Transformation de Laplace

- elle existe la fonction de variable complexe p ($p \in \mathbb{C}$) notée $F(p)$ ou $\mathcal{L}(f(t))(p)$ définie par

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

- f l'originale et F l'image
- pour $t<0$, les valeurs de $f(t)$ n'interviennent pas
  $\Rightarrow f(t) = 0$ si $t<0$
- fonction causale f tq $f(t) = 0$, pour $t<0$
- H est causale : $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- $p \in \mathbb{C}$:

$$|f(t)\, e^{-pt}| = |f(t)|\,|e^{-pt}| = |f(t)|\, e^{-\mathrm{Re}(p)t}$$

$$p \in D_F \Leftrightarrow \mathrm{Re}(p) \in D_F \quad ⚠$$

cond suffisante mais pas nécessaire

f intg sur $\mathbb{R}_+$, f est d'ordre exponentiel, càd :

$\exists M>0,\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall t \geq 0$, on a $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$

Alors la transf de laplace de f existe pour $p \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(p) > \alpha$

abscisse de convergence absolue de f :

$$P_0 = \inf \{ x \in \mathbb{R} / t \longmapsto f(t)e^{-xt} \text{ est intg sur } \mathbb{R}_+ \}$$

- f de $P_0 \Rightarrow \mathcal{L}(f)$ existe $\forall p \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(p) > P_0$
- ⚠ $P_0 \in [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$
  si $P_0 \longrightarrow = -\infty \Rightarrow D_F = \mathbb{C}$
  ↳ $= +\infty \Rightarrow D_F = \emptyset$
  ↳ $\{ p \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(p) > P_0 \}$

- $\mathcal{L}(H(t))(p) = \frac{1}{p}$
- $\mathcal{L}(t H(t))(p) = \frac{1}{p^2}$
- $\mathcal{L}(t^n H(t))(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$
- $a \in \mathbb{C}$, $\mathcal{L}(e^{at} H(t))(p) = \frac{1}{p-a}$
- $\mathcal{L}(\cos t\, H(t))(p) = \frac{p}{1+p^2}$
- $\mathcal{L}(\sin t\, H(t))(p) = \frac{1}{p^2+1}$
- Lien entre $F(p)$ et f :

$F(p)$ existe, $\forall p \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(p) > P_0$

$\Rightarrow t \longmapsto f(t) H(t) e^{-pt}$ est intg sur $\mathbb{R}$ $\forall p / \mathrm{Re}(p) > P_0$

$\Rightarrow$ pour $p = (\mathrm{Re}(p) + 2i\pi\omega) \in \mathbb{C}$

On a :

$$F(\overbrace{\mathrm{Re}(p) + 2i\pi\omega}^{p}) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-(\mathrm{Re}(p)+2i\pi\omega)t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\, f(t)\, e^{-\mathrm{Re}(p)t}\, e^{-2i\pi\omega t}\, dt$$

fourier

$$= \mathcal{F}(f(t)\, e^{-\mathrm{Re}(p)t} H(t))(\omega)$$

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \mathcal{F}(f(t)\, e^{-\mathrm{Re}(p)} H(t))(\omega)$$

- $\mathcal{L}(f(t))(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty} H(t)f(t)e^{-pt}dt$
- $F(2i\pi w)=\mathcal{F}(f(t)H(t))(w)$
- $F(iw)=\mathcal{F}(fH)\left(\frac{w}{2\pi}\right)$

Ds la plus part des exemples la variable p de $F(p)$ est ds $\mathbb{R}$, pour cela on prend ds la suite $p\in\mathbb{R}$, $F(p)$

- $\mathcal{L}((f+g)(t))(p)=\mathcal{L}(f)(p)+\mathcal{L}(g)(p)$
- $\mathcal{L}(\alpha f)(p)=\alpha\mathcal{L}(f)(p)$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$
- $\mathcal{L}(e^{at}f(t)H(t))(p)=\mathcal{L}(f(t))(p-a)$
- $\mathcal{L}(e^{2t}\cos t)(p)=\mathcal{L}(\cos t)(p-2)=\frac{p-2}{(p-2)^2+1}$
- $\mathcal{L}(f(at))(p)=\frac{1}{a}\mathcal{L}(f(t))\left(\frac{p}{a}\right)$
- $\mathcal{L}(\cos(wt))(p)=\frac{1}{w}\mathcal{L}(\cos(t))\left(\frac{p}{w}\right)$
- $\mathcal{L}(f(t-t_0)H(t-t_0))(p)=e^{-pt_0}\mathcal{L}(f(t))(p)$
- $f\in\varphi^1(\mathbb{R}_+)$ tq $f(0^+)$ existe et $\exists(M,\alpha)\in\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}$ / $\forall t\geq 0$, $|f(t)|\leq Me^{\alpha t}$

$\Rightarrow\mathcal{L}(f')$ est bien definie pour $p>\alpha$ et on a :

$$\mathcal{L}(f'(t))(p)=p\mathcal{L}(f)(p)-f(0^+)$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(p)=p^n\mathcal{L}(f)(p)-\sum_{k=0}^{n-1}p^k f^{(n-1-k)}(0^+)$$

- soit f une fonction loc intg sur $\mathbb{R}_+$ admettant une T.L. soit g une primitive de f, on a :

~~$\mathcal{L}(g(t))(p)$~~

1) $\mathcal{L}(g(t))(p)=\frac{\mathcal{L}(f(t))(p)}{p}+\frac{g(0^+)}{p}$

en particulier : $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right)(p)=\frac{\mathcal{L}(f(x))(p)}{p}$

2) Si la fct $\frac{f(t)}{t}$ admet une T.L, alors :

$$\mathcal{L}[f(t)/t](p)=\int_p^{+\infty}\mathcal{L}(f(t))(y)dy$$

- La fonction $t\longmapsto t^n f(t)$ admet une T.L et on a $(\mathcal{L}(f(t))(p))^{(n)}=\mathcal{L}((-t)^n f(t))(p)$
- $\mathcal{L}((f*g)(t))(p)=\mathcal{L}(f(t))(p)\cdot\mathcal{L}(g(t))(p)$

f et g sont causales

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)g(t-y)dy=\int_0^{+\infty}f(y)g(t-y)dy$$
$$=\int_0^t f(y)g(t-y)dy$$

- $\lim\limits_{p\to+\infty}\mathcal{L}(f(t))(p)=0$

$\lim\limits_{p\to+\infty}p\mathcal{L}(f)(p)=f(0^+)$

$\lim\limits_{p\to 0}p\mathcal{L}(f)(p)=\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)$