<u>Exemple</u> : (E) : $3u(x) - 2u'(x) + u''(x) = 3x$ Determiner s'il s'agit d'une EP
EDO

$(E) \Leftrightarrow F(x, u(x), u'(x), u''(x)) = 0$

avec $F(x, y_0, y_1, y_2) = 3y_0 - 2y_1 + y_2 - 3x = 0$

$\Rightarrow$ (E) est une EDO d'ordre 2.

<u>Mini Project</u> : - Eq. mathématique (modélisation d'une expérience)
- Résolution de l'eq
- Solution de l'eq

Q : mq l'eq est linéaire, homogène et à coeff cte

si la fct nulle est une solution

$ay + by'' = 0$

Application Partielle

<u>Déf</u> : $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_1(x) = f(x, y_0)$

on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_1'(x_0)$

$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_2(y) = f(x_0, y)$

on a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_2'(y_0)$

Etude de fct : 1/ Domaine de définition

Exmpl p. 13

Exercice 1.2.3 (p. 13)

$f(x,y) = x^2+y^3$, $D_f = \mathbb{R}^2$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = ?$ on pose $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_1(x) = f(x, y_0)$

$f_1'(x) = 2x$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_1'(x_0) = 2x_0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = ?$ on pose $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto f_2(y) = f(x_0, y)$

$f_2'(y) = 3y^2$, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f_2'(y_0) = 3y_0^2$.

Exercice 1.2.4

$f(x,y) = x^2+y^3$. $D_f = \mathbb{R}^2$

Soit : $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0)\right) = f_1''(x_0)$, on a $f_1' = 2x_0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x_0,y_0) = 2$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}(f(x_0,y_0))\right) = f_2''(y_0)$, on a $f_2' = 3y_0^2 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x_0,y_0) = 6y_0$

$\frac{\partial^2}{\partial x y} f(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0)\right)$

Soit $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_3(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) = 3y_0^2 \rightarrow f_3'(x) = 0$

on a : $\frac{\partial^2}{\partial xy} f(x_0,y_0) = f_3'(x_0) = 0$

$\frac{\partial^2}{\partial y x} f(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$

Soit $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto f_4(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y) = 2x_0 \rightarrow f_4'(y) = 0$

on a : $\frac{\partial^2 f}{\partial y x}(x_0,y_0) = f_4'(y_0) = 0$

On remarque que $\frac{\partial^2}{\partial xy}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2}{\partial yx}(x_0,y_0)$ car f est de classe $\mathcal{C}^2$

↳ ses dérivés partielles existent et sont continues

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y x} f(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y x}(x_0, y_0)\right)$$

Soit $f_s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f_s(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y x}(x, y_0)$ $\Rightarrow f_s'(x) = 0$

$$\frac{\partial^3}{\partial x y x} f(x_0, y_0) = f_s'(x_0) = 0$$

Page . 14 :

* Eq de transport : (E_1) : $\partial_t u(t,x) + c\,\partial_x u(t,x) = 0$

on pose $P_1 : u \longrightarrow \partial_t u + c\partial_x u$

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, u, v deux ~~vecteurs~~ ~~plr~~ solut° de (E_1)

$P_1(\alpha u + \beta v) = \partial_t(\alpha u + \beta v) + c\,\partial_x(\alpha u + \beta v)$

$= \alpha \partial_t u + \beta \partial_t v + \alpha c \partial_x u + \beta c \partial_x v$

$= \alpha P_1(u) + \beta P_1(v)$ $\Rightarrow$ P_1 est linéaire $\Rightarrow$ (E_1) est linéaire

* Eq d'onde de choc : (E_2) : $\partial_t u(t,x) + u(t,x)\ \partial_x u(t,x) = 0$

on pose $P_2 : u \longrightarrow \partial_t u + u\partial_x u$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, u, v deux solut° de (E_2)

$P_2(\alpha u + \beta v) = \partial_t(\alpha u + \beta v) + (\alpha u + \beta v)\,\partial_x(\alpha u + \beta v)$

$= \alpha \partial_t u + \beta \partial_t v + \alpha^2 u \partial_x u + \alpha\beta \partial_x v + \beta v \alpha \partial_x u + \beta^2 v \partial_x v$

