Classe : GEA2
Année Universitaire : 2009-2010
Durée : 2 heures
Documents : Non Autorisés

Devoir de Contrôle

***

Analyse et Identification des Procédés

Exercice 1

Soit un système dont la sortie est sujet à une perturbation aléatoire. Ce système peut être représenté par le modèle Auto- Régressif à Moyenne Ajustée avec entrée eXogène suivant :

$$y(k) = q^{-d}\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}v(k)$$

avec :

- $u(k)$, $y(k)$ et $v(k)$ représentent respectivement l'entrée, la sortie et un bruit blanc.

et

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} \cdots + a_{n_A} q^{-n_A};$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} \cdots + b_{n_B} q^{-n_B};$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} \cdots + c_{n_C} q^{-n_C}.$$

L'identification structurelle a conduit aux résultats suivants :

$$d = 0; \quad n_A = n_B = n_C = 1.$$

1- Après avoir examiné le cas de la convergence, montrer que la corrélation entre l'erreur de prédiction et le vecteur d'observations est non nulle.

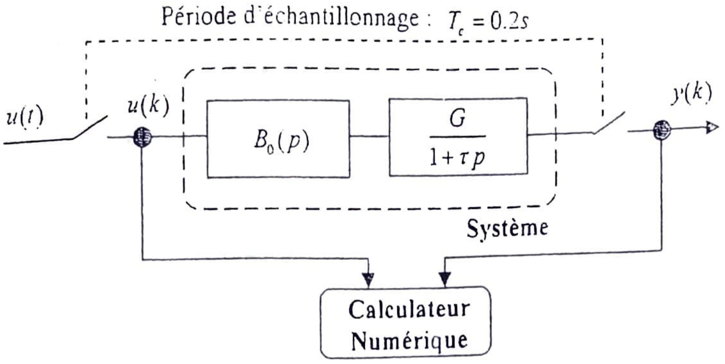
2- Proposer une méthode d'identification adéquate pour l'estimation des paramètres du système considéré. VIOR

3- Déterminer les estimés par exploitation des mesures suivantes et valider le modèle ainsi obtenu.

k	1	2	3	4	5
$u(k)$	−0.1	0.3	0.6	−0.2	0.1
$y(k)$	0.10	0.07	0.13	0.24	0.18

Exercice 2

Soit le schéma fonctionnel d'une chaîne d'acquisition des données de la figure suivante :



1. Donner la fonction de transfert échantillonnée du système considéré ci-dessus.

2. A l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires et par exploitation des mesures suivantes, donner le vecteur des estimés à l'instant $k=4$. A l'instant $k=5$, estimer récursivement les paramètres G et τ du système.

k	1	2	3	4	5
$u(k)$	−0.61	0.90	0.14	−0.27	0.10
$y(k)$	0.24	0.13	0.25	0.24	0.18

Fonction de transfert continue	Fonction de transfert discrète avec bloqueur d'ordre zéro
$\frac{1}{\tau_i s}$	$\frac{b_1 z^{-1}}{1-z^{-1}}$ avec $b_1 = \frac{T_e}{\tau_i}$
$k\left(1+\frac{1}{\tau_i s}\right)$	$\frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1-z^{-1}}$ avec $b_0 = k$ et $b_1 = k\left(\frac{T_e}{\tau_i} - 1\right)$
$\frac{k}{1+\tau s}$	$\frac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}}$ avec $a_1 = -e^{\frac{-T_e}{\tau}}$ et $b_1 = k\left(1 - e^{\frac{-T_e}{\tau}}\right)$
$\frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$ avec : $\zeta < 1$, $\omega_p = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$	$\frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$ avec : $b_1 = k\left(1 - e^{\frac{-\zeta T_e}{\tau}}\left(\cos\omega_p T_e + \frac{\zeta}{\omega_p \tau}\sin\omega_p T_e\right)\right)$ $b_2 = k e^{\frac{-\zeta T_e}{\tau}}\left(e^{\frac{-\zeta T_e}{\tau}} - \left(\cos\omega_p T_e + \frac{\zeta}{\omega_p \tau}\sin\omega_p T_e\right)\right)$ $a_1 = -2e^{\frac{-\zeta T_e}{\tau}}\cos\omega_p T_e$ et $a_2 = e^{\frac{-2\zeta T_e}{\tau}}$

1) $y(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} v(k)$

$d = 0 \quad n_A = n_B = n_C = 1$

$\Rightarrow y(k) = \frac{b_1 q^{-1}}{1+a_1 q^{-1}} u(k) + \frac{1+c_1 q^{-1}}{1+a_1 q^{-1}} v(k).$

$\Rightarrow y(k) = -a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) + c_1 v(k-1) + v(k)$

$\boxed{\hat{y}(k) = -\hat{a}_1 y(k-1) + \hat{b}_1 u(k-1)}$ le prédicteur ajustable à priori

pour $\hat{\theta} = \theta$ (à la convergence)

$\boxed{\varepsilon = v(k) + c_1 v(k-1)}$ $\quad \varepsilon, \varphi$

D'autre part :

$\varphi^T(k) = [-y(k-1) \quad u(k-1)]$

or $\boxed{y(k) = -a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) + c_1 v(k-1) + v(k)}$

$\rightarrow \varphi(k)$ dépend de $y(k-1)$

$\rightarrow y(k-1)$ dépend de $v(k-1)$.

$\Rightarrow \Phi(k) = f(v(k), v(k-1) \ldots)$.

D'ou une corrélation (dépendance) non nulle entre $\varphi(k)$ et $\varepsilon(k)$ ......

$\Rightarrow E\{\varphi(k).\varepsilon(k)\}_{\hat{\theta}=\theta} \neq 0$

2) Méthode de variable instrumentales à observations retardées VIOR.

3) $\varphi^T(k) = [-y(k-2) \quad u(k-1)]$

$\theta(k) = [a_1 \quad b_1]$

$$\Rightarrow \Phi(5) = \begin{bmatrix}\varphi^T(3)\\ \varphi^T(4)\\ \varphi^T(5)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-y(1) & u(2)\\ -y(2) & u(3)\\ -y(3) & u(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0,10 & 0,3\\ -0,07 & 0,6\\ -0,13 & -0,2\end{bmatrix}$$

$$\Phi^T(5)\cdot\Phi(5) = \begin{bmatrix}-0,10 & -0,07 & -0,13\\ 0,3 & 0,6 & -0,2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0,10 & 0,3\\ -0,07 & 0,6\\ -0,13 & -0,2\end{bmatrix}$$

il suffit de faire les calculs. $= \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \Rightarrow \hat\theta(5) = \left(\Phi^T(5)\cdot\Phi(5)\right)^{-1}\Phi^T(5).$

Test de décorrélation

le principe $E\{\varepsilon(k)\cdot\hat{y}(k-i)\} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon(k)\cdot\hat{y}(k-i)$

$$R(i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon(k)\cdot\hat{y}(k-i) \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, n_A$$

$\begin{cases} i = 0, 1 \\ N = 3 \end{cases}$

$$RN(i) = \frac{R(i)}{\sqrt{\underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^2(k)\right)}_{var(\varepsilon(k))}\underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\hat{y}^2(k)\right)}_{var(y(k))}}}$$

Si la décorrélation est parfaite :

$$RN(0) = RN(1) = \dots = RN(n_A) = 0.$$