EX 8 :

T admet pour densité $f(t,\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}$ si $t \geq 0$ / 0 sinon

1°/. La vraisemblance des observations $(t_1, ..., t_n)$ sachant θ est le nombre : $L(t_1, ..., t_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, \theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\sum t_i/\theta}$

$= \frac{1}{\theta^n} e^{-n\bar{t}/\theta}$ où $n\bar{t} = \sum_{i=1}^{n} t_i$

2°/. On cherche alors la valeur θ qui maximise la fonction $\theta \longrightarrow L(t_1, ..., t_n, \theta)$ ou ce qui est équivalent qui maximise la fonction $\theta \longrightarrow Ln(L(t_1, ..., t_n, \theta))$

avec $Ln(L(t_1, ..., t_n, \theta)) = -n Ln\theta - \frac{n\bar{t}}{\theta}$.

Cn : $\frac{\partial Ln(L)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{n\bar{t}}{\theta^2}$ et $\frac{\partial Ln(L)}{\partial \theta} = 0$ ssi $\theta = \bar{t}$

Cs : $\frac{\partial^2 Ln(L)}{\partial \theta^2} \leq 0$ au point critique or

$$\frac{\partial^2 Ln(L)}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2n\bar{t}}{\theta^3} = \frac{n}{\theta^2}\left(1 - \frac{2\bar{t}}{\theta}\right)$$

au point $\theta = \bar{t}$, $1 - \frac{2\bar{t}}{\theta} = -1$ et $\frac{\partial^2 Ln(L)}{\partial \theta^2} \leq 0$

au point critique.

i.e : $\theta = \bar{t}$ est bien un max pour la fonction de vraisemblance et l'estimateur du M.V est $W = \bar{T}$.

(la moyenne empirique)

l'estimateur du MV est asymptotiquement sans biais et, Conv. en proba. De plus ici $E(\bar{T}) = E(T) = \theta$, ω est donc sans biais.

3°) Les observations fournissent l'estimation $\hat{\theta} = \frac{77}{15} = 5,13$ Ans

EX 12 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x}{a}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a est un réel, $a \geq 0$.

* f peut être considérée comme la densité d'une variable continue X, donc on admet que :

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} dx = 1$$

1) $$E(X) = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} dx = 2a$$ (on fait une integration par partie)

de même $E(X^2) = 6a^2$ et $V(X) = 2a^2$.

2) $E(X) = 2a = \varphi(a)$, avec $\varphi : x \to 2x$

donc un estimateur T pour a par la méthode des moments est $T = \frac{\overline{X}}{2}$

evidemment convergent en proba et sans biais.

$$V(T) = \frac{1}{4} V(\overline{X}) = \frac{1}{4} \frac{V(X)}{n} = \frac{1}{4} \frac{2a^2}{n} = \frac{a^2}{2n}.$$

3°) Vraisemblance des observations $x_1, \dots, x_n$ sachant a :

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, a) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, a) = \frac{\prod_{i=1} x_i}{a^{2n}} e^{-\frac{\sum x_i}{a}}$$

alors : $\mathrm{Ln}\left(L(x_1, \dots, x_n ; a)\right) = \mathrm{Ln}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - 2n \,\mathrm{Ln}\, a - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{a}$

On cherche à maximiser en a $\mathrm{Ln}(L)$

$\underline{\text{Cn}}$: $\frac{\partial \mathrm{Ln}(L)}{\partial a} = 0$ avec $\frac{\partial \mathrm{Ln}(L)}{\partial a} = -\frac{2n}{a} + \frac{n\bar{x}}{a^2}$

$$= \frac{n}{a}\left(-2 + \frac{\bar{x}}{a}\right)$$

et $\frac{\partial \mathrm{Ln}(L)}{\partial a} = 0 \iff \boxed{a = \frac{\bar{x}}{2}}$.

$\underline{\underline{\text{Cs}}}$: $\frac{\partial^2 \mathrm{Ln}(L)}{\partial a^2} \leq 0$ au point critique or

$$\frac{\partial^2 \mathrm{Ln}(L)}{\partial a^2} = \frac{2n}{a^2} - \frac{2n\bar{x}}{a^3} = \frac{2n}{a^2}\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right)$$

et pour $a = \frac{\bar{x}}{2}$, $\frac{\bar{x}}{a} = 2$ et $\left(1 - \frac{\bar{x}}{a}\right) = -1$

d'où $\frac{\partial^2 \mathrm{Ln}(L)}{\partial a^2} \leq 0$ au point $\frac{\bar{x}}{2}$

d'où l'estimateur du M.V : $W = \frac{\bar{X}}{2}$.

Ex 13 :

1°/ On cherche k, de façon que f soit une densité de probabilité :

- $k \geqslant 0$.

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 k x^r\,dx = k \int_0^1 x^r\,dx$

$$= k \left.\frac{x^{r+1}}{r+1}\right|_0^1 = \frac{k}{r+1} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{k = r+1}.$$

- $E(X) = \int_0^1 (r+1)\, x^{r+1}\,dx = (r+1) \left.\frac{x^{r+2}}{r+2}\right|_0^1 = \frac{r+1}{r+2}.$

- $V(X) = \int_0^1 (r+1)\, x^{r+2}\,dx - \left(\frac{r+1}{r+2}\right)^2$

$$= (r+1) \left.\frac{x^{r+3}}{r+3}\right|_0^1 - \left(\frac{r+1}{r+2}\right)^2 = \frac{r+1}{r+3} - \left(\frac{r+1}{r+2}\right)^2$$

$$= \frac{r+1}{(r+3)(r+2)^2}.$$

2°/ Un estimateur T de r par la méthode des moments :

on a $E(X) = \dfrac{r+1}{r+2} = \varphi(r)$

donc $T = \varphi^{-1}(\bar{X}) = \dfrac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1}$

. T converge en proba. vers r.

3°/ Vraisemblance des observations $(x_1, \dots, x_n)$ sachant r :

$$L(x_1, \dots, x_n, r) = (r+1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^r$$

On maximise la fct : $r \longrightarrow \ln(L(x_1, \dots, x_n, r))$

$$= n \ln(r+1) + r \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i).$$

C_N : $\dfrac{\partial \ln(L)}{\partial r} = 0$ avec $\dfrac{\partial \ln(L)}{\partial r} = \dfrac{n}{r+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$

$$= n\left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right)$$

donc : $\dfrac{\partial \ln(L)}{\partial r} = 0 \iff r = -\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - 1$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{x_i}\right) - 1$$

C_S : $\dfrac{\partial^2 \ln(L)}{\partial r^2} \leq 0$ au point critique or $\dfrac{\partial^2 \ln(L)}{\partial r^2} = \dfrac{-n}{(r+1)^2} \leq 0 \quad \forall r$

d'où l'estimateur du M.V : $\omega = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Ln\left(\frac{1}{x_i}\right) - 1$

ω Converge en proba vers r.