II - 3 - Modes transverses magnétiques : TM

Ces sont des modes caractérisés par $H_z = 0$
en faisant une étude semblable aux modes TE on trouve que

$$E_z(x,y,z) = E_{z_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_g z}$$

$$E_x(x,y,z) = -\frac{j\beta_g}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \; ; \; E_y = -\frac{j\beta_g}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}$$

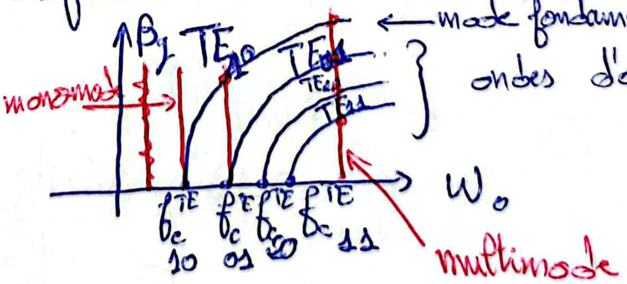
$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \; ; \; H_y = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_z}{H_x} = \frac{\beta_g}{\omega\varepsilon} \; ; \; k_{mn}^{TM} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \Rightarrow \exists \text{ une double}$$

infinité de mode TM.

Rq : Les mode TM_{0n} et TM_{m0} n'$\nexists$ pas

Finalement $\exists$ une double infinité de mode TE et de mode TM. dans le guide d'onde rectangulaire



Exercice : on suppose un guide rectangulaire, on a $a = 2b$
classer les 10 premier modes suivante leur ordres d'apparition.

Reponse :

$$k_{c_{mn}} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{2n}{a}\right)^2} = \frac{\pi}{a}\left(m^2 + 4n^2\right)^{1/2}$$

$$k_{c_{mn}} = \frac{2\pi f_{c_{mn}}}{v} \Rightarrow f_{c_{mn}} = \frac{v\, k_{c_{mn}}}{2\pi} \Rightarrow f_{c_{mn}} = \frac{v}{2\pi}\frac{\pi}{a}\sqrt{m^2 + 4n^2}$$

$$= \frac{v}{2a}\sqrt{m^2 + 4n^2}$$

mode fondamental ? ⇒ $m=1, n=0$

$f_{c_{10}}^{TE} = \frac{v}{2a}$; pour le reste on va calculer la fréquence normalisée $\frac{f_{c_{mn}}}{f_{c_{10}}^{TE}} = \sqrt{m^2+4n^2}$

mode	TE_{10}	TE_{20} TE_{01}	TE_{11} TM_{11}	TE_{21} TM_{21}	TE_{30}	TE_{31} TM_{31}
f_{mn}	1	2	2,236	2,828	3	3,605
$f_{c_{10}}$						

n \ m	0	1	2	
0	X	1	2	3
1	2	2,236	2,828	
2	4			
3				
4				

EX : Un guide rectangulaire rempli d'air dont les dimensions sont :

Ex2 $a = 5cm$ et $b = 2,5cm$ opère en mode dominant à la fréquence du générateur $f_0 = 4,5$ GHz

1°) a) classer les dix premiers modes possibles ~~Etu~~ dans ce guide.

b) Quel est ce mode dominant.

c) ~~Quel est ce cm~~ calculer la fréquence de coupure des modes dominant

2°) Déterminer λ_g

3°) Déterminer v_φ

Sol :

-1- a) voir ex: précedent air $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$; $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$

b) TE_{10} (Tant que $a > b$ on a TE_{10} est le mode dominant)

c) $f_{c_{10}}^{TE} = \frac{v}{2a}$, $v = c = 3.10^8$ $\frac{3.10^8}{2 \times 5.10^{-2}} = 0,3.10^{10} = 3.10^9 Hz$

$f_{c_{10}}^{TE} = 3.10^9 = 3.GHz$

2°) $\beta_g^{TE^2} = k_0^2 - k_{c_{mn}}^{TE\,2} \Rightarrow \beta_{g_{10}}^{TE} = \sqrt{k_0^2 - k_{c10}^{TE\,2}}$; $k_0 = \frac{w}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$

$k_0 = \frac{2\pi f_0}{v}$ rd/m ; $k_{c_{10}}^{TE} = \left(\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\right)_{(1,0)} = \frac{\pi}{a}$ rd/m $= 62,83$ $\boxed{rd/m}$

$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$; $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$; $\mu = \mu_r \mu_0$

$\beta_{g_{10}}^{TE} = \dots\dots$ rd/m

$\lambda_{g_{10}} = \frac{2\pi}{\beta_{g_{10}}^{TE}} = \boxed{0,08914 m}$ $\boxed{k_0 = 94,25 \text{ rd/m}}$

$\beta_g^{TE} = \sqrt{\left(\frac{2\pi f_0}{v}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$ $\beta_g^{TE} = \sqrt{\left(\frac{2\pi \times 4,5.10^9}{3.10^8}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{5.10^{-2}}\right)^2}$

$$v_\varphi = \frac{w}{\beta_g} = \frac{2\pi f_0}{\beta^{TE}_{g_{10}}} = \frac{9\,10^9 \times \pi}{70{,}25} = 40{,}25.10^7\ m/s$$
$$= 4{,}025.10^8\ m/s$$

