ENIG

Année Universitaire 2022-2023

TD

Exercice 1

On considère un système défini par la fonction de transfert discret suivante :

$$H(z^{-1}) = \frac{0.21z^{-1}}{1-0.606z^{-1}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

On définit les performances désirées en boucle fermée par le polynôme :

$$P(z^{-1}) = 1-1.6z^{-1}+0.67z^{-2}$$

1. Déterminer Le régulateur PI numérique qui est donné par la structure RST:

$$S(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$$
$$T(z^{-1}) = R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1}$$

2. Calculer la commande numérique qu'on va l'implémenter sur le calculateur.

Exercice 2

On considère le système suivant :

$$G_m(z) = \frac{k(z-b)}{(z-a_1)(z-a_2)}$$

1. Déterminer le régulateur *IMC* discret, dans le cas où on

   a. Cas1 : $|b| \prec 1$ et $Rel(b) \succ 0$

   b. Cas2 : $|b| \succ 1$ et $Rel(b) \succ 0$

Exercice 3

On considère un système définit par la fonction de transfert discrète suivante :

$$H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{0.2z^{-1}}{1-0.6z^{-1}}$$

On définit les performances désirées en boucle fermée par le polynôme :

$$P(z^{-1}) = 1 - z^{-1} + 0.3z^{-2}$$

3. Donner le schéma de commande (structure RST).

4. Déterminer la loi de commande *u(k)* de régulateur PI numérique.

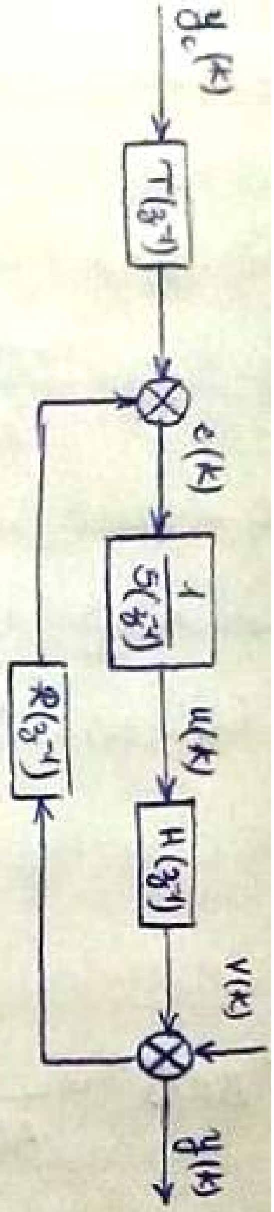
$$S\left(z^{-1}\right) = 1 - z^{-1}$$
$$T\left(z^{-1}\right) = R\left(z^{-1}\right) = r_0 + r_1 z^{-1}$$

Écrire l'équation récurrente de *u(k)* qu'on va implémenter sur le calculateur.

TD

Exercice 1 :

1/ $$H_{BF}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1}).T(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})+B(z^{-1})R(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1}).T(z^{-1})}{P(z^{-1})}$$



$$\Rightarrow A(z^{-1})S(z^{-1})+B(z^{-1})R(z^{-1}) = P(z^{-1})$$

$$\Leftrightarrow (1-0{,}606z^{-1})(1-z^{-1}) + 0{,}21z^{-1}(r_0+r_1z^{-1})$$

$$= 1-0{,}606z^{-1}-z^{-1}+0{,}606z^{-2}+0{,}21r_0z^{-1}+0{,}21r_1z^{-2}$$

$$= 1-(1{,}606-0{,}21r_0)z^{-1}+(0{,}606+0{,}21r_1)z^{-2}$$

$$= 1-1{,}6z^{-1}+0{,}67z^{-2} = P(z^{-1})$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} 1{,}606-0{,}21r_0 = 1{,}6 \Rightarrow r_0 = 0{,}028 \\ 0{,}606+0{,}21r_1 = 0{,}67 \Rightarrow r_1 = 0{,}3 \end{cases}$$

