Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès **A. U. : 2020-2021**
Mathématiques I **GM1 - GCV1**

TD 2 - Fonctions Eulériennes : $\Gamma - \beta$

Exercice 1 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\ dx\ , \qquad I_2 = \int_0^2 (4-x^2)^{\frac{1}{2}}\ dx\quad , \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \sqrt[4]{x}\ e^{-\sqrt{x}}\ dx$$

Exercice 2 : Déterminer pour quelles valeurs du paramètre réel α l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{\alpha}(x)\ dx$$

est bien définie et calculer sa valeur.

Exercice 3 : Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose :

$$\beta(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$$

1) (a) Montrer que cette intégrale est bien définie.

   (b) Soient $a > 0$ et $b > 0$. Comparer $\beta(a,b)$ et $\beta(b,a)$.

   (c) Soient $a > 0$ et $b > 0$. Etablir que

$$\beta(a,b) = \beta(a+1,b) + \beta(a,b+1).$$

   (d) Calculer A l'aide d'un changement de variable $t = \cos^2(\theta)$ montrer que

$$\beta(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = \frac{\pi}{8}$$

   Rappels : $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ et $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$.

   (e) Calculer $\beta(1,n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir que, pour tout $a > 0$ et $b > 0$, on a

$$\beta(a+1,b) = \frac{a}{a+b}\ \beta(b,a).$$

(b) Calculer $\beta(n,p)$ pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$ en exprimant le résultat à l'aide de factoriels.

(c) Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\beta\Big(n+\frac{1}{2}, p+\frac{1}{2}\Big) = \frac{(2p)!(2n)!}{2^{2(n+p)}(n+p)!n!p!}\ \pi$$

Exercice 4 : Pour $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

1. En réalisant le changement de variable $y = \frac{t-x}{\sqrt{x}}$, Montrer que

$$\Gamma(x+1) = \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{x}\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} e^{f(x,y)}dy$$

   où $f(x,y) = x\ln(1+\frac{y}{\sqrt{x}}) - \sqrt{x}\ y$

2. Pour $x \geq 1, \quad y \geq 0$ on a $e^{f(x,y)} \leq (1+y)e^{-y}$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}\ y + x\ln(1+\frac{y}{\sqrt{x}})}\ dy = \int_0^{+\infty} e^{\frac{y^2}{2}}\ dy$$

3. Pour $x > 0, \quad y \in]-\sqrt{x},\ 0]$, on a $f(x,y) \leq -\frac{y^2}{2}$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-\sqrt{x}}^{0} e^{-\sqrt{x}\ y + x\ln(1+\frac{y}{\sqrt{x}})}\ dy = \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{y^2}{2}}\ dy$$

4. Montrer que

$$\Gamma(x+1) \sim_{+\infty} \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}$$

   (On rappelle $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

5. En déduire la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\ \frac{n^n}{e^n}$$

6. Application : Pour $m \in \mathbb{N}^*$, Calculer si possible les limites

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{(m!)^{\frac{1}{m}}}{m} \qquad \text{et} \qquad \lim_{m\to+\infty}\Big(\frac{\ln m!}{m} - \ln m\Big)$$