→ { Esperence constante ⇒ Stationnaire }

→ $E(s)$ et $\bar{s}(t)$ sont confondus ⇒ ergodique

Théorie et Traitement du Signal

Série de TD N°1

1ère Année GT

Groupe Pédagogique en Traitement du Signal

Année Universitaire : 2019-2020

Ecole Nationale d'Electronique et de Télécommunication de Sfax

→ $E(s)$ et $\bar{s}(t)$ ne sont pas confons

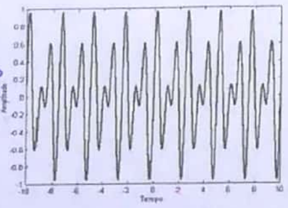
⇓

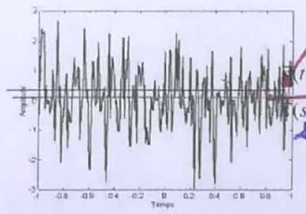
non ergodique

• Exercice 1:

Donner une classification phénoménologique des signaux suivants:

deterministe → periodique composite



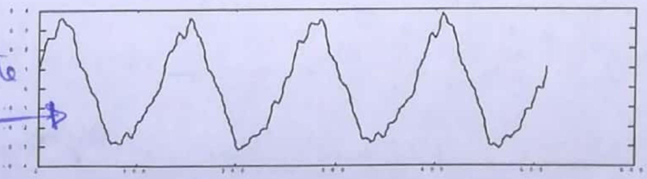


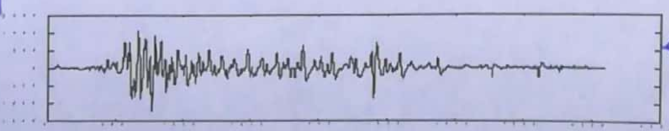
$\bar{s}(t)$

$E(s)$

aleatoire Stationnaire non ergodique

deterministe quasi periodique →





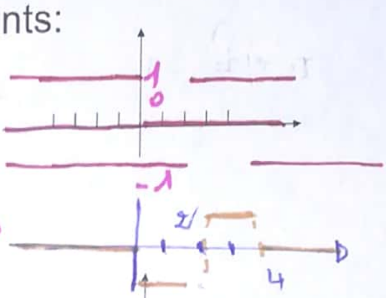
← aleatoire non Stationnaire

(changement du comportement au cours du temps)

- **Exercice 2:**

Dessiner les signaux suivants:

$$S_1(t) = \text{sgn}(t-2) + u(-t) - u(t-4)$$



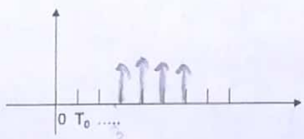
$$S_3(t) = r(t) - 2.r(t-2) + r(t-4)$$

3

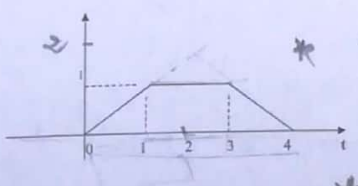
- **Exercice 3:**

Dessiner le signal suivant:

$$S_5(t) = \sum_{n=3}^{n=6} \delta(t - nT_0)$$



Déterminer l'équation analytique du signal suivant:



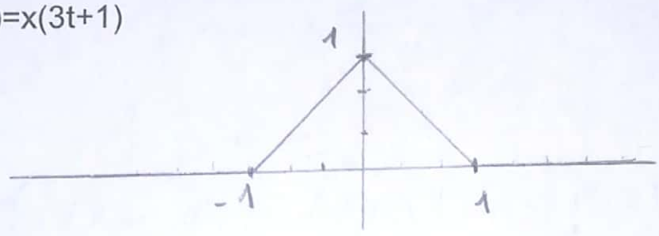
* $r(t) - r(t-1) - r(t-3) + r(t-4)$

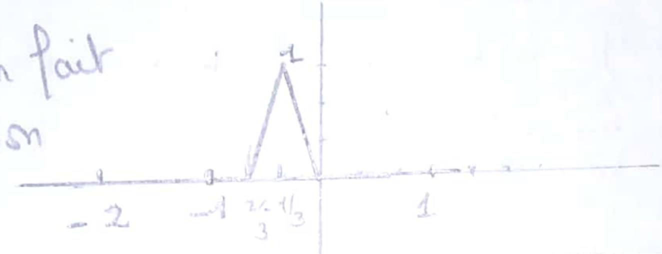
* $2\,\text{tri}\left(\frac{t-2}{2}\right) - \text{tri}\left(\frac{t-2}{1}\right)$

4

- **Exercice 4:**

Dessiner le signal x(t)=tri(t) puis représenter le signal y(t)=x(3t+1)





$\mathrm{tri}(3t+1)$

$= \mathrm{tri}(3(t+1/3))$

$= \mathrm{tri}\left(\frac{t+1/3}{1/3}\right)$

⇒ triangle de centre $-1/3$ et de largeur $2/3$

lorsque on fait une compression on divise le ancien centre pour trouver le nouveau centre

$\frac{t - \text{centre}}{}$

Exercice 5:

Trouver la période fondamentale du signal $x(t)$ suivant:

$$x(t) = \cos(13\pi t) + 2\sin(4\pi t)$$

$* \cos(x + 2k\pi) = \cos x$

$x(t) = \cos(13\pi t) + 2\sin(4\pi t)$

$* \; x(t+T) = x(t)$

$\cos(13\pi(t+T)) + 2\sin(4\pi(t+T)) = x(t)$

$*$
$$\left.\begin{array}{l} 13\pi T = 2k\pi \\ 4\pi T = 2k'\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{k}{k'} = \frac{13}{4} \Rightarrow \begin{array}{l} k = 13 \\ k' = 4 \end{array}$$

$\Rightarrow T = 2$

Rq

$\cos(13\pi t + 13\pi T) = \cos(13\pi t + 2k\pi)$

$\Leftrightarrow 13\pi T = 2k\pi$

$\sin(x) \cdot \cos(y) = 1/2 \left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$

⚠ $\Rightarrow$ signal périodique $\Rightarrow$ energie infinie
↳ on calcule directement la puissance.

Exercice 6:

Soit le signal périodique x(t) défini par :

$$x(t) = 4\sin(3\pi t)\cos(9\pi t) + 6\cos(6\pi t)$$

a) Déterminer la fréquence angulaire fondamentale ω_0 de x(t) en rad/s

b) Si on a dessiné x(t) sur l'intervalle temporel [0, 10s], sur combien de périodes le signal sera-t-il dessiné?

