Niveau : 1ère année Master en Télécommunications **Semestre : 01** Année Univ. : **2017/2018**

Spécialité : Réseaux et Télécommunications **Le 08/02/2018**

Corrigé-Type

de l'Épreuve de la Matière : Traitement Avancé du Signal

Exercice 1 (05 points)

1. Trouver la transformée de Fourier de fonction suivante : $f(t)=\left(2t^2-3t+4\right)\cdot\delta''(t+2)$,

Réponse :

$$f(t)=\underbrace{\left(2t^2-3t+4\right)}_{f_1(t)}\cdot\delta''(t+2), \quad \text{(Ex.1.1)}$$

On a : $$f_1(t)\cdot\delta''(t+2)\xleftrightarrow{\text{e.é.à}} f_1(-2)\cdot\delta''(t+2)-2\cdot f_1'(-2)\cdot\delta'(t+2)+f_1''(-2)\cdot\delta(t+2) \quad 0.25pt \quad \text{(Ex.1.2)}$$

$$f_1(-2)=18,\ f_1'(t)=4t-3,\ f_1'(-2)=-11,\ f_1''(t)=4,\ f_1''(-2)=4 \quad 0.25pt \quad \text{(Ex.1.3)}$$

donc : $$f(t)=f_1(t)\cdot\delta''(t+2)\xleftrightarrow{\text{e.é.à}} 18\cdot\delta''(t+2)+22\cdot\delta'(t+2)+4\cdot\delta(t+2) \quad 0.25pt \quad \text{(Ex.1.4)}$$

En passant à la TF : $$F(\omega)=TF\left[f(t)\right]=TF\left[f_1(t)\cdot\delta''(t+2)\right]=TF\left[18\cdot\delta''(t+2)+22\cdot\delta'(t+2)+4\cdot\delta(t+2)\right] \quad \text{(Ex.1.5)}$$

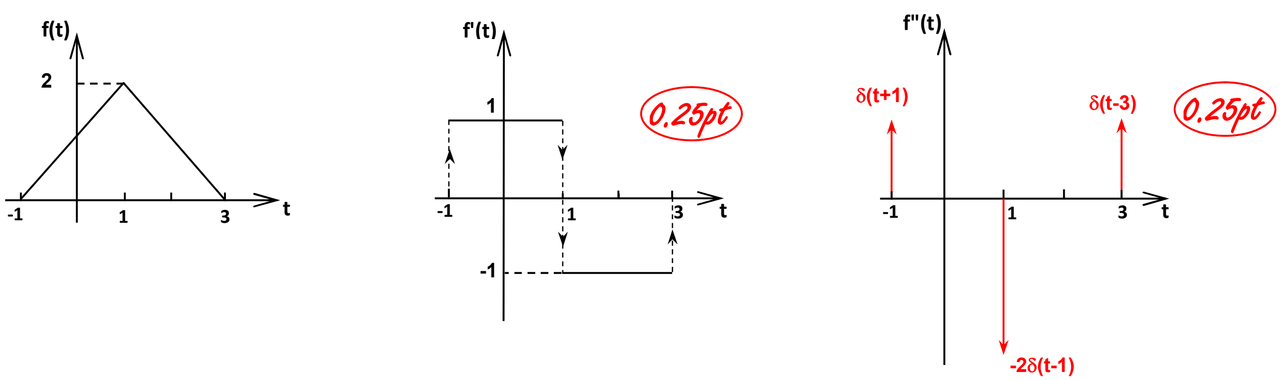
On obtient : $$\boxed{F(\omega)=\left[18\cdot(j\omega)^2+22\cdot j\omega+4\right]e^{+j2\omega}} \quad 0.25pt \quad \text{(Ex.1.6)}$$

2. Déterminer graphiquement la transformée de Fourier du signal triangulaire $2\times q_T(t-1)$ pour T=2.

Réponse :

Le signal triangulaire : $q_T(t)=\begin{cases}1-|t|/T & \text{si } |t|<T\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$

En posant : $f(t)=2\times q_T(t-1)$ avec $T=2$ et en dérivant deux fois f(t), on obtient :



