ENIG	**Devoir de Contrôle** **Dispositifs et Systèmes Microondes2**	**ENS :M. Benzina H**
Année Universitaire : 2022/2023		**Durée : 01h30**
		Section :GCR2

N.B: Lorsqu'on demande d'établir une expression ou de montrer quelque chose, les résultats « parachutés », même s'ils sont corrects, seront considérés comme faux. Ne pas oublier de mentionner le numéro de la question.

Rappel : L'appareil téléphonique est interdit ; L'usage du Blanco correcteur n'est pas du tout souhaité, quelle que soit la raison.

Exercices: cadre général régime sinusoidal

I)1°)a)Quelle est la justification de l'existence de $\vec{A}(M)$: le potentiel vecteur.

b)Est-ce que $\vec{A}(M) est\ unique$? justifier.

c)Montrer que :$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}$ (V(M))-jω$\vec{A}(M)$.

d)Est-ce que V(M) est unique. Justifier.

2°)a)Etablir l'équation de propagation en $\vec{A}(M)$. Justifier le choix de la condition de Jauge.

b)Quelle est la solution de cette équation dans le cas où l'antenne est filaire.

3°)Etablir l'équation de propagation en V(M).

II)1°)a)Définir le dipôle idéal (ou infinitésimal).

b)Etablir l'expression de $\vec{A}(M)$. Justifier les conditions sur les termes d'amplitude et de phase.

c)obtenir l'expression du champ magnétique $\vec{H}(M)$ lorsque le point M n'est pas dans la RCL.

d)Simplifier l'expression lorsque le point M est dans la RCL.

III)Soit un dipôle court de longueur l parcouru par un courant I(z)(voir formulaire)

1°)a) Tracer le profil du courant.

b)Montrer que $\vec{A}(M) \ = \frac{\mu I_0 l}{8\pi r} e^{-j\beta r}\vec{k}$.

2°)En supposant le point M dans la RCL :

a)Trouver l'expression de $\vec{E}(M)$.

b)Déduire l'expression de $\vec{H}(M)$.

3°)a) Trouver l'expression du vecteur de Poynting.

b)Quelle est l'expression de l'intensité du rayonnement.

4°)Déduire l'expression de la puissance moyenne rayonnée P

5°)Déduire l'expression de la résistance de rayonnement.

IV)Soit une antenne qui reçoit un rayonnement incident $\vec{E}_i, \vec{H}_i$; et aux bornes de laquelle est attaché un récepteur d'impédance équivalente Z_L

1°) a) Dessiner le circuit équivalent de cette antenne

b) Montrer que lorsqu'on néglige la résistance ohmique de l'antenne et qu'on se place dans le cas d'adaptation conjuguée entre le récepteur et l'antenne, la puissance récupérée par le récepteur est : $\frac{1}{8}\frac{|V|^2}{R_r}$

où |V| est la tension (crête) induite dans l'antenne.

2°)Pour un dipôle idéal, montrer que la surface équivalente de réception est égale à 0.119 λ^2.

Bon Travail

Bonne Chance

FORMULAIRE DU MODULE ANTENNES ET PROPAGATION

Equations de Maxwell en régime sinusoidal:

$\vec{\text{rot}}\ \vec{E} = -j\omega \vec{B}$ $\qquad$ $\vec{\text{rot}}\ \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}$

$\text{div}\ \vec{D} = \rho \quad \text{div}\ \vec{B} = 0$

Relations constitutives :

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \vec{J} = \sigma \vec{E}$

Puissance rayonnée:

$P = Re\frac{1}{2}\oiint\left(\vec{E}x\vec{H}^*\right).\vec{dS}$;

Potentiels :

$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{\text{rot}}\ \vec{A}$; $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\ V - j\omega\vec{A}$;

$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}\,e^{-j\beta R}}{R} d\tau_P$

Limite de la région de champ lointain : $r = \frac{2D^2}{\lambda}$

Calcul dans la région de champ lointain (RCL))

$\vec{E} = -j\omega(A_\theta \vec{u}_\theta + A_\varphi \vec{u}_\varphi)$; $\vec{u}_r\, x\, \vec{E} = \zeta \vec{H}$

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2\zeta}\left|\vec{E}\right|^2 \vec{u}_r$$

