kensington, Londres Royaume de Grande-Bretagne
Nationalité	Anglais(1643-1707) Britannique(1707-1727)
Champs	Astronomie, mathématiques physique et philosophie de la nature
Institutions	Université de Cambridge, Royal Society
Diplôme	Trinity College (Cambridge)
Renommé pour	Mécanique newtonienne, gravitation, calcul infinitésimal, décomposition de la lumière par un prisme

Signature

A handwritten signature in cursive ink that reads "J.s. Newton".

Isaac Newton (4 janvier 1643G – 31 mars 1727G, ou 25 décembre 1642 J – 20 mars 1727 J)^{N 1} est un philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle et la création, en concurrence avec Gottfried Wilhelm Leibniz, du calcul infinitésimal. En optique, il a développé une théorie de la couleur basée sur l'observation selon laquelle un prisme décompose la lumière blanche en un spectre visible. Il a aussi inventé le télescope à réflexion composé d'un miroir primaire concave appelé télescope de Newton.

En mécanique, il a établi les trois lois universelles du mouvement qui constituent en fait des principes à la base de la grande théorie de Newton concernant le mouvement des corps, théorie que l'on nomme aujourd'hui « mécanique newtonienne » ou encore « mécanique classique ».

Il est aussi connu pour la généralisation du théorème du binôme et l'invention dite de la méthode de Newton permettant de trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

Newton a montré que le mouvement des objets sur Terre et des corps célestes sont gouvernés par les mêmes lois naturelles ; en se basant sur les lois de Kepler sur le mouvement des planètes¹, il développa la loi universelle de la gravitation.

Newton et la religion

Article détaillé : Conceptions religieuses d'Isaac Newton.

Newton fut profondément religieux toute sa vie. Fils de puritains, il a passé plus de temps à l'étude de la Bible que de la science. Une étude de tout ce qu'il a écrit révèle que, sur les 3 600 000 mots qu'il a écrits, seuls 1 000 000 concernent la science et 1 400 000 la théologie³⁵. Il a notamment produit des écrits sur la Bible et les Pères de l'Église, dont *An Historical Account of Two Notable Corruptions of Scripture*, une critique textuelle des Saintes Écritures qui a été remarquée. À Cambridge, John Locke, à qui il avait parlé de ses écrits théologiques, l'engagea à persévérer.

Il croyait en un monde immanent, mais rejeta l'hylozoïsme implicite de Leibniz et Spinoza³⁶. Il voit une évidence du dessein divin dans le système solaire : « L'admirable uniformité du système planétaire force à y reconnaître les effets d'un choix. »^{N 3} Il insistait cependant sur le fait qu'une intervention divine serait requise pour « réparer » le système en raison de la lente croissance de son instabilité³⁷.

Isaac Newton appartenait à la franc-maçonnerie³⁸. Il était un ami de Jean Théophile Désaguliers et de James Anderson, qui ont fondé la Grande Loge de Londres en 1717, marquant le passage de la maçonnerie opérative à la maçonnerie spéculative moderne³⁹.

Selon un avis contesté par Snobelen⁴⁰, T. C. Pfizenmaier soutient que la vision de Newton sur la Trinité était plus proche de celle de l'Église orthodoxe que de celle des catholiques romains, des anglicans et de la plupart des protestants⁴¹.

L'historien Stephen D. Snobelen dit « [qu'] Isaac Newton était un hérétique. Cependant [...] il ne fit jamais de déclaration publique sur sa propre foi que les orthodoxes auraient considérée comme extrêmement radicale. Il cacha si bien sa foi que les chercheurs n'ont toujours pas réussi à élucider ses propres croyances. »⁴⁰. Snobelen conclut que Newton était au moins sympathisant du socinianisme — il possédait et avait lu consciencieusement au moins huit ouvrages sociniens —, probablement un arien et surtout un antitrinitarien⁴⁰, trois formes ancestrales de ce que l'on nomme aujourd'hui l'unitarisme. À une époque notoire pour son intolérance religieuse, il existe peu de traces de l'expression publique des vues radicales de Newton, les plus notables sont ses refus de l'ordination et, sur son lit de mort, celui du dernier sacrement⁴⁰.

Cette attitude prend un éclairage nouveau avec l'avis autorisé exprimé par John Maynard Keynes. En effet, celui-ci a acheté et analysé les manuscrits de Newton, longtemps tenus confidentiels par la famille de Newton du fait de leur contenu. Il en a dressé une synthèse dans une lettre, « Newton, the Man »⁴², qui a été lue en juillet 1946 par son frère Georges, lors des célébrations du bicentenaire de la mort de Newton.

Keynes conclut son analyse en affirmant que Newton :

« ... était plutôt monothéïste judaïsant de l'école de Maïmonide. Il arriva à cette conclusion, non pas sur des bases pour ainsi dire rationnelles ou de doutes, mais entièrement en interprétant les anciennes autorités. Il était persuadé que les documents révélés ne donnaient aucun support aux doctrines de la Trinité qui étaient dues à des falsifications tardives. Le Dieu révélé était un seul Dieu. »

Newton va ainsi adopter ce qu'on pourrait nommer « un positivisme méthodologique, en vertu duquel est reconnue l'autonomie du discours scientifique, sans que cette attitude en matière d'épistémologie implique le renoncement à tout arrière-plan métaphysique et théologique »⁴³. C'est ainsi que, bien que la loi universelle de la gravitation soit sa découverte la plus connue, Newton met en garde ceux qui verrraient l'Univers comme une simple machine. Il affirme : « La gravité explique le mouvement des planètes, mais elle ne peut expliquer ce qui les mit en mouvement. Dieu gouverne toutes choses et sait tout ce qui est ou tout ce qui peut être. »^{N 4,44}.

Chapitre 4 MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

INTRODUCTION

La conception des systèmes mécaniques exige de pouvoir prévoir ou valider la forme et les dimensions des mécanismes ; l'objet de ce chapitre est d'y apporter des éléments de base, en caractérisant, d'un point de vue local, puis d'un point de vue global, les différentes actions mécaniques.

I- SYSTEME MATERIEL A MASSE CONSERVATIVE

I-1 Système matériel

Un *système matériel* E est un système, de quelque nature (électrique, mécanique, etc.) que ce soit, sur lequel est définie la grandeur mesurable « masse ». On le note (E, m) .

La *masse* est l'une des caractéristiques fondamentale de la matière ; elle est définie par une mesure, notée m , recouvrant à la fois les propriétés d'additivité et de positivité. [$m > 0$] ; et si $(E, m) = (E_1, m_1) + (E_2, m_2) + \dots + (E_n, m_n)$ alors on a $m = \sum_{i=1}^n m_i$.

La masse est généralement définie par une *densité*, qui est la masse par unité d'étendue. Ainsi si l'étendue est une courbe, une segment de droite par exemple, on parle de *densité linéique* ; si elle est une surface ou un volume, on parlera de *densité surfacique* ou *volumique*, respectivement.

I-2 Système matériel à masse conservative

Un système matériel (E, m) est à *masse conservative* si toute partie E_i de E conserve sa masse m_i , au cours du temps.

C'est-à-dire si $\forall i = 1, \dots, n \quad m_i = m(E_i) = cte \quad \forall t$

Si les m_i sont susceptibles de varier avec le temps, mais que $\sum_{i=1}^n m_i = cte = m$ ne varie pas avec le temps, le système est dit à *masse globalement conservative*.

Exemples :

- En mécanique newtonienne (mécanique classique), les systèmes matériels sont supposés à masse conservatives.
- Les mécanismes composés e solides indéformables ou déformables sont des systèmes à masse conservative.
- En mécanique des milieux continus (MMC) et en résistance des matériaux (RDM), on considère des portions de solides comme systèmes à masse conservative pour déterminer les contraintes à l'intérieur d'un matériau.

I-3 Hypothèse de continuité de la matière

À l'échelle d'observation atomique, la matière (solide réel) est constituée d'un grand nombre d'atomes qui se combinent pour former des cristaux ou des molécules ; et entre ces atomes, il y a du vide, absence de matière. Toutefois, on associe au solide réel le *modèle continu de la matière* pour définir, en tout point P de ce solide, même s'il se trouve dans le vide interatomique, des propriétés comme la masse volumique ou la température. Pour cela on affecte, à la propriété comme la masse volumique ou la température. Pour cela on affecte, à la propriété en P, la *valeur moyenne* de cette propriété sur un élément de volume entourant ce point, par exemple une sphère de centre P et de rayon r.

Si le rayon élémentaire r est choisi suffisamment grand par rapport aux hétérogénéités de la matière, les moyennes des propriétés sont voisines pour deux points voisins P_1 et P_2 ; par suite, la propriété peut être représentée par une *fonction continue* des coordonnées du point P. On parle alors d'un champ de grandeurs (propriété) physique.

Si la propriété est un scalaire, on a un *champ de scalaires* ou *champ scalaire* ; on parle de *champ de vecteurs* ou *champ vectoriel*, si la propriété est vectorielle.

I-4 Milieu extérieur

On appelle milieu extérieur, le complémentaire du système matériel considéré E, par rapport à l'univers matériel tout entier U. On le note : $\bar{E} = C_U^E$

II- CENTRE D'INERTIE

II-1 Centre d'inertie dans le cas d'une répartition discrète de masse

a) Définition

Soient n particules M_i de masses respectives m_i ; on appelle centre d'inertie du système constitué par les n masses discrètes, le point unique G, défini comme barycentre des masses des points M_i , c.à.d. le barycentre des points M_i affectés de leurs masses pour coefficients :

$$m_1 \overrightarrow{GM}_1 + m_2 \overrightarrow{GM}_2 + \cdots + m_i \overrightarrow{GM}_i + \cdots + m_n \overrightarrow{GM}_n = \vec{0}. \text{ Soit : } \boxed{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0}}.$$

b) Détermination

Le vecteur position $\vec{r}(G)$ du centre de masse, dans un repère $R(O, \vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ quelconque est obtenu de la manière suivante :

$$\sum m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0} \rightarrow \sum m_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}_i) = \vec{0}$$

$$\rightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{GO} + \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{GO} \sum_i m_i + \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i = \vec{0}$$

$$\rightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i = -\overrightarrow{GO} \sum_i m_i = \overrightarrow{OG} \sum_i m_i$$

D'où :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum m_i} \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i}$$

c) Remarque : interprétation du centre de masse

Si on a un champ vectoriel uniforme $\vec{f}(M) = \vec{f}_0$ on peut définir pour l'ensemble de n points $M_i(m_i)$: un torseur de résultante $\vec{R} = \sum_i \vec{f}_0 m_i$ et de moment en O $\vec{m}_o = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{f}_0 m_i$

Le moment d'un tel champ vectoriel en G, centre d'inertie, sera :

$$\begin{aligned} \vec{m}_o &= \vec{m}_o + \overrightarrow{GO} \wedge \vec{R} = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{f}_0 m_i + \overrightarrow{GO} \wedge \sum_i \vec{f}_0 m_i \\ &= \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{f}_0 m_i + \sum_i \overrightarrow{GO} \wedge \vec{f}_0 m_i = \sum_i (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM}_i) \wedge \vec{f}_0 m_i \\ &= \sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge \vec{f}_0 m_i = \sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i \wedge \vec{f}_0 \\ &= \left(\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i \right) \wedge \vec{f}_0 \\ &= \vec{0} \wedge \vec{f}_0 = \vec{0} \end{aligned}$$

D'où : « le moment de tout torseur associant un champ uniforme \vec{f}_0 à la notion de masse (donc d'inertie) est nul au centre d'inertie d'un ensemble quelconque de points matériels ».

On peut donc interpréter le centre de masse d'un ensemble de points matériels comme l'unique point G où tout torseur associant un champ uniforme à la notion d'inertie (donc de masse) a un moment nul.

II-2 Centre d'inertie dans le cas d'un solide (distribution continue de masse)

Le solide étant constitué d'une association continue d'un nombre infini de points matériels, on associera à chaque point M du solide une densité de masse (ou masse élémentaire) dm et on procèdera par une sommation continue encore appelée intégrale.

b) Position du centre d'inertie dans un référentiel (R_i) quelconque

Le centre d'inertie sera défini par le point G tel que $\int_{M \in (S)} \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$

$$\text{Il vient donc : } \int_{M \in (S)} (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GM}) dm = \vec{0} \rightarrow \int_{M \in (S)} \overrightarrow{GO} dm + \int_{M \in (S)} \overrightarrow{OM} dm = \vec{0}$$

G et O étant indépendant de la densité de masse du point courant M de (S), on aura donc :

$$\overrightarrow{GO} \int_{M \in (S)} dm + \int_{M \in (S)} \overrightarrow{OM} dm = \vec{0}, \text{ c'est-à-dire : } \overrightarrow{OG} = -\frac{1}{\int_{M \in (S)} dm} \int_{M \in (S)} \overrightarrow{OM} dm$$

Et, avec, $\int_{(S)} dm = m$, il vient donc :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{M \in (S)} \overrightarrow{OM} dm \quad \forall O \in \mathcal{E}}; \text{ c'est-à-dire : } \boxed{\vec{r}^i(G) = \frac{1}{m} \int_{M \in (S)} \vec{r}^i(M) dm}.$$

Remarque : la somme discrète \sum_i est simplement remplacée par la somme continue $\int_{(S)}$ quand on passe d'une distribution discrète à une distribution continue de masse.

b) Vitesse du centre d'inertie dans un référentiel (R_i) quelconque

$$\vec{V}'(G) = \frac{d'}{dt} \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{(S)} \frac{d'}{dt} (\overrightarrow{OM} dm) = \frac{1}{m} \int_{(S)} \left(\frac{d'}{dt} \overrightarrow{OM} \right) dm$$

$$= \frac{1}{m} \int_{M \in (S)} \vec{V}'(M) dm;$$

C'est-à-dire :

$$\vec{V}^i(G) = \frac{1}{m} \int_{M \in (S)} \vec{V}^i(M) dm$$

c) Accélération du centre d'inertie dans un référentiel (R_i) quelconque

On montre de même que :

$$\vec{\Gamma}^i(G) = \frac{1}{m} \int_{M \in (S)} \vec{\Gamma}^i(M) dm$$

II-3 Centre d'inertie d'un ensemble de sous-systèmes disjoints : Cas d'un partitionnement

Pour n solides (S_i) de masses respectives m_i et de centres d'inertie G_i , notés respectivement $S_i(m_i, G_i)$, on considère le système $(S) = \sum_i (S_i)$ de masse $m = \sum_i m_i$; l'ensemble des $S_i(m_i, G_i)_{i=1,n}$ est un partitionnement de $S(m, G)$. Le centre d'inertie G de (S) est donné par : $\overline{OG} = \frac{1}{m} \sum m_i \overline{OG}_i$.

Il vient ainsi pour le solide (S) dans un référentiel quelconque (R_i) :

Le vecteur position du centre d'inertie :

$$\vec{r}^i(G) = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}^i(G_i)$$

Le vecteur vitesse du centre d'inertie :

$$\vec{V}^i(G) = \frac{1}{m} \sum m_i \vec{V}^i(G_i)$$

Le vecteur accélération du centre d'inertie :

$$\vec{\Gamma}^i(G) = \frac{1}{m} \sum m_i \vec{\Gamma}^i(G_i)$$

II-4 Centre d'inertie d'un système admettant un élément de symétrie

Dès qu'il y a un élément de symétrie (point, axe, plan, etc.) pour la distribution de masse du système, on parle de **symétrie matérielle**; et le centre d'inertie G du système appartient à cet élément de symétrie.

II-5 Théorèmes de Guldin

Ceci est un résultat qui permet d'accéder très simplement à la position du centre de masse d'une ligne ou d'une surface plane dont on connaît respectivement la surface ou le volume qu'elles engendrent par rotation autour d'un axe de leur plan et ne les coupant pas.

a) Le premier théorème de Guldin

Énoncé :

“L'aire de la surface engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie”

Preuve :

Soit un point courant M, de la surface totale engendrée par la rotation de la courbe (Γ) située au dessus de l'axe des x. M est entouré par la surface élémentaire $ds = X_M d\theta \times dl$, où dl est un déplacement élémentaire sur (Γ).

$$\rightarrow S = \int_{(S)} ds = \int_{(S)} X_M d\theta \times dl = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \times \int_{(\Gamma)} X_M dl$$

$$= 2\pi \int_{(\Gamma)} X_M dl = 2\pi \int_{(\Gamma)} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_x dl$$

Soit λ la densité linéaire de masse sur (Γ)

$$\lambda \int_{(\Gamma)} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_x dl = \int_{(\Gamma)} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_x \lambda dl = \int_{(\Gamma)} \overrightarrow{OM} \vec{e}_x dm = \vec{e}_x \int_{(\Gamma)} \overrightarrow{OM} dm = \vec{e}_x \cdot m \overrightarrow{OG} = X_G \cdot m = X_G \cdot \lambda \cdot L$$

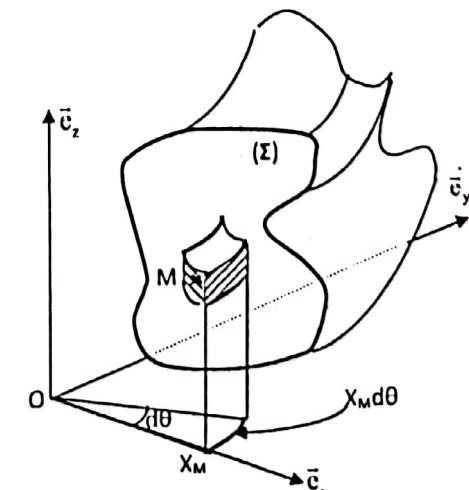
Ainsi $\rightarrow \int_{(\Gamma)} \overrightarrow{OM} \vec{e}_x dl = X_G \cdot L$ où L est la longueur totale de la courbe plane (Γ)

$$\rightarrow S = 2\pi \int_{(\Gamma)} \overrightarrow{OM} \vec{e}_x dl = 2\pi X_G \cdot L$$

D'où :

$$S = 2\pi X_G \times L$$

ce qu'il fallait démontrer.



b) Le deuxième théorème de Guldin

Énoncé :

“La mesure du volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égale au produit de l'aire de cette surface par le périmètre du cercle décrit par son centre d'inertie”

Preuve :

Soit un point courant M, du volume total engendré par la rotation de la surface (Σ) située au dessus

de l'axe des x. M est entouré par le volume élémentaire $dV = X_M d\theta \cdot ds$ où ds est une surface élémentaire sur (Σ)

$$dV = X_M d\theta \cdot ds$$

$$\Rightarrow V = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \times \int_{(\Sigma)} X_M ds = 2\pi \int_{(\Sigma)} X_M ds = 2\pi \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_x ds$$

Soit μ la densité surfacique de masse sur (Σ) .

$$\begin{aligned} \mu \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_x ds &= \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_x \mu ds = \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_x dm = \vec{e}_x \cdot \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OM} dm = m \cdot \overrightarrow{OG} \cdot \vec{e}_x = m \cdot X_G \\ &= m X_G = \mu \cdot S \times X_G \end{aligned}$$

Ainsi : $\int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_x ds = S \times X_G$, où S est l'aire totale de la surface plane (Σ)

$$\Rightarrow V = 2\pi \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{e}_x ds = 2\pi X_G \cdot S$$

D'où :

$$V = 2\pi X_G \cdot S$$
 ce qu'il fallait démontrer.

Remarque :

Pris dans le sens inverse, le théorème de Guldin est un outil rapide et efficace pour la détermination d'une surface de révolution à partir du centre de masse d'une courbe plane et pour la détermination un volume engendré, par révolution, par une répartition surfacique plane de masse

III- ACTIONS MECANIQUES

III-1 Définition des actions mécaniques

On appelle *action mécanique* toute cause susceptible de maintenir un système au repos, de créer ou de modifier un mouvement, ou alors de déformer un solide.

Les actions mécaniques représentent donc les efforts exercés sur les solides réels et entre ces solides. Ces actions sont schématisées ou modélisées par des forces, des moments, des couples, de pressions, des contraintes, des torseurs, etc.

III-2 Classification des actions mécaniques

On peut diviser les actions mécaniques en deux grandes familles : les actions à distance et les actions de contact, ces dernières étant les plus nombreuses et les plus diverses.

a) Actions mécaniques à distance

Elles sont essentiellement de deux types : gravitationnelle (loi universelle de l'attraction gravitationnelle) et électriques (électrostatiques ou électromagnétiques).

Ces *actions*, dites *volumiques*, s'exercent en chaque point P du système matériel.

Exemple : L'action de la pesanteur (attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur les corps à son voisinage. Elle est représentée par le vecteur-force couramment désigné par « poids » du corps : \vec{P} .

- Point d'application : G, centre d'inertie du corps ; appelé ici centre de gravité, puisqu'il s'agit d'une force gravitationnelle.
- Direction : la verticale du lieu, passant par G
- Sens : dirigé du Haut vers le Bas
- Module ou intensité : $P = mg$

où la valeur g de l'accélération de la pesanteur est fonction de la latitude sur le globe terrestre et de l'altitude.

- Variation de g avec l'altitude

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

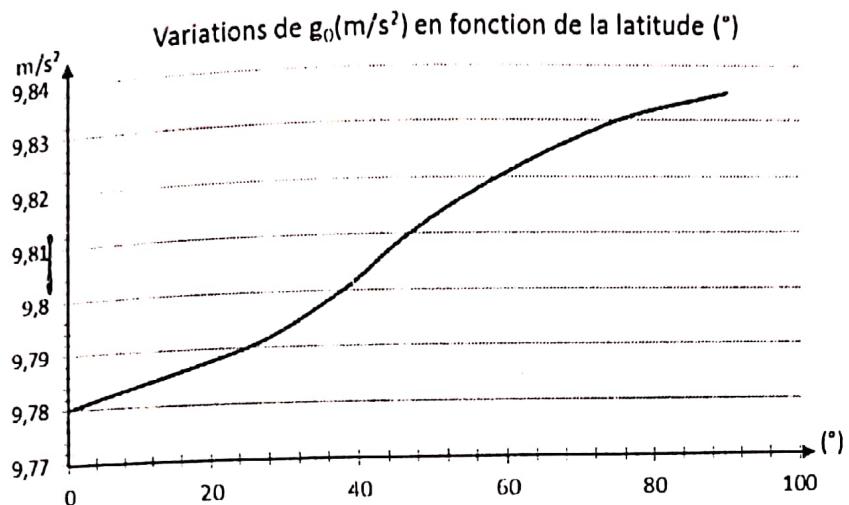
g_0 ≡ valeur de g à la surface de la terre (varie avec la latitude)

R ≡ rayon de la terre ≈ 6.378km

h ≡ altitude (par rapport à la surface de la Terre)

- Variation de g avec la latitude (valeurs de g_0 entre l'équateur et les pôles)

Latitude (°)	0	25	38	47	59	75	90
g_0 (m.s ⁻²)	9,78	9,79	9,8	9,81	9,82	9,83	9,835



b) Actions mécaniques de contact

Cesont des actions qui naissent lorsque deux solides sont en contact. On peut les diviser en trois groupes :

- Les **actions ou charges concentrées** :
Chaque fois que l'effort de contact est concentré en un point ou sur une toute petite surface, l'action est schématisée par un vecteur-force. On parle de **charge ponctuelle**.
- Les actions réparties sur une ligne ou **charges linéiques**.
- Les actions réparties sur une surface ou **charges surfaciques**.

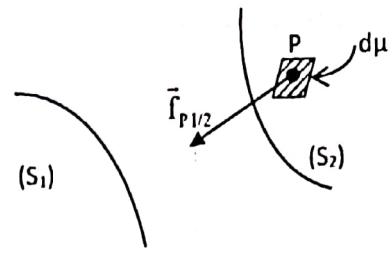
IV- MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

La modélisation des actions mécaniques peut se faire soit du point de vue local, soit du point de vue global, suivant les objectifs visés par l'étude :

- La **modélisation locale** a pour but d'étudier l'action mécanique dans la zone où elle s'exerce (champ de pesanteur, champ des pressions de contact, champ des contraintes à l'intérieur d'un matériau, etc.).
- La **modélisation globale**, généralement faite par un torseur, vise à caractériser globalement l'action mécanique, dans le but par exemple d'appliquer le Principe Fondamental de la Statique.

IV-1 Modélisation locale

Les actions mécaniques (de contact ou à distance) qu'exerce un système matériel S_1 sur un système matériel S_2 ($S_1 \subset S_2$) sont représentées, en tout point P de S_2 (ou d'une surface de S_2), par un *champ de glisseurs*. $(P, \vec{f}_{P/2})$, défini relativement à une *mesure* μ .



Or on définit la force comme toute action mécanique modélisable par un glisseur.

On appelle *force élémentaire* de l'action mécanique de (S_1) sur (S_2) , au point P , le glisseur dont le vecteur associé est : $d\vec{F}_{P/2} = \vec{f}_{P/2} \cdot d\mu$

$\vec{f}_{P/2}$ est la *densité du champ de forces*, relativement à la mesure μ ;

si la mesure μ est une ligne (droite ou non), on aura une *densité linéique* de force. On parlera de *densité surfacique* de force, si la mesure μ est une surface (plane ou non) et de *densité volumique* si on a un volume.

Ainsi : la modélisation locale des actions mécaniques est réalisée par des champs de forces.

Exemple : Action mécanique de la pesanteur

$(S_1) \equiv \text{Terre}$ $(S_2) \equiv \text{corps quelconque}$; La force élémentaire $d\vec{F}_{P/2}$ de l'action de la Terre sur le corps, au point P , représente le poids d'un élément de matière entourant P

$$d\vec{F}_{P/2} = \vec{f}_{P/2} \cdot d\mu$$

- Si μ est la mesure de masse de (S_2) , la *densité massique* $\vec{f}_{P/2}$ du champ de forces est le vecteur **accélération de la pesanteur** ; puisque le poids du volume élémentaire entourant P est :

$$d\vec{F}_{P/2} = \vec{g} \cdot dm$$

- Si μ est la mesure du volume de (S_2) , $\vec{f}_{P/2}$ *densité volumique* du champ de forces au point P est $\rho \vec{g}$, c'est-à-dire le **poids volumique**, où ρ désigne la masse volumique de (S_2) au point P ; le poids du volume élémentaire entourant P est alors : $d\vec{F}_{P/2} = \rho \vec{g} \cdot dV$, où dV est le volume élémentaire entourant P .

IV-2 Modélisation globale

Les effets d'une force sur un solide dépendent de la position de la force par rapport au corps ; par exemple, si la force passe (sa droite d'action, en fait) par le centre d'inertie G du

solide, ce dernier sera animé d'un mouvement de translation rectiligne, sous l'effet de cette force. Mais si la force ne passe pas par G, le solide est à la fois animé d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation.

Pour traduire, avec précision, les effets d'une force, compte tenu de sa position, on fait nécessairement intervenir la notion de moment (le moment de cette force par rapport à un point donné).

Ainsi, les actions mécaniques exercées par un système matériel (S_1) sur un autre système matériel (S_2) ($S_1 \subset S_2$) étant représentées localement par un champ de glisseurs ($P, \bar{f}_{P_{1/2}}$), défini relativement à une mesure μ , on devrait leur associer, en un point A quelconque, un

$$[T_{1/2}] = \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{1/2} \\ \bar{m}_{A_{1/2}} \end{array} \right\} \text{ avec : } \bar{R}_{1/2} = \int_{P_e(S_2)} d\bar{F}_{P_{1/2}} = \int_{P_e(S_2)} \bar{f}_{P_{1/2}} d\mu$$

$$\text{et } \bar{m}_{A_{1/2}} = \int_{P_e(S_2)} \overrightarrow{AP} \wedge d\bar{F}_{P_{1/2}} = \int_{P_e(S_2)} \overrightarrow{AP} \wedge d\bar{f}_{P_{1/2}} d\mu$$

Ce torseur, appelé *torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) au point A*, caractérise globalement l'action mécanique de (S_1) sur (S_2).

Remarque :

Deux *actions mécaniques* sont dites (globalement) *équivalentes* si elles sont représentées, en un même point, par des torseurs égaux.

V- QUELQUES ACTIONS MECANIQUES COURANTES

V-1 Action mécanique de pesanteur

a) Modélisation locale

$(S_1) \equiv$ Terre $(S_2) \equiv$ le corps, système étudié

Nous avons vu qu'avec pour densité massique $\bar{f}_{P_{1/2}}$ l'accélération de la pesanteur, le poids (élémentaire) du volume élémentaire entourant le point P est :

$$d\bar{F}_{P_{1/2}} = \bar{g} dm$$

$= \rho \bar{g} dt$ où $\rho \bar{g}$ est la densité volumique du champ de forces de la pesanteur

b) Modélisation globale

Le torseur continu d'action mécanique de la pesanteur s'écrit en un point A :

$$[T_{1/2}]_A = \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{1/2} \\ \bar{m}_{A_{1/2}} \end{array} \right\} \text{ avec }$$

$$\vec{R}_{1/2} = \int_{P \in (S_2)} \vec{g} \cdot dm = m\vec{g} \quad (\text{en supposant que la densité massique } g \text{ est uniforme sur } S_2)$$

| et $\vec{m}_{A \ 1/2} = \int_{P \in (S_2)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{g} dm = \left(\int_{P \in (S_2)} \overrightarrow{AP} \cdot dm \right) \wedge \vec{g}$

Remarque :

1°). $\vec{m}_{A \ 1/2} = (m \cdot \overrightarrow{AG}) \wedge \vec{g} = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{g}$ où G est le centre de masse de (S_2) . Ceci implique que les deux éléments de réduction sont perpendiculaires en tout point A. Ce qui signifie que le torseur est un glisseur.

2°). $\vec{m}_{G \ 1/2} = \overrightarrow{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$ minimal. Ceci implique que l'axe central de ce torseur passe par le centre d'inertie G du système (S_2) . D'où le torseur des actions mécaniques de pesanteur s'écrit donc au point G : $[\mathcal{T}_{1/2}]_A = m\vec{g} + c\vec{0}$

3°). Lorsqu'un solide est un assemblage hétérogène de solides homogènes, on peut accéder à son centre d'inertie par partitionnement : on considère chacun des solides comme une masse ponctuelle concentrée en son centre de gravité ; le centre de masse de l'ensemble est alors le barycentre des centres de gravité affectés des masses respectives comme coefficients.

V-2 Action mécanique de contact surfacique

a) Modélisation locale

Supposons deux solides (S_1) et (S_2) en contact suivant une surface (Σ) . L'action mécanique de (S_1) sur (S_2) est représentée en chaque point P de (Σ) par la *densité surfacique* de forces $\vec{f}_{P \ 1/2}$

b) Modélisation globale

L'action mécanique de contact qu'exerce le système matériel (S_1) sur une surface (Σ) d'un système matériel (S_2) , définie localement par la densité surfacique des forces $\vec{f}_{P \ 1/2}$, est caractérisée, globalement, en un point A, par le torseur :

$$[\mathcal{T}_{1/2}]_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1/2} \\ \vec{m}_{A \ 1/2} \end{array} \right\} \text{ avec}$$

$$\vec{R}_{1/2} = \int_{P \in (S_1)} \vec{f}_{P \ 1/2} \cdot d\sigma \quad \text{et} \quad \vec{m}_{A \ 1/2} = \int_{P \in (S_1)} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}_{P \ 1/2} \cdot d\sigma$$

c) Lois de Coulomb

En admettant l'existence, au point P, d'un plan tangent commun (π) aux deux solides (S_1) et (S_2) en contact, on peut poser :

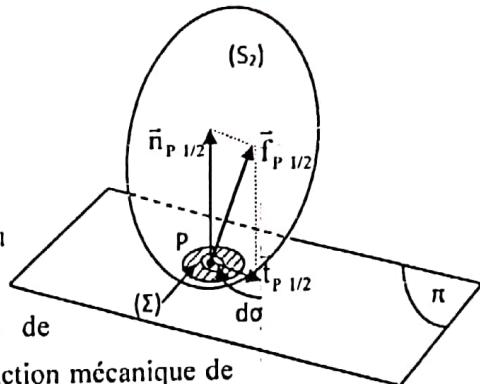
$$\vec{f}_{P \frac{1}{2}} = \vec{n}_{P \frac{1}{2}} + \vec{t}_{P \frac{1}{2}} \text{ avec}$$

$\vec{n}_{P \frac{1}{2}}$ perpendiculaire au plan (π) et

$\vec{t}_{P \frac{1}{2}}$ parallèle au plan (π)

On a les définitions suivantes :

- $\vec{f}_{P \frac{1}{2}}$ = **densité surfacique** des forces de contact, au point P, de l'action mécanique de (S_1) sur (S_2).
- $\vec{n}_{P \frac{1}{2}}$ = **densité surfacique normale** des forces de contact, ou **pression de contact**, au point P, de l'action mécanique de (S_1) sur (S_2)
- $\vec{t}_{P \frac{1}{2}}$ = **densité surfacique tangentielle** des forces de contact, au point P, de l'action mécanique de (S_1) sur (S_2).



Afin d'énoncer les lois expérimentales de coulomb (sur le frottement et l'adhérence), on note $\bar{V}(P \in 2/1)$ ou mieux $\bar{V}_2^1 P$, la vitesse d'entraînement en P, du solide (S_2) dans son mouvement par rapport à (S_1).

$\bar{V}_2^1 P$ est appelé **vecteur vitesse de glissement**, au point P, du solide (S_2) dans son mouvement par rapport à (S_1). Ce vecteur est situé dans le plan tangent (π).

On dit qu'il y a **adhérence au point P**, entre (S_1) et (S_2) si et seulement si $\bar{V}_2^1 P = \bar{0}$; lorsque $\bar{V}_2^1 P \neq \bar{0}$, on dit qu'il y a **frottement au point P** entre (S_1) et (S_2).

Les lois de Coulomb (introduites par C.A. Coulomb en 1781) donnent des informations sur les densités surfaciques normale et tangentielle des forces de contact, lorsqu'il y a frottement ou adhérence.

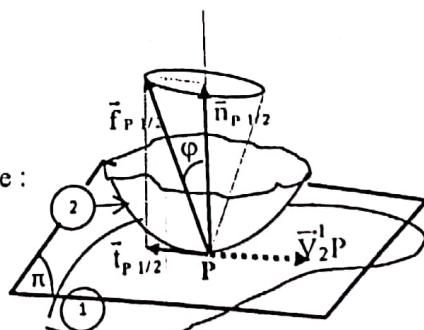
1^{er} cas : $\bar{V}_2^1 P \neq \bar{0}$ (glissement relatif au point P).

