6. Réponses temporelles d'un système du second ordre

6.1. Définition

Les systèmes du second ordre sont régis par des équations différentielles linéaires à coefficients constants du 2ème ordre, de type :

$$B_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + B_1 \frac{dy(t)}{dt} + B_0 y(t) = \begin{cases} A_0 u(t) \\ A_0 \int_0^t u(t)dt \\ A_0 \frac{du(t)}{dt} \end{cases}$$

Leurs fonctions de transfert seront de type :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{A_0}{B_2 p^2 + B_1 p + B_0} . \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{p} \\ p \end{cases}$$

Le comportement du système sera extrêmement différent suivant que le degré qui figure au dénominateur aura des racines réelles ou imaginaires.

On introduit les paramètres suivants :

- Gain statique : $K = \dfrac{A_0}{B_0}$ c'est le rapport ***y(t)/u(t)*** en régime statique :

$$\left(\frac{dy(t)}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2} = 0 \right)$$

- Pulsation propre non amortie (ou naturelle) : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{B_0}{B_2}}$ rad/s

- Facteur d'amortissement (sans dimension) : $\xi = \dfrac{B_1}{2\sqrt{B_0 B_1}}$

La fonction de transfert s'écrit en fonction des paramètres ainsi définis :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{\dfrac{1}{\omega_0^2}p^2 + \dfrac{2\xi}{\omega_0}p + 1} \cdot \begin{cases} 1 \\ \dfrac{1}{p} \\ p \end{cases}$$

Un système du deuxième ordre sans zéro se rencontre dans la littérature sous trois formes classiques équivalentes:

Forme 1	Forme 2	Forme 3
$G(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{K}{T^2p^2+2\xi Tp+1}$	$G(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{K\omega_0^2}{p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2}$	$G(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{K\left(a^2+\omega_p^2\right)}{(p+a)^2+\omega_p{}^2}$

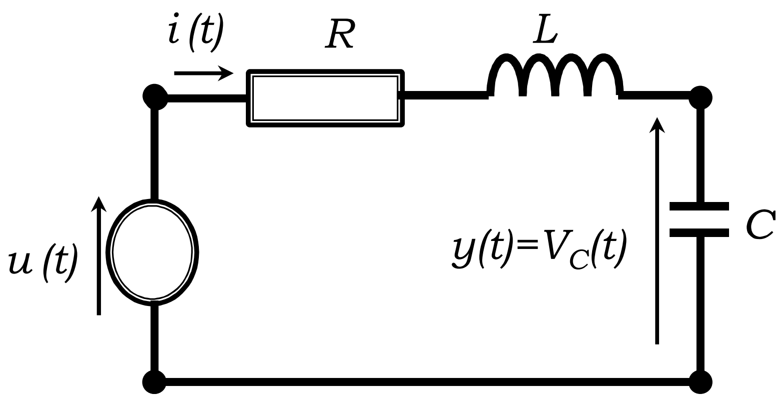
où

- ***K :*** Gain statique
- ***ξ :*** Coefficient d'amortissement
- ***T :*** Constante de temps équivalente
- ***ω_0 :*** Pulsation propre (ou naturelle) non amortie
- ***ω_p :*** Pulsation propre amortie ou Pseudo-Pulsation

- On limite l'étude au cas où $\xi \geq 0$ pour lequel le système est stable.
- Le passage d'une forme à l'autre peut être assuré par les relations suivantes :

$$\omega_0=\frac{1}{T};\quad a=\xi\omega_0;\quad \omega_p=\omega_0\sqrt{1-\xi^2}=\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$$

6.2. Exemple : Circuit RLC



- Entrée : $u(t)$
- Sortie : $y(t)=V_C(t)$

La loi des mailles donne :

or

d'où

$\mathfrak{L}$

$$H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=$$

$$H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=$$

$$H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{K\omega_0^2}{p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2}$$

avec

$\omega_0 =$; $\xi =$; $K =$

Prenons le cas : $H(p) = \dfrac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$ et étudions les différentes réponses.

