x3

A.U. : 2021.2022

Travaux Dirigés : AIP

Exercice 1

On considère le système décrit par la fonction de transfert échantillonnée suivante :

$$G(q^{-1}) = \frac{bq^{-1}}{1-aq^{-2}}$$

1. Donner l'équation récurrente donnant la sortie du système à l'instant k.

2. Les séquences de signaux *y(k)* et *u(k)* étant nulles pour *k<0*. Déterminer l'estimateur des moindres carrés non récursifs $\hat{\theta}(3)$ du vecteur de paramètres $\theta^T = [a \quad b]$.

   On donne le tableau de mesures suivant :

k	0	1	2	3	4
y(k)	0	0.9	-0.7	-0.29	0.6
u(k)	1	-0.8	-0.5	0.7	-

3. Appliquer la méthode des moindres carrés récursifs pour estimer $\hat{\theta}(4)$ à partir de $\hat{\theta}(3)$.

Exercice 2

On considère un système de deuxième ordre pouvant être décrit par le modèle suivant:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + bu(k-1) + e(k)$$

où $\{e(k)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle et de variance σ^2.

Les mesures expérimentales relatives au système considéré sont :

$$y(1)=5,\ y(2)=0,\ y(3)=5,\ y(4)=0,\ y(5)=10,\ y(6)=10.$$

$$u(2)=0,\ u(3)=6,\ u(4)=0,\ u(5)=0.$$

1. Déterminer les paramètres de $\hat{\theta}(k)$ du vecteur de paramètres $\theta^T = [a_1 \quad a_2 \quad b]$ en appliquant la méthode non récursive des moindres carrés ordinaires.

2. Calculer la variance du bruit *e(k)*.

3. Calculer la covariance de l'erreur estimée.

4. Comment changent les paramètres de la question (1) si on tient compte des données suivantes :

$$y(7)=0,\ u(6)=0$$

Calculer les nouveaux paramètres en utilisant la méthode récursive des moindres carrés ordinaires.

Exercice 3

Soit un mobile se déplaçant avec un mouvement rectiligne à la vitesse constante v.

Soit t_0=0s l'instant initiale et y_0 est la position initial de mobile exprimé en *km*.

Pour estimer le vecteur de paramètres $\theta^T = [y_0 \quad v]$ on effectue des observations de la position du mobile toute les minutes.

Les observations sont supposées être sans biais systématique, c'est à dire l'erreur des mesures est supposé être un bruit blanc de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 10^{-2}$.

On donne

1. Donner l'équation de modèle.
2. Les deux premières mesures sont telle que : $y(1)$=9*km* ; $y(2)$=10.8*km*.
   Appliquant la méthode non récursive des moindres carrés ordinaires pour calculer $\hat{\theta}(2)$ du vecteur de paramètres.
3. Calculer la covariance du $\hat{\theta}(2)$.
4. Appliquer la méthode des moindres carrés récursifs pour estimer $\hat{\theta}(3)$ et $\hat{\theta}(4)$ on donne $y(3)$=12,1*km* ; $y(4)$=13.13*km*.
5. Calculer la covariance du $\hat{\theta}(4)$.

Travaux Dirigés : AIP

...ice 1 :

$$G(q^{-1}) = \frac{bq^{-1}}{1-aq^{-2}} = \frac{y(k)}{u(k)}.$$

1) $(1-aq^{-2}) \cdot y(k) = b.q^{-1}u(k).$

$y(k) - aq^{-2}y(k) = b.q^{-1}.u(k).$

$y(k) - a\, y(k-2) = b\,u(k-1).$

$$\boxed{y(k) = a.y(k-2) + b.u(k-1)}$$

2) $\theta^T = [a \quad b]$: vecteur permanent.

$\varphi(k) = [y(k-2) \quad u(k-1)]$: vecteur d'observateur.

MCNR ~ MCO → $\hat{\theta}(3)$?

