T.D : 2

Ex° 1 :

$$x(t) = A\sin(wt + \varphi)$$

A, w : cte

φ : variable aléatoires uniforme sur $[0, 2\pi]$

a) stationnarité :

d.d.p :

$$d_f(\varphi) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{si } \varphi \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• Le moment statistique d'ordre 1 :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d_{f_\varphi}(\varphi) \cdot x(t)\, d\varphi$$

$$E(x) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} A\sin(wt + \varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(wt + \varphi)\, d\varphi$$

$= 0 \longrightarrow x(t)$ est stationnaire d'ordre 1

• Le moment statistique d'ordre 2 :

$$E[x(t) \cdot x^*(t - \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} d_{f_\varphi}(\varphi) \cdot A\sin(wt + \varphi) \cdot A\sin(wt + \varphi)\, dt$$

$$= \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(wt + \varphi)\sin(wt - w\tau)\, d\varphi$$

$$\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{\cos(a - b) + \cos(a + b)}{2}$$

$$E(x(t) * x^*(t - \tau)) = \frac{A^2}{4\pi}\Big[\int_0^{2\pi} \cos w\tau\, d\varphi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(2wt - w\tau + 2\varphi)\, d\varphi}_{0}\Big]$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos w\tau$$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$x(t)$ est stationnaire d'ordre 2 (au sens large)

b) Ergodicité :

La moyenne : $\langle x(t) \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt$

$$= \lim_{T \to +\infty} \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(wt + \varphi)\, dt$$

$$= \lim_{T \to +\infty} \frac{A}{T}\Big[-\frac{1}{w}\cos(wt + \varphi)\Big]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \lim_{T \to +\infty} \frac{A}{Tw}\Big[-\cos\Big(\frac{wT}{2} + \varphi\Big) + \cos\Big(\frac{wT}{2} + \varphi\Big)\Big]$$

$$= \lim_{T \to +\infty} \frac{A}{Tw}\Big[-\cos\frac{wT}{2}\cos\varphi + \sin\frac{wT}{2}\sin\varphi + \cos\frac{wT}{2} + \sin\frac{wT}{2}\sin\varphi\Big]$$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{A^2}{2T}\Big[\int_{-T/2}^{T/2} \cos w\tau\, dt + \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2wt + w\tau + 2\varphi)\, dt\Big]$$

$$= \lim_{T \to +\infty} \frac{A^2 \cos w\tau}{2T} \cdot T = \frac{A^2 \cos w\tau}{2}$$

$x(t)$ ergodique d'ordre 2

2) $x(t) = a$

$\langle x(t) \rangle = m_a$: $R_{xx}(\tau) = \langle x(t) x(t - \tau) \rangle = \langle a^2 \rangle = a^2$

$E(x) = \sigma_a^2$: $E[x(t) \cdot x^*(t - \tau)] = E[x^2(t)]$

$$\sigma^2 = E[x^2] - E[x]^2$$

$$E[x^2] = \sigma^2 + E[x]^2$$

Ex° 2 :

$$y(t, w) = x(t, w) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi(w))$$

$x(t, w)$: signal aléatoire, stationnaire d'ordre 2, centré.

$R_x(\tau)$

$\varphi(w)$: phase aléatoire indépendante de $x(t, w)$ uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$

1) M.q. $y(t, w)$ est stationnaire d'ordre 2

2) D.S.P en fonction de celle de $x(t, w)$

$$E[y(t, w)] = E[x(t, w) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)]$$

$$= E[\underbrace{x(t, w)}_{0}] \cdot E[\cos(2\pi f_0 t + \varphi)] = 0$$

(car $x(t, w)$: signal stationnaire d'ordre 2, centrée)

donc $y(t, w)$ ~~est~~ stationnaire d'ordre 1 centrée

$$E[y(t, w) \cdot y^*(t - \tau, w)] = E[x(t, w)\cos(2\pi f_0 t + \varphi) \cdot x^*(t - \tau, w) \cdot \cos(2\pi f_0(t - \tau) + \varphi)]$$

$$= R_x(\tau) \cdot E\Big(\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau + 2\varphi)\Big]$$

$= R_x(\tau) \cdot \frac{\cos(2\pi f_0 \tau)}{2}$

donc $y(t,w)$ est stationnaire d'ordre 2 centrée

2\ $S_y(f) = TF[R_y(\tau)]$ $\quad (T.F(x \cdot y) = TF(x) * TF(y))$

$= TF\left[\frac{1}{2} R_x(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau)\right]$

$= \frac{1}{2} \cdot TF(R_x(\tau)) * TF(\cos(2\pi f_0 \tau))$

$TF(R_x(\tau)) = S_x(f)$.

$TF(\cos 2\pi f_0 \tau) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$

$S_y(f) = \frac{1}{2} S_x(f) * \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$

$S_y(f) = \frac{1}{4}\left[S_x(f - f_0) + S_x(f + f_0)\right]$

Ex : 4 :

$y(t;w) = a(w) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + b(w) \cdot \sin(2\pi f_0 t)$

fawzighribi@gmail.com

$\left.\begin{matrix} a(w) \\ b(w) \end{matrix}\right\}$ deux v.a réels centrée

1\ calculer la fonction de corrélation de $y(t,w)$

$R_y(\tau) = E\left[y(t,w) \cdot \underset{\text{(réelle)}}{\bar{y}}(t-\tau, w)\right]$

$= E\left[(a(w)\cos(2\pi f_0 t) + b(w)\sin(2\pi f_0 t))\right.$
$\left.(a(w)\cos(2\pi f_0 (t-\tau)) + b(w)\sin(2\pi f_0 (t-\tau))\right]$

$= E[a^2(w)] \cos(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi f_0 (t-\tau)) + E[b^2(w)]$
$\sin(2\pi f_0 t) \cdot \sin(2\pi f_0 (t-\tau)) + E[a(w) \cdot b(w)]$
$[\cos(2\pi f_0 t) \cdot \sin(2\pi f_0 (t-\tau)) + \sin(2\pi f_0 t)$
$\cos 2\pi f_0 (t-\tau)]$

! val moyenne = cte : ergodique