Cours Traitement du Signal

Chapitre 3 : Etude des signaux deterministes dans le domaine temporel

Zakia Jellali

Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Gabès

Année Universitaire 2020 – 2021

Table des matières

Introduction

Avant d'étudier l'aspect fréquentiel des signaux, un des principaux outils d'étude et de traitement des signaux, nous allons étudier plusieurs de leur aspects temporels. Nous présentons ici les notions essentielles liées aux notions du produit de convolution et de fonctions de corrélation des signaux. Notamment, les signaux deterministes à temps continu ainsi qu'à temps discret ont été considérés.

Première partie

Cas des Signaux Continus

I.1 Représentation vectorielle des signaux

I.1.1 Produit scalaire

- Le produit scalaire de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ définis sur $[-\infty, +\infty]$ est :

$$< x, y >= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).y^*(t)dt, \tag{1}$$

  avec * représente la conjugaison complexe.

- Le produit scalaire possède **la symétrie hermitienne** : $< x, y >=< y, x >^*$
- Cas des signaux réels :

$$< x, y >= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).y(t)dt. \tag{2}$$

- pour $t_1 < t < t_2$, on a :

$$< x, y >= \int_{t_1}^{t_2} x(t).y^*(t)dt. \tag{3}$$

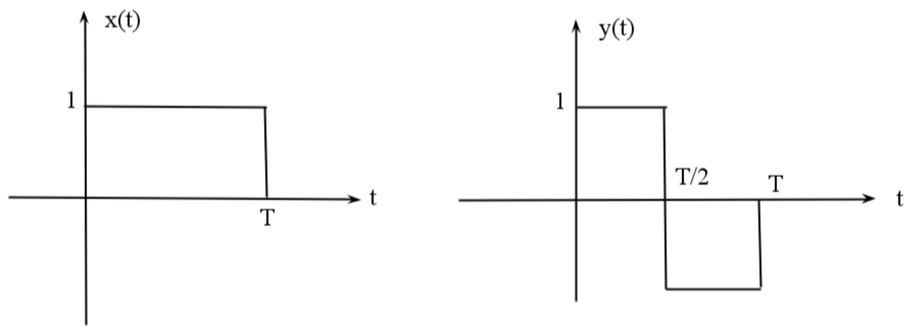
- Deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont orthogonaux sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ si :
  leur produit scalaire est nul : $< x, y >= 0$.
- Comparer un signal avec lui-même :
  1. La notion du produit scalaire nous permet de comparer deux signaux et définir la notion d'orthogonalité pour les signaux,

2. Produit scalaire d'un signal par lui même :

$$< x, x >= \|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x, \quad (4)$$

Lorsqu'on fait le produit scalaire d'un signal par lui même, on obtient son énergie.

- Exemples
  1. Exemple 1 : calculer le produit scalaire de deux signaux suivants $x(t)$ et $y(t)$.



  2. Exemple 2 : calculer le produit scalaire du signal $x(t)$ avec l'impulsion de Dirac $\delta(t)$.

I.1.2 Produit de convolution

I.1.2.1 Définition et propriétés

- **Définition**

Le produit de convolution de deux signaux, $x(t)$ et $y(t)$ continus, noté généralement par $(x * y)(t)$ ou $x(t) * y(t)$ est défini par :

$$(x * y)(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u).y(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} y(u).x(t-u)du. \quad (5)$$

- **Calcul**
  1. Visualiser $y(t-u)$: symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et décalage de t,
  2. Multiplier $x(u)$ par $y(t-u)$,
  3. Calculer la somme algébrique des aires sous la courbe $x(u).y(t-u)$
- **Propriétés**
  1. Commutativité : $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$,
  2. Associativité : $(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$,
  3. Distributivité : $x(t) * (y(t) + z(t)) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$.

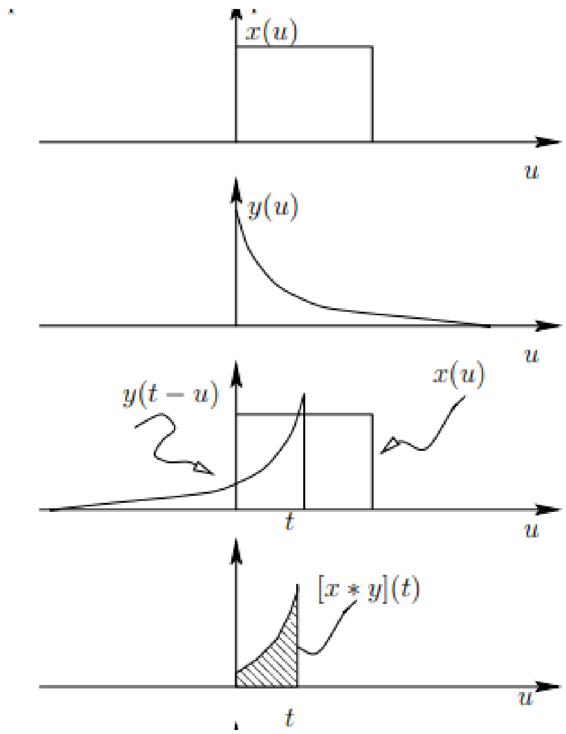


FIGURE 1 – Illustration graphique des étapes du calcul de la convolution.

