Chapitre 2
Transformation de Laplace

0.1 Généralité :

....
....
....

0.2 Propriétés :

P1 : Linéarité
....
....
P6 : ....
P7 : Dérivée et Primitive
Théorème : Soit f une fonction admettant une T.L et telle que sa dérivée f' est localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et admet une T. L, alors

$$\mathcal{L}(f'(t))(p) = p\mathcal{L}(f(t)(p) - f(0^+).$$

où $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

Preuve : $\mathcal{L}(f'(t))(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt$ $\quad I.p.p : \begin{cases} e^{-pt} \to -pe^{-pt}, \\ f' \to f \end{cases}$

Alors, $\mathcal{L}(f'(t))(p) = [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$

or $\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-pt} = 0$ car f est d'ordre exponentiel.
D'ou le résultat.
Remarque : • De même on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f''(t))(p) &= \mathcal{L}((f'(t)'))(p) \\
&= p\mathcal{L}(f'(t))(p) - f'(0^+) \\
&= p\Big(p\mathcal{L}(f(t))(p) - f(0^+)\Big) - f'(0^+) \\
&= p^2\mathcal{L}(f(t))(p) - pf(0^+) - f'(0^+)
\end{aligned}$$

• Plus généralement, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(p) = p^n\mathcal{L}(f(t)(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}f'(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+)$$

Corollaire : Soit g une primitive de f, alors

$$\mathcal{L}(g(t))(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f(t)(p) + \frac{g(0^+)}{p}$$

Preuve : On a $g'(t) = f(t)$, donc $\mathcal{L}(f(t))(p) = \mathcal{L}(g'(t))(p) = p\mathcal{L}(g(t))(p) - g(0^+)$.

Remarque : Si $g(t) = \int_0^t f(y)dy$: primitive de f qui s'annule en zéro. Alors

$$\mathcal{L}(g(t)(p) = \mathcal{L}(\int_0^t f(y)dy)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f(t))(p)$$

P8 : Multiplication par $t^n, n \in \mathbb{N}^*$:

théorème : Soit f une fonction admettant une T.L et telle que la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est localement intégrable et admet une T. L, alors $\mathcal{L}(f)$ est infiniment dérivable et on a :

$$\mathcal{L}(t^n f(t))(p) = (-1)^n \Big(\mathcal{L}(f(t)(p)\Big)^{(n)}.$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Big(\mathcal{L}(f(t))(p)\Big)^{(n)} = \mathcal{L}((-t)^n f(t))(p)$$

En particulier,

$$\Big(\mathcal{L}(f(t))(p)\Big)' = \mathcal{L}(-t\ f(t))(p) = -\mathcal{L}(t\ f(t))(p)$$

Exemple : Calculer $\int_0^{+\infty} t \sin t e^{-t} dt$

Réponse :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} t \sin t e^{-pt} dt &= \mathcal{L}(t \sin t)(p) = -\mathcal{L}(-t \sin t)(p) \\
&= -\Big(\mathcal{L}(\sin t)(p)\Big)' \\
&= -(\frac{1}{p^2+1})' \\
&= \frac{2p}{(p^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Alors $\int_0^{+\infty} t \sin t e^{-t} dt = \frac{1}{2}$

Proposition : Si la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ admet une T. L, alors on a

$$\mathcal{L}(\frac{f(t)}{t})(p) = \int_p^{+\infty} \mathcal{L}(f(t))(y)dy$$

0.3 Transformée de Laplace inverse

Soit f une fonction admettant une T.L notée $F(p)$, alors on appelle original de $F(p)$ la fonction $f(t)$ et on note

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(F(p)\Big)$$

Remarques :

1. $\mathcal{L}^{-1}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}^{-1}(f) + \beta\mathcal{L}^{-1}(g)$
2. Méthode pratique pour calculer l'original de $F(p)$:
   (a) On détermine la transformée inverse de $F(p)$ directement aves les exemples de références.
   (b) Décomposer $F(p)$ en une somme de termes dont les transformées inverses sont données par les exemples de références et les propriétés.
   (c) Pour des fractions rationnelles, on décompose dans l'ensemble des réels en éléments simples.

Exemple :

1. $F(p)\frac{e^{-2p}}{p+1}$
2. $F(p) = \frac{3p+7}{p^2-2p-3}$
3. $F(p) = \frac{3p+1}{(p-1)(p^2+1)}$

0.4 Application de la Transformée de Laplace

0.4.1 Résolution d'une équation différentielle ordinaire :

Exemple : Résoudre

$$y'(t) = y(t) + te^t \quad \text{avec} \quad y(0) = -1$$

Réponse : ....

0.4.2 Résolution d'un système différentiel

Exemple : Résoudre

$$\begin{cases} x'(t) - x(t) + 2y(t) = 0, \\ x(t) - y'(t) + y(t) = 0, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

0.4.3 Résolution d'une équation intégrale :

Exemple : On cherche f nulle pour $t < 0$, telle que

$$f(t) + \int_0^t e^{-x} f(t-x)dx = \cos t$$

0.4.4 Fonction de transfert d'un système linéaire :

On considère un système linéaire, c'est à dire la sortie $s(t)$ et l'entrée $e(t)$ sont liées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
Notons par

$$S(p) = \mathcal{L}(s(t))(p) \quad \text{et} \quad E(p) = \mathcal{L}(e(t))(p)$$

En particulier si les conditions initiales sont toutes nulles (c'est à dire le système part du repos), alors

$$S(p) = H(p)E(p)$$

où $H(p)$: Fonction de transfert du système.
Remarque :

1. Si on associe **en série deux systèmes linéaires** de fonction de transfert respective H_1 et H_2 alors le système équivalent admet H_1H_2 pour fonction de transfert.
2. Si on associe **en parallèle deux systèmes linéaires** de fonction de transfert respective H_1 et H_2 alors le système équivalent admet $H_1 + H_2$ pour fonction de transfert.

Exemple : On cherche à déterminer la réponse $s(t)$ en fonction de l'entrée $e(t)$ pour un système linéaire dont la fonction de transfert est

$$H(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

si $e(t) = aU(t)$