$x(t) = \frac{4}{2}\left(\sin(12\pi t) + \sin(-6\pi t)\right) + 6\cos(6\pi t)$

$x(t) = 2\sin(12\pi t) - 2\sin(6\pi t) + 6\cos(6\pi t)$

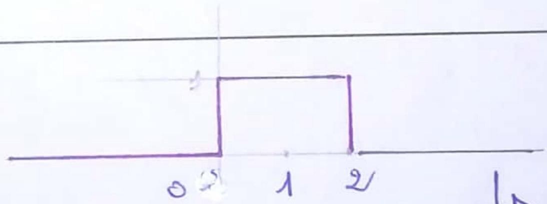
$\left.\begin{array}{l}\omega_1 = 12\pi \\ \omega_2 = \omega_3 = 6\pi\end{array}\right\} \Rightarrow \omega_0 = 6\pi \Rightarrow f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3$

$T_0 = 1/3$

7

$\Rightarrow$ nous aurons 30 période dans l'intervalle $[0, 10\,s]$

Exercice 7:



Calculer l'énergie W_x et la puissance moyenne P_x de ce signal et spécifier s'il est à énergie finie ou à puissance moyenne finie :

$$x(t) = \cos(10\pi t)u(t)u(2-t) \qquad -\infty < t < +\infty$$

↳ Lorsque on multiplie par le cos l'integ sera de 0 – 2

$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^2 |x(t)|^2 dt$

$= \int_0^2 \cos^2(10\pi t)\, dt = \int_0^2 \frac{1+\cos(20\pi t)}{2} dt$

$= 1 + \left[\frac{\sin(20\pi t)}{40\pi}\right]_0^2 = 1$

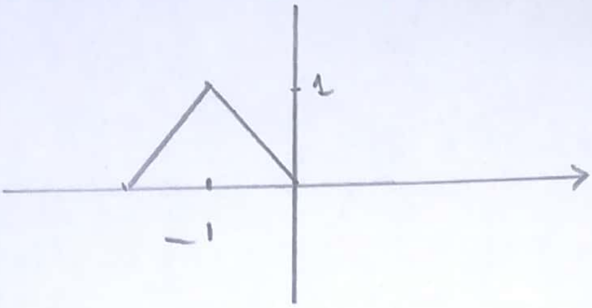
8

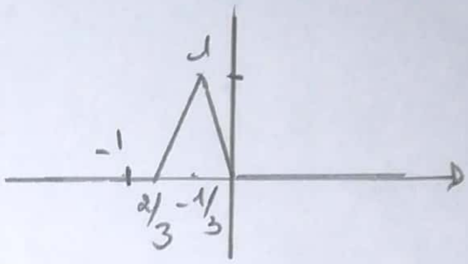
$\Rightarrow P = 0$: signal à energie finie

Exercice 48

translation $\Rightarrow$ puis compression

2ème méthode



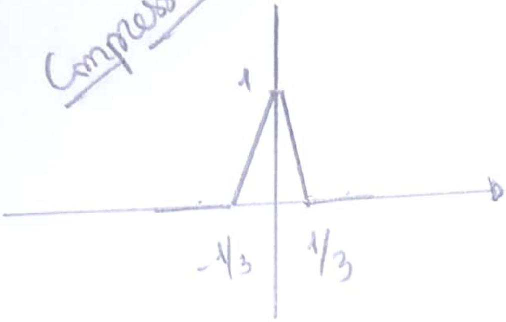


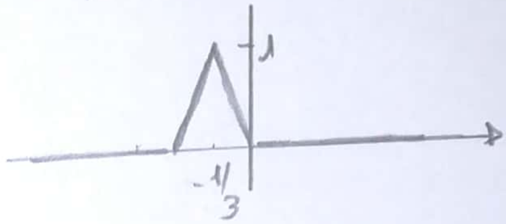
$x(t+1)$

$\hookrightarrow x(3t)$

3ème méthode

Compression $\Rightarrow$ puis translation

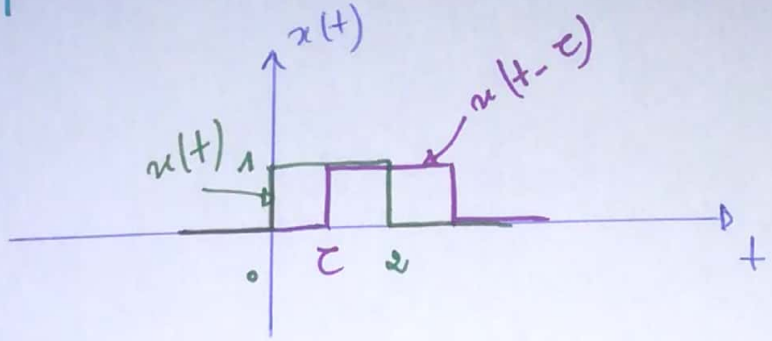




$x(3t+1)$

$= x(3(t+1/3))$

Exemple :



signal à energie finie (limité dans le temps avec amplitude finie)

$$C_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \underbrace{x(t-\tau)}_{\text{signal réel}} \, dt \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

si $\tau \geq 0$

1er cas : $\tau \in [0, 2]$

$$C_x(\tau) = \int_{\tau}^{2} 1 \cdot dt = 2 - \tau$$

2ème cas : si $\tau \geq 2$.

$C_x(\tau) = 0$.

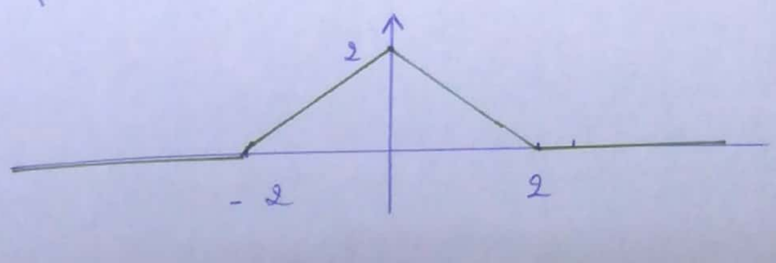
si $\tau \leq 0$

$C_x(\tau) = C_x(-\tau)$ car $x(t)$ est Réel

si $\tau \in [-2, 0] \Rightarrow C_x(\tau) = 2 + \tau$

si $\tau \leq -2$ $\quad C_x(\tau) = 0$.

↳



Théorie et Traitement du Signal

Série de TD N°2

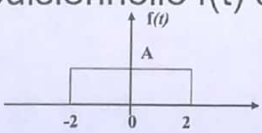
1$^{\text{ère}}$ Année GT

Groupe Pédagogique en Traitement du Signal

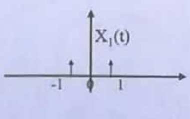
Année Universitaire : 2019-2020
Ecole Nationale d'Electronique et de Télécommunications de Sfax

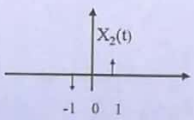
Exercice 1

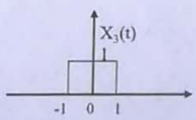
- Soit un système linéaire caractérisé par sa réponse impulsionnelle f(t) suivante :



Déterminer la sortie y(t) correspondante aux entrées suivantes :



