DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE ET DES TELECOMMUNICATIONS
Licence Télécommunication S5 / Licence Electronique S5
Chargé de la matière : Mr Azeddine MEHAOUCHI

Examen

Matière : Traitement du signal

Lundi 9 janvier 2023 (Durée : 1h30m)

Exercice N°01 : *Processus aléatoires (4.5+2.5=7 pts)*

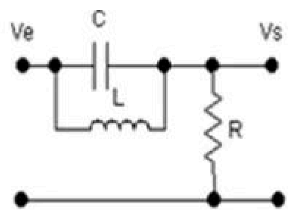
Soit le processus aléatoire :

$$y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

Où $x(t)$ est un processus aléatoire stationnaire de moyenne nulle, de fonction d'autocorrélation $R_{XX}(\tau) = \frac{\pi^2}{3}$, f_0 est un constant et θ est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$. En supposant que $x(t)$ et θ sont considérés comme indépendants.

1. Trouver la moyenne et la fonction d'autocorrélation du processus $y(t)$. Déduire la moyenne quadratique du processus. $y(t)$ est-il stationnaire au sens large (SSL) ?
2. Trouver la densité spectrale de puissance du processus $y(t)$ et représenter son graphe.

Exercice N°02 : *Filtres analogiques (4+4=8pts)*



Une tension $x(t)$ alimente un circuit RLC (filtre analogique de second ordre) représenté sur la figure ci-contre.

1. Trouver sa réponse fréquentielle, sa fonction de transfert et son équation différentielle. Quelle est sa nature (passe-bas, pas haut, ou autre) ?
2. Supposons que $\frac{1}{RC} = 3$ et $\frac{1}{LC} = 2$. Déterminer ses réponses impulsionnelle et indicielle.

Exercice N°03 : *Echantillonnage et TFTD (2.5+2.5=5pts)*

Un signal $x(t)$ présente le spectre de Fourier suivant :

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{8}\right) - tri\left(\frac{f}{4}\right)$$

1. Trouver $x(t)$ et représenter son spectre. Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimale qu'on doit utiliser pour échantillonner $x(t)$.
2. $x(t)$ est échantillonné à la fréquence $f_e = 7Hz$, donner l'expression du spectre du signal échantillonnée et représenter son graphe dans l'intervalle $[-11, \quad 11]Hz$. Conclure.

Bon courage
Chargé de la matière

Examen : Traitement du Signal

le 09/01/2023

EXERCICE N°01

1 • Soit le P.A : $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$

• $x(t)$ est PA $\mu_x = 0$ et $R_{xx}(\tau) = \pi^2/3$

• θ est V.A. uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$,

$\Rightarrow f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ 0,5 +0,5

1 • La moyenne de $y(t)$

$\mu_y(t) = E[y(t)] = E[x(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)]$ 0,5 ; x et θ sont indépendants

$= E[x(t)] \cdot E[\cos(w_0 t + \theta)] = \boxed{0}$ 0,5

1,5 • La fonction de corrélation de $y(t)$

$R_{yy}(t+\tau, t) = E[y(t+\tau)\, y(t)] = E[x(t+\tau)x(t)\cos(w_0(t+\tau)+\theta)\cos(w_0 t + \theta)]$

$= E[x(t+\tau)x(t)]\, E[\cos(w_0(t+\tau)+\theta)\cos(w_0 t+\theta)]$ 0,5

$= R_{xx}(\tau)\, E[\frac{1}{2}(\cos(w_0(2t+\tau)+2\theta) + \cos(w_0\tau))]$

$= R_{xx}(\tau)\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(w_0\tau)\,d\theta = \boxed{\frac{R_{xx}(\tau)}{2}\cos(w_0\tau)}$ 0,5

