être

Exemple:

$S = \{0, 1\}$

$P = \{p, 1-p\}$

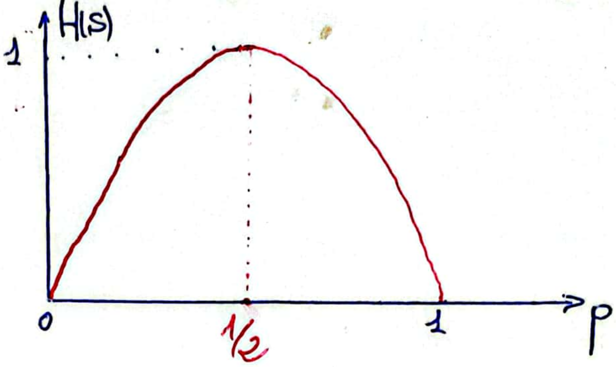
-1- Calculer $H(S)$

-2- P ? pour $H(S)$ est max.

$$H(S) = -\sum_{k=1}^{2} P_k \log_2(P_k)$$

$$= -P(0)\log_2(P(0)) - P(1)\log_2(P(1))$$

$$H(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$$



- H est max pour $p = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(0) = \frac{1}{2}$

$P(1) = 1 - 1/2 = \frac{1}{2}$

- H est maximal lorsque les symbôle, sont équiprobables.

si les symbôle sont équiprobable Alors H est max

* • $\boxed{S = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}}$; $\boxed{\underset{k=1\dots N}{P(S_k)} = \frac{1}{N}}$

$$H(S) = -\sum_{k=1}^{N} P_k \log_2(P_k) = -\frac{1}{N}\log_2\frac{1}{N} - \frac{1}{N}\log_2\frac{1}{N} - \dots - \frac{1}{N}\log_2\frac{1}{N}$$

$$H(S) = N \times \left(\frac{-1}{N}\right)\log_2(N) = \log_2(N)$$

$$\boxed{H(S) = \log_2(N)}$$

- N symboles équiprobable $\Longrightarrow H(S) = \log_2(N)$

Exemple

1) on considère une source $S = \{0, 1\}$. Calculer son entropie $H(S)$ lorsque les symbôle sont équiprobable.

2) on considère une source S pouvant transmettre deux valeurs oui ou non. les résultat sont équiprobables. Calculer $H(S)$

Reponse:

-1- $S = \{0, 1\}$; $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$

$H(S) = \log_2(2) = 1\ sh$

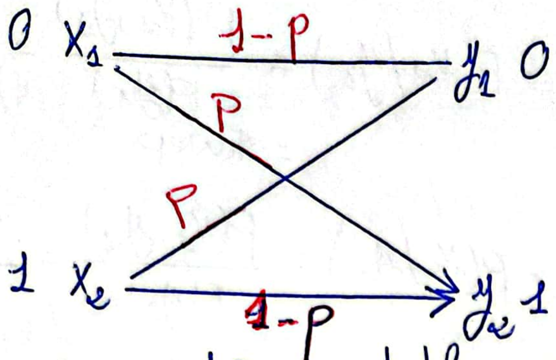
-2- $S = \{oui/non\}$

$P(oui) = P(non) = \frac{1}{2}$

$H(S) = \log_2(2) = 1\ sh$

Quantité d'information & Entropie conditionnelle :

source binaire avec Entrée $X(x_1, x_2)$ et la sortie $Y(y_1, y_2)$



(Entrées équiprobable (x_1 et x_2))
2 entrées (x_1, x_2) + 2 sorties (y_1, y_2)

$I(X,Y)$?
$H(X/Y)$?
$H(Y/X)$?

x_1 et x_2 sont équiprobables : $p(x_1) = p(x_2) = 1/2$

Probabilités conditionnelles

-1- $P(Y/X)$?

$$\boxed{Y = (y_1, y_2) \quad X = (x_1, x_2)}$$

Loi de Bayes
donnée du graphes

canal binaire symétrique
canal de sorties deux bits 0 ou 1

$p(y_1/x_1) = 1-p$ | $p(y_2/x_1) = p$

$p(y_2/x_2) = 1-p$ | $p(y_1/x_2) = p$

Prob. jointes entre 2 sources

-2- $P(X,Y)$?

$$\boxed{p(X,Y) = p(Y/X)\,p(X)}$$ Loi de Bayes

- $p(x_1, y_1) = p(y_1/x_1)\,p(x_1)$
$= (1-p)\frac{1}{2}$
$= \frac{1}{2} - \frac{p}{2}$

- $p(x_2, y_1) = p(y_1/x_2)\,p(x_2)$
$= \frac{1}{2}p$
$= \frac{p}{2}$

- $p(x_1, y_2) = p(y_2/x_1)\,p(x_1)$
$= p \cdot \frac{1}{2}$
$= \frac{p}{2}$

- $p(x_2, y_2) = p(y_2/x_2)\,p(x_2)$
$= (1-p) \cdot \frac{1}{2}$
$= \frac{(1-p)}{2}$

