



Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès
Département de Génie Electrique-Automatique

Analyse des Processus

Première Année Génie Electrique-Automatique

Kamel ABDERRAHIM
Professeur en Génie Electrique
Ecole Nationale d'ingénieurs de Gabès

Zeineb LASSOUED
Maître-Assistante en Génie Electrique
Ecole Nationale d'ingénieurs de Gabès

Module : Analyse des Processus Première Année Génie Electrique- Automatique

Objectif

Ce cours présente les études d'analyse et de commande des systèmes linéaires continus et échantillonnés à l'aide d'une approche d'état.

Programme

- Chapitre 1. Généralités sur les systèmes dynamiques
- Chapitre 2. Représentation d'état des systèmes linéaires continus
- Chapitre 3. Représentation d'état des systèmes linéaires échantillonnés
- Chapitre 4. Commandabilité et observabilité
- Chapitre 5. Commande par retour d'état

Volume horaire

Cours : 20 H - Travaux Dirigés : 10 H

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques

- 1.1. Introduction
- 1.2. Système
- 1.3. Modélisation
- 1.4. Classes de systèmes
- 1.5. Propriétés des systèmes
- 1.6. Conditions initiales
- 1.7. Représentation de modèles
- 1.8. Représentation d'état
- 1.9. Conclusion

1.1. Introduction

Ce chapitre présente un rappel des quelques notions de base de la modélisation des systèmes dynamiques qui est indispensable pour l'étude et l'analyse des systèmes par approche d'état; à savoir :

- Principales définitions et propriétés des systèmes dynamiques.
- Modélisation dynamique.
- Classes de systèmes dynamiques.
- Propriétés des systèmes dynamiques.
- Représentations des systèmes dynamiques (temporelle, fréquentielle et d'état).
- Représentation d'état.

1.2. Système (1/7)

1.2.1. Définition

Un **système** est un ensemble d'éléments interagissant entre eux selon certains principes ou règles.

Exemples

- **Engineering** : Système électrique ou mécanique (*Appareillage formé de divers éléments et assurant une fonction déterminée*).
- **Informatique** : Système d'exploitation (*logiciel assurant la gestion du fonctionnement d'un ordinateur*).
- **Mathématiques** : Système d'équations (*ensemble d'équations qui doivent être satisfaites simultanément*).
- **Météorologie** : Système nuageux (*ensemble des différents types de nuages qui accompagnent une perturbation complète*).
- **Economie** : Système économique (*mode d'organisation général des institutions qui régit l'activité économique : le système libéral, le système socialiste*).
- etc.

Remarques

En analysant ces exemples, on peut tirer les remarques suivantes :

- La notion de système est large, pour ne pas dire vague. Le seul point commun entre le système électrique, le système d'équations ou le système solaire est, justement, le mot **système**, c'est-à-dire un ensemble d'éléments.
- Les systèmes peuvent être de natures différentes. On parle par exemple de système:
 - **Vivant** : Colonie de souris blanches (système pour un biologiste).
 - **Matériel** : perceuse électrique, avion (système pour un ingénieur).
 - **Abstrait** : Algorithme qui s'exécute dans un ordinateur (système pour un informaticien).
 - **Organisationnel** : Interaction entre des lois, des produits et des individus (système pour un juriste ou un économiste).

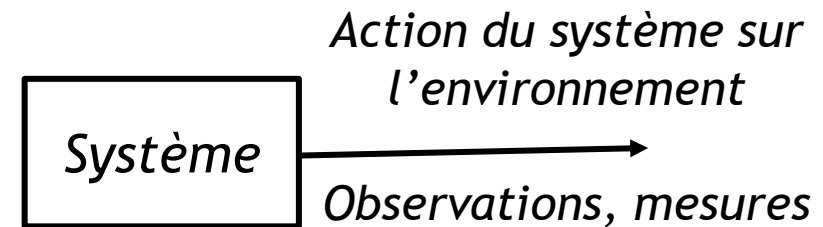
1.2. Système (3/7)

1.2.2. Interaction avec l'environnement

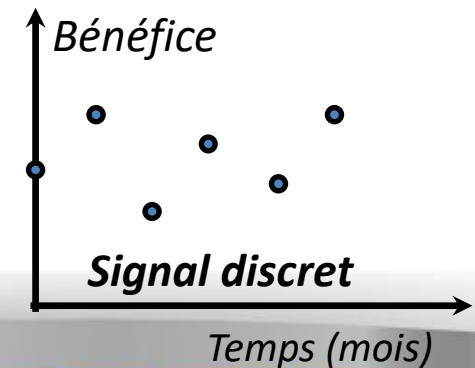
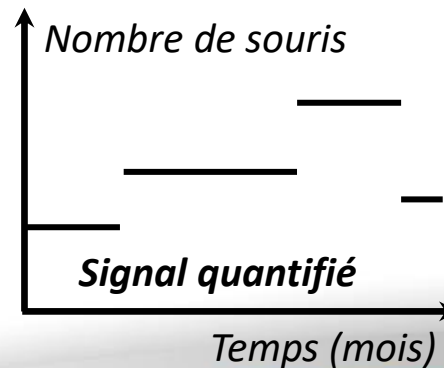
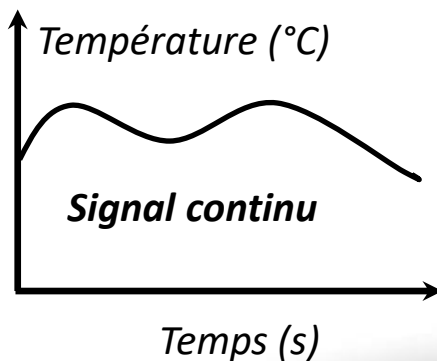
L'interaction du système avec son environnement est assurée par les entrées, les sorties et les perturbations.

• Sorties

- Les **Sorties** sont les actions du système sur l'environnement et les grandeurs observées ou mesurées.



- Une suite d'observations réalisées au cours du temps constitue un signal temporel qui peut être continu, quantifié ou discret.



1.2.1. Interaction avec l'environnement

• Entrées

- Un système peut être influencé par un apport d'énergie, de matière ou d'information.
- Ces actions extérieures, le plus souvent souhaitables et ajustables, qui agissent sur le système sont appelées **Entrées**.

*Influence de l'environnement
sur le système*

Actions, Excitation



Système

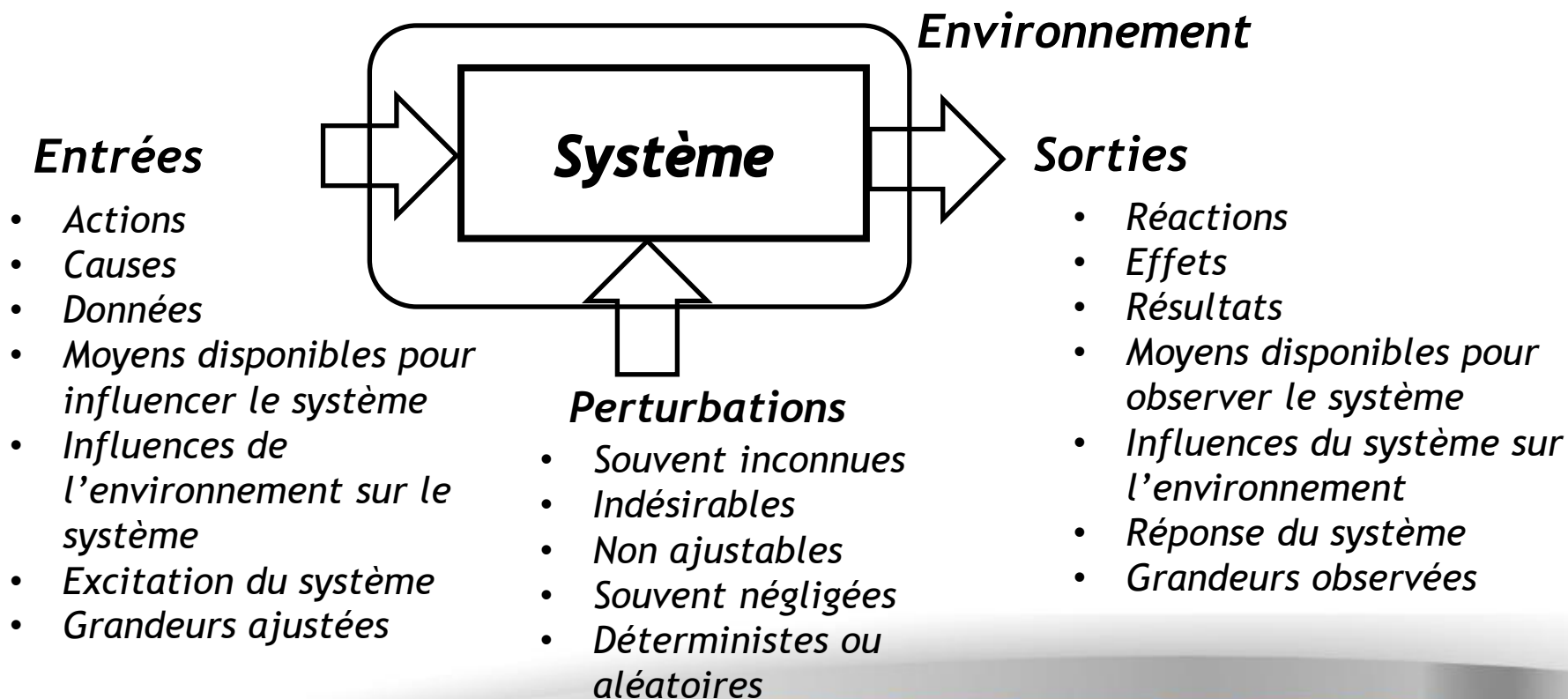
• Perturbations

- Les **perturbations**, comme les entrées, sont des actions qui s'exercent sur le système.
- Contrairement aux entrées, les perturbations sont généralement inconnues, non ajustables et présentent souvent un caractère imprévisible (aléatoire).
- Des actions connues mais négligées peuvent également être considérées comme des perturbations. Ce sont des grandeurs qui influencent le système mais que l'observateur ne peut pas ou ne veut pas ajuster.

1.2.2. Interaction avec l'environnement

- **Structure générale d'un système**

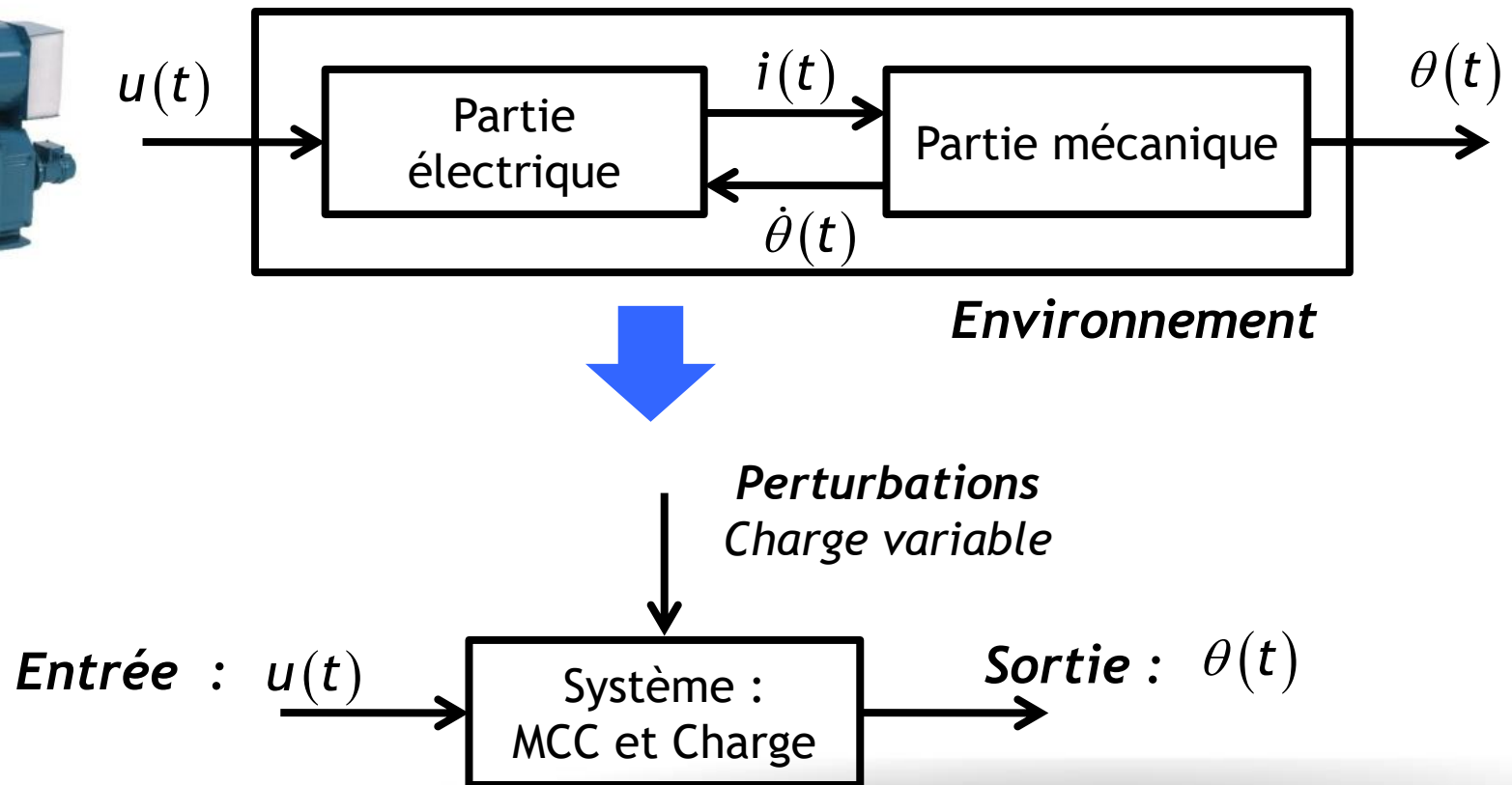
Les différentes interactions d'un système avec son environnement sont représentées sur la figure suivante:



1.2.2. Interaction avec l'environnement

• Exemple

Moteur à courant continu à excitation séparée couplé à une charge

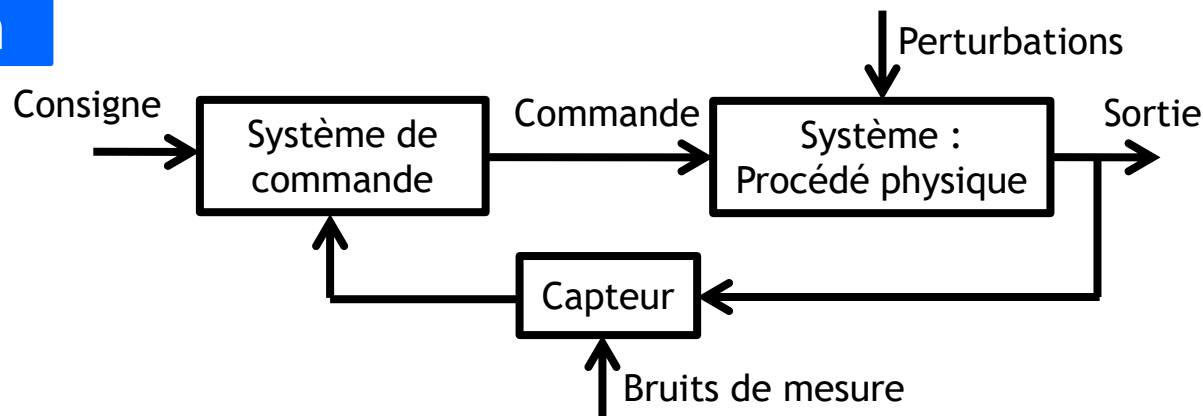


1.2.3. Problématique principale de l'automatique

Problème

Maintenir la sortie du procédé à commander au voisinage de la consigne indépendamment des perturbations qui affectent le fonctionnement du procédé.