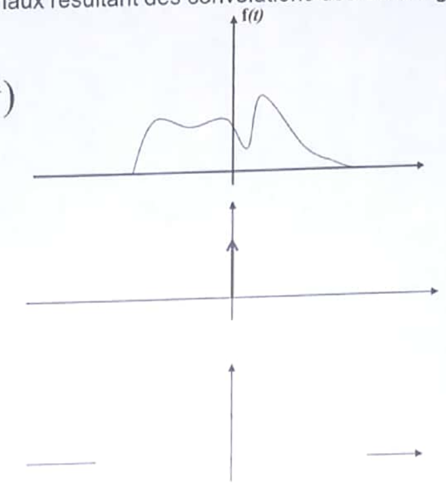




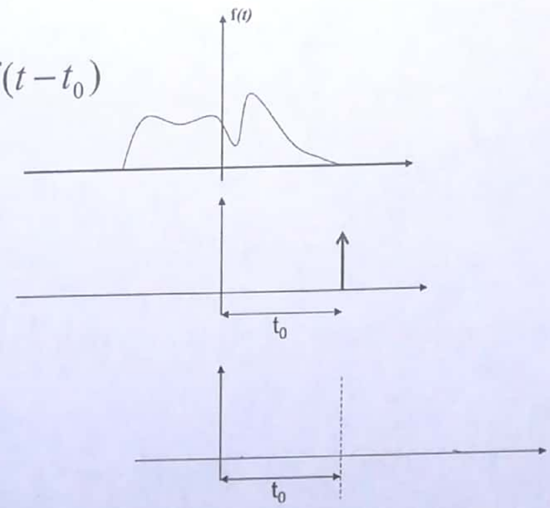
Exercice 2

Tracer les signaux résultant des convolutions des deux signaux suivants :

$$x(t) * \delta(t)$$

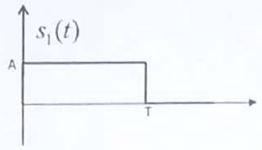


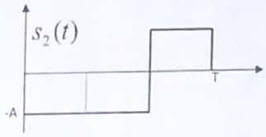
$$x(t) * \delta(t - t_0)$$



Exercice 3 :

Le principe d'un radar consiste à émettre un signal *s(t)* de courte durée qui, réfléchi par la cible, revient à l'émetteur après une durée t_0 proportionnelle à la distance de l'émetteur à la cible.
En négligeant le bruit, on peut modéliser le signal reçu *x(t)* comme une version retardée de *s(t)* affaiblie par un coefficient α .
1) Montrer que la fonction d'intercorrélation $\varphi_{xs}(\tau)$ des signaux *x(t)* et *s(t)* est maximale pour $\tau = t_0$.
2) Soient les deux signaux de courtes durées $s_1(t)$ et $s_2(t)$ représentés ci-dessous :

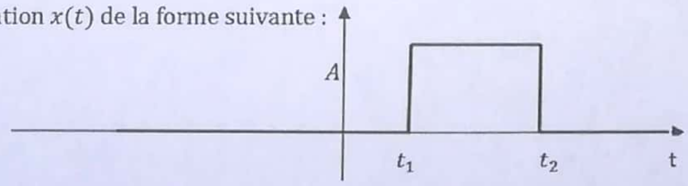




a) Calculer l'énergie totale de $s_1(t)$ et $s_2(t)$. De quel type de signaux s'agit-il ?
b) Déterminer pour chacun des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ la fonction $\varphi_{xs}(\tau)$ définie précédemment. Vérifier que le maximum est situé pour $\tau = t_0$.

Exercice 4 :

Soit un système linéaire invariant dans le temps de réponse impulsionnelle $h(t) = e^{-\alpha t}u(t)$, avec $\alpha > 0$ un paramètre constant. Calculer la réponse du système à une excitation $x(t)$ de la forme suivante :



Exercice 5 :

Calculer le produit de convolution des signaux suivants :

1) $x(t) = rect\left(\frac{t}{2}\right)$ et $y(t) = 2\,rect\left(\frac{t}{4}\right)$

2) $x(t) = sinc(t)$ et $y(t) = \delta(t-2) - \delta(t+2)$

3) $x(t) = tri(t)$ et $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$

4) $x(t) = e^{-at}u(t)$ et $y(t) = e^{-bt}u(t)$, où a et b sont des constantes strictement positives

Exercice 6 :

Calculer le produit de convolution des signaux suivants:

1. y(t)=u(t)*u(t)
2. y(t)=u(t)*tu(t)

Traitement de Signal

Série de TD N°3

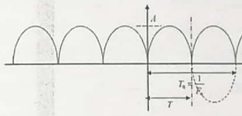
1ère Année GT

Groupe pédagogique en Traitement du Signal

Ecole Nationale d'Électronique et de Télécommunications de Sfax

- **Exercice 1:**
  Soit le signal s(t) sinusoïdal redressé double alternance défini par la fonction: $s(t) = A\left|\sin(2\pi.F_0.t)\right|$

  Où F_0 est la fréquence du signal sinusoïdal avant redressement

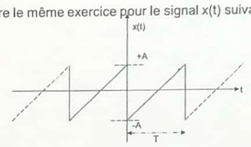


$s(t) = A.\sin(2\pi.F_0.t)$

1) Calculer les composantes d_c, a_n et b_n de la décomposition en série de Fourier du signal *s*(t) en fonction de l'amplitude A et de la période T.
2) Déterminer la représentation complexe de la décomposition en série de Fourier de *s*(t), et en déduire la représentation graphique de son spectre d'amplitude.
3) Calculer l'énergie et la puissance moyenne du signal sur une période.

Exercice 2:

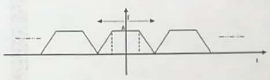
Refaire le même exercice pour le signal x(t) suivant:



1) Calculer les composantes d_c, a_n et b_n de la décomposition en série de Fourier du signal *s*(t) en fonction de l'amplitude A et de la période T.
2) Déterminer la représentation complexe de la décomposition en série de Fourier de x(t), et en déduire la représentation graphique de son spectre d'amplitude.
3) Calculer l'énergie et la puissance moyenne du signal sur une période.

Exercice 3

On considère le signal périodique s(t) représenté ci-dessous :



1) Déterminer les équations mathématiques du signal s(t) sur une période T
2) Calculer la puissance moyenne du signal sur une période T.
3) Déterminer les composantes $a_0/2$, a_n et b_n de la décomposition en série de Fourier de s(t) en fonction de A et T.
4) Déduire la forme complexe de cette décomposition.
5) Représentant pour certaine valeur de n le spectre d'amplitude

Scanned by CamScanner

• Exercice 4:

Soit le signal exponentielle double défini par: $s(t) = e^{-2|t|}$ pour tout instant t.

1) Calculer sa transformée de Fourier et représenter graphiquement son spectre.
2) En déduire les expressions des TF des signaux suivants:
   - $x_1(t) = s(t-1)$
   - $x_2(t) = s(t).e^{j\pi t}$
   - $x_3(t) = s(3.t)$

TD 3 :

Ex 1 :

