UNIVERSITE DE GABES Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès	ENIG	A.U. : 2018-2019

EXAMEN

Section : GEA1
Epreuve de : Mathématiques I

Nature de l'épreuve : D.S.☒ D.C.☐	Documents : autorisés ☐ non autorisés ☒
Date de l'épreuve : 11/06/2019	Calculatrice : autorisée ☐ non autorisée ☒
Durée de l'épreuve : 2h	Session : principale ☐ contrôle ☒

Exercice 1.

1) a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f : x \mapsto e^{-|x|}$.

b) En utilisant la formule d'inversion, calculer la transformée de Fourier de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

c) Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$

2) Le but de cette question est de rechercher des fonctions φ intégrables telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

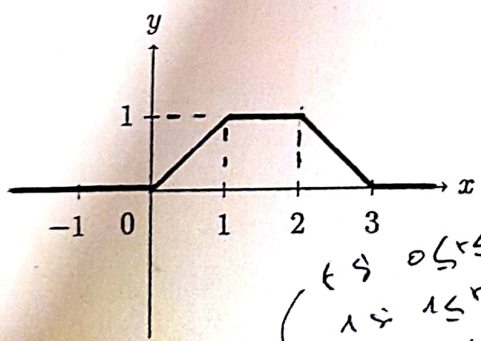
$$\varphi(x) = e^{-|x|} + \frac{3}{8}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-s|}\varphi(s)ds.$$

a) Ecrire cette équation sous forme d'une équation faisant intervenir un produit de convolution.

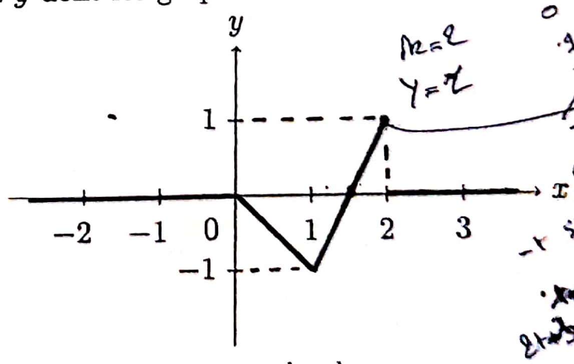
b) En déduire la transformée de Fourier de φ .

c) En utilisant la formule d'inversion, déduire que l'équation admet une unique solution et la déterminer.

Exercice 2. On considère les fonction f et g dont les graphe sont :



- *graphe de f*



- *graphe de g*

1) Exprimer les fonction f et g à l'aide de la fonction échelon unité U définie par $U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2) En déduire les transformées de Laplace des fonctions f et g.

y = ax + b
-1 = a1 + b
1 = a2 + b

UNIVERSITE DE GABES Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès		A.U. : 2018-2019

EXAMEN

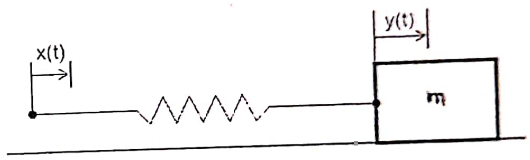
Section : GM1 - GCV1 - GEA1
Epreuve de : Mathématiques I

Nature de l'épreuve : D.S.☒ D.C.☐	Documents :	autorisés	☐	non autorisés	☒
Date de l'épreuve : 08/01/2019	Calculatrice :	autorisée	☐	non autorisée	☒
Durée de l'épreuve : 2h	Session :	principale	☒	contrôle	☐

N.B. La clarté du raisonnement et la qualité de la rédaction interviennent dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. *(08 points)*

Soit le système suivant constitué d'une masse m posé sur le sol est d'un ressort de raideur k.
A $t = 0$, le système est au repos.



I) Cas sans frottement : Dans un premier temps, on néglige les frottements. L'équation de fonctionnement est

$$m\, y''(t) = k\, \big(x(t) - y(t)\big),$$

(les conditions initiales sont nulles).