~~$\neq \alpha P_2 + \beta$~~

$\neq \alpha P_2(u) + \beta P_2(v)$ $\Rightarrow$ P_2 n'est pas linéaire $\Rightarrow (E_2)$ n'est pas linéaire

(E) : homogène linéaire $\longrightarrow$ principe de superposition

(E) : linéaire non homogène
u est solut° de (E)
v est solut° de (E_H)
$\Big\}$ $u + v$ solution de (E)

CamScanner

Exemple 1 (p. 15)

(E_2) : $\partial^2_{xx} u(x,y) = 0 \iff \partial_x(\partial_x u(x,y)) = 0$

(6 on pose $v(x,y) = \partial_x(x,y)$

(E_2) : $\partial_x v(x,y) = 0 \xrightarrow[\text{primitive}]{} v(x,y) = C(y)$, avec C est une fct.

$\iff \partial_x u(x,y) = C(y) \xrightarrow[\text{primitive}]{} u(x,y) = C(y) + D(y)$, avec D est une fct.

on ne peut pas montrer l'unicité de la solut° que si on a l'expression des fct $C(y)$ et $D(y)$ contrairement aux EDO où on peut le savoir avec des conditions initiales

Exemple 2 (p. 15)

(E_2) : $\partial^2_{xx} u(x,y) + u(x,y) = 0$

on pose : $v(x) = u(x,y)$

(((E_2) : $v'' + v = 0$

Exemple 3 (p. 16)

(E) : $\partial_{xy} u(x,y) = 0 \overset{\int dx}{\iff} \partial_y u(x,y) = C(y)$ $\Big\}$ C une fct qui

Problème de Cauchy : il s'agit d'une EDO homogène linéaire à coeff cte avec conditions initiales → Tout ~~P~~ problème de cauchy admet une unique solution.

1.5.1 Equations Différentilles

((

2/ (E) : $u'(x) - u^2(x) = 0$, on a $u(x) = 0, \forall x$ est une solution de (E)

on suppose que $u(x) \neq 0$, $\forall x$

$$(E) \iff u'(x) = u^2(x) \iff \frac{u'(x)}{u^2(x)} = 1 \iff \int \frac{u'(x)}{u^2(x)}\,dx = \int 1\,dx + C$$

$$\iff -\frac{1}{u(x)} = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\iff u(x) = \frac{-1}{x+C}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-C\}$$

Non, toute solution de (E) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-C\}$, $C \in \mathbb{R}$.

(4

1.5.2 Dérivées Partielles

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que u est de classe $\mathcal{C}^2$

$u(x,y) = x^3 y + e^{xy^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = ?$

on pose $f_1 \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_1(x) = u(x, y_0) = x^3 y_0 + e^{x y_0^2}$

$f_1'(x) = 3x^2 y_0 + y_0^2 e^{x y_0^2}$, on a $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = f_1'(x_0) = 3x_0^2 y + y_0 e^{x_0 y_0^2}$

$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = ?$

on pose $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto f_2(y) = u(x_0, y) = x_0^3 y + 2 x_0 y e^{x_0 y^2}$

$f_2'(y) = x_0^3 + 2x_0 y e^{x_0 y^2}$, on a : $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = f_2'(y_0) = x_0^3 y_0 + 2x_0 y_0 e^{x_0 y_0^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) = ?$

on a : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) = f_1''(x_0)$, on a : $f_1''(x) = 6xy_0 + y_0^4 e^{x y_0^2}$.

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 6x_0 y_0 + y_0^4 e^{x_0 y_0^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) = ?$

on a : $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) = f_2''(y_0)$, on a : $f_2''(y) = 2x_0 e^{x_0 y^2} + 4x_0^2 y^2 e^{x_0 y^2}$

$= 2x_0 (1 + 2x_0 y^2) e^{x_0 y^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 2x_0(1 + 2x_0 y_0^2) e^{x_0 y^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial xy}(x, y) = ? = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y_0)\right)$

on pose $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f_3(x) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y_0) = x^3 + 2xy_0 e^{x y_0^2}$

on a $\frac{\partial^2 u}{\partial xy}(x_0, y_0) = f_3'(x_0)$, $f_3'(x) = 3x^2 + 2y_0 e^{x y_0^2} + 2x y_0^3 e^{x y_0^2}$

