



Exercice 1

Le gain fréquentiel du système a pour expression :

$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + 0,01\omega^2}}$$

La pulsation de coupure à 0 dB peut être aisément calculée :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1 + 0,01\omega_{c0}^2}} = 1 \Rightarrow \omega_{c0} = 10\sqrt{K^2 - 1}$$

Si $K \gg 1$, on a :

$$\omega_{c0} = 10\sqrt{K^2 - 1} \approx 10K = \frac{K}{T}$$

Pour obtenir une pulsation $\omega_{c0} = 10$ rad/s, on doit avoir :

$$10\sqrt{K^2 - 1} = 10 \Rightarrow K = \sqrt{2}$$

Exercice 2

La fonction de transfert en fréquence du système a pour expression :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2j\xi\omega}{\omega_n}}$$

d'où :

$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

Par définition :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_n^2}}} = 1$$

soit :

$$\left(1 - \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_n^2} = K^2$$

Posons $X = \frac{\omega_{c0}^2}{\omega_n^2}$:

$$X^2 + (4\xi^2 - 2)X + 1 - K^2 = 0$$

Résolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4\xi^2 - 2)^2 + 4(K^2 - 1)$$

Comme $K > 1$, on a toujours $\Delta > 0$.

Par conséquent :

$$X = \frac{2 - 4\xi^2 \pm \sqrt{(4\xi^2 - 2)^2 + 4(K^2 - 1)}}{2}$$

Une seule de ces solutions étant positive, on a :

$$\omega_{c0} = \omega_n \sqrt{\frac{2 - 4\xi^2 + \sqrt{(4\xi^2 - 2)^2 + 4(K^2 - 1)}}{2}}$$

Cette expression est valable quelle que soit la valeur de ξ .

Si on suppose, de surcroît, que $K \gg 1$, on alors :

$$\omega_{c0} \approx \omega_n \sqrt{\frac{2 - 4\xi^2 + \sqrt{4K^2}}{2}} \approx \omega_n \sqrt{\frac{2K}{2}} = \omega_n \sqrt{K}$$

Exercice 3

Déterminons tout d'abord un équivalent du gain lorsque p tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque ω tend vers 0).

On a :

$$G(p) \sim \frac{1000}{100} = 10 \Rightarrow G(\omega) \sim 10$$

soit :

$$G_{dB} = 20 \log G(\omega) \sim 20 \text{ dB}$$

Nous pouvons donc tracer le premier segment asymptotique du diagramme de gain, valable entre 0 et la première pulsation de coupure, c'est-à-dire $\omega = 1 \text{ rad/s}$ (figure 3.16).

Au delà de cette pulsation de coupure, nous changeons de direction asymptotique ; comme le terme $(p + 1)$ se trouve au dénominateur, la pente se décrémente d'une unité. Nous obtenons donc un segment de droite de pente $[-1]$, autrement dit -20 dB/décade . Ce segment formant un graphe continu avec le segment précédent, il suffit de veiller à respecter la valeur de la pente. Comme cet équivalent reste valable jusqu'à la coupure suivante ($\omega = 100 \text{ rad/s}$), nous traçons un segment qui décroît de 40 dB sur l'intervalle $[1, 100]$ qui correspond à 2 décades.

À partir de $\omega = 100 \text{ rad/s}$, nous aurons une direction asymptotique de pente $[-2]$ puisque le terme $(p + 100)$ se trouve au dénominateur. Veillons à respecter la valeur de la pente : entre 100 et 1000 rad/s , le gain chute de 40 dB (pente -40 dB/décade).

Le diagramme asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en associant à chaque segment de pente $[n]$ une direction asymptotique de phase égale à $n\pi/2$.

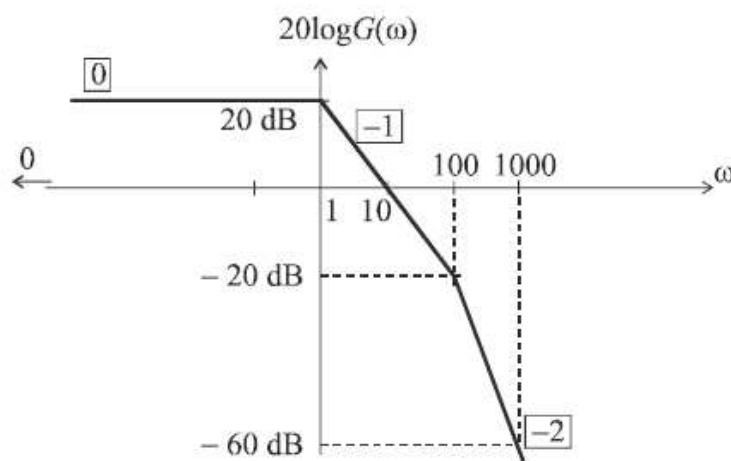


Figure 3.16 Diagramme de Bode de gain du système.

