République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Gabès
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès
Département Génie Electrique-Automatique

Cours Analyse Numérique

Réalisé par : DEHRI Khadija

Maitre Assistante en Génie Electrique-Automatique

Membre de Laboratoire de Recherche
Commande Numérique des Procédés Industriels (CONPRI)

République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Gabès
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès
Département Génie Electrique-Automatique

Chapitre 3
Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Réalisé par : DEHRI Khadija

Maitre Assistante en Génie Electrique-Automatique

Membre de Laboratoire de Recherche
Commande Numérique des Procédés Industriels (CONPRI)

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Introduction

On cherche à résoudre le système linéaire : $\underset{n\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{x} = \underset{n\times 1}{b}$

Les méthodes directes fournissent la solution en un nombre fini d'opérations (n<100)
Mais, si la taille du système est élevée, le nombre d'opérations est important. Or, les erreurs de calcul dépendent directement du nombre du calcul, donc le résultat n'est jamais rigoureusement égale à la solution exacte (il peut même en être très différent)

Méthodes itératives

L'idée de base de la méthode itérative est de construire une suite convergente de vecteur $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ qui converge vers la solution exacte

$$\bar{x} = A^{-1}b$$

On décompose A en **A=M-N** ou M est une matrice facile à inverser (diagonale, triangulaire ou diagonale par bloc, etc).

$$Mx = Nx + b$$

$$x = \underbrace{M^{-1}N}_{B}\, x + \underbrace{M^{-1}b}_{c}$$

$$= Bx + c$$

Système itérative

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \Re^n \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k = 1,2,3\dots \end{cases}$$

Matrice d'itération

Vecteur de données

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Conditions nécessaires et suffisantes de convergence

$$\begin{cases} x^{(0)} & \text{donné,} \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

Théorème 1

Théorème : S'il existe une norme matricielle subordonnée telle que

$$\|B\| < 1$$

Alors l'algorithme ci-dessus converge pour tout $x^{(0)}$ vers $\bar{x}$

Démonstration

Erreur

$$e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$$

Résidu

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

$$e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$$

$$= Bx^{(k-1)} + c - B\bar{x} - c \quad \Leftrightarrow \quad e^{(k)} = Be^{(k-1)} = B^k e^{(0)}$$

$$= B\left(x^{(k-1)} - \bar{x}\right)$$

$$\|e^{(k)}\| \le \|B^k\| \|e^{(0)}\| \le \|B\|^k \|e^{(0)}\| \quad \text{si } \|B\| < 1, \quad \|B\|^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Conditions nécessaires et suffisantes de convergence

Théorème 2

En général, les points suivants sont équivalents :

- B est une matrice convergente, (i.e. B^k tend vers 0)
- $\rho(B) < 1$
- $\|B\| < 1$

Démonstration

$$\|e^{(k)}\|_2 = \|B^k e^{(0)}\|_2 \le \left(\|B\|_2\right)^k \|e^{(0)}\|_2$$

$$\|e^{(k)}\|_2 \le \left(\rho(B)\right)^k \|e^{(0)}\|_2$$

05

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Conditions nécessaires et suffisantes de convergence

Théorème 3

Soit une méthode itérative : $Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b$

Si A est une matrice symétrique définie positive telle que si $A = M\text{-}N$ et $M + N^T$ est définie positive

Alors la méthode itérative est convergente

Démonstration

$$A \text{ symétrique définie positive } \Leftrightarrow \|x\|_A^2 = \sqrt{x^T A x}$$

$$\|M^{-1}Nx\|_A^2 = \|M^{-1}(M-A)x\|_A^2 = \|x - M^{-1}Ax\|_A^2$$

posons $y \equiv M^{-1}Ax \quad \Leftrightarrow \quad My = Ax$

$$\|x - M^{-1}Ax\|_A^2 = \|x-y\|_A^2 = (x-y)^T A(x-y)^T A = \|x\|_A^2 - x^T Ay - y^T Ax + y^T Ay$$

$$= \|x\|_A^2 - y^T M^T y - y^T My + y^T Ay = \|x\|_A^2 - y^T\left(M + N^T\right)y$$

on a donc : $\|x - M^{-1}Ax\|_A^2 < \|x\|_A^2 \Rightarrow \|M^{-1}N\|_A = \max_{x, \|x\|_A = 1} \|M^{-1}Nx\|_A < 1$

06

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Choix du méthode itérative convergente

En présence de deux méthodes itératives convergentes, la méthode la plus rapide est celle dans la matrice d'itération a le plus petit rayon spectral

Système itérative 1 $\begin{cases} x^{(0)} \in \Re^n \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k = 1,2,3\ldots \end{cases}$