On a : $$f''(t)=\delta(t+1)-2\cdot\delta(t-1)+\delta(t-3) \quad \text{(Ex.1.7)}$$

0.25pt

En passant à la TF : $$G(\omega)=TF\left[g(t)=f(t)''\right]=e^{+j\omega}-2\,e^{-j\omega}+e^{-j3\omega} \quad \text{(Ex.1.8)}$$

Et la TF de f(t) est : $$F(\omega)=TF\left[f(t)\right]=\frac{G(\omega)}{(j\omega)^2}=\frac{e^{+j\omega}-2\,e^{-j\omega}+e^{-j3\omega}}{(j\omega)^2}=\frac{e^{-j\omega}(e^{+2j\omega}-2+e^{-j2\omega})}{(j\omega)^2} \quad \text{(Ex.1.9)}$$

et aprés simplification, on obtient : $$\boxed{F(\omega)=\frac{2e^{-j\omega}\left[\cos(2C)-1\right]}{(j\omega)^2}=\frac{4e^{-j\omega}\sin^2(\omega)}{\omega^2}} \quad 0.25pt \quad \text{(Ex.1.10)}$$

3. Calculer la convolution suivante : $\left(\delta(n)+2^{-n}U(n)\right)*U(n)$.

Réponse :

1ére méthode :

$$U(n) \xleftrightarrow{TZ} \frac{Z}{Z-1} \qquad \text{(Ex.1.11)}$$

$$\delta(n) \xleftrightarrow{TZ} 1 \qquad 0.25pt \qquad \text{(Ex.1.12)}$$

$$2^{-n}\cdot U(n) \xleftrightarrow{TZ} \frac{Z}{Z-0.5} \qquad \text{(Ex.1.13)}$$

$$x(n) = \left(\delta(n)+2^{-n}U(n)\right)*U(n) \xleftrightarrow{TZ} X(Z) = \left[1+\frac{Z}{Z-0.5}\right]\cdot\frac{Z}{Z-1} \qquad 0.25pt \qquad \text{(Ex.1.14)}$$

$$X(Z) = \frac{Z}{Z-1} + \left(\frac{Z}{Z-1}\cdot\frac{Z}{Z-0.5}\right) = \frac{Z}{Z-1} + \frac{2Z}{Z-1} - \frac{Z}{Z-0.5} \qquad \text{(Ex.1.15)}$$

En passant à la TZ^{-1} :

$$\boxed{x(n) == TZ^{-1}\left[X(Z)\right] = U(n) + 2\cdot U(n) - (0.5)^n\cdot U(n) = \left(3-(0.5)^n\right)\cdot U(n)} \qquad 0.5pt \qquad \text{(Ex.1.16)}$$

2ième méthode :

$$x(n) = \left(\delta(n)+2^{-n}U(n)\right)*U(n) = \delta(n)*U(n) + 2^{-n}U(n)*U(n) \qquad 0.25pt \qquad \text{(Ex.1.17)}$$

$$x(n) = U(n) + \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}U(i)*U(n-i) = U(n) + \sum_{i=0}^{n}(0.5)^i = U(n) + \frac{1-(0.5)^{n+1}}{1-0.5}U(n) \qquad 0.5pt \qquad \text{(Ex.1.18)}$$

$$\boxed{x(n) = U(n) + \left(2-(0.5)^n\right)U(n) = \left(3-(0.5)^n\right)\cdot U(n)} \qquad 0.25pt \qquad \text{(Ex.1.19)}$$