Solution



Pour résoudre ce problème, on peut suivre la démarche suivante :

- **Etape 1** : Modélisation du procédé à commander.
- **Etape 2** : Synthèse du système de commande (Régulateur) permettant d'obtenir les performances désirées en boucle fermée (stabilité, précision et rapidité).
- **Etape 3** : Mettre en œuvre le système de commande.

1.3. Modélisation dynamique (1/3)

1.3.1 Définition

La modélisation dynamique est une opération permettant de construire le modèle d'évolution d'un système dans le temps ainsi que la séquence de ses opérations.

Remarques

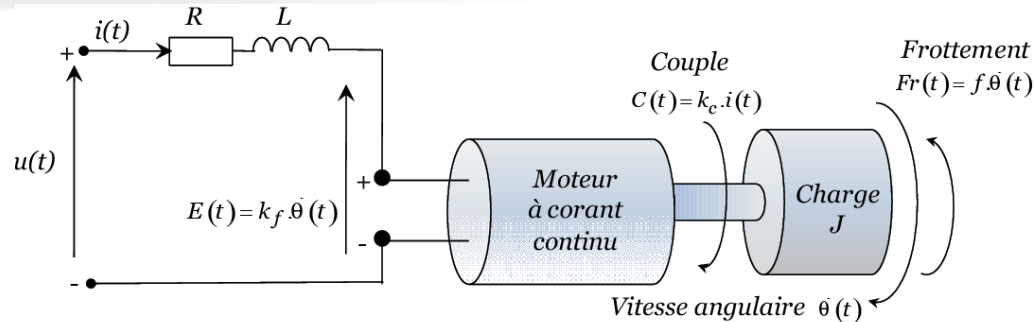
- La modélisation se traduit donc par une relation mathématique entre les variables d'entrée, les variables de sortie, les variables internes et les paramètres du système à modéliser.
- La forme générale de modèle mathématique d'un système peut être comme suit :

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = f_1(y_1(t), \dots, y_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), \theta(t), P(t), t) \\ \dot{y}_2(t) = f_2(y_1(t), \dots, y_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), \theta(t), P(t), t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) = f_n(y_1(t), \dots, y_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), \theta(t), P(t), t) \end{cases}$$

Sorties **Entrées** **Variables internes** **Paramètres**

1.3. Modélisation dynamique (2/3)

Exemple Moteur à courant continu à excitation séparée couplé à une charge



Lois utilisées

▪ **Equation électrique :**

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K_f \cdot \dot{\theta}(t)$$

▪ **Equation mécanique :**

$$J \cdot \ddot{\theta}(t) = K_c \cdot i(t) - f \cdot \dot{\theta}(t)$$

Modèle mathématique du système

$$L \cdot J \cdot \frac{d^3 \theta(t)}{dt^3} + (R \cdot J + L \cdot f) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + (R \cdot f + K_f \cdot K_c) \frac{d\theta(t)}{dt} = K_c \cdot u(t)$$

1.3. Modélisation dynamique (3/3)

▪ Objectifs de la modélisation

- ❑ La modélisation des systèmes dynamiques joue un rôle essentiel aussi bien dans les sciences de l'ingénieur que dans de nombreux domaines comme la météorologie, l'économie, l'écologie, la médecine, etc.
- ❑ Un modèle mathématique peut être utilisé à différentes fins :
 - Etude/Prédiction du comportement d'un système sous l'effet de diverses consignes ou perturbations (variations de paramètres, bruits de capteurs et des actionneurs, etc.)
 - Conception d'un système de commande : la plupart des méthodes modernes de synthèse de correcteurs reposent sur l'utilisation d'un modèle du système à commander.
 - Détection des anomalies et détection des pannes.
 - Formation d'un opérateur (simulation).
 - Détermination des grandeurs pour lesquelles aucune mesure n'est disponible.

1.4. Classes de systèmes (1/6)

Les systèmes, tout comme leurs modèles, peuvent être de natures fort diverses. On les distingue selon les caractéristiques suivantes :

- Dynamique ou Statique
- Monovariable ou Multivariable
- Déterministe ou Stochastique
- Paramètres localisés ou Paramètres repartis
- Paramétrique ou Non Paramétrique
- Continu ou Echantillonné (discret)

1.4. Classes de systèmes (2/6)

1.4.1. Dynamique / Statique

- Un système est **dynamique** si son comportement à un instant donné dépend non seulement des entrées présentes mais aussi des entrées passées. On dit qu'un système dynamique a de la mémoire ou de l'inertie.
- Un système dynamique est le plus souvent décrit par :
 - une ou plusieurs *équations différentielles* :

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t); \quad x(t_0) = 3$$

- une ou plusieurs *équations aux différences* :

$$x(k+1) = -2x(k) + u(k); \quad x(k_0) = 5$$

- une ou plusieurs *équations algébriques avec un décalage temporel*:

$$x(t) = u(t - \tau); \quad \tau \neq 0$$

1.4. Classes de systèmes (3/6)

- Dans un système **statique**, l'état et la sortie à un instant donné ne dépendent que de l'entrée à cet instant.
- La relation entre l'entrée et la sortie est alors donnée par une ou plusieurs *équations algébriques*.
- *Si un système statique n'a pas de mémoire, cela ne veut pas dire qu'il n'évolue pas avec le temps. On considère, par exemple, la sortie $y(t)$ du système statique suivant:*

$$y(t) = 2u(t)$$

On remarque bien que la sortie $y(t)$ évolue proportionnellement avec l'évolution de son entrée $u(t)$.

1.4. Classes de systèmes (4/6)

1.4.2. Monovariable / Multivariable

- Un système monovariable est un système qui possède une seule entrée et une seule sortie.
- Un système multivariable est un système qui possède plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties qui sont liées entre elles par des interactions.

1.4.3. Déterministe / Stochastique

- Les systèmes déterministes sont des systèmes régis par des lois mathématiques bien connues (équation différentielle ou intégrale-différentielle, équation aux dérivées partielles, etc.), on peut donc prévoir exactement l'évolution de ces systèmes dans le temps.
- Les systèmes stochastiques (ou aléatoires) évoluent comme leur nom l'indique au hasard dans tout l'espace sans qu'aucune équation ne les régie, sans qu'aucune prévision exacte soit possible dans le temps.

1.4. Classes de systèmes (5/6)

1.4.4. Paramètres localisés / Paramètres distribués

- Les systèmes à paramètres localisés sont des systèmes pour lesquels il est possible d'isoler des éléments purs du système comme :
 - les résistances, les capacités et les inductances dans les systèmes électriques;
 - les masses, les ressorts et les amortisseurs dans les systèmes mécaniques.

Ces systèmes sont représentés par des équations différentielles ordinaires indiquant une dépendance temporelle uniquement.

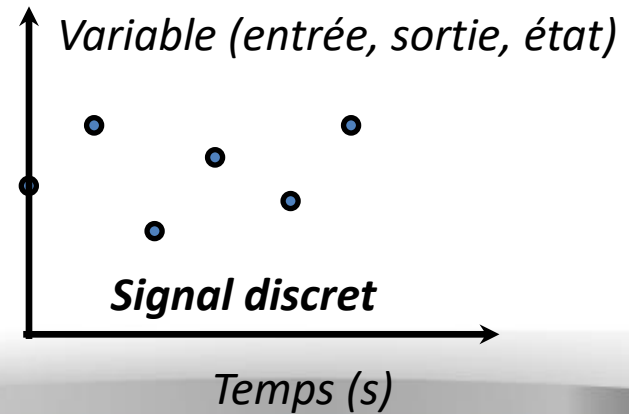
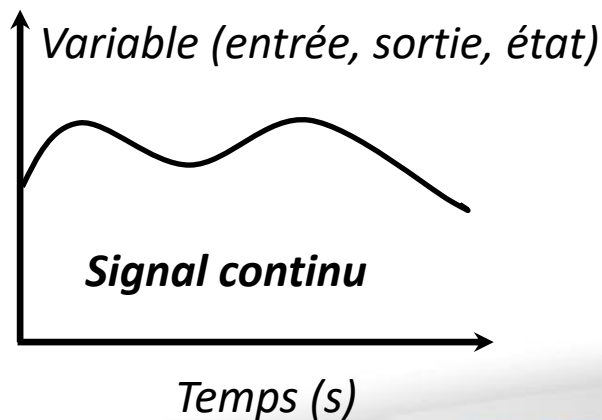
- Les systèmes à paramètres distribués sont des systèmes pour lesquels il n'est pas possible d'isoler des éléments purs du système comme:
 - l'écoulement d'un fluide dans une longue tuyauterie,
 - la propagation d'une onde électrique dans une ligne, etc.

Ces systèmes sont représentés par des équations aux dérivées partielles indiquant deux dépendances temporelle et spatiale,

1.4. Classes de systèmes (6/6)

1.4.5. Continu / Échantillonné

- Un système continu est un système pour lesquels **toutes ses variables (entrées, sorties, états)** sont présentes à tout instant c'est-à-dire leur évolution dans le temps est définie par un signal continu au sens mathématique.
- Un système échantillonné (ou discret) est un système pour lesquels **au moins une variable (entrée, sortie, état)** n'est pas disponible à tout instant. (entrées, sorties, états) c'est-à-dire elle est définie à des instants particuliers par un signal échantillonné.



1.5. Propriétés des systèmes (1/3)

1.5.1. Linéaire / Non Linéaire

- Un système est linéaire s'il obéit au principe de superposition défini par les deux propriétés: **additivité** et **homogénéité**.
- Les systèmes qui ne vérifient pas le principe de superposition sont appelés systèmes non linéaires.

Principe de superposition

Toute fonction f définie sur un espace vectoriel V est appelée fonctionnelle.

- Une fonctionnelle f est dite *additive* si pour tout $x \in V$ et pour tout $y \in V$, on a $f(x+y)=f(x)+f(y)$,
- Une fonctionnelle f est dite *homogène*, si pour tout $x \in V$ et pour tout réel a on a $f(a.x)= a .f(x)$.
- Une fonctionnelle additive et homogène est dite linéaire.
- La combinaison des deux propriétés d'additivité et d'homogénéité est connue sous le nom de *principe de superposition* :

$$f(a.x+B.y)=a.f(x)+B.f(y),$$

1.5. Propriétés des systèmes (2/3)

1.5.2. Stationnaire / Non Stationnaire

- Un système est dit stationnaire (ou invariant) si tous ses paramètres sont constants par rapport au temps.
 - Les entrées et sorties peuvent varier, mais les paramètres physiques du système restent constants.
 - On dit aussi qu'un système stationnaire ne vieillit pas. Il se comportera plus tard de la même façon que maintenant.
- Dans le cas contraire, on parle d'un système non stationnaire (ou évolutif).
- Pour une même réalité physique (processus), l'ingénieur peut choisir d'écrire un modèle stationnaire ou non stationnaire.

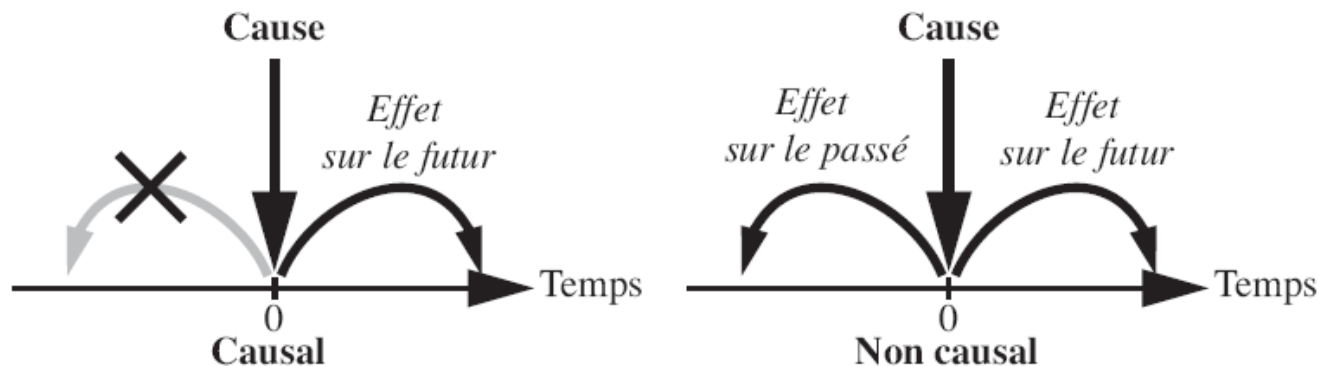
Exemple : Fusée

Par exemple, pour modéliser une fusée dont les réservoirs de carburant se vident durant le vol, il peut écrire un modèle non stationnaire avec le paramètre masse variant en fonction temps. Mais, il peut également décider d'écrire un bilan de masse pour la fusée, auquel cas la masse sera une variable d'état et les paramètres du modèle seront constants. Dans ce cas, le modèle dynamique comportera plus d'équations mais sera stationnaire.

1.5. Propriétés des systèmes (3/3)

1.5.3. Causalité

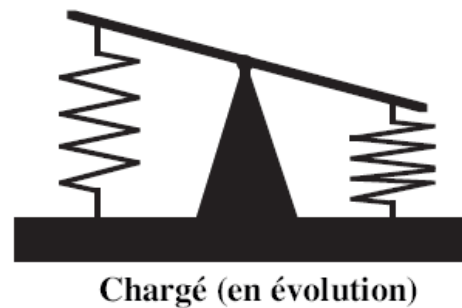
- Un système **causal** est un système dont l'avenir ne dépend que des entrées passées ou présentes.
- Dans un système causal, la réponse à une excitation ne précède pas l'excitation elle-même.



- Il existe une distinction conceptuelle entre ce qui est avant et ce qui vient après.
- Tous les systèmes physiques évoluant en temps réel sont causals, l'effet ne pouvant en effet pas précéder la cause.

1.6. Conditions initiales (1/2)

- L'évolution d'un système dynamique peut dépendre des entrées passées. Ceci est justifié par le fait qu'un système dynamique a de la mémoire.
- Il est donc important de spécifier si au début de l'expérience le système est relâché (au repos) ou alors chargé (en évolution).
- Un système dynamique est au repos à un instant donné s'il est relâché à cet instant, c'est-à-dire qu'il se trouve dans un état d'équilibre.
- En l'absence d'excitation extérieure, un système stationnaire au repos n'évolue pas. Ses mémoires sont vides. Dans le cas contraire, on dit que le système est chargé



**Subit toujours l'effet
des entrées passées**

1.6. Conditions initiales (2/2)

Exemple

Soit le système dynamique donné par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y}(t) = -2y(t) + u(t); \quad y(0) = y_0$$

Calculons le point d'équilibre \underline{y} (pour lequel la dérivée est nulle) correspondant à l'entrée constante :

$$0 = -2\underline{y} + \underline{u} \Rightarrow \underline{y} = \frac{1}{2}\underline{u}$$

- Pour l'entrée constante $\underline{u} = 0$, on aura $\underline{y} = 0$ et donc le système dynamique sera initialement au repos si $y_0 = 0$.
- Pour une autre entrée constante, par exemple $\underline{u} = 2$, on aura $\underline{y} = 1$ et donc le système dynamique sera initialement au repos si $y_0 = 1$.
- On voit donc que pour $u(0) = \underline{u}$ et $y(0) = \underline{y}$, on aura $\dot{y}(0) = 0$ et le système dynamique sera initialement au repos.

