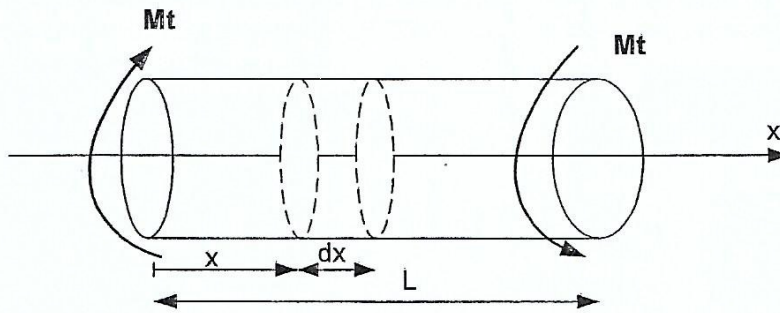


## Chap. VII : MOMENT DE TORSION

L'état de torsion est caractérisé par le fait que des six composantes des efforts internes, seul le moment de torsion  $M_x = M_t$  n'est pas nul tandis que toutes les autres sont égales à zéro.



$$M_t = \int (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) \cdot ds$$

### 1- Conclusions fondamentales de la théorie de la torsion des poutres prismatiques

#### a) Les sections droites gauchissent

Elles perdent dans la déformation leur caractère plan. Le déplacement axial  $u$  du point courant  $P$  de  $(S)$  est une fonction en général non linéaire de  $y$  et  $z$ . Il est indépendant de  $x$ . Le gauchissement est le même pour toutes les sections droites. Les poutres en forme de cylindre de révolution (plein ou creux) font exception à cela.

#### b) axe de torsion – centre de torsion

Toute section droite  $(S)$  subit une rotation d'ensemble d'amplitude  $\phi_x$ , autour d'un axe parallèle à la ligne moyenne.

Au gauchissement, se superpose donc un déplacement transversal du point courant  $P$  de  $(S)$ , de composantes.

$$\vec{\delta P} \begin{cases} v = \left( -\frac{B}{2 \cdot G} \cdot z + \gamma \right) \cdot x \\ w = \left( \frac{B}{2 \cdot G} \cdot y - \beta \right) \cdot x \end{cases}$$

Où  $B$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont des constantes et  $G$  : module de glissement (ou module d'élasticité transversal).

Ce déplacement identiquement nul sur la section initiale  $(S_0)$  est proportionnel à l'abscisse  $x$  de  $(S)$  pour une fibre donnée.

Dans le plan de  $(S)$ , le point  $C$  de coordonnées :

$$C \begin{cases} y_c = - \frac{2 \cdot G \cdot \beta}{B} \\ z_c = \frac{2 \cdot G \cdot \gamma}{B} \end{cases}$$

A un déplacement transversal nul, ce point est appelé « centre de torsion » (pour  $V=W=0$ ) de la section droite.

Dans le repère  $(Co, x'y'z')$  parallèle à  $(O, x y z)$  avec  $Co$  : centre de torsion de la section initiale, les relations précédentes s'écrivent ( $x$  est parallèle à  $x$ , pas de rotation donc pas de déformation) :

$$\overrightarrow{\delta P} \begin{cases} V = - \frac{B \cdot x}{2 \cdot G} \cdot z' = - \varphi_x \cdot z' \\ W = \frac{B \cdot x}{2 \cdot G} \cdot y' = \varphi_x \cdot y' \end{cases}$$

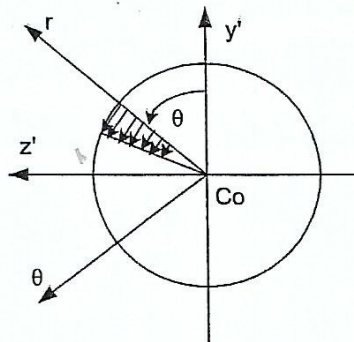
(On est toujours dans le plan de la section, les termes  $\beta$  et  $\gamma$  sont nuls)

