Линейная алгебра

Векторы

Вектор — это направленный отрезок, для которого указаны его начало и конец.

У любого вектора есть две основные характеристики: **длина** и **направление**. Вектор можно как угодно перемещать в пространстве, главное, чтобы длина и направление не менялись.

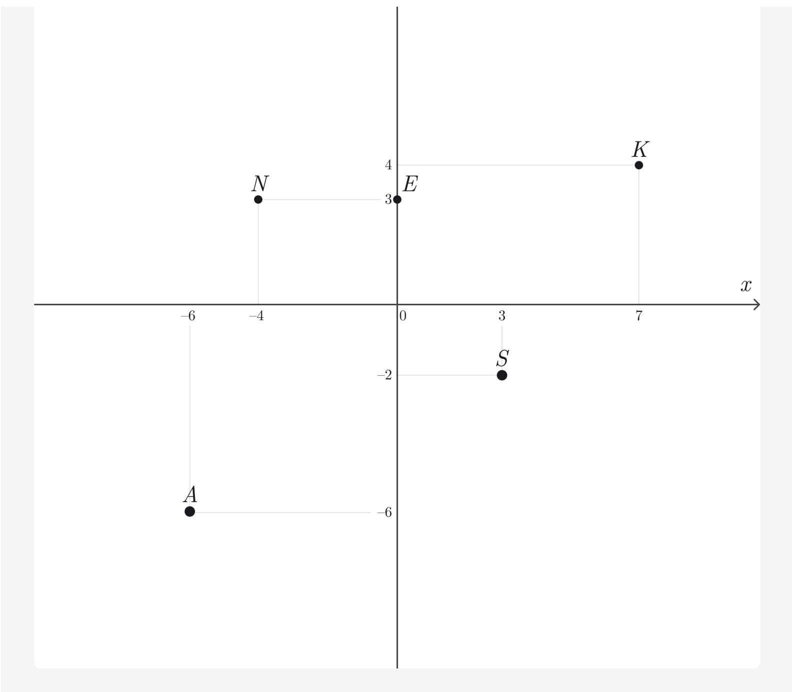
Чтобы решать содержательные задачи с помощью векторов, их обычно помещают в какую-либо **систему координат**.

Система координат

Задать систему координат — значит ввести правила, по которым определяются координаты каждой точки, а также положение точки по её координатам.

На плоскости у каждой точки есть **две координаты**: первая по оси абсцисс, *Ox*, вторая по оси ординат, *Oy*.

