1 L'espace L^p

Définition Soit p un nombre réel positif. On désigne par l'espace des fonctions mesurables de puissance p-ième intégrable, l'espace $\mathcal{L}^p_\mu$ et on le note par
$\mathcal{L}^p_\mu = \{f : E \to \mathbb{C},\ f \text{ mesurable et } \int_E |f|^p d\mu < +\infty\}$.
On introduit pour $f \in \mathcal{L}^p_\mu$ le nombre $\|f\|_p$, $p \geq 1$ comme suit

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Pour $p,\ q \in]1, \infty[$, ils sont dites exposants conjugués si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Par extension, p tend vers ∞ si et seulement si q tend vers 1 et l'inverse est juste.
On convient alors que 1 et $+\infty$ sont aussi des exposants conjugués.

Proposition :

Pour $1 \leq p < +\infty$ on a pour toutes fonctions mesurables f et g de E dans $\mathbb{C}$

1) $\int_E |fg| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |f|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$, où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Inégalité de Holder)

(Pour $p = q = 2$, l'inégalité est appelé inégalité de Cauchy Schwartz.)

2) $\left(\int_E |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ (Inégalité de Minkovski.)

Preuve

1) En utilisant l'inégalité de concavité de la fonction ln, on obtient aisement

$$\forall\, x,\ y > 0,\ \ln(xy) = \frac{\ln(x^p)}{p} + \frac{\ln(y^q)}{q} \leq \ln\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right)$$

Il suffit ensuite de passer à l'exponentielle pour retrouver que $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$.

Ensuite le résultat découlera en remplacant x et y par des fonctions $\frac{|f|}{\|f\|_p}$ et $\frac{|g|}{\|g\|_q}$ et en integrant l'inégalité obtenue.

La concavité du Logarithme étant stricte, on ne peut avoir égalité que si

$$\|g\|_q^q |f(x)|^p = \|f\|_p^p |g(x)|^q \ \mu - p.p$$

2) Si $N_p(f) = +\infty$ ou que $g(x) = +\infty$, l'inégalité est vérifiée.
On peut supposer que $N_p(f) < +\infty$ et que $N_(g) < +\infty$. On rappelle l'inégalité triangulaire, pout tout f, g

$$|f+g|^p \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1},$$

et c'est du fait que $(f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1} = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$. En integrant et en utilisant l'inégalité de Holder 1) et tout en remarquant que $pq - q = p$, on aura :

$$\begin{aligned}\int_E |f+g|^p d\mu &\leq \int_E |f+g|^{p-1}|f| d\mu + \int_E |f+g|^{p-1}|g| d\mu \\ &= \|f+g\|_p^{p-1}\|f\|_p + \|f+g\|_p^{p-1}\|g\|_p\end{aligned}$$

Le résultat découle en multipliant l'inégalité par $\|f+g\|_p^{1-p}$.

L'égalité est réalisé lorsqu'on ait $\|g\|_p |f(x)| = \|f\|_p |g(x)|$.

Proposition
Pour tout $p > 0$ on a

1. l'espace $\mathcal{L}^p_\mu$ est un espace vectoriel.
2. l'application $N_p : \mathcal{L}^p_\mu \to [0, +\infty[, \ f \mapsto \|f\|_p$ est un semi norme, c'est à dire que l'on a pour tout f et g dans $\mathcal{L}^p_\mu$
   — $N_p(f) \geq 0$,
   — $N_p(\lambda f) = |\lambda| N_p(f)$
   — $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$.

D'autre part, on a $N_p(f) = 0 \Leftrightarrow |f|^p = 0 \ p.p$ càd $f = 0 \ p.p.$

Preuve

1. — En effet, pour tout $f \in \mathcal{L}^p_\mu$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$(ou $\mathbb{C}$), on a $\alpha f \in \mathcal{L}^p_\mu$.
   — Pour tout $f, \ g \in \mathcal{L}^p_\mu$, on a d'après l'inégalité de Minkowski
   $$\int_E |f(x)+g(x)|^p d\mu \leq (\int_E |f(x)|^p d\mu + \int_E |g(x)|^p d\mu) < +\infty.$$
   Ce qui explique que $f + g \in \mathcal{L}^p_\mu$.
2. — $N_p(|f|) = N_p(f)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$(ou $\mathbb{C}$) on a $N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f)$.
   — $N_p(f+g) \leq N_p(f) + N_p(g)$. (C'est le résultat de l'inégalité de Minkowski)

Nous introduirons par la suite la notion de convergence dans l'espace $\mathcal{L}^p_\mu$.

Définition
Considérons la relation d'equivalence sur l'espace $\mathcal{L}^p_\mu$
$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \ p.p$$
La classe d'équivalence d'une fonction $f \in \mathcal{L}^p_\mu$ est noté par $\dot{f}$ et définie comme suit : $\dot{f} = \{g \in \mathcal{L}^p_\mu, \ \ f = g \ p.p\}$.
L'ensemble des classe d'équivalence est l'espace quotient, définit comme suit : $L^p_\mu := \mathcal{L}^p_\mu / \sim$.

1.1 Produit de convolution

Définition
La translatée (ou la translation) d'une fonction f par le nombre réel a est définie comme suit :
$$\tau_a f(x) = f(x-a).$$
Et on a les résultats suivantes :

1. Si $f \in L^p_\mu, \ \ 1 \leq p \leq +\infty$, alors $\tau_a f \in L^p_\mu$ et $\|\tau_a f\|_p = \|f\|_p$.
2. Si $f \in L^p_\mu, \ \ 1 \leq p < +\infty$, alors $\lim\limits_{a \to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$.

Définition
Soient f et g deux fonctions de L^1_μ. On appelle produit de convolution de f et de g noté $f * g$, l'applicaion h de L^1_μ défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}$
$$h(x) = f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) d\mu(t).$$

Sur l'espace L^1_μ le produit de convolution est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition.
Et on a pour tout $f,\ g \in L^1_\mu$

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Preuve
En vertue du théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}\|f * g\|_1 &\leq \int\int \Big|f(x-t)g(t)\Big| d\mu(t) d\mu(x) \\ &\leq \int |g(t)| \Big(\int |f(x-t)| d\mu(x)\Big) d\mu(t) = \|f\|_1 \|g\|_1.\end{aligned}$$

En vertue d'un changement de variable $s = x - t$, on obtient facilement que $f * g = g * f$.
D'autre part, en vertue du théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(x) &= \int\int f(x-t-s) g(s) h(t) ds dt \\ &= \int\int f(x-s-t) g(t) h(s) ds dt \\ &= ((f * h) * g)(x)\end{aligned}$$

Et grace à la commutativité on obtient

$$\begin{aligned}(f * g) * h &= (f * h) * g = (h * f) * g \\ &= (h * g) * f = f * (g * h)\end{aligned}$$

D'où l'associativité du produit de convolution.

