$e^{ax} = 1 + ax$

$e^{-\tau p} = 1 - \tau p$

A.U. : 2021.2022

Travaux Dirigés : **AIP**

Exercice 1

Soit un système électrique d'équation suivante : charge de condensateur.

$$V(k) = V_0 e^{-\frac{k}{RC}}$$

L'objectif est d'estimer V_0 on donne $R=1k\Omega$, $C=1F$. On a noté sur le tableau suivant, les valeurs de $V(k)$:

k	**100**	**300**	**600**	**800**	**1000**
V(k)	9.5	7.5	5.3	2.6	3.1

1. Estimer, à l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires le paramètre V_0.
2. Estimer la variance de bruit.

Exercice 2

Soit le système décrit par le modèle suivant :

$$\left(1 + a_1(k) q^{-1}\right) y(k) = b_1(k) q^{-1} u(k) + \frac{1}{1 - c_1(k) q^{-1}} v(k)$$

y(k), u(k) et v(k) représente respectivement la sortie, l'entrée et un bruit blanc discret.

avec : $u(0)=y(0)=0.$

$\hat{a}_1(0) = \hat{b}_1(0) = 0$

$\hat{a}_1(1) = \hat{a}_1(2) = 0.3$

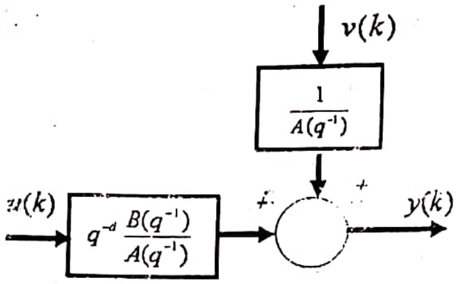
$\hat{b}_1(1) = \hat{b}_1(2) = 0.4$

1. Donner les différents estimés à l'aide de la méthode des moindres carrés généralisés et en utilisant tout les couples entrée-sortie suivant :

k	**1**	**2**	**3**	**4**
u(k)	-0.5	0.5	0.5	-0.5
y(k)	0.01	-0.45	0.75	-0.15

Exercice 3

On considère le modèle « procédé+perturbation » correspondant au schéma fonctionnel de la figure suivante :



avec

- $u(k)$ et $y(k)$ représentent respectivement l'entrée et la sortie du procédé.
- $v(k)$ est un bruit considéré blanc de moyenne nulle et de variance σ^2.
- $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{nA} q^{-nA}$ & $B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \ldots + b_{nB} q^{-nB}$

L'objectif final est d'obtenir des estimateurs non biaisés des coefficients de $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$. Au terme d'une identification structurelle, on a pu enregistrer un retard nul d=0, Quant à l'ordre de système peut être égale à 1ou 2. il ne peut être choisi définitivement qu'après un test de validation du modèle identifié.

Le tableau suivant donne la réponse du procédé lorsque l'entrée est une séquence binaire pseudo-aléatoire d'amplitude ±1.

k	$u(k)$	$y(k)$
1	-1	0
2	-1	-0.5
3	1	-1.25
4	-1	-1.02
5	1	-1.16

Partie I

1. Ecrire l'équation donnant la sortie y(k) en fonction de séquence de bruit et d'entrée.
2. Est ce que la méthode des moindres carrés récursifs peut être appliquée, dans le cas présent, pour l'identification paramétrique ? justifier votre réponse.
3. Quel est, dans ce cas, le type de test de validation du modèle identifié ? Décrire cette méthode de validation.

Partie II

Cas où n_A retenu est égale à 1 et n_B=1.

4. A l'aide de la méthode des moindres carrés ordinaires, donner le vecteur de paramètres $\hat{\theta}(4)$.
5. Par application de la méthode des moindres carrés récursifs, déduire $\hat{\theta}(5)$ et conclure.
6. Appliquer le test de validation au modèle identifié à l'instant k=4. Qu'en pensez-vous de ce modèle ?

Cas où n_A retenu est égale à 2 et n_B=1.

7. A l'aide de la méthode des moindres des carrés ordinaires. Donner le vecteur de paramètres $\hat{\theta}(4)$. On donne : $u(0)=y(0)=0$.
8. Appliquer le test de validation et discuter la validité du modèle identifié.
9. Déduire l'ordre n_A convenable pour le modèle du procédé et justifier votre choix.

Pour annuler le biais sur les paramètres estimés, un critère peut être envisagé. Ce critère est basé sur la décorrélation du vecteur d'observation Φ et de l'erreur de prédiction ε.

