ENIG

République Tunisienne Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Gabès
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès

Réf : DE-EX-01	
Indice : 3	
Date : 02/12/2019	

EPREUVE D'EVALUATION

Année Universitaire:	2020-2021		
Nature:	DC	Date de l'Examen:	01/04/2021
Diplôme:	Ingénieur	Durée:	1h30min
Section:	GEA2, GCV1, GM1	Nombre de pages:	1
Niveau d'études:	année	Enseignant:	R. Nasfi
Matière:	MATH II	Doc autorisés:	Non
		Remarque:	

Exercice 1 (5 points)

1. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x(t)y'(t) = y(t) + x^2(t) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

a t-il une unique solution sur $\mathbb{R}$? Résoudre ce problème.

2. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 4te^t.$$

Exercice 2 (7 points)

On définit pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = e^x \cos(y), \qquad g(x,y) = (x^2+y^2)cos(xy), \qquad h(x,y) = \ln(x^2+y^2).$$

1. Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions f, g et h.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. ∂_{xx}
3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g en un point $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$.
4. Vérifier que h est une solution de $\Delta h = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 3 (8 points)

Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants.

1. $\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + y(t) \\ y' = -x(t) + 2y(t) \end{cases}$, $\quad x(0) = 0,\ y(0) = 3.$

2. $\begin{cases} x'(t) = x(t) - 3y(t) \\ y' = 3x(t) + y(t) \end{cases}$, $\quad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

3. $\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 2y(t) + t \\ y' = 3x(t) - 2y(t) \end{cases}$, $\quad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

4. $\begin{cases} x'(t) = 5x(t) + y(t) \\ y'(t) = -2y(t) + 2t \end{cases}$ $\quad x(0) = -1,\ y(0) = 1.$

République Tunisienne Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Gabès
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès

Réf : DE-EX-01	
Indice : 3	
Date : 02/12/2019	

EPREUVE D'EVALUATION

Année Universitaire:	2020-2021	Date de l'Examen:	16/06/2021
Nature:	Examen Rattrapage	Durée:	2h
Diplôme:	Ingénieur	Nombre de pages:	1
Section:	GEA2, GCV1,GM1	Enseignant:	R. Nasfi
Niveau d'études:	année	Doc autorisés:	Non
Matière:	MATH II	Remarque:	

Exercice 1 (5 points)

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $P^{-1}AP = D + N$.
2. Calculer $exp(tD)$, $exp(tN)$ and $exp(tA)$.
3. Résoudre le système différentiel $X' = AX$. Trouver la solution vérifiant la condition $X(0) = (1, 1, 1)$.

Exercice 2 (5 points)

On considère le système différentiel suivant :

$$(E) \begin{cases} x' & = 8x - 18y + 27z \\ y' & = -3x + 72y - 6z \\ z' & = -4x + 7y - 11z \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$.

1. Écrire le système (E) ci-dessus sous la forme $X' = AX$, pour une certaine matrice A de taille 3×3 à coefficients réels qu'on déterminera, et où $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
2. Remarquer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, sont vecteurs propres de A, associés aux valeurs propres 2, $-\frac{1}{2}$ et -1. En déduire une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. On pose $X(t) = PY(t)$, avec $Y(t) = (u(t), v(t), w(t))$. Montrer que X est solution du système (E) si et seulement si les coordonnées de Y sont solutions d'un système différentiel diagonal. Traduire les conditions initiales sur x, y et z en condition initiale sur Y .
4. Donner l'expression de $Y(t)$ en résolvant le système diagonal, et en déduire l'expression de x, y et z.