Exercice 6 Compléter $\alpha = ?$ du gain de Riccati $K = \begin{bmatrix} 0{,}02 & 0{,}19 \\ 0{,}19 & \alpha \end{bmatrix}$ matrice symétrique définie positive	$\alpha = -10$	
	$\alpha = 2.5$	×
	$\alpha = -2.5$	
Exercice 7 Le gain statique K du système $H(p) = \dfrac{10}{(p+5)(p+2)}$ est :	K=10	
	K=5	
	K=1	×
Exercice 8 La constante de temps T du système $G(p) = \dfrac{8}{p+4}$ est :	T= 8	
	T= 0.25	×
	T= 4	
Exercice 9 l'équation de Riccati du Problème de CO. Système $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 7u \ , \ x(0) = 2 \\ y = 2.8\,x \end{cases}$ Critère à minimiser $J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (5y^2 + 4u^2)dt$	$KA+A^TK-KBR^{-1}B^TK+Q=0$	
	$\dot{K}+KA+A^TK-KBR^{-1}B^TK+C^TQC=0$	
	$KA+A^TK-KBR^{-1}B^TK+C^TQC=0$	×
Exercice 10 l'équation de Riccati du Problème de CO. Système $\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$ Critère à minimiser $J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} (0.5)^{-2k} \left(x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k \right)$	$P_k = Q + A^T P_{k+1} A - A^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A$	
	$P_k = Q + \frac{A^T}{r} P_{k+1} \frac{A}{r} - \frac{A^T}{r} P_{k+1} \frac{B}{r} (R + \frac{B^T}{r} P_{k+1} \frac{B}{r})^{-1} \frac{B^T}{r} P_{k+1} \frac{A}{r}$	
	$P = Q + \frac{A^T}{r} P \frac{A}{r} - \frac{A^T}{r} P \frac{B}{r} (R + \frac{B^T}{r} P \frac{B}{r})^{-1} \frac{B^T}{r} P \frac{A}{r}$ $r = R^{-2k}$	×

TD1
2/2

TD de COptimale 2

Mettre une croix « X » dans la bonne case

Exercice 1 la forme quadratique Q(x,y) associée à la matrice $A=\begin{bmatrix}2 & 9\\10 & 15\end{bmatrix}$	$Q(x,y)=2x^2+19y^2+15xy$	
	$Q(x,y)=2x^2+15y^2+19xy$	X
	$Q(x,y)=15x^2+2y^2+19xy$	
Exercice 2 la forme quadratique H(x,y,z) associée à la matrice $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 5\\1 & 6 & 0\\2 & 0 & 18\end{bmatrix}$	$H(x,y,z)=2x^2+6y^2+18z^2+xy+7xz$	X
	$H(x,y,z)=2x^2+6y^2+18z^2+3xy+5xz$	
	$H(x,y,z)=2x^2+6y^2+18z^2+xy+3yz$	
Exercice 3 la matrice A associée à la forme quadratique $P(x,y)=3x^2+2y^2+6xy$	$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 6\end{bmatrix}$	
	$A=\begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 2\end{bmatrix}$	X
	$A=\begin{bmatrix}3 & 3\\2 & 2\end{bmatrix}$	

TD2
1/4

Exercice 16 Compléter le gain de Riccati $K=\begin{bmatrix}5 & b\\ b & 2\end{bmatrix}$	$b=3$ ✗
	$b=4$
	$b=1.5$ ✗
Exercice 17 le critère associé au Problème de Poursuite d'état à horizon fini Système $\begin{cases}x_{k+1}=Ax_k+Bu_k\\ y_k=Cx_k\end{cases}$ ou aucune réponse	$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{135} r^{-2k}\left[(x_k-8)^T Q(x_k-8)+u_k^T R u_k\right]$ ✗ avec $r=1$.
	$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(x_k-8)^T Q(x_k-8)+u_k^T R u_k\right]$
	$J=\frac{1}{2}\int_0^{135}((x-8)^2+Ru^2)dt$ → continue

