ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE GABES

Epreuve de

MECANIQUE DES FLUIDES

EXAMEN

Année 2020-2021

Mercredi 13 janvier 2021

Durée : 2h00

Classes : GCV1A-GCV1B

B. Askri

Les documents ne sont pas autorisés

EXERCICE 1 (barème indicatif : 6 pts)

Le barrage représenté sur la **Figure 1** est constitué d'une structure en équerre, de hauteur H et de largeur L, posée au sol. Elle permet de retenir une hauteur H d'eau. On se propose de déterminer le rapport critique entre les deux dimensions H et L permettant d'éviter tout risque de basculement autour de l'axe de pivotement matérialisé par le point O situé à l'extrémité droite de sa base. On pourra raisonner sur une épaisseur unité dans la direction perpendiculaire au plan du schéma.

1

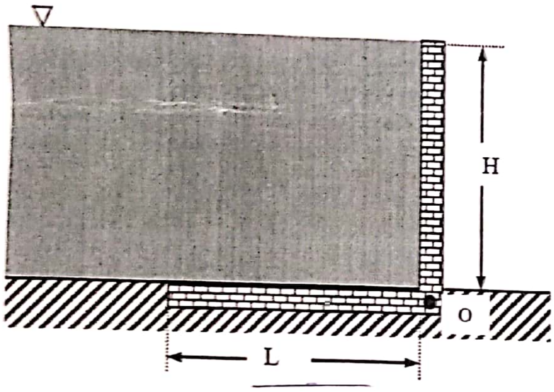


Figure 1

1. Calculer la force hydrostatique s'exerçant sur la partie verticale de l'équerre et déterminer son point d'application A.
2. Exprimer la force de pression s'exerçant sur la partie horizontale de l'équerre en supposant que seul le poids de l'eau entre en jeu. Déterminer le point d'application B de cette force.
3. Après avoir évalué les moments par rapport à l'axe de pivotement de chacune de ces deux forces, exprimer le critère de basculement.
4. En déduire le rapport H/L devant être vérifié pour assurer la stabilité de la structure.

EXERCICE 2 (barème indicatif: 6 PTS)

Dans le tube Venturi représenté sur la Figure 2, l'eau s'écoule de bas en haut. Le diamètre du tube A est de $d_A = 30$ cm, et en B il est de $d_B = 15$ cm.

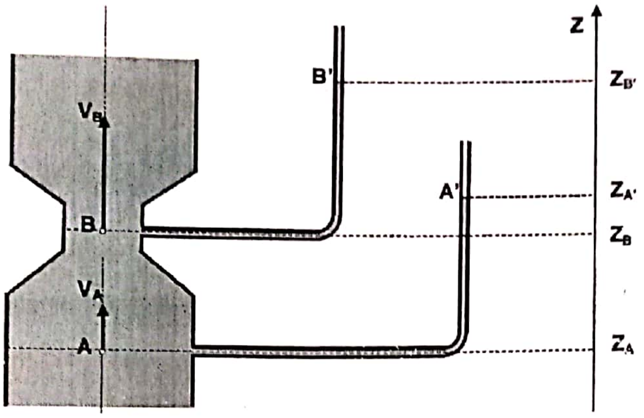


Figure 2

Afin de mesurer la pression P_A au point A et la pression P_B au point B, deux manomètres à colonne d'eau (tubes piézométriques) sont connectés au Venturi. Ces tubes piézométriques permettent de mesurer les niveaux $Z_{A'} = 3{,}061$ m et $Z_{B'} = 2{,}541$ m respectivement des surfaces libres A' et B'.

On donne :

- l'altitude de la section A : $Z_A = 0$ m
- l'altitude de la section B : $Z_B = 50$ cm
- l'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}81$ m/s^2
- la pression au niveau des surfaces libres $P_{A'} = P_{B'} = P_{atm} = 1$ bar
- la masse volumique de l'eau est $\rho = 1000$ kg/m^3

On suppose que l'eau est un fluide parfait.

1- Appliquer le PFH (Principe Fondamentale de l'Hydrostatique) entre B et B', et calculer la pression P_B au point B.

2- De même, calculer la pression P_A au point A.

3- Ecrire l'équation de continuité entre les points A et B. En déduire la vitesse d'écoulement V_B en fonction de V_A, d_A et d_B.

