- Resumé proba -

"A et B" $\Rightarrow A \cap B$ } sont des évènement.
"A ou B" $\Rightarrow A \cup B$ }

- Ω et $\emptyset$ sont complémentaire.

- A et B vérif $A \cap B = \emptyset$: ils sont incompatible.

- $(A_i)_{i\in I}$ forme un système complet d'évenements si
  - $(A_i)_{i\in I}$ famille 2 à 2 incompatible.
  - $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$.
- $(A_i)_{i\in I}$ fam 2 à 2 incompatible
  $\Rightarrow P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)$
- $P(\emptyset) = 0$.
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- si $(A_i)_{i\in I}$ famille quelconq d'éven

$$P(\bigcup_{i\in I} A_i) \leq \sum_{i\in I} P(A_i).$$

- $(B_i)_{i\in I}$ Forme un syst complet d'évènement

on a $P(A) = \sum_{i\in I} P(A \cap B_i)$.

- $P(A/B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

- Variable indépendantes

X, Y deux var indép :

$P(X = x_i ; Y = y_j) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$..

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- Variance :

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$
$$= E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Si X a pour loi (x_i, P_i)

$$V(X) = \sum_{i\in I} (x_i - E(X))^2 P_i$$
$$= \sum x_i^2 P_i - (E(X))^2$$

Propriétés de variance :

$$V(ax) = a^2 V(x)$$
$$V(x+a) = V(x)$$
$$V(x+y) = V(x) + V(y) + 2\,cov(x,y).$$

ou $cov(x,y) = E(x.y) - E(x)E(y)$

$$V(ax+by) = a^2 V(x) + b^2 V(y) + 2ab\,cov(x,y)$$

si x et y sont ind :

$$V(x+y) = V(x) + V(y)$$

~~Variances~~ Espérance :

$$E(x) = \sum_{i \in I} x_i P_i$$

$$E(a) = a.$$
$$E(ax) = a\,E(x)$$
$$E(x+a) = E(x) + a.$$
$$E(x+y) = E(x) + E(y)$$

Ecart type

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}.$$

Loi	dans $X(\Omega)$	~~$E(X)$~~ Probabilité	$V(X)$	$E(X)$
uniform	$\{1,\dots,n\}$	$P(X=k) = \frac{1}{n}$, $1 \leq k \leq n$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{n+1}{2}$.
Bernouille	$\{0,1\}$	$P(X) = \begin{cases} 1-p & ,0 \\ p & ,1 \end{cases}$	$p(1-p)$	p.
binomial $B(n,p)$	$\{0,\dots,n\}$	$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	$np(1-p)$	np
poissom $P(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ.
géométrique $g(p)$	$\mathbb{N}^*$	$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1}{p}$.

Resumé Continue

Fonction répartitrice :

$F(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$

- de $\mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$.
- F ↗ , continue , dérivable p.p

f : densité de probabilité

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

$f(x) \geq 0$

f continue p.p

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

$f \geq 0$ $\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 1$.

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Remarques

- Probabilité ponctuelles sont nulle pour un V.A continue $P(X = x) = 0$.

Probabilité d'un intervalle.

$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$

$= P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)\,du$

Espérance : de X

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$.

Variance : de X.

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - [E(X)]^2$.

tjs $V(X) \geq 0$:

Moment centrée d'ordre k :

$\mu_k = E((X - E(X))^k)$

on a. $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = V(X)$.

Moment non centré d'ordre k :

$m_k = E(X^k)$

$m_1 = E(X)$, $m_\alpha = \mu_\alpha + m_1^2$

* Variable aléatoire fonction d'une V-a continue :

Loi : $y = \varphi(x)$ | φ : fonct dérivable. X : V.a. continue.

G, fct de répartition, g son densité de Y.

Si φ est monotone ↗

$$G(y) = P(Y < y) = P(X < \varphi^{-1}(y)) = F[\varphi^{-1}(y)].$$

$$g = G'(y)$$

Si φ est monotone ↘

$$G(y) = P(Y < y) = P(X > \varphi^{-1}(y)) = 1 - F(\varphi^{-1}(y))$$

Espérance :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, g(y)\, dy.$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f(x)\, dx$$

* Indépendance 2 V-a continues :

$$H(x,y) = P(X < x, Y < y) = F(x) \cdot F(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$h(x,y) = f(x)\, g(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Loi		Densité	Fonct Répartition	espérance	variance
Loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$ a, b réel $a < b$	$[a,b]$	$f(x)$ $\begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Lois exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$[0, +\infty[$	$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Loi normale $N(0,1)$	$\mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\right)} dt$	0	1
Loi normale $N(n, \sigma)$ $n \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-n)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-n}{\sigma}\right)^2} dt$	n	σ^2

CamScanner

- Remarque :

La densité f_0 :

(1) $F_0(0) = 0,5$

(2) $F_0(-t) = 1 - F_0(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(3) $P(|T| < t) = P(T < t) - P(T < -t)$
$= 2F_0(t) - 1$.

(4) $P(|T| > t) = P(T > t) + P(T < -t)$
$= 2(1 - F_0(t)), \ t \in \mathbb{R}$.

- Valeurs remarquables -

$P(-1,64 < T < 1,64) = 0,90$

$P(-1,96 < T < 1,96) = 0,95$

$P(-3,05 < T < 3,05) = 0,998$

Remarque loi Normale N :

X suit une loi $N(m, \sigma)$ ssi

$X = \sigma T + m$, T suit $N(0,1)$.

propriétés de loi Normale :

- X_1, X_2 deux v.a. indépendants
- aX_1 suit loi $N(am_1, a\sigma_1)$.
- $X_1 + a$ suit loi $N(m_1 + a, \sigma_1)$.
- $X_1 + X_2$ suit une loi $N(m_1 + m_2 ; \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$

Loi de Khi-deux :

$T_1, T_2, \dots T_n$ sont des v.a de loi $N(0,1)$ indépendants, alors la v.a

$X_n = T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_n^2$ suit la loi de Khi-deux de paramètre n ce qui l'on note.

$X_n = \chi_n^2$: n est appelle nb de degrée de liberté de la loi χ^2.

$$\left.\begin{array}{l} E(X_n) = n ; \\ V(X_n) = 2n ; \end{array}\right\} X_n \geq 0$$

Rq8

La loi de T est symétrique
$E(T) = 0$