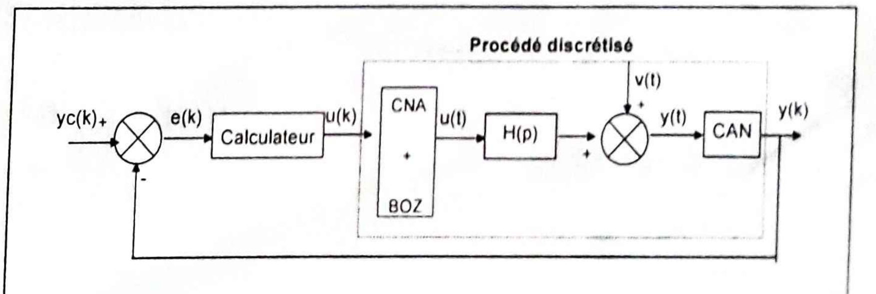
Chapitre 5

Régulation Numérique

I. Principe



Principe de la commande numérique

□ L'ensemble **CNA+BOZ+Procédé+CAN** est interprété comme un procédé discrétisé.

□ Le procédé discrétisé possède une entrée générée par le calculateur et une sortie fournie par .

□ Ce procédé est caractérisé par un modèle dynamique échantillonné qui est relié au modèle continu du procédé.

II. Choix de la période d'échantillonnage

Pour pouvoir reconstituer un signal continu à partir de la séquence discrétisée, il faut que la fréquence d'échantillonnage vérifie la condition de Shannon :

$$f_e > 2f_{max}$$

où f_{max} est la fréquence maximum à transmettre.

Le choix de la fréquence d'échantillonnage pour les systèmes de commande se fait en fonction de la bande passante désirée en boucle fermée.

La bande passante est définie par la pulsation à partir de laquelle le gain à la fréquence nulle est atténué de plus de 3dB.

La règle utilisée pour le choix de la fréquence d'échantillonnage en automatique est la suivante :

$$f_e = (6 \grave{a}\, 25) f_{BP}^{BF}$$

f_{BP}^{BF} désigne la fréquence de la bande passante en boucle fermée.

Exemple

- Pour un système de premier ordre

$$H(p) = \frac{k}{1+Tp}$$

$$f_{BF}^{BP} = \frac{1}{2\pi T}$$

D'après la règle $f_e = (6 \grave{a}\, 25) f_{BP}^{BF}$, on obtient :

$$\frac{T}{4} \leq T_e \leq T$$

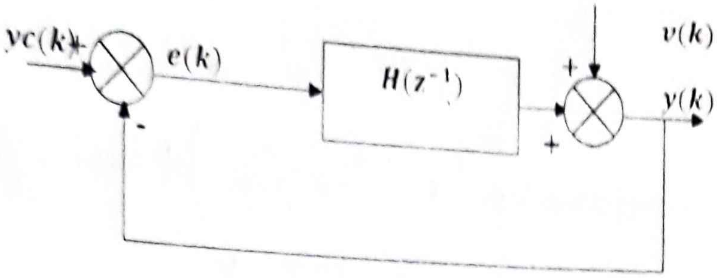
- Pour un système de deuxième ordre

$$H(p) = \frac{k\,\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Pour $\xi \in [0.7 \quad 1]$; $0.25 \leq \omega_0 Te \leq 1.5$

III. Système échantillonné en boucle fermée

III.1. Fonction de transfert en boucle fermée



- La fonction de transfert $H(z^{-1})$ est donnée par :

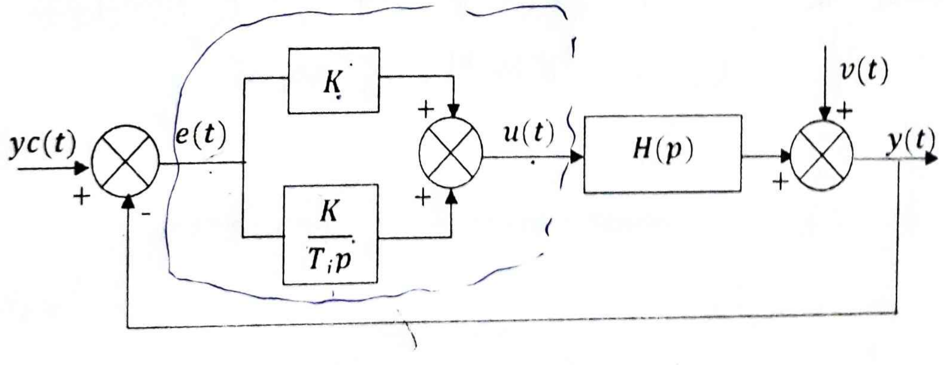
$$H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_{nb} z^{-nb}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_{na} z^{-na}}$$