1) $s(t)$ est périodique de période $T = \frac{T_0}{2} = \frac{1}{2F_0}$

signal pair $\Rightarrow b_n = 0$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n F t) \quad \text{avec } F = \frac{1}{T}$$

signal pair

$$\bullet \ \frac{a_0}{2} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} s(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A \sin(2\pi F_0 t)\,dt$$

$$= \frac{2A}{T}\left[\frac{-\cos(2\pi F_0 t)}{2\pi F_0}\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{2A}{\pi}\left(-\cos(\pi F_0 T) + 1\right)$$

$$= \frac{2A}{\pi}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2A}{\pi} \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{4A}{\pi}}$$

$$\bullet \ a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(2\pi n F t)\,dt = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A \sin(2\pi F_0 t)\cos(2\pi n F t)\,dt$$

or $\cos a . \sin b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$

$$\Rightarrow a_n = \frac{4A}{2T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(2\pi(F_0 + nF)t) + \sin(2\pi(F_0 - nF)t)\,dt \qquad (F = 2F_0)$$

$$= \frac{2A}{T}\left[\frac{-\cos(2\pi F_0(1+2n)t)}{2F_0\pi(1+2n)} - \frac{\cos(2\pi F_0(1-2n)t)}{2F_0\pi(1-2n)}\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{2A}{T}\left[\left(\frac{-\cos(2\pi F_0(1-2n)\frac{T}{2})}{2\pi F_0(1-2n)} - \frac{\cos(2\pi F_0(1+2n)\frac{T}{2})}{2\pi F_0(1+2n)}\right)\right.$$

$$\left. - \left(-\frac{1}{2F_0\pi(1+2n)} - \frac{1}{2\pi F_0(1-2n)}\right)\right]$$

$$= \frac{2A}{\pi}\left(\cancel{\frac{\cos(\frac{\pi}{2}(1-2n))}{\pi(1-2n)}} + \cancel{\frac{\cos(\frac{\pi}{2}(1+2n))}{\pi(1+2n)}} + \left(\frac{1}{\pi(1+2n)} + \frac{1}{\pi(1-2n)}\right)\right)$$

$$= \frac{2A}{\pi}\left(\frac{2}{1-4n^2}\right) = \frac{4A}{\pi(1-4n^2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = \frac{4A}{\pi(1-4n^2)}}$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{2A}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi(1-4n^2)} \cos(2\pi n f t)$$

2) $S_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{2A}{\pi}$

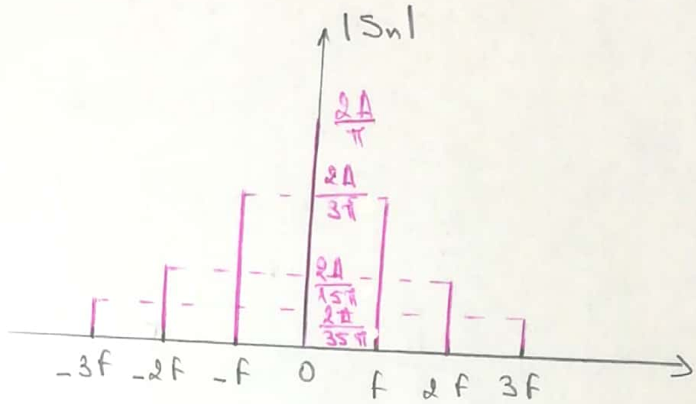
$$S_n = \frac{a_n - j b_n}{2} = \frac{2A}{\pi(1-4n^2)}$$

$$S_{-n} = \frac{a_n + j b_n}{2} = S_n$$

$$|S_{\pm 1}| = \frac{2A}{3\pi}$$

$$|S_{\pm 2}| = \frac{2A}{15\pi}$$

$$|S_{\pm 3}| = \frac{2A}{35\pi}$$



3) $P_s = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 \, dt$

$$E_s = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 \, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \sin^2(2\pi f_0 t) \, dt$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A^2 \, \frac{1-\cos(4\pi f_0 t)}{2} \, dt$$

$$= \frac{A^2}{2}\left(T - \left[\sin(4\pi f_0 t)\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\right) = \boxed{\frac{A^2 T}{2} = E_s}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_s = \frac{E_s}{T} = \frac{A^2}{2}}$$

Ex 2 :

signal impair $\Rightarrow \begin{cases} \frac{a_0}{2} = 0 \\ a_n = 0 \end{cases}$

• $s(t) = at + b$

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2A}{T} \Rightarrow \frac{2A}{T} \cdot T + b = A \Rightarrow b = A - 2A = -A \Rightarrow s(t) = \frac{2A}{T} t - A$

• $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t) \sin(2\pi n f_0 t) \, dt = \frac{2}{T}\int_0^T \left(\frac{2A}{T} t - A\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$

$$\begin{cases} u = \frac{2A}{T} t - A \longrightarrow u' = \frac{2A}{T} \\ v' = \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \longrightarrow v = -\frac{T}{2\pi n} \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{T}\left[\left(\frac{2At}{T} - A\right)\left(-\frac{T}{2\pi n}\right)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\right]_0^T + \frac{A}{\pi n}\int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[(2A - A)\left(-\frac{T}{2\pi n}\right) - \left(-A\left(-\frac{T}{2\pi n}\right)\right)\right] + \frac{A}{\pi n}\,\frac{T}{2\pi n}\cancel{\left[\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)\right]_0^T}$$

$$= -\frac{2A}{\pi n}$$

TD4

Exercice 1 :

On considère le signal $x(t) = A.rect\left(\frac{t}{T}\right)$

1) Calculer la transformée de Fourier $X(f)$ du signal $x(t)$.

2) Déterminer sa densité spectrale d'énergie $\Phi_x(f)$.

3) Déduire la valeur de son énergie totale E_x

4) Soit le signal $y(t)$ défini par :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-2kT)$$

a. Représenter graphiquement le signal $y(t)$ dans l'intervalle [-5T,5T] et préciser, sans calcul, sa classe énergétique.

b. Calculer l'autocorrélation $C_y(\tau)$ de $y(t)$, pour tout $\tau \in [0,T]$, puis tracer, pour tout $\tau \in IR$ la courbe de $C_y(\tau)$.

c. Déterminer la décomposition en série de Fourier complexe de $y(t)$.

d. Déduire la décomposition en série de Fourier de $C_y(\tau)$.

e. Donner l'expression de la densité spectrale de puissance $\Phi_y(f)$ de $y(t)$ et tracer son spectre de puissance pour tout $|n| \leq 3$.

Exercice 2 :

I/ Soit le signal $x(t) = sin(2\pi t - \alpha)$

1) Déterminer l'expression du spectre $X(f)$ de $x(t)$.

2) Tracer les spectres d'amplitudes et de phase de $x(t)$ pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$

3) Calculer la fonction d'autocorrélation $C_x(\tau)$ de $x(t)$ de deux manières différentes

(on donne : $\sin a \ sin\, b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$)

II/ Dans la suite de l'exercice, on pose $\alpha = 0$ et on définit le signal $y(t) = 3 + 2cos(2\pi t)$

1) Calculer l'intercorrelation $C_{xy}(\tau)$ de $x(t)$ et $y(t)$

2) Déduire la densité interspectrale $\Phi_{xy}(f)$ de $x(t)$ et $y(t)$

III/ Soit le signal défini par : $z(t) = x(t) + y(t)$

1) Donner, sans calcul, les coefficients $\frac{a_0}{2}, a_n et\ b_n$ de la décomposition en série de Fourier de $z(t)$.

2) Déduire les coefficients de la décomposition en série de Fourier complexes de $z(t)$.

3) Donner l'expression et représenter graphiquement la densité spectrale de puissance du signal $z(t)$.

4) Calculer la puissance moyenne P_z du signal $z(t)$.

