PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Rim Nasfi

Année Universitaire 2020-2021

Chapter 1

Introduction aux probabilités et analyse combinatoire

1.1 Introduction

Les probabilités vont nous servir à modéliser une expérience aléatoire, c'est-à-dire un phénomène dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude, et pour lequel on décide que le dénouement sera le fait du hasard.
Exemples :

- l'enfant à naître sera une fille,
- l'équipe de l'EST va battre l'ESS lors du prochain match qui les opposera,
- le dé va faire un nombre pair.

La première tâche qui vous attend est de décrire les difiérentes issues possibles de cette expérience aléatoire. Puis on cherche à associer à chacune de ces éventualités un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance qu'elles ont de se réaliser. Comment interpréter/fixer ce nombre, appelé probabilité ? Il existe plusieurs manières de voir.
- **Proportion** : On lance un dé. Quelle est la probabilité de A="obtenir un chiffre pair"? Chaque face du dé a la même chance, et il y en a 6. Quant aux chiffres pairs, ils sont 3. D'où, intuitivement, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- **Fréquence** : Un enfant est attendu. Quelle est la probabilité que ce soit une fille? On a observé un grand nombre de naissances. Notons k_n le nombre de filles nées en observant n naissances. Alors $P(fille) = \lim_{n \to +\infty} \frac{k_n}{n}$, mais cette limite a-t-elle un sens?
- **Opinion** : Quelle est la probabilité pour que l'équipe de Tunisie gagne la coupe d'Afrique des nations ? pour que l'EST soit championne de Tunisie? Dans ce cas, on ne peut pas rejouer le même match dans les mêmes conditions plusieurs fois. On peut considérer les qualités des joueurs, des entraîneurs, les résultats de la saison... Mais le choix de la probabilité est forcément subjectif.

1.2 Espace des possibles, événements

On étudie une expérience aléatoire. L'espace des possibles ou univers décrit tous les résultats possibles de l'expérience. Chacun de ces résultats est appelé événement élémentaire.

On note souvent l'espace des possibles Ω et un résultat élémentaire ω. Un événement est un sous-ensemble de Ω, ou une réunion d'événements élémentaires. On dit qu'un événement est réalisé si l'un des événements élémentaires qui le constitue est réalisé. Les événements sont des ensembles, représentés souvent par des lettres capitales.

Exemples :

- Match EST-ESS: $\Omega = \{\text{EST gagne, ESS gagne, match nul}\}$. Donc Ω est composé de trois événements élémentaires. On peut considérer par exemple l'événement qui correspond à "ESS ne gagne pas".
- On lance un dé : $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$. On peut s'intéresser à l'événement A="obtenir un chiffre pair", ie $A = \{2, 4, 6\}$.
- On lance deux dés : $\Omega = \{1, ..., 6\} \times \{1, ..., 6\} = \{(i; j) : 1 \leq i \leq 6; 1 \leq j \leq 6\}$. Ici, un événement élémentaire ω est un couple $(i; j)$, où i représente le résultat du premier dé et j celui du second.
- On lance trois fois une pièce de monnaie. Les événements élémentaires vont décrire le plus précisément possible le résultat de cette expérience. Donc un événement élémentaire ω est un triplet $(r_1; r_2; r_3)$ qui donne les résultats des trois lancers (dans l'ordre). L'événement B:"on obtient pile au deuxième lancer" est $B = \{(f, p, f), (f, p, p), (p, p, f), (p, p, p)\}$. L'événement B est réalisé si on obtient l'un des événements élémentaires listés ci-avant. Il n'est parfois pas nécessaire de connaître tous ces détails. On pourra choisir ω représente le nombre de "face" obtenus. Alors, $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$. Le modèle est beaucoup plus simple, mais ne permet pas de décrire des événements tels que B.

Il existe un vocabulaire propre aux événements, différent du vocabulaire ensembliste.

notations	vocabulaire ensembliste	vocabulaire probabiliste
Ω	ensemble plein	événement certain
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
ω	élément de Ω	événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^c ou $\overline{A}$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

1.3 Probabilité

On se limite dans ce cours à étudier les univers dénombrables. La probabilité d'un événement est une valeur numérique qui représente la proportion de fois où l'événement va se réaliser, quand on répète l'expérience dans des conditions identiques. On peut déduire de cette définition qu'une probabilité doit être entre 0 et 1 et que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités de chacun des événements élémentaires qui le constituent. Enfin, la somme des probabilités de tous les éléments de Ω est 1.
Exemple :
soit $\Omega = \{0, 1, 2\}$. Construisons $\mathfrak{P}(\Omega)$.

$$\mathfrak{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \Omega\}$$

Définition 1.1. *Une probabilité est une application sur $\mathfrak{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω, telle que :*
$\star$ $0 \leq P(A) \leq 1$, *pour tout événement* $A \subset \Omega$.
$\star$ $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$, *pour tout événement* A.
$\star$ $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$.

Proposition 1.1. *Soient A et B deux événements.*

1. *Si A et B sont incompatibles, alors* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

3. $P(\emptyset) = 0$.

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Proof. Exercice. □

Rappelons une définition plus générale de probabilité, valable pour des espaces des possibles non dénombrables.

Définition 1.2. *Soit une expérience aléatoire et Ω l'espace des possibles associé. Une probabilité sur Ω est une application, définie sur l'ensemble des événements, qui vérifie :*

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, *pour tout événement* A.

2. *Pour toute suite d'événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, deux à deux incompatibles,*

$$P\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\Big) = \sum_{i \in \mathbb{N}} P(A_i).$$

3. $P(\Omega) = 1$.

Remarque : Les événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, si pour tous $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
Exemple : probabilité uniforme
Soit Ω un ensemble fini. Il arrive, comme quand on lance un dé équilibré, que les événements élémentaires ont tous la même probabilité. On parle alors d'événements

élémentaires équiprobables. Notons p la probabilité de chaque événement élémentaire. Alors

$$1 = P(\Omega) = \sum_{w\in\Omega} P(\omega) = \sum_{w\in\Omega} p = card(\Omega) \times p.$$

D'où $p = P(\omega) = \dfrac{1}{card(\Omega)}$, pour tout ω. La probabilité ainsi définie sur l'ensemble Ω s'appelle probabilité uniforme. La probabilité d'un événement A se calcule facilement :

$$P(A) = \sum_{w\in\Omega} P(\omega) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}.$$

1.4 Analyse combinatoire

Définition 1.3. ⋆ *L'analyse combinatoire est un ensemble de formules qui ont pour but de dénombrer les différentes dispostions que l'on peut former à partir des éléments d'un ensemble fini.*
⋆ *Soit A un ensemble fini. Le cardinal de A, noté $|A|$, est le nombre d'éléments que contient A.*

Proposition 1.2. *Soient A et B deux ensembles finis, alors*

1. *(Additivité) si A et B sont disjoints, on a $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

2. *(Inclusion-exclusion) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.*

3. *(Multiplicativité) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.*

4. *Si A est un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de suites de longueur r constituées d'éléments de A est n^r.*

Définition 1.4. *Soit A un ensemble fini. Une permutation de A est une manière d'ordonner, d'arranger les éléments de A.*

Théorème 1.1. *Il y a $n!$ permutations d'un ensemble de cardinal n.*

Preuve : On utilise le principe du dénombrement.

