Examen 6 : Estimation par Moindres Carrés d'un Modèle Linéaire

Exercice 3 : Estimation des Coefficients d'un Modèle Linéaire

Soit un ensemble de points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$ issus d'un modèle linéaire bruité :

$$y = ax + b + \text{bruit}$$

Objectif : Estimer les paramètres a et b en utilisant la méthode des moindres carrés.

Solution Étape par Étape

1. **Modèle des Moindres Carrés :**
   - Nous cherchons les valeurs de a et b qui minimisent la somme des erreurs quadratiques :

$$J(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - (ax_i + b))^2$$

2. **Calcul des Équations Normales :**
   - En dérivant $J(a, b)$ par rapport à a et b et en annulant les dérivées, on obtient le système :

$$a = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{N}$$

3. **Application Numérique :**
   - Pour un ensemble donné de valeurs (x_i, y_i), on calcule a et b en remplaçant dans les formules ci-dessus.
4. **Résultat Final :**
   - Les coefficients a et b obtenus fournissent la droite d'ajustement optimale pour les données.

Examen 4 : Analyse Spectrale d'un Signal Sinusoïdal

Exercice 1 : Calculer le Spectre d'Amplitude d'un Signal Sinusoïdal

Soit un signal sinusoïdal discret $x(n) = 5\cos(0.2\pi n + \pi/4)$.

Objectif : Déterminer le spectre d'amplitude du signal en utilisant la transformée de Fourier discrète (TFD).

Solution Étape par Étape

1. **Forme de la Transformée de Fourier :**
   - Rappelons que pour un signal $x(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi)$, la TFD produira des pics aux fréquences $\pm\omega_0$.
   - Pour $x(n) = 5\cos(0.2\pi n + \pi/4)$, l'amplitude $A = 5$ et la fréquence angulaire $\omega_0 = 0.2\pi$.
2. **Calcul du Spectre d'Amplitude :**
   - La TFD de $x(n)$ donnera deux pics symétriques autour de $\pm\omega_0 = \pm 0.2\pi$.
   - L'amplitude de chaque pic est égale à $A/2 = 5/2 = 2.5$.
3. **Résultat :**
   - Le spectre d'amplitude de $x(n)$ présente deux pics de 2.5 à $\omega = \pm 0.2\pi$.

Exercice 2 : Conception d'un filtre passe-bande par transformation bilinéaire

On souhaite concevoir un filtre passe-bande en utilisant la transformation bilinéaire pour transformer un filtre analogique passe-bande.

1. **Filtre analogique :** Le filtre analogique est défini par sa fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

2. **Transformation bilinéaire :** Appliquer la transformation bilinéaire $s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ pour obtenir le filtre numérique $H(z)$.

3. **Choix de T :** Discuter de l'influence du paramètre T (période d'échantillonnage) sur la bande passante du filtre.

Solution :

1. **Filtre analogique :** On a $H(s) = \frac{s}{s^2+s+1}$.

2. **Transformation bilinéaire :** En appliquant $s = \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$, la fonction de transfert devient :

$$H(z) = \frac{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{\left(\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1}$$

   Simplifier cette expression pour obtenir une forme de $H(z)$ plus utilisable en fonction de z.

3. **Impact de T :** Le paramètre T influence la bande passante du filtre passe-bande numérique. En diminuant T, la bande passante augmente, et en augmentant T, elle diminue. Ce choix doit être fait en fonction des spécifications de filtrage souhaitées.

Examen 2 : Questions et Solutions

Question 1

Énonce : Qu'est-ce que l'approximation de Padé, et comment est-elle utilisée po
?

Solution :
L'approximation de Padé est une technique d'approximation qui utilise un rappo pour représenter une fonction de manière plus précise que la série de Taylor. Elle modéliser des signaux complexes, en particulier ceux qui comportent des singul comportements de longue durée. En traitement de signal, elle permet d'approch ou non périodique par une forme rationnelle, simplifiant ainsi l'estimation de ses principaux.

Question 2

Énonce : Décrivez comment la droite affine est utilisée pour vérifier la qualité de

Solution :
La droite affine montre la relation entre les valeurs estimées par le modèle et les signal. Elle est tracée en représentant les valeurs observées sur un axe et les vale autre. Si les points sont proches de cette droite, cela signifie que l'estimation est l'alignement est fort, meilleure est la qualité de l'estimation.

Question 3

Énonce : Pour un signal donné $x(n) = A\cos(\omega n + \phi)$, expliquez comment ol utilisant la méthode des moindres carrés.

