Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès
Département de Génie Electrique-Automatique

Analyse des Processus

Première Année Génie Electrique-Automatique

Kamel ABDERRAHIM
Professeur en Génie Electrique
Ecole Nationale d'ingénieurs de Gabès

Zeineb LASSOUED
Maître-Assistante en Génie Electrique
Ecole Nationale d'ingénieurs de Gabès

Module : Analyse des Processus Première Année Génie Electrique- Automatique

Objectif

Ce cours présente les études d'analyse et de commande des systèmes linéaires continus et échantillonnés à l'aide d'une approche d'état.

Programme

- Chapitre 1. Généralités sur les systèmes dynamiques
- Chapitre 2. Représentation d'état des systèmes linéaires continus
- Chapitre 3. Représentation d'état des systèmes linéaires échantillonnés
- Chapitre 4. Commandabilité et observabilité
- Chapitre 5. Commande par retour d'état

Volume horaire

Cours : 20 H - Travaux Dirigés : 10 H

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques

1.1. Introduction

Ce chapitre présente un rappel des quelques notions de base de la modélisation des systèmes dynamiques qui est indispensable pour l'étude et l'analyse des systèmes par approche d'état; à savoir :

- Principales définitions et propriétés des systèmes dynamiques.
- Modélisation dynamique.
- Classes de systèmes dynamiques.
- Propriétés des systèmes dynamiques.
- Représentations des systèmes dynamiques (temporelle, fréquentielle et d'état).
- Représentation d'état.

1.2. Système (1/7)

1.2.1. Définition

Un **système** est un ensemble d'éléments interagissant entre eux selon certains principes ou règles.

Exemples

- **Engineering :** Système électrique ou mécanique (*Appareillage formé de divers éléments et assurant une fonction déterminée*).
- **Informatique :** Système d'exploitation (*logiciel assurant la gestion du fonctionnement d'un ordinateur*).
- **Mathématiques :** Système d'équations (*ensemble d'équations qui doivent être satisfaites simultanément*).
- **Météorologie :** Système nuageux (*ensemble des différents types de nuages qui accompagnent une perturbation complète*).
- **Economie :** Système économique (*mode d'organisation général des institutions qui régit l'activité économique : le système libéral, le système socialiste*).
- etc.

1.2. Système (2/7)

1.2.1. Définition

Remarques

En analysant ces exemples, on peut tirer les remarques suivantes :

- La notion de système est large, pour ne pas dire vague. Le seul point commun entre le système électrique, le système d'équations ou le système solaire est, justement, le mot **système**, c'est-à-dire un ensemble d'éléments.
- Les systèmes peuvent être de natures différentes. On parle par exemple de système:
  - **Vivant :** Colonie de souris blanches (système pour un biologiste).
  - **Matériel :** perceuse électrique, avion (système pour un ingénieur).
  - **Abstrait :** Algorithme qui s'exécute dans un ordinateur (système pour un informaticien).
  - **Organisationnel :** Interaction entre des lois, des produits et des individus (système pour un juriste ou un économiste).

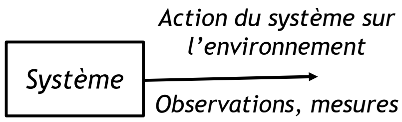
1.2. Système (3/7)

1.2.2. Interaction avec l'environnement

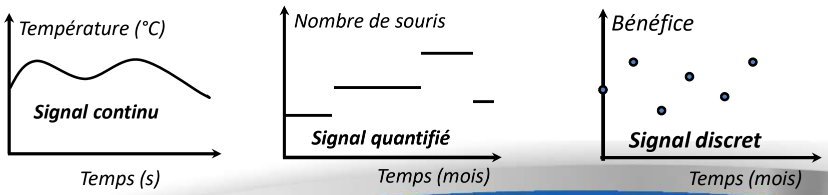
L'interaction du système avec son environnement est assurée par les entrées, les sorties et les perturbations.

- **Sorties**

  - Les **Sorties** sont les actions du système sur l'environnement et les grandeurs observées ou mesurées.



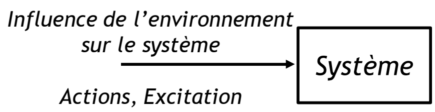
  - Une suite d'observations réalisées au cours du temps constitue un signal temporel qui peut être continu, quantifié ou discret.



1.2. Système (4/7)

1.2.1. Interaction avec l'environnement

- **Entrées**
  - Un système peut être influencé par un apport d'énergie, de matière ou d'information.
  - Ces actions extérieures, le plus souvent souhaitables et ajustables, qui agissent sur le système sont appelées **Entrées**.

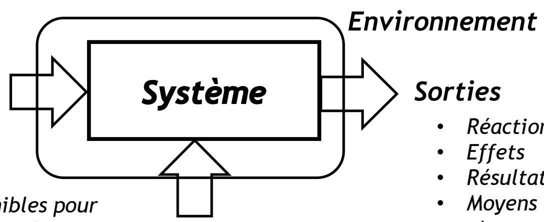


- **Perturbations**
  - Les **perturbations**, comme les entrées, sont des actions qui s'exercent sur le système.
  - Contrairement aux entrées, les perturbations sont généralement inconnues, non ajustables et présentent souvent un caractère imprévisible (aléatoire).
  - Des actions connues mais négligées peuvent également être considérées comme des perturbations. Ce sont des grandeurs qui influencent le système mais que l'observateur ne peut pas ou ne veut pas ajuster.

1.2.2. Interaction avec l'environnement

- **Structure générale d'un système**

Les différentes interactions d'un système avec son environnement sont représentées sur la figure suivante:



Entrées

- *Actions*
- *Causes*
- *Données*
- *Moyens disponibles pour influencer le système*
- *Influences de l'environnement sur le système*
- *Excitation du système*
- *Grandeurs ajustées*

Perturbations

- *Souvent inconnues*
- *Indésirables*
- *Non ajustables*
- *Souvent négligées*
- *Déterministes ou aléatoires*

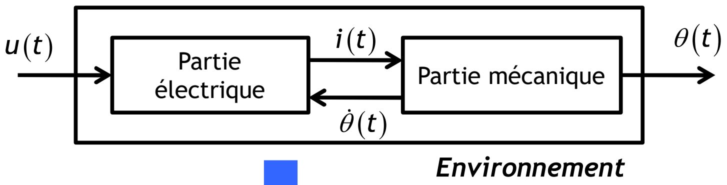
Sorties

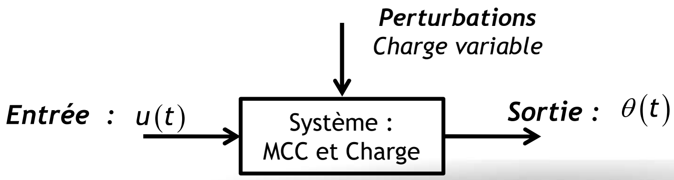
- *Réactions*
- *Effets*
- *Résultats*
- *Moyens disponibles pour observer le système*
- *Influences du système sur l'environnement*
- *Réponse du système*
- *Grandeurs observées*

1.2.2. Interaction avec l'environnement

- **Exemple**

Moteur à courant continu à excitation séparée couplé à une charge





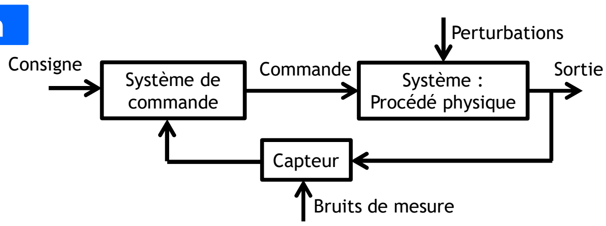
1.2. Système (7/7)

1.2.3. Problématique principale de l'automatique

Problème

Maintenir la sortie du procédé à commander au voisinage de la consigne indépendamment des perturbations qui affectent le fonctionnement du procédé.

Solution



Pour résoudre ce problème, on peut suivre la démarche suivante :

- **Etape 1 :** Modélisation du procédé à commander.
- **Etape 2 :** Synthèse du système de commande (Régulateur) permettant d'obtenir les performances désirées en boucle fermée (stabilité, précision et rapidité).
- **Etape 3 :** Mettre en œuvre le système de commande.

Page 11

1.3. Modélisation dynamique (1/3)

1.3.1 Définition

La modélisation dynamique est une opération permettant de construire le modèle d´évolution d'un système dans le temps ainsi que la séquence de ses opérations.

Remarques

- La modélisation se traduit donc par une relation mathématique entre les variables d'entrée, les variables de sortie, les variables internes et les paramètres du système à modéliser.
- La forme générale de modèle mathématique d'un système peut être comme suit :

Paramètres

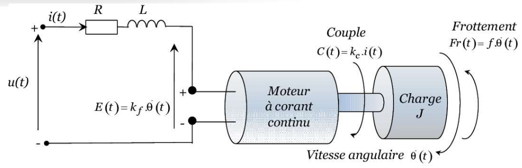
$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = f_1\left(y_1(t),\cdots,y_n(t),u_1(t),\cdots,u_m(t),\theta(t),P(t),t\right) \\ \dot{y}_2(t) = f_1\left(y_1(t),\cdots,y_n(t),u_1(t),\cdots,u_m(t),\theta(t),P(t),t\right) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) = f_n\left(y_1(t),\cdots,y_n(t),u_1(t),\cdots,u_m(t),\theta(t),P(t),t\right) \end{cases}$$

Sorties Entrées Variables internes

Page 12

1.3. Modélisation dynamique (2/3)

Exemple Moteur à courant continu à excitation séparée couplé à une charge



Lois utilisées

- *Equation électrique :*

$$u(t) = R.i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + K_f.\dot{\theta}(t)$$

- *Equation mécanique :*

$$J.\ddot{\theta}(t) = K_c.i(t) - f.\dot{\theta}(t)$$

Modèle mathématique du système

$$L.J.\frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + (R.J + L.f)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + (R.f + K_f.K_c)\frac{d\theta(t)}{dt} = K_c.u(t)$$

1.3. Modélisation dynamique (3/3)

Objectifs de la modélisation

- La modélisation des systèmes dynamiques joue un rôle essentiel aussi bien dans les sciences de l'ingénieur que dans de nombreux domaines comme la météorologie, l'économie, l'écologie, la médecine, etc.
- Un modèle mathématique peut être utilisé à différentes fins :
  - Etude/Prédiction du comportement d'un système sous l'effet de diverses consignes ou perturbations (variations de paramètres, bruits de capteurs et des actionneurs, etc.)
  - Conception d'un système de commande : la plupart des méthodes modernes de synthèse de correcteurs reposent sur l'utilisation d'un modèle du système à commander.
  - Détection des anomalies et détection des pannes.
  - Formation d'un opérateur (simulation).
  - Détermination des grandeurs pour lesquelles aucune mesure n'est disponible.

1.4. Classes de systèmes (1/6)

Les systèmes, tout comme leurs modèles, peuvent être de natures fort diverses. On les distingue selon les caractéristiques suivantes :

- Dynamique ou Statique
- Monovariable ou Multivariable
- Déterministe ou Stochastique
- Paramètres localisés ou Paramètres repartis
- Paramétrique ou Non Paramétrique
- Continu ou Echantillonné (discret)

1.4. Classes de systèmes (2/6)

1.4.1. Dynamique / Statique

- Un système est **dynamique** si son comportement à un instant donné dépend non seulement des entrées présentes mais aussi des entrées passées. On dit qu'un système dynamique a de la mémoire ou de l'inertie.
- Un système dynamique est le plus souvent décrit par :
  - une ou plusieurs *équations différentielles :*

    $$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t); \quad x(t_0) = 3$$

  - une ou plusieurs *équations aux différences :*

    $$x(k+1) = -2x(k) + u(k); \quad x(k_0) = 5$$

  - une ou plusieurs *équations algébriques avec un décalage temporel:*

    $$x(t) = u(t-\tau); \quad \tau \neq 0$$

1.4. Classes de systèmes (3/6)

- Dans un système **statique**, l'état et la sortie à un instant donné ne dépendent que de l'entrée à cet instant.
- La relation entre l'entrée et la sortie est alors donnée par une ou plusieurs *équations algébriques*.
- *Si un système* statique n'a pas de mémoire, cela ne veut pas dire qu'il n'évolue pas avec le temps. On considère, par exemple, la sortie *y(t) du système statique* suivant:

$$y(t) = 2u(t)$$

On remarque bien que la sortie *y(t)* évolue proportionnellement avec l'évolution de son entrée *u(t)*.

Page 17

1.4. Classes de systèmes (4/6)

1.4.2. Monovariable / Multivariable

- Un système monovariable est un système qui possède une seule entrée et une seule sortie.
- Un système multivariable est un système qui possède plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties qui sont liées entre elles par des interactions.

1.4.3. Déterministe / Stochastique

- Les systèmes déterministes sont des systèmes régis par des lois mathématiques bien connues (équation différentielle ou intégro-différentielle, équation aux dérivées partielles, etc.), on peut donc prévoir exactement l'évolution de ces systèmes dans le temps.
- Les systèmes stochastiques (ou aléatoires) évoluent comme leur nom l'indique au hasard dans tout l'espace sans qu'aucune équation ne les régisse, sans qu'aucune prévision exacte soit possible dans le temps.

Page 18

1.4. Classes de systèmes (5/6)

1.4.4. Paramètres localisés / Paramètres distribués

- Les systèmes à paramètres localisés sont des systèmes pour lesquels il est possible d'isoler des éléments purs du système comme :
  - les résistances, les capacités et les inductances dans les systèmes électriques;
  - les masses, les ressorts et les amortisseurs dans les systèmes mécaniques.

  Ces systèmes sont représentés par des équations différentielles ordinaires indiquant une dépendance temporelle uniquement.

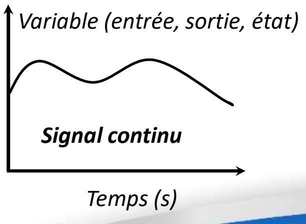
- Les systèmes à paramètres distribués sont des systèmes pour lesquels il n'est pas possible d'isoler des éléments purs du système comme:
  - l'écoulement d'un fluide dans une longue tuyauterie,
  - la propagation d'une onde électrique dans une ligne, etc.

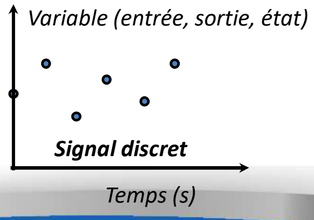
  Ces systèmes sont représentés par des équations aux dérivées partielles indiquant deux dépendances temporelle et spatiale,

1.4. Classes de systèmes (6/6)

1.4.5. Continu / Echantillonné

- Un système continu est un système pour lesquels **toutes ses variables (entrées, sorties, états)** sont présentes à tout instant c'est-à-dire leur évolution dans le temps est définie par un signal continu au sens mathématique.
- Un système échantillonné (ou discret) est un système pour lesquels **au moins une variable (entrée, sortie, état)** n'est pas disponible à tout instant. (entrées, sorties, états) c'est-à-dire elle est définie à des instants particuliers par un signal échantillonné.





1.5. Propriétés des systèmes (1/3)

1.5.1. Linéaire / Non Linéaire

- Un système est linéaire s'il obéit au principe de superposition défini par les deux propriétés: **additivité et homogénéité**.
- Les systèmes qui ne vérifient pas le principe de superposition sont appelés systèmes non linéaires.

Principe de superposition

Toute fonction f définie sur un espace vectoriel V est appelée fonctionnelle.

- Une fonctionnelle f est dite *additive* si pour tout $x \in V$ et pour tout $y \in V$, on a $f(x+y)=f(x)+f(y)$,
- Une fonctionnelle f est dite *homogène*, si pour tout $x \in V$ et pour tout réel a on a $f(a.x)= a .f(x)$.
- Une fonctionnelle additive et homogène est dite linéaire.
- La combinaison des deux propriétés d'additivité et d'homogénéité est connue sous le nom de *principe de superposition* :

$$f(a.x+\beta.y)=a.f(x)+\beta.f(y),$$

1.5. Propriétés des systèmes (2/3)

1.5.2. Stationnaire / Non Stationnaire

- Un système est dit stationnaire (ou invariant) si tous ses paramètres sont constants par rapport au temps.
  - Les entrées et sorties peuvent varier, mais les paramètres physiques du système restent constants.
  - On dit aussi qu'un système stationnaire ne vieillit pas. Il se comportera plus tard de la même façon que maintenant.
- Dans le cas contraire, on parle d'un système non stationnaire (ou évolutif).
- Pour une même réalité physique (processus), l'ingénieur peut choisir d'écrire un modèle stationnaire ou non stationnaire.

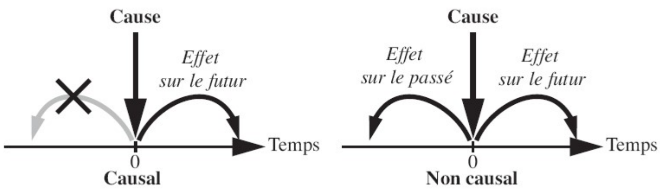
Exemple : Fusée

Par exemple, pour modéliser une fusée dont les réservoirs de carburant se vident durant le vol, il peut écrire un modèle non stationnaire avec le paramètre masse variant en fonction temps. Mais, il peut également décider d'écrire un bilan de masse pour la fusée, auquel cas la masse sera une variable d'état et les paramètres du modèle seront constants. Dans ce cas, le modèle dynamique comportera plus d'équations mais sera stationnaire.

1.5. Propriétés des systèmes (3/3)

1.5.3. Causalité

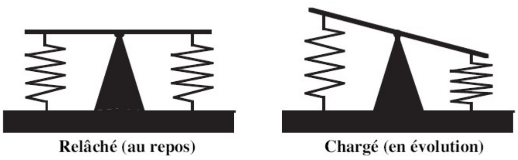
- Un système **causal** est un système dont l'avenir ne dépend que des entrées passées ou présentes.
- Dans un système causal, la réponse à une excitation ne précède pas l'excitation elle-même.



- Il existe une distinction conceptuelle entre ce qui est avant et ce qui vient après.
- Tous les systèmes physiques évoluant en temps réel sont causals, l'effet ne pouvant en effet pas précéder la cause.

1.6. Conditions initiales (1/2)

- L'évolution d'un système dynamique peut dépendre des entrées passées. Ceci est justifié par le fait qu'un système dynamique a de la mémoire.
- Il est donc important de spécifier si au début de l'expérience le système est relâché (au repos) ou alors chargé (en évolution).
- Un système dynamique est au repos à un instant donné s'il est relâché à cet instant, c'est-à-dire qu'il se trouve dans un état d'équilibre.
- En l'absence d'excitation extérieure, un système stationnaire au repos n'évolue pas. Ses mémoires sont vides. Dans le cas contraire, on dit que le système est chargé



Subit toujours l'effet des entrées passées

1.6. Conditions initiales (2/2)

Exemple

Soit le système dynamique donné par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{y}(t) = -2y(t) + u(t); \quad y(0) = y_0$$

Calculons le point d'équilibre $\underline{y}$ (pour lequel la dérivée est nulle) correspondant à l'entrée constante :

$$0 = -2\underline{y} + \underline{u} \Rightarrow \underline{y} = \frac{1}{2}\underline{u}$$

- Pour l'entrée constante $\underline{u}$ **=0**, on aura $\underline{y}$**=0** et donc le système dynamique sera initialement au repos si y_0**=0**.
- Pour un autre entrée constante, par exemple $\underline{u}$ **=2**, on aura $\underline{y}$**=1** et donc le système dynamique sera initialement au repos si y_0**=1**.
- On voit donc que pour u(0)= $\underline{u}$ et y(0)=$\underline{y}$, on aura y(0)=0 et le système dynamique sera initialement au repos.

Page 25

1.7. Représentation des modèles (1/6)

On distingue:

- Représentation temporelle
- Représentation fréquentielle
- Représentation d'état

1.7.1. Représentation temporelle

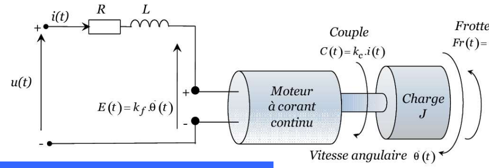
Les systèmes dynamiques linéaires peuvent être étudiés dans le domaine temporel par un certain nombre de techniques classiques. Les méthodes les plus couramment utilisées reposent sur :

- les équations différentielles
- la réponse impulsionnelle.

Page 26

1.7. Représentation des modèles (2/6)

Exemple : Moteur à courant continu à excitation séparée couplé à une charge



Lois utilisées

▪ *Equation électrique :*

$$u(t) = R.i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + K_f.\dot{\theta}(t)$$

▪ *Equation mécanique :*

$$J.\ddot{\theta}(t) = K_c.i(t) - f.\dot{\theta}(t)$$

Modèle mathématique du système

$$L.J.\frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + (R.J + L.f)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \left(R.f + K_f.K_c\right)\frac{d\theta(t)}{dt} = K_c.u(t)$$

1.7. Représentation des modèles (3/6)

1.7.2. Représentation fréquentielle

- Les méthodes temporelles posent des problèmes lors de l'étude de systèmes complexes: non linéaires, non stationnaires, multivariables, etc.
- Ces problèmes ont été résolus par le développement des méthodes de transformation (transformée de Laplace et Fourier).
- Les méthodes de transformation conduisent à une représentation par fonction de transfert.
- L'utilité de cette transformation a été démontrée pour l'étude de la stabilité et la réponse fréquentielle.