1.7. Représentation des modèles (1/6)

On distingue:

- Représentation temporelle
- Représentation fréquentielle
- Représentation d'état

1.7.1. Représentation temporelle

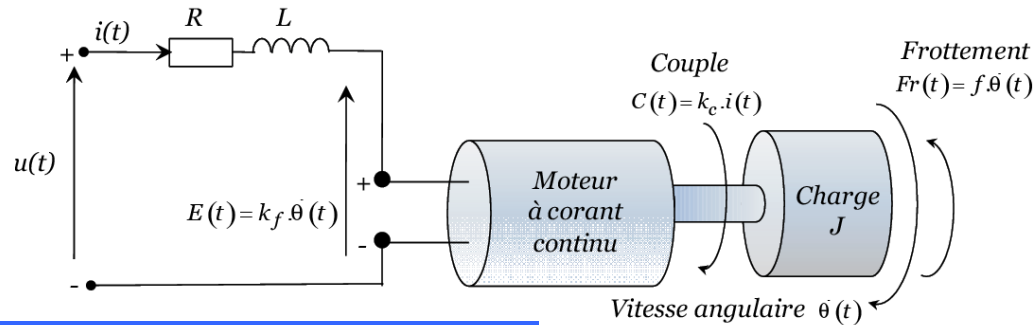
Les systèmes dynamiques linéaires peuvent être étudiés dans le domaine temporel par un certain nombre de techniques classiques.

Les méthodes les plus couramment utilisées reposent sur :

- les équations différentielles
- la réponse impulsionnelle.

1.7. Représentation des modèles (2/6)

Exemple : Moteur à courant continu à excitation séparée couplé à une charge



Lois utilisées

▪ **Equation électrique :**

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K_f \cdot \dot{\theta}(t)$$

▪ **Equation mécanique :**

$$J \cdot \ddot{\theta}(t) = K_c \cdot i(t) - f \cdot \dot{\theta}(t)$$

Modèle mathématique du système

$$L \cdot J \cdot \frac{d^3 \theta(t)}{dt^3} + (R \cdot J + L \cdot f) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + (R \cdot f + K_f \cdot K_c) \frac{d\theta(t)}{dt} = K_c \cdot u(t)$$

1.7. Représentation des modèles (3/6)

1.7.2. Représentation fréquentielle

- Les méthodes temporelles posent des problèmes lors de l'étude de systèmes complexes: non linéaires, non stationnaires, multivariables, etc.
- Ces problèmes ont été résolus par le développement des méthodes de transformation (transformée de Laplace et Fourier).
- Les méthodes de transformation conduisent à une représentation par fonction de transfert.
- L'utilité de cette transformation a été démontrée pour l'étude de la stabilité et la réponse fréquentielle.

Exemple 1 : Moteur à courant continu à excitation séparée couplé à une charge

$$L.J.\frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + (R.J + L.f)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + (R.f + K_f.K_c)\frac{d\theta(t)}{dt} = K_c.u(t) : \text{Equation différentielle}$$



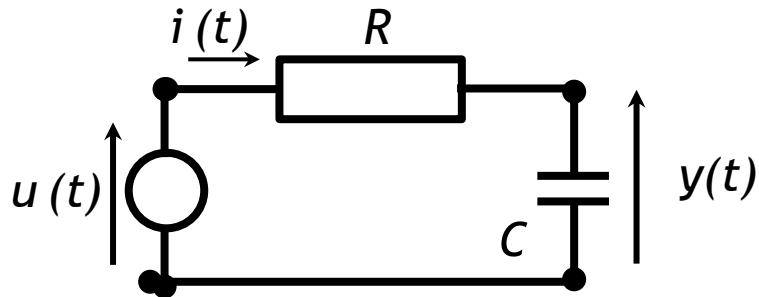
Transformée de Laplace

$$H(p) = \frac{\Theta(p)}{U(p)} = \frac{K_c}{L.J.p^3 + (R.J + L.f).p^2 + (R.f + K_f.K_c)p}$$

: Fonction de transfert

1.7.2. Représentation fréquentielle

Exemple 2. Circuit RC



- Loi des mailles:

$$u(t) = R.i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = 0$$

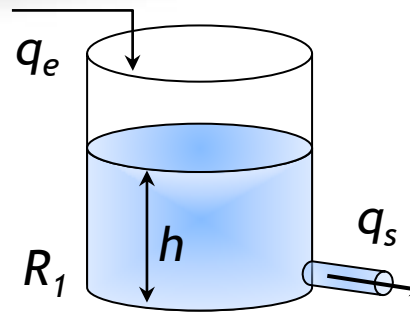
- Transformée de Laplace:

$$U(p) = \left\{ R + \frac{1}{Cp} \right\} I(p)$$

- Or: $y(t) = \frac{1}{C} \int i(t) .dt \Rightarrow I(p) = C.p.Y(p)$

- D'où :
$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{RCp + 1}$$

Exemple 3. Régulation de niveau



- ρ : Masse volumique [kg/m^3]
- V : Volume [m^3]
- q_e, q_s : débits [m^3/s]
- S : Section [m^2]
- H : Hauteur[m]

- Le bilan de masse de ce système donne:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d(S.\rho.h(t))}{dt} = \rho.q_e(t) - \rho.q_s(t)$$

où S et ρ sont deux constantes et

$$q_s(t) = \alpha.h(t)$$

- Ceci donne : $S \frac{dh(t)}{dt} = q_e(t) - \alpha.h(t)$

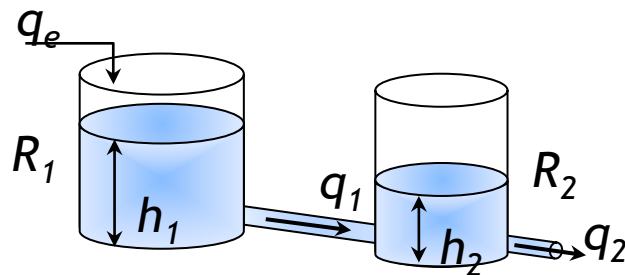
$$\frac{H(p)}{Q_e(p)} = \frac{1}{S.p + \alpha}$$

1.7. Représentation des modèles (5/6)

Remarques

- ❑ L'un des inconvénients majeurs de cette approche (méthodes de transformation) est de supposer les conditions initiales nulles. Ces conditions initiales jouent cependant un rôle important dans l'étude des systèmes dans le domaine temporel où la solution dépend beaucoup du passé du système.

Exemple



On suppose que les niveaux dans les deux réservoirs sont nuls. Cette hypothèse est loin d'être réalisable dans la pratique.

- ❑ Un autre inconvénient de cette approche est qu'elle peut conduire à une compensation d'un pôle instable par un zéro.

Exemple

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t)$$

$$H(p) = \frac{(p-1)}{(p+2)(p-1)} = \frac{1}{(p+2)}$$

A red curved arrow points from the transfer function $H(p)$ to the differential equation above it.

1.7. Représentation des modèles (6/6)

1.7.3. Représentation d'état

- La représentation par vecteur d'état permet de surmonter ces problèmes et d'unifier le cadre de l'étude des systèmes dynamiques continus ou discrets.
- L'analyse par variables d'état est une approche moderne d'étude des systèmes née dans les années 60 du siècle précédent.
- L'idée de base des représentations d'état est que le futur d'un système dépend de son passé, de son présent et de ses entrées : le futur peut alors décrit à partir d'un ensemble de variables bien choisies.
- Parmi les domaines d'application de cette théorie, l'automatique prend une place dominante : les représentations d'état sont à l'origine de méthodes puissantes d'analyse et de commande des systèmes facilement adaptables aux calculateurs numériques.
- Un des points forts de la représentation d'état est leur adaptabilité au cas des systèmes non-linéaires, non stationnaires, multivariables aussi bien dans le cas continu que dans le cas échantillonné (discret).

1.8. Représentation d'état (1/8)

Etat

- L'état d'un système rassemble toutes ses grandeurs internes susceptibles d'évoluer au cours du temps que ce soit sous l'effet d'une commande ou d'une perturbation.
- Le comportement d'un système dynamique dépend fortement de l'état dans lequel il se retrouve.
- Le choix des grandeurs qui caractérisent l'état n'est pas unique.

Définition

L'état d'un système à un instant donné quelconque est l'information minimale qui permet, *si les entrées sont connues à l'instant donné et pour les valeurs du temps suivantes*, la détermination unique des sorties à l'instant donné et pour les valeurs du temps suivantes.

1.8. Représentation d'état (2/8)

Remarques

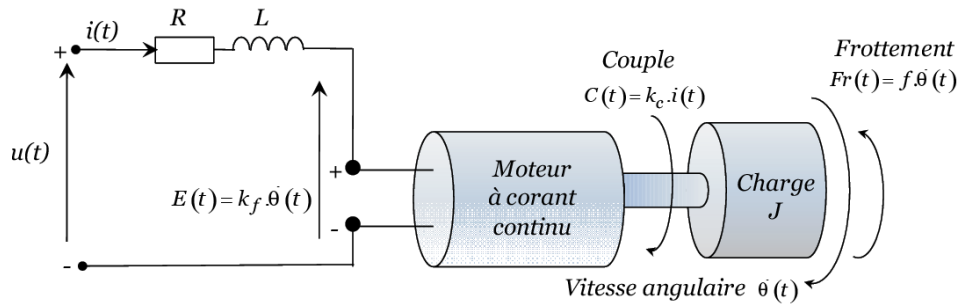
- L'état d'un système est l'information résumant parfaitement le passé du système puisqu'elle fixe toute évolution future si les entrées sont connues.
- L'état d'un système est supposé fini et défini par un vecteur $X(t)$ de dimension n appelé vecteur d'état:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

- Les éléments $x_1(t)$, $x_2(t)$, \dots , et $x_n(t)$ du vecteur d'état sont appelés variables d'état.
- n représente l'ordre du système.

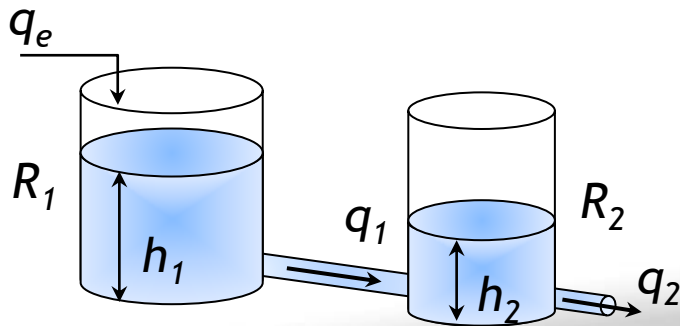
1.8. Représentation d'état (3/8)

Exemple 1 Moteur à courant continu à excitation séparée couplé à une charge



$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) = i(t) \\ x_2(t) = \dot{\theta}(t) \\ x_3(t) = \theta(t) \end{bmatrix}$$

Exemple 2 Régulation de niveau dans deux réservoirs



$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) = h_1(t) \\ x_2(t) = h_2(t) \end{bmatrix}$$

1.8. Représentation d'état (4/8)

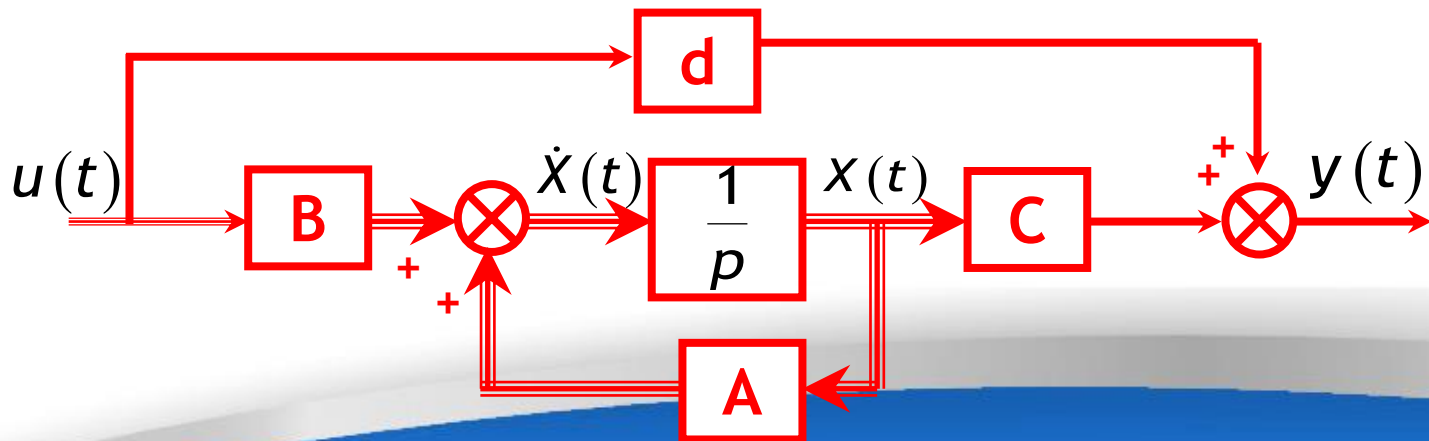
Modèle d'état linéaire continu

La représentation d'état d'un système linéaire stationnaire continu monovariable caractérisé par n variables d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) & : \text{Equation d'état} \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) & : \text{Equation de sortie} \end{cases}$$

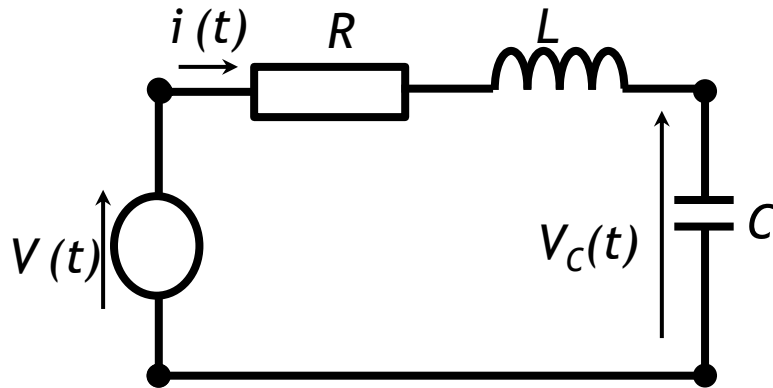
où

- A : matrice d'évolution de dimension $(n \times n)$
- B : vecteur de commande de dimension $(n \times 1)$: *vecteur colonne*
- C : vecteur de sortie de dimension $(1 \times n)$: *vecteur ligne*
- d : coefficient (scalaire) de transfert direct



1.8. Représentation d'état (5/8)

Exemple 1 : Circuit RLC:



$$\blacksquare -V(t) + L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = 0$$

$$\Leftrightarrow -V(t) + L\dot{x}_1(t) + Rx_1(t) + x_2(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}V(t)$$

$$\blacksquare V_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dV_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$$

$$\Leftrightarrow \dot{x}_2(t) = \frac{x_1(t)}{C}$$

Déterminer une représentation d'état de circuit suivant :

Entrée $V(t)$ et Sortie $V_C(t)$

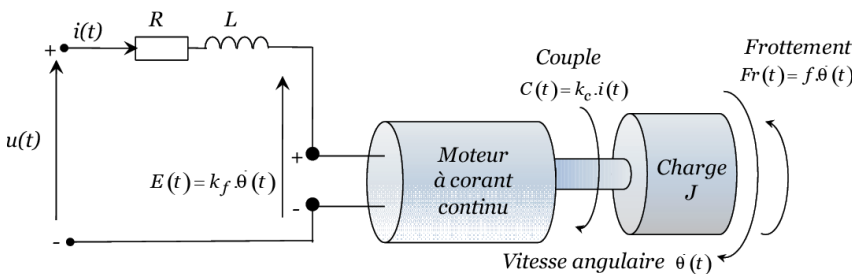
Variables d'état:

- x_1 : Courant traversant L
- x_2 : tension aux bornes C

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \quad 1] X(t) \end{cases}$$

1.8. Représentation d'état (6/8)

Exemple 2 : MCC



Lois utilisées

Equation électrique :

$$u(t) = R.i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + K_f.\dot{\theta}(t)$$

Equation mécanique :

$$J.\ddot{\theta}(t) = K_c.i(t) - f.\dot{\theta}(t)$$

On pose

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) = \dot{\theta}(t) \\ x_2(t) = i(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) = \frac{d\dot{\theta}(t)}{dt} = \ddot{\theta}(t) = \frac{1}{J}(K_c.x_2(t) - f.x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}(u(t) - R.x_2(t) - K_f.x_1(t)) \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{f}{J} & \frac{K_c}{J} \\ -\frac{K_f}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] X(t) \end{cases}$$

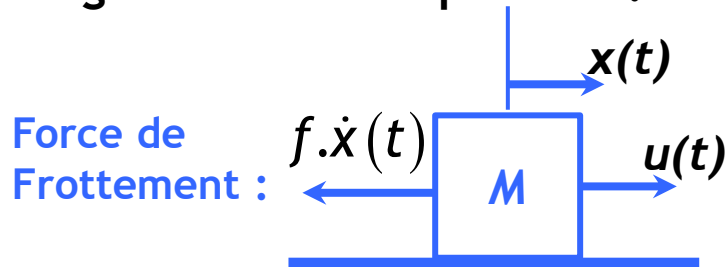
1.8. Représentation d'état (7/8)

Exemple 3 : Système mécanique



Soit le système mécanique constitué d'un chariot de masse M . Le mouvement est limité par le frottement visqueux. Une force u agit horizontalement sur le chariot.

