TD2 : codage canal

Exercice 1 :

$m = 7$; $g(x) = x^3 + x^2 + 1$

1) dimension $\Rightarrow k = 4$

2) $g(x)$: comment vérifier c'est un polynome génératrice.

$$x^m + 1 = g(x) \cdot h(x).$$

je dois vérifier que reste = 0.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^7} + 1 & x^3 + x^2 + 1 \\ \cline{2-2} \cancel{x^7} + x^6 + x^4 & x^4 + x^3 + x^2 + 1 \\ \hline \cancel{x^6} + x^4 + 1 & \\ \cancel{x^6} + x^5 + x^3 & \\ \hline \cancel{x^5} + \cancel{x^4} + x^3 + 1 & \\ \cancel{x^5} + \cancel{x^4} + x^2 & \\ \hline x^3 + x^2 + 1 & \\ & \\ 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow R = 0$.

Interpertation obligatoire

$\rightarrow$ $g(x)$: génère un code cyclique de longueur $m = 7$

3)

$$G = {}_{4}\overset{7}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

4/ $h(x) = ?$ $\quad x^7 + 1 = g(x) \cdot h(x)$.

D'après (2)

$h(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

5/ $h(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6/ $m = (1011) \Rightarrow m(x) = x^3 + x + 1$

$\Rightarrow c(x) = m(x) \cdot g(x)$

$= (x^3 + x + 1) \cdot (x^3 + x^2 + 1)$

$= x^6 + x^5 + \cancel{x^3} + x^4 + x^3 + x + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + 1$

$= x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

7/ $v = (0011101)$

$v(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$.

$$\begin{array}{l|l} \overset{v(x)}{\cancel{x^4} + \cancel{x^3} + x^2 + 1} & x^3 + x^2 + 1 = g(x) \\ \cline{2-2} \cancel{x^4} + \cancel{x^3} + x & x \\ \hline \end{array}$$

$R(x) = x^2 + x + 1$.

$R(x) \neq 0 \Rightarrow$ msg erroné

msg corrigé : $V(x) + R(x)$

$x^4 + x^3 + \cancel{x^2} + \cancel{1} + \cancel{x^2} + x + \cancel{1}$

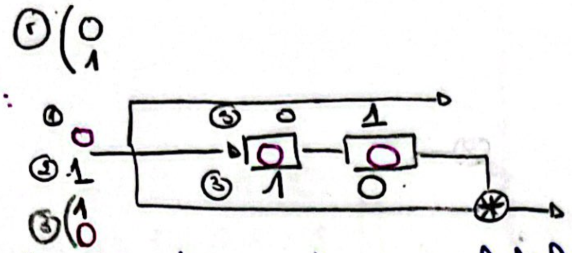
↳ $x^4 + x^3 + x$: corrigé

Décode

$c(x) = m(x) \cdot g(x)$

- TD1 -

Ex1 :

