b3. La [illegible] mesure est remplacée par un [illegible] différence de deux paramètres.

$y(k) = \hat{a} \ldots = 1,5 \Rightarrow$ l'erreur n'est [illegible]

N.B : que la méthode des moindres carrés ordinaires [illegible] les paramètres a et b

b4. On effectue une troisième mesure :

$y(3) = \hat{a} \ldots + \hat{b} \ldots$ [illegible]

Calculer $\hat{\theta}(3)$ en appliquant :

b4-1. La méthode des moindres carrés ordinaires

b4-2. La méthode des moindres carrés récursive

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k-1)$$

1/ Méthode des moindres carrés ordinaire :

$$\hat{\theta}(4) = \left[\Phi^T(4)\,\Phi(4)\right]^{-1} \Phi^T(4)\, Y(4)$$

$$y(k) = \theta^T(k)\,\varphi(k)$$

avec $\theta(k) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_0 \end{bmatrix}$ et $\varphi(k) = \begin{pmatrix} -y(k-1) \\ -y(k-2) \\ u(k-1) \end{pmatrix}$

$$\Phi(4) = \begin{bmatrix} \varphi^T(2) \\ \varphi^T(3) \\ \varphi^T(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(1) & -y(0) & u(1) \\ -y(2) & -y(1) & u(2) \\ -y(3) & -y(2) & u(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1,5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\Phi^T(4)\,\Phi(4)\right]^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1,5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1,5 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3,25 & -1,5 & 1 \\ -1,5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & \text{[illegible]} \\ 3 & 5,5 & \text{[illegible]} \\ \text{[illegible]} & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5,5 & -1,5 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1,5 \\ 0,05 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(4) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5,5 & -1,5 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1,5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,5 & -1 & -1 \\ -7,75 & 1,5 & -2,5 \\ 4,5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,5 \\ -1,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

b3. La ... est complétée par ... points ... différents de deux paramètres.

$$y(2) = \hat{a} - \hat{b} + \ldots = 1,5 \rightarrow \text{l'erreur n'est ...}$$

A ... que la méthode des moindres carrés ordinaires ... les paramètres exacts

b4. On effectue ... mesure.

$$y(5) = \ldots$$

Calculer $\hat{\theta}(3)$ en appliquant :

b4-1 : la méthode des moindres carrés ordinaires

b4-2 : La méthode des moindres carrés récursifs

مكتبة الطالب ... تصفيف الوثائق ...

A.

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_0 u(k-1)$$

1/ Méthode des moindres carrés ordinaires :

~~...~~

$$\hat{\theta}(k) = \left[\Phi^T(k)\Phi(k)\right]^{-1}\Phi^T(k)\,Y(k)$$

$$y(k) = \theta^T(k)\varphi(k)$$

avec
$$\theta(k) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(k) = \begin{pmatrix} -y(k-1) \\ -y(k-2) \\ u(k-1) \end{pmatrix}$$

$$\Phi(4) = \begin{bmatrix} \varphi^T(2) \\ \varphi^T(3) \\ \varphi^T(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(1) & -y(0) & u(1) \\ -y(2) & -y(1) & u(2) \\ -y(3) & -y(2) & u(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1,1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\Phi^T(4)\,\Phi(4)\right]^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1,1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1,1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3,21 & -1,1 & 1 \\ -1,1 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & \cdots \\ 3 & \cdots \\ \cdot & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1,1 & -1,1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1,1 \\ 0,05 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(4) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1,1 & -1,1 \\ \cdot & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1,1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,1 & -1 & -1 \\ -7,21 & 1,1 & -2,1 \\ 4,1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

b3. La ... est complétée par ... partant ... différents de deux paramètres.

$y(2) = \hat{a} - \hat{b} + \varepsilon(2) = 1{,}5$ → l'erreur n'est ...

Appliquer la méthode des moindres carrés ordinaires pour ... les paramètres a et b

b4. On effectue une troisième mesure.

$y(3) = \hat{a}\ldots + b \ldots$

Calculer $\hat{\theta}(3)$ en appliquant :

b4-1. La méthode des moindres carrés ordinaires

b4-2 : La méthode des moindres carrés récursi...