d'où : $T(z^{-1}) = R(z^{-1}) = 0{,}028+0{,}3z^{-1}$

2/ la commande numérique du régulateur PI :

$$\bullet\ u(k) = \frac{E(k)}{S(z^{-1})} = \frac{T(z^{-1})}{S(z^{-1})}y_c(k) - \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})}y(k)$$

$$\Leftrightarrow u(k)\times S(z^{-1}) = T(z^{-1})\,y_c(k) - R(z^{-1})\,y(k)$$

$$\Leftrightarrow (1-z^{-1})\,u(k) = (0{,}3z^{-1}+0{,}028)\,y_c(k)-(0{,}3z^{-1}+0{,}028)\,y(k)$$

$$\Leftrightarrow u(k)-u(k-1) = 0{,}3\,y_c(k-1)+0{,}028\,y_c(k)-0{,}3\,y(k-1)-0{,}028\,y(k)$$

Exercice 2 :

1 – a : Cas 1 : $|b|<1$ et $Re(b)>0$:

①: $Q_0(z) = (z-a_1)(z-a_2)$

②: $|b|<1$ et $Re(b)>0 \Rightarrow Q_0(z) = \dfrac{(z-a_1)(z-a_2)}{(z-b)}$

③: $Q_0(z) = \dfrac{(z-a_1)(z-a_2)}{z(z-b)}$

④: $k'Q_0(1)\,G_m(1) = 1 \Rightarrow k'\dfrac{(1-a_1)(1-a_2)}{1-b}\times\dfrac{k(1-b)}{(1-a_1)(1-a_2)} = 1 \Rightarrow k' = \dfrac{1}{k}$

$\hookrightarrow Q_o(z) = \dfrac{K'(z-a_1)(z-a_2)}{z(z-b)} = \dfrac{(z-a_1)(z-a_2)}{Kz(z-b)}$

⑤. $Q(z) = F(z) \times Q_o(z) = \dfrac{z(1-\alpha)}{z-\alpha} \dfrac{(z-a_1)(z-a_2)}{Kz(z-b)} = \dfrac{(1-\alpha)(z-a_1)(z-a_2)}{K(z-\alpha)(z-b)}$

1.b.5. Cas 2 :

① $Q_o(z) = (z-a_1)(z-a_2)$

② $|b| > 1$ et $Re(b) > 0$, $Q_o(z) = \dfrac{(z-a_1)(z-a_2)}{(z-\frac{1}{b})}$

③ $Q(z) = \dfrac{(z-a_1)(z-a_2)}{z(z-\frac{1}{b})}$

④ $K'Q(1)\,G_m(1) = 1 \Rightarrow K' \dfrac{\cancel{(1-a_1)(1-a_2)}}{(1-\frac{1}{b})} \dfrac{K(1-b)}{\cancel{(1-a_1)(1-a_2)}} = 1 \Leftrightarrow K' \dfrac{K(1-b)}{\frac{(b-1)}{b}} = 1$

$\Leftrightarrow K'\dfrac{K}{-b} = 1 \Leftrightarrow K' = \dfrac{-1}{Kb}$

$\hookrightarrow Q_o(z) = \dfrac{K'(z-a_1)(z-a_2)}{z(z-\frac{1}{b})} = \dfrac{-(z-a_1)(z-a_2)}{bKz(z-\frac{1}{b})}$

⑤ $Q(z) = F(z) \times Q_o(z) = \dfrac{z(1-\alpha)}{z-\alpha} \dfrac{-(z-a_1)(z-a_2)}{z(z-\frac{1}{b})bK} = \dfrac{(z-a_1)(z-a_2)(1-\alpha)}{(z-\alpha)(z-\frac{1}{b})bK}$

Exercice 3 :

$\cdot H_{BF}(z^{-1}) = \dfrac{B(z^{-1})\,T(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})} = \dfrac{B(z^{-1})\,T(z^{-1})}{P(z^{-1})}$