Théorème 1.2. *Soient n objets distinguables. Le nombre de permutations de r objets, pris parmi les n objets, est*

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

On dit aussi que c'est un arrangement sans répétition de r objets pris parmi n.

Preuve : pour la première place, il y a n objets possibles,
pour la seconde, $(n-1)$ objets possibles,
...
pour la dernière, $(n-r+1)$ objets possibles.
Au total, $n(n-1)...(n-r+1)$ possibilités, par le principe du dénombrement.
Exemple : Dans une organisation, deux postes différents doivent être comblés. Cinq personnes ont posé leur condidature. De combien de façons différentes peut-on attribuer ces deux postes P_1 et P_2?

Théorème 1.3. *Le nombre de manières de choisir p éléments parmi n (sans tenir compte de l'ordre) est*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

On dit aussi que c'est le nombre de parties à p éléments pris parmi n éléments ou des combinaisons sans répétition de p éléments pris parmi n.

Preuve : Exercice.

Proposition 1.3. *1.* $C_n^p = C_n^{n-p}$.

2. $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$.

3. $(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p y^{n-p}$.

Théorème 1.4. *On considère n objets, parmi lesquels n_1 sont indistinguables, n_2 sont indistinguables,..., n_r sont aussi indistinguables. Le nombre de permutations différentes est*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$$

Exemple : Soit un ensemble$A = \{a, b, c, d\}$, on cherche tous les sous-ensembles de cardianalité 2 qu'on peut construire à partir de l'ensemble A.

Tirage avec remise

On dispose d'une population de n objets, par exemple des boules numérotées de 1 à n dans une urne. On effectue un tirage avec remise de r boules parmi les n boules : on pioche une boule, on note son numéro, on la remet dans l'urne avant de repiocher la boule suivante, et ainsi de suite. On a n possibilités pour la première boule tirée, n pour la seconde... Finalement, on a n^r tirages différents.

Tirage sans remise

On tire toujours r boules parmi n, mais sans remise : on ne replace pas la boule dans l'urne avant de tirer la suivante. Ainsi, on a n possibilités pour la première boule tirée, $n-1$ pour la seconde... Finalement, on a A_n^r tirages différents.

Tirage exhaustif

Cette fois, on tire r boules d'un coup et on se retrouve avec un "tas" de r boules devant soi. Le nombre de tirages différents est C_n^r.

Exercice 1 : Combien y-a-t-il de nombres de deux chiffres formés sans répétition à partir de 3 chiffres $\{3, 4, 6\}$ Combien d'entre eux sont divisibles par 2.

Exercice 2 : Dans une association de 20 membres, dont 12 hommes et 8 femmes.

1. Combien y-t-il de façon de former un bureau: président/secrétaire?
2. Combien y-t-il de façon de former une commission de deux membres?

1.5 Probabilités conditionnelles

Définition 1.5. *Etant donnés deux événements A et B, avec $P(A) > 0$. D'une maniére générale, il est possible de définir la probabilité de A sachant qu'on possède une certaine information représentée par B. Cette probabilité conditionnelle, notée $P(A|B)$,* *sera représentée formellement de la manière suivante :*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

La probabilité de deux événements A et B est égale à

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

. De plus, la probabilité conditionnelle sachant A, $P(.|A)$, est une nouvelle probabilité et possède donc toutes les propriétés d'une probabilité.

Propriété 1.1. *1. $A \longmapsto P(A|B)$ est une probabilité .*

2. Pour tout événement A, on a $0 \leq P(A|B) \leq 1$.

3. On a pour l' événement certain et pour l'événement impossible :

$$P(\Omega|B) = 1, \qquad P(\emptyset|B) = 0.$$

4. Quelques soient les événements A et C, on a

$$P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B).$$

5. Pour tout événement A, on a $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$.

6. Si A implique C, on a $P(A|B) \leq P(C|B)$.

Exemple : Une urne contient r boules rouges et v boules vertes. On en tire deux, l'une après l'autre (sans remise). Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ? Choisissons Ω qui décrit les résultats de l'expérience précisément.

$$\Omega = \{rouge, verte\} \times \{rouge, verte\}.$$

Un événement élémentaire est un couple (x, y) où x est la couleur de la première boule tirée et y la couleur de la seconde. Soit A l'événement "la première boule est rouge" et B l'événement "la seconde boule est rouge".

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{r-1}{r+v-1} \cdot \frac{r}{r+v}.$$

Exercice d'application 1 :
Les fondations d'un grand édifice peuvent se déplacer soit à cause d'une incapacité des fondations à supporter la charge, soit à cause d'un tassement successif du sol. Identifions respectivement ces événements par A et B. On sait que A peut se réaliser 2 fois sur 1000 et que B peut se réaliser 9 fois sur 1000. D'autre part, il y a une chance sur 10 pour que les fondations soient incapables de supporter la charge sachant qu'il y a tassement excessif du sol.

1. Précisez les probabilités suivantes: $P(A)$, $P(B)$, $P(A|B)$.

2. Calculer la probabilité de l'événement D=" les fondations se déplacent".

Exercice d'application 2:
Chez l'entreprise Electropack, on a noté, en se basant sur une évaluation de plusieurs années, qu'un dispositif électronique complexe, installé sur une chaîne d'empaquetage a une probabilité de 0.2 de tomber en panne. Lorsque ce dispositif tombe en panne, la probabilité d'être obligé d'arrêter complètement la chaîne d'empaquetage est de 0.5. Notons par $B|A$: "arrêt complet de la chaîne d'empaquetage étant donné une panne dans le dispositif électronique".

1. Quelle est la probabilité de $B|A$?

2. Quelle est la probabilité d'observer que le dispositif tombe en panne et que la chaˆîne d'empaquetage soit complètement arrêtée?

Proposition 1.4 (Formule des probabilités totales généralisée)**.** *On considère un événement A, et d'autre part des événements $B_1, ..., B_r$ qui forment une partition de Ω. On suppose connues toutes les probabilités a priori $P(B_i)$ qui doivent toutes être non nulles, ainsi que les probabilités conditionnelles $P(A|B_i)$. Alors*

$$P(A) = \sum_{j=1}^{r} P(A|B_j)P(B_j).$$

1.6 Probabilité de cause : Formule de Bayes

Soit une expérience aléatoire composée de deux étapes successives :
Étape 1 : On obtient un groupe d'événements incompatibles E_1, E_2 ,..., E_n et à chacun de ces événements on a leurs probabilités $P(E_1)$, $P(E_2)$,...,$P(E_n)$.
Étape 2 : On obtient un événement A issu de groupe d'événements précédents, pour lequel on connait la probabilité conditionnelle $P(A|E_1)$, $P(A|E_2)$..., $P(A|E_n)$. On demande alors de calculer la probabilité $P(E_i|A)$ c.à.d les probabilités de diverses causes de A sachant que A est réalisé

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i).P(A|E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)}$$

Exemple : Dans une société on a 20 employés qui sont diplômés en gestion, parmi ceux ci 70% ont des postes de cadres et 80 employés qui n'ont pas des diplômes en gestion dont 15% sont des cadres. Si un cadre de cette société est sélectionné au hasard, quelle est la probabilité qu'il soit diplômé en gestion.

