$$\boxed{P_{sortie}(z) = P_{entrée}(z) \cdot H(z)\, H^{*}(1/z^{*})}$$ ou sym. Hermitienne (20)

· Ceci car la relation E-S s'écrit pour les DSP comme :

$$P_{sortie}(e^{i\omega}) = |H(e^{i\omega})|^2 \cdot P_{entrée}(e^{i\omega}) \qquad (21)$$

ou en termes de la TZ, on aura :

$$\boxed{P_{sortie}(z) = H(z) \cdot H(1/z^{*}) \cdot P_{entrée}(z)} \qquad (22)$$

Ainsi, en filtrant le BB$_{c}$, proposé en exercice, on aura :

pour : $H(z) = \dfrac{1}{1-0.25\,z^{-1}}$ et pour $\sigma_B^2 = \sigma_W^2 = 1$, alors :

$$P_{sortie}(z) = H(z) \cdot H(z^{-1}) \cdot \sigma_B^2 = \frac{1}{(1-0.25\,z^{-1})(1-0.25\,z)}$$

$P_{sortie}(z)$ a donc une PAIRE de pôles en $z = 0.25 = 1/4$ & en $z = 4$.

L'Autocorrélation de $x(n)$ peut être établie à partir de $P_{sortie}(z)$:

$$P_{sortie}(z) = \frac{z^{-1}}{(1-0.25\,z^{-1})(z^{-1}-0.25)} = \left(\frac{16/15}{1-0.25\,z^{-1}}\right) + \left(\frac{4/15}{z^{-1}-0.25}\right) \qquad (23)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \text{DSP} = P_{sortie}(z) = \frac{16/15}{(1-0.25\,z^{-1})} - \frac{16/15}{(1-4\,z^{-1})} = (\text{DSP})_{sortie}$$

D'où :

$$R_{xx}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\overset{\text{DSP}}{P_{sortie}(z)}\right] = \frac{16}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^k u(k) + \frac{16}{15}\, 4^k\, u(-k-1) \qquad (24)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \boxed{R_{xx}(k) = \frac{16}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{|k|}} \qquad (25)$$

Ex4. Spectral Shaping Filter (Filtre de Forme)

Un P.A. ayant une DSP / : $\boxed{\gamma_X(\omega) = P_X(e^{i\omega}) = \frac{5+4\cos 2\omega}{10+6\cos\omega}}$ (26

Cette forme de la DSP a été trouvée après avoir filtré un B.Bc de variance $\sigma_B^2 = 1$ par un filtre LIT.

Il s'agit donc de la DSP du signal en sortie du filtre qu'on peut exprimer sous la forme d'exponentielles complexes comme:

$$P_X(e^{i\omega}) = \left(\frac{5+4\cos 2\omega}{10+6\cos\omega}\right) = \frac{5+2e^{i2\omega}+2e^{-i2\omega}}{10+3e^{i\omega}+3e^{-i\omega}} \quad (27$$

et en remplaçant le terme $e^{i\omega}$ par $z \Leftrightarrow z = e^{i\omega}$, il vient:

$$P_X(e^{i\omega}) \curvearrowright P_X(z) = \frac{5+2(z^2+z^{-2})}{10+3(z+z^{-1})} = \frac{(2z^2+1)(2z^{-2}+1)}{(3z+1)(3z^{-1}+1)}$$

et en déduisant une factorisation de la forme: $H(z)\cdot H(z^{-1})$,

on aura à établir: $H(z) = \frac{2z^2+1}{3z+1} = \frac{2}{3} z \times \frac{(1+\frac{1}{2}z^{-2})}{(1+\frac{1}{3}z^{-1})}$ (28