A. $y(k) = -a_1\, y(k-1) - a_2\, y(k-2) + b_0\, u(k-1)$

1/ Méthode de moindres carrés ordinaire :

$$\hat{\theta}(4) = \left[\phi^T(4)\,\phi(4)\right]^{-1} \phi^T(4)\, Y(4)$$

$y(k) = \theta^T(k)\, \varphi(k)$

avec $\theta(k) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_0 \end{bmatrix}$ et $\varphi(k) = \begin{pmatrix} -y(k-1) \\ -y(k-2) \\ u(k-1) \end{pmatrix}$

$$\phi(4) = \begin{bmatrix} \varphi^T(2) \\ \varphi^T(3) \\ \varphi^T(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(1) & -y(0) & u(1) \\ -y(2) & -y(1) & u(2) \\ -y(3) & -y(2) & u(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1{,}1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\phi^T(4)\,\phi(4)\right]^{-1} = \left[\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1{,}1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1{,}1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 3{,}21 & -1{,}1 & 1 \\ -1{,}1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & +3 & - \\ 3 & 5{,}5 & - \\ - & & 1{,}1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5{,}5 & -1{,}1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ 0{,}09 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(4) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5{,}5 & -1{,}1 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1{,}1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1{,}1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}1 & -1 & -1 \\ -7{,}71 & 1{,}1 & -2{,}1 \\ 4{,}1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} =$$

Devoir de Contrôle 2000/2001

1 Soit le système suivant :

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1)$$

k	1	2	3	4	5
u(k)	1	1	0	1	0
y(k)	0	1	-1,5	0,05	2,075

Les séquences de signaux $u(k)$ et $y(k)$ étant nulles pour $k \leq 0$

1. Estimer, par la méthode des moindres carrés ordinaire, les paramètres du modèle aux instants 4 et 5

2. Par la méthode récursive des moindres carrés, calculer $\hat{\theta}(5)$ à partir $\hat{\theta}(4)$. Conclure

---

L'objectif est d'estimer deux paramètres a et b à la base d'une mesure des combinaisons linéaires

b1. A la base de la première mesure suivante portant sur la somme de deux paramètres à estimer, est-ce qu'on peut appliquer la méthode des moindres carrés ordinaire pour déterminer le vecteur $\hat{\theta}$ (Justifier la réponse) ?

$$y(1) = \hat{a} + \hat{b} + v(1) = 0,2 \quad \text{(Mesure N°1)}$$

b2. On effectue une deuxième mesure portant encore sur la somme des paramètres a et b

$$y(2) = \hat{a} + \hat{b} + v(2) = -0,1 \quad \text{(Mesure N°2)}$$

Peut-on appliquer la Méthode des moindres carrés ordinaire pour estimer $\hat{\theta}$?

Justifier la réponse.

$\hat{\theta}(5) = \hat{\theta}(4) + P(5)\,\Upsilon(5)\,\big(y(5) - \hat{\theta}^T(4)\,\Upsilon(5)\big)$

$P(5) = \begin{bmatrix} 0{,}766 & 0{,}645 & 0{,}571 \\ 0{,}645 & 0{,}929 & -0{,}662 \\ -0{,}571 & -0{,}663 & 0{,}842 \end{bmatrix}$

$\Upsilon(5) = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Il y a convergence

b-1 On ne peut pas appliquer la méthode des moindres carrés ordinaires pour déterminer le vecteur $\hat{\theta}$ car on a deux paramètres à estimer et on a une seule mesure, il faut au moins deux mesures.

b-2 On ne peut pas appliquer la méthode des moindres carrés ordinaires pour estimer $\hat{\theta}$ car $\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\varphi^T\varphi$ n'est pas inversible.

b-3 $\hat{\theta}(2) = [\varphi^T(2)\,\varphi(2)]^{-1}\,\varphi^T(2)\,Y(2)$

$\varphi(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \varphi^T(2)\varphi(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$[\varphi^T(2)\,\varphi(2)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 1{,}4 \end{bmatrix}$