$- P(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})$

$= (1-0,6z^{-1})(1-z^{-1}) + 0,2z^{-1}(r_0 + r_1 z^{-1})$

$= 1 - z^{-1} - 0,6z^{-1} + 0,6z^{-2} + 0,2r_0 z^{-1} + 0,2r_1 z^{-2}$

$= 1 - (1,6 - 0,2r_0)z^{-1} + (0,6 + 0,2r_1)z^{-2}$

$= 1 - z^{-1} + 0,3z^{-2} = P(z^{-1})$

$\hookrightarrow \begin{cases} 1,6 - 0,2r_0 = 1 \Rightarrow r_0 = 3 \\ 0,6 + 0,2r_1 = 0,3 \Rightarrow r_1 = -1,5 \end{cases}$

d'où, $T(z^{-1}) = R(z^{-1}) = 3 - 1,5z^{-1}$

2/ commande numérique :

$$u(k) = \frac{E(k)}{S(z^{-1})} = \frac{T(z^{-1})}{S(z^{-1})}\, y_c(k) - \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})}\, y(k)$$

$$u(k)\times S(z^{-1}) = T(z^{-1})\, y_c(k) - R(z^{-1})\, y(k)$$

$$u(k)\,(1-z^{-1}) = (3-1,5z^{-1})\, y_c(k) - (3-1,5z^{-1})\, y(k)$$

$$u(k)-u(k-1) = 3y_c(k) - 1,5\,y_c(k-1) - 3\,y(k) + 1,5\,y(k-1)$$

---

* **Exercice :**

1) Il s'agit d'un système du 1er ordre avec retard : $H(p) = \dfrac{K e^{-Tp}}{1+\tau p}$

• en $t\to\infty$: $K u_c = K_\infty \Rightarrow K = \frac{1,25}{1} = 1,25$, retard (graphiquement) : $T = 8\,s$

• $\tau\,(0,63\times K_\infty) \rightarrow 0,63\times 1,25 = 0,7875 \Rightarrow$ projection sur l'axe des temps :

$\Rightarrow \tau = 50 - 8 = 42\,s$

retard

↳ $H(p) = \dfrac{1,25\, e^{-8p}}{1+42p}$

2) $C(p) = K_p\left(1 + \dfrac{1}{T_i p} + \dfrac{T_d p}{1+\frac{T_d p}{N}}\right)$, $p \rightarrow \dfrac{1-z^{-1}}{T_e}$

$$\Rightarrow C(z^{-1}) = K_p\left(1 + \frac{T_e}{T_i(1-z^{-1})} + \frac{\frac{T_d}{T_i}(1-z^{-1})}{1+\frac{T_d}{NT_i}(1-z^{-1})}\right) = K_p + \frac{K_pT_e}{T_i(1-z^{-1})} + \frac{K_pT_d(1-z^{-1})}{T_i + \frac{T_d}{N}(1-z^{-1})}$$

$$= K_p + \frac{K_pT_e}{T_i}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) + \frac{K_pT_d}{T_i}\left(\frac{(1-z^{-1})}{1+\frac{T_d}{T_iN}(1-z^{-1})}\right) = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{1-z^{-1}} + \frac{\alpha_3(1-z^{-1})}{1+\alpha_4(1-z^{-1})}$$

$$\Rightarrow C(z^{-1}) = \frac{\alpha_1(1-z^{-1})+\alpha_2}{(1-z^{-1})} + \frac{\alpha_3(1-z^{-1})}{1+\alpha_4(1-z^{-1})} = \frac{(\alpha_1(1-z^{-1})+\alpha_2)(1+\alpha_4(1-z^{-1}))+\alpha_3(1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})(1+\alpha_4(1-z^{-1}))}$$

$$\Leftrightarrow C(z^{-1}) = \frac{\alpha_1(1-z^{-1})+\alpha_2+\alpha_1\alpha_4(1-z^{-1})^2+\alpha_2\alpha_4(1-z^{-1})+\alpha_3(1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})(1+\alpha_4(1-z^{-1}))}$$