$\hat{\theta}(k) = [\phi^T(k) \; \phi(k)]^{-1} . \phi^T(k).Y(k).$

avec $\phi(k) = \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \vdots \\ \varphi(k) \end{bmatrix}$; $y(k) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}$

$\hat{\theta}(3) = [\phi^T(3) \; \phi(3)]^{-1} \phi^T(3) \, Y(3).$

$\phi(3) = \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \varphi(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(-1) & u(0) \\ y(0) & u(1) \\ y(1) & u(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,8 \\ 0,9 & -0,5 \end{bmatrix}$

$y(3) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 \\ -0,7 \\ -0,89 \end{bmatrix}$

$\phi^T(3).\phi(3) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,9 \\ 1 & -0,8 & -0,5 \end{bmatrix}}_{2\times 3} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0,8 \\ 0,9 & -0,5 \end{bmatrix}}^{3\times 2} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0,81 & -0,45 \\ -0,45 & 1,89 \end{bmatrix}$$

$$\left[\phi^T(z)\,\phi(z)\right]^{-1} = \frac{1}{det()}\, t_{com}$$

$$det() = 0,81 \times 1,89 - (0,45)^2 = 1,32.$$

$$\left[\phi^T(z)\,\phi(z)\right]^{-1} = \frac{1}{1,32} \cdot \begin{bmatrix} 1,89 & 0,45 \\ 0,45 & 0,81 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,43 & 0,34 \\ 0,34 & 0,61 \end{bmatrix}$$

$$\phi^T(z) \cdot Y(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,9 \\ 1 & -0,8 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9 \\ -0,7 \\ -0,29 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0,26 \\ 1,605 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(z) = \begin{bmatrix} 1,43 & 0,34 \\ 0,34 & 0,61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,26 \\ 1,605 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,17 \\ 0,89 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}(3) \\ \hat{b}(3) \end{bmatrix}.$$

3) MCR $\rightsquigarrow \hat{\theta}(k)$; on pose $\mathcal{E}^T(k) = \phi(k)$.

$$\begin{cases} (3)\ \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k)\,\phi(k).\,\varepsilon^{\circ}(k) \\ (1)\ \varepsilon^{\circ}(k) = y(k) - \hat{\theta}^T(k-1).\,\phi(k). \\ (2)\ P(k) = P(k-1) - \dfrac{P(k-1)\,\phi(k).\,\phi^T(k).\,P(k-1)}{1 + \phi^T(k).\,P(k-1)\,\phi(k)}. \end{cases}$$

(α)

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + P(k).\ \varepsilon^T(k)\ \varepsilon^{\circ}(k). \\ \varepsilon^{\circ}(k) = y(k) - \theta(k-1).\ \mathcal{E}^T(k). \\ P(k) = P(k-1) - \dfrac{P(k-1)\ \phi(k).\ \phi^T(k).\ P(k-1)}{1 .\ \phi^T(k)\ \ D(k-1).\ \phi(k)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{\theta}(4) = \hat{\theta}(3) + P(4)\,\varepsilon^T(4).\,\varepsilon^\circ(4). \\ \varepsilon^\circ(4) = y(4) - \hat{\theta}^T(3).\,\varepsilon^T(4). \\ P(4) = P(3) - \dfrac{P(3).\,\varepsilon^T(4).\,\varepsilon(4).P(3)}{1 + \varepsilon(4).\,P(3).\,\varepsilon^T(4)} \end{cases}$$

$$\varphi(k) = [\,y(k-2)\ .\ u(k-1)\,].$$

$$\varphi(4) = [\,y(2)\,.\,u(3)\,] = [\,-0{,}7 \quad 0{,}7\,].$$

$$\varepsilon^\circ(4) = 0{,}6 - [\,0{,}17 \quad 0{,}89\,]\begin{bmatrix}-0{,}7\\0{,}7\end{bmatrix}.$$

$$= 0{,}6 - 0{,}504 = 0{,}096.$$

$P(3) = ?$

$$P(k) = [\,\phi^T(k)\,\phi(k)\,]^{-1}$$

$$P(k) = [\,\phi^T(3).\,\phi(3)\,]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}43 & 0{,}34 \\ 0{,}34 & 0{,}61 \end{bmatrix}^{-1}$$

Exercice n°2 :