$[\varphi^T(2)\,\varphi(2)]^{-1}\,\varphi^T(2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $Y(2) = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}25 \end{bmatrix}$

$\hat{\theta}(2) = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}$

M.C. ordinaire $\hat{\theta}(3) = [\varphi^T(3)\,\varphi(3)]^{-1}\,\varphi^T(3)\,Y(3)$ avec $\varphi(3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

C récursif $\hat{\theta}(3) = \hat{\theta}(2) + P(3)\,\Upsilon(3)\,\big(y(3) - \hat{\theta}^T(2)\,\Upsilon(3)\big)$ avec $\Upsilon(3) = [2$

$P(3)\,\Upsilon^T(3) = \dfrac{P(2)\,\Upsilon(3)}{1 + \Upsilon(3)\,P(2)\,\Upsilon^T(3)}$

y(k) ... y(k-1) ... y(k-2) ... u(k-1)

méthode ... non récursive :

on commence pour $k = 2$.

$$\hat{\theta}(4) = [\phi^T(4)\phi(4)]^{-1}\phi^T(4)Y(4)$$

avec $Y(4) = \begin{pmatrix} y(2) \\ y(3) \\ y(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1,5 \\ -0,25 \end{pmatrix}$

$$\phi(4) = \begin{bmatrix} -y(1) & -y(0) & u(1) \\ -y(2) & -y(1) & u(2) \\ -y(3) & -y(2) & u(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1,5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & +7 & -1 \\ 3 & 5,5 & -1,5 \\ -1 & -1,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(4) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ +0,7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\phi^T(4)\phi(4)] = \begin{bmatrix} 3,25 & -1,5 & 1 \\ -1,5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \hat{\theta}(4) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(5) = [\phi^T(5)\phi(5)]^{-1}\phi^T(5)Y(5).$$

on commence pour $k = 2$. $\Rightarrow Y(5) = \begin{pmatrix} Y(2) \\ Y(3) \\ Y(4) \\ Y(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0,5 \\ 1,075 \end{pmatrix}$

$$\phi(5) = \begin{bmatrix} -y(1) & -y(0) & u(1) \\ -y(2) & -y(1) & u(2) \\ -y(3) & -y(2) & u(3) \\ -y(4) & -y(3) & u(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1,5 & -1 & 0 \\ -0,05 & 1,5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [\phi^T(5)\phi(5)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,786 & 0,645 & -0,571 \\ 0,645 & 0,929 & -0,662 \\ -0,571 & -0,662 & 0,846 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(5) = \begin{bmatrix} 0,517 \\ 0,734 \\ 0,993 \end{bmatrix}$$

b2- On effectue une deuxième mesure portant encore sur la som des paramètres a et b :

$$y(2) = \hat{a} + \hat{b} + v(2) = -0.1 \quad \rightarrow \text{(Mesure N° 2)}$$

Peut-on appliquer la méthode des moindres carrés ordinaires po estimer $\hat{\theta}$?
Justifier la réponse.

b3- La deuxième mesure est remplacée par une mesure portant sur l différence des deux paramètres :

$$y(2) = \hat{a} - \hat{b} + v(2) = 1.9 \quad \rightarrow \text{(Mesure N° 2 retenue)}$$

Appliquer la méthode des moindres carrés ordinaires pour estimer les paramètres a et b.

b4 - On effectue une troisième mesure :

$$y(3) = 2\hat{a} + \hat{b} + v(3) = 1 \quad \rightarrow \text{(Mesure N° 3)}$$

Caculer $\hat{\theta}(3)$ en appliquant :

b4-1 : La méthode des moindres carrés ordinaires
b4-2 : La méthode des moindres carrés récursifs

Scanned with CamScanner

ENIG
A.U. : 2000/2001
Classe : GEA2
Durée : 2H

Analyse et Identification des Procédés

Devoir de Contrôle

(Sans documents)

A - Soit le système suivant :

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1)$$

×3

Soit le tableau de mesures suivant :

k	1	2	3	4	5
$u(k)$	1	-1	0	1	0
$y(k)$	0.000	1.000	-1.500	0.050	2.075

Les séquences de signaux $u(k)$ et $y(k)$ étant nulles pour $k \leq 0$.