L'expression (27) définit un filtre stable. Ainsi, l'expression écrite tq:

$$\boxed{P_{Sortie}(z) = H(z)\cdot H(1/z)\cdot P_{entrée}(z)}$$

montre que du BBc filtré avec $H(z)$, aura la DSP indiquée par (26). D'autre part, du fait que l'introduction d'un retard dans $H(z)$ ne va pas altérer la DSP du processus filtré, on peut aussi de manière équivalente retenir le filtre défini par:

$$\boxed{H(z) = \frac{2}{3}\left(\frac{1+\frac{1}{2}z^{-2}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\right)} \quad (29) \xleftrightarrow{TZ^{-1}} h(n)$$

car sym. Hermit. 5

$$\boxed{P_{\text{sortie}}(z) = P_{\text{entrée}}(z) \cdot H(z) H^{*}(1/z^{*})} \quad (20)$$

· Ceci car la relation E-S s'écrit pour les DSP comme :

$$P_{\text{sortie}}(e^{i\omega}) = |H(e^{i\omega})|^{2} \cdot P_{\text{entrée}}(e^{i\omega}) \quad (21)$$

ou en terme de la TZ, on aura :

$$\boxed{P_{\text{sortie}}(z) = H(z) \cdot H(1/z^{*}) \cdot P_{\text{entrée}}(z)} \quad (22)$$

Ainsi, en filtrant le BBc proposé en exercice, on aura :

pour : $H(z) = \dfrac{1}{1 - 0.25 z^{-1}}$ et pour $\sigma_B^2 = \sigma_W^2 = 1$, alors :

$$P_{\text{sortie}}(z) = H(z) \cdot H(z^{-1}) \cdot \sigma_B^2 = \frac{1}{(1-0.25 z^{-1})(\cancel{1} - 0.25 z)}$$

$P_{\text{sortie}}(z)$ a donc une PAIRE de pôles en $\underline{\underline{z = 0.25 = 1/4 \text{ et } z = 4}}$.

· L'Autocorrélation de $x(n)$ peut être établie à partir de $P_{\text{sortie}}(z)$:

$$P_{\text{sortie}}(z) = \frac{z^{-1}}{(1-0.25 z^{-1})(z^{-1} - 0.25)} = \left(\frac{16/15}{1-0.25 z^{-1}}\right) + \left(\frac{4/15}{z^{-1} - 0.25}\right) \quad (23)$$

$$= (\text{DSP})_{\text{Sortie}}$$

$$\Leftrightarrow \overset{\text{DSP}}{=} P_{\text{sortie}}(z) = \frac{16/15}{(1-0.25 z^{-1})} - \frac{16/15}{(1-4z^{-1})}$$

D'où :

$$R_{xx}(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\overset{\text{DSP}}{\overbrace{P_{\text{sortie}}(z)}}\right] = \frac{16}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} u(k) + \frac{16}{15} 4^{k} u(-k-1) \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_{xx}(k) = \frac{16}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{|k|}} \quad (25)$$

Pour des P.A. conjointement SSL, on écrira l'Intercorrélation comme une f^n seulement du décalage $(k-l)$, soit :

$$R_{xx}(n_1,n_2) = R_{xx}(kT_e, lT_e) = R_{xy}(k,l) = R_{xy}(k-l) = E\left(x(k)\, y^*(l)\right] \quad (9)$$

on note les $\boxed{\text{propriétés}}$ suivantes pour des P.A. SSL :

(P1) Symétrie. La séquence d'Autocorrélation d'un P.A. SSL est une f^n symétrique de k i.e.

$$R_{xx}(k) = R^*_{xx}(-k) \longrightarrow \boxed{R_{xx}(k) = R_{xx}(-k)} \text{ (cas réel}$$

des P.A. réels

$\Rightarrow$ la FAC est symétrique pour des P.A. réels

(P2) Mean Square Value (VQM)

L'Autocorrélation d'un P.A. SSL en $k=0$ correspond à la VQM du P.A $\Longleftrightarrow$ $\boxed{R_{xx}(0) = E\left[|x(n)|^2\right] \geq 0}$ (10)

(P3) Valeur Maximale. Pour un P.A. SSL, la FAC est toujours majorée par sa valeur en $k=0$.

