Tahiri
Wissam
Ing 1 Info

Devoir
Algorithmie

II/ Objectifs et résultats préliminaires

1) Soit A une matrice inversible $n \times n$.

Symétrie :

Soit $P = A^T A$, $P^T = (A^t A)^t$ or $(MN)^t = N^t \times M^t$

ainsi $P^t = A^t \times (A^t)^t = A^t \times A = P$

donc P est symétrique alors $A^t A$ est symétrique

Positivité : Soit x un vecteur $\in \mathbb{R}^{n*}$

$x^T A^T A x \Leftrightarrow (Ax)^T (Ax)$ or $(Ax)_{i,j} = (Ax)^T_{j,i}$

Soit $Ax = B$ alors $B^t B = \sum_{i,j=0}^{n} B^t_{j,i} \times B_{i,j}$

$$= \sum_{i,j=0}^{n} B_{i,j}^2$$

Ainsi $x^t A^t A x > 0$ car les coefficients sont au carré

2) On a $(A^t A)^{-1} A^t$ or $(MN)^{-1} = N^{-1} M^{-1}$ si MN est inversible

donc $A^{-1} (A^t)^{-1} A^t = A^{-1} \times Id = A^{-1}$

3) Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1, x_2 sont de taille $\frac{n}{2}$

Ainsi comme en 1) on obtient

$$x^t (A^t A) x = \begin{bmatrix} x_1^t & x_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & C^t \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x^t (A^t A) x = x_1^t B x_1 + 2 x_1^t C^t x_2 + x_2^T D x_2$$

Si nous procédons ainsi pour S on a

$$x^t S x = x_2^t D x_2 - x_2^t C B^{-1} C^t x_2$$

Ainsi montrons que $x^t S x$ est définie positive ssi $x^t (A^t A) x > 0$

$\Rightarrow$ Supposons que $x^t (A^t A) x > 0$, alors

$x_1^t B x_1 + 2 x_1^t C^t x_2 + x_2^T D x_2 > 0$, car B est symétrique et définie positive car B est inversible (car B^{-1} existe).

$\Leftarrow$ Supposons que $x^t S x > 0$. Alors

$x_2^t D x_2 - x_2^t C B^{-1} C^t x_2 > 0$, et donc logiquement

$x_1^t B x_1 + 2 x_1^t C^t x_2 + x_2^T D x_2 > 0$.

Ainsi $x^t (A^t A) x > 0 \Leftrightarrow x^t S x > 0$

4) $$\begin{bmatrix} B & C^T \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1} C^T S^{-1} C B^{-1} & -B^{-1} C^T S^{-1} \\ -S^{-1} C B^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Id + \overbrace{C^T S^{-1} C B^{-1} - C^T S^{-1} C B^{-1}}^{0} & \overbrace{-C^T S^{-1} + C^T S^{-1}}^{0} \\ C B^{-1} + C B^{-1} C^T S^{-1} C B^{-1} - D S^{-1} C B^{-1} & -C B^{-1} C^T S^{-1} + D S^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Id & 0 \\ C B^{-1} + \underbrace{(C B^{-1} C^T - D)}_{-S} S^{-1} C B^{-1} & \underbrace{(-C B^{-1} C^T + D)}_{S} S^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Id & 0 \\ \underbrace{C B^{-1} - C B^{-1}}_{0} & Id \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}$$

Ainsi $(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1} C^T S^{-1} C B^{-1} & -B^{-1} C^T S^{-1} \\ -S^{-1} C B^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}$

III / Algo et analyse de sa complexité

Avec la multiplication standard

1) Calculer $A^tA = n^3$

2) inverse de $B = \mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right)$

$CB^{-1} = n^3$ $\quad B^{-1}C^t = n^3$

$S = n^3$ (pour $CB^{-1} \times C^T$) $+ n^2$ (pour l'addition)

$S^{-1} = \mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right)$

$S^{-1}CB^{-1} = n^3$

$B^{-1}C^t_{\times}S^{-1}CB^{-1} = n^3$ car ils sont déjà calculés précedemment

$B^{-1} + B^{-1}C^t_{\times}S^{-1}CB^{-1} = n^2$

3) $(A^tA)^{-1}$ = calculé en 2)

$(A^tA)^{-1}A = n^3$

Ainsi

$$\mathcal{C}(n) = 7n^3 + 2n^2 + 2\,\mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right)$$

(Avec Strassen, remplacer n^3 par $n^{2,807}$)

$$\Leftrightarrow \mathcal{C}(n) = 2\,\mathcal{C}\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^3)$$

On a $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$

Or $c > \log_b(a) \Leftrightarrow 3 > \log_2(2) = 1$

Ainsi d'après le théorème maitre, on a que $C(n) = O(n^3)$ Pour Strassen on procède de la même manière et le théorème maitre nous donne que $C(n) = O(n^{2,807})$

Pour l'implémentation, le code marche très bien pour les matrices 2×2 et 4×4 (de toutes taille)

Vous pouvez voir les matrices test dans mat(x).txt et les réponses dans repmat(x).txt.

Elle marche dans les 2 sens (testez pour mat88.txt et repmat88.txt par exemple)

Cependant, Strassen mène à une erreur de segmentation