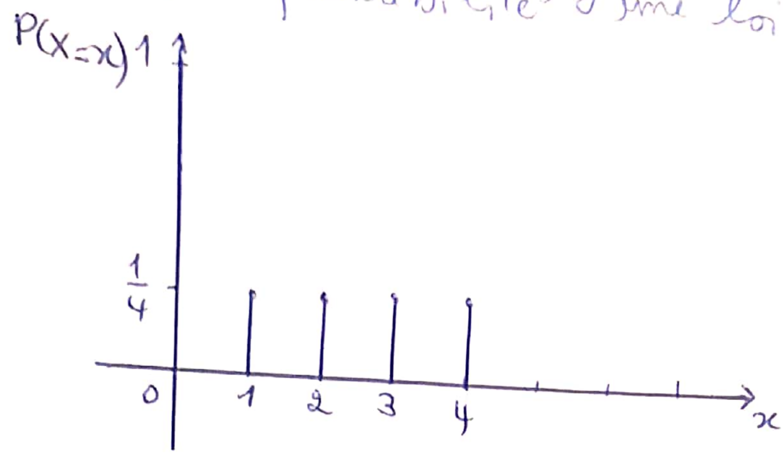
La distribution de probabilité d'une loi uniforme discrète :



- $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n}(1+2+\dots+n) = \frac{n+1}{2}$.
- $V(X) = m_2 - m_1^2 = E(X^2) - (E(X))^2$.
- $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X=x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{\cancel{n}} \times \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6}$
- $V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$

$$= \frac{(n+1)}{12}(4n+2-3n-3) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

- $M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{tj} = \frac{1}{n} e^t \frac{(1-e^{nt})}{1-e^t}$
- Pour montrer que la loi uniforme n'est pas stable par l'addition, il suffit de mq la fction génératrice des moments de $Z = X + Y$ ne prend pas la forme de celle d'une loi uniforme.
- Pour mq $P(X=m) = \frac{1}{n}$ est une loi de proba, on mq $\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = 1$.

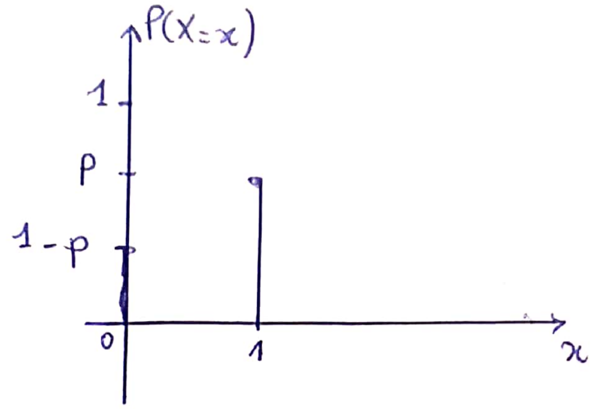
Exemple p.18 : Z : 'le numéro obtenu lors du jette'.

$Z \sim \mathcal{U}_{\{1,\dots,4\}}$ $P(Z=z)=\frac{1}{4}$.

- $P(Z \leq 3) = P(Z=1)+P(Z=2)+P(Z=3) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
- $P(Z<8) = \sum_{z=1}^{4} P(Z=z) = 1$.
- $E(Z) = \frac{n+1}{2} = \frac{5}{2}$.
- $V(Z) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$.

$M_Z(t) = \frac{e^t}{4} \frac{(1-e^{4t})}{(1-e^t)}$.

Loi de Bernoulli :



$m_k = E(X^k) = \sum_{x=0}^{1} x^k f(x) = 0^k . p(1-p)^{1-0} + 1^k p^1 (1-p)^{1-1} = 0+p = p$.

$E(X) = m_1 = p$.

$V(X) = p - p^2 = p(1-p)$

$M_X(t) = E(e^{xt}) = e^{xt} p^0 (1-p)^{1-0} + e^{1t} p^1 (1-p)^{1-}$

$= (1-p) + pe^t$.

Rque : on a : $M_X(t) = 1-p+pe^t$

$M_Y(t) = 1-p+pe^t$

$M_Z(t) = E(e^{Zt}) = E(e^{(X+Y)t}) = E(e^{Xt}.e^{Yt}) = E(e^{Xt}).E(e^{Yt})$

$= M_X(t).M_Y(t) = ((1-p)+pe^t)^2$.

$\longrightarrow$ Z ne suit pas une loi de Bernoulli de paramètre p.

Loi binomiale:

· Ex d'application 1/ X : le nombre des échantillons non conformes

$\Omega_X = \{0, —, 20\}$. $X \rightsquigarrow B(20, p)$ $p = 0,1$.

2/ Les chances d'observer au hasard un échantillon respectant la norme : $1 - \frac{10}{100} = \frac{90}{100}$.

3/ $P(X = x) = C_{20}^{x}\, 0,1^{x}\, 0,9^{20-x}$, $x \in \{0, — , 20\}$.

4/ $p(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = C_{20}^{0}\, 0,9^{20} + C_{20}^{1}\, 0,1 \times 0,9^{19} = 0,39$.

· La loi binomiale est stable par l'addition:

$X \rightsquigarrow B(n_1, p)$
$Y \rightsquigarrow B(n_2, p)$ } $U = X + Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n_1 + n_2, p)$ car:

$M_U(t) = E(e^{Ut}) = E(e^{(X+Y)t}) = E(e^{Xt}) \cdot E(e^{Yt})$

$= (1 - p + pe^{t})^{n_1} \cdot (1 - p + pe^{t})^{n_2}$

$= (1 - p + pe^{t})^{n_1 + n_2}$

donc M_U est une fction génératrice des moments d'une loi binomiale de paramètres $(n_1 + n_2, p)$.

Rque: $B(n, p) \simeq P(\lambda = np)$ ssi $\begin{cases} n > 20 \\ p \leq 0,1 \\ np \leq 5. \end{cases}$

EX d'application p21: X : le nbre des disquettes non conformes.

$\Omega_X = \{0, —, 125\}$. $X \rightsquigarrow B(125; 0,02)$

on a : $\left.\begin{array}{l} n = 125 > 20 \\ p = 0,02 \leq 0,1 \\ np = 2,5 \end{array}\right\} \Rightarrow X \rightsquigarrow P(2,5)$

1/ $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$.

$P(X=x) = e^{-2,5} \dfrac{(2,5)^x}{x!}$ si $x \in \mathbb{N}$.

$P(X \leq 3) = e^{-2,5} + e^{-2,5} \cdot 2,5 + e^{-2,5} \dfrac{2,5^2}{2} + e^{-2,5} \cdot \dfrac{(2,5)^3}{6}$.

$= e^{-2,5} (1 + 2,5 + 3,125 + 2,60)$

$= e^{-2,5} \times 9,229 =$

2/ $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) =$