$\zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi\,(\Omega)$ (espace libre)

Champ normalisé : $F(\theta,\varphi) = \frac{E}{E_{max}}$

puissance normalisée

$\mathscr{P}(\theta,\varphi) = |F(\theta,\varphi)|^2$

Intensité de rayonnement :

$U(\theta,\phi) = U(\theta,\phi) = \Pi r^2 = \frac{1}{2\zeta}\left|\vec{E}\right|^2 r^2$; $U_{moy} = \frac{P}{4\pi}$

Directivité : $D(\theta,\varphi) = \frac{U(\theta,\varphi)}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}|F(\theta,\varphi)|^2$;

$\Omega_A = \iint |F(\theta,\varphi)|^2 d\Omega,$

$D = \frac{U_{max}}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}$

Gain : $G(\theta,\varphi) = \frac{4\pi U(\theta,\varphi)}{P_e}$; $G = \frac{4\pi U_{max}}{P_e}$

Efficacité du rayonnement : $e_r = \frac{P}{P_e}$

Puissance rayonnée moyenne d'un dipôle idéal :

$$P = \frac{\omega\mu\beta(|I_0|\,\Delta z)^2}{12\pi}$$

Dipôle court : $I(z) = I_0\left[1 - \frac{2|z|}{l}\right]\ pour\ \ |z| \le \frac{l}{2}$

$et\ I(z) = 0\ partout\ ailleurs$

Dipôle demi-onde :

$I(z) = I_m \sin\left[\beta(\frac{\lambda}{4} - |z|)\right] pour \quad |z| \le \frac{\lambda}{4}$

Impédance d'antenne : $Z_A = R_r + R_d + jX_A$;

Résistance de rayonnement : $R_r = \frac{2P}{|I|^2}$

Epaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$; $R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$;

Conducteur cylindrique (courant uniforme) :

$R_d = \frac{l}{2\pi a}R_S$

$P_e = P + P_d$; $R_A = R_r + R_d$; $R_A = \frac{2P_e}{|I|^2}$

Monopole :

$R_r(\text{Monopole}) = \frac{1}{2}R_r(\text{Dipole})$; $D(\text{Monopole}) = \frac{1}{2}D(\text{Dipole})$

$Z_e(\text{Monopole}) = \frac{1}{2}Z_e(\text{Dipole})$

dipôle magnétique -spire circulaire :

inductance : $L = \mu b\left[Log\left(\frac{8b}{a}\right) - 1{,}75\right]$ pour $a << b$

b :rayon de la spire ; a : rayon du

Antenne à la réception : P_{max}(réçue)= $\frac{1}{8}\frac{|V|^2}{R_r}$

$P_{max} = \left|\vec{\Pi}\right| A_{e_{max}}$; $A_{e\,max}$:surface équivalente maximale de réception.

$D = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_{e\,max}$; $\lambda^2 = \Omega_A A_{e\,max}$;

$A_e = e_r A_{e\,max}$; $G = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_e$

Formule de FRIIS :

$P_R = P_E G_E G_R\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2$;EIRP=$P_E G_E = 4\pi U_{max}$.

Formules utiles :

$\vec{\text{rot}}\ \vec{\text{rot}}\ \vec{A} = \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{A})) - \Delta\vec{A}$

$\vec{\text{rot}}(f\,\vec{u}) = \vec{\text{grad}}(f) \times \vec{u} + f\,\vec{\text{rot}}(\vec{u})$

Rotationnel en coordonnées sphèriques

$$\vec{rot}(\vec{X}) = \frac{\vec{u}_r}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(X_\varphi \sin\theta\right) - \frac{\partial X_\theta}{\partial\varphi}\right] + \frac{\vec{u}_\theta}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial X_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rX_\varphi)}{\partial r}\right] + \frac{\vec{u}_\varphi}{r}\left[\frac{\partial(rX_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial X_r}{\partial\theta}\right]$$

DC Disp. Sys. μondes 2 2022-2023 (1)

