b. Loi Gamma de paramètres p et θ :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$$

on pose $x = y\theta$

$dx = \theta\, dy$

$$\Rightarrow \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} (y\theta)^{p-1} e^{-y\theta}\, \theta\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \theta^p y^{p-1} e^{-y\theta}\, dy$$

$$1 = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p)} = \theta^p \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-y\theta}\, dy$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-y\theta}\, dy$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} y^{p-1} e^{-y\theta} & \text{si } p>0,\ \theta>0,\ y>0 \\ f_Y(y) = 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$f_Y(y)$ est une ddp car :
$f_Y(y) > 0$ continue

et $\int f_Y(y)\, dy = 1$

$Y \rightsquigarrow \gamma(p, \theta)$.

Caractéristiques.

- $M_Y(t) = E(e^{tY})$

$$= \int_0^{+\infty} e^{ty} f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} y^{p-1} e^{-y\theta} e^{ty}\, dy$$

$$= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-y(\theta-t)}\, dy$$

on pose $a = \theta - t$

$$M_Y(t) = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-ay}\, dy$$

$$= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p)}{a^p} = \frac{\theta^p}{a^p}$$

$$\Rightarrow M_Y(t) = \frac{\theta^p}{(\theta-t)^p} \quad \forall t < \theta$$

<u>Req</u> :
$\gamma(1, \theta)$ est équivalent à la loi exponentiel de paramètre θ.

- Moment non centré d'ordre K :

$$m_K(y) = E(Y^K)$$

$$= \int_0^{+\infty} y^K \cdot f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} y^K \frac{\theta^p}{\Gamma(p)}$$

$$= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} y^K y^{p-1} e^{-\theta y}\, dy$$

$$= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} y^{K+p-1} e^{-\theta y}\, dy$$

soit $p^* = K + p$

$$= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} y^{p^*-1} e^{-\theta y}\, dy$$

$$= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\Gamma(p^*)}{\theta^{p^*}}$$

$$= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\Gamma(p+K)}{\theta^{p+K}} = \frac{\Gamma(K+p)}{\theta^K \Gamma(p)}$$

$$\Rightarrow E(Y^K) = \frac{\Gamma(K+p)}{\theta^K \Gamma(p)}$$

- l'Espérance

$$E(Y) = \frac{\Gamma(1+p)}{\theta\, \Gamma(p)} = \frac{p\, \Gamma(p)}{\theta\, \Gamma(p)}$$

$$E(Y) = \frac{p}{\theta}$$

- La Variance :

$$V(y) = E(y^2) - E(y)^2$$

$$= \frac{\Gamma(2+p)}{\sigma^2 \Gamma(p)} - \frac{p^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{p(p+1)\Gamma(p)}{\sigma^2 \Gamma(p)} - \frac{p^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{p(p+1)}{\sigma^2} - \frac{p^2}{\sigma^2}$$

$$\Rightarrow V(y) = \frac{p}{\sigma^2}$$

Propriétés :

- $f_Y(y) > 0$, continue et $\int_0^{+\infty} f_Y(y)\, dy = 1$

- La loi Γ est stable par addition :

si X et Y sont deux variables indépendantes tq

$X \sim \gamma(p_1, \sigma)$

$Y \sim \gamma(p_2, \sigma)$

alors $X+Y \sim \gamma(p_1+p_2, \sigma)$

la loi Γ est stable par multiplication par un scalaire positif, si $X \sim \gamma(p, \sigma)$ alors $aX \sim \gamma(p, \sigma/a)$

2. 4. La loi Normale (de Laplace Gauss)

La loi la plus importante par décrire une VAC est la loi normale. d'un pt de vue théorique que la loi Normale tire son importance du fait que les phénomènes aléatoires peuvent suivre cette loi lorsque le nombre de ses variables augmente indéfiniment (théorème centrale limite). d'un point du vue concrét. ~~de nombre~~ de nombreux phénomènes peuvent être représenté de façon satisfaisante par cette loi.

