

## Chap VI : EFFORT TRANCHANT

Une poutre travaille à l'effort tranchant pur dans une section droite (S), si dans cette section l'effort normal, le moment de flexion et le moment longitudinal sont nuls. C'est une sollicitation rare et toujours limitée à quelques sections droites particulières.

Dans ce chapitre nous étudierons les champs de contraintes, de déformations et de déplacements et énergie potentielle élastique produit par l'effort tranchant dans différents types de sections droites.

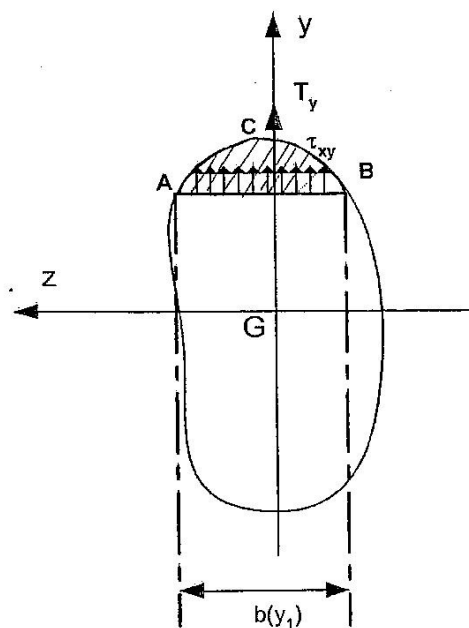
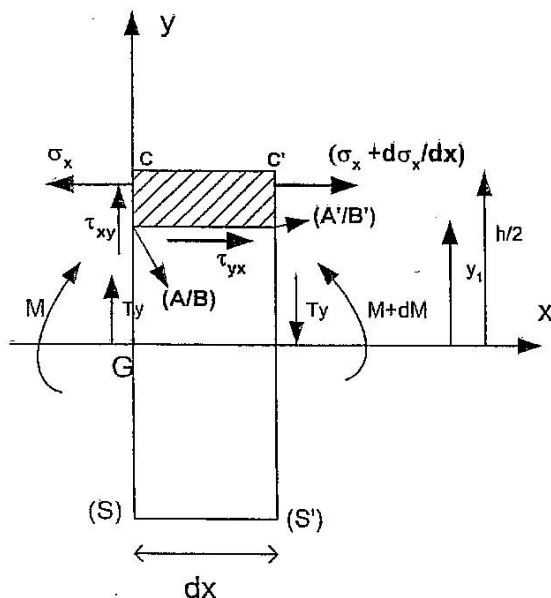
Nous étudierons seulement l'effet de  $T_y$ , la combinaison de  $T_y$  et  $T_z$  pouvant être établie aisément par application du principe de superposition.

### 1- Champ de contraintes

En général l'effort tranchant s'exerce en même temps qu'un moment de flexion. On ne considère que la contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$ , parallèle à l'effort tranchant, que l'on suppose constante sur toute parallèle à l'axe  $Gz$  du moment fléchissant.

$$T_y = \iint_{(s)} \tau_{xy} \cdot ds$$

$$T_z = \iint_{(s)} \tau_{xz} \cdot ds$$



L'équilibre du prisme hachuré compris entre (S) et (S') se traduit par :

Base (S) : contrainte normale  $\sigma_x$ , d'où la force :  $-\iint_{(ABC)} \sigma_x . ds$

Base (S') : contrainte normale  $\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} . dx$ , d'où la force :  $\iint_{(A'B'C')} (\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} . dx) . ds$

Surface latérale intérieure : contrainte tangentielle  $\tau_{yx}$  (notre cas  $\tau_{yx}$ ) d'où la force  $dx . \int_{AB} \tau_{yx} . dl$

Surface latérale extérieure : rien

On en déduit donc :

$$-\iint_{(ABC)} (\sigma_x) . ds + \iint_{(A'B'C')} (\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} . dx) . ds + dx . \int_{AB} \tau_{yx} . dl = 0$$

$$\text{D'où : } \iint_{(A'B'C')} (\frac{d\sigma_x}{dx}) . ds = - \int_{AB} \tau_{yx} . dl$$

$$\text{Or } \sigma_x = \frac{-M_z}{I_z} . y \quad ; \quad \frac{d\sigma_x}{dx} = \frac{-y}{I_z} . \frac{dM_z}{dx} = -\frac{y}{I_z} . T_y$$

$$\text{D'où la relation : } \iint_{(A'B'C')} (\frac{-y}{I_z} . T_y) . ds = \frac{T_y}{I_z} \iint_{(A'B'C')} (-y) . ds = - \int_{AB} \tau_{yx} . dl = -\frac{T_y . A_{z(A'B'C')}}{I_z} = -\frac{T . A_z}{I_z}$$

$$\boxed{\int_{AB} \tau_{yx} . dl = \frac{T . A_z}{I_z}}$$

Formule de BREDT (flux du vecteur cisaillement  $\tau$  sortant de (A'B'C') à travers la ligne (AB))

$$\text{Soit } b(y_1) \text{ la longueur de la courbe (AB) : } \int_{AB} \tau_{yx} . dl = \tau_{yx} . b(y_1) = \frac{T . A_z}{I_z}$$

$$\text{D'où } \boxed{\tau_{yx} = \tau = \frac{T . A_z}{I_z . b(y_1)}}$$

Remarques :