Diagramme des corps libres:



Loi de Newton:

$$u(t) - f.\dot{x}(t) = M.\ddot{x}(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{f}{M}.\dot{x}(t) = \frac{u(t)}{M}$$

Représentation d'état:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) = x(t) \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) \end{bmatrix}$$

Position

Vitesse

d'où

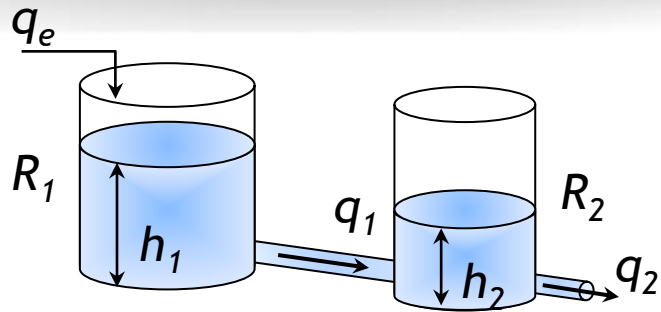
$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{f}{M}x_2 + \frac{u}{M} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f}{M} \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] X(t) \end{cases}$$

1.8. Représentation d'état (8/8)

Exemple 4 : Système hydraulique



- q_e : débit d'alimentation : Entrée
- q_1, q_2 : débits de sortie de R_1 et R_2
- h_1, h_2 : hauteurs du liquide dans R_1
- S_1, S_2 : sections de R_1 et R_2 .
- V_1, V_2 : volumes du liquide dans R_1 et R_2 .

Le bilan de masse de ce processus donne :

$$\begin{cases} \frac{dV_1(t)}{dt} = q_e(t) - q_1(t) \\ \frac{dV_2(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} V_1(t) &= S_1 \cdot h_1(t); & q_1(t) &= \alpha_1 \cdot h_1(t) \\ V_2(t) &= S_2 \cdot h_2(t); & q_2(t) &= \alpha_2 \cdot h_2(t) \end{aligned}$$

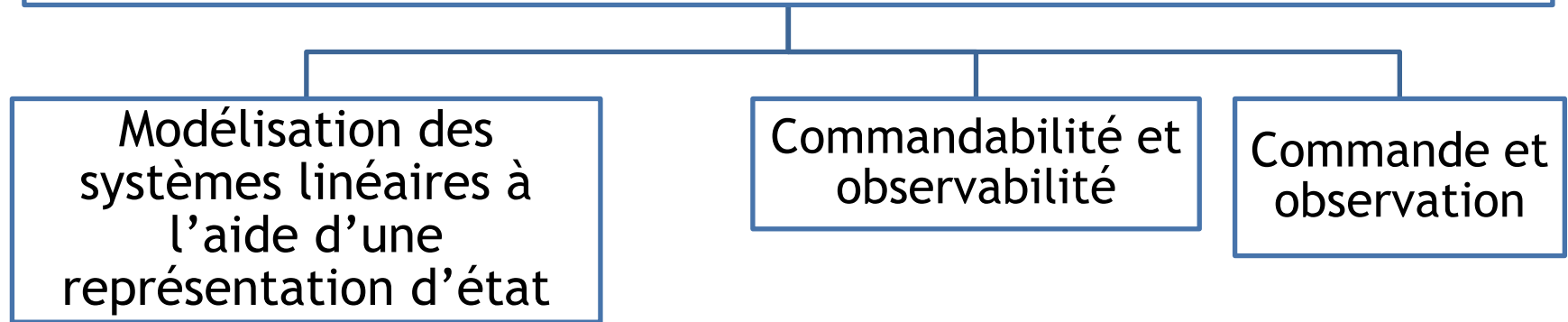
$$\begin{cases} S_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_e(t) - \alpha_1 h_1(t) \\ S_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = \alpha_1 h_1(t) - \alpha_2 h_2(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dh_1(t)}{dt} = -\frac{\alpha_1}{S_1} h_1(t) + \frac{1}{S_1} q_e(t) \\ \frac{dh_2(t)}{dt} = \frac{\alpha_1}{S_2} h_1(t) - \frac{\alpha_2}{S_2} h_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{S_1} & 0 \\ \frac{\alpha_1}{S_2} & -\frac{\alpha_2}{S_2} \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \quad 1] X(t) \end{cases}$$

1.9. Conclusion

Ce cours présente les études d'analyse et de synthèse des systèmes linéaires continus et échantillonnés à l'aide d'une approche d'état.



On considère essentiellement les systèmes linéaires monovariables stationnaires continus et échantillonnés

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(k+1) = F.X(k) + G.u(k) \\ y(k) = H.X(k) + E.u(k) \end{cases}$$

Chapitre 2

Représentation d'état des systèmes linéaires continus

2.1. Introduction

2.2. Pluralité de la représentation d'état

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.4. Passage d'une équation différentielle vers une représentation d'état

2.5. Passage d'une représentation d'état vers une fonction de transfert

2.6. Récapitulatif de passage entre les différentes représentations

2.7. Résolution de l'équation d'état

2.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la modélisation des systèmes linéaires continus stationnaires monovariables à l'aide d'une représentation d'état:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$$

On met l'accent essentiellement sur les points suivants :

- Pluralité de la représentation d'état.
- Réalisation d'une représentation d'état à partir d'une fonction de transfert en considérant essentiellement les formes suivantes :
 - la forme canonique de commandabilité,
 - la forme canonique d'observabilité,
 - la forme de Jordan (ou modale).
- Passage d'une équation différentielle vers la représentation d'état.
- Passage d'une représentation d'état vers la fonction de transfert.
- Résolution de l'équation d'état.

2.2.Pluralité de la représentation d'état

- La représentation d'état d'un système linéaire continu stationnaire monovariable est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases} \quad \text{1}$$

- On effectue le changement de base dans l'espace d'état défini par :

$$X(t) = T.Z(t)$$

où T est une matrice carrée régulière et $Z(t)$ est un autre vecteur d'état.

- La représentation d'état **1** devient :

$$\begin{cases} T.\dot{Z}(t) = A.T.Z(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.T.Z(t) + d.u(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{Z}(t) = T^{-1}.A.T.Z(t) + T^{-1}.B.u(t) \\ y(t) = C.T.Z(t) + d.u(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{Z}(t) = \bar{A}.Z(t) + \bar{B}.u(t) \\ y(t) = \bar{C}.Z(t) + \bar{d}.u(t) \end{cases} \quad \text{2}$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{A} &= T^{-1}.A.T, & \bar{B} &= T^{-1}.B, \\ \bar{C} &= C.T, & \bar{d} &= d \end{aligned}$$

Les deux représentations **1 et **2** sont équivalentes en se basant sur la définition suivante.**

2.2.Pluralité de la représentation d'état

Définition

Soient deux systèmes S_1 et S_2 définis par les représentations d'état suivantes :

$$S_1 : \begin{cases} \dot{X}_1(t) = A_1.X_1(t) + B_1.u(t) \\ y_1(t) = C_1.X_1(t) + d_1.u(t) \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} \dot{X}_2(t) = A_2.X_2(t) + B_2.u(t) \\ y_2(t) = C_2.X_2(t) + d_2.u(t) \end{cases}$$

Le premier système S_1 est dit **équivalent** au deuxième système S_2 si il existe une matrice régulière T , telle que:

$$A_2 = T^{-1}.A_1.T; \quad B_2 = T^{-1}.B_1; \quad C_2 = C_1.T; \quad d_2 = d_1$$

- Par ailleurs, deux systèmes équivalents vérifient les deux points suivants:
 - Les états des deux systèmes sont liés par la relation :

$$X_1(t) = T.X_2(t)$$

- Ils génèrent la même sortie $y_1(t)=y_2(t)$ en réponse à une même entrée $u(t)$ et aux mêmes conditions initiales $X_1(t_0)=T.X_2(t_0)$

2.2.Pluralité de la représentation d'état

Remarques

- Le résultat précédent montre bien que la représentation d'état est plurielle c'est-à-dire un système donné peut être défini par une *infinité de représentations d'état*.
- Toutes ces représentations sont équivalentes. Elles sont liées par de transformations de la forme :

$$X(t) = T.Z(t)$$

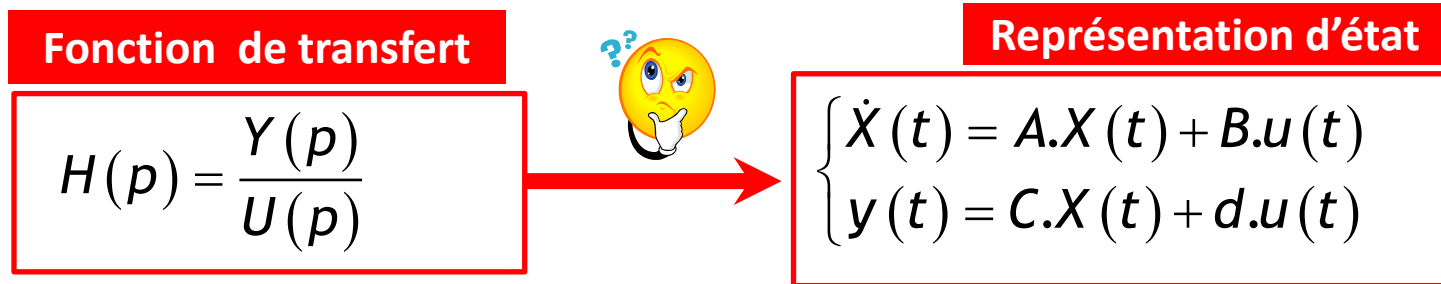
où T est une matrice carrée régulière et $X(t)$ et $Z(t)$ sont deux vecteurs d'état:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}$$

- On montre dans la suite que certaines transformations offrent plusieurs facilités pour l'analyse et la commande de systèmes.

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

- Ce paragraphe adresse le problème de réalisation d'une représentation d'état à partir d'une fonction de transfert :



- Plusieurs approches peuvent être adoptées pour résoudre ce problème puisque la représentation d'état d'un système est plurielle.
- Dans la suite, on présente les représentations suivantes:
 - ✱ La forme canonique de commandabilité.
 - ✱ La forme canonique d'observabilité.
 - ✱ La forme modale ou de Jordan.
- Ces formes offrent plusieurs avantages au niveau l'analyse et/ou la synthèse des systèmes.

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

- Soit la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0}; \quad a_n = 1 \quad \text{et} \quad m < n$$

$$\Leftrightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \left(\frac{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0} \right) \times \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^n}{\left(\frac{1}{p}\right)^n}$$

$$\Leftrightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} \frac{W(p)}{U(p)} = \frac{b_m \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{n-m} + b_{m-1} \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{n-m+1} + \dots + b_1 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{n-1} + b_0 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^n}{1 + a_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{p}\right) + \dots + a_1 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{n-1} + a_0 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^n}$$

- On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Y(p)}{W(p)} = N(p) = b_m \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{n-m} + b_{m-1} \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{n-m+1} + \dots + b_1 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{n-1} + b_0 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^n \\ \frac{W(p)}{U(p)} = \frac{1}{D(p)} = \frac{1}{1 + a_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{p}\right) + \dots + a_1 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^{n-1} + a_0 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^n} \end{array} \right.$$

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

- La fonction de transfert entre $W(p)$ et $U(p)$ peut se mettre comme suit :

$$\frac{W(p)}{U(p)} = \frac{1}{D(p)} \quad \Leftrightarrow \quad W(p) \cdot D(p) = U(p) \quad \Leftrightarrow \quad W(p) \cdot \left[1 + a_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{p} \right) + \dots + a_0 \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^n \right] = U(p)$$

$$W(p) = U(p) - W(p) \cdot \left[a_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{p} \right) + \dots + a_1 \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^{n-1} + a_0 \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^n \right]$$

- La fonction de transfert entre $Y(p)$ et $W(p)$ peut se mettre comme suit :

$$\frac{Y(p)}{W(p)} = N(p) \quad \Leftrightarrow \quad Y(p) = W(p) \cdot N(p)$$

$$Y(p) = W(p) \cdot \left[b_m \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^{n-m} + b_{m-1} \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^{n-m+1} + \dots + b_0 \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^n \right]$$

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

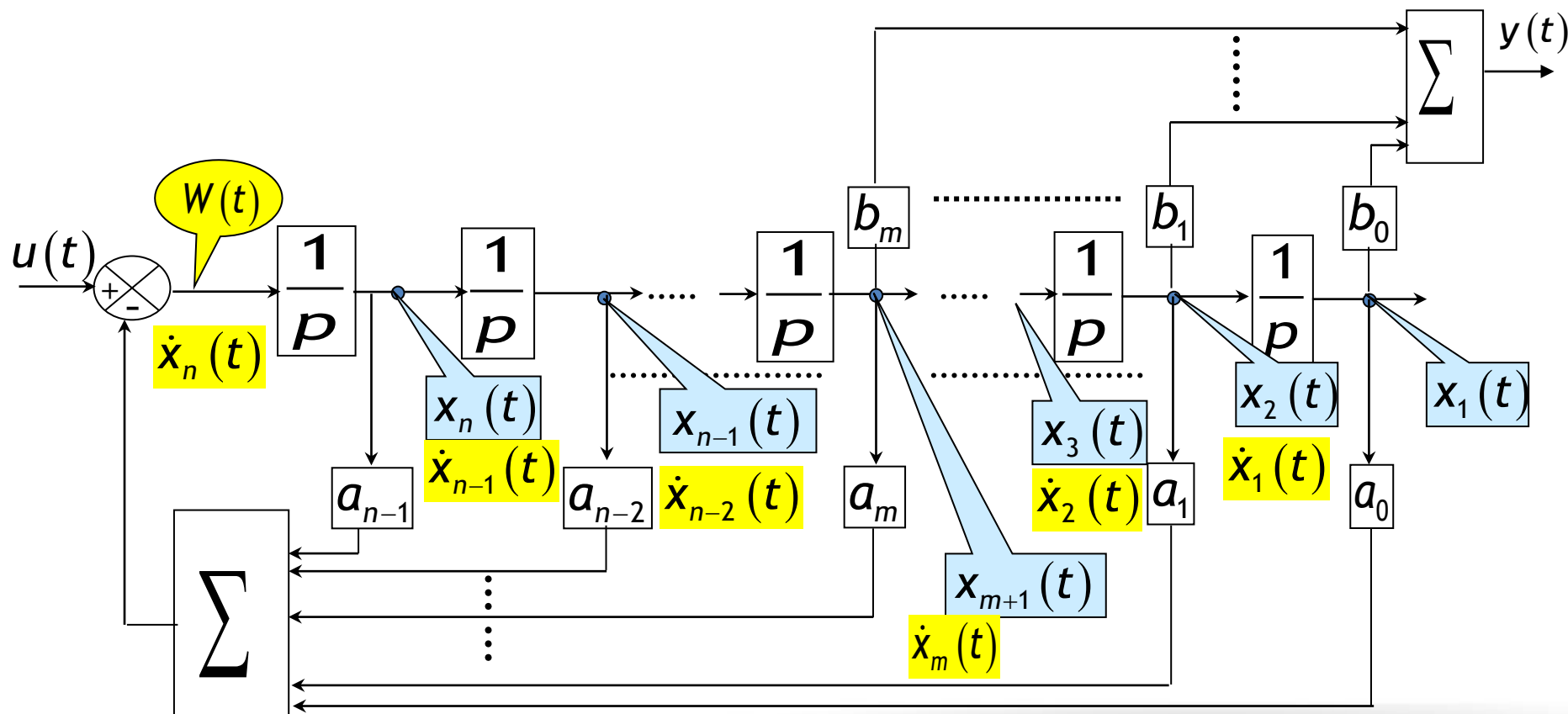
2.3.1. Forme canonique de commandabilité