- La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit $v(k)=0$:

$$H(z^{-1}) = \frac{H(z^{-1})}{1+H(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1}) + B(z^{-1})}$$

III.2. Structure des régulateurs numériques

□ On considère un régulateur ***PI*** analogique défini par la fonction de transfert suivante :



- La loi de commande est donnée par :

$$u(t) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)(y_c(t) - y(t)).$$

■ On peut discrétiser cette loi de commande en utilisant l'approximation suivante :

$$\boxed{\frac{1}{p} \Rightarrow \frac{T_e}{1-z^{-1}}}$$

d'où :

$$u(k) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i} \cdot \frac{T_e}{1-z^{-1}}\right)\left(y_c(k) - y(k)\right)$$

$$u(k) = \cancel{k_p}\left(\frac{k_p\,(1-z^{-1}) + \frac{k_p T_e}{T_i}}{1-z^{-1}}\right)\left(y_c(k) - y(k)\right).$$

$$(1-z^{-1})\,u(k) = \left(k_p\,(1-z^{-1}) + \frac{k_p T_e}{T_i}\right)\left(y_c(k) - y(k)\right).$$

$$S(z^{-1})\,u(k) = T(z^{-1})\,y_c(k) - R(z^{-1})\,y(k)$$

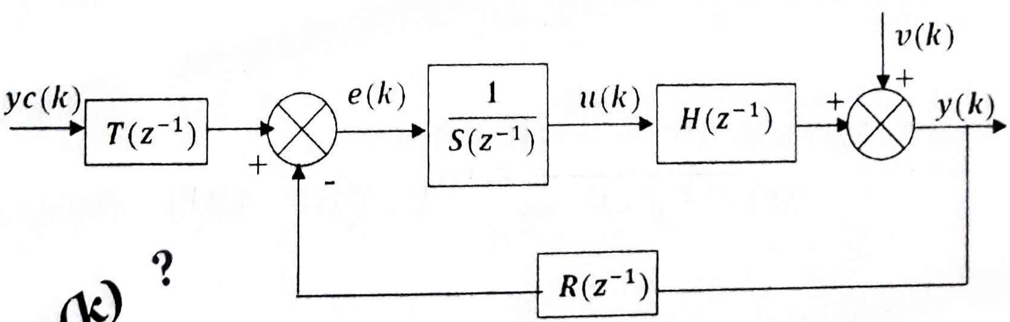
avec :

$$S(z^{-1}) = 1 - z^{-1}$$

$$T(z^{-1}) = R(z^{-1}) = k_p\left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right) - k_p\,z^{-1}.$$

$$T(z^{-1}) = R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1}$$

□ Ceci conduit à la structure canonique des régulateurs numériques



u(k) ?

$$u(k) = -\frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} y(k) + \frac{T(z^{-1})}{S(z^{-1})} y_c(k).$$

□ Si la fonction de transfert de {**CNA+BOZ+Procédé+CAN**} est donnée par :

$$H(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

Alors la fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit alors comme suit :

$$H_{BO}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1})}$$

La fonction de transfert en boucle fermé s'écrit :

$$H_{BF}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}$$

$$H_{BF}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{P(z^{-1})}$$

$$avec\ P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \ldots$$

définit les pôles du système en boucle fermée.

$T(z^{-1})$ introduit un degré de liberté supplémentaire permettent de dissocier les spécifications en poursuite et en régulation.

III.3. Synthèse d'un régulateur numérique

La synthèse du régulateur se traduit par la détermination de *R, S* et *T* afin d'obtenir des fonctions de transfert en boucle fermée vis-à-vis de la consigne et de la perturbation qui permettent de satisfaire les performances imposées.

Exemple : *PI* numérique

- On présente le calcul des coefficients d'un régulateur PI numérique pour la fonction de transfert :

$$H(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}$$

- Le régulateur PI numérique est donné par :

$$S\left(z^{-1}\right) = 1 - z^{-1}$$
$$T\left(z^{-1}\right) = R\left(z^{-1}\right) = r_0 + r_1 z^{-1}$$

$$H_{BF}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{P(z^{-1})}$$

$P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}$: définit les performances désirées en boucle fermée.