La densité surfacique des forces de contact, au point P, est telle que :

$$\vec{t}_{P \frac{1}{2}} \wedge \bar{V}_2^1 P = \bar{0} \quad (1)$$

$$\vec{t}_{P \frac{1}{2}} \bullet \bar{V}_2^1 P < 0 \quad (2)$$

$$\|\vec{t}_{P \frac{1}{2}}\| = f \|\vec{n}_{P \frac{1}{2}}\| \quad (3)$$



(1) et (2) montrent que $\vec{t}_{P \frac{1}{2}}$ est colinéaire, mais de sens opposé, à $\bar{V}_2^1 P$

(3) traduit le fait que $\|\vec{t}_{P_{1/2}}\|$ et $\|\vec{n}_{P_{1/2}}\|$ sont proportionnelles, le coefficient de proportionnalité étant appelé le coefficient de frottement des matériaux (S_1) et (S_2).

Remarque :

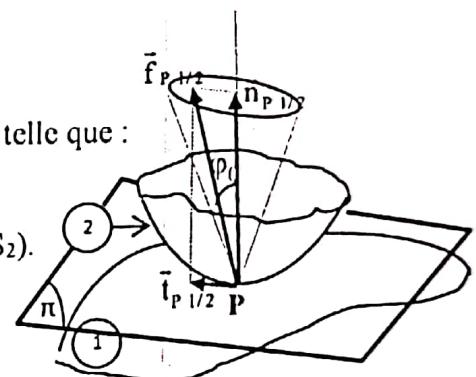
- L'angle φ tel que $f = \tan \varphi$ est appelé angle de frottement des matériaux (S_1) et (S_2)
- La densité surfacique des forces de contacts $\vec{f}_{P_{1/2}}$ se situe sur le bord d'un cône de révolution appelé *cône de frottement*, de sommet P, d'axe perpendiculaire au plan tangent (π) et de demi-angle au sommet φ
- La position du vecteur $\vec{f}_{P_{1/2}}$ est fixée sur le cône de frottement, par l'orientation du vecteur vitesse de glissement $\vec{V}_2^1 P$

2^e cas : $\vec{V}_2^1 P = \vec{0}$ (pas de glissement relatif au point P)

Alors, la densité surfacique des forces de contact, au point P, est telle que :

$$\|\vec{t}_{P_{1/2}}\| \leq f_0 \|\vec{n}_{P_{1/2}}\| \quad (4)$$

Où f_0 est appelé coefficient d'adhérence des matériaux (S_1) et (S_2).



Remarque :

- L'angle φ_0 tel que $f_0 = \tan \varphi_0$ est appelé angle d'adhérence des matériaux (S_1) et (S_2)
- La densité surfacique des forces de contact $\vec{f}_{P_{1/2}}$ se situe à l'intérieur ou sur le bord du cône de révolution, appelé cône d'adhérence, de sommet P, d'axe perpendiculaire au plan tangent (π) et de demi-angle au sommet φ_0 .
- La position du vecteur $\vec{f}_{P_{1/2}}$ n'est pas dans ce dernier cas connue, à priori, à l'intérieur ou sur le bord du cône d'adhérence.

N.B. :

- Les quatre relations (1), (2), (3) et (4) ci-dessus constituent les lois expérimentales de Coulomb.
- Les coefficients de frottement et d'adhérence entre deux surfaces dépendent de nombreux paramètres :
 - Nature des matériaux en présence
 - Etat de surface
 - Pression de contact
 - Température de contact
 - Vitesse de glissement
 - Lubrification
 - Etc.,

Ce qui rend leur détermination expérimentale très délicate.

- Quelques ordres de grandeurs existent en littérature pour quelques couples des matériaux :

Matériaux en contact	f	f_0
Acier sur acier	0,10 - 0,20	0,15 - 0,25
Acier sur bronze	0,12 - 0,20	0,15 - 0,20
Acier sur matériau de friction (ferodo)	0,20 - 0,35	0,30 - 0,40
Cuir sur métal	0,20 - 0,30	0,30 - 0,40
Pneu sur revêtement routier	0,30 - 0,60	0,60 - 1,20

➤ Le coefficient d'adhérence f_0 est toujours supérieur du coefficient de frottement f . Mais étant donné le grand nombre de paramètres qui interviennent dans leur détermination, on considère souvent, pour simplifier les choses, que ces deux coefficients sont égaux.

➤ Dans l'hypothèse de contact sans adhérence et sans frottement ($f = f_0 = 0$) ou tout simplement lorsque f_0 est faible, la densité surfacique des forces de contact $\bar{f}_{p/2}$ est perpendiculaire au plan tangent.

➤ Selon que la surface de contact est sèche ou lubrifiée, la littérature donne davantage de valeurs de f et f_0 en fonction de la nature des matériaux en contact.

Matériaux en contact	f_0		f	
	à sec	lubrifié	à sec	lubrifié
acier sur acier	0,18	0,12	0,15	0,09
acier sur fonte	0,19	0,1	0,16	0,08 à 0,04
acier sur bronze	0,11	0,1	0,1	0,09
téflon sur acier	0,04	/	0,04	/
fonte sur bronze	/	0,1	0,2	0,08 à 0,04
nylon sur acier	/	/	0,35	0,12
bois sur bois	0,65	0,2	0,4 à 0,2	0,16 à 0,04
métaux sur bois	0,6 à 0,5	0,1	0,5 à 0,2	0,08 à 0,02
métaux sur glace	/	/	0,02	/
pneu voiture sur route	0,8	/	0,6	0,3 à 0,1 sur sol mouillé

Tableau extrait de J.L. FANCION in Guide de Mécanique-Sciences et Technologies Industrielles

V-3 Action mécanique de contact ponctuel

Le contact ponctuel est une liaison entre deux solides qui sont en contact en un nombre fini de points. Il est lié à l'hypothèse de solides indéformables

($\forall A, B \in S, \|AB\| = C$ dans le temps) ; les contacts réels imposent, en effet, une déformation locale qui conduit toujours à un contact surfacique.

a) Torseur d'action mécanique.

L'action mécanique de contact qu'exerce le système matériel (S_1) en un point I d'un système matériel (S_2) est représentée, globalement, par le torseur : $[\cdot \bar{R}_{1/2}]_I = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{1/2} \\ \bar{m}_{1/2} \end{Bmatrix}$

Les éléments de réduction de ce torseur ont des composantes dans le plan tangent (π) et suivant la normale \vec{n} à ce plan tangent :

$$\bar{R}_{1/2} = \bar{N}_{1/2} + \bar{T}_{1/2}$$

$$\bar{m}_{1/2} = \bar{m}_n^{n_{1/2}} + \bar{m}_t^{t_{1/2}}$$

On appelle :

$\bar{N}_{1/2}$ ≡ la composante normale de la résultante ou **effort normal**

$\bar{T}_{1/2}$ ≡ la composante tangentielle de la résultante ou **effort tangentiel**

$\bar{m}_n^{n_{1/2}}$ ≡ la composante normale du moment en I ou **moment de pivotement**

$\bar{m}_t^{t_{1/2}}$ ≡ la composante tangentielle du moment en I ou **moment du roulement**

Remarque : On peut obtenir ces vecteurs de manière intrinsèque par les formules ci-dessous :

$$\bar{N}_{1/2} = (\bar{R}_{1/2} \bullet \vec{n}) \bullet \vec{n} \quad (1)$$

$$\bar{m}_n^{n_{1/2}} = (\bar{m}_{1/2} \bullet \vec{n}) \bullet \vec{n} \quad (2)$$

$$\bar{T}_{1/2} = (\vec{n} \wedge \bar{R}_{1/2}) \wedge \vec{n} \quad (3) \text{ et}$$

$$\bar{m}_t^{t_{1/2}} = (\vec{n} \wedge \bar{m}_{1/2}) \wedge \vec{n} \quad (4)$$

En effet :

(1) et (2) étant triviaux, (3) et (4) sont établies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \bullet \quad (\vec{n} \wedge \bar{R}) \wedge \vec{n} &= -\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \bar{R}) = -\{\vec{n}(\vec{n} \bullet \bar{R}) - \bar{R}(\vec{n} \bullet \vec{n})\} \\ &= -(\vec{n} \bullet \bar{R})\vec{n} + \bar{R} = \bar{R} - (\bar{R} \bullet \vec{n}) \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

D'où $\bar{R} = (\bar{R} \bullet \vec{n})\vec{n} + (\vec{n} \wedge \bar{R}) \wedge \vec{n}$ et par analogie avec $\bar{R} = \bar{N} + \bar{T}$, on tire :

$$\bar{T} = (\vec{n} \wedge \bar{R}) \wedge \vec{n}$$

- Pour démontrer la relation (4), on procède de la même manière en remplaçant la résultante par le moment.

b) Torseur cinématique.

Afin d'énoncer, dans le cas du contact ponctuel, des lois analogues aux lois de Coulomb, on est obligé de faire un rappel du torseur cinématique du mouvement du solide (S_2) par rapport à (S_1) , soit : $[\mathcal{V}_{1/2}]_I = [\mathcal{V}_2]_I = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_2^! \\ \bar{v}_2^! I \end{array} \right\}$ encore noté $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega}_{2/I} \\ \bar{v}_{Ie2/I} \end{array} \right\}$

En posant :

$$\bar{\Omega}_{n_{2/I}} = \left(\bar{\Omega}_N \right)_2 = (\bar{\Omega}_2^! \cdot \bar{n}) \bar{n}, \text{ perpendiculaire au plan tangent commun } (\pi)$$

$$, \bar{\Omega}_{r_{2/I}} = \left(\bar{\Omega}_r \right)_2 = (\bar{n} \wedge \bar{\Omega}_2^!) \wedge \bar{n}, \text{ parallèle au plan tangent } (\pi).$$

On a les définitions (appellations) suivantes :

$\left(\bar{\Omega}_N \right)_2$ ≡ le vecteur *vitesse angulaire de pivotement* de (S_2) par rapport à (S_1) on parle aussi de *vecteur rotation de pivotement*

$\left(\bar{\Omega}_r \right)_2$ ≡ le vecteur *vitesse angulaire de roulement* de (S_2) par rapport à (S_1) on parle aussi de *vecteur rotation de roulement*

$\bar{v}_2^! I$ ≡ le vecteur *vitesse de glissement* de (S_2) par rapport à (S_1) , au point I

Remarques :

➤ $\bar{V}_2^! I = \bar{V}_0^! I + \bar{V}_2^0 I = \bar{V}_2^0 I - \bar{V}_1^0 I$; conclusion : la vitesse de glissement au point I est la différence des vitesses absolues des molécules de (S_2) et (S_1) , qui sont en contact en I.

➤ Lorsque $\bar{\Omega}_2^! = \bar{0}$, (pas de pivotement ni de roulement) ; on ne peut avoir que du *glissement simple* entre les solides.

➤ Si $\bar{V}_2^! I = \bar{0}$ on n'a pas de glissement : roulement et pivotement sont possibles

- Si en plus $\left(\bar{\Omega}_N \right)_2 = \bar{0}$ on a du *roulement simple* c'est-à-dire roulement sans glissement
- Si c'est plutôt $\left(\bar{\Omega}_r \right)_2 = \bar{0}$ on a du *pivotement simple* c'est-à-dire pivotement sans glissement.

➤ La vitesse d'un point M quelconque du solide (S_2) étant donnée par :

$$\bar{V}_2^! M = \bar{V}_2^! I + \bar{M}I \wedge \bar{\Omega}_2^! \quad \text{et avec } \bar{\Omega}_2^! = \left(\bar{\Omega}_N \right)_2 + \left(\bar{\Omega}_r \right)_2, \text{ on a :}$$

$$\bar{V}_2^! M = \bar{V}_2^! I + \bar{M}I \wedge \left(\bar{\Omega}_N \right)_2 + \bar{M}I \wedge \left(\bar{\Omega}_r \right)_2$$

$\bar{V}_2^! I$ → représente le glissement

$\left(\bar{\Omega}_N \right)_2$ → représente le pivotement

$\left(\bar{\Omega}_r \right)_2$ → représente le roulement

Ainsi, le mouvement relatif d'un solide (S_2) par rapport à un autre (S_1) est la somme de trois mouvements :

Remarques :

- Les relations (1), (2), ..., (11) ci-dessous liant le torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) au torseur cinématique de (S_2) dans son mouvement relatif par rapport à (S_1), sont une extension des lois de Coulomb.

- Dans l'hypothèse du contact rigoureusement ponctuel, on suppose que le moment du torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) est nul au point de contact I. L'action mécanique

de (S_1) sur (S_2) est alors représentée par le glisseur $\mathcal{F}_{1/2} = \begin{Bmatrix} \tilde{R}_{1/2} \\ \tilde{0} \end{Bmatrix}$.

- Quand on a un contact linéaire entre les deux solides, l'action mécanique de contact est modélisée par une densité linéique de forces. Et pour certains types de contact, par exemple suivant une droite entre un cylindre de révolution et un plan, on peut introduire la notion de moment de roulement, comme précédemment.

V-4 Torseurs d'actions mécaniques exercées par les liaisons usuelles

a) Torseurs cinématiques relatifs dus à certaines liaisons usuelles

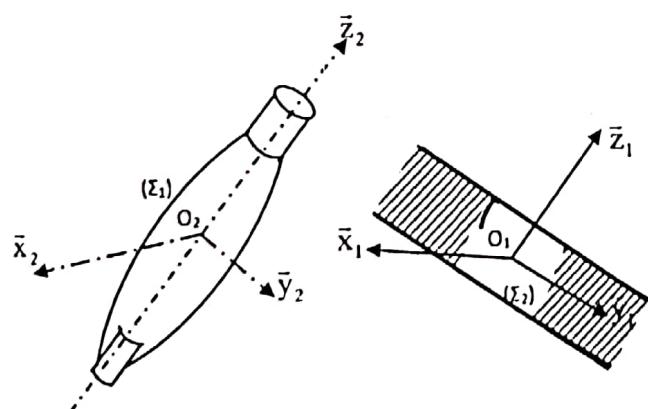
Parmi toutes les liaisons imaginables seules dix ont été reconnues indépendantes de la technologie utilisée, par la norme NF EN ISO 3952_1 (mai 95), nous les présentons ci-dessous et les accompagnons des particularités qu'elles imposent au torseur cinématique relatif. Rappelons que sont négligés, dans cet effort de modélisation, les jeux entre solides, les déformations et défauts géométriques divers dus à l'usure des pièces.

a-1) La liaison pivot ou liaison rotatoire de centre O_2 et d'axe \bar{z}

Définition

C'est une liaison telle qu'une surface de révolution non cylindrique (Σ_2) liée au solide (S_2) reste en coïncidence avec une surface de révolution (Σ_1) liée à (S_1).

Représentation géométrique



Équations de liaison

Pour mettre en coïncidence (Σ_2) avec (Σ_1), on doit s'assurer que O_2 est fixe sur (O_1, \bar{z}_1) et que $\bar{z}_2 = \bar{z}_1$.

La nature des surfaces de révolution n'a aucune importance. Il peut y en avoir une infinité ; le tout est d'assurer la coïncidence de deux d'entre elles.

Avec $O_2(x, y, z)$ un point de l'axe et $\ddot{\Omega}_1^2 \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ dans $R_1(O_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$, $\dot{V}_{O_2} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{(R_1)}$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow \dot{x}=0 \\ y=0 \Rightarrow \dot{y}=0 \\ z=cte \Rightarrow \dot{z}=0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} p=0 \\ q=0 \Rightarrow l=5 \text{ relations bilatérales} \Rightarrow k=6-5=1 \text{ ceci implique que la} \\ r \neq 0 \end{cases}$$

liaison rottoïde est une liaison à 1d.d.l (degré de liberté). Elle matérialise la rotation autour d'un axe fixe.

Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique :

$$[\gamma] = \begin{cases} \ddot{\Omega}_2^1 = \omega \bar{z} \\ \dot{V}_2^1(p) = \vec{0} \end{cases}_{p \in \text{axe}}$$

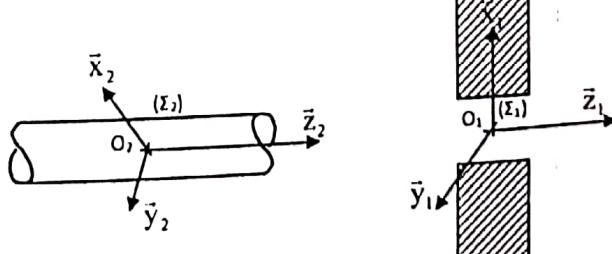
Exemple : Le volant d'une voiture, la manivelle de la machine à écraser les arachides grillées

a-2) La liaison pivot glissant ou liaison verrou ou liaison cylindrique d'axe \bar{z}

Définition

C'est une liaison pivot telle que les surfaces en contact sont des surfaces cylindriques de révolution (avec donc liberté de mouvement selon l'axe de révolution \bar{z}).

Représentation géométrique

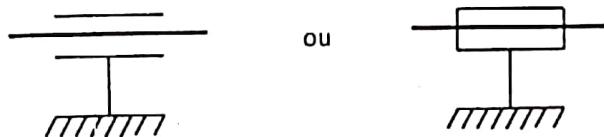


Équations de liaison

Un point de l'axe $O_2(x, y, z)$ et $\ddot{\Omega}_2^1 \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ dans $R_1(O_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \rightarrow \tilde{V}_{02}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{(R_1)}$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow \dot{x}=0 \\ y=0 \Rightarrow \dot{y}=0 \text{ et } \begin{cases} p=0 \\ q=0 \Rightarrow k = 6-4 = 2 \text{ d.d.l.} \end{cases} \\ z=z(t) \Rightarrow \dot{z} \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{rotation autour de } \bar{z}_1 \\ \text{et} \\ \text{translation sur } \bar{z}_1 \end{cases}$$

Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

$$[\mathcal{V}] = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\Omega} = \omega \bar{z} \\ \tilde{V}p = V\bar{z} \end{array} \right\}_{p \in \text{axe}}$$

Exemple : Le tube du stylo à encre

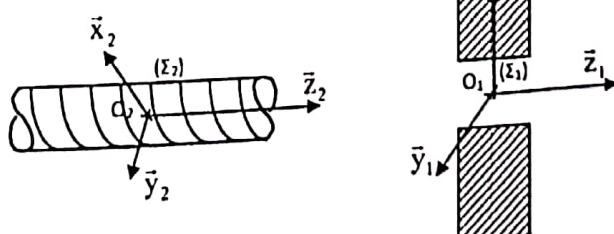
a-3) La liaison hélicoïdale d'axe \bar{z}

Définition

C'est une liaison pour laquelle les surfaces en contact sont des surfaces hélicoïdales (exemple le système vis-écrou).

C'est une liaison verrou où le mouvement de translation est hélicoïdal ($V = p\omega$ où p est le pas de l'hélice)

Représentation géométrique

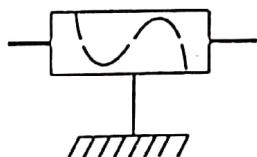


Équations de liaison

$$O_2(x, y, z) \text{ et } \bar{\Omega}_2^1 \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \text{ dans } R_1(O_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \rightarrow \bar{V}_{02}^{-1} \begin{pmatrix} \cdot \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(k_1)}$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0 \\ y = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0 \\ z = p\omega t + z_0 \Rightarrow \dot{z} = p\omega \end{cases} \text{ et } \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \\ r = \omega \end{cases} \Rightarrow k = 6 - 5 = 1 \text{ d.d.l. (mouvement hélicoïdal suivant } \bar{z})$$

Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

$$[\mathcal{V}] = \begin{cases} \bar{\Omega} = \omega \bar{z} \\ \bar{V}_p = p\omega \bar{z} \end{cases}_{p \in \text{axe}} ; p \text{ est le pas cinématique en m/rad.}$$

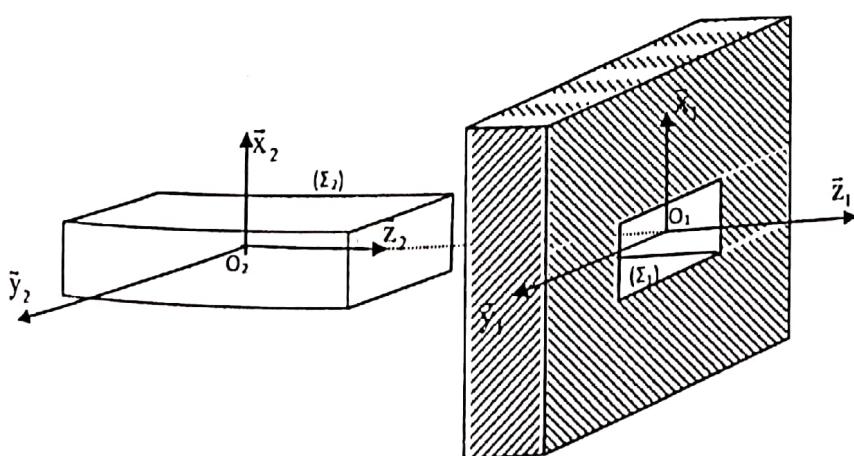
Exemple : Le boulon (système vis-écrou), le bouchon d'une bouteille d'eau tanguy

a-4) La liaison glissière ou liaison prismatique d'axe \bar{z}

Définition

C'est une liaison telle que les surfaces en contact sont des surfaces prismatiques.

Représentation géométrique



Équations de liaison

Un point de l'axe $O_2(x, y, z)$ et $\tilde{\Omega}_2^1 \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ dans $R_1(O_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \rightarrow \tilde{V}_{02}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{(R_1)}$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0 \\ y = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0 \text{ et } \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \Rightarrow k = 6 - 5 = 1 \text{ d.d.l.} \rightarrow \text{translation sur } \bar{z}_1 \\ r = 0 \end{cases} \\ z = z(t) \Rightarrow \dot{z} \end{cases}$$

Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

$$[\mathcal{V}] = \begin{cases} \tilde{\Omega} = \vec{0} \\ \tilde{V}_p = V\vec{z} \end{cases}$$

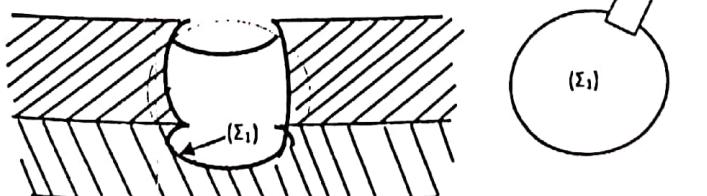
Exemple : Le tiroir de la boîte d'allumettes

a-5) La liaison sphérique ou liaison rotule de centre O_2

Définition :

C'est une liaison pour laquelle les surfaces en contact sont sphériques et de centres O_1 et O_2 confondus.

Représentation géométrique :

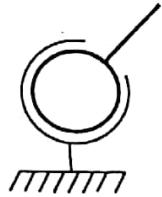


Équations de liaison

Un point de l'axe $O_2(x, y, z)$ et $\ddot{\Omega}_2^1 \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ dans $R_1(O_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \rightarrow \bar{V}_{O_2}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{(R_1)}$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow \dot{x}=0 \\ y=0 \Rightarrow \dot{y}=0 \text{ et } \begin{cases} p \\ q \\ r \end{cases} \\ z=0 \Rightarrow \dot{z}=0 \end{cases} \Rightarrow k = 6 - 3 = 3 \text{ d.d.l. (trois rotations possibles autour des axes de } (R_i))$$

Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

$$[\mathcal{V}] = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\Omega} \\ \bar{V}_{O_2} = \bar{0} \end{array} \right\}_{O_2, \text{centre des sphères}}$$

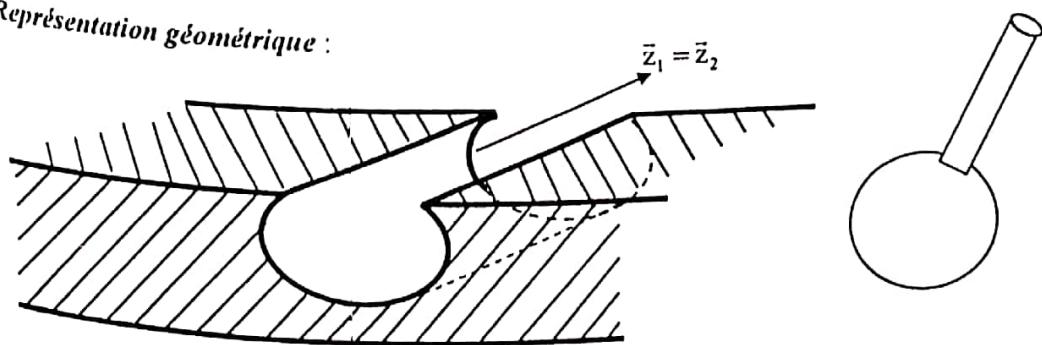
Exemple : la rotule de direction des voitures

a-6) La liaison sphère cylindre ou liaison gouttière ou liaison linéaire annulaire d'axe \bar{z} ou de direction \bar{z}

Définition

C'est une liaison où l'une des surfaces en contact est sphérique et l'autre cylindrique

Représentation géométrique :

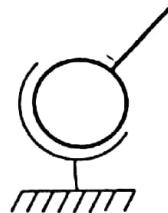


Équations de liaison

Un point de l'axe $O_2(x, y, z)$ et $\ddot{\Omega}_2^1 \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ dans $R_1(O_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \rightarrow \bar{V}_{02}^{-1} \begin{pmatrix} \cdot \\ x \\ \cdot \\ y \\ \cdot \\ z \end{pmatrix}_{(R_1)}$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0 \\ y = 0 \Rightarrow \dot{y} = 0 \text{ et } \begin{cases} p \\ q \Rightarrow k = 6 - 2 = 4 \text{ d.d.l.} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{une translation sur l'axe du cylindre} \\ \text{trois rotations autour des trois axes} \end{cases} \\ z = z(t) \Rightarrow \dot{z} \end{cases}$$

Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

$$[\mathcal{V}] = \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\Omega} \\ \bar{V}_{02} = V\bar{z} \end{array} \right\}_{O_2} \text{ centre de la sphère}$$

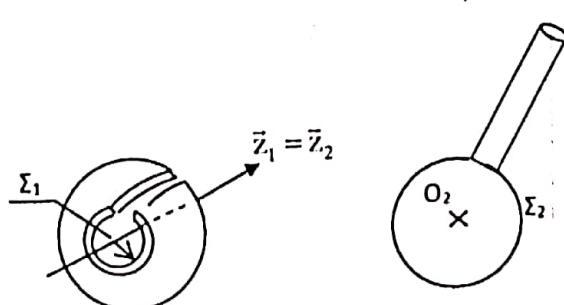
Exemple : Canal d'alimentation en grains d'un moulin à maïs

a-7) La liaison sphérique à doigt de centre O_2 et d'axe \bar{z}

Définition

C'est une liaison sphérique où la présence d'un doigt empêche la rotation suivant un axe

Représentation géométrique



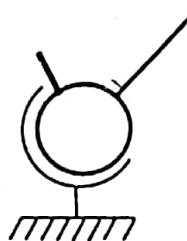
Équations de liaison

Un point de l'axe $O_2(x, y, z)$ et $\ddot{\Omega}_2^1 \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ dans $R_1(O_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \rightarrow \bar{V}_{02}^{-1} \begin{pmatrix} \cdot \\ x \\ \cdot \\ y \\ \cdot \\ z \end{pmatrix}_{(R_1)}$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow \dot{x}=0 \\ y=0 \Rightarrow \dot{y}=0 \text{ et} \\ z=0 \Rightarrow \dot{z}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} p \\ q \\ r=0 \end{cases} \Rightarrow k=6-4=2 \text{ d.d.l.}$$

→ Deux rotations possibles autour

des axes \bar{x} et \bar{y}



Représentation (schéma) technique

Torseur cinématique

$$[\mathcal{V}] = \begin{cases} \vec{\Omega} = \omega_x \bar{x} + \omega_y \bar{y} \\ \vec{v}_{O_2} = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \vec{\Omega} \text{ tel que } \vec{\Omega} \cdot \vec{z} = 0$$

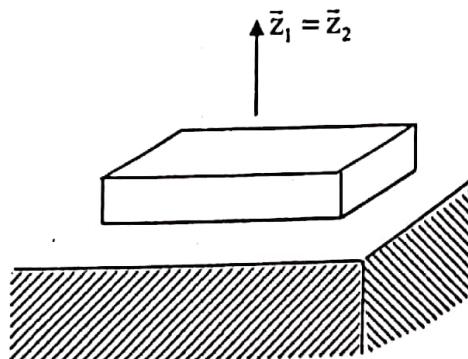
O_2 centre des sphères

a-8) La liaison appui plan de normale \bar{z}

Définition :

C'est une liaison pour laquelle les surfaces de contact sont planes

Représentation géométrique



Équations de liaison

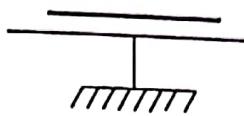
Un point de l'axe $O_2(x, y, z)$ et $\vec{\Omega}_2^I \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ dans $R_1(O_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \rightarrow \vec{v}_{O_2}^I \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{(R_1)}$

$$\begin{cases} x = x(t) \Rightarrow \dot{x} \\ y = y(t) \Rightarrow \dot{y} \\ z = C^e \Rightarrow \dot{z} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \Rightarrow k = 6 - 3 = 3 \text{ d.d.l.} \\ r \end{cases} \rightarrow$$

Deux translations suivant les deux

axes du plan et une rotation autour de la normale aux deux plans

Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

$$[\mathcal{V}] = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega} = \omega \bar{z} \\ \bar{v}_p \end{array} \right\}_{p \in (S_1)}$$

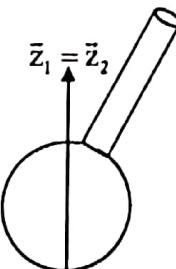
N.B. : $\forall P, \bar{v}_p \cdot \bar{z} = 0$

Exemple : Une boîte de sucre reposant sur la table

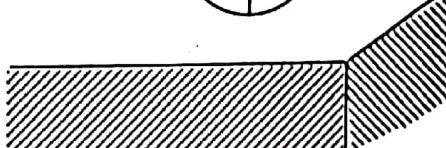
a-9) La liaison sphère-plan ou liaison ponctuelle de normale \bar{z}

Définition

C'est une liaison où l'une des surfaces est plane et l'autre une sphère ; le contact a lieu uniquement en un point commun aux deux surfaces



Représentation géométrique



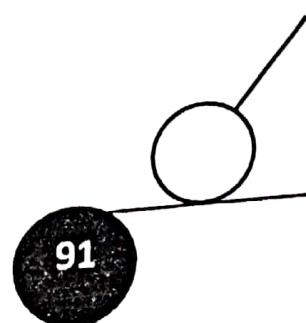
Équations de liaison

Un point de l'axe $O_2(x, y, z)$ et $\bar{\Omega}_2^I \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ dans

$$R_1(O_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \rightarrow \bar{v}_{O_2}^I \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{(R_1)}$$

$$\begin{cases} x \Rightarrow \dot{x} \\ y \Rightarrow \dot{y} \\ z = 0 \Rightarrow \dot{z} = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} p \\ q \\ r \end{cases} \Rightarrow k = 6 - 1 = 5 \text{ d.d.l.} \rightarrow \begin{cases} \text{deux translations sur le plan et} \\ \text{trois rotations autour des trois axes} \end{cases}$$

Représentation (schéma) technique





Torseur cinématique

$$[\mathcal{V}] = \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Omega} \\ \bar{V}_P \end{array} \right\}_{P \in (S_1)}$$

N.B. : pour P appartenant à la normale de contact $\bar{V}_P \cdot \bar{z} = 0$

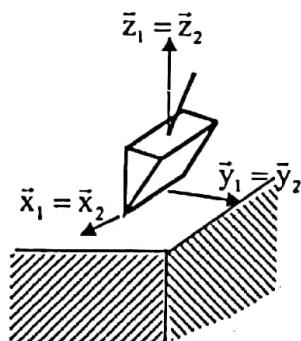
Exemple : Ballon de football bien gonflé et posé sur une table

a-10) La liaison linéaire rectiligne d'axe (O, \bar{x}) et de normale (O, \bar{z})

Définition

C'est une liaison où le contact a lieu suivant une droite (segment de droite)

Représentation géométrique :



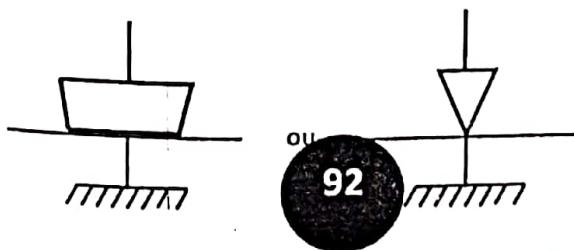
Équations de liaison

Un point quelconque $P_2(x, y, z)$ et $\bar{\Omega}_2^1 \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ dans $R_1(O_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \rightarrow \bar{V}_{P_2}^1 \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{(R_1)}$

$$\begin{cases} x \Rightarrow \dot{x} \\ y \Rightarrow \dot{y} \\ z = 0 \Rightarrow \dot{z} = 0 \end{cases} \text{ et}$$

$$\begin{cases} p \\ q = 0 \Rightarrow k = 6 - 2 = 4 \text{ d.d.l.} \\ r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{deux translations sur le plan et} \\ \text{deux rotations autour des trois axes} \end{cases}$$

Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

$$[\mathcal{V}_2] = \begin{cases} \bar{\Omega} \cdot \bar{y} = 0 \\ \bar{V}_P \cdot \bar{z} = 0 \quad \forall P \in (S_2) \end{cases}$$

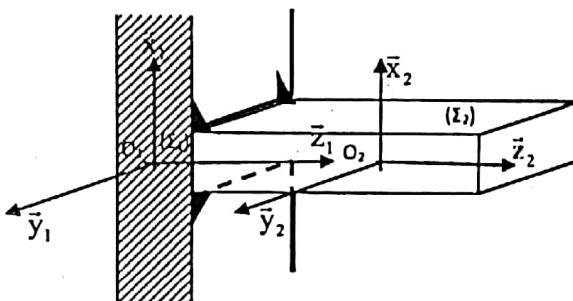
Exemple : une règle/traceuse posée « debout » sur la table

a-II) La liaison enca斯特ment

Définition

C'est une liaison où l'un des solides est encastré, incrusté, soudé, dans l'autre.

