Un problème de Cauchy pour l'équation (3,9)

$$\begin{cases} \partial_x u(x,y) + x\,\partial_y u(x,y) = 0 \\ u(0,y) = \phi(y) \end{cases}$$ où ϕ de classe $\mathcal{C}^1$.

$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longmapsto \gamma(t) = (a(t), b(t))$ une courbe intégrale

du champ de vecteur $X(x,y) = (1, x)$.

c.à.d : $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$

$\iff (a'(t), b'(t)) = (1, a(t))$.

$\iff \begin{cases} a'(t) = 1 & (1) \\ b'(t) = a(t) & (2) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow a(t) = t + a_0$.

(2) : $b'(t) = t + a_0$.

$\Rightarrow b(t) = \frac{1}{2} t^2 + a_0 t + b_0$. avec $(a_0, b_0) = \gamma(0)$.

L'équation cartésienne de γ :

$$b(t) = \underbrace{\frac{1}{2} t^2 + a_0 t + \frac{1}{2} a_0^2}_{} - \frac{1}{2} a_0^2 + b_0$$

$$b(t) = a^2(t) - \frac{1}{2} a_0^2 + b_0.$$

$$\iff b = a^2 - \frac{1}{2} a_0^2 + b_0.$$