Prob. marginales de la source Y

-3- $P(Y)$?

$$\boxed{P(y_j) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i, y_j)}$$ probabilités jointes

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i, y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) = \frac{1}{2}$$

$$p(y_2) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i, y_2) = p(x_1, y_2) + p(x_2, y_2) = \frac{1}{2}$$

• Probabilités conditionnelles $p(X/Y)$:

• $p(X/Y)$? $\boxed{p(X/Y) = p(X,Y)/p(Y)}$ Loi de Bayes

• $p(x_1/y_1) = \frac{p(x_1,y_1)}{p(y_1)} = \frac{\frac{1}{2}(1-p)}{1/2} = 1-p$

• $p(x_2/y_1) = \frac{p(x_2,y_1)}{p(y_1)} = \frac{1/2\, p}{1/2} = p$

• $p(x_1/y_2) = \frac{p(x_1,y_2)}{p(y_2)} = \frac{1/2\, p}{1/2} = p$

• $p(x_2/y_2) = \frac{p(x_2,y_2)}{p(y_2)} = \frac{1/2\,(1-p)}{1/2} = 1-p$

• Quantité d'information d'un caractère :

$$\boxed{I(x_j) = -\log_2(p(x_j))}$$

• $I(x_1) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2) = 1$ bit/symbole

• $I(x_2) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2) = 1$ bit/symbole

• $I(y_1) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2) = 1$ bit

• $I(y_2) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2(2) = 1$ bit

• Entropie de chaque source :

$$\boxed{H(X) = \sum_{k=1} p_k \log_2(K)}$$

• $H(X) = 1$ bit/symbole $(= \log_2(K) = \log_2(2)) = 1$ sh

$H(Y) = 1$ bit/symbole $= 1$ sh

• Entropie jointe :

$$\boxed{I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X)}$$

$$\boxed{H(Y/X) = \sum_i p(x_i)\, H(Y/x_i)}$$

$$\boxed{H(Y/x_i) = \sum_j p(y_j/x_i) \log_2\left(\frac{1}{p(y_j/x_i)}\right)}$$

• Entropie conditionnelle moyenne :

$$\boxed{H(Y/X) = \sum_i p(x_i) \sum_j p(y_j/x_i) \log_2\left(\frac{1}{p(y_j/x_i)}\right)}$$

$$H(Y/X) = p(x_1)\left[p(y_1/x_1)\log_2\left(\frac{1}{p(y_1/x_1)}\right) + p(y_2/x_1)\log_2\left(\frac{1}{p(y_2/x_1)}\right)\right] + p(x_2)\left[p(y_1/x_2)\log_2\left(\frac{1}{p(y_1/x_2)}\right) + p(y_2/x_2)\log_2\left(\frac{1}{p(y_2/x_2)}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-(1-p)\log_2(1-p) - p\log_2 p\right] + \frac{1}{2}\left[-(1-p)\log_2(p) - p\log_2(1-p)\right]$$

...haite coder S avec ...
...-il avoir longueur 1 ?

Quantité d'information mutuelle $I(X,Y)$:

$$\boxed{I(X,Y) = H(Y) - H(Y/X)} \quad (2)$$

$$\boxed{I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)} \quad (1)$$

(2) $\cdot\ I(X,Y) = 1 + (1-p)\log(1-p) + p\log_2(p)$

(1) $\cdot\ I(X,Y) = 1 + 1 - 1 + p\log_2(p) + (1-p)\log_2(1-p)$

$$= 1 + p\log_2(p) + (1-p)\log_2(1-p)$$

(1) et (2) $\Rightarrow H(Y) - H(Y/X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$

$$\Rightarrow \boxed{H(X) + H(Y/X) = H(X,Y)}$$

$$P(x,y) = p(x/y)\cdot p(y)$$

$$I(x,y) = I(x/y) + I(y)$$

$$H(Y/X) = -(1-p)\log(1-p) - p\log(p)$$

- $H(X/Y) = H(Y/X)$ car canal binaire symétrique
- $H(Y/X) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i)\, H(Y/x_i)$

$$= -\sum_{i=1}^{2} p(x_i) \sum_{j=1}^{2} p(y_j/x_i)\log_2(p(y_j/x_i))$$

$$= p(x_1)\left[-p(y_1/x_1)\log_2 p(y_1/x_1) - p(y_2/x_1)\log_2(p(y_2/x_1))\right] + p(x_2)\left[-p(y_1/x_2)\log_2(p(y_1/x_2)) - p(y_2/x_2)\log_2 p(y_2/x_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-(1-p)\log_2(1-p) - p\log_2(p)\right] + \frac{1}{2}\left[-p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p)\right]$$