$$↳ C(z^{-1}) = \frac{(\alpha_1+\alpha_2\alpha_4)\cancel{(1-z^{-1})}+(\alpha_1\alpha_4+\alpha_3)(1-z^{-1})^{\cancel{2}}}{\cancel{(1-z^{-1})}(1+\alpha_4(1-z^{-1}))} = \frac{\alpha_1+\alpha_2\alpha_4+(\alpha_1\alpha_4+\alpha_3)(1-z^{-1})}{1+\alpha_4(1-z^{-1})}$$

$$C(z^{-1}) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_3 - (\alpha_1\alpha_4 + \alpha_3)z^{-1}}{(1+\alpha_4) - \alpha_4 z^{-1}} = \frac{H(z^{-1})R(z^{-1})}{S(z^{-1})}$$

$$\Rightarrow C(z^{-1}) = \frac{(1-z^{-1})\left[\alpha_1 + \alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_4 + \alpha_3 - (\alpha_1\alpha_4 + \alpha_3)z^{-1}\right]}{(1-z^{-1})\left[(1+\alpha_4) - \alpha_4 z^{-1}\right]}$$

$$H(z) = \frac{z^{-3}(z-0{,}5)(z+0{,}25)}{(z+0{,}5)(z+0{,}8)}$$

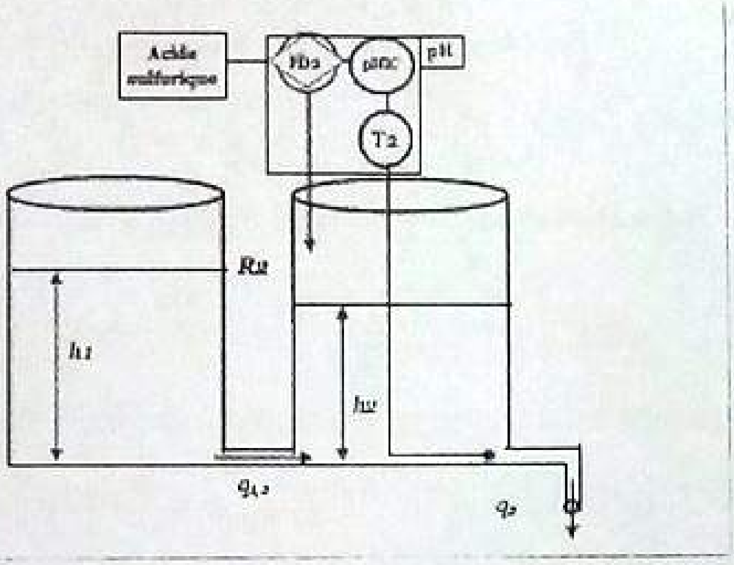
- $Q_0(z) = (z+0{,}5)(z+0{,}8)$
- $\left.\begin{array}{l} 0{,}5 > 0 \text{ et } R(0{,}5) > 0 \\ -0{,}25 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q(z) = \dfrac{(z+0{,}5)(z+0{,}8)}{(z-0{,}5)(z \;\; 25)}$
- $Q_0(z) = \dfrac{(z+0{,}5)(z+0{,}8)}{z^2(z-0{,}5)}$
- $K\,Q_0(1)\,H(1) = 1 \Rightarrow K \times \dfrac{2{,}7}{0{,}5} \times \dfrac{0{,}625}{2{,}7} = 1 \Rightarrow K \times 1{,}25 = 1 \rightsquigarrow K = 0{,}8$

