- $T = R + iS \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = \langle R, \varphi \rangle + i \langle S, \varphi \rangle$
- $\langle \overline{T}, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \overline{\varphi} \rangle} \quad \forall \varphi \in D$
- $\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$
- $\langle \lambda T_1, \varphi \rangle = \lambda \langle T_1, \varphi \rangle$
- T est positive ; $\varphi \geq 0 \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle \geq 0$
- T est nulle ; $\langle T, \varphi \rangle = 0$
- $T_1 = T_2$ si $\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$

* Loc. intégrable ($f \in L^1_{loc}(\Omega)$)

* si f est intégrable sur tout compact inclu dans Ω

alors $\rightarrow$ f est localement intégrable sur Ω

$\rightarrow$ (c-à-d: pour tout compact K : $\int_K f(x)\,dx < +\infty$)

* Distribution (associé à une fct Loc intégrable)

- $f \in L^1_{loc}(\Omega)$; $T_f : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$

$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle =$

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

est une dist associé à f

- $\Omega = \mathbb{R}$: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\langle T, \varphi \rangle = \int_\mathbb{R} f(x)\varphi(x)\,dx \quad \varphi \in D(\mathbb{R})$
- $\Omega = \mathbb{R}^2$: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$; $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\varphi(x,y)\,dx\,dy$

Notion de distribution

T est une distribution $\Leftrightarrow T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$

$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$

qui verifie :

* T $\boxed{\text{Linéaire}}$: soient $\varphi_1, \varphi_2 \in D$ on a :

$\lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle T, \lambda\varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \lambda\langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$$

* T $\boxed{\text{Continue}}$: soit $(\varphi_n)_n \in D(\Omega)$ tq $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{D} \varphi$

on a $\langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle T, \varphi \rangle$

(continuité vers 0 ?)

Rq : * supp φ

* $\varphi \in D(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists [-a,a] \subset \mathbb{R}$ tq supp $\varphi \subset [-a,a]$

* supp $\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n / \varphi(x) \neq 0\}$

* $\varphi_n \xrightarrow[+\infty]{D} \varphi \Rightarrow \exists$ un compact K tq supp $\varphi_n \subset K$

et $\forall k \in \mathbb{N}$ $\sup_K |\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

* $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

⊛ H est C.p.m $\Longrightarrow$ Elle est loc. intég. sur $\mathbb{R}$

⊛ $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \Longrightarrow T_H \in D'$

*** Dist. de Dirac :** $(\delta_a = \delta_0 = \delta)$

$\delta_0 : D(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$\varphi \longmapsto \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$

est une dist. de Dirac en a.

(Cas général $\text{supp } \delta_a = \{a\}$)

*** Dérivation (au sens de dist.) :**

- dérivée d'une distribution T, noté T' définie par $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$ $\forall \varphi \in D$

(si T est une dist. $\Longrightarrow$ T' est une dist.)

Rq : (valeur abs : n'est pas linéaire)

$\hookrightarrow \langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = |\varphi_1(x) + \varphi_2(x)|$

$\neq |\varphi_1(x)| + |\varphi_2(x)|$ (2)

$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)}(x) \rangle$

Rq : . dist. régulier $\longrightarrow \int$

. dist. de dirac $\longrightarrow$ pas d'intégrale

. $x \longmapsto \cos x$ est loc. intégrable sur $\mathbb{R}$

donc $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cos(x)\,dx$ est une dist. : c'est la distribution régulière associé où la fct $x \longmapsto \cos x$

- $\langle T, \varphi \rangle = \{\varphi(e) - \varphi(10)\} = \langle \delta_e, \varphi \rangle - \langle \delta_{10}, \varphi \rangle$

$= \langle \delta_e - \delta_{10}, \varphi \rangle \Longrightarrow T = \delta_e - \delta_{10}$ dist.

. Dist. régulière associée à la fct cst 1 :

$\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\,dx\,dy$

- $\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)\,dt$

- $|\varphi(x) \mathbb{1}_{\varepsilon \leq x \leq a}| \leq |\varphi(x)| \leq \|\varphi'(x)\|_\infty$

- Si f est continue $\Longrightarrow \text{supp } f(x) = \text{supp } T_f$ (dist. de f)

- $f(x) = \mathbb{1}_{\{a\}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\hookrightarrow (f = 0 \text{ p.p})$

- φ est nulle sur $[0,+\infty[\iff \operatorname{supp}\varphi \subset]-\infty,0[$
- φ est nulle sur $\mathbb{R} \iff \operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$
- $\varphi(\frac{1}{2}) = \langle \delta_{1/2}, \varphi \rangle$
- $T'_{1\!\!1_{[a,b]}} = \delta_a - \delta_b$

* opération sur le distribution :

$\left.\begin{array}{l} \cdot T \in D'(\Omega) \\ \cdot g \in C^\infty(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow (gT)$ est une distribution définie par

$$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$$

- Proposition

① $\left.\begin{array}{l} \cdot T \in D' \\ \cdot g \in C^\infty \end{array}\right\} \Rightarrow (gT)$ est dérivable

$$(gT)' = \underbrace{g'T}_{\text{distribution produit } g'T} + \underbrace{gT'}_{\text{distribution produit } gT'}$$

② $\left.\begin{array}{l} \cdot T_1, T_2 \in D' \\ \cdot g_1, g_2 \in C^\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$

- $(g_1+g_2)T_1 = g_1T_1 + g_2T_1$
- $(g_1g_2)T_1 = g_1(g_2T_2)$
- $g_1(T_1+T_2) = g_1T_1 + g_1T_2$

③ $T \in D'$; $\cdot (\tau_a f)(x) = f(x-a)$ $\qquad \cdot \check{f}(x) = f(-x)$

$\cdot (h_a f)(x) = f(ax)$

soit $\varphi \in D$

Alors :

$$\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle$$

$$\langle h_a T, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T, h_{\frac{1}{a}}\varphi \rangle$$

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$$

* Convergence d'une suite des dist. -

$\cdot (T_n)_n$ suite de dist.