Ex3

EX :

un guide rectangulaire rempli d'air avec $a = 4cm$ / $b = 2cm$ transporte une onde en mode TE_{10} avec la puissance $0{,}5$ Kw sachant que $f_0 = 15$ GHz

1°) Donner les expressions du champ emg

2°) calculer $\beta_{g_{10}}$

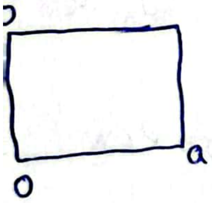
3°) Trouver l'expression de P en fonction de E_{10} amplitude du champ $\vec{E}$

4°) Déduire la valeur de E_{10}

Rappel : $P = Re\left(\iint_\sigma \frac{1}{2} (\vec{E}' \wedge \vec{H}'^{*}) d\vec{S}' \right)$ section du guide

mode TE : $H_z = H_{z_{mn}} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_g z}$

mode TM : $E_z = E_{z_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_g z}$



$$E_x = E_{x_{mn}} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_g z}$$
$$E_y = E_{y_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_g z}$$
$$H_x = H_{x_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_g z}$$
$$H_y = H_{y_{mn}} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_g z}$$

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = Z$$

$$Z_{TE} = \frac{w\mu}{\beta_g}$$

sol :

1°) pour notre cas : $H_z = H_{z_{10}} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_g z}$

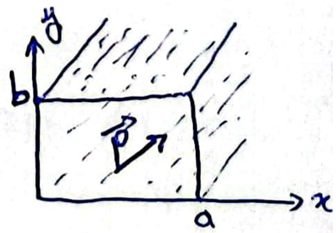
$E_x = 0$

$E_y = E_{10} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_g z}$

$E_z = 0$

$H_x = \frac{\beta_g}{w\mu} E_{10} \sin\frac{\pi}{a}x \, e^{-j\beta_g z}$

$H_y = 0$



2°) $\beta_{g_{10}} = \sqrt{k_0^2 - k_{c_{10}}^2} = 304{,}2$

3°) $\vec{E} = E_y \vec{j}$

$\vec{H} = H_x \vec{i} + H_z \vec{k}$

$$\frac{1}{2} \vec{E} \wedge \vec{H}^{*} = \frac{1}{2}\left[E_y \vec{j} \wedge (H_x^{*} \vec{i} + H_z^{*} \vec{k}) \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[E_y H_x^*(\underbrace{\vec{j}\wedge\vec{i}}_{-\vec{k}}) + E_y H_z^*(\underbrace{\vec{j}\wedge\vec{k}}_{\vec{i}})\right] = \frac{1}{2}\left[-E_y H_x^* \vec{k} + E_y H_z^* \vec{i}\right]$$

$$d\vec{S} = dx\,dy\,\vec{k}$$

$$\frac{1}{2}(\vec{E}\wedge\vec{H}^*)\,d\vec{S} = \frac{1}{2}\left[-E_y H_x^* \vec{k} + \underbrace{E_y H_z^* \vec{i}\,]\,dx\,dy\,\vec{k}}_{0}\right.$$

$$= -\frac{1}{2} E_y H_x^*$$

$$E_y = E_{10} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_g z}$$

$$H_x = \frac{-\beta_g}{\omega\mu} E_{10} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_g z}$$

$$\frac{1}{2} E_y H_x^* = E_{10} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_g z}$$

$$\frac{1}{2} E_y H_x^* = \frac{1}{2} E_{10} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-j\beta_g z} (-) \frac{\beta_g}{\omega\mu} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{j\beta_g z}$$

$$P = -Re \int_0^a\int_0^b \frac{1}{2}\left(\frac{-\beta_g}{\omega\mu}\right)(E_{10})^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\beta_g}{\omega\mu}(E_{10})^2 \int_0^b dy \int_0^a \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}\right) dx \quad \text{or} \quad \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right)}{2}$$

$$\int_0^a \sin^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \int_0^a \frac{1-\cos\left(\frac{2m\pi x}{a}\right)}{2} dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin\left(\frac{2m\pi}{a}x\right)}{\frac{2m}{a}}\right]_0^a = \frac{1}{2}a$$

4°) Déduire $|E_{10}|$.

D'après les données de l'ex3 : on a $P = 0{,}5\,kW$; $a = 4\,cm$; $b = 2\,cm$

$\omega = 2\pi f_0$; $f_0 = 15\,GHz$; $\mu = 4\pi.10^{-7}\,H/m$; $\beta_g = 304{,}2\,rd/m$

$$|E_{10}|^2 = \frac{4\omega\mu}{\beta_g ab} = \frac{4\times 2\pi\times 15.10^9\times 4\pi.10^{-7}}{304{,}2\times 4.10^{-2}\times 2\times 10^{-2}} = 9{,}733.10^8\ U.S.I$$

$$|E_{10}| = 31{,}2\ kV/m$$