République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Gabès
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès
Département Génie Electrique-Automatique

TD 4 :
Résolution Numériques des fonctions non linéaires

Réalisé par : DEHRI Khadija

Maitre Assistante en Génie Electrique-Automatique

Membre de l'unité de recherche
Commande Numérique des Procédés Industriels (CONPRI)

TD 4 AN

Exercice 1

f est une fonction de classe C^1 sur R

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)=3x^2+2$	$+$
$f(x)=x^3+2x-1$	$-\infty \nearrow +\infty$

f est une fonction croissante et change de signe sur $R \Rightarrow$ il existe une unique racine de f sur R

$$f(0)\,f(1) = -1\times 2 = -2 < 0$$

alors la racine de f existe dans l'intervalle $[1\ 2]$

Principe

Soit f est une fonction continue sur $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ($[a,b]\subset\mathbb{R}$) vérifiant $f(a)\,f(b)<0$,

La méthode de dichotomie consiste à approcher la racine de f par encadrement en réduisant à chaque itération la longueur de l'intervalle $[a,b]$ à la moitié tout en vérifiant le théorème de valeurs intermédiaires

TD 4 AN

Exercice 1

Algorithme de Dichotomie

Entrées : f, a, b, ε

Sortie : x_k

Tant que $|a-b| > \varepsilon$ (ou $|f(x_k)| > \varepsilon$) faire

$x_k = \dfrac{a+b}{2}$

si $f(a) f(x_k) < 0$ alors

$b = x_k$

sinon si $f(b) f(x_k) < 0$ alors

$a = x_k$

fin si

si $f(x_k) = 0$ alors

x_k est une racine de f

fin si

fin tant que

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$f(a^{(k)})$	$f(b^{(k)})$	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
0	0	1	-1	2	0.5	0.125
1	0	0.5	-1	0.125	0.25	-0.4843
2	0.25	0.5	-0.4843	0.125	0.375	-0.1972
3	0.375	0.5	-0.1972	0.125	0.4375	-0.0412
4	0.4375	0.5	-0.0412	0.125	0.46875	0.0405
5	0.4375	0.46875	-0.0412	0.0405	0.453125	-0.00071

Réalisé par : DEHRI Khadija

4

TD 4 AN

Exercice 2

Principe

La méthode de la sécante a le principe que la solution est le point d'intersection de la droite passant par les points $\left(x^{(k-1)},\ f(x^{(k-1)})\right)$ et $\left(x^{(k)},\ f(x^{(k)})\right)$ avec l'axe des abscisses

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)} f\left(x^{(k)}\right)$$

Algorithme

Entrées : $f, x^{(0)}, x^{(1)}$, Nmax

Sortie : $x^{(k)}$

$k = 2$

Tant que $\left|f(x^{(k)})\right| > \varepsilon$ et $k \le$ Nmax faire

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)} f\left(x^{(k)}\right)$$

$k = k+1$

fin tant que

k	$x^{(k-1)}$	$x^{(k)}$	$f(x^{(k-1)})$	$f(x^{(k)})$
1	-1	0	0.4597	-1
2	0	-0.6851	-1	-0.45285
3	-0.6851	-1.25207	-0.45285	1.6495

La méthode de Dichotomie n'utilise que la signe de *f(x)* pour progresser, alors que la méthode de la sécante utilise plus d'informations sur *f(x)* et progressera plus vite.

La méthode de Dichotomie est basé sur le principe des valeurs intermédiaires et toujours convergente alors que la méthode de sécante non.

Réalisé par : DEHRI Khadija

5

TD 4 AN

Exercice 3

Principe

La méthode de fausse positionest basé sur le théorème des valeurs intermédiaires.

La solution est donné par l'abscisse du point d'intersection de la droite passant par les points $\left(a^{(k)},\ f(a^{(k)})\right)$et $\left(b^{(k)},\ f(b^{(k)})\right)$avec l'axe des abscisses

$$x^{(k)} = \frac{f(a^{(k)})b^{(k)} - f(b^{(k)})a^{(k)}}{f(a^{(k)}) - f(b^{(k)})}$$

Algorithme

Entrées : f, a, b, ε; Sortie : $x^{(k)}$

$k = 0$

$a^{(k)} = a, b^{(k)} = b$

Tant que $\left| f(x^{(k)}) \right| > \varepsilon$ faire

$x^{(k)} = \dfrac{f(a^{(k)})b^{(k)} - f(b^{(k)})a^{(k)}}{f(a^{(k)}) - f(b^{(k)})}$

si $f(a^{(k)})f(x^{(k)}) < 0$ alors

$a^{(k+1)} = a^{(k)}$

$b^{(k+1)} = x^{(k)}$

sinon si $f(b^{(k)})f(x^{(k)}) < 0$ alors

$a^{(k+1)} = x^{(k)}$

$b^{(k+1)} = b^{(k)}$

fin si

fin tant que

Les deux méthodes sont basées sur le théorème des valeurs intermédiaires Donc *convergentes*

La solution pour la méthode de la fausse position dépend de l'intervalle [a b] et de f alors que la solution Dichotomie dépend uniquement de l'intervalle [a b]

