République Tunisienne Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Gabès
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès

Réf : DE-EX-01
Indice : 3
Date : 02/12/2019

EPREUVE D'EVALUATION

Année Universitaire:	2023-2024	Date de l'Examen:	04/03/2024
Nature:	DC	Durée:	1h30min
Diplôme:	Ingénieur	Nombre de pages:	1
Section:	GCR	Enseignant:	Ben Salah Warda
Niveau d'études:	1ère année	Doc autorisés:	Non
Matière:	Mathématiques II	Remarque:	

Partout H désigne la fonction de ***Heaviside*** *définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = 0$ si $x < 0$ et $H(x) = 1$ si $x > 0$.*

Exercice 1. *(06 points)*
Soit $\lambda \geq 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit P l'opérateur différentiel défini sur $\mathbb{R}^3$, par

$$P = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \lambda.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, on pose

$$< E, \varphi >= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \varphi(t, \alpha t, \beta t)\, dt.$$

1. Montrer que E définit une distribution sur $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer PE.

Exercice 2. *(04 points)*
Soit f la fonction périodique de période a définie sur $[0, a]$ par $f(x) = \dfrac{x}{a}$

1. Justifier pourquoi f définie-elle une distribution.
2. Calculer sa dérivée au sens des distributions.

Exercice 3. *(05 points)*
Calculer les limites, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, des suite de distributions suivantes :

1. $T_n = n^{100} T_{e^{inx}}$
2. $T_n = T_{\cos^2(nx)}$
3. $T_n = n \sin(nx)\, T_{H(x)}$
4. $T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}})$

Exercice 4. *(05 points)*

1. Calculer les dérivées successives au sens des distributions des fonctions suivantes :
   (a) $H(x)$
   (b) $f_k = \dfrac{x^k}{k!} T_{H(x)}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ (utiliser deux façons différentes pour calculer T'_{f_k} puis déduire $(T_{f_k})^{(n)}, n \geq 1$).
2. Calculer les dérivées secondes au sens des distributions des fonctions suivantes :
   (a) $f(x) = 1 - |x|$ si $|x| < 1$ et $f(x) = 0$ sinon.
   (b) $g(x) = |\cos x|$