SLE

TD 1 – Signaux numériques

Exercice 1

Soit le signal *s(k)* défini par

$$s(0)=0; s(1)=0.5; s(2)=0.6; s(3)=0.65; s(4)=0.7; s(5)=0.7; s(k>5)=0$$

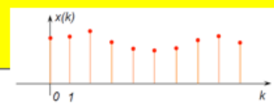
Calculer la transformée en Z de *s*

Rappel du cours

La transformée en Z

Soit un signal numérique *x(k)* causal. ***La transformée en Z*** est définie par :

$$Z(x(k)) = X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k}$$



où

– z est une variable complexe. Elle est la variable de la transformée en Z

$$z = re^{j\theta} = \alpha + j\beta$$

On dit que $X(z)$ est la transformée en Z du signal $x(k)$

Exemple : Soit le signal numérique *x(k)*

$$x(0) = 1,\ x(1) = 4,\ x(2) = 16,\ x(3) = 64$$

Transformée en Z de x(k)

$$Z(x(k)) = X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3}$$

$$X(z) = 1 + 4z^{-1} + 16z^{-2} + 64z^{-3}$$

Réponse

$$S(z) = s(0) + s(1)z^{-1} + s(2)z^{-2} + s(3)z^{-3} + s(4)z^{-4} + s(5)z^{-5} + 0$$
$$= 0.5z^{-1} + 0.6z^{-2} + 0.65z^{-3} + 0.7z^{-4} + 0.7z^{-5}$$

Exercice 2

Soit le signal *s(k)* défini par

$$\begin{cases} s(k) = 2 \text{ pour } 0 \le k \le k0 \\ s(k) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1/Calculer la transformée en Z de *s*

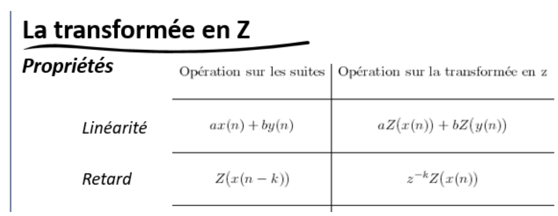
2/Donner le spectre de ce signal pour une fréquence d'échantillonnage *fs*

Réponse

1/

Le signal s peut être vu comme la somme de 2 échelons s1 et s2.

s1 est d'amplitude 2 ; s2 est décalé à l'instant k+1 et d'amplitude -2



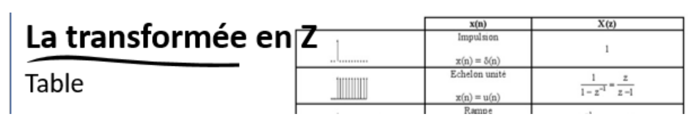
La transformée en Z

Propriétés

	Opération sur les suites	Opération sur la transformée en z
Linéarité	$ax(n) + by(n)$	$aZ(x(n)) + bZ(y(n))$
Retard	$Z(x(n-k))$	$z^{-k}Z(x(n))$

$$S(z) = S1(z) + S2(z)$$

avec $S1(z) = 2U(z) = 2\dfrac{z}{z-1}$



La transformée en Z

Table

	x(n)	X(z)
	Impulsion $x(n) = \delta(n)$	1
	Echelon unité $x(n) = u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$
	Rampe	

et

$$\begin{aligned} S2(z) &= z^{-(k+1)}\left(-2U(z)\right) \\ &= z^{-(k+1)}\left(-2\frac{z}{z-1}\right) \end{aligned}$$

Donc
$$\begin{aligned} S(z) &= 2\frac{z}{z-1}\left(1 - z^{-(k+1)}\right) \\ &= 2\frac{1-z^{-k}}{1-z^{-1}} \end{aligned}$$

2/

Le spectre du signal $|S(\omega)| = \left|2\dfrac{1-z^{-k}}{1-z^{-1}}\right|_{z=e^{j\omega\frac{1}{fs}}} \rightarrow |S(\omega)| = 2\left|\dfrac{1-e^{-jk\frac{\omega}{fs}}}{1-e^{-j\frac{\omega}{fs}}}\right|$

Exercice 3

Soit le signal *s(k)* défini par

$$s(k) = k \text{ pour } 0 \le k$$

Calculer la transformée en Z de *s et vérifier le résultat avec la table des transformées en Z*

Réponse

$$
\begin{aligned}
S(z) &= Z(k*u) \\
&= -z\frac{d}{dz}Z(u) \\
&= -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) \\
&= -z\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2} \\
&= \frac{z}{(z-1)^2}
\end{aligned}
$$

Ce résultat est conforme à la table

38

La transformée en Z

Propriétés

	Opération sur les suites	Opération sur la transformée en z
Linéarité	$ax(n) + by(n)$	$aZ(x(n)) + bZ(y(n))$
Retard	$Z(x(n-k))$	$z^{-k}Z(x(n))$
Avance	$Z(x(n+k))$	$z^kZ(x(n)) - \sum_{j=0}^{k-1} x(j)z^{k-j}$
Produit de convolution	$Z(x(n) * y(n))$	$Z(x(n))Z(y(n))$
	$Z(a^n x(n))$	$Z(x(n))(z/a)$
	$Z(nx(n))$ $Z(n^k x(n))$	$-z\frac{d}{dz}Z(x(n))$ $\left(-z\frac{d}{dz}\right)^k Z(x(n))$

