Les guides d'ondes

Guide Rectangulaire :

$\Psi = E_x$ ou E_y ou E_z ou H_y ou H_y

* Solᵗ de l'éq. d'onde :

$$\vec{\Delta}\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \text{ou}\\ \vec{H}\end{pmatrix} = k^2 \begin{pmatrix}\vec{E}\\ \text{ou}\\ \vec{H}\end{pmatrix} \quad \text{avec } k = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)$$

Equation d'onde (d'Helmoltz)

si Ψ represente une composante du champ $\vec{E}$ ou $\vec{H}$ alors

$$① \quad \Delta\Psi = k^2\Psi \quad ; \quad \Psi = \Psi(x,y,z)$$

$$② \quad \Psi(x,y,z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

linéaire, homogène 3D

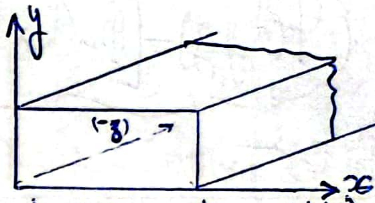
$$① \text{ et } ② \Rightarrow ③ \quad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = k^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2 \qquad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2 \qquad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k_z^2 \quad ④$$

$$④ \text{ et } ③ \Rightarrow -k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 = k^2 \quad ⑤$$

$$④ \text{ et } ⑤ \Rightarrow \begin{cases} X(x) = A\sin k_x x + B\cos k_x x & (a)\\ Y(y) = C\sin k_y y + D\cos k_y y & (b)\\ Z(z) = E\sin k_z z + F\cos k_z z & (c)\end{cases} \quad ⑥$$

l'onde guidée va se propager selon $oz > 0$; donc on prend $k_z^2 = -\gamma_g^2$ de telle sorte que (5) devient



$$\gamma_g^2 = k^2 + k_x^2 + k_y^2$$

(γ_g : cste de Propagation guidée)

$$k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

Dans un milieu sans Perte (interieur du guide), on a $\sigma \ll \omega\varepsilon$

$k^2 = j\omega\mu \times j\omega\varepsilon = -\omega^2\mu\varepsilon = -k_0^2$ d'où $\gamma_g^2 = -\omega^2\mu\varepsilon + k_c^2$

* lorsque $\gamma_g = 0 \Rightarrow k_c^2 = \omega_c^2\mu\varepsilon$

ω_c : est la pulsation de coupure

$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ la fréq de coupure $\qquad f_c = \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}$

dans ce cas, pas de Propagation, il y a evanescence

* lorsque $f > f_c$: il y a propagation

$$\gamma_g = \pm j\beta_g = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \qquad \beta_g^2 = -k_c^2 + \omega^2\mu\varepsilon \quad (\Delta)$$

$$\gamma_g = j k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

* lorsque $f < f_c$: $\gamma_g = \pm\alpha_g = \frac{1}{\omega}\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\left(\frac{f_c}{f}\right)^2 - 1}$

$\Rightarrow$ onde atténuée

Alors la solution d'une onde guidée qui se propage selon les $z>0$ est :

$$\underline{\Psi}(x,y,z)=\left[\underline{A}\sin(k_x x)+\underline{B}\cos(k_x x)\right]\left[\underline{C}\sin(k_y y)+\underline{D}\cos(k_y y)\right]e^{-j\beta_g z}$$

* Modes Transverses électrique TE (ou H)

caractérisant par $E_z=0$

• les equations en fonctions $\vec{rot}\left(\frac{\vec{E}}{\vec{H}}\right)$:

on a $\vec{rot}\,\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$

$\vec{rot}\,\vec{H}=\vec{J}+j\omega\varepsilon\vec{E}$ (pas de courant) $\vec{J}=0$

$$\vec{rot}\,\vec{E}=\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}E_x\\ E_y\\ E_z\end{pmatrix}$$

$(x \to y \to z)$ (l,h,i)

