Résumé sur les lois discrètes :

| Loi | Valeurs | Probabilité | Espérance | Variance |
|---|---|---|---|---|
| Loi uniforme Discrète $U\{1 \ldots n\}$ | $\{1, 2, \ldots, n\}$ | $P(X=k) = \frac{1}{n}$ | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2-1}{12}$ |
| Loi de Bernoulli de paramètre $p$, $p \in [0,1]$. | $\{0, 1\}$ | $(q = 1-p)$ <br> $P(X=1) = p$, <br> $P(X=0) = q$ | $p$ | $p \cdot q$. |
| Loi Binomiale $B(n,p)$ | $\{0, 1, \ldots, n\}$ | $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ <br> où $q = 1-p$ | $np$ | $np \cdot q$ |
| Loi géométrique $G(p)$ | $\mathbb{N}^*$ | $P(X=k) = p \cdot q^{k-1}$ <br> à $q = 1-p$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{q}{p^2}$ |
| Loi de Poisson $P(\lambda)$ | $\mathbb{N}$ | $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ | $\lambda$ | $\lambda$ |

## Correction des exercices :

**Ex n°1 :**

1ère méthode : $X$ suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$.

1) $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$P(X=k) = \frac{1}{6}, \; k \in \{1, 2, \ldots, 6\}.$$

2ème méthode : Fonction de répartition :

$$F(k) = P(X \leq k) = \frac{k}{6} \; ; \; k \in \{1, \ldots, 6\}.$$

2) $E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 3,5$.

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{35}{12} = 2,9$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{35}{12}} = 1,7.$$



CamScanner

3) F est une fonction en escalier.

$F(x) = 0$ si $x < 1$ \} et $F(x) = \frac{[x]+1}{6}$ sinon. $[1, 5$

$F(x) = 1$ si $x > 6$ ) $\quad 1 =$

**Exo n°2 :** $\quad [x]$

1) $A = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $B = \min(x_1, x_2)$, $C = 2X_1 - 1$.

. $X_1$ et $X_2$ sont 2 v.a indépendantes ssi tout évènement lié à l'une est indépendant de tout évènement lié à l'autre.

$P(X_1 = x_i \wedge X_2 = x_j) = P(x_1 = x_i) \cdot P(X_2 = x_j)$. $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}$.

- $E(A) = E\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) = \frac{1}{2}\left(E(X_1) + E(x_2)\right) = E(X_1) = 2,1$.

- $V(A) = \frac{1}{2}\left(V(x_1) + V(X_2) + \underbrace{Cov(X_1, X_2)}_{=0}\right)$ Car ($X_1$ et $X_2$ indépendantes)

$\Rightarrow V(A) = \frac{1}{4}\left(V(x_1) + V(x_2)\right)$

$V(A) = \frac{1}{4}\left(V(x_1) + V(x_2)\right)$

$V(X_1) = E(X_1^2) - [E(X_1)]^2$

$E(X_1^2) = 1 \times 0,2 + 4 \times 0,5 + 9 \times 0,3 = 4,9$

$\Rightarrow V(X_1) = 4,9 - (2,1)^2 = 0,49 = V(X_2)$

$\Rightarrow V(A) = \frac{0,49}{2} = 0,245$.

- $E(C) = E(2X_1 - 1) = 2E(X_1) - 1 = 2 \times 2,1 - 1 = 3,2$.

$\Rightarrow$

- $V(C) = 4V(X_1) = 4 \times 0,49 = 1,96$.