Exercice 18 Le système $F(p)=\frac{10}{p^2+3p+2}$ est Oscillatoire amorti ($z<1$) ?	Oui
	Non ✗
Exercice 19 Le système $H(p)=\frac{5}{p^2+2p+4}$ est Hyper amorti ($z>1$) ?	Oui
	Non ✗

Exercice 20 le Type de Problème de CO Système $\begin{cases}x_{k+1}=Ax_k+Bu_k\\ y_k=Cx_k\end{cases}$ avec min $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{201}\left[(x_k-2)^T Q(x_k-2)+u_k^T R u_k\right]$	Régulation d'état avec degré de stabilité 2 À horizon infini
	Régulation de sortie avec Perturbation 2 à horizon fini
	Poursuite d'état désirée 2 à horizon fini ✗

Fin ./.

TD4.

Exercice 15 La constante de temps T du système $R(p) = \dfrac{8}{4p+1}$ est	T= 8	
	T= 1	X
	T= 4	
Exercice 16 La constante de temps T du système $L(p) = \dfrac{7}{4p+4}$ est :	T= 7	X
	T= 1	
	T= 4	
Exercice 17 l'équation de Riccati du Problème de CO Système $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 17u \;,\; x(0) = 20 \\ y = 8x \end{cases}$ Critère à minimiser $J = \frac{1}{2}\int_0^{20}(5y^2 + 6u^2)dt$	$KA + A^TK - KBR^{-1}B^TK + Q = 0$	
	$\dot{K} + KA + A^TK - KBR^{-1}B^TK + C^TQC = 0$	X
	$KA + A^TK - KBR^{-1}B^TK + C^TQC = 0$	
Exercice 18 l'équation de Riccati du Problème de CO Système $\begin{cases} \dot{x} = 12x + 17u \;,\; x(0) = 1 \\ y = 2x \end{cases}$ Critère à minimiser $J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(9x^2 + 14u^2)dt$ aucune de réponse.	$\dot{K} + KA + A^TK - KBR^{-1}B^TK + C^TQC = 0$	
	$\dot{K} + KA + A^TK - KBR^{-1}B^TK + Q = 0$	
	$KA + A^TK - KBR^{-1}B^TK + C^TQC = 0$	·
Exercice 19 l'équation de Riccati du Problème de CO Système $\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$ Critère à minimiser $J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{60}\left(x_k^TQx_k + u_k^TRu_k\right)$	$P_k = C^TQC + A^TP_{k+1}A - A^TP_{k+1}B(R + B^TP_{k+1}B)^{-1}B^TP_{k+1}A$	
	$P_k = Q + A^TP_{k+1}A - A^TP_{k+1}B(R + B^TP_{k+1}B)^{-1}B^TP_{k+1}A$	X
	$P = Q + \frac{A^T}{r}P\frac{A}{r} - \frac{A^T}{r}P\frac{B}{r}(R + \frac{B^T}{r}P\frac{B}{r})^{-1}\frac{B^T}{r}P\frac{A}{r}$	
Exercice 20 l'équation de Riccati du Problème de CO Système $\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$ Critère à minimiser $J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{79}(0.6)^{-2k}\left(y_k^TQy_k + u_k^TRu_k\right)$	$P_k = Q + A^TP_{k+1}A - A^TP_{k+1}B(R + B^TP_{k+1}B)^{-1}B^TP_{k+1}A$	
	$P_k = C^TQC + \frac{A^T}{r}P_{k+1}\frac{A}{r} - \frac{A^T}{r}P_{k+1}\frac{B}{r}(R + \frac{B^T}{r}P_{k+1}\frac{B}{r})^{-1}\frac{B^T}{r}P_{k+1}\frac{A}{r}$	X
	$P_k = C^TQC + A^TP_{k+1}A - A^TP_{k+1}B(R + B^TP_{k+1}B)^{-1}B^TP_{k+1}A$	

TD2
4/4

Exercice 6

Compléter $\alpha = ?$ du gain de Riccati

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$\alpha = -2$	
$\alpha = 0.3$	X
$\alpha = 0.2$	

Exercice 7 l'équation de Riccati du Problème de CO

Système $\begin{cases} \dot{x} = 1.2x + 7.5u \ , \ x(0) = 20 \\ y = 2\,x \end{cases}$