Exemple 1 : Moteur à courant continu à excitation séparée couplé à une charge

$$L.J.\frac{d^3\theta(t)}{dt^3} + (R.J + L.f)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \left(R.f + K_f.K_c\right)\frac{d\theta(t)}{dt} = K_c.u(t)$$ **: Equation différentielle**

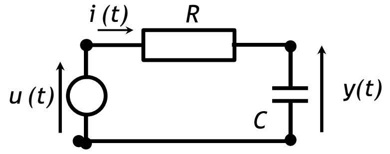
Transformée de Laplace

$$H(p) = \frac{\Theta(p)}{U(p)} = \frac{K_c}{L.J.p^3 + (R.J + L.f).p^2 + \left(R.f + K_f.K_c\right)p}$$ **: Fonction de transfert**

1.7. Représentation des modèles (4/6)

1.7.2. Représentation fréquentielle

Exemple 2. Circuit RC



- Loi des mailles:

$$u(t)=R.i(t)+\frac{1}{C}\int i(t)\,dt=0$$

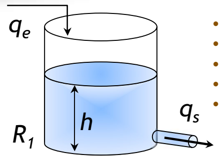
- Transformée de Laplace:

$$U(p)=\left\{R+\frac{1}{Cp}\right\}I(p)$$

- Or: $y(t)=\frac{1}{C}\int i(t).dt \Rightarrow I(p)=C.p.Y(p)$

- D'où : $\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{1}{RCp+1}$

Exemple 3. Régulation de niveau



- ρ : Masse volumique [kg/m^3]
- V : Volume [m^3]
- q_e q_s: débits [m^3/s]
- S : Section [m^2]
- H : Hauteur[m]

- Le bilan de masse de ce système donne:

$$\frac{dm(t)}{dt}=\frac{d\left(S.\rho.h(t)\right)}{dt}=\rho.q_e(t)-\rho.q_s(t)$$

où S et ρ sont deux constantes et

$$q_s(t)=\alpha.h(t)$$

- Ceci donne : $S\frac{dh(t)}{dt}=q_e(t)-\alpha.h(t)$

$$\frac{H(p)}{Q_e(p)}=\frac{1}{S.p+\alpha}$$

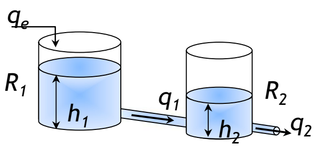
Page 29

1.7. Représentation des modèles (5/6)

Remarques

- ❑ L'un des inconvénients majeurs de cette approche (méthodes de transformation) est de supposer les conditions initiales nulles. Ces conditions initiales jouent cependant un rôle important dans l'étude des systèmes dans le domaine temporel où la solution dépend beaucoup du passé du système.

Exemple



On suppose que les niveaux dans les deux réservoirs sont nuls. Cette hypothèse est loin d'être réalisable dans la pratique.

- ❑ Un autre inconvénient de cette approche est qu'elle peut conduire à une compensation d'un pôle instable par un zéro.

Exemple

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=\frac{du(t)}{dt}-u(t)$$

$$H(p)=\frac{(p-1)}{(p+2)(p-1)}=\frac{1}{(p+2)}$$

Page 30

1.7. Représentation des modèles (6/6)

1.7.3. Représentation d'état

- La représentation par vecteur d'état permet de surmonter ces problèmes et d'unifier le cadre de l'étude des systèmes dynamiques continus ou discrets.
- L'analyse par variables d'état est une approche moderne d'étude des systèmes née dans les années 60 du siècle précédent.
- L'idée de base des représentations d'état est que le futur d'un système dépend de son passé, de son présent et de ses entrées : le futur peut alors décrit à partir d'un ensemble de variables bien choisies.
- Parmi les domaines d'application de cette théorie, l'automatique prend une place dominante : les représentations d'état sont à l'origine de méthodes puissantes d'analyse et de commande des systèmes facilement adaptables aux calculateurs numériques.
- Un des points forts de la représentation d'état est leur adaptabilité au cas des systèmes non-linéaires, non stationnaires, multivariables aussi bien dans le cas continu que dans le cas échantillonné (discret).

1.8. Représentation d'état (1/8)

Etat

- L'état d'un système rassemble toutes ses grandeurs internes susceptibles d'évoluer au cours du temps que ce soit sous l'effet d'une commande ou d'une perturbation.
- Le comportement d'un système dynamique dépend fortement de l'état dans lequel il se retrouve.
- Le choix des grandeurs qui caractérisent l'état n'est pas unique.

Définition

L'état d'un système à un instant donné quelconque est l'information minimale qui permet, *si les entrées sont connues à l'instant donné et pour les valeurs du temps suivantes*, la détermination unique des sorties à l'instant donné et pour les valeurs du temps suivantes.

1.8. Représentation d'état (2/8)

Remarques

- L'état d'un système est l'information résumant parfaitement le passé du système puisqu'elle fixe toute évolution future si les entrées sont connues.

- L'état d'un système est supposé fini et défini par un vecteur *X(t)* de dimension *n* appelé vecteur d'état:

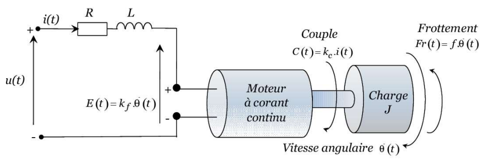
$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

  - Les éléments $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\cdots$, et $x_n(t)$ du vecteur d'état sont appelés variables d'état.

  - *n* représente l'ordre du système.

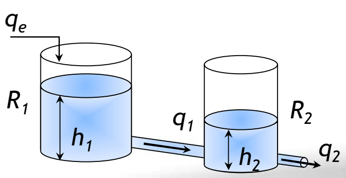
1.8. Représentation d'état (3/8)

Exemple 1 Moteur à courant continu à excitation séparée couplé à une charge



$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) = i(t) \\ x_2(t) = \dot{\theta}(t) \\ x_3(t) = \theta(t) \end{bmatrix}$$

Exemple 2 Régulation de niveau dans deux réservoirs



$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) = h_1(t) \\ x_2(t) = h_2(t) \end{bmatrix}$$

1.8. Représentation d'état (4/8)

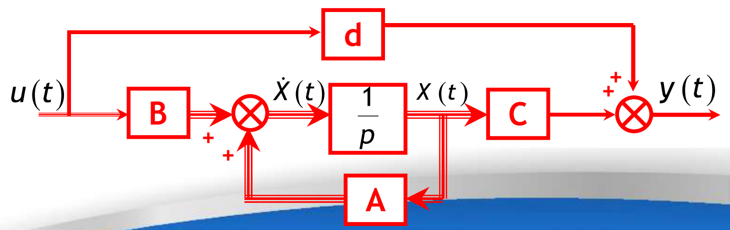
Modèle d'état linéaire continu

La représentation d'état d'un système linéaire stationnaire continu monovariable caractérisé par n variables d'état est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) & \textbf{: Equation d'état} \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) & \textbf{: Equation de sortie} \end{cases}$$

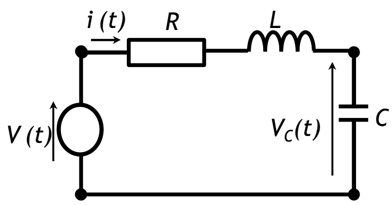
où

- A: matrice d'évolution de dimension *(n×n)*
- B : vecteur de commande de dimension *(n×1) : vecteur colonne*
- C: vecteur de sortie de dimension *(1×n) : vecteur ligne*
- d : coefficient (scalaire) de transfert direct



1.8. Représentation d'état (5/8)

- Exemple 1 : Circuit RLC:



Déterminer une représentation d'état de circuit suivant :

Entrée V (t) et Sortie $V_C(t)$

Variables d'état:
- x_1 : Courant traversant L
- x_2 : tension aux bornes C

$$-V(t) + L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -V(t) + L\dot{x}_1(t) + Rx_1(t) + x_2(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}V(t)}$$

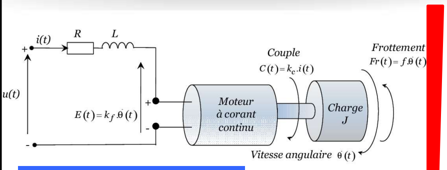
$$V_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \Leftrightarrow \frac{dV_c(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\dot{x}_2(t) = \frac{x_1(t)}{C}}$$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} X(t) \end{cases}$$

1.8. Représentation d'état (6/8)

- Exemple 2 : MCC



Lois utilisées

- *Equation électrique :*

$$u(t)=R.i(t)+L\frac{di(t)}{dt}+K_f.\dot{\theta}(t)$$

- *Equation mécanique :*

$$J.\ddot{\theta}(t)=K_c.i(t)-f.\dot{\theta}(t)$$

On pose

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t)=\dot{\theta}(t) \\ x_2(t)=i(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}(t)=\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t)=\frac{d\dot{\theta}(t)}{dt}=\ddot{\theta}(t)=\frac{1}{J}\left(K_c.x_2(t)-f.x_1(t)\right) \\ \dot{x}_2(t)=\frac{di(t)}{dt}=\frac{1}{L}\left(u(t)-R.x_2(t)-K_f.x_1(t)\right) \end{bmatrix}$$

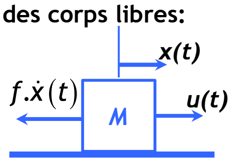
$$\begin{cases} \dot{X}(t)=\begin{bmatrix} -\frac{f}{J} & \frac{K_c}{J} \\ -\frac{K_f}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}X(t) \end{cases}$$

1.8. Représentation d'état (7/8)

- Exemple 3 : Système mécanique

Soit le système mécanique constitué d'un chariot de masse M. Le mouvement est limité par le frottement visqueux. Une force *u* agit horizontalement sur le chariot.

- **Diagramme des corps libres:**



- **Loi de Newton:**

$$u(t)-f.\dot{x}(t)=M.\ddot{x}(t)$$

$$\boxed{\ddot{x}(t)+\frac{f}{M}.\dot{x}(t)=\frac{u(t)}{M}}$$

- **Représentation d'état:**

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t)=x(t) \\ x_2(t)=\dot{x}_1(t) \end{bmatrix}$$

Position

Vitesse

d'où

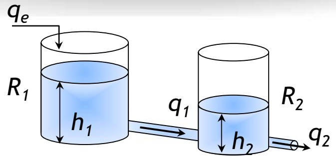
$$\dot{X}(t)=\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t)=\dot{x}(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=\ddot{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \dot{X}(t)=\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=-\frac{f}{M}x_2+\frac{u}{M} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{X}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{f}{M} \end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}X(t) \end{cases}}$$

1.8. Représentation d'état (8/8)

- Exemple 4 : Système hydraulique



- q_e : débit d'alimentation : Entrée
- q_1, q_2 : débits de sortie de R_1 et R_2
- h_1, h_2 : hauteurs du liquide dans R_1
- S_1, S_2 : sections de R_1 et R_2.
- V_1, V_2 : volumes du liquide dans R_1 et R_2.

Le bilan de masse de ce processus donne :

$$\begin{cases} \dfrac{dV_1(t)}{dt} = q_e(t) - q_1(t) \\ \dfrac{dV_2(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t) \end{cases}$$

avec $V_1(t) = S_1.h_1(t);\quad q_1(t) = \alpha_1.h_1(t)$

$V_2(t) = S_2.h_2(t);\quad q_2(t) = \alpha_2.h_2(t)$

$$\begin{cases} S_1 \dfrac{dh_1(t)}{dt} = q_e(t) - \alpha_1 h_1(t) \\ S_2 \dfrac{dh_2(t)}{dt} = \alpha_1 h_1(t) - \alpha_2 h_2(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dh_1(t)}{dt} = -\dfrac{\alpha_1}{S_1} h_1(t) \dfrac{1}{S_1} q_e(t) \\ \dfrac{dh_2(t)}{dt} = \dfrac{\alpha_1}{S_2} h_1(t) - \dfrac{\alpha_2}{S_2} h_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\alpha_1}{S_1} & 0 \\ \dfrac{\alpha_1}{S_2} & -\dfrac{\alpha_2}{S_2} \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{S_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} X(t) \end{cases}$$

Page 39

1.9. Conclusion

Ce cours présente les études d'analyse et de synthèse des systèmes linéaires continus et échantillonnés é l'aide d'une approche d'état.

- Modélisation des systèmes linéaires à l'aide d'une représentation d'état
- Commandabilité et observabilité
- Commande et observation

On considère essentiellement les systèmes linéaires monovariables stationnaires continus et échantillonnés

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(k+1) = F.X(k) + G.u(k) \\ y(k) = H.X(k) + E.u(k) \end{cases}$$

Page 40

Chapitre 2

Représentation d'état des systèmes linéaires continus

2.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la modélisation des systèmes linéaires continus stationnaires monovariables à l'aide d'une représentation d'état:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$$

On met l'accent essentiellement sur les points suivants :

- Pluralité de la représentation d'état.
- Réalisation d'une représentation d'état à partir d'une fonction de transfert en considérant essentiellement les formes suivantes :
  - la forme canonique de commandabilité,
  - la forme canonique d'observabilité,
  - la forme de Jordan (ou modale).
- Passage d'une équation différentielle vers la représentation d'état.
- Passage d'une représentation d'état vers la fonction de transfert.
- Résolution de l'équation d'état.

2.2.Pluralité de la représentation d'état

- La représentation d'état d'un système linéaire continu stationnaire monovariable est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases} \quad (1)$$

- On effectue le changement de base dans l'espace d'état défini par :

$$X(t) = T.Z(t)$$

où T est une matrice carrée régulière et $Z(t)$ est un autre vecteur d'état.

- La représentation d'état (1) devient :

$$\begin{cases} T.\dot{Z}(t) = A.T.Z(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.T.Z(t) + d.u(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{Z}(t) = T^{-1}.A.T.Z(t) + T^{-1}.B.u(t) \\ y(t) = C.T.Z(t) + d.u(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{Z}(t) = \bar{A}.Z(t) + \bar{B}.u(t) \\ y(t) = \bar{C}.Z(t) + \bar{d}.u(t) \end{cases}} \quad (2)$$

avec

$$\bar{A} = T^{-1}.A.T, \quad \bar{B} = T^{-1}.B,$$
$$\bar{C} = C.T, \quad \bar{d} = d$$

Les deux représentations (1) et (2) sont équivalentes en se basant sur la définition suivante.

2.2.Pluralité de la représentation d'état

Définition

Soient deux systèmes S_1 et S_2 définis par les représentations d'état suivantes :

$$S_1 : \begin{cases} \dot{X}_1(t) = A_1.X_1(t) + B_1.u(t) \\ y_1(t) = C_1.X_1(t) + d_1.u(t) \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} \dot{X}_2(t) = A_2.X_2(t) + B_2.u(t) \\ y_2(t) = C_2.X_2(t) + d_2.u(t) \end{cases}$$

Le premier système S_1 est dit **équivalent** au deuxième système S_2 si il existe une matrice régulière T, telle que:

$$A_2 = T^{-1}.A_1.T; \quad B_2 = T^{-1}.B_1; \quad C_2 = C_1.T; \quad d_2 = d_1$$

- Par ailleurs, deux systèmes équivalents vérifient les deux points suivants:
  - Les états des deux systèmes sont liés par la relation :

    $$X_1(t) = T.X_2(t)$$

  - Ils génèrent la même sortie $y_1(t)=y_2(t)$ en réponse à une même entrée $u(t)$ et aux mêmes conditions initiales $X_1(t_0)=T.X_2(t_0)$

2.2.Pluralité de la représentation d'état

Remarques

- Le résultat précédent montre bien que la représentation d'état est plurielle c'est-à-dire un système donné peut être défini par une ***infinité de représentations d'état***.
- Toutes ces représentations sont équivalentes. Elles sont liées par de transformations de la forme :

$$X(t) = T.Z(t)$$

où T est une matrice carrée régulière et $X(t)$ et $Z(t)$ sont deux vecteurs d'état:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad et \quad Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{bmatrix}$$

- On montre dans la suite que certaines transformations offrent plusieurs facilités pour l'analyse et la commande de systèmes.

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

- Ce paragraphe adresse le problème de réalisation d'une représentation d'état à partir d'une fonction de transfert :

Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

Représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$$

- Plusieurs approches peuvent être adoptées pour résoudre ce problème puisque la représentation d'état d'un système est plurielle.
- Dans la suite, on présente les représentations suivantes:
  - La forme canonique de commandabilité.
  - La forme canonique d'observabilité.
  - La forme modale ou de Jordan.
- Ces formes offrent plusieurs avantages au niveau l'analyse et/ou la synthèse des systèmes.

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

- Soit la fonction de transfert suivante :

$$H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{b_m.p^m+b_{m-1}.p^{m-1}+\cdots+b_1.p+b_0}{p^n+a_{n-1}.p^{n-1}+\cdots+a_1.p+a_0};\quad a_n=1\quad et\quad m<n$$

$$\Leftrightarrow\ H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\left(\frac{b_m.p^m+b_{m-1}.p^{m-1}+\cdots+b_1.p+b_0}{p^n+a_{n-1}.p^{n-1}+\cdots+a_1.p+a_0}\right)x\frac{\left(\frac{1}{p}\right)^n}{\left(\frac{1}{p}\right)^n}$$

$$\Leftrightarrow\ H(p)=\frac{Y(p)}{W(p)}\frac{W(p)}{U(p)}=\frac{b_m.\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m}+b_{m-1}.\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m+1}+\cdots+b_1.\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}+b_0.\left(\frac{1}{p}\right)^n}{1+a_{n-1}.\left(\frac{1}{p}\right)+\cdots+a_1.\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}+a_0.\left(\frac{1}{p}\right)^n}$$

- On pose :

$$\begin{cases}\dfrac{Y(p)}{W(p)}=N(p)=b_m.\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m}+b_{m-1}.\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m+1}+\cdots+b_1.\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}+b_0.\left(\frac{1}{p}\right)^n\\[2ex]\dfrac{W(p)}{U(p)}=\dfrac{1}{D(p)}=\dfrac{1}{1+a_{n-1}.\left(\frac{1}{p}\right)+\cdots+a_1.\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}+a_0.\left(\frac{1}{p}\right)^n}\end{cases}$$

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

- La fonction de transfert entre *W(p)* et *U(p)* peut se mettre comme suit :

$$\frac{W(p)}{U(p)}=\frac{1}{D(p)}\ \Leftrightarrow\ W(p).D(p)=U(p)\ \Leftrightarrow\ W(p).\left[1+a_{n-1}.\left(\frac{1}{p}\right)+\cdots+a_0.\left(\frac{1}{p}\right)^n\right]=U(p)$$

$$\boxed{W(p)=U(p)-W(p).\left[a_{n-1}.\left(\frac{1}{p}\right)+\cdots+a_1.\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}+a_0.\left(\frac{1}{p}\right)^n\right]}$$

- La fonction de transfert entre *Y(p)* et *W(p)* peut se mettre comme suit :

$$\frac{Y(p)}{W(p)}=N(p)\ \Leftrightarrow\ Y(p)=W(p).N(p)$$

$$\boxed{Y(p)=W(p).\left[b_m.\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m}+b_{m-1}.\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m+1}+\cdots+b_0.\left(\frac{1}{p}\right)^n\right]}$$

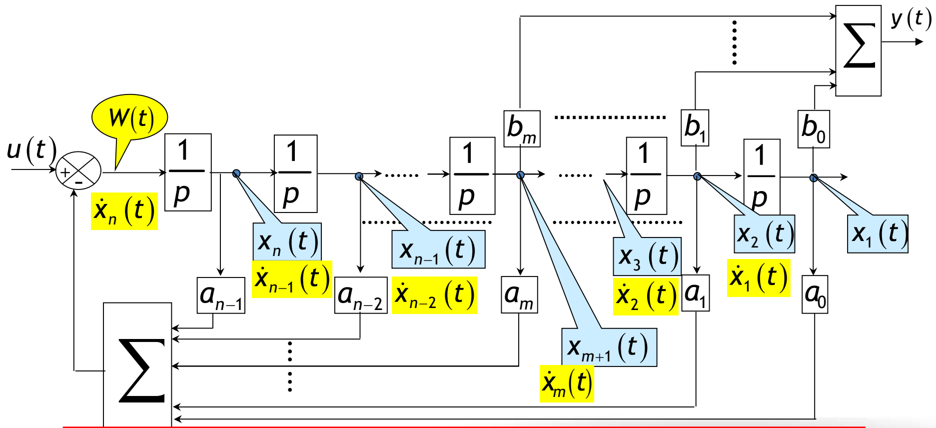
2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

$$Y(p)=W(p).\left[b_m\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m}+b_{m-1}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m+1}+\cdots+b_0\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{n}\right]$$

Idée

Les variables d'état sont les sorties des intégrateurs



$$W(p)=U(p)-W(p).\left[a_{n-1}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)+a_{n-2}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{2}+\cdots a_m\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{n-m}+\cdots+a_1\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{n-1}+a_0\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^{n}\right]$$

Page 49

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

- Il est facile maintenant de déduire du schéma fonctionnel les équations suivantes:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)=x_4(t)\\ \quad\vdots\\ \dot{x}_{n-1}(t)=x_n(t)\\ \dot{x}_n(t)=u(t)-a_{n-1}x_n(t)-a_{n-2}x_{n-1}(t)-\cdots-a_0x_1(t)\end{cases}$$

$$y(t)=b_mx_{m+1}(t)+\cdots+b_0x_1(t)$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