2) Loi de v.a A

| $X_2 \backslash X_1$ | 1 | 2 | 3 |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 ; 1 | 3/2 ; 1 | 2 ; 1 |
| 2 | 3/2 ; 1 | 2 ; 2 | 5/2 ; 2 |
| 3 | 2 ; 1 | 5/2 ; 2 | 3 ; 3 |

B = les 2 dés amènent le nombre des points ......

du couple $(X_1, X_2)$

| $X_2 \backslash X_1$ | 1 | 2 | 3 | $P_{X_2}(\cdot)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,04 | 0,1 | 0,06 | 0,2 |
| 2 | 0,1 | 0,25 | 0,15 | 0,5 |
| 3 | 0,06 | 0,15 | 0,09 | 0,3 |
| $P_{X_1}(\cdot)$ | 0,2 | 0,5 | 0,3 | 1 |

donc loi de la V.a A:

$A = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) = 1$

| les valeurs de A | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | T |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Prob | 0,04 | 0,2 | 0,37 | 0,3 | 0,09 | 1 |

. Loi de V.a B : $B = \min(X_1, X_2)$.

| les valeurs de B | 1 | 2 | 3 | T |
|---|---|---|---|---|
| Prob | 0,36 | 0,55 | 0,09 | 1 |

↳ min fama min = 1 $(0{,}04 + 0{,}1 + 0{,}06 + 0{,}1 + 0{,}06)$.

. Loi de V.a $C = 2X_1 - 1$

| les valeurs de C | 1 | 3 | 5 | T |
|---|---|---|---|---|
| Prob | 0,2 | 0,5 | 0,3 | 1 |

. Esperance de B :

$E(B) = \sum b_i P_i = 1 \times 0{,}36 + 2 \times 0{,}55 + 3 \times 0{,}09 = 1{,}73$.

. Variance de B :

$V(B) = \sum b_i^2 P_i - [E(B)]^2 = 1 \times 0{,}36 + 4 \times 0{,}55 + 9 \times 0{,}09 = 0{,}37$.

$C = 2X_1 - 1$

$X_1$

$2 \times \boxed{1} - 1 = 1$

$2 \times \boxed{2} - 1 = 3$

$2 \times \boxed{3} - 1 = 5$

**Ex n°3 :**

$$E(X^2) = \sum_{i\in I} x_i^2 \cdot p_i = \sum_{i\in I} \left( x_i^2 - [E(X)] + [E(X)] \right) p_i$$

$$= \underbrace{\sum_{i\in I} (x_i^2 - E(X)]^2) p_i}_{} + \sum_{i\in I} [E(X)]^2 \cdot p_i$$

$$= V(X) + [E(X)]^2.$$

**Ex n°4 :**

$Y = 10 \cdot X1 + X2$ , $M = \min(X1, X2)$

$$E(X1) = 0 \times \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{5}{10} + \frac{6}{10} + \frac{7}{10} + \frac{8}{10} + \frac{9}{10} = 4{,}5 = E(X_2)$$

$$\Rightarrow E(Y) = 10 \times 4{,}5 + 4{,}5 = \frac{99}{2} = 49{,}5.$$

$$V(Y) = V(10 \cdot X1 + X2) = 100\, V(X1) + V(X2) = 101\, V(X1)$$

$$V(X1) = E(X1^2) - [E(X1)]^2$$

$$= 28{,}5 - (4{,}5)^2 = 8{,}25$$

$$\Rightarrow V(Y) = 101 \times 8{,}25 = 833{,}25.$$

Mq $E(M) \leq \min [E(X_i) ; i = 1,2]$

Comme $M = \min(X1, X2)$

$\Rightarrow M \leq X_i$ , $i = 1,2$.

$\Rightarrow E(M) \leq E(X_i)$; $i = 1,2$.

$\Rightarrow E(M) \leq \min [E(X_i); i = 1,2]$

$(P(X > k))^2$

$= (1 - P(X \leq k))^2$
$F(k)$

$A = 1 - \bar{A}$

$=$

$P(X > k)$

$P(X \leq k)$

2) Y suit la loi uniforme sur $\{0, 1, 2, \cdots, 99\}$.

Les valeurs prises par $M \in \{0, 1, \cdots, 9\}$.