- Le comportement dépend des racines de l'équation caractéristique (dénominateur de la fonction de transfert) : pôles du système.
- Ces pôles peuvent être réels distincts, réels confondus ou complexes conjugués. Ceci dépend essentiellement de la valeur du coefficient d'amortissement ξ comme l'illustre le discriminant :

$$\Delta = \qquad\qquad =$$

- **Si ξ > *1*, alors on a deux racines réels : deux pôles réels**

$$p_{1,2} =$$

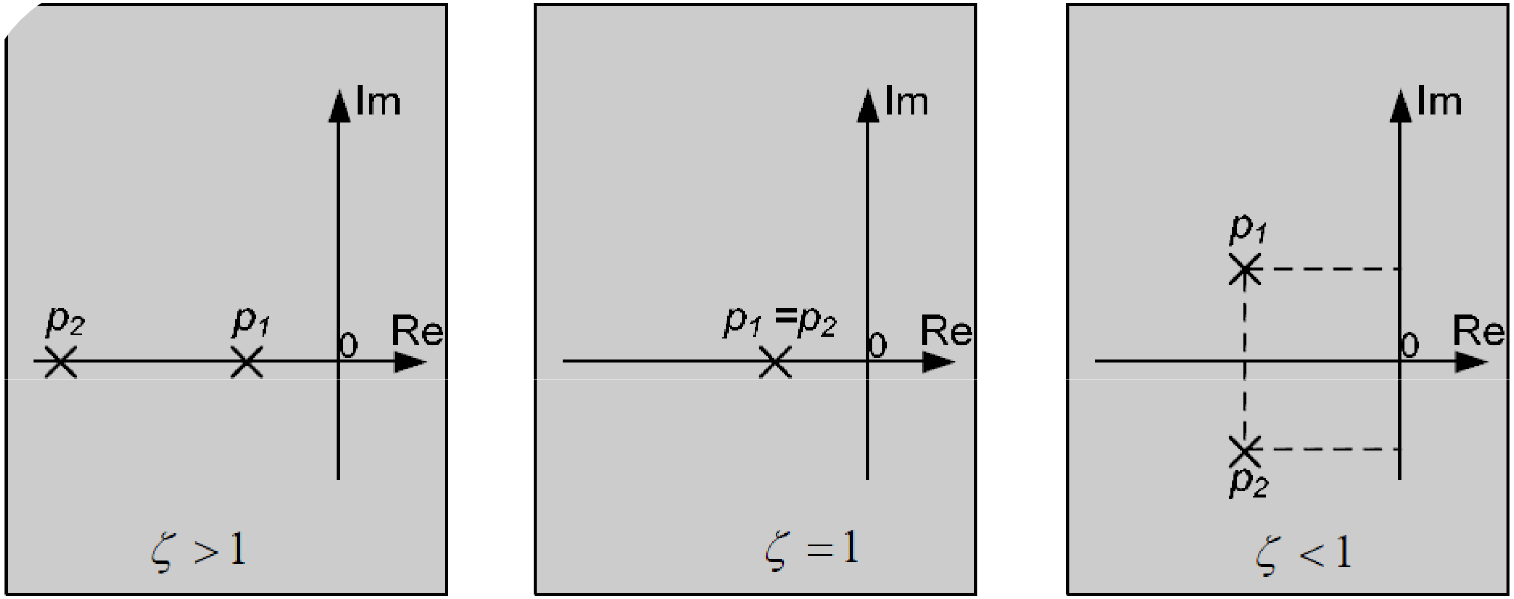
- **Si ξ =*1*, alors on a deux racines doubles : pôles doubles**

$$p =$$

- **Si 0≤ ξ <*1*, alors on a deux racines complexes : paire de pôles complexes conjugués :**

$$p_{1,2} =$$

La figure ci-dessous donne la position des pôles dans le plan complexe en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement.