$E[\cos(w_0(2t+\tau)+2\theta)] = 0$

$\therefore \boxed{R_{yy}(\tau) = \frac{\pi^2}{6}\cos(w_0\tau)}$ 0,5

0,5 • La moyenne quadratique

$E[y^2(t)] = R_{yy}(0) = \boxed{\pi^2/6}$ 0,5

1 • Stationnarité

$\mu_y = 0 = C^{te}$

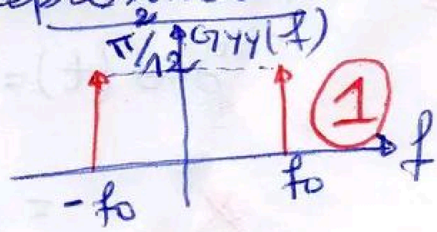
$R_{yy}(t+\tau, t) = \frac{\pi^2}{6}\cos(w_0\tau) = R_{yy}(\tau)$ 0,5 $\Rightarrow$ $y(t)$ est un PA SSL. 0,5

2 • Densité spectrale

$G_{yy}(f) = \mathcal{F}\{R_{yy}(\tau)\}$ 1

$\Rightarrow \boxed{G_{yy}(f) = \frac{\pi^2}{12}(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0))}$

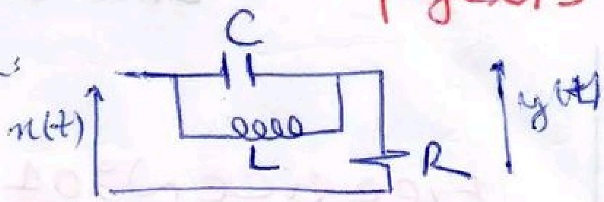
• Représentation



1

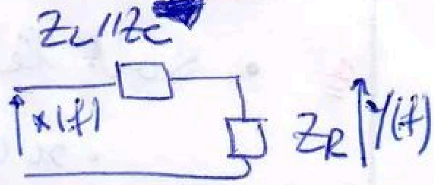
Exercice N° 02

• Soit le filtre analogique :



1 * Réponse fréquentielle

$$H(f)=\frac{Z_R}{Z_R+Z_L//Z_C}=\frac{R}{R+\frac{Lj\omega\cdot 1/jC\omega}{Lj\omega+1/jC\omega}}$$ 0,5



$$=\frac{RL(j\omega)^2+R/C}{RL(j\omega)^2+R/C+\frac{L}{C}j\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(f)=\frac{\frac{1}{LC}-\omega^2}{\frac{1}{LC}-\omega^2+\frac{1}{RC}(j\omega)}}$$ 0,5

1 * fonction de Transfert

$$H(S)=H(f)\Big|_{S=j\omega}=\boxed{\frac{S^2+1/LC}{S^2+\frac{1}{RC}S+1/LC}}$$ 0,5 0,5

1 * Équation différentielle

$$H(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{S^2+1/LC}{S^2+\frac{1}{RC}S+1/LC}\Rightarrow\left(S^2+\frac{1}{RC}S+\frac{1}{LC}\right)Y(S)=\left(S^2+1/LC\right)X(S)$$ 0,5

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}\boxed{\ddot{y}(t)+\frac{1}{RC}\dot{y}(t)+\frac{1}{LC}y(t)=\ddot{x}(t)+\frac{1}{LC}x(t)}$$ 0,5

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}\xrightarrow{\mathcal{L}}S^nY(S)$$

1 * Nature du filtre 0,5

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{S\to 0}|H(S)|=1\\ \lim\limits_{S\to\infty}|H(S)|=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$ C'est un filtre Coupe bande. 0,5

2,5 * Réponse Impulsionnelle

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(S)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S^2+2}{S^2+3S+2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S^2+2}{(S+2)(S+1)}\right\}$$ 0,5 0,5