I.1.2.2 Produit de convolution avec impulsion de Dirac

- **Element neutre** : l'élément neutre de la convolution est la fonction delta de Dirac :

$$\boxed{x(t) * \delta(t) = x(t)}$$

- **Translation (décalage)**

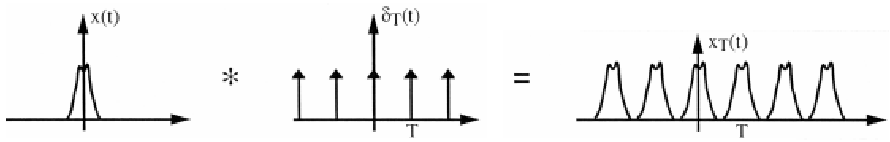
$$\boxed{x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)},$$

$$\boxed{x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - t_1 - t_2)}$$

- **Exemples** : Montrer les propriétés suivantes :
  1. $x(t) * \delta(t) = x(t)$,
  2. $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$,
  3. $x(t) * \epsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} x(u)du$.
- **Périodisation du signal** $x(t)$

$$x(t) * \delta_T(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) * \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT) = x_T(t),$$

⇒ La convolution d'un signal par peigne de Dirac permet de périodiser le signal $x(t)$:



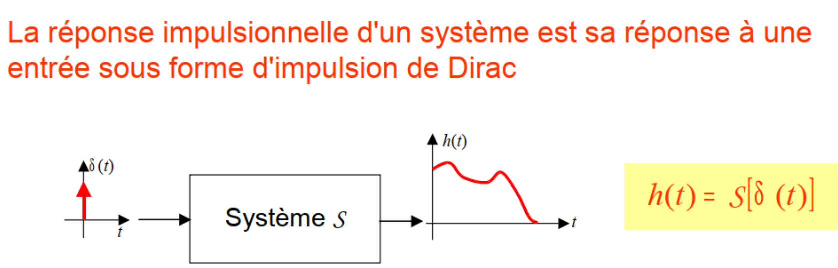
Remarque : convolution des signaux périodiques

Pour deux signaux périodiques $x(t)$ et $y(t)$, de période T, on définit le produit de convolution par :

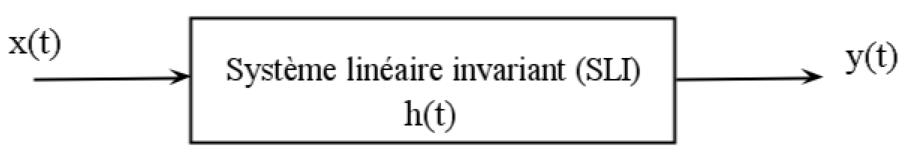
$$x(t) * y(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(u).y(t-u)du. \tag{6}$$

I.1.2.3 Réponse impulsionnelle d'un système

- Le produit de convolution est un outil essentiel pour l'étude des phénomènes physiques. De nombreux systèmes opèrent comme des filtres où un signal d'entrée est modifié après passage par le système.
- Sous l'hypothèse de linéarité et d'invariance dans le temps (**système linéaire invariant, SLI**), le signal de sortie s'exprime sous forme du produit de convolution du signal d'entrée pour une fonction qui dépend du système étudié : réponse impulsionnelle.
- La réponse impulsionnelle du système est sa réponse à une entrée sous forme d'impulsion de Dirac :



Alors, pour un système linéaire invariant (SLI), le signal à la sortie $y(t)$ n'est que le produit de convolution du signal d'entrée $x(t)$ par la réponse impulsionnellle $h(t)$ du système :



$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u).h(t-u)du.}$$

Démonstration : le système doit être linéaire et invariant par translation dans le temps pour avoir une relation de convolution entre le signal d'entrée et le signal de sortie :

$$\begin{array}{rcll}
\delta(t) & \mapsto & h(t) & \\
\delta(t-\tau) & \mapsto & h(t-\tau) & \text{invariance par translation dans le temps} \\
x(\tau)\delta(t-\tau) & \mapsto & x(\tau)h(t-\tau) & \text{linéarité} \\
\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau}_{x(t)} & \mapsto & \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau}_{y(t)} & \text{linéarité}
\end{array}$$

I.2 Corrélation des signaux

- Pour comparer deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, on peut calculer leur produit scalaire (mesure de leur similitude de forme).
- Afin de mieux comprendre et comparer les signaux, on doit aussi tenir compte du décalage temporel : mesure de la similitude en fonction du paramètre de translation : corrélation.
- La corrélation est une mesure énergétique de la similitude (ressemblance) de forme et de position entre deux signaux décalés.

I.2.1 Fonction de corrélation des signaux à énergie finie

- **Intercorrélation** : On appelle fonction d'intercorrélation (corrélation croisée) de deux signaux à énergie finie $x(t)$ et $y(t)$ la fonction :

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).y^*(t-\tau)dt, \tag{7}$$

  avec * est la conjugaison complexe.