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b\,u(k-1) + e(k).$$

1) $\theta^T = [\,a_1 \quad a_2 \quad b\,]$ vecteur de paramètres.

$$\varphi(k) = [\,-y(k-1) \quad -y(k-2) \quad u(k-1)\,].\ V_0$$

$MCNR = MCO \rightsquigarrow \hat{\theta}(k) = [\,\phi^T(k).\,\phi(k)\,]^{-1}.\,\phi^T(k).\,Y(k)$

avec $\phi(k) = \begin{bmatrix}\phi(1)\\ \vdots \\ \phi(k)\end{bmatrix}$; $Y(k) = \begin{bmatrix}y(1)\\ \vdots \\ y(k)\end{bmatrix}$

$$\hat{\theta}(6) = [\phi^T(6).\phi(6)]^{-1} . \phi^T(6) . Y(6).$$

$$Y(k) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \\ y(6) \end{bmatrix}$$

$$\phi(6) = \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \varphi(3) \\ \varphi(4) \\ \varphi(5) \\ \varphi(6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y(-1) & -y(0) & -\cancel{y}(0) \\ -y(1) & y(0) & u(1) \\ -y(2) & -y(1) & u(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(5) & -y(4) & u(5) \end{bmatrix}$$

$$\phi(6) = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi^T(6) . \phi(6) = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 & -10 \\ -5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 125 & 0 & -30 \\ 0 & 50 & 0 \\ -30 & 0 & 36 \end{bmatrix}$$

$$[\phi^T(6) . \phi(6)]^{-1} = \frac{1}{\text{dét}} \, {}^t\text{com} \qquad (\text{dét} = 18.10^4)$$

$${}^t\text{com} = \text{Com} = \begin{bmatrix} 1800 & 0 & 1500 \\ 0 & 3600 & 0 \\ 1500 & 0 & 6250 \end{bmatrix}$$

$$\left[\phi^T(6)\cdot\phi(6)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 & 0{,}0083 \\ 0 & 0{,}02 & 0 \\ 0{,}0083 & 0 & 0{,}034 \end{bmatrix}$$

$$\phi^T(6)\cdot Y(6) = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 & -10 \\ -5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 \\ -75 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(6) = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 & 0{,}0083 \\ 0 & 0{,}02 & 0 \\ 0{,}0083 & 0 & 0{,}034 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -100 \\ -75 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1{,}5 \\ -0{,}83 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1(6) \\ \hat{a}_2(6) \\ \hat{b}(6) \end{bmatrix}$$

2) $\sigma^2 = E\left[e^2(k)\right]$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} e(i).$$

N = nbre d'observation.

$N = 4$

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}\cdot\sum_{i=3}^{6} e^2(i)$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^2(3)+e^2(4)+e^2(5)+e^2(6)\right]$$

$e(3) = y(3) - \hat{y}(3) = y(3) - \hat{\theta}^T(3)\,\varphi^T(3)$

$e(4) = y(4) - \hat{\theta}^T(6)\cdot\varphi(6)$

$e(5) = y(5) - \hat{\theta}^T(6)\cdot\varphi^T(6)$

$e(6) = y(6) - \hat{\theta}^T(6)\cdot\varphi^T(6)$

$\varphi(k) = \left[-y(k-1) \quad -y(k-2) \quad U(k-1)\right]$

$$e(3) = 5 - \begin{bmatrix} -1 & -1,5 & -983 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = -2,5$$

$$e(4) = 0 - \begin{bmatrix} -1 & -1,5 & -0,83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = -0,02$$

$$e(5) = 10 - \begin{bmatrix} -1 & -1,5 & -983 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = 2,5$$

$$e(6) = 10 - \begin{bmatrix} -1 & -1,5 & -0,83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} \cdot \left[(-2,5)^2 + (-0,02)^2 + (2,5)^2 + 0^2 \right]$$

$$\boxed{\sigma^2 = 3,125}$$

3) $$\mathrm{cov}\left(\hat{\theta}(6)\right) = \sigma^2 \cdot P(6)$$

$$= 3,125 \cdot \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0,0083 \\ 0 & 0,02 & 0 \\ 0,0083 & 0 & 0,034 \end{bmatrix}$$

$$\left(P(k) = \left[\Phi^T(k) \; \Phi(k) \right]^{-1} \right)$$

$$P(k) = P(k-1) -$$

CR ~> $\hat{\theta}(7)$?