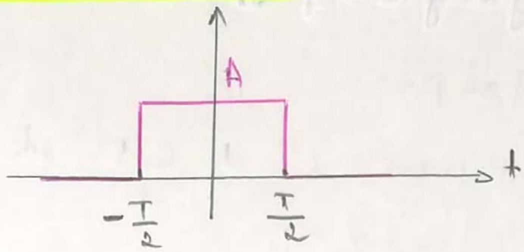
Exercice 3

Soit le signal x(t) défini par l'équation mathématique suivante :

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}\, u(t) \ ;\ \alpha > 0$$

1) Montrer que $x(t)$ est un signal d'énergie finie et calculer son énergie E_x
2) Calculer la fonction d'auto-corrélation $\varphi_x(\tau)$ et retrouver la valeur de E_x à partir de $C_x(\tau)$
3) Calculer la densité spectrale d'énergie $S_x(f)$ du signal et retrouver la valeur de E_xà partir de $S_x(f)$
4) Calculer l'énergie du signal contenue dans la bande de fréquences $\left[\frac{-\alpha}{2\pi}, \frac{\alpha}{2\pi}\right]$.

TD N 4:



Ex 1:

1) $x(t) = A \, rect\left(\frac{t}{T}\right)$

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-j2\pi f t} \, dt$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \; e^{-j2\pi f t} \, dt$$

$$= \frac{A}{-j2\pi f} \left[e^{-j2\pi f t} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{A}{-j2\pi f} \left(e^{-j\pi f T} - e^{j\pi f T} \right)$$

$$= \frac{A \, T}{\pi f \, T} \sin(\pi f T) = A T \, sinc(f T)$$

$$\boxed{sin_c(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}}$$

2) $x(t)$ est à énergie finie car il est bornée en amplitude et en temps

$$\Phi_x(f) = |X(f)|^2 = A^2 T^2 sin_c^2(f.T)$$

3) $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) \, df$

$$\boxed{Rq : \int_{-\infty}^{+\infty} sin_c^2(t) \, dt = 1}$$

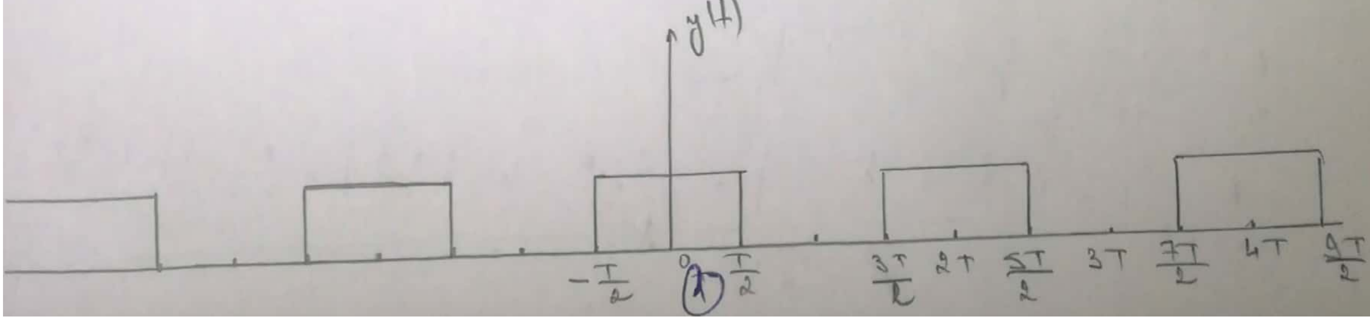
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 T^2 sin_c^2(f.T) \, df$$

On pose $X = f T \Rightarrow dX = T \, df$

$$\Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2 T^2}{T} sin_c^2(X) \, dX = A^2 T \times 1$$

4) $y(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} x(t - 2KT)$

$$= x(t) + x(t-2T) + x(t+2T) + \dots$$



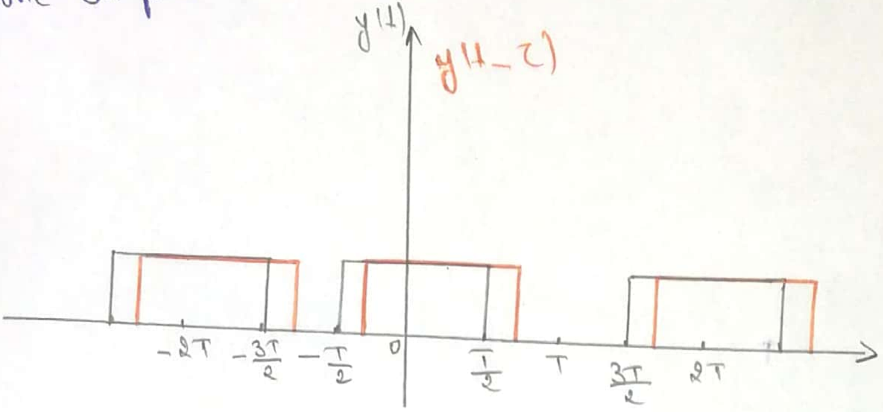
signal périodique de période $2T$ ⇒ signal à PMF

b)

$y(t)$ est réel ⇒ $C_y(\tau)$ est pair

et $y(t)$ est périodique de période $2T$ donc $C_y(\tau)$ est aussi périodique de même période $2T$

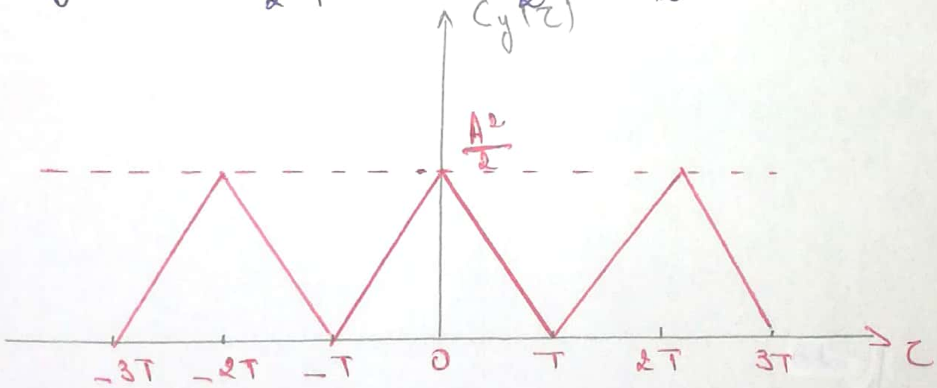
donc on peut étudier τ sur $[0, T]$



$$C_y(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{2T} y(t)\, y(t-\tau)\, dt$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{2}} y(t)\, y(t-\tau)\, dt = \frac{1}{2T}\int_{-\frac{T}{2}+\tau}^{\frac{T}{2}} A^2\, dt = \frac{A^2}{2T}\left[\frac{T}{2} + \frac{T}{2} - \tau\right]$$

$$\Rightarrow C_y(\tau) = \frac{(T-\tau)A^2}{2T} = \frac{A^2}{2} - \frac{\tau A^2}{2T}$$



c) $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n\, e^{j2\pi n f_0 t}$ avec $f_0 = \frac{1}{2T}$

avec $y_n = \frac{1}{2T}\int_{2T} y(t)\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\, e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt$$

$$= \frac{A}{2T}\,\frac{1}{-j2\pi n f_0}\left[e^{-j2\pi n f_0 t}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{A}{-j2\pi n}\left(e^{-j\frac{\pi n}{2}} - e^{j\frac{\pi n}{2}}\right) = \frac{-2jA}{-j2\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{A}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

avec $sinc(n) = \frac{\sin(\pi n)}{\pi n}$

$\Rightarrow y_n = \frac{2A}{2\pi n} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{A}{2} sinc\left(\frac{n}{2}\right) \quad \forall n \neq 0$

