TAS Rappel Math

① $x(t) \cdot \delta(t-a) = x(a) \cdot \delta(t-a)$

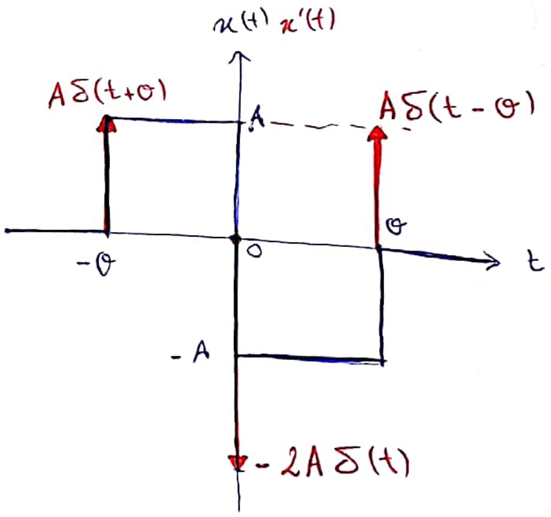
② $\int x(t) \cdot \delta(t-a) \cdot dt = x(a)$ $\qquad \int \delta(t) = 1$

③ $x(t) * \delta(t-a) = x(t-a)$

* dérivé des signaux Discontinue

$$\boxed{x'(t) = x'_c(t) + \sum_{i=1}^{N, Disc} \left[x(t_i^+) - x(t_i^-)\right] \cdot \delta(t-i)}$$

- $x(t) = \begin{cases} A & -\theta \text{ à } 0 \\ -A & 0 \text{ à } \theta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$



- $x'(t) = A\left[\delta(t+\theta) - 2\delta(t) + \delta(t-\theta)\right]$

Spectre fréquentiel ⟶ domaine temporel

* f discret ⟶ Periodique t

* f Continue ⟶ NON Periodique t

Scanned by CamScanner

SLIT — Signal linéaire invariant dans le Temps

F.N

Déf

$x(t) \to \boxed{T} \to y(t) = T.x(t)$

① linéaire

$x_1(t) \to y_1(t)$; $x_2(t) \to y_2(t)$

$$\boxed{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xrightarrow{T} \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)}$$

NON linéaire
Exemple ≠ $x(t) \Rightarrow y(t) = |x(t)|$

Exemple de SLIT

$\int \cdot dt$; $\frac{d}{dt}$

Moyenne

② invariance au temps

$$\boxed{x(t) \to y(t) \; ; \; x(t-\tau) \to y(t-\tau)}$$

Variant au temps
Exemple ≠ $x(t) \to y(t) = t\,x(t)$

Caracteristique SLIT

① Representation temporelle t

$x(t) \to \boxed{h(t)} \to y(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(\tau) \cdot x(t-\tau) \cdot d\tau$$

• equation differentielle

$$RC\,\dot{y}(t) + y(t) = x(t)$$

② Representation fréquentielle

$X(P) \to \boxed{H(P)} \to Y(P)$

$$Y(P) = X(P) \cdot H(P)$$

$$H(P) = \frac{Y(P)}{X(P)}$$ fct de Transfer

• Math Tool

$$TF^{\mathbb{R}} \equiv TL^{\mathbb{R}^+}$$

$$Y(P) = \int_{\mathbb{R}^+} y(t)\, e^{-Pt} \cdot dt$$

$-2\pi j f t$

③ Causalité

No out if No IN

④ Stabilité

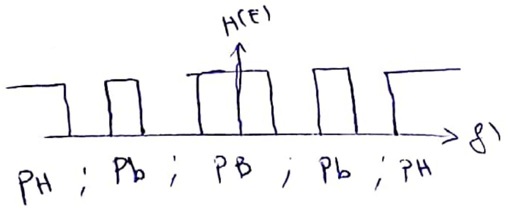
$\int_{\mathbb{R}} |h(t)| \cdot dt < +\infty$ (convergente)

• SLIT continue . F.A

① Filtre ideaux

P.B ; PH ; PB ; Cb

Filtre Analogique



• SLITD discontinue

• Caracteristique SLITD :

① Representation temporel

$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = x(n) * h(n)$

$= \int_{\mathbb{R}^+} h(\tau) \cdot x(n-\tau) \cdot d\tau$

Vue qu'il est Discret

$$\boxed{y(n) = \sum_{K=0}^{+\infty} h(K) \cdot x(n-K)} \quad \text{-- ①}$$

Causalité

$h(n) = \begin{cases} n>0 & \exists \\ n<0 & 0 \end{cases}$

Equation aux difference (Récurrence)

② $y(n) = \sum_{K=0}^{N} a_K x(n-K) + \sum_{K=1}^{M} b_K y(n-K)$

Stabilité

$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$

② Représentation fréquentiel

Math Tool

TZ

$$\boxed{TZ\big(x(n-K)\big) = X(z)\, z^{-K}}$$

TZ ①

$$Y(z) = \sum_{K=0}^{+\infty} h(K) \cdot X(z) \cdot z^{-K}$$

$$\cdot\; H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{K=0}^{+\infty} h(K) \cdot z^{-K}$$

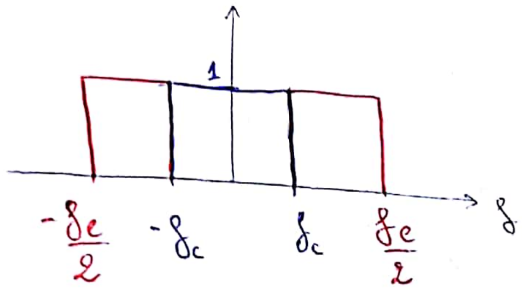
· TZ ②

$$Y(z) = \sum_{K=0}^{N} a_K\, X(z)\, z^{-K} + \sum_{K=1}^{M} b_K\, Y(z)\, z^{-K}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{K=0}^{N} a_K\, z^{-K}}{1 - \sum_{K=1}^{M} b_K\, z^{-K}}$$