Deux pôles réels négatifs

Pôle réel négatif double

Deux pôles complexes conjugués à partie réelle négative

5.3. Réponse à un échelon (*réponse indicielle*)

La réponse indicielle (à un échelon d'amplitude A), d'un système du deuxième ordre est telle que : $u(t) = A.\varepsilon(t) \quad \Leftrightarrow U(p) = \frac{A}{p}$

- La sortie du système est : $Y(p) = H(p).U(p) =$

Cas 1 : $\xi > 1 \Rightarrow$ Réponse indicielle apériodique ou sur-amortie

- La fonction de transfert admet deux pôles réels distincts :

$$p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

- La fonction de transfert peut être décomposée en deux sous-systèmes du premier ordre :

$$H(p) = \frac{K}{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} p_1 = -\dfrac{1}{\tau_1} = \\ p_2 = -\dfrac{1}{\tau_2} = \end{cases}$$

- On cherche alors à exprimer *Y(p)* sous la forme :

$$Y(p) = \frac{KA}{p(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)} = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p - p_1} + \frac{A_3}{p - p_2}$$

$$\Rightarrow \quad Y(p) =$$

- La réponse à un échelon d'amplitude ***A*** devient donc :

$$y(t) =$$

Etude de la réponse indicielle :

- ***Point de départ :*** *(théorème de la valeur initiale)*

- ***Point d'arrivée :*** *(théorème de la valeur finale)*

➢ *Tangente à l'origine :*

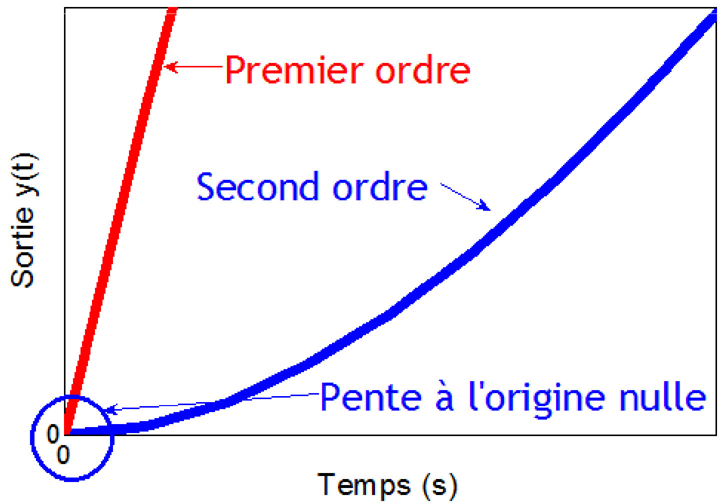
$$\dot{y}(0) = \lim_{t \to 0} \dot{y}(t) = \lim_{p \to +\infty} p\mathfrak{L}[\dot{y}(t)]$$

$$\mathfrak{L}[\dot{y}(t)] =$$

- Le théorème de la valeur initiale donne alors :