I) 1°) a) Comme $\mathrm{div}\,\vec{B}=0$ et que $\mathrm{div}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{X})=0$ alors $\exists\,\vec{A}$ / $\vec{B}=\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ ou encore $\mu\vec{H}=\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \Rightarrow \vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$

b) $\vec{A}$ n'est pas unique car $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{grad}}\,\lambda)=0$.
$\Rightarrow \vec{A}+\vec{\mathrm{grad}}\,\lambda$ est une autre solution $\Rightarrow \exists$ une $\infty^{té}$ de solutions.

c) $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}(M)=-j\omega\mu\vec{H} \Rightarrow \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}=-j\omega\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \Rightarrow$
$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}+j\omega\vec{A})=\vec{0} \Rightarrow$ $\exists\,V(M)$ /
$\vec{E}+j\omega\vec{A}=-\vec{\mathrm{grad}}\,V(M) \Rightarrow \vec{E}(M)=-\vec{\mathrm{grad}}\,V(M)-j\omega\vec{A}(M)$ (Δ)

d) $V(M)$ n'est pas unique. En effet $V_1=V(M)+C$; $C=$cte
$\vec{\mathrm{grad}}(V(M)+C)=\vec{\mathrm{grad}}\,V(M)$ car $\vec{\mathrm{grad}}\,C=0$
donc $\exists$ une $\infty^{té}$ de solutions possibles.

2°) a) $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}(\vec{X})=\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}(\vec{X})-\Delta\vec{X}$. $(*)$
$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{H}=\vec{J}+j\omega\varepsilon\vec{E}$, comme $\vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$ alors
$\vec{\mathrm{rot}}\left(\frac{1}{\mu}\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}\right)=\vec{J}+j\omega\varepsilon\vec{E}$
en utilisant $(*)$ et (Δ), on obtient :
$\frac{1}{\mu}(\vec{\mathrm{grad}}\,\mathrm{div}\,\vec{A}-\Delta\vec{A})=\vec{J}+j\omega\varepsilon(-\vec{\mathrm{grad}}\,V-j\omega\vec{A})$
$\Rightarrow -\Delta\vec{A}=\mu\vec{J}-\vec{\mathrm{grad}}(j\omega\varepsilon\mu V+\mathrm{div}\,\vec{A})+\omega^2\varepsilon\mu\vec{A}$
comme on a déjà montré que $\exists$ une $\infty^{té}$ de $\vec{A}$ et de V possibles alors $\exists(\vec{A},V)$ / $j\omega\varepsilon\mu V+\mathrm{div}\,\vec{A}=0$ condition de Jauge.
$\Rightarrow \Delta\vec{A}+\beta^2\vec{A}=-\mu\vec{J}$ avec $\beta^2=\omega^2\mu\varepsilon$

b) lorsque l'antenne est filaire, la solution est $\vec{A}(M)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{(\mathcal{C})}\frac{I(P)\,e^{-j\beta R}}{R}\,\vec{dl_P}$

3°) $\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon$; $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V - j\omega\vec{A}$

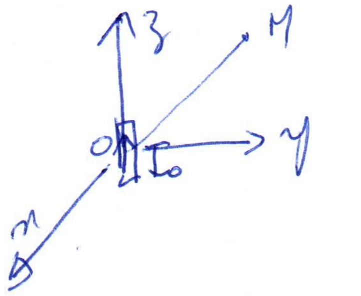
$\Rightarrow \operatorname{div}(-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V - j\omega\vec{A}) = \rho/\varepsilon \Rightarrow -\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V - j\omega\operatorname{div}\vec{A} = \rho/\varepsilon$

$\Rightarrow -\Delta V - j\omega(-j\omega\varepsilon\mu V) = \rho/\varepsilon \Rightarrow \Delta V + \omega^2\varepsilon\mu V = -\rho/\varepsilon$

$\boxed{\text{Jauge}}$

ou $\boxed{\Delta V + \beta^2 V = -\rho/\varepsilon}$ avec $\beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon$.

II) a) Dipôle idéal : fil rectiligne parcouru par un courant I_0, $I_0 = c^{te}$ (spatialement) la longueur du fil Δz est négligeable devant la distance $OM = r$ et devant la longueur d'onde λ.



b) $\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} I_0 \frac{e^{-j\beta R}}{R}\,dz_p\,\vec{k}$.