Filtre idéaux Numérique

Pass haut limité par $f_e/2 = f_N$



- Classification des filtre

- FIR Repense impulsionel Finie

temps

* $y(n) = \sum_{K=0}^{N} h(K) \cdot x(n-K)$

$h(0) \ldots\ldots h(N) \xrightarrow{+\text{lien}} 0$

N ordre du filtre

Equation au difference - récurente

* $y(n) = h_0\, x(n) + h_1\, x(n-1) + \ldots\ldots + h_N\, x(n-N)$

fréquence

* $H(Z) = \sum_{K=0}^{N} h_K \cdot Z^{-K}$

FIR
- pas de poles en TZ
- $y(n)$ depend de $x(n-K)$
- Toujour STABLE (N finie)
- FIR ≠ Analogique

RII

Reponse Impulsionnel Infinie

$$y(n) = \sum_{K=0}^{\boxed{+\infty}} h(K) \cdot x(n-K)$$

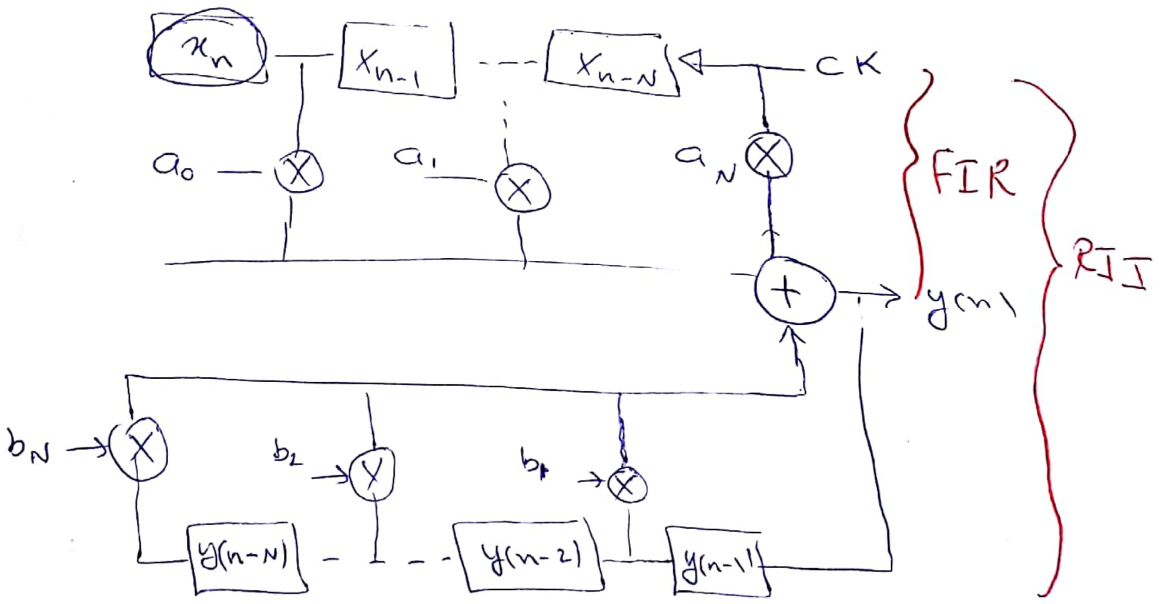
- $$y(n) = \sum_{K=0}^{N} a_K \cdot x(n-K) + \sum_{K=1}^{M} b_K \, y(n-K)$$

- $$H(z) = \frac{\sum_{K=0}^{N} a_K \, z^{-K}}{1 - \sum_{K=1}^{M} b_K \, z^{-K}}$$

Conception ⟶ FIR

- Pass bas : $S = \frac{P}{W_c}$; Pass haut $S = \frac{W_c}{P}$

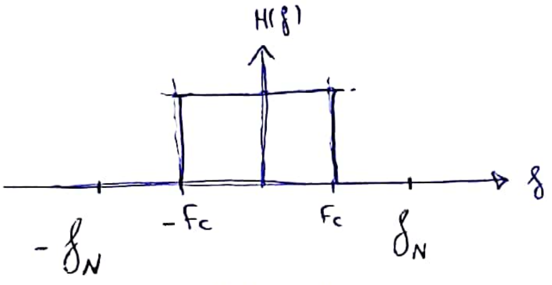
Pass bande : $\frac{P^2 + W_{c1} + W_{c2}}{(W_{c2} - W_{c1}) P}$



• Conception des Filtres numerique (FIR)