2 Transformation de Fourier dans $\mathcal{L}^1$

Définition
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On appelle transformation de Fourier de la fonction f, l'application $\mathcal{F}f$ ou $\widehat{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{C}$, par

$$\mathcal{F}f(x) = \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi xt} dt,\ x,\ t \in \mathbb{R}$$

Théorème de Riemann-Lebesgue
L'application

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$$

est lineaire et continue et pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ on a :

1. $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
2. $\lim_{\|x\| \to +\infty} \widehat{f}(x) = 0$. (Lemme de Riemann Lebesgue.)

(Cas particulier :)
on a $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Donc l'intégrale de Fourier s'Ã©crit :

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)(\cos(2\pi tx) - i\sin(2\pi tx))\ dt$$

si f est paire, alors $\mathcal{F}f(x)$ est un nombre réel et on a

$$\mathcal{F}f(x) = 2\int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(2\pi tx)\ dt.$$

et si f est impaire, alors $\mathcal{F}f(x)$ est imaginaire et on a

$$\mathcal{F}f(x) = -2i \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(2\pi t x)\, dt.$$

Exercice. 1. *Calculons la transformee de Fourier de*

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1 - |t| & si \ \ |t| \leq 1. \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Réponse

comme Δ est paire, on pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}(x) &= 2\int_0^1 (1-t)\ \cos(2\pi x t)\ dt \\ &= \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2} \end{aligned}$$

si $x = 0$, $\widehat{\Delta}(0) = 1$. La fonction $\widehat{\Delta}(x)$ est donc prolongeable par continuitéen 0. Donc

$$\widehat{\Delta}(x) = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$$

Proposition

Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}^*$, et $b \in \mathbb{R}$ On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

1. $\mathcal{F}(f(at))(x) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)(\frac{x}{a})$, $a \neq 0$.
2. $\mathcal{F}(\tau_b f)(x) = e^{-2i\pi bx}\mathcal{F}f(x)$.
3. $\mathcal{F}(e^{2i\pi bt}f(t))(x) = \mathcal{F}f(x-b)$.
4. $\mathcal{F}(\overline{f})(x) = \overline{\mathcal{F}f}(-x)$.

Preuve

1. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*$, alors, on a d'une part la fonction $t \to f(at) \in L^1(\mathbb{R})$ et d'autre part , par changement de variable $u = at$, on aura que si $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f(at))(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} f(ta)dt = \frac{1}{a^n}\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\frac{u}{a}} f(u)du$$

et si $a \in \mathbb{R}_-^*$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f(at))(x) = \frac{-1}{a}\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\frac{u}{a}} f(u)du.$$

Ce qui entraine que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}^*,\ \mathcal{F}(f(at))(x) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)(\frac{x}{a}).$$

2. On a avec le changement de variable $u = t - b$ on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau_b f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt} f(t-b)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x(u+b)} f(u)du \\ &= e^{-2i\pi xb}\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xu} f(u)du = e^{-2i\pi bx}\mathcal{F}f(x). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(e^{2i\pi bt}f(t))(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi bt}e^{-2i\pi xt}f(t)dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi t(x-b)}f(t)dt\\ &= \mathcal{F}f(x-b).\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\overline{f})(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xt}\overline{f}(t)dt\\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi t}f(t)dt}\\ &= \overline{\mathcal{F}f}(-x).\end{aligned}$$

Proposition
Pour $f,\ g \in L^1(\mathbb{R})$ on a

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f\ \mathcal{F}g.$$

preuve Comme $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et on a, en vertue du théorème de Tonelli, la fonction

$$(x,y) \mapsto |f(x-y)g(y)e^{-2i\pi xy}| = |f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}).$$

Ce qui entraine d'après théorème de Fubini et d'un changement de variable $u = y - t$ que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi yx}(f * g)(y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi yx}\Big(\int_{\mathbb{R}} f(y-t)g(t)dt\Big)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t)\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi(u+tx)}f(u)du\Big)dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ux}f(u)du \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx}g(t)dt\\ &= \mathcal{F}f(x)\mathcal{F}g(x).\end{aligned}$$

Proposition
Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$avec f et f' sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors, on a

$$\mathcal{F}(f'(t)(x) = (2i\pi x)\mathcal{F}f(x)$$

Plus généralement, on a :
Pour f dans $L^1(\mathbb{R})$ telle que f est de classe $C^n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f^{(k)}$ dans $L^1(\mathbb{R}), \forall\, k \in \mathbb{N}$, alors on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(x) = (2i\pi x)^k\mathcal{F}(f)(x).$$

Proposition
Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $t \mapsto t^k f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$pour tout $k \in \{0, 1, ..., n\}$, alors $\mathcal{F}f$ est n-fois dérivable et on a

$$\mathcal{F}^{(k)}f(x) = (-2i\pi)^k\mathcal{F}(t^k f(t))(x),\ \forall\, 0 \le k \le n.$$

Théorème : (Formule d'inversion) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, pour tout x où f est continue, on a la formule d'inversion suivante

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi xt} \mathcal{F}f(t)dt = \mathcal{F}(\mathcal{F}f)(-x).$$

On écrit aussi que

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(-x) = \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f)(x),$$

où

$$\bar{\mathcal{F}}(f)(x) = \mathcal{F}^{-1}f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi xt} f(t)dt.$$

Théorème : Formule de Plancherel
Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, alors on a

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(t)\overline{\mathcal{F}g(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Et on a en particulier

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$$

Exercice. 2. *On donne* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ a > 0$

1) Soit $a > 0$, f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-ax^2}$
a) Vérifier que f est une solution de l'equation differentielle

$$(E) : \quad f'(x) + 2xaf(x) = 0$$

b) En appliquant la transformation de Fourier à l'equation (E), montrer que $\widehat{f}$ est une solution de l'equation differentielle qu'on déterminera. On notera $(\widehat{E})$ cette équation.
2) Résoudre $(\widehat{E})$ et déterminer $\widehat{f}$.
3) Déduire de ce qui precède que les fonctions

$$x \mapsto e^{-\pi x^2} \text{ et } x \mapsto \pi x e^{-\pi x^2}$$

sont des vcteurs propres de l'opérateur de transformation de Fourier F.

