ENIG

Année 2023-2024

GEA1/ GCV1/GM1

Maths 2

Série n° 1

Exercice 1. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

complexe

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = -y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 2y(t) + e^t \\ y'(t) = -x(t) + 6y(t) + t \end{cases}$$

Exercice 2. 1. Trouver les solutions du système différentiel $X' = AX$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 18 & -7 \end{pmatrix},\ X(0) = (1, -1),$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},\ X(0) = (-1, 2).$$

2. Résoudre le système $X'(t) = AX(t) + B(t)$ où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Mettre les équations différentielles suivantes sous forme d'un système différentiel du premier ordre. Puis les résoudre dans $\mathbb{R}$.

1. $y'' + 2y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
2. $y'' - 2y' + 2y = 2e^{2t}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Série n° 1

Exercice 1 :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) & (1) \\ y'(t) = -y(t) & (2) \end{cases}$$

(2) : $y(t) = \lambda e^{-t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(1) (E) : $\Leftrightarrow$ $x'(t) - 2x(t) = \lambda e^{-t}$

(E_h) : $x'(t) - 2x(t) = 0 \rightarrow x_h(t) = \beta e^{2t}$, $\beta \in \mathbb{R}$

Soit $x_p(t) = \beta(t) e^{2t}$ solut° de (E)

$x'_p(t) = \beta'(t) e^{2t} + 2\beta(t) e^{2t}$

$(E) \Leftrightarrow \beta'(t) e^{2t} + 2\beta(t) e^{2t} - 2\beta(t) e^{2t} = \lambda e^{-t} \Leftrightarrow \beta'(t) = \lambda e^{-3t}$

$\Leftrightarrow \beta(t) = \lambda \int e^{-3t} dt = -\frac{\lambda}{3} e^{-3t} + \underset{0}{\underbrace{C}}$

$\Rightarrow x_p(t) = -\frac{\lambda}{3} e^{-3t} \cdot e^{2t} \Leftrightarrow x_p(t) = -\frac{\lambda}{3} e^{-t}$

on a : $\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \beta e^{2t} - \frac{\lambda}{3} e^{-t}, \; \lambda, \beta \in \mathbb{R}}$

Exercice 2

$X'(t) = A X(t)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; $X(0) = (-1, 2)$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 3$

Soit $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tq $A u_1 = \lambda_1 u_1$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -b_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 = -a_1 & (1) \\ 4a_1 + b_1 = -b_1 & (2) \end{cases}$

(1) $b_1 = -2a_1 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ -2a_1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, on prend $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Soit $u_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tq $A u_2 = \lambda_2 u_2$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_2 \\ 3b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 = 3a_2 & (3) \\ 4a_2 + b_2 = 3b_2 & (4) \end{cases}$

(3) : $b_2 = 2a_2 \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2 \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; on prend $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

on pose $X_1(t) = e^{\lambda_1 t} u_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$

$X_2(t) = e^{\lambda_2 t} u_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

on a : $x(t) = \alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t) \quad , \alpha_1 , \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{3t} \\ -2\alpha_1 e^{-t} + 2\alpha_2 e^{3t} \end{pmatrix} \quad , \alpha_1 , \alpha_2 \in \mathbb{R} .$$

on a : $X(0) = (-1, 2) \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -1 & (\mathrm{I}) \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 & (\mathrm{II}) \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 1 & \mathrm{III} \end{cases}$

$(\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) : 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

$(\mathrm{I}) \Rightarrow \alpha_1 = -1$

$$\Rightarrow X(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -t \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$$