GCR2	**Communications numériques** **TP 4:** **Egalisation du canal**	**2024/2025**

Dans ce TP, nous allons étudier un canal sélectif en fréquence avec l'utilisation de l'égalisation Zero Forcing (ZF) pour compenser les interférences entre symboles (IES). Pour simplifier la discussion, nous supposerons qu'il n'y a pas de mise en forme des impulsions au niveau de l'émetteur.

On note $s(t)$ les symboles de transmission modélisés comme suit :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{a}_n g(t - nT)$$

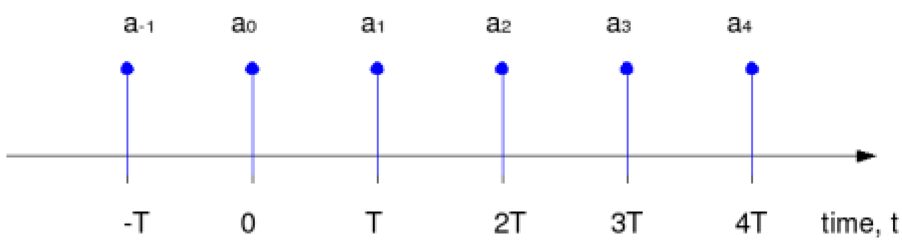
Avec :

- T: période du symbole
- a_n le symbole à transmettre
- $g(t)$ le filtre d'émission
- $s(t)$ signal à la sortie du filtre

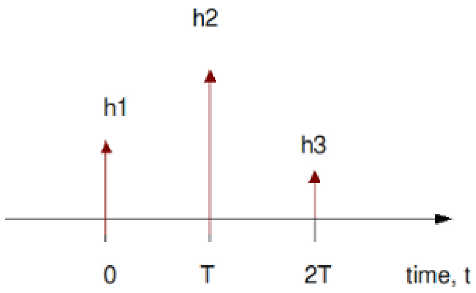
Pour simplifier, supposons que le filtre de mise en forme d'impulsions d'émission n'est pas présent, c'est-à-dire. $g(t) = \delta(t)$.

Ainsi, les symboles d'émission peuvent être modélisés ;

$$s(k) = \mathrm{a}_n$$



On suppose maintenant que le canal ait les coefficients suivants : $h(k) = [\ h_1\ h_2\ h_3]$



Un bruit additif gaussien n est ajouté au signal à la sortie du canal.

$$y(k) = s(k) \otimes h(k) + n$$

L'objectif de l'égalisation zéro forcée est de trouver un ensemble de coefficients de filtre $h_{ZF}(k)$ permettant d'avoir :

$$h(k) \otimes h_{ZF}(k) = \delta(t)$$

En utilisant une algèbre matricielle similaire et en supposant que le filtre ait 3 coefficients $h_{ZF}(k) = [h_{ZF1}\ h_{ZF2}\ h_{ZF3}]$, l'équation peut être représentée de manière équivalente par :

$$\begin{bmatrix} h_2 & h_1 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & h_3 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{ZF1} \\ h_{ZF2} \\ h_{ZF3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_{ZF1} \\ h_{ZF2} \\ h_{ZF3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2 & h_1 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & h_3 & h_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De même façon, si le filtre $h_{ZF}(k)$ possède 5 coefficients $h_{ZF}(k) = [h_{ZF1}\ h_{ZF2}\ h_{ZF3}\ h_{ZF4}\ h_{ZF5}]$ l'équation peut être représentée de manière équivalente par :

$$\begin{bmatrix} h_2 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_2 & h_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{ZF1} \\ h_{ZF2} \\ h_{ZF3} \\ h_{ZF4} \\ h_{ZF5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_{ZF1} \\ h_{ZF2} \\ h_{ZF3} \\ h_{ZF4} \\ h_{ZF5} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_2 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_3 & h_2 & h_1 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & h_2 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 & h_2 \end{bmatrix}}_{H}{}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On remarque bien que la matrice H est une matrice appelée **Toeplitz**. En appliquant maintenant le signal reçu à l'entrée l'égalisation, on aura à la sortie :

$$\begin{aligned} y(k)\otimes h_{ZF}(k) &= (s(k)\otimes h(k)+n)\otimes h_{ZF}(k) \\ &= s(k)\otimes h(k)\otimes h_{ZF}(k)+n\otimes h_{ZF}(k) \\ &= s(k)+n\otimes h_{ZF}(k) \end{aligned}$$

Le terme $n\otimes h_{ZF}(k)$ provoque une amplification du bruit entraînant une dégradation de performance en termes de taux d'erreurs binaires.

Travail demandé

1. Générer une suite binaire de longueur $N = 10^6$ bits.
2. Effectuer une modulation BPSK (Binary Phase Shift Keying) . Deux valeurs sont possibles: +1 et -1. Voir la constellation en utilisant la fonction (***scatterplot***)
3. Générer un canal *h*= [0.2 0.9 0.3]
4. Générer le signal à la sortie du canal (fonction ***conv***).
5. Ajouter un bruit blanc à ce signal. On donne SNR=5dB
6. On désire réaliser un égaliseur ZF qui possède **3 coefficients**
   a. Construire la matrice de Toeplitz H (fonction ***toeplitz***)
   b. Générer le vecteur d=[0 1 0]^T
   c. Déterminer les coefficients du filtre ZF
7. Après échantillonnage, donner le signal à la sortie de l'égaliseur.
8. Tracer la constellation du signal à la sortie de l'égaliseur. Comparer avec celle du signal BPSK émis.
9. Démoduler maintenant ce signal.
10. Déterminer le taux d'erreurs binaires BER.
11. Tracer la courbe de SNR vs BER pour SNR=[0: 10] dB

14. Générer l'expression théorique de la probabilité d'erreurs d'un signal BPSK

$$P_B = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Utiliser la fonction *erfc*.

15. Sur une même courbe, comparer en termes de BER les performances de trois filtres avec celle de l'expression théorique de la probabilité d'erreurs d'un signal BPSK.