Exercice. 3.

1. *Soit $a > 0$ et f la fonction définie par*

$$f(x) = e^{-at} 1_{[0,+\infty[}(t) \quad \text{où} \quad 1_{[0,+\infty[}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f.

2. *Soit g la fonction définie par*

$$g(t) = e^{ax} 1_{]-\infty,0]}(t).$$

En utilisant le résultat de question 1, calculer la transformée de Fourier $\hat{g}$ de g.

3. *En déduire la transformée de Fourier $h(t) = e^{-a|t|}$*
4. *En déduire la valeur de l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 p^2} dp$$

Solution :
on a

$$\begin{aligned}\widehat{f}(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-2i\pi tx}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t(a+2i\pi x)}dt \\ &= \frac{1}{a+2i\pi x}\end{aligned}$$

2. remarquons que $g(t) = f(-t)$, alors

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{a-2i\pi x}$$

3. Comme $h(t) = f(t) + g(t)$, alors

$$\widehat{h}(x) = \frac{1}{a+2i\pi x} + \frac{1}{a-2i\pi x} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2x^2}$$

4. le fait que h et $\widehat{h}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, de plus h est continue sur $\mathbb{R}$, on a avec la formule d'inversion de Fourier on a

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{h}(t)e^{2i\pi tx}dt$$

en particulier le cas $x = 0$ donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2+4\pi^2t^2}dt = \frac{1}{2a}h(0) = \frac{1}{2a}$$

Exercice. 4. *Soit f la fonction définie par $f(x) = x1_{[-1,1]}(x)$. Calculer la transformation de Fourier $\hat{f}$ de f.*

Solution : on sait que $\mathcal{F}(1_{[-1,1]}(t))(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(t1_{[-1,1]}(t))(x) &= -\frac{1}{2i\pi}\mathcal{F}'(1_{[-1,1]}(t))(x) \\ &= -\frac{1}{2i\pi}\left(\frac{\sin(2\pi x)}{\pi x}\right)'\end{aligned}$$

Exercice. 5. *Soit $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1+t & si \ \ t \in [-1,0], \\ 1-t & si \ \ t \in [0,1], \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1. *Faire la representation graphique de la fonction Δ.*
2. *Calculer la transformation de Fourier $\widehat{\Delta}(x)$ de Δ.*
3. *En déduire la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}dx$$

Solution : on sait que $\widehat{\Delta}(x) = \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$ la fonction Δ est paire et carré intégrable, la formule de Plancherel implique

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} = \pi \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{\pi}{3}$$

Exercice. 6. *Soit $a > 0$, $k \in \mathbb{N}$ et f la fonction définie par*

$$f(x) = \frac{t^k}{k!} e^{-at} 1_{[0,+\infty[}(t)$$

En utilisant le résultat de l'exercice 1, calculer $\hat{f}$.

Solution : D'apres l'exercice 1 on a

$$\mathcal{F}(e^{-at} 1_{[0,+\infty[}(t))(x) = \frac{1}{a + 2i\pi x}$$

Ainsi,

$$\mathcal{F}(\frac{t^k}{k!} e^{-at} 1_{[0,+\infty[}(t))(x) = \frac{1}{(-2i\pi)^k k!} \left(\frac{1}{a+2i\pi x}\right)^{(k)}$$

un calcul simple montre que

$$\left(\frac{1}{a+2i\pi x}\right)^{(k)} = (-1)^k k! (2i\pi)^k \frac{1}{(a+2i\pi x)^{k+1}}$$

d'où

$$\mathcal{F}(\frac{t^k}{k!} e^{-at} 1_{[0,+\infty[}(t))(x) = \frac{1}{(a+2i\pi x)^{k+1}}$$

Exercice. 7. *Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-|t|}$.*

1. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction f.*
2. *en déduire la transformée de Fourier de*

$$h : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}.$$

3. *En déduire, pour $\omega \in \mathbb{R}$, la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}\, dx$$

4. *En déduire la transformée de Fourier de la fonction φ définie par*

$$\varphi : t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2}$$

Solution :

1. on a

$$\widehat{f}(x) = \frac{2}{1+4\pi^2 x^2}$$

2. $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, f est paire avec la formule d'inversion de Fourier on a

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi} \mathcal{F}(\frac{1}{1+t^2})(\frac{-x}{2\pi})$$

ce qui implique

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \pi e^{-2\pi|x|}$$

3. comme h est paire

$$\begin{aligned}
\pi e^{-2\pi|x|} = \widehat{h}(x) &= 2\int_0^{+\infty} h(t)\cos(2\pi t x)dt \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\cos(2\pi t x)dt \\
&\text{pour} \omega = 2\pi x \\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{1+t^2}dt
\end{aligned}$$

alors,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}e^{-|\omega|}$$

Exercice. 8. *On donne la transformation de Fourier de la fonction* $f(x) = e^{-x^2/2}$,

$$\mathcal{F}(e^{-x^2/2})(\alpha) = \sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\alpha^2}$$

1. *Déterminer la transformée de Fourier de* $g(x) = e^{-ax^2}$
2. *Peut-on trouver une fonction* $h : \mathbb{R} \to R$ *telle que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x-u)h(u)du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$$

Solution :

1. on a

$$g(x) = f(\sqrt{2a}x)$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g(t))(x) &= \frac{1}{\sqrt{2a}}\ \widehat{f}\left(\frac{x}{\sqrt{2a}}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ e^{-\frac{\pi^2}{a}x^2}
\end{aligned}$$

2. en fonction du produit de convolution l'equation s'ecrit sous la forme

$$(h * h)(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2}$$

appliquant la transformation de Fourier au deux membre de l'equation on obtient :

$$\left(\widehat{h}(x)\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ e^{-\frac{\pi^2}{2}x^2}\right)^2 = (\mathcal{F}(e^{-2t^2})(x))^2$$

avec l'injectivite de la transformation de Fourier on obtient

$$h(t) = e^{-2t^2}$$

Exercice. 9. *Le but de cet exercice est de chercher des fonctions φ absolument intégrables et bornées vérifiant pour tout x réel,*

$$\varphi(x) = e^{-|x|} + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|}\varphi(y)dy$$

pour $\beta \in \mathbb{R}$. Déterminer une solution pour $\beta < \frac{1}{2}$.

