$Z \leadsto B(25, \ldots)$.

(copie)

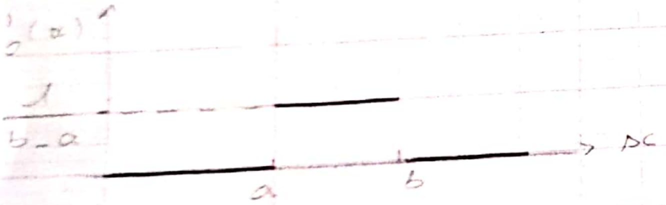
Section 2 : les lois de probabilité continue

2.1 - Déf : La Unif continue

On dit que la VA X est distribuée selon une loi uniforme continue sur l'intervalle $[a, b]$ si sa fct de ddp est définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

On note $X \leadsto U_{[a,b]}$



2. Caractéristiques :

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$
$$= \int_{\Omega(X)} e^{tx} f(x)\,dx$$
$$= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a}\,dx$$
$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx}\,dx$$
$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{t} e^{tx}\right]_a^b$$
$$= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

$$m_k(X) = E(X^k)$$
$$= \int_{\Omega(X)} x^k f(x)\,dx$$
$$= \int_a^b x^k \frac{1}{b-a}\,dx$$
$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^k\,dx$$
$$= \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{k+1} x^{k+1}\right]_a^b$$
$$= \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$$

$$E(X) = m_1(X) = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$$
$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Rq :
l'espérance d'une loi unif continue sur $[a, b]$ est égal au milieu de cet intervalle

$$V(X) = m_2(X) - m_1^2(X)$$
$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{2}$$
$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Propriétés :

$f_X(x)$ est une ddp car

$f_X(x) \geq 0$

$f_X(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ et

$\int_{\Omega(X)} f_X(x)\,dx = 1$

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)\,dt$$

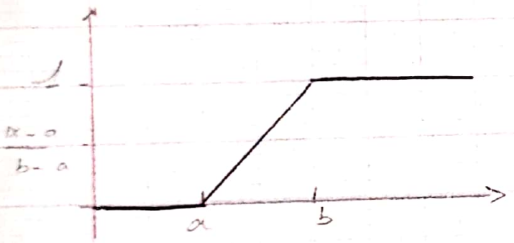
- si $x < a$: $F(x) = 0$
- si $a \leq x < b$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} f_x(t)\,dt + \int_{a}^{b} f_x(t)\,dt + \int_{b}^{+\infty} f_x(t)\,dt$$

$$= 0 + 1 + 0 = 1$$

donc :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$



Rq : la somme de deux VA distribuées selon une loi unif n'est pas une VA unif :
On dit que la loi unif continue n'est pas stable par addition

Exp.

Le niveau de bruit d'une machine au cours d'une période particulière de la journée est distribuée unif sur [54, 74]

1. Quelle est l'expression de prob de la VAC relative au niveau de bruit
2. au cours de cette période de la journée, quel est le niveau moyen de bruit
3. Quelle est la prob que le niveau de bruit soit supérieur à 70 sachant qu'il est supérieur à 64.

⇒ correction :

1. $f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{74-54} = 0{,}05 & \text{si } 54 \leq x \leq 74 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. $E(X) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{74+54}{2} = 64$

3. $P(X>70 / X>64) = \dfrac{P(X>70 \cap X>64)}{P(X>64)}$

$$= \frac{P(X>70)}{P(X>64)}$$

$$= \frac{1 - P(X<70)}{1 - P(X<64)} = \frac{1 - F(70)}{1 - F(64)}$$

$$F(70) = \frac{70-54}{74-54} = \frac{16}{20}$$

$$F(64) = \frac{64-54}{74-54} = \frac{10}{20}$$

$$\Rightarrow P(X>70 / X>64) = \frac{1 - 16/20}{1 - 0{,}5} = 0{,}4.$$

2.2. La loi exponentielle :

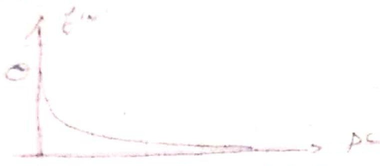
1. Déf :

On dit que X est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$

si l'ensemble de ses valeurs et sa fct de ddp est défini

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$X \sim \mathcal{E}(\theta)$ ou $X \sim \exp(\theta)$



<u>Rq</u>. cette loi est utilisée dans le contrôle de la qualité, la regularité et toutes les applications qui se basent sur le facteur temps

2. Caractéristiques :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{\Omega(X)} e^{tx}\,\theta\, e^{-\theta x}\,dx = \int_0^{+\infty} \theta\, e^{(t-\theta)x}\,dx = \frac{\theta}{t-\theta}\left[e^{-(\theta-t)x}\right]_0^{+\infty} = \frac{\theta}{\theta-t} \quad \forall\ t<\theta$$