• Si $n = 0 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \, dt = \frac{A}{2}$

$\Rightarrow \forall n, \; y_n = \frac{A}{2} sinc\left(\frac{n}{2}\right)$

d) $C_y(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |y_n|^2 e^{j 2\pi n f_0 \tau}$ avec $f_0 = \frac{1}{2T}$

$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{4} sinc^2\left(\frac{n}{2}\right) e^{j 2\pi n f_0 \tau}$

e) $\Phi_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y_n|^2 \delta(f - n f_0)$

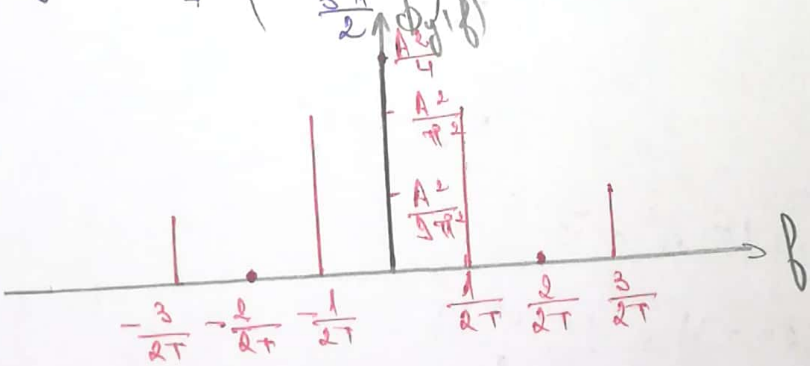
$= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2}{4} sinc^2\left(\frac{n}{2}\right) \delta(f - n f_0)$

$|y_0|^2 = \frac{A^2}{4}$

$|y_1|^2 = |y_{-1}|^2 = \frac{A^2}{4} sinc^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{A^2}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \frac{A^2}{\pi^2}$

$|y_2|^2 = |y_{-2}|^2 = \frac{A^2}{4} sinc^2(1) = 0$

$|y_3|^2 = |y_{-3}|^2 = \frac{A^2}{4} \left(\frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}}\right)^2 = \frac{A^2}{4} \times \frac{4}{\pi^2 9} = \frac{A^2}{9\pi^2}$



Ex 2 :

$x(t) = \sin(2\pi t - \alpha)$: $f_0 = 1$

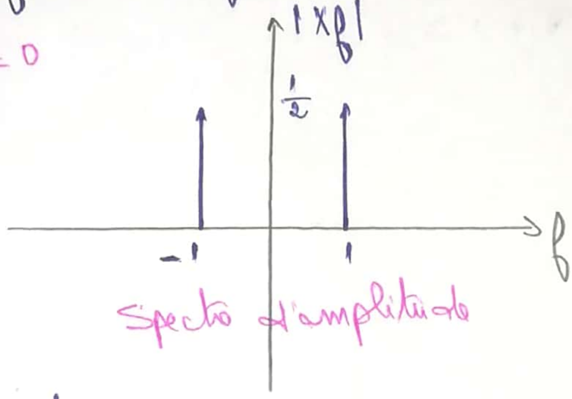
$= \frac{e^{j(2\pi t - \alpha)} - e^{-j(2\pi t - \alpha)}}{2j}$

$= \left(\frac{e^{-j\alpha}}{2j}\right) e^{j 2\pi t} - \left(\frac{e^{j\alpha}}{2j}\right) e^{-j 2\pi t}$

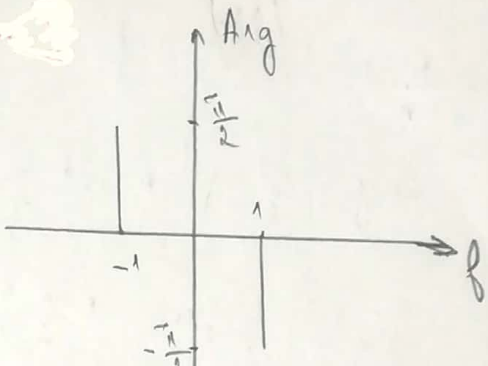
$= X_1 e^{j 2\pi t} + X_{-1} e^{-j 2\pi t}$

$\Rightarrow X(f) = X_1\,\delta(f-1) + X_{-1}\,\delta(f+1)$

② $\alpha = 0$



Spectre d'amplitude



Spectre de phase

$|X_1| = \frac{1}{2}$

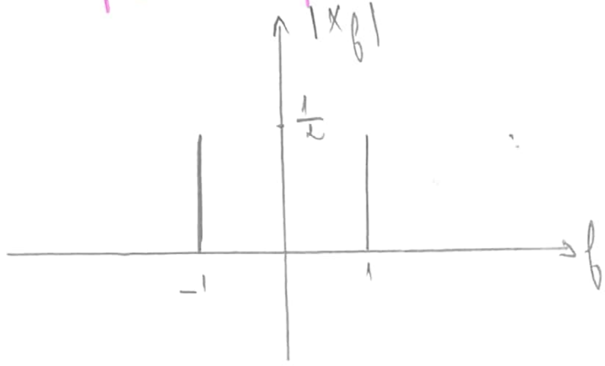
$|X_{-1}| = \frac{1}{2}$

$X_1 = \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $j \to e^{j\frac{\pi}{2}}$

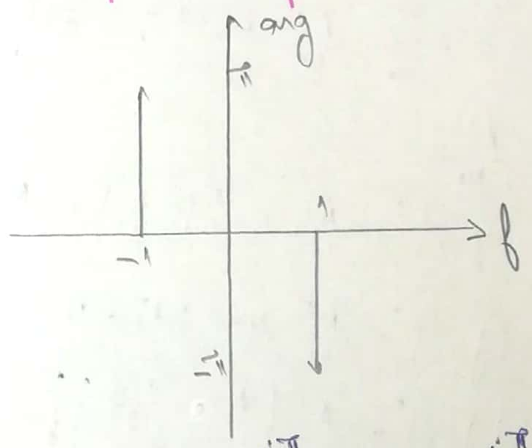
$X_{-1} = -\frac{1}{2j} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$

spectre d'amplitude



spectre de phase



$|X_1| = |X_{-1}| = \frac{1}{2}$

$X_1 = \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} e^{-j\pi}$, $e^{j\frac{\pi}{2}}$

$X_{-1} = \frac{e^{j\pi}}{2}$

③ (1M): $C_x(\tau) = |X_1|^2 e^{j2\pi\tau} + |X_{-1}|^2 e^{-j2\pi\tau}$

$= \frac{1}{4}\left(2\cos(2\pi\tau)\right) = \frac{\cos(2\pi\tau)}{2}$

(2M) $C_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,x(t-\tau)\,dt \quad (f_0 = 1 \Rightarrow T = 1)$

$= \int_0^1 \sin(2\pi t - \alpha)\sin(2\pi(t-\tau) - \alpha)\,dt$

$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\cos(2\pi\tau) - \cos(4\pi t - 2\pi\tau - 2\alpha)\right)dt$