1.7 Dépendance et indépendance

Définition 1.6 (Evénements indépendants)**.** *On dit que l'événement A est indépendant de l'événement B si lon a :*

$$P(A|B) = P(A)$$

La connaissance de B, n'a pas d'impact sur les chances de réalisation de A.
Si $P(A|B) \neq P(A)$, on dit que A est dépendant de B.

Définition 1.7. *On dit que les événements A et B sont indépendants, si l'on a*

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Exemple : On considère le tirage au hasard d'un jeu de 32 cartes. On suppose qu'on a l'équiprobabilité de 32 éléments élémentaires. Soient A:"tirer un as", B:"tirer un cœur" et C:"tirer un as rouge". Étudier la dépendance entre A et B et celle entre B et C.

Propriété 1.2. *1. Si A est un événement de probabilité nulle (en particulier l' événement impossible), alors A est indépendant de tout événement.*

2. Si A est un événement de probabilité 1 (en particulier l' événement certain), alors A est indépendant de tout événement.

3. Si A et B sont deux événements incompatibles, alors ils sont dépendants.

4. Propriétés de la relation d'indépendance Si A et B sont indépendants, il y a aussi indépendance entre A et $\bar{B}$, entre $\bar{A}$ et B et entre $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Définition 1.8 (Événements indépendants dans leur ensemble)**.** *On dit que A, B et C sont indépendants deux à deux s'il y a indépendance entre A et B, entre B et C, et entre A et C, autrement dit si l'on a les trois relations:*

Définition 1.9. *Trois événements indépendants deux à deux qui satisfont de plus la relation:*

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

sont dits indépendants dans leur ensemble.

Définition 1.10 (Indépendance d'une famille d'événements)**.** *Soient $\{A_1, ..., A_n\}$ une famille finie d'événements. Ces événemnts sont dits indépendants si $P(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \prod_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$.*

Remarque : Il ne faut pas confondre l'indépendance et l' incompatibilité. L'indépendance est une notion de probabilité, alors que l'incompabilité est une disjonction d'événements.
Exercice d'application : Supposons un système parallèle formé par deux composantes. Le système fonctionne si l'une ou l'autre ou les deux composantes fonctionne correctement. Notons par A_1: le composant 1 fonctionne. A_2: le composant 2 fonctionne, et par F le système fonctionne correctement.

1. Exprimez F en fonction de A_1 et A_2.

2. Quelle est la probabilité que le système fonctionne? (en terme d'événements).

3. Si la probabilité que chaque composant fonctionne est de 0.9, quelle la probabilité que le système fonctionne correctement?

4. Quelle est la probabilité que le système soit défaillant?

Chapter 2

Variables aléatoires

L'une des notions la plus fondamentales de la théorie de la probabilité est celle de la variable aléatoire. Le travail sur les événements devient vite fastidieux, ainsi nous allons maintenant nous restreindre à étudier des grandeurs numériques obtenues pendant l'expérience aléatoire.

2.1 Généralité et fonction de répartition

Les concepts de la théorie de probabilité sont basés sur les notions d'expériences aléatoires. Dans les plus part des cas, les résultats d'une expérience aléatoire (événement aléatoire) se laissent décrire de deux façons:

- Les résultats peuvent être décrits par un nombre. Exemple: le nombre obtenu sur un dé, le nombre de pièce défectueuse, la durée de vie d'une machine.
- Le résultat n'a aucun lien avec les nombres. Il est possible de codes les issus en leurs attribuant des nombres. Exemple: attribuer le nombre 1 à pile et 0 à face dans le cas de jette d'une pièce de monnaie, le nombre 1 à défectueux et 0 à non défectueux dans le cas du contrôle d'un article.

2.1.1 Définition d'une variable aléatoire

À chaque expérience, on associe un ensemble Ω comportant les résultats possibles de cette expérience. À partir de cette ensemble on peut formaliser un certain nombre d'événements. On ascocie à chaque événement élémentaire ω de Ω une valeur numérique. D'où on appelle variable aléatoire X une fonction définie sur l'espace fondamental Ω, qui associe une valeur numérique à chaque résultat de l'expérience aléatoire étudiée. Ainsi, à chaque événement élémentaire ω, on associe un nombre $X(\omega)$. Une variable aléatoire est désignée par des lettres majiscules (X, Y, Z) et les valeurs qu'elle peut prendre par une lettre miniscule (x, y, z) et vérifiant la propriété suivante.

$$\text{pour tout} A \subset \mathbb{R}, \quad X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}.$$

On distingue deux types de variables aléatoires: discrète et continue.

- X est une variable aléatoire discrète si Ω est dénombrable.
- X est une variable aléatoire continue si Ω est innombrable (un intervalle).

Exemple 1: On lance trois fois une pièce et on s'intéresse au nombre X de fois où PILE apparaît. Il y a deux manières de formaliser cette phrase. Tout d'abord, à chaque événement élémentaire ω, on associe $X(\omega)$. Ainsi,

ω	PPP	PPF	PFP	FPP	FFP	FPF	PFF	FFF
$X(\omega)$	3	2	2	2	1	1	1	0

Ensuite, comme on observe que plusieurs événements élémentaires donnent la même valeur, on peut les regrouper et obtenir des événements (événement = réunion d'événements élémentaires) qui correspondent à des valeurs distinctes de X :

k (valeur prise par X)	3	2	1	0
événement $[X = k]$	{PPP}	{PPF,PFP,FPP}	{PFF,FPF,FFP}	{FFF}

On peut d'emblée observer que les événements $(X = 0)$, $(X = 1)$, $(X = 2)$ et $(X = 3)$ sont deux à deux disjoints. De plus, la réunion de ces événements est Ω.

Il est aisé de voir que pour toute v.a., **les événements correspondant à des valeurs distinctes de X sont incompatibles**. Autrement dit, dès que $i \neq j$, les événements $(X = i)$ et $(X = j)$ sont incompatibles : $(X = i) \cap (X = j) = \emptyset$. De plus, la réunion de ces événements forme l'espace Ω tout entier :

$$\bigcup_k (X = k) = \Omega.$$

Exemple 2: Soit l'expérience aléatoire : jette de deux dé non truqués, on s'intéresse à la somme des points obtenus sur les deux dés. On définie alors la v.a. Z: somme des points amenés par les deux dés. On veut déterminer :

1. La probabilité d'avoir une somme de points égale à 10.
2. La probabilité d'avoir une somme de points égale à 2.
3. La probabilité d'avoir une somme de points supérieure à 12.
4. La probabilité d'avoir une somme de points inférieure à 13.