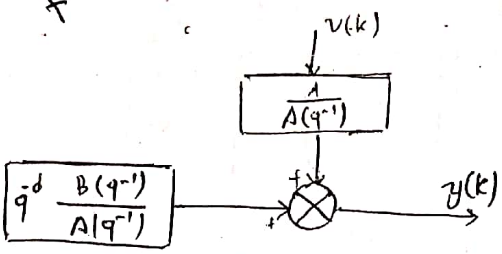
$$E\{\phi(k)\varepsilon(k)\} = 0$$

10. Expliquer le principe de méthodes associées à ce dernier critère.

TD2 :

Exercice 3 :

Exercic



1/ MCO

θ^T

$\varphi(k)$

$\hat{\theta}(k) =$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-1} + \dots + a_{n_A} q^{-n_A}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B}$$

$d = 0$

$\Phi($ 4/ $n_A = 1 \quad n_B = 1.$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1}$$

$$A(q^{-1})\, y(k) = B(q^{-1})\, u(k) + v(k).$$

$y($

$$(1 + a_1 q^{-1})\, y(k) = b_1 q^{-1} u(k) + v(k).$$

$$y(k) = -a_1\, y(k-1) + b_1\, u(k-1) + v(k).$$

ϕ · MCO = MCNR $\rightsquigarrow \hat{\theta}(4)$?

$$\theta^T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix}$$

$\hat{\theta}$

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix}$$

2/

$$\hat{\theta}(4) = \left[\phi^T(4)\, \phi(4)\right]^{-1} \phi(4)\, Y(4).$$

$$\phi(4) = \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \varphi(3) \\ \varphi(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(0) & u(0) \\ -y(1) & u(1) \\ -y(2) & u(2) \\ -y(3) & u(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0,5 & -1 \\ 1,25 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y(4) = \begin{bmatrix} \cancel{y(1)} \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -1,25 \\ -1,02 \end{bmatrix}$$

$$\phi^T(4)\, \phi(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0,6 & 1,25 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0,5 & -1 \\ 1,25 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,81 & 0,95 \\ 0,75 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(4)^T y(4) = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 & 1{,}25 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}5 \\ -1{,}25 \\ -1{,}02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}9 \\ 0{,}73 \end{bmatrix}$$

$$\left(\Phi(4)^T \Phi(4)\right)^{-1} = \frac{1}{\det} {}^T\mathrm{com}(\ )$$

$$= 0{,}2 \begin{bmatrix} 3 & -0{,}75 \\ -0{,}75 & 1{,}81 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(4) = 0{,}2 \begin{bmatrix} 3 & -0{,}75 \\ -0{,}75 & 1{,}81 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}9 \\ 0{,}73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}362 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1{,}9 \\ 0{,}73 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta}(4) = \begin{bmatrix} -1{,}24 \\ 0{,}54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1(4) \\ \hat{b}_1(4) \end{bmatrix}$$

5/

MCR $\varepsilon \longrightarrow \hat{\theta}(5)$?

$$\hat{\theta}(5) = \hat{\theta}(4) + P(5)\,\varphi^T(5)\,\varepsilon^\circ(5)$$

$$\& \quad \varepsilon^\circ(5) = y(5) - \hat{\theta}^T(4)\,\varphi^T(5).$$

$$P(5) = P(4) - \frac{P(4)\,\varepsilon^T(5)\,\varphi(5)\,P(4)}{1 + \varphi(5)\,P(4)\,\varphi^T(5)}$$

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix}$$

$$\varphi(k) = \begin{bmatrix} -y(k) & u(4) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1{,}02 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon^\circ(5) = -1{,}16 - \begin{bmatrix} -1{,}24 & 0{,}54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}02 \\ -1 \end{bmatrix} = 0{,}64.$$

$$\varphi(5)\,P(4)\,\varphi^T(5) = \begin{bmatrix} 1{,}02 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}6 & -0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}362 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}02 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}75 & -1{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}02 \\ -1 \end{bmatrix} = 1{,}29$$

TD2 : X4

Exercice 1 :

$$V(k) = V_0 \, e^{-\frac{k}{RC}}$$

$$(5) \cdot \Psi(5)\, P(4) = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,15 \\ -0,15 & 8,362 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,02 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,02 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 & -0,15 \\ -0,15 & 8,362 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,76 \\ -0,51 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,76 & -0,51 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,57 & -0,38 \\ -0,78 & 0,26 \end{bmatrix}$$

$$P(5) = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,15 \\ -0,15 & 0,362 \end{bmatrix} - \frac{1}{229} \begin{bmatrix} 0,57 & -0,38 \\ -0,38 & 0,26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}$$

TD2 : X4

Exercice 1 :

$$V(k) = V_0 \, e^{-\frac{k}{RC}}$$

1/ MCO = MCNR $\rightarrow \hat{\theta} = V_0$?