- **Autocorrélation** : on appelle fonction d'autocorrélation d'un signal à énergie finie $x(t)$ la fonction :

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).x^*(t-\tau)dt. \tag{8}$$

  Remarque

  La fonction de corrélation (intercorrélation, autocorrélation) est égale au produit scalaire hermitien :

1. $R_{xy}(\tau) =< x, y_\tau >$, avec $y_\tau(t) = y(t-\tau)$
2. $R_{xx}(\tau) =< x, x_\tau >$, avec $x_\tau(t) = x(t-\tau)$

- **Propriétés**

1. $R_{xy}(\tau) = 0$ signifie que les signaux sont totalement décorrélés (indépendants).
2. La fonction d'autocorrélation, R_{xx} est égale en $\tau = 0$ à

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).x^*(t)dt == \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x,$$

$\Rightarrow$ L'autocorrélation est homogène à une énergie ($R_{xx}(0) = E_x$).

3. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz : $| < x, y > |^2 \leq ||x||^2.||y||^2$:

$$\boxed{|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_{xx}(0).R_{yy}(0) = E_x.E_y}$$

<u>Cas particulier</u> : Pour la fonction d'autocorrélation, on a

$$\boxed{|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0) = E_x}$$

$\Rightarrow$ La fonction d'autocorrélation admet une valeur maximale en $\tau = 0$: la ressemblance est maximale lorsqu'on compare un signal avec lui-même.

4. La fonction de corrélation (intercorrélation, autocorrélation) est à symétrie hermitienne :
   (a) $R_{xy}(-\tau) = R^*_{yx}(\tau)$,
   (b) $R_{xx}(-\tau) = R^*_{xx}(\tau)$,
5. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont réels on a
   (a) $R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).y(t-\tau)dt$,
   (b) $R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).x(t-\tau)dt$,
   (c) $R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau)$,
   (d) $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$.

   $\Rightarrow$ La fonction d'autocorrélation d'un signal réel est une fonction réelle et paire.

I.2.2 Fonction de corrélation des signaux à puissance moyenne finie

- Pour des signaux $x(t)$ et $y(t)$ à puissance moyenne finie, on définit l'intercorrélation et l'autocorrélation respectivement par les fonctions suivantes :

1. $R_{xy}(\tau) = \lim\limits_{T\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t).y^*(t-\tau)dt,$
2. $R_{xx}(\tau) = \lim\limits_{T\to+\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t).x^*(t-\tau)dt.$

- Pour des signaux $x(t)$ et $y(t)$ périodiques de même période T :
  1. $R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t).y^*(t-\tau)dt,$
  2. $R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t).x^*(t-\tau)dt.$
- **Quelques propriétés**

  Les propriétés vues précédement restent vraies.

  1. Lorsque les signaux sont réels, la fonction d'autocorrélation est aussi réelle et paire :

  $$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$$

  2. La valeur à l'origine de la fonction d'autocorrélation $R_{xx}(0)$ correspond à la puissance moyenne P_x du signal :

  $$R_{xx}(0) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = P_x.$$

  3. Une propriété importante est que la fonction de corrélation (intercorrélation, autocorrélation), définie pour les signaux périodiques de période $T > 0$, est également périodique de période T :

  $$R_{xy}(\tau + T) = R_{xy}(\tau), \text{ et } R_{xx}(\tau + T) = R_{xx}(\tau).$$

I.2.3 Exemples

1. Calculer la fonction d'autocorrélation de la fonction $rect\left(\frac{t}{T}\right)$,
2. Calculer la fonction d'intercorrélation entre la fonction échelon unité et $rect\left(\frac{t}{T}\right)$.

I.2.4 Illustrations

- Fonction d'intercorrélation

  Les figures 2 et 3 illustrent respectivement deux signaux, $x(t)$ et $y(t)$, et leur fonction d'intercorrélation. Dans ce cas, on a :

  • $y(t)$ est une version décalée de $x(t)$

  • $y(t)$ est en retard de $t_0 = 32 - 11 = 21$

  • La fonction d'intercorrélation admet un pic en $\tau = -21$

• Elle permet donc de détecter un retard : $y(t)$ est en retard (valeur négative) de 21 sec sur $x(t)$

