ENIG

A.U. : 2022 2023

Enseignant : Anis Messaoud

Travaux Dirigés : Filtrage Optimal

Exercice 1

Considérons le système stochastique continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -4x(t) + w(t) \\ y(t) = x(t) + v(t) \end{cases}$$

avec : $w(t)$ et $v(t)$ sont deux bruits blancs gaussiens de variance respectivement $q = 1$ et $r = 1$. Le spectre de covariance des signaux $v(t)$ est $S_{vv}(p)$ et le spectre de covariance du signal $x(t)$ est $S_{xx}(p)$. On donne :

$$S_{xx}(p) = \frac{1}{16 - p^2} \quad ; \quad S_{vv}(p) = 1$$

1- Déterminer l'estimé de l'état $x(t)$ en utilisant le filtre de Wiener en précisant les hypothèses nécessaires.

2- Déterminer l'estimé de l'état $x(t)$ en utilisant le filtre de Kalman en précisant les hypothèses nécessaire.

3- Conclure.

Exercice 2

On considère un mobile se déplaçant à l'aide d'un mouvement à la vitesse constante v. Soit $t_0=0$ l'instant initial et soit y_0 la position initiale exprimée en (km).
Pour estimer le vecteur de paramètre $\theta = [y_0\ v]^T$, on effectue des observations de la position du mobile toutes les minutes. Les observations sont supposées sans biais systématique, c'est-à-dire que l'erreur de mesure est supposée être un bruit blanc de moyenne nulle et de variance $0.01 km^2$

On suppose que le vecteur $\theta = [y_0\ v]^T$ est une variable aléatoire de moyenne nulle et de variance P_0 avec :

$$P_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Les mesures sont $y(1)=9km$, $y(2)=10.8$, $y(3)=12.1km$ et $y(4)=13.13km$.

1- Donner l'équation du modèle.

2- Mettre ce problème sou forme d'un problème d'estimations paramètres constants (y_0 et v).

3- Donner à l'aide des équations du filtre de Kalman les estimés de y_0 et v aux instants de mesures.

Exercice 3

Considérons le système stochastique discret suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0.25\,x_k + w_k \\ y_k = x_k + v_k \end{cases}$$

avec : w_k et v_k sont deux bruits blancs gaussiens de variance respectivement $q=1$ et $r=1$. Le spectre de covariance des signaux x_k et v_k sont :

$$S_{xx}(z) = \frac{-3.75z}{(z-0.25)(z-4)} \quad ; \quad S_{vv}(z) = 1$$

1- Déterminer l'estimé de l'état $x(k)$ en minimisant la variance de l'erreur par le filtre de Wiener en précisant les hypothèses nécessaires.

2- Déterminer l'estimé de l'état $x(k)$ en minimisant la variance de l'erreur par le filtre de Kalman Prédicteur en précisant les hypothèses nécessaires.

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k(I - K_k C_k)\hat{x}_{k/k-1} + B_k u_k + A_k K_k y_k$$

$$P_{k+1/k} = A_k(I - K_k C_k)P_{k/k-1}A_k^T + G_k Q_k G_k^T$$

$$K_k = P_{k/k-1}C_k^T\left[R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T\right]^{-1}$$

Epreuve de ....

Numero de la feuille double	Total des feuilles doubles remises

* Exercice 1 :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2x(t) + w(t) \\ y(t) = x(t) + v(t) \end{cases}$$

$\cdot\ S_{xx}(p) = \dfrac{1}{16-p^2}$, $S_{vv}(p) = 1$

$$H(p) = \frac{1}{S^{+}_{yy}(p)} \left[\frac{S_{xy}(p)}{S^{+}_{yy}(-p)} \right]_{+}$$

$$\Phi_{xy}(\tau) = E\left[x(t+\tau)\,y(t)\right] = E\left[x(t+\tau)\left(x(t)+v(t)\right)\right]$$
$$= E\left[x(t+\tau)\,x(t) + x(t+\tau)\,v(t)\right] = E\left[x(t+\tau)\,x(t)\right] + \underbrace{E\left[x(t+\tau)\,v(t)\right]}_{0}$$
$$= \Phi_{xx}(\tau)$$

