Année 2021-2022

Maths 2

GEA2/ GCV1/GM1

Série n° 2

Exercice 1.

Considérons le système différentiel : $(S)\begin{cases} x' = 2x + 2y + z \\ y' = y + z \\ z' = -y + 3z \end{cases}$

1. Exprimer le système (S) sous la forme $X' = AX$, où A est une matrice 3×3 à coefficients réels.
2. Vérifier que la matrice A n'est pas diagonalisable.
3. Vérifier que l'on a $A = PJP^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. En déduire la solution du système vérifiant $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 0$.

Exercice 2.

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Montrer que A est semblable à T et expliciter une matrice de passage.
3. Résoudre le système différentiel $X' = AX$.

Exercice 3.

Donner la solution générale de l'équation $X' = AX$, $X(0) = X_0$ pour les matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y - e^{-t} \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 3x + y - z + 1 \\ y' = x + y + z + e^{t} \\ z' = 2x + 2z \end{cases}.$$

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = 2x + 2y + z \\ y' = y + z \\ z'(t) = -y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

1/ on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$(S) \Leftrightarrow X'(t) = A X(t)$

2/ $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda) + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)\left[3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda - 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow -(\lambda - 2)^3 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 2$ est une v.p d'ordre de multiplicité 3

!! $\Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable.

3/ on a : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/9 \\ 0 & 1/3 & 2/9 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{\det} P^t_{comp}$

$\det P = 1 \times \begin{vmatrix} 1/3 & -1/9 \\ 1/3 & 2/9 \end{vmatrix} - 0 + 0 = \frac{2}{27} + \frac{1}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$

$$\text{comp} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \cancel{2}+\frac{2}{9} & -\frac{1}{3} \\ \cancel{1}0 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^{t}\text{comp} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

ona : $P J P^{-1} = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$

semblable

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

4) $X'(t) = A X(t)$ avec $X(0) = (1, 2, 0)$

$\hookrightarrow X(t) = e^{tA} X(0)$

$e^{tA} = ?$

ona : $A = P J P^{-1}$

$e^{tA} = P e^{tJ} P^{-1}$

$e^{tJ} = ?$

ona : $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$

avec $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow N$ est nilpotente d'ordre 3

$J = D + N$

$\Rightarrow e^{tJ} = e^{t(D+N)} = e^{tD} e^{tN}$ $(DN = ND)$

ona : $e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

et $e^{tN} = I + tN + t^2 N^2/2$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = P\, e^{tJ} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/9 \\ 0 & 1/3 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2 e^{2t}}{2} \\ 0 & \frac{1}{3}e^{2t} & \left(\frac{t}{3}-\frac{1}{9}\right)e^{2t} \\ 0 & \frac{1}{3}e^{2t} & \left(\frac{t}{3}+\frac{2}{9}\right)e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Tab3itho

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & -2(1-t)e^{2t} \to \frac{3}{2}t^2 e^{2t} & \left(-t+\frac{t^2}{2}\right)e^{2t} \\ 0 & (1-t)e^{2t} & \left(-\frac{2}{3}+t\right)e^{2t} \\ 0 & \left(\frac{1}{3}-t\right)e^{2t} & \left(\frac{1}{3}+t\right)e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = e^{tA}\, X(0)$$

$$\Rightarrow X(0) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \left(1-4(1-t)-3t^2\right)e^{2t} \\ 2(1-t)e^{2t} \\ 2\left(\frac{1}{3}-t\right)e^{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = (-3+4t-3t^2)e^{2t} \\ y(t) = 2(1-t)e^{2t} \\ z(t) = 2\left(\frac{1}{3}-t\right)e^{2t} \end{cases}$$

Ex 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1/ $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\iff (2-\lambda)\left[(3-\lambda)(-1-\lambda)+4\right]=0$

$\iff (2-\lambda)\left[-3-3\lambda+\lambda+\lambda^2+4\right]=0$

$\iff (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+1)=0$

$\iff (2-\lambda)(\lambda-1)^2=0$

$\Rightarrow \lambda=2$ ou $\lambda=1$

on pose : $\lambda_1=1$ v.p double

$\lambda_2=2$ v.p simple

$\Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable

2/ on a A est non diagonalisable

$\Rightarrow A = P T P^{-1}$

avec : $P = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 3/5 & 0 \\ 2 & -11/5 & 0 \\ 20 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tq : Au et on a $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$

$u_3 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$ tq $A u_3 = \lambda_2 u_3$

on a : $P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}\, {}^t\mathrm{comp} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 44 & 12 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3/ $X'(t) = A X(t)$, avec $X(0) = (x_0, y_0, z_0)$

$\hookrightarrow X(t) = e^{tA} X(0)$

$e^{tA} = ?$

on a : $A = P T P^{-1} \Rightarrow e^{tA} = P e^{tT} P^{-1}$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{} = D + N$

avec $N^2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | N est nilpotente d'ordre 2 c'ad $N^2 = 0$; $\forall k \geq 2$

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \text{ et } e^{tN} = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tT} = e^{t(D+N)} = e^{tD} e^{tN} \quad (DN = ND)$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{tA} = P e^{tT} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3/5 & 0 \\ 2 & -11/5 & 0 \\ 20 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11/5 & -3/5 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 44 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^t & (-t + \frac{3}{5}) e^t & 0 \\ 2e^t & (2t - \frac{11}{5}) e^t & 0 \\ 20 e^t & 20te^t & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{11}{5} & -3/5 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 44 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1+2t)e^t & te^t & 0 \\ -4te^t & (1-2t) & 0 \\ -40te^t & -20te^t & e^{2t} \end{pmatrix}$$

suite page 6 :

$a(t) = \sin(t + a_0)$

on a : $b(t) = t + b_0$

comme $\arcsin(a(t)) = t + a_0$

$\Rightarrow t = \arcsin(a(t)) - a_0$

$\Rightarrow b(t) = \arcsin(a(t)) - a_0 + b_0$

d'où $\gamma : b = \arcsin(a) - a_0 + b_0$ $\quad a \in]-1, 1[$

4) $X(x, y) = (y, x)$

soit $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intégrale de X càd :

$\gamma'(t) = X(\gamma(t)) = X(a(t), b(t))$

$\Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (b(t), a(t))$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = b(t) \\ b'(t) = a(t) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix}}_{y'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}}_{y(t)}$

$y'(t) = A\, y(t)$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ $\quad \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ -b_2 \end{pmatrix}$

on pose $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

soit $\mu_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$; $A\mu_1 = \lambda_1 \mu_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 = a_1 \\ a_1 = b_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} a_1$

on choisit $\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de m̂ $\mu_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tq $A\mu_2 = \lambda_2 \mu_2$, on choisit

$\mu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y(t) = A \mu_1 e^{\lambda_1 t} + B \mu_2 e^{\lambda_2 t}$ $\quad A, B \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^{t} + Be^{-t} \\ Ae^{t} - Be^{-t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a(t) = Ae^{t} + Be^{-t} & (1) \\ b(t) = Ae^{t} - Be^{-t} & (2) \end{cases}$ $A, B \in \mathbb{R}$

a : $b(t) = Ae^{t} + Be^{-t}$