FILTRAGE OPTIMAL

MASTERE RECHERCHE ASR

Plan

I. Introduction générale

II. Filtre de Wiener

III. Filtrage de Kalman

IV. Applications du filtrage de Kalman

Chapitre 1

Introduction générale

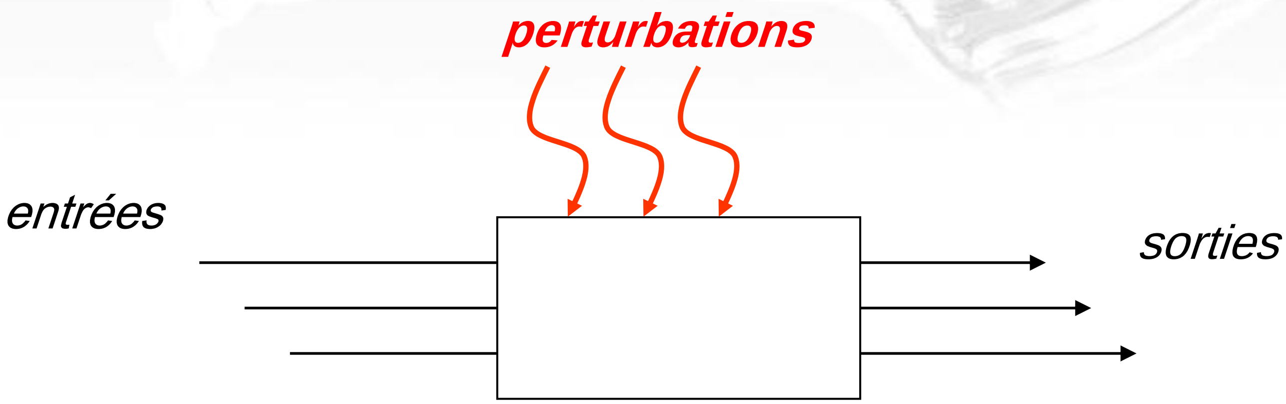
I.1. Processus

Un processus ?

système physique

temps

Influences internes et externes



Sortie : variable mesurable caractéristique de l'évolution du système

Entrée : variable d'origine externe susceptible d'influencer l'évolution du système

Un processus est un système physique qui évolue au cours du temps sous l'effet de diverses influences internes et externes.

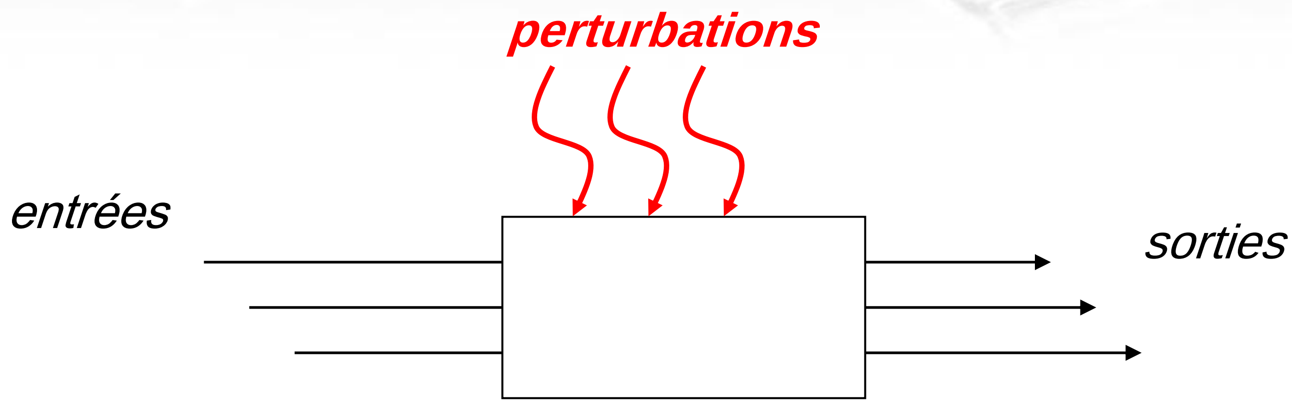
I.1. Processus

Un processus ?

système physique

temps → continu / discret

Influences internes et externes



Sortie : variable mesurable caractéristique de l'évolution du système

Entrée : variable d'origine externe susceptible d'influencer l'évolution du système

I.2. Processus continu

Un processus est dit **continu** si les **grandeurs** qui le caractérisent sont de nature **continues**.

L'évolution au cours du temps est décrite par des signaux **continus au sens mathématique du terme**.

Le **processus continu** peut être caractérisé par un ensemble **d'équations différentielles et algébriques** de la forme:

$$\dot{x} = f(x, u, t, p)$$

$$y = h(x, u, t, p)$$

$t \in R$ temps

$x \in R^n$ état

$u \in R^l$ commande

$y \in R^m$ sortie

$p \in R^n$ perturbation

$f(.)$ fonction d'évolution

$h(.)$ fonction de sortie

I.2. Processus continu

Si les signaux ou les variables intervenant dans la description du processus sont des **fonction du temps alors ils sont :**

- **déterministes** si leurs valeurs sont **parfaitement définis** à chaque instant

- **aléatoires** si seul leurs probabilités d'avoir une amplitude sont définies à chaque instant (cas des signaux bruités)

I.2.1. Processus continu linéaire

Processus **linéaire** ?

Il valide le principe de superposition :

Si $\forall i \in \{1,\ldots,k\}$ l'entrée $u_i(t)$ provoque la sortie $y_i(t)$

alors $u(t)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i(t),\ \alpha_i \in R$ provoque $y(t)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i y_i(t)$

Processus **continu linéaire non bruité**

$$\dot{x}(t) = A(t).x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t).x(t) + D(t)u(t)$$

Processus continu linéaire **stationnaire**

$$A(t) = A,\ B(t) = B, C(t) = C,\ D(t) = D$$

I.3. Processus discret

Un processus est dit **discret** si l'évolution et/ou l'observation des grandeurs qui le caractérisent ne peut se faire qu'à des **instants particuliers**.

systèmes échantillonnés
systèmes logiques séquentielle

Le processus **discret** peut être caractérisé par un ensemble de **relations récurrentes** de la forme:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, t_k, p_k)$$
$$y_{k+1} = h(x_k, u_k, t_k, p_k)$$

$t_k \in R$ temps
$x_k \in R^n$ état à l'instant t_k
$u_k \in R^l$ commande à l'instant t_k
$y_k \in R^m$ sortie à l'instant t_k
$p_k \in R^n$ perturbation à l'instant t_k
$f(.)$ fonction d'évolution
$h(.)$ fonction de sortie

I.3.1. Processus discret linéaire

Processus **linéaire**

Il valide le principe de superposition :

Si $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$ l'entrée $u_i(t_k)$ provoque la sortie $y_i(t_k)$

alors $u(t)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i(t_k),\ \alpha_i \in R$ provoque $y(t)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i y_i(t_k)$

Processus **discret linéaire non bruité**

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k$$
$$y_k = C_k.x_k + D_k.u_k$$

Processus discret linéaire **stationnaire**

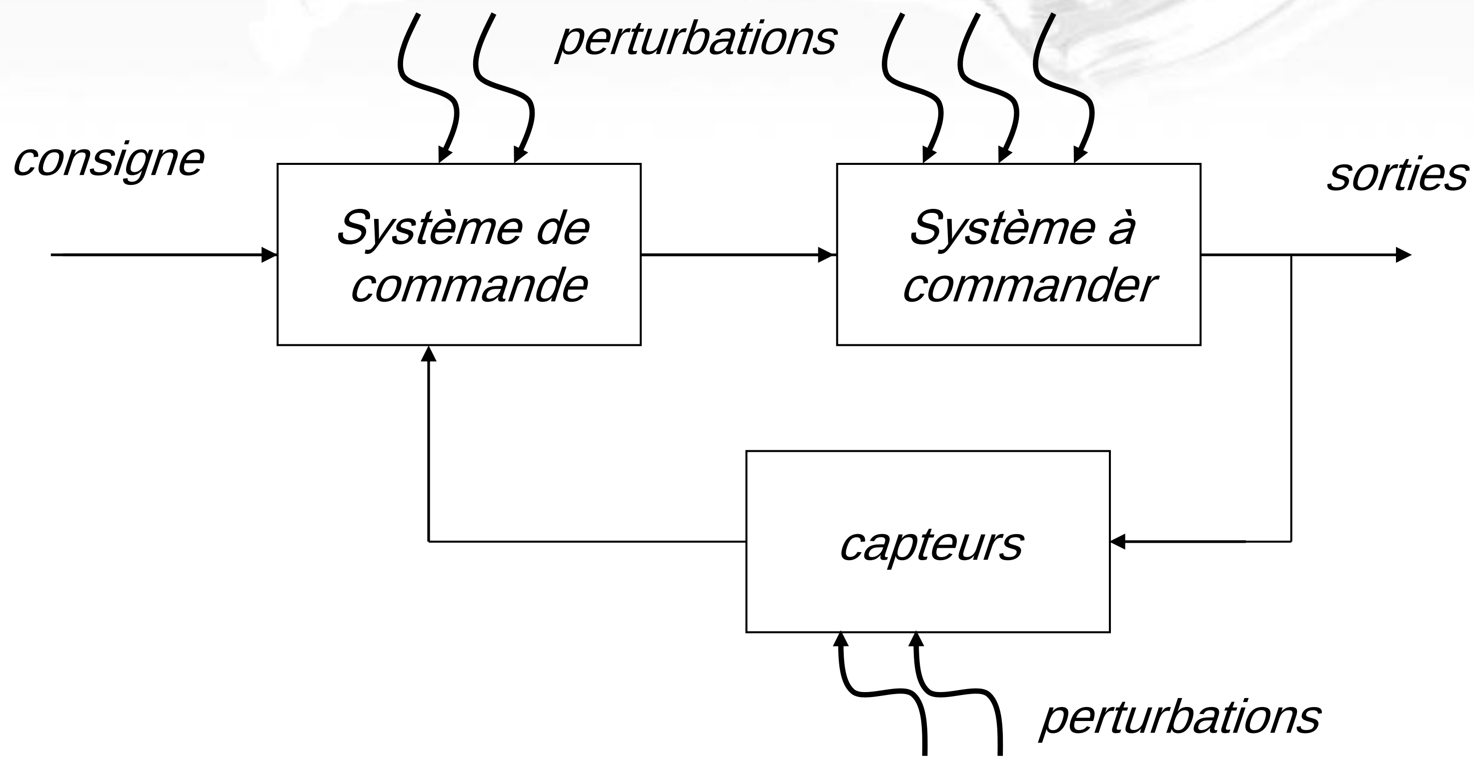
$$A_k = A,\ B_k = B, C_k = C,\ D_k = D$$

I.4. Commande d'un processus

Commander ?