Avec Critère à minimiser $J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}(2y^2 + 6u^2)dt$

$\dot{K} + KA + A^TK - KBR^{-1}B^TK + Q = 0$	
$\dot{K} + KA + A^TK - KBR^{-1}B^TK + C^TQC = 0$	X
$KA + A^TK - KBR^{-1}B^TK + C^TQC = 0$	

Exercice 8 l'équation de Riccati du Problème de CO

Système $\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$

Critère à minimiser

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{189}(1)^{-2k}\left(x_k^TQx_k + u_k^TRu_k\right)$$

$P_k = Q + A^TP_{k+1}A - A^TP_{k+1}B(R + B^TP_{k+1}B)^{-1}B^TP_{k+1}A$	X
$P_k = Q + \frac{A}{r}^T P_{k+1}\frac{A}{r} - \frac{A}{r}^T P_{k+1}\frac{B}{r}(R + \frac{B}{r}^T P_{k+1}\frac{B}{r})^{-1}\frac{B}{r}^T P_{k+1}\frac{A}{r}$	X
$P = Q + \frac{A}{r}^T P\frac{A}{r} - \frac{A}{r}^T P\frac{B}{r}(R + \frac{B}{r}^T P\frac{B}{r})^{-1}\frac{B}{r}^T P\frac{A}{r}$	

Exercice 9

Le gain statique K du système :

$$G(p) = \frac{20}{(3p+4)(p^2+p+2.5)}$$

K=20	
K=1	
K=2	X

Exercice 10

La constante de temps T du système $H(p) = \frac{12}{3p+3}$ est

T= 3	
T= 1	X
T= 4	

TD4

Exercice 4 la matrice B associée à la forme quadratique $Q(x,y,z)=2x^2+3y^2+4z^2+5xy+9yz$	$B=\begin{bmatrix} 2 & 2.5 & 4.5 \\ 4.5 & 3 & 0 \\ 2.5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$	
	$B=\begin{bmatrix} 2 & 2.5 & 0 \\ 2.5 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$	X
	$B=\begin{bmatrix} 2 & 2.5 & 0 \\ 2.5 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 4 \end{bmatrix}$	
Exercice 5 Corriger la forme quadratique $H(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+5xy+6xz^2+7z$	$H(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+5x+6y+7z$	
	$H(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+5xy+6xz+7$	
	$H(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+5xy+6xz+7yz$	X
Exercice 6 Corriger la forme quadratique $G(x,y)=2x^2+3xy^2+4xy+5$	$G(x,y)=2x^2+3y^2+4xy$	X
	$G(x,y)=2x^2+3y^2+4xy+5$	
	$G(x,y)=2x^2+3y^2+4x+5y$	
Exercice 7 le Type de Problème de CO Système $\begin{cases} \dot{x}=6x+3u \ , \ x(0)=8 \\ y=7x \end{cases}$ Critère à minimiser $J=\frac{1}{2}\int_0^{15}(3y^2+5u^2)dt$	Régulation d'état à horizon fini	
	Poursuite de sortie à horizon infini	
	Régulation de sortie à horizon fini	X
Exercice 8 le Type de Problème de CO Système $\begin{cases} \dot{x}=3x+2u \ , \ x(0)=2 \\ y=8x \end{cases}$ Critère à minimiser $J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{5t}(2y^2+7u^2)dt$	Régulation d'état à horizon fini avec degré de stabilité	
	Régulation de sortie à horizon fini	
	Régulation de sortie à horizon infini avec degré de stabilité	X

TD

2/4

Devoir de contrôle en Commande Optimale GEA2 — 3 Avril 2021

Par : Mohamed Naceur ABDELKRIM & Manel CHETOUI

Documents: **Non autorisés** Durée: **1h30** Nombre de pages : 1 et Extrait utile CO.

Exercice 1 : (4= 2+2 points)

1/ Donner la forme quadratique $Q(x,y)$ associée à la matrice $A=\begin{bmatrix}5 & 5\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

Puis étudier son signe à partir d'une matrice convenable.

2/ Donner une matrice B associée à la forme quadratique $H(x,y,z)=16x^2+y^2+10xy+2yz$ qui permet d'étudier son signe.