Système itérative 2 $\begin{cases} \tilde{x}^{(0)} = x^{(0)} \in \Re^n \\ \tilde{x}^{(k+1)} = \tilde{B}\tilde{x}^{(k)} + \tilde{c}, \quad k = 1,2,3\ldots \end{cases}$

$$\rho(\mathrm{B}) < \rho(\tilde{\mathrm{B}}) < 1$$

Alors pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier N tel que :

$$k \geq N, \quad \sup_{\|x^{(0)} - \bar{x}\|} \left(\frac{\|\tilde{x}^{(k)} - \bar{x}\|}{\|x^{(k)} - \bar{x}\|} \right)^{1/k} \geq \frac{\rho(\tilde{B})}{\rho(B) + \varepsilon}$$

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Méthode de Jacobi

Le principe est de décomposer la matrice A comme suit :

A=D-E-F

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & \bigcirc \\ & a_{22} & \\ \bigcirc & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & & \bigcirc \\ & 0 & \\ -a_{ij} & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & -a_{ij} \\ \bigcirc & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

diagonale — triangulaire inférieure stricte — triangulaire supérieure stricte

On suppose $a_{ii} \neq 0 \quad i = 1 \text{ à } n$ donc **D** inversible.

$$A = M - N, \; B = M^{-1}N, c = M^{-1}b$$

SI $\begin{cases} x^{(0)} \in \Re^n \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k = 1,2,3\ldots \end{cases}$

$$A = D - E - F, \; M = D, \; N = E + F$$

SI $\begin{cases} x^{(0)} \in \Re^n \\ x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + c_J, \quad k = 1,2,3\ldots \end{cases}$

$$B_J = D^{-1}(E+F), \; c_J = D^{-1}b$$

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Méthode de Jacobi

Conditions nécessaires et suffisantes de convergence

Une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode de Jacobi converge

$$\rho(B_J) = \rho(D^{-1}(E+F)) < 1$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode de Jacobi converge : A et (D+E+F) deux matrices symétriques et définies positives

Théorème : Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Jacobi converge.

Démonstration

Jacobi :

$$x^{(k+1)} = (D)^{-1}\left(b-(E+F)x^{(k)}\right)$$

$$x^{(k+1)} = B_J x^{(k)} + c_J \quad \text{avec} \quad B_J = D^{-1}(E+F)\,, \quad c_J = D^{-1}b$$

$$\|B_J\|_\infty = \|D^{-1}(E+F)\|_\infty = \max_{i=1,n}\left(\frac{1}{|a_{ii}|}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right) < 1$$

Définition
Soit A une matrice(n,n) à valeurs réelles ou complexes. On dit que A est à diagonale strictement dominante si

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad i = 1 \text{ à } n$$

09

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Méthode de Jacobi

Exemple

Soit le système suivant :

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_2 + 2x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Décomposer A selon la méthode de Jacobi
Calculer les deux premières itérations

$$x^{(1)}, x^{(2)} \text{ avec } \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tester la convergence du système itératif

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0 \\ x_2^{(1)} = \frac{5}{2} \\ x_3^{(1)} = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{5}{4} \\ x_2^{(2)} = 1 \\ x_3^{(2)} = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^3 + \frac{\lambda}{2} = \lambda\left(\frac{1}{2} - \lambda^2\right) = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \lambda\right)$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

SI de Jacobi converge

$$\rho(B_J) = \max_{1\le i\le 3} \lambda_i = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

10

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Méthode de Jacobi

Condition d'arret : $\dfrac{\left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right\|}{\left\|\mathbf{x}^{(k)}\right\|} < \varepsilon$

Forme développée de Jacobi $$x_i^{(k+1)} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Algorithme de Jacobi

Données $A,\ b,\ x^{(0)},\ n,\ \varepsilon,\ \max\_iter$

début

pour $i=1$ à n faire

$x_i^{new} \leftarrow x_i^{0}$

fin pour

$nb \leftarrow 0$

tant que $\left(\left\|Ax^{new} - b\right\| > \varepsilon\right)$ et $\left(nb < \max\_iter\right)$ faire

$nb \leftarrow nb+1$

pour $i=1$ à n faire

$x_i^{old} = x_i^{new}$

fin pour

pour $i=1$ à n faire

$$x_i^{new} \leftarrow \frac{b_i - \sum_{j=1, i\neq j}^{n} a_{ij} x_j^{old}}{a_{ii}}$$

fin pour

fin tant que

fin

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Méthode de Gauss-Seidel

Le principe est de décomposer la matrice A comme suit :