Représentation géométrique :



Équations de liaison

Un point quelconque $P_2(x, y, z)$ et $\ddot{\Omega}_2^I \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ dans $R_1(O_1, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \rightarrow \bar{V}_{P_2}^I \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{(R_1)}$

$$\begin{cases} x = C^I \Rightarrow \dot{x} = 0 \\ y = C^I \Rightarrow \dot{y} = 0 \\ z = C^I \Rightarrow \dot{z} = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \\ r = 0 \end{cases} \Rightarrow k = 6 - 6 = 0 \text{ d.d.l.} \rightarrow \text{aucun mouvement possible}$$

Représentation (schéma) technique



Torseur cinématique

$$[\gamma_2] = \begin{cases} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{cases}$$

Exemple : Une pièce soudée sur une autre

b) Torseurs d'efforts imposés par les liaisons normalisées sans frottement

Généralement, les contacts entre solides se font avec frottements ; mais si les solides sont supposés parfaitement indéformables, une première approche simplificatrice des mécanismes permet de négliger l'influence du frottement sur les mouvements relatifs des solides. En tout point de contact entre les surfaces de liaison, les actions mécaniques élémentaires sont colinéaires aux vecteurs normaux (aux plans tangents communs), qu'il y ait mouvement relatif de solides ou non. Ceci revient à dire que $f = f_0 = 0$, c'est-à-dire $\varphi = \varphi_0 = 0$.

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de présenter les torseurs qui modélisent globalement les actions mécaniques de contact entre deux solides ; avec l'hypothèse simplificatrice de non frottement.

b-1) Méthode d'analyse

La technique de la méthode d'analyse est la suivante :

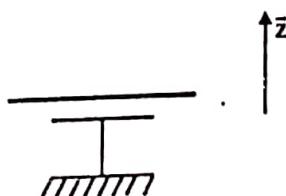
Partant de la propriété de normalité des actions mécaniques élémentaires (car hypothèse de non frottement), on cherche les conséquences qu'implique cette propriété sur :

- La résultante du torseur d'actions mécaniques : $\bar{R}_{1/2} = \int_{\text{contact}} d\bar{f}_M$
- Le moment résultant en un point particulier O : $\bar{m}_{O,1/2} = \int_{\text{contact}} \overrightarrow{OM} \wedge d\bar{f}_M$

Ces conséquences se traduisent, dans la majorité des cas, par l'apparition de zéros dans les coordonnées plückériennes du torseur dans un repère lié à la géométrie de la liaison.

b-2) Torseurs d'efforts imposés par les liaisons normalisées

* *Liaison appui plan de normale \bar{z}*



La surface de contact est un plan (π).

En tout point de contact $d\vec{f}_M = df_M \cdot \vec{z}$

- $\vec{R}_{1/2} \cdot \vec{x} = \left(\int_{M \in (\pi)} d\vec{f}_M \right) \cdot \vec{x} = \left(\int_{M \in (\pi)} df_M \right) \vec{z} \cdot \vec{x} = 0$

De même $\vec{R}_{1/2} \cdot \vec{y} = 0$.

- $\vec{m}_{0,1/2} \cdot \vec{z} = \left(\int_{M \in (\pi)} \overrightarrow{OM} \wedge df_M \right) \cdot \vec{z} = \int_{M \in (\pi)} [\overrightarrow{OM} \wedge df_M] \cdot \vec{z} = \int_{M \in (\pi)} (\overrightarrow{OM}, df_M \vec{z}, \vec{z}) = 0$ (produit mixte)

$$\Rightarrow \vec{m}_{0,1/2} \cdot \vec{z} = 0$$

Alors :

$$[\mathcal{F}_{1/2}] = \begin{cases} 0\vec{x} + 0\vec{y} + Z\vec{z} \\ L\vec{x} + M\vec{y} + O\vec{z} \end{cases} \quad \text{en } O$$

Ainsi, alors une liaison appui plan :

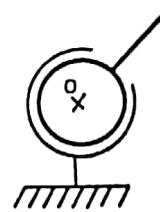
- Pas de composante dans la plan de contact pour la résultante
- Pas de composante sur la normale pour le moment.

* Liaison rotule de centre O (liaison sphérique)

La surface de contact est une sphère de centre O (et de rayon R).

En tout point de contact, on a :

- $d\vec{f}_M = df_M \cdot \vec{e}_r$ où $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r$



- $\vec{m}_{0,1/2} = \int_{\text{sphère}} \overrightarrow{OM} \wedge df_M = \int_{\text{sphère}} R\vec{e}_r \wedge df_M \vec{e}_r = \int_{\text{sphère}} R df_M \cdot \vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$

Alors : $[\mathcal{F}_{1/2}] = \begin{cases} X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ 0\vec{x} + 0\vec{y} + 0\vec{z} \end{cases}$ en O, centre de liaison.

Ainsi, dans une liaison rotule :

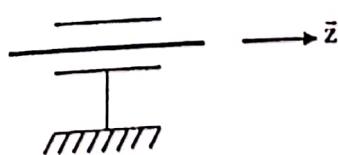
- Moment nul au centre de la liaison.

* Liaison pivot glissant d'axe \vec{z} (liaison verrou) de centre O

La surface de contact est un cylindre (surface latérale du cylindre).

En tout point de contact $d\vec{f}_M = df_M \cdot \vec{e}_r$ et $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_r + \lambda\vec{z}$

avec $\begin{cases} \vec{e}_r \cdot \vec{z} = 0 \\ O \in \text{axe de liaison} \end{cases}$



- $\vec{R}_{1/2} \cdot \vec{z} = \left(\int_{(\text{surface latérale})} df_M \vec{e}_r \right) \cdot \vec{z} = \int df_M (\vec{e}_r \cdot \vec{z}) = 0$

- $\vec{m}_{0,1/2} \cdot \vec{z} = \int_{\text{cylindre}} (\overrightarrow{OM} \wedge df_M) \cdot \vec{z} = \int [(R\vec{e}_r + \lambda\vec{z}) \wedge (df_M \vec{e}_r)] \cdot \vec{z} = \int [\lambda df_M (\vec{z} \wedge \vec{e}_r)] \cdot \vec{z} = \int \lambda df_M (\vec{z}, \vec{e}_r, \vec{z}) = 0$

$$\text{Alors } [\mathcal{F}_{1/2}] = \begin{cases} X\bar{x} + Y\bar{y} + 0\bar{z} \\ L\bar{x} + M\bar{y} + 0\bar{z} \end{cases} \quad \forall O \in \text{axe de liaison}$$

Ainsi dans une liaison verrou : Pas de composante (ni de résultante, ni de moment) sur l'axe de liaison.

* Dualité entre le torseur cinématique relatif et le torseur des efforts imposés par les liaisons

Nous récapitulons ci-dessous les torseurs cinématiques et d'efforts mécaniques imposés, des trois liaisons analysées ci-haut, afin d'y porter un regard attentif aidant à établir une relation générale, liant les coordonnées plückériennes de chacun d'eux :

> Appui plan :

$$[\mathcal{V}_2] = \begin{cases} \bar{\Omega} = \omega \cdot \bar{z} \\ \bar{V}_P \text{ tel que } \bar{V}_P \cdot \bar{z} = 0 \quad \forall P \in S_2 \end{cases}$$

$$\text{et } [\mathcal{F}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R} = 0\bar{x} + 0\bar{y} + Z\bar{z} \\ \bar{m}_P = L\bar{x} + M\bar{y} + 0\bar{z} \quad \forall P ; \text{ donc } \bar{m}_P \cdot \bar{z} = 0 \end{cases}$$

> Rotule :

$$[\mathcal{V}_2] = \begin{cases} \bar{\Omega} \\ \bar{V}_{O_2} = \bar{0} \text{ avec } O_2 \text{ centre de la sphère} \end{cases}$$

liaison

$$[\mathcal{F}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R} \\ \bar{m}_{O_2} = \bar{0} \text{ en } O_2 \text{ centre de} \end{cases}$$

> Verrou :

$$[\mathcal{V}_2] = \begin{cases} \bar{\Omega} = \omega \cdot \bar{z} \\ \bar{V}_P = V\bar{z} \quad \forall P \in \text{axe} \end{cases}$$

$$[\mathcal{F}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R} \text{ tel que } \bar{R} \cdot \bar{z} = 0 \\ \bar{m}_P \text{ tel que } \bar{m}_P \cdot \bar{z} = 0 \quad \forall P \in \text{axe} \end{cases}$$

Remarque :

Au regard des deux torseurs de chacune des liaisons, on fait le constat suivant :

1) A une composante nulle du vecteur rotation instantanée correspond une composante non nulle du moment des efforts imposés

2) A une composante nulle du vecteur vitesse correspond une composante non nulle de la résultante des efforts imposés.

On conclut donc que pour les trois liaisons ci-dessus, il existe une relation duale entre le torseur cinétique relatif et le torseur des efforts imposés par les liaisons : **la nullité d'une composante de la résultante de l'un entraîne la non nullité de cette même composante du moment de l'autre et vice versa.**

3) – Pour une liaison L_i , les coordonnées plückériennes $X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i$ non nulles du torseur des actions mécaniques transmissibles ou imposées sont appelées *inconnues de liaison* de la liaison L_i ; on appelle *inconnues cinématiques* de la liaison L_i , les coordonnées plückériennes non nulles du torseur cinématique de cette liaison i .

4) – Puissance des actions mutuelles d'une liaison : en Dynamique on sait que la puissance des actions mutuelles d'une liaison se met sous la forme de la partie duale du produit scalaire des torseurs d'actions mécaniques et cinématique : $\text{dual}([\mathcal{T}] \cdot [\mathcal{V}])$ (c.à.d. comoment des deux torseurs); pour la liaison L_i , on aura donc comme puissance des actions mutuelles : $\text{com}([\mathcal{T}], [\mathcal{V}])$.

5) – Équation algébrique de liaison : Lorsque le frottement est négligé dans une liaison, on montre en Dynamique que la puissance des actions mutuelles de la liaison est nulle.

$$\text{Ainsi, pour une liaison } L_i, \text{ de torseurs } [\mathcal{T}]_{oi} = \begin{Bmatrix} X_i & L_i \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{Bmatrix}_{(R_i)}$$

$$\text{et } [\mathcal{V}]_{oi} = \begin{Bmatrix} \Omega_{xi} & V_{xi} \\ \Omega_{yi} & V_{yi} \\ \Omega_{zi} & V_{zi} \end{Bmatrix}_{(R_i)}$$

les inconnues de liaison et les inconnues cinématiques vérifient *l'équation algébrique de liaison* :

$$X_i V_{xi} + Y_i V_{yi} + Z_i V_{zi} + L_i \Omega_{xi} + M_i \Omega_{yi} + N_i \Omega_{zi} = 0 \quad (1)$$

L'absence de frottement sur la liaison impose donc l'équation algébrique de liaison ci-dessus, quel que soit le mouvement relatif entre les pièces, c'est-à-dire quel que soit les valeurs que peuvent prendre les coordonnées plückérienne du torseur cinématique.

Or, pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire d'avoir la nullité, dans l'équation (1), des termes en facteur avec les inconnues cinématiques de liaison (coordonnées plückériennes non nulles du torseur d'action mécanique transmissible). D'où la dualité énoncée ci-dessus en 2)

Ainsi par exemple, pour une liaison appui plan, $Y_i = Z_i = 0$ et $L_i = 0$

(1) $\Rightarrow X_i V_{xi} + M_i \Omega_{yi} + N_i \Omega_{zi} = 0$ (avec $X_i \neq 0$; $M_i \neq 0$; $N_i \neq 0$). Qui doit être vérifié en particulier pour les mouvements relatifs ci-dessous :

- $(\Omega_{yi} = \Omega_{zi} = 0) \Rightarrow V_{xi} = 0 \quad (\text{donc } V_{yi} \neq 0; V_{zi} \neq 0)$
- $(V_{xi} = 0 \text{ et } \Omega_{zi} = 0) \Rightarrow \Omega_{yi} = 0 \quad (\text{donc } \Omega_{xi} \neq 0)$

- $(V_{xi} = 0 \text{ et } \Omega_{yi} = 0) \Rightarrow \Omega_{yi} = 0 \quad (\text{donc } \Omega_{xi} \neq 0)$
 Ainsi, aux termes (coordonnées plückériennes) non nuls du torseur d'action mécanique, correspondent des termes nuls en dual (résultante et moment permutés) du torseur cinématique, et aux termes nuls des termes non nuls, et vice-versa. C'est la dualité entre les deux torseurs $[\mathcal{T}]$ et $[\mathcal{R}]$. C'est le principe de la dualité ; il s'énonce de la manière suivante : « Entre les torseurs cinématique et d'action mécanique, la nullité d'une composante scalaire de la résultante de l'un entraîne la non nullité de la composante de même ordre du moment de l'autre, et vice versa »

* Récapitulatif des torseurs cinématiques et des efforts imposés par les liaisons

Cette dualité se généralise pour tous les autres types de liaison. D'où le tableau récapitulatif ci-dessous des liaisons sans frottement normalisées, présentant les torseurs cinématique et d'actions mécaniques imposé par les liaisons.

Liaison pivot (ou liaison rototoïde) de centre O et d'axe \bar{z}

$$[\mathcal{R}_2] = \begin{cases} \bar{\Omega}_2^1 = \omega \cdot \bar{z} \\ \bar{V}_2^1 p = \bar{0} \text{ en } P \in \text{axe} \end{cases} \rightarrow [\mathcal{T}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R} = X\bar{x} + Y\bar{y} + Z\bar{z} \\ \bar{m}_p = L\bar{x} + M\bar{y} \text{ en } P \in \text{axe} \end{cases}$$

Liaison pivot glissant (ou liaison verrou ou liaison cylindrique) d'axe \bar{z}

$$[\mathcal{R}_2] = \begin{cases} \bar{\Omega}_2^1 = \omega \cdot \bar{z} \\ \bar{V}_2^1 p = V\bar{z} \text{ en } P \in \text{axe} \end{cases} \rightarrow [\mathcal{T}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R} = X\bar{x} + Y\bar{y} \\ \bar{m}_p = L\bar{x} + M\bar{y} \text{ en } P \in \text{axe} \end{cases}$$

Liaison hélicoïdale d'axe \bar{z}

On a $[\mathcal{R}_2] = \begin{cases} \bar{\Omega}_2^1 = \omega \cdot \bar{z} \\ \bar{V}_2^1 p = p\omega \cdot \bar{z} \text{ en } P \in \text{axe} \end{cases} \rightarrow [\mathcal{T}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R} \\ \bar{m}_p \end{cases} \text{ tel que } \bar{m}_p \cdot \bar{z} + p \cdot \bar{R} \cdot \bar{z} = 0 \text{ si l'hélice est à droite, où } p \text{ est le pas cinématique de l'hélice (en m/rad) ; pour une hélice à gauche on aura plutôt : } \bar{m}_p \cdot \bar{z} - p \cdot \bar{R} \cdot \bar{z} = 0$

Liaison glissière (ou liaison prismatique) d'axe \bar{z}

$$[\mathcal{R}_2] = \begin{cases} \bar{\Omega}_2^1 = \bar{0} \\ \bar{V}_2^1 p = V\bar{z} \text{ en } P \in \text{axe} \end{cases} \rightarrow [\mathcal{T}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R} = X\bar{x} + Y\bar{y} \\ \bar{m}_p = L\bar{x} + M\bar{y} + N\bar{z} \text{ en } P \in \text{axe} \end{cases}$$

Liaison rotule (ou liaison sphérique) de centre O

$$[\mathcal{V}_2] = \begin{cases} \bar{\Omega}_2^1 & \text{en } O \text{ centre des sphères} \\ \vec{V}_O = \vec{0} & \end{cases} \rightarrow [\mathcal{K}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R} = X\bar{x} + Y\bar{y} + Z\bar{z} \\ \bar{m}_O = \vec{0} \end{cases} \text{ en } O \text{ centre des sphères}$$

Liaison gouttière (ou liaison sphère cylindre) d'axe } z

$$[\mathcal{V}_2] = \begin{cases} \bar{\Omega}_2^1 & \\ \vec{V}_{O_2} = V_z \bar{z} & \end{cases} \rightarrow [\mathcal{K}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R} = X\bar{x} + Y\bar{y} \\ \bar{m}_{O_2} = \vec{0} \end{cases} \text{ en } O_2 \text{ centre de la sphère}$$

Liaison sphérique à doigt d'axe } z

$$[\mathcal{V}_2] = \begin{cases} \bar{\Omega}_2^1 = \omega_x \bar{x} + \omega_y \bar{y} & \\ \vec{V}_{O_2} = \vec{0} & \end{cases} \rightarrow [\mathcal{K}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R} = X\bar{x} + Y\bar{y} + Z\bar{z} \\ \bar{m}_{O_2} = N\bar{z} \end{cases} \text{ en } O_2 \text{ centre des sphères}$$

Liaison appui plan de normale } z

$$[\mathcal{V}_2] = \begin{cases} \bar{\Omega}_2^1 = \omega \cdot \bar{z} & \\ \vec{V}_P = V_x \bar{x} + V_y \bar{y} & \forall P \in (S_2) \end{cases} \rightarrow [\mathcal{K}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R} = Z\bar{z} \\ \bar{m}_P = L\bar{x} + M\bar{y} \end{cases} \forall P \in (S_2)$$

Liaison ponctuelle (ou liaison sphère plan) de normale } z

$$[\mathcal{V}_2] = \begin{cases} \bar{\Omega}_2^1 & \\ \vec{V}_P = V_x \bar{x} + V_y \bar{y} & \forall P \in \text{normale} \end{cases} \rightarrow [\mathcal{K}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R} = Z\bar{z} \\ \bar{m}_P = \vec{0} \end{cases} \forall P \in \text{normale}$$

Autres liaisons :

➤ Liaison linéaire rectiligne d'axe (O, \bar{x}) et de normale (O, \bar{z})

$$[\mathcal{V}_2] = \begin{cases} \bar{\Omega} \cdot \bar{y} = 0 & \\ \vec{V}_P \cdot \bar{z} = 0 & \forall P \in (S_2) \end{cases} \rightarrow [\mathcal{K}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R} = Z\bar{z} \\ \bar{m}_P = M\bar{y} \end{cases} \forall P \in (S_2)$$

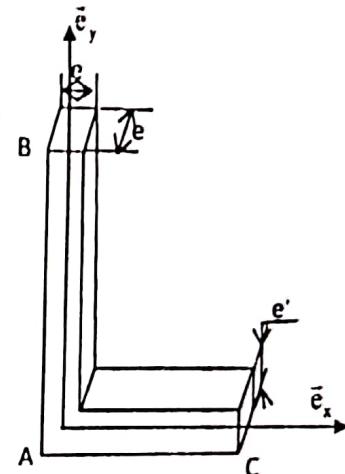
➤ Liaison encastrement

$$[\mathcal{V}_2] = \begin{cases} \vec{0} \\ \vec{0} \end{cases} \rightarrow [\mathcal{K}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R} \\ \bar{m}_P \end{cases} \forall P \in (S_2)$$

VI- EXERCICES RESOLUS du chapitre 4 : Modélisation des actions mécaniques

Exercice résolu n°1 : Détermination du centre d'inertie par partitionnement

Soit une équerre de maçon BAC, homogène, de masse volumique ρ , de base a , de hauteur b et d'épaisseurs e et e' négligeables (devant b et c) ; On oriente le repérage de sorte que : A(0,0), B(0,b) et C(c, 0). Déterminer, par partitionnement, les coordonnées de son centre de gravité G.



Solution :

Désignons par :

- E le système équerre tel qu'on ait (E, m)
- $E_1 \equiv$ la barre AB tel qu'on ait (E_1, m_1)
- $E_2 \equiv$ la barre AC tel qu'on ait (E_2, m_2)

E_1 et E_2 forment E.

Le centre de gravité G_1 de E_1 est : $\overrightarrow{AG}_1 = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} b \vec{e}_y$;

Le centre de gravité G_2 de E_2 est : $\overrightarrow{AG}_2 = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} c \vec{e}_x$.

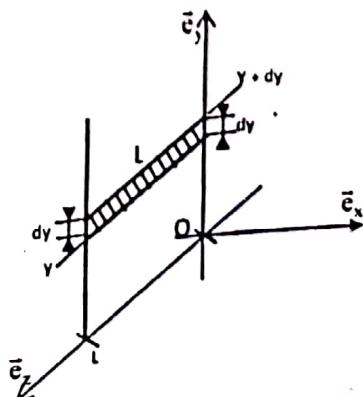
Le centre de gravité G de E est donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m} [m_1 \overrightarrow{AG}_1 + m_2 \overrightarrow{AG}_2]$

Or $m_1 = \rho \cdot ee'b$; $m_2 = \rho \cdot ee'c$; et $m = \rho \cdot ee'(b+c)$. Donc les masses sont proportionnelles aux longueurs. On a alors :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{c^2}{2(b+c)} \vec{e}_x + \frac{b^2}{2(b+c)} \vec{e}_y$$

Exercice résolu n°2: champ des actions mécaniques de pression hydrostatique sur une paroi verticale de hauteur h et de largeur L .

Un barrage hydroélectrique principalement constitué d'un mur de largeur L et de hauteur H est rempli jusqu'à un niveau h ($h < H$).



- 1°) Par application de la loi de l'hydrostatique entre un point A à la surface libre du fluide et un point M à une altitude y, déterminer la pression en M.
- 2°) En déduire l'expression de l'action élémentaire s'exerçant sur un élément de surface $dS = Ldy$ à l'altitude y
- 3°) Déterminer le moment en O, de cette action élémentaire. (on négligera l'infiniment petit d'ordre 2)
- 4°) En négligeant la pression atmosphérique (devant les pressions exercées sur la paroi par de l'eau), déterminer, par intégration, le torseur de l'ensemble des actions mécaniques de pression hydrostatique s'exerçant sur le barrage.

Solution :

- 1°) Loi de l'hydrostatique entre un point A à la surface libre du fluide et un point M à une altitude y

M à une altitude y \rightarrow M à une profondeur $h-y$.

$$\rightarrow p_M - p_A = \rho g(h-y) = \rho g(h-y)$$

c'est-à-dire : $p_M = p_A + \rho g(h-y)$

- 2°) Déduction de l'expression de l'action élémentaire s'exerçant sur un élément de surface $dS = Ldy$ à l'altitude y :

La pression p_M ci-dessus s'exerce sur l'élément de surface $dS = Ldy$; elle y exerce donc une action (force) élémentaire $d\bar{f} = -p(M)dS\vec{n}$ où \vec{n} , normale sortante est égale à

$$-\vec{e}_x \Rightarrow d\bar{f} = p(M)dS\vec{e}_x = [p_A + \rho g(h-y)]Ldy\vec{e}_x \text{ Ainsi : } d\bar{f} = [p_A + \rho g(h-y)]Ldy\vec{e}_x$$

(1)

Remarque : * cette action est centrée en un point M tel

$$\overrightarrow{OM} = \left(y + \frac{dy}{2} \right) \vec{e}_y + \frac{L}{2} \vec{e}_z$$

* le terme $\frac{L}{2} \vec{e}_z$ s'annule si on fait passer le plan xOy par le milieu de la paroi (voir figure ci-contre).

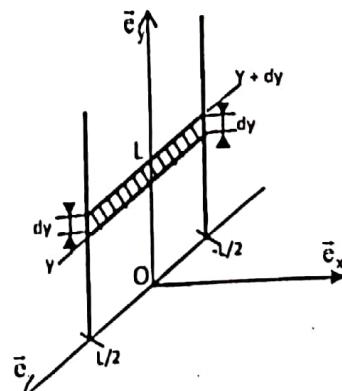
- 3°) Moment en O de cette action élémentaire

$$d\bar{m}_O = \overrightarrow{OM} \wedge d\bar{f} = \left(y + \frac{dy}{2} \right) [p_A + \rho g(h-y)]Ldy \cdot \vec{e}_y \wedge \vec{e}_x$$

$$\approx -L[p_A + \rho g(h-y)]ydy\vec{e}_z \quad (2) \quad (\text{on néglige l'infiniment petit d'ordre 2})$$

Ainsi : $d\bar{m}_O \approx -L[p_A + \rho g(h-y)]ydy\vec{z}$

- 4°) Torseur de l'ensemble des actions mécaniques de pression hydrostatique s'exerçant sur le barrage



Si la pression atmosphérique est négligée ($p_A \approx 0$), l'intégration sur toute la paroi (y allant de 0 à h) donne :

* Pour la résultante géométrique :

$$\bar{R}_{1/2} = \bar{x} \int_{y=0}^h L \rho g (h - y) dy = -L \rho g \bar{x} \left[\frac{1}{2} (h - y)^2 \right]_{y=0}^h = -L \rho g \bar{x} \left[\frac{1}{2} (0 - h^2) \right] = L \rho g \frac{h^2}{2} \bar{x}$$

$$\boxed{\bar{R}_{1/2} = \frac{1}{2} \rho g L h^2 \bar{x}}$$

* Pour le moment résultant :

$$\begin{aligned} \bar{m}_{0,1/2} &= \bar{z} \int_{y=0}^h -\rho g L (h - y) y dy = -\rho g L \bar{z} \int_{y=0}^h (hy - y^2) dy \\ &= -\rho g L \bar{z} \left[\frac{1}{2} hy^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^h = -\rho g L \bar{z} \left[\frac{1}{2} h^3 - \frac{1}{3} h^3 \right] = -\frac{1}{6} \rho g L h^3 \bar{z} \\ &\rightarrow \boxed{\bar{m}_{0,1/2} = -\frac{1}{6} \rho g L h^3 \bar{z}} \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des actions mécaniques de pression hydrostatique sur la paroi peut être modélisé par le torseur :

$$\boxed{[\mathcal{T}_{1/2}] = \begin{cases} \bar{R}_{1/2} = \frac{1}{2} \rho g L h^2 \bar{x} \\ \bar{m}_{0,1/2} = -\frac{1}{6} \rho g L h^3 \bar{z} \end{cases}}$$

VII- Paul Guldin - Biographie

Paul Guldin



Données clés	
Naissance	12 juin 1577 Mels (Suisse)
Décès	3 novembre 1643 (à 66 ans) Graz (Autriche)
Champs	Astronomie, mathématiques
Institutions	Université grégorienne
Renommé pour	Théorème de Guldin

Paul Guldin, né Habakuk Guldin le 12 juin 1577 à Mels, près de Saint-Gall en Suisse et mort le 3 novembre 1643 à Graz, est un jésuite suisse, mathématicien et astronome.

Biographie

Formation et carrière

De famille protestante, Guldin est placé dans sa jeunesse en apprentissage chez un orfèvre. Il exerce ensuite ce métier dans différentes villes d'Allemagne. Durant son séjour à Freising, des doutes créés par la lecture d'ouvrages de controverse lui font consulter le prieur des bénédictins ; il renonce au protestantisme en 1597 et change son prénom d'Habacuc en celui de Paul, l'apôtre des Gentils.

Le 21 août 1597 Guldin entre chez les jésuites comme coadjuteur temporel. Dans la retraite, ses dons pour les mathématiques se développent. Douze ans plus tard, ses supérieurs, voyant ses progrès et ses aptitudes en géométrie malgré son manque d'éducation, l'obligent, contre ses vœux, à commencer ses études, à trente-deux ans, à l'Université grégorienne de Rome. Il enseigne ensuite les mathématiques à cette université, puis à l'université de Graz, en 1617. Une maladie grave l'oblige à suspendre ses leçons, et on l'envoie à l'université de Vienne en 1622 ; il ne quittera cette ville qu'en 1637.

Les mathématiques

Guldin résout les plus difficiles problèmes de Kepler et fait l'application du centre de gravité à la mesure des figures produites par circonvolution. L'essentiel de ses travaux se trouve dans son ouvrage *Centrobaryca* (*Les barycentres*) qui paraît en trois volumes (1635, 1640, 1641) ; on y trouve les deux règles qui portent son nom et qui sont destinées à ramener aux quadratures les cubatures de révolution. Guldin est un des adversaires de la méthode des indivisibles inventée par Bonaventura Cavalieri, qui lui répond vivement dans ses *Exercitationes geometricæ*.

Paul Guldin est un savant reconnu à son époque. Dans son ouvrage *Terra machinis mota*¹ de 1658, Paolo Casati imagine un dialogue entre Guldin, Galilée et Mersenne sur des problèmes touchant la cosmologie, la géographie, l'astronomie et la géodésie. Guldin correspondait aussi avec le père Scheiner.

On désigne sous le nom de théorèmes de Guldin deux énoncés de géométrie euclidienne établis par le mathématicien suisse Paul Guldin. Il est probable que ces résultats aient déjà été connus de Pappus d'Alexandrie et c'est pourquoi on rencontre aussi l'appellation de théorème de Pappus-Guldin (à ne pas confondre avec le théorème de Pappus). Il exprime sous certaines conditions :

- l'aire de la surface engendrée par un arc de courbe ;
- la mesure du volume engendré par une surface.

Une autre application courante de ce théorème est le calcul de la position du centre de gravité d'un arc de courbe ou d'une surface

Publications

- *Refutatio elenchi calendarii Gregoriani Setho Caltisio conscripti*
 - *Refutatio elenchi calendarii Gregoriani Setho Caltisio conscripti* sur Google Livres, livre 5, Mayence, 1616, in-4 ;
- *Paralipomena ad Refutationem ; in iisque producuntur viginti et novem exempla paschatum ex Sancto Cyrillo Alexandrino nunquam antea edita* ;
- *Problema arithmeticum de rerum combinationibus, quo numerus dictionum seu conjunctionum diversarum quæ ex XXII alphabeti litteris fieri passant indagatur*, Vienne, 1622 ;
- *Problema geographicum de motu terræ ex mutatione centri gravitatis ipsius provenienti*, Vienne, 1622 ;
- *Problema geographicum de discrepantia in numero ac denominatione dierum, quam qui orbem terrarum contrariis viis circumnavigant, et inter se et cum lis qui in eodem loco consistunt, experientur*, Vienne, 1633 ;
- *Centrobaryca, seu de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuæ libr. IV*, Vienne, 1633-1642, 2 vol. in-folio

La plupart des axiomes exposés dans les deux premières parties de cet ouvrage l'avaient déjà été par La Faille, mais Guldin y applique le centre de gravité à la mesure des figures produites par circonvolution, propriété reconnue par Pappus. La liaison établie par l'auteur entre les figures, leurs centres de gravité et les soli

- des ou surfaces qu'ils engendrent en tournant autour d'un axe est une des belles découvertes de la géométrie en réduisant trois problèmes jusqu'alors regardés comme isolés à deux seulement.
 - *De centro gravitatis trium specierum quantitatis continuæ* sur Google Livres, livre III, Vienne, 1641

Guldin a de plus laissé quelques manuscrits.

Charles-Augustin Coulomb- Biographie

Charles-Augustin Coulomb



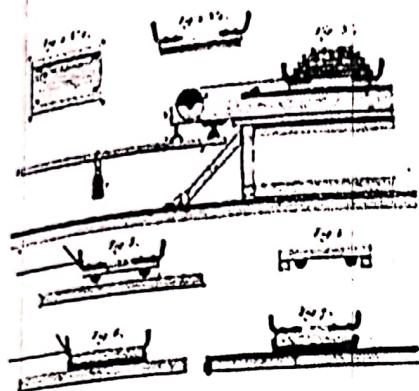
Données clés	
Naissance	14 juin 1736 Angoulême ■ Angoumois (▲ Royaume de France)
Décès	23 août 1806 (à 70 ans) Paris (France)
Nationalité	■ ■ Français
Champs	Physique
Diplôme	École royale du génie de Mézières
Renommé pour	L'unité coulomb Loi de Coulomb en électrostatique Loi de Coulomb en mécanique

Charles-Augustin Coulomb, né le 14 juin 1736 à Angoulême, mort le 23 août 1806 à Paris, est un officier, ingénieur et physicien français.

Biographie

Charles-Augustin Coulomb est le fils d'Henry Coulomb, inspecteur des Domaines Royaux originaire de Montpellier, et de Catherine Bajet. Il étudie à Paris au Collège des Quatre-Nations, bien que sa famille n'appartienne pas à strictement parler à l'aristocratie. Les cours de mathématiques de Pierre Charles Le Monnier le décident à se détourner de la médecine. Déshérité, il rejoint la famille de son père à Montpellier et participe de 1757 à 1759 aux travaux de l'académie de cette ville, dirigée par le mathématicien Augustin Danyzy. Avec l'approbation de son père, il rentre à Paris en 1759 pour assister aux cours de l'institut préparatoire dirigé par l'abbé Camus, et réussit le concours d'entrée à l'École du génie de Mézières.

À sa sortie de l'école en 1761, il est d'abord commis au levé des cartes côtières de Bretagne, puis envoyé en mission à la Martinique en 1764 pour participer sous les ordres du lieutenant-colonel de Rochemore à la construction du Fort Bourbon car, à la suite de la Guerre de Sept Ans, la colonie française est désormais isolée au milieu des possessions anglaises et espagnoles. Coulomb travaille huit années à diriger les travaux, y contracte des fièvres tropicales, mais réalise aussi plusieurs expériences sur la résistance des maçonneries et la tenue des murs d'escarpe (soutènements), qui lui sont inspirées par les idées de Pieter van Musschenbroek sur le frottement.



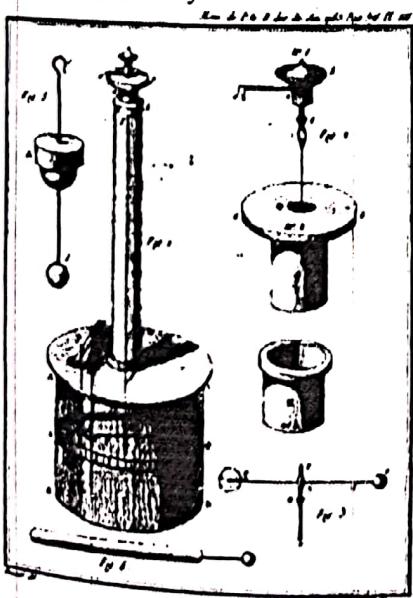
Chariot utilisé par Coulomb pour la mesure des forces de frottement.

Rapatrié en 1772 avec le grade de capitaine, il tente de renouer avec la carrière scientifique en adressant à l'Académie des sciences un mémoire rapportant l'ensemble de ses recherches, *Essai sur une application des règles de maximis et de minimis à quelques problèmes de Statique relatifs à l'Architecture* (1773). Coulomb y emploie le calcul

diffréntiel pour étudier la flexion des poutres, la poussée des remblais sur les murs de soutènement, l'équilibre des voûtes en maçonnerie.

Coulomb est affecté successivement à Cherbourg (1774-1776), à Besançon (1777-79) et à Rochefort (1779-1780), où il est chargé de la réparation du fort de l'île d'Aix. En collaboration avec l'arsenal de Rochefort, il fait réaliser diverses expériences sur les cordages et obtient en 1781 le prix de l'Académie des sciences sur la détermination des lois du frottement et de la roideur des cordes, distinction qui est suivie de son élection à l'Académie.