$$\begin{cases} \hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(6) + P(7) \cdot \varphi^T(7) \cdot \varepsilon^0(7) \\ \varepsilon^0(7) = y(7) - \theta^T(6) \cdot \varphi^T(7) \\ P(7) = P(6) - \dfrac{P(6) \cdot \varphi^T \cdot \varphi(7) \cdot P(6)}{1 + \varphi(7) \cdot P(6) \cdot \varphi^T(7)} \end{cases}$$

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & -y(k-2) & U(k-1) \end{bmatrix}$$

$$\varphi(7) = \begin{bmatrix} -y(6) & -y(5) & U(6) \end{bmatrix}$$

$$\varphi(7) = \begin{bmatrix} -10 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon^0(7) = 0 - \begin{bmatrix} -1 & -1,5 & -0,83 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} = -25$$

$$\varphi(7) \cdot P(6) \cdot \varphi^T(7) = \begin{bmatrix} -10 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0,0083 \\ 0 & 0,02 & 0 \\ 0,0083 & 0 & 0,034 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0,1 & -0,2 & -0,083 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} = 3$$

$$P(6) \cdot \varphi^T(7) \cdot \varphi(7) \cdot P(6) = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0,0083 \\ 0 & 0,02 & 0 \\ 0,0083 & 0 & 0,034 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & -10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0,0083 \\ 0 & 0,02 & 0 \\ 0,0083 & 0 & 0,034 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0,1 \\ -0,2 \\ -0,083 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,1 & -0,2 & -0,083 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,01 & 0,02 & 0,083 \\ 0,02 & 0,04 & 0,016 \\ 0,0063 & 0,016 & 0,0068 \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$P(7) = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 & 0{,}0083 \\ 0 & 0{,}02 & 0 \\ 0{,}0083 & 0 & 0{,}034 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}0083 \\ 0{,}02 & 0{,}04 & 0{,}016 \\ 0{,}0083 & 0{,}016 & 0{,}0068 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}0075 & -0{,}005 & 0{,}0063 \\ -0{,}005 & 0{,}01 & 0{,}004 \\ 0{,}0063 & -0{,}004 & 0{,}0051 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(7) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1{,}5 \\ -0{,}83 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0075 & -0{,}005 & 0{,}0063 \\ -0{,}005 & 0{,}01 & -0{,}004 \\ 0{,}0063 & -0{,}04 & 0{,}0051 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} (-25)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ -1{,}5 \\ -0{,}83 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}025 \\ -0{,}05 \\ -0{,}023 \end{bmatrix} (-25)$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}37 \\ -0{,}25 \\ -0{,}255 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\hat{a}_1(7) \\ \hat{a}_2(7) \\ \hat{b}(7) \end{bmatrix}$$

Exercice 3 :

1) L'équation et mvt.

$x(t) = v.t + y_0$

$y(t) = x(t) + e(t)$.

$$\boxed{y(t) = v.t + y_0 + e(t)}$$

$y_k = v.k + y_0 + e_k$

objectif estimation:

$\theta^T = [y_0 \;\; v]$ / $\varphi(k) = [1 \;\; k]$

MCNR $\simeq$ MCO $\rightsquigarrow \theta^{-1}(2) = ?$

$$\hat{\theta}(2) = \left[\phi^T(2).\phi(2)\right]^{-1}.\phi^T(2).Y(2).$$

avec :

$$\phi(2) = \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Y(2) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10,8 \end{bmatrix}.$$

$$\phi^T(2).\phi(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\phi^T(2).\phi(2)\right]^{-1} = \frac{1}{\det}.t_{com} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\phi^T(2).Y(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 10,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19,8 \\ 30,6 \end{bmatrix}.$$

$$\hat{\theta}(2) = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19,8 \\ 30,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,2 \\ 1,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}_0(2) \\ \hat{\vartheta}(2) \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner