République Tunisienne Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Gabès
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès

EPREUVE D'EVALUATION

Année Universitaire:	2022-2023	Date de l'Examen:	11 Janvier 2024
Nature:	Examen	Durée:	1h30min
Diplôme:	Ingénieur	Nombre de pages:	
Section:	GCR1/GCP1	Enseignant:	Nadia Sraieb
Niveau d'études:	1 année	Doc autorisés.	Non
Matière:	Maths de l'Ingénieur	Remarque:	(1 point est réservé à la clarté de la copie)

Exercice. 1. *Soit* $f(x) = \dfrac{\sin(ax)}{e^x - 1}$ *et* $a > 0$.

A) Donner le domaine de définition de f *qu'on notera par* D_f *et montrer que* D_f *est un borélien de la tribu de borel* $B(\mathbb{R})$.

B)

Dans cette partie, on prendra pour le reste de cet exercice $x > 0$

1. *Montrer que* f *est borélienne sur* $]0, +\infty[$.
2. *Montrer que* f *est prolongeable par continuité en* 0.
3. *Montrer, en détaillant les étapes, que*

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\sin(ax)}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 1} \sin(ax) e^{-nx}.$$

4. *On tenant compte que* $\Gamma(k+1) = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$, $k \in \mathbb{N}$, *montrer que*

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2}.$$

Exercice. 2. *I) Soit* f *une fonction paire intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathcal{F}(f)$ *sa transformation de Fourier.*

Montrer que $\mathcal{F}(f)$ *est paire et donner son expression explicite.*

II) Soit $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par*

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1 + t & si \;\; t \in [-1, 0], \\ 1 - t & si \;\; t \in [0, 1], \\ 0 & sinon \end{cases}$$

. *Faire la représentation graphique de la fonction* Δ.

2. *Montrer que* $\Delta(t) = (1 - |t|) H_{[-1,1]}(t)$, *où* $H_{[-1,1]}$ *représente la fonction Heaviside sur l'intervalle* $[-1, 1]$.
3. *Calculer la transformation de Fourier* $\widehat{\Delta}(x)$ *de* Δ.

4. *En déduire la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx.$$

Exercice. 3. *I) On considère l'équation différentielle*

$$(1) \qquad y'' + 2y' + y = \psi(t), \quad t \geq 0$$

1. *On suppose* $\psi(t) = \sin t$. *Trouver la solution de (1) vérifiant* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$.
2. *On suppose* $\psi(t) = e^{-t}$. *Trouver la solution de (1) vérifiant* $y(0) = 0$ *et* $y'(0) = 2$.

II) On considère la fonction F définie par

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)}$$

On veut déterminer l'original de F par la transformation de Laplace de deux façons :

1. *en décomposant F en éléments simples*
2. *en utilisant le produit de convolution.*

Bonne chance !

Table des transformées de Laplace

$f(t)$	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$
$U(t)$	$\frac{1}{p}$
$t^n U(t), n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^\alpha\, U(t), \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$e^{\alpha t}U(t)$	$\frac{1}{p-\alpha}$
$\sin(at)\ U(t)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(at)\ U(t)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\mathrm{sh}(at)\ U(t)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\mathrm{ch}(at)\ U(t)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
Propriétés	
$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
$e^{-at}f(t)$	$F(p+a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$
$\int_0^t f(s)ds$	$\frac{F(p)}{p}$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1}f^{(n-k)}(0^+)$
$t^n\, f(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(p)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(u)du$
f *de période* T	$\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$
$(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds$	$F(p)G(p)$
Si $\lim_{t\to 0\ ou +\infty} f(t)$ *existe* $\Rightarrow$	$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$ $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to+\infty} pF(p)$