Forme canonique de commandabilité

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&\cdots&0&1\\-a_0&-a_1&\cdots&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}b_0&\cdots&b_m&0&\cdots&0\end{bmatrix}X(t)\end{cases}$$

Page 50

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

Résumé

$$H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{b_m.p^m+\cdots+b_1.p+b_0}{p^n+a_{n-1}.p^{n-1}+\cdots+a_1.p+a_0} \Rightarrow \begin{cases}\dot{X}(t)=A_c.X(t)+B_c.u(t)\\ y(t)=C_c.X(t)+d_c.u(t)\end{cases}$$

avec

- $A_c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}$
- $B_c=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$
- $Si \quad 0\le m<n \; : \; C_c=\begin{bmatrix}b_0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} \quad d_c=0$
- $Si \quad m=n \; : \; C_c=\begin{bmatrix}b_0-a_0.b_n & b_1-a_1.b_n & \cdots & b_{n-1}-a_{n-1}.b_n\end{bmatrix}; \quad d_c=b_n$

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

Exemple 1 **Système strictement propre**

$$H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p+6}\; x\; \frac{\left(\frac{1}{P}\right)^3}{\left(\frac{1}{P}\right)^3}$$

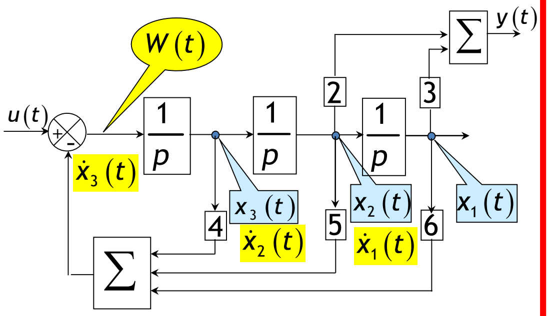
$$\Leftrightarrow \quad H(p)=\frac{Y(p)}{W(p)}\frac{W(p)}{U(p)}=\frac{2\left(\frac{1}{p}\right)^2+3.\left(\frac{1}{p}\right)^3}{1+4.\left(\frac{1}{p}\right)+5.\left(\frac{1}{p}\right)^2+6.\left(\frac{1}{p}\right)^3}$$

- On pose :

$$\begin{cases}\dfrac{Y(p)}{W(p)}=N(p)=2.\left(\frac{1}{p}\right)^2+3.\left(\frac{1}{p}\right)^3\\[2ex] \dfrac{W(p)}{U(p)}=\dfrac{1}{1+4.\left(\frac{1}{p}\right)+5.\left(\frac{1}{p}\right)^2+6.\left(\frac{1}{p}\right)^3}\end{cases}$$

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

$$Y(p)=W(p).\left[2.\left(\frac{1}{p}\right)^2+3.\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]$$



$$W(p)=U(p)-W(p).\left[4.\left(\frac{1}{p}\right)+5.\left(\frac{1}{p}\right)^2+6.\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]$$

- Il est facile maintenant de déduire du schéma fonctionnel les équations suivantes:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)=u(t)-4x_3(t)-5x_2(t)-6x_1(t)\end{cases}$$
$$y(t)=2x_2(t)+3x_1(t)$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-5&-4\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}3&2&0\end{bmatrix}X(t)\end{cases}$$

Forme canonique de commandabilité

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

Exemple 2 **Système propre**

$$H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{3p^3+14p^2+15p+17}{p^3+2p^2+3p+4}=\overbrace{\frac{8p^2+6p+5}{p^3+2p^2+3p+4}}^{H_1(p)=\frac{Y_1(p)}{U(p)}}+\overbrace{3}^{H_2(p)=\frac{Y_2(p)}{U(p)}}$$

- La fonction de transfert $H_1(p)$ peut se mettre comme suit :

$$H_1(p)=\frac{Y_1(p)}{U(p)}=\frac{8p^2+6p+5}{p^3+2p^2+3p+4}\,x\,\frac{\left(\frac{1}{p}\right)^3}{\left(\frac{1}{p}\right)^3}\Leftrightarrow H_1(p)=\frac{Y_1(p)}{W(p)}\frac{W(p)}{U(p)}=\frac{8\left(\frac{1}{p}\right)+6.\left(\frac{1}{p}\right)^2+5\left(\frac{1}{p}\right)^3}{1+2\left(\frac{1}{p}\right)+3\left(\frac{1}{p}\right)^2+4\left(\frac{1}{p}\right)^3}$$

- On pose :

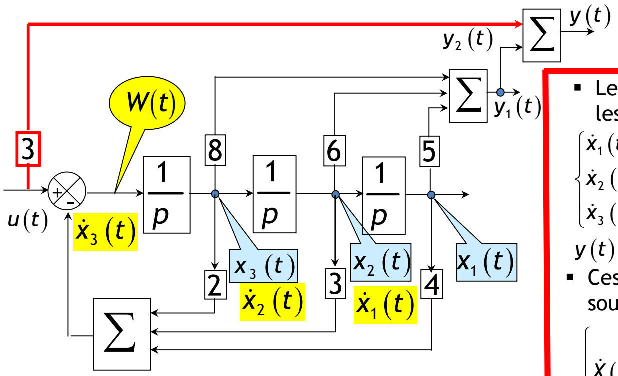
$$\begin{cases}\frac{Y_1(p)}{W(p)}=N(p)=8\left(\frac{1}{p}\right)+6.\left(\frac{1}{p}\right)^2+5\left(\frac{1}{p}\right)^3\\ \frac{W(p)}{U(p)}=\frac{1}{1+2\left(\frac{1}{p}\right)+3\left(\frac{1}{p}\right)^2+4\left(\frac{1}{p}\right)^3}\end{cases}$$

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

$$\frac{Y_1(p)}{W(p)} = N(p) = 8\left(\frac{1}{p}\right) + 6.\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{p}\right)^3$$

$$\frac{Y_2(p)}{U(p)} = 3 \Leftrightarrow Y_2(p) = 3U(p)$$

$$Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$$



- Le schéma fonctionnel donnent les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = u(t) - 2x_3(t) - 3x_2(t) - 4x_1(t) \end{cases}$$

$$y(t) = 8x_3(t) + 6x_2(t) + 5x_1(t) + 3u(t)$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} X(t) + [3] u(t) \end{cases}$$

Forme canonique de commandabilité

$$W(p) = U(p) - W(p).\left[2\left(\frac{1}{p}\right) + 3\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]$$

2.3.2. Forme canonique d'observabilité

Pour des raisons purement pédagogiques, la forme canonique d'observabilité sera présentée avec la fonction de transfert suivante:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_1.p + b_0}{p^3 + a_2.p^2 + a_1.p + a_0} \times \frac{\left(\frac{1}{P}\right)^3}{\left(\frac{1}{P}\right)^3} \Leftrightarrow \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_1.\left(\frac{1}{p}\right)^2 + b_0.\left(\frac{1}{p}\right)^3}{1 + a_2.\left(\frac{1}{p}\right) + a_1.\left(\frac{1}{p}\right)^2 + a_0.\left(\frac{1}{p}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(p).\left[1 + a_2.\left(\frac{1}{p}\right) + a_1.\left(\frac{1}{p}\right)^2 + a_0.\left(\frac{1}{p}\right)^3\right] = U(p).\left[b_1.\left(\frac{1}{p}\right)^2 + b_0.\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(p) = -Y(p).\left[a_2.\left(\frac{1}{p}\right) + a_1.\left(\frac{1}{p}\right)^2 + a_0.\left(\frac{1}{p}\right)^3\right] + U(p).\left[b_1.\left(\frac{1}{p}\right)^2 + b_0.\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]$$

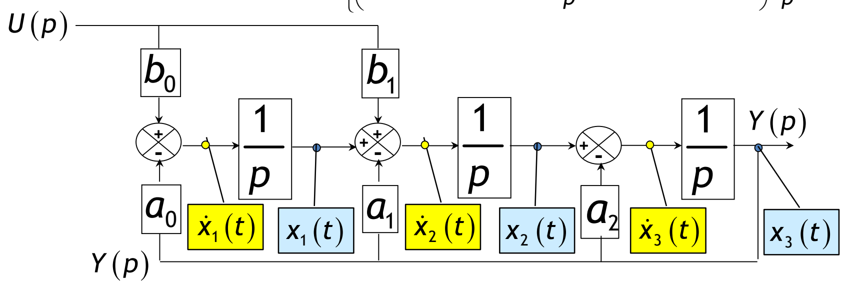
$$\Leftrightarrow \quad Y(p) = \left[b_0.U(p) - a_0.Y(p)\right].\left(\frac{1}{p}\right)^3 + \left[b_1.U(p) - a_1.Y(p)\right].\left(\frac{1}{p}\right)^2 - a_2.Y(p)\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(p) = \left\{\left(\left[b_0.U(p) - a_0.Y(p)\right].\frac{1}{p} + b_1.U(p) - a_1.Y(p)\right).\frac{1}{p} - a_2.Y(p)\right\}.\frac{1}{p}$$

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.2. Forme canonique d'observabilité

$$Y(p)=\left\{\left(\left[b_0.U(p)-a_0.Y(p)\right].\frac{1}{p}+b_1.U(p)-a_1.Y(p)\right).\frac{1}{p}-a_2.Y(p)\right\}.\frac{1}{p}$$



- Le schéma fonctionnel donnent les équations suivantes:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-a_0x_3(t)+b_0u(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)-a_1x_3(t)+b_1u(t)\\ \dot{x}_3(t)=x_2(t)-a_2x_3(t)\end{cases}$$
$$y(t)=x_3(t)$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}0&0&-a_0\\1&0&-a_1\\0&1&-a_2\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}b_0\\b_1\\0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}X(t)\end{cases}$$

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.2. Forme canonique d'observabilité

Résumé

$$H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{b_m.p^m+\cdots+b_1.p+b_0}{p^n+a_{n-1}.p^{n-1}+\cdots+a_1.p+a_0}\Rightarrow\begin{cases}\dot{X}(t)=A_O.X(t)+B_O.u(t)\\ y(t)=C_O.X(t)+d_O.u(t)\end{cases}$$

avec

- $A_O=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\ddots&0&-a_1\\0&1&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0&\vdots\\0&\cdots&0&1&-a_{n-1}\end{bmatrix}$
- $C_O=\begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\end{bmatrix}$
- Si $0\leq m<n$: $B_O=\begin{bmatrix}b_0&\cdots&b_m&0&\cdots&0\end{bmatrix}^T$ $d_O=0$
- Si $m=n$: $B_O=\begin{bmatrix}b_0-a_0.b_n&b_1-a_1.b_n&\cdots&b_{n-1}-a_{n-1}.b_n\end{bmatrix}^T$; $d_O=b_n$

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.2. Forme canonique d'observabilité

Exemple 1 **Système strictement propre** $H(p)=\dfrac{Y(p)}{U(p)}=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p+6}$

$$H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p+6}\; x\; \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^3}{\left(\frac{1}{p}\right)^3} \Leftrightarrow \frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{2\left(\frac{1}{p}\right)^2+3\left(\frac{1}{p}\right)^3}{1+4\left(\frac{1}{p}\right)+5\left(\frac{1}{p}\right)^2+6\left(\frac{1}{p}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(p).\left[1+4\left(\frac{1}{p}\right)+5\left(\frac{1}{p}\right)^2+6\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]=U(p).\left[2\left(\frac{1}{p}\right)^2+3\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(p)=-Y(p).\left[4\left(\frac{1}{p}\right)+5\left(\frac{1}{p}\right)^2+6\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]+U(p).\left[2\left(\frac{1}{p}\right)^2+3\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(p)=\left[3U(p)-6Y(p)\right].\left(\frac{1}{p}\right)^3+\left[2U(p)-5Y(p)\right].\left(\frac{1}{p}\right)^2-4Y(p)\left(\frac{1}{p}\right)$$

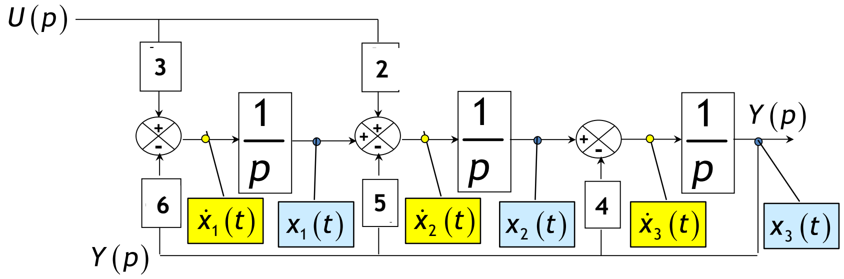
$$\Leftrightarrow \quad Y(p)=\left\{\left(\left[3U(p)-6Y(p)\right].\frac{1}{p}+2U(p)-5Y(p)\right).\frac{1}{p}-4Y(p)\right\}.\frac{1}{p}$$

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.2. Forme canonique d'observabilité

Exemple 1

$$Y(p)=\left\{\left(\left[3U(p)-6Y(p)\right].\frac{1}{p}+2U(p)-5Y(p)\right).\frac{1}{p}-4Y(p)\right\}.\frac{1}{p}$$



- Le schéma fonctionnel donnent les équations suivantes:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-6x_3(t)+3u(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)-5x_3(t)+2u(t)\\ \dot{x}_3(t)=x_2(t)-4x_3(t)\end{cases}$$
$$y(t)=x_3(t)$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & -6\\ 1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}X(t)\end{cases}$$

2.3.2. Forme canonique d'observabilité

Exemple 2

$$H_1(p)=\frac{Y_1(p)}{U(p)} \qquad H_2(p)=\frac{Y_2(p)}{U(p)}$$

Système propre $H(p)=\dfrac{Y(p)}{U(p)}=\dfrac{7p^3+28p^2+37p+45}{p^3+4p^2+5p+6}=\dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p+6}+7$

$$H_1(p)=\frac{Y_1(p)}{U(p)}=\frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p+6}x\frac{\left(\frac{1}{p}\right)^3}{\left(\frac{1}{p}\right)^3} \Leftrightarrow \frac{Y_1(p)}{U(p)}=\frac{2\left(\frac{1}{p}\right)^2+3\left(\frac{1}{p}\right)^3}{1+4\left(\frac{1}{p}\right)+5\left(\frac{1}{p}\right)^2+6\left(\frac{1}{p}\right)^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y_1(p).\left[1+4\left(\frac{1}{p}\right)+5\left(\frac{1}{p}\right)^2+6\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]=U(p).\left[2\left(\frac{1}{p}\right)^2+3\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad Y_1(p)=-Y_1(p).\left[4\left(\frac{1}{p}\right)+5\left(\frac{1}{p}\right)^2+6\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]+U(p).\left[2\left(\frac{1}{p}\right)^2+3\left(\frac{1}{p}\right)^3\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad Y_1(p)=\left[3U(p)-6Y_1(p)\right].\left(\frac{1}{p}\right)^3+\left[2U(p)-5Y_1(p)\right].\left(\frac{1}{p}\right)^2-4Y_1(p)\left(\frac{1}{p}\right)$$

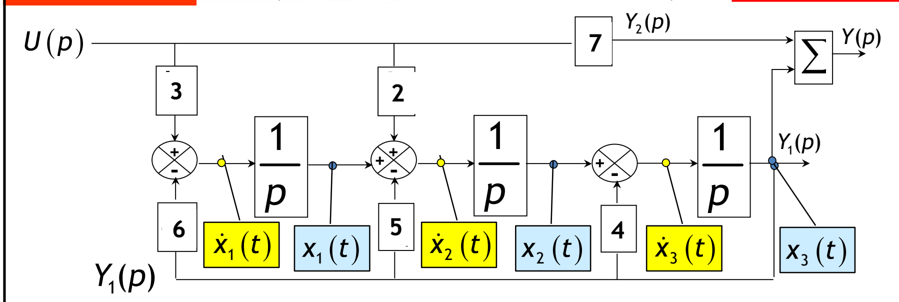
$$\Leftrightarrow \quad Y_1(p)=\left\{\left(\left[3U(p)-6Y_1(p)\right].\frac{1}{p}+2U(p)-5Y_1(p)\right).\frac{1}{p}-4Y_1(p)\right\}.\frac{1}{p}$$

2.3.2. Forme canonique d'observabilité

$$\boxed{\frac{Y_2(p)}{U(p)}=7 \Leftrightarrow Y_2(p)=7U(p)}$$

Exemple 2

$$Y_1(p)=\left\{\left(\left[3U(p)-6Y_1(p)\right].\frac{1}{p}+2U(p)-5Y_1(p)\right).\frac{1}{p}-4Y_1(p)\right\}.\frac{1}{p} \qquad \boxed{Y(p)=Y_1(p)+Y_2(p)}$$



- Le schéma fonctionnel donnent les équations suivantes:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-6x_3(t)+3u(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)-5x_3(t)+2u(t)\\ \dot{x}_3(t)=x_2(t)-4x_3(t)\end{cases}$$
$$y(t)=x_3(t)+7u(t)$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}0&0&-6\\1&0&-5\\0&1&-4\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}X(t)+[7]u(t)\end{cases}$$

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

Principe

- Cette forme consiste à utiliser les pôles de la fonction de transfert pour réaliser une représentation d'état. Ceci peut être assuré en respectant la démarche suivante:
  - Détermination des pôles de la fonction de transfert.
  - Décomposition de la fonction de transfert en éléments simples.
  - Déduction de la représentation d'état.

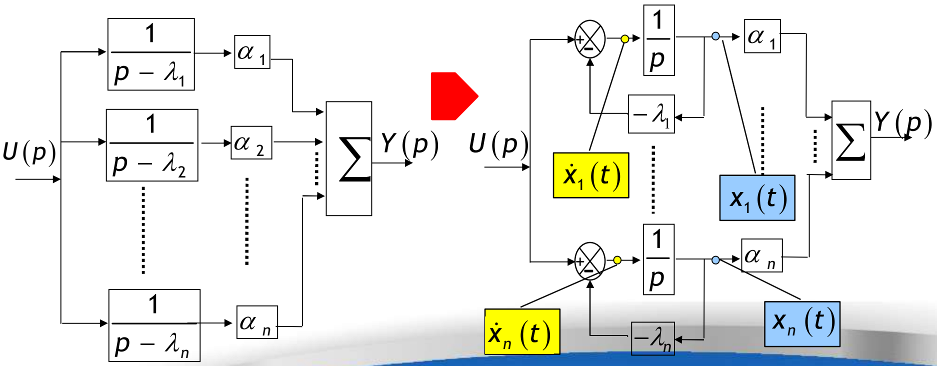
- On distingue trois cas:
  - Pôles simples.
  - Pôles multiples.
  - Pôles complexes conjugués.