Idée

$$Y(p) = W(p) \cdot \left[b_m \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^{n-m} + b_{m-1} \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^{n-m+1} + \dots + b_0 \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^n \right]$$

Les variables d'état sont les sorties des intégrateurs



$$W(p) = U(p) - W(p) \cdot \left[a_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{p} \right) + a_{n-2} \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^2 + \dots + a_m \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^{n-m} + \dots + a_1 \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^{n-1} + a_0 \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^n \right]$$

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

- Il est facile maintenant de déduire du schéma fonctionnel les équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = u(t) - a_{n-1}x_n(t) - a_{n-2}x_{n-1}(t) - \dots - a_0x_1(t) \\ y(t) = b_mx_{m+1}(t) + \dots + b_0x_1(t) \end{array} \right.$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

Forme canonique de commandabilité

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0] X(t) \end{array} \right.$$

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

Résumé

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0} \rightarrow \begin{cases} \dot{X}(t) = A_c \cdot X(t) + B_c \cdot u(t) \\ y(t) = C_c \cdot X(t) + d_c \cdot u(t) \end{cases}$$

avec

$$\bullet A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \bullet B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \text{ Si } 0 \leq m < n : C_c = [b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad d_c = 0$$

$$\bullet \text{ Si } m = n : C_c = [b_0 - a_0 \cdot b_n \quad b_1 - a_1 \cdot b_n \quad \dots \quad b_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_n]; \quad d_c = b_n$$

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

Exemple 1 Système strictement propre

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p + 6} \times \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^3}{\left(\frac{1}{p}\right)^3}$$

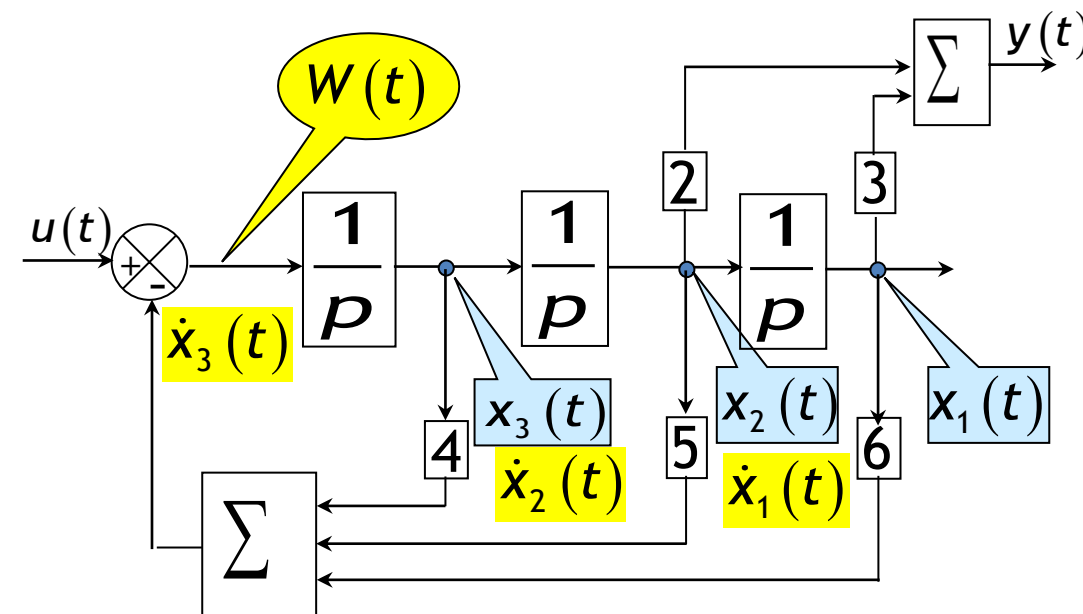
$$\Leftrightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} \frac{W(p)}{U(p)} = \frac{2\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{p}\right)^3}{1 + 4\left(\frac{1}{p}\right) + 5\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{p}\right)^3}$$

▪ On pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Y(p)}{W(p)} = N(p) = 2\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{p}\right)^3 \\ \frac{W(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + 4\left(\frac{1}{p}\right) + 5\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{p}\right)^3} \end{array} \right.$$

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

$$Y(p) = W(p) \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^3 \right]$$



$$W(p) = U(p) - W(p) \cdot \left[4 \cdot \left(\frac{1}{p} \right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{1}{p} \right)^3 \right]$$

- Il est facile maintenant de déduire du schéma fonctionnel les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = u(t) - 4x_3(t) - 5x_2(t) - 6x_1(t) \\ y(t) = 2x_2(t) + 3x_1(t) \end{cases}$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -4 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [3 \quad 2 \quad 0] X(t) \end{cases}$$

Forme canonique de commandabilité

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

Exemple 2 Système propre

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{3p^3 + 14p^2 + 15p + 17}{p^3 + 2p^2 + 3p + 4} = \underbrace{\frac{8p^2 + 6p + 5}{p^3 + 2p^2 + 3p + 4}}_{H_1(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)}} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{H_2(p) = \frac{Y_2(p)}{U(p)}}$$

- La fonction de transfert $H_1(p)$ peut se mettre comme suit :

$$H_1(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)} = \frac{8p^2 + 6p + 5}{p^3 + 2p^2 + 3p + 4} \times \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^3}{\left(\frac{1}{p}\right)^3} \Leftrightarrow H_1(p) = \frac{Y_1(p)}{W(p)} \frac{W(p)}{U(p)} = \frac{8\left(\frac{1}{p}\right) + 6\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{p}\right)^3}{1 + 2\left(\frac{1}{p}\right) + 3\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{p}\right)^3}$$

- On pose :

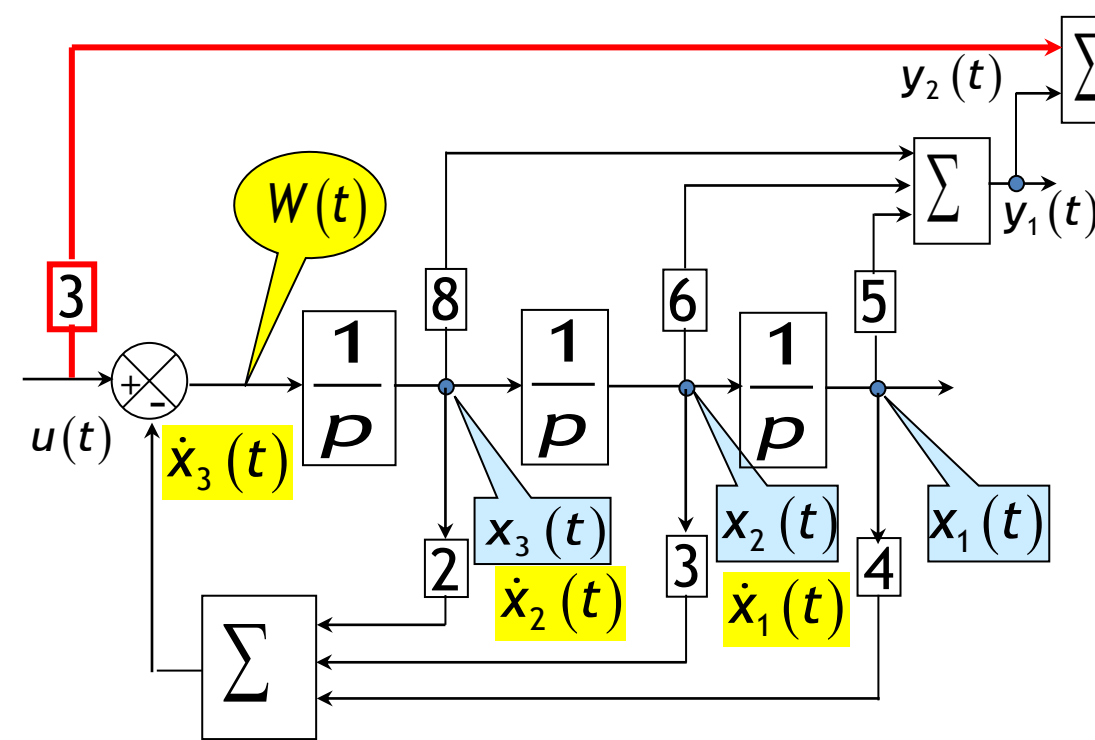
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Y_1(p)}{W(p)} = N(p) = 8\left(\frac{1}{p}\right) + 6\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{p}\right)^3 \\ \frac{W(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{1}{p}\right) + 3\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{p}\right)^3} \end{array} \right.$$

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

$$\frac{Y_1(p)}{W(p)} = N(p) = 8\left(\frac{1}{p}\right) + 6\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{p}\right)^3$$

$$\frac{Y_2(p)}{U(p)} = 3 \Leftrightarrow Y_2(p) = 3U(p)$$

$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$$



$$W(p) = U(p) - W(p) \cdot \left[2\left(\frac{1}{p}\right) + 3\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{p}\right)^3 \right]$$

- Le schéma fonctionnel donne les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = u(t) - 2x_3(t) - 3x_2(t) - 4x_1(t) \\ y(t) = 8x_3(t) + 6x_2(t) + 5x_1(t) + 3u(t) \end{cases}$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [5 \quad 6 \quad 8] X(t) + [3] u(t) \end{cases}$$

Forme canonique de commandabilité

2.3.2. Forme canonique d'observabilité

Pour des raisons purement pédagogiques, la forme canonique d'observabilité sera présentée avec la fonction de transfert suivante:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_1 \cdot p + b_0}{p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p + a_0} \times \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^3}{\left(\frac{1}{p}\right)^3} \iff \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_1 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^2 + b_0 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^3}{1 + a_2 \cdot \left(\frac{1}{p}\right) + a_1 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^2 + a_0 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^3}$$

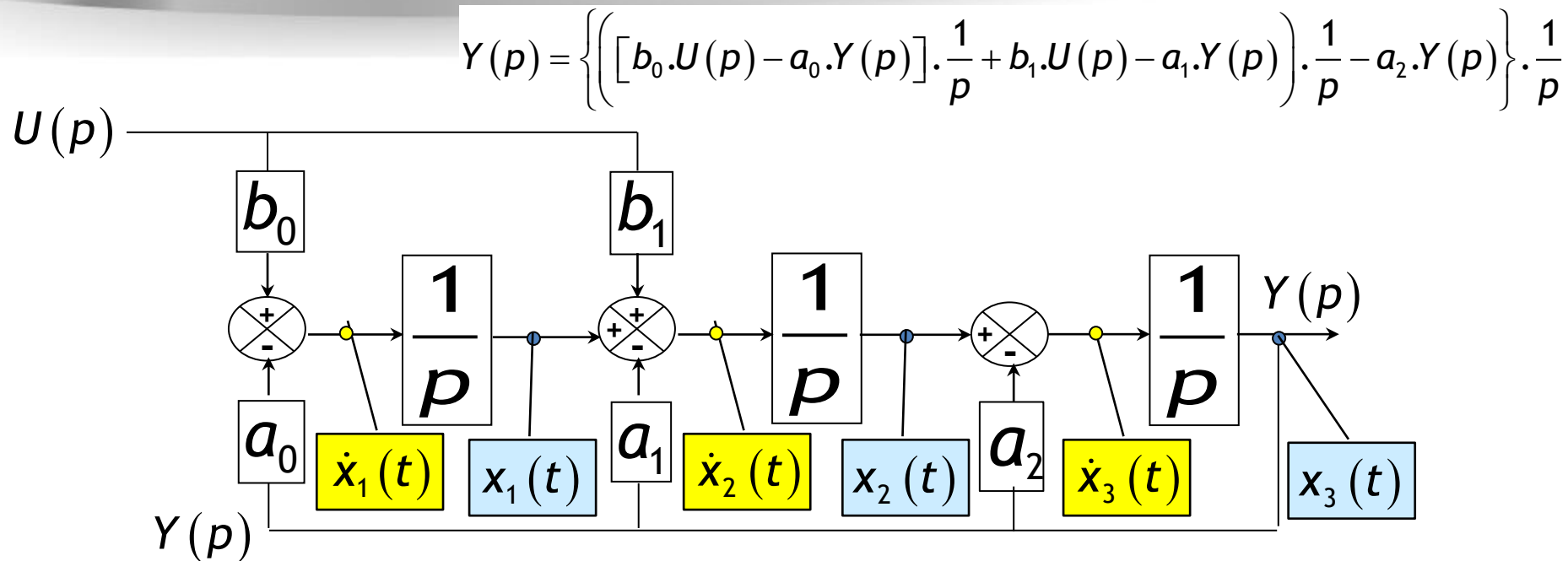
$$\iff Y(p) \cdot \left[1 + a_2 \cdot \left(\frac{1}{p}\right) + a_1 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^2 + a_0 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^3 \right] = U(p) \cdot \left[b_1 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^2 + b_0 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^3 \right]$$

$$\iff Y(p) = -Y(p) \cdot \left[a_2 \cdot \left(\frac{1}{p}\right) + a_1 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^2 + a_0 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^3 \right] + U(p) \cdot \left[b_1 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^2 + b_0 \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^3 \right]$$

$$\iff Y(p) = [b_0 \cdot U(p) - a_0 \cdot Y(p)] \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^3 + [b_1 \cdot U(p) - a_1 \cdot Y(p)] \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^2 - a_2 \cdot Y(p) \left(\frac{1}{p}\right)$$

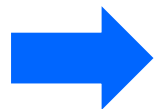
$$\iff Y(p) = \left\{ \left([b_0 \cdot U(p) - a_0 \cdot Y(p)] \cdot \frac{1}{p} + [b_1 \cdot U(p) - a_1 \cdot Y(p)] \cdot \frac{1}{p} - a_2 \cdot Y(p) \right) \cdot \frac{1}{p} \right\} \cdot \frac{1}{p}$$

2.3.2. Forme canonique d'observabilité



- Le schéma fonctionnel donnent les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_0 x_3(t) + b_0 u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - a_1 x_3(t) + b_1 u(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - a_2 x_3(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases}$$



- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \quad 0 \quad 1] X(t) \end{cases}$$