EXERCICE 3 *(barème indicatif : 8 pts)*

On considère une conduite annulaire de rayons interne R_0 et externe R_1 dans laquelle s'écoule un fluide incompressible, non pesant, de viscosité μ. L'écoulement est supposé laminaire, stationnaire et s'effectue suivant l'axe de symétrie Ox de la conduite, dans la direction des x croissants, et dans le domaine $R_0 < r < R_1$.

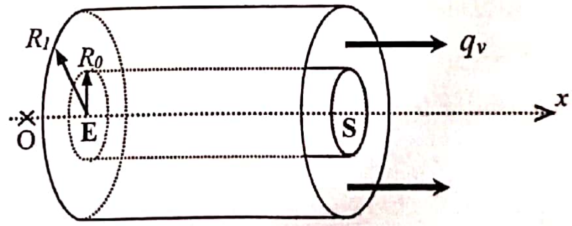


Figure 3

Les contraintes de frottement sur les deux cylindres sont noté τ_1 et τ_2, le gradient de pression motrice $\frac{p^*_E - p^*_S}{L} = a$ avec a une constante positive ($P^*=P+\rho gz$).

1. En tenant compte de la symétrie du problème, des hypothèses établies concernant l'écoulement et de l'équation de continuité, montrer que la vitesse en un point de l'écoulement s'exprime comme : $\vec{v} = u_x(r)\vec{e}_x$.

2.

a) Montrer que le système d'équations pour trouver la solution locale de cet écoulement est :

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{\partial p^*}{\partial x} + \mu \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u_x}{\partial r}\right) \\ 0 = -\dfrac{\partial p^*}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{\partial p^*}{r\partial \theta} \end{cases}$$

b) déterminer le profil de vitesse $u_x(r)$ en fonction de R_0, R_1, μ et du gradient de pression $a = \frac{dp}{dx}$.

c) Calculer la vitesse moyenne U_m et en déduire l'expression du débit volumique q_v.

3. Calculer les contraintes de frottement sur les deux cylindres τ_1 et τ_2 et endéduire les forces de frottement correspondantes.

4- Ecrire l'équation de Bernoulli entre les points A et B. En déduire la vitesse d'écoulent V_B.

1.2 Coordonnées cylindriques

Les composantes du vecteur vitesse dans ce repère sont désignées par V_z, V_r et V_θ.

Continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r V_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \theta}=0$$

Vitesses de déformations :

$$S_{zz}=\frac{\partial V_z}{\partial z}\qquad S_{zr}=S_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{\partial V_r}{\partial z}\right)\qquad S_{z\theta}=S_{\theta z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}+\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)$$

$$S_{rr}=\frac{\partial V_r}{\partial r}\qquad S_{r\theta}=S_{\theta r}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}+\frac{\partial V_\theta}{\partial r}-\frac{V_\theta}{r}\right)$$

$$S_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{V_r}{r}$$

Equations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible :

$$\frac{\partial V_z}{\partial t}+V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}+V_r\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2}\right)$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial t}+V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}+V_r\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}-\frac{V_\theta^2}{r}=F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}\right.$$
$$\left.-\frac{V_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial V_\theta}{\partial t}+V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}+V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}+\frac{V_r V_\theta}{r}=F_z-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta}+\nu\left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right.$$
$$\left.-\frac{V_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)$$

ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE GABES	Epreuve de **MECANIQUE DES FLUIDES** **EXAMEN**	**Année 2020-2021** **Durée : 1h30**

Mardi 24 Novembre 2020

Classes : GCV1A-GCV1B **B. Askri**

Les documents ne sont pas autorisés

EXERCICE 1 *(barème indicatif : 6 pts)*

On considère la vanne rectangulaire représentée sur la **Figure 1**. De longueur l_1+l_2 et de largeur L, elle possède un axe de pivotement noté P. Le liquide qu'elle retient est supposé incompressible et de masse volumique ρ.

1. Donner l'expression de la force exercée par l'eau sur la vanne.
2. En déduire la position du point d'application A de cette force.
3. Quelle est la condition sur les valeurs relatives de l_1 et l_2 pour que cette vanne ne s'ouvre pas spontanément ?