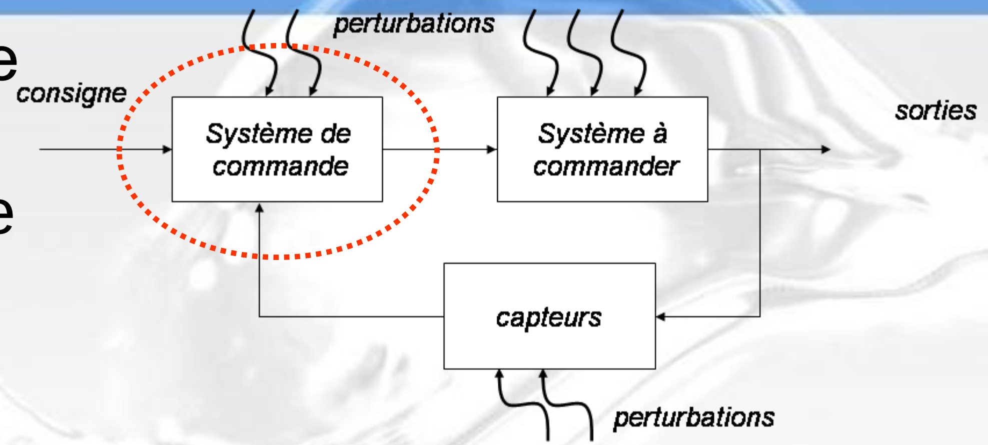
Imposer un comportement souhaité

régulation et asservissement



I.4.1. Système de commande

Le système de commande utilise des variables internes, donc l'**estimation** et le **filtrage** en vue de générer ou de donner une estimation des informations manquantes



L'estimation peut être:

- **l'observation** qui a pour but l'estimation des variables dans un cadre **déterministe**

- Le **filtrage** qui a pour but l'estimation des variables dans un cadre **stochastique**

Dans ce cours, on s'intéresse au problème de filtrage.

I.5. Le filtrage

Filtrer ?

Mettre en forme un signal

Éliminer le bruit superposé au signal utile

Avec l'utilisation de plus en plus de calculateurs numérique dans la chaîne de commande, le filtrage est devenu un **outil fondamental**.

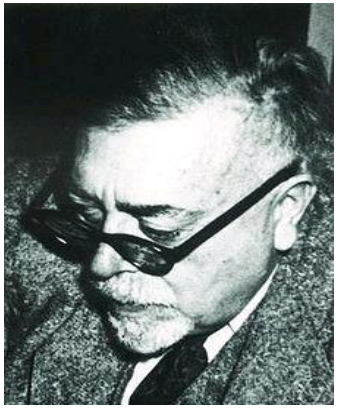
Shanon a montré la nécessité d'un **filtrage préalable à tout traitement numérique** pour garantir l'équivalence analogique - numérique

Filtrage de Wiener et Kalman

Point de vue d'Automatique, l'objectif est de **déterminer des estimateurs** des variables du système lorsque l'**environnement** présente des **perturbations aléatoires**

Déterminer un système (**filtre**), **optimal** au sens de la **minimisation de la variance d'erreur** entre la variable réelle et son estimation

Wiener: approche fréquentielle



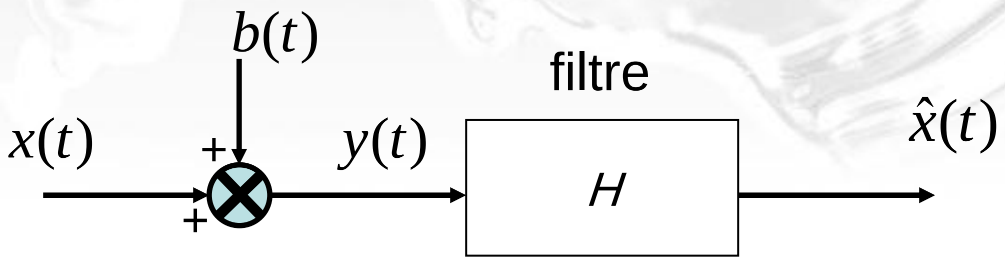
Kalman: approche temporelle

Chapitre 2

Filtre de Wiener

Filtrage de Wiener

La méthode de Wiener permet de déterminer la fonction de transfert du filtre qui reconstitue un signal *x(t)* à partir d'une mesure *y(t)* entachée d'un bruit *b(t)*

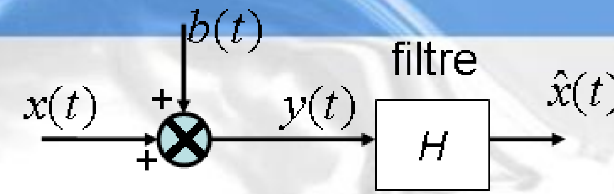


Le **filtre optimal** minimise **la variance de l'erreur** entre la variable réelle et son estimation

$$V = \mathrm{E}\left[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\right]$$

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Cas des signaux continus



Déterminer le filtre continu optimal *H(**p**)*

- Hypothèses

  x(t) et *b(t)*, sont des signaux aléatoires, scalaires, centrés, non corrélés et stationnaires.

- Notations

  Covariance de deux signaux *x(t)* et *y(t)*:

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_{xy}(\tau) = \mathrm{E}\left[x(t+\tau)\,y(t)\right]$$

  Spectre de covariance de deux signaux *x(t)* et *y(t)*:

$$S_{xy}(p) = \mathrm{L}_b\left(\phi_{xy}(\tau)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}(\tau)\, e^{-\tau p}\, d\tau$$

Transformée de Laplace bilatérale

Transformée de Laplace bilatérale

La transformée de Laplace bilatérale d'une fonction *f* peut être calculée à partir de la transformée de Laplace selon:

$$\mathcal{L}_b\left(f(t)\right) = \mathcal{L}\left(f_+(t)\right) + \mathcal{L}^*\left(f_-(t)\right)$$

avec

$$f_+(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$f_-(t) = \begin{cases} f(-t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^*(.) = \left\{\mathcal{L}(.)\right\}_{p \to -p}$$

Autovariance

L'**autovariance** d'un signal *x(t):*

$$\phi_{xx}(\tau) = \mathrm{E}\left[x(t+\tau)x(t)\right]$$

L'autovariance est une fonction paire

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{xx}(-\tau)$$

Le spectre d'autovariance

$$S_{xx}(p) = \mathsf{L}_b(\phi_{xx}(\tau))$$

$$= \mathsf{L}(\phi_{xx}(\tau)) + \mathsf{L}^*(\phi_{xx}(-\tau))$$

$$= \mathsf{L}(\phi_{xx}(\tau)) + \{\mathsf{L}(\phi_{xx}(-\tau))\}_{p\to -p}$$

$$\exists G(p) \ / \ S_{xx}(p) = G(p) + G(-p)$$

fonction paire

Équation de Wiener-Hopf

Pour pouvoir estimer x(t), on dispose de l'ensemble des mesures ***(tous les états passés de y)*** sur la sortie $Y(t)=\{y(t-\tau)\quad \tau\geq 0\}$

D'après le principe d'estimation des v.a., l'estimation linéaire optimale cherchée vérifie ***le principe d'orthogonalité***:

$$\forall\tau\geq 0\quad \mathrm{E}\left[\left(x(t)-\hat{x}(t)\right)y(t-\tau)\right]=0 \Longrightarrow \forall\tau\geq 0\quad \mathrm{E}\left[x(t)y(t-\tau)-\hat{x}(t)y(t-\tau)\right]=0$$

$$\forall\tau\geq 0\quad \phi_{xy}(\tau)=\mathrm{E}\left[\hat{x}(t)y(t-\tau)\right]$$

Le filtre *H(p)* étant causal, sa réponse impulsionnelle est nulle pour *t*<0

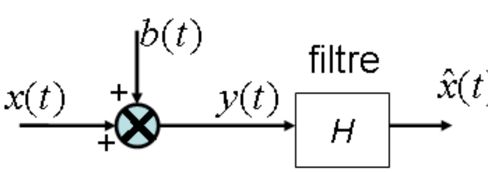
$$\hat{x}(t)=\int_0^{+\infty}h(\nu)y(t-\nu)d\nu \qquad \forall\tau\geq 0\quad \phi_{xy}(\tau)=\mathrm{E}\left[\int_0^{+\infty}h(\nu)y(t-\nu)y(t-\tau)d\nu\right]$$

$$\boxed{\forall\tau\geq 0\quad \phi_{xy}(\tau)=\int_0^{+\infty}h(\nu)\phi_{yy}(\tau-\nu)d\nu}$$

Équation de Wiener-Hopf

(Éq. A)

$$\boxed{\forall\tau\geq 0\quad S_{xy}(p)=H(p).S_{yy}(p)}$$



Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

Préliminaires

➢ Factorisation

Soit une fonction rationnelle *F(p)*. *F(p)* peut être factorisée sous la forme:

$$F(p) = F^{+}(p)F^{-}(p)$$

avec

$$F^{+}(p) \text{ et } \left(F^{+}(p)\right)^{-1} \text{ stables}$$

$$F^{-}(p) \text{ et } \left(F^{-}(p)\right)^{-1} \text{ instables}$$

Si de plus *F(p)* est une fonction rationnelle paire

alors

$$F^{-}(p) = F^{+}(-p)$$

et on obtient

$$\boxed{F(p) = F^{+}(p)F^{+}(-p)} \qquad \textit{\textbf{(Éq. B)}}$$

avec tous les zéros et pôles de $F^{+}(p)$ dans le demi plan complexe gauche

Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

- Préliminaires

- Factorisation – exemple 1

Soit la fonction rationnelle $F(p)=\dfrac{2p-1}{p^2-p-2}$

Calculer $F^+(p)$ et $F^-(p)$

$$F^+(p)=\frac{1}{p+1} \qquad F^-(p)=\frac{2p-1}{p-2}$$

- Factorisation – exemple 2

Soit la fonction rationnelle $F(p)=\dfrac{1}{p-1}$

Calculer $F^+(p)$ et $F^-(p)$

$$F^+(p)=1 \qquad F^-(p)=\frac{1}{p-1}$$

- Préliminaires

➢ Décomposition

Soit une fonction rationnelle *F(p)*. F(p) peut être écrite, par décomposée en éléments simples, sous la forme:

$$F(p) = F_-(p) + F_+(p)$$

avec

$$F_+(p) \text{ stables}$$

$$F_-(p) \text{ instables}$$

!

Attention à la notation

$$F_+(p) \neq F^+(p)$$

$$F_-(p) \neq F^-(p)$$

Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

- Préliminaires

- Décomposition – exemple 1

Soit la fonction rationnelle $F(p)=\dfrac{2p-1}{p^2-p-2}$

Calculer $F_+(p)$ et $F_-(p)$

$$F_+(p)=\frac{1}{p+1} \qquad F_-(p)=\frac{1}{p-2}$$

- Décomposition– exemple 2

Soit la fonction rationnelle $F(p)=\dfrac{1}{p-2}$

Calculer $F_+(p)$ et $F_-(p)$

$$F_+(p)=0 \qquad F_-(p)=\frac{1}{p-2}$$

Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

Soit la fonction f(t) définie par:

$$f(t) = \phi_{xy}(t) - \left[\int_0^{+\infty} h(\tau)\phi_{yy}(t-\tau)d\tau \right] \quad \textit{(*)}$$

Compte tenu de l'équation de Wiener-Hopf (eq. A)

$$\forall \tau \geq 0 \quad \phi_{xy}(\tau) = \int_0^{+\infty} h(\nu)\phi_{yy}(\tau-\nu)d\nu$$

f(t) doit être nulle pour tout *t* positif ou nul.

L_b

En appliquant la transformée de Laplace Bilatérale sur ***(*)****, il vient :*

$$F(p) = S_{xy}(p) - H(p)S_{yy}(p)$$

f(t) étant bornée, les pôles de *F(p)* n'appartiennent pas au demi plan complexe gauche.

Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

$$F(p) = S_{xy}(p) - H(p)S_{yy}(p)$$

D'autre part, comme S_{yy} est une fonction paire, on peut écrire selon (eq. B) :

$$S_{yy}(p) = S_{yy}^{+}(p)S_{yy}^{+}(-p)$$

où S^{+}_{yy} a tous ses zéros dans le demi plan complexe gauche.