$\theta^T = V_0$

$\varphi(k) = e^{-\frac{k}{RC}}$

$$\hat{\theta}(k) = \left[(\Phi^T(5)\, \Phi(5)\right]^{-1} \Phi^T(5)\, Y(5)$$

$$\Phi(5) = \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \varphi(3) \\ \varphi(4) \\ \varphi(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{100}{1000}} \\ e^{-\frac{300}{1000}} \\ e^{-\frac{500}{1000}} \\ e^{-\frac{600}{1000}} \\ e^{-\frac{1000}{1000}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,74 \\ 0,54 \\ 0,44 \\ 0,36 \end{bmatrix}$$

$$y(5) = \begin{bmatrix} V(1) \\ V(2) \\ V(3) \\ V(4) \\ V(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,5 \\ 7,5 \\ 5,3 \\ 2,6 \\ 3,5 \end{bmatrix} \; ; \; \theta^T(5)\, \Phi(5) = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,74 & 0,54 & 0,44 & 0,36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,74 \\ 0,54 \\ 0,44 \\ 0,36 \end{bmatrix} = 1,97$$

$$\Phi^T(5)\, Y(5) = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,74 & 0,54 & 0,44 & 0,36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9,5 \\ 7,5 \\ 5,3 \\ 2,6 \\ 3,1 \end{bmatrix} = 19,22$$

$$\hat{\theta}(5) = \frac{1}{1,97} \times 19,22 = 9,75 \text{ V}.$$

2/ $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} e^2(i) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} e^2(i) = \frac{1}{5}\left[e^2(1) + e^2(2) + e^2(3) + e^2(4) + e^2(5)\right].$

$e(1) = y(1) - \hat{y}(1) = y(1) - \hat{\theta}^T(5)\varphi^T(1).$

$e(2) = y(2) - \hat{y}(2) = y(2) - \hat{\theta}^T(5)\varphi^T(2).$

$e(3) = y(3) - \hat{y}(3) = y(3) - \hat{\theta}^T(5)\varphi^T(3).$

$e(4) = y(4) - \hat{\theta}^T(5)\varphi^T(4).$

$e(5) = y(5) - \hat{\theta}^T(5)\varphi^T(4).$

$e(1) = 9,5 - 9,75 \times 0,9 = 0,72.$

$e(2) = 7,5 - 9,75 \times 0,74 = 0,28$

$e(3) = 5,3 - 9,75 \times 0,54 = 0,03$

$e(4) = 2,6 - 9,75 \times 0,44 = -1,69$

$e(5) = 3,1 - 9,75 \times 0,36 = -0,41.$

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}\left[(0{,}72)^2 + (0{,}28)^2 + (0{,}03)^2 + (1{,}69)^2 + (-0{,}41)^2\right] = 0{,}72$$

Exercice 2 :

$$(1 + a_1(k)\,q^{-1})\,y(k) = b_1(k)\,q^{-1}\,u(k) + \frac{1}{1 - C(k)\,q^{-1}}\,v(k).$$

$$A(q^{-1})\,y(k) = B(q^{-1})\,u(k) + \frac{1}{C(q^{-1})}\,v(k).$$

on pose
$$\beta(k) = \frac{1}{C(q^{-1})}\,v(k).$$

$$\beta(k) = \frac{1}{1 - C_1(k)\,q^{-1}}\,v(k).$$

$$(1 - C_1(k)\,q^{-1})\,\beta(k) = v(k).$$

$$\beta(k) - C_1(k-1)\,\beta(k-1) = v(k).$$

$$\boxed{\beta(k) = C_1(k-1)\,\beta(k-1) + v(k).}$$

$$(1 + a_1(k)\,q^{-1})\,y(k) = b_1(k)\,q^{-1}\,u(k) + \beta(k).$$

$$y(k) + a_1(k-1)\,y(k-1) = b_1(k-1)\,u(k-1) + \beta(k).$$

$$y(k) = -a_1(k-1)\,y(k-1) + b_1(k-1)\,u(k-1) + \beta(k).$$

$$y(k) = -a_1(k-1)\,y(k-1) + b_1(k-1)\,u(k-1) + C_1(k-1)\,\beta(k-1) + v(k).$$

objectif :
$$\theta^T = [a_1 \;\; b_1 \;\; c_1].$$

$$\varphi(k) = [-y(k-1) \;\; u(k-1) \;\; \beta(k-1)].$$

TD 2 :