Le milieu à l'intérieur du guide est linéaire, homogène, isotrope

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-j\omega\mu H_x \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=j\omega\varepsilon E_x$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-j\omega\mu H_y \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=j\omega\varepsilon E_y$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-j\omega\mu H_z \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=j\omega\varepsilon E_z$$

pour $E_z=0$ et $\frac{\partial}{\partial z}=-j\beta_g$ donc on a :

• $+j\beta_g E_y=-j\omega\mu H_x$ (E_1)

• $+j\beta_g E_x=+j\omega\mu H_y$ (E_2)

• $\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-j\omega\mu H_z$ (E_3)

$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=j\omega\varepsilon E_x$ (E_4)

$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=j\omega\varepsilon E_y$ (E_5)

$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=0$ (E_6) ②

$H_x=\frac{-\beta_g}{\omega\mu}E_y$ (E_1) (E_5) $\qquad \frac{\partial}{\partial z}=-j\beta_g$

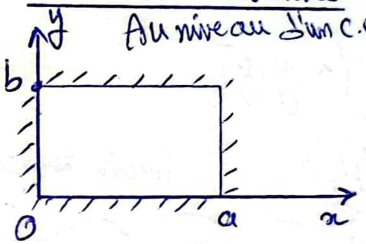
(E_1) et (E_5) $\Rightarrow$ $\frac{j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}=E_y$

(E_2) et (E_4) $\Rightarrow$ $E_x=\frac{-j\omega\mu}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}$

(E_3) et (E_6) $\Rightarrow$ $H_x=-\frac{j\beta_g}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}$ et $H_y=-j\frac{\beta_g}{k_c^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}$

condition aux limites

Au niveau d'un c.e.p $\vec{E_t}=0$



$\Rightarrow E_y(x=0)=0$, $E_y(x=a)=0$ $\forall\, 0\le y\le b$

$\Rightarrow E_x(y=0)=0$, $E_x(y=b)=0$ $\forall\, 0\le x\le a$

$E_y=0\Rightarrow\frac{\partial H_z}{\partial x}=0$ en $x=0$ et a

$E_x=0\Rightarrow\frac{\partial H_z}{\partial y}=0$ en $y=0$ et b C.L

(c.e.p conducteur électrique parfait)

$$\underline{H}_z(x,y,z)=\underbrace{\left[\underline{A}\cos(k_x x)+\underline{B}\sin(k_x x)\right]}_{X(x)}\underbrace{\left[\underline{C}\cos(k_y y)+\underline{D}\sin(k_y y)\right]}_{Y(y)}\underbrace{e^{-j\beta_g z}}_{Z(z)}$$

pour $X(x)$:

$\frac{\partial H_z}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{dX}{dx}=0\Rightarrow\frac{dX}{dx}=k_x\left(-\underline{A}\sin(k_x x)+\underline{B}\cos(k_x x)\right)$

$\frac{dX}{dx}(x=0)=0\Rightarrow k_x\left(-\underbrace{A\sin(k_x 0)}_{0}+\underline{B}\underbrace{\cos(k_x 0)}_{1}\right)=0\Rightarrow\boxed{B=0}$

$\frac{dX}{dx}(x=a)=0\Rightarrow k_x\cdot -A\sin(k_x a)=0\Rightarrow k_x a=m\pi$ $\quad m=0,1,2,\dots$

$$\boxed{k_x=\frac{m\pi}{a}}$$

$\frac{\partial Y}{\partial y} = 0$ en $y = 0$ et b $\Rightarrow$ $\boxed{D=0}$ et que $k_y = \frac{n\pi}{b}$

Finalement : $H_z(x,y,z) = H_{z_{mn}} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta_g z}$ $\quad n = 0, 1, 2 \dots$