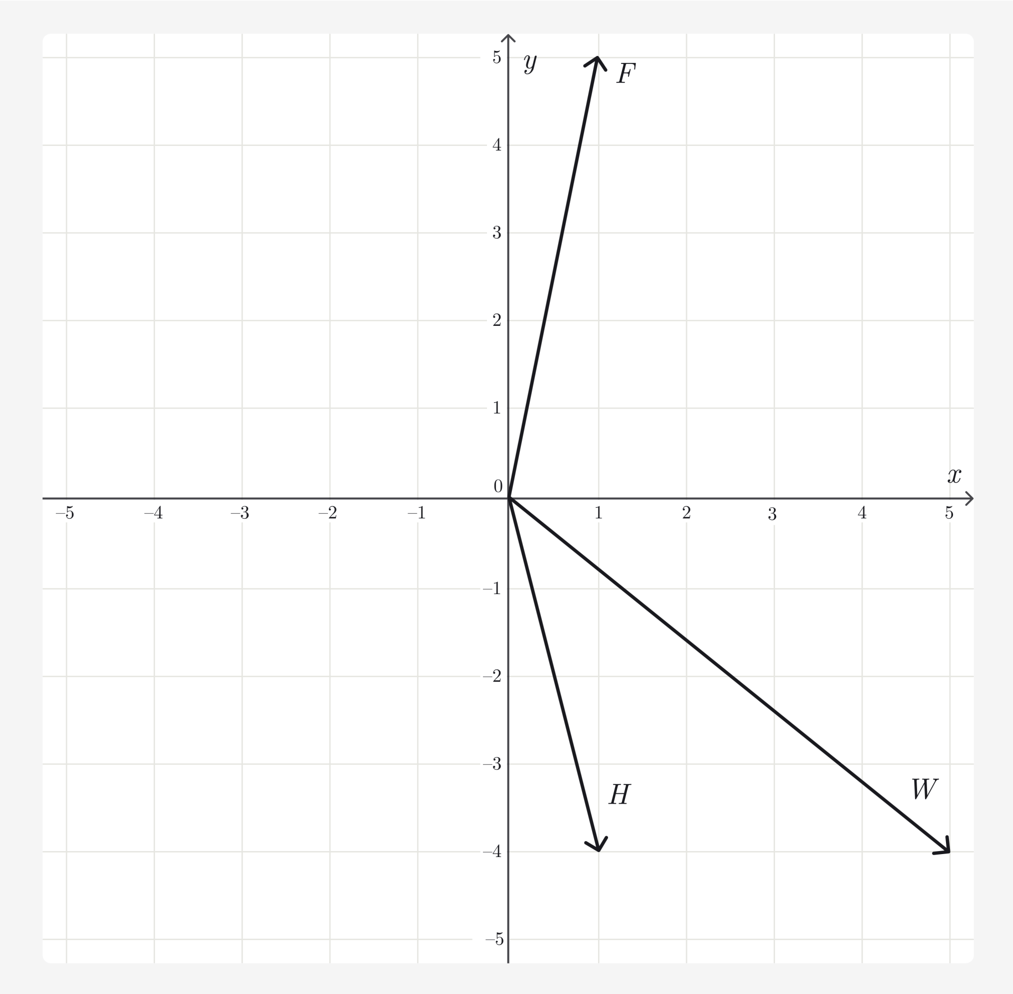
image.png 189 kB Transcribe



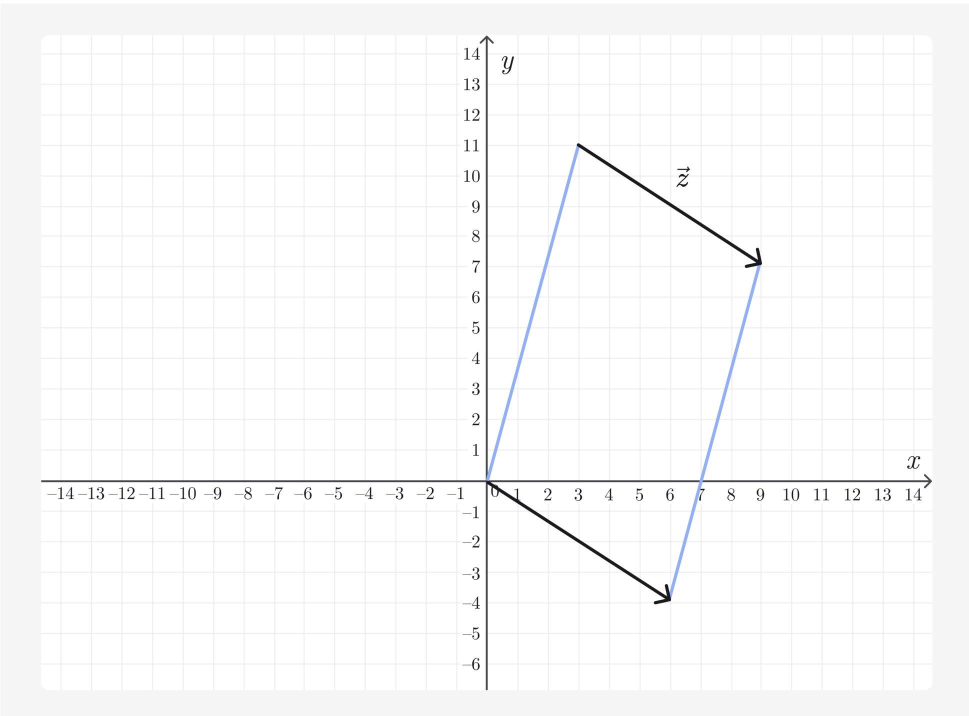
Чтобы найти координату точки по оси, нужно опустить из неё **перпендикуляр** на эту ось.

Координаты вектора — это набор чисел, описывающих его положение. Часто начало вектора помещают в точку с координатами (0, 0).(0, 0). В таком случае считают, что координаты вектора совпадают с координатами его конечной точки.

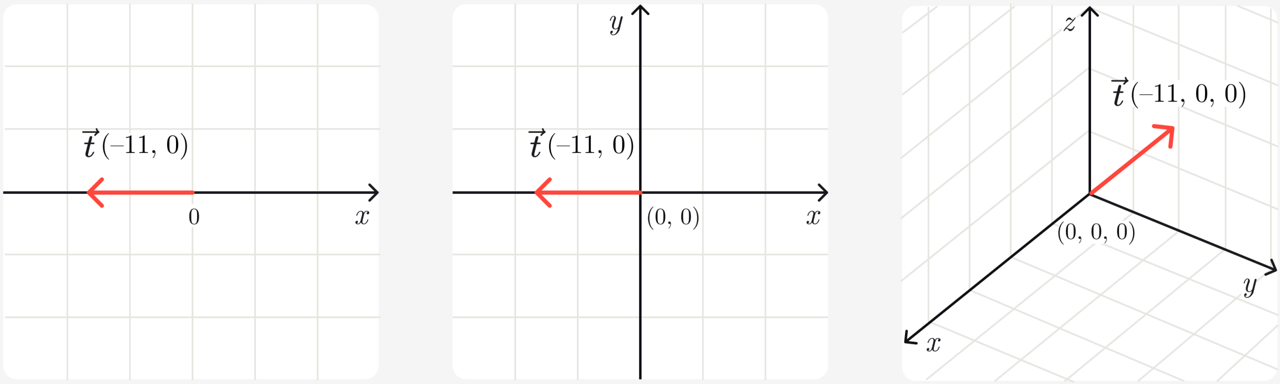
координаты вектора совпадают с координатами его конечной точки.