Exercice 2 : (6=2+2+2 points)

Préciser la nature de chaque **Problème** et donner l'équation de Riccati convenable

	Système et Critère à minimiser
Problème 1	$\dot{x}=2x+6u \;,\; x(0)=20$ $\qquad J=\int_0^{30}\left[6(x-10)^2+3u^2\right]dt$
Problème 2	$\begin{cases}\dot{x}=-8x+5u=0 \;,\; x(0)=20\\ y=3x\end{cases}$ $\qquad J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(7y^2+5u^2)dt$
Problème 3	$\begin{cases}\dot{x}=5x+9u \;,\; x(0)=10\\ y=5x\end{cases}$ $\qquad J=\frac{1}{2}\int_0^{10}e^{4t}\left[5y^2+9u^2\right]dt$

Problème : (10 points) :

Soit le système suivant : $(S):\begin{cases}\dot{X}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}X\end{cases}$ $,X(0)=\begin{bmatrix}10\\ 20\end{bmatrix}$ $,X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

Partie 1: (6=2+2+2)

1/ Préciser la nature de ce problème si l'on veut que la commande optimale minimise le critère $J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(x_1^2+x_2^2+u^2\right)dt$ alors donner l'équation de cette commande optimale.

2/ Compléter le calcul du gain de Riccati : $K=\begin{bmatrix}0.48 & -0.33\\ -0.33 & \alpha\end{bmatrix}$ avec $1.5<\alpha<2.5$;

3/ Vérifier que le système optimal est stable. Donner la valeur de la sortie en régime permanent $y(\infty)$. Conclure.

Partie 2: (4=1+1.5+1.5)

1/ Reformuler ce problème pour que l'état du système soit proche de $\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}$.

2/ Donner l'équation de la nouvelle commande u(t).

3/ Donner un schéma fonctionnel du système commandé

Bon travail ./.

Exercice 15 Compléter le gain de Riccati $K=\begin{bmatrix}5.2 & 2.1\\ 2.1 & a\end{bmatrix}$	$a=0$	
	$a=1.8$	X
Exercice 16 le critère associé au Problème de Poursuite d 'état du Système $\begin{cases}x_{k+1}=Ax_k+Bu_k\\ y_k=Cx_k\end{cases}$	$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{999}r^{-2k}\left[(x_k-8)^TQ(x_k-8)+u_k^TRu_k\right]$	
	$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(x_k-8)^TQ(x_k-8)+u_k^TRu_k\right]$	X
Exercice 17 l'équation de Commande Auxiliaire du Problème de CO Système $\begin{cases}\dot{x}=2x+7u+0.5\ ,\ x(0)=10\\ y=9x\end{cases}$ Critère à minimiser $J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(6x^2+6u^2)dt$	$\dot{q}+[A^T-KBR^{-1}B^T]q+Kv=0$	X
	$\dot{q}+[A^T-KBR^{-1}B^T]q+C^TQy_d=0$	
Exercice 18 l'équation de Riccati du Problème de CO Système $\begin{cases}\dot{x}=12x+17u\ ,\ x(0)=1\\ y=2x\end{cases}$ Critère à minimiser $J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(9x^2+14u^2)dt$	$\dot{K}+KA+A^TK-KBR^{-1}B^TK+C^TQC=0$	
	$\dot{K}+KA+A^TK-KBR^{-1}B^TK+Q=0$	
	$KA+A^TK-KBR^{-1}B^TK+Q=0$	X
Exercice 19 l'équation de Riccati du Problème de CO Système $\begin{cases}x_{k+1}=Ax_k+Bu_k\\ y_k=Cx_k\end{cases}$ Critère à minimiser $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{139}(0.6)^{-2k}\left(x_k^TQx_k+u_k^TRu_k\right)$		
	$P_k=Q+A^TP_{k+1}A-A^TP_{k+1}B(R+B^TP_{k+1}B)^{-1}B^TP_{k+1}A$	
	$P_k=Q+\frac{A^T}{r}P_{k+1}\frac{A}{r}-\frac{A^T}{r}P_{k+1}\frac{B}{r}(R+\frac{B^T}{r}P_{k+1}\frac{B}{r})^{-1}\frac{B^T}{r}P_{k+1}\frac{A}{r}$	X
Exercice 20 le Type de Problème de CO Système $\begin{cases}x_{k+1}=Ax_k+Bu_k\\ y_k=Cx_k\end{cases}$ avec min $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{109}\left[(y_k-7)^TQ(y_k-7)+u_k^TRu_k\right]$	Régulation d'état avec degré de stabilité 7	
	Poursuite de sortie désirée 7 à horizon fini	X