4. Déterminer la transformée en Z inverse de : $X(Z) = \dfrac{2Z}{3Z^2-4Z+1}$ $\quad |Z| < \dfrac{1}{3}$.

$$X(Z) = \frac{2Z}{3Z^2-4Z+1} = \frac{Z}{(Z-1)} - \frac{3Z}{(3Z-1)} \qquad 0.25pt \qquad \text{(Ex.1.20)}$$

$$\frac{Z}{(Z-1)} \quad |Z| < \frac{1}{3} \xleftrightarrow{TZ^{-1}} -U(-n-1) \qquad 0.25pt \qquad \text{(Ex.1.21)}$$

$$\frac{-3Z}{(3Z-1)} = \frac{-Z}{Z-\frac{1}{3}} \quad |Z| < \frac{1}{3} \xleftrightarrow{TZ^{-1}} \left(\frac{1}{3}\right)^n U(-n-1) \qquad 0.25pt \qquad \text{(Ex.1.22)}$$

$$\boxed{x(n) = TZ^{-1}\left[\frac{Z}{(Z-1)} - \frac{3Z}{(3Z-1)}\right] = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1\right]\cdot U(-n-1)} \qquad 0.25pt \qquad \text{(Ex.1.23)}$$

5. Résoudre l´équation aux différences suivante: $6y(n)-8y(n-1)+2y(n-2)=2^{-n+1}$ avec : $y(-1)=1$ et $y(-2)=2$.

L'équation récurrente est : $6y(n) - 8y(n-1) + 2y(n-2) = 2^{-n+1}$ avec : $y(-1) = 1$ et $y(-2) = 2$ (Ex.1.24)

L'équation homogène est : $$6y(n) - 8y(n-1) + 2y(n-2) = 0 \quad \text{(Ex.1.25)}$$

0.25pt

Sa solution générale est : $$y_h(n) = C \cdot p^n \quad \text{(Ex.1.26)}$$

En portant cette solution $y_h(n)$ dans l'équation homogène on obtient :

$$6C \cdot p^n - 8C \cdot p^{n-1} + 2C \cdot p^{n-2} = 0 \quad \text{(Ex.1.27)}$$

$$C \cdot p^{n-2}(6p^2 - 8p^1 + 2) = 0 \qquad \text{les racines sont} : p_1 = \frac{1}{3} \ ; \ p_2 = 1 \quad \text{(Ex.1.28)}$$

donc, $$y_h(n) = C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + C_2 \cdot 1^n \quad \text{(Ex.1.29)}$$

0.25pt

La solution particulière est : $$y_p(n) = K \cdot 2^{-n+1} \quad \text{(Ex.1.30)}$$

En portant $y_p(n)$ dans l'équation récurrente, on obtient :

$$6 \cdot K \cdot 2^{-n+1} - 8 \cdot K \cdot 2^{-n+2} + 2 \cdot K \cdot 2^{-n+3} = 2^{-n+1} \quad \text{(Ex.1.31)}$$

$$-2 \cdot K \cdot 2^{-n+1} = 2^{-n+1} \quad \text{(Ex.1.32)}$$

$$\Rightarrow K = -\frac{1}{2} = -2^{-1}$$

et la solution particulière sera donc : $$y_p(n) = -2^{-1} \cdot 2^{-n+1} = -2^{-n} \quad \text{(Ex.1.33)}$$

0.25pt

la solution est : $$y(n) = y_h(n) + y_p(n) = C_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + C_2 \cdot 1^n - 2^{-n} \quad \text{(Ex.1.34)}$$

en considérant les conditions initiales: $y(-1)=1$ et $y(-2)=2$ on trouve que $C_1 = \frac{1}{2}$ et $C_2 = \frac{3}{2}$

Enfin la solution sera : $$\boxed{y(n) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad \text{(Ex.1.35)}$$

0.25pt

Exercice 2 (04 points)

On exprime l'intégrateur de Darbo comme suit : $y(n) = Tx(n) + y(n-1)$

1. Calculer la transformée en Z de cet intégrateur : $H(Z) = Y(Z)/X(Z)$.

Réponse :

L'intégrateur de Darbo est exprimé par :

$$y(n) = Tx(n) + y(n-1) \quad \text{(Ex.2.1)}$$

En introduisant la transformée en Z :

$$Y(Z) = TX(Z) + Z^{-1}Y(Z) \quad \text{(Ex.2.2)}$$

0.25pt

$$Y(Z)(1\text{-}Z^{-1}) = TX(Z)$$ 0.25pt (Ex.2.3)

$$\boxed{H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{T}{1\text{-}Z^{-1}} = \frac{T\cdot Z}{Z\text{-}1}}$$ 0.5pt (Ex.2.4)

2. Extraire la réponse à : $x(n) = e^{-\alpha nT}U(n)$ **et comparer avec l'intégrale exacte de** $x(t) = e^{-\alpha t}U(t)$.