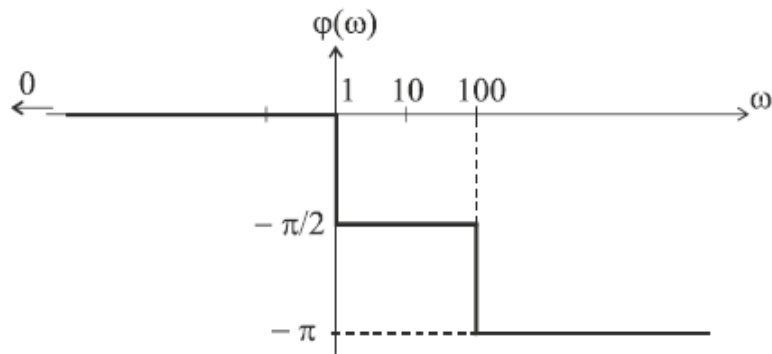


Figure 3.17 Diagramme de Bode de phase du système.

Exercice 4

Déterminons tout d'abord un équivalent du gain lorsque p tend vers 0 (c'est-à-dire lorsque ω tend vers 0).

On a :
$$G(p) \sim \frac{p}{10} \Rightarrow G(\omega) \sim \frac{\omega}{10}$$

soit :
$$G_{dB} = 20 \log G(\omega) \sim 20 \log \omega - 20 \text{ dB}$$

Nous pouvons donc tracer le premier segment asymptotique du diagramme de gain, valable entre 0 et la première pulsation de coupure, c'est-à-dire $\omega = 1 \text{ rad/s}$ (figure 3.20). Il s'agit d'un segment de pente $[+1]$ autrement dit 20 dB/décade. La connaissance d'un point suffit donc pour tracer ce segment, par exemple :

$$G_{dB}(1) = -20 \text{ dB}$$

Le premier segment asymptotique, sur l'intervalle $[0, 1]$ possède donc une pente de 20 dB/décade et s'arrête au point $(1, -20 \text{ dB})$, comme indiqué sur la figure 3.20.

Au delà de la pulsation de coupure $\omega = 1 \text{ rad/s}$, nous changeons de direction asymptotique ; comme le terme $(p + 1)$ se trouve au dénominateur, la pente se décrémente d'une unité. Nous obtenons donc un segment de droite de pente $[0]$. Ce

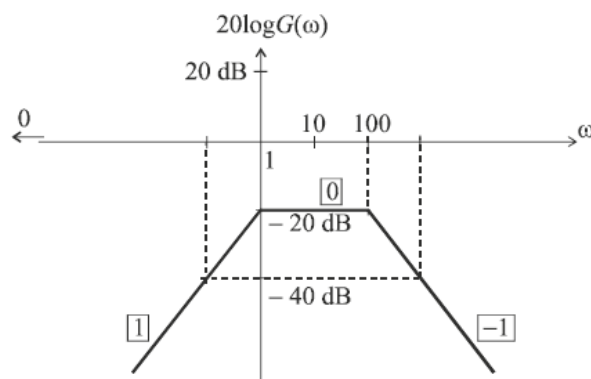


Figure 3.20 Diagramme de Bode de gain du système.

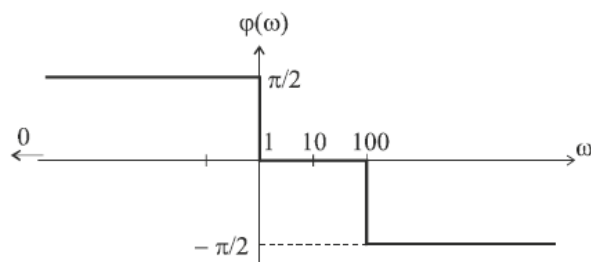


Figure 3.21 Diagramme de Bode de phase du système.

segment formant un graphe continu avec le segment précédent, il est facile à tracer et reste valable jusqu'à la coupure suivante ($\omega = 100$ rad/s).

