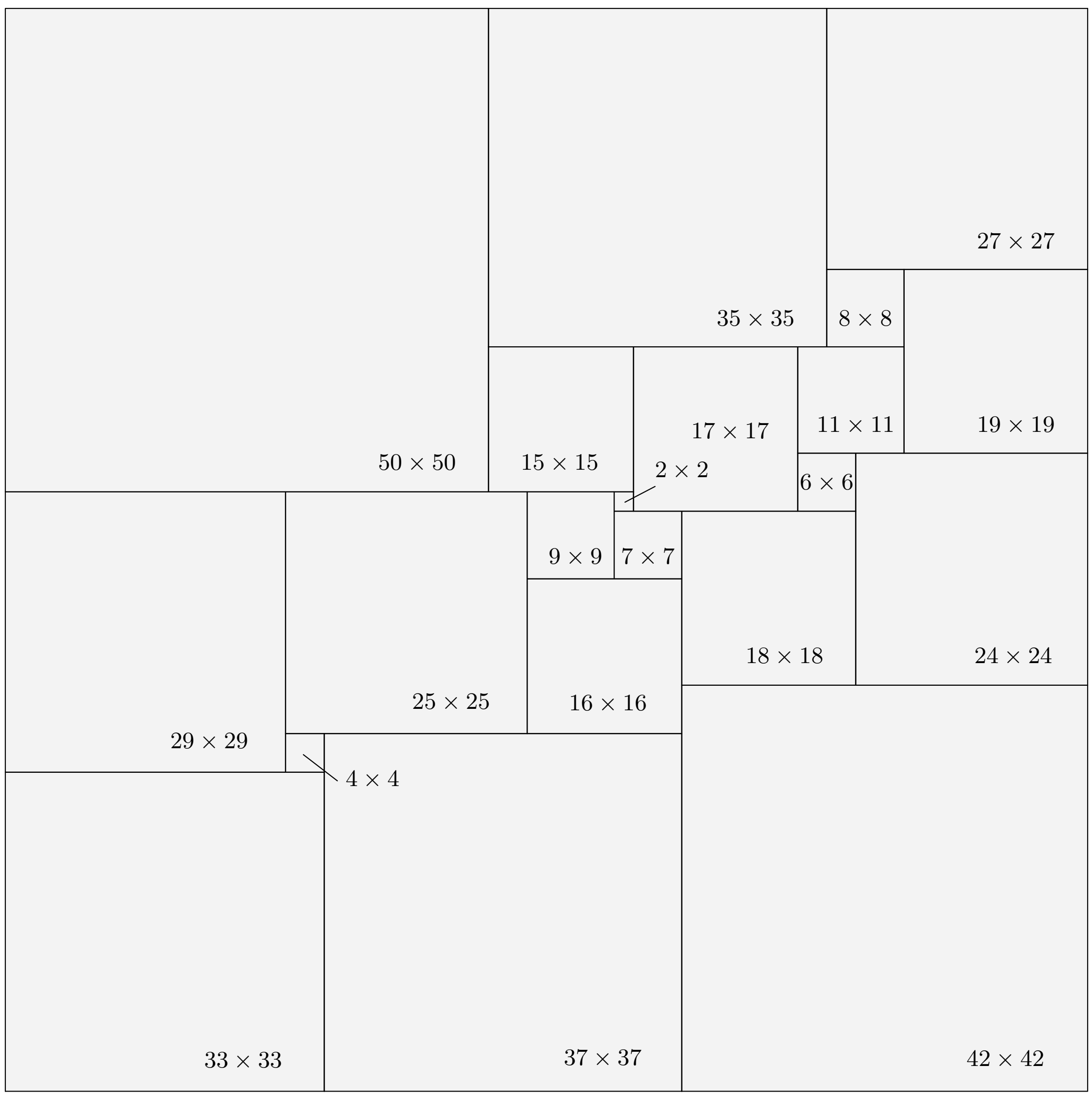
Bouwplannen Perfecte Vierkanten

Perfecte vierkanten

Een **perfect vierkant** van orde n is een vierkant dat opgedeeld is in n verschillende vierkanten waarvan geen twee vierkanten even groot zijn.