Réponse :

la réponse à $x(n) = e^{-\alpha nT}U(n)$:

$$e^{-\alpha nT}\cdot U(n) \xleftrightarrow{TZ} \frac{1}{1\text{-}Z^{-1}\cdot e^{-\alpha T}} = \frac{Z}{Z - e^{-\alpha T}}$$ 0.25pt (Ex.2.5)

La TZ de la réponse est :

$$Y(Z) = X(Z)\cdot H(Z) = \frac{Z}{Z - e^{-\alpha T}}\cdot\frac{T\cdot Z}{Z\text{-}1}$$ 0.25pt (Ex.2.6)

On peut écrire Y(Z) comme suit :

$$\boxed{Y(Z) = T\left[\frac{1}{1-e^{-\alpha T}}\cdot\frac{1}{1\text{-}Z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{+\alpha T}}\cdot\frac{1}{1\text{-}Z^{-1}\cdot e^{-\alpha T}}\right] = \frac{T}{1-e^{-\alpha T}}\cdot\left[\frac{1}{1\text{-}Z^{-1}} - \frac{e^{-\alpha T}}{1\text{-}Z^{-1}\cdot e^{-\alpha T}}\right]}$$ 0.5pt (Ex.2.7)

Et la réponse y(n) est : $$y(n) = TZ^{-1}[Y(Z)] = \frac{T}{1-e^{-\alpha T}}\cdot\left[U(n) - e^{-\alpha T}\cdot e^{-\alpha nT}\cdot U(n)\right]$$ 0.5pt (Ex.2.8)

$$\boxed{y(n) = T\cdot\left[\frac{1-e^{-\alpha T(n+1)}}{1-e^{-\alpha T}}\right]\cdot U(n)}$$ 0.25pt (Ex.2.9)

On peut écrire : $$\boxed{y(n) = T\sum_{k=0}^{n} e^{-\alpha kT}\cdot U(n)}$$ 0.25pt (Ex.2.10)

Comparaison avec : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot dt$ avec $x(t) = e^{-\alpha t}U(t)$.

$$I = \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\cdot dt = \frac{-1}{\alpha}e^{-\alpha t}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{\alpha}$$ 0.25pt (Ex.2.11)

alors : $$I(n) = \int_{0}^{nT} e^{-\alpha t}\cdot dt = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha nT} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha nT}\right) \quad n \geq 0$$ 0.25pt (Ex.2.12)

d'où : $$e^{-\alpha nT} = (1 - \alpha\cdot I(n))\cdot U(n)$$ 0.25pt (Ex.2.13)

On remplace dans y(n), on obtient : $$\boxed{y(n) = T\cdot\left[\frac{1-e^{-\alpha T}(1-\alpha\cdot I(n))}{1-e^{-\alpha T}}\right] = T\cdot\left[1 + \frac{\alpha\cdot e^{-\alpha T}}{1-e^{-\alpha T}}\cdot I(n)\right]}$$ 0.25pt (Ex.2.14)

Exercice 3 (06 points)

Soit un filtre numérique d'entrée x(n) et de sortie y(n), tel que :

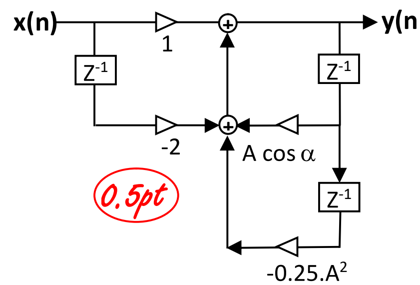
$$4y(n)=4x(n)-8x(n-1)+4A\cos\alpha\, y(n-1)-A^2\, y(n-2), \qquad \text{avec}: A\in\mathbb{R}_+^*$$

1. Dessiner la structure du filtre. Est-ce un filtre à réponse impulsionnelle finie ou infinie ?

Réponse :