Exercice 11

la matrice C associée à la forme quadratique

$Q(x,y,z)=2x^2+3y^2+4z^2+10xy+8yz$

$C=\begin{bmatrix}2&10&0\\0&3&0\\0&8&4\end{bmatrix}$	X
$C=\begin{bmatrix}2&5&0\\5&3&6\\0&2&4\end{bmatrix}$	X
$C=\begin{bmatrix}2&5&0\\5&4&6\\0&2&3\end{bmatrix}$	

Exercice 12

Le système $H_1(p)=\dfrac{4}{5p^2+p+1}$ a deux pôles complexes

(c'est à dire facteur d'amortissement $z<1$)

Oui alors donner ses pôles :	X
Non , car	

Exercice 13

l'équation de Commande Auxiliaire du Problème de

CO Système $\begin{cases}\dot{x}=x+u+2\ ,\ x(0)=8\\ y=3x\end{cases}$

Critère à minimiser $J=\dfrac{1}{2}\int_0^{\infty}(3x^2+5u^2)dt$

$\dot{q}+[A^T-KBR^{-1}B^T]q+Kv=0$	X
$\dot{q}+[A^T-KBR^{-1}B^T]q+C^TQy_d=0$	
$\dot{q}+[A^T-KBR^{-1}B^T]q+KB=0$	

Exercice 14

l'équation de Riccati du Problème de CO

Système $\begin{cases}\dot{x}=12x+6u\ ,\ x(0)=1\\ y=5x\end{cases}$

Critère à minimiser $J=\dfrac{1}{2}\int_0^{\infty}(3y^2+2u^2)dt$

$24K-18K^2+75=0$	X
$\dot{K}+24K-18K^2+9=0$	
$24K-18K^2+9=0$	

Exercice 15

le critère J à minimiser du Problème de poursuite d'état à horizon fini avec degré de stabilité 2

du système : $\dot{x}=-5x+2u+3\ ,\ x(0)=4$

$J=\dfrac{1}{2}\int_0^{50}e^{2t}((x-1)^2+3u^2)dt$	
$J=\dfrac{1}{2}\int_0^{100}e^{4t}((x-5)^2+2u^2)dt$	X
$J=\dfrac{1}{2}\int_0^{\infty}2\ ((x-2)^2+8u^2)dt$	

TD Commande Optimale - 4

Garder la bonne réponse

et

Justifier brièvement votre réponse

Exercice 2 ~~la matrice A associée à la forme quadratique~~	$\cancel{A=\begin{bmatrix} 7 & 49 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}}$	

Exercice 1 la forme quadratique Q(x,y) associée à la matrice $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$Q(x,y)=4x^2-2y^2+10xy$	
	$Q(x,y)=4x^2+10y^2+6xy$	X
	$Q(x,y)=4x^2+10y^2-16xy$	

	$\cancel{A=\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}}$	
	$\cancel{A=\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}}$	

Exercice 3 Corriger 3 erreurs dans la forme quadratique $H(x,y,z)=2+5x^2-3y^2+z^2-8xy-2xzy$	$H(x,y,z)=5x^2-3y^2+z^2-8xy-2x$	
	$H(x,y,z)=5x^2-3y^2+z^2-8xy-2zy$	X
	$H(x,y,z)=2+5x^2-3y^2+z^2-8xy$	

Exercice 4 le Type de Problème de CO Système avec le Critère à minimiser $\begin{cases} \dot{x}=2x+3u \\ y=5x \end{cases}$, $x(0)=3$ $J=\frac{1}{2}\int_0^{10} 5(y^2+u^2)dt$ aucune réponse.	Régulation d'état à horizon fini
	Poursuite de sortie à horizon fini
	Régulation de sortie à horizon infini

