Classe : GEA2
Année Universitaire : 2019-2020
Durée : 1h30mn
Documents : Non Autorisés

Examen

***

Analyse et Identification des Procédés

▪ L'identification paramétrique et la perturbation aléatoire

Souvent, les procédés industriels sont sujets à des perturbations aléatoires qui entachent les observations. Toutefois, ces perturbations peuvent être représentées, avec une précision suffisante, par le passage d'une séquence de variables aléatoires de valeur moyenne nulle et de variance finie à travers un filtre. Dans la suite, on va considérer deux structures possibles pour la représentation d'un procédé perturbé, du premier ordre et sans retard :

$$y(k) = \frac{b_1 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1}} u(k) + p_a(k)$$

$u(k)$, $y(k)$ et $p_a(k)$ *représentent respectivement l'entrée, la sortie et la perturbation aléatoire.*

A- Structure 1 de la perturbation aléatoire

On considère la structure (1) suivante pour le modèle de la perturbation :

$$p_a(k) = \frac{v(k)}{\left(1 + a_1 q^{-1}\right)\left(1 + c_1 q^{-1}\right)}; \qquad v(k) \text{ est un bruit blanc} \quad (1)$$

***A1** – Proposer la méthode d'identification adéquate à la structure retenue (1) et qui conduit à blanchir l'erreur de prédiction ε (k) à la convergence.*

***A2** – Donner le vecteur des estimés $\hat{\theta}(4)$ en considérant :*

- *L'entrée* $u(k)$, *la sortie* $y(k)$ *et les paramètres* $\left(\hat{a}_1(k); \hat{b}_1(k)\right)$ *sont nuls aux instants* $k \leq 0$.
- *Les paramètres* $\left(\hat{a}_1(k); \hat{b}_1(k)\right) = (0.74; 0.9)$ *pour les instants* $k = 1$ et $k = 2$.

- *Les couples entrée/sortie sur l'horizon de mesure $k \in [1, 4]$ sont égaux à :*

$$(u(1); y(1)) = (-1; +0.01); (u(2); y(2)) = (+1; -0.92);$$
$$(u(3); y(3)) = (+1; +1.57); (u(4); y(4)) = (-1; -0.26)$$

***A3** – Valider le modèle ainsi obtenu par le test de blanchissement de l'erreur de prédiction $\varepsilon(k)$.*

B- Structure 2 de la perturbation aléatoire

On considère la structure (2) suivante pour le modèle de la perturbation :

$$p_a(k) = \frac{1 + c_1 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1}} v(k) \qquad (2)$$

MCE

***B1** – Examiner le cas de la convergence $\left(\hat{a}_1(k) = a_1(k); \hat{b}_1(k) = b_1(k)\right)$ et montrer que la corrélation entre l'erreur de prédiction $\varepsilon(k)$ et le vecteur d'observations $\phi(k)$ est non nulle.*

***B2** – A l'aide d'une méthode de décorrelation, déterminer le vecteur des estimés non biaisés $\hat{\theta}(5)$ par exploitation des couples de mesures suivants :*

$$(u(1); y(1)) = (-0.1; +0.1); (u(2); y(2)) = (+0.3; +0.07);$$
$$(u(3); y(3)) = (+0.6; +0.13); (u(4); y(4)) = (-0.2; +0.24);$$
$$(u(5); y(5)) = (+0.1; +0.18)$$

***B3** – Valider le modèle ainsi obtenu par le test de décorrelation entre les sorties prédites et l'erreur de prédiction.*

La convergence (~~le~~ vecteurs estimés $\hat{\theta}(k)$ est égal au vecteur paramètre réels $\theta(k)$)

Test de décorelation du $\phi(k)\,\varepsilon(k)$.

$$\begin{cases} R(i) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \varepsilon(k)\,\hat{y}(k-i) \\[2ex] RN(i) = \dfrac{R(i)}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \hat{y}^2(k)\right) + \left(\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \varepsilon^2(k)\right)}} \end{cases}$$

MCE

$$y(K) = -\sum_{i=1}^{n} a\, y(K-i) + \sum_{i=1}^{n} b_i\, u(K-i) + \sum_{i=1}^{n} c_i\, v(K-i) + v(K).$$

$$\boxed{\varepsilon(K) = y(K) - \hat{y}(K) = \sum_{i=1}^{n_c} c_i\, v(K-i) + v(K)}$$

$$\phi^T(K) = [-y(K-1) \text{ — } y(K-n_A)\ u(K-1-d) \text{ — } u(K-n_B-d)]$$

$y(K-1)$ depend $v(K-1)$ — $v(K-n_c-1)$.