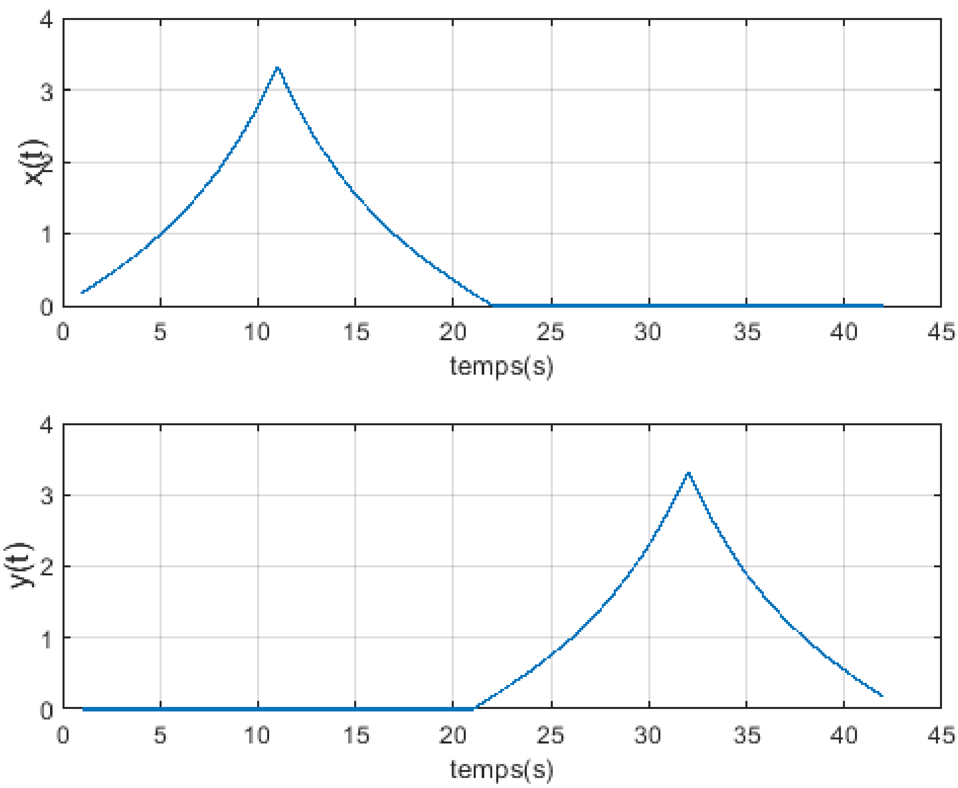


Figure 2 – Signal $x(t)$ et sa version décalée $y(t)$

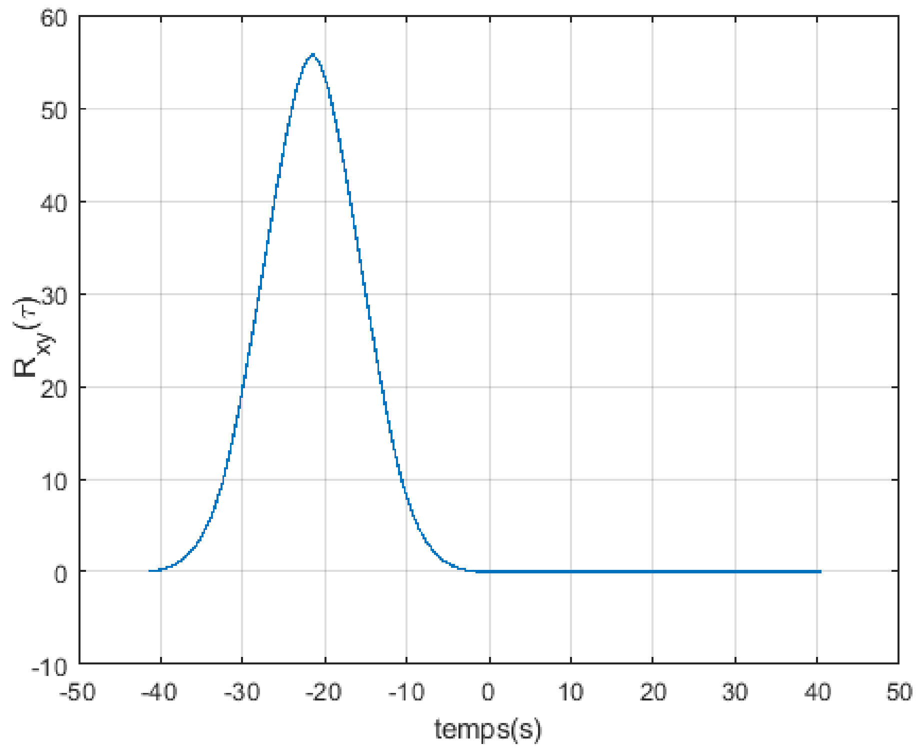


FIGURE 3 – Fonction d'intercorrélation de $x(t)$ et $y(t)$, $R_{xy}(\tau)$.

- Fonction d'autocorrélation
  On présente ici trois exmples de calcul d'autocorrélation données par les figures 4, 5, 6.