$= 3x^2 + 2y_0 (1 + x y_0^2) e^{x y_0^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial xy}(x_0, y_0) = 3x_0^2 + 2y_0(1 + x_0 y_0^2) e^{x_0 y_0^2}$

1.5.3 EDP

1) $u(t,x) = f(t) + g(x)$, f et g sont deux fcts de classe $\mathcal{C}^2$

mq u est une solution de (E) : $\partial t \, \partial x \, u(t,x) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$

on a : $\partial x \, u(t,x) = g'(x)$ et $\partial t \, \partial x \, u(t,x) = 0$

$\Rightarrow$ u est une solution de (E)

3) (E) : $\partial_y^2 \, u(x,y) = 1$

~~on pose ...~~

on pose $v(x,y) = \partial_y \, u(x,y)$

$(E) \iff \partial_y v(x,y) = 1 \underset{\int dy}{\iff} v(x,y) = y + C(x)$, C fct quelconque

$\iff \partial_y u(x,y) = y + C(x) \underset{\int dy}{\iff} u(x,y) = \frac{y^2}{2} + C(x)\,y + D(x)$, D fct quelconque

Pour avoir un problème bien posé, il suffit d'ajouter des conditions physiques pour l'EDP.

Par exemple, $\begin{cases} \text{cond. régularité} \\ \text{cond. du comportement à l'infini} \end{cases}$

4) $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$(E) : \partial_{xx}^2 u(x,y) + \partial_{yy}^2 u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

mq : u est une solut° de (E)

on a : $\partial_x u(x,y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\partial_{xx}^2 u(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

on a : $\partial_y u(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\partial_{yy}^2 u(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

on a : $\partial_{xx}^2 u(x,y) + \partial_{yy}^2 u(x,y) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\Rightarrow$ u est une solution de (E)

$(E) : y'(x) - y(x) = (x+1)e^x$ $\qquad y_H(x) = \lambda e^{-\int \frac{b}{a} dx}$

$\to (E_H) : y'(x) - y(x) = 0$, on a : $y_H(x) = \lambda e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

y_p : ? $\to$ variation de la constante :

$y_p(x) = \lambda(x) e^x$ une solution de (E)

$y_p'(x) = \lambda'(x) e^x + \lambda(x) e^x$

$(E) \iff y_p' - y_p = (x+1)e^x \iff \lambda'(x) e^x + \lambda(x) e^x - \lambda(x) e^x = (x+1)e^x$

$\Rightarrow \lambda'(x) = x+1 \leadsto \lambda(x) = \frac{x^2}{2} + x + C \Rightarrow y_p(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x$

on a : $y_G(x) = y_H(x) + y_p(x) = \lambda e^x + \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y_G(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x + \lambda\right) e^x, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}}$$

6/ $4y'' + 4y' + 5y = e^{-3/2} \sin(x)$

7/ $(E) : y'' - 3y' + 2y = 4x e^x$

$(E_H) : y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0$

$(E_c) : r^2 - 3r + 2 = 0 \leadsto \Delta = 9 - 8 = 1$ $\begin{cases} r_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \\ r_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow y_H(x) = A e^{2x} + B e^x$, $A, B \in \mathbb{R}$

$y_p = ?$ (voir Tab EDO 2)

on pose $y_p(x) = (ax^2 + bx + c) e^x$ est une solution de (E)

$y_p'(x) = (2ax + b) e^x + (ax^2 + bx + c) e^x = (ax^2 + (2a+b)x + b + c) e^x$

$y_p''(x) = (2ax + (2a+b)) e^x + (ax^2 + (2a+b)x + b + c) e^x$

$= (ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b+c)) e^x$

$(E) : (ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b+c)) e^x - 3(ax^2 + (2a+b) + b + c) e^x + 2(ax^2 + bx + c)$

$\times e^x = 4x e^x$

$\iff ax^2 - 3ax^2 + 2ax^2 + (4a + b - 6a - 3b + 2b)x + 2a + 2b + c - 3b - 3c + b$

$-2ax + 2a - b = 4x$

par identification : $\begin{cases} -2a = 4 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2a = -4 \end{cases}$

$\Rightarrow y_p(x) = -2(x^2+2x)e^x$, on a $y_G(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^{2x} - 2\left(x^2+2x-\frac{B}{2}\right)e^x$

$A, B \in \mathbb{R}$.

