Convolution

- $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,dt$ (produit de convolution)

- le produit $(f*g)$ existe si :
  1) f et g sont toutes les 2 à support borné
  2) // // bornée à gauche
  3) // // bornée à droite

- $(f*g) = (g*f)$
- $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha (f*h) + \beta (g*h)$
  $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha (f*g) + \beta (f*h)$
- $(f*g)$ est paire (resp impaire) si f et g sont de m̂ parité (resp de parité différents)
- ⚠ Dima ellirepresentation mta3ha ashal na5thou feha $(x-t)$

- $\langle S*T, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle$, $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

  où S_x (resp T_y) signifie que la distribution S (resp T) s'applique qu'à la variable x (resp y)

- Les dist à support bornée à gauche (resp à droite) peuvent être convolées entre elles
- Une distribution à support bornée peut être convolée avec n'importe quelle dist.
- Si $S*T$ existe, Alors : $S*T = T*S$
- Si $(S*T)$, $(S*U)$ et $(T*U)$ existent, Alors :
  $S*T*U = (S*T)*U = S*(T*U)$
- Si $(S*T)$ existe, alors on a :
  $(S*T)^{(n)} = S^{(n)} * T = S * T^{(n)}$; $n \in \mathbb{N}$

- $\langle T*\delta, \varphi \rangle = \langle T_x, \langle \delta_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle$
  $= \langle T_x, \varphi(x) \rangle = \langle T, \varphi \rangle$

- $T^{(n)} = T^{(n)} * \delta = T * \delta^{(n)}$

• f [illegible]

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ g \text{ est } \mathcal{E}^{\infty} \\ (S * T) \in D'(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \Rightarrow g(S * T) \in D'(\mathbb{R})$$

- $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$: $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi \longmapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

est une distribution (c-à-d : $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$), appelée dist régulière associé à f.

- $\langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$: distribution Heaviside

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \langle T_1, \varphi \rangle$

- $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$: distribution du Dirac en a

- on appelle support de T ($supp(T)$) le complémentaire de plus grand ouvert sur lequel T s'annule

- $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow gT$ est une distribution

$\Rightarrow \langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

- $\tau_a f(t) = f(t-a)$

$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T_f, \tau_{-a}\varphi \rangle$

- $\sigma(f)(t) = f(-t)$

$\langle \sigma(T), \varphi \rangle = \langle T, \sigma(\varphi) \rangle \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

- $h_a(f)(t) = f(at)$, $a \neq 0$

$\langle h_a T, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T, h_{\frac{1}{a}}\varphi \rangle \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

- $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (Dérivé

- $\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

- $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$:

$(gT)' = g'T + gT'$

- $T_H' = \delta$

- ⚠ en Tant qu'une fonction H n'est pas dérivab car elle n'est pas continue en 0

- $(T_f)' = T_{f'}$ ($(T_{\sin x})' = T_{\cos x}$) (si f est $\mathcal{C}$

- $T_f' = (f(a^+) - f(a^-))\delta_a + T_{f'}$ (fonction di

(si f est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\{\ldots\})$)

- ⚠ f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ est localement intg sur $\mathbb{R}$

Distribution

- on dit que f est à support compact : si $\text{supp}(f) = [A,B]$, $A, B \in \mathbb{R}$, $A < B$
  $\Rightarrow$ f est à supp compact ssi : $\exists [A,B]$ tq $f(x) = 0$, $\forall x \notin [A,B]$
- $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f$ est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\exists [A,B]$ tel que $f(x) = 0$ $\forall x \notin [A,B]$
- $\text{supp}\, \mathbb{1}_{[0,1]} = \text{supp}\, \mathbb{1}_{]0,1[} = [0,1]$
- pour Mq f est $\mathcal{C}^\infty$, il faut montrer d'abord que $f^{(k)}$ est continue $\forall K$.
- $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ si f est integrable sur tout compact de $\mathbb{R}$
  $\Rightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} / \int_a^b |f(x)|\, dx < +\infty \}$
- $L^1(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ avec $L^1(\mathbb{R})$ ensemble des fonctions integrables sur $\mathbb{R}$.