$= \frac{1}{2}\left(\cos(2\pi\tau) - \int_0^1 \cos(4\pi t - 2\pi\tau - 2\alpha)\,dt\right)$

$= \frac{\cos(2\pi\tau)}{2}$ ④

II) $\alpha = 0$; $x(t) = \sin(2\pi t)$

$y(t) = 3 + 2\cos(2\pi t)$

$= 3e^0 + 2\left(\frac{e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}}{2}\right)$

$= 3e^0 + e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}$

On a $y_0 = 3$; $y_1 = 1$; $y_{-1} = 1$ et $y_n = 0$ $\forall n \in [0, 1, -1]$, X et Y de ~~m~~ période

• $C_{xy}(\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n Y_n^* e^{j2\pi\tau} = X_1 Y_1 e^{j2\pi\tau} + X_{-1} Y_{-1} e^{-j2\pi\tau}$

$= \frac{1}{2j} e^{j2\pi\tau} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi\tau} = \sin(2\pi\tau)$

(car $\alpha = 0 \Rightarrow x(t) = \sin(2\pi t) = \frac{1}{2j} e^{j2\pi t} - \frac{1}{2j} e^{-j2\pi t}$; $X_1 = \frac{1}{2j}$ et $X_{-1} = -\frac{1}{2j}$)

2) $\Phi_{xy}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n Y_n^* \delta(f - nf_0)$; $f_0 = 1$

$= \frac{1}{2j} \delta(f-1) - \frac{1}{2j} \delta(f+1)$

III) $z(t) = x(t) + y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t)$

$= \sin(2\pi t) + 3 + 2\cos(2\pi t)$

• $\frac{a_0}{2} = 3$

• $a_1 = 2$; $a_n = 0$ $\forall n > 1$

• $b_1 = 1$; $b_n = 0$ $\forall n > 1$

2) $z(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} z_n e^{j2\pi n t}$; $f_0 = 1$

• $z_0 = \frac{a_0}{2} = 3$

• $z_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$; $z_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}$

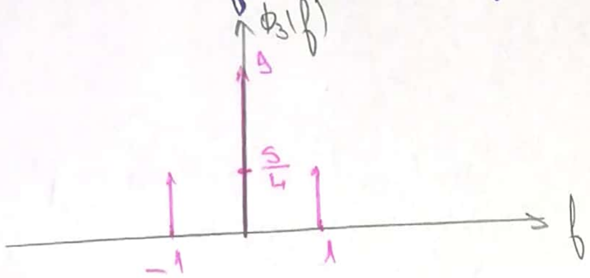
• $z_1 = \frac{a_1 - jb_1}{2}$; $z_{-1} = \frac{a_1 + jb}{2} = 1 + \frac{j}{2}$

$= \frac{2 - j}{2} = 1 - \frac{j}{2}$

$z_n = 0 \quad \forall n \notin \{0, 1, -1\}$

3) $\Phi_3(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |z_n|^2 \, \delta(f - n f_0)$; $f_0 = 1$

$$= 9\,\delta(f) + \frac{5}{4}\,\delta(f-1) + \frac{5}{4}\,\delta(f+1)$$



4) $P_z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |z_n|^2 = 9 + \frac{5}{4} \times 2 = \frac{23}{2}$

Ex 3:

1) $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{A^2}{2\alpha}$ finie

2) signal à énergie finie

$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, x(t-\tau)\, dt$

$x(t)$ est réel $\Rightarrow$ $\varphi_x(\tau)$ est paire

• si $\tau \geq 0$; $\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\alpha t} u(t) \, A e^{-\alpha(t-\tau)} u(t-\tau)\, dt$

$$= A^2 \int_{\tau}^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-\alpha(t-\tau)} \, dt = \frac{A^2}{2\alpha} e^{-\alpha \tau}$$

si $\tau \leq 0$, $\varphi_x(\tau) = \varphi_x(-\tau)$

$\Rightarrow \forall \tau \in \mathbb{R}$, $\varphi_x(\tau) = \frac{A^2}{2\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$

$E_x = \varphi_x(0) = \frac{A^2}{2\alpha}$

3) $\Phi_x(f) = TF(\varphi_x(\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(\tau)\, e^{-j2\pi f \tau}\, d\tau = \frac{A^2}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$

• $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f)\, df = \frac{A^2}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi f}{\alpha}\right)^2}\, df$

On pose $F = \frac{2\pi f}{\alpha}$; $dF = \frac{2\pi}{\alpha}\, df$

$$\Rightarrow E_x = \frac{A^2}{\alpha^2} \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+F^2}\, dF = \frac{A^2}{\alpha^2} \frac{\alpha}{2\pi} \underbrace{\left[\operatorname{arctg}(F)\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{\pi = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})}$$

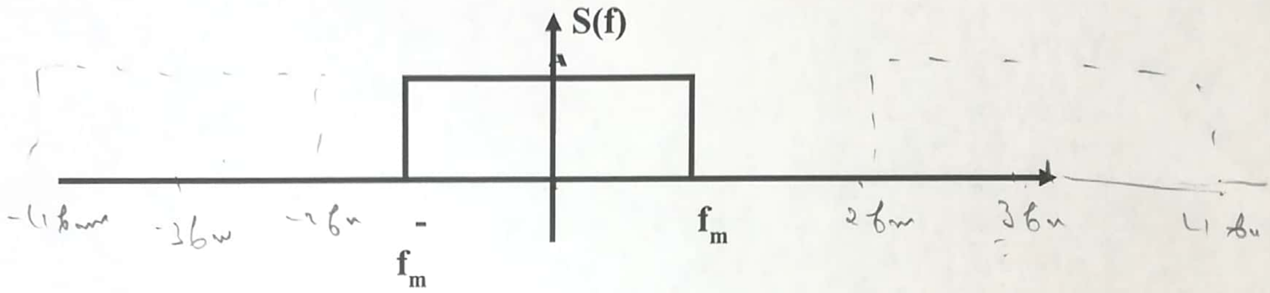
6 $$= \frac{A^2}{2\alpha}$$

4) $E_b = \int_{-\frac{\alpha}{2\pi}}^{\frac{\alpha}{2\pi}} \Phi_x(f)\, df = \frac{A^2}{\alpha^2} \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+f^2}\, df = \frac{A^2}{4\alpha} = \frac{E_x}{2}$

TD5

Exercice 1

On considère un signal $s(t)$ dont la transformée de Fourier $S(f)$ est représentée ci-dessous :



1) Déterminer l'expression du signal temporel $s(t)$ en fonction de A et f_m

2) Représenter le spectre des signaux suivants :

a- $s_1(t) = s\left(\frac{t}{2}\right)$ **b-** $s_2(t) = s(2t)$ **c-** $s_3(t) = s(t).e^{j4\pi t}$

3) On échantillonne s(t) à une fréquence $F_e = 3f_m$. Tracer le spectre du signal échantillonné $s_e(t)$.

4) Quelles modifications doit-on faire pour obtenir un recouvrement spectral? Expliquer.

Exercice 2

Soit $F(\omega) = 2tri\left(\frac{\omega}{2}\right)$ la transformée de Fourier du signal $f(t)$. On échantillonne le signal $f(t)$ à une fréquence angulaire $\omega_e = 3$ et on obtient ainsi le signal échantillonné $f_e(t)$.