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.1. Pôles simples

On suppose que la fonction de transfert admet ***n*** pôles réels distincts λ_1, λ_2,… et λ_n. En effet, la décomposition de cette fonction de transfert donne:

$$H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{b_m p^m+\cdots+b_1 p+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p+a_0} = \frac{\alpha_1}{p-\lambda_1}+\frac{\alpha_2}{p-\lambda_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{p-\lambda_n}$$



2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.1. Pôles simples

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t) + u(t) \\ \quad \vdots \\ \dot{x}_n(t) = \lambda_n x_n(t) + u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \cdots + \alpha_n x_n(t)$$

Forme Modale

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \alpha_n] X(t) \end{cases}$$

Les pôles de la fonction sont les éléments de la diagonale

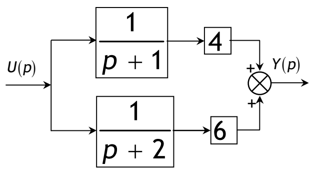
2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

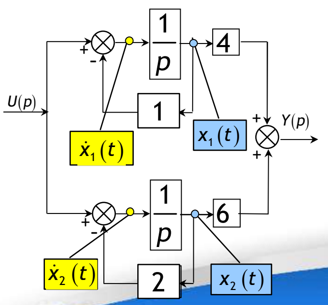
2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.1. Pôles simples

Exemple

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{10p + 14}{p^2 + 3p + 2} = \frac{4}{p+1} + \frac{6}{p+2}$$





- Le schéma fonctionnel donnent les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = 4x_1(t) + 6x_2(t)$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [4 \quad 6] X(t) \end{cases}$$

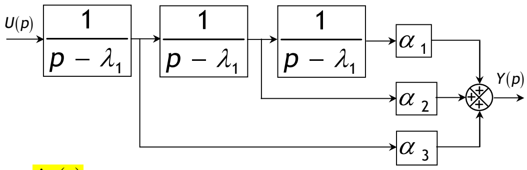
2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

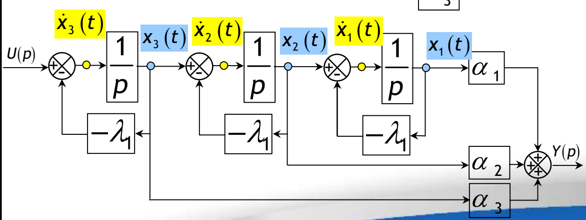
2.3.3.2. Pôles Multiples

On suppose que la fonction de transfert d'ordre ***3*** admet un pôle réel multiple d'ordre ***3***. En effet, la décomposition de cette fonction de transfert donne:

$$\boxed{H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{\alpha_1}{(p-\lambda_1)^3}+\frac{\alpha_2}{(p-\lambda_1)^2}+\frac{\alpha_3}{(p-\lambda_1)}}$$

Schéma fonctionnel





- Il est facile maintenant de déduire du schéma fonctionnel les équations suivantes:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\lambda_1x_1(t)+x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=\lambda_1x_2(t)+x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)=\lambda_1x_3(t)+u(t)\end{cases}$$

$$y(t)=\alpha_1x_1(t)+\alpha_2x_2(t)+\alpha_3x_3(t)$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}X(t)\end{cases}$$

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.2. Pôles Multiples

On suppose que la fonction de transfert d'ordre ***n*** admet un pôle réel multiple d'ordre ***q*** et (***n-q***) pôles réels distincts λ_{q+1}, λ_{q+2},… et λ_n. En effet, la décomposition de cette fonction de transfert donne:

$$\boxed{H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{\alpha_1}{(p-\lambda_1)^q}+\frac{\alpha_2}{(p-\lambda_1)^{q-1}}+\ldots+\frac{\alpha_q}{(p-\lambda_1)}+\frac{\alpha_{q+1}}{p-\lambda_{q+1}}+\cdots+\frac{\alpha_n}{p-\lambda_n}}$$

En utilisant la même démarche, on peut déduire les équations suivantes :

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\lambda_1x_1(t)+x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=\lambda_1x_2(t)+x_3(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_{q-1}(t)=\lambda_1x_{q-1}(t)+x_q(t)\\ \dot{x}_q(t)=\lambda_1x_q(t)+u(t)\\ \dot{x}_{q+1}(t)=\lambda_{q+1}x_{q+1}(t)+u(t)\\ \vdots\\ \dot{x}_n(t)=\lambda_nx_n(t)+u(t)\end{cases}$$

$$y(t)=\alpha_1.x_1(t)+\alpha_2.x_2(t)+\cdots+\alpha_n.x_n(t)$$

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.2. Pôles Multiples

Forme Modale

$$
\begin{cases}
\dot{X}(t) = \begin{bmatrix}
\lambda_1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & & \\
\vdots & 0 & \lambda_1 & 1 & \vdots & & \\
\vdots & \cdots & \ddots & \lambda_1 & 0 & & \\
\vdots & & \cdots & & \lambda_{q+1} & & \\
\vdots & & & & & \ddots & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n
\end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_q & \alpha_{q+1} & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} X(t)
\end{cases}
$$

Les pôles de la fonction sont les éléments de la diagonale

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.2. Pôles Multiples

Exemple

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{11p^2 + 53p + 66}{(p+2)^2\,(p+1)}$$

La décomposition de H(p) en éléments simples donne:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{11p^2 + 53p + 66}{(p+2)^2\,(p+1)} = \frac{24}{(p+1)} - \frac{4}{(p+2)^2} - \frac{13}{(p+2)}$$

La représentation d'état est donnée comme suit :

$$
\begin{cases}
\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) = \begin{bmatrix} 24 & -4 & -13 \end{bmatrix} X(t)
\end{cases}
$$

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.3. Pôles Complexes

Pour une paire de pôles complexes conjugués $p_1 = \eta + j\mu; \quad p_2 = \bar{p}_1 = \eta - j\mu$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\alpha_1}{p - p_1} + \frac{\alpha_2}{p - p_2} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \beta + j\delta; \quad \alpha_2 = \bar{\alpha}_1 = \beta - j\delta$$

En utilisant le principe des pôles simples, la représentation d'état peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) \end{cases}$$

avec $A = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & \bar{p}_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \bar{\alpha}_1 \end{bmatrix}$

Problème	Les coefficients de A et C sont des nombres complexes !!!!
Solution	Trouver une matrice de passage permettant de transformer A et C.

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.3. Pôles Complexes

On pose :

$$X(t) = T.Z(t) \quad \text{avec} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & -j \\ 1 & j \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T.\dot{Z}(t) = A.T.Z(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.T.Z(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{Z}(t) = T^{-1}A.T.Z(t) + T^{-1}.B.u(t) \\ y(t) = C.T.Z(t) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dot{Z}(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(p_1) & \mathrm{Im}(p_1) \\ -\mathrm{Im}(p_1) & \mathrm{Re}(p_1) \end{bmatrix}.Z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2.\mathrm{Re}(\alpha_1) & 2.\mathrm{Im}(\alpha_1) \end{bmatrix}.Z(t) \end{cases}}$$

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

2.3.3.3. Pôles Complexes

Exemple $H(p)=\dfrac{Y(p)}{U(p)}=\dfrac{3p+6}{p^2-6p+10}=\dfrac{1.5-7.5j}{p-3-j}+\dfrac{1.5+7.5j}{p-3+j}$

avec
- $p_1=3+j; \quad p_2=\bar{p}_1=3-j$
- $\alpha_1=1.5-7.5j; \quad \alpha_2=\bar{\alpha}_1=1.5+7.5j$

- La représentation d'état est donnée comme suit :

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{Re}(p_1) & \mathrm{Im}(p_1)\\ -\mathrm{Im}(p_1) & \mathrm{Re}(p_1)\end{bmatrix}.X(t)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}2.\mathrm{Re}(\alpha_1) & 2.\mathrm{Im}(\alpha_1)\end{bmatrix}.X(t)\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{cases}\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}.X(t)+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}3 & -15\end{bmatrix}.X(t)\end{cases}}$$

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

Exemple $H(p)=\dfrac{6}{(p+1)^3}+\dfrac{7}{(p+1)^2}+\dfrac{3}{(p+1)}+\dfrac{1}{(p+2)}+\dfrac{5+6j}{(p+3+4j)}+\dfrac{5-6j}{(p+3-4j)}$

- Cette fonction admet :
  - un pôle multiple d'ordre trois $\lambda_1=-1$
  - un pôle simple $\lambda_2=-2$
  - une paire des pôles complexes conjugués : $\lambda_3=-3-4j$ et $\lambda_4=-3+4j$.
- La représentation d'état et comme suit :

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -3\end{bmatrix}\dot{X}(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}6 & 7 & 3 & 1 & 10 & 12\end{bmatrix}X(t)\end{cases}$$

2.4. Passage d'une équation différentielle vers une représentation d'état

- Ce paragraphe adresse le problème de réalisation d'une représentation d'état à partir d'une équation différentielle:

Equation différentielle

$$y^{(n)}(t) = f\left(y^{(n-1)}(t), \cdots, y(t), u^{(m)}(t), \cdots, u(t), t\right)$$

Représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$$

Solution

Pour résoudre ce problème, on peut utiliser la démarche suivante :

- **Etape 1 :** Choisir un vecteur d'état ***X(t)*** de dimension ***n*** (***n*** est égal à l'ordre de l'équation différentielle).
- **Etape 2 :** Calculer $\dot{X}(t)$.
- **Etape 3 :** Déduire la représentation d'état (***A***, ***B***, ***C***, ***d***).

2.4. Passage d'une équation différentielle vers une représentation d'état

Dans la suite, on présente l'application de cette démarche dans le cas d'un système linéaire, continu, monovariable, **stationnaire ou non stationnaire** défini par une équation différentielle d'ordre ***n*** :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y^{(1)}(t) + a_0(t)y(t) = b_m(t)u^{(m)}(t) + \cdots + b_1(t)u^{(1)}(t) + b_0(t)u(t)$$

- Le choix du vecteur d'état représente la pierre angulaire de cette solution. Plusieurs possibilités peuvent être utilisées. Dans ce cours, on se limite au choix suivant :

$$X(t) = \begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) + \alpha_1(t).u(t) \\ x_3(t) = \dot{x}_2(t) + \alpha_2(t).u(t) \\ \vdots \\ x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t) + \alpha_{n-1}(t).u(t) \end{cases}$$

Quel est le rôle des $\alpha_i(t)$?

Pour répondre à cette question, on considère les exemples suivants.

2.4. Passage d'une équation différentielle vers une représentation d'état

Exemple 1 **Système stationnaire** $\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+y(t)=\dot{u}(t)+u(t)$

- On pose : $X(t)=\begin{cases} x_1(t)=y(t) \\ x_2(t)=\dot{x}_1(t)+\alpha_1(t).u(t) \end{cases}$

- Et on calcule :

$$\dot{X}(t)=\begin{cases} \dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)=x_2(t)-\alpha_1(t).u(t) \\ \dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t)+\dot{\alpha}_1(t).u(t)+\alpha_1(t).\dot{u}(t) \\ \quad =-\dot{y}(t)-y(t)+\dot{u}(t)+u(t)+\dot{\alpha}_1(t).u(t)+\alpha_1(t).\dot{u}(t) \\ \quad =-x_2(t)+\alpha_1(t).u(t)-x_1(t)+\dot{u}(t)+u(t)+\dot{\alpha}_1(t).u(t)+\alpha_1(t).\dot{u}(t) \\ \quad =-x_1(t)-x_2(t)+\left[\alpha_1(t)+1+\dot{\alpha}_1(t)\right].u(t)+\boxed{\left[\alpha_1(t)+1\right].\dot{u}(t)} \end{cases}$$

Cette expression comporte la dérivée de l'entrée. Ceci ne correspond à une représentation d'état. En effet, il faut l'annuler en utilisant $\alpha_1(t)$.

$$\boxed{\alpha_1(t)=-1}$$

Stationnaire

d'où:

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}X(t) \end{cases}$$

2.4. Passage d'une équation différentielle vers une représentation d'état

Exemple 2 **Système** non stationnaire $\ddot{y}(t)-t\dot{y}(t)+y(t)=t^2\dot{u}(t)+u(t)$

- On pose : $X(t)=\begin{cases} x_1(t)=y(t) \\ x_2(t)=\dot{x}_1(t)+\alpha_1(t).u(t) \end{cases}$

- Et on calcule :

$$\dot{X}(t)=\begin{cases} \dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)=x_2(t)-\alpha_1(t).u(t) \\ \dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t)+\dot{\alpha}_1(t).u(t)+\alpha_1(t).\dot{u}(t) \\ \quad =t\dot{y}(t)-y(t)+t^2\dot{u}(t)+u(t)+\dot{\alpha}_1(t).u(t)+\alpha_1(t).\dot{u}(t) \\ \quad =tx_2(t)-t\alpha_1(t).u(t)-x_1(t)+t^2\dot{u}(t)+u(t)+\dot{\alpha}_1(t).u(t)+\alpha_1(t).\dot{u}(t) \\ \quad =-x_1(t)+tx_2(t)+\left[-t\alpha_1(t)+1+\dot{\alpha}_1(t)\right].u(t)+\boxed{\left[\alpha_1(t)+t^2\right].\dot{u}(t)} \end{cases}$$

Cette expression comporte la dérivée de l'entrée. Ceci ne correspond à une représentation d'état. En effet, il faut l'annuler en utilisant $\alpha_1(t)$.

$$\boxed{\alpha_1(t)=-t^2}$$

Non Stationnaire

d'où:

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & t \end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix} t^2 \\ 1-2t+t^3 \end{bmatrix}u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}X(t) \end{cases}$$

2.4. Passage d'une équation différentielle vers une représentation d'état

Remarques

- L'ordre de la représentation d'état est égal à l'ordre de l'équation différentielle.
- Les termes α_1, α_2, … et α_n sont utilisés pour annuler les dérivées successives de l'entrée ***u(t)*** qui figurent dans l'équation d'état.
- Si l'équation différentielle ne comporte pas des dérivées de l'entrée ***u(t)*** alors les termes α_1, α_2, … et α_n sont nuls.
- Si le système est stationnaire alors les termes α_1, α_2, … et α_n sont aussi stationnaires.
- Si le système est non stationnaire alors les termes α_1, α_2, … et α_n sont aussi non stationnaires.
- Cette approche peut être appliquée pour les systèmes multivariables.

Page 79

2.5. Passage d'une représentation d'état vers la fonction de transfert

- Ce paragraphe adresse le problème de détermination de la fonction de transfert à partir d'une représentation d'état d'un système continu stationnaire :

Représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$$

Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

- La transformée de Laplace avec conditions initiales nulles nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} p.X(p) = A.X(p) + B.U(p) \\ Y(p) = C.X(p) + d.U(p) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(p) = (p.I - A)^{-1}.B.U(p) \\ Y(p) = \left(C.(p.I - A)^{-1}.B + d\right).U(p) \end{cases}$$

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \left(C.(p.I - A)^{-1} B + d\right)}$$

Page 80

2.5. Passage d'une représentation d'état vers la fonction de transfert

Exemple

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} X(t) \end{cases}$$

- La fonction de transfert est donnée par :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C.(p.I - A)^{-1}.B$$

- On calcule ***(p.I-A)***$^{-1}$:

$$(p.I - A) = \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & p+1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (p.I - A)^{-1} = \frac{1}{(p+1)^2} \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ 1 & p+1 \end{bmatrix}$$

d'où $\quad H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C.(p.I - A)^{-1}.B$

$$\Leftrightarrow H(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(p+1)^2} \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ 1 & p+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow H(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(p+1)^2} \begin{bmatrix} p+1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+1)^2}}$$

2.5. Passage d'une représentation d'état vers la fonction de transfert

Remarques

- L'inverse de la matrice ***(p.I-A)*** est donné par: $(p.I - A)^{-1} = \dfrac{adj(p.I - A)}{\det(p.I - A)}$

  d'où :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{C.adj(p.I - A).B + d.\det(p.I - A)}{\det(p.I - A)}$$

Cette relation montre bien que les pôles de la fonction de transfert coïncident avec les valeurs propres de la matrice d'évolution (*matrice A*) de la représentation d'état.

- La fonction de transfert suppose que les conditions initiales sont nulles. Ceci montre une limite de la représentation par fonction de transfert qui est d'application moins générale que la représentation d'état.
- Ces résultats peuvent être utilisés dans le cas d'un système linéaire multivariable.

2.5. Passage d'une représentation d'état vers la fonction de transfert

Remarques

La fonction de transfert est une représentation unique. En effet, elle est un invariant par un changement de base. Ceci peut être montré facilement comme suit :

$$\boxed{\begin{cases}\dot X(t)=A.X(t)+B.u(t)\\ y(t)=C.X(t)+d.u(t)\end{cases}} \xrightarrow{X(t)=T.Z(t)} \boxed{\begin{cases}\dot Z(t)=\bar A.Z(t)+\bar B.u(t)\\ y(t)=\bar C.Z(t)+\bar d.u(t)\end{cases}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases}\bar A=T^{-1}.A.T\\ \bar B=T^{-1}.B\\ \bar C=C.T\\ \bar d=d\end{cases}$$

$$\bar H(p)=\left(\bar C.\left(p.I-\bar A\right)^{-1}\bar B+\bar d\right)$$

$$\Leftrightarrow \bar H(p)=\left(C.T.\left(p.I-T^{-1}.A.T\right)^{-1}.T^{-1}.B+d\right)$$

$$\Leftrightarrow \bar H(p)=\left(C.T.\left(T^{-1}.p.I.T-T^{-1}.A.T\right)^{-1}.T^{-1}.B+d\right)$$

$$\Leftrightarrow \bar H(p)=\left(C.T.\left(T^{-1}.(p.I-A).T\right)^{-1}.T^{-1}.B+d\right)$$

$$\Leftrightarrow \bar H(p)=\left(C.T.T^{-1}.(p.I-A)^{-1}.T.T^{-1}.B+d\right)$$

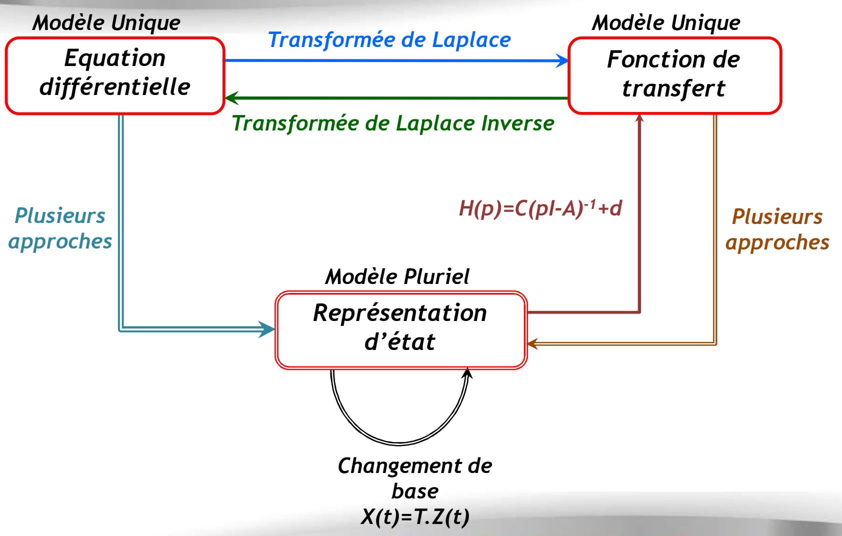
$$\Leftrightarrow \bar H(p)=\left(C.(p.I-A)^{-1}.B+d\right)$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \bar H(p)=H(p)}$$

Ce résultat est justifié par le fait que la fonction de transfert est une représentation entrée-sortie. Cette unicité de représentation est alors vraie pour toutes les représentations **entrée-sortie** comme la réponse impulsionnelle, la réponse harmonique, etc.

Page 83

2.6. Récapitulatif de passage entre les différentes représentations



Page 84

2.7. Résolution de l'équation d'état

2.7.1. Position du problème

On cherche à déterminer l'évolution temporelle de la sortie ***y(t)*** d'un système défini par la représentation d'état suivante en supposant que l'état initial ***X(t₀)*** et l'entrée ***u(t)*** sont connus :

$$\begin{cases} \boxed{\dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \quad : \; équation \quad d'état} \\ y(t) = C.\boxed{X(t)} + d.u(t) \quad : \; équation \quad de \quad sortie \end{cases}$$

Il est facile de remarquer que la réalisation de cet objectif nécessite aussi la connaissance de *X(t)*.

Ceci impose la résolution de l'équation d'état.

2.7. Résolution de l'équation d'état

2.7.2. Solution de l'équation d'état

On cherche à résoudre l'équation d'état donnée par :

$$\dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t)$$

en supposant que l'état initial ***X(t₀)*** et l'entrée ***u(t)*** sont connus.

- Il s'agit d'un système différentiel de premier ordre qui comporte ***n*** équations différentielles matricielles de premier ordre.
- Le cas des équations différentielles matricielles se traite de manière similaire au cas scalaire
  - Résolution du problème homogène.
  - Résolution du problème avec second membre.

2.7.2. Solution de l'équation d'état

- En appliquant la transformée de Laplace à l'équation d'état $\dot{X}(t)=A.X(t)+B.u(t)$, on obtient :

$$p.X(p)-X(0)=A.X(p)+B.U(p) \Leftrightarrow (p.I-A).X(p)=X(0)+B.U(p)$$

$$\Leftrightarrow X(p)=(p.I-A)^{-1}.X(0)+(p.I-A)^{-1}.B.U(p)$$

- En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$X(t)=e^{At}.X(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau).d\tau$$

- Si on considère l'état initial à t_0, on peut montrer :

$$\boxed{X(t)=\underbrace{e^{A(t-t_0)}.X(t_0)}_{\substack{\textbf{Réponse libre}\\ \textbf{u(t)=0}}}+\underbrace{\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau).d\tau}_{\substack{\textbf{Réponse forcée}\\ \textbf{u(t)}\neq\textbf{0}}}}$$

2.7.3. Matrice de transition

- La solution de l'équation d'état montre bien que le calcul de ***X(t)*** nécessite le calcul de $e^{A(t-t_0)}$.
- Cette matrice est appelée matrice de transition car elle établit la correspondance entre l'état du système à un instant ***t*** et l'état initial à l'instant t_0. On utilise souvent la notation:

$$\phi(t,t_0)=\phi(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}$$

- La matrice de transition vérifie plusieurs propriétés de l'exponentielle scalaire. Ces propriété sont résumées comme suit:

P1. $\phi(t_0,t_0)=I_n$

P2. $\dfrac{d\phi(t,t_0)}{dt}=A.\phi(t,t_0)$

P3. $\phi(t_2,t_1).\phi(t_1,t_0)=\phi(t_2,t_0)$

P4. ϕ est toujours inversible d'inverse $\phi^{-1}(t_2,t_1)=\phi(t_1,t_2)$

P5. $\mathrm{TL}\left[e^{At}\right]=(p.I-A)^{-1}$

2.7. Résolution de l'équation d'état

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

- Le calcul de de la matrice de transition e^{At} représente l'opération la plus difficile dans la résolution des équation d'état.
- Il existe plusieurs méthodes pour déterminer la matrice de transition e^{At} . Parmi toutes les méthodes, on distingue:
  - Méthode de développement limité.
  - Méthode de la transformée de Laplace.
  - Méthode de diagonalisation de la matrice de transition.
  - Méthode de Sylvester
  - Méthode de Cayley-Hamilton

Page 89

2.7. Résolution de l'équation d'état

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

2.7.4.1. Méthode de développement limité

Le développement en série de Taylor d'une fonction exponentielle scalaire est donné par :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

On peut généraliser ce développement pour l'exponentielle d'une matrice comme suit :

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{A^n}{n!}t^n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}t^i$$

Cette méthode de calcul consiste à approximer cette série par un développement limité d'ordre k comme suit:

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{k} \frac{A^i}{i!}t^i$$

Cette approximation converge uniformément vers $e^{A.t}$. En effet, il faut prendre une valeur assez élevée pour l'entier k afin d'obtenir une approximation acceptable. Mais, ceci augmente la complexité de calcul.