$$\dot{y}(0) =$$

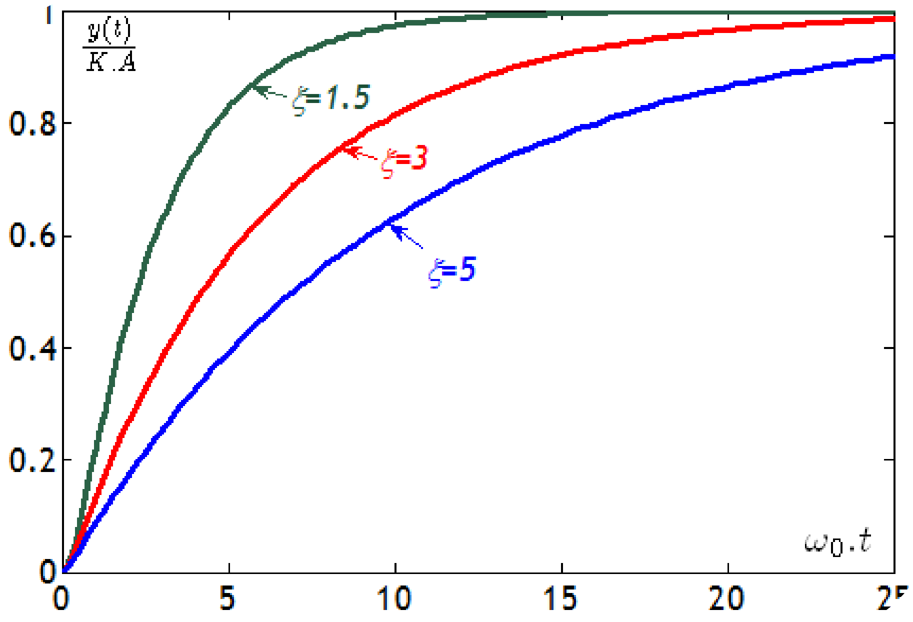
La pente à l'origine de la réponse indicielle d'un système du deuxième ordre sans zéro est toujours nulle. C'est une caractéristique intrinsèque qui permet de le différencier d'un système du premier ordre par simple observation.



➢ *Etude de la dérivée de y(t) :*

On a : $\dot{y}(t) =$ et puisque $\tau_1 > \tau_2$ alors : $\frac{1}{\tau_1} < \frac{1}{\tau_2} \Rightarrow e^{\frac{-t}{\tau_1}} > e^{\frac{-t}{\tau_2}}$

d'où quelques que soient les valeurs de τ_1 et τ_2, $\dot{y}(t) > 0$ pour $t > 0$, donc ***y(t) est monotone croissante sur*** $\mathbb{R}^+$, donc pas de dépassement. La réponse est alors qualifiée d'apériodique puisqu'elle ne présente aucun dépassement relativement à la valeur finale. Plus le facteur d'amortissement est grand, plus le temps de réponse est conséquent.

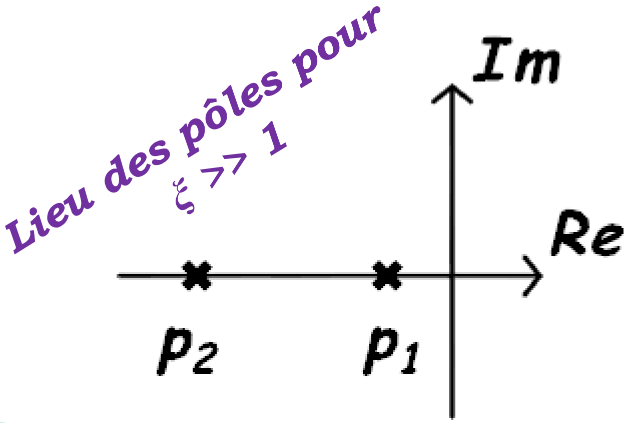


■ La réponse est, dans ce cas, très semblable à celle d'un premier ordre. La différence est remarquable à t=0: le premier ordre démarre directement avec une pente différente de zéro alors que le système du second ordre présente une pente nulle.

■ Si le coefficient d'amortissement ξ est assez grand ($\xi \gg 1$) l'un des pôles (p_1) l'emporte nettement sur l'autre (p_2) et l'on a :

$$y(t) =$$

■ On parle alors de pôle dominant, ici p_1, c'est le pôle qui a le plus d'influence sur le comportement du système (l'influence de p_2 étant comparativement négligeable). Les pôles sont représentés ci-dessous, le pôle dominant est le pôle le plus proche de l'axe imaginaire.