TD 4 AN

Exercice 3

$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$f(a^{(k)})$	$f(b^{(k)})$	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
-2.4	-1.6	0.49071	-0.1981	-1.83007	-9.52078×10^{-3}
-2.4	-1.83007	0.49071	-9.52078×10^{-3}	-1.84092	-4.0423×10^{-4}
-2.4	-1.84092	0.49071	-4.0423×10^{-4}	-1.84138	-1.7067×10^{-5}

TD 4 AN

Exercice 4

f est une fonction de classe C^2 sur J

	$\frac{\pi}{2}$ ... 2.5
$f''(x) = -\sin(x) - 0.4$	$-$
$f'(x) = \cos(x) - 0.4x$	-0.628 ↘ -1.8
$f(x) = \sin(x) - 0.2x^2$	0.5065 ↘ -0.6515

f est une fonction décroissante et change de signe sur $\left[\frac{\pi}{2}\ 2.5\right]$

$\Rightarrow$ il existe une unique racine de f sur $\left[\frac{\pi}{2}\ 2.5\right]$

$$\boxed{g_1(x) = x \Leftrightarrow \sin(x) - 0.2x^2 + x = x \Leftrightarrow f(x) = 0}$$

	$\frac{\pi}{2}$ ... 2.5
$g''_1(x) = -\sin(x) - 0.4$	$-$
$g'_1(x) = \cos(x) - 0.4x + 1$	0.3716 ↘ -0.8011

$|g'_1(x)| \leq 0.8011, x \in \left[\frac{\pi}{2}\ 2.5\right]$

La méthode de point fixe converge

TD 4 AN

Exercice 4

k	$x^{(k)}$	$g_1(x^{(k)})$
0	2.5	1.848472
1	1.848472	2.126797
2	2.126797	2.071516
3	2.071516	2.090517
4	2.090517	2.084422

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = g_{Newt}\left(x^{(k)}\right)$$

$f(x) = \sin(x) - 0.2x^2$

$f'(x) = \cos(x) - 0.4x$

f est une fonction de classe C^2 sur $\left[\frac{\pi}{2}\ 2.5\right]$

$$f(\frac{\pi}{2})\, f(2.5) = 0.5065 \times (-0.6515) < 0$$

$$f'(x) = \cos(x) - 0.4x < 0, \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}\ 2.5\right]$$

$$f''(x) = -\sin(x) - 0.4 < 0, \quad \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}\ 2.5\right]$$

$$f'(x)\, f''(x) > 0\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}\ 2.5\right]$$

donc la méthode de Newton converge sur $\left[\frac{\pi}{2}\ 2.5\right]$

TD 4 AN

Exercice 4

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
0	2.5	-0.651527
1	2.13827	-7.1178×10^{-2}
2	2.08716606	-1.63508×10^{-3}
3	2.085935309	-9.62353×10^{-7}
4	2.085934584	-2.56658×10^{-10}
5	2.085934584	-2.56658×10^{-10}

TD 4 AN

Exercice 5

Considérons la fonction suivante : $f(x) = e^{x} - x - 2$

1- Montrer que la solution de f est les points fixes des équations

$g_1(x) = e^{x} - 2$ $\qquad$ $g_2(x) = \ln(2 + x)$

2- Dans quel intervalle de longueur 1 se trouve la racine de f

3- En déduire si les méthodes de points fixes utilisant $g1$ et $g2$ convergent.

4- Calculer les 2 itérations à partir de $x0 = 1$ pour chacune des 2 méthodes de point fixe.

5- Pour quelle(s) valeur(s) de $x0$ ne peut-on pas démarrer la méthode de Newton

6- Calculer les 2 itérations à partir de $x0 = 1$ par Newton.

TD 4 AN

Exercice 5

$f(x) = e^x - x - 2$ $\boxed{g_1(x) = x \Leftrightarrow e^x - 2 = x \Leftrightarrow f(x) = 0}$

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) + x = x$$

$$e^x - x - 2 = 0 \Longleftrightarrow e^x = x + 2 \Longleftrightarrow x = \ln(x+2) \quad \boxed{\Leftrightarrow g_2(x) = x}$$

f est une fonction de classe C^2 sur $[1\ 2]$

$f(1)f(2) = -0.2817 \times (3.3891) < 0$

$g_1'(x) = e^x$ $1 \le x \le 2 \Leftrightarrow e \le e^x \le e^2$ $\Leftrightarrow 2.7183 \le g_1'(x)$ donc la méthode de point fixe par g_1 diverge sur $[1\,2]$

$g_2'(x) = \dfrac{1}{2+x}$ $1 \le x \le 2 \Leftrightarrow 3 \le 2 + x \le 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{2+x} \le \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow g_2'(x) < 1$

donc la méthode de point fixe par g_2 converge sur $[1\,2]$

Réalisé par : DEHRI Khadija 12

TD 4 AN

Exercice 5

$f(x) = e^x - x - 2$

$g_1(x) = e^x - 2$ $g_2(x) = \ln(2 + x)$

k	$x^{(k)}$	$g_1(x^{(k)})$
0	1	0.7183
1	0.7183	0.0509
2	0.0509	-0.9478

k	$x^{(k)}$	$g_2(x^{(k)})$
0	1	1.0986
1	1.0986	1.1310
2	1.1310	1.1414

$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = g_{\text{Newt}}\left(x^{(k)}\right)$ $f'(x) = e^x - 1$

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
0	1	-0.2817
1	1.1639	0.0498
2	1.1464	4.4386×10^{-4}

Réalisé par : DEHRI Khadija 13