II/ Propriétés :

Soient f et g deux fonctions admettant chacune une transformée de Laplace et ayant p_0 et p_1 comme abscisse de cv absolue respective. Alors,

P_1/ linéarité : $(\alpha f+\beta g)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ admet une T.$\mathcal{L}$ et on a : $D = D_F \cap D_G$

$$\mathcal{L}(\alpha f+\beta g)(p) = \alpha\mathcal{L}(f)(p)+\beta\mathcal{L}(g)(p) \quad ; \ p > \sup(p_0,p_1)$$

Exple.

$$\mathcal{L}(t^2-3t+1)(p) = \mathcal{L}(t^2)(p) - 3\mathcal{L}(t)(p)+\mathcal{L}(1)(p)$$

$$= \frac{2}{p^3}-\frac{3}{p^2}+\frac{1}{p}, \quad p>0.$$

$\cos(at) = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$ $\Rightarrow \mathcal{L}(\cos(at)) = \frac12\left(\mathcal{L}(e^{iat})+\mathcal{L}(e^{-iat})\right) = \frac12\left[\frac{1}{p-ia}+\frac{1}{p+ia}\right]$

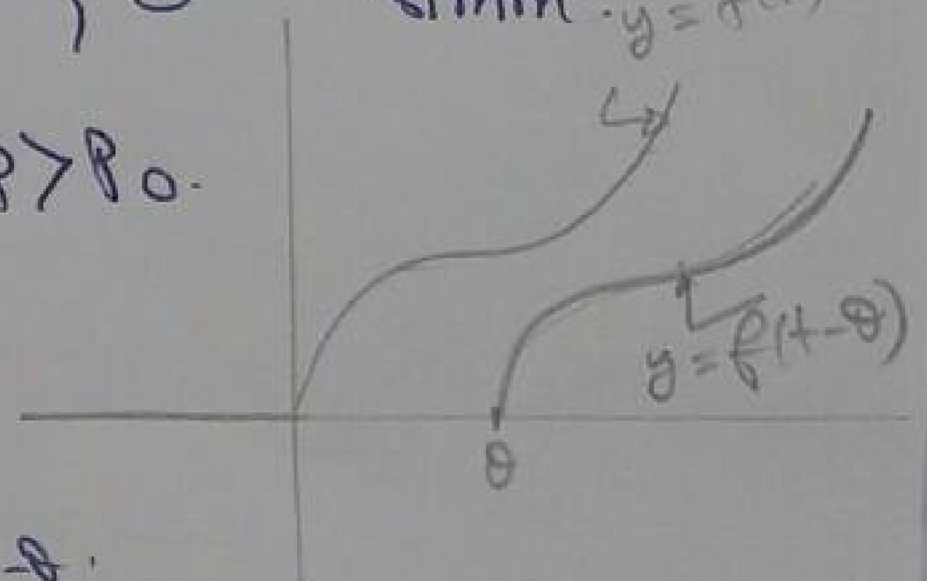
P_2/ Fonction retardée :

on considère une fonction f de transformée de Laplace F et d'abscisse de cv absolue p_0. Soit $\theta>0$, on pose :

$$g(t) = f(t-\theta)\,\mathcal{U}(t-\theta) = \begin{cases} f(t-\theta) & \text{si } t\geq\theta \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

alors,

$$\mathcal{L}(g)(p) = e^{-p\theta}\mathcal{L}(f)(p), \quad p>p_0.$$



en effet :