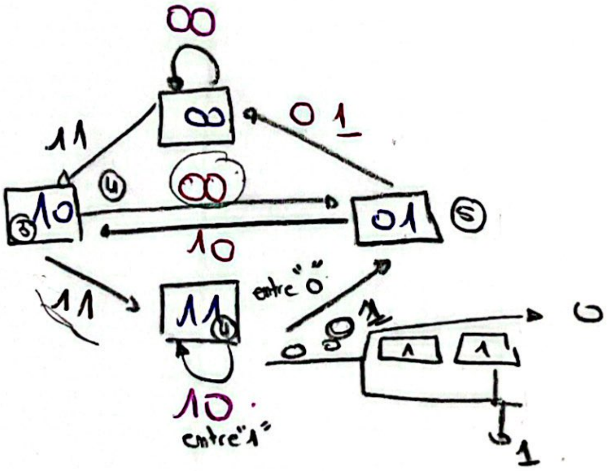


① il s'agit d'un code convolutif systematique

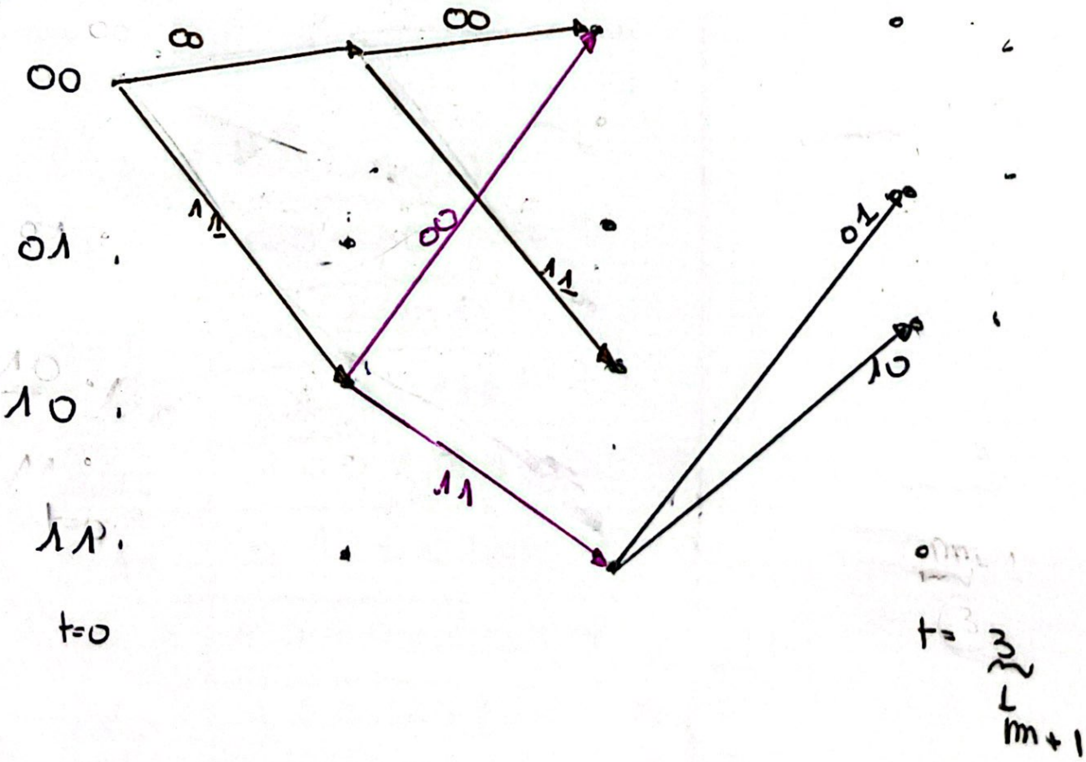
2) Rendement $R = \frac{k}{n} = \frac{1}{2}$.

3) $\begin{cases} s_{1m} = x_m \\ s_{2m} = x_m \oplus x_{m-2} \end{cases}$

4/



5).



- TD 1 -

EX1:

$$G = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{m} \Big\updownarrow k$$

1/

$$\begin{cases} k = 3 \text{ (dimension)} \\ m = 7 \text{ (longueur)} \end{cases}$$

Rendement $\frac{k}{m} = \frac{3}{7}$.

2/

3/

Mot d'info (m)	Mots code (c)
0 00	000 0000 poids = 0
001	00 11101 '' = 4
0 1 0	01 00 111 '' = 4
100	1 0 0 1 1 1 0 '' = 4
0 11	0 111 01011 = 4
10 1	1 0 1 0 0 1 1 '' = 4
110	1 1 0 1 0 0 1 '' = 4
111	1 1 1 0 1 0 0 '' = 4

- $d_{min} = 4$
- $d_{min} - 1 = 3$ (pouvoir détection)
- $E\left(\frac{d_{min} - 1}{2}\right) = E\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ (pouvoir de correction)

matrice de controle

Ex 5 :

$$H(7,4) = \left.\begin{pmatrix} \overbrace{0\,0\,0\;\;1\,1\,1\,1}^{m} \\ 0\,1\,1\;\;0\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,1\;\;0\,1\,0\,1 \end{pmatrix}\right\}_{m-k} \times \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}}_{v_1} = (\underbrace{0\,1\,1}_{\neq 0})$$

$\Rightarrow m = 7$

$k = 4$.