$\hookrightarrow Q_0(z) = \dfrac{0{,}8(z+0{,}5)(z+0{,}8)}{z^2(z-0{,}5)}$

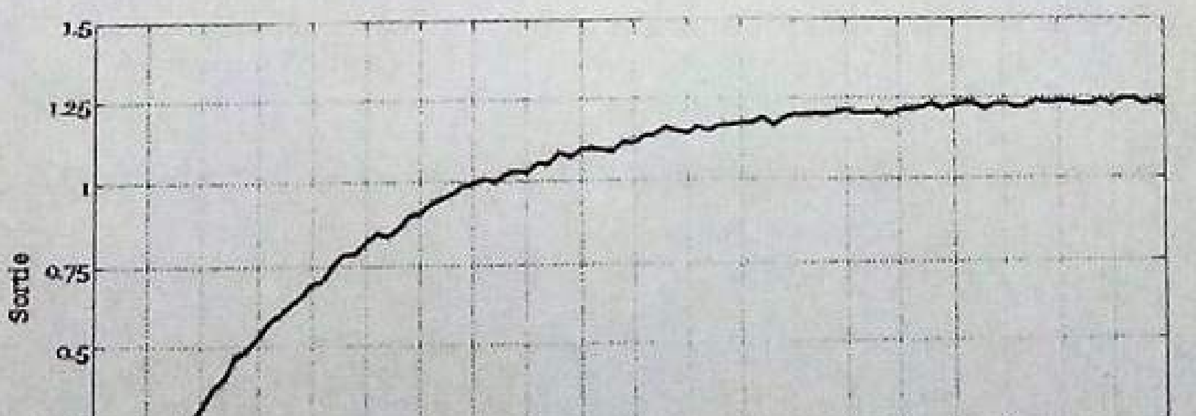
- $H(z) = Q_0(z) \times F(z) = \dfrac{0{,}8(z+0{,}5)(z+0{,}8)}{z^2(z-0{,}5)} \times \dfrac{z(1-\alpha)}{z-\alpha} = \dfrac{0{,}8(z+0{,}5)(z+0{,}8)(1-\alpha)}{z(z-\alpha)(z-0{,}5)}$

Exercice

On veut commander le procédé de régulation de pH représenté par la figure suivante par un régulateur PID numérique de structure RST dont les paramètres sont obtenus par la discrétisation d'un PID continu



De ce fait, On a appliqué un échelon de commande unitaire sur la pompe doseuse PD2 et on a obtenu la réponse donnée par la figure suivante :



1. Déterminer les paramètres de ce procédé

2. Montrer que la discrétisation d'un régulateur PID continu donné par

$$C(p)=K_p\left(1+\frac{1}{T_i p}+\frac{T_d p}{1+\frac{T_d p}{N}}\right)$$

La discrétisation est assurée en utilisant les approximations suivantes :

$$p \Rightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_e} \qquad \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{T_e}{1-z^{-1}}$$

Permet de trouver la structure de commande RST donnée par :

$$R(z^{-1}) = T(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}$$

$$S(z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + s_1 z^{-1})$$

Préciser les expressions de r_0, r_1, r_2 et s_1.

3.Soit le système discret suivant : $H(z)=\frac{z^{-3}(z-0.5)(z+0.25)}{(z+0.5)(z+0.8)}$

Déterminer le régulateur IMC.

. Question 1 :

. Il s'agit d'un système du 1er ordre avec retard : $H(p)=\dfrac{k e^{-Tp}}{1+\tau p}$; $K_\infty = KE \Rightarrow K=\dfrac{K_\infty}{E}=\dfrac{1,25}{1}=1,25$

$\Rightarrow$ retard : $T=8\,s$, $\tau(0,63\,K_\infty) \rightsquigarrow 0,63\times1,25=0,78 \Rightarrow \underset{\tau}{\underline{A.N}}$: $\tau=50-8=42\,s$

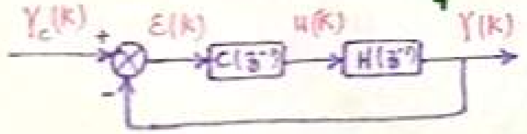
$\hookrightarrow$ d'où : $H(p)=\dfrac{1,25\, e^{-8p}}{1+42p}$

