IV Application de la transformation de Laplace :

1°) Résolution des équations différentielles ordinaires :

Exple : on considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' = y + te^t \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(y')(p) = \mathcal{L}(y + te^t) = \mathcal{L}(y)(p) + \mathcal{L}(te^t)(p).$$

avec : • $\mathcal{L}(y')(p) = p\mathcal{L}(y)(p) - y(0) = p\mathcal{L}(y)(p) + 1.$

• $\mathcal{L}(te^t)(p) = -\mathcal{L}(-te^t)(p) = -\left(\mathcal{L}(e^t)(p)\right)'$
$= -\left(\frac{1}{p-1}\right)' = \frac{1}{(p-1)^2}.$

donc $p\mathcal{L}(y)(p) + 1 = \mathcal{L}(y)(p) + \frac{1}{(p-1)^2}.$

$$\mathcal{L}(y)(p)\,(p-1) = \frac{1}{(p-1)^2} - 1 \Rightarrow \mathcal{L}(y)(p) = \frac{1}{(p-1)^3} - \frac{1}{p-1}.$$

donc :

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-1)^3}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right)$ & $\mathcal{L}(e^{at}f(t))(p) = F(p-a).$

$= e^t f(t) - e^t$ où $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^3}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p^3}\right) = \frac{1}{2}t^2 u(t)$

$= \frac{1}{2}t^2 e^t u(t) - e^t u(t)$

$= \left(\frac{1}{2}t^2 - 1\right) e^t u(t)$

→ systèmes différentiels :

Exp : on considère le système différentiel suivant :

$$(S)\ \begin{cases} x'(t) - x(t) + 2y(t) = 0 \\ x(t) - y'(t) + y(t) = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} p\mathcal{L}(x)(p) - \underbrace{x(0)}_{=1} - \mathcal{L}(x)(p) + 2\mathcal{L}(y)(p) = 0 \\ \mathcal{L}(x)(p) - p\mathcal{L}(y)(p) + \underbrace{y(0)}_{=0} + \mathcal{L}(y)(p) = 0 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} (p-1)\mathcal{L}(x)(p) + 2\mathcal{L}(y)(p) = 1 \\ \mathcal{L}(x)(p) + (1-p)\mathcal{L}(y)(p) = 0 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} [(p-1)(1-p) - 2]\,\mathcal{L}(x)(p) = (1-p) \\ [2 - (p-1)(1-p)]\,\mathcal{L}(y)(p) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (S) \begin{cases} \mathcal{L}(x)(p) = \dfrac{(1-p)}{-(p-1)^2 - 2} \\ \mathcal{L}(y)(p) = \dfrac{1}{2 + (p-1)^2} \end{cases}$$

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{L}(x)(p) = \dfrac{(p-1)}{(p-1)^2 + 2} \\ \mathcal{L}(y)(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2 + 2} \end{cases} \qquad \mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(p-a)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(p-1)}{(p-1)^2+2}\right) \Rightarrow x(t) = e^{t} f(t) \text{ où } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+2}\right) = \cos(\sqrt{2}t)\,u(t)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-1)^2+2}\right) \Rightarrow y(t) = e^{t} g(t) \text{ où } g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\,u(t)$$

donc :
$$\begin{cases} x(t) = e^{t}\cos(\sqrt{2}t)\,u(t) \\ y(t) = e^{t}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\,u(t) \end{cases}$$

→ Equations intégrales :

Exp : on cherche f, nulle pour $t<0$, telle que :

$$(E) : f(t) + \int_0^t e^{-x} f(t-x)\,dx = \cos t$$

$$(E) \Leftrightarrow f(t) + (e^{-x} * f)(t) = \cos t$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(f)(p) + \mathcal{L}(e^{-x})(p)\cdot\mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}(\cos t)(p)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(f)(p)\Big[\underbrace{1 + \frac{1}{p+1}}_{\frac{p+2}{p+1}}\Big] = \frac{p}{p^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(f)(p) = \frac{p(p+1)}{(p^2+1)(p+2)} = \frac{\alpha}{p+2} + \frac{\beta p + \gamma}{p^2+1}$$

$(p+2)\varphi\big|_{p=-2} = \alpha = \frac{2}{5}$

$\lim_{+\infty} p\varphi = \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1 - \alpha = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$\varphi(0) = 0 = \frac{\alpha}{2} + \gamma \Rightarrow \gamma = -\frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{5}$

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{p+2} + \frac{3}{5}\,\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{p^2+1}$$

$$f(t) = \left(\frac{2}{5}\,e^{-2t} + \frac{3}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t\right)u(t)$$

Exple :

on cherche à déterminer la réponse s en fonction de l'entrée pour un système du 1er ordre dont la fonct° de transfert est notée :

$$H(p) = \frac{K}{1+Tp}.$$

si l'entrée est

$$e(t) = a\,u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{a}{p}.$$

donc

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{1+Tp} \cdot \frac{a}{p} = \frac{Ka}{p(1+Tp)}$$

$$= \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1+Tp}.$$

$$\alpha = pS\big|_{p=0} = Ka.$$

$$\beta = (1+Tp)S\big|_{p=-\frac{1}{T}} = \frac{Ka}{-\frac{1}{T}} = -TKa.$$

donc

$$S(p) = \frac{Ka}{p} - \frac{TKa}{1+Tp}.$$

$$= Ka.\frac{1}{p} - \frac{Ka}{p+\frac{1}{T}}.$$

donc

$$s(t) = Ka\,u(t) - Ka.e^{-\frac{1}{T}t}\,u(t).$$

$$= Ka\left(1 - e^{-\frac{1}{T}t}\right)u(t).$$