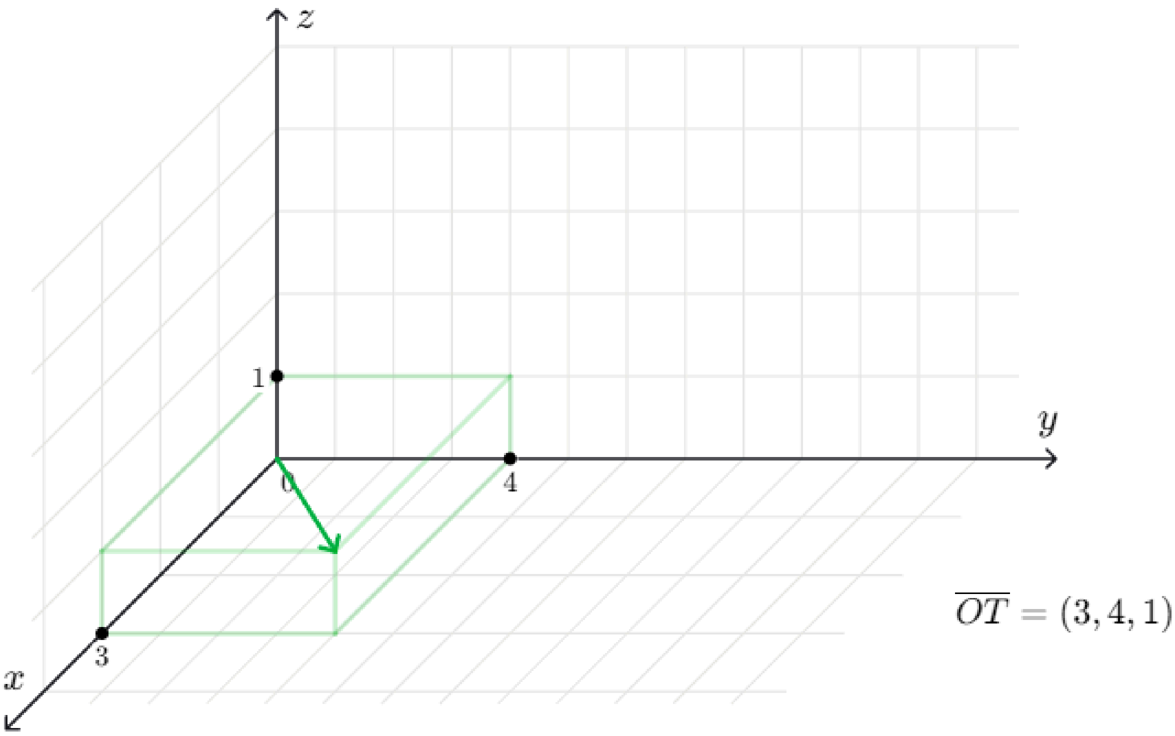
Начальной может быть и любая другая точка. Тогда координаты вектора будут отличны от координат его конечной точки.



Существуют также векторы с одной, тремя, четырьмя или другим числом координат. С точки зрения графиков каждая координата отвечает за одно измерение.



Построить вектор в трехмерном пространстве можно так:



Обозначение вектора

Вектор представляют с помощью набора координат. Записать их можно в строчку или в столбик.

- **Запись в строчку**: координаты заключены в круглые скобки и разделены запятыми.
- **Запись в столбик**: координаты в круглых или квадратных скобках, запятые не нужны.

$$\overrightarrow{OW} = (5, -4)$$

$$\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix}$$

Разные виды записи позволяют акцентировать внимание на разницу между векторами-столбцами и векторами-строками, что может быть полезно при анализе данных.

В общем виде вектор можно записать так:

Matlab

```matlab
an=(α1, α2, ..., αn)
```

Для координат традиционно используют **греческие буквы**.

Вектор ВА является **противоположным** вектору АВ. Если вектор АВ обозначить как а, то вектор ВА будет обозначаться как -а.

Характеристики векторов

Длиной вектора АВ называется длина отрезка АВ.*AB*.

Обозначение: |АВ|

Длина вектора, как и длина отрезка, может быть выражена положительным числом.

Если начальная точка вектора совпадает с его конечной точкой, получается **нулевой вектор**. Длина такого вектора равна 0.

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным** вектором и обозначается как е.

Два вектора называют **равными**, если они **одинаково направлены** и их **длины равны**.

> С точки зрения линейной алгебры два вектора $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ называют **равными**, если равны все их соответствующие координаты. То есть $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n \ \ \alpha_i = \beta_i$.

Два вектора называются **коллинеарными**, если они они лежат **на одной прямой** или **на параллельных прямых**.

При этом, они могут быть направлены как в одну сторону, так и в разные.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

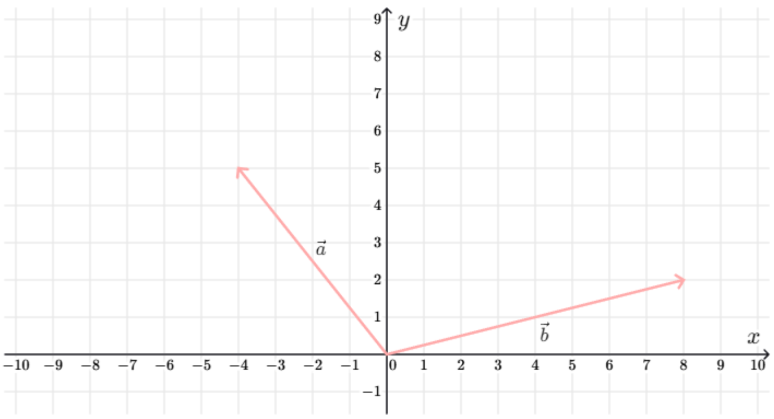
Если сложить два коллинеарных вектора, то направление вектора суммы будет либо таким же, как у первого слагаемого, либо противоположным, либо получится нулевой вектор.

