République Tunisienne Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Gabès
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès

Réf : DE-EX-01
Indice : 3
Date : 02/12/2019

EPREUVE D'EVALUATION

Année Universitaire:	2023-2024	**Date de l'Examen:**	23/05/2024
Nature:	Examen	**Durée:**	2h
Diplôme:	Ingénieur	**Nombre de pages:**	2
Section:	GCR	**Enseignant:**	W. BEN SALAH
Niveau d'études:	1ère année	**Doc autorisés:**	Non
Matière:	Mathématiques II	**Remarque:**	

Les notations utilisées ($\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, δ, τ_a, *etc ...*) *sont les mêmes que dans le cours.*

Exercice 1. (Questions de Cours) ***(05 points)***
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Rappeler la définition de
$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n = \varphi \qquad dans\ \mathcal{D}(\Omega)$$
2. Donner la définition d'une distribution sur Ω.
3. Soit $a \in \Omega$ et δ_a la distribution de Dirac en a. Rappeler la définition de δ_a.
4. Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, on note
$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_d^{\alpha_d}} \qquad \text{où } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_d$$
Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, donner la définition de la dérivée $D^\alpha T$ de T au sens des distributions.
5. Donner la définition du produit fT, où $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
6. Soient $j \in \{1, ..., d\}$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Montrer la formule :
$$\frac{\partial}{\partial x_j}(fT) = \frac{\partial f}{\partial x_j}\ T + f\ \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

Exercice 2. ***(07 points)***

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & si\ \ x \leq -1 \\ x^2 + 2 & si\ \ -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 1 & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

- Justifier que g définie une distribution T_g sur $\mathbb{R}$, dont on rappellera la définition exacte.

2. Calculer la dérivé de T_g au sens des distributions. On pourra appliquer (en justifiant rigoureusement) la formule des sauts.
3. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$ et δ_a la distribution de Dirac en a. Calculer la transformée de Fourier de δ_a.

CamScanner

(b) En déduire les transformations de Fourier de $\frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{-a})$ et $\frac{1}{2i}(\delta_{-a} - \delta_a)$.

4. Déterminer la transformation de Fourier de la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$.

5. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Rappeler les formules donnant les transformations de Fourier de xT et T' en fonction de la transformation de Fourier de T.

6. Déduire des deux questions précédentes la transformation de Fourier de la fonction identité $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$.

7. En utilisant les questions précédentes, calculer la transformation de Fourier de T_g'.

Exercice 3. ***(08 points)***

On s'intéresse au problème de Cauchy pour l'équation des ondes homogène :

$$(pb) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 & , x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2} & , x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & , x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On définit la transformation de Fourier partielle en x par la formule :

$$\widehat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx\ , \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$$

1. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $\widehat{u}(\xi,t)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation différentielle trouvée dans la question précédente.
3. En utilisant la **question 3 de l'exercice 2**, montrer que

$$u(x,t) = \frac{1}{2(1+x^2)} * \left(\delta_t + \delta_{-t}\right)$$

la notation $*$ désigne le produit de convolution.

4. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on rappelle que la fonction translatée $\tau_a\varphi$ est définie par

$$(\tau_a\varphi)(x) = \varphi(x-a).$$

Montrer que

$$\delta_a * T = T * \delta_a = \tau_a T,\ \ \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

5. Exprimer la solution $u(x,t)$ de (pb) en terme de la donnée initiale $u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}$

CamScanner