POUTRES CONTINUES

On appelle **poutre continue** une poutre d'un seul tenant sur une succession d'appuis simples (y compris une articulation pour bloquer le degré de liberté de translation).

S'il y a (n+1) **appuis**, on peut distinguer n tronçons entre deux appuis successifs, que l'on nomme **travées**.

Par définition, il y a continuité, au passage des appuis intermédiaires, entre :

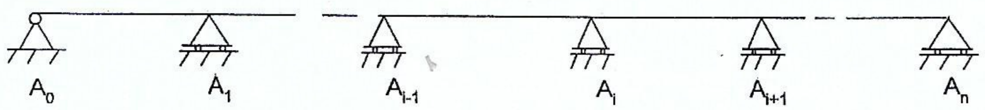
- les déplacements de translation
- les déplacements de rotation

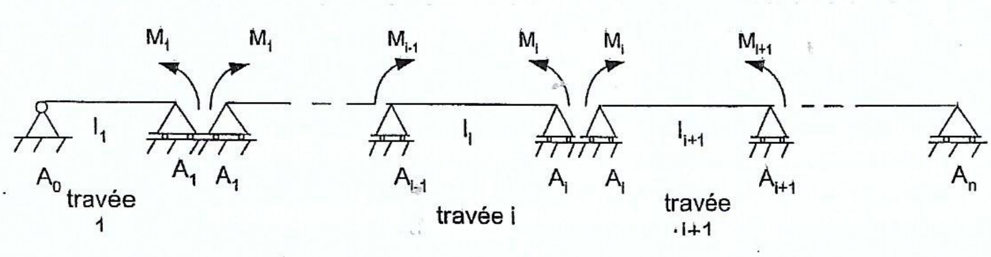
des extrémités communes de deux travées consécutives. L'appui intermédiaire impose, de plus, la nullité du déplacement de translation verticale en ce point.
Les poutres continues à n travées sont des systèmes hyperstatiques de degré (n-1).

Résoudre une poutre continue consistera donc à lever l'indétermination sur les inconnues hyperstatiques ou, puisqu'il s'agit d'ossatures particulières à ligne moyenne rectiligne, à lever l'indétermination sur les moments de flexion d'extrémités des barres qui, ici, se réduisent aux moments de flexion sur appuis.

On envisage ici que des poutres chargées dans leur plan moyen par des forces perpendiculaires à leurs fibre moyenne et éventuellement par, des couples concentrés ou répartis, d'axe perpendiculaire au plan moyen. Les sollicitations se réduisent donc à : un effort tranchant T et un moment fléchissant M.

Si nous isolons les différentes travées par des coupures au droit des appuis, la poutre continue est équivalente au système suivant :



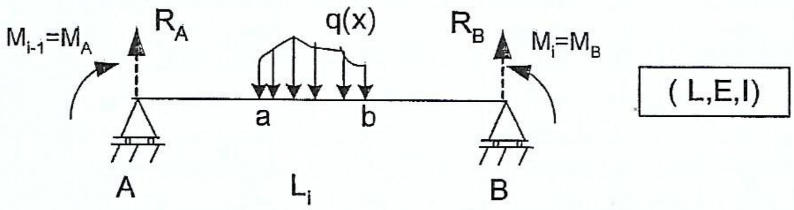


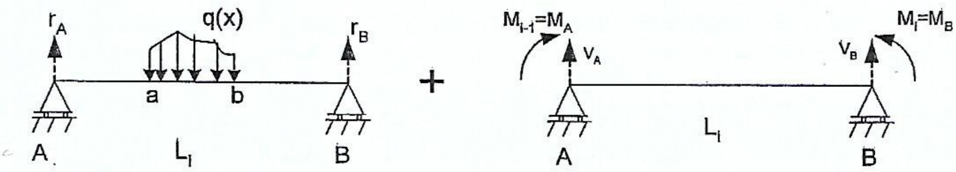
Avec Mi : moment de flexion en Ai

L'équilibre des nœuds étant, en moment : -Mi + Mi =0

1- ETUDE DES TRAVEES ISOLEES

Considérons une travée « i » (AB) isolée d'une poutre continue, A et B étant deux appuis intermédiaires consécutifs. M_{i-1} et M_i sont les moments de flexion aux appuis A et B, assurant la continuité des déplacements aux passage des appuis. q(x) est le chargement appliqué à AB.





$$R_A = r_A + \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i} = r_A + \frac{M_B - M_A}{L_i}$$

$$R_B = r_B + \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i} = r_A + \frac{M_A - M_B}{L_i}$$

M(x)=

T(x) =

$\tau(x)$ et $\mu(x)$ effort tranchant et moment de flexion en toute section droite de la poutre soumise au seul chargement transversal q(x).

r_A et r_B réactions aux appuis A et B de la poutre soumise au seul chargement transversal q(x).

