ENIG	*Devoir de Contrôle Antennes et propagation libre*	*Ens :M. Benzina H*
Année Universitaire : 2019/2020		*Durée : 01h30*
		Section :GCR2

N.B: Lorsqu'on demande d'établir une expression ou de montrer quelque chose, les résultats « parachutés », même s'ils sont corrects, seront considérés comme faux. Ne pas oublier de mentionner le numéro de la question.
Rappel : L'appareil téléphonique est interdit ; L'usage du Blanco correcteur n'est pas du tout souhaité, quelle que soit la raison.

Exercices: cadre général régime sinusoidal

I)1°)A partir des équations de Maxwell, montrer que, sous une condition sur $\vec{A}$(M). Et V(M), on pourra établir l'équation suivante :

$$\Delta \vec{A} + \beta^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}; \quad avec \quad \beta^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$$

Comment s'appelle la condition et comment s'appelle l'équation ainsi obtenue.
2°)Quelle est alors la solution de cette équation?
3°)Trouver une équation équivalente pour le potentiel V(M)

II)Soit un **dipôle de dimension finie de longueur l disposé symétriquement selon l'axe Oz,** où le point M se trouve **dans une région quelconque de l'espace** suffisamment éloignée :

1°) a) Tracer une figure illustrant cette situation. Quelle est la symétrie présente dans ce cas et quelle conséquence aura-t-elle.

b) Etablir l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}$(M) qui est une fonction du courant I(P).

2°) En supposant que le courant qui circule dans le dipôle est constant spatialement et égal à Io,

a) Tracer le profil du courant dans une figure.

b)Déterminer alors l'expression de $\vec{A}$(M).

3°) Dans le cas où M est dans la région de champ lointain (RCL) :

a) Déduire les expressions de $\vec{E}$. et de $\vec{H}$.

b) Montrer que $\vec{\pi} = \frac{\|\vec{E}\|^2}{2\zeta}\vec{u}$ dans la RCL, puis donner son expression dans le cas ici présent.

c) Que deviennent les expressions de $\vec{A}$(M), $\vec{E}$(M), $\vec{H}$(M) et $\vec{\pi}$(M), lorsque la longueur du dipôle l devient négligeable. Dans quels cas sommes-nous alors.

4°) On revient à la question 2°) et on néglige la longueur du dipôle l, (région quelconque)

a) Réécrire alors l'expression de $\vec{A}$(M).
b) Obtenir l'expression d champ $\vec{H}$(M).
c) Obtenir l'expression d champ $\vec{E}$(M).
d) Simplifier les expressions des champs dans le cas de champ proche (indiquer dans quelle condition cela est possible)
e) Déduire l'expression du vecteur de Poynting complexe.
f) Déduire alors la puissance moyenne rayonnée. Conclure.

III) On reprend à partir de la question II)-3c (cas RCL)

1°) Quelle est l'expression du champ normalisé et de la puissance normalisée.
2°) a) Quelle est la définition d'un diagramme de rayonnement plan-H.
b) Esquisser le diagramme plan H dans notre cas.
c) Comment s'appelle ce genre de diagramme et quelle est son utilité.
3°)Donner l'expression de l'intensité du rayonnement.
4°)Déduire de 3°) l'expression de la puissance moyenne rayonnée.
5°)Quelle est alors le gain si l'efficacité du rayonnement est de 0,75.
6°) Etablir l'expression de la résistance du rayonnement dans ce cas.

Bon Travail

FORMULAIRE DU MODULE ANTENNES ET PROPAGATION

Equations de Maxwell en régime sinusoidal:

$\vec{rot}\,\vec{E} = -j\omega\vec{B}$ $\quad \vec{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$

$\text{div}\,\vec{D} = \rho \quad \text{div}\,\vec{B} = 0$

Relations constitutives :

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}$

Vecteur de Poynting sinusoidal :

$\vec{\pi} = \frac{1}{2}\left(\vec{E} x \vec{H}^*\right)$

Puissance rayonnée:

$P = Re(\oiint \vec{\pi}\,.\,\vec{dS});$

Potentiels :

$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{rot}\,\vec{A} \quad ; \vec{E} = -\vec{grad}\,V - j\omega\vec{A}$;