Exercice 5 le critère J à minimiser du Problème de Poursuite de sortie à horizon infini du système $\dot{x}=2x+3.8u$, $x(0)=20$ est :	$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(2x^2+3u^2)dt$	
	$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(0.5)^{-2k}\left(x_k^TQx_k+u_k^TRu_k\right)$	
	$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}5((y-7)^2+u^2)dt$	X

tou

TD de COptimale 1

Mettre une croix « X » dans la bonne case

Exercice 1 la forme quadratique Q(x,y) associée à la matrice $A=\begin{bmatrix}4 & 7\\7 & 10\end{bmatrix}$ diapo 14	$Q(x,y)=4x^2+14y^2+10xy$	
	$Q(x,y)=4x^2+10y^2+7xy$	
	$Q(x,y)=4x^2+10y^2+14xy$	X
Exercice 2 la matrice A associée à la forme quadratique $P(x,y)=7x^2+8y^2+10xy$	$A=\begin{bmatrix}7 & 8\\0 & 10\end{bmatrix}$	
	$A=\begin{bmatrix}7 & 5\\5 & 8\end{bmatrix}$	X
	$A=\begin{bmatrix}7 & 25\\0 & 8\end{bmatrix}$	
Exercice 3 Corriger 3 erreurs dans la forme quadratique $H(x,y,z)=5x^2-3y^2+z^2+7xyz+16x^2z-2z$	$H(x,y,z)=5x^2-3y^2+z^2+7xy+16x^2z-2z$	
	$H(x,y,z)=5x^2-3y^2+z^2+7xy+16xz-2yz$	X
	$H(x,y,z)=5x^2-3y^2+z^2+7xyz+16xz-2z$	
Exercice 4 le Type de Problème de CO Système $\begin{cases}\dot{x}=1.3x+3u \ , \ x(0)=20\\ y=1.7\,x\end{cases}$ Critère à minimiser $J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(3y^2+5u^2)dt$	Régulation d'état à horizon fini	
	Poursuite de sortie à horizon fini	
	Régulation de sortie à horizon infini	X
Exercice 5 le critère J à minimiser du Problème de Régulation d'état à horizon infini du système : $\dot{x}=0.2x+3u \ , \ x(0)=10$ est :	$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(2y^2+3u^2)dt$	
	$J=\frac{1}{2}\int_0^{10}(2x^2+3u^2)dt$	
	$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(2x^2+3u^2)dt$	X

1/2

TD3 de C.Optimale 3

Mettre une croix « X » dans la bonne case

Exercice 1 Le système $H_1(p) = \dfrac{5}{(1+p)(1+3p)}$ a deux pôles réels $(z > 1)$?	oui	X
	non	
Exercice 2 Le système $H_2(p) = \dfrac{4}{5p^2+p+1}$ a deux pôles complexes $(z < 1)$ $\Delta < 0$	oui	X
	non	
Exercice 3 Le système $H_3(p) = \dfrac{15}{(1+5p)(1+3p)}$ est Oscillatoire amorti $(z < 1)$ pôles complexes	oui	
	non	X
Exercice 4 Le système $H_4(p) = \dfrac{10}{p^2+p+2}$ est Hyper amorti $(z > 1) \Rightarrow 2$ 1er ordre	oui	
	non	X
Exercice 5 La constante de temps T et le gain statique K de $G_1(p) = \dfrac{6}{2+3p}$ sont	K=6, T=3	
	K=3, T=1.5	X
	K=3, T=3	
Exercice 6 La constante de temps T et le gain statique K de $G_2(p) = \dfrac{25}{5+10p}$ sont	K=5, T=2	X
	K=25, T=10	
	K=5, T=10	
Exercice 7 la forme quadratique H(x,y,z) associée à la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 18 & 0 \\ 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$	$H(x,y,z) = 2x^2 + 18y^2 + 6z^2 + 2xy + 10xz$	X
	$H(x,y,z) = 2x^2 + 18y^2 + 6z^2 + 4xy + 8xz$	
Exercice 8 la forme quadratique Q(x,y,z) associée à la matrice $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 18 \end{bmatrix}$	$Q(x,y,z) = 2x^2 + 6y^2 + 18z^2 + 4xy + 7xz$	

