Exercice :

Pour une ligne de transmission quelconque :

1- déterminer α etβ en fonction de R', G', C', L' et ω.
2- Dans le cas de faibles pertes (R'<<L' ω et G'<<C' ω), simplifier les expressions de α , β et Z_c.
3- Si les pertes diélectriques sont négligeables par rapport aux pertes dans les conducteurs, que deviennent α , β et Z_c.

Corrigé : voir page suivante :

1°)$\underline{\gamma} = \sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')} = \alpha + j\beta \Rightarrow \quad \underline{\gamma}^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta$ *et*

$\underline{\gamma}^2=(R'+j\omega L')(G'+j\omega C') = (R'G' - L'C'\omega) + j\omega(L'G' + R'C')$

Par identification , on obtient :

$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = R'G' - L'C'\omega^2 (o) \\ 2\alpha\beta = \omega(L'G' + R'C')(oo) \end{cases}$ (oo) $\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\omega}{2\beta}(L'G' + R'C')$

avec (o) $\Rightarrow \frac{\omega^2}{4\beta^2}(L'G' + R'C')^2 - \beta^2 = R'G' - L'C'\omega$ ce qui donne :

$4\beta^4 + 4\beta^2(R'G' - L'C'\omega^2) - \omega^2(L'G' + R'C')^2 = 0.$ On pose X=β^2 d'où :

$4X^2 + 4X(R'G' - L'C'\omega^2) - \omega^2(L'G' + R'C')^2 = 0.$ Equation du second degré dont le discriminant est :

$\Delta' = 4(R'G' - L'C'\omega^2)^2 + 4\omega^2(L'G' + R'C')^2 = \cdots = 4\left(R'^2 + (L'\omega)^2\right)\left(G'^2 + (C'\omega)^2\right)$

X=$\beta^2 = \frac{-2(R'G' - L'C'\omega^2) \pm 2\sqrt{\left(R'^2+(L'\omega)^2\right)\left(G'^2+(C'\omega)^2\right)}}{4}$ *d'où*

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(R'^2 + (L'\omega)^2\right)\left(G'^2 + (C'\omega)^2\right)} - (R'G' - L'C'\omega^2)\right)}$$

et on déduit $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(R'^2 + (L'\omega)^2\right)\left(G'^2 + (C'\omega)^2\right)} + (R'G' - L'C'\omega^2)\right)}$

2°)

$$\beta \approx \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\cancel{R'^2} + (L'\omega)^2\right)\left(\cancel{G'^2} + (C'\omega)^2\right)} - (\cancel{R'G'} - L'C'\omega^2)\right)}$$

$\beta \approx \omega\sqrt{L'C'}$

Pour α si on utilise l'équation (o) on trouve zéro, on utilise donc l'équation (oo)

Qui donne $\alpha = \frac{\omega}{2\beta}(L'G' + R'C') \approx \frac{1}{2}\left(G'\sqrt{\frac{L'}{C'}} + R'\sqrt{\frac{C'}{L'}}\right)$

$\underline{Z_c} = \sqrt{\frac{(R'+j\omega L')}{(G'+j\omega C')}} \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}$

3)$\beta \approx \omega\sqrt{L'C'}$; $\alpha \approx \frac{1}{2}\left(R'\sqrt{\frac{C'}{L'}}\right)$ *et* $\underline{Z_c} \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}}$