* Limite Supérieur et inférieur d'une Suite Numérique

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \sup_{n\geq 0}\left(\inf_{k\geq n} x_k\right)$$

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \inf_{n\geq 0}\left(\sup_{k\geq n} x_k\right)$$

* **Example :**

$x_n = (-1)^n$

$$x_k = \begin{cases} -1, 1, -1, 1 \ldots & n = 2P+1 \\ 1, -1, 1, -1 \ldots & n = 2P \end{cases}$$

$\inf_{k\geq n} x_k = \boxed{-1}$, $\sup_{k\geq n} x_n = \boxed{1}$

* $\liminf_{n\to+\infty} x_n = \sup_{n\geq 0}\left(\inf_{k\geq n} x_n\right) = \boxed{-1}$

* $\limsup_{n\to+\infty} x_n = \inf_{n\geq 0}\left(\sup_{k\geq n} x_n\right) = \boxed{1}$

* on a toujour $\boxed{\liminf_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n}$

* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un limite si et seulement si

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas une limite si

$$\lim_{n \to +\infty} \inf x_n \neq \lim_{n \to +\infty} \sup x_n$$

*1- f admet une limite on a SSi

$$\lim_{x \to a} \inf f(x) = \lim_{x \to a} \sup f(x)$$

2- $\lim_{x \to a} \inf f(x) \leq \lim_{x \to a} \sup f(x)$

3- on dit qu'une fonction f Semi Continue inferieurement (SCI) En a SSi

$$f(a) \leq \lim_{x \to a} \inf f(x)$$

4- on dit qu'une fonction f Semi continue Superieurement (SCS) En a SSi

$$\lim_{x \to a} \sup f(x) \leq f(a)$$

5- f est Continue En a SSi f est SCI et SCS En même temps

* Les Ensembles :

* opérations Sur les Ensembles :

*** 1- Le Complimentaire** : noté A^c

$A^c = \{x \in X ,\ x \notin A\}$

*** 2- La réunion** : de A et B noté $A \cup B$

$A \cup B = \{x ,\ x \in A$ ~~et~~ ou $x \in B\}$

*** 3- L'intersection** : de A et B noté $A \cap B$

$A \cap B = \{x \in X ,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$

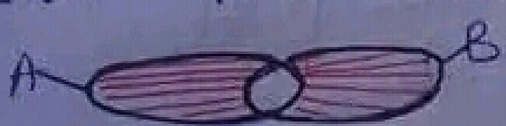
*** 4- La difference** : de A et B noté $A \setminus B$

$A \setminus B = A \cap B^c = \{x ,\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$

*** 5- Difference Symetrique** : de A et B

noté : $A \Delta B$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$



* La famille de Morgan :*

$$* \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^{\,c}$$

$$* \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^{\,c}$$

• Limite d'une Suite d'ensembles

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une Suite d'ensembles de partie de X

• on dit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone si elle est :

* Croissante $\forall n \quad A_n \subseteq A_{n+1}$
* Décroissante $\forall n \quad A_{n+1} \subseteq A_n$

* Si $(A_{n\in\mathbb{N}})$ est monotone donc admet une limite (Ensemble) notée $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ et on a :

1. (A_n) Croissante $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$
2. (A_n) Décroissante $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

* Exemple :

* 1. (A_n), $n\in\mathbb{N}$, $A_n =]0, n[$
* 2. (B_n), $n\in\mathbb{N}^*$, $B_n = [0, \frac{1}{n}[$
* 3. (C_n), $n\in\mathbb{N}^*$, $B_n =]0, \frac{1}{n}[$
* 4. (D_n), $]-\frac{1}{n}, 1]$, $n \geq 1$

* Solution :

1. A_n, $A_0 = \emptyset \subset A_1 =]0,1[\subset]0,2[\subset \ldots$

Croissante donc admet une limite

$\lim\limits_{n\to+\infty} A_n =]0, +\infty[$

(2) $B_1 = [0, 1[\supset B_2 = [0, \frac{1}{2}[\supset B_3 = [0, \frac{1}{3}[\supset \dots$

Décroissante

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = \{0\}$$

(3) $\lim B_n$ $\lim_{n \to +\infty} C_n = \phi$

(4) $\lim_{n \to +\infty} D_n = [0, 1]$

* **Limite d'une Suite quelconque :**

✓ **Limite inférieure** : $\lim_{n \to +\infty} \inf A_n = \bigcup_{n \geq 0} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right)$

✓ **Limite Supérieure** : $\lim_{n \to +\infty} \sup A = \bigcap_{n \geq 0} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)$