Page 90

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

2.7.4.1. Méthode de développement limité

Cette méthode peut être adoptée lorsqu'on n'a pas besoin des expressions analytiques de $e^{A.t}$. Par ailleurs, elle est recommandée dans le cas où la matrice ***A*** est nilpotente.

Définition

Une matrice carré ***A*** est dite nilpotente d'ordre ***k*** s'il existe un entier ***k*** tel que pour tout entier ***r> k***, $A^r = [0]$.

Exemple $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

On a $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \forall k > 1 \quad A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d'où $e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

2.7.4.2. Méthode de la transformée de Laplace

Cette méthode est basée sur l'utilisation de la transformée de Laplace inverse:

$$e^{At} = TL^{-1}\left((pI - A)^{-1}\right)$$

En utilisant cette propriété, on peut calculer $e^{A.t}$ en adoptant la démarche suivante:

- Déterminer ***(pI-A)***
- Calculer $(pI-A)^{-1}$
- Appliquer la transformée de Laplace inverse à $(pI-A)^{-1}$ pour déduire e^{At}

Exemple 1 $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$p.I - A = \begin{bmatrix} p & -3 \\ 0 & p \end{bmatrix} \Rightarrow (p.I - A)^{-1} = \frac{1}{p^2}\begin{bmatrix} p & 3 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \frac{3}{p^2} \\ 0 & \frac{1}{p} \end{bmatrix} \overset{TL^{-1}}{\Rightarrow} e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.7. Résolution de l'équation d'état

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

2.7.4.2. Méthode de la transformée de Laplace

Exemple 2 $A=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ $p.I-A=\begin{bmatrix}p+3 & 2\\ -1 & p\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow (p.I-A)^{-1}=\frac{1}{p^2+3p+2}\begin{bmatrix}p & -2\\ 1 & p+3\end{bmatrix}=\frac{1}{(p+1)(p+2)}\begin{bmatrix}p & -2\\ 1 & p+3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{p}{(p+1)(p+2)} & \frac{-2}{(p+1)(p+2)}\\ \frac{1}{(p+1)(p+2)} & \frac{p+3}{(p+1)(p+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{(p+1)}+\frac{2}{(p+2)} & \frac{-2}{(p+1)}+\frac{2}{(p+2)}\\ \frac{1}{(p+1)}-\frac{1}{(p+2)} & \frac{2}{(p+1)}-\frac{1}{(p+2)}\end{bmatrix}$$

$$\overset{TL^{-1}}{\Rightarrow} e^{At}=\begin{bmatrix}-e^{-t}+2e^{-2t} & -2e^{-t}+2e^{-2t}\\ e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-t}-e^{-2t}\end{bmatrix}$$

2.7. Résolution de l'équation d'état

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

2.7.4.3. Méthode de diagonalisation de la matrice d'état

Résultat 1

- Si la matrice *A* est une matrice diagonale :

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}$$

alors la matrice e^{At} est donnée par :

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & e^{\lambda_n}\end{bmatrix}$$

Résultat 2

- Toute matrice carrée *A* de dimension ***n*** possédant ***n*** valeurs propres distinctes est diagonalisable sous la forme:

$$A=T.\Delta.T^{-1}$$

- T : matrice de passage formées par les composantes des vecteurs propres de A.
- Δ : matrice diagonale constituée par les valeurs propres de A.

2.7. Résolution de l'équation d'état

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

2.7.4.3. Méthode de diagonalisation de la matrice d'état

En appliquant ces résultats et le développement de e^{At} en série de Taylor, on peut montrer le résultat suivant:

$$e^{At} = T.e^{\Delta t}.T^{-1}$$

En utilisant ce résultat, on peut calculer e^{At} en adoptant la démarche suivante:

- **étape 1 :** Calculer les valeurs propres de ***A***.
- **étape 2 :** Déterminer les vecteurs propres de ***A***.
- **étape 3 :** Construire ***T*** et Δ
- **étape 4 :** Calculer T^{-1} et $e^{\Delta t}$
- **étape 5 :** Calculer e^{At}.

2.7. Résolution de l'équation d'état

2.7.4. Calcul de la matrice de transition

2.7.4.3. Méthode de diagonalisation de la matrice d'état

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

•étape 1 : Calculer les valeurs propres de ***A***.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda+3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

•étape 2 : Déterminer les vecteurs propres de ***A***.

$$A.V_i = \lambda_i.V_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \lambda_i.\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x_i - 2y_i = \lambda_i x_i \\ x_i = \lambda_i y_i \end{cases}$$

$$\bullet \lambda_1 = -1 \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \bullet \lambda_2 = -2 \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

•étape 3 : Construire ***T*** et Δ

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

•étape 4 : Calculer T^{-1} et $e^{\Delta t}$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e^{\Delta t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

•étape 5 : Calculer e^{At}.

$$e^{At} = T.e^{\Delta t}.T^{-1}$$

$$\Leftrightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Chapitre 3

Représentation d'état des systèmes linéaires échantillonnés

3.1. Introduction

La représentation d'état d'un système linéaire échantillonné, stationnaire, monovariable caractérisé par n variables d'état est donnée par :

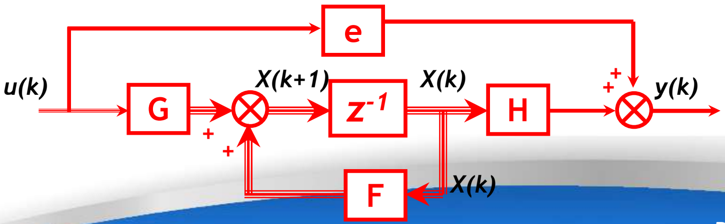
$$\begin{cases} X((k+1).T_e) = F.X(k.T_e) + G.u(k.T_e) \\ y(k.T_e) = H.X(k.T_e) + e.u(k.T_e) \end{cases}$$

On omet l'écriture de T_e

$$\begin{cases} X(k+1) = F.X(k) + G.u(k) & \text{: Equation d'état} \\ y(k) = H.X(k) + e.u(k) & \text{: Equation de sortie} \end{cases}$$

où

- F : matrice d'évolution de dimension *(n×n)*
- G : vecteur de commande de dimension *(n×1) : vecteur colonne*
- H : vecteur de sortie de dimension *(1×n) : vecteur ligne*
- e : coefficient (scalaire) de transfert direct



3.1. Introduction

- Ce chapitre est consacré à la modélisation des systèmes linéaires échantillonnés stationnaires monovariables par approche d'éat.
- On met l'accent sur les points suivants :
  - Discrétisation de la représentation d'état continus.
  - Réalisation d'une représentation d'état à partir d'une fonction de transfert en considérant essentiellement les formes suivantes :
    - la forme canonique de commandabilité,
    - la forme canonique d'observabilité,
    - la forme de Jordan (ou modale).
  - Passage d'une équation récurrente vers la représentation d'état.
  - Passage d'une représentation d'état vers la fonction de transfert.
  - Résolution de l'équation d'état.

Page 99

3.2. Discrétisation de la représentation d'état continue

Objectif

Discrétiser une représentation d'état continue avec une période d'échantillonnage T_e pour obtenir la représentation d'état échantillonnée.

Représentation d'état continue

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$$

$\rightarrow$

Représentation d'état échantillonnée

$$\begin{cases} X(k+1) = F.X(k) + G.u(k) \\ y(k) = H.X(k) + e.u(k) \end{cases}$$

Ceci revient à calculer F, G, H et e en fonction de A, B, C, d et T_e.

Page 100

3.2. Discrétisation de la représentation d'état continue

- Pour réaliser cet objectif, on considère la solution de l'équation d'état :

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}.X(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau).d\tau \quad (1)$$

- En remplaçant t_0 par $k.T_e$ et t par $(k+1)T_e$ dans **(1)**, on obtient :

$$X(k+1) = e^{A.T_e}.X(k) + \int_{k.T_e}^{(k+1).T_e} e^{A((k+1).T_e-\tau)}.B.u(\tau).d\tau \quad (2)$$

- Entre $k.T_e$ et $(k+1)T_e$, la commande conserve sa dernière valeur ***u(k)*** par le bloqueur d'ordre zéro (BOZ). Ceci implique que ***u(τ)=u(k) pour*** $\tau \in [k.T_e, (k+1)T_e]$, la relation **(2)** s'écrit comme suit :

$$X(k+1) = e^{A.T_e}.X(k) + \int_{k.T_e}^{(k+1).T_e} e^{A((k+1).T_e-\tau)}.B.d\tau.u(k) \quad (3)$$

- En posant $\theta = (k+1)Te - \tau$ dans la relation **(3)** , on obtient :

$$\boxed{X(k+1) = e^{A.T_e}.X(k) + \int_{0}^{T_e} e^{A.\theta}.B.d\theta.u(k)} \quad (4)$$

- En remplaçant t par $k.T_e$ dans l'équationde sortie, on obtient :

$$\boxed{y(k) = C.X(k) + d.u(k)} \quad (5)$$

3.2. Discrétisation de la représentation d'état continue

Résumé

Représentation d'état continue		Représentation d'état échantillonnée
$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$	**Discrétisation avec *Te*** →	$\begin{cases} X(k+1) = F.X(k) + G.u(k) \\ y(k) = H.X(k) + e.u(k) \end{cases}$

avec

- $F = e^{A.T_e}$
- $G = \int_0^{T_e} e^{A.\theta}.B.d\theta$
- $H = C$
- $e = d$

Remarque

Cette discrétisation nécessite le calcul de l'exponentielle de la matrice ***A*** qui peut être réalisé, par exemple, par la méthode de la transformée de Laplace.

3.2. Discrétisation de la représentation d'état continue

Exemple Discrétiser avec *Te=0.5s*

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) \end{cases}$$

- Calcul de $e^{A.t}$:

$$p.I - A = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 0 & p \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (p.I - A)^{-1} = \frac{1}{p^2}\begin{bmatrix} p & 1 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \frac{1}{p^2} \\ 0 & \frac{1}{p} \end{bmatrix}$$

$$\overset{TL^{-1}}{\Rightarrow} e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcul de **F, G et H :**

$$F = e^{A.T_e} = \begin{bmatrix} 1 & T_e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \int_0^{T_e} e^{A.\theta} B d\theta = \int_0^{T_e} \begin{bmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\theta = \int_0^{T_e} \begin{bmatrix} \theta \\ 1 \end{bmatrix} d\theta = \begin{bmatrix} \frac{T_e^2}{2} \\ T_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$H = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(k) \end{cases}$$

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

- Ce paragraphe adresse le problème de réalisation d'une représentation d'état à partir d'une fonction de transfert.
- Plusieurs approches peuvent être adoptées pour résoudre ce problème puisque la représentation d'état d'un système est plurielle.
- Dans la suite, on présente les représentations suivantes:
  - La forme canonique de commandabilité.
  - La forme canonique d'observabilité.
  - La forme modale ou de Jordan.
- Ces formes offrent plusieurs avantages au niveau l'analyse et/ou la synthèse des systèmes.
- Ces réalisations seront développées pour les systèmes linéaires continus stationnaires de la forme:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m.z^m + b_{m-1}.z^{m-1} + \cdots + b_1.z + b_0}{z^n + a_{n-1}.z^{n-1} + \cdots + a_1.z + a_0}; \quad a_n = 1 \quad et \quad m < n$$

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.1. Forme canonique de commandabilité

La forme canonique de commandabilité est une représentation d'état qui peut être obtenue en respectant le principe suivant:

- La fonction de transfert peut se mettre comme suit :

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \left(\frac{b_m.z^m + b_{m-1}.z^{m-1} + \cdots + b_1.z + b_0}{z^n + a_{n-1}.z^{n-1} + \cdots + a_1.z + a_0}\right) x \frac{(z)^{-n}}{(z)^{-n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{Y(z)}{W(z)}\frac{W(z)}{U(z)} = \frac{b_m.z^{-n+m} + b_{m-1}.z^{-n+m-1} + \cdots + b_1.z^{-n+1} + b_0.z^{-n}}{1 + a_{n-1}.z^{-1} + \cdots + a_1.z^{-n+1} + a_0.z^{-n}}$$

- On pose :

$$\begin{cases} \dfrac{Y(z)}{W(z)} = N(z) = b_m.z^{-n+m} + b_{m-1}.z^{-n+m-1} + \cdots + b_1.z^{-n+1} + b_0.z^{-n} \\ \dfrac{W(z)}{U(z)} = \dfrac{1}{D(z)} = \dfrac{1}{1 + a_{n-1}.z^{-1} + \cdots + a_1.z^{-n+1} + a_0.z^{-n}} \end{cases}$$

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.1. Forme canonique de commandabilité

- La fonction de transfert entre ***W(z)*** et ***U(z)*** peut se mettre comme suit :

$$\frac{W(z)}{U(z)} = \frac{1}{D(z)} \Leftrightarrow W(z).D(z) = U(z) \Leftrightarrow W(z).\left[1 + a_{n-1}.z^{-1} + \cdots + a_0.z^{-n}\right] = U(z)$$

$$\boxed{W(z) = U(z) - W(z).\left[a_{n-1}.z^{-1} + \cdots + a_1.z^{-n+1} + a_0.z^{-n}\right]}$$

- La fonction de transfert ***Y(z)*** et ***W(z)*** peut se mettre comme suit :

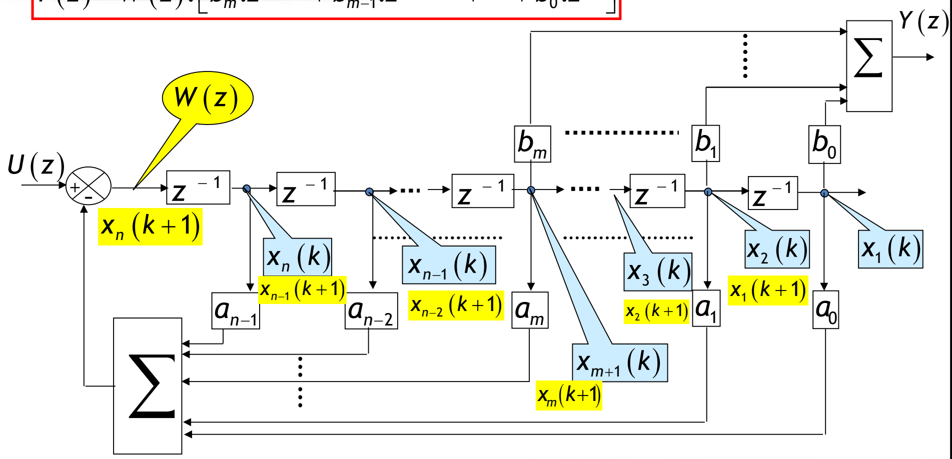
$$\frac{Y(z)}{W(z)} = N(z) \Leftrightarrow Y(z) = W(z).N(z)$$

$$\boxed{Y(z) = W(z).\left[b_m.z^{-n+m} + b_{m-1}.z^{-n+m+1} + \cdots + b_0.z^{-n}\right]}$$

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.1. Forme canonique de commandabilité

$$Y(z)=W(z).\left[b_m.z^{-n+m}+b_{m-1}.z^{-n+m-1}+\cdots+b_0.z^{-n}\right]$$



$$W(z)=U(z)-W(z).\left[a_{n-1}.z^{-1}+\cdots+a_1.z^{-n+1}+a_0.z^{-n}\right]$$

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.1. Forme canonique de commandabilité

- Il est facile maintenant de déduire du schéma fonctionnel les équations suivantes:

$$\begin{cases} x_1(k+1)=x_2(k) \\ x_2(k+1)=x_3(k) \\ x_3(k+1)=x_4(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1)=x_n(k) \\ x_n(k+1)=u(k)-a_{n-1}x_n(k)-a_{n-2}x_{n-1}(k)-\cdots-a_0x_1(k) \end{cases}$$

$$y(k)=b_0x_1(k)+\cdots+b_mx_{m+1}(k)$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

Forme compagne commandable

$$\begin{cases} X(k+1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} X(k)+\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k)=\begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} X(k) \end{cases}$$

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.1. Forme canonique de commandabilité (5/6)

Résumé

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m.z^m + \cdots + b_1.z + b_0}{z^n + a_{n-1}.z^{n-1} + \cdots + a_1.z + a_0} \Rightarrow \begin{cases} X(k+1) = F_C.X(k) + G_C.u(k) \\ y(k) = H_C.X(k) + e_C.u(k) \end{cases}$$

avec

- $F_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$
- $G_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Si $0 \le m < n$: $H_c = \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $e_c = 0$
- Si $m = n$: $H_c = \begin{bmatrix} b_0 - a_0.b_n & b_1 - a_1.b_n & \cdots & b_{n-1} - a_{n-1}.b_n \end{bmatrix}$; $e_c = b_n$

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

Exemple **Système strictement propre**

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.4z + 0.2}{z^3 + 0.25z^2 + 0.5z + 0.75} \quad x \frac{z^{-3}}{z^{-3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{W(z)}\frac{W(z)}{U(z)} = \frac{0.4z^{-2} + 0.2z^{-3}}{1 + 0.25z^{-1} + 0.5z^{-3} + 0.75z^{-3}}$$

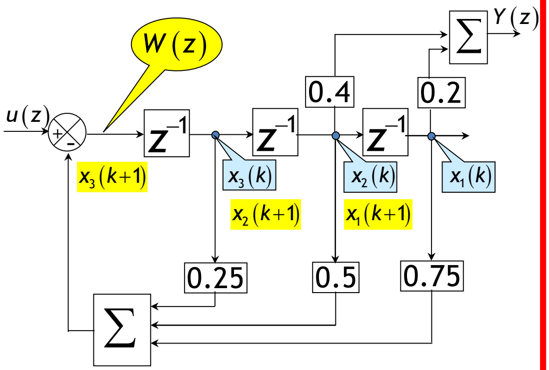
- On pose :

$$\begin{cases} \dfrac{Y(z)}{W(z)} = N(z) = 0.4z^{-2} + 0.2z^{-3} \Leftrightarrow \boxed{Y(z) = W(z).\left[0.4z^{-2} + 0.2z^{-3}\right]} \\ \dfrac{W(z)}{U(z)} = \dfrac{1}{1 + 0.25z^{-1} + 0.5z^{-2} + 0.75z^{-3}} \Leftrightarrow \boxed{W(z) = U(z) - W(z).\left[0.25z^{-1} + 0.5z^{-2} + 0.75z^{-3}\right]} \end{cases}$$

2.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

2.3.1. Forme canonique de commandabilité

$$\boxed{Y(z) = W(z).\left[0.4z^{-2} + 0.2z^{-3}\right]}$$



$$\boxed{W(z) = U(z) - W(z).\left[0.25z^{-1} + 0.5z^{-2} + 0.75z^{-3}\right]}$$

- Il est facile maintenant de déduire du schéma fonctionnel les équations suivantes:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ x_3(k+1) = u(k) - 0.25x_3(k) - 0.5x_2(k) - 0.75x_1(k) \end{cases}$$
$$y(k) = 0.4x_2(k) + 0.2x_1(k)$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.75 & -0.5 & -0.25 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} X(k) \end{cases}$$

Forme canonique de commandabilité

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.2. Forme canonique d'observabilité

La forme canonique d'observabilité sera présentée avec la fonction de transfert suivante:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1.z + b_0}{z^3 + a_2.z^2 + a_1.z + a_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1.z + b_0}{z^3 + a_2.z^2 + a_1.z + a_0} \times \left(\frac{z^{-3}}{z^{-3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1.z^{-2} + b_0.z^{-3}}{1 + a_2.z^{-1} + a_1.z^{-2} + a_0.z^{-3}}$$

$$\Leftrightarrow Y(z).\left[1 + a_2.z^{-1} + a_1.z^{-2} + a_0.z^{-3}\right] = U(z).\left[b_1.z^{-2} + b_0.z^{-3}\right]$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = -Y(z).\left[a_2.z^{-1} + a_1.z^{-2} + a_0.z^{-3}\right] + U(z).\left[b_1.z^{-2} + b_0.z^{-3}\right]$$

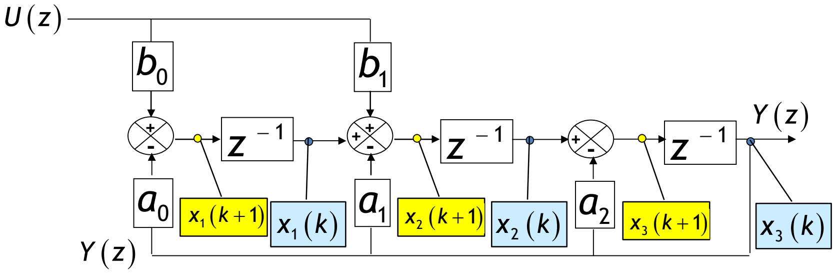
$$\Leftrightarrow Y(z) = \left(b_0U(z) - a_0Y(z)\right).z^{-3} + \left(b_1U(z) - a_1Y(z)\right).z^{-2} - a_2Y(z).z^{-1}$$

$$\Leftrightarrow Y(z) = \left(\left[\left\{b_0.U(z) - a_0.Y(z)\right\}.z^{-1} + b_1.U(z) - a_1.Y(z)\right].z^{-1} - a_2.Y(z)\right).z^{-1}$$

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.2. Forme canonique d'observabilité

$$Y(z)=\left(\left[\left\{b_0.U(z)-a_0.Y(z)\right\}.z^{-1}+b_1.U(z)-a_1.Y(z)\right].z^{-1}-a_2.Y(z)\right).z^{-1}$$



- Le schéma fonctionnel donnent les équations suivantes:

$$\begin{cases} x_1(k+1)=-a_0x_3(k)+b_0u(k) \\ x_2(k+1)=x_1(k)-a_1x_3(k)+b_1u(k) \\ x_3(k+1)=x_2(k)-a_2x_3(k) \end{cases}$$

$$y(k)=x_3(k)$$

- Ces équations peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} X(k+1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} X(k)+\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(k) \end{cases}$$

Page 113

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.2. Forme canonique d'observabilité

Résumé

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_m.z^m+\cdots+b_1.z+b_0}{z^n+a_{n-1}.z^{n-1}+\cdots+a_1.z+a_0} \Rightarrow \begin{cases} X(k+1)=F_O.X(k)+G_O.u(k) \\ y(k)=H_O.X(k)+e_O.u(k) \end{cases}$$

avec

- $F_O=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$
- $H_O=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Si $0\le m<n$: $G_O=\begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$ $e_O=0$
- Si $m=n$: $G_O=\begin{bmatrix} b_0-a_0.b_n & b_1-a_1.b_n & \cdots & b_{n-1}-a_{n-1}.b_n \end{bmatrix}^T$; $e_O=b_n$

Page 114

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

Principe

- Cette forme consiste à utiliser les pôles de la fonction de transfert pour réaliser une représentation d'état. Ceci peut être assuré en respectant la démarche suivante:
  - Détermination des pôles de la fonction de transfert.
  - Décomposition de la fonction de transfert en éléments simples.
  - Déduction de la représentation d'état.

