

EX 8 :

T admet pour densité $f(t|\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}$ si $t \geq 0$ / 0 sinon

1°. La vraisemblance des observations (t_1, \dots, t_n) sachant θ est le nombre : $L(t_1, \dots, t_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\sum_{i=1}^n t_i/\theta}$
 $= \frac{1}{\theta^n} e^{-n\bar{t}/\theta}$ où $n\bar{t} = \sum_{i=1}^n t_i$

2°. On cherche alors la valeur θ qui maximise la fonction $\theta \rightarrow L(t_1, \dots, t_n, \theta)$ or ce qui est équivalent qui maximise la fonction $\theta \rightarrow \ln(L(t_1, \dots, t_n, \theta))$ avec $\ln(L(t_1, \dots, t_n, \theta)) = -n \ln \theta - \frac{n\bar{t}}{\theta}$.

Cn : $\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{n\bar{t}}{\theta^2}$ et $\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = 0$ si $\theta = \bar{t}$

Cs : $\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \theta^2} \leq 0$ au point critique or

$$\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2n\bar{t}}{\theta^3} = \frac{n}{\theta^2} \left(1 - \frac{2\bar{t}}{\theta}\right)$$

au point $\theta = \bar{t}$, $1 - \frac{2\bar{t}}{\bar{t}} = -1$ et $\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \theta^2} \leq 0$

au point critique.

i.e : $\theta = \bar{t}$ est bien un max pour la fonction de vraisemblance et l'estimateur du M.V est $\hat{W} = \bar{T}$.
(la moyenne empirique)

l'estimateur du MV est asymptotiquement sans biais et
Conv. en probab. De plus ici $E(\bar{T}) = E(T) = 0$, ce qui est donc
sans biais.

3°) Les observations fournissent l'estimation $\hat{\sigma} = \frac{77}{15} = 5,13 \text{ Ans}$

EX 12)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x}{a}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{ou } a \text{ est un réel, } a > 0.$$

* f peut être considérée comme la densité d'une variable continue X , donc on obtient que :

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} dx = 1$$

$$1) E(X) = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} dx = 2a \quad (\text{on fait une intégration par partie})$$

$$\text{de même } E(X^2) = 6a^2 \text{ et } V(X) = 2a^2.$$

$$2) E(X) = 2a = \varphi(a), \text{ avec } \varphi: x \rightarrow 2x$$

donc un estimateur T pour a par la méthode des moments est $T = \frac{\bar{X}}{2}$

évidemment convergent en proba et sans biais.

$$V(T) = \frac{1}{4} V(\bar{X}) = \frac{1}{4} \frac{V(X)}{n} = \frac{1}{4} \frac{2a^2}{n} = \frac{a^2}{2n}.$$

3°) Vraisemblance des observations x_1, \dots, x_n sachant a :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, a) = \prod_{i=1}^n f(x_i, a) = \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{a^{2n}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{a}}$$

$$\text{alors: } \ln(L(x_1, \dots, x_n; a)) = \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) - 2n \ln a - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{a}$$

On cherche \bar{a} maximiser en a $\ln(L)$

$$\underline{C_n}: \frac{\partial \ln(L)}{\partial a} = 0 \text{ avec } \frac{\partial \ln(L)}{\partial a} = -\frac{2n}{a} + \frac{n\bar{x}}{a^2} \\ = \frac{n}{a} \left(-2 + \frac{\bar{x}}{a}\right)$$

$$\text{et } \frac{\partial \ln(L)}{\partial a} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{\bar{x}}{2}}$$

Cs: $\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial a^2} \leq 0$ au point critique or

$$\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial a^2} = \frac{2n}{a^2} - \frac{2n\bar{x}}{a^3} = \frac{2n}{a^2} \left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right)$$

$$\text{et pour } a = \frac{\bar{x}}{2}, \quad \frac{\bar{x}}{a} = 2 \text{ et } \left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right) = -1$$

$$\text{d'où } \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial a^2} \leq 0 \text{ au point } \frac{\bar{x}}{2}$$

d'où l'estimateur du M.V: $\hat{a} = \frac{\bar{X}}{2}$.

Ex 13:

1°/ On cherche k , de façon que f soit une densité de probabilité:

- $k \geq 0$.

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 k x^r dx = k \int_0^1 x^r dx$
 $= k \left. \frac{x^{r+1}}{r+1} \right|_0^1 = \frac{k}{r+1} = 1$

$$\Rightarrow \boxed{k = r+1}.$$

- $E(X) = \int_0^1 (r+1) x^{r+1} dx = (r+1) \left. \frac{x^{r+2}}{r+2} \right|_0^1 = \frac{r+1}{r+2}.$

- $V(X) = \int_0^1 (r+1) x^{r+2} dx - \left(\frac{r+1}{r+2} \right)^2$
 $= (r+1) \left. \frac{x^{r+3}}{r+3} \right|_0^1 - \left(\frac{r+1}{r+2} \right)^2 = \frac{r+1}{r+3} - \left(\frac{r+1}{r+2} \right)^2$
 $= \frac{r+1}{(r+3)(r+2)^2}.$

2° Un estimateur T de r par la méthode des moments:

$$\text{on a } E(X) = \frac{r+1}{r+2} = \varphi(r)$$

$$\text{donc } T = \varphi^{-1}(\bar{X}) = \frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$$

T converge en proba. vers r .

3° Vraisemblance des observations (x_1, \dots, x_n) sachant r :

$$L(x_1, \dots, x_n, r) = (r+1)^n \prod_{i=1}^n x_i^r$$

$$\text{On maximise la fct : } r \longrightarrow \ln(L(x_1, \dots, x_n, r)) \\ = n \ln(r+1) + r \sum_{i=1}^n \ln(x_i).$$

$$C_1: \frac{\partial L_n(L)}{\partial r} = 0 \text{ avec } \frac{\partial L_n(L)}{\partial r} = \frac{n}{r+1} + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \\ = n \left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \right)$$

$$\text{donc : } \frac{\partial L_n(L)}{\partial r} = 0 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - 1} \\ = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{1}{x_i}\right) - 1}$$

$$C_2: \frac{\partial^2 L_n(L)}{\partial r^2} \leq 0 \text{ au point critique or } \frac{\partial^2 L_n(L)}{\partial r^2} = \frac{-n}{(r+1)^2} \leq 0 \text{ } \forall r$$

d'où l'estimateur du M.V : $\omega = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L_n\left(\frac{1}{x_i}\right) - 1$

ω converge en proba vers r .