* $\lim_{n \to +\infty} \inf A_n \subseteq \lim_{n \to +\infty} \sup A_n$

* $\lim_{n \to +\infty} \inf (A_n)^c = \left(\lim_{n \to +\infty} \sup A_n \right)^c$

* Si $\lim_{n \to +\infty} \inf A_n = \lim_{n \to +\infty} \sup A_n$ la Suite (A_n) admet une limite et on a

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = \lim_{n \to +\infty} \sup A_n = \lim_{n \to +\infty} \inf A_n$$

* La Dénombrabilité :

deux Ensemble E et F Sont Equipotant s'il existe une byjection de l'une Sur l'autre on dit qu'il Sont même Cardinale

$$\text{Card } E = \text{Card } F$$

* S'il Existe une injection de E dans $\mathbb{N}$

Alors E est dénombrable.

* S'il Existe une Surjection de $\mathbb{N}$ dans E

Alors E est denombrable.

* Un Ensembl infinie dénombrabl est un Ensembl Equipotant à $\mathbb{N}$

Un Ensembl fini est dénombrabl

① S'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$ alors E est denombrabl

② S'il existe une Surjection de $\mathbb{N}$ dans E alors E est denombrabl

③ Toute partie d'une ensemble dénombrable est dénombrable.

④ Si E et F deux ensembles dénombrables alors $E \times F$ est dénombrable

⑤ Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensemble dénombrable alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est dénombrable

* Image direct et image réciproque :

* Soit $f : E \longrightarrow F$ une application

✓ **L'image direct** de $A \in P(E)$

$$f(A) = \{f(x) . x \in A\}$$

✓ **L'image réciproque** : $B \in P(F)$.

$$f(B) = \{f(x) . x \in B\}$$

* 1 - $\forall A, B \subset P(F)$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

En général $(A_i)_{\forall i \in I} \subset P(F)$

f^{-1}([illegible]) = f^{-1}[illegible]

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i$$

* 2- $\forall A, B \in P(F)$

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

En générale $(A_i)_{i \in I} \subset P(F)$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

* 3- $\forall A \in P(F)$, $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

* 4- $\forall A \in P(F)$, $f(f^{-1}(A)) \subset A$

Egalité si f est Surjective

* 5- $\forall A \in P(E)$, $A \subset f(f^{-1}(A))$

Egalité si f est Surjective

* **Algber :**

Soit X un Ensemble, et Soit A une famille de parties de X ($\mathcal{A} \in P(X)$)

f est une Algber si

1- $\phi \in \mathcal{A}$.

2- si A et $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

3- Si $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur X

1- $\forall A, B \subset \mathcal{A}$, $A \cap B \in \mathcal{A}$

2- $\forall A, B \subset \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$

3- $\forall A, B \subset \mathcal{A}$, $A \Delta B \in \mathcal{A}$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

L'algèbre $\mathcal{A}$ est stable par l'union finie et l'intersection finie

L'intersection quelconque d'Algèbres sur X est une Algèbre sur X

Preuve: Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille d'Algèbre sur X

$\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$, on montre $\mathcal{A}$ est une Algèbre sur X

1- $\forall i \in I$, $\phi \in \mathcal{A}_i$

$\Longrightarrow \phi \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

2- Soit A et $B \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$

on a $\forall i \in I$: $A \in \mathcal{A}_i$ et $B \in \mathcal{A}_i$ ($\mathcal{A}_i$ une Algèbre)

$\forall i \in I$: $A \cup B \in \mathcal{A}_i$

$\Longrightarrow A \cup B \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

3- Soit $A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

$\Rightarrow \forall i \in I \,.\, A \in \mathcal{A}$

$\forall i \in I \,.\, A^c \in \mathcal{A}_i \Rightarrow A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$

L'Union de deux Algber Sur X, n'est Pas forcément une Algber Sur X

* Example :

$\mathcal{A}_a = \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, X\}$

$\mathcal{A}_b = \{\emptyset, \{b\}, \{a,c\}, X\}$

$\mathcal{A}_a \cup \mathcal{A}_b = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, X\}$

$\{a\}, \{b\} \in \mathcal{A}_a \cup \mathcal{A}_b$

$\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \notin \mathcal{A}_a \cup \mathcal{A}_b$

Donc $\mathcal{A}_a \cup \mathcal{A}_b$ n'est pas une Algber

* Algber Engendrée : Soit $\mathcal{C}$ une famille de Parties de X, on note :

$$B = \bigcap_{\mathcal{C} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A} \quad \text{une Algber}$$

B est une Algber Sur X appellée l'Algber Engendrée Par $\mathcal{C}$