Ainsi la fraction rationnelle *U(p)*, sera définie par:

$$U(p) = \frac{F(p)}{S_{yy}^{+}(-p)} = \frac{S_{xy}(p)}{S_{yy}^{+}(-p)} - H(p)S_{yy}^{+}(p)$$

doit avoir tous ses pôles dans le demi plan complexe droit.

Comme le filtre doit être réalisable et stable, on peut en déduire :

$$\boxed{H(p) = \frac{1}{S_{yy}^{+}(p)}\left[\frac{S_{xy}(p)}{S_{yy}^{+}(-p)}\right]_{+}}$$

Filtre de Wiener

Exemple 1

Soit : $$y(t) = x(t) + b(t)$$

où *x(t)* est un message de spectre d'autovariance : $$S_{xx}(p) = \frac{1}{1-p^2}$$

et *b(t)* un bruit blanc de spectre $S_{bb}=b^2$, indépendant de *x(t)*

Déterminer le filtre de Wiener optimal estimant *x(t) ?*

Exemple 2

Soit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -2x(t) + w(t) \\ y(t) = x(t) + v(t) \end{cases}$$

où *x(t)* est l'état de spectre d'autovariance : $S_{xx}(p) = \dfrac{1}{4 - p^2}$

w(t) et *v(t)* : bruits blancs indépendants avec $S_{vv}(p)=1$

Déterminer le filtre de Wiener optimal estimant *x(t)* ?

Équation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets

On procède comme dans le cas continu

On considère qu'on dispose de l'ensemble des mesures scalaires, centrées et stationnaires

$$\{x_i\} \text{ et } \{y_i\}$$

La covariance de deux signaux x et y échantillonnés

$$\phi_{xy}(j) = \mathrm{E}\left[x(i+j)y(i)\right]$$

L'équation de Winer-Hopf discrète du filtre optimal discret H, s'écrit :

$$\boxed{\forall j \in \mathrm{N}, \quad \phi_{xy}(j) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \phi_{yy}(j-i)}$$

avec h_i la réponse impulsionnelle du filtre

Résolution de l'équation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets

De même que dans le cas continu, la résolution utilise la **transformée en z bilatérale** d'une suite

$$F(z) = \mathrm{Z}_b\{f_i\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_i z^{-i} \qquad \{f_i, i \in \mathbb{Z}\}$$

qui se calcule à partir de la transformé en z (monolatérale) par :

$$\mathrm{Z}_b\{f_i\} = \mathrm{Z}\{f_i^+\} + \mathrm{Z}^*\{f_i^-\} - f_0$$

avec

$$f_i^+ = \begin{cases} 0 & \text{pour } i < 0 \\ f_i & \text{pour } i \geq 0 \end{cases} \qquad f_i^- = \begin{cases} 0 & \text{pour } i < 0 \\ f_{-i} & \text{pour } i \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Z}^*\{.\} = \left[\mathrm{Z}\{.\}\right]_{z \to z^{-1}}$$

Résolution de l'équation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets

Le **spectre de covariance** est, par définition, la transformée en z bilatérale de la fonction de covariance:

$$S_{xy}(z) = Z_b\{\phi_{xy}(j)\}$$

Pour une fonction d'autovariance on a :

$$\forall j \in \mathbb{Z} \qquad , \qquad \varphi_{xx}(j) = \varphi_{xx}(-j)$$

Le spectre d'autovariance s'écrit alors :

$$\exists G(z), \quad S_{xx}(z) = G(z) + G(z^{-1}) - \phi_{xx}(0)$$

conduisant à la propriété (fonction paire):

$$S_{xx}(z) = S_{xx}(z^{-1}) \qquad \text{(éq. c)}$$

Résolution de l'équation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets

On utilise de même les notions de factorisation et de décompositions de fractions rationnelles en z

- **Factorisation** $F(z)=F^{+}(z)F^{-}(z)$

où

$F^{+}(z)$ a tous ses zéros et pôles à l'intérieur du cercle unité

$F^{-}(z)$ a tous ses zéros et pôles à l'extérieur du cercle unité

D'où on peut écrire le spectre d'autovariance (éq. c) sous la forme :

$$S_{xx}(z)=S_{xx}^{+}(z)S_{xx}^{+}\left(z^{-1}\right)$$

car

$$S_{xx}^{-}(z)=S_{xx}^{+}\left(z^{-1}\right)$$

avec $S_{xx}^{+}(z)$ a tous ses zéros et pôles à l'intérieur du cercle unité

Résolution de l'équation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets

- **Décomposition**

$$F(z) = F_+(z) + F_-(z) - f0$$

où

$F_+(z)$ a tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité

$F_-(z)$ a tous ses pôles à l'extérieur du cercle unité

- **Résolution**

La même démonstration que dans le cas des signaux continus conduit à exprimer la fonction du transfert du filtre optimal pour les signaux discrets par :

$$\boxed{H(z) = \frac{1}{S_{yy}^{+}(z)} \left[\frac{S_{xy}(z)}{S_{yy}^{+}(z^{-1})} \right]_+}$$

Filtre de Wiener

Chapitre 3

Filtre de Kalman

Hypothèses

bruit d'entrée (de dynamique)

état

entrée

$$x_{k+1} = A_k . x_k + B_k . u_k + G_k . w_k$$

bruit de mesure

$$y_{k+1} = C_{k+1} . x_{k+1} + v_{k+1}$$

$\{u_k\}$ entrée déterministe

$\{w_k\}$ et $\{v_k\}$ des séquences indépendantes de bruit blancs centrés

x_0, l'état initial, une variable aléatoire indépendante de $\{w_k\}$ et $\{v_k\}$

$$\mathrm{E}[w_k] = 0 \qquad \mathrm{E}\left[\begin{bmatrix} v_k \\ w_k \\ \tilde{x}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_l^T & w_l^T & \tilde{x}_0^T \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} R_k \delta_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k \delta_{kl} & 0 \\ 0 & 0 & P_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{E}[v_k] = 0$$

$$\mathrm{E}[x_0] = \bar{x}_0$$

$\tilde{x}_0 = x_0 - \bar{x}_0$ $\qquad$ $R_k \quad Q_k \quad P_0$ matrices symétriques définies positives

Problématique

Trouver la **meilleure estimation** $\hat{x}$ de l'état x **à l'instant *k*,** à partir des observations effectuées **jusqu'à l'instant *j***, au sens du critère de la **variance conditionnelle minimum**.

Cela signifie que $\hat{x}$ est tel que :

$$\mathrm{E}\left\{\left\|x_k - \hat{x}_k\right\|^2 / \left\{y_0, y_1, \ldots, y_j\right\}\right\} \leq \mathrm{E}\left\{\left\|x_k - z\right\|^2 / \left\{y_0, y_1, \ldots, y_j\right\}\right\}$$

Pour tout vecteur z fonction des observations $\left\{y_0, y_1, \ldots, y_j\right\}$

$$\boxed{\min\left[\mathrm{E}\left\{\left\|x_k - \hat{x}_k\right\|^2\right\}\right] \xrightarrow{but} \hat{x}_k = E\left\{x_k\right\}}$$

Notations

$\hat{x}_{k/j}$ meilleure estimation de x à l'instant k fonction des observations $\{y_0, y_1, \ldots, y_j\}$

$$\tilde{x}_{k/j} = x_k - \hat{x}_{k/j}$$

$$\tilde{y}_{k/j} = y_k - C_k \hat{x}_{k/j}$$

$$\mathrm{cov}(z) = \mathrm{E}\{zz^T\}$$

$$P_{k/t} = \mathrm{cov}(\tilde{x}_{k/t})$$

Filtrage Lissage Prédiction

$\hat{x}_{k/j}$ meilleure estimation de x à l'instant k fonction des observations $\{y_0, y_1, \ldots, y_j\}$

Selon la valeur de k par rapport à j

$\hat{x}_{k/j}$ est une valeur filtrée si $k=j$

$\hat{x}_{k/j}$ est une valeur prédite si $k>j$

$\hat{x}_{k/j}$ est une valeur lissée si $k<j$

Équations du filtre de Kalman

Les équations de fonctionnement du filtre de Kalman se décomposent en 2 étapes:

- **Étape de prédiction**

:

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k$$
$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T$$

- **Étape de correction**

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k \left(y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1} \right)$$
$$P_{k/k} = \left(I - K_k C_k \right) P_{k/k-1}$$

où K_k est le gain optimal du filtre donné par :

$$K_k = P_{k/k-1} C_k^T \left(R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T \right)^{-1}$$

Équations du filtre de Kalman

Les équations du filtre de Kalman sont obtenues en calculant

$$\mathrm{E}\left[x_{k+1}\right]$$

$$P_{k+1} = \mathrm{E}\left[\left(x_{k+1} - \mathrm{E}\left[x_{k+1}\right]\right)\left(x_{k+1} - \mathrm{E}\left[x_{k+1}\right]\right)^T\right]$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = \mathrm{E}\left[x_{k+1/k}\right]$$

$$P_{k+1/k} = \mathrm{E}\left[\left(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k}\right)\left(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k}\right)^T\right]$$

$$\hat{x}_{k+1/k+1}$$

$$P_{k+1/k+1} = \mathrm{E}\left[\left(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k+1}\right)\left(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k+1}\right)^T\right]$$

Équations du filtre de Kalman

$$x_{k+1} = A_k . x_k + B_k . u_k + G_k . w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1} . x_{k+1} + v_{k+1}$$

$\mathrm{E}[x_{k+1}]$?

déterministe

$$\mathrm{E}[x_{k+1}] = A_k . \mathrm{E}[x_k] + B_k . u_k + G_k . \mathrm{E}[w_k]$$

0

$$\boxed{\mathrm{E}[x_{k+1}] = A_k . \mathrm{E}[x_k] + B_k . u_k}$$

Équations du filtre de Kalman

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

P_{k+1} ?

$$P_{k+1} = \mathrm{E}\left[\left(x_{k+1} - \mathrm{E}[x_{k+1}]\right)\left(x_{k+1} - \mathrm{E}[x_{k+1}]\right)^T \right]$$

$$P_{k+1} = \mathrm{E}\left[\left(A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k - \mathrm{E}[x_{k+1}]\right)\left(A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k - \mathrm{E}[x_{k+1}]\right)^T \right]$$

$$P_{k+1} = \mathrm{E}\left[\left(A_k.\tilde{x}_k + G_k.w_k\right)\left(A_k.\tilde{x}_k + G_k.w_k\right)^T \right]$$

$$\boxed{P_{k+1} = A_k P_k A_k^T + G_k Q G_k^T}$$

Équations du filtre de Kalman

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$
$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

$\mathrm{E}[y_{k+1}]$?

$$\mathrm{E}[y_{k+1}] = \mathrm{E}[C_{k+1}x_{k+1} + v_{k+1}]$$

$$\boxed{\mathrm{E}[y_{k+1}] = C_{k+1}\mathrm{E}[x_{k+1}]}$$

$\mathrm{cov}(\tilde{y}_{k+1})$?

$$\mathrm{cov}(\tilde{y}_{k+1}) = \mathrm{E}\left[(y_{k+1} - \mathrm{E}[y_{k+1}])(y_{k+1} - \mathrm{E}[y_{k+1}])^T\right]$$
$$\mathrm{cov}(\tilde{y}_{k+1}) = \mathrm{E}\left[(C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1} - C_{k+1}\mathrm{E}[x_{k+1}])(C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1} - C_{k+1}\mathrm{E}[x_{k+1}])^T\right]$$
$$\mathrm{cov}(\tilde{y}_{k+1}) = \mathrm{E}\left[(C_{k+1}.\tilde{x}_{k+1} + v_{k+1})(C_{k+1}.\tilde{x}_{k+1} + v_{k+1})^T\right]$$

$$\boxed{\mathrm{cov}(\tilde{y}_{k+1}) = C_{k+1}P_{k+1}C_{k+1}^T + R}$$

Équations du filtre de Kalman

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$
$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

La connaissance de toutes les valeurs du signal jusqu'à l'instant *k* se résume à une estimation de la valeur $\hat{x}_{k/k}$ de son état à l'instant k, établie à l'aide de toutes les valeurs de la sortie *y* mesurées jusqu'à l'instant *k*.

$\hat{x}_{k+1/k}$?

$\hat{x}_{k+1/k}$ l'estimation de x_{k+1}

$$\hat{x}_{k+1/k} = \mathrm{E}\left[x_{k+1} \middle| \hat{x}_{k/k}\right]$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = \mathrm{E}\left[A_k.x_{k/k} + B_k.u_k + G_k.w_k\right]$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = \mathrm{E}\left[A_k.x_{k/k}\right] + B_k.u_k$$

$$\boxed{\hat{x}_{k+1/k} = A_k\hat{x}_{k/k} + B_k.u_k}$$

Équations du filtre de Kalman

$P_{k+1/k}$?

erreur de prédiction

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

$$P_{k+1/k} = \operatorname{cov}\left(\tilde{x}_{k+1/k}\right)$$

$$\tilde{x}_{k+1/k} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k - \hat{x}_{k+1/k}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k - A_k\hat{x}_{k/k} - B_k.u_k$$

$$\tilde{x}_{k+1/k} = A_k.\tilde{x}_{k/k} + G_k.w_k$$

$$P_{k+1/k} = \mathrm{E}\left[\left(A_k.\tilde{x}_{k/k} + G_k.w_k\right)\left(A_k.\tilde{x}_{k/k} + G_k.w_k\right)^T\right]$$

$$\boxed{P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q G_k^T}$$

Équations du filtre de Kalman

$$x_{k+1} = A_k . x_k + B_k . u_k + G_k . w_k$$
$$y_{k+1} = C_{k+1} . x_{k+1} + v_{k+1}$$

La prédiction $\hat{x}_{k+1/k}$ peut être corrigée en tenant compte de la nouvelle mesure y_{k+1}, à l'aide d'une correction linéaire.

$$\boxed{\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + \underbrace{K_{k+1}}_{\text{gain}} \underbrace{\left(y_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}_{k+1/k}\right)}_{\text{innovation}}}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k+1}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k} - K_{k+1}\left(y_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}_{k+1/k}\right)$$

$$\tilde{x}_{k+1/k+1} = x_{k+1} - \left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)\hat{x}_{k+1/k} - K_{k+1}y_{k+1}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k+1} = x_{k+1} - \left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)\hat{x}_{k+1/k} - K_{k+1}C_{k+1}.x_{k+1} - K_{k+1}v_{k+1}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k+1} = \left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)\left(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k}\right) - K_{k+1}v_{k+1}$$

$$\boxed{\tilde{x}_{k+1/k+1} = \left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)\left(\tilde{x}_{k+1/k}\right) - K_{k+1}v_{k+1}}$$

$$\boxed{P_{k+1/k+1} = \left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)P_{k+1/k}\left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)^T + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^T}$$

Équations du filtre de Kalman

Le gain K est calculé pour que l'erreur d'estimation soit statistiquement orthogonale à l'innovation (nouvelle information apportée au filtre) :

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$
$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

$$\mathrm{E}\left[\tilde{x}_{k+1/k+1}\left(y_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}_{k+1/k}\right)^T\right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)\left(\tilde{x}_{k+1/k}\right) - K_{k+1}v_{k+1}\right)\left(C_{k+1}\tilde{x}_{k+1/k} + v_{k+1}\right)^T\right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)\tilde{x}_{k+1/k}\tilde{x}^T_{k+1/k}C^T_{k+1}\right)\right] - E\left[K_{k+1}v_{k+1}v^T_{k+1}\right] = 0$$

car $\mathrm{E}\left[\tilde{x}_{k+1/k}v_{k+1}{}^T\right] = 0$

$$\left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)P_{k+1/k}C^T_{k+1} - K_{k+1}R = 0$$

$$\boxed{K_{k+1} = P_{k+1/k}C^T_{k+1}\left(C_{k+1}P_{k+1/k}C^T_{k+1} + R\right)^{-1}}$$

Équations du filtre de Kalman

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$
$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

Prenons l'équation précédente :

$$(I - K_{k+1}C_{k+1})P_{k+1/k}C_{k+1}^T - K_{k+1}R = 0$$
$$(I - K_{k+1}C_{k+1})P_{k+1/k}C_{k+1}^T K_{k+1}^T = K_{k+1}RK_{k+1}^T$$

On a :

$$\boxed{P_{k+1/k+1} = (I - K_{k+1}C_{k+1})P_{k+1/k}(I - K_{k+1}C_{k+1})^T + K_{k+1}RK_{k+1}^T}$$

$$P_{k+1/k+1} = (I - K_{k+1}C_{k+1})P_{k+1/k}(I - K_{k+1}C_{k+1})^T + (I - K_{k+1}C_{k+1})P_{k+1/k}C_{k+1}^T K_{k+1}^T$$
$$P_{k+1/k+1} = (I - K_{k+1}C_{k+1})P_{k+1/k}\left((I - K_{k+1}C_{k+1})^T + C_{k+1}^T K_{k+1}^T\right)$$
$$P_{k+1/k+1} = (I - K_{k+1}C_{k+1})P_{k+1/k}$$

$$\boxed{P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - K_{k+1}C_{k+1}P_{k+1/k}}$$

Équations du filtre de Kalman

Les équations de fonctionnement du filtre de Kalman se décomposent en 2 étapes:

- Étape de prédiction :

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T$$

- Étape de correction :

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k \left(y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1} \right)$$

$$P_{k/k} = \left(I - K_k C_k \right) P_{k/k-1}$$

où K_k est le gain optimal du filtre donné par :

$$K_k = P_{k/k-1} C_k^T \Sigma_k^{-1}$$

$$\Sigma_k = R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T$$

Mise en œuvre pratique du filtre de Kalman

On suppose que le problème de filtrage est résolu à l'étape *k,* c'est-à-dire on dispose de $\hat{x}_{k/k}$, $P_{k/k}$ et K_k

Une mesure supplémentaire y_{k+1} arrive. On a alors l'étape *K+1*

Calcul du prédicteur $\hat{x}_{k+1/k}$

Calcul de $P_{k+1/k}$

Calcul du gain K_{k+1}

Calcul de $\hat{x}_{k+1/k+1}$

Calcul de $P_{k+1/k+1}$

Remarque

À chaque étape il faut vérifier que $trace(P_{k/k})$ diminue quand *k* augmente pour s'assurer de la convergence

Mise en œuvre pratique du filtre de Kalman

✓ Initialisation

➢ 1er cas

À l'instant initial *k*=0 on dispose de y_0, $\hat{x}_{0/-1} = m_0$ et $P_{0/-1} = P_0$

Calcul de K_0 selon $K_0 = P_{0/-1} C_0^T \left(R + C_0 P_{0/-1} C_0^T \right)^{-1}$

Calcul de $\hat{x}_{0/0}$ selon $\hat{x}_{0/0} = \hat{x}_{0/-1} + K_0 \left(y_0 - C_0 \hat{x}_{0/-1} \right)$ ← amélioration de l'information initiale

Calcul de $P_{0/0}$ selon $P_{0/0} = \left(I - K_0 C_0 \right) P_{0/-1}$

➢ 2ème cas

À l'instant initial *k=1* on dispose de y_1, $\hat{x}_{0/0} = m_0$ et $P_{0/0} = P_0$

Calcul de $\hat{x}_{1/0}$ selon $\hat{x}_{1/0} = A_0 \hat{x}_{0/0} + B_0 u_0$

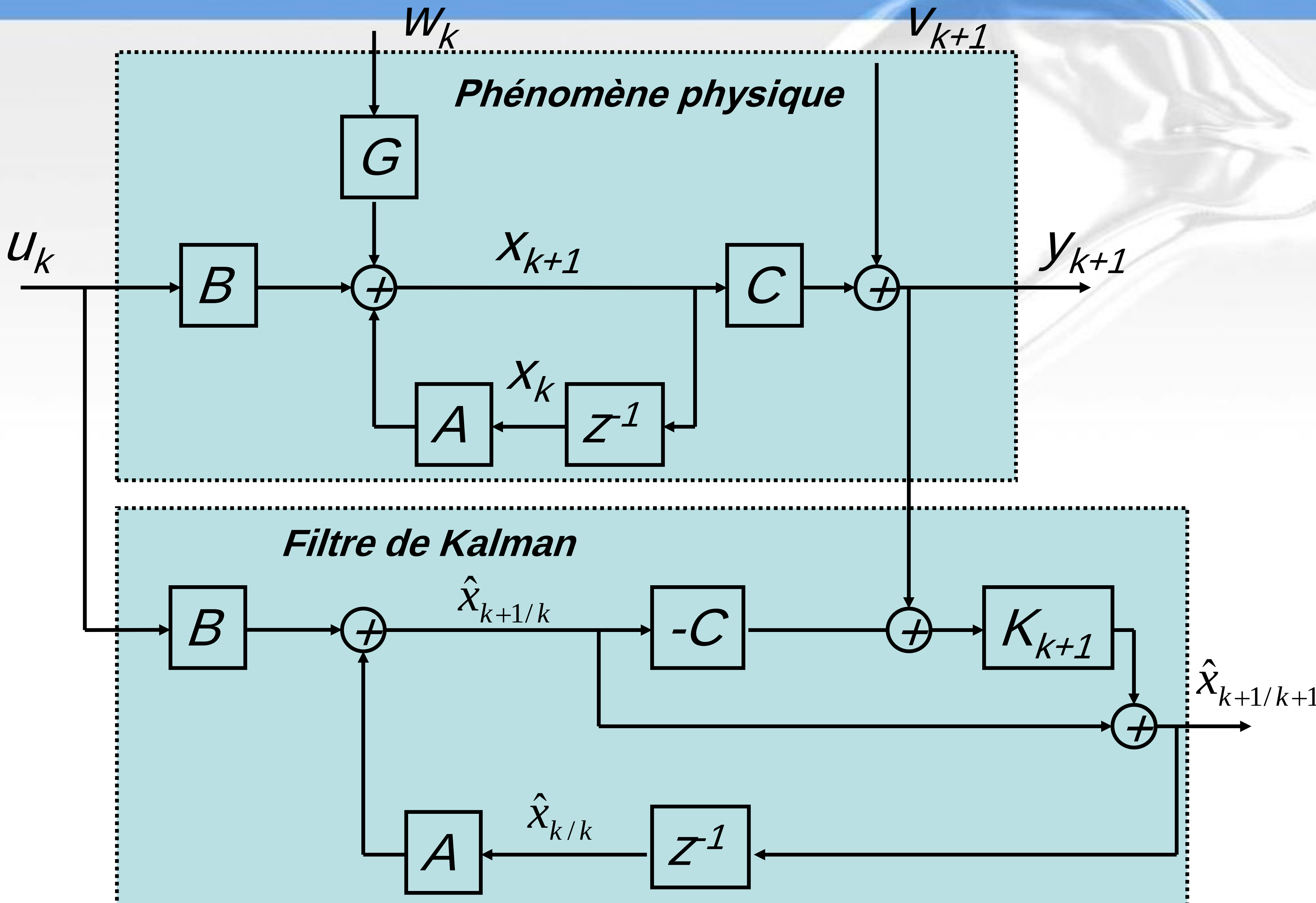
Calcul de $P_{1/0}$ selon $P_{1/0} = A_0 P_{0/0} A_0^T + G_0 Q_0 G_0^T$ ← prédiction