Solution :

1. **Définition de J :** J est la fonction de coût, calculée comme la somme des c entre les valeurs observées et le modèle : $J = \sum(x_{\text{observé}}(n) - x_{\text{modèle}}($
2. **Minimisation de J :** En appliquant les moindres carrés, on trouve les valeur paramètres A, ω, et ϕ qui minimisent J.
3. **Valeur de $J_{\min}$:** Après minimisation, $J_{\min}$ est la valeur de J obtenue avec l optimaux, indiquant la qualité de l'ajustement du modèle.

Examen 4 : Estimation et Filtrage en Traitement du Signal

Examen 1 : Estimation d'un Signal Sinusoïdal avec Moindres Carrés

Exercice 1 : Estimation d'un Signal Sinusoïdal

Soit un signal sinusoïdal bruité donné par :

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi) + b(n)$$

où A est l'amplitude, ω_0 est une fréquence angulaire fixe, ϕ est la phase, et $b(n)$ représente le bruit aléatoire.

Objectif : Utiliser la méthode des moindres carrés pour estimer les paramètres A et ϕ du signal $x(n)$.

Solution Étape par Étape

1. **Modélisation du signal :**
   - Le signal peut être réécrit comme :
     $$x(n) = A\cos(\omega_0 n + \phi) + b(n)$$
   - Pour simplifier, nous réécrivons $x(n)$ en fonction de deux inconnues A et ϕ.
2. **Transformation du problème :**
   - Exprimons $\cos(\omega_0 n + \phi)$ en fonction de $\cos(\omega_0 n)$ et $\sin(\omega_0 n)$:
     $$x(n) = A\cos(\omega_0 n)\cos(\phi) - A\sin(\omega_0 n)\sin(\phi) + b(n)$$
   - Posons $a = A\cos(\phi)$ et $b = -A\sin(\phi)$, de sorte que $x(n)$ devient :
     $$x(n) = a\cos(\omega_0 n) + b\sin(\omega_0 n) + b(n)$$
3. **Formulation des équations normales :**
   - Pour estimer a et b, nous minimisons la somme des erreurs quadratiques entre les valeurs observées $x(n)$ et le modèle.
   - Écrivons les équations normales pour a et b :
     $$a = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos(\omega_0 n)}{\sum_{n=0}^{N-1}\cos^2(\omega_0 n)}$$
     $$b = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin(\omega_0 n)}{\sum_{n=0}^{N-1}\sin^2(\omega_0 n)}$$
4. **Calcul de A et ϕ :**
   - Une fois a et b déterminés, nous retrouvons A et ϕ en utilisant :
     $$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$
     $$\phi = \arctan\left(\frac{-b}{a}\right)$$

de la vraie valeur.

Résumé : Traitement de Signal - Moindres Carrés et Estimation de Signaux

1. Théorème des Moindres Carrés

Le théorème des moindres carrés est une méthode d'estimation des paramètres d'un modèle en minimisant l'erreur quadratique entre les valeurs mesurées et les valeurs prédites. Dans le contexte du traitement du signal :

- Il est utilisé pour estimer des paramètres de signaux en présence de bruit.
- Il vise à obtenir une "meilleure approximation" du signal réel.

2. Approximation de Padé

L'approximation de Padé utilise un rapport de polynômes pour approcher une fonction, souvent plus précise que la série de Taylor. Elle aide à représenter un signal $x(n)$ par un modèle rationnel, utile pour simplifier l'analyse d'un signal avec des caractéristiques spécifiques.

3. Estimation d'un Signal Sinusoïdal

Pour un signal sinusoïdal $x(n) = A\cos(\omega n + \phi)$:

- **Paramètres non linéaires** : Amplitude A et fréquence ω.
- **Paramètre linéaire** : Phase ϕ.
- On utilise les moindres carrés pour ajuster le modèle en minimisant l'erreur.

Étapes de l'estimation :

1. Créer la **matrice de design** avec les données mesurées.
2. Résoudre l'équation pour minimiser l'erreur entre le modèle et le signal mesuré.

4. Excès de Bruit

Le bruit peut affecter la précision de l'estimation. En utilisant la régularisation ou des filtres, on réduit l'impact du bruit sur l'estimation.

5. Droite Affine

Utilisée pour représenter graphiquement la relation entre les valeurs observées et les valeurs estimées, aidant à évaluer la qualité de l'estimation.

6. Qualité de l'Estimation

La qualité est mesurée par l'erreur résiduelle. Plus l'erreur est faible, meilleure est l'estimation.

7. Écriture Matricielle de J et $J_{\min}$

- J : Fonction de coût, exprimée comme $J = \sum \text{erreurs}^2$.
- $J_{\min}$: Valeur minimale de J après l'optimisation des paramètres.