Choisi en tant qu'expert pour l'extension du port de Saint-Malo, il est nommé à la suite de son rapport Intendant des eaux et fontaines de France sur la recommandation du comte d'Angiviller en 1784, puis promu en 1786 lieutenant-colonel. La Révolution ne met sa position en péril qu'à partir de 1791. Sous la Terreur, il se réfugie prudemment avec son collègue Jean-Charles de Borda dans la région de Blois, abandonnant ses biens à Paris. Il rentre dans la capitale sous le Directoire et, les 4 dernières années de sa vie, il occupe à la demande de Bonaparte le poste d'inspecteur général de l'instruction publique, sous le ministère Fourcroy.



Ingénieur de formation, il est surtout physicien. Il publie 7 traités sur l'électricité et le magnétisme, et d'autres sur le phénomène de torsion, les frottements solides, ...

Oeuvres

La balance de torsion de Coulomb (gravure des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1784).

- Expérimentateur très rigoureux, pratiquement toutes ses recherches expérimentales ont été sanctionnées favorablement et intégrées sans grande modification à la physique classique et à l'ingénierie mécanique : lois du frottement, poussée des terres sur les murs de soutènement, «roideur» des câbles, stabilité des voûtes.

- Ses recherches sur le travail mécanique, humain et animal, préfigurent les études de Gaspard de Prony et au-delà, préparent le taylorisme.

- Son *Mémoire sur le service des officiers du corps du génie* (1776) a été mis à profit par le comte de Saint-Germain pour réorganiser cette arme à la fin des années 1780.
- Coulomb est toutefois surtout connu pour les expériences historiques qu'il a réalisées à l'aide d'une balance de torsion appelée « balance de Coulomb » pour déterminer la force qui s'exerce entre deux charges électriques (loi portant son nom).

Membre de l'Académie des sciences, on a de lui des *Mémoires et des Recherches sur les moyens d'exécuter sous l'eau des travaux hydrauliques*, 1779.

Hommages

- On a donné son nom à l'unité de charge électrique, le coulomb.
- Son nom est inscrit sur la tour Eiffel.
- Un timbre postal, d'une valeur de 0,20 + 0,10 franc, le représentant avec sa balance de torsion a été émis le 22 mai 1961 avec une oblitération Premier jour le 20 mai à Angoulême¹.
- En 1970, l'Union astronomique internationale a donné le nom de Coulomb à un cratère lunaire.
- Un lycée d'Angoulême, lycée Général technologique et professionnel, porte son nom.

Chapitre 5 PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

La statique est le cas particulier de la dynamique qui s'intéresse à des systèmes matériels en équilibre par rapport à un référentiel galiléen ou ceux pour lesquels les effets d'inertie sont négligeables. Il s'agit donc d'étudier les conditions pour lesquelles les corps sont immobiles ; des conditions concernant notamment les actions mécaniques (connues et inconnues) qui s'exercent sur ces corps.

Cette étude s'appuie sur la circonscription d'un milieu à étudier, appelé système, sur lequel on applique un certain nombre de lois (appelées principes) prouvées par expérience.

I- DEFINITIONS

- *Le système matériel* est une partie E de l'univers (généralement une partie restreinte d'un mécanisme), sur laquelle est définie la grandeur mesurable "masse", et à laquelle on souhaite appliquer certaines lois dont elle (cette partie de l'univers) vérifie les hypothèses d'application.
- *L'extérieur d'un système E* ou *milieu extérieur*, est le complémentaire de E dans l'univers matériel ; on le note \bar{E} . En pratique \bar{E} désigne tout ce qui n'est pas E et qui est susceptible d'exercer une certaine action mécanique sur E .
- On appelle *frontière d'isolement* du système matériel E , la surface fermée qui sépare E du milieu extérieur \bar{E} .
- Une *action mécanique extérieure* au système matériel E , est une action mécanique provenant de l'extérieur \bar{E} et s'exerçant sur E .
- Une *action mécanique* est dite *intérieure* au système E , lorsqu'elle s'exerce mutuellement entre deux éléments du système matériel E .
- On dit qu'un système matériel E est en *équilibre par rapport à un référentiel (R)* si au cours du temps, chaque point de E conserve sa position fixe dans (R). Dans le cas particulier d'un solide, ce dernier est en équilibre si les paramètres qui définissent entièrement sa position dans (R) restent constants au cours du temps.

II- THEOREMES GENERAUX DE LA STATIQUE

L'immobilité des points d'un système matériel est obtenue par l'application du principe fondamental de la statique dont la traduction vectorielle donne les théorèmes généraux.

II-1 Enoncé du principe fondamental de la statique

"Pour qu'un système matériel E soit en équilibre dans un référentiel galiléen, il faut que le torseur des actions extérieures à E soit nul."

En d'autres termes, si on note \bar{E} l'extérieur de E , le principe fondamental de la statique (le P.F.S.) s'écrit :

$$[\mathcal{T}_{\bar{E}/E}] = [0]$$

Remarque :

➤ Le référentiel local $R_L(P, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ lié à la terre est une assez bonne approximation de référentiel galiléen, pour la plupart des mécanismes étudiés en laboratoire.

➤ Le principe fondamental de la statique énonce une condition nécessaire mais pas une condition suffisante, puisqu'il existe des systèmes matériels à torseurs des actions extérieurs nuls, mais qui ne sont pas en équilibre. Exemple : une paire de ciseaux (E) soumise uniquement à l'action de deux doigts, représentée par deux forces opposées (la paire de ciseaux reposant sur un support dont la réaction annule l'action de la pesanteur)

II-2 Condition nécessaire et suffisante d'équilibre

Pour qu'un système matériel E soit en équilibre dans un référentiel galiléen, il faut et il suffit que :

- Il soit en équilibre au début de l'étude ($\forall M \in E \quad \bar{V}(M) = \bar{0}$ à $t = 0$)
- Pour tout sous système matériel E_i de E , $[\mathcal{T}_{\bar{E}_i/E}] = [0]$

II-3 Théorème de la résultante statique

En écrivant le torseur des actions mécaniques extérieures sous la forme

$[\mathcal{T}_{\bar{E}/E}] = \left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_{\bar{E}/E} \\ \bar{m}_{AE/E} \end{array} \right\}$, le principe fondamental de la statique restreint à la résultante uniquement permet d'énoncer le théorème de la résultante statique.

Enoncé : "Pour un système matériel E en équilibre dans un référentiel galiléen, la résultante du torseur des actions mécaniques extérieures à E est nulle".

Soit donc : $\bar{R}_{\bar{E}/E} = \bar{0}$

II-4 Théorème du moment statique

Le principe fondamental restreint du moment uniquement permet d'énoncer le théorème du moment statique.

Enoncé : "Pour un système matériel E en équilibre dans un référentiel galiléen, le moment du torseur des actions mécaniques extérieurs à E est nul".

Soit donc $\bar{m}_{A\bar{E}/E} = \bar{0} \quad \forall A \in \mathcal{S}$

II-5 Théorème des Actions Mutuelles

Enoncé : "L'action mécanique d'un système matériel E_1 sur un système matériel E_2 , $E_1 \subset \bar{E}_2$, est opposée à l'action mécanique de E_2 sur E_1 ".

C'est-à-dire :

$$[\mathcal{F}_{E_1/E_2}] = - [\mathcal{F}_{E_2/E_1}]$$

Preuve : soit une partition d'un système E en deux sous systèmes E_1 et E_2 , appliquons le principe fondamental de la statique successivement à E_1 , E_2 et E :

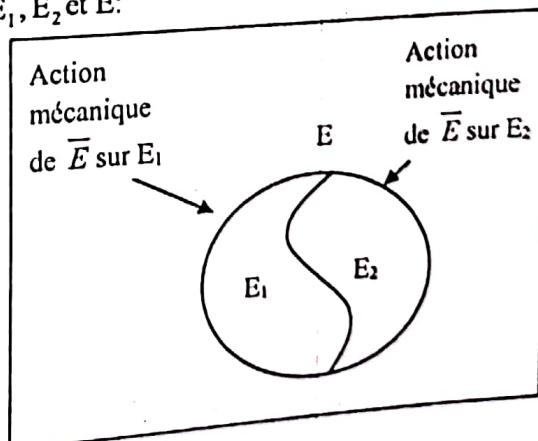
$$[F_{\bar{E}_1/E_1}] = [F_{\bar{E}/E_1}] + [F_{E_2/E_1}] = [0] \quad (1)$$

$$[F_{\bar{E}_2/E_2}] = [F_{\bar{E}/E_2}] + [F_{E_1/E_2}] = [0] \quad (2)$$

$$[F_{\bar{E}/E}] = [F_{\bar{E}/E_1}] + [F_{\bar{E}/E_2}] = [0] \quad (3)$$

$$(1)+(2)-(3) \Rightarrow [F_{E_2/E_1}] + [F_{E_1/E_2}] = [0]$$

$\Rightarrow [F_{E_2/E_1}] = - [F_{E_1/E_2}]$ ce qu'il fallait démontrer (c.q.f.d)



II-6 Application à un solide en équilibre sous l'action de deux ou trois forces

a) Solide soumis à trois forces

Soit un solide (S) en équilibre dans un référentiel galiléen, sous l'action de trois forces

$$(A, \vec{F}_A), (B, \vec{F}_B) \text{ et } (C, \vec{F}_C).$$

Le principe fondamental de la statique appliqué à (S) s'écrit : $[\bar{F}_{S/S}] = [0]$; soit :

$$[\bar{F}_{S_A/S}] + [\bar{F}_{S_B/S}] + [\bar{F}_{S_C/S}] = [0]$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_B \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_C \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Soit, ramené au point A :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0} \\ AB \wedge \vec{F}_B + AC \wedge \vec{F}_C = \vec{0} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \wedge \vec{F}_B + AC \wedge \vec{F}_C = \vec{0} \end{array} \right. \quad (2)$$

or

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \wedge \vec{F}_B \perp \text{plan } (\overline{AB}, \vec{F}_B) \text{ et} \\ \overline{AC} \wedge \vec{F}_C \perp \text{plan } (\overline{AC}, \vec{F}_C) \end{array} \right. \quad (2) \rightarrow \overline{AB} \wedge \vec{F}_B = -\overline{AC} \wedge \vec{F}_C \quad \left. \Rightarrow \overline{AB}, \overline{AC}, \vec{F}_B, \text{ et } \vec{F}_C \text{ sont} \right.$$

coplanaires, ce qui implique que les forces \vec{F}_B et \vec{F}_C sont dans plan ABC.

De même le principe fondamental de la statique ramené au point B $\Rightarrow \vec{F}_A$ et \vec{F}_C sont dans le plan ABC.

Par suite, *les trois forces sont coplanaires*.

Soit I point d'intersection, s'il existe, des droites (B, \vec{F}_B) et (C, \vec{F}_C) ; le théorème du moment statique écrit en I $\Rightarrow \overline{IA} \wedge \vec{F}_A + \overline{IB} \wedge \vec{F}_B + \overline{IC} \wedge \vec{F}_C = \vec{0} \Rightarrow \overline{IA} \wedge \vec{F}_A = \vec{0}$ car $\overline{IB} \parallel \vec{F}_B$ et $\overline{IC} \parallel \vec{F}_C$. Or $\overline{IA} \parallel \vec{F}_A \Rightarrow$ le support de la force (A, \vec{F}_A) passe également par le point I. Ainsi, *les trois forces sont concourantes au même point*.

Par contre si les supports (B, \vec{F}_B) et (C, \vec{F}_C) sont parallèles (c'est-à-dire pas de point d'intersection I), le théorème de la résultante statique

$\Rightarrow \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_A = -(\vec{F}_B + \vec{F}_C) \Rightarrow (A, \vec{F}_A)$ est parallèle aux deux autres supports.
Ainsi, les trois forces sont parallèles.

Conclusion: si un solide soumis à trois forces est en équilibre dans un référentiel galiléen, ces forces sont :

- Coplanaires
- Concourantes en un même point, ou parallèles
- De somme vectorielle (ou géométrique) nulle.

b) Solides soumis à deux forces

Soit un solide (S) en équilibre dans un référentiel galiléen sous l'action de deux forces (A, \vec{F}_A) et (B, \vec{F}_B) . Le principe fondamental de la statique appliqué à (S) s'écrit :

$$[F_{S/S}] = [0]$$

$$\text{soit : } [F_{S_A/S}] + [F_{S_B/S}] = [0]. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_B \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\text{Soit, ramené au point A : } \begin{cases} \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} & (1) \\ \overline{AB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0} & (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow \overline{AB} \parallel \vec{F}_B \Rightarrow$ la force (B, \vec{F}_B) a pour support la droite (AB)

(1) $\Rightarrow \vec{F}_A = -\vec{F}_B \Rightarrow (A, \vec{F}_A)$ a également (AB) pour support.

Conclusion: Si un solide soumis à deux forces est en équilibre dans un référentiel galiléen, ces forces sont directement opposées.

III- Schéma d'architecture d'un mécanisme

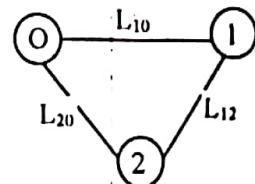
Le schéma d'architecture est destiné, pour un mécanisme donné, au calcul de torseurs d'action mécanique transmissible des différentes liaisons.

Pour une bonne illustration des notions présentées dans ce paragraphe, nous allons considérer le système de commande d'une table en translation suivant : il est composé d'une table (S₁), animée d'un mouvement de translation rectiligne de direction \vec{x} par rapport au bâti

fixe (S_0) et d'une vis (S_2) en liaison pivot d'axe (O, \tilde{x}) avec le bâti, la table et la vis ayant entre eux une liaison glissière hélicoïdale d'axe (O, \tilde{x}).

III-1 Graphe des liaisons (du mécanisme)

C'est un schéma où les parties du mécanisme (S_1, S_2 , etc.) sont représentées chacune par son indice numérique encerclé, et où les liaisons entre ces différentes parties sont indiquées par des segments (de droites ou courbes), au-dessus desquels les liaisons sont indiquées par une lettre majuscule (généralement L) indiquée par les solides (S_i) ; une nomenclature indique, à proximité du graphe, les différents types de liaisons représentées, comme on le voit ci-contre, pour le système de commande de notre table.



Graphe de liaisons

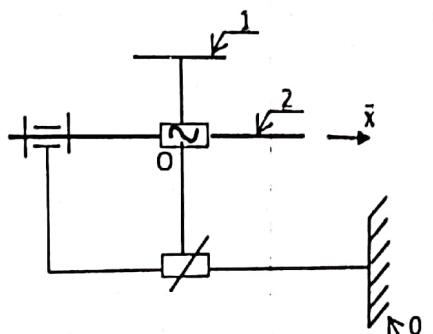
L_{10} : liaison glissière de direction \tilde{x}

L_{20} : liaison pivot d'axe (O, \tilde{x})

L_{12} : liaison glissière hélicoïdale d'axe (O, \tilde{x})

III-2 Schéma cinématique (du mécanisme)

Construit à partir du graphe des liaisons, le schéma cinématique d'un mécanisme permet de visualiser les mouvements relatifs des pièces principales d'un mécanisme. Les liaisons y sont représentées par leurs « représentation schématique ».



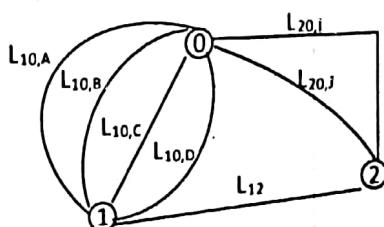
III-3 Graphe des liaisons minimal et schéma cinématique minimal

Lorsque les liaisons placées en parallèle ou en série entre les pièces principales du mécanisme sont remplacées par leurs liaisons équivalentes, le *graphe des liaisons* est dit *minimal*; et le schéma cinématique qui en découle est appelé *schéma cinématique minimal*.

Ainsi, le graphe de liaison et le schéma cinématique ci-dessus sont tous les deux « minimal », du fait qu'il n'y figure point de liaisons ni en parallèle, ni en série.

Par contre, si on envisage de réaliser :

- La liaison glissière L_{10} par association en parallèle entre la table et le bâti, de quatre douilles à billes A,B,C et D glissant sur deux tiges cylindriques parallèles, modélisables par des liaisons linéaires annulaires.
- La liaison pivot L_{20} par association en parallèle, entre la vis et le bâti, de deux roulements à billes I et J situés à chaque extrémité de la vis, modélisables, l'un par une liaison rotule et l'autre par une liaison linéaire annulaire, on obtient le graphe de liaison ci-dessus qui n'est pas minimal, mais qui est en fait appelé le *graphe des liaisons d'architecture*.



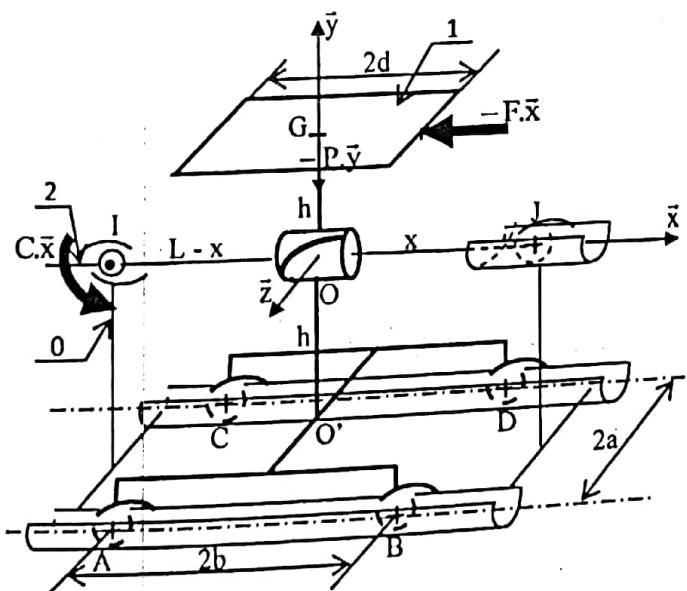
- L_{12} : liaison glissière hélicoïdale d'axe (O, \vec{x})
- $L_{10,A}$: Liaison annulaire de centre A et de direction \vec{x}
- $L_{10,B}$: Liaison annulaire de centre B et de direction \vec{x}
- $L_{10,C}$: Liaison annulaire de centre C et de direction \vec{x}
- $L_{10,D}$: Liaison annulaire de centre D et de direction \vec{x}
- $L_{20,I}$: Liaison rotule de centre I
- $L_{20,J}$: Liaison annulaire de centre J et de direction \vec{x}

III-4 Schéma d'architecture.

Le schéma d'architecture d'un mécanisme correspond à la représentation technologique du graphe des liaisons d'architecture. C'est donc un schéma très proche de la réalité technologique, conduit de façon analogique au schéma cinématique, mais où les liaisons occupent une position relative précise, définie par leur repère (local).

Sur le schéma d'architecture, on fait également figurer les actions mécaniques externes au mécanisme, de façon à permettre d'écrire le plus simplement possible, en lisant la figure, les équations scalaires traduisant le Principe Fondamental de la Statique.

Pour le mécanisme de commande en translation de la table, ci-dessus, le schéma d'architecture correspondant au graphe des liaisons d'architecture ci-dessus peut se présenter comme suit :



a) Remarques

e-1) Remarque 1

➤ Les torseurs d'action mécanique transmissible des différentes liaisons supposées sans frottement peuvent être définis (Principe de dualité) de la manière suivante :

$$\{F_{0/I}\}_A = \begin{Bmatrix} \bar{R}_A \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ avec } \bar{R}_A = Y_A \bar{y} + Z_A \bar{z} \text{ (car normal à la ligne de contact)} \text{ et } \bar{CA} = -b\bar{x} - h\bar{y} + a\bar{z}$$

$$\{F_{0/1}\}_B = \begin{cases} \bar{R}_B \\ \bar{0} \end{cases} \text{ avec } \bar{R}_B = Y_B \vec{y} + Z_B \vec{z} \text{ et } \overrightarrow{OB} = b\vec{x} - h\vec{y} + a\vec{z}$$

$$\{F_{0/1}\}_C = \begin{cases} \bar{R}_C \\ \bar{0} \end{cases} \text{ avec } \bar{R}_C = Y_C \vec{y} + Z_C \vec{z} \text{ et } \overrightarrow{OC} = -b\vec{x} - h\vec{y} - a\vec{z}$$

$$\{F_{0/1}\}_D = \begin{cases} \bar{R}_D \\ \bar{0} \end{cases} \text{ avec } \bar{R}_D = Y_D \vec{y} + Z_D \vec{z} \text{ et } \overrightarrow{OD} = b\vec{x} - h\vec{y} - a\vec{z}$$

$$\{F_{0/2}\}_I = \begin{cases} \bar{R}_I \\ \bar{0} \end{cases} \text{ avec } \bar{R}_I = X_I \vec{x} + Y_I \vec{y} + Z_I \vec{z} \text{ avec } \overrightarrow{OI} = -(L-x)\vec{x}$$

$$\{F_{0/2}\}_J = \begin{cases} \bar{R}_J \\ \bar{0} \end{cases} \text{ avec } \bar{R}_J = Y_J \vec{y} + Z_J \vec{z} \text{ avec } \overrightarrow{OJ} = x \cdot \vec{x}$$

$$\{F_{1/2}\}_O = \begin{cases} \bar{R}_O \\ \bar{m}_O \end{cases} \text{ avec } \bar{R}_O = X_O \vec{x} + Y_O \vec{y} + Z_O \vec{z} \\ \bar{m}_O = pX_O \vec{x} + M_O \vec{y} + N_O \vec{z} \text{ (hélice à gauche de pas réduit } p)$$

Les différentes composantes plückériennes introduites sont les *inconnues de liaison* ; ces inconnues sont, pour notre commande en translation de la table, au nombre de dix huit.

➤ Les actions mécaniques extérieures au mécanisme sont :

- L'action mécanique du moteur sur l'arbre 2 : $\{F_{moteur/2}\} = \begin{cases} \bar{0} \\ C \cdot \vec{x} \end{cases}$

- L'action mécanique du récepteur sur la table 1 : $\{F_{récepteur/1}\}_K = \begin{cases} -F \cdot \vec{x} \\ \bar{0} \end{cases}$ avec $\overrightarrow{OK} = d\vec{x} + h\vec{y}$

- L'action mécanique de la pesanteur sur la table 1 : $\{F_{g/1}\}_G = \begin{cases} -P \cdot \vec{y} \\ \bar{0} \end{cases}$ avec $\overrightarrow{OG} = h\vec{y}$

N.B. : l'action mécanique du sol, ou d'un autre support, sur le bâti (O) n'est pas définie, parce que non recherchée.

➤ Pour déterminer les (dix-huit) inconnues de liaison, on peut appliquer le Principe Fondamental de la Statique à la table (1) puis à la vis (2) ; mais aussi à l'ensemble $E = (1) \cup (2)$. Mais les équations obtenues ne sont pas indépendantes des précédentes ; en effet :

$$\{F_{1/1}\} = \{0\} \Rightarrow \{F_{2/1}\} + \{F_{\bar{E}/1}\} = \{0\} \quad (1)$$

$$\{F_{2/2}\} = \{0\} \Rightarrow \{F_{1/2}\} + \{F_{\bar{E}/2}\} = \{0\} \quad (2)$$

$$\{F_{\bar{E}/1}\} + \{F_{\bar{E}/2}\} = \{0\}$$

$$\text{C'est-à-dire } \{F_{\bar{E}/E}\} = \{0\}$$

Ainsi, pour déterminer les dix-huit inconnues de liaison, nous disposons au maximum de douze équations algébriques indépendantes [trois issues de la nullité de $\sum \bar{R}$ sur (1), trois de la nullité de $\sum \bar{m}$ sur (1), trois de la nullité de $\sum \bar{R}$ sur (2) et trois de la nullité de $\sum \bar{m}$ sur (2)]. Ceci montre que l'application du principe fondamentale de la statique ne permet pas de déterminer toutes les inconnues de liaison ; on dit que le *mécanisme est hyperstatique*. Et on appelle *mécanisme isostatique*, un mécanisme pour lequel l'application du principe fondamental de la statique permet la détermination de toutes les inconnues de liaison.

Afin d'assurer un bon fonctionnement du mécanisme précédent et d'en simplifier la fabrication, il est plus simple de rendre ce mécanisme isostatique, ne serait-ce que partiellement, en ajoutant des d.d.l supplémentaires dans certaines liaisons, par l'induction de pièces intermédiaires ou de jeux entre les solides en présence. Dans certains mécanismes, on peut introduire des pièces déformables.

e-2) Remarque 2

Si on veut connaître simplement la relation qui existe entre les actions mécaniques du moteur et du récepteur, pour que le mécanisme soit en équilibre, il est forcément conseillé de n'écrire que les relations/équations strictement indispensables à cette détermination, après analyse des particularités des différents torseurs d'action mécanique transmissible des liaisons.

Pour notre mécanisme de commande en translation d'une table, on peut donc écrire :

1°) - Le Théorème du Moment Statique (T.M.S) appliqué à la vis 2, au point O, en projection sur \bar{x} (car l'axe (O, \bar{x}) est l'axe de rotation de la vis 2) :

$$\Rightarrow \bar{x} \bullet \bar{m}_{O \bar{z}/2} = 0$$

Soit, avec $\bar{S}_2 = \{\text{moteur}, 0_1, 1, 0_1\}$:

$$\bar{x} \bullet \bar{m}_{O \text{moteur}/2} + \bar{x} \bullet \bar{m}_{O \text{O}_1/2} + \bar{x} \bullet \bar{m}_{O \text{O}_1/2} + \bar{x} \bullet \bar{m}_{O \text{O}_1/2} = 0$$

D'où l'on tire $C + pX_O = 0 \quad (1)$

Remarque : le choix de cette équation évite de faire intervenir l'action mécanique de 0/2.

2°) - Le Théorème de la Résultante Statique (T.R.S.) appliqué à la table 1, en projection sur \bar{x} (car la direction de translation de la table est la direction \bar{x}) :

$$\Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{R}_{\bar{x}/I} = 0$$

Soit, avec $\bar{S}_1 = \{\text{récepteur}, g, 2, 0_A, 0_B, 0_C, 0_D\}$

$$\bar{x} \cdot \bar{R}_{\text{récepteur}/I} + \bar{x} \cdot \bar{R}_{g/I} + \bar{x} \cdot \bar{R}_{2/I} + \bar{x} \cdot \bar{R}_{0_A/I} + \bar{x} \cdot \bar{R}_{0_B/I} + \bar{x} \cdot \bar{R}_{0_C/I} + \bar{x} \cdot \bar{R}_{0_D/I} = 0$$

$$\text{D'où l'on tire } -F - X_O = 0 \quad (2)$$

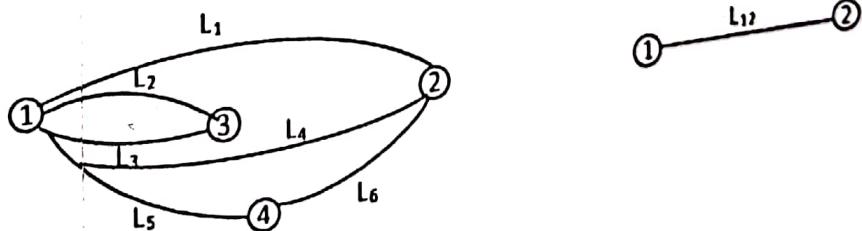
Remarque : le choix de cette relation évite de faire intervenir l'action mécanique de 0/I.

En éliminant X_O entre les équations (1) et (2), on obtient la relation $C = pF$ appelée « loi entrée-sortie statique » du mécanisme.

IV- Liaison équivalente.

L'obtention du schéma cinématique minimal nécessite la réalisation du graphe des liaisons minimales ; or ce dernier est obtenu en remplaçant, par des liaisons équivalentes, les liaisons placées en parallèle ou en série entre les pièces principales du mécanisme étudié. Supposons qu'il existe, entre deux solides (S_1) et (S_2), plusieurs liaisons réalisées avec ou sans pièces intermédiaires. La liaison L_{12} équivalente à l'ensemble de ces liaisons (situées entre (S_1) et (S_2)) est la liaison théorique de référence L_{12} qui a le même comportement que cette association de liaisons, c'est-à-dire qui autorise le même mouvement et transmet la même action mécanique.

Pour la détermination du torsur d'action mécanique transmissible de la liaison cinématique équivalente aux liaisons placées en parallèle ou en série entre (S_1) et (S_2), on supposera ces liaisons sans frottement et les pièces intermédiaires de masses négligeables.



IV-1 Notations

✓ Le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison L_i sera noté dans le repère local associé à la liaison, $R_i(O_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$:

$$[F_i] = \begin{Bmatrix} \vec{R}_i \\ \vec{m}_{io} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_i & L_i \\ y_i & M_i \\ z_i & N_i \end{Bmatrix}_{(R_i)}$$

✓ Le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison cinématique équivalente aux liaisons placées entre les solides (S_1) et (S_2), dans un repère $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ à définir, est noté :

$$[F] = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{m}_o \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x & L \\ y & M \\ z & N \end{Bmatrix}_{(R)}$$

Remarque : Parfois il est nécessaire de préciser de quelle action mécanique il s'agit entre deux solides en présence.

IV-2 Liaison équivalente de n liaisons en parallèle

Supposons qu'il existe n liaisons, disposées en parallèle, entre deux solides (S_1) et (S_2) et que, en plus de l'action mécanique due à ces n liaisons, il s'exerce sur le solide (S_2) une action mécanique extérieure représentée par un torseur $[M]$.

Le principe fondamental de la statique (P.F.S)

implique $\sum_{i=1}^n [A_i] + [M] = [0]$ pour les n liaisons ; mais avec la liaison équivalente, le

principe fondamental de la statique (P.F.S) s'écrit :

$$[A] + [M] = [0]$$

On en déduit l'expression du torseur d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente, en fonction des torseurs des n liaisons en parallèle :

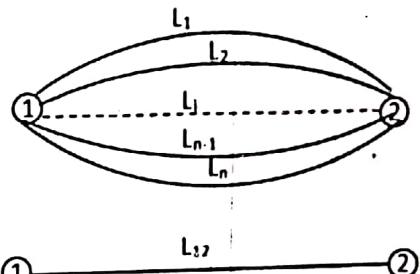
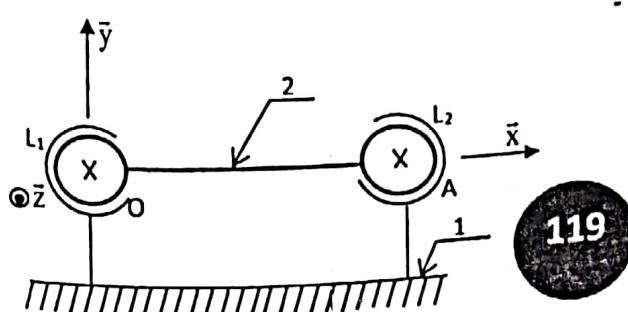
$$[A]_{//} = \sum_{i=1}^n [A_i]$$

Le principe de dualité conduit, pour le torseur cinématique équivalent, à l'égalité :

$$[C]_{//} = [C] \quad \forall i$$

Exercice résolu n°1 : Association en parallèle de deux liaisons rotule
Soit le dispositif ci-dessous, dans lequel le solide (S_2) a deux liaisons en parallèle avec (S_1) :

L_1 : liaison rotule de centre O



- L_2 : liaison rotule de centre A tel que $\overrightarrow{OA} = d\bar{x}$ avec $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un repère lié à (S_1) .
On veut déterminer le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente aux deux liaisons rotule disposées en parallèle entre (S_1) et (S_2) .

Solution :

On a successivement :

- Le torseur dû à L_1 s'écrit : $[F_1] = \begin{Bmatrix} X_1 & 0 \\ Y_1 & 0 \\ Z_1 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(R)}$

- Celui dû à L_2 s'écrit : $[F_2] = \begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}_{A,(R)}$

- Le torseur équivalent recherché, dû à L_{12} , est de la forme générale suivante en O :

$$[F] = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{O,(R)}$$

- Afin d'effectuer $[F] = \sum_{i=1}^{n=2} [F_i]$, ramenons les deux torseurs dus à L_1 et L_2 au même

point, soit à O par exemple.

On sait $\bar{m}_O = \bar{m}_A + \overrightarrow{OA} \wedge \bar{R}$,

$$\begin{aligned} \bar{m}_{O,2} &= \bar{m}_{A,2} + \overrightarrow{OA} \wedge \bar{R}_2 = \overrightarrow{OA} \wedge \bar{R}_2 = d\bar{x}(X_2\bar{x} + Y_2\bar{y} + Z_2\bar{z}) \\ &\quad = Y_2d\bar{z} - Z_2d\bar{y} \end{aligned}$$

$$\rightarrow [F_2] = \begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & -Z_2d \\ Z_2 & Y_2d \end{Bmatrix}_{O,(R)} ; \text{ or } [F_1] = \begin{Bmatrix} X_1 & 0 \\ Y_1 & 0 \\ Z_1 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(R)}$$

$$\text{D'où } [F] = \begin{Bmatrix} X_1 + X_2 & 0 \\ Y_1 + Y_2 & -Z_2d \\ Z_1 + Z_2 & Y_2d \end{Bmatrix}_{O,(R)} \text{ qui est de la forme :}$$

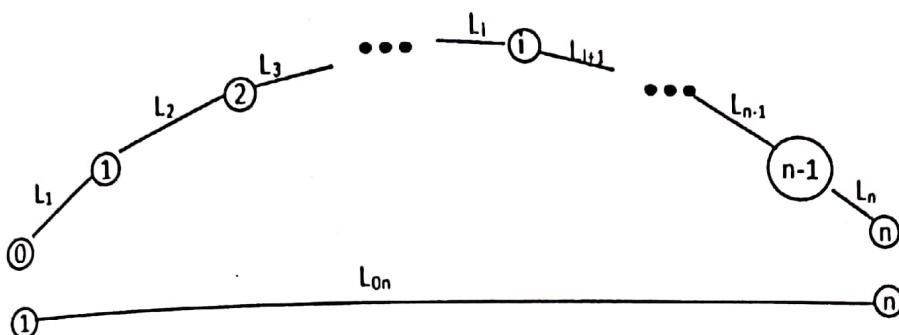
$$[F] = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{O,(R)}$$

C'est le torseur d'action mécanique d'une liaison pivot d'axe (O, \bar{x}) .

L_{12} , liaison équivalente, est donc une liaison pivot d'axe (O, \bar{x}) .

