République du Cameroun
Republic of Cameroun

Université de Yaoundé I

University of Yaounde I

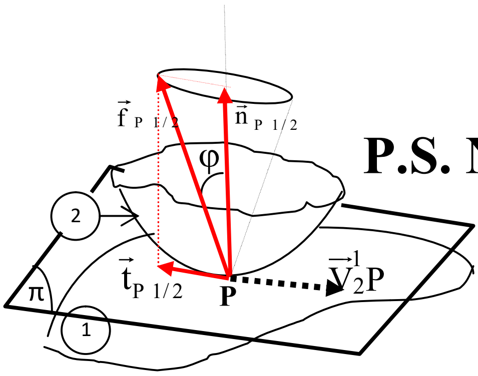
STATIQUE DU SOLIDE

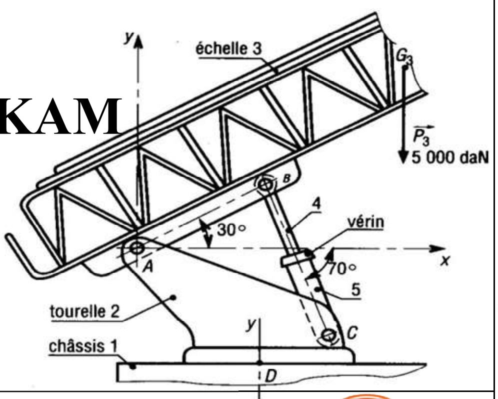
LES TORSEURS UTILISES EN MECANIQUE

Ressource Pédagogique Mise en Ligne

Par

P.S. NGOHE-EKAM





Ecole Nationale
Supérieure Polytechnique de Yaoundé

PREAMBULE

Suite à la menace de propagation du Covid-19 (Corona virus Disease) dont le premier cas de contamination a été déclaré au mois de mars 2020 au Cameroun, des mesures sanitaires ont été édictées par monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, puis renforcées par une sortie médiatisée de monsieur le Premier Ministre (PM) du Cameroun. Le point commun de l'allocution de ces deux personnalités et relatif à l'enseignement supérieur fut la fermeture des établissements d'enseignement, dont l'Université de Yaoundé.

Monsieur le Recteur de l'Université de Yaoundé I, dans le souci que la fermeture de l'UY I ne soit pas une perche tendue aux étudiants paresseux pour se laisser aller à un certain sommeil intellectuel, instruit alors que les enseignants « mettent en ligne » leurs cours grâce au serveur du Centre Universitaire des Technologies de l'Information (CUTI) de l'UY I et que les étudiants visitent ce serveur à volonté pour télécharger les ressources pédagogiques (puisque c'est le terme le plus approprié) que les enseignants y auront déposé, ce téléchargement devant permette aux étudiants de continuer d'apprendre (à domicile) pendant la période de pseudo-confinement décrétée par monsieur le PM.

C'est ainsi que le présent document est conçu et mis en forme par l'auteur. Ce document fait partie de l'enseignement dispensé par l'auteur aux étudiants de niveau II de l'Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de l'UY I. L'auteur a valablement sectionné cet enseignement en modules qui constitueraient des chapitres de cours en présentiel. Et pour chaque module l'enseignant a produit trois documents en vue de faciliter l'apprentissage à distance :

- Des notes de cours
- Des exercices corrigés
- Des exercices non corrigés

L'idée principale du sectionnement de l'enseignement est de guider au mieux l'apprenant dans l'organisation de sa mémoire cognitive. En effet, il n'est pas bien d'exiger de l'apprenant une concentration trop longue, dépassant les six minutes reconnues par la plupart des experts en pédagogie, sans activité de restitution par exemple. L'apprenant est ainsi invité à ne pas rester trop longtemps sur les parties cours et exercices corrigés ; il peut y revenir en tant que de besoin. Cependant le traitement des exercices non corrigés étant une phase d'extériorisation de la connaissance emmagasinée, l'apprenant pourra et devrait y passer assez de temps de travail.

L'interaction de l'enseignant avec les apprenants est rendue possible grâce aux fora (plateformes d'enseignement à distance, groupe Whatsapp, liste de distribution par email, etc.) divers dans lesquels les apprenants sont invités à s'inscrire.

Pour finir, nous signalons que l'organisation actuelle de cet enseignement n'est pas vraiment une mise en ligne de cours, encore moins un MOOC, comme cela est fait dans la plupart des plateformes d'enseignement à distance. Nous essayons de faire une mise en ligne des ressources (dans le serveur de l'UY I), mais une mise en ligne suggérant une sorte de protocole d'apprentissage aux étudiants.

