HYDRAULIQUE À SURFACE LIBRE

Ecoulement gravitaire en canal prismatique

OBJECTIFS DE COURS

- **Connaître et maîtriser les lois fondamentales de conservation en hydraulique**
  - *Conservation de masse (équation de continuité), de quantité de mouvement et d'énergie*
- **Etre capable de résoudre les problèmes typiques en HSL au régime permanent et uniforme**
  - *Calcul de section, débit, vitesse, pente, rugosité, tirant d'eau,…*
- **Maitriser les concepts régissant l'énergie des écoulements**
  - *Energie hydraulique et spécifique*
- **Connaître le régime permanent non uniforme**
  - *Caractérisation des écoulements variés, notion de section de contrôle*
- **Connaître l'influence de quelques singularités sur l'écoulement**
  - *Changement de pente, de radier, de section, écoulement en courbe*

SOMMAIRE

01. GENERALITES

Domaines d'application

GENERALITES

ion des écoulements à surface libre

oulements **semblables** aux
oulements en charge (*lois de
nservations identiques*)

rticularité : existence d'une **surface**
re : surface de contact entre
coulement et l'air libre, **à pression**
nosphérique :

- Débit d'écoulement ***défini par la pente***
- Mais pas par le gradient de pression (comme dans le cas des écoulements en charge)

01. GENERALITES

Classification des écoulements à surface libre (1/2)

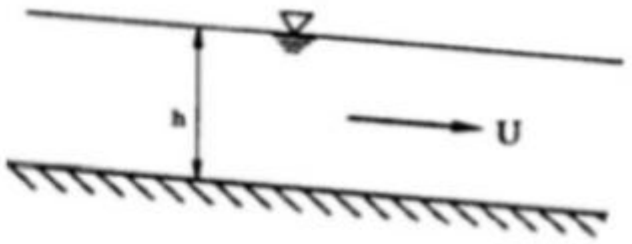
- *Paramètres* : **débit** Q et **hauteur d'eau** y
- *Hypothèses* : ***Ecoulement 1D (uni-dimensionnel) et conservatif***
- Variables : ***temps*** $\boldsymbol{t}$ et ***position*** $\boldsymbol{x}$

- Classification des écoulements suivant le **temps**
  - **Permanent** *(Q constant dans le temps à une section de référence)*
  - **Non permanent** *(Q variant dans le temps à une section de référence)*

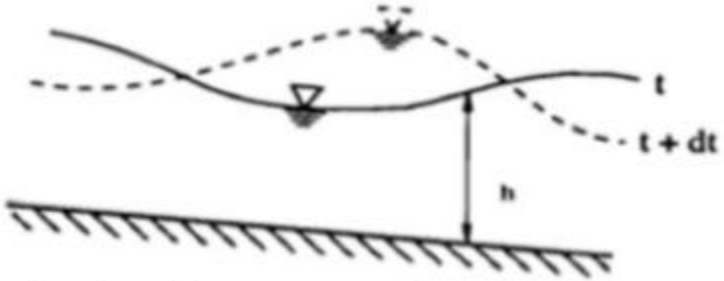
- Classification des écoulements suivant la **position**
  - **Uniforme** (et *conservatif*) : $Q = C^{\mathrm{t}}$ et $\mathrm{y} = C^{\mathrm{t}}$
  - **Varié** : $Q = C^{\mathrm{t}}$ et $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$
    - ***Ecoulements Graduellement Variés*** (EGV)
    - ***Ecoulements Brutalement Variés*** (EBV)

01. GENERALITES

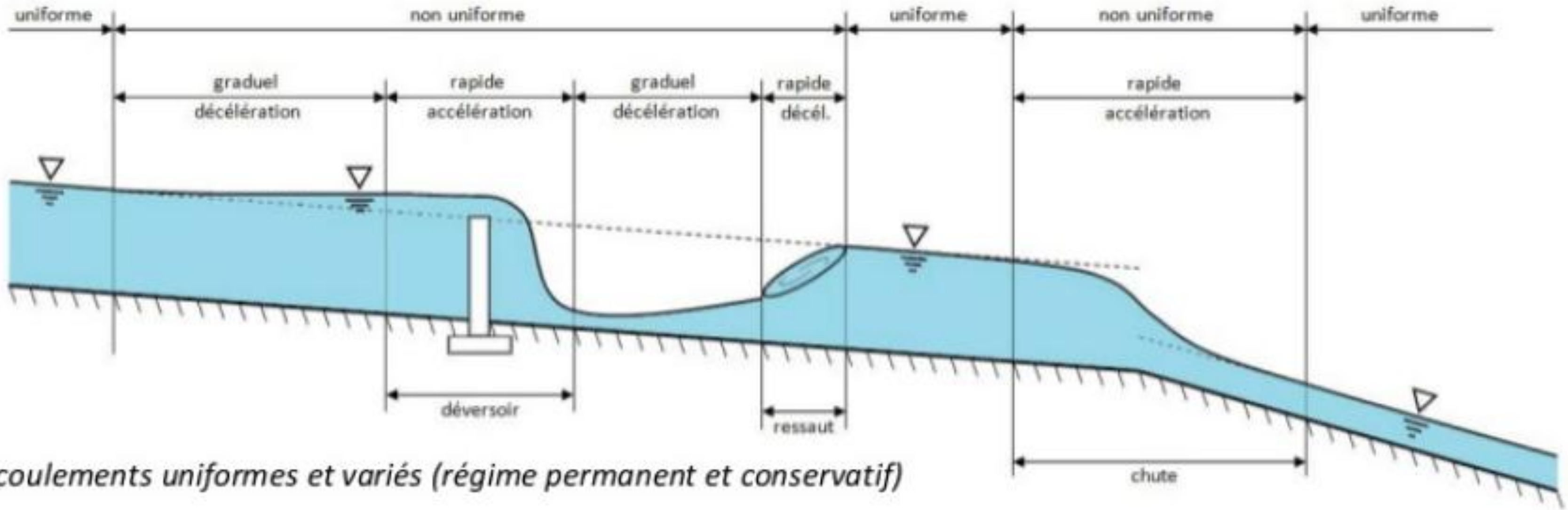
Classification des écoulements à surface libre (2/2)