$$\Longleftrightarrow \boxed{R_{xx}(0) \geq |R_{xx}(k)|} \quad (11)$$

Une démonstration de cette propriété (P3) peut être établie en considérant : Pour tout nombre complexe a, on écrira :

$$E\left[\,|x(n+k) - a\,x(n)|^2\right] \geq 0 \quad (12)$$

En développant tel carré, on aura :

$$\Longleftrightarrow |x(n+k) - a\,x(n)|^2 = \left[x(n+k) - a\,x(n)\right]\cdot\left[x^*(n+k) - a^*x^*(n)\right]$$

$$= x(n+k)\cdot x^*(n+k) + \dots + a\,a^*x(n)\,x^*(n) \quad (13)$$

et en évaluant l'Espérance, on aura la somme des termes qui s'écrira comme :

$$R_{x_x}(0) - a^* R_{x_x}(k) - a R_{x_x}(-k) + |a|^2 \cdot R_{x_x}(0) \geq 0 \quad (14)$$

Si on exploite la propriété de symétrie de l'Autocorrélation i.e $R_{x_x}(k) = R^*_{x_x}(-k)$, ceci donnera :

$$\left[1 + |a|^2\right] R_{x_x}(0) - a^* R_{x_x}(k) - a R^*_{x_x}(k) \geq 0 \quad (15)$$

Du moment que $R_{x_x}(k)$ est en général complexe, on peut poser :

$$R_{x_x}(k) = |R_{x_x}(k)| \cdot e^{j\phi(k)} \quad (16)$$

on pourra alors réécrire (15) comme : $2R_{x_x}(0) - 2\,|R_{x_x}(k)| \geq 0$

$$\Longleftrightarrow \boxed{R_{x_x}(0) \geq R_{x_x}(k)} \quad (17)$$

(P4) - Si pour un certain k_0, l'Autocorrélation d'un P.A. SSL s'écrit tq : $R_{x_x}(k_0) = R_{x_x}(0)$, alors $\boxed{R_{x_x}(k) \text{ est Périodique}}$ avec une période $= k_0$.

<u>De plus</u> : $E\left[|x(n) - x(n-k_0)|^2\right] = 0 \quad (18)$

et <u>$x(n)$ est dite être ~~...~~ Périodique en MQ.</u>

<u>Ex3 Filtrage du BBc</u>

Si la variance du BBc = unité ($\sigma_B^2 = 1$), alors la DSP de $x(n)$ sera tq :

$$\boxed{P_x(z) = \sigma_B^2 \cdot H(z) \cdot H(z^{-1})} \quad (19)$$

Ce résultat découle en précisant que tout P.A. WSS filtré par un filtre LIT, alors le P.A. en sortie aura une DSP tq :

$\xleftarrow{\text{décalage de k périodes}}$

$n\omega_0 \quad (n-k)\omega$

$$R_{bb}(k) = E\left[\frac{A^2}{2}\underbrace{\cos(k\omega_0)}_{=cte} + \underbrace{\cos(2n\omega_0 + 2\varphi - k\omega_0)}_{\downarrow}\right] = \frac{A^2}{2}\cos(k\omega_0) + c$$

≡ temps discret

$$= \frac{A^2}{2}\cos(k\omega_0) + \quad 0$$

Cette R_{bb} est seulement f° de k ($\equiv$ en TC)

$$\Leftrightarrow \boxed{R_{bb}(k) = \frac{A^2}{2}\cos(k\omega_0)} \qquad (6)$$

Il vient donc que

$n \to n-k$

DSP ≡ p^{ce} élémentaires df

$$R_{bb}(k) = \frac{A^2}{2}\cos(k\omega_0) \xleftrightarrow{TF} \boxed{\gamma_B(f)} = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{P_B = \int_{\mathbb{R}} \gamma_B(f)\,df = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}} \qquad (7)$$

b. Pour $\alpha<1$ et $R_{bb}(k) = \alpha^{|k|}$, on aura aussi :

car $\cos x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)$

R_{bb} discrète $\Rightarrow$ TFD

$X(f) = \sum x(n)\, e^{-in\omega}$

DSP $\to \gamma_B(f) = \mathcal{F}\left[R_{bb}(k)\right] = \boxed{\sum_k R_{bb}(k)\, e^{-ik\omega}}$ $\boxed{\text{TFD}}$