Het eerste perfecte vierkant werd in 1939 gevonden door Roland Sprague. Dit perfecte vierkant had orde 55. In de jaren daarop vond men nog meer perfecte vierkanten, ook van kleinere orde. In 1962 begon de Nederlandse informaticus Adrianus Duijvestijn een zoektocht naar het perfecte vierkant met de laagste orde. Het duurde nog tot 1978 voordat computers snel en krachtig genoeg waren om dit probleem op te lossen. Het perfecte vierkant met de laagste orde wordt opgebouwd met 21 kleinere vierkantjes en staat afgebeeld in Figuur 1.



Figuur 1: Perfect vierkant van orde 21.

Zelf een perfect vierkant bouwen

We kunnen een perfect vierkant construeren met vierkante stukjes karton. Als we als éénheden centimeter nemen, dan heeft het perfecte vierkant van orde 21 zijden van 112 cm. Dit is te groot, laten we daarom alles herschalen met factor $\frac{1}{4}$. De zijden zullen dan 28 cm zijn. Om het perfecte vierkant van orde 21 te bouwen hebben we dan de vierkante stukjes karton nodig uit Tabel 1.

grootte	uit te knippen	grootte	uit te knippen	grootte	uit te knippen
2×2	$0,5$ cm op $0,5$ cm	15×15	$3,75$ cm op $3,75$ cm	27×27	$6,75$ cm op $6,75$ cm
4×4	1 cm op 1 cm	16×16	4 cm op 4 cm	29×29	$7,25$ cm op $7,25$ cm
6×6	$1,5$ cm op $1,5$ cm	17×17	$4,25$ cm op $4,25$ cm	33×33	$8,25$ cm op $8,25$ cm
7×7	$1,75$ cm op $1,75$ cm	18×18	$4,5$ cm op $4,5$ cm	35×35	$8,75$ cm op $8,75$ cm
8×8	2 cm op 2 cm	19×19	$4,75$ cm op $7,75$ cm	37×37	$9,25$ cm op $9,25$ cm
9×9	$2,25$ cm op $2,25$ cm	24×24	6 cm op 6 cm	42×42	$10,5$ cm op $10,5$ cm
11×11	$2,75$ cm op $2,75$ cm	25×25	$6,25$ cm op $6,25$ cm	50×50	$12,5$ cm op $12,5$ cm

Tabel 1: Bouwplan voor het perfecte vierkant van orde 21.

Omdat er aan bovenstaand perfect vierkant nog weinig uitdagend puzzelwerk is, staan in Tabel 2 de benodigdheden om 8 perfecte vierkanten te construeren van orde 22. Spreek af met je collega-studenten welke kolom van vierkanten jij zult uitknippen en wissel dan de puzzels uit. Markeer op elk stukje ook welke grootte het heeft (niet de herschaalde grootte) en tot welke puzzel het behoord (van 1 tot 8).

