Métodos Numéricos

Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss consiste en transformar un sistema de ecuaciones en otro equivalente
de forma que este sea escalonado.

Para facilitar el cálculo vamos a transformar el sistema en una matriz, en la que pondremos
los coeficientes de las variables y los términos independientes (separados por una recta).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

Obtenemos sistemas equivalentes por eliminación de ecuaciones dependientes si se cumple que:

1. Todos los coeficientes son ceros.
2. Dos filas son iguales.
3. Una fila es proporcional a otra.
4. Una fila es combinación lineal de otras.

Criterios de equivalencia de sistemas de ecuaciones

1. Si a ambos miembros de una ecuación de un sistema se les suma o se les resta una misma expresión, el sistema resultante es equivalente.

2. Si multiplicamos o dividimos ambos miembros de las ecuaciones de un sistema por un número distinto de cero, el sistema resultante
   es equivalente.
3. Si sumamos o restamos a una ecuación de un sistema otra ecuación del mismo
   sistema, el sistema resultante es equivalente al dado.
4. Si en un sistema se sustituye una ecuación por otra que resulte de sumar las dos
   ecuaciones del sistema previamente multiplicadas o divididas por números no nulos,
   resulta otro sistema equivalente al primero.
5. Si en un sistema se cambia el orden de las ecuaciones o el orden de las incógnitas, resulta otro sistema equivalente.

Ejemplo: $$\left\{\begin{array}{lcr} x-9y+5z-33 & = & 0 \\ x+3y-z & = & -9 \\ x-y+z & = & 5 \end{array}\right.$$

Sumamos 33 en ambos lados de la primera ecuación y se obtiene

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-9y+5z-33+33 & = & 0+33 \\ x+3y-z & = & -9 \\ x-y+z & = & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcr} x-9y+5z & = & 33 \\ x+3y-z & = & -9 \\ x-y+z & = & 5 \end{array}\right.$$

Por el primer criterio de equivalencia tenemos que el sistema original es equivalente con el sistema

$$\left\{\begin{array}{lcr} x-9y+5z & = & 33 \\ x+3y-z & = & -9 \\ x-y+z & = & 5 \end{array}\right.$$

Ejemplo: $$\left\{\begin{array}{lcr} x-9y+5z & = & 33 \\ x+3y-z & = & -9 \\ x-y+z & = & 5 \end{array}\right.$$

Multiplicamos por 2 ambos lados de las ecuaciones y por el segundo criterio de equivalencia se tiene que el sistema original es equivalente con el nuevo sistema obtenido

$$\begin{cases} 2x - 18y + 10z & = & 66 \\ 2x + 6y - 2z & = & -18 \\ 2x - 2y + 2z & = & 10 \end{cases}$$

Ejemplo: $\begin{cases} x - 9y + 5z & = & 33 \\ x + 3y - z & = & -9 \\ x - y + z & = & 5 \end{cases}$

A la tercera ecuación le sumamos la segunda ecuacíon, se obtiene un sistema de ecuaciones que por el criterio 3 es equivalente con el sistema original

$$\begin{cases} x - 9y + 5z & = & 33 \\ x + 3y - z & = & -9 \\ 2x + 2y & = & -4 \end{cases}$$

Ejemplo: $\begin{cases} x - 9y + 5z & = & 33 \\ x + 3y - z & = & -9 \\ x - y + z & = & 5 \end{cases}$

Sustituimos la segunda ecuación por la suma de la primera ecuación con la segunda ecuación multiplicada por tres. Se obtiene un sistema de ecuaciones que por el criterio 4 es equivalente con el sistema original

$$\begin{cases} x - 9y + 5z & = & 33 \\ 4x + 2z & = & 6 \\ x - y + z & = & 5 \end{cases}$$

Ejemplo: $\begin{cases} x - 9y + 5z & = & 33 \\ x + 3y - z & = & -9 \\ x - y + z & = & 5 \end{cases}$

Intercambiamos la segunda y tercera ecuación. Se obtiene un sistema de ecuaciones que por el criterio 5 es equivalente con el sistema original

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x - 9y + 5z & = & 33 \\ x - y + z & = & 5 \\ x + 3y - z & = & -9 \end{array} \right.$$