2.3.2. Forme canonique d'observabilité

Résumé

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + \dots + b_1 \cdot p + b_0}{p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0} \rightarrow \begin{cases} \dot{X}(t) = A_o \cdot X(t) + B_o \cdot u(t) \\ y(t) = C_o \cdot X(t) + d_o \cdot u(t) \end{cases}$$

avec

$$\bullet A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\bullet C_o = [0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 0 \quad 1]$$

$$\bullet \text{ Si } 0 \leq m < n : B_o = [b_0 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \quad d_o = 0$$

$$\bullet \text{ Si } m = n : B_o = [b_0 - a_0 \cdot b_n \quad b_1 - a_1 \cdot b_n \quad \dots \quad b_{n-1} - a_{n-1} \cdot b_n]^T ; \quad d_o = b_n$$

2.3.2. Forme canonique d'observabilité

Exemple 1 Système strictement propre

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p + 6}$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p + 6} \times \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^3}{\left(\frac{1}{p}\right)^3} \Leftrightarrow \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{2\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{p}\right)^3}{1 + 4\left(\frac{1}{p}\right) + 5\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{p}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow Y(p) \cdot \left[1 + 4\left(\frac{1}{p}\right) + 5\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{p}\right)^3\right] = U(p) \cdot \left[2\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]$$

$$\Leftrightarrow Y(p) = -Y(p) \cdot \left[4\left(\frac{1}{p}\right) + 5\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{p}\right)^3\right] + U(p) \cdot \left[2\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]$$

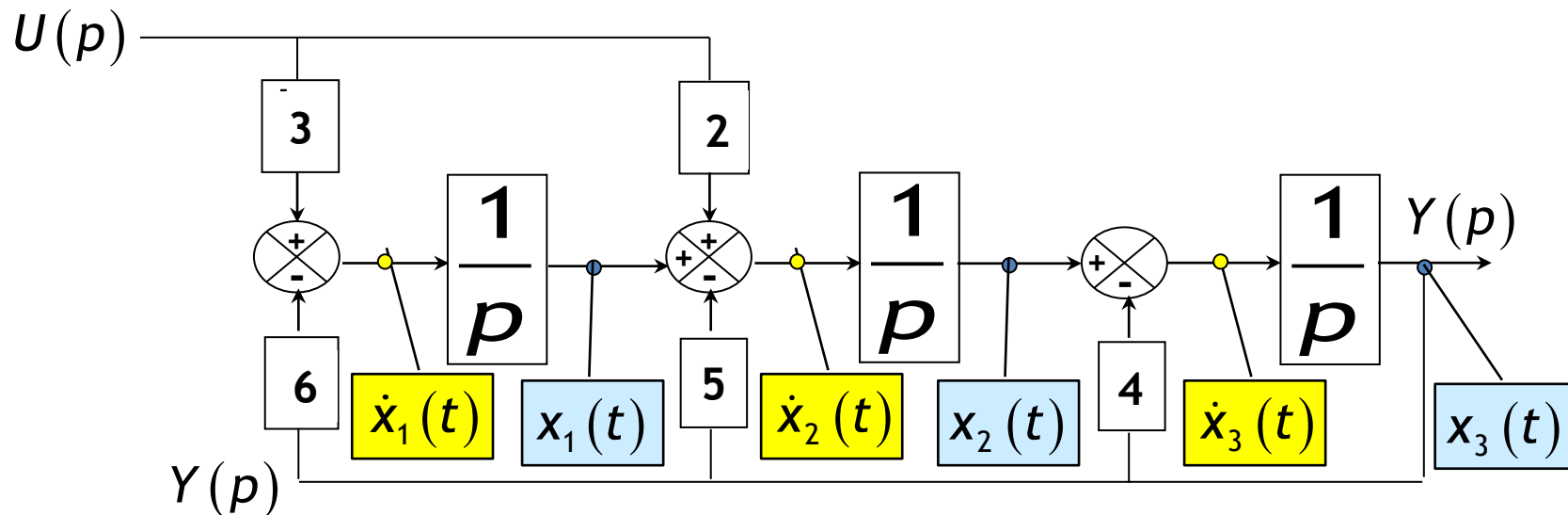
$$\Leftrightarrow Y(p) = [3U(p) - 6Y(p)] \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^3 + [2U(p) - 5Y(p)] \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^2 - 4Y(p) \left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\Leftrightarrow Y(p) = \left\{ \left([3U(p) - 6Y(p)] \cdot \frac{1}{p} + 2U(p) - 5Y(p) \right) \cdot \frac{1}{p} - 4Y(p) \right\} \cdot \frac{1}{p}$$

2.3.2. Forme canonique d'observabilité

Exemple 1

$$Y(p) = \left\{ \left([3U(p) - 6Y(p)] \cdot \frac{1}{p} + 2U(p) - 5Y(p) \right) \cdot \frac{1}{p} - 4Y(p) \right\} \cdot \frac{1}{p}$$



- Le schéma fonctionnel donnent les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -6x_3(t) + 3u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 5x_3(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - 4x_3(t) \\ y(t) = x_3(t) \end{cases}$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \quad 0 \quad 1] X(t) \end{cases}$$

2.3.2. Forme canonique d'observabilité

Exemple 2

Système propre $H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{7p^3 + 28p^2 + 37p + 45}{p^3 + 4p^2 + 5p + 6} = \frac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p + 6} + 7$

$H_1(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)}$ $H_2(p) = \frac{Y_2(p)}{U(p)}$

$$H_1(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)} = \frac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p + 6} \times \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^3}{\left(\frac{1}{p}\right)^3} \iff \frac{Y_1(p)}{U(p)} = \frac{2\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{p}\right)^3}{1 + 4\left(\frac{1}{p}\right) + 5\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{p}\right)^3}$$

$$\iff Y_1(p) \cdot \left[1 + 4\left(\frac{1}{p}\right) + 5\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{p}\right)^3\right] = U(p) \cdot \left[2\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]$$

$$\iff Y_1(p) = -Y_1(p) \cdot \left[4\left(\frac{1}{p}\right) + 5\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 6\left(\frac{1}{p}\right)^3\right] + U(p) \cdot \left[2\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]$$

$$\iff Y_1(p) = [3U(p) - 6Y_1(p)] \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^3 + [2U(p) - 5Y_1(p)] \cdot \left(\frac{1}{p}\right)^2 - 4Y_1(p) \left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\iff Y_1(p) = \left\{ \left[[3U(p) - 6Y_1(p)] \cdot \frac{1}{p} + 2U(p) - 5Y_1(p) \right] \cdot \frac{1}{p} - 4Y_1(p) \right\} \cdot \frac{1}{p}$$

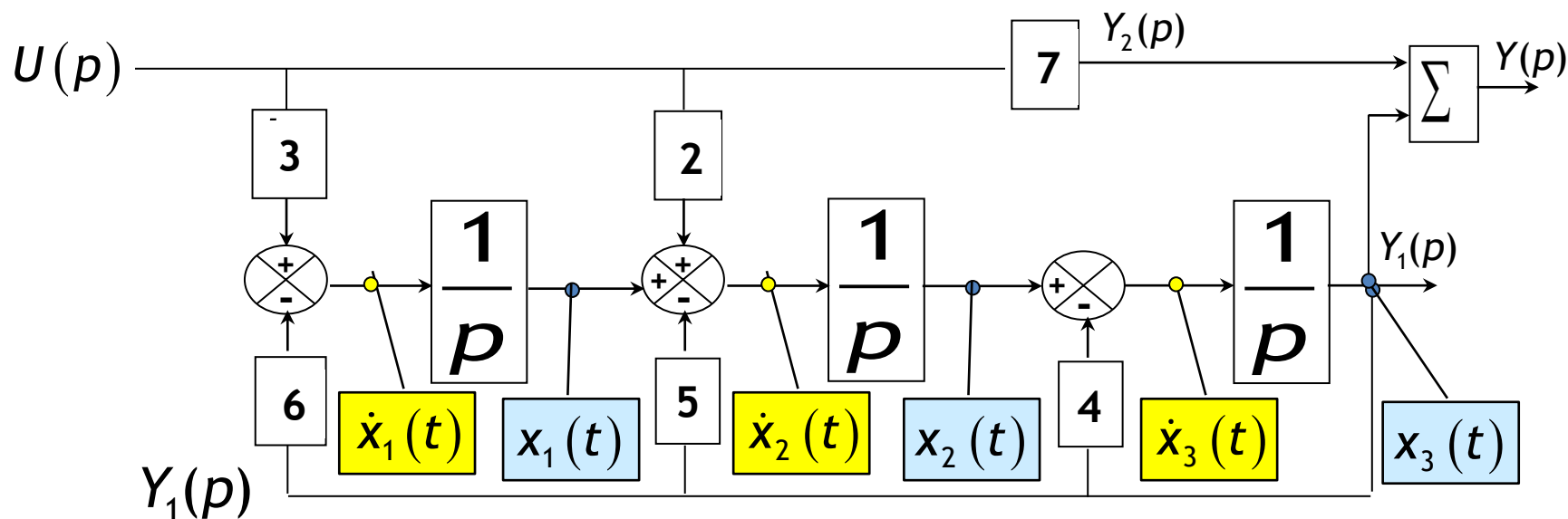
2.3.2. Forme canonique d'observabilité

$$\frac{Y_2(p)}{U(p)} = 7 \Leftrightarrow Y_2(p) = 7U(p)$$

Exemple 2

$$Y_1(p) = \left\{ \left(\left[3U(p) - 6Y_1(p) \right] \cdot \frac{1}{p} + 2U(p) - 5Y_1(p) \right) \cdot \frac{1}{p} - 4Y_1(p) \right\} \cdot \frac{1}{p}$$

$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$$



- Le schéma fonctionnel donnent les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -6x_3(t) + 3u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 5x_3(t) + 2u(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_2(t) - 4x_3(t) \end{cases}$$

$$y(t) = x_3(t) + 7u(t)$$



- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \quad 0 \quad 1] X(t) + [7] u(t) \end{cases}$$

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

Principe

- ❑ Cette forme consiste à utiliser les pôles de la fonction de transfert pour réaliser une représentation d'état. Ceci peut être assuré en respectant la démarche suivante:
 - Détermination des pôles de la fonction de transfert.
 - Décomposition de la fonction de transfert en éléments simples.
 - Dédution de la représentation d'état.

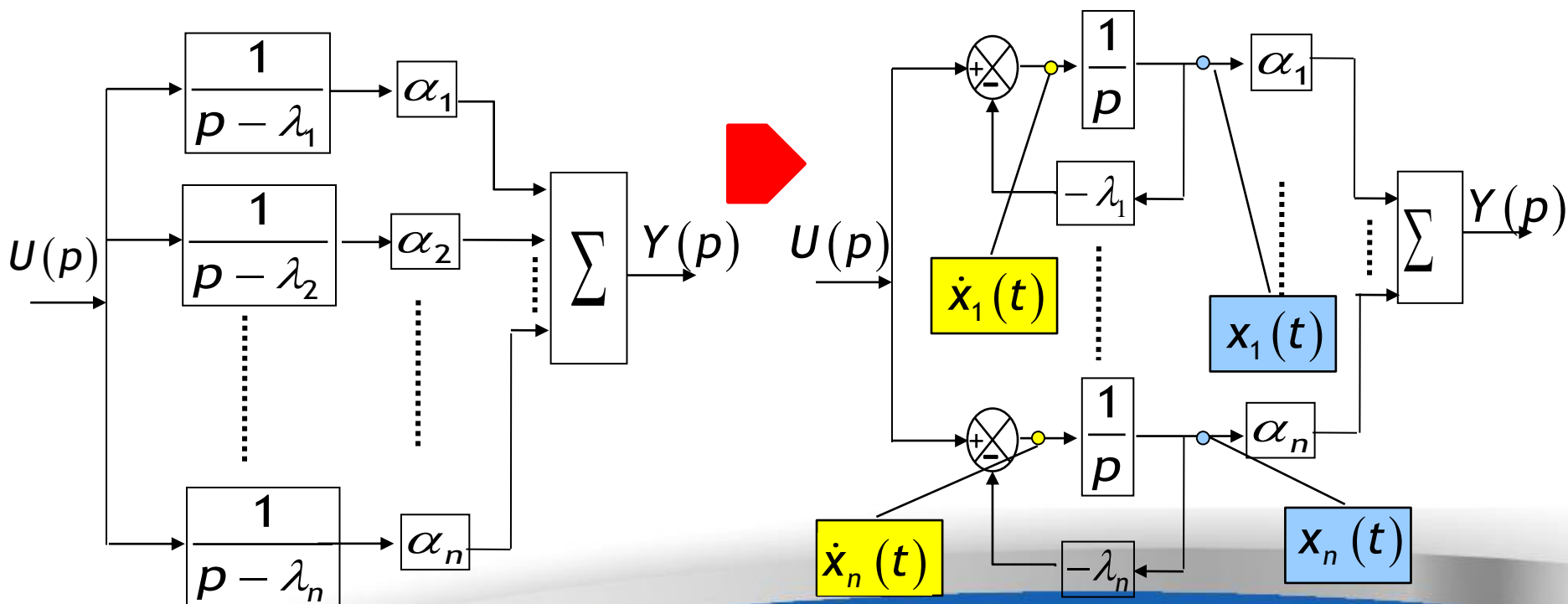
- ❑ On distingue trois cas:
 - Pôles simples.
 - Pôles multiples.
 - Pôles complexes conjugués.