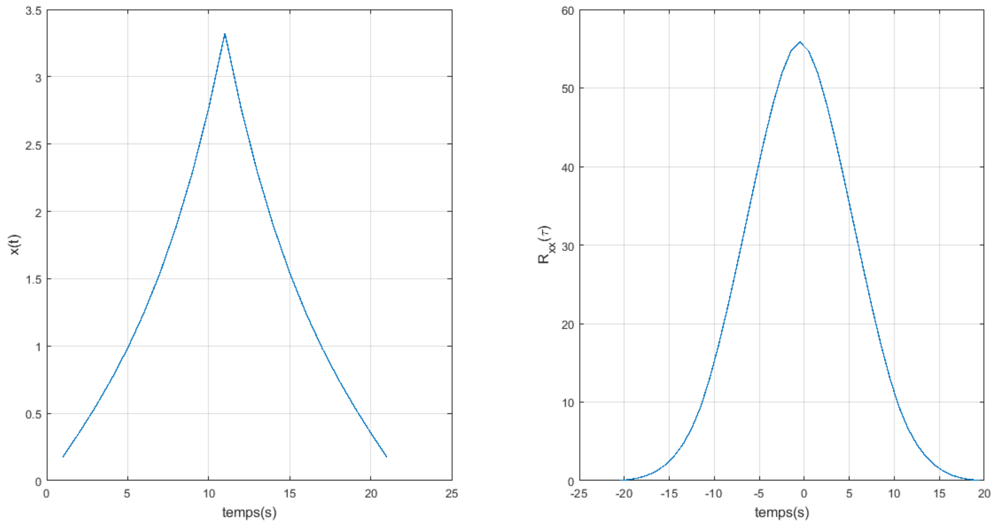


FIGURE 4 – signal $x(t)$ et son autocorrélation $R_{xx}(\tau)$

- $x(t)$: support temporel $[0, 20]$
- $x(t)$ ne présente pas de répétitions

- $R_{xx}(\tau)$ a un support temporel $[-20, 20]$
- $R_{xx}(\tau)$ ne présente pas de signes distinctifs.

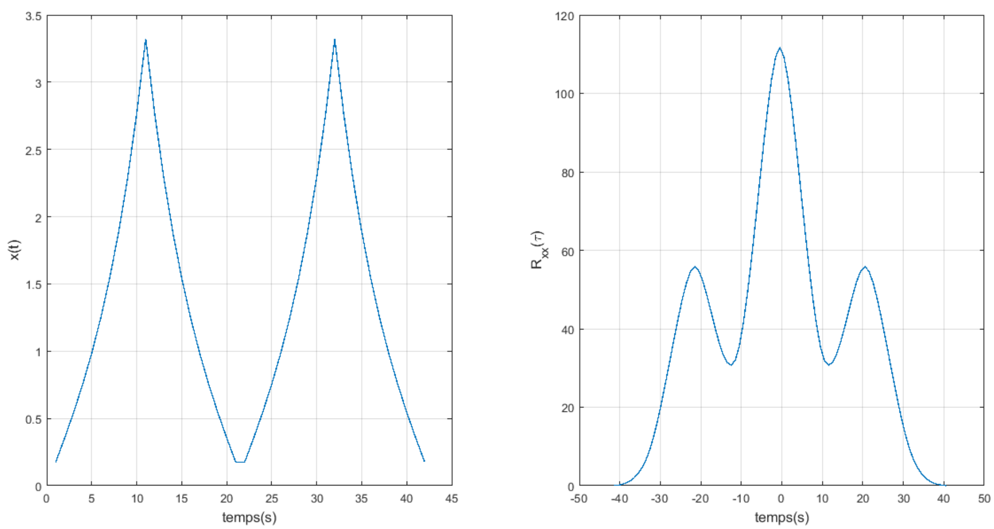


FIGURE 5 – Signal $x(t)$ et sa fonction d'autocorrélation, $R_{xx}(\tau)$.

- $x(t)$: support temporel $[0, 40]$
- $x(t)$ présente une répétition : le même motif se répéte deux fois

- $R_{xx}(\tau)$ a un support temporel $[-40, 40]$
- $R_{xx}(\tau)$: deux pics en ± 20 : le signal original se répéte au bout de 20 secondes.

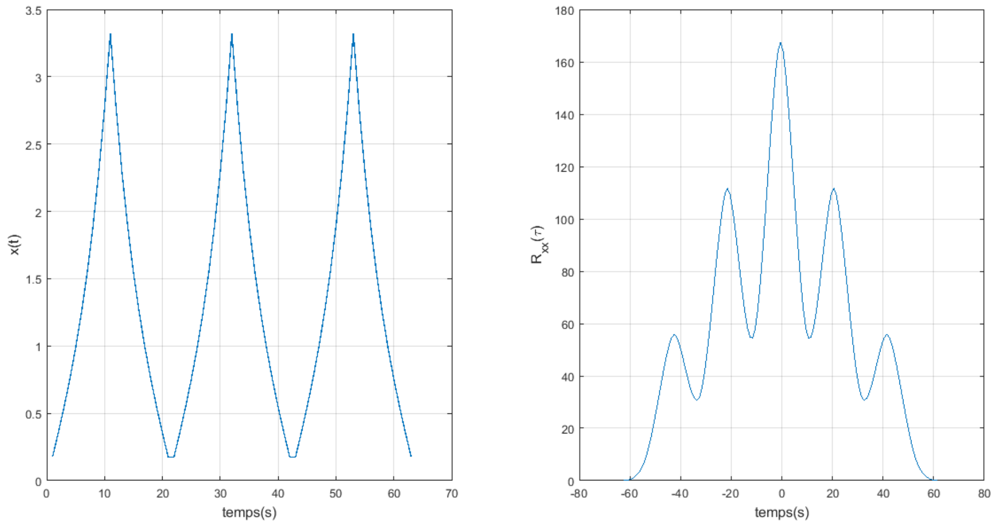


FIGURE 6 – Signal $x(t)$ et sa fonction d'autocorrélation, $R_{xx}(\tau)$.

- $x(t)$: support temporel $[0, 60]$
- $x(t)$ se répéte à $t = 20$ et $t = 40$
- $R_{xx}(\tau)$ a un support temporel $[-60, 60]$
- $R_{xx}(\tau)$: des pics en $\tau \pm 20$, $\tau \pm 40$

I.2.5 Relation entre corrélation et convolution

- Mathématiquement, on peut écrire la fonction d'intercorrélation de $x(t)$ et de $y(t)$, à énergie finie, comme le produit de convolution de $x(t)$ et de $y^*(-t)$:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).y^*(t-\tau)dt, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u).y^*(u-\tau)du, \\ &= x(\tau) * y^*(-\tau). \end{aligned}$$

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)}$$

- Pour la fonction d'autocorrélation de $x(t)$, on obtient de manière analogue

$$\boxed{R_{xx}(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)}$$

- Dans le cas de **signaux réels**, on obtient

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y(-\tau), \text{ et } R_{xx}(\tau) = x(\tau) * x(-\tau)}$$

I.2.6 Quelques applications de la corrélation

1. Autocorrélation appliquée à l'extraction d'information d'un signal dégradé (reconnaissance des signaux noyés dans le bruit) :
   Un signal $x(t)$ est transmis puis mesuré par un système d'acquisition. Ces différentes opérations entraînent une dégradation du signal initial. Le signal mesuré $x_m(t)$ peut être représenté

$$x_m(t) = x(t) + b(t), \tag{9}$$

avec $b(t)$ représente l'effet de la dégradation du signal (il s'agit d'un bruit). Supposons que le signal $x(t)$ est un signal sinusoïdal. Le signal reçu $x_m(t)$ est noyé dans un bruit de telle sorte qu'il est difficile de distinguer le signal sinusoïdal comme il est représenté par la figure 7. Afin d'extraire l'information utile du signal reçu (signal sinusoïdal), on peut exploiter les

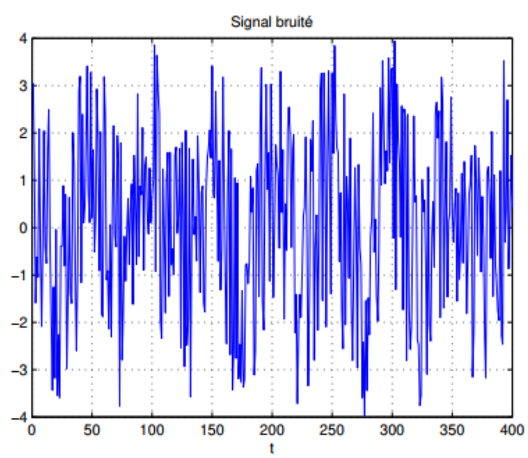


Figure 7 – Signal mesuré bruité.

propriétés de corrélation. En fait, une hypothèse plus réaliste est de supposer que les signaux $x(t)$ et $b(t)$ sont indépendants car résultant de systèmes Lephysiques différents. On peut alors exploiter l'autocorrélation du signal reçu $x_m(t)$. Une estimé de l'autocorrélation $R_{x_m x_m}(\tau)$ est donnée par la figure 8. On peut l'interpréter comme suit : Le signal $b(t)$ est corrélé avec lui-même mais n'est pas corrélé avec lui même décalé dans le temps. Ceci indiquerait que ce signal ne présente pas de structure ou de propriété particulière (périodicité, etc..). Le reste de

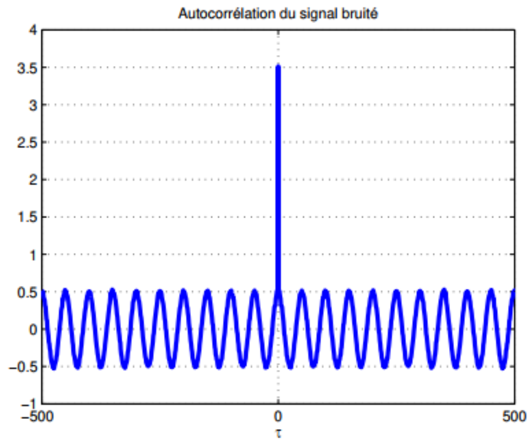


FIGURE 8 – Autocorrélation $R_{x_m}(\tau)$.

la courbe d'autocorrélation est la courbe caractéristique d'une fonction cosinus d'amplitude 0.5 et de période 50 s.

2. Intercorrélation appliquée à la mesure d'un temps de propagation :
   L'intercorrélation est souvent appliquée pour la détermination d'un temps de propagation. Ceci est exploité par exemple par les radars et les sonars ou encore les télémètres et les chauve-souris. L'intérêt est de déterminer la distance à laquelle se trouve un objet appelé cible. Pour cela, on émet un signal $x(t)$ sous la forme d'une onde. Après réflexion, un écho $y(t)$ revient vers l'émetteur. Le principe est que connaissant la vitesse de propagation de l'onde, le temps écoulé entre l'émission et la réception permet de déterminer la distance. Cependant, la présence de bruit dans le signal $y(t)$ rend difficile la mesure du temps. Donc, on recourt au calcul de la fonction d'autocorrélation du $x(t)$ et l'intercorrélation de $x(t)$ et $y(t)$ pour estimer le temps de propagation.