* Fonction de répartition : $F(k) = \frac{1+k}{10}$

$$\begin{cases} P(X > k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - \frac{k+1}{10} \\ P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k) \\ \quad = 1 - \frac{k}{10} - \left(1 - \frac{k+1}{10}\right) = \frac{1}{10} \end{cases}$$

annuller

$$P(M > k) = P(X1 > k \wedge X_2 > k) = P(X1 > k) \cdot P(X_2 > k)$$

min > k donc $X1 > k$ et $X2 > K$

$$= \left(1 - \frac{k+1}{10}\right)^2$$

$\Rightarrow$ indépendants car $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$F(k) \quad \Delta = 1 - P(X \leq k)$

12

$P(M=k) = P(M > k-1) - P(M > k)$

$$= \left(1 - \frac{k}{10}\right)^2 - \left(1 - \frac{k+1}{10}\right)^2$$

Pour $k=0$ $P(M=0) = \left(1-\frac{0}{10}\right)^2 - \left(1 - \frac{0+1}{10}\right)^2 = 1 - \frac{81}{100} = \frac{19}{100}$

Pour $k=1$ $P(M=1) = \left(1-\frac{1}{10}\right)^2 - \left(1 - \frac{1+1}{10}\right)^2 = \frac{17}{100}$

Pour $k=2 = \frac{15}{100}$

Pour $k=3 = \frac{13}{100}$

Pour $k=4 = \frac{11}{100}$

Pour $k=5 = \frac{9}{100}$

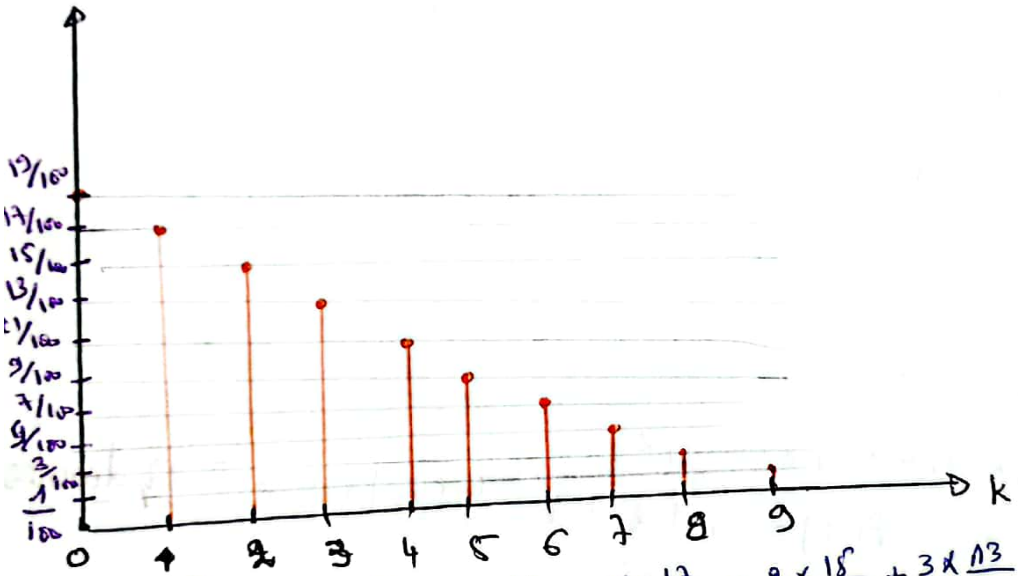
pour $k=6 = \frac{7}{100}$

pour $k=7 = \frac{5}{100}$

pour $k=8 = \frac{3}{100}$

pour $k=9 = \frac{1}{100}$

Representation graphique de la loi M :




$E(M) = \sum_{i=0}^{9} n_i\, P(M=i) = 0 \times \frac{19}{100} + 1 \times \frac{17}{100} + 2 \times \frac{15}{100} + 3 \times \frac{13}{100} + 4 \times \frac{11}{100} + 5 \times \frac{9}{100} + 6 \times \frac{7}{100}$

$+ 7 \times \frac{5}{100} + 8 \times \frac{3}{100} + 9 \times \frac{1}{100}$.