L'EDF peut être écrite comme suit : $y(n)=x(n)-2x(n-1)+A\cos\alpha\, y(n-1)-0.25\cdot A^2\, y(n-2)$, avec : $A\in\mathbb{R}_+^*$ (Ex.3.1)

Filtre récursif, donc filtre RII (réponse impulsionnelle infinie). 0.5pt



0.5pt

2. Calculer la fonction de transfert H(Z) du filtre.

Réponse :

La TZ de l'EDF donne :

$$Y(Z)=X(Z)-2\cdot Z^{-1}X(Z)+A\cos\alpha\cdot Z^{-1}Y(Z)-0.25\cdot A^2\cdot Z^{-2}Y(Z) \qquad \text{0.5pt} \qquad \text{(Ex.3.2)}$$

$$\boxed{H(Z)=\frac{Y(Z)}{X(Z)}=\frac{1-2\cdot Z^{-1}}{1-A\cos\alpha\cdot Z^{-1}+0.25\cdot A^2\cdot Z^{-2}}} \qquad \text{0.5pt} \qquad \text{(Ex.3.3)}$$

3. Extraire les pôles et les zéros du filtre. Pour quelle condition ce filtre est-il stable ?

Réponse :

Zéros : zéros :Z=0, Z=2. 0.25pt

Pôles : le discriminant du dénominateur est : $\Delta=A^2\cos\alpha^2-A^2=-A^2\sin\alpha^2$ 0.25pt (Ex.3.4)

Les pôles sont : $p_{1,2}=\dfrac{A\cos\alpha\pm j\cdot A\sin\alpha}{2}=\dfrac{A}{2}\cdot e^{\pm j\alpha}$ 0.5pt (Ex.3.5)

Le filtre est **stable** SSI : $\left|\dfrac{A}{2}\cdot e^{\pm j\alpha}\right|<1 \Rightarrow A<2 \quad \text{puisque } A\in\mathbb{R}_+^*$ 1.0pt (Ex.3.6)

4. En posant A =1.6, $\alpha = \pi/4$, dessiner le diagramme pôles-zéros puis tracer le module de la réponse fréquentielle.

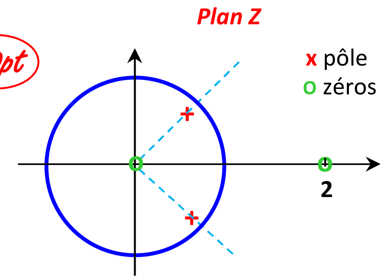
Réponse :

$A=1.6,\ \alpha=\pi/4$:

zéros : Z=0, Z=2, **pôles** : $p_{1,2}=\dfrac{1.6}{2}\cdot e^{\pm j\frac{\pi}{4}}=0.4\cdot\sqrt{2}\cdot(1\pm j)$

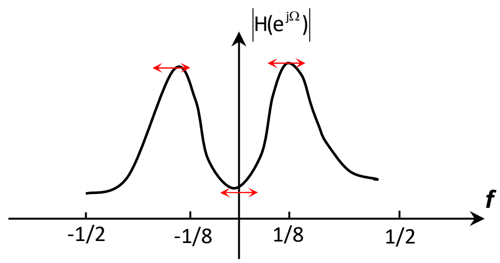
Le diagramme pôles-zéros est donné dans la figure ci-contre :

1.0pt



La réponse fréquentielle est : $H(e^{j\Omega})=H(Z=e^{j\Omega})=H(Z=e^{j2\pi\frac{f}{f_e}})=\dfrac{1-2\cdot e^{-j\Omega}}{1\text{-}0.8\cdot e^{-j\Omega}+0.64\cdot e^{-2j\Omega}}$ (Ex.3.7)

Le module de la réponse fréquentielle est représenté dans la figure ci-dessous :



1.0pt

Exercice 4 (05 points)

Soit le processus stochastique x(t) = r cos ($\omega t + \phi$) où ϕ est une variable aléatoire uniformément distribuée sur [-π , π]. r et ω des variables réelles.