$P(z^{-1})$ est choisi comme un polynôme de deuxième ordre. Ceci revient à discrétiser un système continu du deuxième ordre caractérisé par ω_0 *et* ξ

1. Déterminer les paramètres r_0 et r_1 de régulateur.

2. Déduire les paramètres *de PI continu* k_p *et* T_i.

Exe

$A(z^{-1}) \cdot S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1}) = P(z^{-1})$

$= (1+a_1 z^{-1})(1-z^{-1}) + b_1 z^{-1}(r_0 + r_1 z^{-1})$

$= 1 + (a_1 - 1 + r_0 b_1) z^{-1} + (r_1 b_1 - a_1) z^{-2}$

$= 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}$

d'où

$$r_0 = \frac{p_1 - a_1 + 1}{b_1}$$

$$r_1 = \frac{p_2 + a_1}{b_1}$$

Les paramètres de PI continu équivalent sont :

$$K_p = -r_1 \qquad T_i = \frac{-T_e r_1}{r_1 + r_0}$$

III.4. PID numérique

La version de base du régulateur ***PID*** numérique résulte de la discrétisation du ***PID*** continu donné par :

$$C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + \frac{T_d p}{N}} \right)$$

La discrétisation est assurée en utilisant les approximations suivantes :

$$p \Rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T_e} \qquad \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{T_e}{1 - z^{-1}}$$

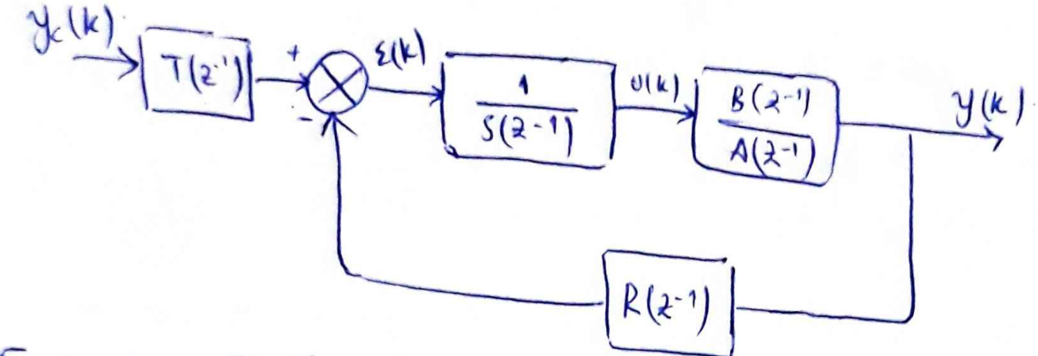
Exercice :

On considère un système défini par la f^{ct} de transfert discret suivante :

$$H(z^{-1}) = z^{-1}\,\frac{0{,}18 + 0{,}21 z^{-1}}{1 - 0{,}606 z^{-1}} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

On définit les performances désirées en BF par le polynome $P(z^{-1}) = 1 - 1{,}6 z^{-1} + 0{,}67 z^{-2}$

1/ PI $\begin{cases} S(z^{-1}) = 1 - z^{-1} \\ R(z^{-1}) = T(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1}. \end{cases}$



$$F_{BF}(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})T(z^{-1})}{A(z^{-1}).S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})}$$

$A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1}) = (1 - 0{,}606 z^{-1})(1 - z^{-1}) + (0{,}18 z^{-1} + 0{,}21 z^{-2})(r_0 + r_1 z^{-1})$

$= 1 - z^{-1} - 0{,}606 z^{-1} + 0{,}606 z^{-2} + 0{,}18 r_0 z^{-1} + 0{,}18 r_1 z^{-2} + 0{,}21 r_0 z^{-2} + 0{,}21 r_1 z^{-3}$

$= 1 + (-1{,}606 + 0{,}18 r_0) z^{-1} + (0{,}606 + 0{,}18 r_1 + 0{,}21 r_0) z^{-2} + 0{,}21 r_1 z^{-3}$

$$\rightarrow \begin{cases} -1{,}6 = -1{,}606 + 0{,}18 r_0 \\ 0{,}67 = 0{,}606 + 0{,}18 r_1 + 0{,}21 r_0 \\ 0 = 0{,}21 r_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{r_1 = 0}$

$\Rightarrow 1{,}6 = 1{,}606 - 0{,}18 r_0 \Rightarrow r_0 = \frac{1{,}6 - 1{,}606}{-0{,}18}$

$\boxed{r_0 = 0{,}03}$

$T(z^{-1}) = R(z^{-1}) = 0{,}03$

(. Suite exercice cours Chap5)

2/

$$U(k) = \frac{1}{S(z^{-1})}\, \mathcal{E}(k)$$

$$U(k) = \frac{T(z^{-1})\, y_c(k) - R(z^{-1})\, y(k)}{S(z^{-1})}.$$

$$S(z^{-1})\, U(k) = T(z^{-1})\, y_c(k) - R(z^{-1})\, y(k).$$

$$(1-z^{-1})\, U(k) = 0{,}03\, y_c(k) - 0{,}03\, y(k).$$

$$\boxed{U(k) = U(k-1) + 0{,}03\, y_c(k) - 0{,}07\, y(k)}$$