$\Rightarrow E\{\phi(K)\,\varepsilon(K)\} \neq 0.$

La décorrélation n'est peut, etre donc, assume que lorsqu'on choisit un nouveau vector d'observations dont le premier composant est $y(K-1-n_c)$.

donc $y(K-1-n_c)$ ne depend que $v(K-1-n_c)$ — $v(K-1-2n_c)$

$\varepsilon(K) = v(K) + c_1 v(K-1)$ — $+ v(K-n_c)$

$\Rightarrow$ Corrélation nulle entre tous les composants $\phi^*(K)$ et $\varepsilon(K)$.

A - Structure 1 :

$$y(k) = \frac{b_1 q^{-1}}{1+a_1 q^{-1}} u(k) + \frac{v(k)}{(1+a_1 q^{-1})(1+c_1 q^{-1})}$$

on utilise la méthode de moindre carré généralisé.

$$(1+a_1 q^{-1})\, y(k) = b_1 q^{-1} u(k) + \frac{v(k)}{(1+c_1 q^{-1})}.$$

on pose. $\beta(k) = \dfrac{v(k)}{1+c_1 q^{-1}}$

$$\rightarrow \beta(k) = v(k) + c(k-1)\,\beta(k-1).$$

$$y(k) = -a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) + c\,\beta(k-1) + v(k).$$

$$\beta(k) = y(k) + a_1(k-1)\, y(k-1) - b_1(k-1)\, u(k-1).$$

$$\theta^T(k) = [a_1 \;\; b_1 \;\; c_1].$$

$$\varepsilon(k) = [-y(k-1) \;\; u(k-1) \;\; \beta(k-1)].$$

~~B(0) n'existe pas~~.

$$\beta(1) = y(1) + a_1(0)\,\cancel{y(0)}^{0} - \cancel{b(0)}^{0}\, u(0)$$

$$= 0{,}01 + \cancel{0{,}74}$$

$$B(1) = 0{,}01.$$

$$B(2) = y(2) + a_1(1)\, y(1) - b(1)\, u(1).$$

$$= -0{,}92 + 0{,}74 \cdot 0{,}01 + 0{,}9$$

$$= -0{,}0126.$$

$$\beta(3) = y(3) + a(2)\, y(2) - b(2)\, u(2).$$

$$= 1{,}57 + 0{,}74 \cdot (-0{,}92) - 0{,}9$$

$$= -0{,}0108.$$

$$\phi(4) = \begin{bmatrix} \cancel{-y(0)} & \cancel{u(0)} & \cancel{B(0)} \\ -y(1) & u(1) & B(1) \\ -y(2) & u(2) & B(2) \\ -y(3) & u(3) & B(3) \end{bmatrix} \qquad y(4) = \begin{bmatrix} \cancel{y(1)} \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \end{bmatrix}$$

$$\phi^T(4)\phi(4) = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0{,}92 & -1{,}17 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0{,}01 & -0{,}0126 & -0{,}0108 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}01 & -1 & 0{,}01 \\ 0{,}92 & 1 & -0{,}0126 \\ -1{,}17 & 1 & -0{,}0108 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3{,}314 & -0{,}64 & 5{,}264.10^{-3} \\ -0{,}64 & 3 & -0{,}0334 \\ 5{,}264.10^{-3} & -0{,}0334 & 3{,}784.10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$\det = 3{,}314 \,.\, 1{,}064.10^{-5} + 0{,}64\,(-6{,}44.10^{-5}) + 5{,}264.10^{-3} \,.\, 5{,}584.10^{-3}$$

$$= 2{,}334.10^{-5}$$

$$\left[\phi^T(4)\,\phi(4)\right]^{-1} = \frac{1}{2{,}34.10^{-5}} \begin{bmatrix} 1{,}064.10^{-5} & 6{,}443.10^{-5} & 5{,}584.10^{-3} \\ 6{,}443.10^{-5} & 1{,}21.10^{-3} & +0{,}107 \\ 5{,}584.10^{-3} & 0{,}107 & 9{,}532 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}454 & 2{,}753 & 238{,}63 \\ 2{,}753 & 51{,}70 & 4572{,}64 \\ 238{,}63 & 4572{,}64 & 407350{,}42 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{\phi^T(4)y(4) = \begin{bmatrix} 3{,}314 & -0{,}64 & 5{,}264.10^{-3} \\ -0{,}64 & 3 & -0{,}0334 \\ 5{,}264.10^{-3} & -0{,}0334 & 3{,}784.10^{-4} \end{bmatrix}}$$

$$\phi^T(4)y = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0{,}92 & -1{,}17 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0{,}01 & -0{,}0126 & -0{,}0108 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}92 \\ 1{,}17 \\ -0{,}26 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}861 \\ 2{,}23 \\ -0{,}02 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(4) = \begin{bmatrix} 0{,}454 & 2{,}753 & 238{,}63 \\ 2{,}753 & 51{,}70 & 4572{,}64 \\ 238{,}63 & 4572{,}64 & 407350{,}42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}861 \\ 2{,}23 \\ -0{,}02 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}21 \\ 28{,}96 \\ 2493{,}5 \end{bmatrix}$$