[L]↳

$E_x(x,y,z) = E_{x_{mn}} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta_g z}$	$H_x(x,y,z) = H_{x_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right).\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta_g z}$
$E_y(x,y,z) = E_{y_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right).\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta_g z}$	$H_y(x,y,z) = H_{y_{mn}} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta_g z}$

Existance d'une double infinité de couples (m,n) qui correspondent à des sol^{e} possibles : Ces sont les mode TE_{mn}

Rq : • TE_{00} n'existe pas

• on a $k_c = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ donc $k^{TE}_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$

$(I) \Rightarrow \beta_g^2 = k_0^2 - k_c^2$

β_g : cste de propagation guidée

k_0 : cste de prop dans le milieu illimité qui correspond au générateur

k_c : ——— de coupure

$k_0 = \omega_0 \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega_0}{v} = \frac{2\pi f_0}{v} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

$\beta_g = \frac{\omega_g}{v} = \frac{2\pi}{\lambda_g}$

$k_c = \frac{\omega_c}{v} = \frac{2\pi}{\lambda_c}$

(milieu qcq $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$)

Rq : pour que l'onde existe il faut que $\beta_g^2 > 0 \Rightarrow k_0 > k_c$

$\Rightarrow f_0 > f_c$ (pour chaque mode (m,n))

→ f_0 : fréq de génération

$f_{c_{mn}} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$

La vitesse de phase → $v_\varphi = \frac{\omega_0}{\beta_g}$

$\beta_g = k_0\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$; $k_0 = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$; $\lambda = \frac{v}{f}$

$v_{\varphi_{mn}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$; $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ vitesse dans le milieu illimité

• Modes transverses magnétiques TM

• caractérisés par $H_z = 0$

• Étude semblable aux modes TE :

$E_z(x,y,z) = -\frac{j\beta_g}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}$	$E_y = -\frac{j\beta_g}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}$
$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}$	$H_y = -\frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}$

$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\beta_g}{\omega\varepsilon}$; $k^{TM}_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$

$Z_g = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{\beta_g}$

E_x et E_y

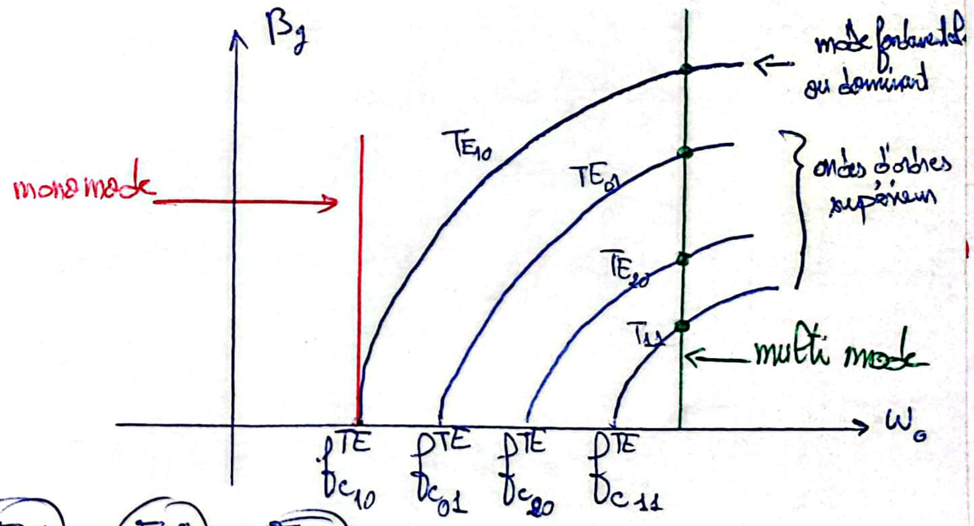
Z_g : Impédance caractéristique de l'onde E_x

$Z_g = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$; $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

Impédance de l'onde dans un milieu illimité

$\Rightarrow \exists$ double infinité de TM

Rq : TM_{0n} et TM_{m0} n'existent pas



Ex1 Ex2 Ex3