(1) 1ère Methodes: échantillonage de Réponse impulsionel

① gabarit

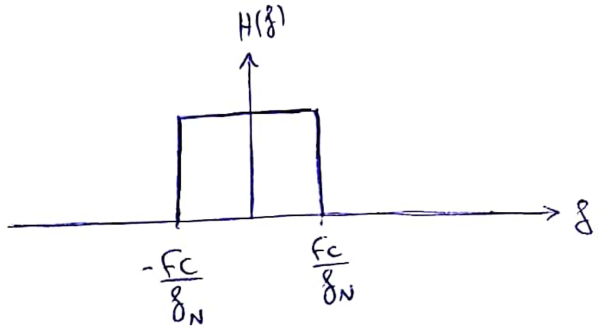


PB idéal

Cas où $f_e > 2 \cdot f_{max}$

$$f_N = \frac{f_e}{2}$$

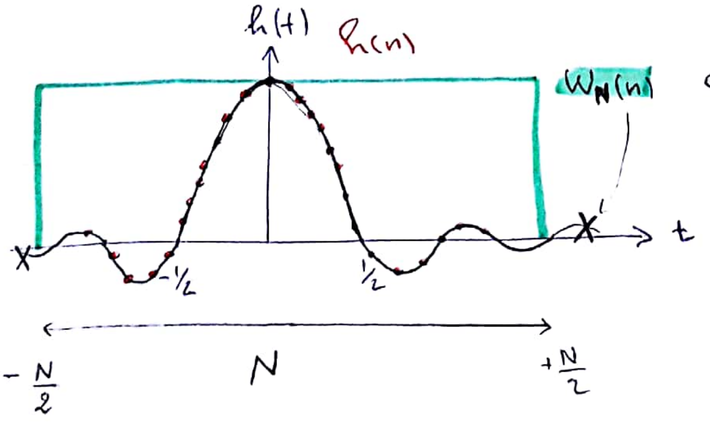
(2). Normalisation



pour normaliser on Devise par f_e ou $\frac{f_e}{2}$

on utilise → Suivant Matlab

(3) Reponse Impulsionel $h(t)$



(4) echantillonage $h(t) \to h(n)$

$h(n)$ ....

(5) Tronquage

$$h_T(n) = h(n) \cdot W_N(n)$$

fenêtre de largeur N

6 Causalité

décalage $\left(\frac{N}{2} \cdot Te\right)$

$$\frac{N}{2} Te \longrightarrow h(n) = h_T\left(n - \frac{N}{2}\right)$$

$$\Downarrow$$

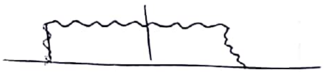
$$✱ \quad \boxed{h_{Tc}(n) = h\left(n - \frac{N}{2}\right) \cdot W_N\left(n - \frac{N}{2}\right)}$$

- $x(t) \longrightarrow x(f)$

$x(t - \frac{N}{2}) \longrightarrow e^{-2\pi f \frac{N}{2} \cdot Te} = \varphi$ phase $\longrightarrow$ <u>phase linéaire</u>

$x(t-\tau) \rightarrow e^{-2\pi f \tau}$

pas de distortion dans la sortie.

- rélent $\longrightarrow$ Tronquage pas parfait  il a des oscillation

Solution $\rightarrow$ Donc on introduit une fenêtre de pondération différente de la première pour Améliorer le filtre $\rightarrow$ fenêtre de Blackman

" de hamming

TZ(✱) $\Rightarrow$

ordre

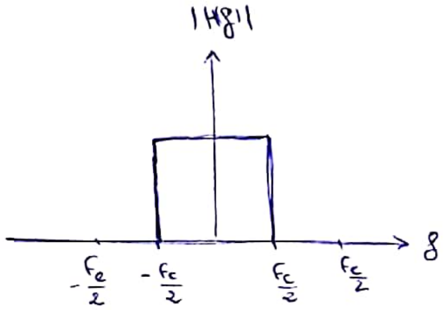
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} h_{Tc}(n) \cdot z^{-n}$$

$$[\ \_\_ + \_\_\ ] \cdot W_N\left(n - \frac{N}{2}\right)$$

1 psk <u>rectangle</u>

2) 2ème Méthode échantillonnage Réponse fréquentiel — FIR 2

- Réponse fréquentiel échantillonné
- Réponse impulsionnelle obtenue par TFD^{-1}
- Défini des gabarit personalisé (filtrage).



$$\xrightarrow[\text{Résolution fréquentiel}]{\Delta f} H(z) \xrightarrow{TFD^{-1}} h(n) = \frac{1}{N+1} \sum_{K=-\frac{N}{2}}^{N/2} H(K)\, e^{\frac{+2\pi j n K}{N+1}}$$

m N : ordre de filtre

M $N+1$: nbr de coef

$$\Delta f = \frac{f_e}{N+1}$$

- Si $x(n) \longrightarrow M$ échantillon

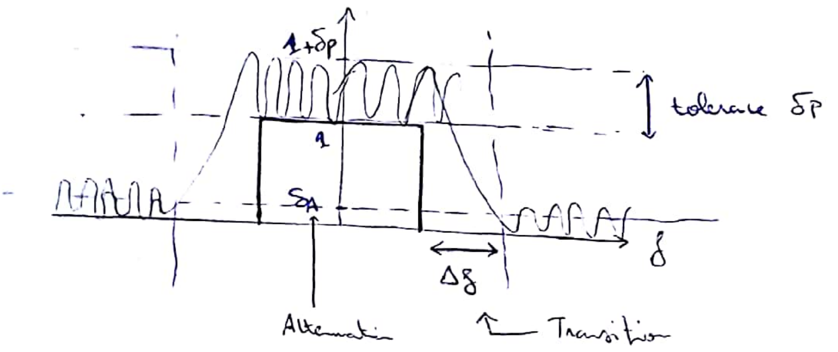
  $\downarrow TFD^{-1}$

- $$x(n) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) \cdot e^{-2\pi j n \frac{m}{M}}$$

- $$x(n) = \frac{1}{M} \sum_{n=-\frac{M}{2}}^{M/2-1} x(n) \cdot e^{+2\pi j n \frac{m}{M}}$$

- Conception des filtre numerique RII

① gabarit



② Normalisation

$$PB \Rightarrow S = \frac{P}{W_c}$$

$$PH \Rightarrow S = \frac{W_c}{P}$$

$$P.b = \frac{P^2 + W_{c2} + W_{c1}}{W_{c2} - W_{c1}}$$

- **Methode ①** Approximation par l'invariance de Repense impulsionel

on a $H(P) \} H(z)$

on fait TZ^{-1} $\{TZ^{-1}$

- on utilise décomposition en elet Simple ou ce qu'il faut pour Simplifier

$$H(P) \xrightarrow{\boxed{P = \frac{1}{Te} \ln(z)}} H(z)$$

$$\boxed{a \sum_{0}^{+\infty} (q)^n = a \frac{1}{1-q}}$$

Methode ② Approximation linéaire, Derivé

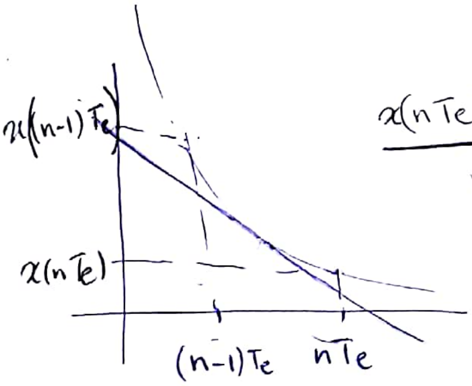
$X(P)$ $\qquad\qquad$ $Y(P) = P\,X(P)$ *

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(nT_e) = \frac{x(nT_e) - (x(n-1)T_e)}{T_e}$$

$H(Z)$

$X(Z)$ $\qquad$ $Y(Z) = \dfrac{X(Z) - X(Z)Z^{-1}}{T_e}$ **



$$\frac{x(nT_e) - x((n-1)T_e)}{nT_e - (n-1)T_e} = \frac{x(nT_e) - x((n-1)T_e)}{T_e}$$

$-$ * $\quad$ $-$ ** $\Big\}$ $\Rightarrow$ $\boxed{P = \dfrac{Y(Z)}{X(Z)} = \dfrac{1 - Z^{-1}}{T_e}}$

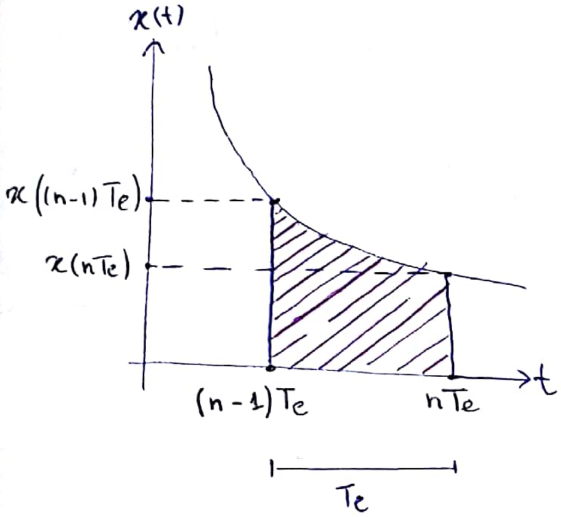
Scanned by CamScanner

Méthode ③ Approximation Bilinéaire (trapèze)

$$X(P) \qquad\qquad Y(P) = \frac{X(P)}{P}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \int x(t)\cdot dt$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$



$$(*)\quad y(nTe) - y((n-1)Te) = \frac{\big(x(nTe) + x((n-1)Te)\big)\,Te}{2}$$

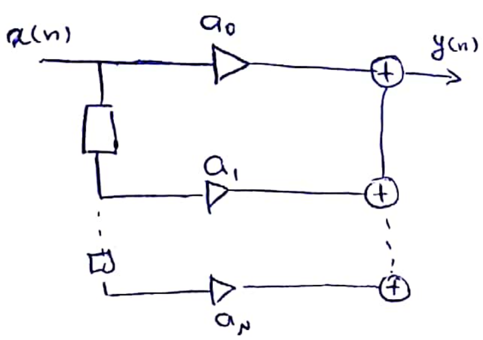
$TZ(*) \rightarrow$

$$P = \frac{X(P)}{Y(P)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\,\frac{2}{Te}$$

• Structure de FN

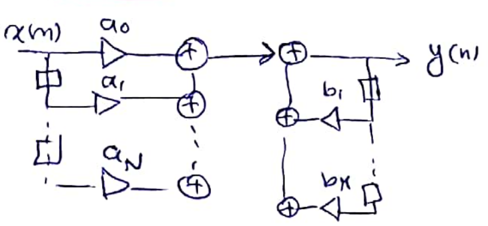
z^{-1} $\square$

FIR

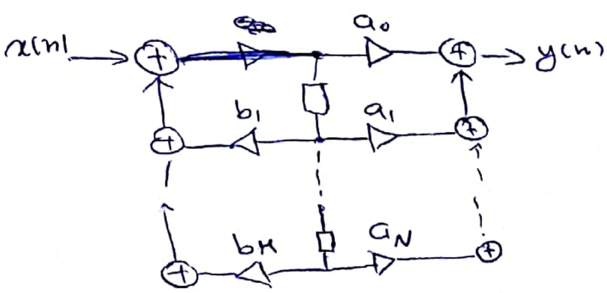


RII

Direct



Canonique



- entrée Periodique

$$x(t) = \sum C_n \, e^{+2\pi j \frac{n}{T} t} \xrightarrow{TF} x(f) = \sum C_n \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{T} \int x(t) \cdot e^{-2\pi j \frac{n}{T} \cdot t} \cdot dt}$$