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}\,e^{-j\beta R}}{R}\,d\tau_P \leftrightarrow \frac{\mu}{4\pi}\int_{source}\frac{I\,e^{-j\beta R}}{R}\,\vec{dl}_P$$

Limite de la region de champ proche :

$r = \frac{2D^2}{\lambda}$

Cas général (champ lointain)

$$\vec{A} = \frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r}\iiint_V \vec{J}\,e^{j\beta\vec{u}_r.\vec{r}'}\,d\tau_P \;;\; \vec{r}' = \vec{OP}$$

$$\vec{E} = -j\omega(A_\theta\,\vec{u}_\theta + A_\varphi\,\vec{u}_\varphi) \;;\; \vec{u}_r\,x\,\vec{E} = \zeta\vec{H}$$

Champ normalisé :

$F(\theta,\varphi) = \frac{E}{E_{max}}$

Puissance normalisée :

$\mathcal{P}(\theta,\varphi) = |F(\theta,\varphi)|^2$

Intensité de rayonnement : $U(\theta,\varphi) = \Pi_r r^2$

$$U(\theta,\varphi) = \frac{1}{2\zeta}\left|\vec{E}\right|^2 r^2 \;;\; U_{moy} = \frac{P}{4\pi}$$

Directivité :

$$D(\theta,\varphi) = \frac{U(\theta,\varphi)}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}|F(\theta,\varphi)|^2 \;;$$

$\Omega_A = \iint |F(\theta,\varphi)|^2 d\Omega,$

$$D = \frac{U_{max}}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}$$

Gain :

$$G(\theta,\varphi) = \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{P_e} \;;\; G = \frac{4\pi U_{max}}{P_e}$$

Efficacité du rayonnement : $e_r = \frac{P}{P_e}$

Formule utile :

$$\vec{rot}(f\,\vec{u}) = \vec{grad}(f) \times \vec{u} + f\,\vec{rot}(\vec{u})$$

Rotationnel en coordonnées sphèriques

$$\vec{rot}(\vec{X}) = \frac{\vec{u_r}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(X_\varphi\sin\theta\right) - \frac{\partial X_\theta}{\partial\varphi}\right] +$$

$$\frac{\vec{u_\theta}}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial X_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rX_\varphi)}{\partial r}\right] +$$

$$\frac{\vec{u_\varphi}}{r}\left[\frac{\partial(rX_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial X_r}{\partial\theta}\right]$$

corrigé DC ANT 2019. 2020 (1)

I) 1°) $\vec{rot}\,\vec{rot}(\ ) = \vec{grad}\,div(\ ) - \Delta(\ )$.

$\vec{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E}$; $\vec{H} = \dfrac{\vec{rot}(\vec{A})}{\mu} \Rightarrow \vec{rot}\left(\dfrac{\vec{rot}(\vec{A})}{\mu}\right) = \vec{J} + j\omega\varepsilon\vec{E}$

$\dfrac{1}{\mu}\left[\vec{grad}(div(\vec{A})) - \Delta\vec{A}\right] = \vec{J} + j\omega\varepsilon(-\vec{grad}\,V - j\omega\vec{A})$

$\boxed{\vec{E} = -\vec{grad}\,V - j\omega\vec{A}}$

$\vec{grad}(div(\vec{A})) - \Delta\vec{A} = \mu\vec{J} - j\omega\mu\varepsilon\,\vec{grad}\,V - \omega^2\varepsilon\mu\vec{A}$

$\Delta\vec{A} + \beta^2\vec{A} = -\mu\vec{J} + \vec{grad}(j\omega\mu\varepsilon V + div\vec{A})$; $\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon$

comme V est défini à une cte près et $\vec{A}$ à un ~~grad~~ d'une [~~produit vectoriel~~] fonction scalaire près donc on a droit de poser $j\omega\mu\varepsilon V + div\vec{A} = 0$ (*) c'est la jauge de Lorentz

L'équation obtenue $\Delta\vec{A} + \beta^2\vec{A} = -\mu\vec{J}$ est l'équation ~~[illegible]~~ de propagation

13

2°) La solution de cette équation est

$\vec{A}(M) = \dfrac{\mu}{4\pi}\iiint_{source} \dfrac{\vec{J}(P)e^{-j\beta R}}{R}\,d\tau_P$; $R = PM$