1. Calculer la moyenne $m_x(t)$ et la corrélation $R_x(t, t+\tau)$de x(t).

Réponse :

La moyenne $m_x(t)$ est : $m_x(t)=E[x(t)]=E[r\cdot\cos(\omega t+\phi)\ ]=r\cdot E[\cos(\omega t+\phi)\ ]$ (Ex.4.1)

ϕ étant une variable aléatoire uniformément distribuée sur [-π , π], alors sa densité de probabilité est :

$$p_\phi(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & -\pi\le\alpha\le\pi\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}\qquad\text{(Ex.4.2)}$$

La moyenne $m_x(t)$ est donc : $\boxed{m_x(t)=r\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega t+\alpha)\,p_\phi(\alpha)d\alpha\ =\dfrac{r}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(\omega t+\alpha)\ d\alpha\ =0}$ 0.5pt (Ex.4.3)

La corrélation $R_x(t, t+\tau)$ est : $R_x(t,t+\tau)=E[x(t)x(t,t+\tau)]$ (Ex.4.4)

On obtient donc :

$$R_x(t,t+\tau)=\frac{r^2}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(\omega t+\alpha)\cos(\omega(t+\tau)+\alpha)d\alpha\ =\frac{r^2}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{2}\cdot[\cos(2\omega t+\omega\tau+2\alpha)+\cos(\omega\tau)]d\alpha\qquad\text{(Ex.4.5)}$$

$$\boxed{R_x(t,t+\tau)=\frac{r^2}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{2}\cdot[\cos(\omega\tau)]d\alpha=\frac{r^2}{2}\cdot\cos(\omega\tau)} \quad \text{0.5pt} \quad (Ex.4.6)$$

2. Le processus x(t) est-il stationnaire au sens large ?

Réponse :

1.0pt

La moyenne de x(t) est **constante** et sa corrélation **ne dépend** que de **τ**, donc le processus stochastique est **SSL**.

Soit un autre processus stochastique y(t) = x(t) + At où A est une variable aléatoire de moyenne nulle, de variance égale à 1 et indépendante de x(t).

3. Calculer la moyenne $m_x(t)$ et la corrélation $R_x(t, t+\tau)$ de x(t).

Réponse :

La moyenne $m_y(t)$ est :

$$\boxed{m_y(t)=E[y(t)]=E[x(t)+At]=E[x(t)]+t\cdot E[A]=0} \quad \text{0.5pt} \quad (Ex.4.7)$$

La corrélation $R_y(t, t+\tau)$ est :

$$R_y(t,t+\tau)=E[y(t)y(t+\tau)] \quad (Ex.4.8)$$

$$=E[(x(t)+At)(x(t+\tau)+A(t+\tau))] \quad (Ex.4.9)$$

$$=E[(x(t)x(t+\tau)+At\cdot x(t+\tau)+x(t)\cdot A(t+\tau)+A^2t(t+\tau))] \quad (Ex.4.10)$$

A est une **v.a indépendante** de x(t), on a donc :

$$R_y(t,t+\tau)=E[x(t)x(t+\tau)]+t\cdot E[A]\cdot E[x(t+\tau)]+(t+\tau)\cdot E[x(t)]\cdot E[A]+t(t+\tau)\cdot E[A^2] \quad (Ex.4.11)$$

Puisque **E[A]=0** et **var(A)=E[A²]=1**, on obtient :

$$R_y(t,t+\tau)=E[x(t)x(t+\tau)]+t(t+\tau)=R_x(t,t+\tau)+t(t+\tau) \quad (Ex.4.12)$$

$$\boxed{R_y(t,t+\tau)=R_x(\tau)+t(t+\tau)} \quad \text{0.5pt} \quad (Ex.4.13)$$

4. Est-ce que y(t) est stationnaire au sens large ?

Réponse :

Le processus stochastique y(t) n'est pas **SSL** car sa **fonction de corrélation dépend** de t et **τ**. 1.0pt

5. Calculer l'intercorrélation $R_{xy}(t+\tau, t)$ entre $x(t+\tau)$ et y(t)

Réponse :