$$= -(1-p)\log_2(1-p) - p\log_2(p)$$

Entropie jointe $H(X,Y)$

$$\boxed{H(X,Y) = -\sum_i \sum_j p(x_i,y_j)\log_2(p(x_i,y_j))}$$

$$H(X,Y) = -\left[p(x_1,y_1)\log_2 p(x_1,y_1) + p(x_1,y_2)\log_2 p(x_1,y_2) + p(x_2,y_1)\log_2(p(x_2,y_1)) + p(x_2,y_2)\log_2(p(x_2,y_2))\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{2}(1-p)\log_2\left(\frac{1-p}{2}\right) + \frac{p}{2}\log_2\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{1}{2}(1-p)\log_2\left(\frac{1-p}{2}\right) + \frac{p}{2}\log_2\left(\frac{p}{2}\right)\right]$$

$$= -p\log_2\left(\frac{p}{2}\right) - (1-p)\log_2\left(\frac{1-p}{2}\right)$$

$$= -p\log_2(p) + p - (1-p)\log_2(p) + (1-p)$$

$+p\log_2(2)$ $\qquad$ $+(1-p)\log(2)$

$$\Rightarrow H(X,Y) = 1 - p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p).$$

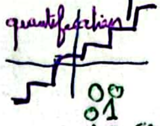
Codage source

Te = periode d'echantillonnage
Te = $\frac{1}{Fe}$

codage source = Numérisation de l'information $\Rightarrow F_e \geq 2B \leftarrow$ bande passante

↳ information analogique ⟶ information Numérique

3 phases { - Echantillonnage $T_e = \frac{1}{F_e}$
- Quantification = mesurer les échantillon
- Codage



00
01
11 codage
10
⋮

⇓

Réduire la quantité d'information délivrée source (éliminer la redondance)

* Code à longueur fixe : S = { 10, 01, 11, 00 }
↳ representé à la m̂ nbre de bits

* code à longueur variable : S = { 101, 01, 11, 1111, 011 }
↳ ne pas représenté à la m̂ nbre de bits

S_1 = { 0, 1, 01 } code variable
S_2 = { 11, 110, 101 } c.v
S_3 = { 00, 10, 01 } c.fixe
S_4 = { 101, 101, 0 } c.v

code prefixe :

S = { 10, 101, 001, 111 }
code non prefixe

* S_1 = { 10, 110 }
code prefixe

EXP :

S_1 = { 01, 110, 001 } P
S_2 = { 001, 110, 11 } N.P
S_3 = { 011, 00, 11, 110 } N.P

S_4 = { 111, 110, 101 } P

La longueur moyen d'un mot code : $\overline{n} = \sum_{i=1}^{M} P_i n_i$

$S = \{S_1, S_2, \dots, S_M\}$; n_i = longueur de S_i = nbre de bit de S_i

P_i = probabilité de S_i

Exp : $S = \{100, 01, 10, 001, 110\}$; $P_i = \{\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}$

-1- S est un code à longueur fixe ? variable ? avec ou sans préfixe ?

-2- Calculer la quantité d'information de chaque mot de S ;

-3- Calculer la longueur moyenne de S.

Rep :

-1- S est un code à longueur variable

-1- S est un code sans préfixe.

-2- $I(S_i) = -\log_2(P_i)$

$I(S_1) = -\log_2\left(\frac{1}{5}\right) = 2{,}32 \text{ bits} = S_2 = S_3 = S_4 = S_5$

-3- $\overline{n} = n_1 \times P_1 + n_2 \times P_2 + n_3 \times P_3 + n_4 \times P_4 + n_5 \times P_5$

$= \underset{P_i}{\frac{1}{5}}\left(\underset{n_1}{3} + \underset{n_2}{2} + \underset{n_3}{2} + \underset{n_4}{3} + 3\right) = \frac{13}{5} = 2{,}6 \text{ bits}$

* Code de Huffman :

$S = \{A, B, C, D, E\}$

$P_i = \{\frac{15}{39}, \frac{7}{39}, \frac{6}{39}, \frac{6}{39}, \frac{5}{39}\}$

