– Transformation de Laplace –

I/ Généralité :

Déf : Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$.
On appelle transformée de Laplace de f la fonction de variable réelle ou complexe :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Rque :

1/ $\mathcal{L}(f)(p)$ est définie si $\int_0^{+\infty} |f(t)||e^{-pt}|\, dt < +\infty$

c.à.d $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-\mathrm{Ré}(p)t}\, dt < +\infty$

dans ce cas on dit que $\mathcal{L}(f)$ est dite l'image et f est dite l'origine

2/ on remarque que $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$ ne prend en compte que les valeurs de $f(t)$ pour $t > 0$.
on peut donc supposer que f est définie sur $\mathbb{R}$ avec $f(t) = 0$, si $t < 0$
on dit alors que f est une fonction causale.

pour :

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$: fonction Heaviside (échelon-unité)

si f est définie sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f \cdot H$ est causale.

Théorème :

Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et P_1 un réel tq

$$\int_0^{+\infty} e^{-P_1 t} |f(t)|\, dt < +\infty.$$

Alors :

1/ $\forall p \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Ré}(p) > P_1$: $\int_0^{+\infty} |e^{-pt}|\, |f(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Ré}(p)t}\, |f(t)|\, dt < +\infty$

Df : $p \in \mathbb{C}$ tq $\int f e^{-pt}$ abs conv

2/ Il existe $P_0 \in [-\infty, +\infty]$ tq $\forall p \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{cases} \mathrm{Ré}(p) > P_0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Ré}(p)t}\, |f(t)|\, dt < +\infty \\ \mathrm{Ré}(p) < P_0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Ré}(p)t}\, |f(t)|\, dt = +\infty. \end{cases}$$

$P_0 = +\infty$ ⇒ $D(f) = \emptyset$
$P_0 = -\infty$ si $D(f) = \mathbb{C}$

ainsi $\mathcal{L}(f)(p)$ est définie pour tout $p \in \mathbb{C}$ tq $\mathrm{Ré}(p) > P_0$
et le réel P_0 est appelé abscisse de convergence absolue de f.

Exple :

pour $f(t) = 1$; $\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt$.

$\lim_{t \to +\infty} |e^{-pt}| = \lim_{+\infty} e^{-\mathrm{Ré}(p)t} = 0$ ssi $\mathrm{Ré}(p) > 0$. et dans ce cas

$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$, $\forall p \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Ré}(p) > 0$.

donc $(P_0 = 0)$

Déf : on dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est d'ordre exponentiel si :

$$\exists M>0 \text{, et } \alpha \in \mathbb{R} \text{, } t_0 \geq 0 \text{ telles que}$$
$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \quad , \forall t > t_0 .$$

c.à.d $\exists \alpha > 0$ $\lim_{t \to +\infty} e^{-\alpha t} |f(t)| = 0.$

exple :

- les fonctions polynômes, fonctions bornées, fonct° de la forme $a e^{at}$ sont d'ordre exp.
- la fonct° $f(t) = e^{+t^2}$ n'est pas d'ordre exponentiel car $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $e^{-\alpha t} e^{t^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

Théorème (condition suffisante d'existence de la transformée de laplace)

si f est localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (f est conti par morceaux sur tout intervalle $[0, x_0]$) d'ordre exponentiel alors elle admet une transformée de laplace. $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$, $D_{\mathcal{L}(f)} = \{ p \in \mathbb{R} \mid p > \alpha \}$ $p \in \mathbb{C}$ $\mathrm{Re}(p) > \alpha$

Rque : bien que $\mathcal{L}(f)(p)$ soit complexe, ds la majorité des exples on prend p réel.