La connaissance des moments de flexion de continuité est donc suffisante pour le calcul des sollicitations dans les sections droites de la poutre.

2- Rotations d'extrémités

Considérons une travée i, chargée, subissant des déplacements d'appuis v_{i-1} et v_i et dont les moments fléchissant d'extrémités M_{i-1} et M_i.

v_{i-1} et v_i sont généralement nuls puisqu'il s'agit des déplacements empêchés, de translation verticale aux appuis (i) et (i-1). Toute fois, dans le cas de dénivellations d'appuis (tassement du sol de fondation sous piles,...) ces composantes peuvent ne pas être nulles.

Dans le cas général d'appuis fixes et avec dénivellations d'appuis :

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \int_0^L M(x) \cdot \frac{dx}{EI}$$

$$v_i = v_{i-1} \cdot L + \int_0^L M(x) \cdot (1-x) \frac{dx}{EI}$$

$$\boxed{\omega_{i-1} = -\int_0^L M(x) \cdot (1-\frac{x}{L}) \frac{dx}{EI} + \frac{v_i - v_{i-1}}{L}}$$

$$\boxed{\omega_i = \int_0^L M(x) \cdot (\frac{x}{L}) \frac{dx}{EI} + \frac{v_i - v_{i-1}}{L}}$$

Soit en tenant compte de l'expression de M(x) et en négligeant l'effet de l'effort tranchant T :

$$\boxed{\omega_{i-1} = -\int_0^L \mu(x) \cdot (1-\frac{x}{L}) \frac{dx}{EI} - M_{i-1} \int_0^L (1-\frac{x}{L})^2 \frac{dx}{EI} - M_i \int_0^L (1-\frac{x}{L})(\frac{x}{L}) \frac{dx}{EI}}$$

$$\boxed{\omega_i = \int_0^L \mu(x) \cdot (\frac{x}{L}) \frac{dx}{EI} + M_{i-1} \int_0^L (1-\frac{x}{L})(\frac{x}{L}) \frac{dx}{EI} + M_i \int_0^L (\frac{x}{L})^2 \frac{dx}{EI}}$$

En posant :

$$\boxed{a = \int_0^L (1-\frac{x}{L})^2 \frac{dx}{EI}} \; ; \; \boxed{b = \int_0^L (1-\frac{x}{L})(\frac{x}{L}) \frac{dx}{EI}} \; ; \; \boxed{c = \int_0^L (\frac{x}{L})^2 \frac{dx}{EI}}$$

Et en remarquant que :

$$\boxed{\omega_{i-1}^{0} = -\int_{0}^{L} \mu(x)\cdot(1-\frac{x}{L})\frac{dx}{EI}} \text{ et } \boxed{\omega_{i}^{0} = \int_{0}^{L} \mu(x)\cdot(\frac{x}{L})\frac{dx}{EI}}$$: étant les

rotations des sections d'appuis (i-1) et (i) produites par les seuls charges transversales.

On peut écrire les relations dites de **<u>Clapeyron</u>** :

$$\boxed{\omega_{i-1} = \omega_{i-1}^{0} - aM_{i-1} - bM_{i} + \frac{v_i - v_{i-1}}{L}}$$

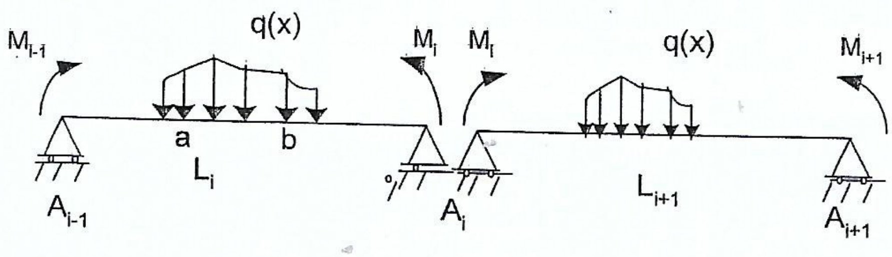
$$\boxed{\omega_{i} = \omega_{i}^{0} + bM_{i-1} + cM_{i} + \frac{v_i - v_{i-1}}{L}}$$

Les quantités a, b et c sont fonctions de la géométrie de la travée seulement. Dans le cas d'une travée à géométrie constante (EI constante et S constante) on a : $a = c = 2b = \frac{L}{3EI}$ et $b = \frac{L}{6EI}$

3- Résolution des poutres continues – Application du théorème des trois moments

3-1 Théorème des trois moments

Nous allons écrire la condition de continuité de rotation au passage d'appuis intermédiaires, à l'aide des formules de Clapeyron.
Considérons pour cela les deux travées consécutives (i) et (i+1)



Travée (i) : en repère propre d'origine A_{i-1}

$$T_i(x) = \tau_i(x) + \frac{M_i - M_{i-1}}{L_i}$$

$$M_i(x) = \mu_i(x) + M_{i-1}(1 - \frac{x}{L_i}) + M_i \frac{x}{L_i}$$

$$\omega_{i-1} = \omega^0_{i-1(i)} - a_i M_{i-1} - b_i M_i + \frac{v_i - v_{i-1}}{L_i}$$

$$\omega_i = \omega^0_{i(i)} + b_i M_{i-1} + c_i M_i + \frac{v_i - v_{i-1}}{L_i}$$

Travée (i+1) : en repère propre d'origine A_i

$$T_{i+1}(x) = \tau_{i+1}(x) + \frac{M_{i+1} - M_i}{L_{i+1}}$$

$$M_{i+1}(x) = \mu_{i+1}(x) + M_i(1 - \frac{x}{L_{i+1}}) + M_{i+1} \frac{x}{L_{i+1}}$$

$$\omega_i = \omega^0_{i(i+1)} - a_{i+1} M_i - b_{i+1} M_{i+1} + \frac{v_{i+1} - v_i}{L_{i+1}}$$

$$\omega_{i+1} = \omega^0_{i+1(i+1)} + b_{i+1} M_i + c_{i+1} M_{i+1} + \frac{v_{i+1} - v_{i1}}{L_{i+1}}$$

D'où, en égalisant les deux expressions de ωi dans les deux travées (c'est la condition de continuité de la rotation en Ai), on a :

$$\omega^0_{i(i)} + b_i M_{i-1} + c_i M_i + \frac{v_i - v_{i-1}}{L_i} \quad = \quad \omega^0_{i(i+1)} - a_{i+1} M_i - b_{i+1} M_{i+1} + \frac{v_{i+1} - v_i}{L_{i+1}}$$

Soit la première expression générale du théorème des trois moments en absence de dénivellations d'appuis :

$$\boxed{b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \omega^0_{i(i+1)} - \omega^0_{i(i)}}$$

Remarque :

Dans le cas de poutre de rigidité à la flexion constante et en présence de dénivellation, on peut écrire :

$$L_i M_{i-1} + 2(L_i + L_{i+1})M_i + L_{i+1}M_{i+1} = 6EI(\omega^0_{i(i+1)} - \omega^0_{i(i)} + \frac{v_{i+1} - v_i}{L_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{L_i})$$

3-2 Application du théorème des trois moments à la résolution de poutre Continue

Le théorème des trois moments, comme le montrent les expressions ci-dessus, permet d'établir une équation linéaire entre les trois moments de flexion aux appuis de deux travées consécutives.

Comme on sait que la connaissance des moments de flexion de continuité est suffisante pour calculer les sollicitations en toute section droite de la poutre continue, la résolution de cette dernière consistera à écrire, s'il y a n travées, n-1 fois l'équation des trois moments pour toutes les travées de la poutre prises deux à deux consécutivement.
On constitue ainsi un système de n-1 équations linéaires à (n-1) inconnues qui sont les moments de flexion de continuité (les moments de flexion sur les appuis extrêmes). Après la détermination de ces moments, on détermine les sollicitations en toute section droite de la poutre.

Exemple : Déterminer les diagrammes de moment et effort tranchant de la poutre continue suivante par application du théorème des trois moments.