Yaoundé, le 21 mars 2020,

P.S. NGOHE-EKAM

Module 2 : LES TORSEURS UTILISES EN MECANIQUE

A l'issue de ce module, l'apprenant devrait être capable de définir, en notation vectorielle :

- Le torseur d'actions mécaniques
- Le torseur des vitesses d'un solide
- Le torseur des quantités de mouvement d'un solide
- Le torseur des quantités d'accélération d'un solide

Le rôle de ces différents torseurs sera explicité dans le module 3.

Sommaire

I- LE TORSEUR DES ACTIONS MECANIQUES APPLIQUEES A UN SOLIDE

C'est le torseur auquel on est familier depuis le secondaire ; ses coordonnées vectorielles sont :

- Résultante = somme discrète ($\sum_{i}$) ou continue ($\int_{(S)}$) des forces appliquées,
- Moment = somme discrète ou continue des moments des forces appliquées.

Il est aussi appelé **Torseur des forces appliquées au solide** et ainsi noté comme suit :

$$\boxed{[\mathscr{T}]_O = \vec{F} + \varepsilon \vec{m}_0}$$

Le torseur des efforts appliqués à un solide est un torseur dont la distribution peut être discrète ou continue (linéique, surfacique ou volumique).

I-1 Cas d'une distribution discrète d'effort

Soient n efforts $\vec{F}_i$ s'appliquant en un nombre fini de n points M_i ; le torseur des efforts appliqués sur l'ensemble des n points est défini par :

- Sa résultante : $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$
- Son moment résultant en un point quelconque O : $\vec{m}_0 = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_i$

I-2 Cas d'une distribution continue d'effort

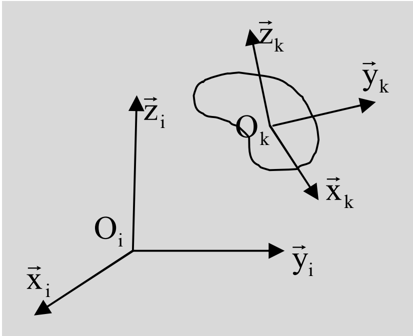
Dans ce cas on a une densité d'effort $\vec{f}_M$ s'appliquant en un point M de l'espace de mesure μ (μ Ξ ligne, surface ou volume) ; l'effort élémentaire est $d\vec{F} = \vec{f} d\mu$ et le moment élémentaire $d\vec{m}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}$.

Le torseur des efforts appliqués est dans ce cas donné par :

- Sa résultante $\vec{F} = \int \vec{f} d\mu$
- Son moment résultant en un point quelconque O : $\vec{m}_0 = \int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} d\mu$

II- LE TORSEUR DISTRIBUTEUR DES VITESSES

II-1 Définition :



C'est un torseur de **résultante** $\vec{\Omega}_k^i$ **(le vecteur rotation instantanée du solide (S_k) par rapport à (S_i)) et de moment, en un point, la vitesse de ce point.**

Le **torseur distributeur des vitesses** du solide (S_k) dans son mouvement par rapport au solide (S_i) est alors noté en M :

$$\boxed{\left[\mathscr{V}^i_k\right]_M = \vec{\Omega}_k^i + \varepsilon\vec{V}_k^i(M)}.$$

On l'appelle aussi **torseur champ des vitesses** du solide (S_k) par rapport au solide (S_i) ou encore ***torseur cinématique*** du solide (S_k) dans son mouvement par rapport à (S_i).

II-2 Remarque :

Puisque les vitesses se rapportent à un référentiel, il en est de même du torseur cinématique ; il est toujours donné pour (S), dans son mouvement par rapport à un référentiel donné.

III- LE TORSEUR DES QUANTITES DE MOUVEMENTS OU TORSEUR CINETIQUE

III-1 Définition :

C'est le torseur ayant :

- Pour résultante ou somme géométrique la quantité de mouvement du solide. On parle aussi de **résultante cinétique**.
- Pour moment du torseur en un point est le **moment cinétique**.

Il est noté : $\boxed{\left[\mathscr{P}\right] = \vec{p} + \varepsilon\vec{\sigma}_O}$

Du fait que ses deux coordonnées vectorielles soient des grandeurs cinétiques, l'usage veut que le torseur des quantités de mouvement soit plutôt appelé **torseur cinétique**.

III-2 Expression :

- Pour un système matériel discret : n particules M_i de masse m_i et de vitesses $\vec{V}_i$
  - ✓ $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$ où $\vec{p}_i = m_i \vec{V}_i$
  - ✓ $\vec{\sigma}_0 = \sum_{i} \vec{\sigma}_{0_i}$ où $\vec{\sigma}_{0_i} = \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \vec{V}_i$

Remarque : le moment cinétique au point o est souvent noté : $\vec{L}_O$.

- Pour un système continu, cas d'une distribution continue de mesure μ (longueur, surface ou volume) et de densité de masse ρ, on a pour une quantité élémentaire de masse dm entourant le point M :

$dm = \rho d\mu$, masse élémentaire

$d\vec{p} = \vec{V}_M dm$, quantité de mouvement élémentaire

et $\overrightarrow{d\sigma_0} = \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{p}$, moment cinétique élémentaire en O ; c'est le moment de la quantité de mouvement.

Alors :

- ✓ La masse « globale » du système est $m = \int_{(S)} dm = \int_{(S)} \rho d\mu$
- ✓ La résultante cinétique est $\vec{p} = \int_{(S)} \vec{V}_M \rho d\mu = \int_{(S)} \vec{V}_M dm$
- ✓ Le moment cinétique en O est $\vec{\sigma}_0 = \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V_M} \rho d\mu = \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V_M} dm$

III-3 Remarques :

(1)

On montre que :

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{V}_G}$$

Et, avec la propriété fondamentale des torseurs, on écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_0} = \overrightarrow{\sigma_{O'}} + \overrightarrow{OO'} \wedge m\vec{V}_G \;\; ; \forall O, O' \in \mathscr{E}}$$

(2) Puisque les vitesses se rapportent à un référentiel, il en est de même du torseur cinétique ; il est toujours donné pour (S), dans son mouvement par rapport à un référentiel donné.

IV- LE TORSEUR DES QUANTITES D'ACCELERATION OU TORSEUR DYNAMIQUE :

$$\boxed{[\mathscr{A}] = \vec{\Sigma} + \varepsilon\vec{\delta}_0}$$

IV-1 Définition :

Dans un référentiel galiléen, l'accélération d'un point M est notée $\vec{\Gamma}^g(M)$. Pour un système matériel continu (cas d'un solide), on définit pour une quantité élémentaire de masse dm entourant un point M quelconque :

- ✓ La quantité d'accélération élémentaire : $d\vec{\Sigma}^g = \vec{\Gamma}^g(M).dm$
- ✓ Le moment dynamique élémentaire au point O quelconque : $d\vec{\delta}_0{}^g = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Gamma}^g(M).dm$

Le **torseur dynamique**[$\mathscr{A}$]d'un solide a donc pour coordonnées vectorielles :

- ✓ La **quantité d'accélération totale** ou **résultante dynamique** ou **somme dynamique** $\vec{\Sigma}^g = \int_{M\in(S)} \vec{\Gamma}^g(M).dm = m\vec{\Gamma}^g(G)$ avec m : masse totale du solide (S) et G : son centre d'inertie.
- ✓ Le **moment dynamique** en un point O quelconque : $\vec{\delta}^g{}_O = \int_{M\in(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Gamma}^g(M).dm$

Il sera sera noté : $\boxed{[\mathscr{A}] = \vec{\Sigma} + \varepsilon\vec{\delta}_0}$

IV-2 Remarques :

(1) –Grâce à la propriété fondamentale des torseurs, on peut écrire :

$\vec{\delta}_0 = \vec{\delta}_{0'} + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{\Sigma}^g$, c'est-à-dire : $\boxed{\vec{\delta}_0 = \vec{\delta}_{0'} + m\overrightarrow{OO'} \wedge \vec{\Gamma}^g(G)}$

(2) - On a les relations suivantes entre les coordonnées vectorielles des torseurs cinétique et dynamique :

$$\boxed{\vec{\Sigma}^g = \frac{d^g}{dt}\vec{p}^g} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\delta}^g_O = \frac{d^g}{dt}\vec{\sigma}^g_O + m\vec{V}^g_O \wedge \vec{V}^g_G}$$

(3) Si le point de référence O est fixe par rapport au référentiel galiléen (R_g) : $\vec{V}^g_O = \vec{0}$ et donc : $\boxed{\vec{\delta}^g_O = \frac{d^g}{dt}\vec{\sigma}^g_O}$

(4) Si le point de référence O est le centre d'inertie : $\vec{V}^g_O \wedge \vec{V}^g_G = \vec{0}$ et donc : $\boxed{\vec{\delta}^g_G = \frac{d^g}{dt}\vec{\sigma}^g_G}$.