2.1.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition 2.1. *Soit X une v.a.. On appelle fonction de répartition de X la fonction de $\mathbb{R}$ dans [0, 1], déflnie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par*

$$F(x) = P[X \leq x]$$

Propriété 2.1. *Soit F une fonction de répartition. Alors*

1. *F est croissante,*
2. *F est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point x égale à $P[X \leq x]$.*
3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$
4. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$
5. $P(x > a) = 1 - F(a).$

2.2 Variable aléatoire discrète

2.2.1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X est la liste de toutes les valeurs différentes que peut prendre X avec les probabilités qui leur sont associées. On utilisera souvent une formule, plutôt qu'une liste. Cette loi de probabilité avec $\Omega_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$et l'événement élémentaire $\{X = x_i\}$ est réalisé avec $P(x = x_i) = p_i, i = 1, ..., n$. La loi de probabilité dans le cas discret est représentée par un tableau, dont la ligne supérieure des nombres dans l'ordre croissant, toutes les valeurs possibles de la variable aléatoire X: $x_1, x_2, ..., x_n$ et la ligne inférieure les probabilités lorsque X prenne les valeurs correspondantes.

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
$f(x_i) = P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

Pour une v.a. discrète, la fonction de répartition est une fonction en escalier, avec un saut en chaque valeur k de $X(\Omega)$ et la hauteur de ces sauts est la probabilité $P(X = k)$.
Exercice : Soit X une variable aléatoire discrète ayant la loi de probabilité suivante : $P(X = x) = K(0.5)^x$ avec $x = 1, 2, 3$.

1. Déterminer la constante K.

2. Déterminer la fonction de répartition de X.

2.2.2 Les caractérestiques d'une variable aléatoire discrète

Espérence mathématique

Définition 2.2. *On considère la v.a. discrète X dont l'ensemble des valeurs possibles est $\Omega_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. On appelle espérance de X la quantité définie par :*

$$E(X) = \sum_{x_i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

L'espérance est une moyenne arithmétique de toutes les valeurs possibles pondérées par leurs probabilités.

Propriété 2.2. *Soient X, Y deux v.a. discrètes. On a*

1. *$E(c) = c$, pour tout $c \in \mathbb{R}$.*

2. *$E(aX + b) = aE(X) + b$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.*

3. *$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.*

Exemple : On jette une pièce de monnaie et on suppose qu'on gagne un dinar si elle marque pile et qu'on perd un dinar si elle marque face. Calculer l'espérence du gain.
Remarque : Si $E(X)$ n'est pas finie, on dit que X ne possède pas d'espérence mathématique.

La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire discrète

On appelle variance d'une variable aléatoire discrète X la quantité définie par :

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2.$$

L'écart-type est donné par:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Ce dernier mesure la dispersion autour de $E(X)$. L'espérance et sa variance ne dépendent de X qu' à travers sa loi : deux variables qui ont même loi ont même espérance, même variance.

Propriété 2.3. *Soient X une v.a. discrète. On a*

1. $V(c) = 0$, *pour tout* $c \in \mathbb{R}$.
2. $V(aX + b) = a^2 V(X)$, *pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$.
3. $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

Exemple : Calculer la variance et l'écart-type de l'exemple précédent.
Exercice d'application: Un étudiant présente une session d'examens comportant trois épreuves : Maths, anglais et informatique. Les probabilités de réussite aux différentes épreuves ont été évaluées sur la base des résultats des étudiants des années précédentes.
Maths$\rightarrow$ 0.68.
Anglais $\rightarrow$ 0.75.
Informatique $\rightarrow$ 0.82.
On suppose de plus qu'il y a indépendance entre les résultats des trois examens. On considère la variable aléatoire X représentant le nombre des épreuves réussies par un étudiant ayant présenté les trois épreuves.

1. Établissez la loi de X.
2. Déterminez son espérance, sa variance et son écart-type.

Moment d'ordre k d'une v.a. discrète

Définition 2.3 (**Moment d'ordre k non centré**). *On appelle moment d'ordre k non centré, avec $k \in \mathbb{N}^*$:*

$$m_k = E(X^k) = \sum_{x_i \in \Omega_X} x_i^k P(X = x_i).$$

Définition 2.4 (**Moment d'ordre k centré**). *On appelle moment d'ordre k centré, avec $k \in \mathbb{N}^*$:*

$$M_k = E((X - E(X))^k)) = \sum_{x_i \in \Omega_X} (x_i - E(X))^k P(X = x_i).$$

Exercice : Le nombre de panne subit par une machine par période du temps est une v.a. X. Le coût total de répartition est une fonction de nombre de panne donné par $W = cX$.

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0.5	0.2	0.15	0.08	0.07

Calculer

1. L'espérence de Y telque $Y = \sqrt{X}$.
2. Les moments non centrés d'ordre 1 et 2 de X.
3. Déduire la variance de X.
4. L'espérence et la variance du coût total de répartition pour $c = 100$.

Fonction génératrice des moments(Fonction caractérestique)

Pour certaines lois de probabilité le calcul des moments non centrés d'ordre k nécessite le calcul de la somme $\sum_{x \in \Omega_X} x^k P(X = x)$ qui peut être compliqué dans certain cas. Pour simplifier le cacul, on introduit la notion des fonctions génératrices des moments. On appelle fonction génératrice des moments d'une v.a. discrète X en fonction de t, notée

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \in \Omega_X} e^{tX} P(X = x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le moment non centré d'ordre k d'une v.a. X est égale à la $k$ième dérivée de la fonction génératrice de moment au point $t = 0$, sous la condition que M_X soit continue en 0.

Exercice : Soit X une v.a. discrète définie par $P(X = x) = \frac{1}{2^x}, x \geq 1$. Déterminer la fonction génératrice des moments M_X.

Transformation d'une v.a. discrète

Soit la transformation de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Y = \phi(X)$, où X est une v.a. discrète. L'ensemble des valeurs possibles sera noté par Ω_Y. Connaissant la loi de probabilité de X, on veut déterminer celle de la nouvelle v.a. Y. Soit $f_Y(y) = P(Y = y)$, suite à la transformation de la v.a. X en une autre Y (supposée aussi discrète), l'ensemble des valeurs possibles Ω_X sera aussi transformé par ϕ en Ω_Y.

Exemple :

- Soit X telque $\Omega_X = \{0, 1\}$. On pose $Y = X^2$, alors $\Omega_Y = \{0, 1\}$.
- Soit X telque $\Omega_X = \{0, 1, 2, 3\}$. On pose $Y = \frac{1}{X}$, alors $\Omega_Y = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$.

Exercice : Soit la v.a. discrète X avec loi de probabilité donnée par le tableau suivant.

X	-2	-1	0	1	2
$f(x_i) = P(X = x_i)$	0.05	0.15	0.4	0.3	0.1

Calculer la loi de probabilité de la v.a. $Y = X^2$.