$R \simeq r$ pour les termes de phase et d'amplitude car Δz est tellement petit que l'on peut justifier cela.

donc $\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi} I_0 \int_{-\Delta z/2}^{+\Delta z/2} \frac{e^{-j\beta r}}{r}\,dz_p\,\vec{k}$

$= \frac{\mu}{4\pi} I_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r}\int_{-\Delta z/2}^{+\Delta z/2} dz_p\,\vec{k} = \mu\frac{I_0\Delta z\, e^{-j\beta r}}{4\pi r}\vec{k}$

c) $\vec{H}(M) = \frac{1}{\mu}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}(M)$; $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,f\vec{u} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,f\wedge\vec{u} + f\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{u}$

$\vec{A} = A_z\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,A_z\vec{k} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,A_z\wedge\vec{k} + A_z\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{k}$

$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{k} = 0$ car $\vec{k}$ est un vecteur fixe

$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,A_z = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\mu\frac{I_0\Delta z}{4\pi r}e^{-j\beta r}\right) = \mu\frac{I_0\Delta z}{4\pi}\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-j\beta r}}{r}\right)\vec{u_r}$

$= \mu\frac{I_0\Delta z}{4\pi}e^{-j\beta r}\left(\frac{-j\beta}{r} - \frac{1}{r^2}\right)\vec{u_r} = -\mu\frac{I_0\Delta z}{4\pi r^2}e^{-j\beta r}(1 + j\beta r)\vec{u_r}$

$\vec{u_r}\wedge\vec{k}$?

après calculs

$\vec{k} = \cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta} \Rightarrow \vec{u_r}\wedge\vec{k} = -\sin\theta\,\vec{u_\varphi}$

$(\vec{u_r}\wedge\vec{u_\theta}) = \vec{u_\varphi}$.

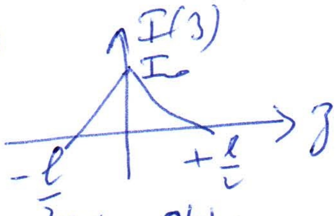
donc $\vec{H}(M) = \frac{I_0 \Delta z}{4\pi r^2} e^{-j\beta r}(1+j\beta r)\sin\theta\,\vec{u_\varphi}$

Lorsque M est dans la RCL, on a $\beta r \gg 1$

et donc $\vec{H}(M) \simeq j\beta \frac{I_0 \Delta z\, e^{-j\beta r}}{4\pi r}\sin\theta\,\vec{u_\varphi}$

$\boxed{R \simeq r}$

III) 1°) a)



$I(z) = I_0 \times \begin{cases} \left(1-\frac{2|z|}{l}\right) & \text{pour } |z| \le \frac{l}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

b) $\vec{A}(M) = \frac{\mu I_0}{4\pi}\left\{\int_{-\frac{l}{2}}^{0}\left(1+\frac{2z}{l}\right)\frac{e^{-j\beta r}}{r}\,dz\,\vec{k} + \int_{0}^{l/2}\left(1-\frac{2z}{l}\right)\frac{e^{-j\beta r}}{r}\,dz\,\vec{k}\right\}$

$\vec{A}(M) \underset{\pi}{=} \frac{\mu I_0}{4\pi r}e^{-j\beta r}\, 2\times\int_0^{l/2}\left(1-\frac{2z}{l}\right)dz\,\vec{k}$

$u = 1-\frac{2z}{l}$; $du = -\frac{2dz}{l}$

$\Rightarrow dz = -\frac{l}{2}du$

parité de $I(z)$

$z=0 \Rightarrow u=1$; $z=\frac{l}{2} \Rightarrow u=0$

$\Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{\mu I_0 l e^{-j\beta r}}{4\pi r}\int_0^1 u\,du\,\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{\mu I_0 l e^{-j\beta r}}{4\pi r}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1\vec{k} = \frac{\mu I_0 l e^{-j\beta r}}{8\pi r}\vec{k}$

2°) a) RCL $\Rightarrow \vec{E}(M) = -j\omega A_\theta \vec{u_\theta} - j\omega A_\varphi \vec{u_\varphi}$