La corrélation $R_{xy}(t, t+\tau)$ est :

$$R_{xy}(t+\tau,t)=E[x(t+\tau)y(t)]=E[x(t+\tau)(x(t)+At)] \quad (Ex.4.14)$$

$$=E[x(t+\tau)x(t)]+E[x(t+\tau)\cdot At] \quad (Ex.4.15)$$

$$=R_x(\tau)+t\cdot E[x(t+\tau)]\cdot E[A]=R_x(\tau) \quad (Ex.4.16)$$

$$\boxed{R_{xy}(t+\tau,t)=R_x(\tau)} \quad \text{1.0pt} \quad (Ex.4.17)$$

Exercice 5 (05 points)

On désire réaliser un filtre dérivateur à RIF ayant une caractéristique en phase linéaire par la méthode de l'échantillonnage fréquentiel sur N points. La réponse fréquentielle entre – π et + π du filtre idéal est :

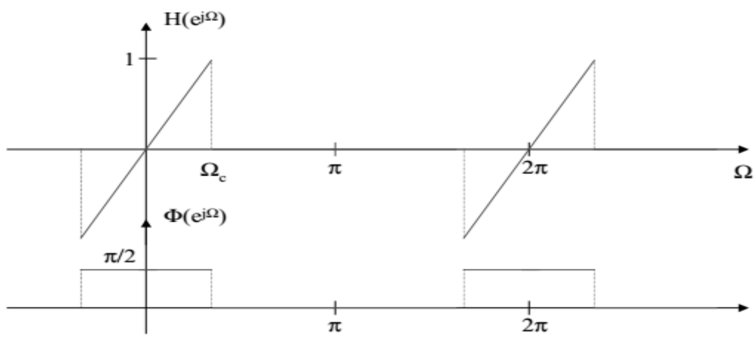
$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} j\dfrac{\Omega}{\Omega_c} & |\Omega| \le \Omega_c \\ o & \Omega_c < |\Omega| \le \pi \end{cases}$$

On fixe $\Omega_c = 6\pi/N$:

1. Dessiner le pseudo-module A(Ω) et la phase φ(Ω) de la réponse fréquentielle pour $-2\pi \le \Omega \le 2\pi$.

Réponse :

Le pseudo-module $A(\Omega) = \Omega/\Omega_c$ entre $-\Omega_c$ et Ω_c. La phase $\phi(\Omega)$ est **constante** entre $-\Omega_c$ et Ω_c et vaut $\pi/2$. Ils sont représentés dans la figure ci-dessous :



0.5pt

0.5pt

Pseudo module et phase du dérivateur

2. Donner le type de réponse impulsionnelle pouvant réaliser au mieux ce filtre RIF à phase linéaire.

Réponse :

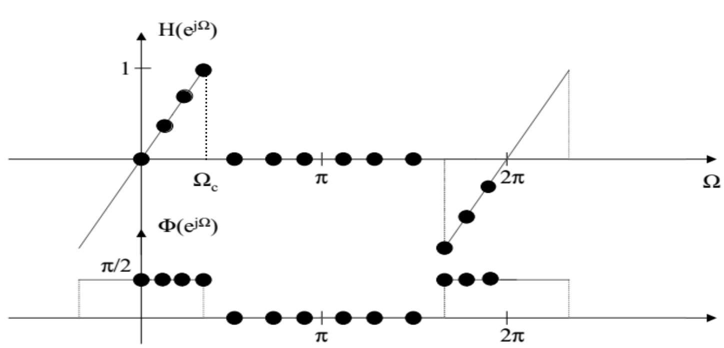
Le type de réponse permettant de réaliser au mieux ce filtre RIF à phase linéaire est le **type III** (réponse impulsionnelle antisymétrique et N impair). 0.5pt

3. On échantillonne le filtre idéal à $\Omega_e = \Omega_c/3$ pour $0 \le k\Omega_e < 2\pi$:

- **Représenter la réponse fréquentielle du filtre échantillonné $H_a(k\Omega_e)$.**

Réponse :

La réponse fréquentielle du filtre échantillonné $H_a(k\Omega_e)$ est donnée figure ci-dessous :



0.5pt

0.5pt

Pseudo module et phase du dérivateur échantillonné

- Exprimer la réponse impulsionnelle $h_a(n)$ en fonction de N.