Solution :

En posant $f(x) = e^{-|x|}$, il est évident que l'équation peut s'écrire

$$\varphi = f + \beta\varphi * f.$$

Soit $\beta < \frac{1}{2}$. On suppose qu'il existe une solution φ absolument intégrable. En appliquant la transformation de Fourier, il vient

$$\hat{\varphi} = \hat{f} + \beta\hat{\varphi}\hat{f}.$$

soit encore $\hat{\varphi} = \frac{\hat{f}}{1-\beta\hat{f}}$, or $\hat{f}(x) = \frac{2}{1+x^2}$ de sorte que

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(x) &= \frac{2}{1-2\beta+x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}}\frac{2\sqrt{1-2\beta}}{(1-2\beta)+x^2}, \quad \text{pour tout } \beta < \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}}\hat{h}(x) \quad \text{pour} \quad h(t) = e^{\sqrt{1-2\beta}\,|t|}\end{aligned}$$

Si on suppose en plus que φ est continue, alors par la formule d'inversion, on en déduit que

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}}h(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\beta}}e^{\sqrt{1-2\beta}\,|t|}$$

Bonne lecture !

Transformée de Laplace Exercices Simples

1) Laplace

Calculer les transformées de Laplace suivantes :

a) $\mathcal{L}\left[\left(t^2+t-e^{-2t}\right)\mathcal{U}(t)\right]$

b) $\mathcal{L}\left[\left(t-2\right)\mathcal{U}(t)-\left(t-3\right)\mathcal{U}(t-2)\right]$

c) $\mathcal{L}\left[\left(t^2+t+1\right)e^{-2t}\,\mathcal{U}(t)\right]$

2) Laplace inverse

Calculer les originaux suivants :

a) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right]$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{(p+1)^2}\right]$

c) $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{p-1}{(p^2+2p+5)}\right]$

3) Équations différentielles

Utiliser la transformée de Laplace pour déterminer la solution particulière de chacune des équations différentielles suivantes :

a) $x'(t)+x(t)=t\,\mathcal{U}(t)-t\,\mathcal{U}(t-1)$ condition initiale : $x(0)=0$

b) $x''(t)+x'(t)=\mathcal{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

c) $x''(t)+4x(t)=2\,\mathcal{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

d) $x''(t)+5x'(t)+4x(t)=e^{-2t}\,\mathcal{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

e) $x''(t)+2x'(t)+2x(t)=0$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

Transformée de Laplace Exercices d'entraînement

1) Calculer les transformées de Laplace suivantes :

a) $\mathscr{L}\left[\cos(t)e^{-t}\,\mathscr{U}(t)\right]$ b) $\mathscr{L}\left[(5t)^2e^{-5t}\,\mathscr{U}(t)\right]$

c) $\mathscr{L}\left[(\cos(2t)-\sin(t))\,e^{-3t}\,\mathscr{U}(t)\right]$ d) $\mathscr{L}\left[(t^2+t+1)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)\right]$

2) Calculer les originaux suivants :

a) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{p+2}-\dfrac{1}{p^3}\right]$

b) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{-2}{(p+3)^2}\right]$

c) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{5}{(p+3)(p^2+3p+5)}\right]$

d) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{-p}{p^2+4p+6}\right]$

e) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p}{(p+1)^2}\right]$

f) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2p+3}{2p^2+4p+5}\right]$

3) Équations différentielles

Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre les équations suivantes :

a) $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=0$ avec : $x(0)=1$ et $x'(0)=0$

b) $x''(t)+6x'(t)+9x(t)=e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0)=0$ et $x'(0)=0$

c) $x''(t)-x(t)=(3e^{-2t}+t^2+1)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0)=0$ et $x'(0)=0$

d) $x''(t)-4x(t)=(3e^{-t}-t^2)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0)=0$ et $x'(0)=1$

e) $x''(t)+x(t)=e^t\cos(t)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0)=0$ et $x'(0)=0$

f) $x''(t)+x(t)=\mathscr{U}(t)-\mathscr{U}(t-1)$ avec : $x(0)=2$ et $x'(0)=0$

Exercices Simples (Solutions)

1) Laplace

Calculer les transformées de Laplace suivantes :

a) $\mathscr{L}\left[\left(t^2+t-e^{-3t}\right)\mathscr{U}(t)\right]$

$$f(t)=\left(t^2+t-e^{-3t}\right)\mathscr{U}(t) = t^2\,\mathscr{U}(t)+t\,\mathscr{U}(t)-e^{-3t}\,\mathscr{U}(t)$$

$$F(p)=\boxed{\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p+3}}$$

b) $\mathscr{L}\left[(t+2)\,\mathscr{U}(t)+(t+3)\,\mathscr{U}(t-2)\right]$

$$f(t)=(t+2)\,\mathscr{U}(t)+(t+3)\,\mathscr{U}(t-2)=(t+2)\,\mathscr{U}(t)+((t-2)+5)\,\mathscr{U}(t-2)$$

$$\mathscr{L}\left[(t+5)\,\mathscr{U}(t)\right]=\frac{1}{p^2}+\frac{5}{p}$$

$$\mathscr{L}\left[(t+2)\,\mathscr{U}(t)\right]=\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p}=\frac{2p+1}{p^2}$$

$$\mathscr{L}\left[((t-2)+5)\,\mathscr{U}(t-2)\right]=\left(\frac{1}{p^2}+\frac{5}{p}\right)e^{-2p}$$