Ecoulement permanent



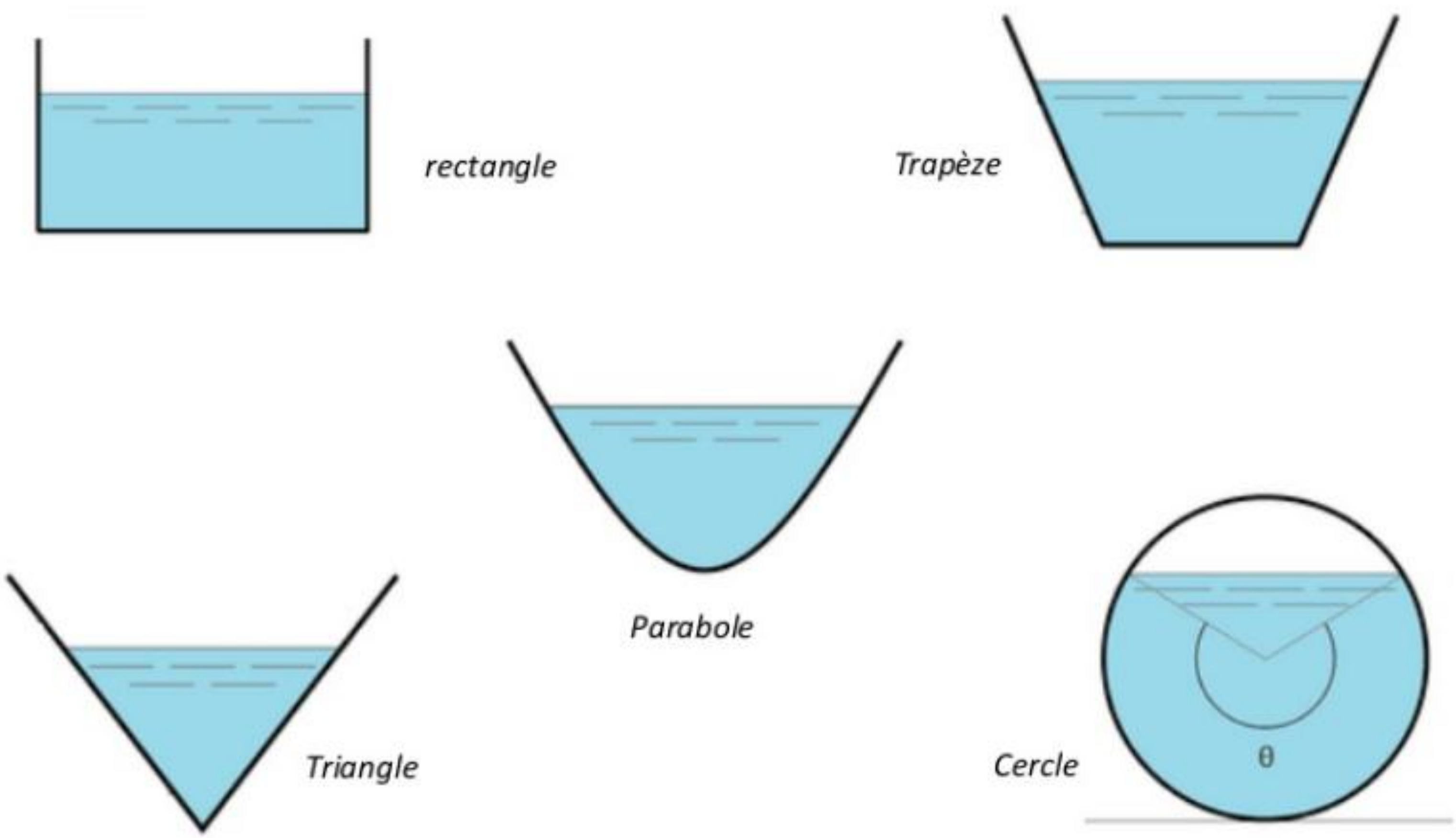
Ecoulement non permanent



Ecoulements uniformes et variés (régime permanent et conservatif)

01. GENERALITES

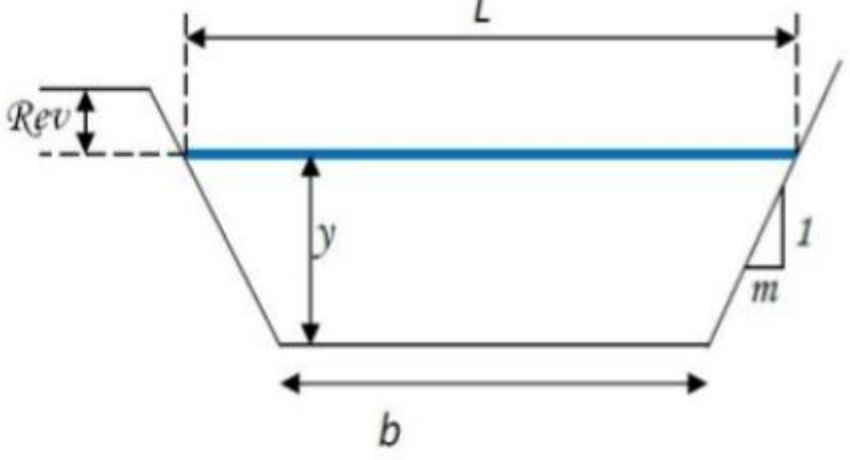
Forme géométrique

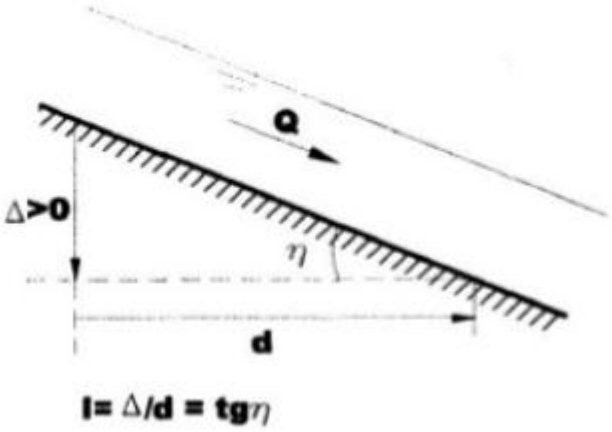


01. GENERALITES

Paramètres géométriques et hydrauliques

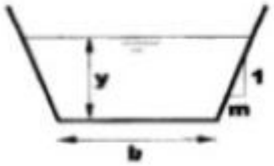
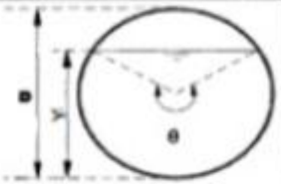
- *Largeur au radier* : b
- *Fruit de berges* : m
- *Tirant d'eau* : y
- *Largeur en miroir (en gueule)* : $l_{(y)}$
- *Section mouillée* : $S_{(y)}$
- *Périmètre mouillé* : $P_{(y)}$
- *Rayon hydraulique* : $R_{h_{(y)}} = S_{(y)}/P_{(y)}$
- *Diamètre hydraulique* : $D_{h_{(y)}} = 4R_{h_{(y)}}$
- *Profondeur hydraulique* : $y_m = y_{m_{(y)}} = S_{(y)}/l_{(y)}$
- *Profondeur du centre de gravité* : $y_G = y_{G_{(y)}}$
- *Pente de fond* : $I = \tan\eta \approx \eta$





01. GENERALITES

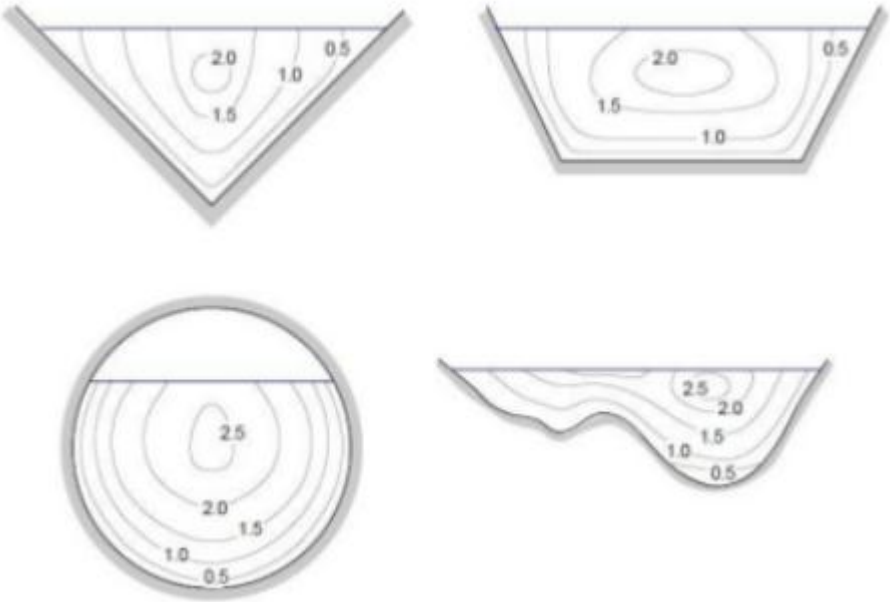
Eléments géométriques de formes paramétrées (tiré de Mar, 2004)