Examen 1 : Questions et Solutions

Question 1

Énonce : Expliquez le théorème des moindres carrés et comment il est appliqué pour estimer un signal bruité.

Solution :

Le théorème des moindres carrés est une technique d'estimation qui consiste à minimiser la somme des carrés des erreurs entre les valeurs observées et le modèle prédictif. En traitement de signal, on utilise cette méthode pour ajuster un modèle sinusoïdal, par exemple, afin de trouver les paramètres (amplitude, fréquence, phase) en minimisant l'effet du bruit. Cette méthode produit une estimation des paramètres qui réduit la différence entre le signal observé et le signal estimé.

Question 2

Énonce : Un signal bruité $x(n)$ est donné par $x(n) = A\cos(\omega n + \phi) + \text{bruit}$. Décrivez les étapes pour estimer A, ω, et ϕ en utilisant les moindres carrés.

Solution :

1. **Matrice de Design** : Construire une matrice où chaque ligne représente une mesure du signal.
2. **Formulation du Modèle** : Formuler $x(n)$ en fonction des paramètres à estimer.
3. **Minimisation de l'Erreur** : Utiliser la méthode des moindres carrés pour obtenir les valeurs de A, ω, et ϕ qui minimisent l'erreur quadratique entre le signal observé et le modèle.
4. **Résolution** : Résoudre l'équation résultante pour obtenir les valeurs estimées des paramètres.

Question 3

Énonce : Expliquez l'impact du bruit sur l'estimation des paramètres et une méthode pour le réduire.

Solution :

Le bruit introduit des perturbations dans les données mesurées, ce qui peut fausser l'estimation des paramètres. Pour le réduire, on utilise des méthodes comme la **régularisation**, qui ajoute un terme au modèle pour limiter l'effet des valeurs extrêmes, ou des filtres spécifiques pour réduire le bruit.

Exercice 2 : Spécification de filtre passe-bas

Un filtre passe-bas idéal avec une phase linéaire a une réponse fréquentielle $H(e^{j\omega})$ qui doit être spécifiée pour respecter certaines propriétés.

1. **Forme de la réponse en fréquence :**
   - Soit $H(e^{j\omega})$ la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas idéal. Écrivez $H(e^{j\omega})$ pour un filtre passe-bas de phase linéaire. Utilisez une fonction en escalier définissant les valeurs de $H(e^{j\omega})$ dans la bande passante et la bande coupée.
   - **Indice :** La phase linéaire peut être représentée par un décalage en temps de la forme $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\omega n_0}$, où n_0 est le décalage de phase.
2. **Cas non-causal et instable :**
   - En supposant que la réponse impulsionnelle (RI) $h(n)$ est non causale, déterminer la forme de $h(n)$ si $H(e^{j\omega})$ est tel que $h(n)$ est centré autour de $n = 0$.
   - Étudiez également le cas où $H(e^{j\omega})$ pourrait mener à une instabilité du filtre. Que se passe-t-il si les pôles de $H(z)$ sont en dehors du cercle unité ?

Solution :

1. **Réponse en fréquence $H(e^{j\omega})$:**
   - Pour un filtre passe-bas idéal, on peut spécifier :

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{pour } |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

   - La phase linéaire est introduite par un facteur $e^{-j\omega n0}$, qui représente un décalage temporel.
2. **Réponse impulsionnelle (RI) dans les cas non-causal et instable :**
   - La **RI non-causale** de $h(n)$ aura des valeurs pour $n < 0$, ce qui peut poser des problèmes de réalisation physique, car les systèmes réels nécessitent la causalité.
   - **Instabilité :** Si les pôles de $H(z)$ sont en dehors du cercle unité, le système est instable car la réponse impulsionnelle ne converge pas vers zéro.

Examen 3 : Approximation de Padé et Filtrage

Exercice 1 : Approximation de Padé de second ordre

Un signal $x(n)$ peut être approximé par une **approximation de Padé de second ordre.** On souhaite trouver les valeurs des coefficients de cette approximation dans le domaine de z.

1. **Approximation de Padé de second ordre :**
   - Soit $H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$.
   - Trouver les valeurs des coefficients a_0, a_1, a_2, b_1, et b_2 qui minimisent l'erreur entre $x(n)$ et $H(z)$.
   - **Indice :** Utiliser les équations obtenues par une expansion en série de Taylor autour de $z = 1$ pour résoudre les coefficients.
2. **Application pratique :**
   - Donner la réponse en fréquences $H(e^{j\omega})$ en termes de a_j et b_j pour interpréter la réponse fréquentielle de ce système approximé.