Обозначение: а||b

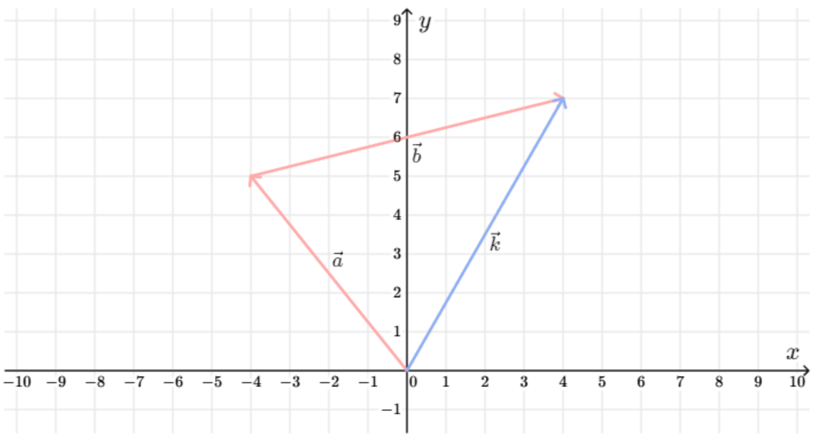
Операции с векторами

Операции с векторами

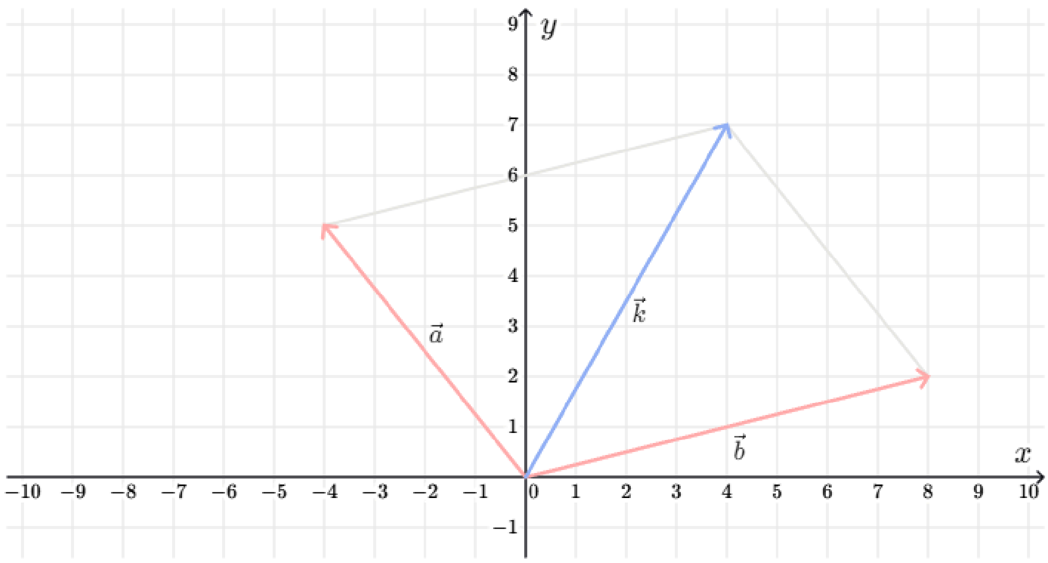
Сумму векторов a и b можно получить по правилу треугольника или параллелограмма:



Итоговый вектор $\vec{k}$ и будет суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Суммарный вектор будет диагональю параллелограмма:



Свойства сложения векторов:

1. **Коммутативность:**

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

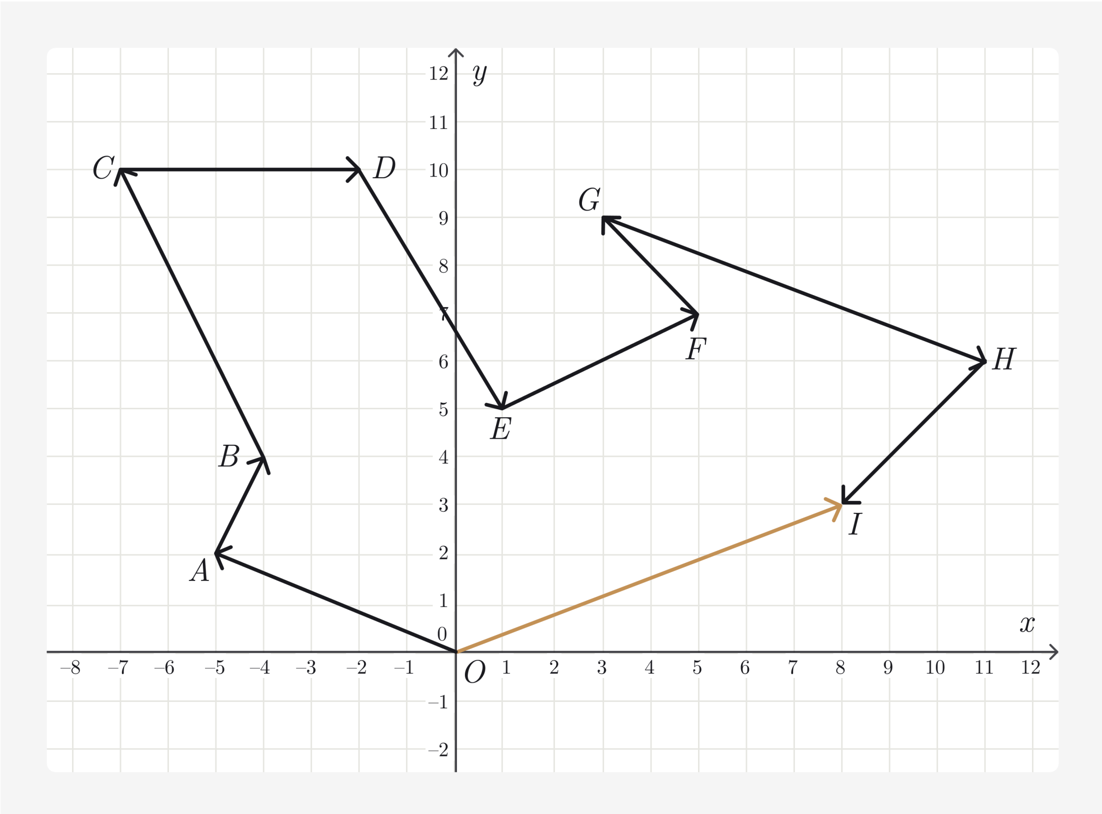
2. **Ассоциативность:**

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

3. **Нулевой вектор - нейтральный элемент:**

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

Можно складывать и вычитать любое количество векторов. Если их больше двух, найти сумму графически поможет **правило многоугольника**: первый вектор складывают со вторым, их сумму — с третьим, сумму первых трёх — с четвёртым и так далее. От порядка векторов результат не зависит.



В общем виде **правило сложения векторов** выглядит так:

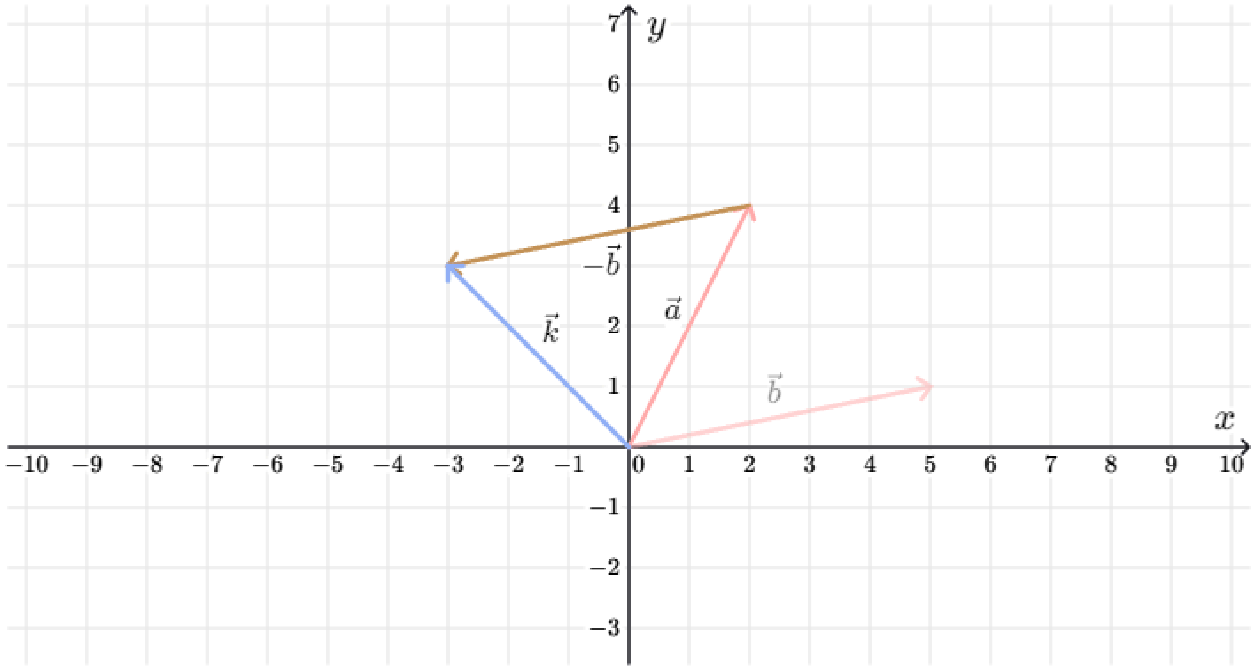
$$\overline{a}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$$

$$\overline{b}=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$$

$$\overline{a}+\overline{b}=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,...,\alpha_n+\beta_n)$$

Чтобы получить **разность векторов** a и b, нужно **сложить вектор a и вектор -b (противоположный второму).**

Вектор $\vec{k}$ будет суммой $\vec{a}$ и $-\vec{b}$, а значит, он же будет и разностью $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