Section	S	P	R_H	l	y_m	L_m	y_G
	by	$b+2y$	$\frac{by}{b+2y}$	b	y	b	$\frac{y}{2}$
	$y(b+my)$	$b+2y\sqrt{1+m^2}$	$\frac{y(b+my)}{b+2y\sqrt{1+m^2}}$	$b+2my$	$\frac{y(b+my)}{b+2my}$	$b+my$	$\frac{y}{6}\frac{3b+2my}{b+my}$
 θ en radians $\theta=2\arccos(1-\frac{2y}{D})$ $y=\frac{D}{2}\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)$	$\frac{D^2}{8}(\theta-\sin\theta)$	$\frac{D\theta}{2}$	$\frac{D}{4}\frac{\theta-\sin\theta}{\theta}$	$D\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$\frac{D}{8}\frac{\theta-\sin\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})}$	$\frac{D}{4}\frac{\theta-\sin\theta}{1-\cos(\frac{\theta}{2})}$	$\frac{D}{2}\left[\frac{4}{3}\frac{\sin^3\frac{\theta}{2}}{\theta-\sin\theta}-\cos\frac{\theta}{2}\right]$

03. VITESSE D'ECOULEMENT

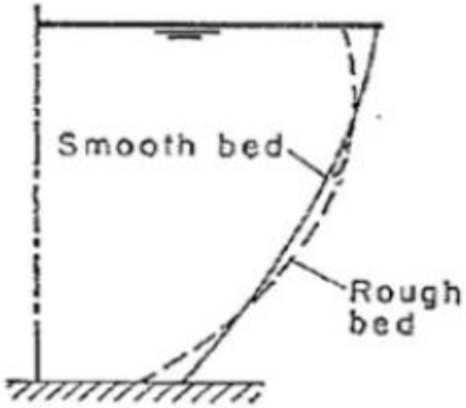
Répartition de vitesse dans la section d'écoulement

*La vitesse **n'est pas constante** dans la section et est maximale à approximativement 25% en dessous de la surface libre.*



Ven Te Chow (1914-1981)

Influence de la rugosité des parois du canal sur le profil vertical de vitesse (Chow, 1959)



03. VITESSE D'ECOULEMENT

Vitesse moyenne en section de canal

- La **vitesse moyenne** en canal :

$$\boldsymbol{U = \frac{Q}{S}}$$

- Cependant, la distribution de vitesse **n'est pas uniforme** dans la section.

$$U = \frac{1}{S}\iint_S V.dS$$

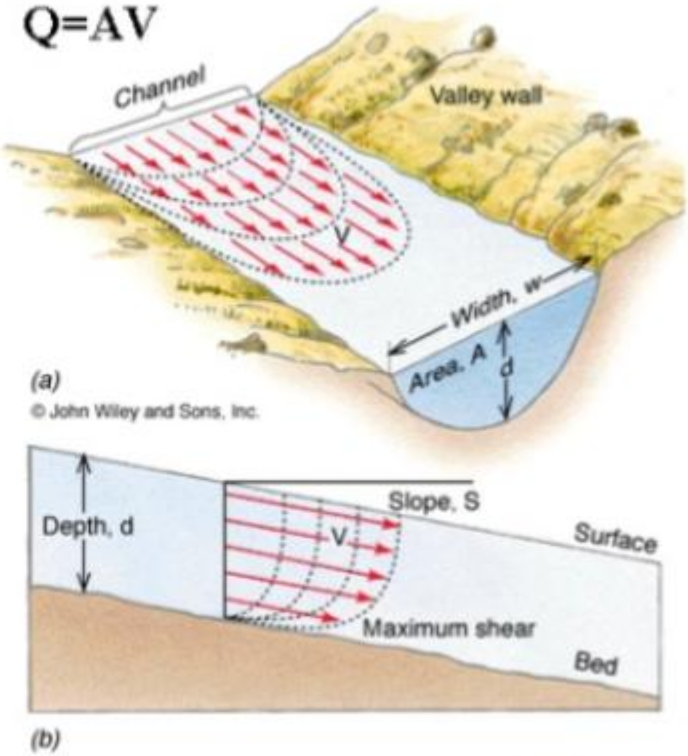
Équation 2D

$$U = \frac{1}{h}\int_0^h V.dh$$

Équation 1D

- Quelques **relations empiriques** existent :
  - $\boldsymbol{U = 0,82\, V_{max}}$ **(Prony)**
  - $U = 0,5\left(V_{0,2} + V_{0,8}\right)$ (USGS)
  - $U \approx V_{0,4}$ (cf. Graf, 1996)

Q=AV



Gaspard de Prony
(1755-1839)

03. VITESSE D'ECOULEMENT

Vitesses limites

- La conception des canaux à ciel ouvert est parfois régie par des **contraintes de vitesse**

- La vitesse d'écoulement doit **assurer des fonctions** particulières :
  - **Auto-curage** (ou auto-entretien)
  - **Préservation de la stabilité structurale** (érosion) du canal

- En conséquence, la **vitesse moyenne d'écoulement** U ne doit être ***ni trop faible, ni trop élevée***

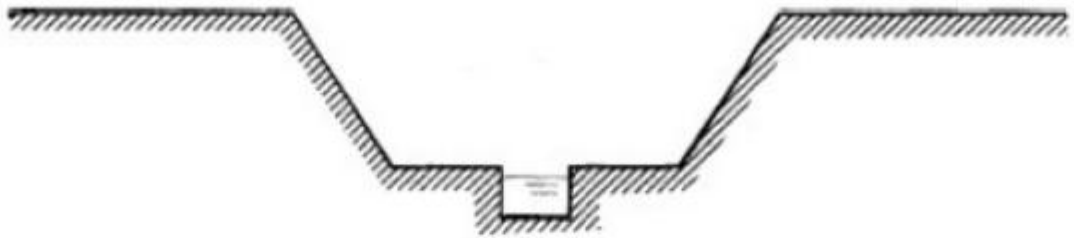
03. VITESSE D'ECOULEMENT

Vitesse minimale

- Afin **d'éviter les dépôts** des matériaux en suspension, on choisit une vitesse moyenne supérieure à une vitesse minimale donnée par la formule de Kennedy (1963) :

$$U_{min} = ey^{0,64}$$

- Alternativement, on peut **adopter une forme de canal pour les faibles débits**