- Methode des Risidue

$$y(n) = \sum \text{residues } Y(z) \cdot z^{n-1} \Big|_{z = P_i} \cdot U_{(n)}$$

$$\text{un residus} = (z - P_i) \cdot Y(z) \cdot z^{n-1} \Big|_{z = P_i}$$

- TZ

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N} h(n) \cdot z^{-n}$$

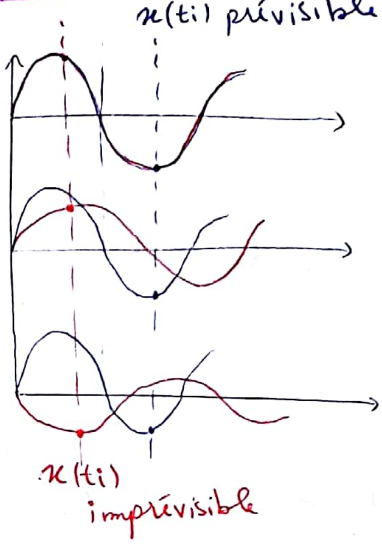
Signaux aléatoire

- dans un signal $x(t) = A \cos(2\pi f t + \varphi)$

  si A ou f ou φ n'est pas costé

- le signal est imprévisible
- a chaque aquisition le signale change
- Signale periodique peut etre Aléatoire
  Discret

  Alétoire ≠ Deterministe



- Processus Aléatoire : ensemble de realisation = experience

- Variable Aleatoire

Continue

infinité de Valeurs

Discrète

0 , 1 . . .

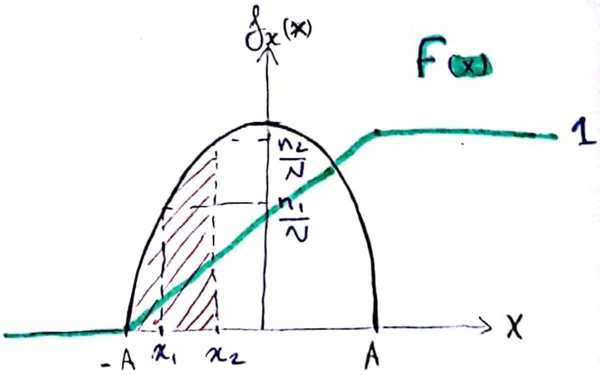
- Densité de probabilité ddp

ddp de V.a x → $f_x(x)$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

- fonction de repartition

Contie • $F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x) \cdot dx$



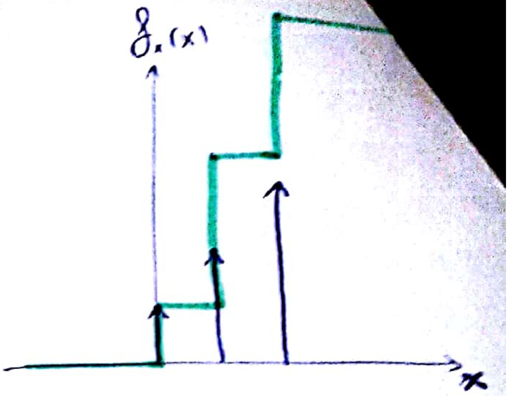
• si $P(x \leq x_2)$ → $F_x(x_2)$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x) \cdot dx = 1}$$

Cas V.a continue

F_{IR}

• Cas V.a Discrète



d.d.p $P(x) = \sum_{i=1}^{N} P(x=x_i) \cdot \delta(x-x_i)$

— $F(x) = \sum_{i=1}^{N} P(x=x_i) \cdot U(x-x_i)$

• $\sum_{i=1}^{N} P(x=x_i) = 1$ Continue ∞ Discret N

• Propriété Statistiques :

• Espérance Mathématique

V.Continue

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_x(x) \cdot dx$$

.V. Discrète

$$E(x) = \sum_i x_i P(x=x_i) = \sum_i x_i P_i$$

• Moments d'ordre N

$$m_N = E(x^N)$$

• Moments centré d'ordre N

$$\mu_N = E\left[(x - E(x))^N\right]$$

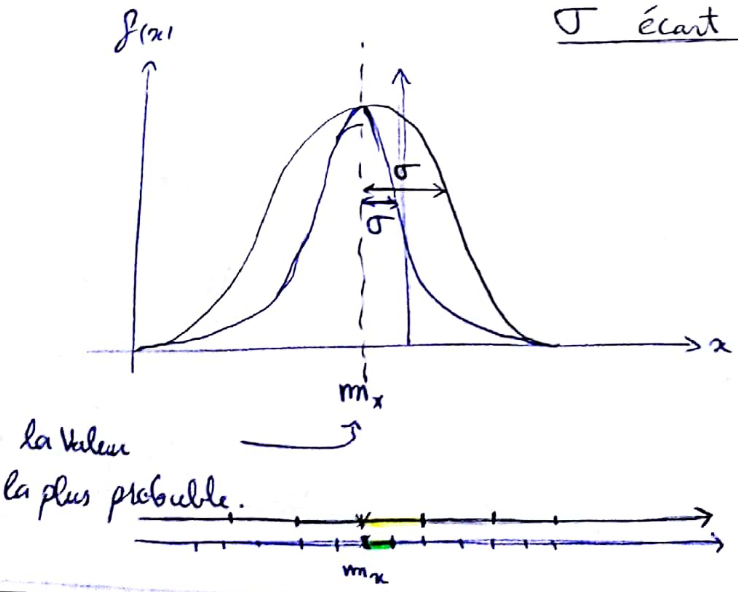
• Moyenne Statistique

$$Moy = m_1 = E(x)$$

• Variance

$$Var(x) = \sigma^2 = E[x^2] - E^2[x]$$

σ écart type



* • Var $\ll$ écart réduit.