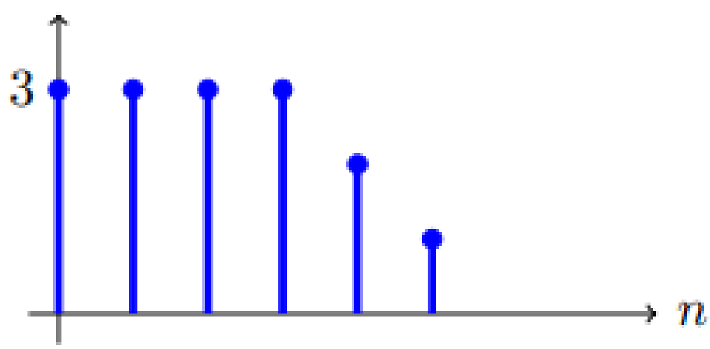
Deuxième partie

Cas des signaux discrets

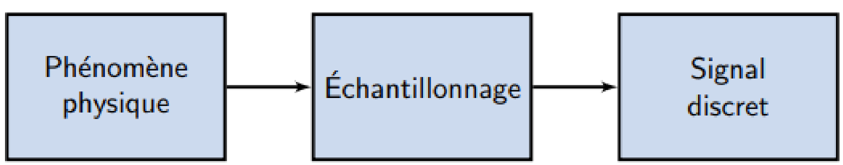
II.1 Signaux discrets

- **Définitions**

  1. Un phénomène physique, qui est continu, lorsqu'on l'enregistre sur ordinateur, devient une séquence discrète.
  2. Un signal discret ou échantillonné est une séquence ordonnée de valeurs correspondant à un entier n qui représente l'histoire en fonction du temps d'un signal.
  3. Un signal discret est représenté en fonction du numéro (indice) de l'échantillon n, et non en fonction du temps. On utilise $x(n)$ au lieu de $x(t)$ pour représenter un signal discret
  4. Exemple : La séquence pour ce signal est : $x(n) = \{3, 3, 3, 3, 2, 1\}$



- **Echantillonnage**



1. L'échantillonnage est une composante très importante dans la phase de numérisation des signaux analogiques. Il permet de convertir un signal continu à un signal discret.

2. L'échantillonnage, c'est aller lire la valeur d'un signal continu à des intervalles fixes.
   Soit T_e l'intervalle du temps entre chaque échantillon :
   T_e : période déchantillonnage, $F_e = \frac{1}{T_e}$: fréquence d'échantillonnage. Pour un signal continu $x(t)$, qu'on échantillonne à toutes les T_e secondes, on obtient un signal discret $x(n)$:

$$x(t) \rightarrow x(nT_e) = x(n), \text{ avec } n = 0, 2, 3, \ldots, N - 1.$$

3. Pour bien effectuer la reconstruction d'un signal, il faut prendre un nombre suffisant d'échantillons.

II.2 Propriétés temporelles

- **Symétrie**
  - Un signal est pair si : $x(n) = x(-n)$,
    on utilise souvent $x_e(n)$ pour indiquer un signal pair.
  - Un signal est impair si : $x(n) = -x(-n)$,
    on utilise souvent $x_o(n)$ pour indiquer un signal impair.
  - N'importe quel signal $x(n)$ peut être décomposé en une somme d'un signal pair et un signal impair :

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

    Avec :

$$x_e(n) = \frac{1}{2}\left(x(n) + x(-n)\right)$$
$$x_o(n) = \frac{1}{2}\left(x(n) - x(-n)\right)$$

- **Périodicité**
  - Un signal discret périodique se répète à tous les N échantillons, de sorte que :

$$x(n) = x(n \pm kN), \ k = 1, 2, 3, \ldots,$$

  - La période N est le plus petit nombre d'échantillons qui se répètent. La période est toujours un entier.
- **Valeur moyenne**

La valeur moyenne d'un signal discret est :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

- **Energie**
  L'énergie d'un signal discret est :

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

- **Puissance**
  La puissance d'un signal discret est :

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

II.3 Opérations de base

1. **Produit scalaire**
   Le produit scalaire de deux signaux réels, $x(k)$ et $y(k)$ est défini par

$$\boxed{< x, y >= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n)}$$

2. **Produit de convolution**
   Le produit de convolution de deux signaux, $x(k)$ et $y(k)$ à temps discret est défini par

$$\boxed{x(k) * y(k) = (x * y)(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).y(k-n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n).x(k-n)}$$

3. **Corrélation**
   (a) Pour les signaux discrets à énergie finie :
      i. La fonction d'intercorrélation est définie par

$$R_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).y^*(k-n), \;\; x(k) \text{ et } y(k) \text{ sont complexes}$$

$$R_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).y(k-n), \; x(k) \text{ et } y(k) \text{ sont réels}$$

ii. La fonction d'autocorrélation est défini par

$$R_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).x^*(k-n), \; x(k) \text{ est complexe}$$

$$R_{xx}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k).x(k-n), \; x(k) \text{ est réel}$$