2.3 Variable aléatoire continue

Définition 2.5. *Une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite continue si sa fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Les v. a. continues sont celles qui prennent leurs valeurs dans un (ou plusieurs intervalles) fini ou infini, exemple: la température, le poids, le revenu...*

Définition 2.6. *On appelle densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X, une fonction positive $f(x)$ telle que :*

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx, \qquad [a,b] \subset \mathbb{R}$$

Propriété 2.4. *La densité de probabilité d'une v.a. continue possède les propriétés suivantes :*

1. *Si X est une v.a. continue, alors quelle que soit la valeur a considérée, on a :*

$$P(X = a) = 0.$$

2. *Si X est une v.a. continue, alors quelles que soient les valeurs a et b considérées, on a :*

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) \tag{2.1}$$

$$= P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \tag{2.2}$$

Fonction de répartition

Définition 2.7. *La fonction de répartition d'une v.a. continue est définie par*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Propriété 2.5. *Soit X une v.a. quelconque de fonction de répartition $F(x)$. On a :*

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$$

Exercice : Soit X la v.a. définie par la fonction de densité de probabilité :

$$f_X(x) = \begin{cases} K(4x - x^2), & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Déterminer K pour que f_X soit bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer les probabilités suivantes : $P(1 < X < 2)$ et $P(X > 3|X > 2)$.

2.3.1 Les caractérestiques d'une variable aléatoire continue

Comme pour la v.a. discrète les caractérestiques d'une v.a. continue sont très importantes pour caractériser une loi de probabilité.

Espérence mathématique

Définition 2.8. *On appelle espérance d'une v.a. continue X la quantité définie par :*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Définition 2.9 (Espérance d'une fonction de X). *Soit ϕ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. L'espérance de $\phi(X)$, s'il existe, est donnée par:*

$$E(\phi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)f(x)dx.$$

Variance et écart-type

Définition 2.10. *On appelle variance d'une v.a. continue X la quantité définie par:*

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx.$$

L'écart-type est donné par:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque:

- Si f_X est paire, alors l'espérence si elle existe, est nulle.
- L'espérence et la variance d'une v.a. continue ont les mêmes propriétés que celle du cas d'une v.a. discrète.

Le moment d'ordre k

Définition 2.11 (Moment d'ordre k non centré). *On appelle moment d'ordre k non centré, avec $k \in \mathbb{N}^*$:*

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx.$$

Définition 2.12 (Moment d'ordre k centré). *On appelle moment d'ordre k centré, avec $k \in \mathbb{N}^*$:*

$$M_k = E((X - E(X))^k)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k f(x)dx.$$

Fonction génératrice des moments(Fonction caractérestique)

Définition 2.13. *On appelle fonction génératrice des moments d'une v.a. continue la fonction de t notée M_X, définie par*

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{\Omega_X} e^{tx} f(x)dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exercice: Soit X une v.a. continue. Soit f_X une fonction définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon }. \end{cases}$$

1. Montrer que f_X est une densité de probabilité.
2. Déterminer M_X. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Transformation d'une v.a. continue

Soit X une v.a. continue ayant une densité de probabilité f_X. Soit Φ une fonction définie, continue et dérivable sur Ω_X telque

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & \Omega_X & \longrightarrow & \Omega_Y \\ & X & \longmapsto & Y = \Phi(X) \end{array}$$

Y est une v.a..Déterminer f_Y et F_Y, la densité et la répartition respectivement de Y. Étant donné la loi de probabilité f_X, on veut déterminer celle de Y. Démontrer que Y est une v.a. continue admettant comme une densité de probabilité la fonction f_Y, définie par

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \notin \Phi(\Omega_X) \\ f_X(\Phi^{-1}(y)\left|\dfrac{\partial \Phi^{-1}(y)}{\partial y}\right|, & \text{si } y \in \Phi(\Omega_X). \end{cases}$$

Exercice 1: Soit $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$ Déterminer F_Y et sa fonction de densité de probabilité de Y notée par f_Y, sachant que $Y = 2X + 15$.

Exercice 2: Soit X une v.a. continue définie par la densité de probabilité suivante : $f_X(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$. Déterminer la loi de $Y = X^2$.

Chapter 3

Les lois de probabilités usuelles

La plupart des phénomènes statistiques peuvent être décrits par un petit nombre de modèles probabilistes ou lois de probabilités. Naturellement, lorsque cette représentation est possible, elle fournit une description beaucoup plus riche du phénomène que le simple calcul des caractéristiques de tendance centrale et dispersion. Elle permet notamment de calculer la probabilité de certains événements, par conséquent, de préciser dans une certaine mesure la représentation que l'on peut se faire de l'avenir. Il convient donc de connaître le modèle probabiliste le plus courant, de pouvoir rechercher dans ce chapitre, celui qui est susceptible de convenir à la description d'un phénomène aléatoire déterminer, généralement ces modèles sont placés en deux groupes: les modèles probabilistes discrets et les modèles probabilistes continus.

3.1 Les modèles probabilistes discrets

3.1.1 La loi uniforme discrète

On dit que la v.a. discrète X est distribuée selon la loi uniforme discrète si l'ensemble de ses valeurs possibles est $\Omega_X = \{1, ..., n\}$ et sa fonction de probabilité est définies par

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{si } x = 1, ..., n \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

On écrit $X \to U\{1, ..., n\}$. On dit que les événements $\{X = 1\}, ..., \{X = n\}$ sont équiprobables. La distribution de probabilité d'une loi uniforme discrète est représentée par un diagramme en battons.

On montre facilement que

$$E[X] = \frac{n+1}{2} \text{ et } Var(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}.$$

La fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x}{n}, & \text{si } 1 \leq x < n \\ 1, & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

La fonction génératrices des moments de X est définies pour tout $t > 0$ par

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{e^t}{n}\frac{1 - e^{nt}}{1 - e^t}.$$

Remarques:- $M_X(t)$ est non définie en $t = 0$, il n'est pas donc possible de l'utiliser telle qu'elle est pour en déduire les moments non centrés.
- La somme de deux v.a. discrètes uniformes indépendantes n'est pas une v.a uniforme. On dit donc que la loi uniforme n'est pas stable par l'addition.
Exemple: Soit la v.a. Z le numéro obtenu lors du jette d'un corps à 4 faces équiprobables numérotées de 1 à 4. Calculer $P(Z \leq 3)$, $P(Z < 8)$, ainsi que l'espérence, la variance et la fonction génératrice des moments de Z.

3.1.2 Loi de Bernouilli

On s'intéresse ici à la réalisation ou non d'un événement. Autrement dit, on n'étudie que les expériences aléatoires qui n'ont que deux issues possibles (exemple: un patient à l'hôpital survit ou non, un client signe le contrat ou non, un étudient réussie la matière ou non...). Considérons une expérience aléatoire de ce type. On l'appelle une épreuve de Bernoulli. Elle se conclut par un succès si l'événement auquel on s'intéresse est réalisé ou un échec sinon. On associe à cette épreuve une variable aléatoire Y qui prend la valeur 1 si l'événement est réalisé et la valeur 0 sinon. Cette v.a. ne prend donc que deux valeurs (0 et 1) et sa loi est donnée par :

$$P[Y = 1] = p, \quad P[Y = 0] = 1 - p.$$

On dit que la v.a. discrète Y est distribuée selon la loi de Bernouilli de paramètre p, $p \in [0, 1]$, si l'ensemble de ses valeurs possibles est $\Omega_Y = \{0, 1\}$. On écrit $Y \to \mathcal{B}(p)$. La distribution de probabilité d'une loi de Bernouilli discrète est représentée par un diagramme en battons.

