D. I l... P. S

Exercices

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\,dt$

1/ : justifier l'existence de F
2/ : Justifier que F est de C^1.
3/ : En déduire l'expression F.

Exercice 2 :

On pose :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x > 0$:

$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^n}\,dt$

1/ justifier l'existence de I_n.
2/ calculer $I_1(x)$
3/ Mq I_n est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et retrouver une relation entre I'_n et I_{n+1}
4/ En déduire $\exists \lambda_n$ tq : $\lambda_n(x) = \frac{d_n}{x^{2n-1}}$.

• Connection.

Exercice 1 :

1) 3° justification :

Les propriété de Hausdorff sont à approcher.

fonction va être : de $? \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$.

La tribu qui en gendre un tribu = c'est un tribu.

• $\sigma_E(\sigma_E(F)) = \sigma_E(F)$

•) :

espace de borel $\mathbb{R}^2$:

si $\mathcal{B}$ $\mathcal{E} = \mathcal{E}' = \mathbb{R}$.

$\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mathcal{B}(]-\infty, a[)$

$\mathcal{B}(]a, b[)$.

Les extrémités sont libres ⚠

si f : , $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ si on travaille avec $\mathbb{R}$ on choisit l'un.

③ image réciproque d'un ouvert si f est un ouvert $\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

• si $f\ (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

continu

$\Rightarrow$ f est borélien

$\{a \leq f \leq b\} = f^{-1}([a, b])$

$\Rightarrow$ si $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ mme faut pas

conclure continu

$\left(f : (\mathbb{R}, S) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \right.$ borélienne

$f^{-1}(]a, +\infty[)$: est un ouvert $\in S$?

Permutation, lim, $\int$.

+ convergence dominé.

- soit $f_n : (E, \mathcal{F}, \mu) \to \mathbb{R}$.

tq : $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f$ P.P et $\exists g$ μ-intégrable positive sur E.

tq $|f_n(x)| \leq g(t)$ il faut disparaître n.

$\implies \lim_{n \to +\infty} \int f_n(x) . d\mu(x) = \int_E \lim f_n(x)$

Permutation : $\iint f(x,y) \, d\mu(x) \, d\mu(y)$.

- Fubini :

soit f une fonction mesurable,

~~$\mu_1 \times \mu_2$~~ :

si $\mu_1 \otimes \mu_2$: une intégrable alors :

$$\int_E \left(\int_F f(x,y) \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) .$$

alors : $= \int_F \left(\int_E (f(x,y) \, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)$

Tonelli :

f est mesurable positive alors.

①. $\left[\sum_{n \geq 0} \int f_n \, d\mu(x) \to \text{si } f_n \text{ est mesurable. Positive} \right]$.

pareil chose il faut trouver :

Tonelli fait d'abord.

$\to \sum \int$ si $\sum \int |f_n| < \infty$.

$\to \sum \int = \int \sum$.

continuité sous signe $\int$:

$$F(x) = \int_E f(x,y)\, d\mu(y).$$

(1) : F est déf $\Leftrightarrow \int f < +\infty$

$\Leftrightarrow$ f est μ intégrable sur E,

(2) F est continu $\Leftrightarrow$

$y \mapsto f(x,y)$ est mesurable sur E..

$x \mapsto f(x,y)$ est $\mathcal{C}$ sur E.

et $|f(x,y)| \leq \underbrace{g(y)}_{\geq 0}$: on peut travailler sur un compact.

positive et intégrable sur E..

Dérivabilité :

$y \mapsto f(x,y)$ mesurable.

$x \mapsto f(x,y)$ dérivable sur E $/ x$.

et $\exists h$ μ-intégrable sur E tq :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right| \leq h(y),$$

$\Rightarrow$ F est dérivable et

$$F'(x) = \int_E \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, d\mu(y)..$$

exercice 3

1

Soit $F(x) = \int^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$

1) Justifier l'existence de F.

2) // que F est C^1.

3) en déduire l'expression de F.

exercice 2 :

on pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, x > 0$

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2+t^2)^n}$$

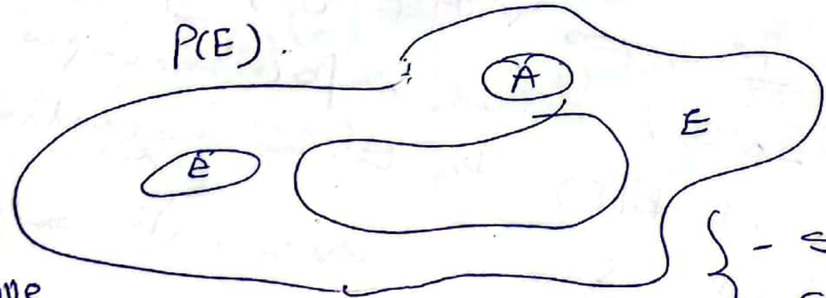
1) Justifier l'existence de I_n.

2) Calculer $I_1(x)$

3) Mq I_n est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et retrouver une relation entre I_n' et I_{n+1}.

4) en déduire $\exists \lambda_n$ Tq $I_n(x) = \frac{\lambda_n}{x^{2n-1}}$:

chap I :



$A \subset E$

$A \in P(A)$

$\mathcal{T}$: famille

$\begin{cases} \text{Si } \emptyset \in \mathcal{T} \\ \text{- Si } A \in \mathcal{T} \Rightarrow C_A \in \mathcal{T} \\ \text{Si } (A_n) \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{T} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- la plus petite tribu sur E

$\rightarrow \mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$

la plus grande tribu sur E

$\rightarrow \mathcal{T} = \{\emptyset, P(E)\}$.

$\Rightarrow A \subset E \Rightarrow \mathcal{T} = \{\emptyset, E, A, C_A\} = \sigma_E(A)$

$\Rightarrow \sigma_E(\{A\})$.

- Soit E un espace ; $\{A\}$ une famille sur E

$\sigma_E(A) = \sigma_E(\{A\})$ c'est la plus petite Tribu contenant $\{A\}$ au sens de l'inclusion.

Si $\mathcal{T}$ une Tribu qui contient $\{A\}$ $\Rightarrow$ $\Gamma_E(A) \subset \Gamma$

Soit S_1 et S_2 deux familles de E telque

$S_1 \subset S_2 \Rightarrow \Gamma_E(S_1) \subset \Gamma_E(S_2)$

- Si $\mathcal{F}$ tribu $\Gamma_E(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

$(E, \mathcal{T})$: espace mesurable

Γ : tribu de E

$A \in \mathcal{T} \Rightarrow$ A est appelé une partie $\mathcal{T}$-mesurable ou mesurable.

$A \in \mathcal{T}$
mesurable.

$$f : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (E', \mathcal{T}') \ni A'$$
$$A \longrightarrow f(A)$$ est mesurable.

$\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}$.

ie $\Rightarrow \forall A' \in \mathcal{T}', f^{-1}(A') \in \mathcal{T}$.

$\rightarrow$ Si E est un espace métrique et $B(E)$ la tribu engendré par la famille des ouverts de E. (aussi bien que ~~ouverts~~) fermés.

$$B(E) = B(]-\infty, a[) \quad a \in \mathbb{R}$$
$$= B(]a, +\infty[)$$
$$= B(]a, b[) \quad a, b \in \mathbb{R}$$
$$= B([a, b]) = B([a, +\infty[)$$

$$f^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{T}'$$
$\subset \mathcal{T}'$