République Tunisienne Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Gabès
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès

EPREUVE D'EVALUATION

Année Universitaire:	2022-2023	**Date de l'Examen**:	Juin 2023
Nature:	Examen	**Durée**:	2h
Diplôme:	Ingénieur	**Nombre de pages**:	
Section:	GCR1/GCP1	**Enseignant**:	Nadia Sraieb
Niveau d'études:	1 année	**Doc autorisés**:	Non
Matière:	Maths de l'ing	**Remarque**:	

Exercice 1

Soit E un espace donné et soit T une famille de partie de E.
1) Sous quelles conditions (E, T) sera appelé un espace mesurable.
2) Soit les applications $f : (E, T) \to (E', T')$ et $\mu : (E, T) \to (E', T')$ où (E, T) et (E', T') sont deux espaces mesurables.
a) Sous quelles condition μ sera dite une mesure ?
b) Quant est ce que la fonction f sera appelée (T, T')-mesurable ?
c) Soit la fonction indicatrice $I_A : E \to E'$ définie par

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la fonction indicatrice I_A est mesurable, si et seulement si $A \in \mathcal{T}$.

Exercice 2

1) Soit la fonction $f(x) = Log(x)Log(1 - x)$.
a) Donner le domaine de définition de f et montrer que f se prolonge par continuité en 0 et 1.
b) Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.
2) Soit $F(x) = \int_0^\infty \frac{Arctg(tx)}{t(1+t^2}dt, \quad x \in \mathbb{R}$
a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$et exprimer F' sans symbole intégrale.
b) En déduire une expression simple de $F(x)$.
c) Calculer

$$\int_0^\infty \left(\frac{Arctgt}{t}\right)^2 dt.$$

Exercice 3

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textbf{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$$

1) a) Montrer que f est intégrable.
b) Calculer la transformation de Fourier de f sur $\mathbb{R}$, on la notera $\mathcal{F}(f)$.
2) Citer le théorème de Plancherel.
3) Soit la fonction

$$g(x) = \frac{sin(\pi x}{\pi x}, \quad x > 0.$$

a) Caluler $\mathcal{F}(g)$.
b) Déduire la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{sin(\pi x}{\pi x} dx\Big)^2.$$

4) Soit la fonction $g(x) = e^{-\pi x^2}, \;\; x \in \mathrm{IR}$
Caluler $\mathcal{F}g$ **sachant que** $\mathcal{F}(\pi t e^{-\pi t^2})(x) = -i\pi x e^{-\pi x^2}$.

Bonne chance !