$$S_{xy}(p) = \mathcal{L}_b\left(\Phi_{xy}(\tau)\right) = \mathcal{L}_b\left(\Phi_{xx}(\tau)\right) = S_{xx}(p) = \frac{1}{16-p^2}$$

$$\Phi_{yy}(\tau) = E\left[y(t+\tau)\,y(t)\right] = E\left[\left(x(t+\tau)+v(t+\tau)\right)\left(x(t)+v(t)\right)\right]$$
$$= E\left[x(t+\tau)\,x(t)\right] + \underbrace{E\left[x(t+\tau)\,v(t)\right]}_{0} + \underbrace{E\left[v(t+\tau)\,x(t)\right]}_{0} + E\left[v(t+\tau)\,v(t)\right]$$
$$= \Phi_{xx}(\tau) + \Phi_{vv}(\tau)$$

$$S_{yy}(p) = \mathcal{L}_b(\Phi_{yy}(\tau)) = \mathcal{L}_b(\Phi_{xx}(\tau)) + \mathcal{L}_b(\Phi_{w}(\tau)) = S_{xx}(p) + S_{w}(p)$$

$$S_{yy}(p) = \frac{1}{16-p^2} + 1 = \frac{17-p^2}{16-p^2}$$

$$S_{yy}(p) = S^+_{yy}(p)\, S^-_{yy}(p) = \frac{17-p^2}{16-p^2} = \frac{17-p^2}{(4-p)(4+p)} = \frac{(\sqrt{17}-p)(\sqrt{17}+p)}{(4-p)(4+p)}$$

$$S^+_{yy}(p) = \frac{\sqrt{17}+p}{4+p}, \quad S^-_{yy}(p) = \frac{\sqrt{17}-p}{4-p} = S^+_{yy}(-p)$$

$$\frac{S_{xy}(p)}{S^+_{yy}(-p)} = \frac{\frac{1}{(4+p)(4-p)}}{\frac{\sqrt{17}-p}{4-p}} = \frac{1}{(4+p)(\sqrt{17}-p)} = \frac{\alpha}{4+p} + \frac{\beta}{\sqrt{17}-p}$$

$$= \frac{\alpha\sqrt{17} - \alpha p + 4\beta + \beta p}{(4+p)(\sqrt{17}-p)} = \frac{\alpha\sqrt{17} + 4\beta + (\beta-\alpha)p}{(4+p)(\sqrt{17}-p)}$$

$$\begin{cases} \alpha\sqrt{17} + 4\beta = 1 \Rightarrow (4+\sqrt{17})\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{4+\sqrt{17}} \\ \beta - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \frac{S_{xy}}{S^+_{yy}(-p)} = \frac{\frac{1}{4+\sqrt{17}}}{4+p} + \frac{\frac{1}{4+\sqrt{17}}}{\sqrt{17}-p}, \quad \frac{S_{xy}(p)}{S^+_{yy}(-p)} = \left[\frac{S_{xy}(p)}{S^+_{yy}(-p)}\right]_+ + \left[\frac{S_{xy}(p)}{S^+_{yy}(-p)}\right]_-$$

$$\left[\frac{S_{xy}(p)}{S^+_{yy}(-p)}\right]_+ = \frac{1}{(4+p)(4+\sqrt{17})}, \quad \left[\frac{S_{xy}(p)}{S^+_{yy}(-p)}\right]_- = \frac{1}{(\sqrt{17}-p)(\sqrt{17}+4)}$$

$$H(p) = \frac{1}{S^+_{yy}(p)}\left[\frac{S_{xy}(p)}{S^+_{yy}(-p)}\right]_+ = \frac{4+p}{\sqrt{17}+p} \times \frac{1}{(4+p)(4+\sqrt{17})}$$

$$H(p) = \frac{1}{(\sqrt{17}+p)(4+\sqrt{17})}$$

* Exercice 3 :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0,25\, x_k + w_k \\ y_k = x_k + v_k \end{cases} \qquad H(z) = \frac{1}{S^+_{yy}(z)}\left[\frac{S_{xy}(z)}{S^+_{yy}(z^{-1})}\right]_+$$

$$\Phi_{xy}(j) = E[x(i+j)\, y(i)] = E[x(i+j)(x(i)+v(i))]$$
$$= E[x(i+j)\, x(i)] + E[x(i+j)\, v(i)] = \Phi_{xx}(j)$$

$$S_{xy}(z) = \mathcal{Z}_b(\Phi_{xy}(j)) = \mathcal{Z}_b(\Phi_{xx}(j)) = S_{xx}(z) = \frac{-3,75z}{(z-0,25)(z-4)}$$

$$\Phi_{yy}(j) = E[y(i+j)\, y(i)] = E[(x(i+j)+v(i+j))(x(i)+v(i))]$$
$$= E[x(i+j)\,x(i)] + \underbrace{E[x(i+j)\,v(i)]}_{0} + \underbrace{E[v(i+j)\,x(i)]}_{0} + E[v(i+j)\,v(i)]$$
$$= \Phi_{xx}(j) + \Phi_{vv}(j)$$

$$S_{yy}(z) = \mathcal{Z}_b(\Phi_{yy}(j)) = \mathcal{Z}_b(\Phi_{xx}(j)) + \mathcal{Z}_b(\Phi_{vv}(j))$$

$$= \frac{-3,75z}{(z-0,25)(z-4)} + 1 = \frac{-3,75z + (z-0,25)(z-4)}{(z-0,25)(z-4)}$$

$$= \frac{-3,75z + z^2 - 4,25z + 1}{(z-0,25)(z-4)} = \frac{z^2 - 8z + 1}{(z-0,25)(z-4)} =$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4 = 60 = (7,74)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-7,74}{2} = 0,13 \\ z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+7,74}{2} = 7,87 \end{cases}$$

$$S_{yy}(z) = \frac{z^2-8z+1}{(z-0,25)(z-4)} = \frac{(z-0,13)(z-7,87)}{(z-0,25)(z-4)} = S^+_{yy}(z) \cdot S^-_{yy}(z)$$

$$S^+_{yy}(z) = \frac{z-0,13}{z-0,25}, \quad S^-_{yy}(z) = \frac{z-7,78}{z-4} = S^+_{yy}(z^{-1})$$

$$\frac{S_{xy}(z)}{S^+_{yy}(z^{-1})} = \frac{\frac{-3,75z}{(z-0,25)(z-4)}}{\frac{z-7,78}{z-4}} = \frac{-3,75z}{(z-0,25)(z-7,78)} = \frac{\alpha}{z-0,25} + \frac{\beta}{z-7,78}$$

$$= \frac{\alpha z - 7,78\alpha + \beta z - 0,25\beta}{(z-0,25)(z-7,78)} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -3,75 \Rightarrow \beta = -3,75 - \alpha \\ -7,78\alpha - 0,25\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0,12 \\ -7,78\alpha - 0,25(-3,75-\alpha) = 0 \Rightarrow \beta = -3,87 \end{cases}$$

$$\frac{S_{xy}(z)}{S^+_{yy}(z^{-1})} = \frac{0,12}{z-0,25} + \frac{-3,87}{z-7,78} = \left[\frac{S_{xy}(z)}{S^+_{yy}(z^{-1})}\right]_+ + \left[\frac{S_{xy}(z)}{S^+_{yy}(z^{-1})}\right]_-$$

$$\hookrightarrow \left[\frac{S_{xy}(z)}{S^+_{yy}(z^{-1})}\right]_+ = \frac{0,12}{z-0,25}, \quad \left[\frac{S_{xy}(z)}{S^+_{yy}(z^{-1})}\right]_- = \frac{-3,87}{z-7,78}$$

$$H(z) = \frac{1}{S^+_{yy}(z)}\left[\frac{S_{xy}(z)}{S^+_{yy}(z^{-1})}\right]_+ = \frac{\cancel{z-0,25}}{z-0,13} \times \frac{0,12}{\cancel{z-0,25}} = \frac{0,12}{z-0,13}$$

2. filtre de Kalman :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 0,25x_k + w_k \\ y_k = x_k + v_k \end{cases}$$

$P_i = E[\tilde{x}_i \tilde{x}_i^T]$
$Q = E[w\, w^T]$
$R = E[v\, v^T]$

$A_k = 0,25$, $B_k = 0$, $C_k = 1$, $G_k = 1$, $R_k = r = 1$, $Q_k = q = 1$

$$\hat{x}_{k+1/k} = 0,25\left[1-K_k\right]\hat{x}_{k/k-1} + 0,25K_k y_k$$
$$P_{k+1/k} = 0,25\left[1-K_k\right]P_{k/k-1}\,0,25 + 1$$
$$K_k = P_{k/k-1}\left[1+P_{k/k+1}\right]^{-1}$$

régime permanent : $P_{k+1/k} = P_{k/k-1} = p = \text{cte}$

$$\begin{cases} p = 0,25\left[1-K_k\right]p\;0,25 + 1 = 0,0625p\left[1-K_k\right] + 1 \\ K_k = p(1+p)^{-1} = \dfrac{p}{1+p} \end{cases}$$

$$p = 0,0625p\left(1 - \frac{p}{1+p}\right) + 1$$

$$\Leftrightarrow p = 0,0625p\left(\frac{1+p-p}{1+p}\right) + 1 = \frac{0,0625p}{1+p} + 1$$

$$p = \frac{0,0625p + 1 + p}{1+p} \Rightarrow (1+p)p = 0,0625p + 1 + p$$

$$\Leftrightarrow \cancel{p} + p^2 = 0,0625p + 1 + \cancel{p} \Leftrightarrow p^2 - 0,0625p - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (0,0625)^2 + 4 = 4,003\ ;\ \underbrace{p_1 = -0,96 < 0,\ p_2 = 1,03 > 0}_{p \text{ est une matrice définie positive symétrique}}$$

Epreuve de ....

Numéro de la feuille double	Total des feuilles doubles remises

$$K_k = \frac{P}{1+P} = \frac{1,03}{1+1,03} = \frac{1,03}{2,03} = 0,507$$

$$\tilde{x}_{k+1/k} = 0,25\left[1-0,507\right]\hat{x}_{k/k-1} + 0,25\times 0,507\, y_k = 0,123\,\hat{x}_{k/k-1} + 0,126\, y_k$$

$$u(k+n) = z^n u(k), \quad u(k-n) = z^{-n} u(k)$$

$$\hookrightarrow z\,\hat{x}(k) = 0,123\,\hat{x}(k) + 0,126\, y(k)$$

$$\Leftrightarrow (z-0,123)\,\hat{x}(k) = 0,126\, y(k)$$

$$H(z)_{kalman} = \frac{\hat{x}(k)}{y(k)} = \frac{0,126}{z-0,123} \simeq H(z)_{wiener} = \frac{0,12}{z-0,13}$$

Exercice 4 :

$$\theta = g = cte \qquad \theta_{k+1} = \theta_k \qquad x = \frac{1}{2}gt^2 \mapsto x_k = \frac{1}{2}gk^2 = \frac{1}{2}\theta_k k^2$$

$$\hookrightarrow x_k = \frac{1}{2}k^2\theta_k \qquad y(t) = x(t) + e(t)$$

$$y_k = x_k + e_k = \frac{1}{2}k^2\theta_k + e_k = C_k\theta_k + e_k \quad \text{avec} \quad C_k = \frac{1}{2}k^2$$

$$\begin{cases} \theta_{k+1} = \theta_k \\ y_k = C_k\theta_k + e_k, \quad C_k = \frac{1}{2}k^2 \end{cases}$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k\left(y_k - C_k\hat{\theta}_{k-1}\right)$$
$$K_k = P_k + C_k^T\left[R_k + C_k P_{k-1} C_k^T\right]^{-1}$$
$$P_k = P_{k-1} - K_k C_k P_{k-1}$$