$$F(p)=\boxed{\frac{2p+1}{p^2}+\left(\frac{1}{p^2}+\frac{5}{p}\right)e^{-2p}}$$

c) $\mathscr{L}\left[\left(t^2+t+1\right)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)\right]$ = $\mathscr{L}\left[e^{-2t} f(t)\, U(t)\right] \overset{(1)}{=} \mathscr{L}(f(t))(p+2)$
$= \mathscr{L}(t^2 H(t))(p+2)$
$+ \mathscr{L}(t H(t))(p+2)$
$+ \mathscr{L}(H(t))(p+2)$
$= \frac{2}{(p+2)^3} + \frac{1}{(p+2)^2}$
$+ \frac{1}{p+2}$

$$\cancel{f(t)=\left(t^2+t+1\right)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)}$$

$$\mathscr{L}\left[\left(t^2+t+1\right)\mathscr{U}(t)\right]=\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}=\frac{p^2+p+2}{p^3}$$

$$\mathscr{L}\left[\left(t^2+t+1\right)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)\right]=\frac{(p+2)^2+(p+2)+2}{(p+2)^3}$$

$$F(t)=\boxed{\frac{p^2+5p+8}{(p+2)^3}}$$

2) Laplace inverse

Calculer les originaux suivants :

a) $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}\right]$

$$F(p)=\frac{p+2}{(p+3)(p+4)}=\frac{2}{p+4}+\frac{-1}{p+3}$$

$$f(t)=\boxed{\left(2\,e^{-4t}-e^{-3t}\right)\mathscr{U}(t)}$$

$g(p) = 3 \cdot \frac{1}{p+5} \cdot \frac{1}{p+5} = 3\mathcal{L}(H)(p+5)\,\mathcal{L}(H)(p+5)$

b) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{(p+5)^2}\right]$

$= 3\mathcal{L}(e^{-5t}H(t))(p)\,\mathcal{L}(e^{-5t}H(t))(p)$

$(\mathcal{L}(f*g)(p) = \mathcal{L}(f)(p)\cdot\mathcal{L}(g)(p))$

$$F(p) = \frac{3}{(p+5)^2}$$

$= 3\mathcal{L}[e^{-5\cdot}H(\cdot) * e^{-5\cdot}H(\cdot)(t)](p)$

on a $f*g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(t-x)\,dx$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{p^2}\right] = 3\,t\,\mathscr{U}(t)$$

$= (e^{-5\cdot}H(\cdot)) * (e^{-5\cdot}H(\cdot))(t)$

$$f(t) = \boxed{3\,t\,e^{-5t}\,\mathscr{U}(t)}$$

$= \int_{\mathbb{R}} e^{-5x}H(x)\,e^{-5(t-x)}H(t-x)\,dx$

$H(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$; $H(t-x) = \begin{cases} 1, & t>x \\ 0, & t<x \end{cases}$

c) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p-1}{(p^2+2p+5)}\right]$

$$F(p) = \frac{p-1}{(p^2+2p+5)} = \frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} - \frac{2}{(p+1)^2+2^2}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{p}{p^2+2^2} - \frac{2}{p^2+2^2}\right] = \big(\cos(2t) - \sin(2t)\big)\,\mathscr{U}(t)$$

$= \int_0^{+\infty} e^{-5x}e^{-5(t-x)}H(t-x)\,dx$

$= \int_0^t e^{-5x}e^{-5(t-x)}\,dx$

$$f(t) = \boxed{\big(\cos(2t) - \sin(2t)\big)\,e^{-t}\,\mathscr{U}(t)}$$

$= \int_0^t e^{-5t}\,dx = e^{-5t}[x]_0^t = t\,e^{-5t}$

d'où $\mathcal{L}^{-1}(g)(t) = 3t\,e^{-5t}$

3) Équations différentielles

a) $x'(t) + x(t) = t\,\mathscr{U}(t) - t\,\mathscr{U}(t-1)$ condition initiale : $x(0) = 0$

$$x'(t) + x(t) = t\,\mathscr{U}(t) - \big((t-1)+1\big)\,\mathscr{U}(t-1)$$

$$(p\,X(p) - 0) + X(p) = \frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}\right)e^{-p}$$

$$(p+1)X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{p+1}{p^2}\,e^{-p}$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} - \frac{1}{p^2}\,e^{-p}$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p^2}\,e^{-p}$$

$$\boxed{x(t) = \left(t - 1 + e^{-t}\right)\mathscr{U}(t) - (t-1)\,\mathscr{U}(t-1)}$$

b) $x''(t) + x'(t) = \mathscr{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

$$(p^2\,X(p) - 0 - 0) + (p\,X(p) - 0) = \frac{1}{p}$$

$$(p^2 + p)X(p) = \frac{1}{p}$$

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2+p)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1}$$

$$\boxed{x(t) = \left(t - 1 + e^{-t}\right)\mathscr{U}(t)}$$

Scanné avec CamScanner

c) $x''(t) + 4x(t) = 2\,\mathscr{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
(p^2\,X(p) - 0 - 1) + 4X(p) &= \frac{2}{p} \\
(p^2 + 4)X(p) &= \frac{2}{p} + 1 \\
X(p) &= \frac{p+2}{p(p^2+4)} = \frac{\frac{1}{2}}{p} + \frac{-\frac{1}{2}p + 1}{p^2+4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4} + \frac{2}{p^2+4}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos(2t) + \sin(2t)\Big)\,\mathscr{U}(t)}$$

d) $x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)$ conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

Soit $\mathcal{L}(x)(p) = X(p)$

$$\begin{aligned}
(p^2\,X(p) - p - 0) + 5(p\,X(p) - 1) + 4X(p) &= \frac{1}{p+2} \\
(p^2 + 5p + 4)X(p) &= \frac{1}{p+2} + p + 5 \\
X(p) &= \frac{p^2+7p+11}{(p+2)(p^2+5p+4)} = \frac{p^2+7p+11}{(p+2)(p+1)(p+4)} \\
\text{soit } &= \frac{5/3}{p+1} + \frac{-1/2}{p+2} + \frac{-1/6}{p+4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = \left(\frac{5\,e^{-t}}{3} - \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-4t}}{6}\right)\mathscr{U}(t)}$$

e) $x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0$. conditions initiales : $\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
(p^2\,X(p) - p - 1) + 2(p\,X(p) - 1) + 2X(p) &= 0 \\
(p^2 + 2p + 2)X(p) &= p + 3 \\
X(p) &= \frac{p+3}{p^2+2p+2} \\
&= \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1^2} + \frac{2}{(p+1)^2+1^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = \Big(\cos(t) + 2\sin(t)\Big)e^{-t}\,\mathscr{U}(t)}$$