Calcul de K_1 selon $K_1 = P_{1/0} C_1^T \left(R + C_1 P_{1/0} C_1^T \right)^{-1}$

Calcul de $\hat{x}_{1/1}$ selon $\hat{x}_{1/1} = \hat{x}_{1/0} + K_1 \left(y_1 - C_1 \hat{x}_{1/0} \right)$

Calcul de $P_{1/1}$ selon $P_{1/1} = \left(I - K_1 C_1 \right) P_{1/0}$

Modélisation du Filtre de Kalman



Remarques

✓Les matrices qui constituent le filtre de Kalman ne dépendent pas des données, mais seulement des caractéristiques statistiques. Le gain du filtre de Kalman peut être alors calculé avant le filtrage du signal mesuré, et mis en mémoire.

$$\boxed{P_{k+1/k} = A_k P_{k/k-1} A_k^T + G_k Q_k G_k^T - A_k P_{k/k-1} C_k^T \left(R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T\right)^{-1} C_k P_{k/k-1} A_k^T}$$

Équation de Riccati

$$K_k = P_{k/k-1} C_k^T \left(R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T\right)^{-1}$$

$$P_{k/k} = \left(I - K_k C_k\right) P_{k/k-1}$$

Formes particulières du filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est composé de l'ensemble de 2 étapes. Suivant que l'étape de prédiction précède ou suit l'étape d'estimation on distingue deux cas:

- ✓ Filtre de Kalman 'Estimateur' lorsque l'étape de prédiction précède l'étape d'estimation

$$\left(\hat{x}_{k/k}, P_{k/k}\right) \Rightarrow \left(\hat{x}_{k+1/k}, P_{k+1/k}\right) \Rightarrow \left(\hat{x}_{k+1/k+1}, P_{k+1/k+1}\right)$$

- ✓ Filtre de Kalman 'Prédicteur' lorsque l'étape de prédiction suit l'étape d'estimation

$$\left(\hat{x}_{k/k-1}, P_{k/k-1}\right) \Rightarrow \left(\hat{x}_{k/k}, P_{k/k}\right) \Rightarrow \left(\hat{x}_{k+1/k}, P_{k+1/k}\right)$$

Filtre de Kalman ‘Estimateur’

✓ Filtre de Kalman ‘Estimateur’ → l’étape de prédiction précède l’étape d’estimation

$$\hat{x}_{k+1/k+1} = (I - K_{k+1}C_{k+1})A_k\hat{x}_{k/k} + (I - K_{k+1}C_{k+1})B_k u_k + K_{k+1}y_{k+1}$$

$$P_{k+1/k+1} = (I - K_{k+1}C_{k+1})\left(A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T\right)$$

$$K_{k+1} = \left(A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T\right)C_{k+1}^T \Sigma_{k+1}^{-1}$$

$$\Sigma_{k+1} = R_{k+1} + C_{k+1}\left(A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T\right)C_{k+1}^T$$

Filtre de Kalman ‘Prédicteur’

✓ Filtre de Kalman ‘Prédicteur’ → l’étape de prédiction suit l’étape d’estimation

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k(I - K_k C_k)\hat{x}_{k/k-1} + B_k u_k + A_k K_k y_k$$

$$P_{k+1/k} = A_k(I - K_k C_k)P_{k/k-1}A_k^T + G_k Q_k G_k^T$$

$$K_k = P_{k/k-1}C_k^T \Sigma_k^{-1}$$

$$\Sigma_k = R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T$$

Remarques

Les matrices intervenant dans le filtre de Kalman peuvent être réécrite de plusieurs façons. Ainsi on peut démontrer que le gain du filtre peut être récrit selon :

$$K_k = P_{k/k} C_k^T R_k^{-1}$$

- ✓ K_k faible (correction faible) lorsque :
  - ➢ $P_{k/k}$ est faible (confiance dans les précédentes estimations)
  - ➢ R_k est élevé (doute dans les mesures actuelles)

- ✓ K_k élevé (correction élevé) lorsque :
  - ➢ $P_{k/k}$ est élevé (doute dans les précédentes estimations)
  - ➢ R_k est faible (confiance dans les mesures actuelles)

Filtre de Kalman sous-optimal

✓Dans le cas où le système est stationnaire (A, B, C,G, Q et R sont des constantes), le gain du filtre de Kalman dépend toujours du temps et le filtre de Kalman n'est pas invariant dans le temps. Cependant on démontre que le gain converge vers une valeur finale K_∞ et le filtre tend vers un filtre invariant

{ convergence assurée si le système est observable }

$$P_P = AP_E A^T + GQG^T$$

$$P_E = P_P - P_P C^T \left(CP_P C^T + R\right)^{-1} CP_P$$

$$K_\infty = P_P C^T \left(CP_P C^T + R\right)^{-1}$$

Le filtrage invariant dans le temps obtenu en remplaçant K_{k+1} par sa valeur finale K_∞ est appelé filtre de Kalman sous-optimal

Exemple 1

Soit :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k \end{cases}$$

avec:

$$R_k = 1; \bar{x}_0 = m_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}; P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$y(0) = 1.2; y(1) = 2;$$

Calculer $\hat{x}_{0/0} = ?; \hat{x}_{1/1} = ?$

Exemple 2

Soit :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + w_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k \end{cases}$$

avec:

$$R_k = 2 + (-1)^k ; Q_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; P_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Calculer $K_k = ?;(k = 1..10)$

Représenter les deux composantes de $K_k = f(k)?$

Exemple 3

Soit l'équation de vitesse :

$$v_{n+1} = v_n + \gamma_n \Delta t$$

$$y_n = v_n + w_n$$

avec

$$\Delta t = 1$$

$$\mathrm{E}[\gamma_n] = 0$$

$$\mathrm{E}[\gamma_n \gamma_k] = \mu \delta_{nn}$$

γ_n bruit blanc de moyenne nulle

w_n bruit blanc de moyenne nulle et de variance R=1

w_n et γ_n indépendants de la vitesse initiale

Déterminer l'expression du filtre de Kalam en régime permanant estimant la vitesse v*.*

Filtre de Kalman – cas des signaux corrélés

✓ Lorsque les bruits de dynamiques et de mesure sont corrélés, les équations du filtre de Kalman précédentes ne sont plus valables

$$\mathrm{E}\left[v_k w_l^T\right] = S_k \delta_{kl} \qquad \text{avec} \qquad \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème on construit un nouveau modèle équivalent en introduisant un nouveau bruit

$$w'_k = w_k - S_k R_k^{-1} v_k$$

pour lequel il est facile de montrer $\mathrm{E}\left[v_k w'^T_l\right] = 0$

Filtre de Kalman – cas des signaux corrélés

$$w'_k = w_k - S_k R_k^{-1} v_k$$

En effet

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[v_k w'^T_l\right] &= \mathrm{E}\left[v_k \left(w_l - S_l R_l^{-1} v_l\right)^T\right] \\
&= \mathrm{E}\left[v_k w_l^T\right] - \mathrm{E}\left[v_k v_l^T \left(R_l^{-1}\right)^T S_l^T\right] \\
&= S_k \delta_{kl} - R_k \delta_{kl} \left(R_l^{-1}\right)^T S_l^T
\end{aligned}$$

$$\text{si } k = l \qquad \mathrm{E}\left[v_k w'^T_k\right] = S_k - R_k \left(R_k^{-1}\right)^T S_k^T \quad = 0$$

$$\text{si } k \neq l \qquad \mathrm{E}\left[v_k w'^T_l\right] = 0$$

$$\boxed{\mathrm{E}\left[v_k w'^T_l\right] = 0}$$ *v* et *w'* sont indépendant

Filtre de Kalman – cas des signaux corrélés

Le bruit *w* peut être réécrit fonction du nouveau bruit *w’*

$$w'_k = w_k - S_k R_k^{-1} v_k \longrightarrow w_k = w'_k + S_k R_k^{-1} v_k$$

Le modèle initial

$$x_{k+1} = A_k . x_k + B_k . u_k + G_k . w_k$$
$$y_{k+1} = C_{k+1} . x_{k+1} + v_{k+1}$$

peut être alors réécrit sous la forme :

$$x_{k+1} = A_k . x_k + B_k . u_k + G_k \left(w'_k + S_k R_k^{-1} v_k \right)$$
$$y_{k+1} = C_{k+1} . x_{k+1} + v_{k+1}$$

Filtre de Kalman – cas des signaux corrélés

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$
$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$
$$w'_k = w_k - S_k R_k^{-1} v_k$$

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k\left(w'_k + S_k R_k^{-1} v_k\right)$$
$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

$$v_k = y_k - C_k.x_k$$

Le modèle devient

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k\left(w'_k + S_k R_k^{-1}\left(y_k - C_k x_k\right)\right)$$
$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

soit

$$x_{k+1} = \left(A_k - G_k S_k R_k^{-1} C_k\right).x_k + B_k.u_k + G_k S_k R_k^{-1} y_k + G_k w'_k$$
$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

D'où on peut écrire:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{k+1} &= A'_k x_k + B_k.u_k + G'_k y_k + G_k w'_k \\ y_{k+1} &= C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1} \end{aligned}}$$

avec

$$A'_k = \left(A_k - G_k S_k R_k^{-1} C_k\right)$$
$$G'_k = G_k S_k R_k^{-1}$$

Filtre de Kalman – cas des signaux corrélés

$$x_{k+1} = A_k^{'} x_k + B_k.u_k + G_k^{'} y_k + G_k w'_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

$$w'_k = w_k \text{-} S_k R_k^{-1} v_k$$

$$A_k^{'} = \left(A_k - G_k S_k R_k^{-1} C_k\right)$$

$$G_k^{'} = G_k S_k R_k^{-1}$$

- Les propriétés statistiques

$$\mathrm{E}\left[v_k\right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[w_k^{'}\right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[\begin{bmatrix} v_k \\ w'_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_l^T & w'^T_l \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} R_k \delta_{kl} & 0 \\ 0 & Q'_k \delta_{kl} \end{bmatrix}$$

avec

$$Q'_k = \mathrm{E}\left[w'_k \; w'^T_k\right]$$

$$= \mathrm{E}\left[\left(w_k - S_k R_k^{-1} v_k\right)\left(w_k^T - v_k^T \left(R_k^{-1}\right)^T S_k^T\right)\right]$$

$$= Q_k + S_k R_k^{-1} R_k \left(R_k^{-1}\right)^T S_k^T - S_k \left(R_k^{-1}\right)^T S_k^T - S_k \left(R_k^{-1}\right)^T S_k^T$$

$$\boxed{Q'_k = Q_k - S_k \left(R_k^{-1}\right)^T S_k^T}$$

Filtre de Kalman – cas des signaux corrélés

$$x_{k+1} = A_k^{'} x_k + B_k.u_k + G_k^{'} y_k + G_k w'_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

$$w'_k = w_k\text{-}S_k R_k^{-1} v_k$$

$$A_k^{'} = \left(A_k - G_k S_k R_k^{-1} C_k\right)$$

$$G_k^{'} = G_k S_k R_k^{-1}$$

- Les propriétés statistiques

$$\mathrm{E}\left[v_k\right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[w_k^{'}\right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[\begin{bmatrix} v_k \\ w'_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_l^T & w'^T_l \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} R_k \delta_{kl} & 0 \\ 0 & Q'_k \delta_{kl} \end{bmatrix}$$