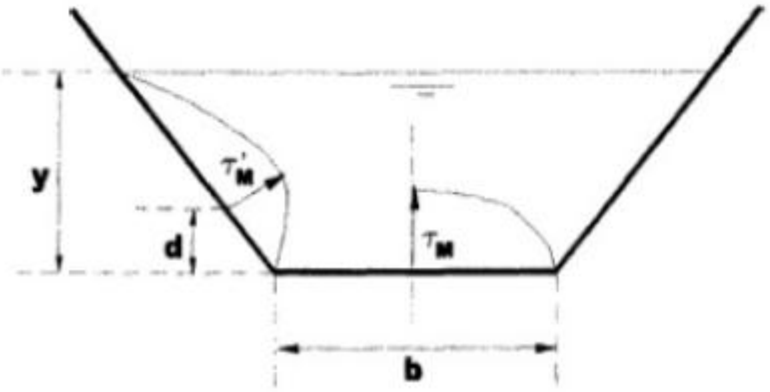
03. VITESSE D'ECOULEMENT

Vitesse maximale

- Elle est définie pour préserver la **stabilité du canal contre l'érosion** par affouillements. Elle est définie sur la base de deux approches :
  - Sur la **base du matériau** formant le lit du chenal
  - L'approche par la **contrainte tractrice**

- Soit la contrainte tractrice $\tau = \rho g R_h I$. On définit alors:
  - $\tau_M = K_M \tau$ au fond
  - $\tau'_M = K'_M \tau$ sur les parois

On adoptera des conditions d'écoulement telles que les contraintes maximales τ_M et τ'_M soient inférieures à une contrainte critique τ_{0C} de destructuration du matériau du canal



03. VITESSE D'ECOULEMENT

Valeurs indicatives

- **Vitesses minimales** : on admet $\mathbf{0,25\ m/s}$ pour les **limons fins** et $\mathbf{0,50\ m/s}$ pour les **sables**

- **Vitesses maximales** définies suivant la nature des parois

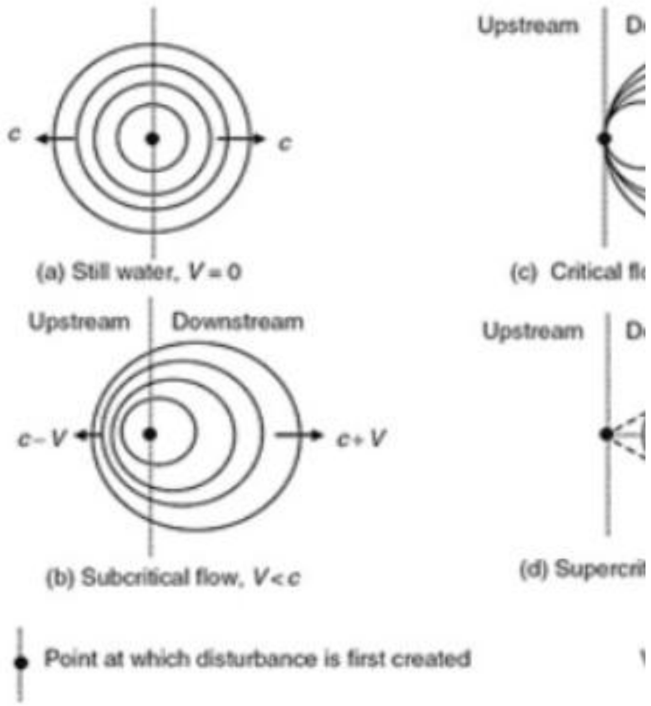
Nature des parois	Vitesses maximales admissibles (m/s)		
	U	$V_{surface}$	V_{fond}
Terre détrempée	0,10	0,15	0,08
Argiles	0,25	0,30	0,15
Sables	0,50	0,60	0,30
Graviers	0,95	1,25	0,70
Roches stratifiées	2,25	2,75	1,80
Roches compactes	3,70	4,25	3,15

Effet des forces de gravité

- ***Nombre adimensionnel*** exprimant le rapport entre la **vitesse moyenne** U et la **vitesse de propagation** des petites ondes gravitaires (1861)

$$F_r = \frac{U}{c} = \frac{U}{\sqrt{g y_m}}$$

- Permet de distinguer **trois régimes** d'écoulement :
  - **Fluvial** : $F_r < 1$
  - **Critique** : $F_r = 1$
  - **Torrentiel** : $F_r > 1$



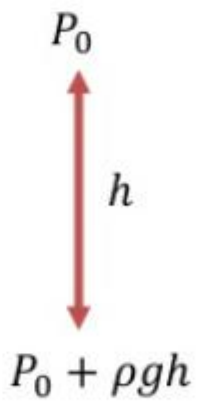
William Froude (1810 – 1879)

05. PRESSION

Répartition de pression

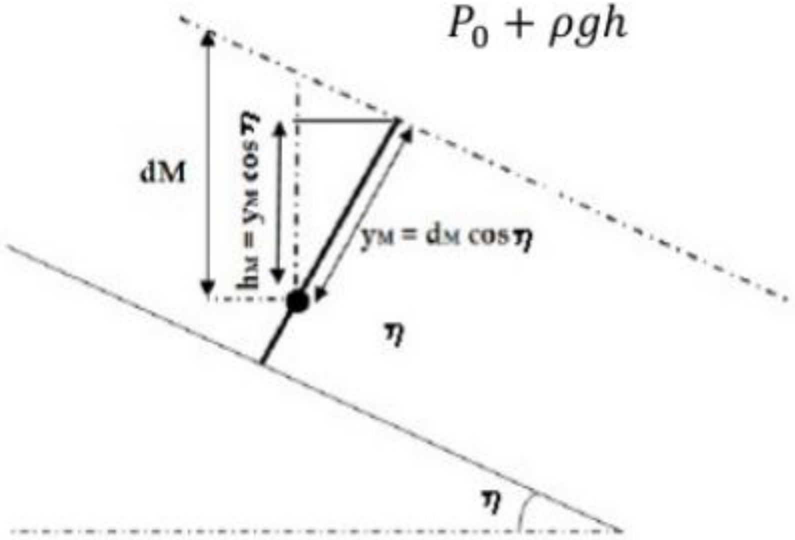
- En un point M dans un écoulement, la **pression effective** est :

$$P_M = \rho g h_M = \rho g y_M \cos \eta$$



- En admettant que la pente de fond est faible ($\eta \leq 10\%, \cos \eta \approx 1$), il advient que $h_M \approx y_M$, d'ou :

$$\boldsymbol{P_M} = \rho g y_M \cos \eta \approx \boldsymbol{\rho g y_M}$$



06. ENERGIE HYDRAULIQUE

Charge hydraulique

- La **charge hydraulique** en un point M : $H = P_M/\rho g + z + (V_M^2)/2g$

- La **charge moyenne** dans la section devient alors :

$$H_M = \frac{1}{Q}\iint\left(\frac{P_M}{\rho g} + z + \frac{V_M^2}{2g}\right)dQ = \frac{P}{\rho g} + z + \alpha\frac{U^2}{2g}$$

- α est le **coefficient de Coriolis**, de valeur comprise entre **1,03** et **1,36** suivant la rugosité des parois (Chow, 1959). ***On retient généralement la valeur de 1.***

$$\alpha = \frac{1}{U^3 S}\iint V^3 dS$$

07. REVÊTEMENT

Définition et propriétés

- ***Les fonctions assurées par le revêtement*** :
  - Réduction des pertes en eau par infiltration
  - Maximisation du débit, par réduction de la rugosité des parois
  - Minimisation de l'effet de l'érosion