On va utiliser la formule au intégrale de Gauss suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

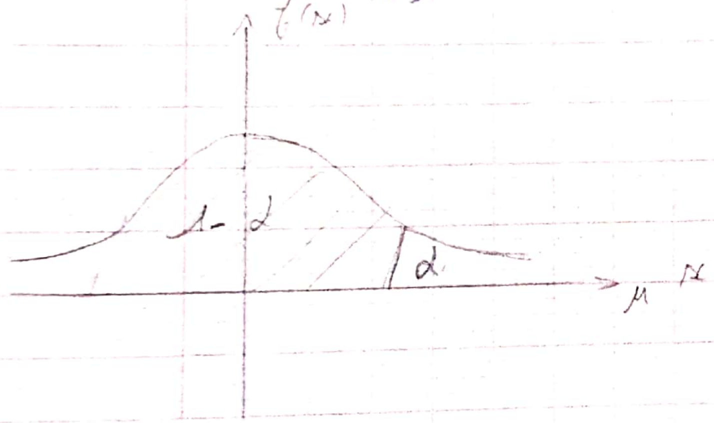
Déf 1.

soit X une VAC, on dit que X est distribué selon une loi Normale de paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$, si l'ensemble de ses valeurs possibles est $\mathbb{R}$ et sa fct de densité est définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \sigma > 0$$

$X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$

ou $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$



. Le graphe de la courbe Normale est symétrique % à la dte des abscisses μ.

. l'air de la courbe est égal à 1.

Caractéristiques :

a. Fct génératrice de moments :

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

on pose $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$x = \sigma z + \mu \Rightarrow dx = \sigma\, dz$

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\sigma z + t\mu} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\sigma z + t\mu - \frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz)} dz$$

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \int e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2\sigma t z + (\sigma t)^2)} dz$$

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \int e^{-\frac{1}{2}(z - \sigma t)^2} dz$$

$$= e^{t\mu} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \underbrace{\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma t)^2} dz}_{=1}$$

$$= e^{t\mu} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

car de la forme de ddp d'une loi Normale $N(\sigma t, 1)$

$M_X(0) = 1$

b. Espérance :

$E(X) = M_X'(0)$

$$M_X'(t) = \mu e^{t\mu} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + t\sigma^2 e^{t\mu} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$= \mu M_X(t) + t\sigma^2 M_X(t)$$

$$= (\mu + t\sigma^2) M_X(t)$$

$\Rightarrow M_X'(0) = \mu$

$E(X) = \mu$.

c. Variance :

$V(X) = M_X''(0) - (M_X'(0))^2$

$$M_X''(t) = M_X'(t)(\mu + t\sigma^2) + M_X(t)\sigma^2$$

$$M_X''(0) = M_X'(0)(\mu + 0\sigma^2) + M_X(0)\sigma^2 = \mu^2 + \sigma^2$$

$\Rightarrow V(X) = \sigma^2$.

Scanné avec CamScanner

Req :

$$f(z) = f(-z)$$

$$P(Z < z) = \phi(z)$$

$$P(Z < -z) = \phi(-z)$$
$$= 1 - \phi(z)$$

$$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$
$$= 1 - \phi(z)$$
$$= \phi(-z).$$

$$P(z_1 \leq z \leq z_2) = \phi(z_2) - \phi(z_1)$$

$$P(Z < z) = P(Z > -z)$$

$$P(|Z| < z) = P(-z < Z < z)$$
$$= \phi(z) - \phi(-z)$$
$$= 2\phi(z) - 1$$

$$P(|Z| > z) = 1 - P(|Z| < z)$$
$$= 1 - 2\phi(z) + 1$$
$$= 2 - 2\phi(z)$$
$$= 2(1 - \phi(z))$$
$$= 2\phi(-z).$$

Ex :

Soit X une VAC égal au poids d'un nouveau né :

$X \rightsquigarrow N(3,2 ; 0,4)$ de moyenne $\mu = 3.2$ kg et d'écart type $\sigma = 0,4$ kg.

1. Quelle est la prob qu'un noveau né paise plus de 4 kg.
2. Qu'il paise moins de 3 kg.
3. Que son poid soit compris entre 2.8 et 3,6 kg.

$\Rightarrow X \rightsquigarrow N(3,2 ; 0,4)$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{X - 3,2}{0,4} \rightsquigarrow N(0,1)$$

1. $P(X > 4) = P\left(\frac{X - 3,2}{0,4} > \frac{4 - 3,2}{0,4}\right)$

$$= P\left(Z > \frac{0,8}{0,4}\right)$$
$$= P(Z > 2)$$
$$= 1 - P(Z < 2)$$
$$= 1 - \phi(2)$$
$$= 1 - 0,9772$$
$$= 0,0228$$

Propriétés :

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ est une ddp car :

- $f_X(x) > 0$
- $f_X(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- $\int f_X(x)\,dx = 1$