. Question 2 :

$$\cdot\, C(p)=K_p\left(1+\frac{1}{T_i p}+\frac{T_d p}{1+\frac{T_d p}{N}}\right) \;;\; p=\frac{1-z^{-1}}{T_e} \rightsquigarrow \frac{1}{p}=\frac{T_e}{1-z^{-1}}$$

$$\hookrightarrow C(z)=K_p\left[1+\frac{T_e}{T_i(1-z^{-1})}+\frac{T_d(1-z^{-1})}{T_e\left(1+\frac{T_d(1-z^{-1})}{N T_e}\right)}\right]=\underbrace{K_p}_{\alpha_1}+\frac{\overbrace{K_p T_e/T_i}^{\alpha_2}}{1-z^{-1}}+\frac{\overbrace{K_p\frac{T_d}{T_e}}^{\alpha_3}(1-z^{-1})}{1+\underbrace{\frac{T_d}{N T_e}}_{\alpha_4}(1-z^{-1})}$$

$$\Rightarrow C(z)=\alpha_1+\frac{\alpha_2}{1-z^{-1}}+\frac{\alpha_3(1-z^{-1})}{1+\alpha_4(1-z^{-1})}$$



$$\hookrightarrow C(z)=\frac{\alpha_1(1-z^{-1})+\alpha_2}{1-z^{-1}}+\frac{\alpha_3(1-z^{-1})}{1+\alpha_4(1-z^{-1})}$$

$$=\frac{(1+\alpha_4(1-z^{-1}))\,(\alpha_1-\alpha_1 z^{-1}+\alpha_2)+\alpha_3(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})\,(1+\alpha_4(1-z^{-1}))}=\frac{(1+\alpha_4-\alpha_4 z^{-1})(\alpha_1-\alpha_1 z^{-1}+\alpha_2)+\alpha_3-\alpha_3 z^{-1}}{(1+\alpha_4(1-z^{-1}))(1-z^{-1})}$$

$$=\frac{\alpha_1-\alpha_1 z^{-1}+\alpha_2+\alpha_1\alpha_4-\alpha_1\alpha_4 z^{-1}+\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_4 z^{-2}-\alpha_1\alpha_4 z^{-1}-\alpha_2\alpha_4 z^{-1}+\alpha_3-\alpha_3 z^{-1}}{(1-z^{-1})\,(1+\alpha_4(1-z^{-1}))}$$

$$=\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3+\alpha_1\alpha_4)+(-\alpha_1-\alpha_1\alpha_4-\alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_4-\alpha_3)z^{-1}+\alpha_1\alpha_4 z^{-2}}{(1-z^{-1})\,(1+\alpha_4(1-z^{-1}))}$$

$$\bullet\, C(z)=\frac{H(z^{-1})\,R(z^{-1})}{S(z^{-1})} \;;\; S(z^{-1})=(1-z^{-1})(1+s_1 z^{-1}),\; R(z^{-1})=T(z^{-1})=r_0+r_1 z^{-1}+r_2 z^{-2}$$

Par identification :

$$\bullet\; 1+s_1 z^{-1}=1+\alpha_4(1-z^{-1})=(1+\alpha_4)-\alpha_4 z^{-1}=(1+\alpha_4)\left(1-\frac{\alpha_4}{1+\alpha_4}z^{-1}\right)$$

$$\hookrightarrow C(z)=\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3+\alpha_1\alpha_4)+(-\alpha_1-2\alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_4-\alpha_3)z^{-1}+\alpha_1\alpha_4 z^{-2}}{(1-z^{-1})(1+\alpha_4)\left(1-\frac{\alpha_4}{1+\alpha_4}z^{-1}\right)}$$

$$\begin{cases} r_0=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3+\alpha_1\alpha_4)/(1+\alpha_4) \\ r_1=(-\alpha_1-2\alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_4-\alpha_3)/(1+\alpha_4) \\ r_2=(\alpha_1\alpha_4)/(1+\alpha_4) \\ s_1=\dfrac{-\alpha_4}{1+\alpha_4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(z^{-1})=R(z^{-1})=\frac{1}{1+\alpha_4}\left[(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3+\alpha_1\alpha_4)+(-\alpha_1-2\alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_4-\alpha_3)z^{-1}+\alpha_1\alpha_4 z^{-2}\right]$$

$$\Rightarrow S(z^{-1})=(1-z^{-1})\left(1-\frac{\alpha_4}{1+\alpha_4}z^{-1}\right)$$