Remarque : Comme on a supposé qu'il n'y a pas de frottement sur les liaisons, on vérifie que le produit (en fait, le comoment) des torseurs cinématique et d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente est nul.

IV-3 Liaison équivalente de n liaisons en série



Supposons qu'il existe n liaisons, disposées en série, entre deux solides (S_0) et (S_n), par l'intermédiaire de $n-1$ solides (S_i).

L'action mécanique du solide (S_{i-1}) sur (S_i) est représentée par la liaison L_i , de torseur d'action mécanique transmissible $[.A]$; le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente L_{on} est noté $[.F]$.

Pour obtenir $[.F]$, on applique le principe fondamental de la statique (PFS) à chaque solide intermédiaire, en supposant qu'aucune autre action mécanique extérieure ne s'y exerce :

$$[.A] - [.A_{i+1}] = [0]$$

C'est-à-dire : $[.A] = [.A_{i+1}]$, ce qui montre que les torseurs d'action mécanique transmissible des liaisons L_i en série sont égaux. On en déduit que le torseur d'action mécanique transmissible $[.F]$ de la liaison équivalente vérifie :

$$[.F]_{\text{série}} = [.A] \quad \forall i$$

Remarque : les composantes du torseur d'action mécanique transmissibles de la liaison équivalente sont celles qui sont transmissibles par toutes les liaisons en série.

$$\text{Le principe de la dualité conduit, en outre, à : } [V]_{\text{série}} = \sum_{i=1}^n [.A]$$

Exercice résolu n°2 : Association en cascaded'une liaison appui plan et une liaison rotule

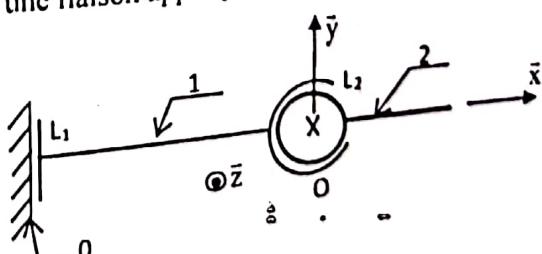
Dans le dispositif ci-contre, $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est

lié au solide (S_1), et on a les liaisons :

L_1 : liaison plane normale \bar{x}

L_2 : liaison rotule de centre O

Montées en série, et on recherche leur liaison équivalente.



Solution :

On a successivement :

- $[F_1] = \begin{Bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & M_1 \\ 0 & N_1 \end{Bmatrix}_{O,(R)}$ torseur d'action mécanique transmissible de la liaison rotule L₁

écrit au point O (en fait en tout point de l'axe), dans la base ($\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$).

- $[F_2] = \begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(R)}$ torseur d'action mécanique transmissible de la liaison de rotule L₂

Le torseur équivalent recherché, dû à L₀₂ (liaison équivalente) est de la forme

$$[F] = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{O,(R)}$$

Et puisqu'il doit vérifier : $[F] = [F_1] = [F_2]$, on tire les relations :

$$\begin{cases} X = X_1 = X_2 & L = 0 = 0 \\ Y = 0 = Y_2 & \text{et} \quad M = M_1 = 0 \\ Z = 0 = Z_2 & N = N_1 = 0 \end{cases}$$

D'où l'expression du torseur d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente :

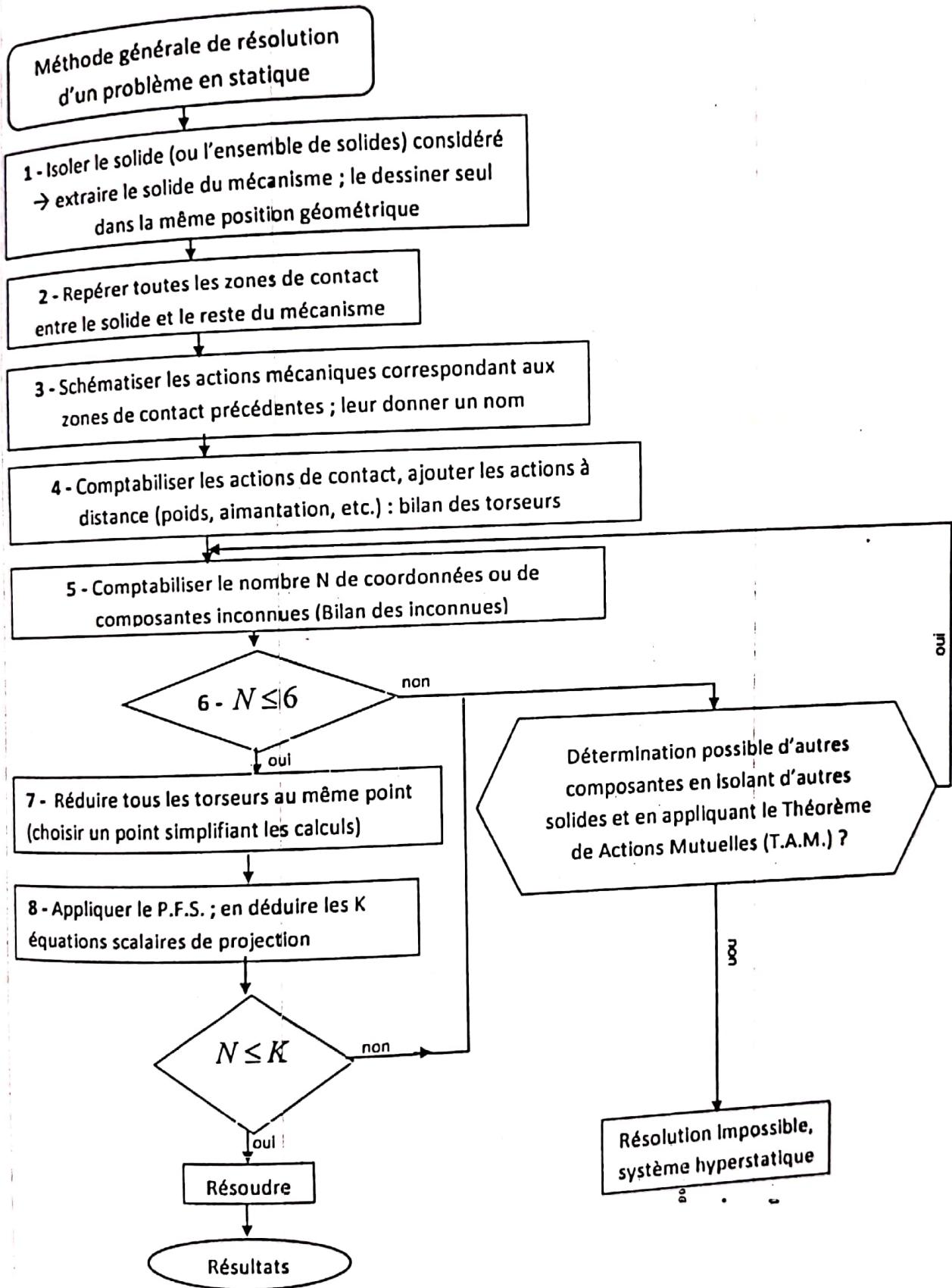
$$[F] = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(R)}$$

L₀₂, liaison équivalente, est donc une liaison ponctuelle de normale (O, \tilde{x}).

Remarque : On vérifie encore que le produit des torseurs cinématique et d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente est nul.

V- METHODE DE RESOLUTION DES PROBLEMES EN STATIQUE

La projection orthogonale du Principe Fondamentale de la Statique (PFS) aux trois axes de l'espace affine donne à notre disposition, au maximum, six équations algébriques permettant de déterminer six inconnues au plus. La méthode générale de résolution d'un problème en statique se présente donc comme suit :



Remarque :

En pratique " isoler le système ou solide" regroupe les étapes allant de 1 à 5.

Universellement utilisée, la notion d'isolement d'un solide est fondamentale dans l'analyse et la résolution des problèmes en mécanique. C'est la première étape de toute résolution en statique, comme ce fut le cas en dynamique.

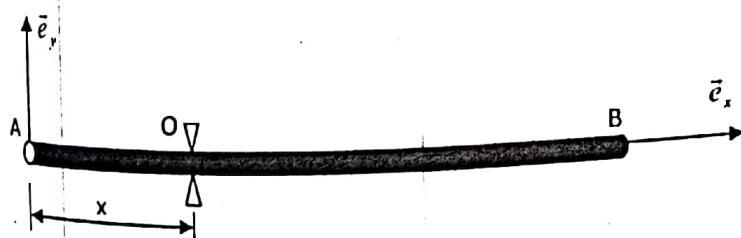
Le solide isolé peut être un schéma à main levée destiné à décrire et à définir toutes les actions ou efforts qui s'y exercent.

Tous les éléments connus concernant les actions extérieures s'exerçant sur le solide doivent être clairement indiqués : point d'application, direction, sens, intensité, mais aussi les distances entre les actions et les axes éventuellement choisis pour des calculs. Généralement, on définira un repère et on exprimera tous ces éléments, autant que cela se peut, sous forme vectorielle dans ce repère.

Si l'on a isolé plusieurs solides à la fois, il peut être intéressant d'utiliser un tableau récapitulatif par solide, afin de simplifier l'analyse et de comptabiliser les éléments connus et inconnus.

VI- EXERCICES RESOLUS SUR LE PFS

VI-1 Exercice résolu n°1 : Torseur d'action exercé pour tenir une poutre (ISTGOV 260507)



Un ouvrier O tient une barre AB, à une distance x de l'extrémité A. La barre est cylindrique de diamètre de base d , négligeable devant sa longueur L , et de masse volumique ρ . On se propose d'étudier le torseur de l'effort exercé par cet ouvrier pour maintenir la barre toujours horizontale.

1°) Réduisez en O, les torseurs de la pesanteur s'exerçant respectivement sur les parties OA et OB de la barre (indices 1 et 2 respectivement)

2°) En déduire le torseur effort exercé par l'ouvrier.

3°) Déterminer la position x_0 des mains de l'ouvrier pour laquelle le moment qu'il exerce est minimal.

Nota : La solution à cet exercice se trouve en page suivante (en manuscrit au moment de l'envol du document à la presse ; nous nous en excusons)

Corrigé de l'exercice Torseur d'action exercé pour tenir une poutre

$$R(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

$$\vec{AO} = x \vec{e}_x ;$$

barre : cylindre (d, L) décollé ; P .

1^{er} $[T_1]_0 + [T_2]_0$ respectivement ob partis de OB

$$[T_1] = \begin{cases} \vec{p}_1 = m_1 \vec{g} \\ \vec{m}_{1,G_1} = \vec{0} \text{ avec } \vec{OG}_1 = \frac{1}{2} \vec{OA} = -\frac{1}{2} x \vec{e}_x \end{cases}$$

$$[T_2] = \begin{cases} \vec{p}_2 = m_2 \vec{g} \\ \vec{m}_{2,G_2} = \vec{0} \text{ avec } \vec{OG}_2 = \frac{1}{2} \vec{OB} = \frac{1}{2} (L-x) \vec{e}_x \end{cases}$$

$$m = \left(\frac{\pi d^2}{4} \cdot l\right) \rho \Rightarrow m_1 = \frac{\pi d^2}{4} \times \rho \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{\pi d^2}{4} (L-x) \rho ; \vec{g} = -g \vec{e}_y$$

$$\vec{m}_{1,0} = \vec{m}_{1,G_1} + \vec{OG}_1 \wedge \vec{p}_1 = \vec{OG}_1 \vec{p}_1 = -\frac{1}{2} x \vec{e}_x \vec{p}_1 - m_1 g \vec{e}_y = +\frac{1}{2} m_1 g x \vec{e}_z$$

$$\vec{m}_{2,0} = \vec{m}_{2,G_2} + \vec{OG}_2 \wedge \vec{p}_2 = \vec{OG}_2 \vec{p}_2 = \frac{1}{2} (L-x) \vec{e}_x \vec{p}_2 - m_2 g \vec{e}_z = -\frac{1}{2} m_2 g (L-x) \vec{e}_z$$

$$+\vec{m}_{1,0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi d^2}{4} \times \rho \right) \cdot g x \vec{e}_z = \frac{\pi d^2}{8} \rho g x^2 \vec{e}_z = \vec{m}_{1,0}$$

$$\vec{m}_{2,0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi d^2}{4} (L-x) \rho \right) g (L-x) \vec{e}_z = -\frac{\pi d^2}{8} \rho g (L-x)^2 \vec{e}_z = \vec{m}_{2,0}$$

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{g} = -m_1 g \vec{e}_y = -\left(\frac{\pi d^2}{4} \times \rho \right) g \vec{e}_y = -\frac{\pi d^2}{4} \rho g x \vec{e}_y$$

$$\vec{p}_2 = m_2 \vec{g} = -m_2 g \vec{e}_y = -\left(\frac{\pi d^2}{4} (L-x) \rho \right) g \vec{e}_y = -\frac{\pi d^2}{4} \rho g (L-x) \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow [T_1]_0 = -\frac{\pi d^2}{4} \rho g x \vec{e}_y + \frac{\pi d^2}{8} \rho g x^2 \vec{e}_z$$

$$[T_1]_0 = \frac{\pi d^2}{4} \rho g x \left[-\vec{e}_y + \frac{1}{2} x \vec{e}_z \right]$$

- T.S.V.P =

$$\begin{aligned} [\bar{T}_2]_0 &= -\frac{\pi d^2}{4} \rho g (L-x) \vec{e}_y - \frac{\pi d^2}{8} \rho g (L-x)^2 \vec{e}_z \\ \rightarrow [\bar{T}_2]_0 &= -\frac{\pi d^2}{4} \rho g (L-x) \left[+ \vec{e}_y + \varepsilon \frac{1}{2} (L-x)^2 \vec{e}_z \right] \end{aligned}$$

2.1. $[\bar{F}]$ exercice pour l'ouverture.

Borne TAB en équilibre: PFS $\mapsto [T_1]_0 + [T_2]_0 + [\bar{F}]_0 = 0$

$$\rightarrow [\bar{F}]_0 = -([T_1]_0 + [T_2]_0)$$

$$= - \left\{ \frac{\pi d^2}{4} \rho g x \left(-\vec{e}_y + \varepsilon \frac{1}{2} x \vec{e}_z \right) \right. \\ \left. - \frac{\pi d^2}{4} \rho g (L-x) \left[+ \vec{e}_y + \varepsilon \frac{1}{2} (L-x)^2 \vec{e}_z \right] \right\}$$

$$\Rightarrow -[\bar{F}]_0 = \frac{\pi d^2}{4} \rho g \left\{ x \vec{e}_y - \varepsilon \frac{1}{2} x^2 \vec{e}_z + (L-x) \vec{e}_y + \varepsilon \frac{1}{2} (L-x)^2 \vec{e}_z \right\}$$

$$\Rightarrow [\bar{F}]_0 = -\frac{\pi d^2}{4} \rho g \left\{ (x+L-x) \vec{e}_y + \varepsilon \frac{1}{2} [-x^2 + (L-x)^2] \vec{e}_z \right\}$$

$$[\bar{F}]_0 = -\frac{\pi d^2}{4} \rho g \left[L \vec{e}_y + \varepsilon \frac{1}{2} (L-x+x)(L-x-x) \vec{e}_z \right]$$

Donc: $[\bar{F}]_0 = -\frac{\pi d^2}{4} \rho g \left[L \vec{e}_y + \varepsilon \frac{1}{2} L(L-2x) \vec{e}_z \right]$

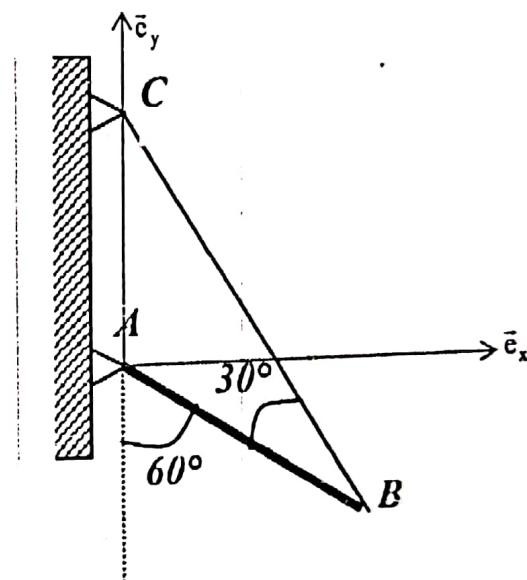
3.1 $\frac{x_0 \cdot \rho g}{\eta_0}$ à minimum (en module)

Si et pour que $\frac{\eta_0}{\eta_0} = 0$:

$$\eta_0 = 0 \text{ et } \frac{1}{2} L (L-2x) = 0 \Leftrightarrow L = 2x \quad \boxed{x_0 = \frac{L}{2}}$$

VI-2 Exercice résolu n°2 : Tension d'un câble supportant une barre

Une barre homogène pesant 80 N est liée par une articulation cylindrique en son extrémité A à un mur. Elle est retenue sous un angle de 60° avec la verticale par un câble inextensible de masse négligeable à l'autre extrémité B . Le câble fait un angle de 30° avec la barre. Déterminer la tension dans le câble et la réaction au point A .



Nota : La solution à cet exercice se trouve en page suivante (en manuscrit au moment de l'envoi du document à la presse ; nous nous en excusons)

Corrigé de l'exercice Tension d'un câble supportant une barre

Chapitre

Barre $P = 80 \text{ N}$

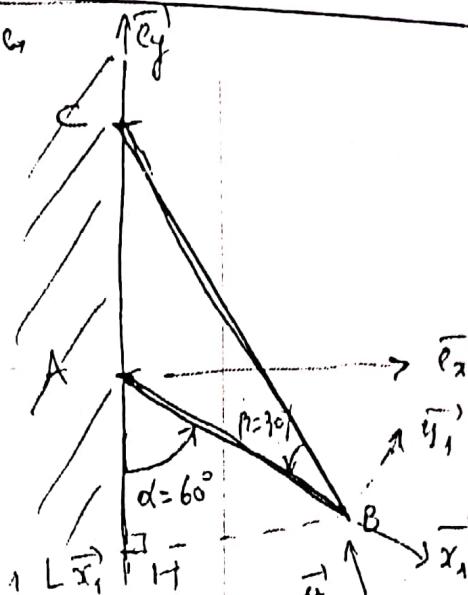
$\alpha = 60^\circ$ $\beta = 30^\circ$

Tension du fil \vec{T} et réaction $\vec{R_A}$ en A ?

Barre en équilibre \Rightarrow bilan des actions mécanique.

1^{er} pas de tension:

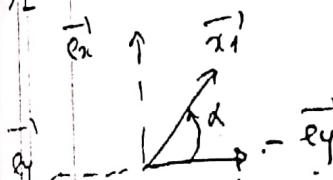
$$[T_1]_G = \begin{cases} \vec{P} = -P \vec{e}_y \\ m_{1,G} = 0 ; AG = \frac{L}{2} \end{cases}$$



2nd Réaction en A:

$$[T_2]_A = \begin{cases} \vec{R_A} = X \vec{e}_x + Y \vec{e}_y \\ m_{2,A} = 0 \end{cases}$$

3rd Tension du fil P. en B



$$[T_3]_B = \begin{cases} \vec{T} = T \vec{u} \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{BC}}{AB} ; \vec{AB} = L \vec{x}_1 \\ m_{3,B} = 0 \end{cases}$$

Réaction de la Terre au sol en A

$$\begin{aligned} m_{1,A} &= m_{1,G} + AG \cdot \vec{P} = 0 + \frac{1}{2} L \vec{x}_1 \cdot -P \vec{e}_y = -\frac{PL}{2} \vec{x}_1 \vec{e}_y \\ &= -\frac{PL}{2} \sin(\pi - \alpha) \vec{e}_3 = \frac{PL}{2} \sin \alpha \vec{e}_3 = m_{1,A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{3,A} &= m_{3,B} ; \vec{R}_A \vec{T} = 0 + L \vec{x}_1 \cdot T \vec{u} = LT \sin(\pi - \beta) \vec{e}_3 \\ &= LT \sin \beta \vec{e}_3 = m_{3,A} \end{aligned}$$

P.F.S. en A: $[T_1]_A + [T_2]_A + [T_3]_A = 0$

$$-P \vec{e}_y + \sum (-\frac{PL}{2} \sin \alpha) \vec{e}_3 + \vec{R}_A + \vec{e}_3 + T \vec{u} + \sum LT \sin \beta \vec{e}_3 = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow \begin{cases} -P \vec{e}_y + \vec{R}_A + T \vec{u} = 0 \\ (-\frac{PL}{2} \sin \alpha + LT \sin \beta) \vec{e}_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

T.S.V.P

$$(2) \rightarrow -\frac{P}{2} \sin \alpha + T \sin \beta = 0 \rightarrow T = \frac{P}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\vec{r}_A = P \vec{e}_y - T \vec{e}_x$$

$$(1) \rightarrow \vec{r}_A = \vec{e}_x, \vec{r}_0 = \vec{e}_y, \vec{r}_1 = \vec{e}_z \quad \text{et } P_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$$R_1: \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \theta = \alpha - \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \theta = -\sin \alpha \text{ et } \cos \theta = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow R_0: \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{u} \\ (R_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \vec{u} \\ (R_0) \end{bmatrix} = R_0^{-1} \begin{bmatrix} \vec{u} \\ (R_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \omega \alpha & 0 \\ -\omega \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega \beta \\ \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \omega \beta + \sin \beta \omega \alpha \\ \omega \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ 0 \end{bmatrix}$$

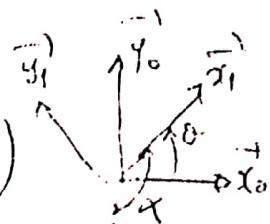
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{u} \\ (C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) \\ \cos(\alpha - \beta) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\beta - \alpha) \\ \omega(\beta - \alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \sin(\beta - \alpha) \vec{e}_x + \cos(\beta - \alpha) \vec{e}_y$$

$$(1) \rightarrow \vec{r}_A = P \vec{e}_y = T \sin(\beta - \alpha) \vec{e}_x - T \cos(\beta - \alpha) \vec{e}_y \\ = -T \sin(\beta - \alpha) \vec{e}_x + [P - T \cos(\beta - \alpha)] \vec{e}_y$$

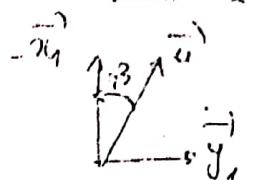
Nói:

$$\vec{r}_A = \frac{P}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \sin(\alpha - \beta) \vec{e}_x + P \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha \omega(\alpha - \beta)}{\sin \beta} \right] \vec{e}_y$$

$$\vec{T} = \frac{P}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} [\sin(\beta - \alpha) \vec{e}_x + \cos(\beta - \alpha) \vec{e}_y]$$



$$\theta = \alpha - \frac{\pi}{2}$$



$$\vec{u} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \vec{e}_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) (-\vec{e}_1) \\ = \sin \beta \vec{e}_1 - \cos \beta \vec{e}_2$$

Chapitre 6 STATIQUE GRAPHIQUE

D'emploi universel, la statique plane est particulièrement adaptée à la résolution des problèmes faisant intervenir des systèmes articulés avec barres, vérins et composants divers, ainsi que les structures de type treillis.

En statique plane, les actions étudiées appartiennent toutes à un même plan (*forces coplanaires*), ce qui rend plus aisée la résolution graphique. Or ces solutions (graphiques) sont en général plus rapides et plus faciles à mettre en œuvre ; en plus, parce qu'elles sont plus visuelles, elles permettent aussi de détecter plus rapidement les erreurs éventuelles.

I. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE : Cas des forces coplanaires.

I-1 Enoncé du Principe Fondamental de la Statistique (PFS)

“Un solide indéformable en équilibre sous l'action de n forces extérieures $\vec{F}_i (i = 1, \dots, n)$, reste en équilibre si et seulement si :

- 1°) - La somme vectorielle \vec{R} de toutes ces forces extérieures est nulle
- 2°) - Le moment résultant \vec{m}_I de toutes ces forces extérieures, en n'importe quel point I du plan, est nul.”

I-2 Remarques :

$$\text{a) Ainsi équilibre} \rightarrow \begin{cases} \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \\ \vec{m}_I = \sum_i m_I(\vec{F}_i) = \vec{0} \quad \forall I \end{cases}$$

b) Dans le plan, la notion de moment scalaire ou algébrique est suffisante pour la résolution, contrairement à la statique dans l'espace où il est nécessaire d'utiliser la notion de vecteur moment.

c) Le Principe Fondamental de la Statique énoncé ci-dessus est également vérifié pour des solides non accélérés (solides en mouvement de translation uniforme notamment)

d) Le ressort étant un cas particulier de solide déformable, le Principe Fondamental de la Statique ne lui est pas applicable ; en effet sa déformation accumulant de l'énergie potentielle nécessitera que, pour sa résolution, on tienne compte des forces intérieures au ressort.

II- PRINCIPE DES ACTIONS MUTUELLES :P.A.M.

Enoncé : "Pour deux solides (S_1) et (S_2) interagissant entre eux, que ce soit par contact ou à distance, l'action exercée par (S_1) sur (S_2) est égale et opposée à l'action exercée par (S_2) sur (S_1). C'est-à-dire :

$$\bar{F}_{1/2} = -\bar{F}_{2/1}$$

III- PRINCIPE DE TRANSMISSIBILITE DES FORCES EN STATIQUE

III-1 Enoncé du Principe de Transmissibilité des Forces (P.T.F.)

" L'équilibre (et de manière plus générale le mouvement) d'un solide (S) reste inchangé si la force \bar{F} agissant en un point I de (S) est remplacée par une force \bar{F}' de même direction, même sens et même intensité, agissant en un point M quelconque appartenant au support ou ligne d'action de la force \bar{F} ".

III-2 Remarques :

a) Le Principe de Transmissibilité des Forces (P.T.F) revient à dire que l'effet d'une force sur un solide (indéformable) dépend uniquement de sa ligne d'action, de son sens et de son intensité ; le point d'application sur la ligne d'action ne joue aucun rôle et n'a aucune influence en statique des solides.

b) Le Principe de Transmissibilité des Forces (P.T.F) n'est pas applicable en RDM (Résistance Des Matériaux) du fait que le déplacement des forces peut transformer la nature des efforts intérieurs, par exemple, deux forces exerçant des tensions aux extrémités d'une barre, si elles sont déplacées l'une occupant la place de l'autre, la barre devient plutôt comprimée.



IV- MÉTHODES DE RÉSOLUTION GRAPHIQUE

Plus faciles à mettre en œuvre et amenant le moins d'erreurs dans les résolutions de problèmes, les méthodes graphiques exigent toutefois des figures tracées à une échelle convenablement choisie (ou donnée) et un minimum de soin dans le tracé pour obtenir des résultats précis.

IV-1 SOLIDE SOUMIS À TROIS FORCES CONCOURANTES

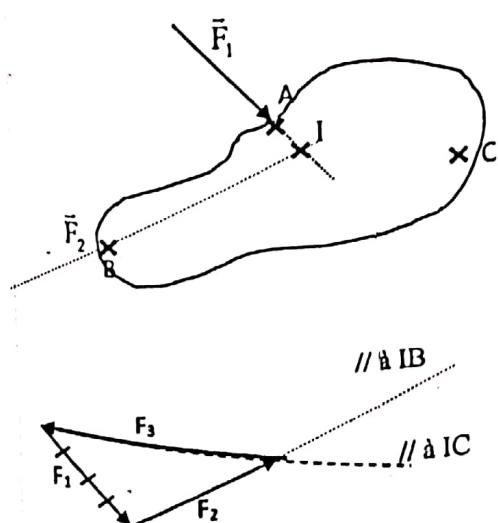
Règle : On sait que pour qu'un solide soumis à trois forces non parallèles soit en équilibre, les trois forces \vec{F}_1 , \vec{F}_2 et \vec{F}_3 doivent être concourantes au même point I et que la somme géométrique (ou vectorielle) des trois forces doit être nulle. Ce sont ces deux propriétés qui doivent être exploitées ; et le problème est faisable si on n'a pas plus de trois inconnues.

Exemple : Solide soumis à trois forces \vec{F}_1 , \vec{F}_2 et \vec{F}_3 , dont on connaît les points d'application A, B, et C ; \vec{F}_1 est entièrement connu (direction, sens, et module), la direction de \vec{F}_2 est connue. On désire connaître :

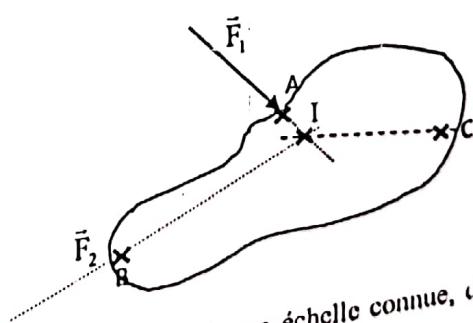
- Le module de \vec{F}_2 (et son sens)
 - La direction de \vec{F}_3
 - Le module de \vec{F}_3 (et son sens)
- } Trois inconnues

Résolution :

1) - Point de concours I



2) Direction de \vec{F}_3 : (IC).



- 3) \vec{F}_1 tracé à une échelle connue, direction et sens respecté.
- 4) A partir d'une extrémité de \vec{F}_1 tracer une parallèle à IC
- 5) A partir de l'autre extrémité, tracer une parallèle à IB.

6) Les trois directions décrivent un triangle dont les côtés représentent \bar{F}_1 , \bar{F}_2 et \bar{F}_3 , à condition de respecter les différentes directions ; les sens des vecteurs sont ceux qui permettent de fermer entièrement le triangle du point de vue géométrique. Une simple mesure des longueurs (puis conversion en newton) et des inclinaisons relatives (par rapport aux axes du repère par exemple) permettent de décrire entièrement les actions cherchées.

IV-2 SOLIDE SOUMIS A L'ACTION DE QUATRE FORCES ET PLUS

Si les forces ne sont pas parallèles, pour chaque équilibre étudié le nombre maximal d'inconnues qu'on peut déterminer est de trois. Au-delà, la résolution ne peut être que partielle ou impossible.

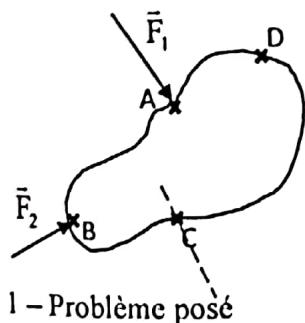
Deux cas principaux se présentent, chacun conduisant à des résolutions graphiques différentes :

- Une direction et deux modules inconnus
- Trois modules inconnus.

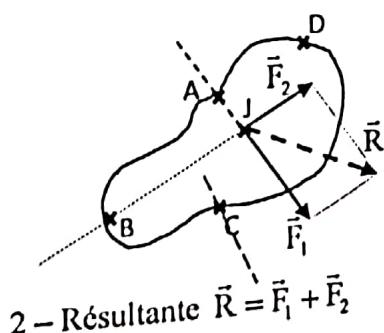
a) Résolution d'une direction et deux modules inconnus

Si deux forces seulement présentent des éléments inconnus (max trois en tout) et que toutes les autres forces sont connues :

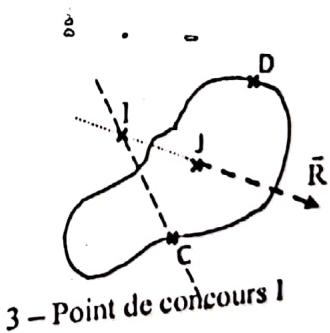
- On détermine (graphiquement) la résultante de toutes les forces connues
- On se ramène ainsi à trois forces concourantes et on résout comme au paragraphe IV-1



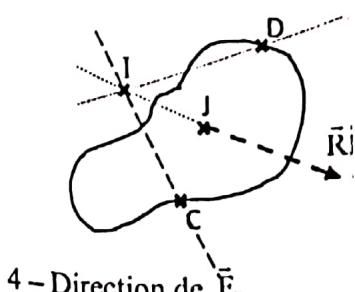
1 - Problème posé



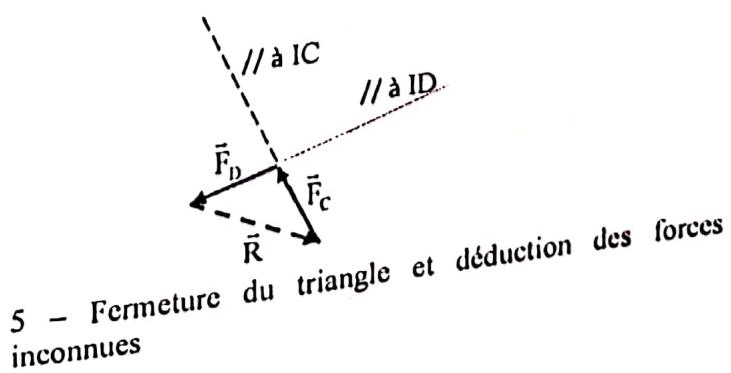
2 - Résultante $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$



3 - Point de concours I



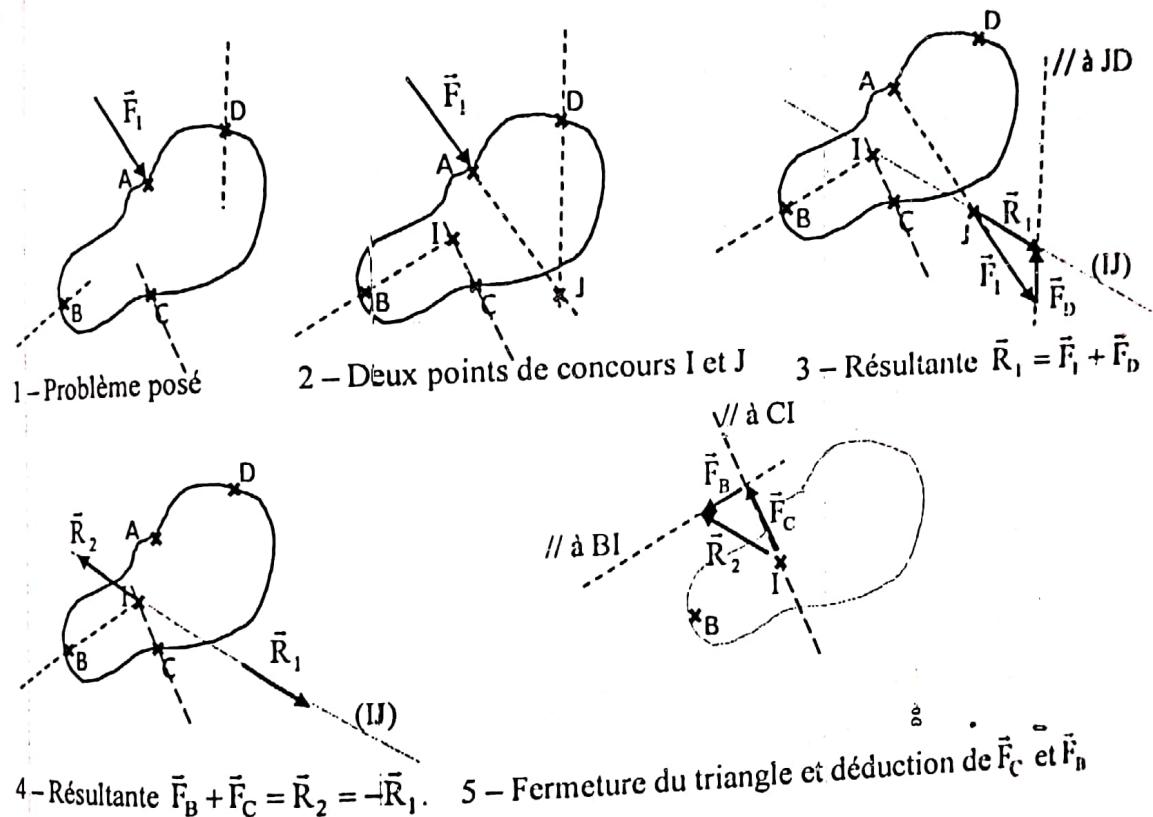
4 - Direction de \bar{F}_D .