Théorème (valeur initiale et valeur finale) :

soit f une fonction admettant une transformée de laplace, alors on a :

1) $\lim_{p \to +\infty} \mathcal{L}(f)(p) = 0.$

2) $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p\mathcal{L}(f)(p)$

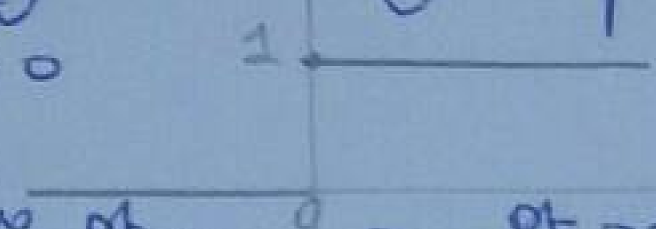
3) $\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p\mathcal{L}(f)(p)$

$pF(p) = p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$
$= \int_0^{+\infty} p e^{-pt} f(t)\,dt$
avec $\int_0^{+\infty} p e^{-pt} dt = 1$

Exemples de référence :

① fonction échelon unité : c'est la fonction définie par :

$$u(t)=\begin{cases}1 & \text{si } t\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$



$$\mathcal{L}(u(t))(p)=\int_0^{+\infty}u(t)e^{-pt}\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,dt=\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{p}-\lim_{+\infty}\frac{e^{-pt}}{p}$$

or

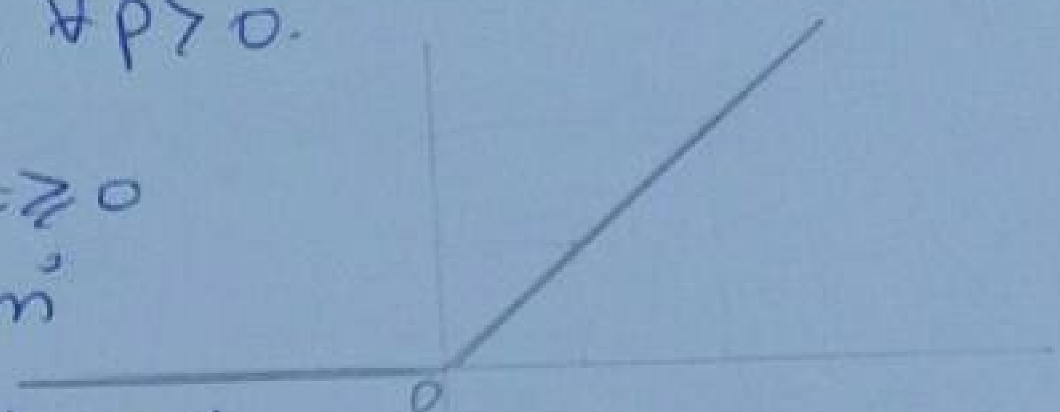
$\cancel{\lim_{t\to+\infty}}$ $|e^{-pt}|=e^{-pt} \Rightarrow e^{-pt}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ si $p>0$.

donc

$$\mathcal{L}(u(t))(p)=\frac{1}{p}, \quad \forall p>0.$$

② fonction rampe :

$$f(t)=t\,u(t)=\begin{cases}t & \text{si } t\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

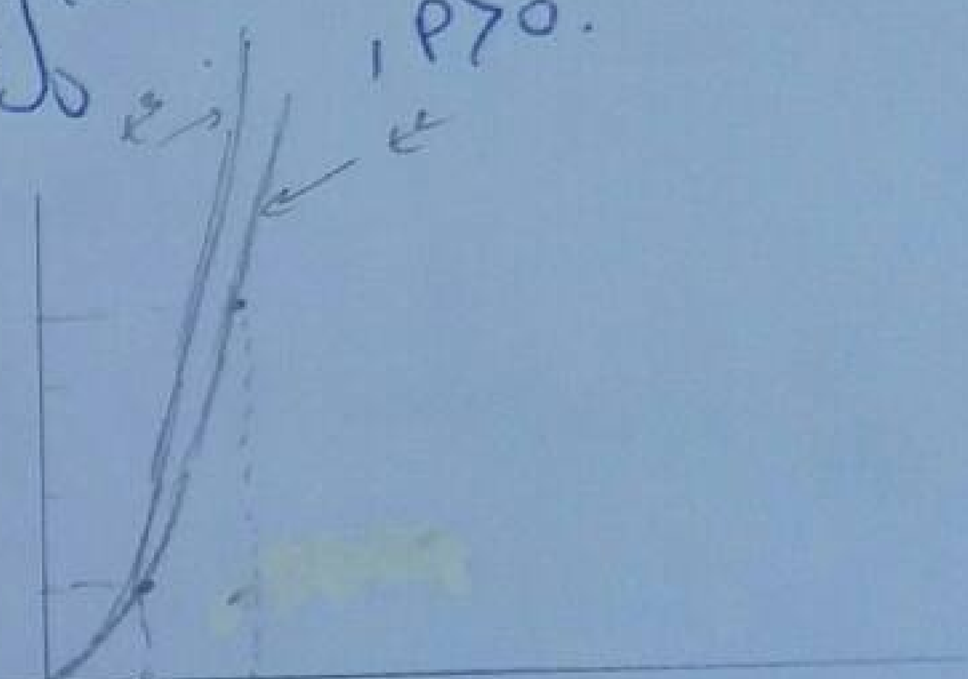


$$\mathcal{L}(t\,u(t))(p)=\int_0^{+\infty}t\,e^{-pt}\,dt \qquad \text{IPP}\begin{cases}t\longrightarrow 1\\ e^{-pt}\longrightarrow -\frac{e^{-pt}}{p}\end{cases}$$

$$=\left[-te^{-pt}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{p}\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}, \quad p>0.$$

$$=\frac{1}{p^2}, \quad p>0.$$

③ fonctions puissances :



$$f(t)=t^n u(t)=\begin{cases}t^n, & t\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$\mathcal{L}(t^n u(t))=\int_0^{+\infty}t^n e^{-pt}\,dt.$$

$t\mapsto t^2$, $t\mapsto t^3$

$t^n\longrightarrow nt^{n-1}$, $e^{-pt}\longrightarrow -\frac{e^{-pt}}{p}$

$$=\left[-\frac{t^n e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}+\frac{n}{p}\int_0^{+\infty}t^{n-1}e^{-pt}\,dt\,; \quad p>0.$$

$t^{n-1}\longrightarrow (n-1)t^{n-2}$, $e^{-pt}\longrightarrow -\frac{e^{-pt}}{p}$

$$=0+\frac{n}{p}\left(\underbrace{\left[-t^{n-1}\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}}_{0}+\frac{(n-1)}{p}\int_0^{+\infty}t^{n-2}e^{-pt}\,dt\right)$$

$$=\frac{n}{p}\cdot\frac{(n-1)}{p}\cdot\frac{n-2}{p}\int_0^{+\infty}t^{n-3}e^{-pt}\,dt.$$

$$=\frac{n}{p}\,\frac{(n-1)}{p}\,\frac{(n-2)}{p}\cdots\frac{n-(n-1)}{p}\int_0^{+\infty}t^{n-n}e^{-pt}\,dt$$

$$=\frac{n}{p}\,\frac{n-1}{p}\,\frac{n-2}{2}\cdots\frac{1}{p}\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}.$$

$$=\frac{n!}{p^n}\cdot\frac{1}{p}=\frac{n!}{p^{n+1}} \Rightarrow \mathcal{L}(t^n u(t))=\frac{n!}{p^{n+1}}, \quad p>0$$

autrement :

$$\mathcal{L}(t^n u(t))(p)=\int_0^{+\infty}t^n e^{-pt}\,dt \overset{\substack{y=pt\\ dy=p\,dt}}{=}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{p}\right)^n e^{-y}\,\frac{1}{p}\,dy=\left(\frac{1}{p}\right)^{n+1}\int_0^{+\infty}y^n e^{-y}\,dy$$

$$=\frac{1}{p^{n+1}}\Gamma(n+1)=\frac{1}{p^{n+1}}\cdot n!.$$

④ fonction exponentielle : $f(t)=e^{at}u(t)$, $a\in\mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}(e^{at}u(t))(p)=\int_0^{+\infty} e^{at}\,e^{-pt}\,dt.$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}\,dt$$

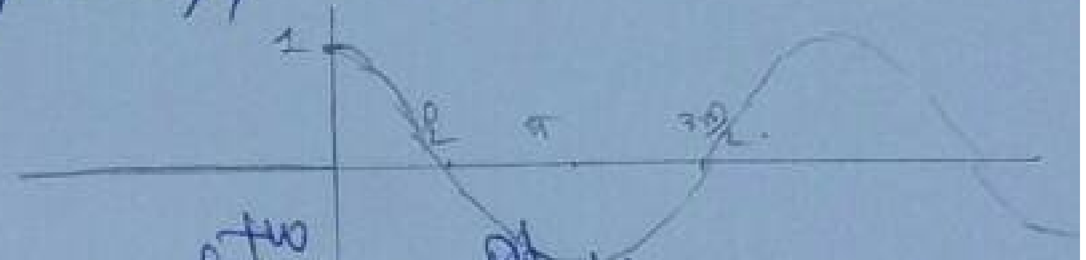
$$=\left[-\frac{e^{-(p-a)t}}{(p-a)}\right]_0^{+\infty} \quad ;\ p>a.$$

$$=\frac{1}{p-a}.$$

⑤ fonctions sinusoïdales :

→ on considère la fonction $f(t)=\cos(t)\,u(t)$, $\omega\in\mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}(\cos t\,u(t))(p)=\int_0^{+\infty}\cos t\,e^{-pt}\,dt$$



$\cos t \to -\sin t$, $e^{-pt}\to -\frac{e^{-pt}}{p}$

$$=\left[-\cos t\,\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}\sin t\,e^{-pt}\,dt \quad ,\ p>0.$$

$\sin t\to\cos t$, $e^{-pt}\to -\frac{e^{-pt}}{p}$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\left(\left[-\sin t\,\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}\cos t\,e^{-pt}\,dt\right)$$

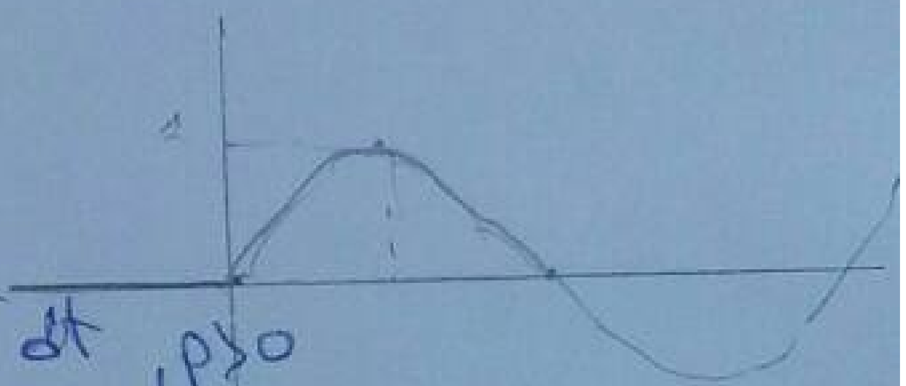
$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}\,\mathcal{L}(\cos t\,u(t))(p).$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\cos t\,u(t))(p)\left[1+\frac{1}{p^2}\right]=\frac{1}{p}\Rightarrow \mathcal{L}(\cos t\,u(t))(p)=\frac{p^2}{p^2+1}\,\frac{1}{p}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\cos t\,u(t))(p)=\frac{p}{p^2+1} \quad ,\ p>0.$$

→ on considère la fonction $g(t)=\sin t\,u(t)$

$$\mathcal{L}(\sin t\,u(t))(p)=\int_0^{+\infty}\sin t\,e^{-pt}\,dt.$$



$\sin t\to\cos t$, $e^{-pt}\to -\frac{e^{-pt}}{p}$

$$=\left[-\frac{\sin t}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}\cos t\,e^{-pt}\,dt \quad ,\ p>0$$

$\cos t\to -\sin t$, $e^{-pt}\to -\frac{e^{-pt}}{p}$

$$=\frac{1}{p}\left(\left[-\frac{\cos t}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty}-\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}\sin t\,e^{-pt}\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}\mathcal{L}(\sin t\,u(t))(p).$$

$$\mathcal{L}(\sin t\,u(t))(p)\left(1+\frac{1}{p^2}\right)=\frac{1}{p^2}.$$

$$\mathcal{L}(\sin t\,u(t))(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{p^2}{p^2+1}=\frac{1}{p^2+1} \quad ,\ p>0$$