- Calcul du filtre

Il est maintenant facile d'appliquer les équations du filtre de Kalman au nouveau modèle

Le calcul reste inchangé. Seule l'étape de prédiction est modifiée

$$\hat{x}_{k+1/k} = A'_k \, \hat{x}_{k/k} + B_k u_k + G'_k \, y_k$$

$$P_{k+1/k} = A'_k \, P_{k/k} A'^T_k + G_k Q'_k \, G_k^T$$

- Étape de prédiction

$$\hat{x}_{k+1/k} = A'_k\, \hat{x}_{k/k} + B_k u_k + G'_k\, y_k$$

$$P_{k+1/k} = A'_k\, P_{k/k} A'^T_k + G_k Q'_k\, G_k^T$$

En tenant compte des expressions de A'_k et G'_k, il vient:

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k + G_k S_k R_k^{-1}\left(y_k - C_k \hat{x}_{k/k}\right)$$

or, $\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k\left(y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1}\right)$

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k + G_k S_k R_k^{-1}\left(I - C_k K_k\right)\left(y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1}\right)$$

$$K_k = P_{k/k-1} C_k^T \Sigma_k^{-1}$$

$$\Sigma_k = R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T$$

$$= G_k S_k R_k^{-1}\left(I - C_k P_{k/k-1} C_k^T \Sigma_k^{-1}\right)$$

$$= G_k S_k R_k^{-1}\left(\Sigma_k - C_k P_{k/k-1} C_k^T\right)\Sigma_k^{-1}$$

$$= G_k S_k R_k^{-1} R_k \Sigma_k^{-1}$$

$$= K'_k$$

$$\boxed{\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k + \underbrace{K'_k\left(y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1}\right)}_{\text{terme de correction}}}$$

Filtre de Kalman – cas des signaux corrélés

- Étape de prédiction

$$\hat{x}_{k+1/k} = A'_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k + G'_k y_k$$

$$P_{k+1/k} = A'_k P_{k/k} A'^T_k + G_k Q'_k G_k^T$$

En tenant compte des expressions de A'_k et Q'_k, il vient :

$$P_{k+1/k} = \left(A_k - G_k S_k R_k^{-1} C_k\right) P_{k/k} \left(A_k - G_k S_k R_k^{-1} C_k\right)^T + G_k \left(Q_k - S_k R_k^{-1} S_k\right) G_k^T$$

En utilisant les relations :

$$\Sigma_k^{-1} = R_k^{-1} - R_k^{-1} C_k P_{k/k} C_k^T R_k^{-1}$$

$$K_k = P_{k/k} C_k^T R_k^{-1}$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k + K'_k \left(y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1}\right)$$

on peut démontrer :

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T - K'_k \Sigma_k K'^T_k - K'_k \Sigma_k K_k^T A_k^T - A_k K_k \Sigma_k K'^T_k$$

ou encore:

$$\boxed{P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T + \underbrace{A_k K_k \Sigma_k K_k^T A_k^T - L_k \Sigma_k L_k^T}_{\text{terme de correction}}}$$

où $\boxed{L_k = K'_k + A_k K_k}$

Équations du filtre de Kalman – cas des signaux corrélés

Les équations de fonctionnement du filtre de Kalman se décomposent en 2 étapes:

✓ Étape de prédiction :

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k + K'_k \left(y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1} \right)$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T + A_k K_k \Sigma_k K_k^T A_k^T - L_k \Sigma_k L_k^T$$

où $K'_k = G_k S_k \Sigma_k^{-1}$ $\qquad L_k = K'_k + A_k K_k$

✓ Étape de correction :

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k \left(y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1} \right)$$

$$P_{k/k} = \left(I - K_k C_k \right) P_{k/k-1}$$

où K_k est le gain optimal du filtre donné par :

$$K_k = P_{k/k-1} C_k^T \Sigma_k^{-1}$$

$$\Sigma_k = R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T$$

Filtre de Kalman 'Prédicteur' – cas des signaux corrélés

✓Pour construire un filtre de Kalman prédicteur à 1 pas, il suffit d'éliminer les termes $\hat{x}_{k/k}$ et $P_{k/k}$ des expressions du filtre précèdent. Ainsi, on peut démontrer que:

$$\hat{x}_{k+1/k} = (A_k - L_k C_k)\hat{x}_{k/k-1} + B_k u_k + L_k y_k$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k-1} A_k^T + G_k Q_k G_k^T - L_k \Sigma_k L_k^T$$

où

$$L_k = \left(A_k P_{k/k-1} C_k^T + G_k S_k\right)\left(R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T\right)^{-1}$$

Filtre de Kalman 'Prédicteur' – cas des signaux corrélés

✓Les matrices $P_{k/k-1}$ et L_k peuvent être calculées à l'avance par la résolution de l'équation de Ricatti

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k-1} A_k^T + G_k Q_k G_k^T - L_k \Sigma_k L_k^T$$

$$L_k = \left(A_k P_{k/k-1} C_k^T + G_k S_k\right)\left(R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T\right)^{-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_{k+1/k} = {} & A_k P_{k/k-1} A_k^T + G_k Q_k G_k^T \\ & -\left(A_k P_{k/k-1} C_k^T + G_k S_k\right)\left(R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T\right)^{-1}\left(A_k P_{k/k-1} C_k^T + G_k S_k\right)^T \end{aligned}}$$

Équation de Riccati
cas des signaux **non** corrélés

Équation de Riccati
cas des signaux corrélés

$$\boxed{P_{k+1/k} = A_k P_{k/k-1} A_k^T + G_k Q_k G_k^T - A_k P_{k/k-1} C_k^T \left(R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T\right)^{-1} C_k P_{k/k-1} A_k^T}$$

Chapitre 4

Filtrage de Kalman

Filtre de Kalman Continu

Filtre de Kalman continu

Le filtre de Kalman à temps continu est souvent appelé filtre de Kalman-Bucy. Il résout le problème de l'estimation de l'état d'un système continu défini par les équations d'états:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)w(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t)$$

où t représente le temps, $x(t)$, l'état de dimension n, $y(t)$, la sortie de dimension l, $w(t)$, le bruit d'entrée (ou de dynamique) de dimension l', et $v(t)$, le bruit de mesure de dimension m.

Il s'agit de déterminer la meilleur estimation $\hat{x}(t/\tau)$ (au sens de la minimisation de variance) de l'état à l'instant t connaissant les mesures jusqu'à l'instant τ .

Filtre de Kalman continu

Le filtre de Kalman à temps continu est souvent appelé filtre de Kalman-Bucy. Il résout le problème de l'estimation de l'état d'un système continu défini par les équations d'états:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)w(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + v(t)$$

On suppose que ses bruits sont blancs, gaussiens, et connus par leurs matrices de covariance :

$$\mathrm{E}\left[w(t)w^T(t')\right] = Q(t)\delta_{t-t'} \qquad \mathrm{E}\left[v(t)\tilde{x}^T(0)\right] = 0$$
$$\mathrm{E}\left[v(t)v^T(t')\right] = R(t)\delta_{t-t'} \qquad \mathrm{E}\left[v(t)w^T(t')\right] = 0$$
$$\mathrm{E}\left[\tilde{x}(0)\tilde{x}^T(0)\right] = P_0 \qquad \mathrm{E}\left[w(t)\tilde{x}^T(0)\right] = 0$$

Où δ_t l'impulsion de Dirac en *t*, et en considérant *x(0)* comme une variable aléatoire d'espérance m_0, $\tilde{x}(0) = x(0) - m_0$

Filtre de Kalman continu

Les équations du filtre de Kalman discret peuvent être appliquées aux systèmes continus après échantillonnage. Le filtre continu est obtenu par passage à la limite (faire tendre la période d'échantillonnage vers 0)

- Étape 1 : discrétisation du modèle avec une période d'échantillonnage constante par la méthode d'Euler
- Étape 2 : passage à la limite en faisant tendre la période d'échantillonnage vers 0

Filtre de Kalman continu

Soit Δ la période de discrétisation :

$$\Delta = t_n - t_{n-1}$$

Posons:

impulsion de Dirac

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\delta_{ij}}{\Delta} = \delta_{(i-j)\Delta}$$

$$\lim_{\Delta \to 0} Q_k \Delta = Q(t_k)$$

$$\lim_{\Delta \to 0} R_k \Delta = R(t_k)$$

Filtre de Kalman continu

➢ Discrétisation du modèle

modèle continu

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)w(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t)$$

Lorsque Δ tend vers 0

$$\dot{x} \rightarrow \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta}$$ Approximation d'Euler

Le modèle continu est équivalent à :

$$x_{k+1} = \left(I + A_k\Delta\right)x_k + \Delta B_k.u_k + \Delta G_k.w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

Filtre de Kalman continu

- Application du filtre de Kalman

$$x_{k+1} = \left(I + A_k \Delta\right) x_k + \Delta B_k . u_k + \Delta G_k . w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1} . x_{k+1} + v_{k+1}$$

L'utilisation du filtre de Kalman prédicateur à 1 pas

sur ce système donne:

$$\hat{x}_{k+1/k} = \left(I + A_k \Delta\right)\left(I - K_k C_k\right)\hat{x}_{k/k-1} + \Delta B_k u_k + \left(I + A_k \Delta\right) K_k y_k$$

$$= \left(I + A_k \Delta\right)\hat{x}_{k/k-1} + \Delta B_k u_k + \left(I + A_k \Delta\right) K_k \left(y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1}\right)$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

Filtre de Kalman continu

$$\frac{\hat{x}_{k+1/k} - \hat{x}_{k/k-1}}{\Delta} = A_k \hat{x}_{k/k-1} + B_k u_k + (I + A_k \Delta)\frac{K_k}{\Delta}\left(y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1}\right)$$

En considérant :

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\hat{x}_{k+1/k} - \hat{x}_{k/k-1}}{\Delta} = \dot{\hat{x}}(t)$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{K_k}{\Delta} = K(t)$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \hat{x}_{k/k-1} = \hat{x}(t)$$

On obtient alors l'équation de l'estimateur :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + (I + \underbrace{\cancel{A_k \Delta}}_{0})K(t)\big(y(t) - C(t)\hat{x}(t)\big)$$

$$\boxed{\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)\big(y(t) - C(t)\hat{x}(t)\big)}$$

Filtre de Kalman continu

➢ Remarques

Le gain de Kalman est déterminé également par passage à la limite à partir des équations discrètes.

$$K(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{K_k}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{P_{k/k-1} C_k^T \left(R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T \right)^{-1}}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} P_{k/k-1} C_k^T \left(R_k \Delta + \underbrace{C_k P_{k/k-1} C_k^T \Delta}_{0} \right)^{-1}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} P_{k/k-1} C_k^T R^{-1}(t)$$