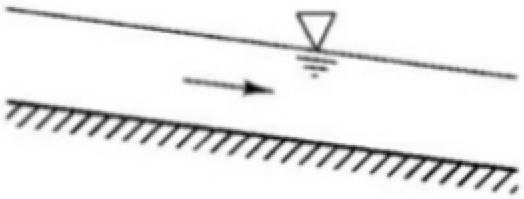
- *Quelques exemples de matériaux de couverture :*
  - Béton, asphalte, ciment,
  - Bois,
  - Matériau pulvérulent, graviers, rochers, etc…

ECOULEMENT UNIFORME

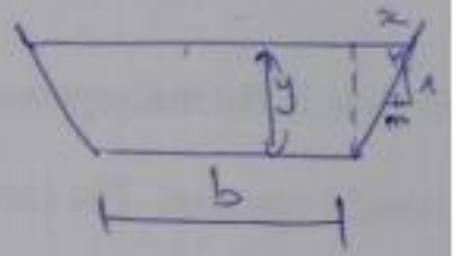
01. ECOULEMENT UNIFORME

Définition et hypothèses

- Un écoulement est dit **uniforme** lorsque les filets de courants sont **rectilignes** et **parallèles**, avec un **profil de vitesse constant** suivant le profil en long,
  - Le **débit** Q, la **vitesse** U et le **tirant d'eau** y sont **constants**



- **Propriétés de l'EU :**
  - Canal **prismatique** (section constante)
  - Vitesse **moyenne** U **constante** d'une section à l'autre
  - **Distribution** de **pression hydrostatique**
  - **Surface libre parallèle à la pente de fond**



$$S = by + \cancel{bx}\, xy = (b+x)y$$

$$\cancel{\alpha} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{m} = \frac{y}{x} \Rightarrow \cancel{y \ldots}$$

$$x = my$$

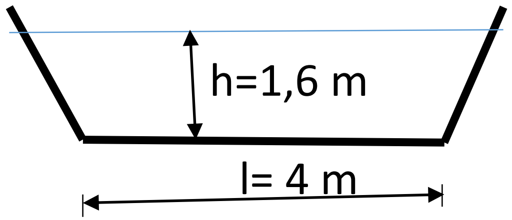
$$\Rightarrow S = (b+my)y$$

$$P = b + 2\sqrt{y^2 + x^2} = b + 2\sqrt{y^2 + m^2 y^2}$$

$$P = b + 2y\sqrt{1+m^2}$$

$$R_h = \frac{S}{P} = \frac{(b+my)y}{b + 2y\sqrt{1+y^2}}$$

Exemples : - 1) Soit un canal de section trapézoïdale, dont les caractéristiques sont les suivantes : largeur du fond l = 4 m; pente des côtés m = 1/1; rugosité des parois γ = 0,16; pente du fond I = 0,30 m/km; tirant d'eau h = 1,60 m. Calculer U et Q.



Bazin (1897)

$$C = \frac{87\sqrt{R_h}}{K_B + \sqrt{R_h}}$$

d'eau h = 1,60 m. ...

Solution : On a : $S = h\,(l + m\,h) = 1{,}60\ (4 + 1{,}60) = 8{,}96\ \text{m}^2$; $P = l + 2\,h\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} \times 1{,}60 = 8{,}52$ m ; $R = \dfrac{S}{P} = \dfrac{8{,}96}{8{,}52} = 1{,}05$ m. La T. 82 donne $C = 75{,}2$.

Alors :

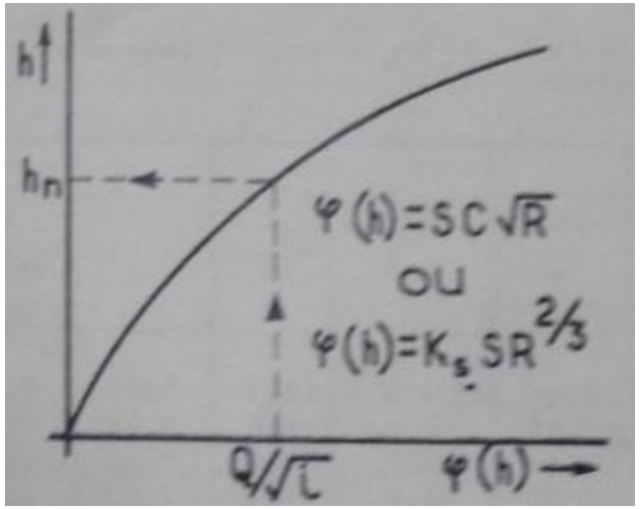
$$U = C\sqrt{R\,i} = 75{,}2\sqrt{1{,}05 \times 3 \times 10^{-4}} = 1{,}33\ \text{m/s}$$

$$Q = U\,S = 1{,}34 \times 8{,}96 = 11{,}9\ \text{m}^3/\text{s}$$

2) Soit un canal rectangulaire de 4 m de large; la rugosité des parois, d'après Kutter, correspond à $m = 0{,}25$ et la pente du fond est de 4.10^{-3}.

Déterminer le tirant d'eau qui, en régime uniforme, permet d'écouler un débit de $170\ m^3/s$.

$$\left.\begin{array}{l} Q = U \times S \\[2em] U = C\sqrt{R \times i} \end{array}\right\} \quad Q = CS\sqrt{R \times i} \quad \Longrightarrow \quad \frac{Q}{\sqrt{i}} = C(y) \times S(y) \times \sqrt{R(y)} = \varphi(y)$$



Solution : $\dfrac{Q}{\sqrt{i}} = \dfrac{170}{\sqrt{0,040}}$ 4.10^{-2} $= 850 \ m^3/s$. On calcule ensuite la fonction $\varphi(h) = C\,S\,\sqrt{R}$ pour diverses valeurs de h (tableau ci-dessous).

h m	S m^2	P m	R m	$\sqrt{R}$ $m^{1/2}$	$C = \dfrac{100\sqrt{R}}{0,25 + \sqrt{R}}$	$\varphi(h) = C\,S\,\sqrt{R}$ m^3/s
2,40	9,6	8,8	1,09	1,04	80,7	809
2,45	9,8	8,9	1,10	1,05	80,8	831
2,50	10,0	9,0	1,11	1,05	80,9	851
2,55	10,2	9,1	1,12	1,06	80,9	873
2,60	10,4	9,2	1,13	1,06	80,9	995

Par interpolation ou en traçant la courbe $\varphi(h)$, on obtiendrait $h_n \simeq$ 2,50 m.

3) Dans l'exemple précédent, déterminer la pente qui, en régime uniforme, correspond à une profondeur d'eau égale à 2,52 m.

Solution : Par interpolation ou en traçant la courbe $\varphi(h)$, on obtient pour h = 2,52 m, $\varphi(h)$ = 860 m^3/s. D'où $\sqrt{i} = \dfrac{Q}{\varphi(h)} = 0,1977$, et par conséquent, i = 39,1 ‰ .