$\vec{k} = \cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = j\omega\mu\frac{I_0 l e^{-j\beta r}}{8\pi r}\sin\theta\,\vec{u_\theta}}$

b) $\vec{H} = \frac{\vec{u_r}\wedge\vec{E}}{\zeta}$; $\frac{\omega\mu}{\zeta}=\beta$; $\vec{u_r}\wedge\vec{u_\theta}=\vec{u_\varphi}$ $\Rightarrow \boxed{\vec{H} = j\beta\frac{I_0 l e^{-j\beta r}}{8\pi r}\sin\theta\,\vec{u_\varphi}}$

3°) a) vecteur de Poynting

$\vec{\Pi} = \frac{1}{2}\vec{E}\wedge\vec{H}^* = \frac{1}{2\zeta}|E|^2\vec{u_r} = \frac{1}{2\zeta}\frac{(\omega\mu|I_0|l)^2}{(8\pi r)^2}\sin^2\theta\,\vec{u_r}$

$\frac{\omega\mu}{\zeta}=\beta \Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{1}{2}\frac{\omega\mu\beta|I_0|^2 l^2\sin^2\theta}{(8\pi r)^2}\vec{u_r}$

b) Intensité du rayonnement :

$U(\theta,\varphi) = \Pi_r r^2 = \frac{\omega\mu\beta|I_0|^2 l^2\sin^2\theta}{2(8\pi)^2}$

4°) puissance moyenne rayonnée :

$$P = \iint_{4\pi\,\text{space}} u(\theta)\, d\Omega \quad ; \quad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$P = \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2 \ell^2}{128\pi^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta$$

$$I = \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = -\int_0^{\pi} \sin^2\theta \, d(+\cos\theta) = -\int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\, d\cos\theta$$

$u = \cos\theta \Rightarrow \theta = 0 \rightarrow u = 1 \;,\; \theta = \pi \rightarrow u = -1$

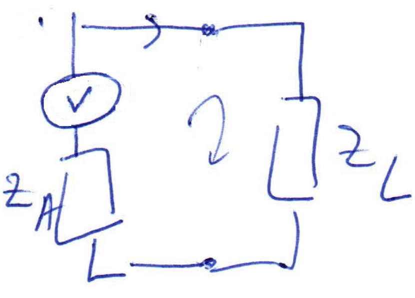
$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, du = \left(u - \frac{u^3}{3}\right)_{-1}^{1} = \left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{3} \quad \text{d'où} \quad P = \frac{\omega\mu\beta |I_0|^2 \ell^2 \, 2\pi \times \frac{4}{3}}{128\pi^2} = \boxed{\frac{\omega\mu\beta |I_0|^2 \ell^2}{48\pi}}$$

5°) $$R^r = \frac{2P}{|I_0|^2} = \frac{\omega\mu\beta}{24\pi}\ell^2 = \frac{\frac{\omega\mu}{\beta}\beta^2 \ell^2}{24\pi} = \frac{\eta \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \ell^2}{24\pi}$$

$$= \frac{120\pi^2}{24} \times 4 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2 = \boxed{20\pi^2 \left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2}$$

IV)



1°) $V - (Z_L + Z_A) I_A = 0 \Rightarrow I_A = \dfrac{V}{Z_L + Z_A}$

adaptation conjuguée $\Rightarrow$

$Z_L = Z_A^* \Rightarrow Z_L + Z_A = 2\,Re(Z_A)$

$Re(Z_A) = R^r + R_d$ on néglige $R_d \Rightarrow Re(Z_A) = R^r$

$$P = \frac{1}{2} R^r |I_A|^2 = \frac{1}{2} R^r \frac{|V|^2}{(2R^r)^2} = \frac{|V|^2}{8R^r} .$$

2°) $A_{e\,max} = \dfrac{P}{|\Pi|}$; $P = \dfrac{\omega\mu\beta(|I_0|\Delta z)^2}{12\pi}$; $\Pi = \dfrac{1}{2\eta}|E_i|^2$; $V = E\Delta z$

$$A_{e\,max} = \frac{\frac{|V|^2}{8R^r}}{\frac{1}{2\eta}\frac{|V|^2}{(\Delta z)^2}} = \frac{2\eta\,\Delta z^2}{8R^r} = \frac{2\eta\,\Delta z^2}{8 \times 80\pi^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda}\right)^2} = \frac{240\pi}{640\pi^2}\lambda^2$$

$$= \frac{3}{8\pi}\lambda^2 = 0{,}119\,\lambda^2$$