À partir de $\omega = 100$ rad/s, nous aurons une direction asymptotique de pente $[-1]$ puisque le terme $(p + 100)$ se trouve au dénominateur. Veillons à respecter la valeur de la pente : entre 100 et 1000 rad/s, le gain chute de 20 dB (pente -20 dB/décade).

Le diagramme asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en associant à chaque segment de pente $[n]$ une direction asymptotique de phase égale à $n\pi/2$.

Exercice 5

La fonction de transfert en fréquence a pour expression :

$$G(j\omega) = \frac{10}{1 - \frac{\omega^2}{100}}$$

Nous remarquons, bien sûr, que cette expression est toujours réelle. Le diagramme de Nyquist est donc porté par l'axe des réels. Il convient toutefois d'étudier avec précision la manière dont le lieu est parcouru lorsque ω croît de 0 à $+\infty$.

Pour $0 < \omega < 10$, on a :

$$G(j\omega) > 0$$

Sur ce même intervalle, $G(j\omega)$ croît de 10 à $+\infty$. La portion correspondante, dans le diagramme de Nyquist est donc la demi-droite appartenant à l'axe réel et comprise entre 10 et $+\infty$.

Pour $\omega > 10$, on a :

$$G(j\omega) < 0$$

Nous nous trouvons cette fois sur le demi-axe réel négatif et $G(j\omega)$ croît de $-\infty$ à 0^- . La portion correspondante, dans le diagramme de Nyquist est donc la demi-droite appartenant à l'axe réel et comprise entre $-\infty$ et 0^- .

En prenant soin d'orienter ce lieu de Nyquist quelque peu singulier dans le sens des ω croissants, on obtient le graphe de la figure 4.17.

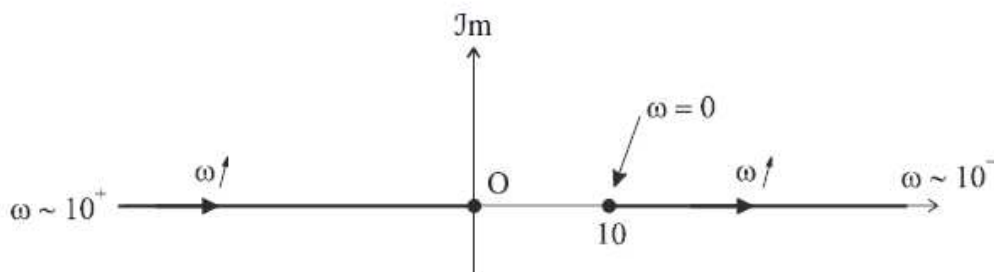


Figure 4.17 Diagrammes de Nyquist d'un système résonant pur.

Exercice 6

La stabilité peut ici être facilement étudiée par le calcul de l'unique pôle de la fonction de transfert en boucle fermée.

On a :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{Tp + 1 + K}$$

L'unique pôle de cette fonction de transfert en boucle fermée est :

$$p_1 = -\frac{K + 1}{T}$$

Ce pôle est négatif, de toute évidence. Par conséquent le système est stable quelle que soit la valeur du gain statique K .

Exercice 7

La fonction de transfert en boucle fermée a ici pour expression :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1 + K}$$

Cette fonction de transfert possède deux pôles que nous pouvons facilement calculer. Calculons pour ce faire le discriminant du trinôme situé au dénominateur :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{4\xi^2}{\omega_n^2} - \frac{4(1+K)}{\omega_n^2} = \frac{4}{\omega_n^2} [\xi^2 - (1+K)]$$

Si $\xi^2 - (1+K) > 0$, $\Delta > 0$ et la fonction de transfert $H(p)$ possède alors deux pôles réels ayant pour expressions :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_n} \pm \frac{2}{\omega_n} \sqrt{\xi^2 - (1+K)}}{\frac{2}{\omega_n^2}}$$

De toute évidence :

$$\frac{2}{\omega_n} \sqrt{\xi^2 - (1+K)} < \frac{2\xi}{\omega_n}$$

Par conséquent, les deux pôles p_1 et p_2 sont toujours strictement négatifs. Dans ce cas, le système est donc toujours stable en boucle fermée.

Si $\xi^2 - (1+K) = 0$, $\Delta = 0$ et la fonction de transfert $H(p)$ possède alors un pôle réel double ayant pour expression :

$$p_1 = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_n}}{\frac{2}{\omega_n^2}} = -\xi\omega_n$$

Ce pôle est toujours négatif. Par conséquent le système est toujours stable en boucle fermée.