Exercices d'entraînement (Solutions)

1) Calculer les transformées de Laplace suivantes :

a) $\mathscr{L}\left[\cos(t)e^{-t}\,\mathscr{U}(t)\right]$

$$\mathscr{L}\left[\cos(t)\,\mathscr{U}(t)\right] = \frac{p}{p^2+1^2}$$

$$\mathscr{L}\left[\cos(t)e^{-t}\,\mathscr{U}(t)\right] = \frac{(p+1)}{(p+1)^2+1^2}$$

$$\boxed{F(p) = \frac{p+1}{p^2+2p+2}}$$

b) $\mathscr{L}\left[(5t)^2e^{-5t}\,\mathscr{U}(t)\right]$

$$\mathscr{L}\left[25\,t^2\,\mathscr{U}(t)\right] = 25\frac{2!}{p^3}$$

$$\mathscr{L}\left[(5t)^2e^{-5t}\,\mathscr{U}(t)\right] = 25\frac{2}{(p+5)^3}$$

$$\boxed{F(p) = \frac{50}{(p+5)^3}}$$

c) $\mathscr{L}\left[(\cos(2t)-\sin(t))\,e^{-3t}\,\mathscr{U}(t)\right]$

$$\mathscr{L}\left[(\cos(2t)-\sin(t))\,\mathscr{U}(t)\right] = \frac{p}{p^2+2^2} - \frac{1}{p^2+1^2}$$

$$\mathscr{L}\left[(\cos(2t)-\sin(t))\,e^{-3t}\,\mathscr{U}(t)\right] = \frac{(p+3)}{(p+3)^2+2^2} - \frac{1}{(p+3)^2+1^2}$$

$$\boxed{F(p) = \frac{p+3}{p^2+6p+13} - \frac{1}{p^2+6p+10}}$$

d) $\mathscr{L}\left[(t^2+t+1)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)\right]$

$$\mathscr{L}\left[(t^2+t+1)\,\mathscr{U}(t)\right] = \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$\mathscr{L}\left[(t^2+t+1)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)\right] = \frac{2}{(p+2)^3} + \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2}$$

$$\boxed{F(p) = \frac{2}{(p+2)^3} + \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2}}$$

2) Calculer les originaux suivants :

a) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{3}{p+2}-\dfrac{1}{p^3}\right]$ $\boxed{f(t)=\left(3e^{-2t}-\dfrac{t^2}{2}\right)\ \mathscr{U}(t)}$

b) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{-2}{(p+3)^2}\right]$ $\boxed{f(t)=-2t\,e^{-3t}\,\mathscr{U}(t)}$

c) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{5}{(p+3)(p^2+3p+5)}\right]$

$$\begin{aligned}
F(p)&=\frac{5}{(p+3)(p^2+3p+5)}=\frac{1}{p+3}-\frac{p}{p^2+3p+5}\\
&=\frac{1}{p+3}-\frac{p}{(p+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}\\
&=\frac{1}{p+3}-\left(\frac{p+\frac{3}{2}}{(p+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}-\frac{\frac{3}{2}}{(p+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}\right)\\
&=\frac{1}{p+3}-\left(\frac{p+\frac{3}{2}}{(p+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}-\frac{3}{2}\,\frac{2}{\sqrt{11}}\,\frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{(p+\frac{3}{2})^2+(\frac{\sqrt{11}}{2})^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(t)=\left(e^{-3t}-\left(\cos(\tfrac{\sqrt{11}}{2}t)-\tfrac{3}{\sqrt{11}}\sin(\tfrac{\sqrt{11}}{2}t)\right)e^{-\frac{3}{2}t}\right)\ \mathscr{U}(t)}$$

d) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p}{p^2+4p+6}\right]$

$$\begin{aligned}
F(p)&=\frac{p}{p^2+4p+6}=\frac{p}{(p+2)^2+2}\\
&=\frac{p+2}{(p+2)^2+(\sqrt{2})^2}-\frac{2}{(p+2)^2+(\sqrt{2})^2}\\
&=\frac{p+2}{(p+2)^2+(\sqrt{2})^2}-\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{(p+2)^2+(\sqrt{2})^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(t)=\left(\cos(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\right)e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)}$$

e) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{p}{(p+1)^2}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{-1}{(p+1)^2}+\dfrac{1}{p+1}\right]$

$$\boxed{f(t)=(-t+1)e^{-t}\,\mathscr{U}(t)}$$

f) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{2p+3}{2p^2+4p+5}\right]$

$$F(p) = \frac{2p+3}{2p^2+4p+5} = \frac{p+\frac{3}{2}}{p^2+2p+\frac{5}{2}} = \frac{p+\frac{3}{2}}{(p+1)^2+\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{p+1}{(p+1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(p+1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$= \frac{p+1}{(p+1)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{6}}\,\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{(p+1)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{p+1}{(p+1)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} + \frac{\sqrt{6}}{6}\,\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{(p+1)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{f(t) = \left(\cos(\tfrac{\sqrt{6}}{2}t) + \tfrac{\sqrt{6}}{6}\sin(\tfrac{\sqrt{6}}{2}t)\right)e^{-t}\,\mathscr{U}(t)}$$

3) Équations différentielles

-Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre les équations suivantes :

a) $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$ *avec :* $x(0) = 1$ *et* $x'(0) = 0$

$$(p^2X(p) - p - 0) + 3(p\,X(p) - 1) + 2X(p) = 0$$

$$(p^2+3p+2)X(p) = p+3$$

$$X(p) = \frac{p+3}{p^2+3p+2} = \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}$$

$$= \frac{2}{p+1} + \frac{-1}{p+2}$$

$$\boxed{x(t) = \left(2e^{-t} - e^{-2t}\right)\mathscr{U}(t)}$$

b) $x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = e^{-2t}\,\mathscr{U}(t)$ *avec :* $x(0) = 0$ *et* $x'(0) = 0$