- On distingue trois cas:
  - Pôles simples.
  - Pôles multiples.
  - Pôles complexes conjugués.

Page 115

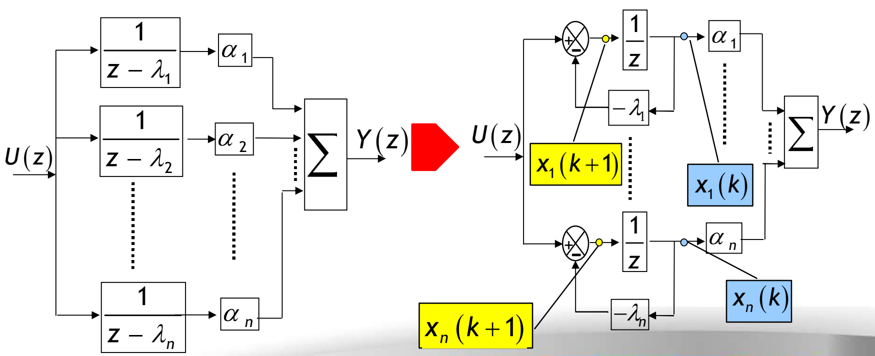
3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

3.3.3.1. Pôles simples

On suppose que la fonction de transfert admet ***n*** pôles réels distincts λ_1, λ_2,… et λ_n. En effet, la décomposition de cette fonction de transfert donne:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \frac{\alpha_1}{z - \lambda_1} + \frac{\alpha_2}{z - \lambda_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{z - \lambda_n}$$



Page 116

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

3.3.3.1. Pôles simples

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \lambda_1 x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = \lambda_2 x_2(k) + u(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = \lambda_n x_n(k) + u(k) \end{cases}$$

$$y(k) = \alpha_1 x_1(k) + \alpha_2 x_2(k) + \cdots + \alpha_n x_n(k)$$

Forme Modale

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} X(k) \end{cases}$$

Les pôles de la fonction sont les éléments de la diagonale

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

3.3.3.2. Pôles Multiples

On suppose que la fonction de transfert d'ordre ***n*** admet un pôle réel multiple d'ordre ***q*** et (***n-q***) pôles réels distincts λ_{q+1}, λ_{q+2},… et λ_n. En effet, la décomposition de cette fonction de transfert donne:

$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\alpha_1}{(z-\lambda_1)^q} + \frac{\alpha_2}{(z-\lambda_1)^{q-1}} + \ldots + \frac{\alpha_q}{(z-\lambda_1)} + \frac{\alpha_{q+1}}{z-\lambda_{q+1}} + \cdots + \frac{\alpha_n}{z-\lambda_n}}$$

On peut montrer que :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \lambda_1 x_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) = \lambda_1 x_2(k) + x_3(k) \\ \vdots \\ x_{q-1}(k+1) = \lambda_1 x_{q-1}(k) + x_q(k) \\ x_q(k+1) = \lambda_1 x_q(k) + u(k) \\ x_{q+1}(k+1) = \lambda_{q+1} x_{q+1}(k) + u(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = \lambda_n x_n(k) + u(k) \end{cases}$$

$$y(k) = \alpha_1.x_1(k) + \alpha_2.x_2(k) + \cdots + \alpha_n.x_n(k)$$

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

3.3.3.2. Pôles Multiples

Forme Modale

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & & \\ \vdots & 0 & \lambda_1 & 1 & \vdots & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \lambda_1 & 0 & & \\ \vdots & & \cdots & & \lambda_{q+1} & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_q & \alpha_{q+1} & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} X(k) \end{cases}$$

Les pôles de la fonction sont les éléments de la diagonale

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

3.3.3.3. Pôles Complexes

Pour une paire de pôles complexes conjugués $p_1 = \eta + j\mu;\quad p_2 = \bar{p}_1 = \eta - j\mu$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\alpha_1}{z-p_1} + \frac{\alpha_2}{z-p_2} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \beta + j\delta;\quad \alpha_2 = \bar{\alpha}_1 = \beta - j\delta$$

La représentation d'état peut se mettre sous la forme suivante :

$$\boxed{\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(p_1) & \mathrm{Im}(p_1) \\ -\mathrm{Im}(p_1) & \mathrm{Re}(p_1) \end{bmatrix} .X(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 2.\mathrm{Re}(\alpha_1) & 2.\mathrm{Im}(\alpha_1) \end{bmatrix} .X(k) \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} \eta & \mu \\ -\mu & \eta \end{bmatrix} .X(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 2.\beta & 2.\delta \end{bmatrix} .X(k) \end{cases}}$$

3.3. Passage d'une fonction de transfert vers une représentation d'état

3.3.3. Forme canonique modale (ou de Jordan)

Exemple $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.1}{(z+0.5)^3} + \frac{0.2}{(z+0.5)} + \frac{0.3}{(z+0.25)} + \frac{0.4+0.7j}{(z+0.75+0.95)} + \frac{0.4-0.7j}{(z+0.75-0.95)}$

- Cette fonction admet :
  - un pôle multiple d'ordre trois λ_1=-0,5
  - un pôle simple λ_2=-0,25
  - une paire des pôles complexes conjugués : λ_3= -0,75-0,95j et λ_4=-0,75+0,95j.
- La représentation d'état et comme suit :

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.75 & -0.95 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.95 & -0.75 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.2 & 0.3 & 0.8 & 1.4 \end{bmatrix} X(k) \end{cases}$$

3.4. Passage d'une équation récurrente vers une représentation d'état

Considérons le modèle général d'un système linéaire, échantillonné, monovariable, stationnaire ou non stationnaire , représenté par une équation récurrente d'ordre ***n*** :

$$y(k+n) + a_{n-1}(k)y(k+n-1) + \cdots + a_1(k)y(k+1) + a_0(k)y(k) =$$
$$b_m(k)u(k+m) + b_{m-1}(k)u(k+m-1) + \cdots + b_1(k)u(k+1) + b_0(k)u(k)$$

- Le vecteur d'état comporte *n* variables d'état.
- Le principe consiste à trouver un vecteur d'état ***X(k)*** et ensuite à calculer ***X(k+1)***.

Le vecteur d'état peut être défini comme suit:

$$X(k) = \begin{cases} x_1(k) = y(k) \\ x_2(k) = x_1(k+1) + \alpha_1(k).u(k) \\ x_3(k) = x_2(k+1) + \alpha_2(k).u(k) \\ \quad\vdots \\ x_n(k) = x_{n-1}(k+1) + \alpha_{n-1}(k).u(k) \end{cases}$$

Quel est le rôle des a_i ?

Pour répondre à cette question, on considère les exemples suivants.

3.4. Passage d'une équation récurrente vers une représentation d'état

Exemple 1 Système stationnaire $y(k+2)+y(k+1)+y(k)=u(k+1)+u(k)$

On pose : $X(k)=\begin{cases} x_1(k)=y(k) \\ x_2(k)=x_1(k+1)+\alpha_1(k).u(k) \end{cases}$

Et on calcule :

$$X(k+1)=\begin{cases} x_1(k+1)=y(k+1)=x_2(k)-\alpha_1(k).u(k) \\ x_2(k+1)=x_1(k+2)+\alpha_1(k+1).u(k+1)=y(k+2)+\alpha_1(k+1).u(k+1) \\ \quad =-y(k+1)-y(k)+u(k+1)+u(k)+\alpha_1(k+1).u(k+1) \\ \quad =-x_2(t)+\alpha_1(k).u(k)-x_1(k)+u(k+1)+u(k)+\alpha_1(k+1).u(k+1) \\ \quad =-x_1(k)-x_2(k)+[\alpha_1(k)+1].u(k)+\boxed{[\alpha_1(k+1)+1].u(k+1)} \end{cases}$$

Cette expression comporte l'entrée future *u(k+1)*. Ceci ne correspond à une représentation d'état. En effet, il faut l'annuler en utilisant *a₁(k+1)*.

$$\boxed{\alpha_1(k+1)=-1}$$

Stationnaire

d'où: $\begin{cases} X(k+1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}X(k)+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u(k) \\ y(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}X(k) \end{cases}$

Page 123

3.4. Passage d'une équation récurrente vers une représentation d'état

Exemple 2 Système stationnaire $y(k+2)+y(k+1)+y(k)=u(k)$

On pose : $X(k)=\begin{cases} x_1(k)=y(k) \\ x_2(k)=x_1(k+1)+\alpha_1(k).u(k) \end{cases}$

Et on calcule :

$$X(k+1)=\begin{cases} x_1(k+1)=y(k+1)=x_2(k)-\alpha_1(k).u(k) \\ x_2(k+1)=x_1(k+2)+\alpha_1(k+1).u(k+1)=y(k+2)+\alpha_1(k+1).u(k+1) \\ \quad =-y(k+1)-y(k)+u(k)+\alpha_1(k+1).u(k+1) \\ \quad =-x_2(t)+\alpha_1(k).u(k)-x_1(k)+u(k)+\alpha_1(k+1).u(k+1) \\ \quad =-x_1(k)-x_2(k)+[\alpha_1(k)+1].u(k)+\boxed{\alpha_1(k+1).u(k+1)} \end{cases}$$

Cette expression comporte l'entrée future *u(k+1)*. Ceci ne correspond à une représentation d'état. En effet, il faut l'annuler en utilisant *a₁(k+1)*.

$$\boxed{\alpha_1(k+1)=0}$$

Stationnaire

d'où: $\begin{cases} X(k+1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}X(k)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(k) \\ y(k)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}X(k) \end{cases}$

Page 124

3.4. Passage d'une équation récurrente vers une représentation d'état

Remarques

- Les termes α_1, α_2, … et α_n sont utilisés pour annuler les entrées ***u(k+i) pour i>0*** qui figurent dans l'équation récurrente.
- Si l'équation récurrente ne comporte pas des entrées futures ***u(k+i) pour i>0*** alors les termes α_1, α_2, … et α_n sont nuls.
- Si le système est stationnaire alors les termes α_1, α_2, … et α_n sont aussi stationnaires.
- Si le système est non stationnaire alors les termes α_1, α_2, … et α_n sont aussi non stationnaires.
- Cette approche peut être appliquée pour les systèmes multivariables.

3.5. Passage d'une représentation d'état vers la fonction de transfert

On veut déterminer la fonction de transfert d'un système échantillonné stationnaire défini par la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} X(k+1) = F.X(k) + G.u(k) & : \textit{équation d'état} \\ y(k) = H.X(k) + e.u(k) & : \textit{équation de sortie} \end{cases}$$

La transformée en ***Z*** nous permet d'écrire :

$$\begin{cases} z.X(z) = F.X(z) + G.U(z) \\ Y(z) = H.X(z) + e.U(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(z) = (z.I - F)^{-1}.G.U(z) \\ Y(z) = \left(H.(z.I - F)^{-1}.G + e\right).U(z) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{Y(z)}{U(z)} = \left(H.(z.I - F)^{-1} G + e\right)}$$

3.5. Passage d'une représentation d'état vers la fonction de transfert

Remarques

- L'inverse de la matrice ***(z.I-F)*** est donné par: $(z.I-F)^{-1} = \dfrac{adj(z.I-F)}{\det(z.I-F)}$

  d'où : $$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{H.adj(z.I-F).G + e.\det(z.I-F)}{\det(z.I-F)}$$

  Cette relation montre bien que les pôles de la fonction de transfert du système coïncident avec les valeurs propres de sa matrice d'évolution ***F***.

- La fonction de transfert suppose que les conditions initiales sont nulles. Ceci montre une limite de la représentation par fonction de transfert qui est d'application moins générale que la représentation d'état,

- Ces résultats peuvent être utilisés dans le cas d'un système linéaire multivariable.

- La fonction de transfert est une représentation unique. En effet, elle est un invariant par un changement de base.

3.5. Passage d'une représentation d'état vers la fonction de transfert

Exemple

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 1 & 0.25 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} X(k) \end{cases}$$

- La fonction de transfert est donnée par :

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = H.(z.I-F)^{-1}.G$$

- On calcule ***(z.I-A)***$^{-1}$:

$$(z.I-F) = \begin{bmatrix} z+0.5 & 0 \\ -1 & z-0.25 \end{bmatrix}$$

$$(z.I-F)^{-1} = \frac{1}{(z+0.5)(z-0.25)} \begin{bmatrix} z-0.25 & 0 \\ 1 & z+0.5 \end{bmatrix}$$

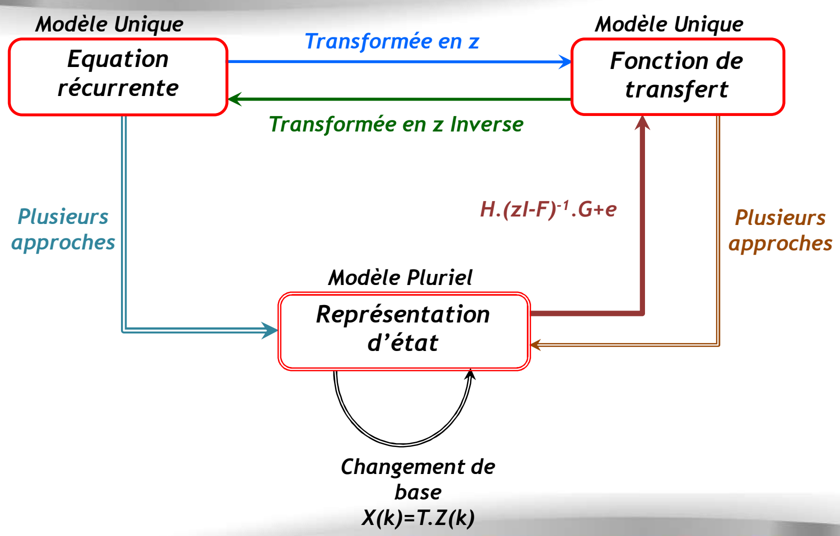
$d'où$ $$\frac{Y(z)}{U(z)} = H.(z.I-F)^{-1}.G$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(z+0.5)(z-0.25)} \begin{bmatrix} z-0.25 & 0 \\ 1 & z+0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{(z-0.25)(z+0.5)} \begin{bmatrix} z-0.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{(z-0.25)(z+0.5)}}$$

3.6. Récapitulatif de passage entre les différentes représentations



Page 129

3.7. Résolution de l'équation d'état

3.7.1. Position du problème

On cherche à déterminer l'évolution temporelle de la sortie ***y(k)*** d'un système défini par la représentation d'état suivante en supposant que l'état initial ***X(0)*** et l'entrée ***u(k)*** sont connues:

$$\begin{cases} \boxed{X(k+1) = F.X(k) + G.u(k) \quad : \; \text{équation d'état}} \\ y(k) = H.\boxed{X(k)} + e.u(k) \quad : \; \text{équation de sortie} \end{cases}$$

Il est facile de remarquer que la réalisation de cet objectif nécessite aussi la connaissance de ***X(k)***.

Ceci impose la résolution de l'équation d'état.

Page 130

3.7. Résolution de l'équation d'état

3.7.2. Solution de l'équation d'état

On cherche à résoudre l'équation d'état donnée par :

$$X(k+1) = F.X(k) + G.u(k)$$

- En remplaçant **$X(k)$** par **$F.X(k-1)+G.u(k-1)$**, on obtient :

$$\begin{aligned} X(k+1) &= F.X(k) + G.u(k) \\ &= F\left(F.X(k-1) + G.u(k-1)\right) + G.u(k) \\ &= F^2.X(k-1) + F.G.u(k-1) + F.u(k) \\ &= F^3.X(k-2) + F^2.G.u(k-2) + F.G.u(k-1) + G.u(k) \\ &\vdots \\ &= F^{k+1}.X(0) + F^k.G.u(0) + L + F.G.u(k-1) + G.u(k) \\ &= F^{k+1}.X(0) + \sum_{i=0}^{k} F^i.G.u(k-i) \end{aligned}$$

- L'équation de sortie est donnée par :

$$\boxed{y(k) = H.X(k) = H\left(F^k.X(0) + \sum_{i=0}^{k-1} F^i.G.u(k-1-i)\right)}$$

3.8. Conclusion

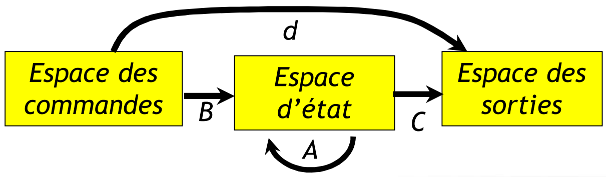
Chapitre 4

Commandabilité et Observabilité

4.1. Introduction

Les concepts de **commandabilité** et **d'observabilité** sont des concepts fondamentaux dans la théorie des systèmes. Ils permettent de caractériser les interactions entre les variables d'état du système et son comportement entrée-sortie :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases} \quad (1)$$



4.1. Introduction

Deux questions importantes sur l'évolution de l'état et donc sur le lien entre ces espaces au travers des matrices ***A***, ***B***, ***C*** et ***d*** peuvent être posées :

Q 1

Peut-on déterminer une commande admissible transférant le système d'un état donné à un autre? La notion sous-jacente à cette question est la notion de commandabilité (gouvernabilité, contrôlabilité). D'après notre schéma ceci concerne la matrice ***A*** et l'action par ***B*** sur l'espace d'état.

Q 2

Peut-on déterminer l'état initial à partir de l'observation des sorties? La notion sous-jacente à cette question est la notion d'observabilité. D'après notre schéma cette propriété concerne les matrices ***A*** et ***C***.

4.2. Commandabilité

Définition

Un système linéaire monovariable défini par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$$

est dit complètement commandable ou tout simplement commandable si pour tout état initial X_i et tout état final X_f, il existe un instant fini t_f et une loi de commande admissible ***u(t)*** définie sur l'intervalle de temps fini $[t_i, t_f]$ telle que la solution de l'équation d'état $\dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t)$ avec $X(t_i)=X_i$ vérifie l'état final $X(t_f)=X_f$.

Remarques

- Cette définition exige seulement que la commande ***u(t)*** doit être capable de déplacer le système d'un état initial quelconque vers un état final arbitraire en un temps fini tout en ignorant la trajectoire d'état à suivre.
- Cette définition ne comporte pas des contraintes sur la commande ***u(t)***.

4.2. Commandabilité

Critères de commandabilité

Un système défini par l'équation d'état suivante :

$$\dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t)$$

est commandable si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

Condition 1 :

Sa matrice de commandabilité de dimension (***n×n***) :

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} B & A.B & A^2.B & \cdots & A^{n-1}.B \end{bmatrix}$$

est de rang plein (ou régulière):

$$Rang(\mathbb{C}) = n$$

Condition 2:

Son grammien de commandabilité de dimension (***n×n***) :

$$\mathbb{W}_{\mathbb{C}}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A\tau}.B.B^T.e^{A^T\tau}.d\tau$$

est de rang plein (ou régulière) pour tout ***t>0***.

Condition 3 :

Pour chaque valeur propre ***λ*** de ***A***, la matrice de dimension (***n×(n+1)***) :

$$\begin{bmatrix} \lambda.I - A & B \end{bmatrix}$$

est de rang plein (ou régulière).

$$Rang\left(\begin{bmatrix} \lambda.I - A & B \end{bmatrix}\right) = n$$

4.2. Commandabilité

Remarques

- La propriété de commandabilité dépend essentiellement des matrices ***A*** et ***B***. De ce fait, on parle souvent de commandabilité de la paire (***A***,***B***).
- Un système défini sous la forme canonique commandable est commandable.
- La propriété de commandabilité est inhérente au système. En effet, elle est invariante par un changement de base ***X(t)=T.Z(t)***. Ce changement conduit à la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = \bar{A}.Z(t) + \bar{B}.u(t) \\ y(t) = \bar{C}.Z(t) + \bar{d}.u(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \bar{A} = T^{-1}.A.T, \quad \bar{B} = T^{-1}.B, \quad \bar{C} = C.T, \quad \bar{d} = d$$

d'où

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{C}} &= \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}.\bar{B} & \bar{A}^2.\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}.\bar{B} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1}.B & T^{-1}.A.T.T^{-1}.B & T^{-1}.A^2.T.T^{-1}.B & \cdots & T^{-1}.A^{n-1}.T.T^{-1}.B \end{bmatrix} \\ &= T^{-1}\begin{bmatrix} B & A.B & A^2.B & \cdots & A^{n-1}.B \end{bmatrix} \\ &= T^{-1}.\mathbb{C} \end{aligned}$$

Comme ***T*** est régulière alors $\bar{\mathbb{C}}$ est de rang plein si et seulement si $\mathbb{C}$ est de rang plein.