Solution :

1. **Équations d'approximation de Padé :**
   Effectuer une expansion de $x(n)$ autour de $z = 1$ et obtenir les coefficients a_0, a_1, a_2, b_1, et b_2
   .
2. **Réponse en fréquence :**

$$H(e^{j\omega}) = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-j2\omega}}{1 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-j2\omega}}$$

   Identifier les valeurs qui conduisent à une bonne approximation du signal dans la bande de fréquences souhaitée.

Résumé : Traitement de Signal - Moindres Carrés et Estimation Pratique

1. Théorème des Moindres Carrés

Le théorème des moindres carrés est utilisé pour estimer les paramètres d'un modèle (comme un signal sinusoïdal) en minimisant la somme des carrés des erreurs entre les observations $x(n)$ et le modèle $\hat{x}(n)$.

Formule de base :

$$\text{Erreur quadratique } J = \sum_{n=1}^{N} (x(n) - \hat{x}(n))^2$$

où J est minimisé pour trouver les meilleurs paramètres estimés.

Démarche pratique :

1. **Définir le modèle** : Déterminer la forme du signal, par exemple $x(n) = A\cos(\omega n + \phi)$.
2. **Écrire l'équation d'erreur** : Calculer l'erreur entre $x(n)$ et le modèle.
3. **Minimisation** : Résoudre pour les paramètres qui minimisent l'erreur.

---

2. Estimation d'un Signal Sinusoïdal : Exemple Pratique

Signal donné : $x(n) = A\cos(\omega n + \phi) + \text{bruit}$

- **Objectif** : Estimer les paramètres A, ω, et ϕ d'un signal sinusoïdal bruité en utilisant les moindres carrés.
- **Paramètres** :
  - A (Amplitude) : Non linéaire
  - ω (Fréquence) : Non linéaire
  - ϕ (Phase) : Linéaire

Démarche pratique :

1. **Construction de la Matrice de Design** :
   Si on suppose un signal discret mesuré sur N points :
   - La matrice de design $\mathbf{X}$ pour ce modèle pourrait inclure des termes $\cos(\omega n)$ et $\sin(\omega n)$ pour une estimation linéaire.
2. **Minimisation de l'erreur** :
   On résout pour A et ϕ en utilisant :
   $$\hat{\theta} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$
   où $\mathbf{y}$ est le vecteur des observations $x(n)$, et $\hat{\theta}$ contient les estimations.
3. **Calcul de l'erreur minimale** :
   Le coût minimal $J_{\min}$ est obtenu par l'erreur résiduelle minimale :
   $$J_{\min} = \sum_{n=1}^{N} (x(n) - \hat{x}(n))^2$$

Examen 1 : Estimation Pratique

Question 1 :

On a un signal sinusoïdal bruité $x(n) = 3\cos(2\pi \cdot 0.5 \cdot n + 0.1) + \text{bruit}$ observé sur $N = 5$ points :
$x = [2.8, 3.0, -3.1, -2.9, 2.7]$

1. **Estimez les paramètres A, ω, et ϕ** à partir des observations en utilisant les moindres carrés.
2. **Calculez l'erreur résiduelle** pour vérifier la qualité de l'estimation.

Solution :

1. **Matrice de Design** : Construire $\mathbf{X}$ avec les termes de $\cos$ et $\sin$. Par exemple, pour $\omega = 2\pi \times 0.5$, on a :
   $$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \cos(0.5 \cdot 2\pi \cdot 1) & \sin(0.5 \cdot 2\pi \cdot 1) \\ \cos(0.5 \cdot 2\pi \cdot 2) & \sin(0.5 \cdot 2\pi \cdot 2) \\ \cos(0.5 \cdot 2\pi \cdot 3) & \sin(0.5 \cdot 2\pi \cdot 3) \\ \cos(0.5 \cdot 2\pi \cdot 4) & \sin(0.5 \cdot 2\pi \cdot 4) \\ \cos(0.5 \cdot 2\pi \cdot 5) & \sin(0.5 \cdot 2\pi \cdot 5) \end{bmatrix}$$
2. **Résolution** : Résoudre pour A et ϕ en minimisant J.
3. **Erreur résiduelle** : Calculer $J_{\min}$ et analyser la qualité de l'estimation.

Examen 2 : Approximation de Padé et Bruit

Question 1 :

Pour un signal $x(n) = 2\cos(0.7 \cdot n)$ affecté par un bruit faible, décrivez comment utiliser l'approximation de Padé pour obtenir une estimation lisse.

Solution :

1. **Modèle d'approximation** : On représente $x(n)$ par un rapport de polynômes $P(n)/Q(n)$.
2. **Matrice de Design** : Inclure des termes du modèle rationalisé.
3. **Réduction du bruit** : Obtenez les coefficients de P et Q pour lisser le signal tout en préservant les caractéristiques principales du signal original.