1 • Estimer, par la méthode des moindres carrés ordinaires, les paramètres du modèle aux instants $k = 4$ et $k = 5$.

2 • Par la méthode récursive des moindres carrés, calculer $\hat{\theta}(5)$ à partir de $\hat{\theta}(4)$. Conclure.

B - L'objectif est d'estimer deux paramètres a et b à la base d'une mesure des combinaisons linéaires.

b1- A la base de la première mesure suivante portant sur la somme des deux paramètres à estimer, est ce qu'on peut appliquer la méthode des moindres carrés ordinaires pour déterminer le vecteur $\hat{\theta}$ (justifier la réponse) ?

$$y(1) = \hat{a} + \hat{b} + v(1) = 0.2 \rightarrow \text{(Mesure N° 1)}$$

Scanned with CamScanner

$$\tau \log(0{,}34) = -0{,}2$$

$$\tau = \frac{-0{,}2}{\log(0{,}34)} = +0{,}18 \quad \boxed{\tau = 0{,}18}$$

$$K_m = \frac{b}{(1 - e^{-0{,}2/\tau})} = \frac{0{,}874}{(1 - e^{-0{,}2/0{,}18})}$$

$$K_m = \frac{0{,}874}{0{,}67} = 1{,}3$$

$$\boxed{K_m = 1{,}3}$$

Scanned with CamScanner

$$\begin{bmatrix} & \\ 3,28 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det = 2,1572$$

$$\begin{bmatrix} 3,229 & 3,28 \\ 3,28 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2,1576}\begin{bmatrix} 4 & -3,18 \\ -3,28 & 3,229 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,85 & -1,52 \\ -1,52 & 1,49 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(7) = \begin{bmatrix} 1,85 & -1,52 \\ -1,52 & 1,49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,12 \\ 4,79 \end{bmatrix}_{21}$$

$$\boxed{\hat{\theta}(7) = \begin{bmatrix} 0,384 \\ 0,874 \end{bmatrix}} \begin{matrix} \to \hat{a} \\ \to \hat{b} \end{matrix}$$

$$a = 0,384 = e^{-0,2/\tau}$$

$$b = 0,874 = K_m\left(1 - e^{-0,2/\tau}\right)$$

Scanned with CamScanner

$$\begin{bmatrix} 3,28 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det = 2,1572$$

$$\begin{bmatrix} 3,229 & 3,28 \\ 3,28 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2,1576} \begin{bmatrix} 4 & -3,28 \\ -3,28 & 3,229 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,85 & -1,52 \\ -1,52 & 1,49 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(7) = \begin{bmatrix} 1,85 & -1,52 \\ -1,52 & 1,49 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,12 \\ 4,79 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$\boxed{\hat{\theta}(7) = \begin{bmatrix} 0,384 \\ 0,874 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \hat{a} \\ \to \hat{b} \end{array}}$$

$$a = 0,384 = e^{-0,2/\tau}$$

$$b = 0,874 = K_m \left(1 - e^{-0,2/\tau}\right)$$

modèle discret

$$\frac{K_m e^{-0,4p}}{1+\tau p} = K_m \frac{e^{-p\times 2\times 0,2}}{1+\tau p}$$

$$\hookrightarrow H(z) = K_m \frac{1-e^{-0,2/\tau}}{z - e^{-0,2/\tau}} z^{-2}$$

$$\boxed{H(z^{-1}) = K_m \frac{\left(1-e^{-0,2/\tau}\right) z^{-3}}{1 - z^{-1} e^{-0,2/\tau}}}$$

$$H(z^{-1}) = \frac{b_1}{1 + a z^{-1}}$$

$$a = e^{-0,2/\tau}$$

$$b = K_m\left(1 - e^{-0,2/\tau}\right)$$

$$\frac{y(k)}{u(k)} = \frac{b z^{-3}}{1 - a z^{-1}}$$

$$y(k) - a y(k-1) = b z^{-3} u(k)$$

$$y(3) = a\,y(2) + b\,u(0)$$
$$y(4) = a\,y(3) + b\,u(1)$$
$$y(5) = a\,y(4) + b\,u(2)$$
$$y(6) = a\,y(5) + b\,u(3)$$
$$y(7) = a\,y(6) + b\,u(5)$$