* • Var $\gg$ écart Important

Propriété de l'operateur Espérance $E(x)$

a Dilentarde

- $\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$

$\boxed{E(a) = a}$; $\boxed{E(X+a) = E(X)+a}$; $\boxed{E(aX) = a\,E(X)}$

- Attention $E(X.Y) \neq E(X).E(Y)$

- Sauf si X et Y sont indépendant $\Rightarrow E(X.Y) = E(X).E(Y)$

- $E(X) = 0$ si X est Va centrée

- ddp Uniforme

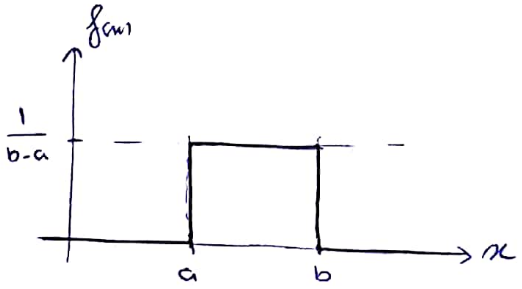
lois d'equiprobabilité

- Meme chance d'avoir V.a $[a, b]$

Continue

- $f(x) = \begin{cases} K & x \in [a,b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ $\quad \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \rightarrow \int_a^b K\,dx$

$$\boxed{K = \frac{1}{b-a}}$$



Discret

Si $P(x = x_i) = P$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{N_p} P(x = x_i) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N_p} P = 1$

$N_p P = 1$

$$\boxed{P = \frac{1}{N_p}}$$

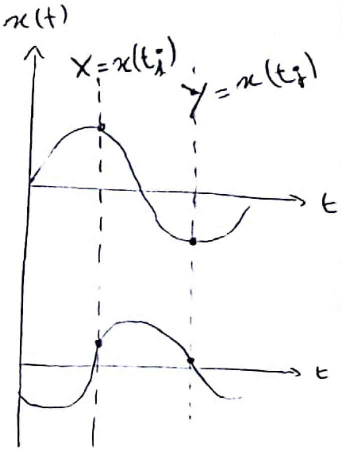
• ddp Gaussien

• on utilise la ddp Gaussien pour tout phénomène physique lorsque le nbr d'experience $N \to \infty$

Si on a $N(m_x, Var_x)$ on peut avoir f_x Gaussien
σ

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

• Processus Aléatoire à plusieurs. V.a



• Si ddp de $X \neq$ ddp de Y

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)} \Leftarrow \text{Si X et Y independant}$$

ddp conjointe

ddp Marginales

$$\boxed{f_x(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{xy}(x,y) \cdot dy}$$

$$\boxed{f_y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{xy}(x,y) \cdot dx}$$

• Autocorrelation

si deux phénomène 1 et 2, et l'un donne une information sur l'autre

corrélation

$$R_{xy}(t_i, t_j) = E(x(t_i) \cdot x(t_j))$$

- **Covariance** • Variables NON centrée

$$Cov_x = E\left[\left[x(t_i) - E(x(t_i))\right] \cdot \left[x(t_j) - E(x(t_j))\right]\right]$$

• Variable centrée

$$Cov_x = R_{xy}(t_i, t_j) - (m_{x_i} \cdot m_{x_j})$$

- **Propriété . Processus Aleatoire**

• **Notion de Stationnarité**

• Stationnaire → indépendant du temps

Si signal non Stationnaire ⟶ on peut utilisé TF

$$\begin{matrix} f_x(x, t_i) \\ f_y(x, t_j) \end{matrix} = f(x) \Leftrightarrow \text{Processus est Stationnaire au sens Strict}$$

• Stationnarité a ordre 1

$$E(x) = \text{cste}$$

• Stationnarité a ordre 2 (Sens large)

Prend tout Signe Re imaginaire

$$E(x) = \text{cste} \overset{\text{et}}{+} \sigma_x^2 = \text{cste} \overset{\text{et}}{+} R_x(t_i, t_j) = E\left(x(t_i) \cdot x^*(t_j)\right)$$

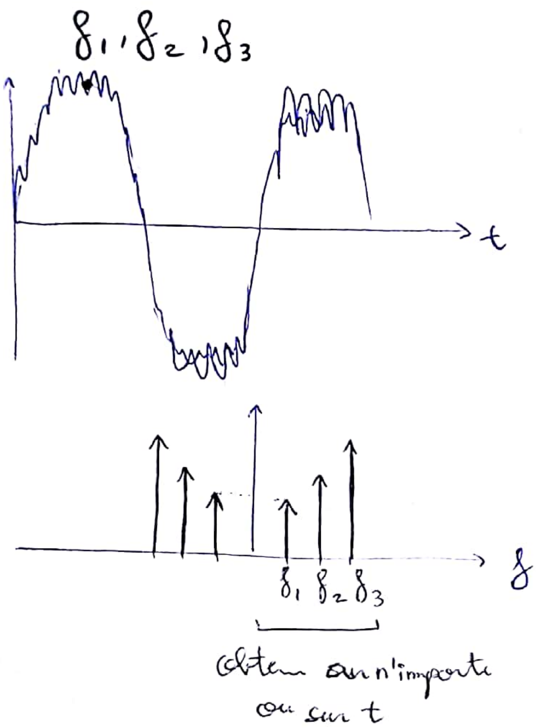
$$= f(t_j - t_i) = \underline{f(\tau)}$$

l'autocorrelation dépend que de l'intervalle qui sépare t_i et t_j (τ)