A=D-E-F

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & & \\ & \mathbf{a_{22}} & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & \\ & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{-a_{ij}} & & \ddots & \\ & & & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & \\ & \mathbf{0} & \mathbf{-a_{ij}} & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

diagonale — triangulaire inférieure stricte — triangulaire supérieure stricte

On suppose $\mathbf{a_{ii} \neq 0 \quad i = 1 \text{ à } n}$ donc **D** inversible.

$$A = M - N,\ B = M^{-1}N,\ c = M^{-1}b$$

SI $\begin{cases} x^{(0)} \in \Re^n \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k = 1,2,3\ldots \end{cases}$

$$A = D - E - F,\ M = D - E,\ N = F$$

SI $\begin{cases} x^{(0)} \in \Re^n \\ x^{(k+1)} = B_{GS}x^{(k)} + c_{GS}, \quad k = 1,2,3\ldots \end{cases}$

$$B_{GS} = (D-E)^{-1}F,\ c_{GS} = (D-E)^{-1}b$$

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Méthode de Gauss-Seidel

Conditions nécessaires et suffisantes de convergence

Une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode de Gauss-Seidel converge

$$\rho(B_{GS}) = \rho((D-E)^{-1}F) < 1$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode de Gauss-Seidel converge :
A est une matrice symétrique et définie positive

Théorème : Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors la méthode de Gauss-Seidel converge.

Forme développée de Gauss-Seidel

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

13

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Méthode de Gauss-Seidel

Exemple

Soit le système suivant :

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 &= -18 \end{aligned}$$

Décomposer A selon la méthode de Gauss-Seidel
Calculer les deux premières itérations

$$x^{(1)}, x^{(2)} \text{ avec } \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tester la convergence du système itératif

$$x_1^1 = \frac{1}{3}(2-0+0) = \frac{2}{3}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{5}\left(17 - \frac{2}{3} - 0\right) = \frac{49}{15}$$

$$x_3^1 = -\frac{1}{6}\left(-18 - 2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{49}{15}\right) = \frac{241}{90}$$

$$x_1^2 = \frac{1}{3}(2 - \frac{49}{15} + \frac{241}{90}) = 0.47$$

$$x_2^2 = \frac{1}{5}\left(17 - 0.47 - 2\left(\frac{241}{90}\right)\right) = 2.235$$

$$x_3^2 = -\frac{1}{6}(-18 - 2(0.47) + 2.235) = 2{,}784$$

A à diagonale strictement dominante alors le SI de Gauss-Seidel converge

14

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Méthode de Gauss-Seidel

Condition d'arret : $\dfrac{\left\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\right\|}{\left\|\mathbf{x}^{(k)}\right\|}<\varepsilon$

Algorithme de Gauss-Seidel

Données $A, b, x^{(0)}, n, \varepsilon, \max\_iter$
début
pour $i=1$ à n faire
$x_i^{new} \leftarrow x_i^0$
fin pour
$nb \leftarrow 0$
tant que $\left(\left\|Ax^{new}-b\right\|>\varepsilon\right)$ et $(nb<\max\_iter)$ faire
$nb \leftarrow nb+1$
pour $i=1$ à n faire
$x_i^{old}=x_i^{new}$
fin pour
pour $i=1$ à n faire
$x_i^{new} \leftarrow \dfrac{b_i-\sum_{j=1,i\neq j}^{n} a_{ij}x_j^{old}}{a_{ii}}$
fin pour
fin tant que
fin

15

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Méthodes de relaxation

The Successive Over-Relation Method (SOR)

Les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont très facile à programmer mais leur convergence peut etre très lente pour certains systèmes : on les modifie en introduisant un paramètre w dit paramètre de relaxation :

Méthodes de résolution	matrice M	matrice N
Jacobi	$\mathbf{D}$	$\mathbf{E}+\mathbf{F}$
Gauss-Seidel	$\mathbf{D}$-$\mathbf{E}$	$\mathbf{F}$
Jacobi-S.O.R. avec $\omega \neq 0$	$\frac{1}{\omega}\mathbf{D}$	$\frac{1}{\omega}\mathbf{D}-\mathbf{A}$
GS-S.O.R. avec $\omega \neq 0$	$\frac{1}{\omega}\mathbf{D}-\mathbf{E}$	$(\frac{1}{\omega}-1)\mathbf{D}+\mathbf{F}$

$0<\omega<1$ sous-relaxation
$1<\omega<2$ sur-relaxation

Théorème : Si A est une matrice symétrique définie positive, la méthode de la relaxation converge pour : $0<\omega<2$

16

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Méthodes de relaxation

The Successive Over-Relation Method (SOR)