(ou $= \displaystyle\int_{\substack{source\\(filaire)}} \dfrac{\vec{I}(P)e^{-j\beta R}}{R}\,\vec{dl_P}$)

4

3°) $div\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$; $\vec{E} = -\vec{grad}\,V - j\omega\vec{A} \Rightarrow div(-\vec{grad}\,V - j\omega\vec{A}) = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$

$div\,\vec{grad}(V) + j\omega\,div\vec{A} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$; d'après (*) $div\vec{A} = -j\omega\mu\varepsilon V$

$\Delta V + j\omega(-j\omega\mu\varepsilon)V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \Delta V + \beta^2 V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$

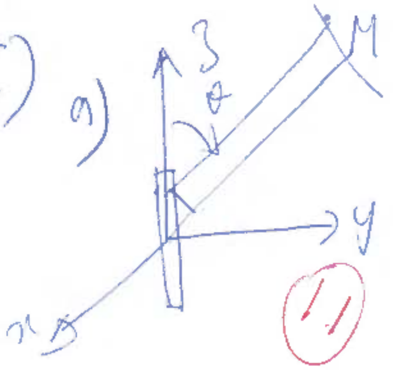
7

I : 24 pts

I = 24
II = 59
III = 33

117 pts $\Rightarrow$ 1 pt = 0,2 $\Rightarrow$ note/23,4

II) a)



symétrie axiale → pas de dépendance en φ

b) $\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-\frac{l}{2}}^{l/2} \frac{I(P)\, e^{-j\beta R}}{R}\, dz_p \vec{k}$

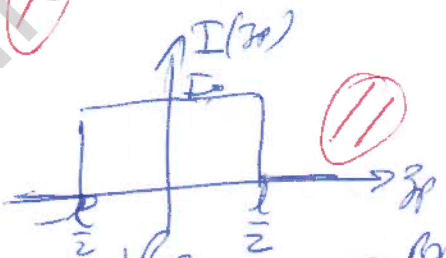
pour le terme d'amplitude : $R \simeq r$

pour le terme de phase $R = PM = \|\vec{PM}\|$;

~~PM = OP~~ $R \simeq r - z_p\cos\theta$

$\Rightarrow \vec{A}(M) \simeq \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\int_{-\frac{l}{2}}^{+l/2} I(z_p)\, e^{j\beta z_p\cos\theta}\, dz_p \vec{k}$

2°) a) $I(z_p) = I_0$ pour $|z_p| < \frac{l}{2}$



b) $\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r}\int_{-\frac{l}{2}}^{+l/2} I_0\, e^{j\beta z_p\cos\theta}\, dz_p \vec{k} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{e^{-j\beta r}}{r} I_0 \frac{1}{j\beta\cos\theta}\left[e^{j\beta z_p\cos\theta}\right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\vec{k}$

$= \frac{\mu I_0}{4\pi r} e^{-j\beta r}\frac{1}{j\beta\cos\theta}\left[e^{+j\beta\frac{l}{2}\cos\theta} - e^{-j\beta\frac{l}{2}\cos\theta}\right]\vec{k}$

$\vec{A}(M) = \frac{\mu I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r\beta\cos\theta}\sin\left[\beta\frac{l}{2}\cos\theta\right]\vec{k}$

3°) $\vec{E} \simeq -j\omega A_\theta \vec{u}_\theta - j\omega A_\varphi \vec{u}_\varphi$; $\vec{k} = \cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta$

$\Rightarrow \vec{E} = +\frac{j\omega\mu I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r\beta\cos\theta}\sin\left[\beta\frac{l}{2}\cos\theta\right]\sin\theta\,\vec{u}_\theta$

$\vec{H} = \frac{\vec{u}_r\wedge\vec{E}}{\eta} = \frac{j\beta I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r\beta\cos\theta}\sin\left[\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right]\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$

$\vec{H} \simeq \frac{j I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r}\sin\left[\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right] tg\,\theta\,\vec{u}_\varphi$

b) $\vec{\Pi} = \frac{1}{2}\vec{E}\wedge\vec{H}^*$; Dans le cas RCL ; $\vec{H} = \frac{\vec{u_r}\wedge\vec{E}}{\eta}$ (1)

(3)