Cas 2 : ξ =1 $\Rightarrow$ Réponse indicielle critique

- La fonction de transfert admet un pôle multiple d'ordre 2 : $p = -\xi\omega_0 = -\dfrac{1}{\tau}$
- La fonction de transfert s'écrit alors sous la forme suivante : $H(p) = \dfrac{K}{(\tau p + 1)^2}$
- On parle d'amortissement critique, l'existence d'un pôle double modifie la décomposition en éléments simples.
- La réponse à un échelon de la forme ***u(t)=A.ε(t)*** devient:

$$y(t) =$$

Etude de *y(t)* :

- ***Point de départ :*** *(théorème de la valeur initiale)*

$$y(0) = \lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{p \to +\infty} pY(p) = 0$$

- ***Point d'arrivée :*** *(théorème de la valeur finale)*

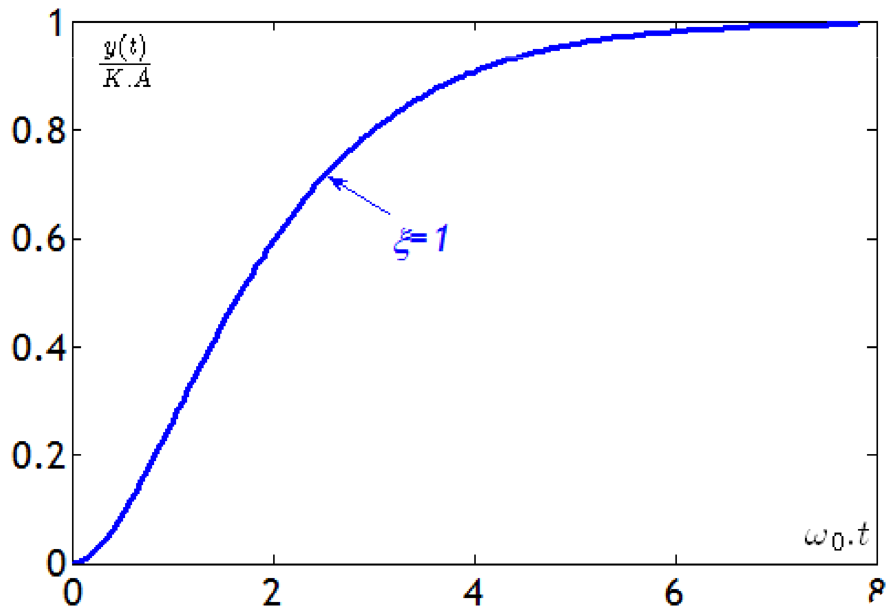
$$y(\infty) = \lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{p \to 0} pY(p) = KA$$

➤ ***Tangente à l'origine :***

$$\dot{y}(0) =$$

➤ ***Etude de la dérivée de y(t) :*** $\dot{y}(t) =$ $\Rightarrow \dot{y}(t) > 0$ pour $t > 0$

Il s'agit de la réponse apériodique la plus rapide. C'est le régime apériodique critique.



Cas 3 : ξ <1 $\Rightarrow$ Réponse indicielle oscillante amortie ou sous-amortie

- La fonction de transfert admet une paire des pôles complexes conjugués :

$$p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

- La fonction de transfert s'écrit alors sous la forme suivante :

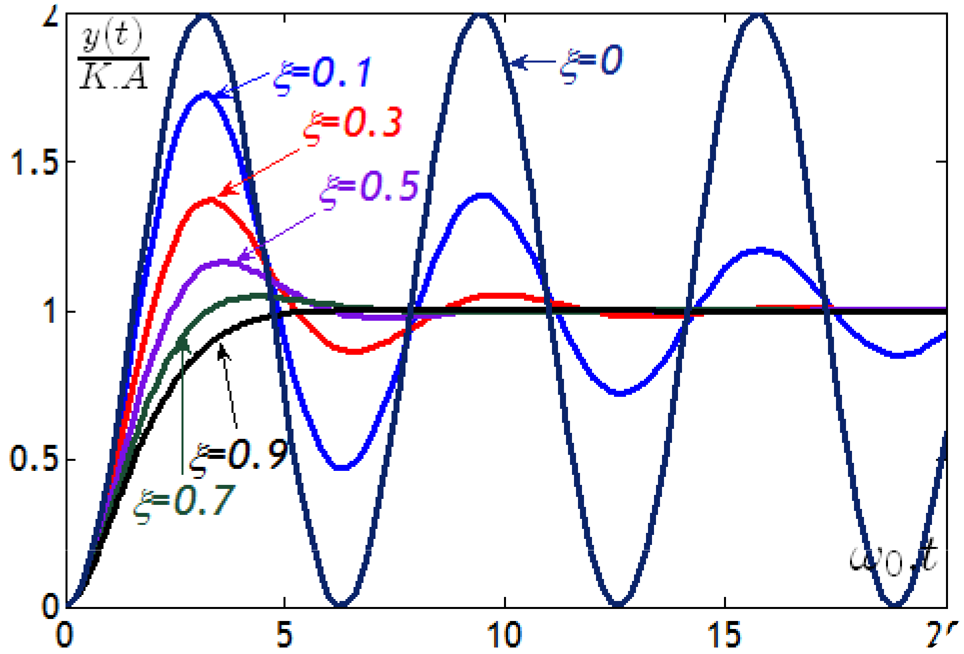
$$H(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