fonction Heavisicke :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- pour Mq une fonction est $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ il faut supposé qu'on a un intervalle $[a,b]$ sur $\mathbb{R}$ et on calcul $\int_a^b f\, dx$ (pour $\ln|x|$ on choisit $[-b,b]$)
- $\varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi$ ssi $\begin{cases} i)\ \text{il existe } [a,b] \text{ de } \mathbb{R} \text{ tq } \text{supp}(\varphi_n) \subset [a,b],\ \forall n \text{ et } \text{supp}(\varphi) \subset [a,b] \\ 2i)\ \sup_{x \in [a,b]} |\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| \to 0 \quad \forall K \end{cases}$
- $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi \Rightarrow \varphi_n' \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi'$
- T est une dist ssi : $\begin{cases} i/\ \langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha \langle T, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T, \varphi_2 \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \\ 2i/\ \langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi_n \to \varphi \end{cases}$

  Toute forme lineaire et continue T sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ds $\mathbb{C}$

  on note $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$
- T est nulle ssi : $\langle T, \varphi \rangle = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

  (T est nulle sur un ouvert O ssi : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ avec $\text{supp}\, \varphi \subset O$) $\langle T, \varphi \rangle = 0$.
- $T_1 = T_2$ ssi $\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

- Formule des sauts :

soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} / \bigcup_{k=1}^{n} a_k)$ tq $\forall k \in \{1, \dots n\}$

on a :

$f(a_k^+) = \lim_{x \to a_k^+} f(x)$ et $f(a_k^-) = \lim_{x \to a_k^-} f(x)$

existent et sont finies Alors :

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{k=1}^{n} (f(a_k^+) - f(a_k^-)) \delta_{a_k}$$

- distribution valeur principale de $\frac{1}{x}$:

$$\langle V_p(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right)$$

- on dit qu'une suite de distributions $(T_n)_{n \geq 0}$ Converge vers $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ssi :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle T, \varphi \rangle$$

- Si la suite de dist $(T_n)_{n \geq 0}$ Converge vers $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, Alors $(T_n')_{n \geq 0}$ Converge vers T'.

- ⚠ Si f est continue sur $[a, b]$, Alors $\exists c \in [a, b]$ tq $\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c)$

- $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$

si f est continue $\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$

- $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ on peut associe à f une dist T

- $x \in supp(\varphi') \Rightarrow x \in Supp(\varphi)$

$x \notin supp(\varphi) \Rightarrow x \notin Supp(\varphi')$

- soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ il existe $a > 0$ tq $supp(\varphi) \subseteq [-a, a]$

- $x \notin Supp(\varphi)$, Alors $\exists$ un ouvert V qui contient x tq $\varphi(x) = 0, \forall x \in V$

- $Supp(\varphi^{(k)}) \subseteq Supp(\varphi), \forall k$

- f est C.M $\Rightarrow f$ est localement intg

- $\int \ln x dx = x \ln x - x$

- $\lim_{0} x \ln x = 0$

- $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Rightarrow T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$\Rightarrow T_f$ est dérivable

- avant tout calcul de distribution, il faut le montrer que c'est une distribution

- gT_f est une distribution si :

$$\begin{cases} g \text{ est } \mathcal{C}^\infty \\ T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \end{cases}$$

- $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} = \text{sign}(x)$

- ⚠ Pour mq $\langle T, \varphi \rangle$ continue

  on pose $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \,/\, \varphi_n \longrightarrow 0$

  on majore $\langle T, \varphi_n \rangle$ par φ_n

  puis on dit que $\exists\, [a,b] \,/\, \text{supp}(\varphi_n) \subset [a,b], \forall n$

  $\Rightarrow \sup_{x \in [a,b]} |\varphi_n(x)| \int_a^b dx \leq (b-a) \sup |\varphi_n(x)| \longrightarrow 0$