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 1 \\ 0{,}32 & 1 \\ 0{,}68 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1{,}29 & 1 \end{bmatrix}_{42}$$

$$\Phi^T(k) \times \Phi(k) = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0{,}32 & 0{,}68 & 1 & 1{,}29 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

24x

$$\begin{bmatrix} 3{,}229 & 3{,}28 \\ 3{,}28 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T y(7) = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}32 \\ 0{,}68 \\ 1 \\ 1{,}29 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}$$

25 57

$$\begin{bmatrix} 4{,}12 \\ 4{,}79 \end{bmatrix}$$

modèle discret

$$\frac{K_m\, e^{-0,4p}}{1+\tau p} = K_m \frac{e^{-p\times 2\times 0,2}}{1+\tau p}$$

$$\hookrightarrow H(z) = K_m \frac{1-e^{-0,2/\tau}}{z-e^{-0,2/\tau}}\, z^{-2}$$

$$\boxed{H(z^{-1}) = K_m \frac{\left(1-e^{-0,2/\tau}\right) z^{-3}}{1-z^{-1}e^{-0,2/\tau}}}$$

$$H(z^{-1}) = \frac{b_1}{1+a z^{-1}}$$

$$a = e^{-0,2/\tau}$$

$$b = K_m\left(1-e^{-0,2/\tau}\right)$$

$$\frac{y(k)}{u(k)} = \frac{b z^{-3}}{1-a z^{-1}}$$

$$y(k) - a y(k-1) = b z^{-3} u(k)$$

$$y(t) = y_0 + V t$$

2) $y(t) = 1 \cdot y_0 + t \cdot V = \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ V \end{bmatrix}$

$$y(t) = \varphi(t)\,\hat{\theta}$$

MCO

$$\phi(2) = \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \varphi(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 10.8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\phi^T(2) = \begin{bmatrix} 1 & 10.8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\phi \phi^T) = \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$$

$$(\phi \phi^T)^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} & \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{2} (\varepsilon)^2$$

$$T (\phi^T \phi)^{-1}$$

$3{,}449 - 3{,}449 + 13{,}133 + 20 = 0$

$0{,}814 + 0{,}73 + 0{,}3k_2 + 3{,}346 + 2{,}29k_2 = 0$

$0{,}73 + 0{,}3k_2 + 0{,}814 + 3{,}346 + 2{,}29k_2 = 0$

$0{,}946 - 2k_2 + 0{,}946 - 2k_2 + 0{,}852 - 1{,}168k_2 + 0{,}4k_2^2 + 10 = 0$

$0{,}814 + 0{,}73 \; 3{,}346 + 0{,}3k_2 + 2{,}29k_2 = 0$

$1{,}802 = 2{,}59k_2 \Rightarrow \boxed{k_2 = 0{,}6957}$

$\frac{4{,}89}{2{,}59} = k_2 = 1{,}88$

~~$0{,}814 + 0{,}73 + 0{,}3k_2 \; 0{,}946 - 2k_2$~~

$0{,}814 + 0{,}73 + 0{,}3k_2 - 3{,}346 + 2{,}29k + 0 = 0$

$0{,}814 + 0{,}73 + 3{,}346 = (-0{,}3 + 2{,}29)k_2$

$\frac{-1{,}802}{2{,}59}$

2

$\frac{4{,}99}{1{,}9}$

$+0{,}69$

$0{,}57$

Exercice 2 :

Soit un système décrit par le modèle entrée-sortie suivant

$$y(k) = -a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) + v(k)$$

où $u(k)$ et $y(k)$ représentent respectivement l'entrée et la sortie du système à l'instant discret k, $v(k)$ est un bruit blanc, et a_1 et b_1 sont les paramètres inconnus.