4.2. Commandabilité

Remarques

- Pour les systèmes monovariables, on se limite au calcul de déterminant de la matrice $\mathbb{C}$ pour vérifier la commandabilité :

Si $\det(\mathbb{C}) \neq 0$ *Alors Le système est commandable*
Sinon le système est non commandable

Exemples

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} . X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} . u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} . X(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} . X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} . u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} . X(t) \end{cases}$$

4.3. Observabilité

- Le concept d'observabilité est duale au concept de la commandabilité.
- La commandabilité traite le problème de commander l'état en utilisant l'entrée ***U(t)***.
- L'observabilité étudie le problème d'estimer l'état à partir de la sortie.
- Si un système est commandable alors tous ses modes peuvent être excités par l'entrée.
- Si un système est observable alors tous ses modes peuvent être observés à la sortie.

Définition

Un système linéaire défini par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$$

est dit complètement observable ou tout simplement observable si pour tout instant initial t_0, il est possible de déterminer l'état initial du système $X(t_0)$ à partir de la connaissance de son comportement entrée-sortie sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$.

4.3. Observabilité

Critères d'observabilité

Un système défini par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$$

est observable si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée:

Condition 1 :

Sa matrice d'observabilité donnée par :

$$\mathbb{O} = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ \vdots \\ C.A^{n-1} \end{bmatrix}$$

est de rang plein (ou régulière) :

$$Rang(\mathbb{O}) = n$$

Condition 2:

Son grammien d'observabilité de dimension **(*n*×*n*)** :

$$\mathbb{W}_{\mathbb{O}}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A^T\tau}.C^T.C.e^{A\tau}.d\tau$$

est de rang plein (ou régulière) pour tout ***t*>*0***.

Condition 3 :

Pour chaque valeur propre ***λ*** de ***A***, la matrice de dimension (**(*n*+1)×*n*)** :

$$\begin{bmatrix} \lambda.I - A \\ C \end{bmatrix}$$

est de rang plein (ou régulière) :

$$Rang\left(\begin{bmatrix} \lambda.I - A \\ C \end{bmatrix}\right) = n$$

4.3. Observabilité

Remarques

- La propriété d'observabilité dépend essentiellement des matrices ***A*** et ***C***. De ce fait, on parle souvent de l'observabilité de la paire **(*A*,*C*)**.
- Un système défini sous la forme canonique d'observabilité est observable.
- La propriété d'observabilité est inhérente au système. En effet, elle est invariante par un changement de base ***X(t)=T.Z(t)***. Ce changement conduit à la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = \bar{A}.Z(t) + \bar{B}.u(t) \\ y(t) = \bar{C}.Z(t) + \bar{d}.u(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \bar{A} = T^{-1}.A.T, \quad \bar{B} = T^{-1}.B, \quad \bar{C} = C.T, \quad \bar{C} = C.T$$

d'où

$$\bar{\mathbb{O}} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}.\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}.\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C.T \\ C.T.T^{-1}.A.T \\ \vdots \\ C.T.T^{-1}.A^{n-1}.T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ \vdots \\ C.A^{n-1} \end{bmatrix}.T = \mathbb{O}.T$$

Comme ***T*** est régulière alors $\bar{\mathbb{O}}$ est régulière si et seulement si $\mathbb{O}$ est régulière.

4.3. Observabilité

Remarques

- Pour les systèmes monovariables, on se limite au calcul de déterminant de la matrice $\mathbb{O}$ pour vérifier l'observabilité:

$$\begin{array}{l} Si \quad \det(\mathbb{O}) \neq 0 \quad Alors \quad Le \quad système \quad est \quad observable \\ Sinon \quad le \quad système \quad est \quad non \quad observable \end{array}$$

Exemples

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.X(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.X(t) \end{cases}$$

4.4. Commandabilité et observabilité des formes Modales

Soit la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$$

Il existe toujours une matrice régulière T telle que la transformation $X(t)=T.Z(t)$ conduit à une représentation d'état sous la forme Modale ou de Jordan :

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = \Delta.Z(t) + \Gamma.u(t) \\ y(t) = \Omega.X(t) + \Psi.u(t) \end{cases} \quad avec \quad \begin{cases} \Delta = T^{-1}.A.T \\ \Gamma = T^{-1}.B \\ \Omega = C.T \\ \Psi = d \end{cases}$$

Commandabilité

Ce système est commandable si et seulement si les composantes de Γ qui correspondent à la dernière ligne de chaque bloc de Jordan sont toutes non nulles.

Observabilité

Ce système est observable si et seulement si les composantes de Ω qui correspondent à la première colonne de chaque bloc de Jordan sont toutes non nulles.

4.4. Commandabilité et observabilité des formes Modales

Exemple

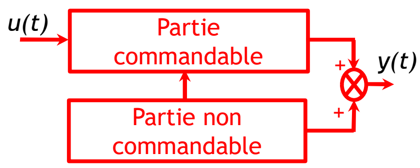
Soit un système constitué par 5 blocs de Jordan.

$$
\begin{cases}
\dot{X}(t) = \begin{bmatrix}
\lambda_1 & 1 & & & & & & & & \\
 & \lambda_1 & 1 & & & & & & & \\
 & & \lambda_1 & & & & & & & \\
 & & & \lambda_2 & 1 & & & & & \\
 & & & & \lambda_2 & 1 & & & & \\
 & & & & & \lambda_2 & & & & \\
 & & & & & & \lambda_3 & 1 & & \\
 & & & & & & & \lambda_3 & & \\
 & & & & & & & & \lambda_4 & \\
 & & & & & & & & & \lambda_5
\end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X(t)
\end{cases}
$$

4.5. Forme générale des systèmes non commandables

Un système linéaire non commandable peut être décomposé en deux parties:

- une partie commandable
- une partie non commandable.



- La commande ***u(t)*** n'affecte pas la partie non commandable.
- Cette décomposition est assurée par le théorème suivant :

4.5. Forme générale des systèmes non commandables

Théorème Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.X(t) + d.u(t) \end{cases}$$

En appliquant à ce système le changement de base suivant:

$$X(t) = T.Z(t) \quad avec \quad T = [T_C \quad T_{\bar{C}}]$$

On obtient :

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = \bar{A}.Z(t) + \bar{B}.U(t) \\ Y(t) = \bar{C}.Z(t) + \bar{D}.U(t) \end{cases}$$

avec

- $\bar{A} = T^{-1}.A.T = \begin{bmatrix} A_C & A_{C\bar{C}} \\ 0 & A_{\bar{C}} \end{bmatrix}$
- $\bar{B} = T^{-1}.B = \begin{bmatrix} B_C \\ 0 \end{bmatrix}$
- $\bar{C} = C.T = \begin{bmatrix} C_c & C_{\bar{c}} \end{bmatrix}$
- $\bar{d} = d$

où A_C est une matrice carrée de dimension **r<n, la paire (A_C, B_C) est commandable** et la fonction de transfert est donnée par:

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \bar{C}.(p.I - \bar{A})^{-1}.\bar{B} + \bar{d} = C_C.(p.I - A_C)^{-1}.B_c + \bar{d}$$

4.5. Forme générale des systèmes non commandables

Remarques

Ce théorème montre que seuls les pôles commandables du système apparaissent dans sa fonction de transfert. Ceci représente un autre inconvénient de la représentation par fonction de transfert. En effet, les pôles non commandables ne figurent pas dans la fonction de transfert car ils sont simplifiés avec des zéros. On parle d'un phénomène connu sous le nom **simplification pôle-zéro**. Ceci conduit aux :

- Si le système est non commandable alors il se produit, au niveau de sa fonction de transfert, une simplification pôle-zéro de tous ses pôles non commandables.
- Si le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert sont premiers entre eux, et si le degré du dénominateur est égal à n, alors le système est commandable.

4.5. Forme générale des systèmes non commandables

Exemple

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 7 \\ -7 & -13 & -11 \end{bmatrix} .X(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} .U(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} .X(t) \end{cases}$$

La matrice de commandabilité est :

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} B & A.B & A^2.B \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -19 \\ 2 & 1 & -7 \\ -1 & -8 & 26 \end{bmatrix}$$

- Le rang de $\mathbb{C}$ est égal à ***2** < **n=3***. Donc, le système est non commandable.

En appliquant à ce système le changement de base suivant: $Z(t) = T.X(t)$

$$avec \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad et \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient :

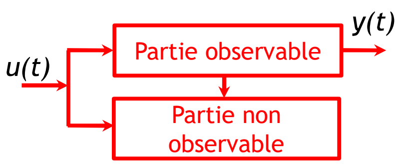
$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} .Z(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .U(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 6 \end{bmatrix} .Z(t) \end{cases}$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{-5p-40}{(p+1)(p+2)}$$

Page 149

4.6. Forme générale des systèmes non observables

Un système linéaire non observable peut être décomposé en deux parties:
- une partie observable
- une partie non observable .



- La sortie *y(t)* dépend uniquement de la partie observable.
- Le théorème suivant décrit le principe de cette décomposition.

Page 150

4.6. Forme générale des systèmes non observables

Théorème Soit le système suivant :

$$\begin{cases}\dot{X}(t) = A.X(t) + B.u(t)\\ y(t) = C.X(t) + d.u(t)\end{cases}$$

En appliquant à ce système le changement de base suivant:

$$X(t) = T.Z(t) \quad avec \quad T = [T_C \quad T_{\bar{C}}]$$

On obtient :

$$\begin{cases}\dot{Z}(t) = \bar{A}.Z(t) + \bar{B}.U(t)\\ Y(t) = \bar{C}.Z(t) + \bar{D}.U(t)\end{cases}$$

avec

- $\bar{A} = T^{-1}.A.T = \begin{bmatrix} A_O & 0 \\ A_{O\bar{O}} & A_{\bar{O}} \end{bmatrix}$
- $\bar{B} = T^{-1}.B = \begin{bmatrix} B_O \\ B_{\bar{O}} \end{bmatrix}$
- $\bar{C} = C.T = \begin{bmatrix} C_O & 0 \end{bmatrix}$
- $\bar{d} = d$

où A_O est une matrice carrée de dimension ***r<n***, **la paire (A_O, C_O) est observable.**

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \bar{C}.\left(p.I - \bar{A}\right)^{-1}.\bar{B} + \bar{d} = C_O.\left(p.I - A_O\right)^{-1}.B_O + \bar{d}$$

4.6. Forme générale des systèmes non observables

Exemple

Soit le système suivant :

$$\begin{cases}\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.u(t)\\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.X(t)\end{cases}$$

La matrice d'observabilité est :

$$\mathbb{O} = \begin{bmatrix} C \\ C.A \\ C.A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & -4 \\ -4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

- Le rang de $\mathbb{O}$ est égal à **2** < ***n*=3**. Donc, le système est non commandable.

En appliquant à ce système le changement de base suivant: $Z(t) = T.X(t)$

$$avec \quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad et \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{cases}\dot{Z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}.Z(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.u(t)\\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.Z(t)\end{cases}$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{4}{(p+1)}$$

4.6. Forme générale des systèmes non observables

Remarques

Ce théorème montre que seuls les pôles observables du système apparaissent dans sa fonction de transfert. Ceci représente un autre inconvénient de la représentation par fonction de transfert. En effet, les pôles non observables ne figurent pas dans la fonction de transfert car ils sont simplifiés avec des zéros. On parle d'un phénomène connu sous le nom **simplification pôle-zéro**. Ceci conduit aux :

- Si le système est non observable alors il se produit, au niveau de sa fonction de transfert, une simplification pôle-zéro de tous ses pôles non observables .
- Si le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert sont premiers entre eux, et si le degré du dénominateur est égal à n, alors le système est observable.

4.7. Réalisations minimales

- On a déjà montré que la fonction de transfert représente uniquement la partie commandable et la partie observable du système car tous les pôles non commandables et non observables sont automatiquement simplifiés par les zéros du système.
- De plus, la simplification pôle-zéro peut se produire au niveau des pôles commandables ou observables. Cette simplification concernerait les pôles commandables mais non observables et les pôles observables mais non commandables).

Exemple

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.X(t) \end{cases}$$

- λ_1=-4 : non commandable et observable
- λ_2=-1 : commandable et observable
- λ_3=-2 : non commandable et non observable

$$\Rightarrow H(p) = \frac{4}{p+1}$$

4.7. Réalisations minimales

- Par ailleurs, on a déjà signalé que la représentation d'état se distingue par sa pluralité qui est assurée via un changement de base.
- Mais, il existe un autre moyen de pluralité qui est basée sur l'adjonction de pôles non commandables et/ou non observables dans la fonction de transfert. Cette approche conduit à des représentations d'état ayant un ordre plus grand que l'ordre de la fonction de transfert. Ceci nous amène naturellement au concept de réalisation minimale d'une fonction de transfert qui peut être définie comme suit:

Exemple

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} . X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} . u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} . X(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} . X(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} . u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} . X(t) \end{cases}$$

Page 155

4.7. Réalisations minimales

Définition

On appelle une représentation d'état minimale toute représentation d'état d'une fonction de transfert dont l'ordre est égal à l'ordre de sa fonction de transfert.

Remarques

- L'ordre d'une représentation d'état minimale est donc le plus petit possible.
- Le fait qu'une réalisation soit minimale ou pas est donc étroitement liée à ses propriétés de commandabilité et d'observabilité.

Théorème

Une réalisation d'une fonction de transfert donnée est minimale si et seulement si elle est commandable et observable.

Page 156

4.8. Stabilité

- Ce paragraphe présente des notions fondamentales sur la stabilité des représentations d'état linéaires. De ce fait, certaines notions sont communes avec l'approche fréquentielle.
- La stabilité est un concept crucial pour la commande des systèmes dynamiques et représente la pierre angulaire dans l'étude des systèmes. En effet, les systèmes ne vérifiant pas cette qualité sont inutilisables voire dangereux.
- Différentes définitions de ce concept sont proposées dans la littérature :
  - Une approche intuitive conduit à la notion de stabilité externe ou celle de stabilité BIBO (Bounded input bounded output ou entrée bornée, sortie bornée) qui est succinctement présentée. Cette approche découle naturellement de l'approche fréquentielle.
  - Dans l'espace d'état, il faut avoir une approche interne de la stabilité et c'est cette approche qui est privilégiée au cours du chapitre.

Page 157

4.8. Stabilité

4.8.1. Stabilité BIBO

BIBO : Bounded Input Bounded Output (Entrée Bornée, Sortie Bornée)

Définition Un système est stable au sens BIBO si et seulement si pour toute entrée bornée, la sortie est bornée.

Exemple $\ddot{y}(t) = u(t)$

- On pose : $X(t) = \begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t) \end{cases}$
- Et on calcule :

$$\dot{X}(t) = \begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = u(t) \end{cases}$$

d'où:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) \end{cases}$$

- Pour $t_0=0$, $u(t)=1$ et $X(t_0)=\begin{bmatrix} x_1(t_0)=0 \\ x_2(t_0)=0 \end{bmatrix}$, *on a :*

$$X(t) = e^{At}.X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}.B.u(\tau).d\tau$$

$$\Leftrightarrow X(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} t-\tau \\ 1 \end{bmatrix} .d\tau = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix}$$

d'où:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) = \frac{t^2}{2}$$

Donc, ce système n'est pas BIBO stable.

Page 158

4.8. Stabilité

4.8.2. Stabilité BIBO des modèles linéaires stationnaires

- Un modèle linéaire stationnaire peut être défini par l'une de représentations suivantes :

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y^{(1)}(t)+a_0y(t)=b_mu^{(m)}(t)+\cdots+b_1u^{(1)}(t)+b_0u(t)$$

$$H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{b_m.p^m+b_{m-1}.p^{m-1}+\cdots+b_1.p+b_0}{p^n+a_{n-1}.p^{n-1}+\cdots+a_1.p+a_0}$$

- La sortie *y(t)* peut être exprimée en fonction de la réponse impulsionnelle *h(t)* et de l'entrée u(t) comme suit :

$$y(t)=\int_0^{+\infty}h(t-\tau).u(\tau).d\tau=h(t)*u(t)$$

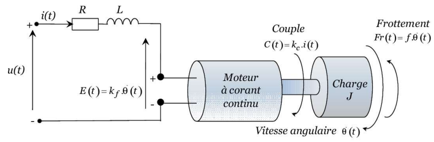
Théorème Un système linéaire stationnaire de réponse impulsionnelle *h(t)* est BIBO-stable si et seulement si :

$$\int_0^{+\infty}\left|h(\tau)\right|.d\tau\leq\alpha<\infty$$

4.8. Stabilité

4.8.2. Stabilité BIBO des modèles linéaires stationnaires

Exemple Moteur à courant continu



Cas 1 : Sortie vitesse angulaire

Si l'on impose une entrée bornée alors la vitesse reste bornée donc le moteur est BIBO-stable.

Cas 2 : Sortie position angulaire

Si l'entrée u(t) est un échelon (bornée) alors la vitesse est constante en régime permanent et par conséquent la position angulaire augmente indéfiniment et Le moteur est alors BIBO-instable.

4.8. Stabilité

4.8.2. Stabilité BIBO des modèles linéaires stationnaires

Remarque Soit la fonction de transfert ayant :

$$H(p)=\frac{K\prod_{l=1}^{Q}(p-z_l)}{p^N\prod_{j=1}^{M}(p-\lambda_j)\prod_{k=1}^{P}\left(p^2-2\alpha_k p+\left(\alpha_k^2+\omega_k^2\right)\right)}$$

Cette fonction de transfert admet :

- *Q zéros : z_l avec $l=1,2,\ldots,Q$*
- *N intégrations*
- *M pôles réels simples distincts : λ_j avec $j=1,2,\ldots,M$*
- *P paires pôles complexes distinctes : $a_k \pm j\omega_k$ avec $k=1,2,\ldots,P$*

- La réponse impulsionnelle ***h(t)*** est donnée par :

$$y(t)=h(t)=TL^{-}\left[H(p)\right]=\sum_{i=1}^{N}a_i.t^{i-1}+\sum_{j=1}^{M}b_j.e^{\lambda_j t}+\sum_{k=1}^{P}c_k.e^{\alpha_k t}\sin(\omega_k t)$$

- Si *N=0, λ_j<0 avec j=1,2,…,M; a_k<0 avec k=1,2,…,P;* alors on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\left|h(t)\right|.dt\le-\sum_{j=1}^{M}\frac{\left|b_j\right|}{\lambda_j}-\sum_{k=1}^{P}\frac{\left|c_k\right|}{\alpha_k}$$

4.8. Stabilité

4.8.2. Stabilité BIBO des modèles linéaires stationnaires

Théorème Une fonction de transfert *H(p)* est BIBO-stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle négative.

Critère de Routh-Hurwitz

- **Etape 1 :** Ecrire le polynôme caractéristique (*a_0 ≠ 0*) : $a_n.p^n+a_{n-1}.p^{n-1}+\cdots+a_1.p+a_0$
- **Etape 2 :** Si un des coefficients est nul ou négatif alors qu'un autre coefficient au moins est positif, il existe une ou des racines imaginaires ou des racines à partie réelle positive.
- **Etape 3 :** Si tous les coefficients sont positifs, on calcule le tableau de Routh :

$$\begin{array}{c|cccc} p^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ p^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ p^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \cdots \\ p^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} b_{n-1}=\dfrac{a_{n-1}.a_{n-2}-a_n.a_{n-3}}{a_{n-1}} \\ c_{n-1}=\dfrac{b_{n-1}.a_{n-3}-a_{n-1}.b_{n-3}}{b_{n-1}} \\ \vdots \end{array}\right.$$

Le système est donc stable si et seulement si tous les coefficients de la première colonne sont non négatifs

4.8. Stabilité

4.8.2. Stabilité BIBO des modèles linéaires stationnaires

Remarques

- Le nombre de racines à partie réelle positive (instable) est égal au nombre de changements de signes des coefficients de la première colonne du tableau de Routh.
- Si un élément de la première colonne est nul, on le remplace alors par *β>0*. Si l'élément au dessous de *β* est positif, il existe une racine à partie réelle nulle. Si l'élément au dessous de *β* est négatif, alors il existe une racine à partie réelle positive.

p^5	1	3	5
p^4	2	6	3
p^3	$0/\beta$	3.5	0
p^2	$\frac{6\beta-7}{\beta}$	3	0
p^1	$\frac{42\beta-49-6\beta^2}{12\beta-14}$	0	0
p^0	3	0	0

p^5+

$$p^5+2p^4+3p^3+6p^2+5p+3$$

p^5	1	3	5
p^4	2	6	3
p^3	$\emptyset\ \epsilon$	$\frac{7}{2}$	0
p^2	$\frac{6\epsilon-7}{\epsilon}$	3	0
p	$\frac{42\epsilon-49-6\epsilon^2}{12\epsilon-14}$	0	0

4.8. Stabilité

4.8.3. Stabilité d'un état d'équilibre

Pour étudier la stabilité d'un système, il faut donc d'abord définir la notion d'état d'équilibre et celle de stabilité d'un état d'équilibre.