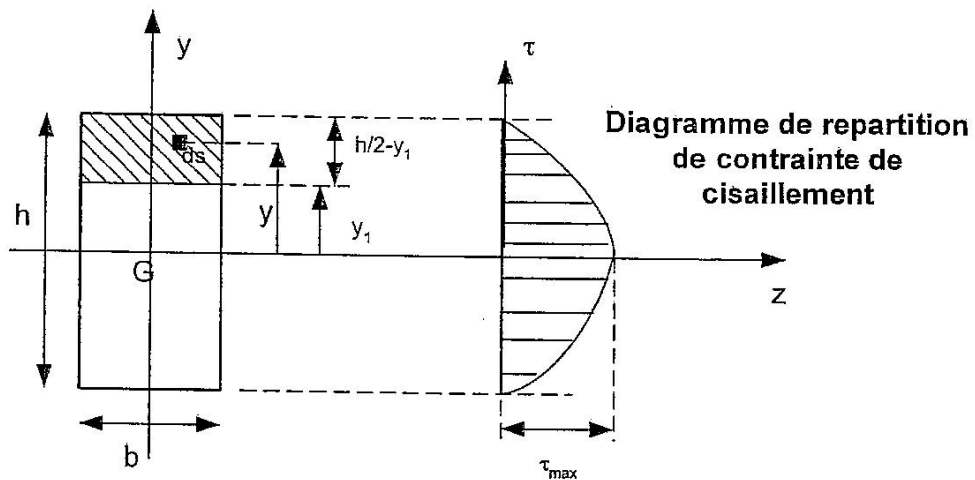
1) Pour une section rectangulaire (b x h) :

$$A_z = b \cdot \left( \frac{h}{2} - y_1 \right) \cdot \left( y_1 + \frac{\frac{h}{2} - y_1}{2} \right) = \frac{b}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

(c'est la surface hachurée multipliée par la distance du centre d'inertie de cette surface à l'axe neutre)

D'où 
$$\tau = \frac{T}{2 \cdot I_z} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

Ce résultat montre que la contrainte de cisaillement varie d'une manière parabolique avec  $y_1$ .



• pour  $y_1=0$  ; on a

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{T}{I_z} \cdot \frac{h^2}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{S}$$

Si on définit la contrainte moyenne de cisaillement  $\tau_{\text{moy}} = \frac{T}{S}$   
avec  $S=b \cdot h$  : la surface de la section de la poutre.

On a  $\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{S} = 1,5 \cdot \tau_{\text{moy}}$

• pour  $y_1=\pm h/2$ , on a

$$\tau = 0$$

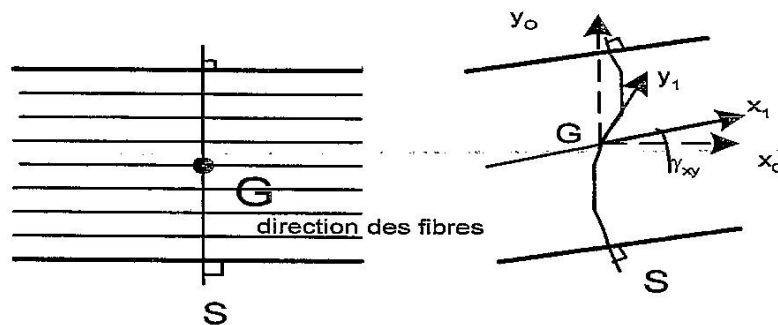
2) En présence de  $T_y$  et  $T_z$ , le champ de contrainte est donné par :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2- Champ de déformation

La contrainte de cisaillement  $\tau_{xy}$  n'étant pas constante (on reste dans le cadre de la théorie simplifiée), il en résulte que la distorsion, égale à la demie-variation de l'angle initialement droit formé par une fibre et la direction de l'effort tranchant. La section droite ne reste donc pas plane, mais se gauchit.

$$\gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{T}{I_z} \cdot \frac{A_z}{b(y_1)}$$



$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{T}{2GJ_z} \left( \frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$  : pour une section rectangulaire varie de la même manière que  $\tau_{xy}$ .  $\gamma_{xy}$  est maximal pour  $y_1 = 0$  ; ( $\gamma_{xy}$  est de l'ordre  $10^{-6}$  rad)

Avec G : module d'élasticité transversale ( $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ )

En présence de  $T_y$  et  $T_z$ , on obtient :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & 0 & 0 \\ \gamma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3- Energie potentielle élastique

$$\frac{dw}{dv} = \frac{1}{2.G} \cdot \tau_{xy}^2$$

En définissant une section réduite  $S_r$  par la relation :  $\frac{1}{S_r} = \frac{1}{I_z^2} \int \frac{A_z^2}{b(y_1)} \cdot dy$

L'expression de la densité linéique d'énergie potentielle élastique devient :  $\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{T^2}{G.S_r}$

### 4- Déplacement vertical

Soit  $v$  : déplacement vertical d'une poutre :  $\frac{dv}{dx} = \frac{T}{G.S_r}$  ; cette relation permet de déterminer la flèche d'une poutre sous l'effet de l'effort tranchant.