$$R(3) = \frac{1}{3}\left[\varepsilon(3)\,\varepsilon(k-3)\right] = 0.$$

$$R(4) = 0.$$

$\Rightarrow$ le modele n'est pas valide -

B: structure 2 :

le cas de converge. $(\hat{\theta}(k) = \theta(k))$

$$(1+a_1 q^{-1})\,y(k) = b_1 q^{-1} u(k) + (1 + c_1 q^{-1})\,v(k).$$

$$y(k) = -a_1(k-1)\,y(k-1) + b_1(k-1)\,u(k-1) + c_1(k-1)\,v(k-1) + v(k).$$

$$\hat{\theta}^T(k) = [a_1\ b_1] \qquad \varepsilon(k) = [-y(k-1)\ u(k-1)]. \quad \varphi^T(k) = \phi$$

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k) = -a_1 \cancel{y(k-1)} + b_1 \cancel{u(k-1)} + c_1 v(k-1) + v(k) + a_1 \cancel{y(k-1)} - \cancel{b_1 u(k-1)}$$

$$= c_1 v(k-1) + v(k).$$

$$E\{\phi(k)\,\varepsilon(k)\} = E\{c_1\,\phi(k)\,v(k-1) + \phi(k)\,v(k)\}. \qquad \phi(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1) \\ u(k-1) \end{bmatrix}.$$

$$\neq 0.$$

B2). $$\hat{\theta}^T(k) = [a_1(k-1)\ \ b_1(k-1)\ \ c_1(k-1)].$$

$$\varepsilon^*(k-1) = [\,y(k-2)\ \ u(k-1)\ \ \varepsilon(k-1)\,].$$

$$\phi^T(c) = \begin{bmatrix} \cancel{y(-1)} & \cancel{u(0)} & \cancel{\varepsilon(0)} \\ \cancel{y(0)} & \cancel{u(1)} & \cancel{\varepsilon(1)} \\ y(1) & y(2) & \varepsilon(2) \\ y(2) & y(3) & \varepsilon(3) \\ y(3) & y(4) & \varepsilon(4) \end{bmatrix} \qquad y(k) = \begin{bmatrix} \cancel{y(1)} \\ \cancel{y(2)} \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon(2) = y(2) - \hat{\theta}^T(2)\,\phi^T(2).$$

$$\varepsilon(3) = y(3) - \hat{\theta}^T(3)\,\phi^T(3)$$

$$\varepsilon(4) = y(4) - \hat{\theta}^T(4)\,\phi(4)$$

...rtie sur l'hor... (...1; −0.92);

Test de Blancheur.

Théoriquement $\begin{cases} RN(0) = 1 & R(0) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^2(k) \\ R(i) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \varepsilon(k)\varepsilon(k-i) \\ RN(i) = \frac{R(i)}{R(0)} \end{cases}$

pratiquement $\begin{cases} RN(0) = 1. \\ |RN(i)| \leq 0{,}15 \div 0{,}17 \end{cases}$

$$R(0) = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{4} \varepsilon^2(k).$$

$$= \frac{1}{3} \left[\varepsilon^2(2) + \varepsilon^2(3) + \varepsilon^2(4) \right]$$

$$\varepsilon(2) = y - \hat{y}(2) = y(2) - \hat{\theta}^T(2) \varphi^T(2)$$

$$= -0{,}92 - \begin{bmatrix} 2{,}21 & 28{,}96 & 2493{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}01 \\ -1 \\ 0{,}01 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon(2) = 3{,}124$$

$$\varepsilon(3) = y(3) - \hat{y}(3) = y(3) - \hat{\theta}^T(3) \varphi^T(3)$$

$$= 1{,}57 - \begin{bmatrix} 2{,}21 & 28{,}96 & 2493{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}92 \\ 1 \\ -0{,}0126 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon(3) = 1{,}99.$$

$$\varepsilon(4) = y(4) - \hat{\theta}^T(4) \varphi^T(4)$$

$$= -0{,}26 - \begin{bmatrix} 2{,}21 & 28{,}96 & 2493{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}57 \\ 1 \\ -0{,}0108 \end{bmatrix}$$

$$= -5{,}78$$

$$R(0) = \cancel{\frac{1}{3}} \; 15{,}19.$$

$$R(1) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=2}^{4} \varepsilon(k)\varepsilon(k-1)$$

$$= \frac{1}{3} \left[\varepsilon(2)\varepsilon(1) + \varepsilon(3)\varepsilon(2) + \varepsilon(4)\varepsilon(3) \right].$$

$$R(2) = \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{4} \varepsilon(k)\varepsilon(k-2).$$

$$= \frac{1}{3} \left[\varepsilon(2)\varepsilon(0) + \varepsilon(3)\varepsilon(1) + \varepsilon(4)\varepsilon(2) \right]$$