Preuve :

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,dx = \int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

on pose $y = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$

$x = y\sigma\sqrt{2} + \mu$

$dx = \sigma\sqrt{2}\,dy$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \sigma\sqrt{2}\,dy$$

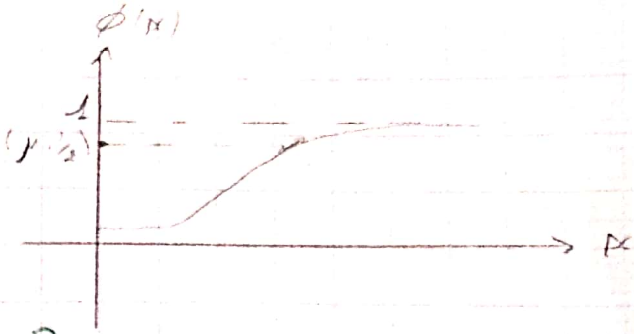
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1.$$

$$F_X(x) = \phi(x) = P(X<x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

$\phi(x)$ est croissante positive continue : $0 \le \phi(x) \le 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, le point $(\mu, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe de $\phi(x)$ et aussi le point d'inflexion de cette courbe.

F



Rq :

- On peut tjs ramener une loi Normale $N(\mu, \sigma)$ à une loi dite Normale centrée et réduite de paramètres $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.
- La transformat° linéaire d'une loi Normale est une variable normale :

soit $Y = aX + b$ avec $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow Y \sim N(a\mu_X + b, a^2\sigma_X^2)$

- La loi Normale est stable par addition :

si $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

$\Rightarrow X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$

2-5. Loi Normale centrée et réduite :

soit X une VAC :

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ alors

$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ est distribuée selon une loi Normale centrée et réduite

$\Rightarrow Z \sim N(0, 1)$

2. $P(X<3) = P\left(Z < \frac{3-3,2}{0,4}\right)$
$= P\left(Z < \frac{-0,2}{0,4}\right)$
$= P(Z < -0,5)$
$= \phi(-0,5)$
$= 1 - \phi(0,5)$
$= 1 - 0,6915$
$= 0,3085$

3. $P(2,8 < X < 3,6)$
$= P\left(\frac{2,8-3,2}{0,4} < Z < \frac{3,6-3,2}{0,4}\right)$
$= P(-1 < Z < 1)$
$= P(|Z| < 1)$
$= 2\phi(1) - 1$
$= 2 . 0,8413 - 1$
$= 0,6826$

Ex2:

$P(X<3) = 0,5517$
$P(X>7) = 0,0166$
determiner μ et σ de X.
$X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$
$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$
$P(X<3) = P\left(Z < \frac{3-\mu}{\sigma}\right)$
$= \phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right)$
$= 0,5517$
$\Rightarrow \frac{3-\mu}{\sigma} = 0,13$
$P(X>7) = P\left(Z > \frac{7-\mu}{\sigma}\right)$
$= 1 - P\left(Z < \frac{7-\mu}{\sigma}\right)$
$= 1 - \phi\left(\frac{7-\mu}{\sigma}\right)$
$= 0,0166$
$\Rightarrow \phi\left(\frac{7-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0,0166$
$\Rightarrow \phi\left(\frac{7-\mu}{\sigma}\right) = 0,9834$
$\Rightarrow \frac{7-\mu}{\sigma} = 2,13$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3-\mu}{\sigma} = 0,13 \\ \frac{7-\mu}{\sigma} = 2,13 \end{cases}$

$\Rightarrow \sigma = 2$ et $\mu = 2,74$

Ex3:

$P(Z < z) = 0,1912$
$= \phi(z)$
$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$
$= 1 - 0,1912$
$= 0,8888$
$\Rightarrow -z = 1,22$
$\Rightarrow z = -1,22$.

2.6.

