Année 2020-2021

GEA1/ GCV1/GM1 Probabilités et Statistiques

Série n° 3

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[1, 5]$.

1. Calculer$P(X < 2)$, $P(2 \leq X \leq 4)$, $P(X > 3)$.
2. Quelle est l'espérance mathématique de X ?
3. Quelle est la probabilité que X soit supérieur à 3 sachant que X est supérieur à 2.

Exercice 2. Une entreprise fabrique des interrupteurs avec voyant lumineux. D'après les résultats du contrôle réalisés depuis quelques mois, le taux d'interrupteurs non conformes est de 10%. on prélève par hasard de la production un interrupteur pour le vérifier.

1. On note par X la variable aléatoire définie par : 1 si l'interrupteur est non conforme et 0 sinon.
   (a) Déterminez $P(X = 1)$ et $P(X = 0)$.
   (b) Comment appelle-t-on la variable aléatoire définie en (a). ?
   (c) Quelle est la valeur de l'espérance mathématique de X ?
2. Supposons maintenant, qu'on prélève au hasard 10 interrupteurs d'un grand lot. Notons par X, le nombre d'interrupteurs non conformes dans un échantillon de taille $n = 12$.
   (a) Quelles sont le valeurs possibles pour X ?
   (b) Quelle est l'expression mathématique de la loi qui permettrait de déterminer la probabilité d'observer 4 interrupteurs non conformes dans un échantillon de taille $n = 12$?
   (c) Dans un échantillon de taille $n = 12$, combien d'interrupteurs non conformes peut-t-on s'attendre d'observer en moyenne ?

Exercice 3. Dans une entreprise, une machine produit des pièces dont les dimensions très précises doivent être respectées.

1. Après un premier réglage, on constate que la probabilité pour une pièce d'être défectueuse est de $\frac{1}{3}$. On examine 5 pièces choisies au hasard dans la production. Soit X la variable aléatoire "nombre de pièces défectueuses parmi les 5".

a. Quelle sont la loi, l'espérance et la variance de X ?

b. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de pièce défectueuse ?

c. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas plus d'une pièce défectueuse ?

2. Après un second réglage, la probabilité pour une pièce d'être défectueuse tombe à 0.05. On examine maintenant un lot de 100 pièces. Calculer la probabilité :
   (a) de ne pas trouver de pièce défectueuse,
   (b) de trouver deux pièces défectueuses,
   (c) de trouver un nombre de pièces défectueuses compris entre un et trois (au sens large).

Exercice 4. La probabilité qu'une imprimante de modèle PRINT ne puisse transcrire correctement un caractère est 0, 0005, on suppose que les qualités de transmission des caractères sont indépendantes. On désigne par X la variable aléatoire qui à tout lot de 10000 caractères associe le nombre de caractères transcrits incorrectement par l'imprimante.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. On admet que la loi de probabilité suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre. Quelle est la probabilité que, parmi 10000 caractères à imprimer,
   (a) tous soient transcrits correctement ?
   (b) au moins 9998 soient transcrits correctement ?
   (c) plus de 5 caractères soient transcrits incorrectement ?

Exercice 5. La durée de vie , exprimée en semaines, d'un composant électronique est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle. La variable aléatoire X a donc une densité de probabilité de la forme : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$, et 0 sinon.

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. On a constaté expérimentalement que 95,12% de ces composants étaient encore en état de marche au bout de 25 semaines de fonctionnement. Montrer que cette constatation permet de fixer à 0,002 le paramètre λ.
3. Quelle est la probabilité qu'un composant de ce type soit en état de marche au bout de 100 semaines de fonctionnement ?
4. Sachant qu'un de ces composants a bien fonctionné pendant 100 semaines, quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de la 150 ème semaine ?

Exercice 6. 1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(8, 42)$. Calculer $P(X < 7,52)$, $P(X > 8,48)$, $P(6 < X < 10)$, $P(X > 6|X > 5)$.

2. Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(4, 4)$, déterminer $P(Y \leq 6)$.
3. Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(3, (1,5)^2)$, déterminer x pour que $P(Y \leq x) = 0,$ 4218.
4. Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(5, 4)$, déterminer $P(2,5 \leq Y \leq 6,5)$.
5. Si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(6, 4)$, déterminer un intervalle, centré sur la moyenne dans lequel est Y prend ses valeurs avec la probabilité 0, 9.

Exercice 7. Une usine fabrique des billes de diamètre nominal 8 mm. Les erreurs d'usinage provoquent une variation du diamètre qui est une variable aléatoire E suivant une loi normale de moyenne 0 mm et d'écart-type 0, 015 mm. Lors du contrôle de fabrication on écarte les billes qui passent à travers une bague de diamètre 7, 98 mm, ainsi que celles qui ne passent pas à travers une bague de diamètre 8, 02 mm.

1. Quelle est la probabilité qu'une bille prise au hasard soit écartée ?
2. Lorsque la bille est trop petite elle est rejetée, lorsqu'elle est trop grande elle est retaillée convenablement (elle ne sera pas écartée après avoir été retaillée). Le coût de fabrication d'une bille est de 1 euro et le surcoût pour retailler une bille est de 30 centimes d'euros. Soit C la variable aléatoire coût de fabrication d'une bille, déterminer la loi de C.
3. Soit B la variable aléatoire bénéfice réalisé pour une bille prise au hasard (parmi toutes les billes produites). Déterminer la loi de B pour un prix de vente d'une bille de x euros (on remarquera que B ne peut prendre que les trois valeurs : -1 ; $x - 1,3$;$x - 1$).
4. Déterminer le prix de vente minimal pour que l'entreprise soit bénéficiaire.