- *Y(p)* est de la forme (pour une entrée en échelon de la forme ***u(t)=A.ε(t)***) :

$$Y(p) = \frac{AK\omega_0^2}{p\left(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2\right)}$$

- La réponse ***y(t)*** est donnée par :

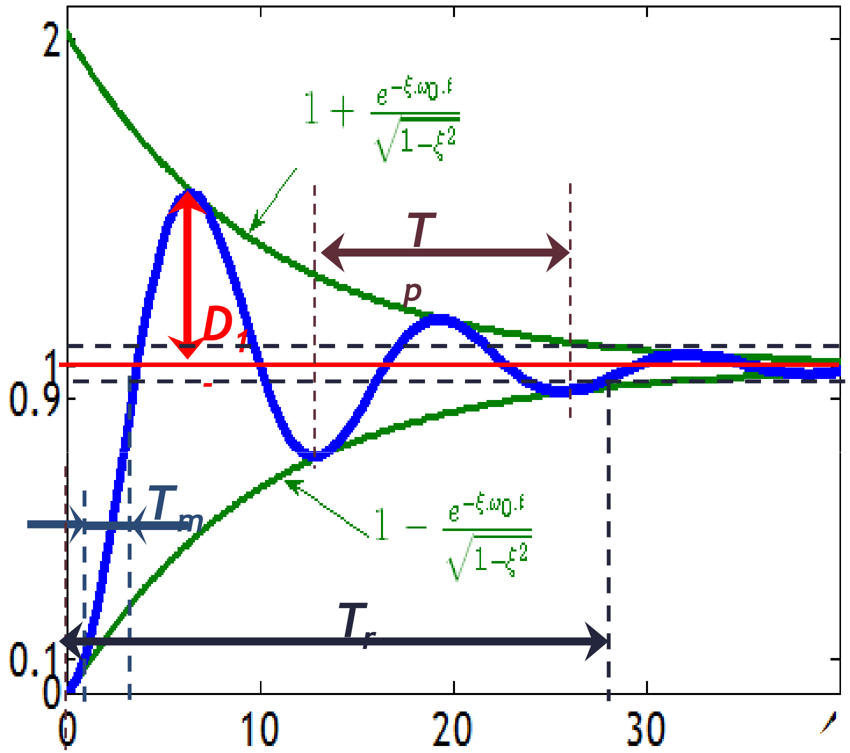
$$y(t) = \qquad\qquad\qquad avec \quad \varphi =$$



- On observe l'apparition d'oscillations autour de la valeur finale (réponse pseudopériodique), d'autant plus amorties que ξ est élevé.
- Pour ξ ***=0***, la réponse est sinusoïdale d'amplitude ***2K.A ,***

Les caractéristiques de la courbe sont :