Théorème :

soit $(X_1, X_2 \ldots X_n)$ un sys de n variables independan tq pour $\forall\ i \in 1..n$
$X_i \rightsquigarrow N(\mu_i, \sigma_i)$
la variable : $Y = \sum_{i=1} Z_i^2$
$Y \rightsquigarrow \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$
avec $Z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \rightsquigarrow$
est dite variable qui su loi de Khi deux à n de liberté :
$Y \rightsquigarrow \chi^2_{(n)}$

Scanné avec CamScanner

$$Z_i^2 = \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2$$

$Z^2 \sim \chi^2(1)$

$Z^2 \sim \gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Preuve :

$$M_Y(t) = E(e^{tY})$$
$$= E(e^{t\sum Z_i^2})$$
$$= E(\prod_{i=1}^{n} e^{tZ_i^2})$$
$$= \prod_{i=1}^{n} E(e^{tZ_i^2})$$
$$= \prod_{i=1}^{n} M_{Z_i^2}(t)$$

$$M_{Z_i^2}(t) = E(e^{tZ_i^2})$$
$$= E(e^{tZ_i^2})$$
$$= \int e^{tz_i^2} f(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{tz_i^2} e^{-\frac{1}{2}z_i^2}\,dz_i$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}z_i^2(1-2t)}\,dz_i$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_i^2}{(1-2t)^{-1}}\right)}\,dz_i$$

$d = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z_i}{d}\right)^2}\,dz_i$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z_i}{d}\right)^2}\,dz_i$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot d\cdot\sqrt{2\pi} = d$$
$$= (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$d = (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{1/2}{1/2 - t}\right)^{1/2} \quad \forall\ t < \frac{1}{2}$$

$Z^2 \sim \gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$\Rightarrow M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} (1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$
$$= \left(\frac{1/2}{1/2 - t}\right)^{n/2}$$

$Y \sim \gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$

loi Khideux

$Y \sim \chi^2(n)$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\, y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y/2} & \text{si } y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Gamma(\frac{n}{2})$ est la f^t gamma au pt $(\frac{n}{2})$.

$$\Gamma(\tfrac{n}{2}) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\,dx$$

Caracteristique :

- $E(Y) = M'_Y(0)$

$Y \sim \gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$

$\rightarrow$ d'après la loi gamma

$$E(Y) = \frac{p}{\sigma} = \frac{n/2}{1/2} = n$$

$$V(Y) = \frac{p}{\sigma^2} = \frac{n/2}{1/4} = 2n$$

Scanné avec CamScanner

$P(T < t) = 0{,}05 = \alpha$

$\Rightarrow t = 2{,}086$

2.2. Loi de Fisher : X

Déf :

soit 2 variables aléatoires indépendantes :

$Y_1 \rightsquigarrow \chi^2(n_1)$

$Y_2 \rightsquigarrow \chi^2(n_2)$

$$W = \frac{Y_1/n_1}{Y_2/n_2}$$

est dite distribuée selon une loi de Fisher à $n_1\, n_2$ degré de liberté

et on écrit :

$$W \rightsquigarrow F(n_1, n_2)$$

$$f_W(w) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) n_1^{n_1/2} \cdot n_2^{n_2/2}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \dfrac{w^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1 w + n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} & \text{si } w > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Caractéristique :

$$E(W) = \frac{n_2}{n_2 - 2} \quad \forall n_2 > 2$$

$$V(W) = \frac{2 n_2^2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 (n_2 - 2)^2 (n_2 - 4)} \quad \forall n_2 > 4$$

Req :

- $T^2 = \dfrac{Z^2}{Y/n} \rightsquigarrow F(1, n)$

- $W \rightsquigarrow F(n_1, n_2)$

$\Rightarrow U = \dfrac{1}{W} \rightsquigarrow F(n_2, n_1)$

donc :

$$F_\alpha(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{(1-\alpha)}(n_2, n_1)}$$

- la table de la fonct de répartit de F donne pour n_1 et n_2 données des valeurs de réel x tq $P(F_{(n_1,n_2)} < x) = \alpha$

Exp :

déterminer x tq

$P(F(20, 12) < x) = 0{,}95$

$x = 2{,}54$

2.3 Autre approximations

1. Approximat de la loi Binomiale par une loi Normale :

soit $X \rightsquigarrow B(n, p)$

la loi de X peut être approximée par une loi Normale dont les paramètre sont la moyenne et la variance de X

$(\mu = np,\ \sigma^2 = np(1-p))$

sous les deux condit° suivtes :

- $n > 5$
- $\left| \sqrt{\dfrac{p/(1-p)}{n}} - \sqrt{\dfrac{(1-p)/p}{n}} \right| < 0{,}3$

d'où on écrit $B(n, p)$ est approximée par $N(np, np(1-p))$

la prob en un pt x

$P(T < t) = 0{,}05 = \alpha$

$\Rightarrow t = 2{,}086$

2.2. Loi de Fisher : X

Déf :

soit 2 variables aléatoires indépendantes :