On donne sur le tableau suivant quelques valeurs mesurées de l'entrée $u(k)$ et de la sortie $y(k)$ du système considéré :

k	3	4	5	6	7
$u(k)$	-3	5	4	-3	-4
$y(k)$	3.54	1.12	+4.92	9.03	6.97

1. Déterminer le vecteur des paramètres estimé $\hat{\theta}^T(5) = [\hat{a}_1(5) \quad \hat{b}_1(5)]$ en utilisant la méthode des moindres carrés ordinaires non récursif.
2. Calculer la variance du bruit $v(k)$.
3. Utiliser la méthodes des moindres carrés récursif pour déterminer le vecteur de paramètres estimé $\hat{\theta}(6)$.
4. Dans cette question, on suppose que le bruit v(k) est décrit par un modèle auto- régressif AR du type:

$$v(k) = \frac{e(k)}{1 + 0.36 z^{-1}}$$

où {e(k)} est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance finie.

Formuler le problème d'estimation du vecteur des paramètres $\hat{\theta}(6)$ du modèle mathématique qui en résulte, en utilisant une méthode convenable d'estimation. Aucun calcul n'est demandé dans cette question.

5. On suppose maintenant que le bruit est décrit par le modèle à moyenne mobile MA suivant:

$$v(k) = e(k) + c_1 e(k-1)$$

Formuler de nouveau le problème d'estimation du vecteur des paramètres $\hat{\theta}(6)$ du modèle mathématique qui en résulte en utilisant une méthode convenable d'estimation pour ce type de modèles. Aucun calcul n'est demandé dans cette question.

BON TRAVAIL

Houssem

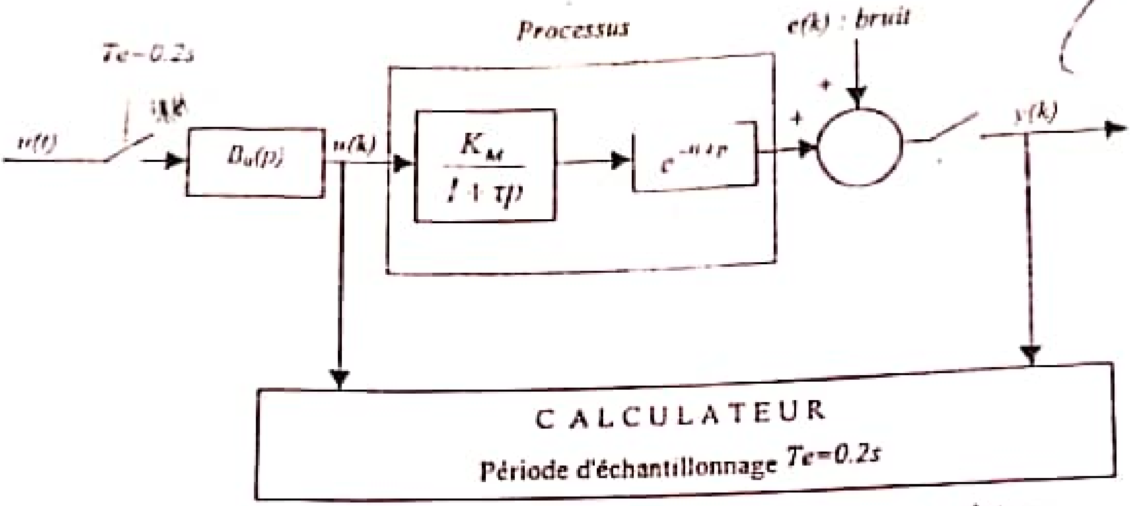
DEVOIR DE SYNTHESE

ANALYSE ET IDENTIFICATION DES PROCEDES

(Documents non autorisés)

Exercice 1 :

On réalise l'acquisition par calculateur de mesures effectuées sur un procédé industriel comme le montre la figure suivante :



On cherche à estimer K_M et τ.