- Courbes enveloppes : $1 \pm \dfrac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}}$
- Premier dépassement : $D_1(\%) = 100 e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$
- Pulsation propre amortie : $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$
- Période des oscillations : $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_p}$
- Temps de pic : $T_{pic} = \dfrac{\pi}{\omega_p}$
- Temps de montée : $T_m = \dfrac{1}{\omega_p}(\pi - ar\cos(\xi))$
- *Nombre d'oscillations* : $n \approx \dfrac{1}{2\xi}$
- Temps de réponse à 5% : $T_r \approx \dfrac{3}{\xi\omega_0}$
- Temps de réponse à m% $(\xi < 0.7)$: $T_{rm\%} \approx \dfrac{1}{\xi\omega_0}\ln\left(\dfrac{100}{m}\right)$



Comment choisir ω_0 et ξ ?

- Fixer Le dépassement D et le temps de montée t_m.
- Utiliser D et la figure 1 pour déduire la valeur de ξ
- Utiliser la figure 2 pour déterminer $\omega_0 t_m$
- Calculer ω_0

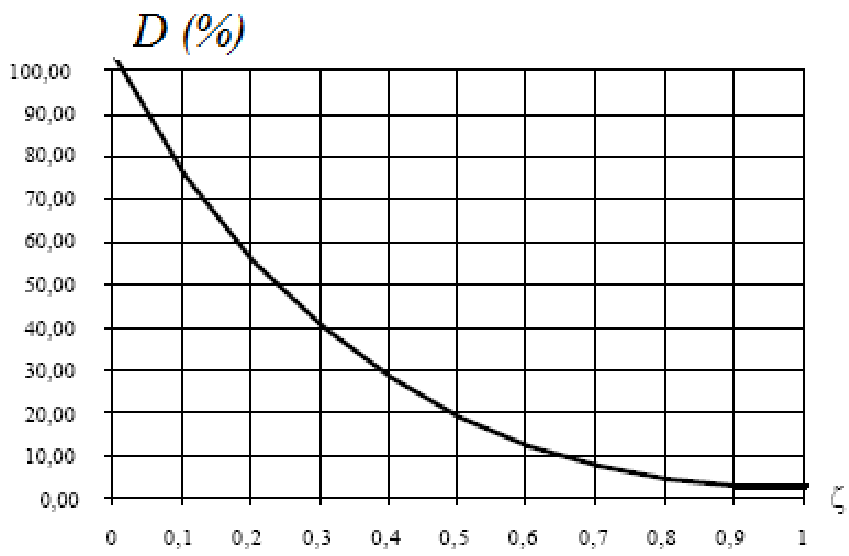


Figure 1. Dépassement en fonction de ξ

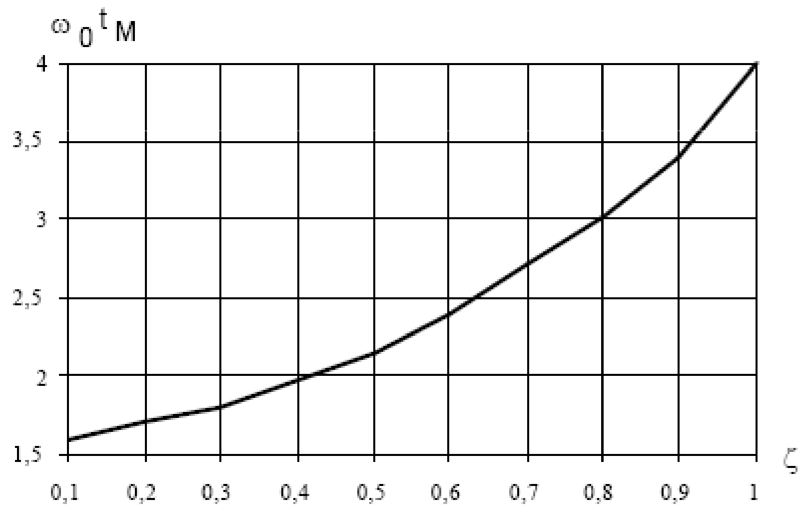


Figure 2. Temps de montée normalisé en fonction de ξ