Si $\xi^2 - (1+K) < 0$, $\Delta < 0$ et la fonction de transfert $H(p)$ possède alors deux pôles complexes conjugués ayant pour expressions :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_n} \pm j \frac{2}{\omega_n} \sqrt{(1+K) - \xi^2}}{\frac{2}{\omega_n^2}}$$

La partie réelle de ces deux pôles est toujours négative. Le système est donc stable en boucle fermée.

En conclusion, quels que soient les cas étudiés, le système proposé est toujours stable en boucle fermée.

Exercice 8

Calculons la fonction de transfert en boucle fermée :

On a :

$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{p(p+1)(p+2) + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert a pour expression :

$$D(p) = p(p+1)(p+2) + K = p^3 + 3p^2 + 2p + K$$

Établissons la table de Routh pour étudier la condition de stabilité :

1	2
3	K
$6 - K$	0
K	0

Le système est stable en boucle fermée s'il n'y a aucun changement de signe dans la première colonne, donc si $K < 6$.

Exercice 9

Calculons la fonction de transfert en boucle fermée :

On a :
$$H(p) = \frac{G(p)}{1 + G(p)} = \frac{K}{(p+1)^3 + K}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert a pour expression :

$$D(p) = (p+1)^3 + K = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + K$$

Établissons la table de Routh pour étudier la condition de stabilité :

1	3
3	$K + 1$
$\frac{8 - K}{3}$	0
K	0

Le système est stable en boucle fermée s'il n'y a aucun changement de signe dans la première colonne, donc si $K < 8$.
Pour disposer d'une marge de phase égale à 45° , il faut avoir :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \frac{\pi}{4}$$

Or :
$$G(j\omega) = \frac{K}{(j\omega + 1)^3} \Rightarrow \varphi(\omega) = -3 \arctan \omega$$

On a donc :
$$\pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - 3 \arctan \omega_{c0} = \frac{\pi}{4}$$

d'où :
$$3 \arctan \omega_{c0} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \omega_{c0} = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{ rad/s}$$

Or ω_{c0} est tel que :
$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\left(\sqrt{\omega_{c0}^2 + 1}\right)^3} = 1 \Rightarrow K = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2,8$$

En conclusion, on obtient une marge de phase $\Delta\varphi = 45^\circ$ pour $K = 2,8$.

Exercice 10

La condition sur la marge de phase s'exprime ainsi :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_{c0}) = \frac{\pi}{4}$$

Or :

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega + 100)^2} \Rightarrow \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega}{100}$$

On a donc :

$$\pi + \varphi(\omega_{c0}) = \pi - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega_{c0}}{100} = \frac{\pi}{4}$$

d'où :

$$2 \arctan \frac{\omega_{c0}}{100} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega_{c0} = 100 \tan \frac{\pi}{8} = 41,4 \text{ rad/s}$$

Or ω_{c0} est tel que :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\omega_{c0} (\omega_{c0}^2 + 10^4)} = 1 \Rightarrow K = 485 \cdot 10^3$$

En conclusion, on obtient une marge de phase $\Delta\varphi > 45^\circ$ pour $K < 485 \cdot 10^3$.
Calculons à présent la marge de gain. Par définition :

$$\Delta G = -20 \log G(\omega_\pi) \text{ avec } \varphi(\omega_\pi) = -\pi$$

On a :

$$\varphi(\omega_\pi) = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega_\pi}{100} = -\pi$$

soit :

$$\arctan \frac{\omega_\pi}{100} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega_\pi = 100 \text{ rad/s}$$

On a donc :

$$G(\omega_\pi) = \frac{K}{\omega_\pi (\omega_\pi^2 + 10^4)} = \frac{K}{2 \cdot 10^6}$$

d'où :

$$\Delta G = -20 \log G(\omega_\pi) = -20 \log \frac{K}{2 \cdot 10^6} = -20 \log K + 126 \text{ dB}$$

Il est donc aisé de déterminer la condition sur K pour obtenir une marge de gain supérieure à 6 dB :

$$\Delta G > 6 \text{ dB} \Rightarrow -20 \log K > -120 \text{ dB}$$

$$\log K < 6 \Rightarrow K < 10^6$$

Comme les deux conditions $\Delta\varphi > 45^\circ$ et $\Delta G > 6 \text{ dB}$ doivent être simultanément vérifiées, il nous faut choisir la condition la plus restrictive sur K :

$$K < 485 \cdot 10^3$$