Pour trouver le spectre de P $\underline{\text{cq}}$, il y a rien à penser dans ce cas

de la conception d'un filtre de Wiener de nature FIR qui

produit un estimé min de l'Erreur ~~moyenne~~ Quadratique

moyenne (EQMM) d'un P.A. $d(n)$ en filtrant un ensemble d'obs.

reliées de manière statistique $x(n)$, P.A. SSL à autocorrélation

Il est supposé que $d(n)$ et $x(n)$ sont des P.A. SSL à autocorrélat.

$R_{xx}(k)$ et $R_{dd}(k)$ connues. L'intercorrélation $R_{dx}(k)$ est aussi connue.

N.B. notion de P.A. SSL (WSS) (Stationnaire au sens large)

Un P.A. discret $x(n)$ est déclaré être SSL ssi les 03 conditions

suivantes sont remplies :

$\boxed{C_1}$. La moyenne du processus est une cte $\forall n \Leftrightarrow m_x(n) = m = cte$

$\boxed{C_2}$. l'Autocorrélation $R_{xx}(k,l)$ dépend ! de l'écart $(k-l)$ (8)

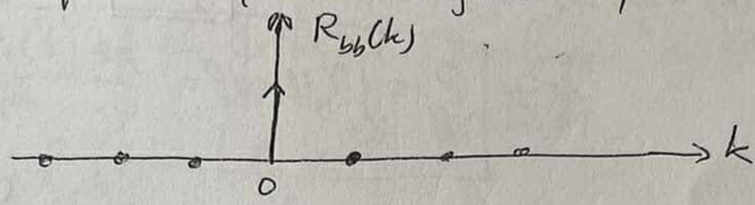
$\boxed{C_3}$. La variance du P.A. est finie $\Leftrightarrow C_{xx}(0) < +\infty$

Corrigé TD - Spectre de Puissance

Ex1 La séquence d'Autocorrélation du bruit : $R_{bb}(k)$ est précisée valoir une impulsion unité. Ceci nous permet d'écrire telle séquence comme :

$$R_{bb}(k) = \sigma_B^2 \cdot \delta(k) \qquad (1)$$

C'est ce qui se représente par une figure tq :



A cette séquence $R_{bb}(k)$ correspond une Densité Spectrale qui s'écrira :

$$\gamma_b(f) = \mathcal{F}\left[R_{bb}(k)\right] = \mathcal{F}\left[\sigma_B^2 \cdot \delta(k)\right] = \sigma_B^2 \cdot 1 = \sigma_B^2 \qquad (2)$$

On déduira alors le Spectre de Puissance (appelé Power Spectrum) désigne la DSP qui s'obtient en tant qu'une image rendue en appliquant la TF, soit :

$$\gamma_B(e^{i\omega}) = P_b(e^{i\omega}) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\Big(\sum_k R_{bb}(k)\, e^{-ik\omega}\Big)}_{DSP} df = \int_{\mathbb{R}} \sigma_B^2 \cdot \delta f = \sigma_B^2 \qquad (3)$$

On trouve bien une Puissance cte, ce qui confirme le caractère Blanc du bruit considéré $\iff \boxed{P_b(e^{i\omega}) = \sigma_B^2 = cte \quad \forall f}$ (4)