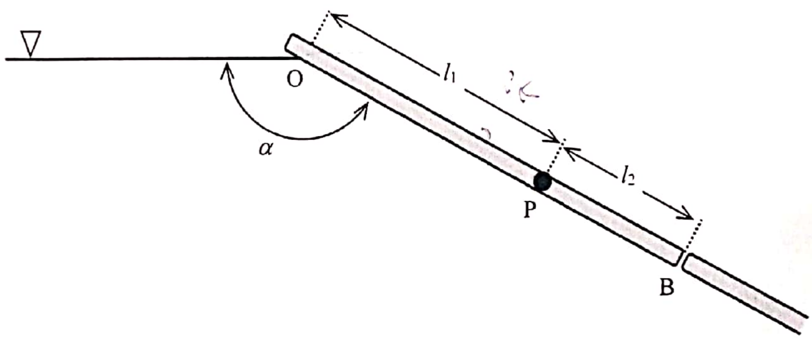


Figure 1

EXERCICE 2 *(barème indicatif : 7 pts)*

Le barrage représenté sur la figure ci-contre est constitué d'une structure en équerre, de hauteur H et de largeur L, posée au sol. Elle permet de retenir une hauteur H d'eau. On se propose de déterminer le rapport critique entre les deux dimensions H et L permettant d'éviter tout risque de basculement autour de l'axe de pivotement matérialisé par le point O situé à l'extrémité droite de sa base. On pourra raisonner sur une épaisseur unité dans la direction perpendiculaire au plan du schéma.

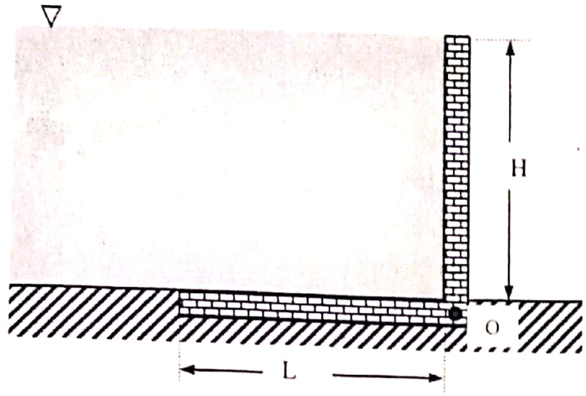


Figure 2

1. Exprimer la force hydrostatique s'exerçant sur la partie verticale de l'équerre et déterminer son point d'application A.

2. Exprimer la force de pression s'exerçant sur la partie horizontale de l'équerre en supposant que seul le poids de l'eau entre en jeu. Déterminer le point d'application B de cette force.

3. Après avoir évalué les moments par rapport à l'axe de pivotement de chacune de ces deux forces, exprimer le critère de basculement.

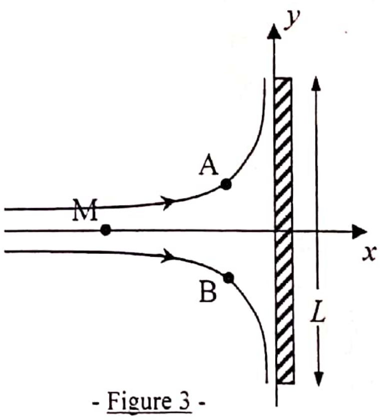
4. En déduire le rapport H/L devant être vérifié pour assurer la stabilité de la structure.

L'accélération de la pesanteur $\mathbf{g = 10\ m/s^2}$.

EXERCICE 2 *(barème indicatif : 7 pts)*

On considère un écoulement plan dont le potentiel des vitesses φ est donné par $\varphi(x,y) = -\frac{a}{2}\left(x^2 - y^2\right)$, où a est une constante réelle positive.

1. Vérifier que cette fonction satisfasse aux conditions de continuité et d'irrotationalité de l'écoulement.
2. Montrer que la fonction de courant ψ peut s'écrire sous la forme $\psi(x,y) = -axy + c$, où c est une constante réelle. En déduire la forme des lignes de courant et des équipotentielles (on considére certaines valeurs des constantes a et c).
3. Déterminer le champ de vitesse : u(x,y) et v(x,y).
4. On considère une paroi plane d'équation $x = 0$ (voir **Figure 3**). Pour c = 0, tracer les lignes de courant telles que $\psi = \pm\, a$ dans le demi-plan $x<0$. Existe-t-il un point d'arrêt ? Si oui, le localiser.



- Figure 3 -