- $T = R + iS \Longrightarrow \langle T, \varphi \rangle = \langle R, \varphi \rangle + i \langle S, \varphi \rangle$
- $\langle \overline{T}, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \overline{\varphi} \rangle} \quad \forall \varphi \in D$
- $\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$
- $\langle \lambda T_1, \varphi \rangle = \lambda \langle T_1, \varphi \rangle$
- T est positive ; $\varphi \geq 0 \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle \geq 0$
- T est nulle ; $\langle T, \varphi \rangle = 0$
- $T_1 = T_2$ si $\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$

* Loc. intégrable $(f \in L^1_{loc}(\Omega))$

* si f est intégrable sur tout compact inclu dans $\Omega$

alors f est localement intégrable sur $\Omega$

(c-à-d: pour tout compact K : $\int_K f(x)\,dx < +\infty$)

* Distribution (associé à une fct Loc intégrable)

- $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ; $T_f : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$

$\varphi \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle =$

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

est une dist associé à f

- $\Omega = \mathbb{R}$ : $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ; $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \varphi \in D(\mathbb{R})$
- $\Omega = \mathbb{R}^2$ : $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ ; $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy$

## Notion de distribution

T est une distribution $\Longleftrightarrow T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$

$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$

qui verifie :

* T $\boxed{\text{Linéaire}}$ : soient $\varphi_1, \varphi_2 \in D$ on a: $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle T, \lambda\varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \lambda\langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$$

* T $\boxed{\text{Continue}}$ : soit $(\varphi_n)_n \in D(\Omega)$ tq $\varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{D} \varphi$

on a $\langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} \langle T, \varphi \rangle$

(continuité vers 0 ?)

Rq : * supp $\varphi$

* $\varphi \in D(\mathbb{R}) \Longrightarrow \exists [-a, a] \subset \mathbb{R}$ tq supp $\varphi \subset [-a, a]$

* supp $\varphi = \{ x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) \neq 0 \}$

* $\varphi_n \xrightarrow[+\infty]{D} \varphi \Longrightarrow \exists$ un compact K tq supp $\varphi_n \subset K$

et $\forall k \in \mathbb{N}$ $\sup_K | \varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)} | \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

* $H(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$

⊛ H est C.p.m $\Longrightarrow$ Elle est loc. intég. sur $\mathbb{R}$

⊛ $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Longrightarrow T_H \in D'$

*** Dist. de Dirac :** $(\delta_a = \delta_0 = \delta)$

$$\delta_0 : D(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{K}\ (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$
$$\varphi \longmapsto \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

est une dist. de Dirac en a.

(Cas général $supp\ \delta_a = \{a\}$)

*** Dérivation (au sens de dist) :**

. dérivée d'une distribution T, noté T' défenie par $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$ $\forall \varphi \in D$

(si T est une dist. $\Longrightarrow T'$ est une dist.)

Rq : (Valeur abs : n'est pas linéaire)

$\hookrightarrow \langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = |\varphi_1(x) + \varphi_2(x)| \neq |\varphi_1(x)| + |\varphi_2(x)|$ ②

$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)}(x) \rangle$

Rq : . dist. régulier $\longrightarrow \int$

. dist. de dirac $\longrightarrow$ pas d'intégrale

. $x \longmapsto \cos x$ est Loc. intégrable sur $\mathbb{R}$

donc $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cos(x)\, dx$ est une dist. : C'est la distribution régulière associé où la f° $x \longmapsto \cos x$

. $\langle T, \varphi \rangle = \varphi(2) - \varphi(10) = \langle \delta_2, \varphi \rangle - \langle \delta_{10}, \varphi \rangle$
$= \langle \delta_2 - \delta_{10}, \varphi \rangle \Longrightarrow T = \delta_2 - \delta_{10}$ dist

. Dist. régulière associée à la f° est 1 :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\, dx\, dy$$