Ex2 a. La FAC ds le cas d'une sinusoïde à phase aléatoire u.r sur $[0, 2\pi]$ sera tq :

$$R_{bb}(k) = E\left[x^*(n)\, x(n+k)\right] = E\left[x(n)\, x^*(n-k)\right]$$

$$\iff R_{bb}(k) = E\left[A\cos(n\omega_0+\varphi) \cdot \left(A\cos\left[(n-k)\omega_0+\varphi\right]\right)^*\right] \qquad (5)$$

or : $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$, d'où :

$$\boxed{A\cos(n\omega_0+\varphi)} \cdot \left[A\cos\left[(n-k)\omega_0+\varphi\right]\right]^* = \frac{A^2}{2}\left[\cos(k\omega_0) + \cos\left(2n\omega_0 - k\omega_0 + 2\varphi\right)\right]$$

D'où :

Corrélation $\to$ Autocorrélation $x(t)$, $x(t \pm \tau) \to E[x(t)\,x(t \pm \tau)]$

Corrélation $\to$ Inter Corrélation $x(t)$, $y(t)$

Dans l'espace temps

$\boxed{\text{Notation : } R_{xx},\ \phi_{xx},\ \Gamma_{xx}}$

$\downarrow$ TF

DSP : $\gamma_x(f)$ ou $\Phi_x(f) = \mathcal{F}[\Gamma_{xx}(\tau)]$

TD. spectre de puissance

bruit blanc centré

Exercice 1. La séquence d'auto corrélation d'un processus BBc centré est $R_{BB}(k)=\sigma^2_B \cdot \delta(k)$, où σ^2_B est la variance du processus. Donner le spectre de Puissance de ce processus ?

Exercice 2. a. Quelle sera la séquence d'auto corrélation ainsi que le spectre de Puissance d'un processus sinusoïdal de phase aléatoire?
b. Idem pour la séquence d'auto corrélation : $R_{xx}(k)=\alpha^{|k|}$),

Exercice 3. <u>Filtrage de BBc</u>. Soit un PA qu'on génère en filtrant un BBc par un filtre LIT du 1er ordre ayant la fonction système:

$$H(z)=1/(1-0.25z^{-1})$$

Quelle sera le spectre de Puissance de x si le BBc est de var=1?

Exercice 4. <u>Spectral Shaping Filter</u>. Supposons avoir voulu générer un processus x qui a un spectre de Puissance de la forme:

$$Px(e^{j\omega}) = \frac{5+4\cos(2\omega)}{10+6\cos(\omega)}$$, Trouver H(z) et h(n) ?

$$m_X = [x(n)] = E\left[A\sin(n.\omega_0+\varphi)\right] = \int_{IR} A\sin(n.\omega_0+\alpha) f_\Phi(\alpha)\,d\alpha \quad (9)$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi} A\sin(n.\omega_0+\alpha)\frac{1}{2\pi}\,d\alpha = 0 \rightarrow \text{ P.A. centré}$$

- A son tour, la FAC Rxx(k,l) se déterminera aussi en écrivant son expression, soit:

$$R_{XX}(k,l) = E\left[x(k)x^*(l)\right] = E\left[A\sin(k\omega_0+\varphi).A\sin(l\omega_0+\varphi)\right] \quad (10)$$

et en utilisant la relation trigonométrique:

$2\sin(a).\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

donne:

$$R_{XX}(k,l) = \frac{A^2}{2}E\underbrace{\left[\cos(k-l)\omega_0\right]}_{=\text{cte}} - \underbrace{\frac{A^2}{2}E\left[\cos((k+l)\omega_0+2\varphi)\right]}_{=0} \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow \quad R_{XX}(k,l) = \frac{A^2}{2}E\left[\cos(k-l)\omega_0\right] \quad (12)$$

- **Exemple. P.A. Harmonique**
Soit la paire de P.A. x(n) et y(n) tel que $y(n) = x(n-1)$, alors, la Fn d'Inter corrélation est :

$$R_{xy}(k,l) = E\left[x(k)\,y^*(l)\right] = E\left[x(k)\,x^*(l-1)\right] = R_{XX}(k,l-1) \quad (13)$$