$Y_1 \rightsquigarrow X^2(n_1)$

$Y_2 \rightsquigarrow X^2(n_2)$

$$W = \frac{Y_1/n_1}{Y_2/n_2}$$

est dite distribuée selon une loi de Fisher à $n_1 n_2$ degré de liberté

et on écrit :

$$W \rightsquigarrow F(n_1, n_2)$$

$$f_W(w) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right) n_1^{n_1/2} \cdot n_2^{n_2/2}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot \dfrac{w^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1 w + n_2)^{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}} & \text{si } w > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Caractéristique :

$$E(W) = \frac{n_2}{n_2 - 2} \quad \forall n_2 > 2$$

$$V(W) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)} \quad \forall n_2 > 4$$

Req :

- $T^2 = \dfrac{Z^2}{Y/n} \rightsquigarrow F(1, n)$

$W \rightsquigarrow F(n_1, n_2)$

$\Rightarrow U = \dfrac{1}{W} \rightsquigarrow F(n_2, n_1)$

donc :

$$F_\alpha(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{(1-\alpha)}(n_1, n_2)}$$

- la table de la fonct de répartit de F donne pour n_1 et n_2 données des valeurs de réel x tq $P(F_{(n_1,n_2)} < x) = \alpha$.

Exp :

déterminer x tq

$P(F_{(20,12)} < x) = 0{,}95$

$x = 2{,}54$.

2.3. Autre approximations

1. Approximat de la loi Binomiale par une loi Normale :

soit $X \rightsquigarrow B(n,p)$

la loi de X peut être approximée par une loi Normale dont les paramètre sont la moyenne et la variance de X

$(\mu = np,\ S^2 = np(1-p))$

sous les deux condit suivte :

- $n > 5$
- $\left| \sqrt{\dfrac{p/(1-p)}{n}} - \sqrt{\dfrac{(1-p)/p}{n}} \right| < 0{,}3$

d'où on écrit $B(n,p)$ est approximée par $N(np, np(1-p))$

la prob en un pt x

est donc donnée approximativement par $P(X=x) = f_{X}(x)\,dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dx$$

avec $dx = 1$

et $z = \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}$

$$P(X<x) = \phi\left(\frac{x-0{,}5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Exp :

soit $X \sim B(200;\ 0{,}1)$

vérifier qu'on peut approximer par une loi normale.

. on a $n = 200 > 5$

. $\left|\sqrt{\frac{p/1-p}{n}} - \sqrt{\frac{1-p/p}{n}}\right|$

$$= \left|\sqrt{\frac{\frac{0{,}1}{1-0{,}1}}{200}} - \sqrt{\frac{\frac{1-0{,}1}{0{,}1}}{200}}\right|$$

$= 0{,}18 < 0{,}3$

donc on peut approximer par la loi Normale

$N(20, 18)$

$P(X<30)$ $\cancel{= P\left(Z < \frac{30-20}{\sqrt{18}}\right)}$

$\cancel{= P(Z<}$

$$= \phi\left(\frac{30-0{,}5-20}{\sqrt{18}}\right)$$

$= \phi(2{,}23)$

$= 0{,}9871$

$$P(X<15) = \phi\left(\frac{15-0{,}5-20}{\sqrt{18}}\right)$$

$$= \phi\left(\frac{-5{,}5}{\sqrt{18}}\right)$$

$$= 1-\phi\left(\frac{5{,}5}{\sqrt{18}}\right)$$

$= 1-\phi(1{,}29)$

$= 1-0{,}9015$

$= 0{,}0985$

2. Approximation de la loi de Poisson par une loi Normale :

Soit $X \sim P(\lambda)$

la loi de X peut être approximée par une loi Normale dont les paramètres ~~de~~ la moyenne et la variance de X ($\mu = \lambda$ et $\sigma^2 = \lambda$)

sous la condition :

$\lambda > 20$

d'où on écrit :

$P(\lambda) \longrightarrow N(\lambda, \lambda)$

$$P(X=x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

ou $z = \frac{x-\lambda}{\sqrt{\lambda}}$

$$P(X<x) = \phi\left(\frac{(x-0{,}5)-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Exp :

Soit $X \sim P(50)$

Calculer $P(X<55)$.

on a $\lambda = 50 > 20$

donc on peut approximer

n la loi normale $N(50, 50)$

$P(X < 55) = \phi\left(\frac{(55-0,5)-50}{\sqrt{50}}\right)$

$= \phi(0,63)$

$= 0,7357.$