République Tunisienne Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Gabès
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès

EPREUVE D'EVALUATION

Année Universitaire:	2022-2023	**Date de l'Examen:**	13 Jan 2023
Nature:	Examen	**Durée:**	2h
Diplôme:	Ingénieur	**Nombre de pages:**	
Section:	GCR1/GCP1	**Enseignant:**	Nadia Sraieb
Niveau d'études:	2 année	**Doc autorisés:**	Non
Matière:	Mathématique de l'ingénieur	**Remarque:**	

Exercice. 1. *Soit* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable et* $x_0 \in \mathbb{R}$

Et soit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)dt.$

I) On suppose que

a) f *est integrable sur tout intervalle borné de* $\mathbb{R}_+$,

b) $t \to e^{-tx_0} f(t)$ *est bornée au voisinage de* $+\infty$.

1) Montrer que F *est définie et continue sur* $]x_0, +\infty[$.

2) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.

3) Montrer que F *est de classe* C^1 *sur* $]x_0, +\infty[$, *et que*

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-tx} f(t)dt.$$

II) On suppose que f *est integrable sur* $[0, +\infty[$.

1) Montrer que F *est continue sur* $\mathbb{R}_+$ *et dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$.

2) On prend $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}(1+t)}, t > 0$.

i) Montrer que F *est solution de l'equation differentielle*

$$(E) : \; y' - y = \frac{-A}{\sqrt{x}}, \; \text{avec} \; A = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du.$$

ii) Résoudre (E), *En déduire la valeur de* A *et retrouver alors la valeur de*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Exercice. 2. *On donne* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad a > 0$

1) Soit $a > 0$, f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = e^{-ax^2}$

a) Vérifier que f *est une solution de l'equation differentielle*

$$(E): \quad f'(x) + 2xaf(x) = 0$$

b) En applicant la transformation de Fourier à l'equation (E), montrer que $\widehat{f}$ *est une solution de l'equation differentielle qu'on déterminera. On notera* $(\widehat{E})$ *cette equation.*

2) Résoudre $(\widehat{E})$ *et déterminer* $\widehat{f}$.

3) Déduire de ce qui precède que les fonctions

$$x \mapsto e^{-\pi x^2} \ \text{et}\ x \mapsto \pi x e^{-\pi x^2}$$

sont des vcteurs propres de l'opérateur de transformation de Fourier F.

Exercice. 3. *1)* H *désigne la fonction de Heaviside définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$H(x) = 1,\ \forall x > 0, \quad \text{et} \quad H(x) = 0 \ \text{sinon}$$

et L *est latransformation de Laplace pour tout* $p > 0$.

1) Calculer $L(sin(2x)H)(p)$.

2) Calculer $L(e^{ax} sin(2x)H)(p)$ *où* $a \in \mathbb{R}$

3) On note par f_1 *et* f_2 *les deux fonctions définies par :*

$$f_1(x) = e^{-x} sinx H(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = e^{-x} sin(2x) H(x)$$

Calculer $f_1 * f_2(x)$.

4) Soit l'equation differentielle (E) :

$$y" + 2y' + 5y = e^{-x} sinx$$

avec la condition $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

a) En appliquant la transformation de Laplaceà (E) montrer que $L(y)$ *est de la forme :*

$$L(y)(p) = \frac{\alpha}{(p+1)^2 + 4} + \frac{\beta}{((p+1)^2 + 4)((p+1)^2 + 1)}$$

où α, β *sont deux conslantes à déterminer.*

b) En déduire l'expression de la solution de (E).

On donne $L(f^{(n)})(p) = p^n L(f)(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - .. - f^{(n-1)}(0^+)$.

Bonne chance !