Série n° 3

Exercice 1.
Les fonctions suivantes ont-elles une limite en (0,0) ?

1. $f(x, y) = (x + y)\sin(\dfrac{1}{x^2 + y^2})$.
2. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
3. $f(x, y) = \dfrac{|x + y|}{x^2 + y^2}$.

Exercice 2.
soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y}, & \text{si}(x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer d'après la définition les dérivées partielles de la fonction f au point $(0,\ 0)$.
2. La fonction est-elle continue au point $(0,\ 0)$?

Exercice 3.
soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{si}(x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0, 0)$, on $|f(x, y)| \leq \|(x, y)\| + (\|(x, y)\|)^2$.
2. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.
soit $\Omega = (]0, +\infty[)^2$ et f la fonction définie sur Ω par

$$f(x, y) = e^x \ln(xy), \quad (x, y) \in \Omega.$$

1. Montrer que f est continue sur Ω.
2. Déterminer ses dérivées partielles d'ordre 1 en $(1, e)$.

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2 + 2t, t^2)$. Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$. Démontrer que h est C^1 et exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial h}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 6.

1. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction :

$$f(x, y) = 3x^2y - 4xy,$$

au point $(x, y) = (1, 2)$ le long la direction $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$.

2. Vérifier l'égalité :

$$D_v f(1, 2) = \nabla f(1, 2) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) v_2.$$