Le déplacement dans le plan de  $(S)$  du point  $P$  est donc purement ortho-radial et de valeur

algébrique : 
$$\overrightarrow{\delta P} = \frac{B \cdot x}{2 \cdot G} \cdot r = \varphi_x \cdot r$$

Toute section droite subit, en plus de gauchissement, une rotation d'ensemble autour de l'axe

$Co x'$ , d'angle  $\varphi_x = \frac{B}{2 \cdot G} \cdot x'$  (avec  $x'$  confondu avec  $x$ )



c) Dans le cas général, nous avons :

$\bar{T}$  : Résultante générale en  $G$  : effort tranchant

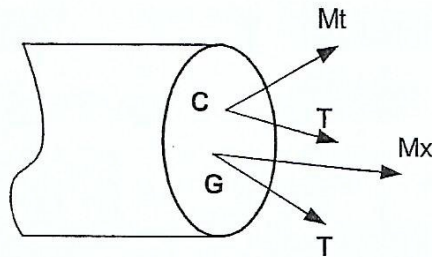
$\bar{M}_x$  : Moment résultant en  $G$  : moment longitudinal

$\bar{M}_t$  : Moment résultant en  $G$  : moment de torsion

Et  $\vec{M}_t = \vec{M}_x + C\vec{G} \wedge \vec{T}$

Si dans une section (S)  $\vec{T} = \vec{0}$ , on a :

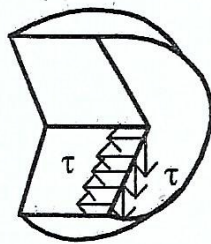
$\vec{M}_t = \vec{M}_x$



## 2- Théorie simplifiée de la torsion d'une barre circulaire

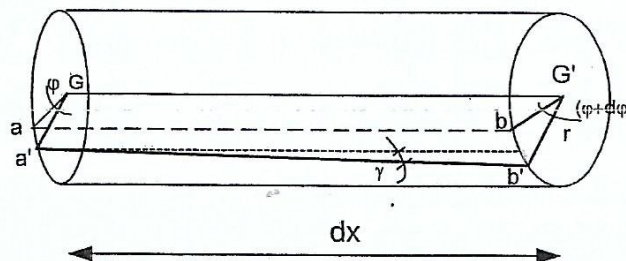
Nous utiliserons les coordonnées cylindriques d'axe Cx (axe de torsion local),  $\theta$  désignant l'angle polaire de l'axe radial Cr par rapport cy'. Donc le point P(r,  $\theta$ )

Nous supposons que la distribution de  $\tau$  est linéaire sur toute radiale Cr. On peut donc écrire, au point courant P de (S) :  $\tau = K(\theta).r$



Distribution des contraintes

Une génératrice ab est tracée à la surface d'un arbre non chargé se déplace en a'b' après l'application de Mt.



$\gamma$ : déformation de cisaillement (exprimée en radians) = distorsion  
r : rayon de la section transversale



$$\text{Tang} \gamma \approx \gamma = r \cdot \frac{d\phi}{dx} = r \cdot \theta$$

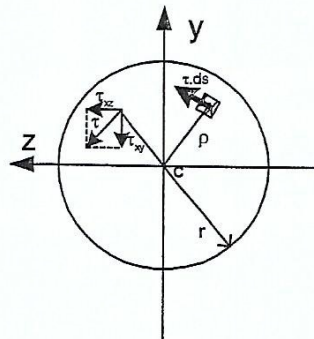
avec  $\theta = \frac{d\phi}{dx}$  : angle de torsion par unité de longueur ( $\theta$  : angle de torsion relatif)

Connaissant (loi de Hook en cisaillement) :  $\tau = G \cdot \gamma = G \cdot r \cdot \theta$  donc  $K(\theta) = G \cdot \theta$

Si on considère un élément semi-circulaire à l'intérieur de la barre de rayon  $\rho$ , on a :

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \theta \quad \text{avec } \rho \leq r$$