Sections de debit maximum

Il est parfois intéressant de déterminer, pour une forme géométrique donnée, la section qui, a égalité d'aire, présente la capacité d'ecoulement maximum

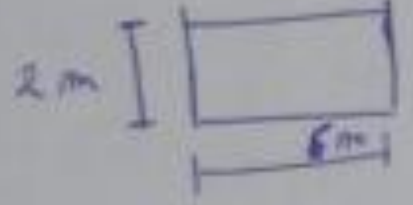
$$Q = US = CS\sqrt{R_h i}$$

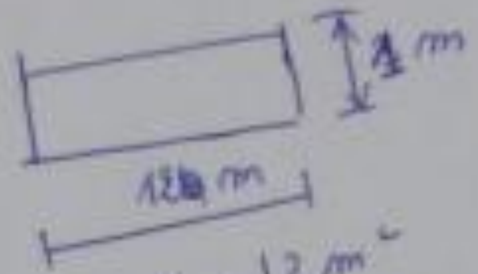
$$S = cte$$

$$Q_{max} \to R_{h_{max}} \to P_{min}$$

Il est évident que, pour la même aire S, le débit est maximum lorsque le rayon hydraulique R est maximum et par conséquent, S étant constant, lorsque le **périmètre mouillé P est minimum**

EXP





$S = 12\,m^2$

$n = 0,012 \;;\; i = 3‰$

$P_{m_1} = 6 + 2 \times 2 = 10\,m$

$R_{h_1} = \frac{12}{10} = 1,2$

$Q_1 = \frac{1}{0,012} \times 12 \times 1,2^{2/3} \times \sqrt{0,003} =$

$Q_1 = 61,85\,m^3/s$

$S = 12\,m^2$

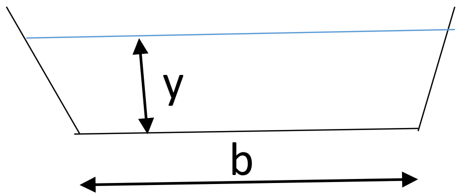
$P_{m_2} = 12 + 2 \times 1 = 14\,m$

$R_{h_2} = \frac{12}{14} = 0,86\,m$

$Q_2 = \frac{1}{0,012} \times 12 \times 0,86^{2/3} \sqrt{0,003}$

$Q_2 = 49,53\,m^3$

03. SECTION « ECONOMIQUE »



Cas II : section trapézoïdale

- La section S et le périmètre P dependent des variables b et y. ***Minimiser*** S et P ***implique*** $dS = 0$ et $dP = 0$

$$\begin{cases} S(b,y) = y(b+my) \\ P(b,y) = b + 2y\sqrt{1+m^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dS = 0 \Rightarrow ydb + (b+2my)dy = 0 \\ dP = 0 \Rightarrow db + \left(2\sqrt{1+m^2}\right)dy = 0 \end{cases}$$

$$\frac{y\,db}{dy} + b + 2my = 0$$

$$\frac{db}{dy} = -2\sqrt{1+m^2}$$

$$h = \frac{b}{2\left(\sqrt{1+m^2} - m\right)}$$

Cas III: section rectangulaire (m=0)

Dans le cas d’une section rectangulaire, la section optimale, la section économique correspond a:

$$b = 2 \times h$$

$1/m$ (pente)

$(I \; , \; Q \; ; (V) \; , \; \eta$

$S \, (b \, , \, h \, , \, m)$

1) on connait : $Q \, , \, I \, , \, \eta \, , \, m$; S ? $(b ? \, h ?)$

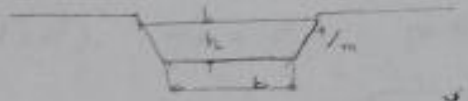
$V = C \sqrt{RI}$

2) on connait $S(b, h, m)$; I , η

Q ? $\longrightarrow (V)$

3) Q , $S(b, h, m)$, η ; I ?

Exemple :



$Q = 8 \, m^3/s$

$I = 1 \, ‰$

$\eta = 0{,}014$

$m = 1 \rightarrow \dfrac{b}{h} = 2 \left(\sqrt{1 + m^2} - m \right)$

A.N

$\dfrac{b}{h} = 0{,}83$

en pratique on prend $\dfrac{b}{h} = 0{,}85$

$\boxed{b = 0{,}85 \, h}$

- $S = (b + m h) h = (0{,}85 h + h) h = 1{,}85 h^2$

$S = 1{,}85 \, h^2$

- $\chi = b + 2h \sqrt{1 + m^2} = 0{,}85 \, h + 2\sqrt{2} \, h$

$\boxed{\chi = 3{,}67 \, h}$

- $\boxed{R_H = 0{,}504 \, h}$

$Q = S C \sqrt{RI} = S \cdot \dfrac{1}{\eta} R^{1/6} \sqrt{RI} = 8$

$1{,}85 \, h^2 \cdot \dfrac{1}{0{,}014} (0{,}504 \, h)^{2/3} \sqrt{0{,}001} = 8$

$h^n = h^{8/3} = 3{,}03 \rightarrow h = \sqrt[8]{(3{,}03)^3} = 1{,}52 \, m$

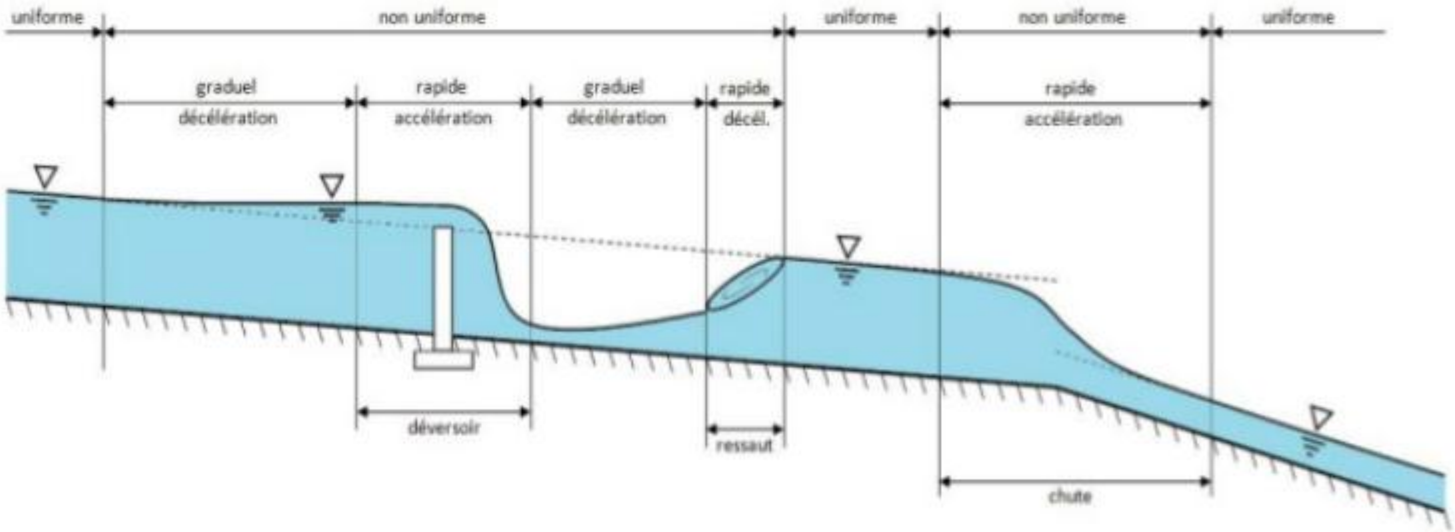
ECOULEMENTS GRADUELLEMENT VARIES

01. ECOULEMENTS VARIES

Définition

- Les **écoulements variés** se rencontrent dans les rivières au profil irrégulier, **près des singularités** en canal et en **zone de transition** entre deux écoulements uniformes.