$\Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{1}{2}\vec{E}\wedge\left(\frac{\vec{u_r}\wedge\vec{E}^*}{\eta}\right) = \frac{1}{2\eta}\left((\vec{E}.\vec{E}^*)\vec{u_r} - \underbrace{(\vec{E}.\vec{u_r})}_{0}\vec{E}^*\right)$ (1) (1) (1)

$= \frac{1}{2\eta}\|\vec{E}\|^2\vec{u_r}$ (1). Dans ce cas $\vec{\Pi} = \frac{1}{2\eta}\frac{\cancel{\eta}^2|I_0|^2}{(2\pi r)^2}\sin^2\left[\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right]tg^2\theta\,\vec{u_r}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Pi} = \frac{\eta|I_0|^2}{8\pi^2r^2}\sin^2\left[\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right]tg^2\theta\,\vec{u_r}}$$ (1)

c) $\rightarrow \vec{A}(M) \simeq \frac{\mu_0 I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r\beta\cos\theta}\left[\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right]\vec{k}$; $\sin\theta \simeq \theta$

$$\boxed{\vec{A}(M) \simeq \frac{\mu_0 I_0 l}{4\pi r}e^{-j\beta r}\vec{k}}$$ (1)

$\rightarrow \vec{E} \simeq j\frac{\cancel{\omega\mu} I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r\beta\cos\theta}\frac{\beta l}{2}\cos\theta\sin\theta\,\vec{u_\theta} \simeq \frac{j\omega\mu I_0 l e^{-j\beta r}}{4\pi r}\sin\theta\,\vec{u_\theta}$ (1)

$\rightarrow \vec{H} \simeq j\frac{I_0 e^{-j\beta r}}{2\pi r}\frac{\beta l}{2}\frac{\cancel{\cos\theta}\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}\vec{u_\varphi} \simeq \frac{j\beta I_0 l e^{-j\beta r}}{4\pi r}\sin\theta\,\vec{u_\varphi}$ (1)

$\rightarrow \vec{\Pi}(M) \simeq \frac{\eta|I_0|^2}{8\pi^2r^2}\left(\frac{\beta l}{2}\cos\theta\right)^2\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\vec{u_r}$

$\vec{\Pi}(M) \simeq \frac{\omega\mu\beta|I_0|^2 l^2}{32\pi^2r^2}\sin^2\theta\,\vec{u_r}$ (1)

Nous sommes dans le cas de dipôle idéal

(1)

4) a) $\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_0 l e^{-j\beta r}}{r} \vec{k}$ (dipôle idéal).

b) $\vec{H}(M) = \frac{\vec{rot}\,\vec{A}}{\mu} = \vec{rot}(A_z \vec{k}) = \vec{grad} A_z \wedge \vec{k} + A_z \vec{rot}\,\vec{k}$

$\vec{rot}\,\vec{k} = \vec{0}$ $\quad \vec{grad}(A_z) = \frac{\mu}{4\pi} I_0 l \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\vec{u_r} = \mu \frac{I_0 l}{4\pi}\left(\frac{(-j\beta r - 1)e^{-j\beta r}}{r^2}\right)\vec{u_r}$

$\vec{H}(M) = -\frac{I_0 l}{4\pi r^2}(1+j\beta r)e^{-j\beta r}(\vec{u_r}\wedge\vec{k})$ $\quad \vec{u_r}\wedge\vec{k} = -\sin\theta\,\vec{u_\varphi}$

$\vec{k} = \cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}$ $\quad \Rightarrow$

$\vec{H}(M) = \frac{I_0 l e^{-j\beta r}}{4\pi r^2}(1+j\beta r)\sin\theta\,\vec{u_\varphi}$

c) $\vec{E}(M) = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\vec{rot}\,\vec{H}$; $\vec{H} = H_\varphi \vec{u_\varphi}$

$= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\left\{\frac{\vec{u_r}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(H_\varphi \sin\theta)\right] + \frac{\vec{u_\theta}}{r}\left[-\frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r}\right]\right\}$

$= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{I_0 l}{4\pi}\left\{\frac{\vec{u_r}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r^2}(1+j\beta r)\sin^2\theta\right)\right] - \frac{\vec{u_\theta}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}(1+j\beta r)\sin\theta\right)\right]\right\}$

$= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{I_0 l}{4\pi}\left\{\frac{\vec{u_r}}{r\sin\theta}\frac{e^{-j\beta r}}{r^2}(1+j\beta r)2\sin\theta\cos\theta - \frac{\vec{u_\theta}}{r}\left[\left(-j\beta e^{-j\beta r}\left(\frac{1}{r}+j\beta\right) - \frac{e^{-j\beta r}}{r^2}\right)\sin\theta\right]\right\}$

$\vec{E}(M) = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{I_0 l e^{-j\beta r}}{4\pi r^3}\left\{(1+j\beta r)2\cos\theta\,\vec{u_r} + \left[+j\beta r(1+j\beta r) + 1\right]\sin\theta\,\vec{u_\theta}\right\}$

d) cas de champ proche $\Rightarrow \beta r \ll 1$ $(r \ll \lambda)$

$\vec{H}(M) \simeq \frac{I_0 l}{4\pi r^2}e^{-j\beta r}\sin\theta\,\vec{u_\varphi}$ et $\vec{E}(M) \simeq \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{I_0 l\, e^{-j\beta r}}{4\pi r^3}\left\{2\cos\theta\,\vec{u_r} + \sin\theta\,\vec{u_\theta}\right\}$

e) $\vec{\Pi} = \frac{1}{2}\vec{E}\wedge\vec{H}^* = \frac{1}{2}\frac{|I_0|^2 l^2}{(4\pi)^2 r^5}\frac{1}{j\omega\varepsilon}\left\{-2\sin\theta\cos\theta\,\vec{u_\theta} + \sin^2\theta\,\vec{u_r}\right\}$

f) $P = Re \iint_{H\text{ espace}} \vec{\Pi}\cdot\vec{dS} = 0$ car Π est imaginaire pure

Conclusion dans la région de champ proche le phénomène est semblable à une onde stationnaire ceci étant d'autant plus que $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont en quadrature de phase : la puissance est réactive

II = 29 + 24 + 6 = 59 pts

29

(5)

II) 1°) champ normalisé

$F(\theta) = \frac{E_\theta}{E_{\theta max}} = \sin\theta$

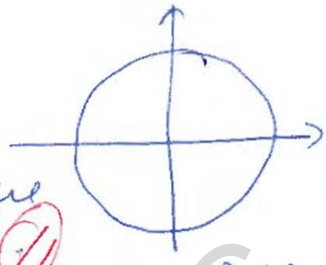
puissance normalisée

$P(\theta) = |F(\theta)|^2 = \sin^2\theta$

4

2°) a) Un diagramme plan-H est celui qui contient le champ H ainsi que la direction de maximum de rayonnement

b) Dans notre cas



c) c'est un diagramme omnidirectionnel

6

3°) $W(\theta) = \Pi_r r^2 = \frac{\omega\mu\beta|I_0|^2 \ell^2 \sin^2\theta}{32\pi^2}$

3

4°) $P = \iint_{l'espace} W\theta \, d\Omega$; $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$: angle solide élementaire

$= \left[\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta\right] \frac{\omega\mu\beta|I_0|^2\ell^2}{32\pi^2}$

$= 2\pi \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, du \; \frac{\omega\mu\beta|I_0|^2\ell^2}{32\pi^2}$

$= 2\pi \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} \frac{\omega\mu\beta|I_0|^2}{32\pi^2} = \frac{\omega\mu\beta|I_0|^2\ell^2}{16\pi} \frac{4}{3} = \frac{\omega\mu\beta(|I_0|\ell)^2}{12\pi}$

5°) $U_{max} = \frac{\omega\mu\beta|I_0|^2\ell^2}{32\pi^2}$, $U_{moyen} = \frac{P}{4\pi} = \frac{\omega\mu\beta(|I_0|\ell)^2}{48\pi^2}$

7

Directivité $D = \frac{U_{max}}{U_{moy}} = \frac{48\pi^2}{32\pi^2} = \frac{3}{2}$

Gain $G = e_r D = 0,75 \times \frac{3}{2} = 1,125$

9

6) Resistance de rayonnement

$R^r = \frac{2P}{|I_0|^2} = \frac{\omega\mu\beta\ell^2}{6\pi} = \frac{\omega\mu\beta^2\ell^2}{\beta \cdot 6\pi} = \frac{\eta}{6\pi}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \ell^2$

$= \frac{120\pi \times 4\pi^2}{6\pi}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$

II = 4+6+3+7+9+4 = 33,5   33,5