Par définition, le moment de torsion :  $M_t = \iint \tau \cdot \rho \cdot ds = \iint G \cdot \rho^2 \cdot \theta \cdot ds = G \cdot \theta \iint \rho^2 \cdot ds$



D'où  $M_t = G \cdot \theta \cdot J$  avec  $J = \iint \rho^2 \cdot ds$

Et

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{M}{G \cdot J}$$

$\frac{d\phi}{dx}$  : Rotation relative de deux sections droites voisines distantes de  $dx$

$G \cdot J$  : Rigidité à la torsion de la poutre

$G$  : module de glissement est une caractéristique du matériau ( $G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$ )

$J$  : de dimension  $L^4$ , ne dépend que de la géométrie de la section droite (analogie au moment quadratique polaire  $I_o$ )

$\theta$  : angle de torsion par unité de longueur,  $\theta = \frac{M_t}{G \cdot J}$  : varie directement avec  $M_t$  et inversement avec  $(G \cdot J)$

$\phi = \Phi$  : angle totale de torsion =  $\frac{M_t \cdot L}{G \cdot J} = \theta \cdot L$

La contrainte de cisaillement en un point de la section à une distance  $\rho$  du centre est :

$$\tau = G.\rho.\theta = G.\rho.\frac{M_t}{G.J}$$

$$\tau = \frac{M_t.\rho}{J}$$

**Remarques :**

- a) La contrainte maximale de cisaillement pour une barre de section circulaire de rayon R est :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t.R}{J} = \frac{M_t}{W_p}$$

avec  $J = \frac{\pi.R^4}{2}$  et  $W_p = \frac{J}{R} = \frac{\pi R^3}{2}$  : moment résistant polaire

- b) cas d'une section creux de section circulaire  $r_1 \leq \rho \leq r_2$  :  $M_t = G.J.\theta$

$$J = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4) \text{ et } W_p = \frac{J}{r_2} = \frac{\pi r_2^3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4\right)$$

- c) cas d'une section rectangulaire b x h (b : largeur et h : hauteur)

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{k_1.b.h^2} \text{ avec } k_1 = f\left(\frac{b}{h}\right)$$

$$\text{Si } \frac{b}{h} \rightarrow \infty \text{ on a } k_1 = \frac{1}{3}$$

### 3- Résistance et rigidité

$$* \tau_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{W_p} \leq |\tau| \text{ donc } W_p \geq \frac{|M_t|_{\max}}{|\tau|} ; \tau : \text{contrainte tangentielle admissible}$$

$$* \theta_{\max} = \frac{|M_t|_{\max}}{G.J} \leq |\theta| \text{ donc } W_p \geq \frac{|M_t|_{\max}}{G.|\theta|} ; \theta : \text{angle de torsion admissible}$$

#### 4- Energie potentielle élastique

La densité d'énergie emmagasinée est :  $\frac{dw}{dv} = \frac{1}{2} \cdot \text{tr}([\sigma][\varepsilon])$  avec  $[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{Et } [\varepsilon] = \frac{1+\nu}{E} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2G} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dw}{dv} = \frac{1}{2G} \cdot (\tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2) = \frac{1}{2G} \cdot \tau^2, \text{ cas d'une poutre} \quad \frac{dw}{dx} = \frac{1}{2G} \cdot \int \int_{(S)} \tau^2 \cdot ds$$

Nous pouvons donner une autre expression, plus commode dans les applications de cette énergie :

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_t^2}{G \cdot J}$$

Démonstration :

$$dw = \frac{1}{2} \cdot M_t \cdot d\varphi \quad \text{et} \quad \frac{dw}{dx} = \frac{1}{2} \cdot M_t \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2} \cdot M_t \cdot \frac{M_t}{G \cdot J} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_t^2}{G \cdot J}$$

$$\text{L'énergie total est : } W = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_t^2}{G \cdot J} \cdot L = \frac{1}{2} \cdot M_t \cdot \phi$$