$$(p^2X(p) - 0 - 0) + 6(p\,X(p) - 0) + 9X(p) = \frac{1}{p+2}$$

$$(p^2+6p+9)X(p) = \frac{1}{p+2}$$

$$X(p) = \frac{1}{(p+2)(p^2+6p+9)} = \frac{1}{(p+2)(p+3)^2}$$

$$= \frac{1}{p+2} - \frac{1}{(p+3)^2} - \frac{1}{p+3}$$

$$\boxed{x(t) = \left(e^{-2t} - (t+1)e^{-3t}\right)\mathscr{U}(t)}$$

c) $x''(t) - x(t) = (3e^{-2t} + t^2 + 1)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$

$$
\begin{aligned}
(p^2\,X(p) - 0 - 0) - X(p) &= \frac{3}{p+2} + \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p} \\
(p^2 - 1)X(p) &= \frac{4p^3 + 2p^2 + 2p + 4}{(p+2)p^3} \\
X(p) &= \frac{4p^2 + 4p + 4}{(p^2 - 1)(p+2)p^3} \\
&= \frac{1}{p+2} + \frac{2}{p-1} - \frac{2}{p^3} - \frac{3}{p}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x(t) = \left(e^{-2t} + 2e^{t} - t^2 - 3\right)\mathscr{U}(t)}$$

d) $x''(t) - 4x(t) = (3e^{-t} - t^2)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 1$

$$
\begin{aligned}
(p^2\,X(p) - 0 - 1) - 4X(p) &= \frac{3}{p+1} - \frac{2}{p^3} \\
(p^2 - 4)X(p) &= \frac{3}{p+1} - \frac{2}{p^3} + 1 \\
X(p) &= \frac{p^4 + 4p^3 - 2p - 2}{(p+1)(p+2)(p-2)p^3} \\
&= \frac{7/16}{p+2} + \frac{7/16}{p-2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1/2}{p^3} + \frac{1/8}{p}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x(t) = \left(\frac{7e^{2t}}{16} + \frac{7e^{-2t}}{16} - e^{-t} + \frac{t^2}{4} + \frac{1}{8}\right)\mathscr{U}(t)}$$

e) $x''(t) + x(t) = e^{t}\cos(t)\,\mathscr{U}(t)$ avec : $x(0) = 0$ et $x'(0) = 0$

$$
\begin{aligned}
(p^2\,X(p) - 0 - 0) + X(p) &= \frac{(p-1)}{(p-1)^2 + 1} \\
(p^2 + 1)X(p) &= \frac{p-1}{p^2 - 2p + 2} \\
X(p) &= \frac{p-1}{(p^2 - 2p + 2)(p^2 + 1)} \\
&= \frac{\frac{1}{5}(p+1)}{(p-1)^2 + 1} - \frac{\frac{1}{5}(p+3)}{p^2 + 1} \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{p-1}{(p-1)^2 + 1} + \frac{2}{(p-1)^2 + 1} - \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{3}{p^2 + 1}\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{5}\Big(\cos(t)e^{t} + 2\sin(t)e^{t} - \cos(t) - 3\sin(t)\Big)\,\mathscr{U}(t)}$$

f) $x''(t) + x(t) = \mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1)$ avec : $x(0) = 2$ et $x'(0) = 0$

$$(p^2\,X(p) - 2p - 0) + X(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}$$

$$(p^2+1)X(p) = \frac{1}{p} + 2p - \frac{e^{-p}}{p}$$

$$X(p) = \frac{2p^2+1}{p(p^2+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p^2+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1}\right) - \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)e^{-p}$$

$$\boxed{x(t) = \Big(1+\cos(t)\Big)\,\mathscr{U}(t) - \Big(1-\cos(t-1)\Big)\,\mathscr{U}(t-1)}$$

-Exercice :

1) Calculer la transformation de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & , |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) Evaluer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x} \cos\frac{x}{2}$

Solution :

1) On peut voir que $f \in L^1$ car $\int |f| < \infty$ et que f est paire

$$\Gamma_f(x) = F_c f(x) = 2\int_0^1 \cos(2\pi x t)(1-t^2)\,dt$$

$$\begin{cases} U = 1-t^2 \longrightarrow U' = -2t \\ V' = \cos(2\pi x t) \longrightarrow V = \frac{1}{2\pi x}\sin(2\pi x t) \end{cases}$$

$$= \left[\frac{1-t^2}{\pi x}\sin(2\pi x t)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi x}\int_0^1 t\sin(2\pi x t)\,dt$$

$$\begin{cases} U = t \longrightarrow U' = 1 \\ V' = \sin(2\pi x t) \longrightarrow V = \frac{-1}{2\pi x}\cos(2\pi x t) \end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi x}\left\{\left[\frac{-t}{2\pi x}\cos(2\pi x t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2\pi x}\cos(2\pi x t)\,dt\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi x}\left[\frac{-\cos(2\pi x)}{2\pi x} + 0 + \frac{1}{2\pi x}\left[\frac{\sin(2\pi x t)}{2\pi x}\right]_0^1\right]$$

$$= \frac{-\cos(2\pi x)}{(\pi x)^2} + \frac{\sin(2\pi x)}{2(\pi x)^3}$$

$$\Rightarrow \Gamma_f(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{2(\pi x)^3} - \frac{\cos(2\pi x)}{(\pi x)^2}$$

2) $I = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x} \cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$

$$\boxed{\text{si } f \text{ paire} \Rightarrow \Gamma_f(x) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi x t)\,dt}$$

on a $g(x) = Ff(x) = \frac{-\cos(2\pi x)}{(\pi x)^2} + \frac{\sin(2\pi x)}{2(\pi x)^3}$ paire

donc $F(g)(x) = F_c g(x) = 2\int_0^{+\infty} g(t)\cos(2\pi x t)\,dt$

d'autre part, d'après la formule d'inversion

$Fg(x) = F(Ff)(x) = \check{f}(x) = f(-x) = f(x)$

car f paire

on a $Fg(x) = 2\int_0^{+\infty}\left[\frac{-\cos(2\pi t)}{(\pi t)^2} + \frac{\sin(2\pi t)}{2(\pi t)^3}\right]\cos(2\pi x t)\,dt$