$M_X(0) = 1$

$$m_k(X) = E(X^k) = \int_{\Omega(X)} x^k f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^k\,\theta\, e^{-\theta x}\,dx = M_X^{(k)}(0)$$

$M_X'(0) = \frac{1}{\theta} = \frac{1!}{\theta}$

$M_X^{(2)}(t) = \frac{2\theta}{(\theta-t)^3} \Rightarrow M_X^{(2)}(0) = \frac{2!}{\theta^2}$

$M_X^{3}(t) = \frac{6\theta}{(\theta-t)^4} \Rightarrow M_X^{(3)}(0) = \frac{3!}{\theta^3}$

$\Rightarrow M_X^{(k)}(0) = \frac{k!}{\theta^k}$

$\Rightarrow m_k(X) = \frac{k!}{\theta^k}$

. $E(X) = m_1(X) = 1/\theta$

. $V(X) = m_2(X) - m_1(X)^2 = \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$

Propriétés :

$f_X(x)$ est une ddp

$f_X(x) \geq 0$, continue sur $]0,+\infty[$

$\int f_X(x)\,dx = 1$ en effet

$$\int_0^{+\infty} \theta e^{-\theta x}\,dx = \theta\left[-\frac{1}{\theta} e^{-\theta x}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$F_X(x) = P(X<x) = \int_{-\infty}^{0} \theta e^{-\theta x}\,dx$$

. si $x \leq 0 \Rightarrow F(x) = 0$

. si $x > 0 \Rightarrow$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx + \int_0^x f_X(x)\ldots$$

2. Quelle devrait être la product P_0 pour que cette product soit inférieur à 4%.

$\Rightarrow$ 1. $D \sim \exp(1/3)$

$$P(D > 9) = \int_9^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \int_9^{+\infty} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[3\, e^{-\frac{1}{3}x}\right]_9^{+\infty}$$

$$= e^{-3} = 0,05.$$

2. $P(D > P_0) < 0,04$

$$\int_{P_0}^{+\infty} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\,dx < 0,04.$$

$$e^{-\frac{P_0}{3}} < 0.04$$

$$\Rightarrow P_0 > -3\log(0{,}04)$$

$$\Rightarrow P_0 > 9.65$$

2.3. La loi Gamma:

a. Fonction Gamma:

1 Déf :

On définie la fct gamma notée $\Gamma(\,)$ par l'intégrale suivt

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx$$

* $\Gamma(p)$?

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx$$

$u = x^{p-1} \longrightarrow u' = (p-1)x^{p-2}$

$v' = e^{-x} \longrightarrow v = -e^{-x}$

$$\left[-x^{p-1}e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (p-1)x^{p-2}e^{-x}\,dx$$

$$= (p-1)\,\Gamma(p-1)$$

$$= (p-1)(p-2)\,\Gamma(p-2)$$

$$= (p-1)(p-2)\ldots 1 \times \Gamma(1)$$

$$= (p-1)!$$

$$\Gamma(p+1) = p!$$

* **Proposition**,

soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$

$$\Gamma(n/2) = (n/2 - 1)!$$

$$= (n/2 - 1)\,\Gamma(n/2 - 1)$$

on pose $n = 5$

$$\Gamma(5/2) = (5/2 - 1)\,\Gamma(5/2 - 1)$$

$$= 3/2\,\Gamma(3/2)$$

$$= 3/2\,.(3/2 - 1)\,\Gamma(3/2 - 1)$$

$$= 3/2 \cdot 1/2\,\Gamma(1/2)$$

$$= 3/4\,\Gamma(1/2)$$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} x^{1/2 - 1} e^{-x}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x}\,dx$$

on pose $x = 1/2\, u^2 \Rightarrow dx = u\,du$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} (1/2\, u^2)^{-1/2} e^{-1/2 u^2}\, u\,du$$

$$= \int_0^{+\infty} (1/2)^{-\frac{1}{2}} (u^2)^{-1/2}\, u\, e^{-1/2 u^2}\,du.$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{+\infty} u^{-1} u\, e^{-1/2 u^2}\,du$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-1/2 u^2}\,du$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(5/2) = 3/4\sqrt{\pi}.$$

Ainsi on a les propriétés:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(P) = (p-1)!$
   $= (p-1)\,\Gamma(p-1)$
3. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

$0 + \int_0^x \theta e^{-\theta t} dt$

$\theta \left[-\frac{1}{\theta} e^{-\theta t} \right]_0^x$

$1 - e^{-\theta x}$

Propriété de nonvieillissement :

$\forall a, t \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$X > a + t / X > a) = P(X > t)$

en effet :

$> a+t / X > a) = \frac{P(X > a+t \wedge X > a)}{P(X > a)}$

$\frac{P(X > a+t)}{P(X > a)} = \frac{1 - P(X < a+t)}{1 - P(X < a)}$

$\frac{1 - F_X(a+t)}{1 - F_X(a)}$

$\frac{1 - (1 - e^{-\theta(a+t)})}{1 - (1 - e^{-\theta a})} = e^{-\theta t}$

$= P(X > t)$.