le critère J à minimiser du Problème de Régulation d'état à horizon fini du système : $\dot{x} = 5x + 30u$, $x(0) = 5$	$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(2x^2+8u^2)dt$	
	$J=\frac{1}{2}\int_0^{45}(7y^2+5u^2)dt$	
	$J=\frac{1}{2}\int_0^{45}(5x^2+7u^2)dt$	X
Exercice 10 le critère J à minimiser du Problème de Régulation d'état avec degré de stabilité 5 à horizon infini du système : $\dot{x} = 12x + 31u$, $x(0) = 7$	$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{10t}(3x^2+5u^2)dt$	X
	$J=\frac{1}{2}\int_0^{40}e^{5t}(3x^2+5u^2)dt$	
	$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(2x^2+3u^2)dt$	
Exercice 11 Compléter le gain de Riccati $K=\begin{bmatrix} 2 & a \\ a & 2.5 \end{bmatrix}$	$a = 1$	x
	$a = 5$	
	$a = 3$	
Exercice 12 Compléter le gain de Riccati $K=\begin{bmatrix} b & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$	$b = -5$	
	$b = 5$	X
	$b = 1$	
Exercice 13 Le gain statique K du système $H(p) = \frac{10}{(5p+1)(2p+1)}$	$K=10$	X
	$K=5$	
	$K=1$	
Exercice 14 Le gain statique K du système $G(p) = \frac{10}{(5p+1)(p^2+p+2)}$	$K=10$	
	$K=5$	X
	$K=1$	

TD2
3/4

	$Q(x,y,z)=2x^2+6y^2+18z^2+4xy+7yz$	X
Exercice 9 la matrice C associée à la forme quadratique $R(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+6xy$	$C=\begin{bmatrix}1&3&0\\3&2&1\\0&1&3\end{bmatrix}$	
	$C=\begin{bmatrix}1&3&0\\3&2&1\\0&-1&3\end{bmatrix}$	X
Exercice 10 Corriger la forme quadratique $F(x,y,z)=x^2y+y^2+2z^2+5xy+9xz$	$F(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2+5xy+9xz$	X
	$F(x,y,z)=x^2y+y^2x+2z^2y+5xyz$	
Exercice 11 le Type de Problème de CO Système $\begin{cases}\dot{x}=6x+3u\ , \ x(0)=8\\ y=7x\end{cases}$ Critère à minimiser $J=\frac{1}{2}\int_0^{30}(3(7-y)^2+5u^2)dt$	Régulation de sortie à horizon fini	
	Poursuite de sortie à horizon fini	X
Exercice 12 le Type de Problème de CO Système $\begin{cases}\dot{x}=3x+2u\ , \ x(0)=2\\ y=8x\end{cases}$ Critère à minimiser $J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{12t}(2x^2+6u^2)dt$	Régulation d'état à horizon infini avec degré de stabilité	X
	Poursuite d'état à horizon infini	
Exercice 13 le critère J à minimiser du Problème de Régulation d'état avec perturbation du système : $\dot{x}=5x+30u+0.2$, $x(0)=0.2$	$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(2x^2+8u^2)dt$	X
	$J=\frac{1}{2}\int_0^{90}(6y^2+5u^2)dt$	
Exercice 14 le critère J à minimiser du Problème de poursuite d'état avec degré de stabilité 1.5 du système : $\dot{x}=1.5x+9u$, $x(0)=1.5$	$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{3t}(2(x-3)^2+5u^2)dt$	X
	$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}1.5(2(x-3)^2+5u^2)dt$	

TD3
4/3

Exerci

Exo. $\boxed{-4x^2 + 7{,}32x + 0{,}891 = 0}$ ⇒

$\Delta = (7{,}32)^2 - 4(-4)(0{,}891) = 53{,}58 + 14{,}25 = 67{,}83 = (8{,}23)^2$