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S^2+2+3S-3S}{(S+2)(S+1)}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{1+\left(\frac{-6}{S+2}+\frac{3}{S+1}\right)\right\}$$ 0,5 0,5

$$\therefore \boxed{h(t)=\delta(t)+\left(3e^{-t}-6e^{-2t}\right)u(t)}$$ 0,5

1 * Réponse Indicielle 0,5

$$y_{ind}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H(S)}{S}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{S^2+2}{S(S+1)(S+2)}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{S}+\frac{-3}{S+1}+\frac{3}{S+2}\right\}$$ 0,5

$$\therefore \boxed{y_{ind}(t)=\left(1-3e^{-t}+3e^{-2t}\right)u(t)}$$ 0,5

EXERCICE N°3

* Soit le spectre d'un signal $x(t)$

$$X(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{8}\right) - \mathrm{Tri}(f/4)$$

1 * signal $x(t)$

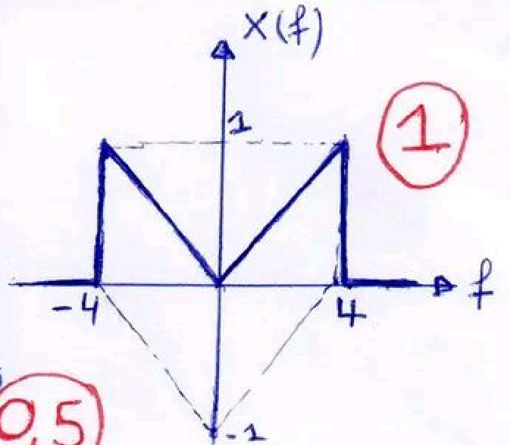
$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathrm{rect}(f/8) - \mathrm{tri}(f/4)\}$$

$$= 8\,\mathrm{Sinc}(8t) - 4\,\mathrm{Sinc}^2(4t) \quad 1$$

+0,5

$$\therefore \boxed{x(t) = \frac{\sin(8\pi t)}{\pi t} - \frac{\sin^2(4\pi t)}{4\pi^2 t^2}}$$

1 * Représentation du spectre



0,5 * fréquence d'échantillonnage

$f_m = 4\ Hz \Rightarrow fe_{min} = 2 f_m$

$\therefore fe_{min} = 8 Hz$ 0,5

* pour $fe = 7 Hz$

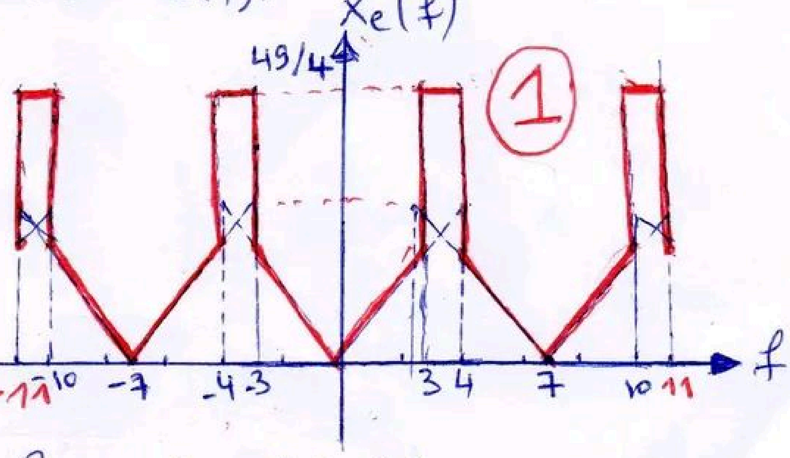
1 • Expression du spectre du $x(kTe)$

$$X_e(f) = fe \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n\,fe) \quad 0{,}5$$

0,5

$$\therefore X_e(f) = 7 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{rect}\left(\frac{f-7n}{8}\right) - \mathrm{Tri}\left(\frac{f-7n}{4}\right)\right)$$

1 • Représentation graphique du $X_e(f)$.



* Conclure

il y a un recouvrement spectrale (chevauchement), on ne peut pas récupérer le signal $x(t)$.

~~Ouargla~~ le 09/01/2023

Ouargla