. $\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)\, dt$

. $|\varphi(x) \mathbb{1}_{\xi \leq x \leq a}| \leq |\varphi(x)| \leq \|\varphi^*(x)\|_\infty$

. si f est continue $\Longrightarrow supp\ f(x) = supp\ \underset{\text{dist. de f}}{T_f}$

. $f(x) = \mathbb{1}_{\{a\}}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = a \\ 0 & sinon \end{cases}$

$\hookrightarrow (f = 0$ p.p$)$

- $\varphi$ est nulle sur $[0,+\infty[ \iff \operatorname{supp}\varphi \subset ]-\infty, 0[$
- $\varphi$ est nulle sur $\mathbb{R} \iff \operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$
- $\varphi(\frac{1}{2}) = \langle \delta_{1/2}, \varphi \rangle$
- $T'_{1\!1_{[a,b]}} = \delta_a - \delta_b$

## * opération sur le distribution :

$\left.\begin{array}{l} \cdot T \in D'(\Omega) \\ \cdot g \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow (gT)$ est une distribution définie par

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$$

- Proposition

① $\left.\begin{array}{l} \cdot T \in D' \\ \cdot g \in \mathcal{C}^{\infty} \end{array}\right\} \Rightarrow (gT)$ est dérivable

$$(gT)' = \underbrace{g'T}_{\text{distribution produit } g'T} + \underbrace{gT'}_{\text{distribution produit } gT'}$$

② $\left.\begin{array}{l} \cdot T_1, T_2 \in D' \\ \cdot g_1, g_2 \in \mathcal{C}^{\infty} \end{array}\right\} \Rightarrow$
- $(g_1+g_2)T_1 = g_1T_1 + g_2T_1$
- $(g_1 g_2)T_1 = g_1(g_2 T_2)$
- $g_1(T_1+T_2) = g_1T_1 + g_1T_2$

③ $T \in D'$ ; $\cdot (\tau_a f)(x) = f(x-a)$ $\quad$ $\cdot \check{f}(x) = f(-x)$

$\cdot (h_a f)(x) = f(ax)$

soit $\varphi \in D$

Alors :

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle$$

$$\langle h_a T, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T, h_{\frac{1}{a}}\varphi \rangle$$

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$$

## * Convergence d'une suite des dist.

$\cdot (T_n)_n$ suite de dist.

$T_n$ converge vers la dist. $T$ si $\forall \varphi \in D$ :

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

noté $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{D'} T$

③ Rq : $\cdot \lim_{k\to+\infty} \varphi(k) = 0$ car $\varphi$ est à support compact

. **D.L :** $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(0) + \dots$

. **TCD :**
- $x \longmapsto f_n(x)$ est continue
- $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ intégrable
- $|f_n(x)| \leq g(x)$ intégrable
  généralement $\|f_n\|_{+\infty}$

. **Intég de Gauss**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

. **Convergence de dérivée :**

$$\left.\begin{array}{l} \cdot (T_n)_n \text{ suite de dist} \\ \cdot T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{D'} T \end{array}\right) \Longrightarrow T_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{D'} T'$$

---

$\cdot \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \quad i = 1, \dots, n$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \text{ (notation)} \quad i = 1, \dots, n$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}_{x_1} \partial^{\alpha_2}_{x_2} \dots \partial^{\alpha_n}_{x_n}}$$

$$\Longrightarrow \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

. **Dérivée de la dist. de Dirac :** $\varphi \in D$

- $\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi'(x) \rangle = -\varphi'(0)$
- $\langle \delta_a', \varphi \rangle = -\varphi'(a)$
- $\langle \delta_a^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta_a, \varphi^{(n)}(x) \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(a)$

$\times$ **Dérivée d'une fct discontinue** (Formule de saut)

- $f \in (\mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \dots\})$
- $f(a_k^+) = \lim_{x \to a_k^+} f(x)$ et $f(a_k^-)$ existent

de saut finie $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ alors :

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{k=1}^{n} \left(f(a_k^+) - f(a_k^-)\right) \delta_{a_k}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ r \geq 0 \ ; \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \Longrightarrow dx\,dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr\,d\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} dr\,d\theta$$

$$= r\,d\theta\,dr$$

Soit $\tilde{\varphi}(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$

- $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y}$
- $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

## Produit de convolution de 2 dist. S et T :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x , \langle T_y , \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

variable s'applique sur S : $x$

$y$ : vari. s'applique sur T

- $\langle \delta_{b,y} , \varphi(x+y) \rangle = \varphi(x+b)$
- $T * S = S * T$
- $T * \delta = \delta * T = T$
- $(T * S)' = T' * S = S' * T$

en général :
- $(T * S)^{(n)} = T^{(n)} * S = T * S^{(n)}$
- $D^{\alpha}(T * S) = D^{\alpha} T * S = T * D^{\alpha} S$

## Transformée de Fourier

### Espace de Schwarz $S(\mathbb{R})$ :

- $S(\mathbb{R}) = \{ \varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) / \forall n, m \in \mathbb{N}$ on a : $\lim_{|x| \to +\infty} x^m \varphi^{(n)}(x) = 0 \}$

- S est une e.v
- S est stable par T.F (si $\varphi \in S \Rightarrow \hat{\varphi} \in S$)
- S est stable par $*$ (si $\varphi_1, \varphi_2 \in S \Rightarrow \varphi_1 * \varphi_2 \in S$)
- S est stable par Dérivation (si $\varphi \in S \Rightarrow \varphi' \in S$)
- S est stable par Multiplication (si $\varphi_1, \varphi_2 \in S \Rightarrow \varphi_1 \varphi_2 \in S$)
- S est stable par un Polynôme (si $\varphi \in S$, P poly $\Rightarrow P\varphi \in S$)

## T F dans S

Dist. tempérée : c'est une forme linéaire et continue sur S et noté $S'(\mathbb{R})$ ← ensemble des dist. tempérés.

• Toute Dist. tempérée $T$ admet une TF notée $F(T)$ ou $\hat{T}$ qui est également une dist tempérée et on a : $\langle F(T), \varphi \rangle = \langle T, F(\varphi) \rangle \quad \forall \varphi \in S$

• $T \in S' \Leftrightarrow T : S(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{K}$

$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$

• linéaire

• continue

$\boxed{S' \subset D'}$

• $\underset{\text{ou } F(f)}{\hat{f}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi x t} dt$ et $\underset{\text{ou } F(f)}{\hat{f}}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$

• $F(e^{2i\pi a x}) = \langle \delta_a, \varphi \rangle = \delta_a$

• Soit $T \in S'$ donc :

⊕ $F(T^{(k)}) = (2i\pi x)^k \hat{T}$

⊕ $F(\tau_a T) = e^{-2i\pi a x} \hat{T}$

• $F(h_a T) = \frac{1}{|a|} F(T)\left(\frac{x}{a}\right)$

• La T.F. d'une dist. paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire)

• $(F(T))^{(k)} = F((-2i\pi t)^k T)$

Théorème : $T_1, T_2$ sont 2 dist. tempérées à supp compact

$F(T_1 * T_2) = \hat{T}_1 \; \hat{T}_2$

Théorème

TF est continue et bijective de $S(\mathbb{R})$ dans lui m., notée $F^{-1}$ ou $\bar{F}$ la T.F. inverse et on a :

$F^{-1} F T = F F^{-1} T = T$ $\quad \langle F^{-1} T, \varphi \rangle = \langle T, F^{-1} \varphi \rangle$

• $F(\delta_a) = e^{-2i\pi a x}$

$\boxed{T_H' = \delta}$

$\boxed{\Pi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}' = \delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{\frac{1}{2}}}$

$\underbrace{\sin x}_{=0} \delta = 0$

$\underbrace{\cos x}_{=1} \delta = \delta$

$\boxed{\hat{\delta}_a = e^{-2i\pi a x}}$