gr	$\frac{1}{4}$·gr	gr	$\frac{1}{4}$·gr	gr	$\frac{1}{4}$·gr	gr	$\frac{1}{4}$·gr	gr	$\frac{1}{4}$·gr	gr	$\frac{1}{4}$·gr	gr	$\frac{1}{4}$·gr	gr	$\frac{1}{4}$·gr
2	0.5	1	0.25	1	0.25	1	0.25	2	0.5	2	0.5	1	0.25	4	1
3	0.75	2	0.5	2	0.5	3	0.75	4	1	5	1.25	2	0.5	8	2
4	1	3	0.75	3	0.75	4	1	8	2	9	2.25	3	0.75	9	2.25
6	1.5	4	1	4	1	5	1.25	10	2.5	11	2.75	4	1	10	2.5
7	1.75	6	1.5	7	1.75	8	2	11	2.75	16	4	9	2.25	12	3
8	2	8	2	8	2	9	2.75	12	3	17	4.25	11	2.75	14	3.5
12	3	9	2.25	10	2.5	17	4.25	15	3.75	19	4.75	13	3.25	17	4.25
13	3.25	12	3	17	4.25	20	5	19	4.75	21	5.25	16	4	19	4.75
14	3.5	14	3.5	18	4.5	21	5.25	21	5.25	22	5.5	17	4.25	26	6.5
15	3.75	16	4	20	5	23	5.75	22	5.5	24	6	18	4.5	28	7
16	4	17	4.25	21	5.25	25	6.25	23	5.75	26	6.5	19	4.75	31	7.75
17	4.25	18	4.5	22	5.75	26	6.5	25	6.25	30	7.5	22	5.5	35	8.75
18	4.5	19	4.75	24	6	29	7.25	26	6.5	31	7.75	24	6	36	9
21	5.25	21	5.25	27	6.75	31	7.75	32	8	33	8.25	33	8.25	37	9.25
22	5.5	22	5.5	28	7	32	8	34	8.5	35	8.75	36	9	41	10.25
23	5.75	23	5.75	29	7.25	40	10	37	9.25	36	9	38	9.5	47	11.75
24	6	24	6	30	7.5	43	10.75	41	10.25	41	10.25	39	9.75	49	12.25
26	6.5	26	6.5	31	7.75	44	11	43	10.75	46	11.5	42	10.5	57	14.25
27	6.75	27	6.75	32	8	47	11.75	45	11.25	47	11.75	44	11	59	14.75
28	7	28	7	38	9.5	48	12	47	11.75	50	12.5	53	13.25	62	15.5
50	12.5	50	12.5	59	14.75	52	13	55	13.75	52	13	75	18.75	71	17.75
60	15	60	15	80	20	55	13.75	59	14.75	61	15.25	97	24.25	86	21.5

Tabel 2: De 8 bouwplannen voor alle perfecte vierkanten van orde 22.

Het construeren van een perfect vierkant is een ganse uitdaging. Zonder hulp van computers is het bijna onmogelijk om alle perfecte vierkanten te vinden van een gegeven orde. Het in elkaar puzzelen van een perfect vierkant als je alle vierkanten krijgt waaruit het opgebouwd is wel haalbaar. Veel puzzelplezier!

De oplossingen

We geven nu nog de oplossingen van de acht perfecte vierkanten van orde 22. Om niet elk perfect vierkant te moeten tekenen maken we gebruik van een eenvoudige notatie (deze staat in de literatuur bekend als de Bouwkamp code). In deze notatie gebruiken we rechthoekige haakjes om naast elkaar liggende vierkanten, waarbij de bovenkanten van de vierkanten steeds op dezelfde hoogte liggen, te groeperen. De groepjes worden dan sequentieel geplaatst in de hoogste en meest linkse positie. Zo is de Bouwkamp code van het perfecte vierkant van orde 21 uit Figuur 1 gegeven door:

$$[50, 35, 27], [8, 19], [15, 17, 11], [6, 24], [29, 25, 9, 2], [7, 18], [16], [42], [4, 37], [33].$$

De Bouwkamp codes voor de 8 perfecte vierkanten van orde 22 zijn

1. $[60, 50], [23, 27], [24, 22, 14], [7, 16], [8, 6], [12, 15], [13], [2, 28], [26], [4, 21, 3], [18], [17]$;
2. $[60, 50], [27, 23], [24, 22, 14], [4, 19], [8, 6], [3, 12, 16], [9]], [2, 28], [26], [21], [1, 18], [17]$;
3. $[80, 59], [21, 38], [29, 28, 17, 27], [7, 10], [18, 20], [4, 3], [32, 8], [1, 31], [30], [24, 2], [22]$;
4. $[55, 44, 48], [40, 4], [52], [26, 29], [23, 3], [20, 31, 21], [5, 47], [43], [9, 17], [1, 8], [32], [25]$;
5. $[59, 43, 45], [41, 2], [47], [34, 25], [21, 37, 8], [55], [22, 12], [10, 23], [32], [11, 26], [19, 4], [15]$;
6. $[61, 52, 41], [11, 30], [9, 35, 19], [46, 24], [16, 33], [22, 2], [36, 17], [50], [47, 21], [5, 31], [26]$;
7. $[97, 75], [22, 53], [39, 42, 38], [9, 44], [4, 19, 13, 2], [36, 3], [11], [33, 16], [24], [1, 18], [17]$;
8. $[86, 49, 57], [41, 8], [28, 37], [19, 9], [47, 35, 4], [31, 14], [10, 36], [17, 26], [12, 71], [62], [59]$.