1. On suppose que $e(k)=0$. Ecrire le modèle discret du système.
2. Estimer les valeurs de K_M et τ à partir des mesures suivantes :

k	<0	0	1	2	3	4	5	6	7
u(k)	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y(k)	0	-0.1	0.11	-0.01	0.32	0.68	1	1.29	1.5

3. On admettra dans cette question que la séquence de bruit est gaussienne, à composantes non corrélés entre elles.

a) Donner l'équation du modèle ARMA : $A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})e(k)$

b) Peut-on utiliser la méthode des moindres carrés ordinaires pour l'estimation de K_M et τ. Justifier votre réponse.

c) Pour annuler le biais sur les paramètres estimés, un critère, basé sur la décorrélation du vecteur d'observation ϕ et l'erreur de prédiction ε, est envisagé. Proposer et décrire une méthode associée à ce critère.

- les algorithmes :

⚠ $y(k) = \theta^T(k) \cdot \varphi^T$

⚠ $\varphi^T(k) = \phi(k) = \begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \vdots \\ \varphi(k) \end{pmatrix}$

⊛ * MCNR = MCO.

$\rightarrow \hat{\theta}(k) = \left[\phi^T(k)\, \phi(k)\right]^{-1} \phi^T(k)\, Y(k)$

⚠ $u(k+n) = z^n u(k)$.

* Variance $\sigma^2 = E\left[e^2(k)\right] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} e^2(i)$

~~* MCR~~

avec . N : nbre d'observation

. $e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$

. $\hat{y}(k) = \hat{\theta}^T(k)\, \varphi^T(k)$.

Covariance : $Cov = \sigma^2 P(k)$ ← matrice de cov

⚠ $P(k) = \left[\phi^T(k)\, \phi(k)\right]^{-1}$

* MCR.

⚠ $\boxed{\phi(k) = \varphi^T(k)}$

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\, \phi(k)\, \varepsilon^{\circ}(k). \\ \varepsilon^{\circ}(k) = y(k) - \hat{\theta}^T(k-1)\, \phi(k) \\ P(k) = P(k-1) - \dfrac{P(k-1)\, \phi(k)\, \phi^T(k)\, P(k-1)}{1 + \phi^T(k)\, P(k-1)\, \phi(k)} \end{cases}$$

Les algorithmes.

Δ TP

$$\Delta\ y(k) = \theta^T(k) \cdot \varphi^T$$

$$\Delta\ \varphi^T(k) = \phi(k) = \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \vdots \\ \varphi(k) \end{bmatrix}$$

* $y(k) = q^{-1} \dfrac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \dfrac{1}{A(q^{-1})} v(k)$: MCR. MCNR
* $y(k) = q^{-1} \dfrac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \dfrac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} v(k)$: MCE
* $y(k) = q^{-1} \dfrac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \dfrac{1}{A(q^{-1})C(q^{-1})} v(k)$: MCG.

} blanchissement de l'erreur de prediction $\rightarrow$ test de blancheur.

Etape d'identificat°:

1/ Acquisition des mesures

2/ Estimation structurelle (n_A, n_B, n_C, d) (ordre / retard).

3/ Estimation parametrique

4/ validation du modele.

MCO = MCNR

$$\hat{\theta}(k) = \left[\phi^T(k)\,\phi(k)\right]^{-1} \phi^T(k) \cdot \cancel{\phi(k)}\, Y$$

$$\phi(k) = \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \vdots \\ \varphi(k) \end{bmatrix} \quad ; \quad \varphi(k) = [-y(k-1) \quad -y(k-2) \quad u(k-2) \quad u(k-3)]$$

$Cov = \sigma^2 P(k)$ matrice de cov

$\triangle$ $P(k) = \left[\phi^T(k)\,\phi(k)\right]^{-1}$

CR

$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\,\phi(k)\,\varepsilon^o(k).$

$\varepsilon^o(k) = y(k) - \hat{\theta}^T(k-1)\,\phi(k)$

$\triangle$ $\boxed{\phi(k) = \varphi^T(k)}$

$P(k) = P(k-1) - \dfrac{P(k-1)\,\phi(k)\,\phi^T(k)\,P(k-1)}{1 + \phi^T(k)\,P(k-1)\,\phi(k)}$

page 59

Lemme d'inversion $\left(A^{-1} + a a^T\right)^{-1} = A - \dfrac{A a a^T A}{1 + a^T A a}$

$A(n,n)$ a : vecteur de dim n.