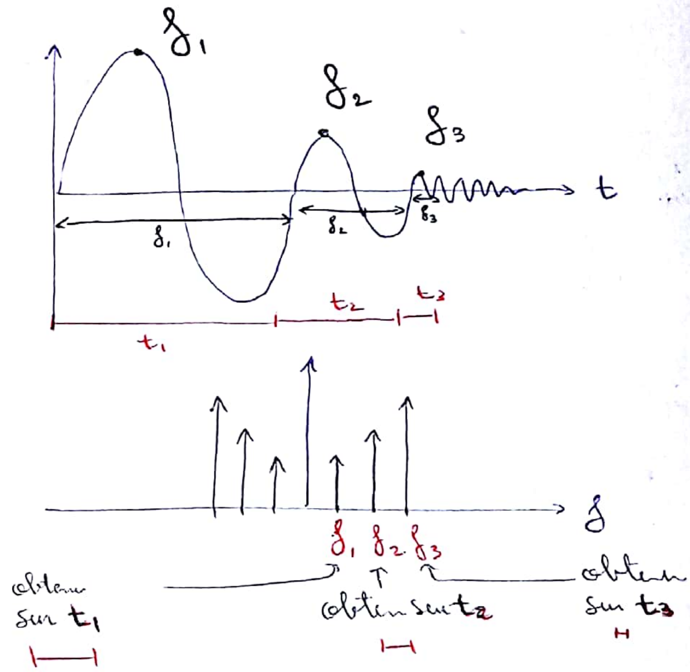
Scanned by CamScanner

• **Ergodicité**

quand Propriétés Statistiques = Propriétés temporelle.
(1 seul experience)



Signal Stationnaire



NON Stationnaire

• Un Signal Aleatoire est Stationnaire :

* Si Sa contenance fréquentielle ne change pas avec le temps

• pour un Signal NON Stationnaire, il faut le prendre pendant des durée Très petite ou la contenance en f ne change pas (Exemple : audio $t = 3\,ms$)

Station.

• $R_x(t,\tau) = E(x(t) \cdot x^*(t-\tau))$

Propriété

• $R_x(t,0) = E(x^2(t)) = \sigma_x^2 - m_x^2$

• $R_x(t,+\infty) = m_x^2$

• $x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow R_x(-\tau) = R(\tau)$

· Densité Spectrale de Puissance DSP

$$DSP \longrightarrow \boxed{S_x(f) = TF\{R_x(\tau)\}}$$

$$P_n = \int_{\mathbb{R}} S_x(f)\cdot df$$

· Bruit Blanc : (Theorique)

· il est defini a partir de la DSP.

. $S_{bb}(f) = \mu^{\text{cste}}$ (lumiere Blanche) $(\sigma^2?)$

. $R_{bb}(\tau) = TF^{-1}\{S_{bb}(\tau)\} = \mu\ \delta(\tau)$

si reduit $\frac{\mu}{\sigma^2} = 1$

· Bruit Coloré

· $S_{bc1}^{(f)} = \mu_1 \, Rect(f/B)$

$\downarrow TF^{-1}$

· $R_{bc1}^{(\tau)} = \mu_1 B \, sinc(B\tau)$

· $S_{bc2}(f) = \mu_2\left(Rect\left(\frac{f-f_0}{B}\right) + Rect\left(\frac{f+\dots}{B}\right.\right.$

$TF^{-1}\downarrow$

· $R_{bc2}(\tau) = \mu_2 \tau \ BW \sin(2\pi f_0 t) \cdot Sinc(B\tau)$

· Filtrage d'un Signal Aleatoire Stationnaire a l'ordre 2

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \qquad y(t) = x(t) * h(t)$$

$$* \cdot E(y(t)) = E\left(x(t) * h(t)\right) = E\left(\int_{\mathbb{R}} h(\tau)\cdot x(t-\tau)\cdot d\tau\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} E\left(h(\tau)\cdot x(t-\tau)\right)\cdot d\tau = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)\left(\underbrace{E\left(x(t-\tau)\right)}_{m_x}\right)\cdot d\tau$$

$$= m_x \int_{\mathbb{R}} h(\tau)\cdot d\tau$$

on a: $H(f) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)\cdot e^{-2\pi f\tau}\cdot d\tau$

$H(0) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)\cdot d\tau$

$$\boxed{E(y(t)) = m_x \cdot H(0)}$$

- $R_y(t,\tau) = E\big(y(t)\cdot y(t-\tau)\big) = E\big((x(t) * h(t)).(x(t-\tau) * h(t-\tau))\big)$

$$= E\big((x(t).x(t-\tau)) * (h(t).h(t-\tau))\big)$$

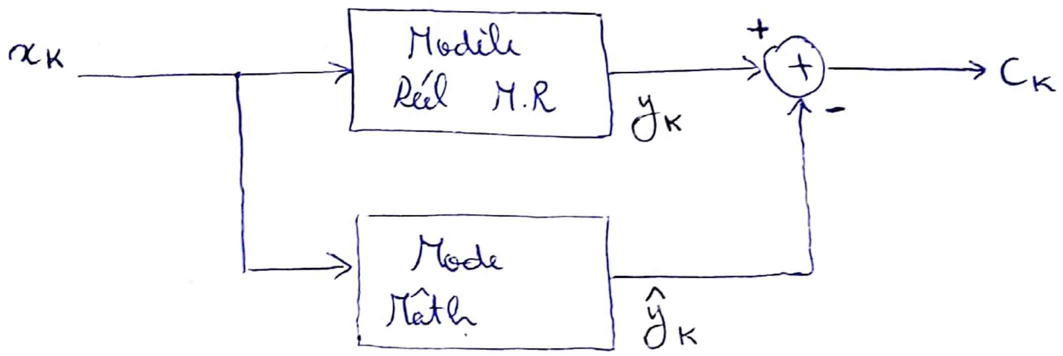
$$= \underbrace{E\big(x(t).x(t-\tau)\big)}_{R_x(\tau)} * \underbrace{E\big(h(t).h(t-\tau)\big)}_{C_n(\tau) = \int_R h(t) - h(t-\tau)\cdot d\tau}$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * C_n(\tau)$$

$$\Big\downarrow \text{TF}$$

$$S_y(f) = R_x(f) \cdot |H(f)|$$

- Filtrage Adaptatif (Separer 2 signaux Different)