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.1. Pôles simples

On suppose que la fonction de transfert admet n pôles réels distincts $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ et λ_n . En effet, la décomposition de cette fonction de transfert donne:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{\alpha_1}{p - \lambda_1} + \frac{\alpha_2}{p - \lambda_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{p - \lambda_n}$$



2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.1. Pôles simples

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t) + u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = \lambda_n x_n(t) + u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t)$$

Forme Modale

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \alpha_n] X(t) \end{cases}$$

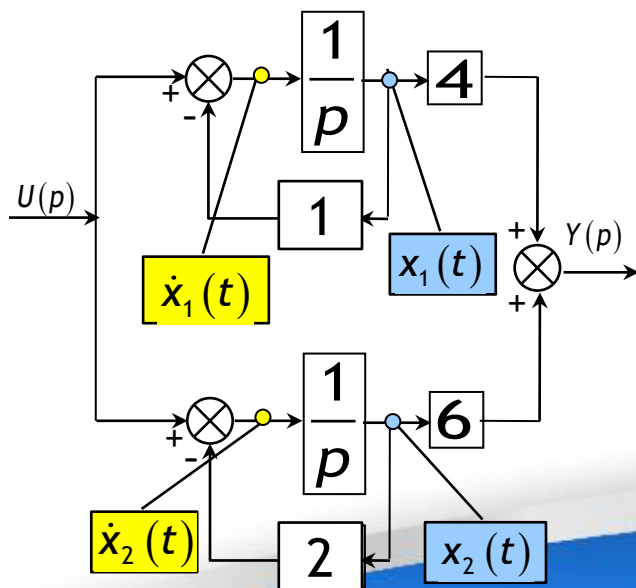
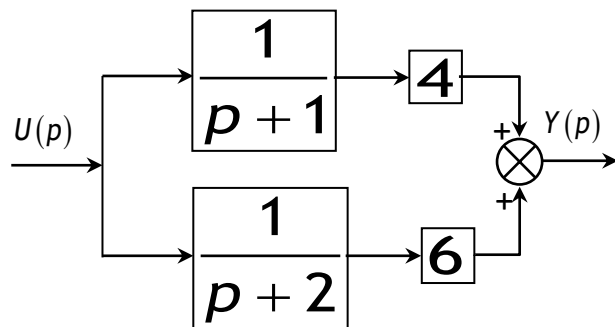
Les pôles de la fonction sont les éléments de la diagonale

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.1. Pôles simples

Exemple

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{10p + 14}{p^2 + 3p + 2} = \frac{4}{p+1} + \frac{6}{p+2}$$



- Le schéma fonctionnel donne les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t) \\ y(t) = 4x_1(t) + 6x_2(t) \end{cases}$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [4 \quad 6] X(t) \end{cases}$$

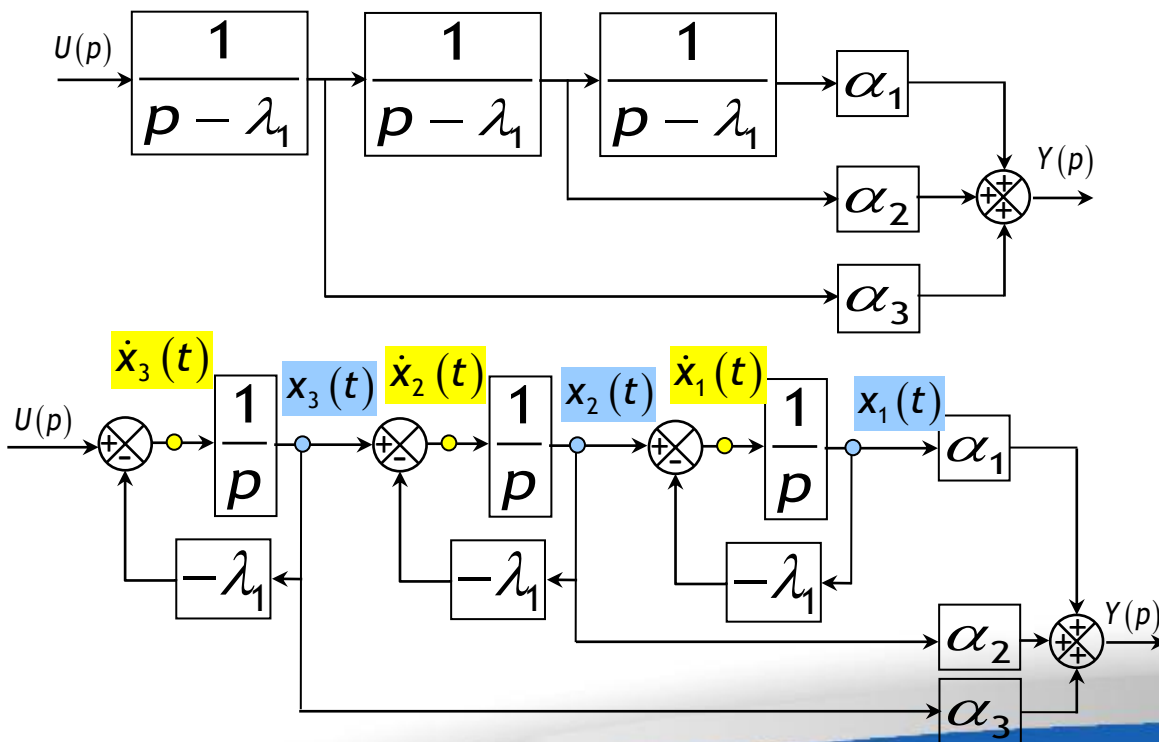
2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.2. Pôles Multiples

On suppose que la fonction de transfert d'ordre 3 admet un pôle réel multiple d'ordre 3.
En effet, la décomposition de cette fonction de transfert donne:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\alpha_1}{(p - \lambda_1)^3} + \frac{\alpha_2}{(p - \lambda_1)^2} + \frac{\alpha_3}{(p - \lambda_1)}$$

Schéma fonctionnel



- Il est facile maintenant de déduire du schéma fonctionnel les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_1 x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = \lambda_1 x_3(t) + u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \alpha_3 x_3(t)$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] X(t) \end{cases}$$

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.2. Pôles Multiples

On suppose que la fonction de transfert d'ordre n admet un pôle réel multiple d'ordre q et $(n-q)$ pôles réels distincts $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots$ et λ_n . En effet, la décomposition de cette fonction de transfert donne:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\alpha_1}{(p - \lambda_1)^q} + \frac{\alpha_2}{(p - \lambda_1)^{q-1}} + \dots + \frac{\alpha_q}{(p - \lambda_1)} + \frac{\alpha_{q+1}}{p - \lambda_{q+1}} + \dots + \frac{\alpha_n}{p - \lambda_n}$$

En utilisant la même démarche, on peut déduire les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_1 x_2(t) + x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{q-1}(t) = \lambda_1 x_{q-1}(t) + x_q(t) \\ \dot{x}_q(t) = \lambda_1 x_q(t) + u(t) \\ \dot{x}_{q+1}(t) = \lambda_{q+1} x_{q+1}(t) + u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = \lambda_n x_n(t) + u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = \alpha_1 \cdot x_1(t) + \alpha_2 \cdot x_2(t) + \dots + \alpha_n \cdot x_n(t)$$

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.2. Pôles Multiples

Forme Modale

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1} & \boxed{1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & & \\ \vdots & 0 & \lambda_1 & 1 & \vdots & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \lambda_1 & 0 & & \\ \vdots & & \cdots & & \boxed{\lambda_{q+1}} & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} \boxed{0} \\ \vdots \\ 0 \\ \boxed{1} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \boxed{\alpha_1} & \cdots & \boxed{\alpha_q} & \boxed{\alpha_{q+1}} & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} X(t) \end{array} \right.$$

Les pôles de la fonction sont les éléments de la diagonale

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.2. Pôles Multiples

Exemple

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{11p^2 + 53p + 66}{(p+2)^2 (p+1)}$$

La décomposition de $H(p)$ en éléments simples donne:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{11p^2 + 53p + 66}{(p+2)^2 (p+1)} = \frac{24}{(p+1)} - \frac{4}{(p+2)^2} - \frac{13}{(p+2)}$$

La représentation d'état est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [24 \quad -4 \quad -13] X(t) \end{cases}$$

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.3. Pôles Complexes

Pour une paire de pôles complexes conjugués $p_1 = \eta + j\mu$; $p_2 = \bar{p}_1 = \eta - j\mu$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\alpha_1}{p - p_1} + \frac{\alpha_2}{p - p_2} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \beta + j\delta; \quad \alpha_2 = \bar{\alpha}_1 = \beta - j\delta$$

En utilisant le principe des pôles simples, la représentation d'état peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & \bar{p}_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [\alpha_1 \quad \alpha_2] = [\alpha_1 \quad \bar{\alpha}_1]$$

Problème

Les coefficients de A et C sont des nombres complexes !!!!

Solution

Trouver une matrice de passage permettant de transformer A et C.

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.3. Pôles Complexes

On pose :

$$X(t) = T.Z(t) \quad \text{avec} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T.\dot{Z}(t) = A.T.Z(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.T.Z(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{Z}(t) = T^{-1}A.T.Z(t) + T^{-1}.B.u(t) \\ y(t) = C.T.Z(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(p_1) & \operatorname{Im}(p_1) \\ -\operatorname{Im}(p_1) & \operatorname{Re}(p_1) \end{bmatrix}.Z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2.\operatorname{Re}(\alpha_1) & 2.\operatorname{Im}(\alpha_1) \end{bmatrix}.Z(t) \end{cases}$$

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.3. Pôles Complexes

Exemple

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{3p+6}{p^2-6p+10} = \frac{1.5-7.5j}{p-3-j} + \frac{1.5+7.5j}{p-3+j}$$

avec

$$\blacksquare p_1 = 3 + j; \quad p_2 = \bar{p}_1 = 3 - j$$

$$\blacksquare \alpha_1 = 1.5 - 7.5j; \quad \alpha_2 = \bar{\alpha}_1 = 1.5 + 7.5j$$

■ La représentation d'état est donnée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(p_1) & \operatorname{Im}(p_1) \\ -\operatorname{Im}(p_1) & \operatorname{Re}(p_1) \end{bmatrix} \cdot X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) = [2 \cdot \operatorname{Re}(\alpha_1) \quad 2 \cdot \operatorname{Im}(\alpha_1)] \cdot X(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \\ y(t) = [3 \quad -15] \cdot X(t) \end{cases}$$

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

Exemple

$$H(p) = \frac{6}{(p+1)^3} + \frac{7}{(p+1)^2} + \frac{3}{(p+1)} + \frac{1}{(p+2)} + \frac{5+6j}{(p+3+4j)} + \frac{5-6j}{(p+3-4j)}$$

• Cette fonction admet :

- ✱ un pôle multiple d'ordre trois $\lambda_1 = -1$
- ✱ un pôle simple $\lambda_2 = -2$
- ✱ une paire des pôles complexes conjugués : $\lambda_3 = -3-4j$ et $\lambda_4 = -3+4j$.

• La représentation d'état et comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \dot{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [6 \quad 7 \quad 3 \quad 1 \quad 10 \quad 12] X(t) \end{array} \right.$$

2.4. Passage d'une équation différentielle vers une représentation d'état

- Ce paragraphe adresse le problème de réalisation d'une représentation d'état à partir d'une équation différentielle:

Equation différentielle

$$y^{(n)}(t) = f(y^{(n-1)}(t), \dots, y(t), u^{(m)}(t), \dots, u(t), t)$$



Représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$$



Solution

Pour résoudre ce problème, on peut utiliser la démarche suivante :

- **Etape 1 :** Choisir un vecteur d'état $X(t)$ de dimension n (n est égal à l'ordre de l'équation différentielle).
- **Etape 2 :** Calculer $\dot{X}(t)$.
- **Etape 3 :** Dédire la représentation d'état (A, B, C, d).

2.4. Passage d'une équation différentielle vers une représentation d'état

Dans la suite, on présente l'application de cette démarche dans le cas d'un système linéaire, continu, monovisible, **stationnaire ou non stationnaire** défini par une équation différentielle d'ordre n :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y^{(1)}(t) + a_0(t)y(t) = b_m(t)u^{(m)}(t) + \dots + b_1(t)u^{(1)}(t) + b_0(t)u(t)$$

- Le choix du vecteur d'état représente la pierre angulaire de cette solution. Plusieurs possibilités peuvent être utilisées. Dans ce cours, on se limite au choix suivant :

$$X(t) = \begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) + \alpha_1(t) \cdot u(t) \\ x_3(t) = \dot{x}_2(t) + \alpha_2(t) \cdot u(t) \\ \vdots \\ x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t) + \alpha_{n-1}(t) \cdot u(t) \end{cases}$$

Quel est le rôle des $\alpha_i(t)$?

Pour répondre à cette question, on considère les exemples suivants.

2.4. Passage d'une équation différentielle vers une représentation d'état

Exemple 1 Système stationnaire $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = \dot{u}(t) + u(t)$

■ On pose : $X(t) = \begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) + \alpha_1(t).u(t) \end{cases}$

■ Et on calcule :

$$\dot{X}(t) = \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) - \alpha_1(t).u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) + \dot{\alpha}_1(t).u(t) + \alpha_1(t).\dot{u}(t) \\ \quad = -\dot{y}(t) - y(t) + \dot{u}(t) + u(t) + \dot{\alpha}_1(t).u(t) + \alpha_1(t).\dot{u}(t) \\ \quad = -x_2(t) + \alpha_1(t).u(t) - x_1(t) + \dot{u}(t) + u(t) + \dot{\alpha}_1(t).u(t) + \alpha_1(t).\dot{u}(t) \\ \quad = -x_1(t) - x_2(t) + [\alpha_1(t) + 1 + \dot{\alpha}_1(t)].u(t) + [\alpha_1(t) + 1].\dot{u}(t) \end{cases}$$

Cette expression comporte la dérivée de l'entrée. Ceci ne correspond à une représentation d'état. En effet, il faut l'annuler en utilisant $\alpha_1(t)$.

$$\alpha_1(t) = -1$$

Stationnaire

d'où :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) \end{cases}$$

2.4. Passage d'une équation différentielle vers une représentation d'état

Exemple 2 Système non stationnaire $\ddot{y}(t) - t\dot{y}(t) + y(t) = t^2\dot{u}(t) + u(t)$

■ On pose : $X(t) = \begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) + \alpha_1(t).u(t) \end{cases}$

■ Et on calcule :

$$\dot{X}(t) = \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) - \alpha_1(t).u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) + \dot{\alpha}_1(t).u(t) + \alpha_1(t).\dot{u}(t) \\ \quad = t\dot{y}(t) - y(t) + t^2\dot{u}(t) + u(t) + \dot{\alpha}_1(t).u(t) + \alpha_1(t).\dot{u}(t) \\ \quad = tx_2(t) - t\alpha_1(t).u(t) - x_1(t) + t^2\dot{u}(t) + u(t) + \dot{\alpha}_1(t).u(t) + \alpha_1(t).\dot{u}(t) \\ \quad = -x_1(t) + tx_2(t) + [-t\alpha_1(t) + 1 + \dot{\alpha}_1(t)].u(t) + [\alpha_1(t) + t^2].\dot{u}(t) \end{cases}$$

Cette expression comporte la dérivée de l'entrée. Ceci ne correspond à une représentation d'état. En effet, il faut l'annuler en utilisant $\alpha_1(t)$.

$$\alpha_1(t) = -t^2$$

Non
Stationnaire

d'où :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & t \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} t^2 \\ 1 - 2t + t^3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] X(t) \end{cases}$$

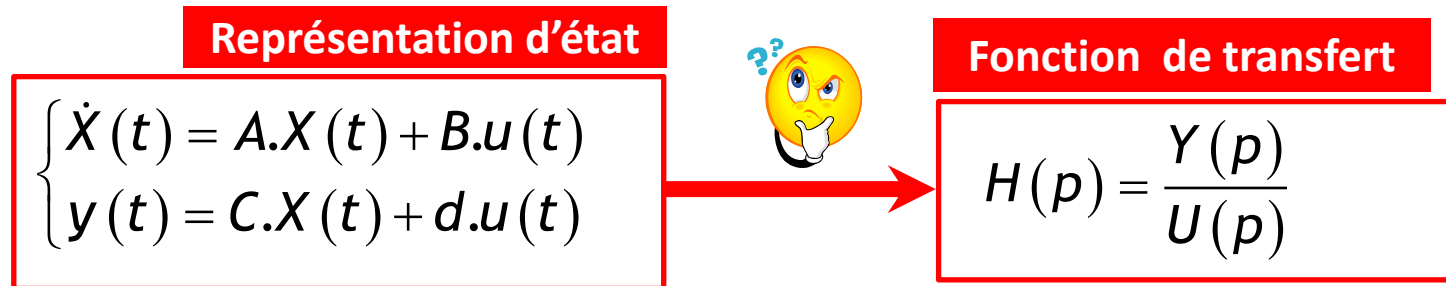
2.4. Passage d'une équation différentielle vers une représentation d'état

Remarques

- ✱ L'ordre de la représentation d'état est égal à l'ordre de l'équation différentielle.
- ✱ Les termes α_1 , α_2 , ... et α_n sont utilisés pour annuler les dérivées successives de l'entrée $u(t)$ qui figurent dans l'équation d'état.
- ✱ Si l'équation différentielle ne comporte pas des dérivées de l'entrée $u(t)$ alors les termes α_1 , α_2 , ... et α_n sont nuls.
- ✱ Si le système est stationnaire alors les termes α_1 , α_2 , ... et α_n sont aussi stationnaires.
- ✱ Si le système est non stationnaire alors les termes α_1 , α_2 , ... et α_n sont aussi non stationnaires.
- ✱ Cette approche peut être appliquée pour les systèmes multivariables.