- Ils sont caractérisés par une **variation de la hauteur d'eau entre deux sections**.
  - **Les écoulements graduellement variés** (EGV)
  - **Les écoulements brusquement variés** (EBV)



02. CARACTERISATION DES EGV

Hypothèses et propriétés

- Les EGV se caractérisent par une **variation** « **lente** » et « **continue** » de la ligne d'eau, soit en **exhaussement** ou en **rabaissement**.

- Dans l'étude des EGV, on admet les **hypothèses** suivantes :
  - *La courbure des lignes de courant est suffisamment faible pour être négligée*
  - *La distribution de pression reste hydrostatique*
  - *Le coefficient de Coriolis α reste constant*

- La loi de débit par Manning-Strickler s'écrit désormais :

$$\boldsymbol{Q = K_s S_{(y)} R_{h_{(y)}}^{2/3} \sqrt{J}}$$

$$J = -\frac{dH}{dx} = \frac{U^2}{K_s R_{h_{(y)}}^{4/3}} \; et \; J \neq I$$

03. ENERGIE DES ECOULEMENTS

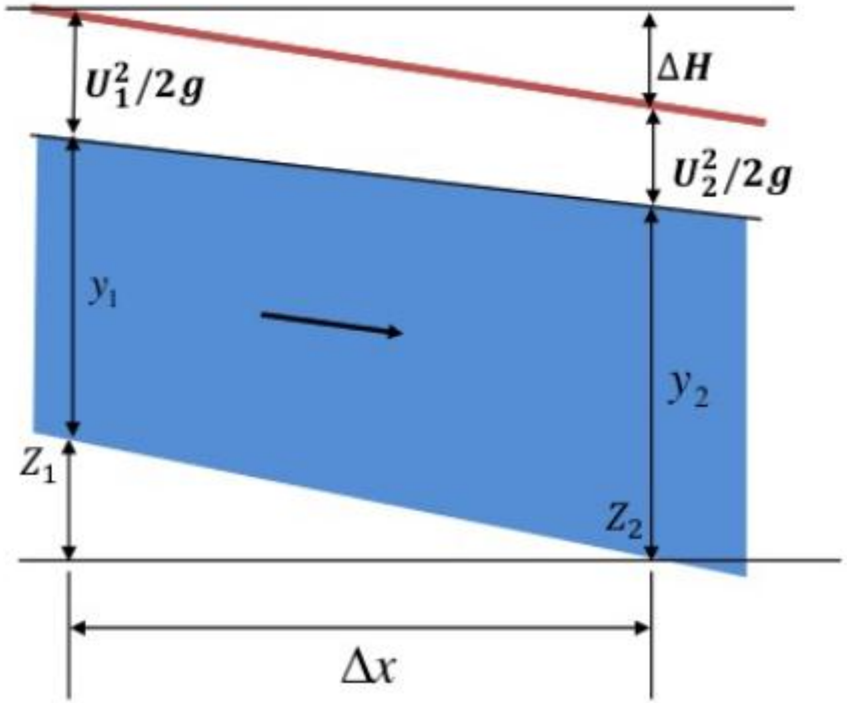
Charge moyenne et charge spécifique

- Soit l'énergie totale H :

$$\boldsymbol{H = y + z + \frac{U^2}{2g}}$$

- La charge H **diminue toujours dans le sens de l'écoulement**
  - $H = f(x)$ est **décroissante**

- ***La charge spécifique*** H_S est la charge moyenne ramenée au fond du canal



$$\boldsymbol{H_s = H - z = y + \frac{U^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2gS^2}}$$

04. ENERGIE SPECIFIQUE

Variation de H_s suivant x

- **Etudions la variation de $\boldsymbol{H_s}$** suivant le profil en long du canal :

$$\frac{dH_s}{dx} = \frac{d}{dx}(H - z) = \frac{dH}{dx} - \frac{dz}{dx} = -J - (-I) = -J + I$$

$$\boldsymbol{\frac{dH_s}{dx} = I - J}$$

- En écoulement uniforme, $I = J$: H_s ***est constante***.

- En écoulement non uniforme, $I \neq J$:
  - If $I > J$, U ***augmente***, y ***diminue***.
  - If $I < J$, U ***diminue***, y ***augmente***.

04. ENERGIE SPECIFIQUE

Variation de H_s suivant y pour un débit Q donné (1/2)

- Pour un **débit Q fixé** :
  - Si $y \to 0$, $S_{(y)} \to 0$ donc $H_s \to \infty$
  - Si $y \to \infty$, $S_{(y)} \to \infty$ donc $H_s \to y \to \infty$
  - Aussi, si $y \to \infty$, $H_s/y \to 1$, donc $H_s \to y$ (asymptote)

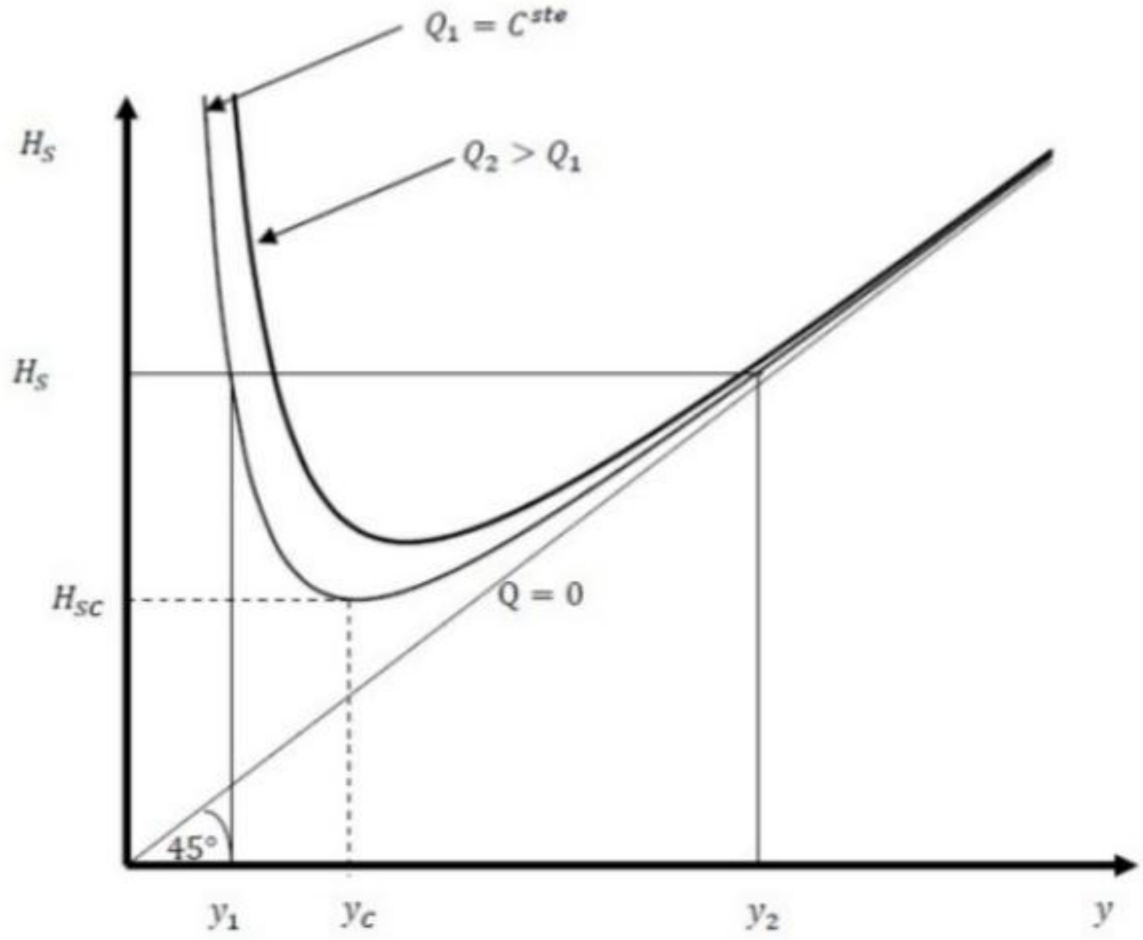
- On établit l'expression :