5 - Fermeture du triangle et déduction des forces inconnues

b) Résolution de trois modules inconnus (Méthode de Cullman)

C'est par exemple le cas où toutes les directions des forces sont connues, mais une seule force sur les quatre est complètement connue.
Alors, on met les quatre forces en deux groupes de deux forces concourantes (respectivement en I et J) afin de se ramener à deux résultantes \bar{R}_1 et \bar{R}_2 égales et opposées ayant la même ligne d'action (IJ).



IV-3 METHODE DU DYNAMIQUE ET DU FUNICULAIRE

Cette méthode purement graphique, est intéressante dès que le nombre de forces à manipuler est important ; elle permet de déterminer les résultantes et de résoudre les problèmes d'équilibre.

Dans cette méthode, les constructions graphiques sont effectuées en alternance sur le *funiculaire* (figure définissant la position géométriques forces) et sur le *dynamique* ou *polygone des forces* (figure définissant les intensités des forces).

a) Résultante d'un ensemble de forces.

Construction : (Ordre à respecter pour le tracé)

✓ Sur le dynamique (disposé à droite et c'est par lui qu'il faut commencer):

- Choisir une échelle pour tracer les forces

- A partir d'un point arbitraire A_0 , tracer $\bar{F}_1 = \overrightarrow{A_0 A_1}(40\text{kN})$,

$$\bar{F}_2 = \overrightarrow{A_1 A_2}(30\text{kN})$$

$$\bar{F}_3 = \overrightarrow{A_2 A_3}(20\text{kN}) \text{ etc., jusqu'à}$$

$$\bar{F}_n = \overrightarrow{A_{n-1} A_n}$$

- Déduire la direction (droite $A_0 A_n$) de la résultante \bar{R} et son module :

$$\bar{R} = \overrightarrow{A_0 A_n}$$

- Choisir un point P quelconque du plan, appelé pôle, non trop près des forces.

- Tracer les rayons polaires $PA_0, PA_1, PA_2, \dots, PA_n$, et les numérotter (0, 1, 2, ..., n)

✓ Sur le funiculaire (disposé à gauche):

- Tracer les côtés du funiculaire : Choisir un point arbitraire K sur la ligne d'action de \bar{F}_1 , tracer la demi-droite numérotée 0', s'achevant à K et parallèle au rayon polaire numéroté 0 (du dynamique). A partir de K, tracer le segment 1', parallèle au côté (rayon polaire) 1, issu de K et s'arrêtant à l'intersection avec la force suivante (\bar{F}_2). A partir de ce point d'intersection, tracer le segment 2', parallèle au côté 2 et s'arrêtant à l'intersection avec la prochaine force, etc. n' sera la demi-droite parallèle au côté n du dynamique et issue du point d'intersection avec la dernière force.

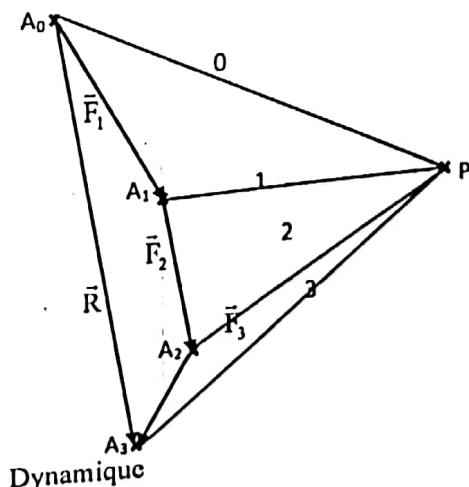
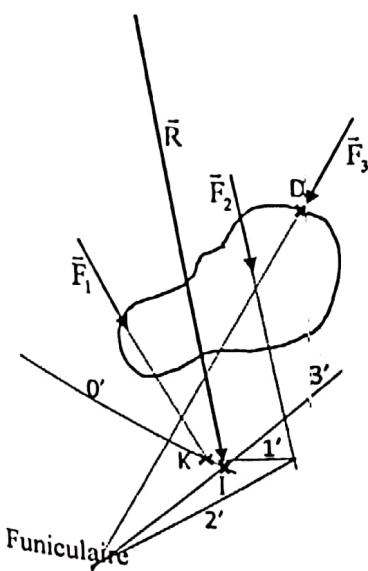
- Déterminer I, point de concours des côtés extrêmes (0' et n') du funiculaire (I est l'intersection de 0' et 3', pour l'exemple choisi)

- La résultante \bar{R} passe par I, sa ligne d'action est parallèle à $\overrightarrow{A_0 A_n}$; son sens et son module sont ceux de $\overrightarrow{A_0 A_n}$.

Application :

Soit à déterminer la résultante de trois forces \bar{F}_1, \bar{F}_2 et \bar{F}_3 de modules $F_1 = 40\text{kN}, F_2 = 30\text{kN}$ et $F_3 = 20\text{kN}$ s'exerçant sur un solide (S). Tracé du dynamique et du funiculaire.

- Echelle : 



Remarques :

- Il y a parallélisme des forces entre les deux figures : \vec{F}_1 sur le funiculaire est parallèle à $\vec{F}_1 = \overrightarrow{A_0 A_1}$ sur le dynamique.
- K est choisi de manière arbitraire sur la ligne d'action de \vec{F}_1 ; seulement, une fois que K est choisi, on s'assure que O' et I' se coupent en K, ce qui fixe définitivement K.

b) *Equilibre d'un solide sous l'action des forces parallèles*

On peut résoudre si on n'a au plus deux forces inconnues.

Construction : (Ordre à respecter pour le tracé)

➤ Sur le dynamique :

- Tout d'abord déterminer la résultante \vec{R} des forces connues (Module, direction et sens sur un premier dynamique, puis point d'application ou mieux de passage I sur un premier funiculaire) comme précédemment.

- Choisir une échelle des forces

- A partir d'un point arbitraire A_1 , tracer la résultante des forces connues $\vec{R} = \overrightarrow{A_1 A_2}$, ici

$$\vec{R} = \vec{P} = \overrightarrow{A_1 A_2}$$

- Choisir un pôle arbitraire P, non trop près des forces.

- Tracer les rayons polaires PA_1 et PA_2 et les numérotter (1 et 2)

- Aller au funiculaire

- De retour du funiculaire, tracer le rayon polaire 3, issu de P, colinéaire à (IJ) et coupant la résultante $\vec{R} = \overrightarrow{A_1 A_2}$ en A_3 . Déduire les forces inconnues par $\overrightarrow{A_2 A_3}$ et $\overrightarrow{A_3 A_1}$.

➤ Sur le plan funiculaire :

- Choisir une échelle des longueurs
- Choisir un point arbitraire K sur la ligne d'action de la résultante \vec{R}

- Tracer I' parallèle à 1, coupant \vec{P} en K ; il coupe la ligne d'action de la première force inconnue en I.

- Tracer $2'$ parallèle à 2 ; il coupe aussi \vec{P} en K, mais la ligne d'action de la deuxième force inconnue en J.

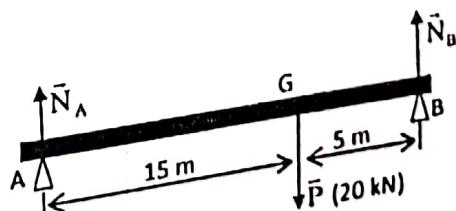
- Fermer le funiculaire en traçant la droite (IJ) ; les parties extrêmes (hors du segment [I, J]) de cette droite sont numérotées 0' et 3'.

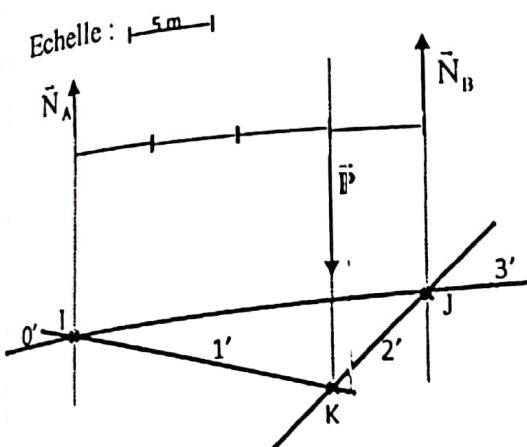
- Rentrer au dynamique.

Application :

Soit à déterminer les actions normales \vec{N}_A et \vec{N}_B aux deux appuis supportant une poutre non homogène.

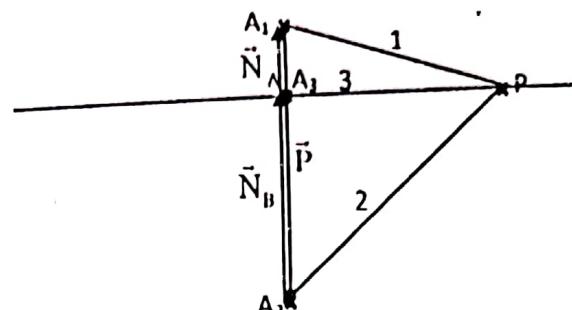
En se plaçant dans le plan (de symétrique) longitudinal, on peut supposer qu'on a un problème de statique plane.





Funiculaire

Echelle : 1 kN



Dynamique

Propriété :

“Pour tout solide en équilibre, les côtés extrêmes du funiculaire sont confondus” ; la droite extrême est appelée *ligne de fermeture*. Et on dit que le funiculaire est fermé.

Remarque 1 :

Si sur le dynamique les forces respectent l'ordre $\bar{N}_A = \overrightarrow{A_3 A_1}$, $\bar{P} = \overrightarrow{A_1 A_2}$ et $\bar{N}_B = \overrightarrow{A_2 A_3}$, avec $\bar{N}_A + \bar{P} + \bar{N}_B = \overrightarrow{A_3 A_1} + \overrightarrow{A_1 A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3} = \vec{0}$, alors le point A_3 est situé sur \bar{P} entre A_1 et A_2 et PA_3 est le rayon polaire parallèle à la ligne de fermeture (c'est-à-dire parallèle à IJ qui est $0'$ et $3'$, tous les deux confondus)

Les côtés extrême $0'$ et $3'$ du funiculaire sont confondus avec la ligne de fermeture. Ceci implique que, par analogie, les rayons polaires 0 et 3 sont confondus avec PA_3 .

Remarque 2 :

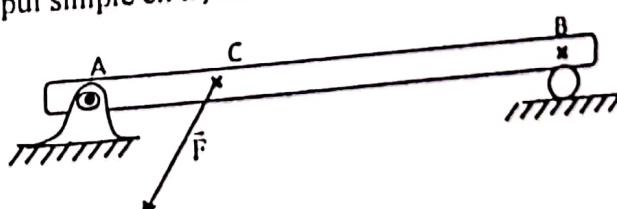
les actions du dynamique situées entre deux rayons polaires (0 et 1), (1 et 2), (2 et 3), sont celles qui, sur le funiculaire, sont situées à l'intersection des lignes portant les repères équivalents ($0'$ et $1'$), ($1'$ et $2'$), ($2'$ et $3'$).

c) Equilibre d'un solide soumis à l'action de forces concourantes

La résolution est analogue aux précédentes seulement, pour réussir la construction du funiculaire, il faut absolument faire passer la ligne de fermeture par le point d'application A , seul point connu de la direction de A . On doit avoir au maximum deux forces inconnues.

Application :

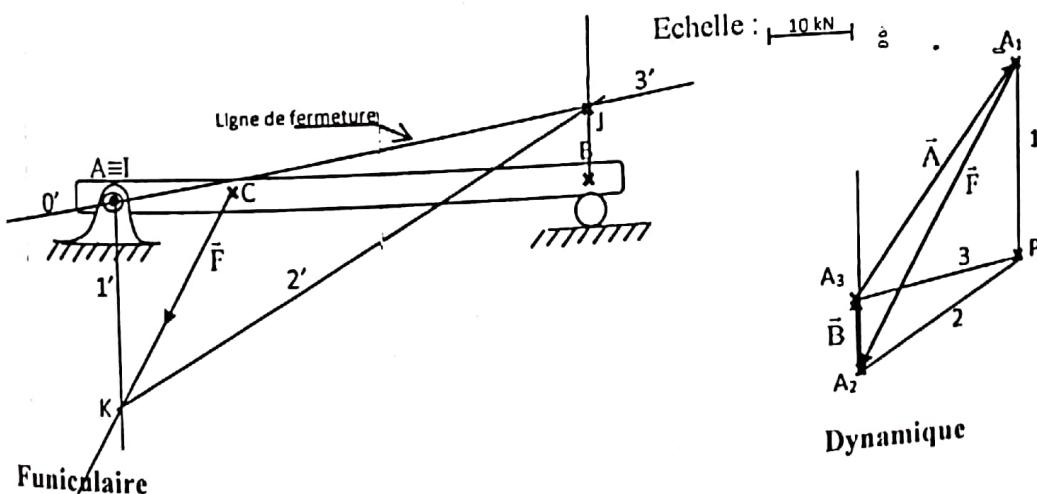
Soit une poutre, articulée en A et en appui simple en B , et sollicitée par une charge inclinée de 40 kN en C . On veut déterminer les actions \bar{A} et \bar{B} exercées par les appuis en A et B .



Direction et module de \vec{A} sont inconnus ; \vec{B} est verticale, mais de module inconnu.

Construction : (Ordre à respecter pour le tracé)

<p>➤ Sur le dynamique :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Choix d'une échelle des forces - Tracé de $\vec{F} = \vec{A}_1 \vec{A}_2$ - Choix d'un pôle P - Tracé des rayons polaires (1) et (2) par PA_1 et PA_2 - Matérialiser la direction de \vec{B} à partir de A_2. - Aller au funiculaire <p>De retour du funiculaire :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Tracé du rayon polaire PA_3 (0 et 3) parallèle à AJ ; A_3 est l'intersection de la direction de \vec{B} avec la droite issue de P et parallèle à la ligne de fermeture - Déduire les force $\vec{B} = \vec{A}_2 \vec{A}_3$ et $\vec{A} = \vec{A}_3 \vec{A}_1$ 	<p>➤ Sur le plan funiculaire :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Tracé de l', parallèle à 1 et issu de A $\equiv l$ - l' rencontre \vec{F} en K. - Tracé de $2'$ parallèle à 2 et issu de K ; il rencontre la direction de \vec{B} en J. - Tracé de la ligne de fermeture $IJ = \vec{A}_j$ - <u>Rentrer au dynamique.</u>
---	--



IV-4 PROBLEMES HYPERSTATIQUES

Un solide (ou un ensemble de solides) qui possède des liaisons ou des appuis surabondants par rapport à ce qui est strictement nécessaire au maintien de l'équilibre est dit *statiquement indéterminable ou hyperstatique*.

Pour ces solides (ou ensembles de solides), les actions exercées ne peuvent pas être déterminées à partir des seules équations de la statique (P.F.S. notamment). En résistance des matériaux (traction, flexion, torsion, etc.), plusieurs exemples de problèmes hyperstatiques sont rencontrés et résolus à l'aide d'équations supplémentaires liées aux déformations.

Exemple de système hyperstatique : une poutre ABC en appui sur trois articulations fixes A, B et C. Ceci est un problème à six inconnues statiques $A_x, A_y, B_x, B_y, C_x, C_y$, alors qu'on ne dispose que de trois équations scalaires pour la résolution. ($\bar{x} \cdot \Sigma \vec{F} = 0$; $\bar{y} \cdot \Sigma \vec{F} = 0$ et $\bar{z} \cdot \Sigma \vec{m} = 0$)
On reviendra, au chapitre suivant, sur la notion d'hyperstatisme.

V- SYSTEMES TRIANGLES OU TREILLIS, PLANS.

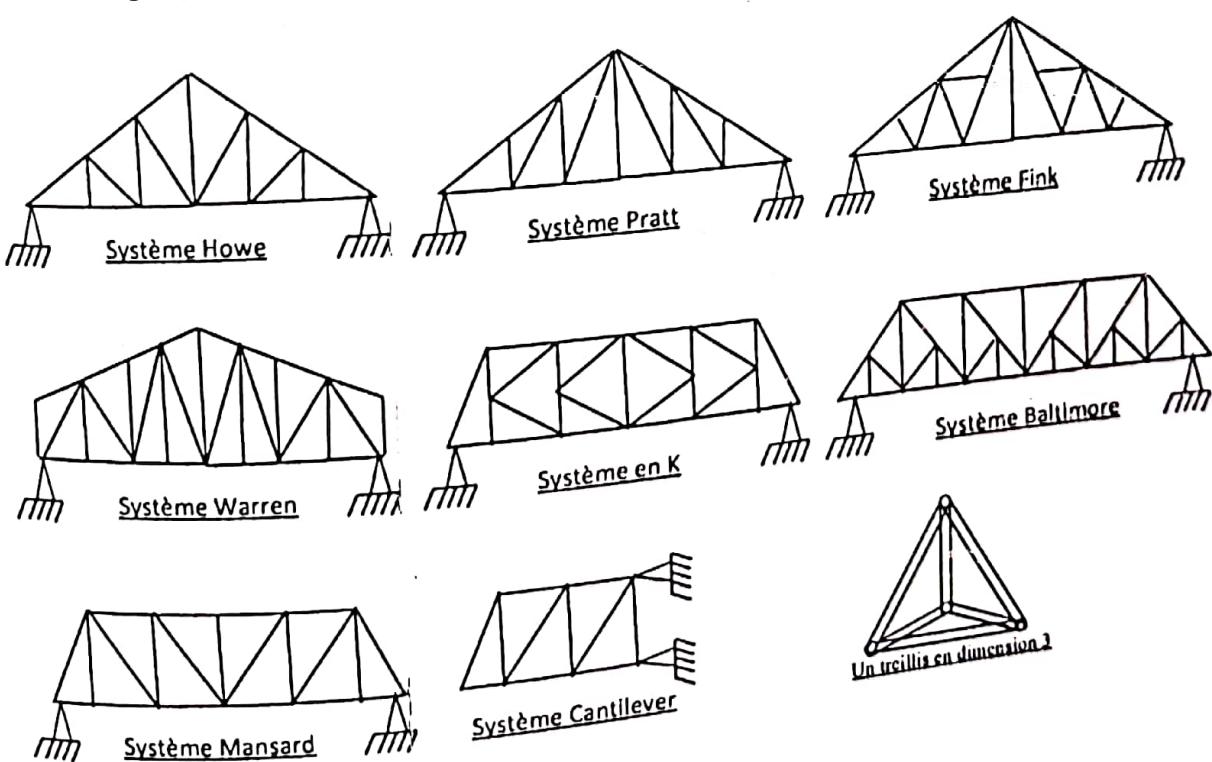
Ce paragraphe est une application générale de la statique plane.

V-1 Définition

On appelle *treillis* ou *système triangulé*, tout assemblage de barres rectilignes dont la figure de base est un triangle.

On appelle *nœud*, le point de rencontre des barres.

On distingue plusieurs types de treillis:



V-2 Hypothèses

Par souci de facilité, l'étude des systèmes triangulés est généralement menée en faisant les hypothèses suivantes :

H₁ : Les assemblages sont supposés géométriquement invariables

H₂ : Toutes les forces sont contenues dans le plan de la structure

H₃ : Le poids des barres est négligé ; les forces agissent donc sur les nœuds uniquement

H₄ : Les nœuds sont équivalents à des liaisons pivots.

Remarque : Compte tenu des hypothèses précédentes, les barres sont uniquement soumises, soit à la traction, soit à la compression :

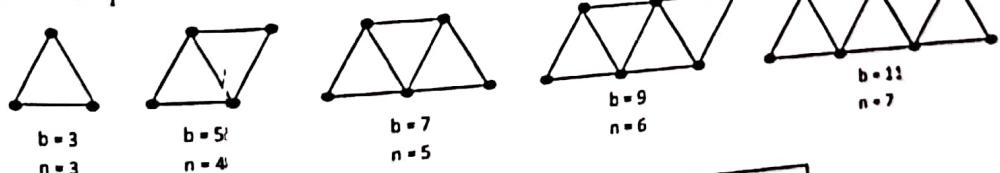


V-3 Relation entre nœuds et barres

Soit n le nombre de nœuds de la structure et b le nombre de barres, on distingue deux cas :

a) Cas des appuis mobiles

➤ Quelques exemples :



➤ Relation entre n et b : on constate que

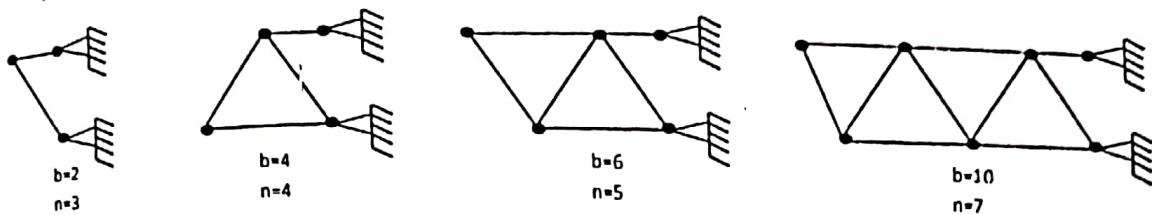
$$b+3 = 2n, \text{ c.à.d. : } b = 2n - 3$$

➤ Conclusion :

- Si $b = 2n-3$ la résolution est possible avec le Principe Fondamental de la Statique : le système est isostatique.
- Si $b < 2n-3$ la structure n'est pas rigide, il y a mobilité.
- Si $b > 2n-3$ le système est hyperstatique, il y a des contraintes internes.

b) Cas où la structure repose sur deux appuis fixes

➤ Exemples :



➤ Relation entre n et b : $b = 2(n-2)$ ou mieux $b = 2n - 4$

➤ Conclusion :

- Si $b = 2n-4$ la résolution est *possible* avec le Principe Fondamental de la Statique : le système est **isostatique**.
- Si $b < 2n-4$ la structure n'est pas rigide, il y a **mobilité**
- Si $b > 2n-4$ le système est **hyperstatique**, il y a des contraintes internes

V-4 Résolution par la méthode des nœuds

a) Technique de la méthode

Afin de déterminer les actions dans toutes les barres d'une structure, on peut appliquer le Principe Fondamental de la Statique (plus précisément le Principe de la Résultante statique) pour étudier l'équilibre des nœuds successifs. On devra donc (sur le dynamique) construire une somme géométrique nulle.

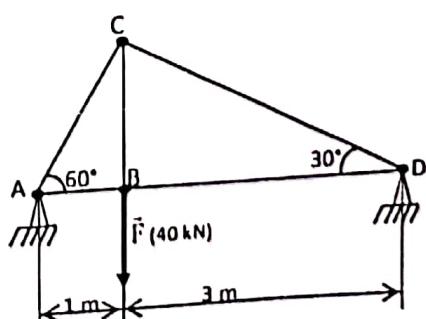
Pour ce faire, on commencera par observer les nœuds, pour détecter celui ou ceux qui ont le moins d'inconnues (direction, sens et module des forces notamment) ; c'est par celui-là qu'on commence. Un nœud à plus de deux actions inconnues est à éviter.

On utilisera le fait que, si une barre relie deux nœuds (N_1 et N_2 par exemple), l'action de la barre (notée $\overrightarrow{N_1 N_2}$) dans l'étude de l'équilibre de l'un des nœuds est opposée (même direction, même module ou longueur, mais sens contraire) à l'action de cette barre dans l'étude de l'équilibre du second nœud.

N.B. : Parfois, avant de démarrer la construction (résolution purement) graphique, il peut être nécessaire d'isoler d'abord la structure tout entière, de lui appliquer le P.R.S. par le funiculaire et le dynamique (c'est encore une méthode graphique) avant de commencer l'équilibre des nœuds successifs.

b) Exemple

Déterminons les efforts exercés dans toutes les barres de la structure triangulée ci-contre.

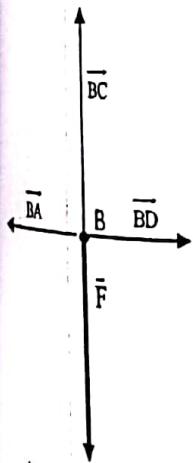


$$\left. \begin{array}{l} n=4 \\ b=5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2n-b=3 \rightarrow \text{système isostatique.}$$

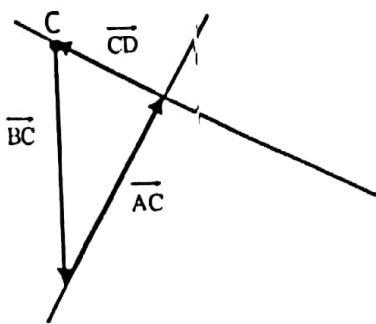
* La structure, dans son ensemble est soumise à trois forces parallèles, \vec{F} , \vec{N}_A et \vec{N}_D . L'utilisation du dynamique et du funiculaire permet d'obtenir $N_A = 30 \text{ kN}$ et $N_D = 10 \text{ kN}$, ces deux actions étant verticales et dirigées de bas en haut..

* On choisit une échelle des forces : $\frac{10 \text{ kN}}{\text{unité}}$

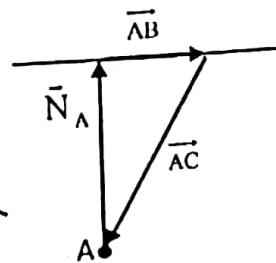
* En isolant successivement les nœuds B, C, A et D, on a les constructions graphiques suivantes permettant de déduire les vecteurs forces inconnus.



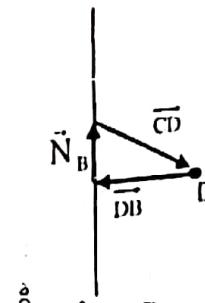
Le nœud B est soumis à 4 forces opposées 2 à 2 ; on déduit l'action \vec{BC} .



Connaissant \vec{BC} en C et les directions de \vec{BD} et \vec{AC} , la fermeture du dynamique donne entièrement les 2 dernières actions..



Connaissant \vec{AC} en A et avec \vec{N}_A obtenu par isolement de toute la structure, la fermeture du dynamique donne entièrement \vec{AC} . On vérifie d'ailleurs que la direction



Connaissant les actions \vec{DB} et \vec{CD} , la fermeture du dynamique donne entièrement \vec{NB} . On peut par ailleurs vérifier qu'on retrouve le résultat obtenu au début par isolement de toute la structure.

Les résultats d'une résolution graphique à plusieurs barres (cas des systèmes triangulés) sont généralement présentés sous la forme de tableau dont la structure optimale, pour le cas que nous venons d'étudier, est la suivante :

N° ordre	Effort		Direction (angle avec l'axe des $x>0$)	Sens	Intensité	Sollicitation	
						Compression	Traction
1	Action de l'appui en A						
2	Action de l'appui en B						
	Action de la barre	Sur le nœud					
3	BC	B					
4	BC	C					
5	CD	C					
6	CD	D					
7	EF	E				0	+
8	AC	C					
9	AC	A					
10	AB	A					
11	AB	B					
12	BD	B					
13	BD	D					
etc.	etc.	etc.					

V-5 Résolution par la méthode de Cremona

a) Principe :

Construire et rassembler, sur un même graphique ou figure appelé *Cremona*, tous les triangles ou polygones des forces obtenus par l'étude des équilibres des nœuds successifs de la structure.

b) Condition d'applicabilité :

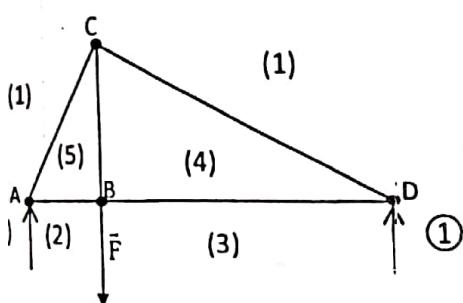
Ne pas avoir, pour un même nœud, plus de deux actions (modules) inconnues. Dans le cas contraire, isoler d'autres nœuds et, au besoin, utiliser la méthode des sections (voir plus loin), pour débloquer l'étude.

c)

Technique de tracé d'un Cremona.

Nous allons présenter cette technique de tracé (par la méthode de Cremona) à travers l'exemple suivant : Soit à déterminer les efforts exercés dans toutes les barres de la structure représentée sur la figure ci-contre, où le nœud B est sollicité par un effort $F=40 \text{ kN}$.

1 - On divise la structure en régions : les forces extérieures et les barres sont les frontières entre les différentes régions :



- La région (1) est limitée par \bar{R}_A, \bar{R}_D, AC et CD
- La région (2) est limitée par \bar{R}_A, \bar{F}, AB
- La région (3) est limitée par \bar{F}, \bar{R}_D, BD
- La région (4) est limitée par BD, DG, CB
- La région (5) est limitée par AB, BC, CA

2 - On trace le Cremona au fur et à mesure que l'on effectue l'étude graphique de l'équilibre des nœuds successifs.

N.B. : le choix d'une échelle des forces est nécessaire pour réaliser les constructions.

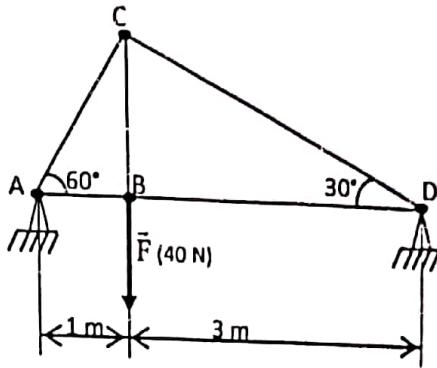
3 - Pour l'équilibre du nœud A, les régions rencontrées successivement, par rotation dans le sens trigonométrique sont : (1) – (2) – (5) – (1) ;

A ces régions correspondent (à travers les frontières) les actions suivantes :

- N_A entre les régions (1) et (2)
- La barre AB entre (2) et (5)
- La barre AC entre (5) et (1)

L'équilibre du nœud A permet le tracé des segments 1-2, 2-5 et 5-1 du graphe de la manière suivante :

- A partir d'un point arbitraire "1", on trace le vecteur $\overline{1-2} = \bar{N}_A$ qui a au préalable été donné par isolement de la structure tout entière et à l'aide de l'utilisation du funiculaire et du dynamique ($N_A = 30 \text{ kN}$). D'où les points "1" et "2" du Cremona.
- Sachant que (l'action de) la barre AB est horizontale, on trace, à partir de "2", une droite horizontale (notée : $\parallel \text{ à } AB$). On sait que "5" appartient à cette droite. L'action de la barre AB au nœud A sera le vecteur $\overline{2-5}$ encore inconnu, pour le moment.



- L'action de la barre AC au nœud A sera, elle, obtenue à l'aide du vecteur $\overrightarrow{5-1}$. On trace alors la parallèle à AC (notée : // à AC), issue du point déjà connu "1". Sachant que "5" appartient aussi à cette nouvelle droite, on déduit la position de "5" par intersection avec la première droite (notée : // à AB).
A ce stade, l'équilibre du nœud A est terminé; on peut, par mesure des longueurs (et avec l'échelle revenir aux modèles en newtons) et des angles, remplir les lignes de résultats correspondant aux actions suivantes :

- Action de la barre AB sur le nœud A (vecteur $\overrightarrow{2-5}$)
 - Action de la barre AC sur le nœud A (vecteur $\overrightarrow{5-1}$)

N.B. : le point 5 a été déduit par construction, en tant qu'intersection entre 2-5 et 1-5 (barre AB et barre AC) ; ce principe sera utilisé tout au long de la construction du Cremona.

4 - Pour l'équilibre du nœud B, on a les régions : (2) – (3) – (4) – (5) – (2).

Donc les actions :

- F (40 kN) entre (2) et (3) : on marque donc le point "3" à partir de "2" de sorte que $\overline{2-3} = \bar{F}$ (verticale, descendante, et de module 40 kN)
 - Barre BD entre (3) et (4) : on trace la // à BD passant par "3" ; "4" y appartient.
 - Barre CB entre (4) et (5) : on trace la // à CB passant par "5" ; "4" y appartient. L'intersection des deux "parallèles" donne le point "4"
 - Barre BA entre (5) et (2).

- Barre BA entre (5) et (2).
L'équilibre du nœud B permet le tracé des segments 2-3, 3-4, 4-5 et 5-2.

A ce stade, l'équilibre du nœud B est terminé; par mesure des longueurs et des angles, on peut remplir les lignes de résultats correspondant aux actions suivantes : , .