$V(M) = \sum_{i=0}^{9} n_i^2 . P(M=i) - [E(M)]^2$

Ex n° 5 :

1) La probabilité que l'un au moins présente un surpoids :

$A_i$ = l'évènement l'adolescent numéro $i$ présente un surpoids

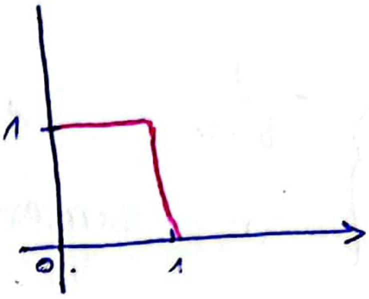
on va note $\bar{A}_i$ l'évènement complémentaire

$P(A_i) = 0,2 \Rightarrow P(\bar{A}_i) = 0,8$

* Sol :

f une densité de probabilité ssi

$$\begin{cases} \cdot\ f \geq 0 \\ \cdot\ f \text{ continue presque partout} \\ \cdot\ \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1 \end{cases}$$




* $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

2) Fonction de répartition :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si non.} \end{cases}$$

- $P(U < 0{,}25) = F(0{,}25) = 0{,}25$
- $P(0{,}2 < U < 0{,}8) = F(0{,}8) - F(0{,}2) = 0{,}8 - 0{,}2 = 0{,}6$
- $P(U \geq 0{,}6) = 1 - F(0{,}6) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$

3) $E(U) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

$V(U) = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$

$\sigma(U) = \frac{1}{\sqrt{12}}$

2/ $m = 30$

**EX7.**

$X$ suit la loi $U([a,1])$ ; $a < 1$

$g$ : la fonction de densité

$G$ : la fonction de répartition

1) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{1-a} & \text{si } x \in [a,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

si $x \in [a,1]$ on a :

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt = \int_{a}^{x} g(t)\,dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{1-a}\,dt = \frac{x-a}{1-a}$$

$$\Rightarrow G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{1-a} & a \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$E(X) = \frac{a+1}{2}$ ; $V(X) = \frac{(1-a)^2}{12}$ ; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1-a}{2\sqrt{3}}$

2) $x(t) = a + (b-a)t$

$X = a + (1-a)U$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$a \leq x \leq 1$

$0 \leq x-a \leq 1-a$

$0 \leq \frac{x-a}{1-a} \leq 1$

$G(x) = F\left(\frac{x-a}{1-a}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

- si $x < a$ : $\frac{x-a}{1-a} < 0$
- si $x > 1$ : $\frac{x-a}{1-a} > 1$

CamScanner

de densité $g$ de $f$ :

$= G'(x) = \left(F\left(\frac{x-a}{1-a}\right)\right)' = \frac{1}{1-a} F'\left(\frac{x-a}{1-a}\right)$

$= \frac{1}{1-a} f\left(\frac{x-a}{1-a}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

3) $a = -1$

$X$ suit la loi uniforme sur $[-1,1]$

$Y = |X|$

pour cherche la loi il faut chercher la valeur puis la probabilité

$= P(|X| < y) = P(-y < X < y)$

$= G(y) - G(-y)$

$= \frac{y+1}{2} - \frac{-y+1}{2} = y$ (car $a = -1$)

donc $Y$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$

EX3:

1) $U$ suit la loi uniforme sur $]0,1]$

$X = \sqrt{U}$ ; $Y = \frac{1}{2U+1}$ , $Z = -\ln(U)$

$X$ prend valeurs sur $[0,1]$ $(X(\Omega) = [0,1])$

$Y$ prend les valeurs sur $[\frac{1}{3},1]$ $(Y(\Omega) = [\frac{1}{3},1])$

$Z$ prend les valeurs sur $[0;+\infty[$ $(Z(\Omega) = [0;+\infty[)$

Ex7.

a) Soit F la fonction de répartition de X.

