Ex3:

1) soit $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^n)^{1+\frac{1}{n}}}$, $x \in [0,1]$

(f_n) est mesurable car elle est continue

calculer $\lim_{n \mapsto 0^+} \int_0^1 f_n(x)\,dx$

on a $f(x) \xrightarrow{n \to +\infty} 1$ $\forall x \in [0,1[$

pour $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{(2)^{1+\frac{1}{n}}} \longrightarrow \frac{1}{2} \neq 1$

or $\{x\} = \{1\}$ est négligeable % a mesure de Lebesgue

donc $f_n(x) \xrightarrow{cvg} 1$ pp

et on a

$|f_n(x)| \leq 1$: integrable sur $[0,1]$ $[a,b]$

donc d'apres th CD

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n \mapsto +\infty} f_n(x)\,dx = 1$$

2) $f_n = \frac{|\sin(x)|^{\frac{2}{n}}}{1+x^2} \longrightarrow \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$

$-2\pi \quad -\pi \quad 0 \quad \pi \quad 2\pi$

f_n est mesurable puisque elle est continue

$\Rightarrow f_n(x) \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ pp $x \in \mathbb{R}_+$

on voit que $A = \bigcup_{k \in \mathbb{R}_+} \{k\pi\}$

on a $\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{R}_+} \{k\pi\}\right)$

$= \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \mu(k\pi)$

$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (k\pi - k\pi) = 0$

d'ou A est négligeable

et d'autre part.

$|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$; intégrable sur $\mathbb{R}_+$

donc d'apres th CD

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \mapsto +\infty} f_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

3)
$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \quad , x \in]0, +\infty[\quad , n \in \mathbb{N}^*$$

cvs $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$

est cvs (f_n) mesurable (comme fcl continue sur $\mathbb{R}_+^*$)

et de plus $|f_n(x)| \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = g(x)$

au $V(0)$, $g(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$: intégrable $V(0)$
au $V(+\infty)$, $x^2 g(x) \longrightarrow 0 \Rightarrow g(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ intégrable au $V(+\infty)$
Donc g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et cvs d'après la CD

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\, dx = 0$$

4)
$$f_n(x) = |\cos(x)|^{\frac{1}{n}} e^{-x} \quad , x \in \mathbb{R}_+$$

(f_n) mesurable (car continue)

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi , k \in \mathbb{Z}_+\}$ cvs

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = e^{-x}$$

car $B = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ est négligeable par rapport à la mesure de Lebesgue

car $\mu(B) = \mu\left(\bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}\right)$
$= \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \mu\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$

d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = e^{-x}$ pp $x \in \mathbb{R}_+$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$$
$$= \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$$

5)

$$f_m(x) = \frac{1+mx^2}{(1+x^2)^m}, \quad x \in [0,1]$$

$$\underset{DL\,V(0)}{(1+x^2)^x} = 1+m\,x^2+\underset{0}{\underbrace{o(x^2)}}$$

$$1 \leqslant 1+mx^2 < (1+x^2)^m$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+x^2)^m} \leqslant \frac{1}{1+mx^2}$$

$$\Rightarrow f_m(x) = \frac{1+mx^2}{(1+x^2)^m} \leqslant \frac{1+mx^2}{1+mx^2} = 1$$

$$\lim_{m \to +\infty} f_m(x) = \lim \frac{1+mx^2}{(1+x^2)^m}$$

$$= \lim \frac{1+mx^2}{1+nx^2+o(x^2)} = 1$$

on a $|f_m(x)| \leqslant 1$ intégrable $\forall x \in [0,1]$

donc d'après T. C. D :

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^1 f_m(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{m \to +\infty} f_m(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$$