В общем виде **вычитание векторов** выглядит так:

$$\overline{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

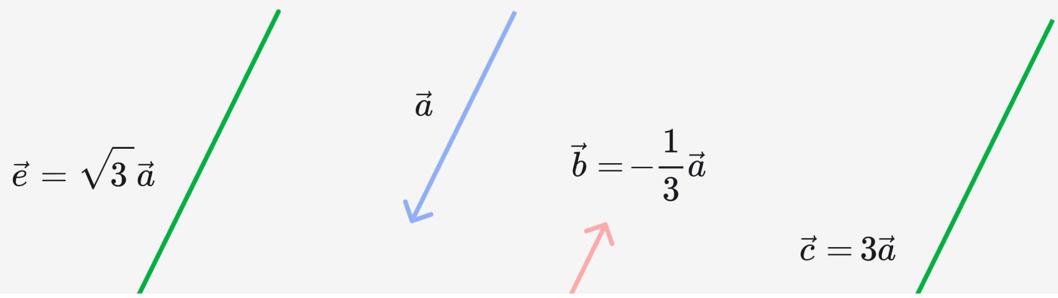
$$\overline{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

$$\overline{a} - \overline{b} = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$$

Умножение вектора на скаляр можно представить как **масштабирование** этого вектора:

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на скаляр k называют вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$.

При $k > 0$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены,
при $k < 0$ — противоположно направлены.
При $k = 0$ получится нулевой вектор $\vec{b} = \vec{0}$.



Аналогично с **делением вектора на скаляр**:

Разделить вектор $\vec{b}$ на число k — значит, найти такой вектор $\vec{a}$, который в произведении с числом k даст вектор $\vec{b}$.

Умножение вектора на скаляр лежит в основе **обязательного условия коллинеарности** двух векторов:

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое ненулевое число k, что $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.

Число *k* называют **коэффициентом коллинеарности**. Его и считают **результатом деления** вектора b на коллинеарный ему ненулевой вектор a.

Вычислить **коэффициент коллинеарности** можно **геометрически**:

$$k = \begin{cases} \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}, & \text{если} \quad \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ сонаправлены,} \\ -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}, & \text{если} \quad \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ противоположно направлены.} \end{cases}$$

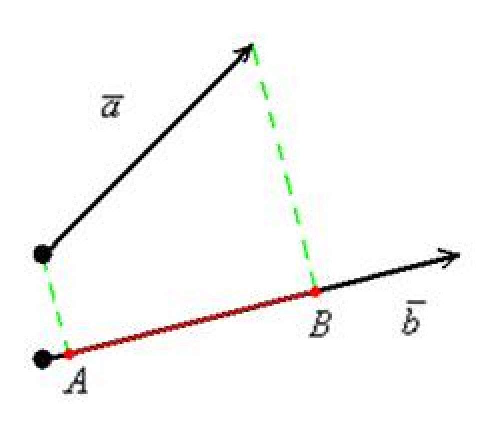
Или **алгебраически**:

Два ненулевых вектора $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ и $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ коллинеарны, если их координаты пропорциональны, то есть

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{\beta_n}{\alpha_n} = k.$$

(При условии, что не все координаты равны 0, а имеющиеся нули стоят на одних и тех же позициях).

Проекция вектора a на вектор b (или на ось координат) - это ЧИСЛО, обозначающее длину отрезка, который получится, если опустить на вектор b перпендикуляры из начала и конца вектора a:



Обозначается:

$Пр_{\overline{b}}\, \overline{a}$

т.е. «проекция вектора «a» на вектор «b»».

Проекция положительна, если угол между векторами острый, отрицательна, если угол тупой, и равна нулю, если угол прямой (т.е. векторы ортогональны). Это же верно для скалярного произведения.

Скалярное произведение векторов - это ЧИСЛО, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

где $0 \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant \pi$

Если выражать эту формулу через проекции, получится, что скалярное произведение a на b равно длине a, умноженной на проекцию b на a или наоборот.

Из этой формулы можно также выразить косинус:

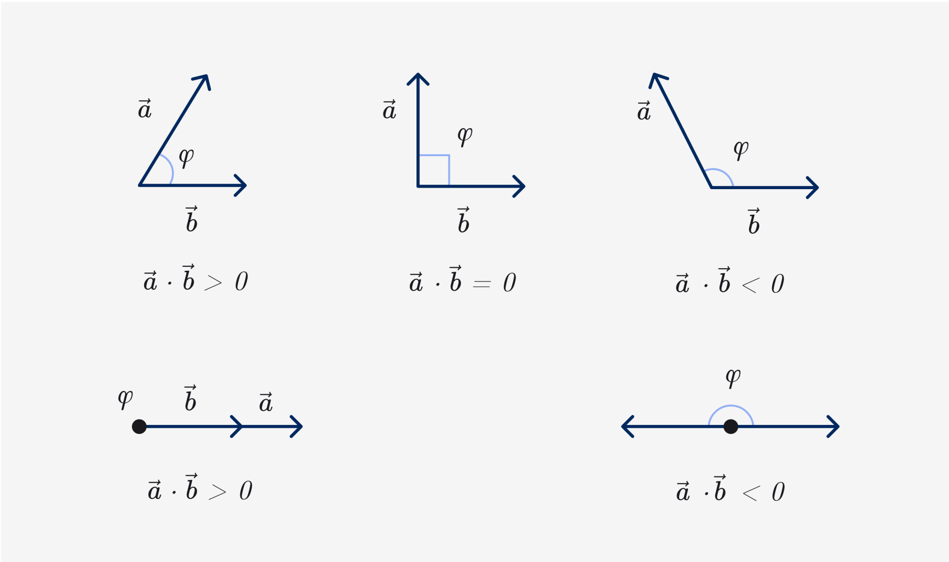
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Другой способ вычислять **скалярное произведение** - использовать **координаты**:

Для векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n), \vec{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i.$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + ... + a_n \cdot b_n}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + ... + {a_n}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2 + ... + {b_n}^2}}$$



Если умножить вектор сам на себя, получится его **скалярный квадрат**:

Скалярный квадрат вектора $\vec{a}$ равен квадрату длины данного вектора, $|\vec{a}|^2$.

Соответственно, длину вектора можно найти, если извлечь корень из его скалярного квадрата.

Тригонометрия

Угол — геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки. Эту точку называют **вершиной** угла, а лучи — **сторонами**.

Углы измеряют в **градусах**. Измерение проводят против часовой стрелки.

Угол можно достроить до прямоугольного треугольника. Углы и стороны треугольника взаимосвязаны, эти зависимости описывают синусы, косинусы, тангенсы и т. д

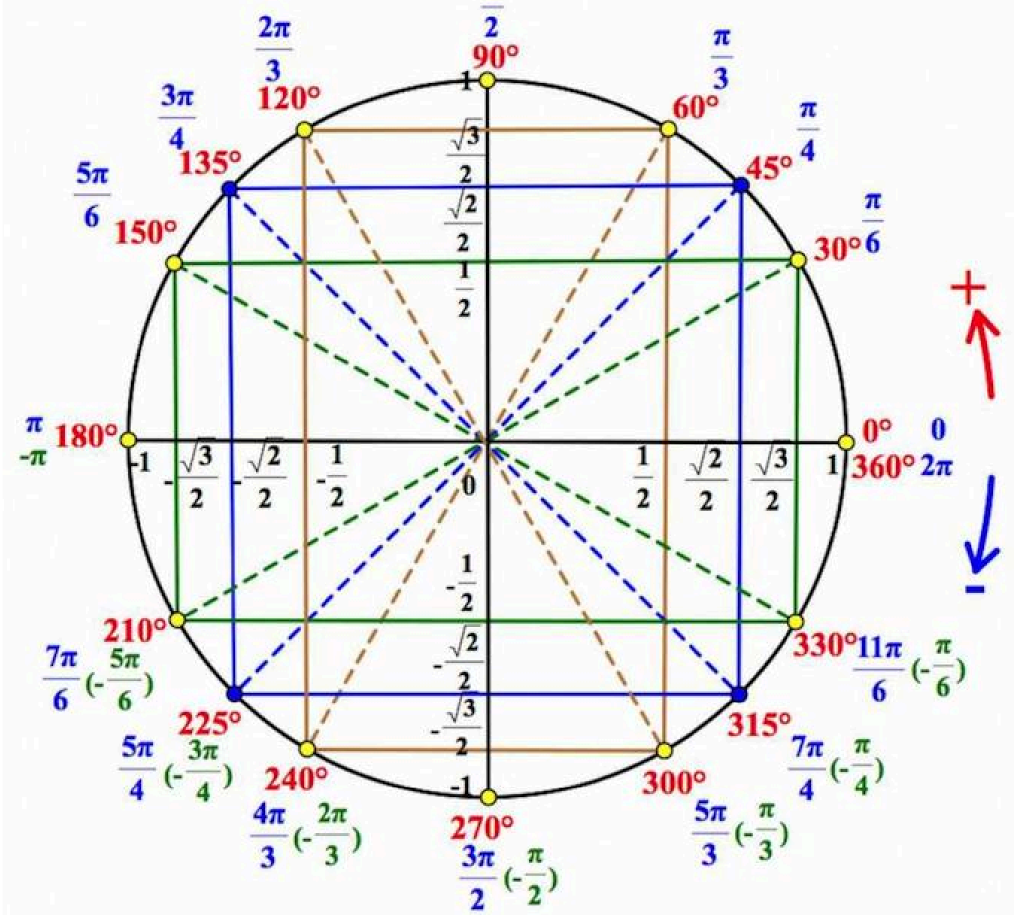
Синус острого угла — это отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус острого угла — это отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенс острого угла — это отношение противолежащего катета к прилежащему или отношение синуса угла к его косинусу.

Котангенс острого угла — это отношение прилежащего катета к противолежащему.

Чтобы экстраполировать эту логику на другие виды углов, использую **единичную окружность**:



Для произвольной точки K=(x, y), лежащей на единичной окружности и образующей угол α между радиусом *K* и положительным направлением оси *Ox*:

- **Синус** α — это ординатa точки K: **sinα=y**
- **Косинус** α — это абсцисса точки K: **cosα=x**
- **Тангенс** α — это отношение ординаты точки к её абсциссе при$x \neq 0$: **tgα=y** / **x**

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1; \quad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$$

Любой угол с вершиной в центре окружности опирается на какую-то **дугу**. Для ее измерения используется **радиан**:

Радиан — это угол, опирающийся на дугу, длина которой равна её радиусу.

Обозначение: рад

Угол, опирающийся на половину окружности, равен 180°, или *π* рад, поскольку длина окружности равна 2π. Исходя из этого, можно переводить градусы в радианы и наоборот.

Градусы → **Радианы:** умножить на π, разделить на 180.

Радианы → **Градусы:** умножить на 180, разделить на π.

А также:

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

После полного оборота в положительном направлении получится угол, **эквивалентный** исходному углу α, но на 2π больше. Его обозначают так:

$$\alpha+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

А после полного оборота в отрицательном направлении:

$$\alpha-2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Соответственно, если нам дан угол, который меньше 0 или больше 2π рад, его можно привести к уже известным углам и спокойно находить синус, косинус, тангенс и т.д.

Чтобы получить угол по известному синусу или косинусу, используются **обратные тригонометрические функции**:

Арксинус x — это угол, синус которого равен x. Обозначают: arcsin(x)

Арккосинус x — это угол, косинус которого равен x. Обозначают: arccos(x)

Для того, чтобы точно определить, о каком из бесконечного числа углов идет речь, вводят дополнительные ограничения:

Арксинусом x называют угол $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен x:

$$\arcsin x=\alpha,$$
$$\sin\alpha=x.$$

Арккосинусом x называют угол $\alpha\in[0,\pi]$, косинус которого равен x:

$$\arccos x=\alpha,$$
$$\cos\alpha=x.$$

Они обладают следующими свойствами:

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x;$$

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

Линейная комбинация векторов

Нормы

Норма — понятие, обобщающее абсолютную величину (модуль) числа, а также длину вектора на случай элементов (векторов) линейного пространства.

Существует несколько подходов к вычислению нормы:

1. **L-1 норма:**

$$|\vec{a}|_1 = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

Т.е. L-1 норма равна сумме взятых по модулю координат вектора.

2. **L-2 норма:**

$$|\vec{a}|_2 = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + ... + {a_n}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2}$$

Т.е. L-2 норма равна квадратному корню из суммы квадратов координат.

3. **L∞ норма:**

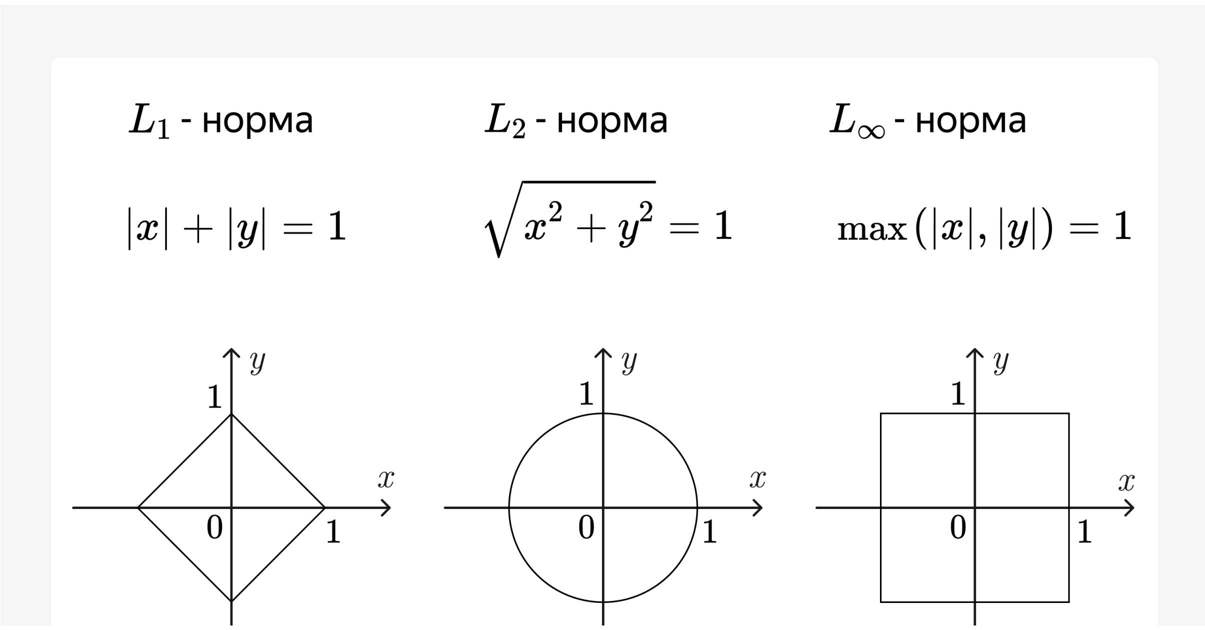
$$|\vec{a}|_\infty = \max_{i=1...n} |a_i|$$

Максимальная норма равна максимальной по модулю координате вектора.

Все эти нормы и любые другие возможные варианты можно представить в виде одной формулы:

$$|\vec{a}|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ где } p \text{ — положительное действительное число.}$$

Где p - номер используемой нормы.



Расстояние между векторами

Расстояние между векторами $\overline{OA}, \overline{OB}$ определяют как расстояние между точками A и B.

Или:

Расстояние между векторами равно норме вектора их разности.