La v.a. Y a pour espérance p et pour variance $p(1 - p)$. Un schéma de Bernoulli est la répétition n fois de la même épreuve dans les mêmes conditions. La fonction génératrices des moments de Y est définies pour tout $t > 0$ par

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \sum_{y=0}^{1} e^{yt} P(Y = y) = (1 - p) + pe^t$$

Cette fonction est continue et dérivable au point $t = 0$, on peut alors déduire à partir de cette formule les moments non centrés d'ordre k de Y. On a

$$m_k = \frac{d^k M_Y(t)}{dt^k}_{/t=0} = p, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Toute v.a. discrète ayant une fonction génératrice de moment de la forme $1 - \alpha + \alpha e^t$ est dite distribuée selon une loi de Bernouilli de paramètre α.
Exemple: Au service des mines est lors de la visite technique d'une voiture, on défnit la v.a. X: $X = 1$ la voiture est acceptée et $X = 0$ si non. D'après l'expérience les voitures acceptèes sont en proportion θ. La v.a X suit une loi de Bernouilli de paramètre θ. La fonction de probabilité de X et alors

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \theta^x(1-\theta)^{1-x}, & \text{si } x = \{0, 1\} \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

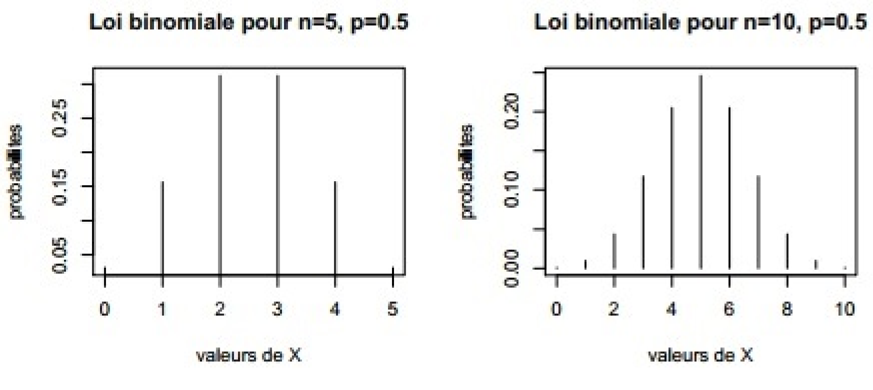
Et on a $E(X) = \theta$, $V(X) = \theta(1-\theta)$ et $M_X(t) = (1-\theta) + \theta e^t$.
Remarques: On considère deux v.a indépendantes de même paramètre p. $X \to \mathcal{B}(p)$ et $Y \to \mathcal{B}(p)$. La somme $Z = X + Y$ n'est pas distribuée selon une loi de Bernouilli pour montrer ceci, il suffit de montrer que la fonction génératrice des moments de Z n'est pas celle de la loi de Bernouilli. On dit que la loi de Bernouilli n'est pas stable par addition.

3.1.3 La loi binomiale

Soit X la v.a. qui représente le nombre de succès obtenus lors des n épreuves d'un schéma de Bernoulli. Alors on dit que X suit une loi binomiale de paramètres (n, p), $0 \leq p \leq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$ notée $\mathcal{B}(n, p)$. Cette loi est donnée par :

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, & \text{si } x = \{0, ..., n\} \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

On note $X \to \mathcal{B}(n, p)$ avec $C_n^x = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$ désigne le sous ensemble à x éléments. La loi binomiale est utilisée pour le contrôle de qualité du produit, pour la description du fonctionnement du système ou de la file d'attente . La distribution de probabilité d'une loi binomiale discrète est représentée par un diagramme en battons.
Exemples :



Remarque :

- Associons à chaque épreuve de Bernoulli une v.a. X_i $(1 \leq i \leq n)$ qui vaut 1 si on observe un succès au i-ème essai et 0 sinon. Alors le nombre de succès, noté X, vérifie

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Autrement dit, une v.a de loi $\mathcal{B}(n,p)$ est une somme de n v.a indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.

- Soinet $X_1, X_2, ..., X_n$ des v.a. identiquement et indépendament distribuées selon une loi de Bernoulli $X_i \to \mathcal{B}(n,p)$. Les caractérestiques de la v.a. binomiale $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ sont déduites directement à partir de celle de X_i, à savoir

$$E(X_i) = p, \qquad V(X_i) = p(1-p), \qquad M_{X_i}(t) = 1 - p + pe^t, \quad i = 1, ..., n.$$

Donc, on aura

$$E(X) = np, \qquad V(X) = np(1-p), \qquad M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n.$$

- Considérons les deux v.a. indépendantes : $Z \to \mathcal{B}(n_1, p)$ et $W \to \mathcal{B}(n_2, p)$.
La v.a. $U = Z + W$ est distribuée selon une loi binomiale de paramètres $(n_1 + n_2, p)$.
On dit que la loi binomiale est stable par addition.

Exercice d'application: La densité d'un pavage d'asphalte d'une route doit être contrôlée. 20 échantillons sont prélevés au hasard sur une distance de 8 km. On s'intéresse à la probabilité que x échantillons parmi 20 soient non conformes (c.à.d ont une densité inférieure à la norme requise). Supposons que ce type de contrôle donne habituellement une proportion d'échantillons non conformes de 10%.

1. Identifiez la variable aléatoire concernée et spécifiez l'ensemble des valeurs possibles?

2. Quelles sont les chances sur 100 d'observer au hasard de la route un échantillon respectant la norme requise concernant la densité?

3. Quelle est l'expression générale qui permettrait de calculer la probabilité que x échantillons parmi 20 soient non conformes?

4. Quelle est la probabilité qu'au plus un échantillon sur 20 soit non conforme?

3.1.4 Loi de poisson

La loi de Poisson décrit le nombre d'apparition pendant une unité de temps d'un événement dont la réalisation ne dépend pas du nombre des réalisations passées et n'influent pas sur les futurs. On dit qu'une v.a. discrète X est distribuée selon une loi de Poisson de paramètre λ si l'ensemble de ses valeurs possibles est $\Omega_X = \{0, 1, 2, ...\} = \mathbb{N}$ et sa fonction de probabilité est définie par

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}, & \text{si } x \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

On note $X \to \mathcal{P}(\lambda)$. La loi de poisson est particulièrement intéressante pour décrire le comportement d'événements dont les chances de réalisation sont faibles. Si $X \to \mathcal{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$. De plus, soient $X_1 \to \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \to \mathcal{P}(\lambda_2)$. Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors $X = X_1 + X_2 \to \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
Remarque: La loi de Poisson se présente comme le cas limite d'une loi binomiale. Considérons $X \to \mathcal{B}(n,p)$. Si p est petit et n est assez grand alors la loi $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approximée par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$. En pratique l'approximation est valable si $n > 20$, $p \leq 0,1$ et $np \leq 5$.
Exercice d'application: Une entreprise a mis enœuvre un plan de contrôle pour vérifier des lots de taille d'environ 2000 disquettes. Le plan de tirage est le suivant: prélever d'un lot de 2000 disquettes, un échantillon aléatoire de 125 disquettes. Si au plus 3 disquettes sont non conformes dans l'échantillon, accepter le lot, sinon rejeter le lot et effectuer un contrôle exhaustif du lot.