Réponse :

La réponse impulsionnelle $h_a(n)$ pour n = 0 . . . N – 1, est :

$$h_a(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k\Omega_e)e^{j2\pi.\frac{kn}{N}} \quad \text{(Ex.5.1)}$$

$$= j\cdot\frac{1}{N}\left[\frac{1}{3}\cdot e^{j2\pi.\frac{n}{N}} + \frac{2}{3}\cdot e^{j2\pi.\frac{2n}{N}} + 1\cdot e^{j2\pi.\frac{3n}{N}} - 1\cdot e^{j2\pi.\frac{(N-3)n}{N}} - \frac{2}{3}\cdot e^{j2\pi.\frac{(N-2)n}{N}} - \frac{1}{3}\cdot e^{j2\pi.\frac{(N-1)n}{N}}\right] \quad \text{(Ex.5.2)}$$

$$= j\cdot\frac{1}{N}\left[\frac{1}{3}\cdot e^{j2\pi.\frac{n}{N}} + \frac{2}{3}\cdot e^{j4\pi.\frac{n}{N}} + 1\cdot e^{j6\pi.\frac{n}{N}} - 1\cdot e^{-j6\pi.\frac{n}{N}} - \frac{2}{3}\cdot e^{-j4\pi.\frac{n}{N}} - \frac{1}{3}\cdot e^{-j2\pi.\frac{n}{N}} - 2\cdot e^{j2\pi.n}\right] \quad \text{(Ex.5.3)}$$

$$h_a(n) = j\cdot\frac{1}{N}\left[j\cdot\frac{2}{3}\cdot\sin(2\pi.\frac{n}{N}) + j\cdot\frac{4}{3}\cdot\sin(4\pi.\frac{n}{N}) + j\cdot 2\cdot\sin(6\pi.\frac{n}{N}) - 2\right] \quad \text{(Ex.5.4)}$$

$$h_a(n) = j\cdot\frac{1}{N}\left[j\cdot\frac{2}{3}\cdot\sin(2\pi.\frac{n}{N}) + j\cdot\frac{4}{3}\cdot\sin(4\pi.\frac{n}{N}) + j\cdot 2\cdot\sin(6\pi.\frac{n}{N}) - 2\right] \quad \text{(Ex.5.5)}$$

1.0pt

$H_a(n)$ réelle, donc
$$h_a(n) = -\frac{1}{N}\left[\frac{2}{3}\cdot\sin(2\pi.\frac{n}{N}) + \frac{4}{3}\cdot\sin(4\pi.\frac{n}{N}) + 2\cdot\sin(6\pi.\frac{n}{N})\right] \quad \text{(Ex.5.6)}$$

- Calculer et dessiner $h_a(n)$ pour le cas particulier où N=7.

Réponse :

Pour N=7,
$$h_a(n) = -\frac{1}{7}\left[\frac{2}{3}\cdot\sin(2\pi.\frac{n}{7}) + \frac{4}{3}\cdot\sin(4\pi.\frac{n}{7}) + 2\cdot\sin(6\pi.\frac{n}{7})\right] \quad n=0,1,\ldots,6 \quad \text{(Ex.5.7)}$$

n	0	1	2	3	4	5	6
$h_a(n)$	0	-0.384	0.213	-0.171	0.171	-0.213	0.384

0.5pt

4. Donner l'expression de l'équation aux différences du filtre. En déduire la fonction de transfert Ha(Z) du filtre obtenu.

Réponse :

L'EDF est :

y(n)= -0.384x(n-1) +0.213x(n-2) -0.171x(n-3)+ 0.171x(n-4) -0.213x(n-5)+ 0.384x(n-6). 0.5pt

La fonction de transfert est :

$H_a(z)$= -0.384(z^{-1}- z^{-6})+ 0.213(z^{-2}- z^{-5}) -0.171(z^{-3}- z^{-47}) 0.5pt