1) Réécrire cette équation en passant du domaine temporel au domaine de Laplace.
2) Déterminer la fonction de transfert du système

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)},$$

où $X(p)$ (resp. $Y(p)$) désigne la transformée de Laplace de $x(t)$ (resp. de $y(t)$).

3) On sollicite ce système avec un échelon unitaire $x(t) = U(t) = \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.
   a) Déterminer $X(p)$ et $Y(p)$.
   b) Déterminer les constantes α, β et γ indépendentes de p telles que

$$\frac{k}{p\,(m\,p^2 + k)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta p + \gamma}{m\,p^2 + k}, \quad \forall p \in \mathbb{R}^*$$

   c) En déduire l'expression de $y(t)$.

II) **Cas avec frottements :** Les frottements ne sont plus négligés, λ est le coefficient de frottement. L'équation de fonctionnement devient :

$$m\, y''(t) = k\,(x(t) - y(t)) - \lambda\, y'(t).$$

(les conditions initiales sont nulles).
On donne les valeurs numériques suivantes : $k = 5\ N/m$, $\lambda = 2\ N/m.s^{-1}$ et $m = 1\ kg$.

1) Réécrire cette équation en passant du domaine temporel au domaine de Laplace.

2) Déterminer la fonction de transfert du système

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)},$$

où $X(p)$ (resp. $Y(p)$) désigne la transformée de Laplace de $x(t)$ (resp. de $y(t)$).

3) On sollicite ce système avec un échelon unitaire $x(t) = U(t) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$.

a) Déterminer $X(p)$ et $Y(p)$.

b) Trouver la décomposition en éléments simples de

$$\frac{5}{p\,(p^2 + 2p + 5)}, \quad \forall p \in \mathbb{R}^*.$$

c) En déduire l'expression de $y(t)$.

Exercice 2. *(12 points)*
On désigne par $L^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, sa transformée de fourier $\widehat{f}$ est donnée par

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi t x} dt.$$

On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

I) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{-x^2/2}$.

1) Justifier que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que

$$(\widehat{f}(x))' = -4\pi^2 x\, \widehat{f}(x)$$

3) Calculer $\widehat{f}(0)$ et en déduire que $\widehat{f}(x) = \sqrt{2\pi}\ e^{-2\pi^2 x^2}$.

4) Donner la transformée de Fourier de $g_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} f(\frac{x-m}{\sigma})$, où $m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

5) En utilisant l'injectivité de la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$, montrer avec un minimum de calculs que le produit de convolution

$$g_{m,\sigma} * g_{m',\sigma'} = g_{m+m',\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}} \quad \text{pour tous } m, m' \in \mathbb{R},\ \sigma, \sigma' > 0$$

II) pour tout entier naturel n, on considère la fonction E_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$E_n(t) = |t|^n \; e^{-|t|}$$

où $|t|$ désigne la valeur absolue de t.
On se propose de déterminer la transformée de Fourier $\widehat{E_n}$ de cette fonction. Pour cela, on fixe x dans $\mathbb{R}$, on désigne par α le nombre complexe $(1 + 2i\pi x)$ et l'on pose

$$K_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt$$

1) Montrer que E_n appartient à $L^1(\mathbb{R})$ et que

$$\widehat{E_n}(x) = 2\,\mathcal{R}\acute{e}(K_n),$$

où $\mathcal{R}\acute{e}(K_n)$ désigne la partie réelle de K_n.

2) Établir une relation de récurrence entre K_n et K_{n-1}. En déduire que

$$K_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

3) Expliciter $\widehat{E_0}(x)$, $\widehat{E_1}(x)$ et $\widehat{E_2}(x)$.

4) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

5) Montrer qu'il existe une fonction β, définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs réelles, que l'on explicitera, telle que

$$\widehat{E_n}(x) = \frac{2\; n!\; \cos\left((n+1)\arctan(2\pi x)\right)}{(1+4\pi^2 x^2)^{\beta(n)}}$$

6) Montrer à l'aide de l'identité de Parseval que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^3}\; dx = \frac{\pi}{4}$$