...ercice 2 :

$$y(k) = -a_1(k-1)\,y(k-1) + b_1(k-1)\,u(k-1) + v(k) + c_1(k-1)\,\beta(k-1)$$

Objectif $\theta^T = [a_1 \ b_1 \ c_1]$

$$\varphi = [-y(k-1) \quad u(k-1) \quad \beta(k-1)].$$

1/ MCG

$$\theta(4) = [\phi^T(4)\,\phi(4)]^{-1}\,\phi^T(4)\,Y(4)$$

$$\phi(4) = \begin{bmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \varphi(3) \\ \varphi(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(0) & \omega(0) & \beta(0) \\ -y(1) & \omega(1) & \beta(1) \\ -y(2) & \omega(2) & \beta(2) \\ -y(3) & \omega(3) & \beta(3) \end{bmatrix}$$

$$\beta(2) = y(2) + a(1)\,y(1) - b_1(1)\,u(1)$$
$$= -0{,}45 + 0{,}3 \times 0{,}01 - 0{,}4 \times (-0{,}5) = -0{,}24.$$

$$\beta(3) = y(3) + a(2)\,y(2) - b_1(2)\,u(2)$$
$$= 0{,}75 + 0{,}3 \times (0{,}45) - 0{,}4 \times 0{,}5.$$
$$= 0{,}41.$$

$$\phi(4) = \begin{bmatrix} -0{,}01 & -0{,}5 & 0{,}001 \\ 0{,}45 & 0{,}5 & -0{,}24 \\ -0{,}75 & 0{,}5 & 0{,}41 \end{bmatrix}$$

$$\phi^T(4)\,\phi(4) = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0{,}45 & -0{,}75 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}01 & -0{,}25 & 0{,}41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}01 & -0{,}5 & 0{,}01 \\ 0{,}45 & 0{,}5 & -0{,}25 \\ -0{,}75 & 0{,}5 & 0{,}41 \end{bmatrix}$$

$$Y(4) = \begin{bmatrix} y(2) \\ y(3) \\ y(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}45 \\ 0{,}75 \\ -0{,}15 \end{bmatrix}$$

$$\phi^T(4)\, y(4) = \begin{bmatrix} -0{,}01 & 0{,}45 & -0{,}75 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}01 & -0{,}04 & 0{,}41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}45 \\ 0{,}75 \\ -0{,}15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}52 \\ 0{,}027 \end{bmatrix}$$

$$\phi^T(4)\, \phi(4) = \begin{bmatrix} 0{,}72 & -0{,}14 & -0{,}41 \\ -0{,}14 & 0{,}75 & 0{,}08 \\ 0{,}41 & 0{,}08 & 0{,}22 \end{bmatrix}$$

On a posé $\beta(k) = \dfrac{1}{C(q^{-1})} v(k)$

$$y(k) = -a_1(k-1)\, y(k-1) + b_1(k-1)\, u(k) + \beta(k). \quad (*)$$

$$\beta(k) = y(k) + a_1(k-1)\, y(k-1) - b_1(k-1)\, u(k-1) \quad (*)'$$

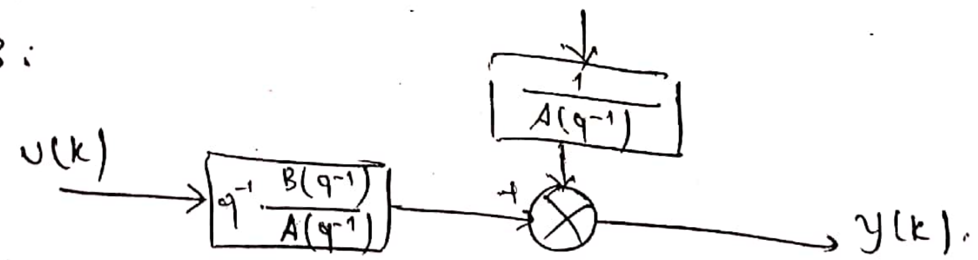
$$\beta(0) = y(0) + a_1(-1)\, y(-1) - b_1(-1)\, u(-1).$$

$$\beta(1) = y(1) + a_1(0)\, y(0) - b_1(0)\, u(0).$$

$$= 0{,}01 + 0 \times 0 - 0 \times 0$$

$$= 0{,}01.$$

Exercice 3 :



$$y(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{1}{A(q^{-1})} v(k).$$

$$\begin{cases} A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_A} q^{-n_A} \\ B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_B} q^{-n_B} \\ d = 0. \end{cases}$$

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(k) + \frac{1}{A(q^{-1})} v(k). \quad (\pi)$$

DoPe (2)

$$A(q^{-1})\,y(k) = B(q^{-1})\,u(k) + v(k).$$

2/ Oui on peut appliquer la methode de MCR car c'est une methode basée sur le blanchissement de l'erreur et donne des estimations non biaisés (ss erreurs) uniquement pour le modele procédé + p

3/ Test de blancheur :

$RN(0) = 1$ $\qquad R(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^2(k)$

somme

~~Rf! $RN(1)\,\Sigma\,\varepsilon(k).\varepsilon(k-1)$~~ $\quad i \geq 1$

$RN(i) = \dfrac{R(i)}{R(0)} \quad i \geq 1\,;$

$RN(i) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \varepsilon(k)\,\varepsilon(k-i).$

* Test de blancheur :

$RN(0) = 1$

theoreme : $|RN(i)| = 0$

Test de blancheur :