1. En admettant que l'échantillon comporte 2% de disquettes non conformes, quelle la probabilité d'accepter le lot?

2. En admettant toujours que le lot comporte 2% de disquettes non conformes, quelle sont les chances sur 100 d'effectuer un contrôle exhaustif du lot?

3.2 Les lois de probabilités continues

3.2.1 Loi uniforme continue

On dit que la v.a. X est distribuée selon une loi uniforme continue sur l'intervalle $[a, b]$ si sa fonction de densité est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

On note $X \to U(a,b)$. La fonction génératrice des moments $M_X(t) = \dfrac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$ et on a $E(X) = \dfrac{b+a}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$. La fonction de répartition de X est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x < b \\ 1, & \text{si } x \geq b. \end{cases}$$

Remarque: La somme de deux v.a. distribuées selon une loi uniforme n'est pas une v. a. uniforme. On dit que la loi uniforme continue n'est pas stable par l'addition.
Exercice d'application: Le niveau du bruit d'une machine au cours d'une période particulière de la journée est distribuée uniformément sur [54,74].

1. Quelle est l'expression de probabilité de la v.a. continue relative au niveau du bruit?

2. Au cours de cette période de la journée quel est le niveau moyen du bruit?

3. Quelle est la probabilité que le niveau du bruit soit supérieur à 70 sachant qu'il est supérieur à 64.

3.2.2 La loi exponentille

Une variable aléatoire continue X obéit à une loi exponentielle de paramètre β, si sa densité de probabilité par l'expression suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \beta e^{-\beta x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon }, \end{cases}$$

où β est un nombre réel strictement positif. Une variable aléatoire suivant la loi exponentielle est dite variable exponentielle. On note $X \to \mathcal{E}(\beta)$. La v.a. X de loi $\mathcal{E}(\beta)$ ne prend que des valeurs positives. Cette loi est utilisée dans le contrôle de la qualité, la régularité et toutes les applications qui se basent sur le facteur du temps. La fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\beta)$ est égale à

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\beta x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

De plus, $M_X(t) = \dfrac{\beta}{\beta - t}, t < 0$, $E(X) = \dfrac{1}{\beta}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\beta^2}$. La loi exponentielle vérifie la propriété d'absence de mémoire. Soit X un v.a. de loi exponentielle. Alors pour tous $s, t > 0$,

$$P[X > t + s | X > t] = P[X > s]$$

Exercice d'application 1: Soit X une v.a. qui suit la loi uniforme $U_{[0,1]}$. Déterminer la fonction de répartition de X. Calculer les probabilités suivantes:
$P(X < \frac{3}{4})$, $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{2}{3})$, $P(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{3}{2})$, et $P(X < \frac{1}{8} | X > \frac{3}{4})$.
Exercice d'application 2: Une usine fabrique 1000 unités en un temps t. Pour cette même période, la demande en milliers d'unités concernant ce produit peut être considérée comme une v.a. continue D suivant une loi exponentielle :$D \to \mathcal{E}(\beta = \frac{1}{3})$.

1. Quelle est la probabilité que la demande D dépasse la production $P = 9000$?
2. Quelle devrait être la production P pour que cette production soit inférieure à 4 %?

3.2.3 La loi Gamma

On définit la fonction gamma notée Γ par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

Proposition 3.1. *On a les propriétés suivantes:*

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. $\Gamma(p) = (p-1)! = (p-1)\Gamma(p-1)$.
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

On dit qu'une v.a. X suit la loi Gamma de paramètres p et θ ($p > 0, \theta > 0$), notée $\gamma(p, \theta)$ si sa densité est:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\theta x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$

De plus, on $M_X(t) = \dfrac{\theta^p}{(\theta - t)^p}$, $t < \theta$. Le moment non centré d'ordre k est donné par

$$m_k(x) = \frac{\Gamma(k+p)}{\theta^k \Gamma(p)}.$$

Donc on peut conclure l'espérence $E(X) = \dfrac{p}{\theta}$ et la variance $V(X) = \dfrac{p}{\theta^2}$.

Remarques:

- $\gamma(1, \theta)$ est équivalente à la loi exponentielle de paramètre θ.
- La loi gamma est stable par l'addition : si X et Y sont deux v.a. indépendantes telque $X \to \gamma(p_1, \theta)$ et $Y \to \gamma(p_2, \theta)$, alors $X + Y \to \gamma(p_1 + p_2, \theta)$.
- La loi gamma est stable par la multiplication par un scalaire strictement positif. Si $X \to \gamma(p, \theta)$ alors $aX \to \gamma(p, \dfrac{\theta}{a})$.

3.2.4 La loi normale

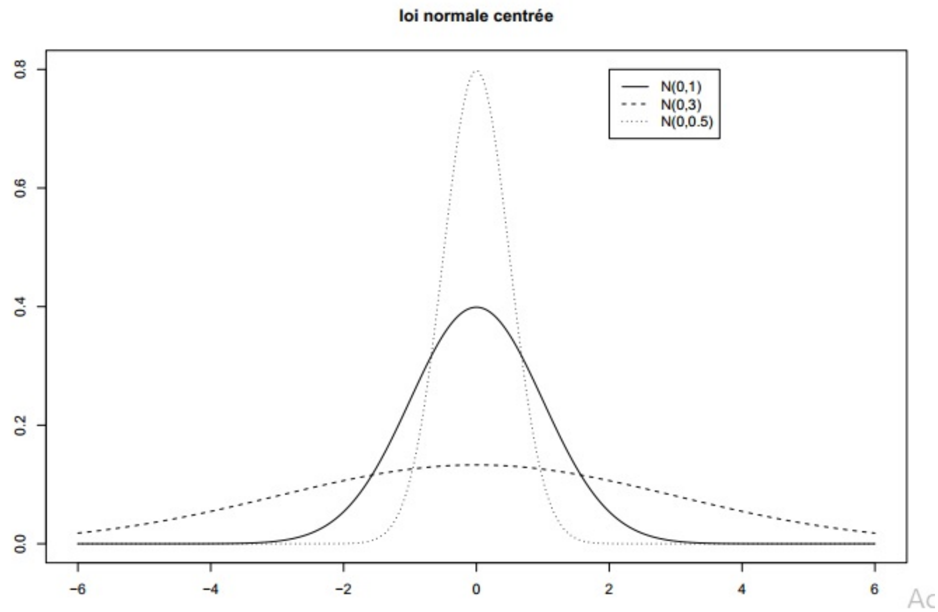
La loi normale est la loi la plus importante pour les applications statistiques. Beaucoup de phénomènes peuvent être considérés comme suivant une loi normale, ou comme étant très proches de celle-ci. On l'appelle également la loi Gaussienne. Cette loi est complètement définie par deux paramètres: la moyenne μ, et la variance σ^2. Une v.a. X suit une loi normale (ou loi gaussienne ou loi de Laplace Gauss) de paramètres $\mu \in \mathbb{N}$ et $\sigma^2 > 0$, si l'ensemble de ses valeurs possibles est $\mathbb{R}$ et sa fonction de densité est définie par