Ex 1 :

$X \sim U_{[0,1]}$

Determiner la fct de répartition de X

calculer les prob suivtes

$(X < 3/4)$, $P(1/4 \leq X \leq 2/3)$,

$(1/3 < X < 3/2)$ et $P(X < 1/8 / X > 3/4)$

$f(x) = \frac{1}{b-a} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx$

si $x < 0 \Rightarrow F_X(x) = 0$

si $0 < x < 1 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x) dx + \int_0^x f(t) dt$

$= 0 + \int_0^x 1 \, dt = x$

si $x > 1$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{1} f(x) dx = \int_{-\infty}^{0} f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$

$= 1$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si non} \end{cases}$

2. $P(X < 3/4) = F(3/4) = 3/4$

$P(1/4 \leq X \leq 2/3) = F(2/3) - F(1/4)$

$= 2/3 - 1/4 = \frac{5}{12}$

$P(1/3 < X < 3/2) = F(3/2) - F(1/3)$

$= 1 - 1/3 = 2/3$

$P(X < 1/8 / X < 3/4)$

$= \frac{P(X < 1/8 \wedge X < 3/4)}{P(X < 3/4)}$

$= \frac{P(X < 1/8)}{P(X < 3/4)} = \frac{F(1/8)}{F(3/4)}$

$= \frac{1/8}{3/4} =$

Ex 2 :

Une usine fabrique 3000 unités en un temps t pour cette même periode, la demande en milliers d'unités concernant ce produit peut être considérée comme une VAC :

D suivant une loi exp :

$D \sim \exp(\theta = 1/3)$.

1. quelle est la prob. que la demande D depasse la product $P_0 = 3000$.

b. Loi Gamma de paramètres p et θ :

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

on pose $x = y\theta$

$dx = \theta\, dy$

$$\Rightarrow \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} (y\theta)^{p-1} e^{-y\theta} \theta\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \theta^p y^{p-1} e^{-y\theta} dy$$

$$1 = \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p)} = \theta^p \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-y\theta} dy$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-y\theta} dy$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} y^{p-1} e^{-y\theta} & \text{si } p>0,\ \theta>0,\ y>0 \\ f_Y(y) = 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$f_Y(y)$ est une ddp car :

$f_Y(y) > 0$ continue

et $\int f_Y(y)\, dy = 1$

$Y \rightsquigarrow \gamma(p, \theta)$.

Caractéristiques.

- $M_Y(t) = E(e^{tY})$

$$= \int_0^{+\infty} e^{ty} f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} y^{p-1} e^{-y\theta} e^{ty} dy$$

$$= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-y(\theta-t)} dy$$

on pose $a = \theta - t$

$$M_Y(t) = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-ay} dy$$

$$= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\Gamma(p)}{a^p} = \frac{\theta^p}{a^p}$$

$$\Rightarrow M_Y(t) = \frac{\theta^p}{(\theta-t)^p} \quad \forall t < a$$

<u>Req</u> :

$\gamma(1, \theta)$ est équivalent à la loi exponentiel de paramètre θ.

- Moment non centré d'ordre K :

$$m_K(y) = E(Y^K)$$

$$= \int_0^{+\infty} Y^K \cdot f_Y(y)\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} Y^K \frac{\theta^p}{\Gamma(p)}$$

$$= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} Y^K Y^{p-1} e^{-\theta y} dy$$

$$= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} y^{K+p-1} e^{-\theta y} dy$$

soit $p^* = K + p$

$$= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \int_0^{+\infty} y^{p^*-1} e^{-\theta y} dy$$

$$= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\Gamma(p^*)}{\theta^{p^*}}$$

$$= \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\Gamma(p+K)}{\theta^{p+K}} = \frac{\Gamma(K+p)}{\theta^K \Gamma(p)}$$

$$\Rightarrow E(Y^K) = \frac{\Gamma(K+p)}{\theta^K \Gamma(p)}$$

- l'Espérance

$$E(Y) = \frac{\Gamma(1+p)}{\theta\, \Gamma(p)} = \frac{p\,\Gamma(p)}{\theta\, \Gamma(p)}$$

$$E(Y) = \frac{p}{\theta}$$