Etat d'équilibre

Définition Un système se trouve dans un état d'équilibre si cet état n'est pas modifié lorsque le système est abandonné à lui-même.

Remarques

- Un état d'équilibre se détermine en posant à la fois l'entrée ***u(t)*** nulle et l'équation d'état nulle.
- La recherche des états d'équilibre possibles d'un système représenté par une représentation d'état revient donc à résoudre

$$A.X(t)=0$$

- Cette équation admet soit un seul ou plusieurs états d'équilibre selon le rang de de A:
  - Si Rang(A)= n alors le système admet un seul état d'équilibre ***X_e=[0]***.
  - Si Rang(A)< n alors le système admet une infinité d'états d'équilibre.

4.8. Stabilité

4.8.3. Stabilité d'un état d'équilibre

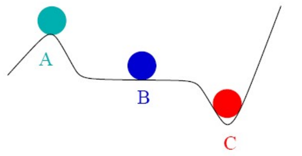
Stabilité

- Un état d'équilibre est dit asymptotiquement stable si, lorsque le système est écarté de cet état sous l'effet d'une perturbation, il y revient (en un temps infini).
- L'état d'équilibre est dit instable, si après perturbation, le système s'en éloigne davantage.
- L'état d'équilibre est dit simplement stable si après perturbation, le système reste dans un voisinage du point d'équilibre.

Exemple

Pour illustrer ces trois cas, on considère l'exemple d'une bille dans trois positions différentes.

- Position A : Instable
- Position B : Stable
- Position C : Asymptotiquement stable



4.8. Conclusion

- La commandabilité ne concerne que la paire **(A,B)** de la réalisation d'état du système: De ce fait, on dit indifféremment système commandable ou paire **(A,B)** est commandable.
- La commandabilité d'un système est une propriété invariante par un changement de base.
- Un système défini sous la forme canonique commandable est commandable.
- L'observabilité ne concerne que la paire **(A,C)** de la réalisation d'état du système : c'est pourquoi, on dit indifféremment système observable ou paire **(A,C)** est observable.
- L'observabilité d'un système est une propriété invariante par un changement de base.
- Un système défini sous la forme canonique observable est un observable.

4.8. Conclusion

- Le modèle entrée-sortie du type équation différentielle ne représente que la partie observable d'un système.
- Le modèle entrèe-sortie du type fonction de transfert ne représente que la partie commandable d'un système.
- La représentation d'état associée à une fonction de transfert où des simplifications pôles-zéros interviennent est non commandable ou non observable suivant le choix des variables d'état.
- Une représentation d'état est dite minimale si et seulement si elle est à la fois complètement observable et complètement commandable.
- Si la représentation d'état est minimale alors la fonction de transfert a n pôles égaux aux valeurs propres.

Page 167

4.8. Conclusion

- La commandabilité permet de caractériser la relation entre l'entrée et l'état du système.
- La commandabilité représente la pierre angulaire pour étudier aussi bien les problèmes de stabilisation que les problèmes de régulation et de poursuite d'une trajectoire.
- L'observabilité permet de caractériser la relation entre l'état et la sortie du système.
- L'observabilité assure la reconstruction de l'état du système à partir de son comportement entrée-sortie. Cette reconstruction, qui est la pierre angulaire des capteurs logiciels, est indispensable dans toutes les applications où les variables d'état n'ont aucun sens physique. Cette situation est plutôt une règle qu'une exception dans la pratique industrielle.
- Il est important de remarquer que la reconstruction de l'état d'un système est particulièrement recherchée pour réaliser un bon compromis entre les performances et le coût d'un système ou réduire la sensibilité d'un système par rapport aux bruits de mesure inéluctables.

Page 168

Chapitre 5

Observateurs d'état des systèmes linéaires

5.1. Introduction

- Dans ce chapitre, on considère le problème d'observation des systèmes linéaires échantillonnés stationnaires monovariables et déterministes :

$$\begin{cases} X(k+1) = F.X(k) + G.u(k) \\ y(k) = H.X(k) \end{cases}$$

où
- n : nombre de variables d'état
- F: matrice d'évolution de dimension (n,n)
- G : vecteur colonne de commande de dimension n
- H : vecteur ligne de sortie de dimension n

- La solution de ce problème consiste à développer un système permettant de fournir un estimé du vecteur d'état, noté $\hat{X}(k)$ à partir de l'entrée $u(k)$ et de la sortie $y(k)$. Ce système est appelé **observateur.**

$$\begin{array}{c} y(k) \longrightarrow \\ u(k) \longrightarrow \end{array} \boxed{\text{Observateur d'état}} \longrightarrow \hat{X}(k)$$

- Ce système doit assurer une erreur d'estimation $\delta(k)$ qui tend vers zéro quand le temps tend vers l'infini:

$$\lim_{k\to+\infty} \delta(k) = \lim_{k\to+\infty} X(k) - \hat{X}(k) = 0$$

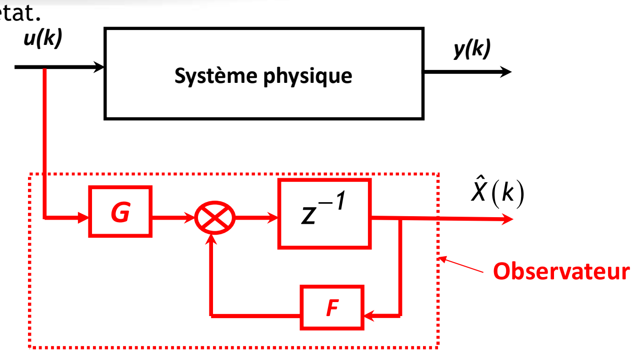
5.1. Introduction

- Un tel problème peut être traité de plusieurs manières selon la culture dont on dispose. On distingue trois solutions principales; à savoir :
  - Observateur basé sur la résolution de l'équation de la sortie : Esprit mathématicien.
  - Observateur en boucle ouverte basé sur la simulation de l'équation d'état : Esprit ingénieur
  - Observateur en boucle fermée basé sur la rétroaction de l'erreur de sortie entre la sortie réelle et la sortie estimée : Esprit Automaticien
- On présente dans ce qui suit l'observateur en boucle ouverte et l'observateur en boucle fermée.
- Puis, on étudie d'une manière détaillée les observateurs en boucle fermée qui sont les plus utilisés dans la pratique de l'observation.

Page 171

5.2. Observateur en boucle ouverte

Cet observateur est basé sur une simple simulation du système à partir de sa réalisation d'état.



$$\begin{cases} \hat{X}(k+1) = F.\hat{X}(k) + G.u(k) \\ \hat{y}(k) = H.\hat{X}(k) \end{cases}$$

Cette solution est intéressante du point de vue théorique car elle montre la possibilité d'estimer le vecteur d'état.

Page 172

5.2. Observateur en boucle ouverte

Analyse de l'erreur d'estimation

$$\delta(k) = X(k) - \hat{X}(k)$$

$$\delta(k+1) = X(k+1) - \hat{X}(k+1) = F.X(k) + G.u(k) - \left(F.\hat{X}(k) + G.u(k)\right) = F.\left(X(k) - \hat{X}(k)\right)$$

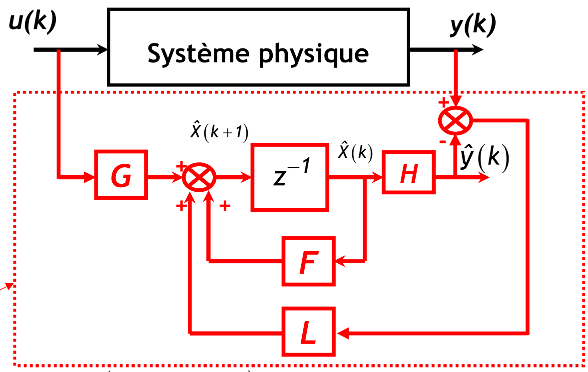
$$\delta(k+1) = F.\delta(k)$$

- L'erreur d'estimation possède la même dynamique que le système.
- Cet observateur peut être utilisé que pour les systèmes asymptotiquement stables et apériodiques sans se soucier s'ils sont observables ou non. C'est ce type d'observation qui est utilisé dans la commande prédictive de Smith qui est connu sous le nom commande avec modèle interne.
- Cet observateur pose des problèmes dans le cas des systèmes instables.

5.3. Observateur en boucle fermée

Cet observateur est inspiré de l'esprit d'un automaticien. En effet, il intègre une rétroaction définie par un terme de correction proportionnelle ***L*, *dit vecteur gain d'observation***, de l'état estimé en fonction de l'erreur de sortie entre le système et son observateur.

$$L = \begin{bmatrix} L_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ L_{n-1} \end{bmatrix}$$



Observateur

$$\begin{cases} \hat{X}(k+1) = F.\hat{X}(k) + G.u(k) + L\left(y(k) - \hat{y}(k)\right) \\ \hat{y}(k) = H.\hat{X}(k) \end{cases}$$

5.3. Observateur en boucle fermée

Analyse de l'erreur d'estimation

$$\delta(k) = X(k) - \hat{X}(k)$$

$$\begin{aligned}\delta(k+1) &= X(k+1) - \hat{X}(k+1)\\ &= F.X(k) + G.u(k) - \left(F.\hat{X}(k) + G.u(k) + L.\left(y(k) - \hat{y}(k)\right)\right)\\ &= F.X(k) + G.u(k) - \left(F.\hat{X}(k) + G.u(k) + L.\left(H.X(k) - \hat{X}(k)\right)\right)\\ &= (F\text{-}L.H)\left(X(k) - \hat{X}(k)\right)\end{aligned}$$

$$\delta(k+1) = (F - L.H).\delta(k)$$

Il est facile de constater que l'erreur d'estimation $\delta(k)$ tend vers zéro quand le temps tend vers l'infini si et seulement si les valeurs propres de *(F-L.H)* sont stables (à l'intérieur du cercle unité).

Ceci peut être assuré par le vecteur gain L

5.3. Observateur en boucle fermée

Calcul de L

Étant donné que la matrice F et le vecteur H sont connues, on peut calculer le vecteur gain L permettant d'avoir des valeurs propres stables de ***(F-L.H)*.**
Ceci peut être exprimé comme suit:

- **Etape 1 :** Vérifier l'observabilité.
- **Etape 2 :** Fixer les valeurs propres désirées de l'observateur $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

$$det(z.I - F + L.H) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\cdots(z - \lambda_n) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \alpha_1 z + \alpha_0$$

- **Etape 3 :** Calculer le vecteur gain L.

On applique cette démarche dans le cas d'un système défini par une représentation d'état sous l'une des deux formes suivantes:

- Forme canonique d'observabilité
- Forme quelconque (autre que la forme canonique d'observabilité).

5.3. Observateur en boucle fermée

Calcul de L

Forme canonique observable

Soit un système défini par la fonction de transfert suivante (m<n):

$$H(z) = \frac{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

La forme canonique d'observabilité de cette fonction de transfert est :

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = [0 \ \cdots \ \cdots \ \cdots \ 0 \ \ 1] X(k) \end{cases}$$

5.3. Observateur en boucle fermée

Calcul de L

Forme canonique observable

- Choisir les valeurs propres désirées de l'observateur $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$
- Écrire le polynôme caractéristique correspondant:
  $$(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n) = z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$
- Déduire la matrice ***(F-L.H)*** de la forme canonique d'observabilité :

$$F - L.H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

5.3. Observateur en boucle fermée

Calcul de L

Forme canonique observable

- On a :

$$F - L.H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

- Calculer ***(F-L.H)*** en utilisant ***F, L*** et ***H*** :

$$F - L.H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ L_{n-1} \end{bmatrix} .[0 \ \cdots \ \cdots \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -(a_0 + L_0) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -(a_1 + L_1) \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -(a_{n-1} + L_{n-1}) \end{bmatrix}$$

- Déduire ***L*** :

$$L = \begin{bmatrix} \alpha_0 - a_0 \\ \alpha_1 - a_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Page 179

5.3. Observateur en boucle fermée

Calcul de L

Forme quelconque (autre que forme observable)

- ❑ **Idée :** Effectuer une transformation linéaire de manière à rendre *F* sous la forme observable.

- ❑ La transformation linéaire peut être faite par une matrice ***P*** définie positive autre que diagonale:

  - On pose $X(k) = P.Z(k)$

$$X(k+1) = F.X(k) + G.u(k)$$

$$\Leftrightarrow P.Z(k+1) = \mathrm{F.P.Z(k)} + G.u(k)$$

$$\Leftrightarrow Z(k+1) = P^{-1}.F.P.Z(k) + P^{-1}.G.u(k) = F_o.Z(k) + G_o.u(k)$$

$$y(k) = H.P.Z(k) = H_o.Z(k)$$

$$F_o = P^{-1}.F.P$$
$$G_o = P^{-1}.G$$
$$H_o = H.P$$

Page 180

5.3. Observateur en boucle fermée

Calcul de L — Forme quelconque (autre que forme observable)

Calcul de P

- On a

$$F_o = P^{-1}.F.P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

et

$$H_o = H.P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- La matrice P se mettre sous la forme suivante:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} F_o = P^{-1}.F.P \\ H_o = H.P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P.F_o = F.P \\ H_o.P^{-1} = H \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P.F_o = F.P = F.\begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \\ H_o.P^{-1} = H = H_o \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow H = H_o \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P_n = H$$

5.3. Observateur en boucle fermée

Calcul de L — Forme quelconque (autre que forme observable)

Calcul de P

$$P.F_o = F.\begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_0.P_n = P_1.F \\ P_1 - a_1.P_n = P_2.F \\ P_2 - a_2 P_n = P_3.F \\ \vdots \\ P_{n-2} - a_{n-2} P_n = P_{n-1}.F \\ P_{n-1} - a_{n-1} P_n = P_n.F \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_n = H \\ P_{n-1} = H.(F + a_{n-1}.I_n) \\ P_{n-2} = H.(F^2 + a_{n-1}.F + a_{n-2} I_n) \\ \vdots \\ \vdots \\ P_1 = H.\left(F^{n-1} + a_{n-1}.F^{n-2} + \cdots + a_2.F + a_1.I_n\right) \end{cases}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ a_{n-1} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} H \\ H.F \\ H.F^2 \\ \vdots \\ H.F^{n-1} \end{bmatrix}$$

Matrice d'observabilité

$$P^{-1} = \kappa.O$$

avec $\kappa = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ a_{n-1} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

5.3. Observateur en boucle fermée

Calcul de L — Forme quelconque (autre que forme observable)

Calcul de P

Démarche à suivre

Étape 1: Vérifier si le système est observable.

Étape 2 : Déterminer les coefficients a_0, a_1, …, a_{n-1} du polynôme caractéristique de la matrice A en calculant:

$$\det(z.I - F) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Étape 3: Construire la matrice de transformation: $P^{-1} = \kappa.O$

Étape 4: Choisir les valeurs propres désirées et calculer:

$$(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n) = z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

Étape 5: Calculer L :

$$L = P.\begin{bmatrix} \alpha_0 - a_0 \\ \alpha_1 - a_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Page 183

5.3. Observateur en boucle fermée

Calcul de L — Forme quelconque (autre que forme observable)

Calcul de P

Exemple

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}.X(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.X(k) \end{cases}$$

Synthétiser un observateur caractérisé par les valeurs propres $\lambda_1=0.25$ et $\lambda_2=0.5$.

Étape 1: Vérifier l'observabilité :

$$O = \begin{bmatrix} H \\ H.F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$det(O)=-1\neq 0$ donc le système est **observable.**

Page 184

5.3. Observateur en boucle fermée

Calcul de L

Forme quelconque (autre que forme observable)

Calcul de P

Exemple

Étape 2 : Déterminer les coefficients a_0 *et* a_1 du polynôme caractéristique de la matrice *A* en calculant:

$$\det(z.I-F)=\begin{vmatrix} z+1 & -1 \\ -1 & z+0.5 \end{vmatrix}=z^2+1.5z-0.5$$

$a_1 = 1.5$

$a_0 = -0.5$

Étape 3: Construire la matrice de transformation: $P^{-1}=\kappa.O$

$$P^{-1}=\kappa.O=\begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Étape 4: Choisir les valeurs propres désirées et calculer:

$$(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)=(z-0.25)(z-0.5)=z^2-0.75z+0.125$$

$\alpha_1 = -0.75$

$\alpha_0 = 0.125$

Étape 5: Calculer *L* :

$$L=P.\begin{bmatrix} \alpha_0-a_0 \\ \alpha_1-a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0.625 \\ -2.25 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.875 \\ -2.25 \end{bmatrix}$$

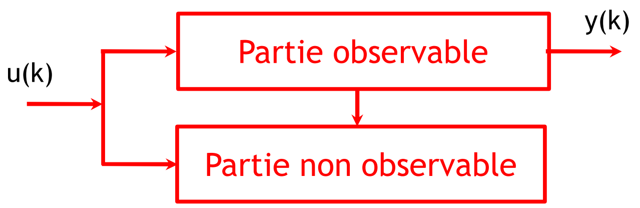
Page 185

5.4. Systèmes détectables

On étudie, dans ce paragraphe, le problème de détectabilité des systèmes non observables.

Rappel

Un système linéaires non observable peut être décomposé en une partie observable et une autre non observable :



La sortie *y(k)* dépend uniquement de la partie observable.

Le théorème suivant décrit le principe de cette décomposition.

Page 186

5.4. Systèmes détectables

Rappel

Théorème

Soit le système suivant:

$$\begin{cases} X(k+1) = F.X(k) + G.u(k) \\ y(k) = H.X(k) \end{cases}$$

En appliquant à ce système le changement de base suivant:

$$Z(k) = T.X(k) \quad avec \quad T = \begin{bmatrix} T_o \\ T_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{cases} Z(k+1) = \bar{F}.Z(k) + \bar{G}.u(k) \\ y(k) = \bar{H}.Z(k) \end{cases}$$

avec $\bar{F} = T.F.T^{-1} = \begin{bmatrix} F_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} & F_{\bar{o}} \end{bmatrix}$ $\quad \bar{G} = T.G = \begin{bmatrix} G_o \\ G_{\bar{o}} \end{bmatrix}$ $\quad \bar{H} = H.T = \begin{bmatrix} H_o & 0 \end{bmatrix}$

où F_o est une matrice carrée de dimension r<n, la paire (F_o, H_o)$ est observable et la fonction de transfert est donnée par:

$$P(z) = \bar{H}.(z.I_n - \bar{F})^{-1}.\bar{G} = H_o.(z.I_n - F_o)^{-1}.G_o$$

5.4. Systèmes détectables

On veut synthétiser un observateur pour un système non observable:

$$\begin{cases} X(k+1) = F.X(k) + G.u(k) \\ y(k) = H.X(k) \end{cases}$$

En appliquant le théorème précédent, on obtient :

$$\begin{cases} Z(k+1) = \bar{F}.Z(k) + \bar{G}.u(k) \\ y(k) = \bar{H}.Z(k) \end{cases} \quad \text{avec } \bar{F} = T.F.T^{-1} = \begin{bmatrix} F_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} & F_{\bar{o}} \end{bmatrix} \bar{G} = T.G = \begin{bmatrix} G_o \\ G_{\bar{o}} \end{bmatrix} \bar{H} = H.T = \begin{bmatrix} H_o & 0 \end{bmatrix}$$

La paire (F_o, H_o) est observable.

En développant à ce système un observateur avec $\bar{L} = \begin{bmatrix} L_o \\ L_{\bar{o}} \end{bmatrix}$, on a:

$$\bar{F} - \bar{L}.\bar{H} = \begin{bmatrix} F_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} & F_{\bar{o}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_o \\ L_{\bar{o}} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} H_o & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \bar{F} - \bar{L}.\bar{H} = \begin{bmatrix} F_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} & F_{\bar{o}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_o.H_o & 0 \\ L_{\bar{o}}.H_o & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{F} - \bar{L}.\bar{H} = \begin{bmatrix} F_o - L_o.H_o & 0 \\ F_{o\bar{o}} - L_{\bar{o}}.H_o & F_{\bar{o}} \end{bmatrix}$$

Déduction

On peut déduire de la matrice $(\bar{F} - \bar{L}.\bar{H})$ que :

- Les valeurs propres de la matrice $(F_o - L_o.H_o)$ sont les pôles observables du système.
- Les valeurs de $(F_{\bar{o}})$ sont les pôles non observables qui restent encore non observables.

5.4. Systèmes détectables

Les pôles de l'observateur sont les racines de l'équation suivante:

$$\det(z.I - \bar{F} + \bar{L}.\bar{H}) = \det(z.I - F_o + L_o.H_o).\det(z.I - F_{\bar{o}}) = 0$$

Cette équation montre bien que l'observateur affecte uniquement les pôles observables comme indiqué par l'équation suivante:

$$\det(z.I - F_o + L_o.H_o) = 0$$

Cependant, les pôles non observables ne sont pas affectés par l'observateur et conservent les mêmes valeurs. Pour obtenir une erreur d'estimation stable, il faut que tous les pôles non observables soient stables.

Définition

Un système non observable est dit détectable si tous ses pôles non observables sont stables.

Remarques

- Uniquement, les pôles observables du système sont affectés et par conséquent ces pôles peuvent être assignés à des valeurs désirées arbitraires.
- Les pôles non observables de l'observateur ne sont pas affectés et par conséquent ces pôles sont invariants.
- L'erreur d'estimation tend vers zéro quand le temps tend vers l'infini si et seulement si le système est détectable.

Page 189