~~Ste~~ posons $\begin{cases} y = 2\pi t \Rightarrow dy = 2\pi\,dt \\ \Rightarrow t = \frac{y}{2\pi} \Rightarrow dt = \frac{dy}{2\pi} \end{cases}$

$$\Rightarrow F_g(x) = 2\int_0^{+\infty}\left[\frac{-\cos(y)}{(\frac{y}{2})^2} + \frac{1}{2(\frac{y}{2})^3}\sin(y)\right]\cos(xy)\frac{dy}{2\pi}$$

$$= \frac{-4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{y\cos(y) - \sin(y)}{y^3}\cos(xy)\,dy$$

pour $x = \frac{1}{2} \Rightarrow F_g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-4}{\pi} I = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow I = \frac{-3\pi}{16}$$

Exercice :

Soit $g(p) = \frac{1}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{(p+ia)^2(p-ia)^2}$

chercher l'origine de g par la transfo. de Laplace on a : $g(p) = \frac{a_1}{p+ia} + \frac{a_2}{(p+ia)^2} + \frac{a_3}{p-ia} + \frac{a_4}{(p-ia)^2}$

$$(p+ia)^2 g(p)\big|_{p=-ia} = \boxed{a_2 = \frac{-1}{4a^2}}$$

$$(p-ia)^2 g(p)\big|_{p=ia} = \boxed{a_4 = -\frac{1}{4a^2}}$$

$$\lim_{p\to\infty} p\,g(p) = 0 = a_1 + a_3 \Rightarrow a_3 = -a_1$$

$$g(0) = \frac{1}{a^4} = \frac{a_1}{ia} - \frac{a_2}{-a^2} + \frac{a_3}{-ia} + \frac{a_4}{-a^2}$$

$$= \frac{2a_1}{ia} + \frac{1}{2a^2}$$

$$\Rightarrow a_1 = \left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{2a^2}\right)\frac{ia}{2} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{2a}\right)$$

donc $a_3 = -a_1 = \frac{-i}{2}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{2a}\right)$

$\Rightarrow g(p) =$

$f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(t-x)\,dx$

Scanné avec CamScanner

$) = \frac{1}{p^2+a^2} \frac{1}{p^2+a^2}$

$= \mathcal{L}(H(t)\sin(at))(p)\,\mathcal{L}(H(t)\sin(at))(p)$

$\mathcal{L}(f * g)(p) = \mathcal{L}(f)(p)\,\mathcal{L}(g)(p)$

$\frac{1}{a^2}\mathcal{L}\left[(H(\cdot)\sin(a\cdot) * H(\cdot)\sin(a\cdot))(t)\right](p)$

$\mathcal{L}^{-1}(g)(t) = (H(\cdot)\sin(a\cdot)) * (H(\cdot)\sin(a\cdot))(t)$

$= \int_{\mathbb{R}} H(x)\sin(ax)\,H(t-x)\sin(a(t-x))\,dx$

$H(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$H(t-x) = \begin{cases} 1 & , x \leq t \\ 0 & , t-x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} g(t) = \int_0^{+\infty} \sin(ax)\,H(t-x)\sin(a(t-x))\,dx$

$= \int_0^t \sin(ax)\sin(a(t-x))\,dx$

$\cos(x)^2 + \sin^2 x = 1$

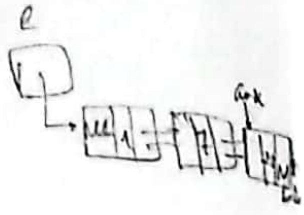
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

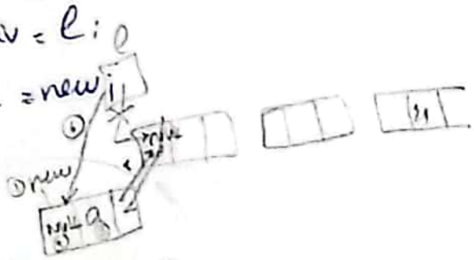
```
1) typedef struct cellule
{int v;
 struct cellule* suiv, prec;} cellule;
cellule * liste;
```

```
2) int debut (int a, liste l)
{if (l!=NULL)
   {if (l->v == 0)
      return 1;}
  return 0;}
```



```
int fin (int a, liste l)
{ liste aux=l;
  if (l!=NULL)
   {While (aux->suiv!=NULL)
       aux = aux->suiv;
    if (aux->v == a)
       return 1;}
  return 0;}
```

```
liste ajout-tete (int a, liste l)
① { liste new;
② new = (cellule*) malloc (sizeof(cellule));
③ new->v = a;
④ new-> prec = NULL;
⑤ new-> suiv = l;
⑥ l-> prec = new;
⑦ l = new;
return l;}
```

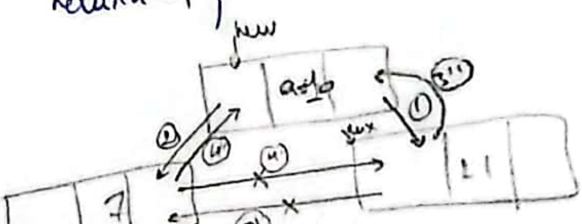


```
liste ajoutfin (int a, liste l)
{liste new; aux=l;
 new = (cellule*)malloc (sizeof(cellule));
 new -> v = a;
 while (aux -> suiv != NULL)
     aux = aux->suiv;
 new -> prec = aux;
 new -> suiv = NULL;
 aux -> suiv = new;
```

```
4) void afficher (
 { liste aux = l;
 while (aux -> suiv != NULL)
     aux = aux -> suiv;
 // aux pointe sur la dernière cellule
 while (aux -> prec != NULL)
   { printf ("%d \n", aux->v);
     aux = aux -> prec; }

 }
```

```
5) liste ajout(int a, liste l)
 { liste aux, l, new;
 while (aux -> v < a & aux -> suiv != NULL)
     aux = aux -> suiv;
 if (aux -> suiv == NULL)
     return (ajout-fin (a, l));
 else if (aux -> prec == NULL)
     return (ajout-debut (a, l));
 else {
   new = (cellule*) malloc (sizeof(cellule
   new -> v = a;
   ① new -> suiv = aux;
   ② new -> prec = aux -> prec;
   ③ (aux -> prec) -> suiv = new;
   ④ aux -> prec = new;}
 return l; }
```



```
6) liste supprimer (int a, liste l)
 { liste aux = l;
 while (aux -> v != a && aux != NULL)
     aux = aux -> suiv
 if (aux -> v == a)
   if (aux -> suiv == NULL) // dernière clt
    { (aux -> prec) -> suiv = NULL;
```