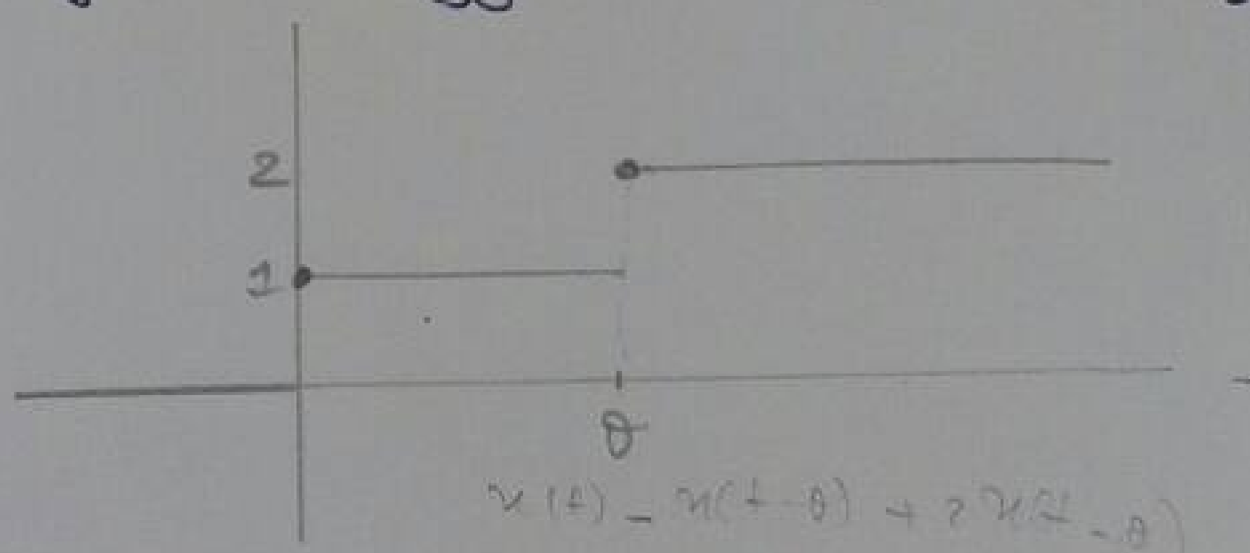
$$\mathcal{L}(g)(p) = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}\,dt$$

$$= \int_\theta^{+\infty} f(t-\theta)e^{-pt}\,dt \quad \text{posons } y=t-\theta,\ dy=dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(y) e^{-p(y+\theta)}\,dy = e^{-p\theta}\int_0^{+\infty} f(y)e^{-py}\,dy = e^{-p\theta}\mathcal{L}(f)(p)$$

Exple :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1 & 0\leq t<\theta \\ 2 & t\geq\theta \end{cases}$$



$\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-\theta) + 2\,\mathcal{U}(t-\theta)$

$$g(t) = \mathcal{U}(t)+\mathcal{U}(t-\theta)$$

on sait que $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t))(p) = \frac1p$.

donc

$$\mathcal{L}(g)(p) = \mathcal{L}(\mathcal{U})(p)+\mathcal{L}(\mathcal{U}(t-\theta))(p)$$

$$= \mathcal{L}(\mathcal{U})(p)+e^{-p\theta}\mathcal{L}(\mathcal{U})(p)$$

$$= \frac1p + e^{-p\theta}\frac1p$$

$$= \frac{1+e^{-p\theta}}{p}.$$

$g(t) = (t-1)^3, \ t\geq0$

$h(t) = \begin{cases}(t-1)^3 & \text{si } t\geq1 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

$\mathcal{L}(h) = e^{-p}\mathcal{L}(t^3)(p)$
$= e^{-p}\frac{3!}{p^4}$

P3) Produit par e^{at}, $a \in \mathbb{R}$:
la fonction $e^{at} f(t)$ admet une transformée de Laplace son abscisse de conv absolue est $p_0 + a$ et on a :

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(p) = \mathcal{L}(f)(p-a) \quad , \forall p > p_0 + a$$

<u>en effet</u> :

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} \, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} \, dt .$$

$$= \mathcal{L}(f)(p-a) . \quad \text{avec } p - a > p_0 .$$

<u>Exple</u> :

- $\mathcal{L}(e^{-at})(p) = \mathcal{L}(e^{-at} 1)(p) = \mathcal{L}(1)(p+a) = \frac{1}{p+a}$,
- $\mathcal{L}(e^{4t} \sin t)(p) = \mathcal{L}(\sin t)(p-4) = \frac{1}{(p-4)^2+1}$.

P4) changement d'échelle : pour tout $a > 0$, la fonction $f(at)$ admet une transformée de laplace d'abscisse de conv absolue $a p_0$ et on a :

$$\mathcal{L}(f(at))(p) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{a}\right) , \quad p > a p_0 .$$

<u>en effet</u>.

$$\mathcal{L}(f(at))(p) = \int_0^{+\infty} f(at) e^{-pt} \, dt \qquad , \; y = at \; , \; dy = a\,dt .$$

$$= \int_0^{+\infty} f(y) e^{-p \cdot \frac{y}{a}} \cdot \frac{1}{a} dy = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(y) e^{-\frac{p}{a} y} \, dy$$

$$= \frac{1}{a} \mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{a}\right) \quad ; \frac{p}{a} > p_0 .$$

<u>Exple</u>

- $\mathcal{L}(e^{at})(p) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(e^{t})\left(\frac{p}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{p}{a} - 1} = \frac{1}{p-a}$.
- $\mathcal{L}(\cos(\omega t))(p) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}(\cos t)\left(\frac{p}{\omega}\right)$

$$= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} .$$

- $\mathcal{L}(\sin(\omega t))(p) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}(\sin t)\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

P5) Fonction périodique :
si f est une fonction T-périodique (cad $f(t+T) = f(t)$)
alors :

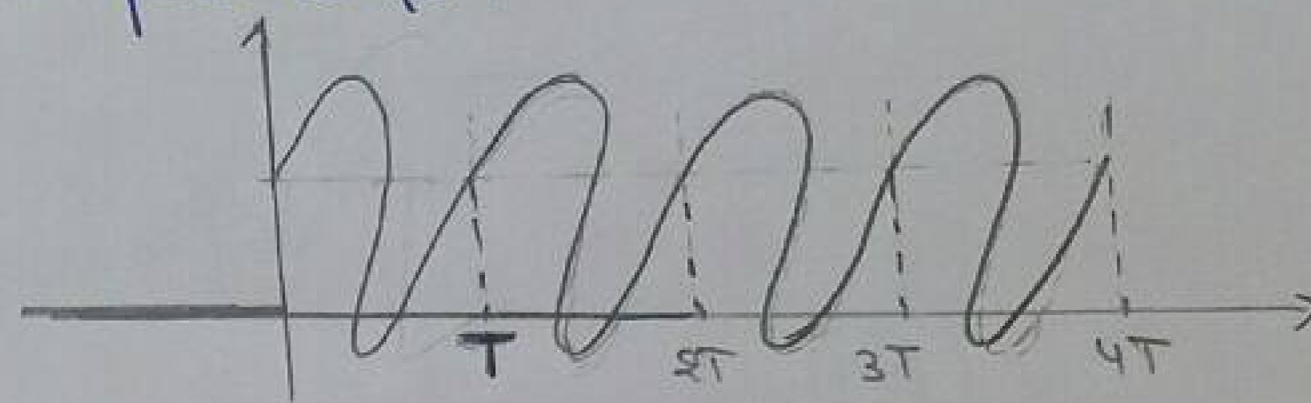
$$\mathcal{L}(f(t) \mathcal{U}(t))(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^{T} f(t) e^{-pt} \, dt \qquad p > p_0 .$$

En effet : Soit $T > 0$.

f : fonction périodique de période T pour $t \geq 0$
et identiquement nulle pour $t < 0$.

On remarque que :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots\dots$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$$



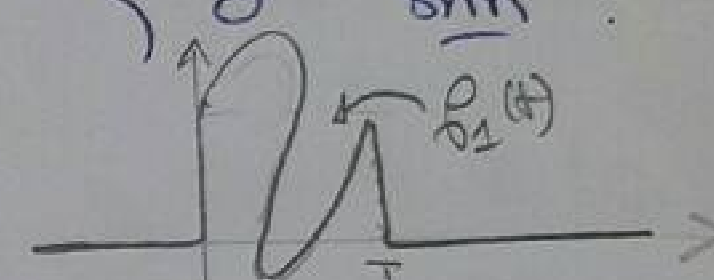
avec :

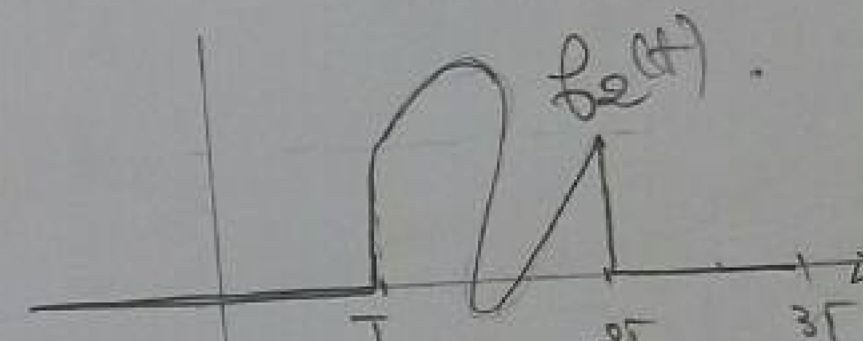
$$f_1(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad f_2(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [T, 2T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [2T, 3T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad f_n(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [(n-1)T, nT] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme f est T-périodique on a :

$$f_2(t) = f_1(t-T)\, u(t-T).$$
$$f_3(t) = f_1(t-2T)\, u(t-2T).$$
$$\vdots$$
$$f_{n+1}(t) = f_1(t-nT)\, u(t-nT)$$





donc :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_1(t-nT)\, u(t-nT).$$

Alors :

$$\mathcal{L}(f)(p) = F(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{L}\big(f_1(t-nT)\, u(t-nT)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nTp}\, \mathcal{L}(f_1)(p).$$