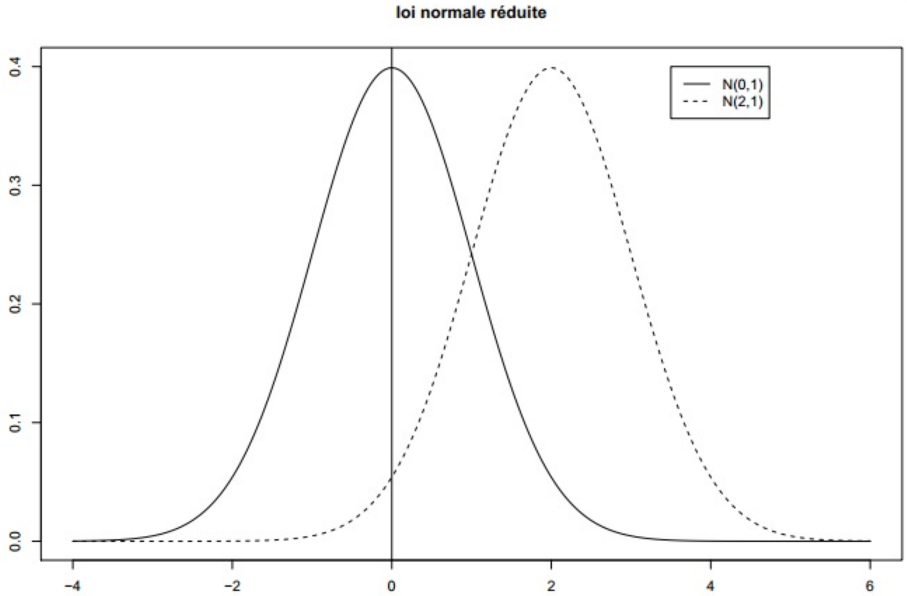
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

On note $X \to \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ou $X \to \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. De plus on a $M_X(t) = e^{t\mu} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, t \in \mathbb{R}$, $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$.

Remarques:

- Le graphe de la courbe Normale est symétrique par rapport à la droite d'abscisse μ (la moyenne).
- On peut toujours ramener une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ à une loi dite normale centrée réduite de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.
- La transformation linéaire d'une loi normale est une variable normale. Soit $Y = aX + b$ avec $X \to \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $Y \to \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
- La loi normale est stable par addition : si $X \to \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \to \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors $X + Y \to \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.





3.2.5 La loi normale centrée réduite

Soit $X \to \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ est dite variable aléatoire Normale centrée réduite. Elle est de moyenne 0 et de variance 1 et ayant une densité de probabilité $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\dfrac{1}{2}z^2), \quad z \in \mathbb{R}$.

Remarques:

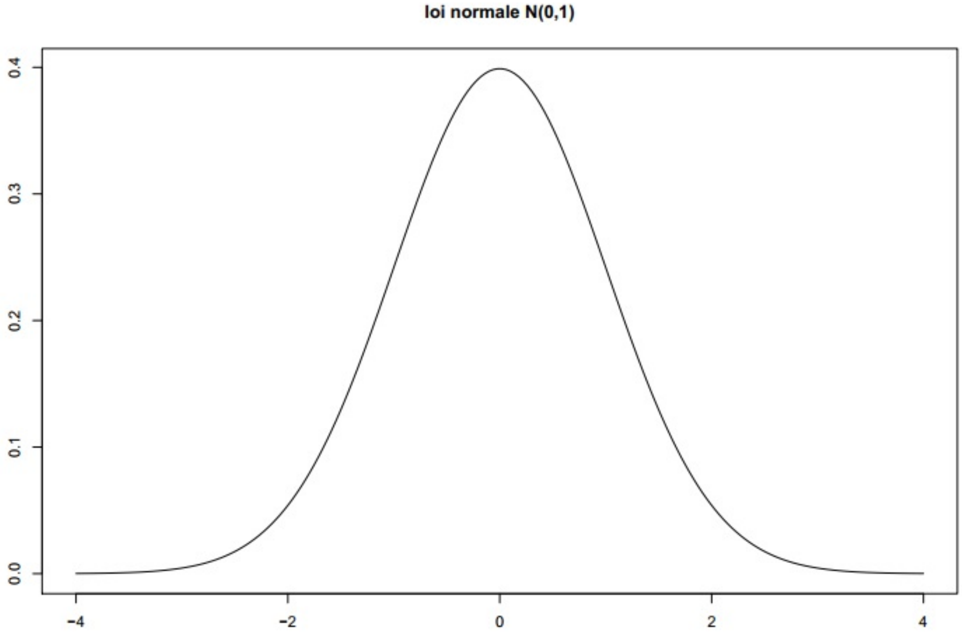
- Pour la loi normale centrée réduite, le centre de symétrie de la courbe de la fonction de répartition devient le point $(0, \dfrac{1}{2})$.
- La fonction de répartion de la variable Z est donnée par

$$\phi(z) = P(Z < z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{1}{2}t^2)dt, \quad z \in \mathbb{R}.$$

  et on a pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\phi(-z) = 1 - \phi(z)$ et $\phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

- Rappelons que ϕ est une primitive de la densité f. Mais il n'existe pas de forme analytique de la primitive de f. On doit donc lire les valeurs de ϕ dans une table donné, ou la faire calculer par un logiciel adapté (exemple : excel, matlab,...).

- La courbe de la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ porte le nom de "courbe en cloche". Elle tend vers 0 en l'inflni, est croissante sur $\mathbb{R}$, puis décroissante. Elle admet donc un maximum en 0. On peut voir aussi qu'elle est symétrique, de centre de symétrie 0.



Exemple Calculer par deux méthodes $P(X < 1700)$ avec $X \to \mathcal{N}(1600, 50)$.
Exercice d'application 1: Soit X une v.a. continue égale au poids d'un nouveau né: $X \to \mathcal{N}(3.2, 0.4)$ de moyenne $\mu = 3.2$ kg et d'écart type $\sigma = 0.4$ kg.

1. Quelle est la probabilité qu'un nouveau né pèse plus que 4 kg?

2. Qu'il pèse moins de 3kg?

3. Que son poids soit compris entre 2.8kg et 3.6kg?

Exercice d'application 2: Soit X une v.a. continue vérifiant $P(X < 3) = 0.5517$ et $P(X > 7) = 0.0166$. Déterminer μ et σ de X sachant que $X \to \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Théorème 3.1 (Théorème central limite)**.** *Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes ayant respectivement comme moyenne $E(X_i) = \mu_i$ et comme variance $V(X_i) = \sigma_i^2$ et soit la combinaison linéaire $Y = X_1 + ... + X_n$ alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{Y - E(Y)}{\sigma(Y)}$ tends vers la loi normale centrée réduite lorsque n tend vers l'infini.*

Exercice d'application : Un circuit comporte 18 résistances raccordés en séries. Chacune des résistances provient de la même distribution symétrique ayant une moyenne de 100 et une variance de 4.5.

1. Quelle est la probabilité que la résistance totale du circuit soit inférieure à 1790?

2. Quelle est la probabilité que la résistance totale du circuit soit supérieur à 1820?