Université de GABÈS
Ecole National d'Ingénieurs
Département de GCR

Année universitaire: 2018-2019
Section $1^{\underline{ére}}$ année GCR.
Oct 2018

Examen de Maths1

Exercice 1

1)Soit T une partie de $P(E)$ stable par réunion dénombrable, stable par passage au complementaire et telque $\emptyset \in T$.

Montrer que T est une tribu sur E.

2) Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Pour $\mathbf{A} \subset P(E)$ et $\mathbf{B} \subset P(F)$, on pose

$$f(\mathbf{A}) = \{f(A)/A \in \mathbf{A}\},\ f^{-1}(\mathbf{B}) = \{f^{-1}(B)/B \in \mathbf{B}\}.$$

3) On suppose que $\mathbf{A}$ est une tribu sur E.

a) $f(\mathbf{A})$ est-elle une tribu sur F?

b) Montrer que $\{B \subset F/f^{-1}(B) \in \mathbf{A}\}$ est une tribu sur F.

4)Montrer que si $\mathbf{B}$ est une tribu sur F alors $f^{-1}(\mathbf{B})$ est une tribu sur E.

Exercice 2

1) Donner la définition d'une fonction mesurable, d'une fonction integrable.
2) Donner la définition de l'égalité presque partoutp.p.
3) Soit (Ω, E, μ) un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}$, une fonction $(E, B_{\mathbb{R}})$ mesurable.
Montrer que la trancature:

f_A définie par $$f_A(x) = \begin{cases} -A, & \text{si } f(x) < -A, \\ f(x), & \text{si } |f(x)| \leq A. \\ A & \text{si } f(x) > -A \end{cases}$$

est mesurable.

4)a) Montrer l'inégalité de la convexité

$$Log(1-\theta) \leq \theta$$

lorsque $\theta \in [0, 1[$

b) Soit $u_n = \displaystyle\int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n cos(x)dx, \;\; n \geq 1$

Montrer que cette suite est définie, convergente et calculer sa limite.