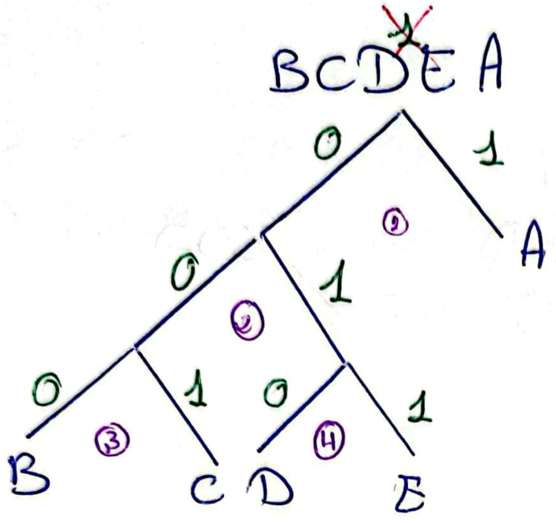
A 1 $\frac{15}{39}$	A 1 $\frac{15}{39}$	A 1 $\frac{15}{39}$	A $\frac{15}{39}$	1 A $\frac{15}{39}$
B 0 $\frac{7}{39}$	B 0 $\frac{7}{39}$	DE 1 $\frac{11}{39}$	DE $\frac{11}{39}$	0 BC $\frac{13}{39}$
C 1 $\frac{6}{39}$	C 1 $\frac{6}{39}$	B 0 $\frac{7}{39}$	BC $\frac{13}{39}$	1 DE $\frac{11}{39}$
D 0 $\frac{6}{39}$	1 DE $\frac{11}{39}$	C 1 $\frac{6}{39}$		
E 1 $\frac{5}{39}$				

(4) D, E → 1 DE $\frac{11}{39}$ → (3) B, C → BC $\frac{13}{39}$ → (2) BC, DE → BCDE $\frac{24}{39}$

A $\frac{15}{39}$

BCDE $\frac{15}{39}$ → BCDE $\frac{24}{39}$ (0), A $\frac{11}{39}$ (1) > BCDE A $\frac{39}{39} = 1$

BCDE $\frac{24}{39}$



A = 1
B = 000
C = 001
D = 010
E = 011

Arbre de code

A = 1
B = 000
C = 001
D = 010
E = 011

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{5} n_i p_i$$

$$= 1 \times \frac{15}{39} + \frac{7}{39} \times 3 + 3 \times \frac{6}{39} + 3 \times \frac{6}{39} + 3 \times \frac{5}{39}$$

$$= 2{,}23 \text{ bits}$$

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{5} p_i \log_2(p_i) = -\frac{1}{39}\left(15\log_2\left(\frac{15}{39}\right) + 7\log_2\left(\frac{7}{39}\right) + 12\log_2\left(\frac{6}{39}\right) + 5\log_2\left(\frac{5}{39}\right)\right)$$

$$\Rightarrow H(S) = 2{,}18 \text{ Sh}$$

Exp: $S = \{A, B, C, D\}$; $P = \{0.5, 0.2, 0.2, 0.1\}$ D_s débit

La source S émet le symbole avec une cadance 100 symbole/s.
Ces symbôle sont émis à travers un canal binaire pouvant émettre 200 bits/s.

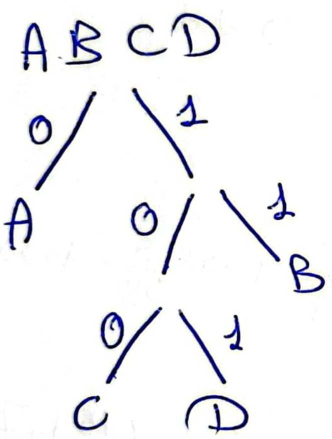
C - 1 - Concevoir un codage de Huffman pour ce codage binaire.
- 2 - Calculer la longueur moyenne de ce code.
- 3 - Determiner l'entropie de la source
- 4 - Calculer la redondance.

-5- Calculer le taux d'émission de la source.
-6- Déterminer la capacité du canal binaire.
-7- Déduire si le canal peut transmettre la totalité de l'information avec ce codage.

Rep :

-1-

0 A	0.5	0 A	0.5	0 A	0.5	0 A	0.5	ABCDB 1
1 B	0.2	1 B	0.2	0 CD	0.3	1 BCD	0.5	
0 C	0.2	0 CD	0.3	1 B	0.2			
1 D	0.1							



A = 0
B = 11
C = 100
D = 101

-2- $\overline{n} = 1\times 0{,}5 + 0{,}2\times 2 + 0{,}2\times 3 + 3\times 0{,}1 = 1{,}8$ bits

-3- $H = -\sum_{i=1}^{4} p_i \log(p_i) = -(0{,}5\log_2(0{,}5) + 0{,}2\times 2\times\log_2(0{,}2) + 0{,}1\log_2(0{,}1))$
$= 1{,}75$ bits/Sh

-4- $R_e = 1 - \frac{H}{H_{max}}$ avec $H_{max} = \log_2(4) = \log_2(2^2) = 2$

$= 1 - \frac{1{,}75}{2} = 12{,}5\%$

-5- $T_{emission} = D_s H = 100 \times 1{,}75 = 175$ bits/s

-6- $C = D_{b_2}\log_2(n)$ dans ce cas (canal binaire)
$C = 200$ bits/s

-7- $C > T \Rightarrow$ on peut transmettre la totalité de l'inf

11