7

La transformée en Z

Table

TABLE DE TRANSFORMEES EN Z

	x(n)	X(z)
	Impulsion $x(n) = \delta(n)$	1
	Echelon unité $x(n) = u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$
	Rampe $x(n) = n\,u(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$

Exercice 4

Soit les signaux définis par

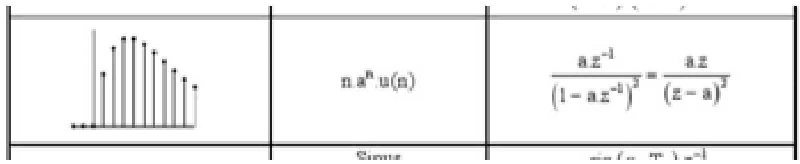
$s1(k) = k\,0.7^{k}$; $s2(k) = 0.7^{k}$; $s3(k) = (k-2)\,0.7^{k-2}$; $s4(k) = 0.2^{k}\,0.7^{k-2}$

Calculer leurs transformées en Z.

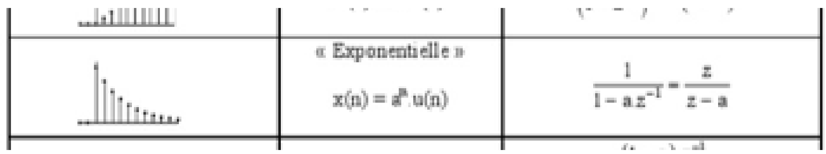
En déduire celle de $s5(k) = (k)\,0.7^{k-2}$

Réponse

$$S1(z) = \frac{0.7z}{(z-0.7)^{2}}$$



	$n.a^{n}.u(n)$	$\frac{a.z^{-1}}{(1-a.z^{-1})^{2}} = \frac{a.z}{(z-a)^{2}}$



	« Exponentielle » $x(n) = a^{n}.u(n)$	$\frac{1}{1-a.z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$

$$S2(z) = \frac{z}{z-0.7}$$

$$s3(k) = s1(k-2)$$

$$S3(z) = z^{-2} S1(z)$$

$$s4(k) = 0.2^{k}0.7^{k}\frac{1}{0.7^{2}} = (0.2*0.7)^{k}\frac{1}{0.49} = \frac{1}{0.49}0.14^{k}$$

$$S4(z) = \frac{1}{0.49}\frac{z}{z-0.14}$$

$$s5(k) = \frac{s1(k)}{0.7^{2}}$$

$$S5(z) = \frac{S1(z)}{0.7^{2}} = \frac{z}{0.7(z-0.7)^{2}}$$

Exercice 5

Soit les signaux définis par

$$S1(z)=\frac{0.3z^{-1}}{1-1.7z^{-1}+z^{-2}} \text{ et } S2(z)=\frac{1}{1-1.7z^{-1}+z^{-2}}$$

Donner une représentation temporelle de ces signaux (les premiers points).

Calculer la valeur initiale et finale de ce signal.

Réponse

Pour S1 :

$0.3z$	$z^2 - 1.7z + 1$
$0.3z - 0.51 + 0.3z^{-1}$	$0z^0 + 0.3z^{-1} + 0.51z^{-2} + 0.567z^{-3}$
$0.51 - 0.3z^{-1}$	
$0.51 - 0.867z^{-1} + 0.51z^{-2}$	
$0.567z^{-1} + 0.51z^{-2}$	

s(k): 0 ; 0.3 ; +0.51 ; +0.567 ; +0.454 ; +0.205 ; −0.106 ; −0.385 ; −0.548 ; −0.547

la valeur initiale : $\lim\limits_{z-\infty} S(Z)$ = 0

la valeur finale : : $\lim\limits_{z-1}(z-1)S(Z)$ = 0

La transformée en Z

Propriétés

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{k\to 0}\left(x(k)\right)=\lim_{z\to\infty}\left(X(z)\right)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{k\to\infty}\left(x(k)\right)=\lim_{z\to 1}\left(\left(z-1\right)X\left(z\right)\right)$$

Pour S2

z^2	$z^2 - 1.7z + 1$
$z^2 - 1.7z + 1$	$1 + 1.7z^{-1} + 1.89z^{-2}$
$1.7z - 1$	
$1.7z - 2.89 + 1.7z^{-1}$	
$1.89 - 1.7z^{-1}$	

S(k) :1 ;+1.7;+1.89x31+1.513;+0.6821;−0.35343;−1.282931;−1.8275527;−1.82390859;−1.27309190;−0.34034764;+0.69450091;+1.52099919;+1.89119771;+1.69403692;+0.98866506;−0.01330633;−1.01128581;−1.70587955;−1.88870943;−1.50492647;−0.66966558;+0.36649499;+1.29270706;+1.83110701;+1.82017486;+1.26319025;+0.32724857;−0.70686769;−1.52892364;−1.89230250;−1.68799060;−0.9772815;+0.02661200+…

la valeur initiale : $\lim_{z-\infty} S(Z)$ = 1 la valeur finale : : $\lim_{z-1}(z-1)S(Z)$ = 0