Feuille TD - Révision

Exercice 1

1. (a) Soit $T \in \mathcal{D}^{'}(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$. Rappeler la définition de la distribution $f\,T$.
   (b) Donner (en la démontrant) une expression de la distribution dérivée $(f\,T)^{'}$.
2. Soit a un nombre réel et δ_a la distribution de Dirac en a.
   (a) Vérifier que $(x-a)\,\delta_a^{'} = -\,\delta_a$.
   (b) Vérifier que $(x-a)^2\,\delta_a^{'} = 0$.
   (c) Vérifier que $(x-a)\,\delta_a^{''} = -2\,\delta_a^{'}$.

Exercice 2 Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } \ x \leq 0 \\ \sqrt{x} + 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est localement intégrable. On note T_f la distribution associée à f.
2. Calculer la dérivée de T_f.

Exercice 3 1. Déterminer la tranformée de Fourier des distributions suivantes :
   (a) $\delta_a,\ a \in \mathbb{R}$
   (b) $f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$
   (c) $\cos(x)$
2. Dériver deux fois la distribution $f(x) = e^{-|x|}$ pour trouver facilement sa transformation de Fourier.

Exercice 4 On s'intéresse au problème de Cauchy pour l'équation des ondes homogène en dimension 1 :

$$(pb) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0\ , \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x,0) = \varphi(x)\ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)\ , \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

avec $c \neq 0$. On suppose que $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que le problème (pb) admet une solution u.

1. On considère la transformée de Fourier pour la seule variable x, i.e.

$$\widehat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx\ , \quad \forall (\xi,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

   Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $t \mapsto \widehat{u}(\xi,t)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tout $(\xi,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{\varphi}(\xi)\ \frac{e^{2i\pi c\,\xi t} + e^{-2i\pi c\,\xi t}}{2} + \widehat{\psi}(\xi)\ \frac{e^{2i\pi c\,\xi t} - e^{-2i\pi c\,\xi t}}{4i\pi c\,\xi}$$

3. Conclure que la solution u vérifie pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ la formule d'Alembert :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\big) + \frac{1}{2\,c}\ \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\ ds.$$

$$\left(\text{Rappel : } \mathcal{F}\big(\mathbb{1}_{[-a,a]}(t)\big)(x) = \frac{\sin(2\pi a x)}{\pi x} \quad,\ a \in \mathbb{R}\right)$$