$F(x) = 0$ si $x < 0$ " $]-\infty, 0[$ "

si $x \in [0,1]$

$P(X < x) = P(\sqrt{U} < x) = P(U < x^2) = x^2$

donc

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Soit G la fct de répartition de Y si $y \in [\frac{1}{3}, 1]$

$P(Y < y) = P\left(\frac{1}{2U+1} < y\right) = P\left(U > \frac{\frac{1}{y} - 1}{2}\right) = 1 - \frac{\frac{1}{y} - 1}{2}$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2y}$

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2y} & \text{si } \frac{1}{3} \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y^2} & \text{si } \frac{1}{3} \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- soit H la fct de répartition de Z

Soit $z \in [0, +\infty[$

$P(Z \leq z) = P(-\ln(U) \leq z) = P(U \geq e^{-z}) = 1 - e^{-z}$

donc Z suit la loi exp de paramètre 1.

$V(Z) = \frac{1}{1^2} = 1$

$) = E(\sqrt{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x)\, dx$

$= \int_0^1 2x^2 \, dx = \frac{2}{3}$

$V(x) = E(x^2) - E^2(x) = E(U) - \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$

. $E(y) = \int_{\frac{1}{3}}^{1} y \frac{1}{2y^2} dy = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(\sqrt{3})$

$V(y) = E(y^2) - E^2(y) = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{y^2}{2y^2} dy - (\ln(\sqrt{3}))^2$

$= \frac{1}{3} - (\ln(\sqrt{3}))^2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{1}{a} x\right) & \text{si } x \geq 0 \quad (\text{avec } a>0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{a} \exp\left(\frac{-1}{a} t\right) dt$$

$$= \left[-\exp\left(\frac{-1}{a} t\right)\right]_{0}^{x}$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{1}{a} x\right)$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(\frac{-1}{a} x\right)$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(\frac{-1}{a} x\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{1}{1/a} = a$$

$$V(x) = a^2$$

2) $a = 2500$

$$P(2500 < X < 3500) = F(3500) - F(2500)$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{3500}{2500}\right) - 1 + \exp\left(-\frac{2500}{2500}\right) = \underline{0{,}12}$$

3) $$P(X > 3500 / X > 2500) = \frac{P((X > 3500) \cap (X > 2500))}{P(X > 2500)}$$

$$= \frac{P(X > 3500)}{P(X > 2500)}$$

$$= \frac{1 - P(X < 3500)}{1 - P(X < 2500)}$$

$$= \frac{1 - F(3500)}{1 - F(2500)} = 0{,}67$$

1 -

EX10

$P(0<T<1,5) = F_0(1,5) - F_0(0)$
$= 0,9332 - 0,5 = 0,4332$

$P(T<-0,5) = 1 - P(T<0,5)$
$= 1 - F_0(0,5)$
$= 1 - 0,6915 = 0,3085.$

$P(|T| > 2,5) = 2(1 - F_0(2,5))$
$= 2(1 - 0,9938) = 0,0124.$

2) $P(T<a) = 0,95$
$a = 1,6449$

$P(|T| < b) = 0,6 = 2 \times F_0(b) - 1$
$\Rightarrow F_0(b) = \frac{1,6}{2} = 0,8.$

$\Rightarrow b = 0,8416$

$P(T<c) = 0,25 \Rightarrow c = -0,6745$

3) • $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

$\max_{x \in \mathbb{R}} (f_0(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

suit la loi normale $N(2,5;5)$ avec $T = \frac{X-2,5}{5}$

la loi normale centrée réduite $N(0;1)$

. $P(0 \leq X < 7,5) = P(-\frac{1}{2} \leq X \leq 1)$

$F_0(1) - F_0(-\frac{1}{2}) = 0,8413 - 0,3085$

$= \underline{0,5328}$

. $P(|X-2,5| > 7,5) = ?$

$|X-2,5| > 7,5$

$\Rightarrow |T| > \frac{7,5}{5}$

$\Rightarrow |T| > 1,5$

$\Rightarrow P(|X-2,5| > 7,5) = P(|T| > 1,5)$

$= 2(1 - F_0(1,5))$

$= 2(1 - 0,9332)$

$= 0,1336$

<u>EX12:</u>

1) X suit la loi normal $N(m, \sigma)$ et $P(X \leq -1,5) = 0,1$

on a $P(X > 2) = 0,6$

$T = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale $N(0,1)$.

$P\left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{2-m}{\sigma}\right) = 0,6 = P\left(T > \frac{2-m}{\sigma}\right)$

$= 1 - P\left(T < \frac{2-m}{\sigma}\right)$

$\Rightarrow P\left(T < \frac{2-m}{\sigma}\right) = 0,4$

$$\frac{2-m}{\sigma} = -0,2533$$

$$* \quad P\left(T \leqslant \frac{1,5-m}{\sigma}\right) = 0,1$$

$$\frac{-1,5-m}{\sigma} = -1,2816$$

$$\begin{cases} \dfrac{2-m}{\sigma} = -0,2633 & (1) \\ \dfrac{-1,5-m}{\sigma} = -1,2816 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = 2,86 \\ \sigma = 3,4 \end{cases}$$

2)
$$P(-0,5 \leqslant X < 6) = P\left(\frac{-0,5-2,86}{3,4} \leqslant T < \frac{6-2,86}{3,4}\right)$$

$$= P(-0,99 \leqslant T < 0,92)$$

$$= F_0(0,92) - F_0(-0,99)$$

$$= 0,8212 - (1 - F_0(0,99)) = 0,8212 - 1 + 0,8389$$

$$= \underline{0,6601}.$$

... loi normale $N(0,1)$

... $n=1$ ; $E(T)=0$

pour $n=2$ ; $E(T^2)=1$

soit $X_n = T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_n^2$

$X_n$ suit la loi Khi-deux de paramètre $n$ et $E(X_n)=n$ et $V(X_n)=2n$.

- pour $n=3$ $\quad E(T^3)=0$.

$$E(T^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)\,dx.$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx$$

$U = x^2 \longrightarrow U' = 2x$:

$V' = x \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \longrightarrow V = -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

$$\Rightarrow E(T^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-x^2 \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx.$$

$= 2E(T) = 0$.

2) $X = 2T-1$

$\Rightarrow E(X) = 2E(T)-1 = -1$

$V(X) = 4V(T) = 4$

$Z = T^2$

$E(Z)=1$, $V(Z)=2$.

- $X$ suit la loi normale $N(-1,2)$

$Z$ suit la loi de Khi-deux de paramètre 1

3) $Y = |T|$

$P(Y<y) = P(|T|<y)$

$= 2F_0(y) - 1$ ; $y \in \mathbb{R}_+$.

$$F(y) = \begin{cases} 2F_0(y) - 1 & \text{si } y \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f(y) = \begin{cases} 2f_0(y) & \text{si } y \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

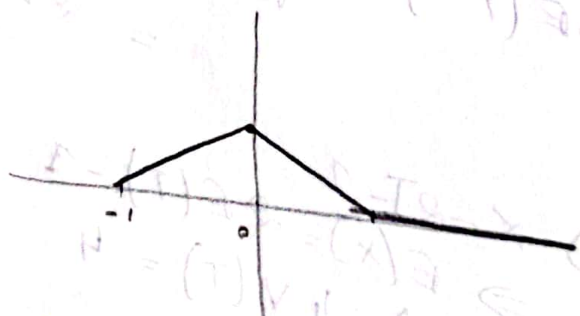
$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2y\, f_0(y)\, dy.$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{2y}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy = \left[\frac{-2\exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

**EX14:**

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1-x & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



1) $f$ est continue positive :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (1+x)\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)\,dx$$

$$= \left[x + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

Donc $f$ est une densité de probabilité.

$$\ldots = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x+x^2)\,dx + \int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

$$= 0$$

$f$ est symétrique $\Rightarrow E(X) = 0$

- $$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x^2+x^3)\,dx + \int_0^1 (x^2-x^3)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= -\left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

3) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = ?$

- Si $x < -1$ ; $F(x) = 0$
- Si $x \in [-1, 0]$ ; $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{x} (1+t)\,dt$

$$= \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x}$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + 1 - \frac{1}{2}$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)^2$$

- Si $x \in ]0, 1]$ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-1}^{0} (1+t)\,dt + \int_0^x (1-t)\,dt$$

$$= \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = 1 - \frac{(x-1)^2}{2}$$

• si $x > 1$ : $f(x) = \ldots$ si $x \ldots$

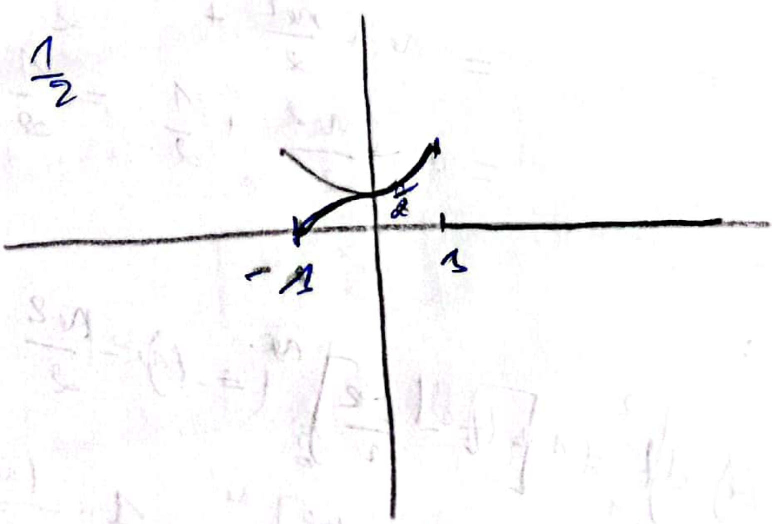
$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \\ \frac{1}{2}(x+1)^2 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 - \frac{(x-1)^2}{2} & \text{si } x \in ]0, 1]. \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

$$\cdot\ F(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{2}(1-x)^2 & \text{si } x \in ]0, 1] \\ 1 - \frac{(1+x)^2}{2} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

$$1 - F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ 1 - \frac{(1+x)^2}{2} & \text{si } x \in [-1; 0]. \\ \frac{(x-1)^2}{2} & \text{si } x \in ]0, 1]. \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Donc $F(-x) = 1 - F(x)$

$f(0) = \frac{1}{2}$



Exercice 5 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^3} & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; a > 0$$

pour que $f$ soit une densité de probabilité, il faut que $f$ soit continue p.p

$f \geq 0 \Rightarrow k \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{k}{x^3} dx = 1$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{-k}{2x^2} \right]_a^{+\infty} = \frac{k}{2a^2} = 1 \Rightarrow k = 2a^2$$

$$\bullet\ E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^{+\infty} \frac{2a^2}{x^2} dx$$

$$= 2a^2 \left[ -\frac{1}{x} \right]_a^{+\infty} = 2a$$

$$\bullet\ V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - 4a^2$$

$$= 2a^2 \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} - 4a^2 \quad : \text{n'est pas convergente.}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt = \int_a^{x} \frac{2a^2}{t^3} dt = 2a^2 \left[ -\frac{1}{2t^2} \right]_a^{x}$$

$$= 2a^2 \left[ -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2a^2} \right]$$

$$= 1 - \frac{2a^2}{2x^2} = 1 - \frac{a^2}{x^2}.$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a^2}{x^2} & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$$F(Me) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-a^2}{Me^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{Me = a\sqrt{2}}$$

autrement

$P(X \leq M_e) = F(M_e) = 1 - \frac{a^2}{M_e^2}$

$P(X > M_e) = 1 - P(X < M_e) = \frac{a^2}{M_e^2}$

$P(X \leq M_e) = P(X \geq M_e) \Rightarrow 1 - \frac{a^2}{M_e^2} = \frac{a^2}{M_e^2}$

$\Rightarrow M_e^2 - a^2 = a^2 \Rightarrow M_e^2 = 2a^2 \Rightarrow \boxed{M_e = \sqrt{2}\,a}$

$\Rightarrow$