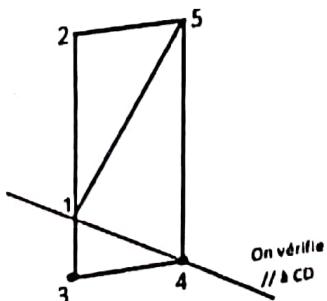
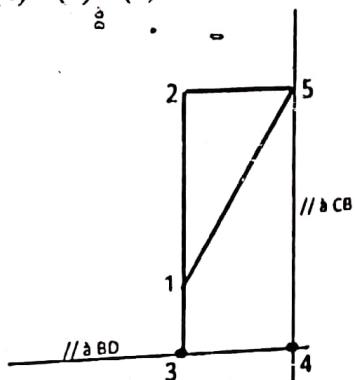
- Action de la barre BD sur le nœud B (vecteur $\overrightarrow{3-4}$)
 - Action de la barre CB sur le nœud B (vecteur $\overrightarrow{4-5}$)
 - Action de la barre AB sur le nœud B (vecteur $\overrightarrow{5-2}$)

5 - Pour le nœud D, on a les régions : (3) - (1) - (4) - (3)
et les actions :

- N_D entre (3) et (1)
 - Barre CD entre (1) et (4)
 - Barre BD entre (4) et (3)

- Barre BD entre (4) et (3)

Tous ces points étant déjà marqués sur notre graphe (en fait Cremona), on obtient directement les actions y relatives :



- Appui en D : (vecteur $\overrightarrow{3-1}$) ; on vérifie qu'on a encore le résultat donné au début par le dynamique et le funiculaire
- Action de la barre CD sur le nœud D (vecteur $\overrightarrow{1-4}$)
- Action de la barre BD sur le nœud D (vecteur $\overrightarrow{4-3}$)

N.B. : Sur notre cas on vérifie 1+4 parallèle à CD

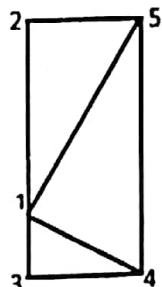
6. Pour le nœud C, on a les régions (1) – (5) – (4) – (1) et les actions suivantes :

- Barre AC entre (1) et (5)
- Barre BC entre (5) et (3)
- Barre CD entre (4) et (1).

Tous ces points étant déjà marqués sur notre graphe (en fait Cremona), on obtient directement les actions y relatives :

- Action de la barre AC sur le nœud C (vecteur $\overrightarrow{1-5}$)
- Action de la barre BC sur le nœud C (vecteur $\overrightarrow{5-4}$)
- Action de la barre DC sur le nœud C (vecteur $\overrightarrow{4-1}$)

N.B. : Tous les points ayant déjà été placés après l'équilibre du nœud B, on se contente ici de bien vérifier le parallélisme ...



d) Le Cremona final

Quand on a fini d'étudier l'équilibre (détermination des actions inconnues, mais aussi vérification des parallélismes prévisibles ou attendus) de tous les nœuds de la structure, on obtient le Cremona final, qui est une figure toujours fermée, débarrassée de toutes les lignes de construction.

e) Présentation des résultats

L'évolution de la construction du Cremona est accompagnée par un tableau comme celui ci-dessous, qui est rempli au fur et à mesure que les différentes actions sont déterminées. C'est le tableau de travail

Effort	Désignation sur le Cremona	Sens de l'action sur le nœud	Sollicitation dans la barre	Module (kN)
N_A	1-2			30,00
N_D	3-1			10,00
F	2-3			40,00

barre AB sur le nœud A	2-5	2 vers 5	traction	17,33
barre AB sur le nœud B	5-2	5 vers 2	traction	17,33
barre BD sur le nœud D	4-3	4 vers 3	traction	17,33
barre BD sur le nœud B	3-4	3 vers 4	traction	17,33
barre DC sur le nœud C	4-1	4 vers 1	compression	20,00
barre DC sur le nœud D	1-4	1 vers 4	compression	20,00
barre AC sur le nœud A	5-1	5 vers 1	compression	33,33
barre AC sur le nœud C	1-5	1 vers 5	compression	33,33
barre BC sur le nœud B	4-5	4 vers 5	traction	40,00
barre BC sur le nœud C	5-4	5 vers 4	traction	40,00

A la fin du Cremona, les résultats, essentiellement graphiques, sont présentés sous la forme du tableau suivant :

N° ordre	Effort		Direction (angle avec l'axe des x>0)	Sens	Intensité (kN)	Sollicitation	
	Compression	Traction					
1	Action de l'appui en A		90°	Bas →Haut	30		
2	Action de l'appui en B		90°	B → H	10		
	Action de la barre	Sur le nœud					
3	AB	A	0°	Gauche →Droite	17,33		X
4	AB	B	0°	D → G	17,33		X
5	BD	D	0°	D → G	17,33		X
6	BD	B	0°	G → D	17,33		X
7	DC	C	120°	B → H	20,00	X	
8	DC	D	120°	H → B	20,00	X	
9	AC	A	60°	H → B	33,33	X	
10	AC	C	60°	B → H	33,33	X	
11	BC	B	90°	B → H	40,00		X
12	BC	C	90°	H → B	40,00		X
13							
etc.	etc.	etc.					

Remarque :
 La méthode des nœuds peut être utilisée sans faire de Cremona ; cependant au-delà d'un certain nombre (sept par-là) de nœuds, le Cremona simplifie considérablement le travail et diminue le temps d'étude. Toutefois, si les barres sont trop nombreuses, on fait un recours avantageux aux logiciels de calcul.

V-6 QUELQUES PROPRIÉTÉS SIMPLIFICATRICES

Certains cas particuliers conduisent à des simplifications pouvant réduire considérablement l'étude des structures à barres.

a) Nœud non chargé, à trois barres (non perpendiculaires) dont deux sont colinéaires

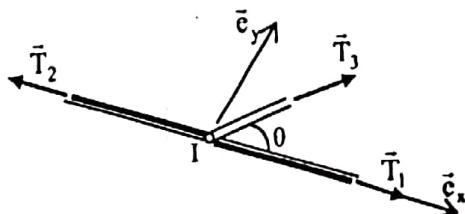
Soit $R(I, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un repère local, où I est le point de concours des trois barres, sans supportant aucune charge extérieure.

Le T.R.S appliqué à I donne : $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = \vec{0}$

$$(T.R.S.) \bullet \vec{e}_x \rightarrow -T_2 + T_1 + T_3 \cos\theta = 0 \quad (1)$$

$$(T.R.S.) \bullet \vec{e}_y \rightarrow T_3 \sin\theta = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow T_3 = 0 \text{ et dans (3) on en arrive à } T_2 - T_1 = 0 \\ \text{c.à.d. } T_1 = T_2$$

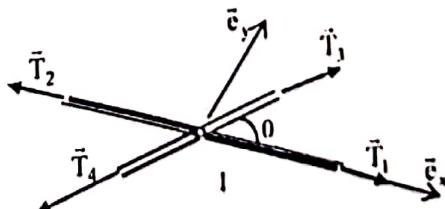


Conclusion :

Lorsqu'il n'y a pas de charge sur un nœud à trois barres dont deux sont colinéaires, les efforts dans les barres colinéaires sont directement opposées ($\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$) et l'effort dans la troisième barre est nul ($\vec{T}_3 = \vec{0}$).

b) Nœud non chargé à quatre barres colinéaires deux à deux

$$T.R.S : \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 + \vec{T}_4 = \vec{0}$$



$$(T.R.S) \bullet \vec{e}_y : 0 + 0 + T_3 \sin \theta - T_4 \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$(T.R.S) \bullet \vec{e}_x : -T_1 + T_2 + T_3 \cos \theta - T_4 \cos \theta = 0 \quad (2)$$

$(1) \Rightarrow T_3 = T_4$ et dans (2) on obtient $T_1 = T_2$

Conclusion :

Lorsqu'il n'y a pas de charge extérieure à un nœud à quatre barres colinéaires deux à deux, les actions colinéaires sont opposées deux à deux.

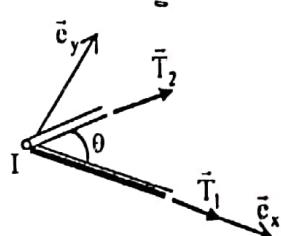
c) Nœud non chargé à deux barres non colinéaires

$$T.R.S : \bar{T}_1 + \bar{T}_2 = \bar{0}$$

$$(T.R.S) \bullet \vec{e}_y : -T_2 \sin \theta = 0 \quad (1)$$

$$(T.R.S) \bullet \vec{e}_x : -T_1 - T_2 \cos \theta = 0 \quad (2)$$

$(1) \Rightarrow T_2 = 0$ et dans (2) on obtient $T_1 = 0$



Conclusion :

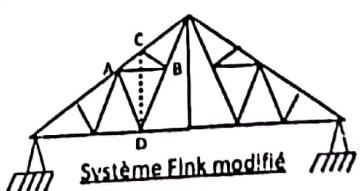
Lorsqu'il n'y a pas de charge extérieure à un nœud à deux barres non colinéaires, les efforts dans ces barres sont nuls.

d) Les barres de substitution

Il arrive, dans certaines situations, que le tracé des crémonas ne soit pas directement possible.

Afin de rendre possible les tracés, on peut utiliser *une barre de substitution* à la place de deux ou plusieurs barres de la structure initiale ; et dans ce cas, la seule condition à vérifier, c'est que la structure conserve sa rigidité.

Exemple : pour la structure Fink légèrement modifiée ci-dessus, les barres AB et BC peuvent être remplacées par la barre CD, le temps de calculer les actions sur toutes les autres barres.



V-7 Résolution par la méthode des sections (Méthode de Ritter)

a) Intérêt :

La méthode des sections ou méthode de Ritter est avantageuse surtout lorsqu'on recherche une action (éventuellement deux ou trois) s'exerçant dans l'une des barres d'une structure. Mais dès que le nombre d'actions recherchées est élevé, les sections deviennent complexes.

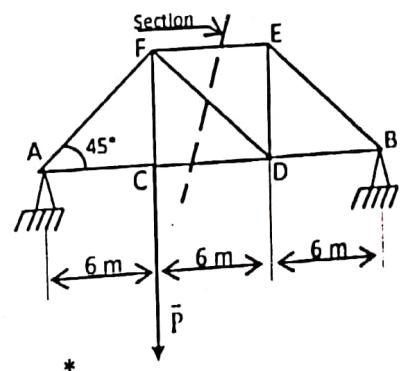
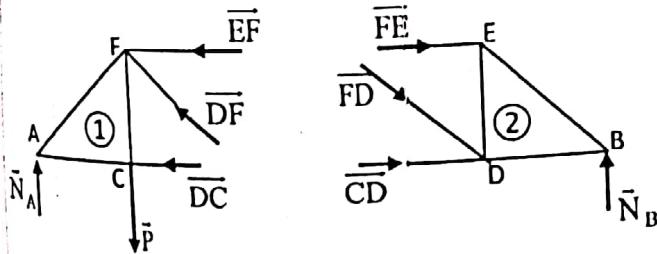
b) Principe de la méthode :

- Effectuer dans la structure une coupure (section) fictive passant par la barre dont on veut déterminer les actions, cette coupure engageant au plus trois barres non sécantes (c.à.d. non concourantes en un même nœud).
- Etudier ensuite l'équilibre des (deux) sous systèmes ainsi obtenus (surtout T.M.S. en un point de concours de deux des trois barres coupées).

c) Exemple :

Soit à déterminer, pour le système ci-contre, l'action exercée dans la barre FD, l'étude de l'équilibre de l'ensemble, avec $P = 18 \text{ kN}$, ayant donné les réactions verticales $N_A = 12 \text{ kN}$ $N_B = 6 \text{ kN}$.

- Une section oblique fictive coupant les barres FE, FD et CD, non sécantes divise la structure en deux sous-systèmes :



Le système ① subit l'action de cinq forces extérieures : \bar{N}_A et \bar{P} qui sont entièrement connues et \bar{DF} , \bar{EF} et \bar{DC} dont les directions sont connues.

* Le système ② subit l'action de 4 forces extérieures : \bar{N}_B qui est entièrement connue et \bar{FE} , \bar{FD} et \bar{CD} dont les directions sont connues.

Dans les deux sous-systèmes, on est en présence de trois modules inconnus, la résolution est bien possible. Et dans le cas de la résolution graphique, on utilisera absolument la méthode de Cullman (confère paragraphe IV-2-b).

Pour la résolution, en constatant que le système deux ② a moins de forces extérieures, on le choisira pour une résolution plus facile.

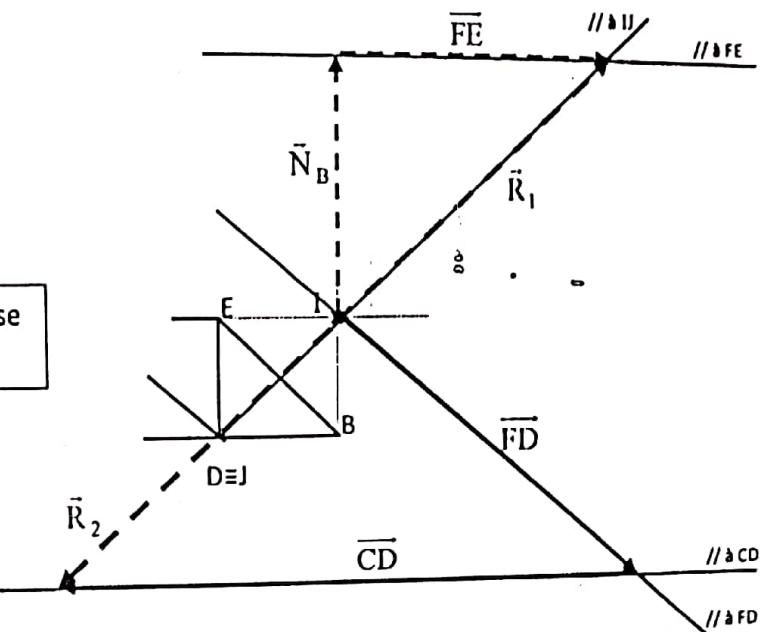
$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{N_B} = \overrightarrow{R}_1 & \text{appliqué en I (point de concours)} \\ \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{R}_2 & \text{appliqué en J=D (point de concours)} \end{cases}$$

Et $\overrightarrow{R}_2 = -\overrightarrow{R}_1$ ceci implique que les deux sont dirigées suivant la droite (IJ) et opposées entre eux

Il vient que la barre FD est soumise à une compression de 8,5 kN.

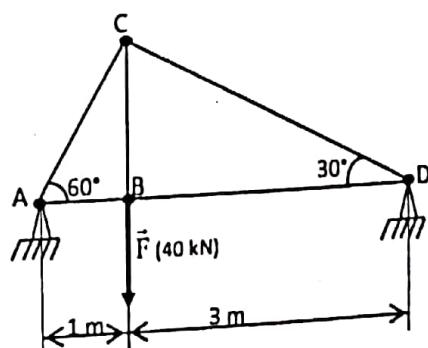
N.B : le polygone des forces permet d'obtenir aussi directement

$$\|\overrightarrow{DC}\| = 2\|\overrightarrow{FE}\| = 12 \text{ kN}$$

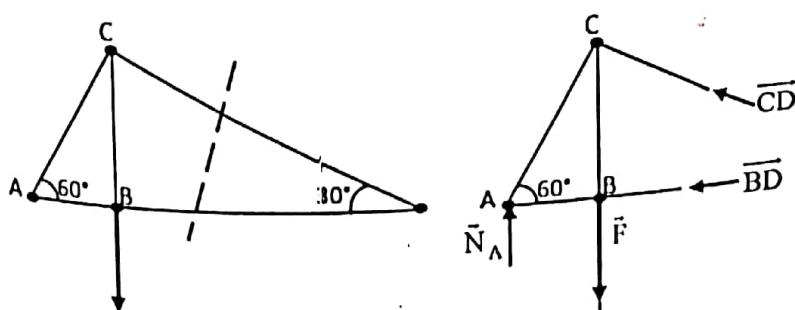


d) Exercice d'application :

Utiliser la méthode des sections pour retrouver les résultats obtenus avec la méthode des nœuds et des crémonas sur la structure ci-contre.

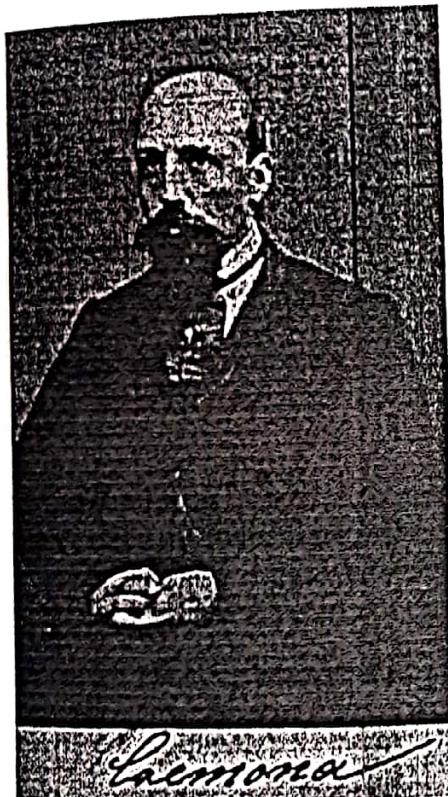


La recherche de l'action dans la barre CD conduit à la section ci-dessous (à gauche) et l'isolement du sous-système 1 ci-après (à droite).



Trois modules inconnus ; ceci privilégie la méthode de Cullman

VI- Luigi Cremona - Biographie



Luigi Cremona, (Pavie, 7décembre1830 - Rome, 10juin1903 (à 72 ans)), est un mathématicien et homme politique italien.

Sa réputation est bâtie principalement sur son *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* (*Introduction d'une théorie géométrique des courbes planes*). Il a enrichi notablement la connaissance des courbes algébriques et des surfaces algébriques. Il a également donné son nom à l'épure de Cremona utilisée en statique graphique pour déterminer les efforts dans une structure triangulée. Parmi ses nombreux élèves figurent Eugenio Bertini, Giuseppe Veronese (en), Giovanni Battista Guccia.

Luigi Cremona est devenu membre étranger de la Royal Society le 3 avril 1879.

Un cratère lunaire porte son nom.

Franc-maçon, en 1866 il est parmi les fondateurs de la loge "Felsinea" de Bologne, dont il a été le premier Vénérable Maître, avec Giosuè Carducci comme secrétaire¹.

Notes et références:

1. ↑V. Gnocchini, *L'Italia dei Liberi Muratori*, Mimesis-Erasmo, Milano-Roma, 2005 pp.86-87.

Chapitre 7 HYPERSTATISME ET MOBILITE DES MECANISMES

La maîtrise du comportement d'un mécanisme (par exemple afin d'obtenir une certaine précision de mise en position d'une pièce par rapport à une autre, ou d'éviter une usure prématuée, un coincement ou un montage irréaliste) impose de connaître avec précision la position relative de chaque liaison, mais aussi et surtout les torseurs d'action mécanique transmissible correspondants.

Il s'avère donc important, pour un mécanisme (à dimensionner) donné :

- d'identifier (localiser), quand elles existent, les inconnues de liaison qu'on ne peut déterminer par application du Principe Fondamental de la Statique (ou du Principe Fondamental de la Dynamique) à ce mécanisme (ce sont des inconnues hyperstatiques)
- de pouvoir proposer, éventuellement, des modifications pour rendre le mécanisme isostatique (c'est-à-dire sans inconnues hyperstatiques)
- et de savoir (déterminer), à quelles conditions géométriques de position relative des liaisons, correspondent les inconnues hyperstatiques. C'est ce que nous visons dans ce chapitre.

I- HYPOTHESES

Pour simplifier notre étude, nous allons supposer que :

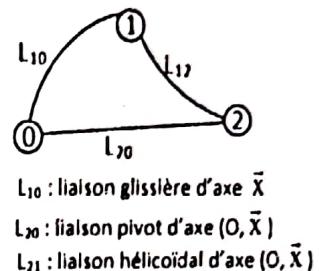
- 1- Les pièces du mécanisme sont modélisées par des solides indéformables
- 2- Les liaisons rencontrées (étudiées) sont sans frottement.
- 3- Ces liaisons sont à contact bilatéral, c'est-à-dire ce contact est supposé maintenu si le sens des actions mécaniques est inversé. Cette hypothèse concerne essentiellement les liaisons ponctuelle, linéaire rectiligne et appui-plan.
- 4- Toutes les pièces du mécanisme sont de masse négligeable c'est-à-dire, les effets d'inertie étant nuls, on pourra écrire pour tout sous-ensemble (e) de pièces d'un mécanisme :
$$[F_{e/e}] = [0]$$

II- GRAPHE DES LIAISONS ET SCHEMA CINEMATIQUE D'UN MECANISME

Pour illustrer notre travail, nous considérons le système de commande en translation d'une table. Il est constitué de la table (S_1), animée d'un mouvement de translation rectiligne d'axe \bar{x} par rapport au bâti fixe (S_0), et d'une vis (S_2) en liaison pivot d'axe (O, \bar{x}) avec le bâti, la table et la vis ayant entre eux une liaison glissière hélicoïdale, d'axe (O, \bar{x}) .

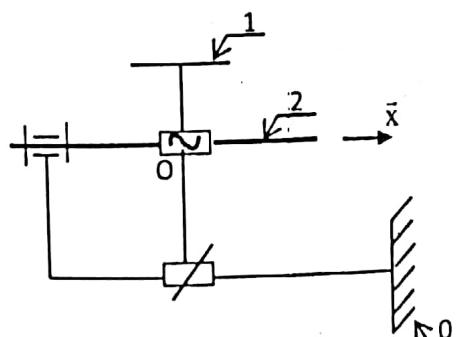
II-1 Graph de liaisons (du mécanisme)

C'est un schéma où les solides (S_1), (S_2), etc., sont représentés, chacun, par son indice numérique encerclé, et où les liaisons sont indiquées par des segments de droite ou courbe, au dessus desquels est marquée la lettre L majuscule indicée par les solides (S_i) ; une nomenclature indique à proximité du graphe, les différents types de liaison, comme sur la figure ci-contre représentant le graphe des liaisons de notre système de commande de la table.



Graphe des liaisons

II-2 Schéma cinématique (du mécanisme)



Il permet de visualiser les mouvements relatifs des pièces principales d'un mécanisme ; les liaisons y sont représentées par leur « représentation schématique ».

N.B. : on peut obtenir le schéma cinématique à partir du graphe des liaisons et réciproquement.

La figure ci-contre montre le schéma cinématique de notre mécanisme de commande en translation de la table.

III- DUALITE ENTRE TORSEUR D'ACTION MECANIQUE TRANSMISSIBLE ET TORSEUR CINEMATIQUE D'UNE LIAISON.

III-1 INCONNUES DE LIAISON ET INCONNUES CINEMATIQUES

Si on note, comme suit, le torseur d'action mécanique transmissible et d'une liaison L_i entre deux solides (S_1) et (S_2), dans le repère local $R_i(O_i, \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ associé à cette liaison :

$$[F_i] = \begin{Bmatrix} \bar{R}_i \\ \bar{m}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_i & L_i \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{Bmatrix}_{(R_i)}$$

On sait que, suivant la nature de la liaison L_i , certaines coordonnées plückériennes du torseur $[F_i]$ seront nulles ou liées entre elles par des relations algébriques. Par exemple, si L_i est une liaison appui plan de normale \bar{x}_i , on a $Y_i = Z_i = 0$ et $L_i = 0$ alors que si elle est plutôt une liaison hélicoïdale d'axe (O_i, \bar{x}_i) , ce sera $L_i = -pX_i$ (hélice à droite).

Alors (définition) : les coordonnées plückériennes $X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i$ non nulles (du torseur des actions mécaniques) sont appelées *inconnues de liaison* de la liaison L_i . On note n_s = nombre d'inconnues de liaison.

n_s = nombre d'inconnues de liaison indépendantes.

De même, si on définit au point O_i , le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) : la liaison L_i autorise, par :

$$[v_{i2/1}] = \begin{Bmatrix} \bar{\Omega}_{i2/1} \\ \bar{v}_{0,i2/1} \end{Bmatrix} \equiv [v_i] = \begin{Bmatrix} \bar{\Omega}_i \\ \bar{v}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_{xi} & v_{xi} \\ \Omega_{yi} & v_{yi} \\ \Omega_{zi} & v_{zi} \end{Bmatrix}_{(R_i)}$$

Suivant la nature de la liaison L_i , certaines coordonnées plückériennes du torseur $[v_i]$ sont nulles ou liées entre elles par des relations algébriques. On définit alors comme *inconnues cinématiques* de la liaison L_i , les coordonnées plückériennes non nulles du torseur cinématique de la liaison L_i .

On note respectivement par n_c et n_{ci} le nombre d'inconnues cinématiques et le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes de la liaison i .

III-2 DUALITE ENTRE LES TORSEURS CINEMATIQUE ET D'ACTION MECANIQUE TRANSMISSIBLE

a) Puissance des actions mutuelles d'une liaison

On montre en Dynamique que la puissance des actions mutuelles d'une liaison se met sous la forme de la partie duale du produit scalaire des torseurs d'actions mécaniques et cinématique : $\text{dual}([F] \cdot [M])$ (c.à.d. comment des deux torseurs).

Pour la liaison L_i , on aura donc comme puissance des actions mutuelles : $\text{com}([\mathcal{F}_i], [\mathcal{V}_i])$.

b) Equation algébrique de liaison

Lorsque le frottement est négligé dans une liaison, on montre en Dynamique que la puissance des actions mutuelles de la liaison est nulle.

Ainsi, pour une liaison L_i , de torseurs $[\mathcal{F}_i]_{O_i} = \begin{Bmatrix} X_i & L_i \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{Bmatrix}_{(R_i)}$ et $[\mathcal{V}_i]_{O_i} = \begin{Bmatrix} \Omega_{X_i} & V_{X_i} \\ \Omega_{Y_i} & V_{Y_i} \\ \Omega_{Z_i} & V_{Z_i} \end{Bmatrix}_{(R_i)}$, les

inconnues de liaison et les inconnues cinématiques vérifient l'*équation algébrique de liaison* :

$$X_i V_{X_i} + Y_i V_{Y_i} + Z_i V_{Z_i} + L_i \Omega_{X_i} + M_i \Omega_{Y_i} + N_i \Omega_{Z_i} = 0 \quad (1)$$

c) Relation de dualité entre coordonnées plückériennes des torseurs $[\mathcal{F}]$ et $[\mathcal{V}]$

L'absence de frottement sur la liaison impose l'équation algébrique de liaison (1), quel que soit le mouvement relatif entre les pièces, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs que peuvent prendre les coordonnées plückériennes du torseur cinématique.

Ceci conduit à la nullité, dans l'équation (1), des termes en facteur avec les inconnues de liaison (coordonnées plückériennes non nulles du torseur d'action mécanique transmissible).

Ainsi par exemple, pour une liaison appui plan, $Y_i = Z_i = 0$ et $L_i = 0$ qui doit être vérifié en particulier pour les mouvements relatifs ci-dessous :

- $(\Omega_{Y_i} = \Omega_{Z_i} = 0) \Rightarrow V_{X_i} = 0$ (donc $V_{Y_i} \neq 0$; $V_{Z_i} \neq 0$)
- $(V_{X_i} = 0 \text{ et } \Omega_{Z_i} = 0) \Rightarrow \Omega_{Y_i} = 0 \}$ (donc $\Omega_{X_i} \neq 0$)
- $(V_{X_i} = 0 \text{ et } \Omega_{Y_i} = 0) \Rightarrow \Omega_{Z_i} = 0 \}$

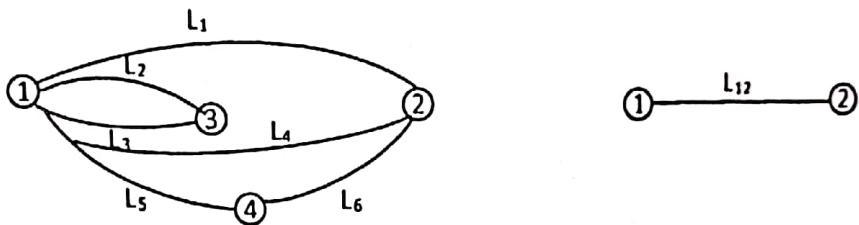
Ainsi, aux termes (coordonnées plückériennes) non nuls du torseur d'action mécanique, correspondent des termes nuls en dual (résultante et moment permutés) du torseur cinématique, et aux termes nuls des termes non nuls, et vice-versa. C'est la dualité entre les deux torseurs $[\mathcal{F}]$ et $[\mathcal{V}]$.

IV- LIAISON EQUIVALENTE

L'obtention du schéma cinématique minimal nécessite la réalisation du graphe des liaisons minimales ; or ce dernier est obtenu en remplaçant, par des liaisons équivalentes, les liaisons placées en parallèle ou en série entre les pièces principales du mécanisme étudié.

IV-1 Définition

S'il existe, entre deux solides (S_1) et (S_2), plusieurs liaisons L_i réalisées avec ou sans pièces intermédiaires, la liaison équivalente à l'ensemble de ces liaisons (situées entre (S_1) et (S_2)) est la liaison théorique de référence L_{12} qui a le même comportement que cette association de liaisons, c'est-à-dire qui autorise le même mouvement et transmet la même action mécanique.



Pour la détermination du torseur d'action mécanique transmissible de la liaison cinématique équivalente aux liaisons placées en parallèle ou en série entre (S_1) et (S_2), on supposera ces liaisons sans frottement et les pièces intermédiaires de masses négligeables.

IV-2 Notations

✓ Le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison L_i sera noté dans le repère local associé à la liaison, $R_i(O_i; \bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$:

$$[F_i] = \begin{Bmatrix} \bar{R}_i \\ \bar{m}_{iO_i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_i & L_i \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{Bmatrix}_{(R_i)}$$

✓ Le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison cinématique équivalente aux liaisons placées entre les solides (S_1) et (S_2), dans un repère $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ à définir, est noté :

$$[F] = \begin{Bmatrix} \bar{R} \\ \bar{m}_O \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{(R)}$$

Remarque : Parfois il est nécessaire de préciser de quelle action mécanique il s'agit entre deux solides en présence.

IV-3 Association de liaisons en parallèle

Supposons qu'il existe n liaisons, disposées en parallèle, entre deux solides (S_1) et (S_2) et que, en plus de l'action mécanique due à ces n liaisons, il s'exerce sur le solide (S_2) une action mécanique extérieure représentée par un torseur $[F_0]$.

Le principe fondamental de la statique (P.F.S) implique

$$\sum_{i=1}^n [F_i] + [F_0] = [0] \text{ pour les } n \text{ liaisons ; mais avec la liaison } \textcircled{1} \text{ équivalente, le principe fondamental de la statique (P.F.S) s'écrit : } [F] + [F_0] = [0]$$

On en déduit l'expression du torseur d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente, en fonction des torseurs des n liaisons en parallèle :

$$[F] = \sum_{i=1}^n [F_i]$$

Ainsi, le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente à n liaisons en parallèle est la somme des torseurs d'action mécanique transmissible de chacune des liaisons :

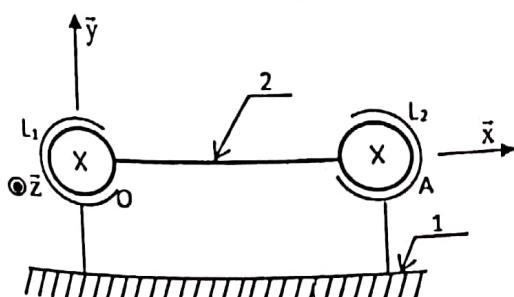
$$[F]_{\text{parallèle}} = \sum_{i=1}^n [F_i]$$

Le principe de dualité conduit, pour le torseur cinématique équivalent, à :

$$[v]_{\text{parallèle}} = [v_i] \quad \forall i$$

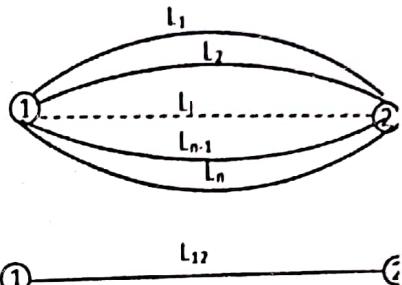
Exemple :

Soit le dispositif ci-dessous, dans lequel le solide (S_2) a deux liaisons en parallèle avec (S_1) :



- L_1 : liaison rotule de centre O
- L_2 : liaison rotule de centre A tel que $\overline{OA} = d \cdot \bar{x}$ avec $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un repère lié à (S_1).

On veut déterminer le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente aux deux liaisons rotule disposées en parallèle entre (S_1) et (S_2).



Le torseur dû à L_1 s'écrit : $[F_1] = \begin{Bmatrix} X_1 & 0 \\ Y_1 & 0 \\ Z_1 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(R)}$

Celui dû à L_2 s'écrit : $[F_2] = \begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{Bmatrix}_{A,(R)}$

Le torseur équivalent recherché, dû à L_{12} , est de la forme suivante au point O :

$$[F] = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{O,(R)}$$

Afin d'effectuer $[F] = \sum_{i=1}^{n-2} \{F_i\}$ ramenons les deux torseurs dus à L_1 et L_2 au même point,

soit à O par exemple.

$$\text{On sait } \bar{m}_0 = \bar{m}_A + \overrightarrow{OA} \wedge \bar{R}_i$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_{0,2} &= \bar{m}_{A,2} + \overrightarrow{OA} \wedge \bar{R}_2 = \overrightarrow{OA} \wedge \bar{R}_2 = d \cdot \bar{x} \wedge (X_2 \bar{x} + Y_2 \bar{y} + Z_2 \bar{z}) \\ &= Y_2 d \bar{z} - Z_2 d \bar{y} \end{aligned}$$

$$\rightarrow [F_2] = \begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ Y_2 & -Z_2 d \\ Z_2 & Y_2 d \end{Bmatrix}_{O,(R)} ; \text{ or } [F_1] = \begin{Bmatrix} X_1 & 0 \\ Y_1 & 0 \\ Z_1 & 0 \end{Bmatrix}_{O,(R)}$$

$$\text{D'où } [F] = \begin{Bmatrix} X_1 + X_2 & 0 \\ Y_1 + Y_2 & -Z_2 d \\ Z_1 + Z_2 & Y_2 d \end{Bmatrix}_{O,(R)} \text{ qui est de la forme :}$$

$$[F] = \boxed{\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_{O,(R)}}$$

C'est le torseur d'action mécanique d'une liaison pivot d'axe (O, \bar{x}) .

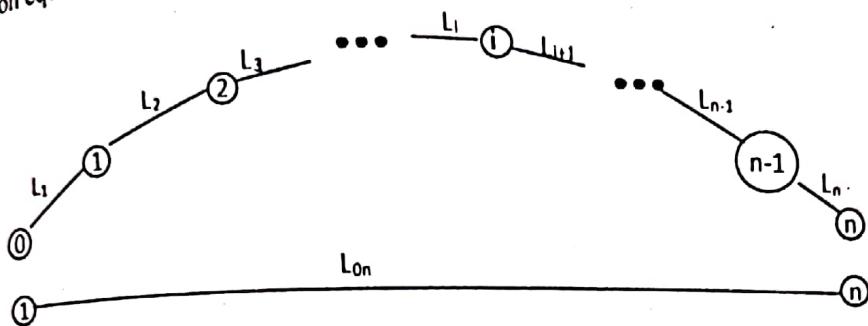
L_{12} , liaison équivalente, est donc une liaison pivot d'axe (O, \bar{x}) .