T_n converge vers la dist. T si $\forall \varphi \in D$:

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

noté $T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{D'} T$

③ Rq : $\cdot \lim_{k\to+\infty} \varphi(k) = 0$ car φ est à support compact

D.L : $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(0) + \ldots$

TCD :
- $x \longmapsto f_n(x)$ est continue
- $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ intégrable
- $|f_n(x)| \leq g(x)$ intégrable

  ↑ généralement $\|f_n\|_{+\infty}$

Intég de Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

Convergence de dérivée :

$\left.\begin{array}{l} (T_n)_n \text{ suite de dist} \\ T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} T \end{array}\right\} \Longrightarrow T_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} T'$

- $\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle \quad i = 1, \ldots, n$

$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ (notation) $\quad i = 1, \ldots, n$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

$$\Longrightarrow \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

Dérivée de la dist. de Dirac : $\varphi \in \mathcal{D}$
- $\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi'(x) \rangle = -\varphi'(0)$
- $\langle \delta_a', \varphi \rangle = -\varphi'(a)$
- $\langle \delta_a^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta_a, \varphi^{(n)}(x) \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(a)$

* **Dérivée d'une fct discontinue** (Formule de saut)
- $f \in (\mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots\})$
- $f(a_k^+) = \lim_{x\to a_k^+} f(x)$ et $f(a_k^-)$ existent

de saut finie $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ alors :

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{k=1}^{n} \left(f(a_k^+) - f(a_k^-)\right) \delta_{a_k}$$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ r \geq 0 ; \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow dx\,dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr\,d\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} dr\,d\theta$

$= r\,d\theta\,dr$

Soit $\tilde{\varphi}(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$

- $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y}$
- $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

Produit de convolution de 2 dist. S et T :

$$\langle S*T, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

x : variable s'applique sur S

y : vari. s'applique sur T

- $\langle \delta_{b,y}, \varphi(x+y) \rangle = \varphi(x+b)$
- $T*S = S*T$
- $T*\delta = \delta*T = T$
- $(T*S)' = T'*S = S'*T$

en général :
- $(T*S)^{(n)} = T^{(n)}*S = T*S^{(n)}$
- $D^\alpha(T*S) = D^\alpha T*S = T*D^\alpha S$

Transformée de Fourier

Espace de Schwarz $S(\mathbb{R})$:

- $S(\mathbb{R}) = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) / \forall n, m \in \mathbb{N}$ on a : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} x^m \varphi^{(n)}(x) = 0 \}$

- S est un e.v
- S est stable par T.F (si $f \in S \Rightarrow \hat{f} \in S$)
- S est stable par $*$ (si $f_1, f_2 \in S \Rightarrow f_1 * f_2 \in S$)
- S est stable par Dérivation (si $f \in S \Rightarrow f' \in S$)
- S est stable par Multiplication (si $f_1, f_2 \in S \Rightarrow f_1 f_2 \in S$)
- S est stable par un Polynôme (si $f \in S$, P poly $\Rightarrow Pf \in S$)

TF dans S

Dist. tempérée : c'est une forme linéaire et continue sur S et noté $S'(\mathbb{R})$ ← ensemble des dist. tempérées.

• Toute Dist. tempérée T admet une TF notée $\mathcal{F}(T)$ ou $\hat{T}$ qui est également une dist. tempérée et on a : $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \; \forall \varphi \in S$

• $T \in S' \iff T : S(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{K}$
$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle$
• linéaire
• continue

$\boxed{S' \subset D'}$

• $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi x t} dt$ et $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$
ou $\mathcal{F}(f)$ ou $\mathcal{F}(f)$

• $\mathcal{F}(e^{2i\pi a x}) = \langle \delta_a, \varphi \rangle = \delta_a$

• Soit $T \in S'$ donc :
⊕ $\mathcal{F}(T^{(k)}) = (2i\pi x)^k \hat{T}$
⊕ $\mathcal{F}(\tau_a T) = e^{-2i\pi a x} \hat{T}$

• $\mathcal{F}(h_a T) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(T)\left(\frac{x}{a}\right)$
• La T.F. d'une dist. paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire)
• $(\mathcal{F}(T))^{(k)} = \mathcal{F}((-2i\pi t)^k T)$

Théorème : T_1, T_2 sont 2 dist. tempérées à supp compact
$\mathcal{F}(T_1 * T_2) = \hat{T}_1 \, \hat{T}_2$

Théorème
$T\mathcal{F}$ est continue et bijective de $S(\mathbb{R})$ dans lui m̂, notée $\mathcal{F}^{-1}$ ou $\bar{\mathcal{F}}$ la T.F. inverse et on a :
$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}T = T$ $\quad \langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle$

• $\mathcal{F}(\delta_a) = e^{-2i\pi a x}$

$\boxed{T_H' = \delta}$ $\quad \boxed{T'_{\Pi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}} = \delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{\frac{1}{2}}}$

$\boxed{\begin{array}{l} \underbrace{\sin x}_{=0} \, \delta = 0 \\ \underbrace{\cos x}_{=1} \, \delta = \delta \end{array}}$ $\quad \boxed{\hat{\delta}_a = e^{-2i\pi a x}}$