Ex01

Filtrage Adaptatif

J la moyenne d'erreur

:

$$J = \frac{1}{M} \sum_{K=0}^{M-1} (y_K - \hat{y}_K)^2 \qquad \hat{y}_K = \sum_{N=0}^{N} a_N x_{K-N}$$

nbr d'essaie → M

$$\hat{y}_K = a_0 x_K + a_1 x_{K-1} + a_2 x_{K-2} + \dots$$

- $$J = \frac{1}{M} \sum_{K=0}^{M-1} \left[y_K - (a_0 x_K + a_1 x_{K-1} + a_2 x_{K-2} + \dots + \dots \right]^2$$

- on cherche a Minimiser l'erreur ; → $\frac{\partial J}{\partial x_N} = 0$ ← c'est ce qu'on veut

① $$\frac{\partial J}{\partial a_0} = -\frac{2}{M} \sum_{K=0}^{M-1} x_K \left[y_K - (a_0 x_K + a_1 x_{K-1} + a_2 x_{K-2}) \right] = 0 \qquad \boxed{(ax+b)^N = Na(ax+b)^{N-1}}$$

② $$\frac{\partial J}{\partial a_1} = -\frac{2}{M} \sum_{K=0}^{M-1} x_{K-1} \left(y_K - (a_0 x_K + a_1 x_{K-1} + a_2 x_{K-2}) \right) = 0$$

③ $$\frac{\partial J}{\partial a_2} = -\frac{2}{M} \sum_{K=0}^{M-1} x_{K-2} \left(y_K - (a_0 x_K + a_1 x_{K-1} + a_2 x_{K-2}) \right) = 0$$

① $$\frac{1}{M} \sum_{K=0}^{M-1} x_K y_K - \frac{1}{M} \sum x_K a_0 x_K - \frac{1}{M} \sum x_K a_1 x_{K-1} - \frac{1}{M} \sum x_K a_2 x_{K-2} = 0$$

$$\frac{1}{M} \sum x_K y_K = \frac{a_0}{M} \sum x_K x_K + \frac{a_1}{M} \sum x_K x_{K-1} + \frac{a_2}{M} \sum x_K x_{K-2}$$

autocorrélation

$$\varphi_{xy}(0) = a_0 \varphi_x(0) + a_1 \varphi_x(1) + a_2 \varphi(2)$$

↑ PSK les deux aK

---

② $$\varphi_{xy}(1) = a_0 \varphi_x(1) + a_1 \varphi_x(0) + a_2 \varphi(1)$$

③ $$\varphi_{xy}(2) = a_0 \varphi_x(2) + a_1 \varphi_x(1) + a_3 \varphi(0)$$

Sa donne ma Matrice

$$\begin{pmatrix} \varphi_{xy}(0) \\ \varphi_{xy}(1) \\ \varphi_{xy}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_x(0) & \varphi_x(1) & \varphi_x(2) \\ \varphi_x(1) & \varphi_x(0) & \varphi_x(1) \\ \varphi_x(2) & \varphi_x(1) & \varphi_x(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Wiener Hopf Matriciel solution.

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_{xy}(0) \\ \varphi_{xy}(1) \\ \varphi_{xy}(2) \end{pmatrix}$$

il faut trouver la Matrice inverse

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} B \quad B = (\ )^{-1} \cdot A \longrightarrow B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot A$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \end{array} B$$

on sort le determinant $\|(\ )\|$ = determinant de ( )

$\Delta = + a_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) - \sim + \sim$

$\downarrow (\ )^{-1}$

$$(\ )^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{array}{c|ccc} & + & - & + \\ \hline + & \\ - & \\ + & \end{array} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Filtrage prédictif

- $e_K = \hat{x}_K - x_K$ $\qquad \hat{x}_K = a_1 x_{K-1} + a_2 x_{K-2} + \dots$

$$J = \frac{1}{M} \sum_{K=0}^{M-1} e_K^2$$

$$= \frac{1}{M} \sum \left(-x_K + a_1 x_{K-1} + a_2 x_{K-2}\right)^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = +\frac{2}{M} \sum x_{K-1} \left(-x_K + a_1 x_{K-1} + a_2 x_{K-2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_2} = +\frac{2}{M} \sum x_{K-2} \left(-x_K + a_1 x_{K-1} + a_2 x_{K-2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{M} \sum x_{K-1} x_K = \frac{a_1}{M} \sum x_{K-1} x_{K-1} + \frac{a_2}{M} \sum x_{K-1} x_{K-2}$$

$$\varphi(1) = a_1 \varphi(0) + a_2 \varphi(1)$$

$$\frac{1}{M} \sum x_{K-2} \cdot x_K = \frac{a_1}{M} \sum x_{K-2} x_{K-1} + \frac{a_2}{M} \sum x_{K-2} x_{K-2}$$

$$\varphi(2) = a_1 \varphi(1) + a_2 \varphi(0)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(0) & \varphi(1) \\ \varphi(1) & \varphi(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$\Delta = \varphi^2(0) - \varphi^2(1)$

Weiner Hopf $\downarrow$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} \varphi(0) & -\varphi(1) \\ -\varphi(1) & \varphi(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \varphi(2) \end{pmatrix}$$

• $x_K = \cos W_0 T_e K$

on remplace par

$$r_x(N) = \frac{1}{M} \sum_{K=0}^{M-1} x_K \, x_{K-}$$

$$= \frac{1}{M} \left(x_K \cdot x_{(K-N)} \right)$$ et on remplace K avec N

et on a les r