(b) Pour les signaux discrets à puissance moyenne non nulle, périodique de période N :

i. La fonction d'intercorrélation est définie par

$$R_{xy}(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} x(k).y^*(k-n), \; x(k) \text{ et } y(k) \text{ sont complexes}$$

$$R_{xy}(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} x(k).y(k-n), \; x(k) \text{ et } y(k) \text{ sont réels}$$

ii. La fcontion d'autocorrélation est défini par

$$R_{xx}(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} x(k).x^*(k-n), \; x(k) \text{ est complexe}$$

$$R_{xx}(n) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} x(k).x(k-n), \; x(k) \text{ est réel}$$

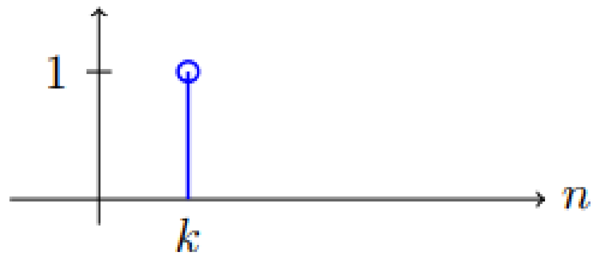
II.4 Fonctions usuelles

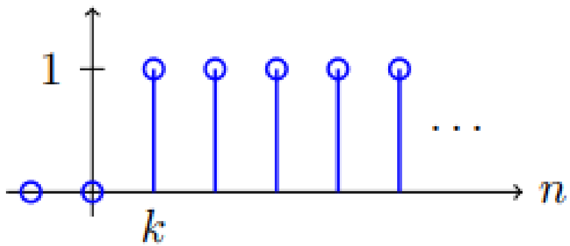
- **Impulsion de Dirac**

$$\delta(n-k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k, \\ 1 & \text{si } n = k, \end{cases} \tag{10}$$

- **Echelon unité**

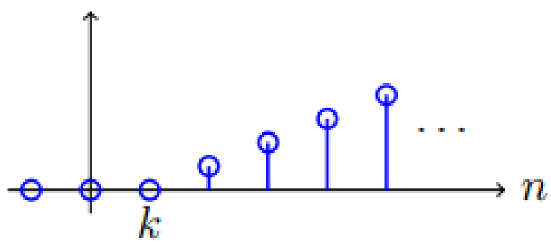
$$\epsilon(n-k) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq k, \\ 0 & \text{si } n < k, \end{cases} \tag{11}$$





- **Rampe**

$$r(n-k) = \begin{cases} n-k & \text{si } n \geq k, \\ 0 & \text{si } n < k, \end{cases} \tag{12}$$



- **Rectangulaire**

$$rect\left(\frac{n}{2N}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| < N, \\ 0 & \text{ailleurs ,} \end{cases} \tag{13}$$

- **Trinagulaire**

$$tri\left(\frac{n}{N}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N} & \text{si } |n| < N, \\ 0 & \text{ailleurs ,} \end{cases} \tag{14}$$

- **Sinus cardinale**

$$\sin_c\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{N}\right)}{\frac{n\pi}{N}}. \tag{15}$$

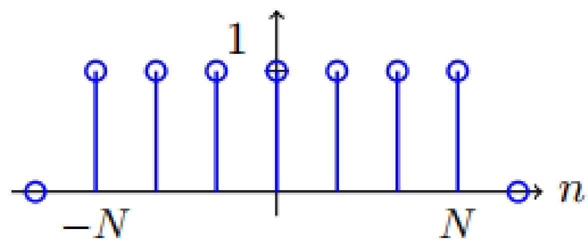


FIGURE 9 – fonction rectangle à temps discret

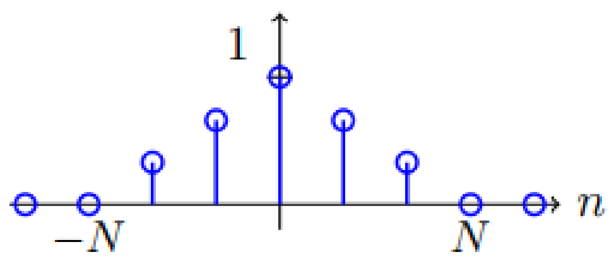


FIGURE 10 – fonction trinagulaire à temps discret

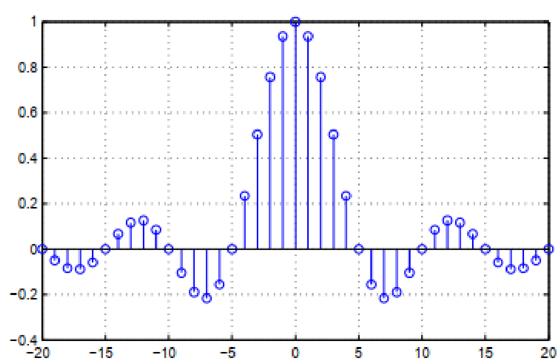


FIGURE 11 – Sinus cardinale à temps discret