Année 2020-2021

GEA1/ GCV1/GM1 — Probabilités et Statistiques

Série n° 2

Exercice 1. Une variable aléatoire X est établie par la loi de probabilité suivante :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0.3	0.05	0.1	0.05	0.2	p

Soit F sa fonction de répartition.

1. Calculer p.
2. Calculer $F(0,5)$.
3. Calculer $E(X)$.
4. Calculer $\sigma(X)$.

Exercice 2. Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F avec

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

1. Tracez le graphe de F.
2. Calculer $P(X = \frac{1}{2})$, $P(X = 1)$, $P\Big(X \in \Big]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\Big]\Big)$.

Exercice 3. Dans une grande surface, on a relevé sur une longue période le nombre d'articles de type A vendus. L'étude statistique permet d'admettre que la variable aléatoire X qui associe à un jour ouvrable choisi au hasard pendant un mois le nombre d'articles de type A vendus ce jour là a une probabilité définie par le tableau suivant.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0.1	0.16	0.25	0.3	0.13	0.05	0.01

1. Représentez graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
2. Calculez l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X. Que représente $E(X)$?

3. Calculez la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

Exercice 4. Dans un aérodrome, la durée du processus d'atterrissage d'un avion, mesuré en minutes, est une variable aléatoire T dont la densité de probabilité est $f(t) = te^{-t}$ pour $t \geq 0$ et 0 sinon.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité..
2. Déterminer les probabilités des événements :
   $(T > 2)$; $(1 < T < 3)$; $(1 < T < 3)$ sachant que $(T < 4)$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[1, e]$ dont la fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \ln x \quad \text{si } x \in [1, e], \quad F(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

1. Calculer la probabilité $P(\frac{3}{2} \leq X \leq 2)$.
2. Déterminer la fonction de densité de X.
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
4. Soit $Y = (\ln X)^2 + 1$. Calculer $E(Y)$.

Exercice 6. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 0 \\ x + 1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ -x + 1 & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

1. Montrez que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
2. Déterminez la fonction de répartition de X, on la note F.
3. Écrivez en fonction de F puis calculer $P(X < -0.5)$, $P(-0.5 \leq X \leq 0.5)$, $P(X > 0.25)$.
4. Montrez que X admet une espérance et une variance que l'on déterminera.