Remarque : Comme on a supposé qu'il n'y a pas de frottement sur les liaisons, on vérifie que le produit (en fait, le comoment) des torseurs cinématique et d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente est nul !

IV-4 Association de liaisons en série

Si n liaisons L_i reliant deux solides, sont disposées à la suite l'une de l'autre par l'intermédiaire de $n-1$ autres solides, on dit que les n liaisons sont disposées en série.

L'action mécanique du solide (S_{i-1}) sur (S_i) est représentée par la liaison L_i , de torseur d'action mécanique transmissible $[F_i]$; le torseur d'action mécanique transmissible de la liaison équivalente L_{0n} est noté $[F]$



Pour obtenir $[F]$, on applique le principe fondamental de la statique (PFS) à chaque solide intermédiaire, en supposant qu'aucune autre action mécanique extérieure ne s'y exerce :

$$[F_i] - [F_{i+1}] = [0]$$

C'est-à-dire $[F_i] = [F_{i+1}]$. Ce qui montre que les torseurs d'action mécanique transmissible des liaisons L_i en série sont égaux. On en déduit que le torseur d'action mécanique transmissible $[F]$ de la liaison équivalente vérifie :

$$[F]_{\text{série}} = [F_i] \quad \forall i$$

Remarque: les composantes du torseur d'action mécanique transmissibles de la liaison équivalente sont celles qui sont transmissibles par toutes les liaisons en série.

D'autre part, le principe de la dualité conduit le torseur cinématique de la liaison équivalente à être la somme des torseurs cinématiques de chacune des liaisons :

$$[v]_{\text{série}} = \sum_{i=1}^n [v_i]$$

Exemple : liaisons plane et rotule en série.

Soit $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ lié à (S_1). On a les liaisons :

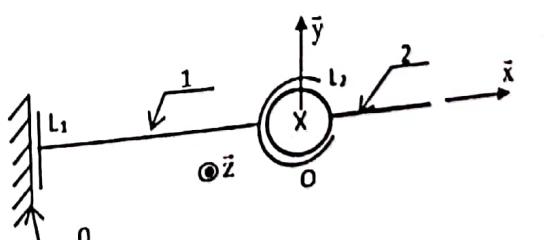
L_1 : liaison plane normale \bar{x}

L_2 : liaison rotule de centre O

Ainsi :

$$\bullet \quad [F_i] = \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & M_i \\ 0 & N_i \end{pmatrix}_{O,(R)} \quad \text{torseur d'action mécanique transmissible de la liaison rotule } L_i$$

écrit au point O (en fait en tout point de l'axe), dans la base $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.



La dualité entre les torseurs $[F]$ et $[v]$ d'une liaison permet d'écrire (puissance nulle quel que soit le mouvement): $n_{C_i} + n_{S_i} = 6$, relation vérifiée pour les différentes liaisons déjà rencontrées, par exemple,

Liaison appui plan : de normale \bar{x}

$$[F] = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & M \\ 0 & N \end{pmatrix} \quad [v] = \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & v_y \\ 0 & v_z \end{pmatrix}$$

$$n_{S_i} = 3 \quad n_{C_i} = 3 \quad \rightarrow n_{S_i} + n_{C_i} = 6$$

Liaison pivot glissant

$$[F] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix} \quad [v] = \begin{pmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$n_{S_i} = 4 \quad n_{C_i} = 2 \quad \rightarrow n_{S_i} + n_{C_i} = 6$$

V- STRUCTURE DES MECANISMES

La structure des mécanismes est représentée par les graphes de liaisons qui permettent de classer les mécanismes en trois catégories, selon que les solides constituent entre eux :

- Une chaîne ouverte
- Une chaîne fermée simple
- Une chaîne fermée complexe.

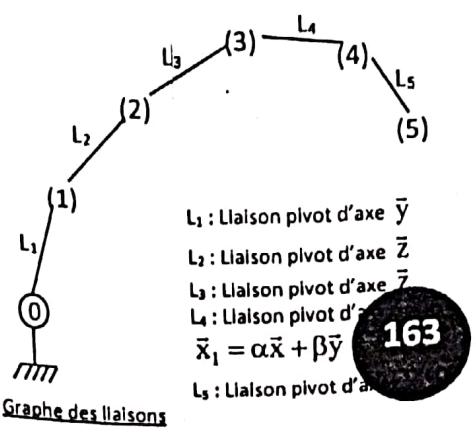
V-1 Mécanisme en chaîne ouverte

a) Définition :

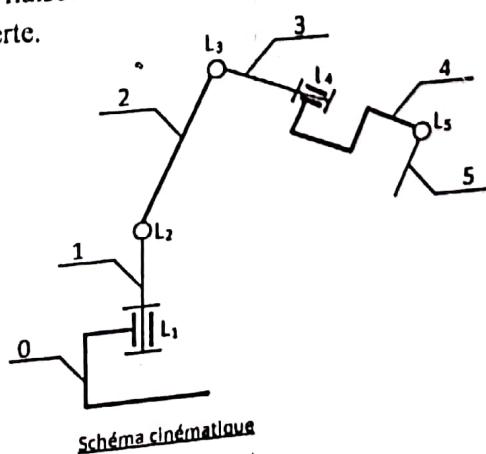
Un mécanisme en chaîne ouverte (on dit aussi simplement : une chaîne ouverte) est constitué par $n+1$ solides assemblés par n liaisons en série.

b) Application :

Une pelleuse de chantier, dont le graphe des liaisons et le schéma cinématique sont représentés ci-dessous est un mécanisme à chaîne ouverte.

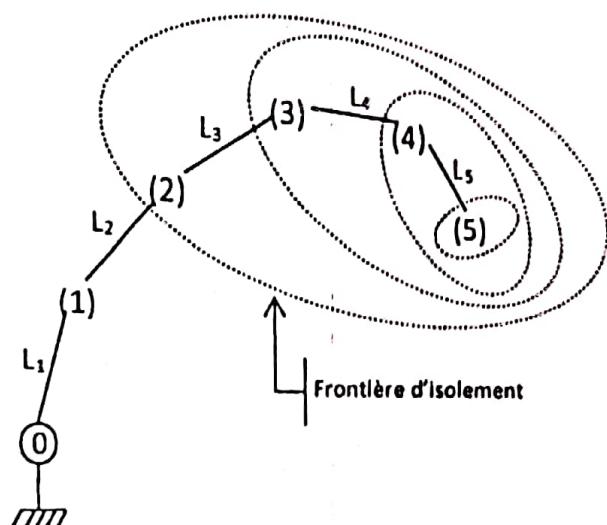


L_1 : Liaison pivot d'axe \bar{y}
 L_2 : Liaison pivot d'axe \bar{Z}
 L_3 : Liaison pivot d'axe \bar{Z}
 L_4 : Liaison pivot d'
 $\bar{x}_1 = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$
 L_5 : Liaison pivot d'
163



c) *Remarque :*

La résolution d'un mécanisme en chaîne ouverte, dans le but de déterminer les torseurs d'action mécanique transmissible des différentes liaisons, en fonction des actions mécaniques extérieures (au mécanisme), s'effectue en isolant successivement un solide, puis deux solides, puis trois, etc., à partir de l'extrémité libre de la chaîne ouverte (c'est-à-dire l'extrémité non reliée au bâti du mécanisme).



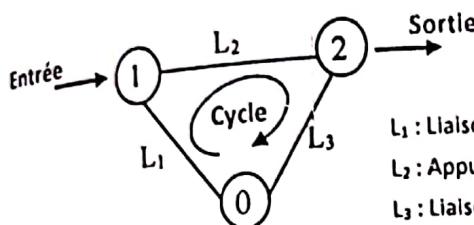
V.2 Mécanisme en chaîne fermée simple

a)- *Définition :*

Lorsque les solides extrêmes d'un assemblage en série de $n+1$ solides ont une liaison, la chaîne cinématique ainsi constituée est fermée et simple. Le mécanisme est dit à chaîne fermée simple.

b)- *Application :*

Le réducteur à train d'engrenages, dont ce graphe de liaisons et le schéma cinématique sont représentés ci-dessous est un mécanisme à chaîne fermée simple.



Graphe des liaisons

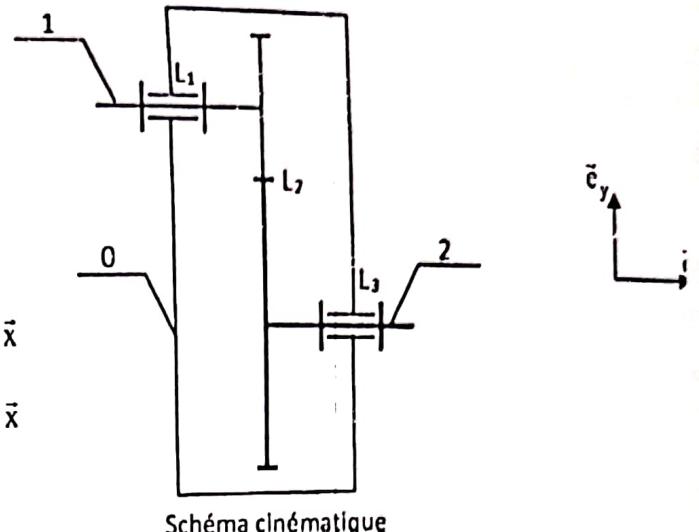


Schéma cinématique

c)- *Remarque :*

- Une chaîne fermée est aussi appelée *cycle* ou *boucle*
- En chaîne fermée simple, on a $n+1$ liaisons entre $n+1$ solides en série.

V-3 Mécanisme en chaîne fermée complexe

a)- *Définition :*

Lorsque la chaîne cinématique d'un mécanisme est constituée d'au moins deux chaînes fermées simples imbriquées entre elles, on est en présence d'un mécanisme à chaîne fermée complexe.

b)- *Application :*

La réducteur à train épicycloïdal, dont le graphe de liaison et le schéma cinématique sont représentés ci-dessous est un mécanisme à deux chaînes fermées simples imbriquées ; c'est un mécanisme à chaîne fermée complexe.

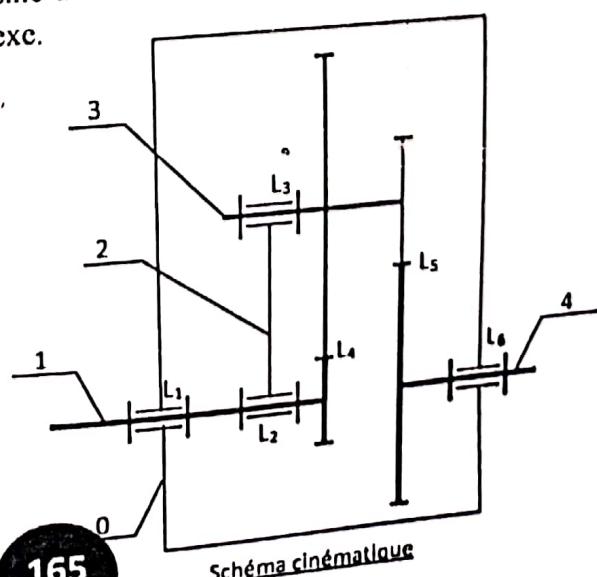
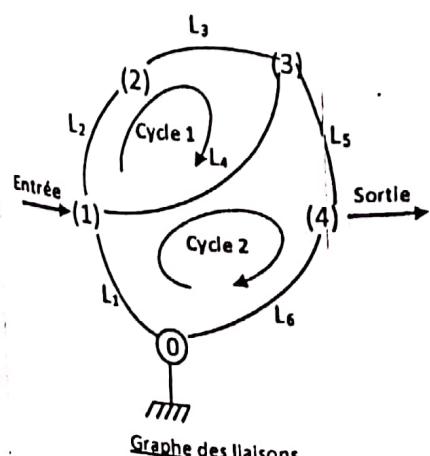


Schéma cinématique

Remarque :

Les mécanismes de transformation de mouvements sont généralement représentés par des chaînes fermées à un ou plusieurs cycles ; et dans ces mécanismes, le mouvement de la pièce d'entrée impose celui de la pièce de sortie.

La théorie des graphes donne le nombre γ de cycles indépendants d'une chaîne fermée complexe par la relation : $\gamma = L - N + 1$ où L est le nombre de liaisons et N le nombre de solides. (pour le train épicycloïdal ci-dessus : $L = 6$ et $N = 5 \rightarrow \gamma = 2$)

VI- DEGRE D'HYPERSTATISME D'UN MECANISME

VI-1 Système d'équations linéaires d'action mécanique d'un mécanisme

Lorsque, pour un mécanisme donné, on désigne par :

N : le nombre de solides (bâti compris) constituant le mécanisme

L : le nombre de liaisons L_i (supposées sans frottement) entre ces solides

n_{si} : le nombre d'inconnues de liaison indépendantes (du torseur d'action mécanique transmissible) de la liaison L_i .

On obtient, pour l'ensemble des liaisons du mécanisme :

$$I_s = \sum_{i=1}^L n_{si} \text{ inconnues de liaison ;}$$

L'application systématique du Principe Fondamental de la Statique (P.F.S) à chaque solide, sauf le bâti pour lequel on ne recherche pas l'action mécanique de son support, permet d'obtenir

$E_s = 6(N - 1)$ équations algébriques qui constituent le *système d'équations linéaires d'action mécanique* du mécanisme.

VI-2 Inconnues isostatiques et Inconnues hyperstatiques d'un mécanisme

Le système d'équations linéaires d'action mécanique du mécanisme est un système de E_s équations à I_s inconnues, qu'on peut écrire sous la forme matricielle :

$$[A][X]=[B]$$

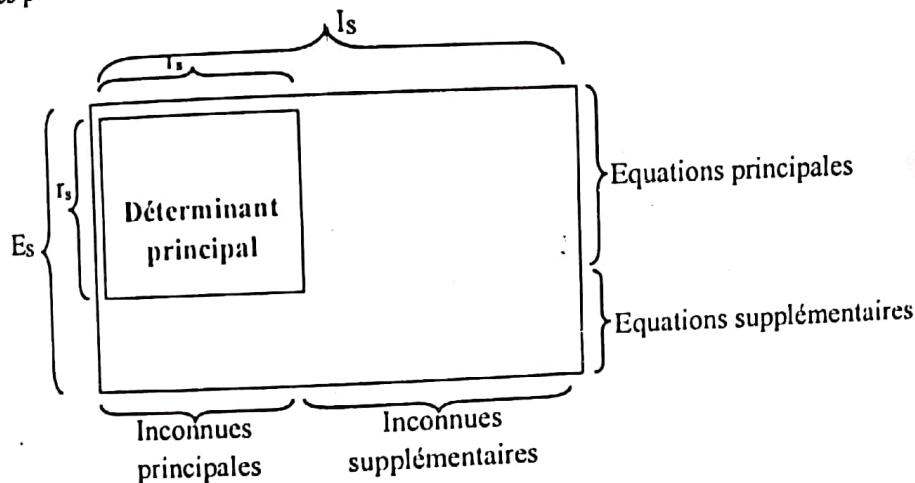
Où : $[A]$ est une matrice (rectangulaire : E_s lignes, I_s colonnes ; généralement $I_s \geq E_s$) appelée *matrice des coefficients géométriques* du mécanisme.

$[X]$ est une matrice unicolonne, appelée *matrice des inconnues de liaison*

$[B]$ est une matrice unicolonne, appelée *matrice des actions mécaniques extérieures*

Le rang r_s du système d'équations considéré, c'est-à-dire l'ordre du déterminant principal de $[A]$, indique le nombre d'équations indépendantes.

On peut donc ranger les r_s équations principales (issus du déterminant principal) dans les premières lignes du système d'équations et ranger les r_s inconnues correspondantes dans les premières colonnes ; la matrice $[A]$ peut ainsi être schématisée comme suit :



Les inconnues de liaison principales sont appelées *inconnues isostatiques* du mécanisme et les autres, supplémentaires, sont dites *inconnues hyperstatiques* du mécanisme.

Remarque :

- Il y a ainsi :

$E_s - r_s$ équations supplémentaires

$I_s - r_s$ inconnues supplémentaires

- On peut donc déterminer (calculer) r_s inconnues de liaisons (inconnues principales ou isostatiques) en fonction de $I_s - r_s$ autres inconnues de liaisons (inconnues supplémentaires ou hyperstatiques) à priori quelconques (c'est-à-dire choisir arbitrairement.)

VI-3 Définition du degré d'hyperstatisme d'un mécanisme

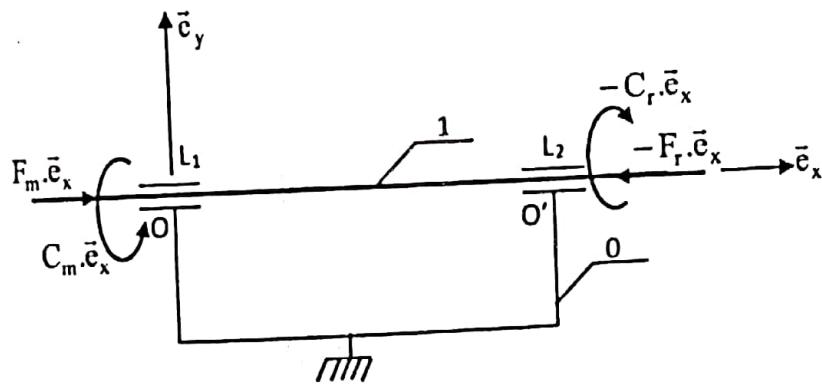
Le degré d'hyperstatisme h d'un mécanisme est la différence entre les nombres I_s d'inconnues de liaison et r_s de relations indépendantes entre ces inconnues :

$$h = l_s - r_s$$

Ainsi :
 $h = 0$ le mécanisme est isostatique
 $h > 0$ le mécanisme est hyperstatique de degré h

VI-4 Application : Réalisation d'une liaison pivot glissant entre un arbre et un bâti

Soit un arbre (S_1), d'axe (O, \vec{e}_x) , monté dans un bâti (S_0) par l'intermédiaire de deux liaisons pivot glissants, situées aux extrémités O et O' de l'arbre. $\overrightarrow{OO'} = d \cdot \vec{e}_x$



- L'action mécanique de (S_0) sur (S_1) , au niveau des deux liaisons pivot L_1 et L_2 est

définie par les deux torseurs : $[F_{1,0/1}]_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}$ et $[F_{2,0/1}]_{O'} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_2 & M_2 \\ Z_2 & N_2 \end{Bmatrix}$

Ces deux liaisons introduisent ainsi $I_s = n_{S_1} + n_{S_2} = 4 + 4 = 8$ inconnues de liaison

- On suppose qu'en plus des actions mécaniques dans les liaisons, il s'exerce sur (S_1) deux actions mécaniques extérieures connues définies par les torseurs :

$$[F_{\text{moteur}/1}]_O = \begin{Bmatrix} F_m & C_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{ et } [F_{\text{réception}/1}]_{O'} = \begin{Bmatrix} -F_r & -C_r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Par conséquent, le Principe Fondamental de la Statique (P.F.S) appliqué à (S_1) , au point O , conduit aux six équations scalaires suivantes (Nota : on a ramené tous les torseurs en O avant d'appliquer le P.S.F.) :

$$\begin{cases} 0 \cdot Y_1 + 0 \cdot Z_1 + 0 \cdot M_1 + 0 \cdot N_1 + 0 \cdot Y_2 + 0 \cdot Z_2 + 0 \cdot M_2 + 0 \cdot N_2 = F_m - F_r \\ 1 \cdot Y_1 + 0 \cdot Z_1 + 0 \cdot M_1 + 0 \cdot N_1 + 1 \cdot Y_2 + 0 \cdot Z_2 + 0 \cdot M_2 + 0 \cdot N_2 = 0 \\ 0 \cdot Y_1 + 1 \cdot Z_1 + 0 \cdot M_1 + 0 \cdot N_1 + 0 \cdot Y_2 + 1 \cdot Z_2 + 0 \cdot M_2 + 0 \cdot N_2 = 0 \\ 0 \cdot Y_1 + 0 \cdot Z_1 + 0 \cdot M_1 + 0 \cdot N_1 + 0 \cdot Y_2 + 0 \cdot Z_2 + 0 \cdot M_2 + 0 \cdot N_2 = C_m - C_r \\ 0 \cdot Y_1 + 0 \cdot Z_1 + 1 \cdot M_1 + 0 \cdot N_1 + 0 \cdot Y_2 + -d \cdot Z_2 + 1 \cdot M_2 + 0 \cdot N_2 = 0 \\ 0 \cdot Y_1 + 0 \cdot Z_1 + 0 \cdot M_1 + 1 \cdot N_1 + d \cdot Y_2 + 0 \cdot Z_2 + 0 \cdot M_2 + 1 \cdot N_2 = 0 \end{cases}$$

Qu'on peut présenter sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -d & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \\ M_1 \\ N_1 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ M_2 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m - F_r \\ 0 \\ 0 \\ C_m - C_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -d & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [A] \equiv \text{matrice des coefficients géométriques}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \\ M_1 \\ N_1 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ M_2 \\ N_2 \end{bmatrix} = [X] \equiv \text{matrice des inconnues de liaison}$$

$$\begin{bmatrix} F_m - F_r \\ 0 \\ 0 \\ C_m - C_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [B] \equiv \text{matrice des actions mécaniques extérieures}$$

Remarque :

Les première et quatrième ligne de la matrice [A] sont nulles. Ceci implique que le déterminant principal est d'ordre quatre au maximum.
En renvoyant les deux équations nulles à la fin, on obtient le premier mineur d'ordre

quatre $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de déterminant non nul. La matrice [A] des coefficients géométriques du mécanisme est bien d'ordre $r_s = 4$.

Le système est alors hyperstatique de degré $h = l_s - r_s = 8 - 4 = 4$

Si on choisit arbitrairement, comme inconnues hyperstatiques, les inconnues de la liaison L_2 , notre forme matricielle devient :

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -d & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} Y_1 \\ Z_1 \\ M_1 \\ N_1 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ M_2 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_m - F_r \\ C_m - C_r \end{bmatrix}$$

Remarques :

- les inconnues principales (inconnues isostatiques) du mécanisme sont Y_1, Z_1, M_1 et N_1
- les inconnues supplémentaires (inconnues hyperstatiques) sont Y_2, Z_2, M_2 et N_2
- les deux ($E_s - r_s = 6(2 - 1) - 4 = 6 - 4$) équations supplémentaires expriment des relations entre les actions mécaniques extérieures au mécanisme pour que ce dernier soit en équilibre : $F_m = F_r$ et $C_m = C_r$
- le nombre d'équations supplémentaires est égal au nombre de degrés de liberté (d.d.l.) du mécanisme.
- Le caractère iso ou hyperstatique d'un mécanisme est indépendant des actions mécaniques extérieures ; il ne dépend que du choix des liaisons et de leur positions relatives dans l'espace (coefficient d par exemple).
- Pour rendre le mécanisme isostatique, tout en conservant des liaisons en O et O' , on peut envisager par exemple de remplacer les deux liaisons pivot glissant par deux liaisons linéaire d'axes (O, \bar{x}) et (O', \bar{x})

VII- DEGRE DE MOBILITE D'UN MECANISME

VII-1 Système d'équations linéaires de la cinématique d'un mécanisme

Lorsque, pour un mécanisme donné, on désigne par :

γ : le nombre de cycles indépendants

L : le nombre de liaisons L_i (supposées sans frottement)

n_{ci} : le nombre d'inconnues cinématiques indépendantes (du torseur cinématique) de la liaison

$L_i; (n_{ci} = 6 - n_s)$

On obtient, pour l'ensemble des liaisons du mécanisme :

$$I_c = \sum_{i=1}^L n_{ci} \text{ inconnues cinématiques.}$$

L'écriture systématique de la fermeture cinématique de chaque cycle, c'est-à-dire une relation de la forme $\sum_i [v_i] = [0]$, permet d'obtenir

$E_c = 6\gamma$ équations algébriques qui constituent le système d'équations linéaires de la cinématique du mécanisme.

VII-2 Inconnues cinématiques principales et inconnues cinématiques supplémentaires d'un mécanisme

Le système d'équations linéaires de la cinématique du mécanisme est un système homogène de E_c équations à I_c inconnues, qu'on peut écrire sous la forme matricielle :

$$[A][X] = [0]$$

Où :

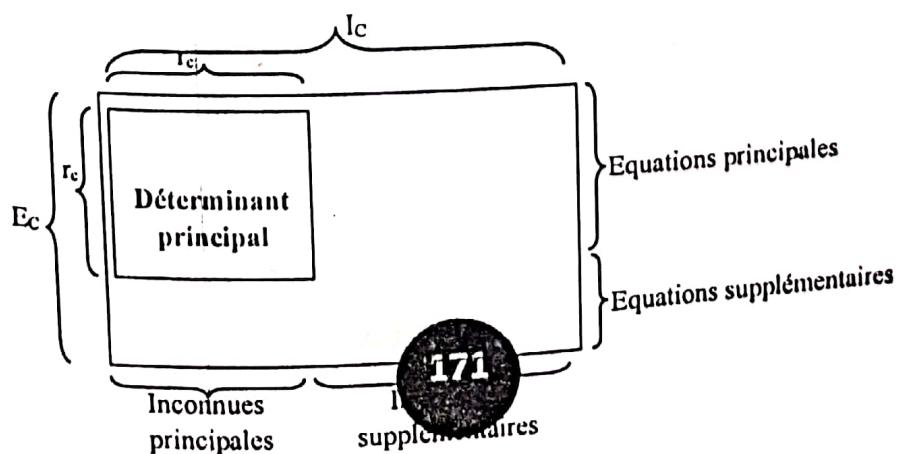
. $[A]$ est la matrice des coefficients géométriques du mécanisme (E_c lignes, I_c colonnes).

. $[X]$ est la matrice unicolonne des *inconnues cinématiques* du mécanisme.

Le rang r_c du système d'équation considéré, c'est-à-dire l'ordre du déterminant principal de $[A]$, indique le nombre d'équations indépendantes.

On peut donc ranger r_c équations principales (issues du déterminant principal) dans les premières lignes du système d'équations, et ranger les r_c inconnues principales correspondantes dans les premières colonnes ; la

les premières colonnes ; la



matrice est alors schématisée par :

Remarque :

- Il y a ainsi :

$E_C - r_C$: équations supplémentaires

$I_C - r_C$: inconnues supplémentaires

- On peut donc déterminer r_C inconnues principales en fonction des $I_C - r_C$ inconnues supplémentaires choisies arbitrairement (mais qu'il faut imposer pour connaître les inconnues principales). Autrement dit, si les $I_C - r_C$ composantes de mouvement sont définies (connues), les autres r_C composantes de mouvement dans les liaisons du mécanisme pourront être déterminées.

VII-3 Définition du degré de mobilité d'un mécanisme.

Le degré de mobilité m d'un mécanisme est la différence entre le nombre I_C d'inconnues cinématiques et r_C de relations indépendantes entre ces inconnues :

$$m = I_C - r_C$$

Ainsi, si :

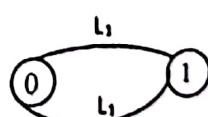
$M = 0$ le mécanisme est **immobile** (ou suivant le cas, la liaison est complète ou rigide)

$M > 0$ le mécanisme est **mobile à m degrés de mobilité** ; pour sa position d'équilibre.

VII-4 Application :

Soit un arbre (S_1) monté dans un bâti (S_0) par l'intermédiaire de deux liaisons pivot glissant d'axes (O, \bar{e}_x) et (O', \bar{e}_x), $\overrightarrow{OO'} = d \cdot \bar{e}_x$
On a le graphe des liaisons ci-contre :

- D'où $\gamma = 1$ cycle ou boucle.



L1 : pivot glissant d'axe (O, \bar{e}_x)

L2 : pivot glissant d'axe (O', \bar{e}_x)

• Dans la base $(\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ on a les deux torseurs cinématiques des liaisons :

$$[v_{1,1/0}] = \begin{Bmatrix} \Omega_{x1} & V_{x1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{ et } [v_{2,0/1}] = \begin{Bmatrix} \Omega_{x2} & V_{x2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow I_C = n_{c1} + n_{c2} = 2 + 2 = 4$ inconnues cinématiques

• La fermeture du cycle s'écrit : $[v_{1,1/0}] + [v_{2,0/1}] = [0]$ et, en réduisant les torseurs au point O, on a les $E_c = 6\gamma = 6 \times 1 = 6$ équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} \Omega_{x1} + \Omega_{x2} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ V_{x1} + V_{x2} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ qu'on met sous la forme } [A][X] = [0]$$

Qu'on peut écrire sous la forme matérielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{x1} \\ V_{x1} \\ \Omega_{x2} \\ V_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrice des inconnues cinématiques

Matrice des coefficients géométriques

Remarques :

* Quatre lignes de la matrice $[A]$ sont nulles ; ceci implique que le déterminant principal est d'ordre deux au maximum.

On vérifie en effet que $r_C = 2$. Ceci implique que le degré de mobilité est $m = I_C - r_C = 4 - 2 = 2$

* En choisissant (arbitrairement) les inconnues cinématiques de la liaison 1,2 comme inconnues supplémentaires, notre système d'équation devient :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{x1} \\ V_{x1} \\ \Omega_{x2} \\ V_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, si on pose Ω_{x2} et V_{x2} , les inconnues principales Ω_{x1} et V_{x1} pourront être déterminées.

VIII- RELATION ENTRE DEGRES D'HYPERSTATISME ET DE MOBILITE

VIII-1 Dualité des études statique et cinématique d'un mécanisme

- Dans l'étude statique, les $E_s - rs$ équations supplémentaires expriment les relations que doivent vérifier les actions mécaniques extérieures au mécanisme, pour que ce dernier soit en équilibre.
- L'application du Théorème de l'Energie Cinétique à la chaîne cinématique du mécanisme, pour une évolution quasi-statique, impose d'écrire que la puissance des actions intérieures est nulle, les liaisons étant sans frottement.

Il vient donc, pour un mécanisme constitué de N solides, l'équation scalaire sous forme abrégée suivante :

$$\sum_{i=1}^l (F_i V_i + m_i \Omega_i) = 0$$

Parmi les composantes V_i ou Ω_i des torseurs cinématiques des liaisons, les m inconnues principales s'obtiennent en fonction des inconnues supplémentaires qui sont en nombre égal au degré de mobilité m du mécanisme.

Conséquence : les composantes V_i et Ω_i peuvent s'exprimer en fonction des m composantes indépendants, notées U_j .

Si on pose : $V_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} U_j$ et $\Omega_i = \sum_{j=1}^m \mu_{ij} U_j$, la puissance des actions mécaniques extérieures devient :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m (F_i \lambda_{ij} + m_i \mu_{ij}) U_j = 0$$

Or cette puissance doit être nulle quelles que soient les composantes U_j ; et pour qu'il en soit ainsi, les m relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^N F_i \lambda_{i1} + m_i \mu_{i1} = 0 \quad (j=1)$$

$$\sum_{i=1}^N F_i \lambda_{i2} + m_i \mu_{i2} = 0 \quad (j=2)$$

$$\sum_{i=1}^N F_i \lambda_{im} + m_i \mu_{im} = 0 \quad (j = m)$$

doivent être vérifiées.

Ces m relations entre les actions mécaniques extérieures sont (exactement) celles données par les $E_s - rs$ équations supplémentaires de l'étude statique.

Il vient donc que le degré de mobilité m du mécanisme est également donné par :

$$m = E_s - r_s$$

Ce qui exprime la dualité (complémentarité) des études statique et cinématique d'un mécanisme.

VIII-2 Relation entre degrés d'hyperstatisme et de mobilité

On a :

- Le degré de mobilité donné par la nouvelle relation $m = E_s - rs$
- Le degré d'hyperstatisme : $h = I_s - rs$
 $\Rightarrow m - h = E_s - I_s \quad (1)$

or $E_s = 6(N - 1)$ N = nombre de solides (bâti compris)

$$I_s = \sum_{i=1}^L n_{s_i} = \sum_{i=1}^L (6 - n_{c_i}) = 6L - \sum_{i=1}^L n_{c_i} = 6L - I_c \quad (\text{car } n_{s_i} + n_{c_i} = 6)$$

$$\Rightarrow m - h = E_s - I_s = 6(N - 1) - (6L - I_c) = I_c - 6[L - N + 1] \\ = I_c - 6\gamma \quad \text{avec} \quad L - N + 1 = \gamma \equiv \text{nombre de cycles}$$

indépendants

N : nombre de solides

L : nombre de liaisons

$$= I_c - E_c$$

$$\text{C'est-à-dire } m - h = I_c - E_c \quad (2)$$

(1) et (2) conduisent ainsi à la *relation entre le degré d'hyperstatisme et le degré de mobilité* encore appelée *formule de mobilité* :

$$m - h = E_s - I_s = I_c - E_c$$

Remarques :

- (2) implique $h = m + 6\gamma - I_c$ qui est la deuxième forme de la formule de mobilité
- Dans le cadre d'une modélisation plane $E_c = 3\gamma$, et donc la formule de mobilité devient

$$h = m + 3\gamma - I_c$$

• E_c est le nombre d'équations algébriques issues de l'écriture de la fermeture cinématique de chaque solide ; dans l'espace $E_c = 6(N - I)$ où $N - 1$ est le nombre de solides, bâti non compris.
 Dans le plan $E_c = 3(N - I)$. En plus γ , le nombre de cycles indépendant est égal à $N - 1$.

VIII-3 Mobilité utile et mobilité interne

Les deux dernières équations ci-dessus permettent de connaître rapidement le degré d'hyperstatisme d'un mécanisme, une fois que son degré de mobilité est déterminé.

Si on appelle :

- m_u : *degré de mobilité utile* du mécanisme, le nombre de paramètres cinématiques qu'il faut figer pour immobiliser le mécanisme (généralement 1 ou 2, exemple la rotation d'un arbre moteur).

m_i : *degré de mobilité interne* du mécanisme, le nombre de paramètres cinématiques supplémentaires qu'il faut figer pour bloquer toutes les pièces du mécanisme (en repérant les mouvements indépendants de certains solides) n'ayant aucune influence sur le mouvement des autres solides : exemple de la bielle tournant sur elle-même entre deux liaisons rotules)

On peut poser :

$$m = m_u + m_i$$

Ainsi, la détermination rapide (parfois intuitive) de m conduit à l'obtention rapide de h (degré d'hyperstatisme).

N.B : La donnée du degré d'hyperstatisme ne permet pas d'en connaître la cause ; une étude statique est toujours nécessaire pour identifier les inconnues hyperstatiques.