Donc existe erreur. colomne 3 Donc on a une erreur à le bit n° 3

2) $\underbrace{0\,1\,0\,0\,0\,1\,1}_{\substack{m=7\\v_1}} \,|\, \underbrace{1\,0\,\boxed{0}\,1\,0\,1\,0}_{\substack{m\\v_2}} \,|\, \underbrace{1\,1\,0\,1\,0\,0\,1}_{v_3}$

$\xrightarrow{k}$ 0 1 1 0 0 1 1

1 0 1 1 0 1 0 | 1 1 0 1 0 0 1

$\boxed{s = H \cdot {}^t v}$. pour décoder le message on a 3 Méthode.
sym

$H \cdot v_2 = (\underbrace{0\,1\,1}_{})$
colomne 3 ⇒ Donc erreur à la position 3.

$H \cdot v_3 = (0\,0\,0)$ ⇒ pas d'erreur
Donc c'est un mot code correcte

1) coder ⇒ on a besoin matrice generatrice

$\boxed{1}$ Methode $G = [I_k, P] \Rightarrow H = [{}^tP, I_{n-1}]$

$\underline{H \cdot G = \text{Matrice nulle}}$

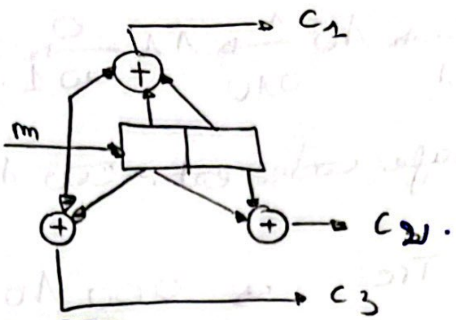
pour réalise ⇒ H on fait de permutation de colomne pour avoir une matrice identit

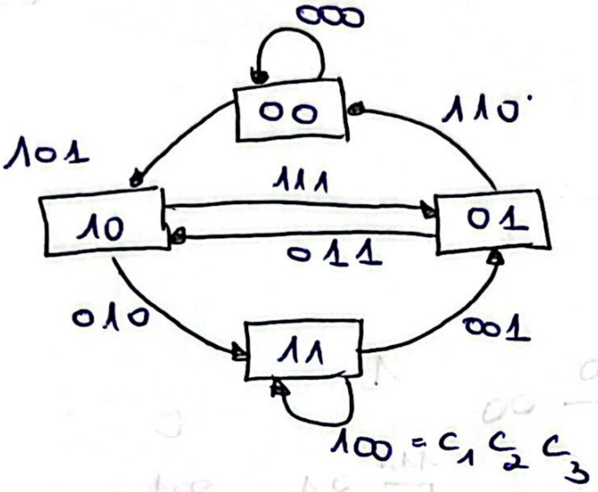
$H' = [{}^tP, I_{n-1}] \Rightarrow G = [I_n, P]$
on détermine G

et on code notre message.
on Divise on block de taille (k)