En posant $\lim\limits_{\Delta \to 0} P_{k/k-1} = P(t)$, le gain optimal est :

$$\boxed{K(t) = P(t) C^T(t) R^{-1}(t)}$$

Filtre de Kalman continu

➢ Remarque

$$
\begin{aligned}
P_{k/k} &= \left(I - K_k C_k\right) P_{k/k-1} \\
&= P_{k/k-1} - K_k C_k P_{k/k-1} \\
&= P_{k/k-1} - \frac{K_k}{\Delta} C_k P_{k/k-1} \Delta
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{\Delta \to 0} P_{k/k} = \lim_{\Delta \to 0} P_{k/k-1} - K(t) \underbrace{\lim_{\Delta \to 0} C_k P_{k/k-1} \Delta}_{0}
$$

$$
\boxed{\lim_{\Delta \to 0} P_{k/k} = \lim_{\Delta \to 0} P_{k/k-1} = P(t)}
$$

➢ Équation de Riccati

L'équation de Riccati pour le système discret équivalent :

$$x_{k+1} = \left(I + A_k\Delta\right)x_k + \Delta B_k.u_k + \Delta G_k.w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

s'écrit :

$$P_{k+1/k} = \left(I + A_k\Delta\right)P_{k/k-1}\left(I + A_k\Delta\right)^T + \Delta G_k Q_k G_k^T \Delta$$
$$-\left(I + A_k\Delta\right)P_{k/k-1}C_k^T\left(R_k + C_k P_{k/k-1}C_k^T\right)^{-1}C_k P_{k/k-1}\left(I + A_k\Delta\right)^T$$

$Q(t)$

$$\frac{P_{k+1/k} - P_{k/k-1}}{\Delta} = G_k Q_k \Delta G_k^T + A_k P_{k/k-1} + P_{k/k-1}A_k^T$$

Équation de Riccati

$$-\left(I + A_k\Delta\right)P_{k/k-1}C_k^T\left(\Delta R_k + \Delta C_k P_{k/k-1}C_k^T\right)^{-1}C_k P_{k/k-1}\left(I + A_k\Delta\right)^T$$

0 $R(t)$ 0 0

$$+\Delta A_k P_{k/k-1}A_k^T$$

0

$$\boxed{\dot{P}(t) = G(t)Q(t)G^T(t) + A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t)}$$

Filtre de Kalman continu

➢ Conclusion

Le filtre de Kalman d'un système à temps continu stochastique

est définie par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)\left(y(t) - C(t)\hat{x}(t)\right)$$

avec

$$\hat{x}(0) = m_0$$

K(t) le gain de Kalman

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t)$$

et *P(t)* solution de l'équation de Ricatti

$$\dot{P}(t) = G(t)Q(t)G^T(t) + A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t)$$

$$P(0) = P_0$$

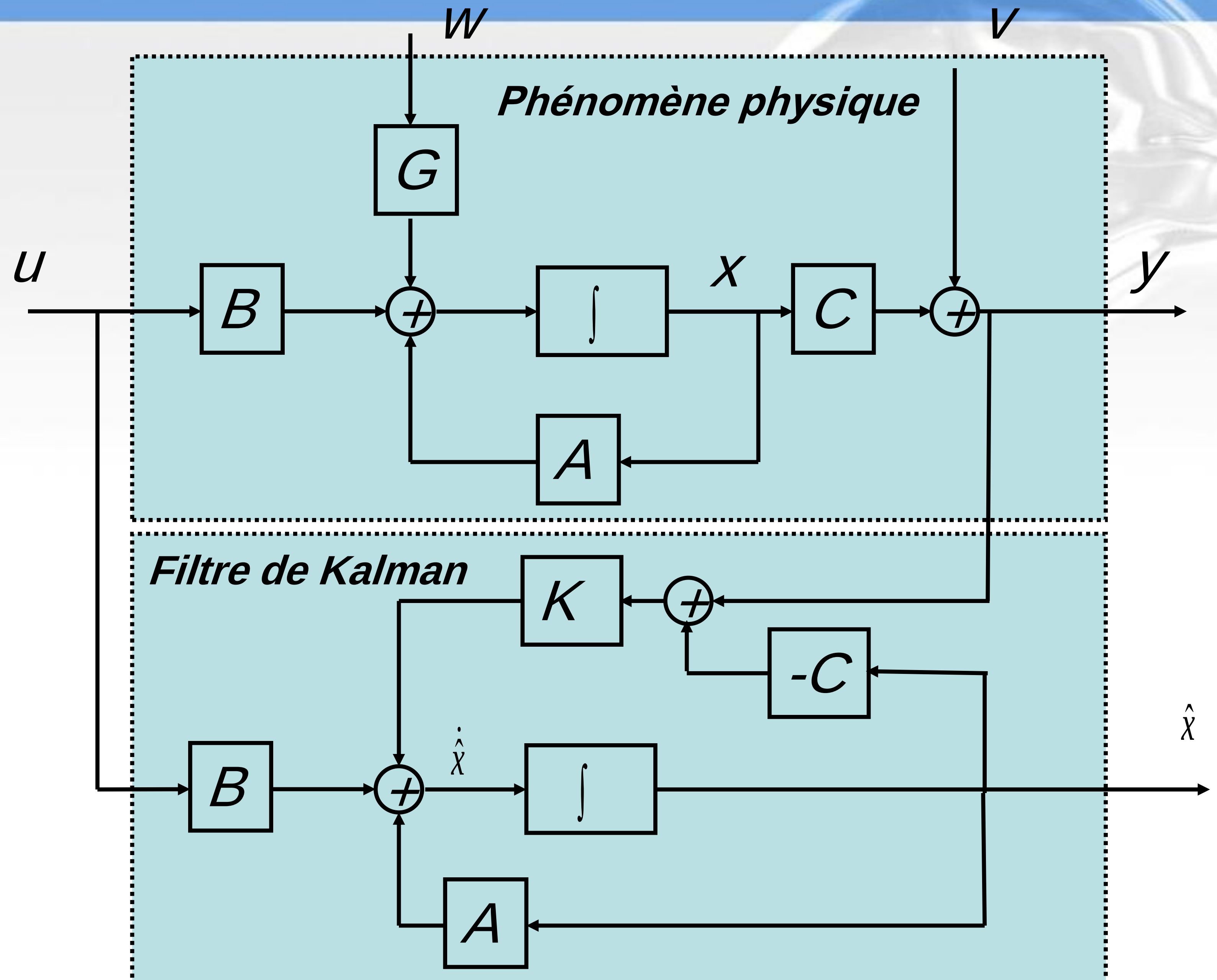
Filtre de Kalman continu

La matrice P tend alors vers la solution unique : solution de l'équation de algébrique de Ricatti

$$P(t) = \text{constante} \qquad \dot{P}(t) = 0$$

$$\boxed{GQG^T + AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP = 0}$$

Modélisation du Filtre de Kalman continu



Filtre de Kalman continu stationnaire

✓Dans le cas où le système est stationnaire (A, B, C,G, Q et R sont des constantes), le filtre de Kalman s'écrit

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu_k + K(t)\left(y_k - C\hat{x}(t)\right)$$

avec

$$\hat{x}(0) = m_0$$

K(t) le gain de Kalman

$$K(t) = P(t)C^T R^{-1}$$

et *P(t)* solution de l'équation de Ricatti

$$\dot{P}(t) = GQG^T + AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T R^{-1} CP(t)$$

$$P(0) = P_0$$

Filtre de Kalman continu stationnaire

✓ Régime permanent du filtre de Kalman continu stationnaire

✓Dans le cas où le système est stationnaire et observable, le filtre de Kalman optimal est asymptotiquement stable, quelques soient les matrices GQG^T et R définies positives et quelque soit P_0

La matrice P tend alors vers la solution unique : solution de l'équation de algébrique de Ricatti

$$P(t) = \text{constante} \quad \longrightarrow \quad \dot{P}(t) = 0$$

$$\boxed{GQG^T + AP + PA^T - PC^T R^{-1} C_k P = 0}$$

Le gain de Kalman s'écrit dans ce cas :

$$\boxed{K = PC^T R^{-1}}$$

Résolution de l'équation algébrique de Ricatti

L'équation de Ricatti :

$$GQG^T + AP + PA^T - PC^T R^{-1} CP = 0$$

peut être réécrite selon :

$$GQG^T + AP + PA^T - \underbrace{PC^T R^{-1}}_{K} R \underbrace{R^{-1} CP}_{K} = 0$$

soit :

$$GQG^T + AP + PA^T - KR^{-1}K = 0$$

Pour résoudre l'équation de Ricatti, on fixe K=K1 et on résout l'équation en P :

$$GQG^T + AP + PA^T - KR^{-1}K = 0$$

$\Rightarrow$ solution P_1

Avec P_1, on calcule : $K_2 = P_1 C^T R^{-1}$

si $K_1 = K_2$ → $K = K_1 = K_2$ et $P = P_1$

sinon on remplace K_1 par K_2 et on cherche une nouvelle solution P_2

Extension du filtre de Kalman - filtre de Kalman étendu

Dans le cas où le système est représenté par un modèle **non linéaire :**

$$\dot{x} = f(x,u,t) + g(t)w(t)$$
$$y = h(x,t) + v(t)$$

le problème de filtrage est résolu en appliquant le filtre de Kalman au modèle linéairisé autour de l'estimé de l'étape précédente (à chaque itération).

Le filtre de Kalman obtenu est dit ***filtre de Kalman étendu***.

Exemple

Soit :

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + w(t)$$

$$y(t) = x(t) + v(t)$$

où $w(t)$ et $v(t)$ sont 2 bruits blancs gaussiens, centrés et indépendants

$w(t)$ est indépendant de l'état initial

$v(t)$ est indépendant de l'état

$$\mathrm{E}\left[w(t)w^T(t')\right] = \mathrm{E}\left[v(t)v^T(t')\right] = 1 * \delta_{t-t'}$$

Déterminer l'estimation de *x(t)* par la méthode de Kalman en régime permanent ?

Comparer les résultats obtenues avec celles de Filtre de Wiener ?

Chapitre 5

Applications du filtrage de Kalman

Commande Optimale des systèmes linéaires à critère quadratique évoluant dans un environnement stochastique

Introduction

L'estimation statistique de l'état d'un système est généralement effectuée dans le but de réaliser une commande par retour d'état.

Dans *un cadre déterministe*, la notion de régulateur - observateur permet de générer une commande à partir de l'état reconstruit.

Dans *un cadre stochastique*, la commande optimale d'un système stochastique est obtenue en construisant la commande optimale obtenue sur le système déterministe associé à l'aide de l'état estimé à partir d'un filtre de Kalman

Soit le système continu défini par les équations d'états:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)w(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + v(t)$$

On suppose que ses bruits sont blancs, gaussiens, et connus par leurs matrices de covariance :

$$\mathrm{E}\left[w(t)w^T(t')\right] = Q(t)\delta_{t-t'} \qquad \mathrm{E}\left[v(t)\tilde{x}^T(t_0)\right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[v(t)v^T(t')\right] = R(t)\delta_{t-t'} \qquad \mathrm{E}\left[v(t)w^T(t')\right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[\tilde{x}(t_0)\tilde{x}^T(t_0)\right] = \Delta_{t_0} \qquad \mathrm{E}\left[w(t_0)\tilde{x}^T(t_0)\right] = 0$$

Où δ_t l'impulsion de Dirac en t, et en considérant $x(0)$ comme une variable aléatoire d'espérance m_0, $\tilde{x}(0) = x(0) - m_0$

Commande Optimale

Le problème d'optimisation stochastique consiste à chercher la commande optimale minimisant le critère :

$$J = \mathrm{E}\left\{x^T(t_f)S_{t_f}x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} x^T(t)M(t)x(t) + u^T(t)N(t)u(t)dt\right\}$$

Dans le cas d'un système où ***l'état est complètement accessible***, la commande optimale a la forme usuelle :

$$u^*(t) = -N^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t)$$

où $P(t)$ est solution de l'équation de Riccati :

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) - M(t) + P(t)B(t)N^{-1}(t)B^T(t)P(t)$$

$P(t_f)=S_{tf}.$

Dans le cas où ***seule la sortie est accessible*** (systèmes à état non complètement accessible), la commande optimale s'écrit sous la forme :

$$u(t) = -N^{-1}(t)B^T(t)P(t)\hat{x}(t)$$

où $P(t)$ est solution de l'équation de Riccati :

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) - M(t) + P(t)B(t)N^{-1}(t)B^T(t)P(t), \quad P(t_f) = S_{tf}.$$

et $\hat{x}(t)$ est l'estimation optimale de $x(t)$ obtenue à l'aide du filtre de Kalman continu :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)\left(y(t) - C(t)\hat{x}(t)\right)$$

$$K(t) = \Delta(t)C^T(t)R^{-1}(t)$$

avec $\Delta(t)$ solution de l'équation de Ricatti

$$\dot{\Delta}(t) = G(t)Q(t)G^T(t) + A(t)\Delta(t) + \Delta(t)A^T(t) - \Delta(t)C^T(t)R^{-1}(t)C\Delta(t)$$

$$\Delta(t_0) = \Delta_{t_0}$$

Commande Optimale

Ces différentes relations précédentes constituent le principe de séparation : si la commande et l'observateur sont calculés séparément, mais de façon optimale, alors l'ensemble, réuni dans une structure de commande de type régulateur-observateur, sera également optimal.