Exercise :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x & x_0 = m_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} \quad P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + v & T_e = 0{,}1 \text{ seconde} \quad E\left[v_k v_k^T\right] = 1 = q \end{array}\right.$$

Euler : $\dot{x} = \dfrac{x_{k+1} - x_k}{T_e} = A x_k \Leftrightarrow x_{k+1} - x_k = T_e A \times x_k \Rightarrow x_{k+1} = x_k + T_e A \times x_k$

$$\left\{\begin{array}{l} x_{k+1} = (I + A T_e)\, x_k = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) x_k \\ y_k = C_k x_k + v_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k \end{array}\right.$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k = A_k x_k + B_k u_k + G_k v_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k = C_k x_k + v_k \end{array}\right. \qquad B_k = 0,\ G_k = 0 \qquad C_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = x_0 - \hat{x}$$

$$\hat{x}_{0/0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\Big(1{,}2 - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}}_{=1}\Big) = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} 0{,}2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_{1/1} = \hat{x}_{1/0} + K_1\left(y_1 - C_1 \hat{x}_{1/0}\right), \quad \hat{x}_{1/0} = A_0 \hat{x}_{0/0} + B_0 u_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1{,}1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = P_{1/0} C_1^T \left(R_1 + C_1 P_{1/0} C_1^T\right)^{-1} \text{ avec : } P_{1/0} = A_0 P_{0/0} A_0^T + G_0 Q_0 G_0^T$$

$$\text{et } P_{0/0} = (I - K_0 C_0) P_{0/-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_{1/0} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}55 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } K_1 = \begin{bmatrix} 0{,}55 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 5 \end{bmatrix}$$

Suite exercice 1 : Kalman (continu)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -4x(t) + w(t) \\ y(t) = x(t) + v(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow A(t) = -4,\ B(t) = 0,\ C(t) = 1,\ G(t) = 1,\ R = r = 1,\ Q = q = 1$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)) \\ K(t) = P(t)C^T R^{-1} \\ \dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = -4\hat{x}(t) + K(t)(y(t) - \hat{x}(t)) \\ K(t) = P(t) \\ \dot{P}(t) = -4P(t) - 4P(t) + 1 - P^2(t) = 1 - 8P(t) - P^2(t) \end{cases}$$

en régime permanent : $P(t) = p = cte \rightarrow \dot{P}(t) = 0 \Rightarrow 1 - 8p - p^2 = 0 \Rightarrow p^2 + 8p - 1 = 0$

$\Delta = 8^2 - 4\times 1\times(-1) = 64 + 4 = 68 > 0 \Rightarrow p_1 = \frac{8+\sqrt{68}}{2} = 8,12 > 0,\ p_2 = \frac{8-\sqrt{68}}{2} = -0,12 < 0$

or $P(t)$ est une matrice définie positive symétrique donc : $p = 8,12$

$K = p = 8,12 \Rightarrow \dot{\hat{x}}(t) = -4\hat{x}(t) + 8,12(y(t) - \hat{x}(t)) \Leftrightarrow \dot{\hat{x}}(t) = -12,12\,\hat{x}(t) + 8,12\,y(t)$

TL $\hookrightarrow p\,\hat{x}(p) = -12,12\,\hat{x}(p) + 8,12\,y(p) \Rightarrow (p + 12,12)\,\hat{x}(p) = 8,12\,y(p)$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{\hat{x}(p)}{y(p)} = \frac{8,12}{p + 12,12}$$

$$\begin{bmatrix} 0,55 & 0,5 \\ 0,5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\left(1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,55 & 0,5 \\ 0,5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,55 \\ 0,5 \end{bmatrix}\left(1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,55 \\ 0,5 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,55 \\ 0,5 \end{bmatrix}(1 + 0,55)^{-1} = \frac{1}{1,55}\begin{bmatrix} 0,55 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,32 \end{bmatrix}$$