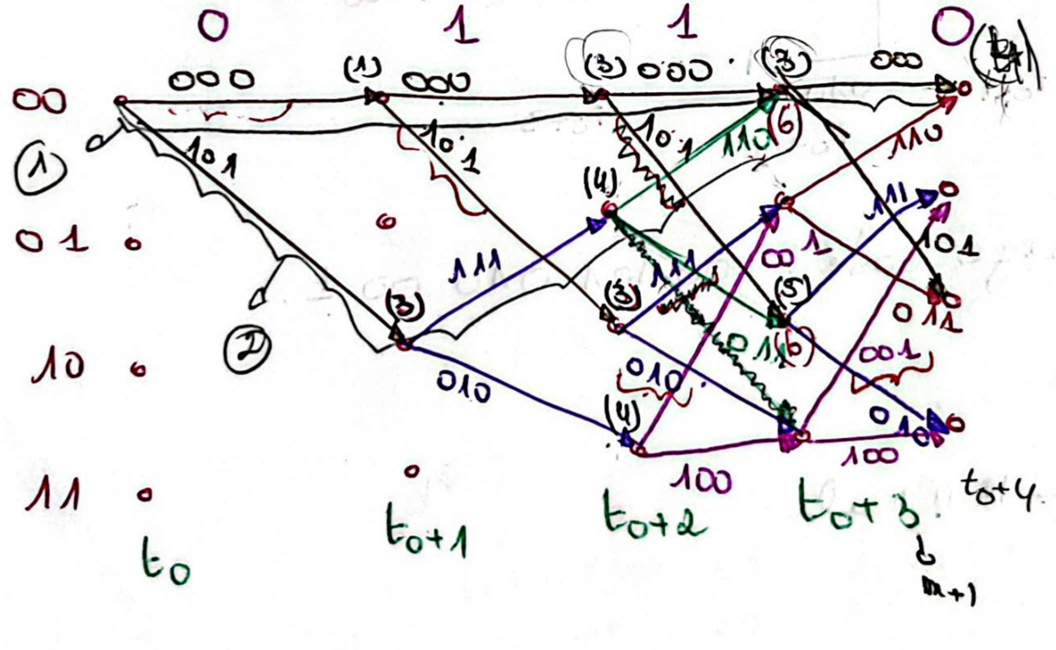
$G \cdot (v_i) =$

Ex 2:





④ 010 110 000 010



Le plus faib
et un

④ message corrigé 000 000 000 000

Message codé = 0 0 0 0

bonne sub

Méthode 1: 0110.

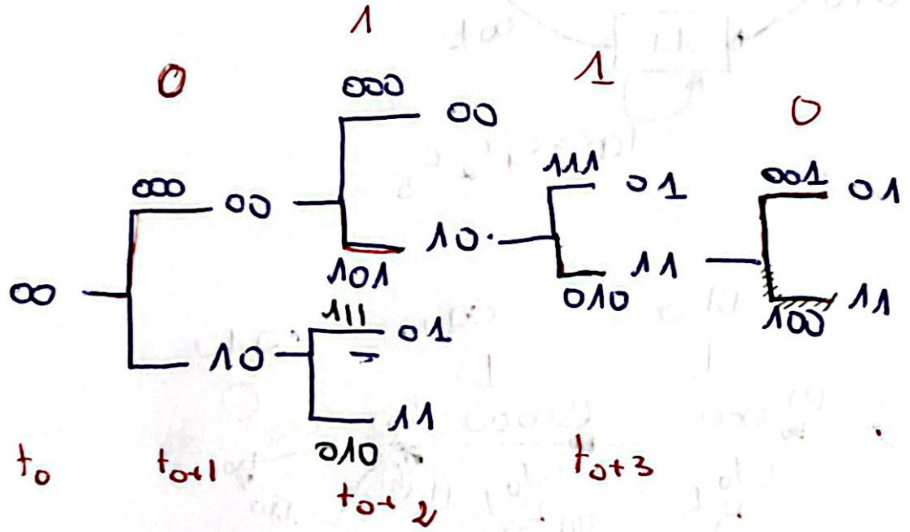
$$00 \xrightarrow[000]{0} 00 \xrightarrow[111]{1} 10 \xrightarrow[010]{1} 11 \xrightarrow[001]{0} 01.$$

Donc le message codé est: 000 111 010 001.

Méthode 2: Tre → 000 101 010 001

Méthode 3:

diagramme en Arbre:



le message codé: 000 101 010 001.

5/

Distance minimale.

à l'état initial. $t_0 \to t_{0+m+1}$

je veux revenir 00 → 00.

00 avec 2 chemin

(chemin directe → ②

$$\begin{array}{cccc} & 000 & 000 & 000 \\ + & 101 & 111 & 110 \\ \hline \end{array}$$

$d_{min} = 7$