Travaux dirigés 3 « Signaux aléatoires »

Exercice 1 :

Soit le processus aléatoire suivant :

$$X(t) = y\cos(wt) + z\sin(wt)$$

Où y, z sont deux variables aléatoires telles que :

$$E[y] = E[z] = 0$$

$$E[y^2] = E[z^2]$$

Montrez que ce processus est stationnaire au sens large.

Exercice 2 :

Pour un processus stochastique $(t) = Acos(\omega_0 t + \Phi)$. A et ω_0 sont des paramètres constants et Φ est variable de distribution uniforme, $f_\Phi = \frac{1}{2\pi}$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

1) Vérifier l'érgodicité du processus $X(t)$ dans la moyenne et dans l'autocorrélation.
2) Déterminer la densité spectrale de puissance, $S_{xx}(f)$.
3) Si $X(t)$ est un processus Gaussien ($f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{(-\frac{x^2}{2\sigma^2})}$, déterminer la densité de probabilité $f_Y(y)$ du processus aléatoire $Y = X^2$.

Solution TD N °03 :

Solution Exo1:

$$E[X(t)] = E[y\cos(wt) + z\sin(wt)]$$

$$= \cos(wt)E[y] + \sin(wt)E[z] = 0$$

Donc la moyenne ne dépend pas du temps.

$$K_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[(y\cos(wt_1) + z\sin(wt_1))(y\cos(wt_2) + z\sin(wt_2))]$$

$$= E[(y^2\cos(wt_1)\cos(wt_2) + yz\cos(wt_1)\sin(wt_2) + yz\sin(wt_1)\cos(wt_2) + z^2\sin(wt_1)\sin(wt_2)]$$

$$= E[\frac{y^2}{2}(\cos(w(t_1+t_2)) + \cos(w(t_1-t_2))) + \frac{z^2}{2}(\cos(w(t_1-t_2)) - \cos(w(t_1+t_2)))]$$

$$= E[\frac{1}{2}\cos(w(t_1+t_2))(y^2 - z^2) + \frac{1}{2}\cos(w(t_1-t_2))(y^2 + z^2)]$$

$$= E[y^2]\cos(w\tau)$$

Avec $\tau = t_1 - t_2$

Donc le processus est stationnaire au sens large.

Solution TD N°3 :

Solution Exo n°02 :

a) Ergodicité dans la moyenne et l'autocorrélation :

L'espérance mathématique et la moyenne temporelle sont déterminées comme suit :

$$\begin{cases} E[X(t)] = \int_0^{2\pi} A\cos(wt+\theta)\cdot \frac{1}{2\pi}\, d\theta = 0 \\ \langle x(t)\rangle = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\cos(w_0 t+\theta)\,dt = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Le processus est ergodique dans la moyenne.

$$R_{xx}(t+\tau, t) = E[X(t+\tau)\,X(t)]$$

$$= E[A\cos(w_0 t + w_0\tau + \theta).A\cos(w_0 t+\theta)]$$

$$= \frac{A^2}{2} E[\cos(w_0\tau) + \cos(2w_0 t + w_0\tau + 2\theta)]$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(w_0\tau)$$

La transformation $\cos\alpha \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - B) + \cos(\alpha + B)\right)$ est utilisée

$$\langle x(t+\tau)\,x(t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A^2\cos(w_0 t + w_0\tau + \theta)\cos(w_0 t+\theta)\,dt$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T}[\cos(2w_0 t + w_0\tau + 2\theta) + \cos(w_0\tau)]\,dt$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(w_0\tau)$$

On obtient $E\left[X(t+\tau)X(t)\right] = \langle x(t+\tau).x(t)\rangle$, alors :

$X(t)$ est ergodique dans l'autocorrélation.

b) Densité spectrale de puissance :

En se basant sur la stationnarité au sens large de $X(t)$, la densité spectrale de puissance peut être calculée par la transformée de Fourier de $R_{xx}(t+\tau, t)$ comme suit :

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau .$$

$$= \frac{A^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)\tau} + e^{-j2\pi(f+f_0)\tau} d\tau$$

$$= \frac{A^2}{4} \left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$

Où : $\delta(.)$ est l'impulsion de dirac.

c) La densité de probabilité, $f_Y(y)$ du processus $Y = X^2$:

On a $g(x) = x^2$

et $x = \pm\sqrt{y} \Rightarrow x_1 = \sqrt{y}$ et $x_2 = -\sqrt{y}$.

Alors, on utilise directement l'expression donnée dans le cours :

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\,\sigma} \cdot e^{-y/2\sigma^2} \qquad y \geq 0$$