$$\frac{dH_s}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gS_{(y)}^3}\frac{dS}{dy} = 1 - \frac{Q^2 l_{(y)}}{gS_{(y)}^3} = \mathbf{1 - F_r^2}$$

- H_s est minimale pour $F_r = 1$: c'est le **régime critique**.

04. ENERGIE SPECIFIQUE

Variation de H_s suivant y pour un débit Q donné (2/2)



04. ENERGIE SPECIFIQUE

Propriétés de la charge spécifique H_s

- Pour qu'il y ait **écoulement d'un débit Q**, une **charge spécifique minimale est nécessaire**. C'est la ***charge spécifique au régime critique***.

$$H_{sc} = y_c + \frac{Q^2}{2gS_C^2}$$

- Pour une charge spécifique $H_s > H_{sc}$, le débit Q est écoulé sous **deux régimes** possibles :
  - $y > y_c \; ou \; F_r < 1$: **fluvial** (potentiel élevé, cinétique faible)
  - $y < y_c \; ou \; F_r > 1$: **torrentiel** (potentiel faible, cinétique élevée)

- Le **régime critique** $(y = y_c \; ou \; F_r = 1)$ est un régime de transition, instable, qui apparaît généralement aux sections de contrôle.

04. ENERGIE SPECIFIQUE

Variation de $Q_{(y)}$ pour une énergie spécifique H_S fixée (1/2)

- Pour une charge spécifique fixée H_S, étudions la variation du débit Q avec la hauteur d'eau y

$$\boldsymbol{Q_{(y)} = S_{(y)}\sqrt{2g(H_S - y)}}$$

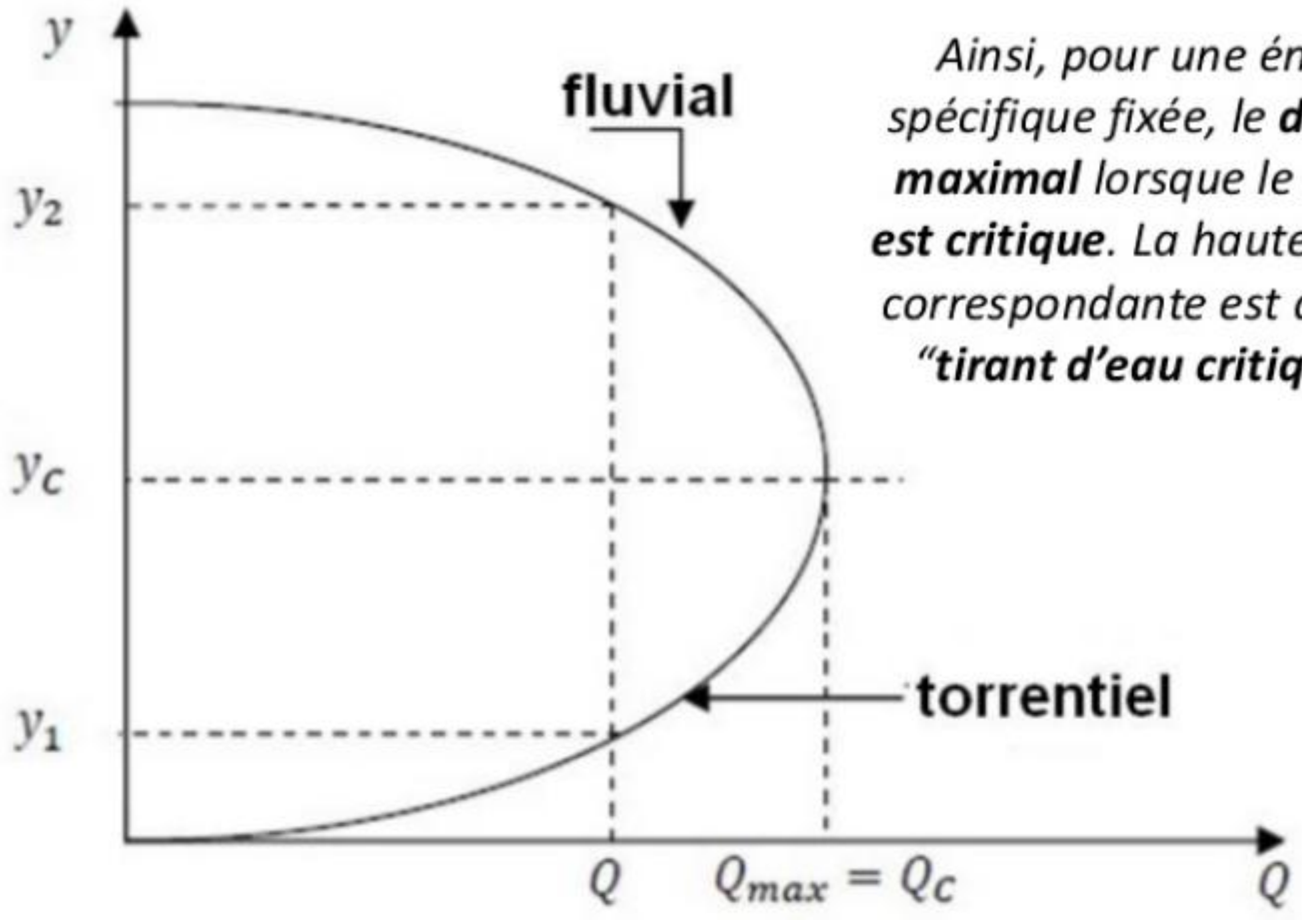
- On en déduit le comportement suivant aux limites :
  - $y \to 0, S_{(y)} \to 0, Q_{(y)} \to 0$
  - $y \to H_S, Q_{(y)} \to 0$

- Le graphe $Q_{(y)}$ est **parabolique** et **admet un maximum** pour $y = y_C$

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{Q\,l_{(y)}}{S_{(y)}} - \frac{gS_{(y)}^2}{Q} = 0 \Rightarrow \frac{Q^2 l_{(y)}}{gS_{(y)}^3} = 1 \Rightarrow y = y_c$$

04. ENERGIE SPECIFIQUE

Variation de $Q_{(y)}$ pour une énergie spécifique H_S fixée (2/2)



*Ainsi, pour une énergie spécifique fixée, le **débit est maximal** lorsque le **régime est critique**. La hauteur d'eau correspondante est appellée "**tirant d'eau critique**" y_c*