2.5. Passage d'une représentation d'état vers la fonction de transfert

- Ce paragraphe adresse le problème de détermination de la fonction de transfert à partir d'une représentation d'état d'un système continu stationnaire :



- La transformée de Laplace avec conditions initiales nulles nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} p.X(p) = A.X(p) + B.U(p) \\ Y(p) = C.X(p) + d.U(p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(p) = (p.I - A)^{-1} . B.U(p) \\ Y(p) = (C.(p.I - A)^{-1} . B + d) . U(p) \end{cases}$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = (C.(p.I - A)^{-1} B + d)$$

2.5. Passage d'une représentation d'état vers la fonction de transfert

Exemple

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \quad 1] X(t) \end{cases}$$

- La fonction de transfert est donnée par :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C.(p.I - A)^{-1}.B$$

- On calcule $(p.I - A)^{-1}$:

$$(p.I - A) = \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & p+1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (p.I - A)^{-1} = \frac{1}{(p+1)^2} \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ 1 & p+1 \end{bmatrix}$$

$$d'où \quad H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C.(p.I - A)^{-1}.B$$

$$\Leftrightarrow H(p) = [0 \quad 1] \frac{1}{(p+1)^2} \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ 1 & p+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow H(p) = [0 \quad 1] \frac{1}{(p+1)^2} \begin{bmatrix} p+1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+1)^2}}$$

2.5. Passage d'une représentation d'état vers la fonction de transfert

Remarques

- L'inverse de la matrice $(p.I - A)$ est donné par: $(p.I - A)^{-1} = \frac{adj(p.I - A)}{\det(p.I - A)}$

d'où :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{C.adj(p.I - A).B + d.\det(p.I - A)}{\det(p.I - A)}$$

Cette relation montre bien que les pôles de la fonction de transfert coïncident avec les valeurs propres de la matrice d'évolution (*matrice A*) de la représentation d'état.

- La fonction de transfert suppose que les conditions initiales sont nulles. Ceci montre une limite de la représentation par fonction de transfert qui est d'application moins générale que la représentation d'état.
- Ces résultats peuvent être utilisés dans le cas d'un système linéaire multivariable.

2.5. Passage d'une représentation d'état vers la fonction de transfert

Remarques

La fonction de transfert est une représentation unique. En effet, elle est un invariant par un changement de base. Ceci peut être montré facilement comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases} \xrightarrow{X(t) = T.Z(t)} \begin{cases} \dot{Z}(t) = \bar{A}.Z(t) + \bar{B}.u(t) \\ y(t) = \bar{C}.Z(t) + \bar{d}.u(t) \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \bar{A} = T^{-1}.A.T \\ \bar{B} = T^{-1}.B \\ \bar{C} = C.T \\ \bar{d} = d \end{cases}$$

$$\bar{H}(p) = \left(\bar{C} \cdot (p.I - \bar{A})^{-1} \bar{B} + \bar{d} \right)$$

$$\Leftrightarrow \bar{H}(p) = \left(C.T \cdot (p.I - T^{-1}.A.T)^{-1} . T^{-1}.B + d \right)$$

$$\Leftrightarrow \bar{H}(p) = \left(C.T \cdot (T^{-1}.p.I.T - T^{-1}.A.T)^{-1} . T^{-1}.B + d \right)$$

$$\Leftrightarrow \bar{H}(p) = \left(C.T \cdot (T^{-1} \cdot (p.I - A) \cdot T)^{-1} . T^{-1}.B + d \right)$$

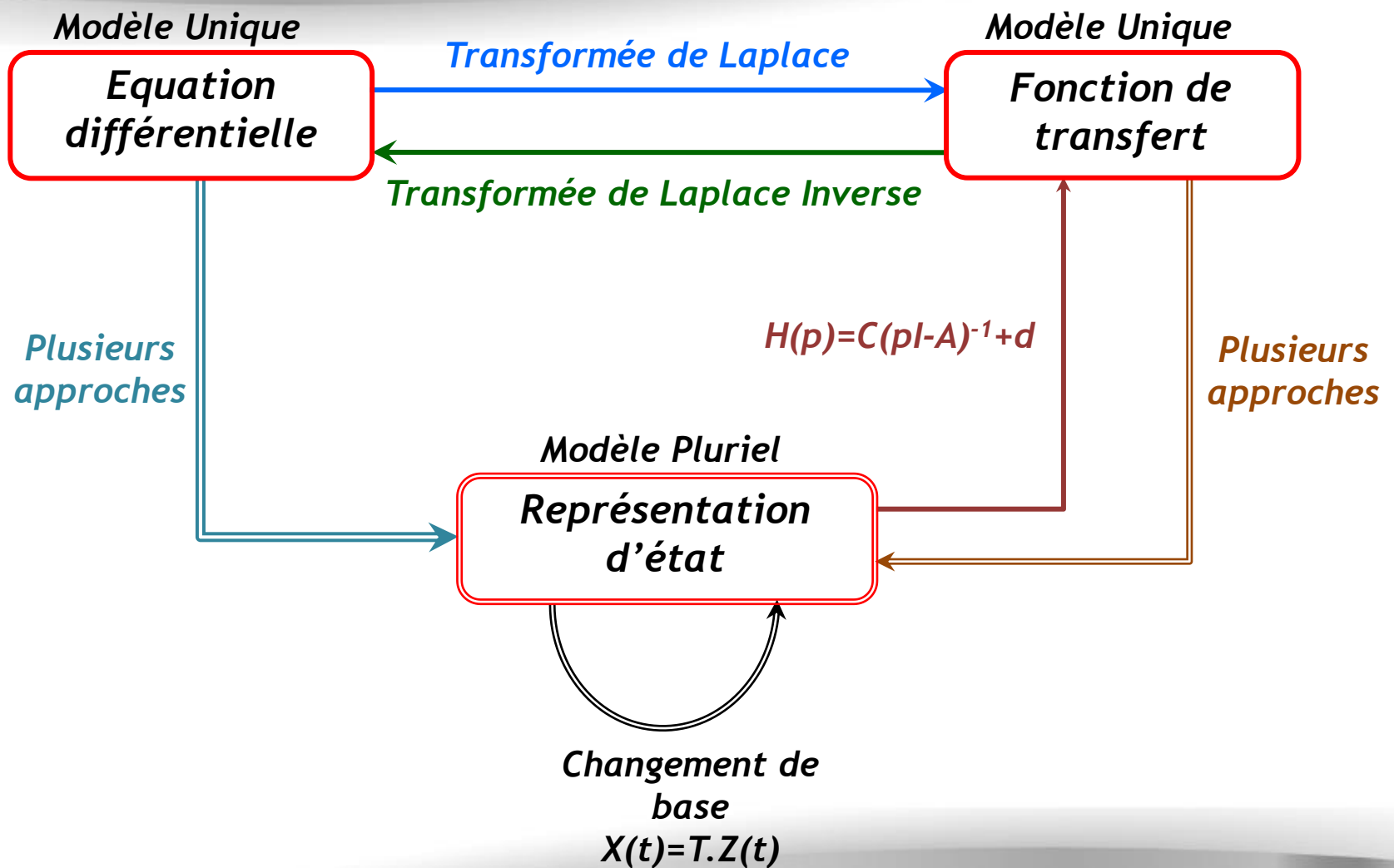
$$\Leftrightarrow \bar{H}(p) = \left(C.T.T^{-1} \cdot (p.I - A)^{-1} . T.T^{-1}.B + d \right)$$

$$\Leftrightarrow \bar{H}(p) = \left(C \cdot (p.I - A)^{-1} . B + d \right)$$

$$\Leftrightarrow \bar{H}(p) = H(p)$$

Ce résultat est justifié par le fait que la fonction de transfert est une représentation entrée-sortie. Cette unicité de représentation est alors vraie pour toutes les représentations **entrée-sortie** comme la réponse impulsionnelle, la réponse harmonique, etc.

2.6. Récapitulatif de passage entre les différentes représentations



2.7. Résolution de l'équation d'état

2.7.1. Position du problème

On cherche à déterminer l'évolution temporelle de la sortie $y(t)$ d'un système défini par la représentation d'état suivante en supposant que l'état initial $X(t_0)$ et l'entrée $u(t)$ sont connus :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) : \text{équation d'état} \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) : \text{équation de sortie} \end{cases}$$

Il est facile de remarquer que la réalisation de cet objectif nécessite aussi la connaissance de $X(t)$.

Ceci impose la résolution de l'équation d'état.

2.7.2. Solution de l'équation d'état

On cherche à résoudre l'équation d'état donnée par :

$$\dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t)$$

en supposant que l'état initial $X(t_0)$ et l'entrée $u(t)$ sont connus.

- Il s'agit d'un système différentiel de premier ordre qui comporte n équations différentielles matricielles de premier ordre.
- Le cas des équations différentielles matricielles se traite de manière similaire au cas scalaire
 - Résolution du problème homogène.
 - Résolution du problème avec second membre.

2.7.2. Solution de l'équation d'état

- ✱ En appliquant la transformée de Laplace à l'équation d'état $\dot{X}(t)=A.X(t)+B.u(t)$, on obtient :

$$p.X(p) - X(0) = A.X(p) + B.U(p) \Leftrightarrow (p.I - A).X(p) = X(0) + B.U(p)$$

$$\Leftrightarrow X(p) = (p.I - A)^{-1}.X(0) + (p.I - A)^{-1}.B.U(p)$$

- ✱ En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$X(t) = e^{At}.X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau).d\tau$$

- ✱ Si on considère l'état initial à t_0 , on peut montrer :

$X(t) = e^{A(t-t_0)}.X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau).d\tau$	
$\underbrace{\hspace{10em}}$ Réponse libre $u(t)=0$	$\underbrace{\hspace{10em}}$ Réponse forcée $u(t)\neq 0$

2.7.3. Matrice de transition

- La solution de l'équation d'état montre bien que le calcul de $X(t)$ nécessite le calcul de $e^{A(t-t_0)}$.
- Cette matrice est appelée matrice de transition car elle établit la correspondance entre l'état du système à un instant t et l'état initial à l'instant t_0 . On utilise souvent la notation:

$$\phi(t, t_0) = \phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

- La matrice de transition vérifie plusieurs propriétés de l'exponentielle scalaire. Ces propriétés sont résumées comme suit:

$$P1. \quad \phi(t_0, t_0) = I_n$$

$$P2. \quad \frac{d\phi(t, t_0)}{dt} = A \cdot \phi(t, t_0)$$

$$P3. \quad \phi(t_2, t_1) \cdot \phi(t_1, t_0) = \phi(t_2, t_0)$$

$$P4. \quad \phi \text{ est toujours inversible d'inverse } \phi^{-1}(t_2, t_1) = \phi(t_1, t_2)$$

$$P5. \quad \text{TL}[e^{At}] = (p.I - A)^{-1}$$

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

- Le calcul de la matrice de transition e^{At} représente l'opération la plus difficile dans la résolution des équation d'état.
- Il existe plusieurs méthodes pour déterminer la matrice de transition e^{At} .

Parmi toutes les méthodes, on distingue:

- Méthode de développement limité.
- Méthode de la transformée de Laplace.
- Méthode de diagonalisation de la matrice de transition.
- Méthode de Sylvester
- Méthode de Cayley-Hamilton

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

2.7.4.1. Méthode de développement limité

Le développement en série de Taylor d'une fonction exponentielle scalaire est donné par :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

On peut généraliser ce développement pour l'exponentielle d'une matrice comme suit :

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots + \frac{A^n}{n!} t^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} t^i$$

Cette méthode de calcul consiste à approximer cette série par un développement limité d'ordre k comme suit:

$$e^{At} \approx \sum_{i=0}^k \frac{A^i}{i!} t^i$$

Cette approximation converge uniformément vers $e^{A.t}$. En effet, il faut prendre une valeur assez élevée pour l'entier k afin d'obtenir une approximation acceptable. Mais, ceci augmente la complexité de calcul.

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

2.7.4.1. Méthode de développement limité

Cette méthode peut être adoptée lorsqu'on n'a pas besoin des expressions analytiques de $e^{A \cdot t}$. Par ailleurs, elle est recommandée dans le cas où la matrice A est nilpotente.

Définition

Une matrice carré A est dite nilpotente d'ordre k s'il existe un entier k tel que pour tout entier $r > k$, $A^r = [0]$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{On a } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \forall k > 1 \quad A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où } e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

2.7.4.2. Méthode de la transformée de Laplace

Cette méthode est basée sur l'utilisation de la transformée de Laplace inverse:

$$e^{At} = TL^{-1}\left((pI - A)^{-1}\right)$$

En utilisant cette propriété, on peut calculer $e^{A \cdot t}$ en adoptant la démarche suivante:

- Déterminer $(pI - A)$
- Calculer $(pI - A)^{-1}$
- Appliquer la transformée de Laplace inverse à $(pI - A)^{-1}$ pour déduire e^{At}

Exemple 1 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$p.I - A = \begin{bmatrix} p & -3 \\ 0 & p \end{bmatrix} \Rightarrow (p.I - A)^{-1} = \frac{1}{p^2} \begin{bmatrix} p & 3 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \frac{3}{p^2} \\ 0 & \frac{1}{p} \end{bmatrix} \xRightarrow{TL^{-1}} e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

2.7.4.2. Méthode de la transformée de Laplace

Exemple 2

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad p.I - A = \begin{bmatrix} p+3 & 2 \\ -1 & p \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (p.I - A)^{-1} &= \frac{1}{p^2 + 3p + 2} \begin{bmatrix} p & -2 \\ 1 & p+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{(p+1)(p+2)} \begin{bmatrix} p & -2 \\ 1 & p+3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{p}{(p+1)(p+2)} & \frac{-2}{(p+1)(p+2)} \\ \frac{1}{(p+1)(p+2)} & \frac{p+3}{(p+1)(p+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(p+1)} + \frac{2}{(p+2)} & \frac{-2}{(p+1)} + \frac{2}{(p+2)} \\ \frac{1}{(p+1)} - \frac{1}{(p+2)} & \frac{2}{(p+1)} - \frac{1}{(p+2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} e^{At} &= \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

2.7.4.3. Méthode de diagonalisation de la matrice d'état

Résultat 1

- Si la matrice A est une matrice diagonale :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

alors la matrice e^{At} est donnée par :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

Résultat 2

- Toute matrice carrée A de dimension n possédant n valeurs propres distinctes est diagonalisable sous la forme:

$$A = T \cdot \Delta \cdot T^{-1}$$

- T : matrice de passage formées par les composantes des vecteurs propres de A .
- Δ : matrice diagonale constituée par les valeurs propres de A .

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

2.7.4.3. Méthode de diagonalisation de la matrice d'état

En appliquant ces résultats et le développement de e^{At} en série de Taylor, on peut montrer le résultat suivant:

$$e^{At} = T.e^{\Delta t}.T^{-1}$$

En utilisant ce résultat, on peut calculer e^{At} en adoptant la démarche suivante:

- étape 1** : Calculer les valeurs propres de A .
- étape 2** : Déterminer les vecteurs propres de A .
- étape 3** : Construire T et Δ
- étape 4** : Calculer T^{-1} et $e^{\Delta t}$
- étape 5** : Calculer e^{At} .

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

2.7.4.3. Méthode de diagonalisation de la matrice d'état

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

•étape 1 : Calculer les valeurs propres de A .

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

•étape 2 : Déterminer les vecteurs propres de A .

$$A.V_i = \lambda_i.V_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \lambda_i \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_i - 2y_i = \lambda_i x_i \\ x_i = \lambda_i y_i \end{cases}$$

$$\bullet \lambda_1 = -1 \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \bullet \lambda_2 = -2 \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

•étape 3 : Construire T et Δ

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

•étape 4 : Calculer T^{-1} et $e^{\Delta t}$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e^{\Delta t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

•étape 5 : Calculer e^{At} .

$$e^{At} = T.e^{\Delta t}.T^{-1}$$

$$\Leftrightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$