1) Représenter graphiquement le spectre $F_e(\omega)$ du signal $f_e(t)$.

2) Peut-on reconstruire le signal d'origine $f(t)$. Justifier

Exercice 3 :

On considère le signal $x(t) = f_0[sinc(f_0t)]^2$, où f_0 est une constante strictement positive.

1) Calculer la transformée de Fourier (TF) du signal $s(t) = tri(t)$.

2) Déduire la TF du signal $\text{sinc}(t)$ puis la TF $X(f)$ de $x(t)$.

3) On échantillonne le signal $x(t)$ à une fréquence d'échantillonnage F_e et on obtient le signal $x_e(t)$.

a- Représenter graphiquement la TF $X_e(f)$ de $x_e(t)$ lorsque $F_e = 3f_0$ et $F_e = f_0$.

b- On cherche à restituer le signal analogique en filtrant le signal échantillonné par un filtre passe bas idéal de fréquence de coupure $f_c = \frac{F_e}{2}$ et d'amplitude $\frac{1}{F_e}$. Déterminer l'expression du signal restitué $x_r(t)$ lorsque $F_e = 3f_0$ et $F_e = f_0$. Commenter ce résultat.

Exercice 4

Un signal analogique $x(t)$, de spectre en fréquence $X(f)$ montré à la figure 2, est échantillonné à trois fréquences d'échantillonnage $f_e = 30, 40$ et $60\,Hz$.

1. Pour chaque fréquence d'échantillonnage f_e tracer le spectre en fréquence du signal échantillonné.
2. Quelle fréquence d'échantillonnage acceptable qui permettra une reconstitution exacte du signal $x(t)$ à partir de ses échantillons ?

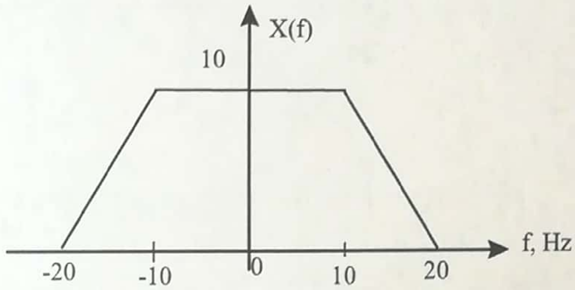


Figure 2

Exercice 5

Un signal analogique $x(t)$ passe-bande, de spectre en fréquence $X(f)$ montré à la figure 3, est échantillonné à la fréquence d'échantillonnage fe=20 Hz.

1. Tracer le spectre en fréquence du signal échantillonné.
2. Proposer un système qui permettra la reconstitution exacte du signal original à partir de ses échantillons

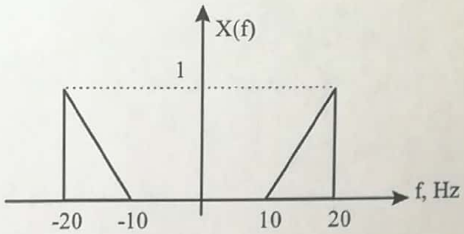


Figure 3

Exercice 6

Considérons le signal analogique : $x(t) = 4 + 4\cos^2(4\pi t)$ qui est échantillonné à la fréquence d'échantillonnage $f_e = 10\,Hz$. Tracer le spectre en fréquence du signal échantillonné pour $|f| \le 25\,Hz$. Est-ce que le signal original $x(t)$ peut-être reconstitué à partir de ses échantillons ? Si oui expliquer comment et si non expliquer pourquoi ?

TDNS

Ex 1:

1) $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-f_m}^{f_m} A\, e^{j2\pi f t}\, df$

$$= \frac{A}{j2\pi t}\left(e^{j2\pi f_m t} - e^{-j2\pi f_m t}\right)$$

$$= 2 f_m A \,\frac{\sin(2\pi f_m t)}{2\pi t f_m}$$

$$s(t) = 2 f_m A \,\mathrm{sinc}(2 f_m t)$$

2) $S(t) \longleftrightarrow S(f)$ $\qquad S(t)\, e^{j2\pi f_0 t} \longleftrightarrow S(f - f_0)$

$S\left(\frac{t}{2}\right) \longleftrightarrow ?$

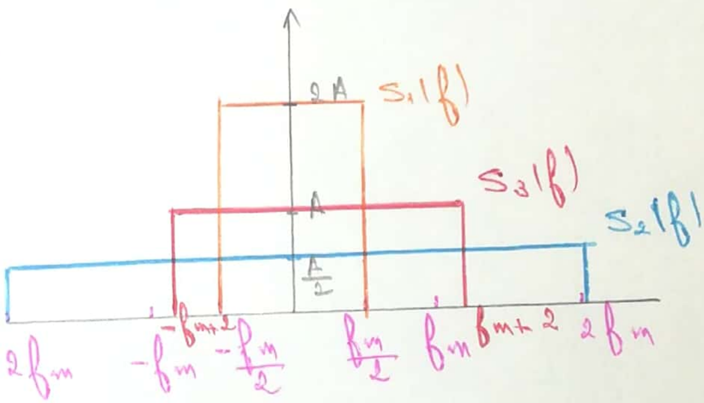
$S(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right)$

$s(t) \rightleftarrows S(f)$

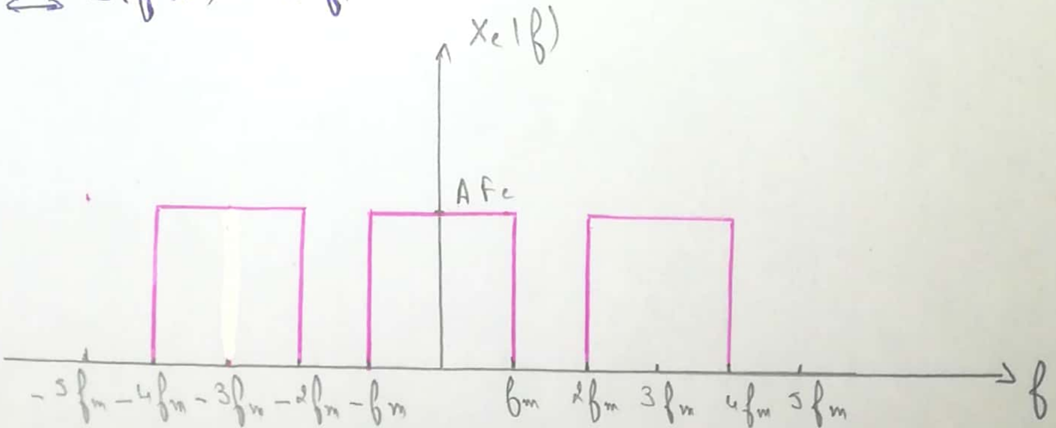
$s\left(\frac{t}{2}\right) \longleftrightarrow 2\, S(2f) = S_1(f)$

$s(2t) \longleftrightarrow \frac{1}{2} S\left(\frac{f}{2}\right) = S_2(f)$

$s(t)\, e^{j4\pi t} \longleftrightarrow S(f-2) = S_3(f)$



3)



4) Il faut que la condition de Schannon ne soit pas respectée $\Rightarrow F_e < 2 f_m$