Forme développée de Jacobi avec relaxation

$$B_{Jw} = \left(\frac{D}{w}\right)^{-1}\left(\frac{D}{w} - A\right), \; c_{Jw} = \left(\frac{D}{w}\right)^{-1} b$$

$$x_i^{(k+1)} \leftarrow \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right] + (1-\omega) x_i^{(k)} \;,\; i = 1,\ldots,n$$

Forme développée de Gauss-Seidel avec relaxation

$$B_{GSw} = \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1}\left(\left(\frac{1}{w} - 1\right)D + F\right), \; c_{GSw} = \left(\frac{D}{w} - E\right)^{-1} b$$

$$x_i^{(k+1)} \leftarrow \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right] + (1-\omega) x_i^{(k)} \;,\; i = 1,\ldots,n$$

17

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Méthodes de relaxation

Exemple

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 30 \\ - x_2 + 4x_3 &= -24 \end{aligned}$$

Solution: **x=(3, 4, -5)'**

Table 7.3 Gauss-Seidel

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1	5.250000	3.1406250	3.0878906	3.0549316	3.0343323	3.0214577	3.0134110
$x_2^{(k)}$	1	3.812500	3.8828125	3.9267578	3.9542236	3.9713898	3.9821186	3.9888241
$x_3^{(k)}$	1	−5.046875	−5.0292969	−5.0183105	−5.0114441	−5.0071526	−5.0044703	−5.0027940

Table 7.4 SOR with $\omega = 1.25$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1^{(k)}$	1	6.312500	2.6223145	3.1333027	2.9570512	3.0037211	2.9963276	3.0000498
$x_2^{(k)}$	1	3.5195313	3.9585266	4.0102646	4.0074838	4.0029250	4.0009262	4.0002586
$x_3^{(k)}$	1	−6.6501465	−4.6004238	−5.0966863	−4.9734897	−5.0057135	−4.9982822	−5.0003486

18

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Méthodes de relaxation

Conditions nécessaires et suffisantes de convergence

Une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode de Jacobi avec relaxation converge

$$\rho(B_{Jw}) < 1$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode de Gauss-Seidel avec relaxation converge

$$\rho(B_{GSw}) < 1$$

1- En pratique, ω doit être pris dans $]0,2[$. C'est une condition nécessaire de convergence (ce sera vu dans la suite).

2- Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, alors les méthodes avec relaxation convergent si et seulement si $\omega \in [0\ 1[$.

Remarque :

La méthode ne peut être mise en œuvre que si $a_{ii} \neq 0$, pour i=1 à n

19

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Méthodes de relaxation

Démonstration

$$B_{GS\omega} = (D - \omega E)^{-1}[(1-\omega)D + \omega F]$$

$$\det(B_{GS\omega}) = \frac{(1-\omega)^n \det(D)}{\det(D)} = (1-\omega)^n$$

$$(1-\omega)^n = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \lambda_i \in \sigma(B_{GS\omega})$$

$$|1-\omega|^n \leq \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq \rho(B_{GS\omega})^n$$

$$|1-\omega| \leq \rho(B_{GS\omega})$$

$$\rho(B_{GSw}) < 1 \qquad w \in]0,2[$$

20

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Matrices Tridiagonales

Soit A une matrice symétrique définie positive, et tri-diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\rho\ B_{GS} = \rho\ B_J^{\ \ 2}$$

La méthode de Gauss-Seidel converge (ou diverge) plus vite que la méthode de Jacobi

Théorème Soit A une matrice tridiagonale telles que les valeurs propres de J soient réelles. Alors les méthodes de Jacobi et de relaxation convergent ou divergent simultanément pour ω ∈]0, 2[. Si elles convergent, la fonction

$w_{optimal} = \min\ \rho(B_{GSw}),\ w \in 0\ \ 2$

$$w_{optimal} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho\ B_J^{\ \ 2}}} > 1$$

$$\rho\ B_{GSw_{optimal}} = w_{optimal} - 1$$

Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

Conclusion

L'utilisation des méthodes itératives est généralement plus avantageux lorsque celles-ci convergent

La méthode de Gauss-Seidel converge souvent plus vite que la méthode de Jacobi.

La méthode de relaxation nécessite la connaissance d'une valeur optimale du paramètre de relaxation ω.

La convergence des méthodes de résolution itératives se testent généralement en utilisant un paramètre de tolérance ε tel que :

$$\frac{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|}{\left\| x^{(k)} \right\|} < \varepsilon \text{ ou } \left\| Ax^{(k+1)} - b \right\| < \varepsilon$$

ε un réel positif « petit » à choisir en fonction du problème

Pour en prendre en compte les cas où la méthode itérative ne converge pas ou trop lentement, on introduit un nombre d'itérations maximum à ne pas dépasser.