3) f de classe $\mathcal{C}^1$: $u(t,x) = f\left(\frac{x}{t}\right)$; $\forall t > 0$

(E) : $t.\partial_t u(t,x) + x\,\partial_x u(t,x) = 0$

on a : $\begin{cases} \partial_t u(t,x) = -\frac{x}{t^2} f'\left(\frac{x}{t}\right) \\ \partial_x u(t,x) = \frac{1}{t} f'\left(\frac{x}{t}\right) \end{cases}$ $\Rightarrow t\,\partial_t u(t,x) + x\,\partial_x u(t,x) = t\left(\frac{-x}{t^2}\right) f'\left(\frac{x}{t}\right) + \left(\frac{x}{t}\right) f'\left(\frac{x}{t}\right) = 0$

$\Rightarrow$ u est une solution de (E).

3) $(E) \begin{cases} y'(x) + y(x) = 2\sin(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(E_h) : $y'(x) + y(x) = 0$, on a : $y_h(x) = \lambda . e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

méthode de la variation de constante :

Soit $y_p(x) = \lambda(x)\, e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

(E) . $y_p'(x) + y_p(x) = 2\sin(x) \Leftrightarrow \lambda'(x)\, e^{-x} - \lambda(x) e^{-x} + \lambda(x)\, e^{-x} = 2\sin x$

$\Rightarrow \lambda'(x) = 2\, e^x \sin(x) \Rightarrow \lambda(x) = 2\int \sin x\, e^x dx$

on pose $I = \int \sin x\, e^x dx$

$\begin{cases} U(x) = \sin(x) \longrightarrow U'(x) = \cos x \\ V'(x) = e^x \longrightarrow V(x) = e^x \end{cases}$ $\Rightarrow I = \left[\sin x\, e^x\right] - \int \cos x\, e^x dx$

on pose $\begin{cases} U(x) = \cos x \longrightarrow U'(x) = -\sin x \\ V'(x) = e^x \longrightarrow V(x) = e^x \end{cases}$ $\Rightarrow I = \sin x\, e^x - \left(\left[\cos x\, e^x\right] + \int \sin x\, e^x dx\right)$

$\Rightarrow I = (\sin x - \cos x)\, e^x - I \Rightarrow 2I = (\sin x - \cos x)\, e^x$

$\Rightarrow I = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)\, e^x \Rightarrow \lambda(x) = (\sin x - \cos x) e^x$

d'où $y_p(x) = \sin x - \cos x$

$y_f(x) = y_h(x) + y_p(x) = \lambda\, e^{-x} + \sin x - \cos x$; $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

comme $y(0) = 1 \rightarrow \lambda + \sin(0) - \cos(0) = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = 2\, e^{-x} + \sin x - \cos x}$, $x \in \mathbb{R}$.

$(E) : 4y'' + 4y' + 5y = e^{-x/2} \cdot \sin x$ $\quad \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ w = 1 \end{cases}$

$(E_h) : 4y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 0$

$(E_c) : 4r^2 + 4r + 5 = 0$, $\Delta = 16 - 80 = -64 = (8i)^2$ $\begin{cases} r_1 = \frac{-4+8i}{8} = -\frac{1}{2} + i \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{2} \\ r_2 = -\frac{1}{2} - i \Rightarrow \beta = 1 \end{cases}$

$y_h(x) = \lambda \, e^{-\frac{1}{2}x} (A \cos x + B \sin x)$, $A, B \in \mathbb{R}$

$y_p = ?$ $\rightarrow$ on a : $\underbrace{-\frac{1}{2}}_{k} + \underbrace{i}_{w}$ est une solution de (E_c) (formule tableau 2)

$\rightarrow y_p(x) = x \, e^{-\frac{1}{2}x} (a \cos x + b \sin x)$, $a, b \in \mathbb{R}$ est une solution de (E)

⋮

par identification : $a = \dots$
$b = \dots$

$\Rightarrow y(x) = e^{-x/2} \left(A \cos x + \left(B + \frac{1}{2}x\right) \sin x\right)$