D'autre part, si y(n) se considère comme la sortie d'un Filtre de RI h(n) ; alors cette sortie s'écrira : (14)

$$y(n) = \sum_m h(m).x(n-m)$$

Il viendra alors que l'inter corrélation s'écrira :

$$R_{xy}(k,l) = E\left[x(k)\,y^*(l)\right] = E\left[x(k)\sum_m h^*(m)x^*(l-m)\right] \quad (15)$$

$$= \sum_m h^*(m)R_{XX}(k,l-m)$$

2. Notion de DSP

notée : $\gamma_X(f)$ ou $\Phi_X(f)$, cette fonction appelée DSP se définit comme l'image obtenue en appliquant la TF à la Fonction Corrélation, soit:

$$\gamma_X(f) = \mathcal{F}[R_{XX}(k)] \quad (16)$$

Exemples

1. Les Moyennes d'Ensemble.

Vue que PATD = Seqce de v.a. → possible calculer la moyenne de chaque v.a. et générer ainsi une seqce determini notée :

$$\mathbf{m_X(n) = E[x(n)]} \quad (1)$$

De façon similaire, calculer la variance de chaque v.a. aura aussi à générer la variance du P.A., soit :

$$\sigma_X{}^2(n) = E\left[\left|x(n) - m_X(n)\right|^2\right]$$

- Ces deux premiers moments statistiques représentent des moyennes d'ensemble. Ces deux moyennes dépendent toutes deux de n.

- Au temps que m_X représente la valeur moyenne du P.A. comme une fn de n, la variance représente la déviati Quadratique du P.A. % sa moyenne m_X.

Deux autres moyennes sont aussi importantes pour un P.A. se définissent à l'ordre deux. Elles relient les v.a. x(k) et x(l) comn

Les fn d'Autocovariance $C_{XX}(k,l)$ et d'AutoCorrémation $R_{XX}(k,l)$

$$\boxed{c_x(k,l) = E\{[x(k) - m_x(k)][x(l) - m_x(l)]^*\}} \quad ($$

$$\boxed{r_x(k,l) = E\{x(k)x^*(l)\}} \quad ($$

- Noter que pour kl, on aura: $$C(k,k) = \sigma_X{}^2(k) \quad ($$
- Noter aussi, si on développe la relation (3), on obtient une relation qui entre les fn autocorrélation et autocovarioance te que:

$$C_X(k,l) = R_X(k,l) - m_X(k)m_X(l)^* \quad ($$

En conséquence, on aura l'égalité $R_{XX} = C_{XX}$, pour des P.A. centrés. Remarquons qu'à défaut d'être centrés les P.A. pourront le devenir car on peut tjs créer un P.A. centré tq : PA X → PAC Y tq : $y = x - m_X$ (

- Comme pour les v.a., les fn autocorrélation et auto covariance fournissent l'information relative au degré de dépendan linéaire entre les v.a. Par exemple, si $C_{XX}(k,l)=0$ → pour $k \neq l$, alors cela signifie que les v.a. x(k) et x(l) ne sont p corrélés. La connaissance de l'une d'entre elles n'aide pas à estimer l'autre par un estimateur linéaire.

- **<u>Exemple</u>. P.A. Harmonique**

  Ceci désigne un exemple important utile et souvent rencontré en applications diverses comme e.g. les technologies Radar Sonar. Soit ainsi défini un P.A. réel et sinusoïdal dont la phase est aléatoire. Tel P.A. esr défini par:

  $X(n)=A\sin(n.\omega_0 + \varphi)$, pour ce P.A. , on supposera A et ω_0 constantes mais la phase φ est une v.a.u.r. sur un intervalle de longueur $2\pi = [\{\alpha, \alpha + 2\pi[= [-\pi, +\pi[$

  Il viendra donc que le comportement aléatoire de φ sera induit pour le PA, qui sera caractérisé pzr la ddp de φ qui vaut :

$$x(n=A\sin(n.\omega_0 + \varphi) \quad \text{tq:} \quad f_\varphi(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & \text{si } -\pi \leq \alpha < +\pi \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \quad ($$

La moyenne m_X de ce P.A. sera ainsi :