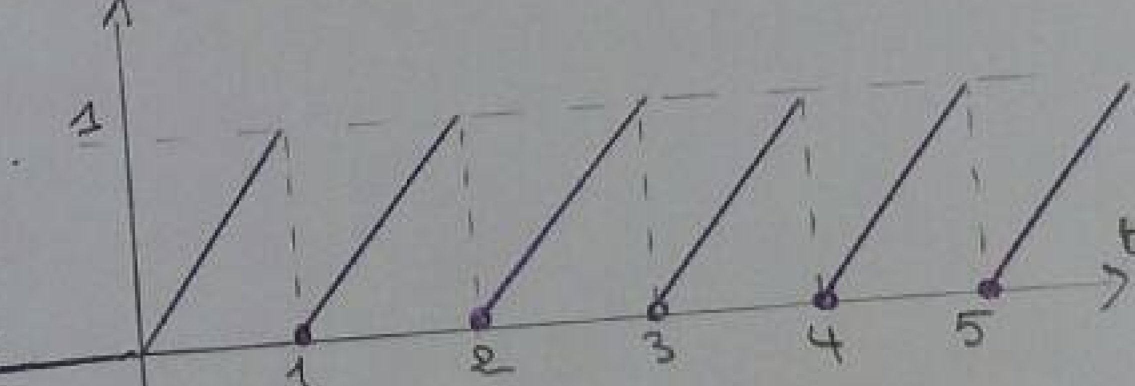
$$= \mathcal{L}(f_1)(p) \cdot \frac{1}{1-e^{-pT}} = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t)\, e^{-pT}\, dt.$$

Exple :

Calculer la T.$\mathcal{L}$ du signal rampe correspond à la fonction f nulle pour $t<0$ et 1-périodique sur $\mathbb{R}_+$ et définie par $f(t) = t$ pour $0 \leq t < 1$.

Rép :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{1-e^{-p}} \int_0^1 t\, e^{-pt}\, dt$$



avec

$$\int_0^1 t\, e^{-pt}\, dt = \left[-t\,\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-pt}}{p}\, dt$$
$$= -\frac{e^{-p}}{p} + \frac{1}{p}\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^1$$
$$= -\frac{e^{-p}}{p} + \frac{1}{p}\left(-\frac{e^{-p}}{p} + \frac{1}{p}\right) = -\frac{e^{-p}}{p} + \frac{1-e^{-p}}{p^2}.$$

donc : $$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p(1-e^{-p})}$$

Produit de Convolution :

Déf : on appelle produit de Convolution de deux fnct° f et g et on note $f*g$, la fnct° définie par :

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx .$$

Rque :

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx \underset{dy=-dx}{\overset{y=t-x}{=}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y)\, g(y)\, dy = (g*f)(t).$$

→ Supposons que f et g soient causale, c-à-d :

$$f(x) = g(x) = 0, \ \forall x < 0 .$$

alors :

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx \qquad f(x)=0 \ \forall x<0$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(x)\, g(t-x)\, dx \qquad g(t-x)=0 \ \forall\, t-x<0 \iff t<x$$

$$= \int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx$$

$$= \int_0^t g(x)\, f(t-x)\, dx .$$

théo :

la transformée de laplace de $(f*g)$ est donnée par :

$$\mathcal{L}((f*g)(t))(p) = \mathcal{L}(f)(p)\, \mathcal{L}(g)(p) .$$

R) l'intérêt du produit de conv est qu'il permet de Déterminer l'original d'un produit de deux transformées de laplace

Exple :

$y(t) = 1 \ \forall t \Rightarrow (y*y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt$ div.

$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

alors $(y*y)(t) = \int_0^t dx = t \Rightarrow \mathcal{L}(y*y)(p) = \mathcal{L}(t) = \frac{1}{p^2}$

$\mathcal{L}(y).\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1).\mathcal{L}(1) = \frac{1}{p}.\frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}$