Les relations ont été établies dans un cadre continu mais peuvent bien sûr l'être dans un cadre discret.

Exemple

Soit le système :

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t) + w(t)$$
$$y(t) = x(t) + v(t)$$

$$\mathrm{E}\left[w(t)w^T(t')\right] = 1 * \delta_{t-t'}$$
$$\mathrm{E}\left[v(t)v^T(t')\right] = 1 * \delta_{t-t'}$$
$$\mathrm{E}\left[\tilde{x}(0)\tilde{x}^T(0)\right] = 1$$

On suppose que toutes les hypothèses pour l'application d'une loi de commande optimale sont vérifiées

Déterminer l'expression de la loi de commande en régime permanant minimisant le critère : $J = \mathrm{E}\left\{\int_0^1 u^2(t)\,dt\right\}$

Donner un schéma bloc

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad R = 1, \quad Q = 1, \quad \Delta_0 = 1$$
$$S_{tf} = 0, \quad M = 0, \quad N = 1$$

Solution exemple

$$u(t) = -N^{-1}(t)B^T(t)P(t)\hat{x}(t) \quad \boxed{u(t) = -P(t)\hat{x}(t)}$$

où $P(t)$ est solution de l'équation de Riccati :

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) - M(t) + P(t)B(t)N^{-1}(t)B^T(t)P(t), \quad P(t_f)=-S_{tf}$$

$$\boxed{\dot{P}(t) = -P(t) - P(t) + P(t)P(t),} \quad P(1)=0$$

et $\hat{x}(t)$ est l'estimation optimale de $x(t)$ obtenue à l'aide du filtre de Kalman continu :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + \Delta(t)C^T(t)R^{-1}(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t))$$

$$\boxed{\dot{\hat{x}}(t) = \hat{x}(t) + u(t) + \Delta(t)(y(t) - \hat{x}(t))}$$

avec $\Delta(t)$ solution de l'équation de Ricatti

$$\dot{\Delta}(t) = G(t)Q(t)G^T(t) + A(t)\Delta(t) + \Delta(t)A^T(t) - \Delta(t)C^T(t)R^{-1}(t)C\Delta(t)$$

$$\Delta(t_0) = \Delta_{t_0}$$

$$\boxed{\dot{\Delta}(t) = 1 + \Delta(t) + \Delta(t) - \Delta(t)\Delta(t),} \quad \boxed{\Delta(0) = 1}$$

Solution exemple

en régime permanant

$$u(t) = -N^{-1}(t)B^T(t)P(t)\hat{x}(t) \longrightarrow \boxed{u(t) = -P(t)\hat{x}(t)} \longrightarrow \boxed{u(t) = -2\hat{x}(t)}$$

où $P(t)$ est solution de l'équation de Riccati :

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) - M(t) + P(t)B(t)N^{-1}(t)B^T(t)P(t), \quad P(t_f)=-S_{tf}$$

$$\boxed{\underbrace{\dot{P}(t)}_{0} = -P(t) - P(t) + P(t)P(t),} \quad P(1)=0 \longrightarrow \boxed{P = 2}$$

et $\hat{x}(t)$ est l'estimation optimale de $x(t)$ obtenue à l'aide du filtre de Kalman continu :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u_k + \Delta(t)C^T(t)R^{-1}(t)\left(y_k - C(t)\hat{x}(t)\right)$$

$$\boxed{\dot{\hat{x}}(t) = \hat{x}(t) + u(t) + \Delta(t)(t)\left(y(t) - \hat{x}(t)\right)} \longrightarrow \boxed{\dot{\hat{x}} = \hat{x} + u + \left(1+\sqrt{2}\right)\left(y - \hat{x}\right)}$$

avec $\Delta(t)$ solution de l'équation de Ricatti

$$\dot{\Delta}(t) = G(t)Q(t)G^T(t) + A(t)\Delta(t) + \Delta(t)A^T(t) - \Delta(t)C^T(t)R^{-1}(t)C_k\Delta(t)$$

$$\Delta(t_0) = \Delta_{t_0}$$

$$\boxed{\underbrace{\dot{\Delta}(t)}_{0} = 1 + \Delta(t) + \Delta(t) - \Delta(t)\Delta(t),} \quad \boxed{\Delta(0) = 1} \longrightarrow \boxed{\Delta = 1+\sqrt{2}}$$

Solution exemple

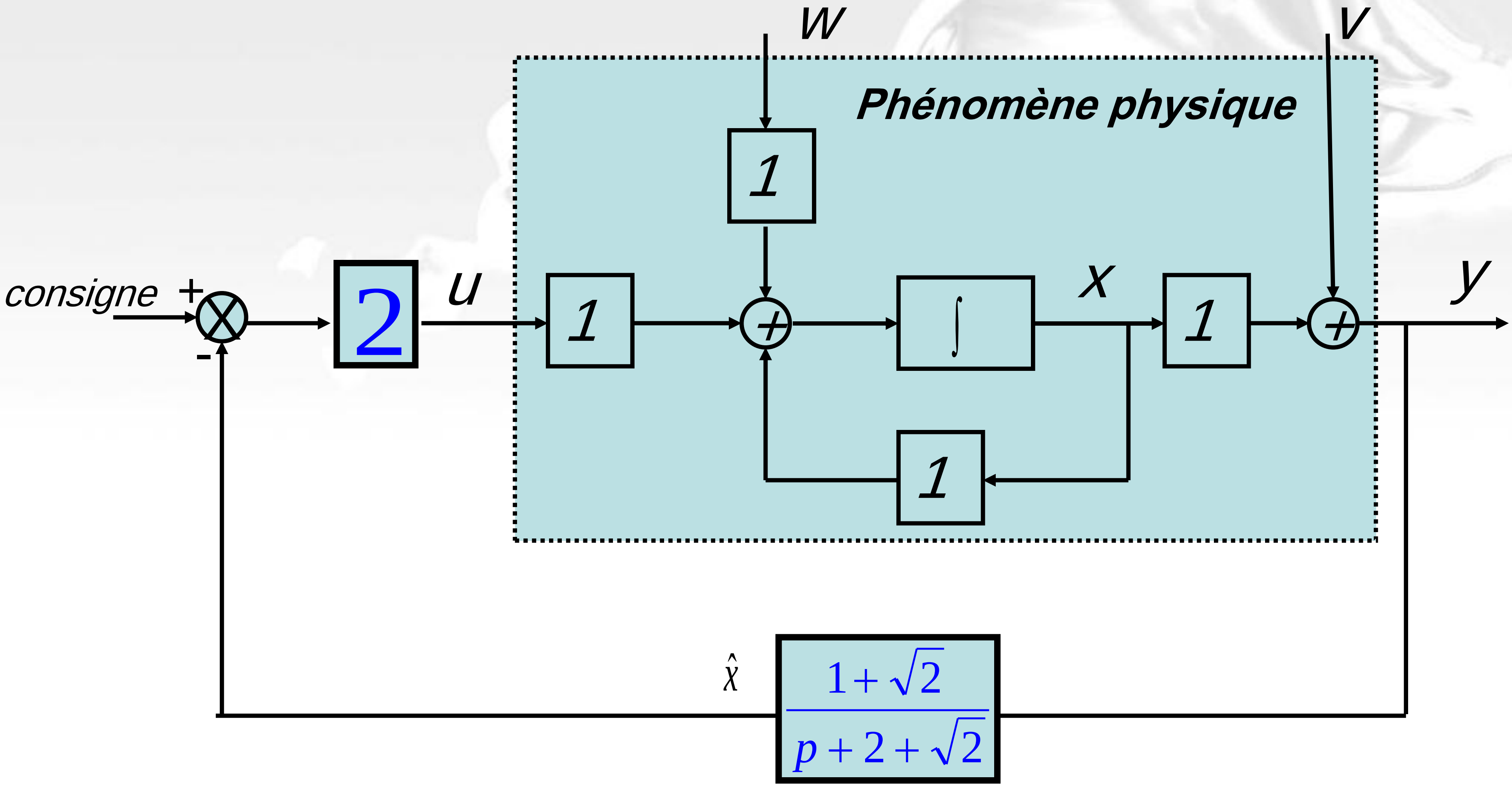
en régime permanant, la loi de commande est donnée par

$$\boxed{\begin{cases} u(t) = -2\hat{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = \hat{x}(t) + u(t) + \left(1+\sqrt{2}\right)\left(y(t) - \hat{x}(t)\right) \end{cases}}$$

$$\begin{cases} u(p) = -2\hat{x}(p) \\ p\hat{x} = \hat{x} + u + \left(1+\sqrt{2}\right)\left(y - \hat{x}\right) \end{cases}$$

$$\frac{u(p)}{\hat{x}(p)} = -2 \qquad \frac{\hat{x}(p)}{y(p)} = \frac{1+\sqrt{2}}{p+2+\sqrt{2}}$$

Solution exemple



Commande Optimale des systèmes stochastiques discret

Soit un système stochastique discret :

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k$$
$$y_k = C_k x_k + v_k$$

$\{w_k\}$ et $\{v_k\}$ des séquences indépendantes de bruit blancs Gaussien centrés indépendant de moyenne nulle et de covariance Q_k et R_k

Ce bruits sont indépendants de l'état initiale x_0. qu'est une variable aléatoire de moyenne m_0 et de covariance P_0

La commande optimale u_k doit minimiser le critère quadratique:

$$J = \mathrm{E}\left\{ x_N S x_N^T + \sum_{k=0}^{N-1} x_k M x_k^T + u_k N u_k^T \right\}$$

En utilisant les résultats du principes de séparation. La solution est :

$$u_k^* = -L_k \, \hat{x}_{k/k}$$

$$L_k = \left(N + B_k^T \, \Gamma_{k+1} \, B_k\right)^{-1} B_k^T \, \Gamma_{k+1} A_k$$

$$\Gamma_k = \left(A_k - B_k \, L_k\right)^T \Gamma_{k+1} \left(A_k - B_k \, L_k\right) + L_k^T \, N \, L_k + M$$

$$\Gamma_N = S$$

$\hat{x}_{k/k}$ est l'estimé de x_k fournie par le filtre de kalman discret: