Cours Traitement du Signal

Chapitre 2 : Signaux et Fonctions de base

Zakia Jellali

Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Gabès

Octobre 2020

Année Universitaire 2020 – 2021

Table des matières

1 Introduction

Ce chapitre présente une description mathématique des signaux élémentaires souvent idéaux, très pratiques pour la description des modèles mathématiques. Ces modèles seront utilisés tout au long le cours du traitement du signal.

2 Signaux Particuliers

2.1 Fonction signe

La fonction signe, notée *sgn* est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$sgn(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } t > 0, \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases} \tag{1}$$

On définit :

$$sgn(0) = c_0, \text{avec} - 1 \leq c_0 \leq 1.$$

Par convention, on admet pour valeur à l'origine : $sgn(t) = 0$ pour $t = 0$.
On a alors :

$$sgn(t) = \frac{t}{|t|}, \forall t \neq 0. \tag{2}$$

Dans ce cas, la fonction *sgn* est une fonction impaire :

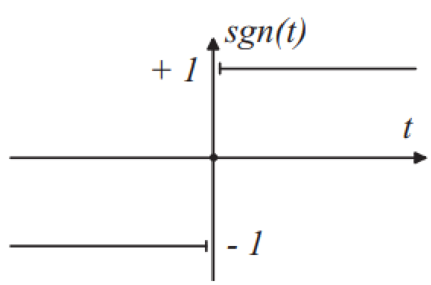

FIGURE 1 – Fonction signe, $sgn(t)$.

$$sgn(t) = -sgn(-t), \forall t. \tag{3}$$

2.2 Fonction échelon unité

La fonction échelon (saut) unité, ou échelon simplement ou heaviside, notée ϵ, est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$\epsilon(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Par convention, on admet pour valeur à l'origine : $\epsilon(t) = \frac{1}{2}$ pour $t = 0$.

• Relation entre $sgn(t)$ et $\epsilon(t)$:

$$\begin{cases} \epsilon(t) = \frac{1}{2} sgn(t) + \frac{1}{2}, \\ sgn(t) = 2\epsilon(t) - 1. \end{cases} \tag{5}$$

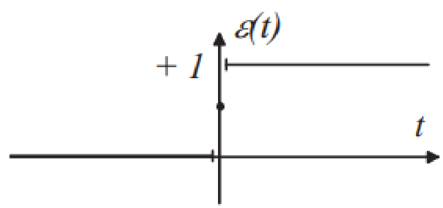

FIGURE 2 – Fonction échelon, $\epsilon(t)$.

2.3 Fonction rampe

La fonction rampe, notée r, est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$r(t) = \int_0^t \epsilon(u)du = t\epsilon(t). \tag{6}$$

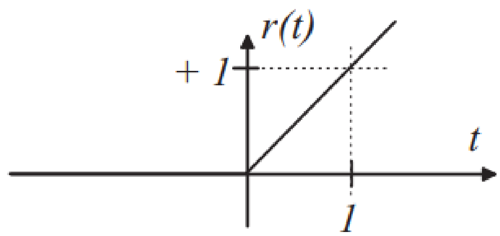

FIGURE 3 – Fonction rampe, $r(t)$.

2.4 Fonction rectangle ou porte

2.4.1 Fonction rectangle unité

La fonction rectangle ou porte de largeur 1, notée *rect* est une fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$rect(t) = \epsilon\left(t + \frac{1}{2}\right) - \epsilon\left(t - \frac{1}{2}\right). \tag{7}$$

On a également :

$$rect(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } |t| < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } |t| = \frac{1}{2}, \end{cases} \tag{8}$$

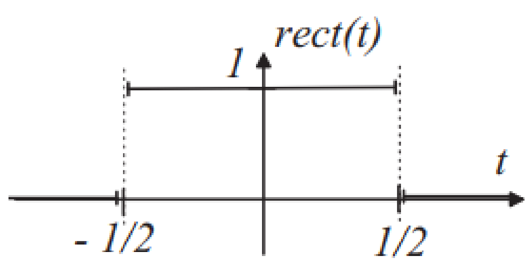

FIGURE 4 – Fonction rectangle de largeur unité, (t).

La fonction $rect(t)$ est normalisée, sa surface est unitaire $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} rect(t)dt = 1\right)$.

2.4.2 Fonction rectangle de largeur T

La fonction rectangle de largeur T, notée $rect_T$ est définie par :

$$rect(t) = \epsilon\left(t + \frac{T}{2}\right) - \epsilon\left(t - \frac{T}{2}\right). \tag{9}$$

L'aire de la fonction rectangle de largeur T vaut T.

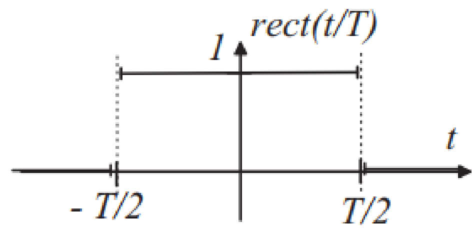

FIGURE 5 – Fonction rectangle de largeur T, $rect\left(\frac{t}{T}\right)$.

Remarque : Pour simplifier la représentation, on représente fréquement ces fonctions sans tenir compte des discontinuités en $\pm\frac{1}{2}$ ou $\pm\frac{T}{2}$:

$$rect_T(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{10}$$

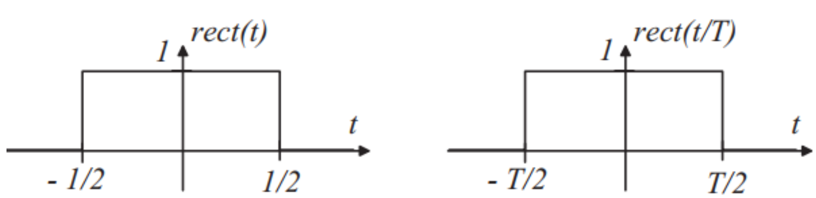

FIGURE 6 – Représentations simplifiées des fonctions rectangle de largeur unité et de largeur T.

2.4.3 Fonction rectangle avec un retard τ

La fonction rectangle (porte) avec un retard τ traslatée de $+\tau$ s'écrit simplement $rect_T(t-\tau)$:

$$rect_T\,(t-\tau) = rect\left(\frac{t-\tau}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau - \frac{T}{2} \leq t \leq \tau + \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{11}$$

La fonction $rect_T\,(t-\tau)$ est de largeur T et centrée en $t=\tau$.

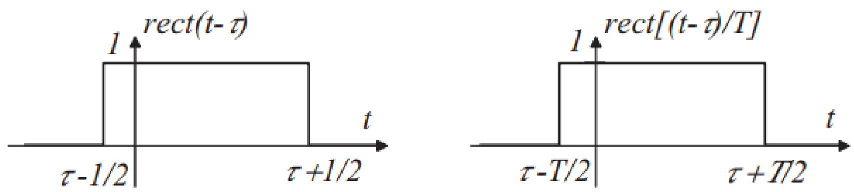

FIGURE 7 – Fonctions rectangle de largeur unité et de largeur T, translatées de τ.

Remarque : La fonction rectangle est utilisée pour exprimer mathèmatiquement une portion d'un signal de largeur T (FIGURE 8)

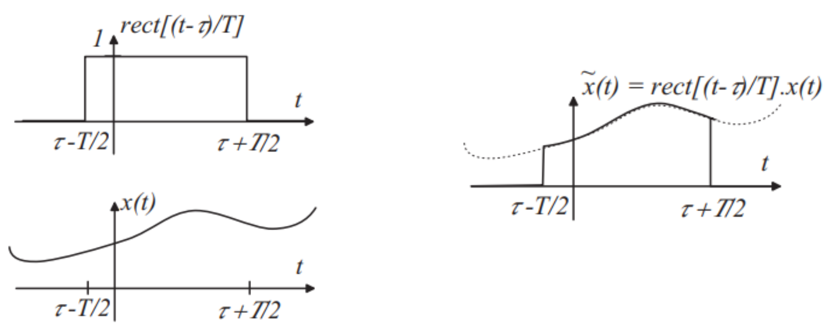

FIGURE 8 – Utilisation de la fonction rectangle.

2.5 Fonction triangle

La fonction triangle unité, notée *tri* est définie par :

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{12}$$

Notons que l'aire de la fonction triangle unité vaut 1 $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} tri(t)dt = 1\right)$ et que la largeur de son support vaut 2.

On peut également appliquer les opérateurs de translation et d'homotéthie à cette fonction :

- la fonction $tri\,(t-\tau)$ est une fonction triangle unité translatée de $+\tau$,
- la fonction $tri\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$ est une fonction triangle de largeur $2T$ (ou d'aire égale à T) translatée de τ.

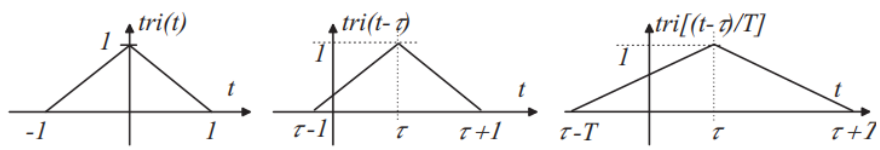

FIGURE 9 – Fonctions triangle unité (à gauche), triangle unité translatée de τ (au milieu) et triangle d'aire $2T$ translatée de τ (à droite).

2.6 Fonction sinus cardinal

- La fonction sinus cardianl est très courante en traitement du signal où elle intervient comme transformée de Fourier d'une fonction rectangle.
- La fonction sinus cardinal, notée $sinc(t)$, est définie :

$$sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}. \tag{13}$$

- La fonction sinus cardinal est elle aussi normalisée : $\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(t)dt = 1$.
  D'autre part, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(t)^2 dt = 1$.

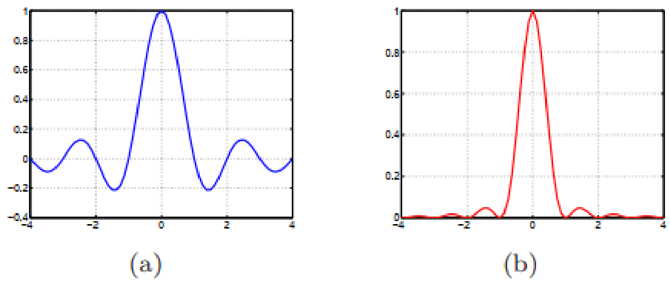

FIGURE 10 – (a) fonction $sinc(t)$. (b) fonction $sinc(t)^2$.

3 Impulsion de Dirac

3.1 Définition

- L'impulsion de Dirac $\delta(t)$, aussi appelée impulsion unité ou distribution delta, est nulle sauf lorsque son argument est nul, auquel cas, son amplitude est infinie, mais son « aire » unité. Elle est définie par :

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{pour} t = 0, \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases} \tag{14}$$

et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1, \tag{15}$$

D'autre part, on a :

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0, \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} = \epsilon(t), \tag{16}$$

On dit que $\epsilon(t)$ est la primitive de $\delta(t)$ ou bien que $\delta(t)$ est la dérivée de $\epsilon(t)$. L'impulsion de Dirac est un signal non réalisable.

- $\delta(t)$ ne peut être représentée graphiquement. On la schématise par le symbole $\uparrow$.
 Attention : le 1 marqué sur la flèche pleine représente l'aire de cette impulsion (et non la hauteur de l'impulsion).

- Physiquement, $\delta(t)$ correspond à une fonction porte dont la largeur T tend vers 0 et dont l'aire est égale à 1. Donc, on peut voir la distribution de Dirac comme étant la limite de la

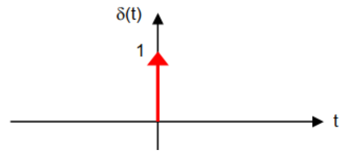

FIGURE 11 – Impulsion de Dirac.

fonction porte tel que :

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} rect\left(\frac{t}{T}\right).$$

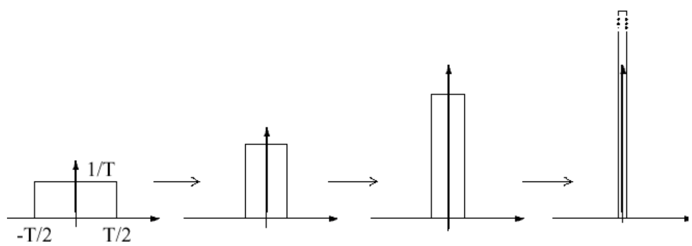

FIGURE 12 – Relation entre la fonction porte et l'impulsion de Dirac.

3.2 Propriétés

- Représentation

  La ditribution de Dirac, $\delta(t)$, se représente par une flèche verticale d'amplitude 1 en $t = 0$. Sa version translatée de τ, notée $\delta(t - \tau)$ est représentée par la figure suivante :

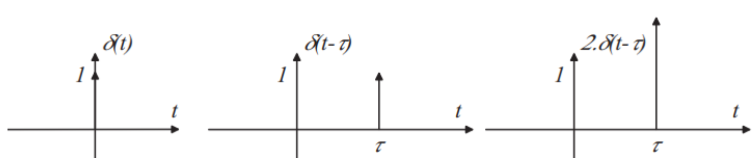

FIGURE 13 – Distributions de Dirac : unité (à gauche), translatée de τ (au milieu), translatée de τ et d'amplitude 2 (à droite).

- Propriétés

1. $\delta(t) = 0$ si $t \neq 0$,
2. $f(t).\delta(t) = f(0).\delta(t)$ et $f(t-t_0).\delta(t) = f(t_0).\delta(t-t_0)$,
3. $\delta(kt) = \frac{1}{|k|}.\delta(t)$.

3.3 Peigne de Dirac : Fonction d'échantillonnage

3.3.1 Définition

On appelle peigne de Dirac une succession périodique d'impulsions de Dirac définie par :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT), \tag{17}$$

avec T est la période de peigne.
Cette suite est parfois appelée train d'impulsions ou fonction d'échantillonnage. Ce type de signal est principalement utilisé en échantillonnage.

3.3.2 Echantillonnage

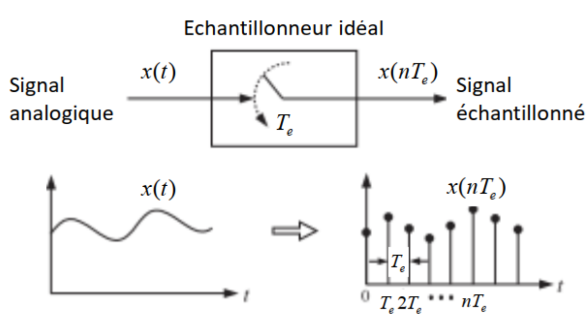

Figure 14 – Principe d'échantillonnage.

$x(t) \rightarrow x(nT_e)$, $n \in \mathbb{Z}$, signal échantillonné (à temps discret) avec :

- T_e : Période d'échantillonnage,
- $F_e = \frac{1}{T_e}$: Fréquence d'échantillonnage.

Pour échantillonner une fonction $x(t)$, c'est-à-dire préléver des échantillons infiniment brefs, avec une période T_e, il suffit donc d'effectuer le produit de $x(t)$ par un peigne de Dirac :

$$\begin{aligned} x_e(t) &= x(t)\delta_{Te}(t), \\ &= x(t)\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\delta(t-nT_e), \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}x(t)\delta(t-nT_e), \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}x(nT_e)\delta(t-nT_e). \end{aligned} \tag{18}$$

Cela revient à ne retenir que les valeurs de la fonction continue $x(t)$ aux instants d'échantillonnage, à savoir aux instants $t = T_e, 2T_e, 3T_e, \ldots$.

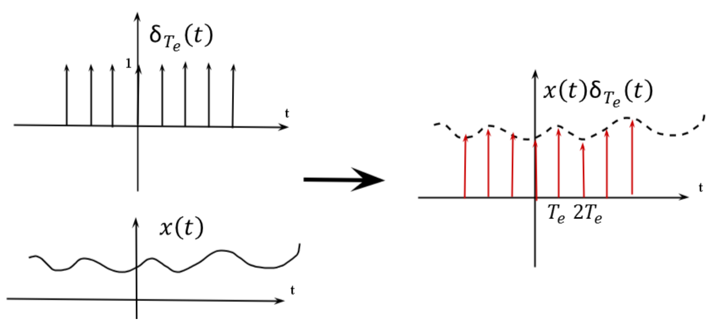

FIGURE 15 – Peigne de Dirac de période T_e (en haut). Cette distribution permet d'effectuer l'échantillonnage régulier d'un signal $x(t)$ (au milieu) par simple produit $x(t)\delta_{Te}(t)$.

3.4 Périodisation d'un signal

A partir d'un morceau de taille finie $x(t)$, on introduit aussi un opérateur de répétition, $rep_T\,(x(t))$, qui permet de périodiser un signal avec uneériode de répétition T :

$$rep_T\,(x(t)) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(t-nT). \tag{19}$$

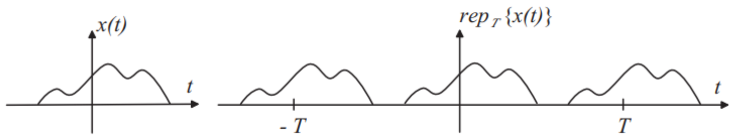

FIGURE 16 – Périodisation d'un signal avec l'opérateur $rep_T(t)$.

4 Valeurs caractéristiques d'un signal

Soit un signal $x(t)$ défini sur un intervalle $[t_1; t_2]$. On peut le caractériser par les grandeurs suivantes :

— Valeur moyenne :

$$\bar{x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt, \tag{20}$$

— Energie ou valeur quadratique :

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} x(t)^2 dt, \tag{21}$$

— Valeur quadratique moyenne, ou puissance :

$$P_x = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)^2 dt = \frac{E_x}{t_2 - t_1}, \tag{22}$$

— Valeur efficace :

$$x_{eff} = \sqrt{P_x}. \tag{23}$$

Remarque : Si $x(t)$ est un signal périodique de période T, on a :

— Valeur moyenne :

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t)dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt, \tag{24}$$

— Energie ou valeur quadratique :

$$E_x = \int_0^T x(t)^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)^2 dt = \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)^2 dt, \tag{25}$$

— Valeur quadratique moyenne, ou puissance :

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt = \frac{E_x}{T}, \tag{26}$$

— Valeur efficace :

$$x_{eff} = \sqrt{P_x}. \tag{27}$$