$\boxed{x_1 = \frac{-7{,}32 - 8{,}23}{-8} = 1{,}94}$ ou

$x_2 = \frac{-7{,}32 + 8{,}23}{-8} = -0{,}11 < 0$ à rejeter car

k_{ij} de K sont définis positifs, $K > 0$ $\boxed{\alpha = 1{,}94}$

3/ Pour étudier la stabilité du système en boucle fermée on calcule la fonction caractéristique en boucle fermée $A_f = A - B R^{-1} B^T K$ [illegible]

$B \cdot 1 \cdot B^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \quad 2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$B B^T K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}41 & -0{,}33 \\ -0{,}33 & 1{,}94 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}18 & 3{,}55 \\ -0{,}36 & 7{,}10 \end{bmatrix}$

$A_f = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0{,}18 & 3{,}55 \\ -0{,}36 & 7{,}10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}82 & -3{,}55 \\ 0{,}36 & -4{,}10 \end{bmatrix}$

Le polynôme caractéristique de A_f : est $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A_f) = 0$

$\Delta(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 0{,}83 & 3{,}55 \\ -0{,}36 & \lambda + 4{,}10 \end{bmatrix} = (\lambda + 0{,}83)(\lambda + 4{,}10) + (3{,}55)(0{,}36)$

$= \lambda^2 + 4{,}93\lambda + 4{,}68 = 0$

$\Delta(\lambda)$ est stable car les coeff sont positifs (cas d'ordre 2)

Pour la sortie en régime stationnaire $y(\infty)$ [illegible]

alors $\dot{x} = A_f x = 0 \Rightarrow x(\infty) = 0 \Rightarrow x_1(\infty) = 0$; $x_2(\infty) = 0$

et $y(\infty) = C\,x(\infty) = 2x_1(\infty) + [illegible]\, x_2(\infty) = 0 + 0 = 0$

Conclusion : puisque $x(\infty) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ donc on obtient réalisé la régulation d'état, l'objectif de cette commande optimale.

Partie 2 : [illegible]

1/ Reformulation du problème : On propose de trouver la commande optimale $u(t)$ du système étudié (S) qui doit minimiser le critère J suivant :

$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \left((x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2 + u^2 \right) dt$

c'est une poursuite d'état avec $X_{désiré} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

2/ La commande optimale est $u = -R^{-1} B^T (K x - q)$

c.à.d. $u(t) = -R^{-1} B^T K x(t) + R^{-1} B^T q(t)$ telle que :

$\dot{q} + \underbrace{(A^T - K B R^{-1} B^T)}_{A_f^T} q + Q x_d = 0$ avec $\dot{q} = 0$ (régime stationnaire) $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -0{,}82 & 0{,}36 \\ -3{,}55 & -4{,}10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $q = \begin{bmatrix} 2{,}15 \\ -0{,}66 \end{bmatrix}$

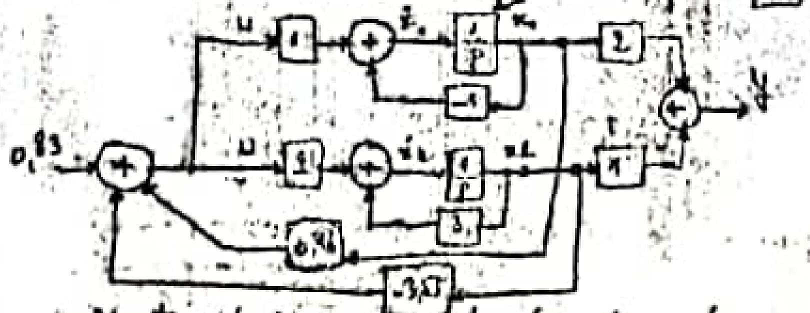
La solution est $q_1 = 2{,}15$ et $q_2 = -0{,}66$

La commande $u(t)$ devient alors :

$u(t) = 0{,}18\, x_1 - 3{,}55\, x_2 + (1)^{-1} [1 \quad 2] \begin{bmatrix} 2{,}15 \\ -0{,}66 \end{bmatrix}$ $= 0{,}83$

enfin $\boxed{u(t) = 0{,}18\, x_1 - 3{,}55\, x_2 + 0{,}83}$

3/ Donner un schéma fonctionnel du système commandé : intégrateur $\boxed{\int}$



Dimensions des matrices peuvent être données