Exercices 3.6.2 : p38' ①

1/ $X(x,y) = (1, 2xy^2)$

Soit $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ une courbe intégrale associée à X.

tq $\gamma'(t) = X(a(t), b(t)) \Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (1, 2a(t)b^2(t))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = 1 \\ b'(t) = 2a(t)b^2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(t) = t + a_0 \quad (1) \text{ avec } a_0 = a(0) \\ b'(t) = 2(t+a_0)\, b^2(t) \quad (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \dfrac{b'(t)}{b^2(t)} = 2(t+a_0)$, on suppose que $b(t) \neq 0, \forall t$

$$\Leftrightarrow \int \frac{b'(t)}{b^2(t)}\, dt = 2\int (t+a_0)\, dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{b(t)} = 2\left(\frac{1}{2}t^2 + a_0 t + C\right)$$

pour $t = 0$: $-\dfrac{1}{b(0)} = 2C \Leftrightarrow C = -\dfrac{1}{2b_0}$ avec $b_0 = b(0) \neq 0$

donc : $-\dfrac{1}{b(t)} = t^2 + 2a_0 t - \dfrac{1}{b_0}$

$$\Leftrightarrow b(t) = \frac{-1}{t^2 + 2a_0 t - \frac{1}{b_0}}$$

éq. cartésienne de γ : (pour la représentation graphique).

on a : $a(t) = t + a_0 \Leftrightarrow a^2(t) = t^2 + 2a_0 t + a_0^2$

$\Leftrightarrow t^2 + 2a_0 t = a^2(t) - a_0^2$

d'où $b(t) = \dfrac{-1}{a^2(t) - a_0^2 - \frac{1}{b_0}}$

donc l'éq de γ : $b = \dfrac{-1}{a^2 - a_0^2 - \frac{1}{b_0}}$

2) $X(x,y) = (1+x^2, 1)$ ②

soit $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intégrale associée à X

tq $\gamma'(t) = X(a(t), b(t)) \Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (1+a^2(t), 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = 1 + a^2(t) & (1) \\ b'(t) = 1 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow b(t) = t + b_0$ avec $b_0 = b(0)$.

$(1) \Rightarrow (E) : a'(t) + a^2(t) = 1$.

$(E_h) : a_h'(t) + a_h^2(t) = 0$.

$\Leftrightarrow a_h'(t) = -a_h^2(t) \Leftrightarrow \dfrac{a_h'(t)}{a_h^2(t)} = -1$.

$\Rightarrow -\dfrac{1}{a_h(t)} = -t + C$, pour $t=0$: $C = -\dfrac{1}{a_0}$ avec $a_0 = a(0) \neq 0$

$\Leftrightarrow a_h(t) = \dfrac{1}{t + \frac{1}{a_0}}$, on remarque que $a_p(t) = 1$ est une solt de (E)

donc $a(t) = a_h(t) + a_p(t) = \dfrac{1}{t+\frac{1}{a_0}} + 1$. , $\forall t \neq \frac{1}{a_0}$.

éq cartésienne de γ : $b(t) = t + b_0$.

$a(t) = \dfrac{1}{t+\frac{1}{a_0}} + 1 \Leftrightarrow a(t) - 1 = \dfrac{1}{t+\frac{1}{a_0}} \Leftrightarrow t + \dfrac{1}{a_0} = \dfrac{1}{a(t)-1}$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{1}{a(t)-1} - \dfrac{1}{a_0}$

d'où $b(t) = \dfrac{1}{a(t)-1} \underbrace{- \dfrac{1}{a_0} + b_0}_{cte}$ on suppose que $a(t) \neq 1$ $\forall t$.

$\gamma : b = \dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{a_0} + b_0$.

③

4/ $X(x,y) = (y,x)$

soit $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intégrale associée à X

tq $\gamma'(t) = X(a(t), b(t)) \Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (b(t), a(t))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = b(t) \\ b'(t) = a(t) \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix}}_{Y'(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}}_{Y(t)}$$

c'est un système différentiel d'ordre 2:

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$

on pose: $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

soit $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ tq $Au_1 = u_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

donc $b_1 = a_1$: $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; on prend $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

de même soit u_2 tq $Au_2 = -u_2$ et on prend $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d'où $Y(t) = C_1 u_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 u_2 e^{\lambda_2 t}$

$$= \begin{pmatrix} C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} \\ C_2 e^{t} - C_2 e^{-t} \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{cases} a(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} \\ b(t) = C_1 e^{t} - C_{\,} e^{-t} \end{cases}$$

~~Ré~~ cartésien ...

6/ $X(x,y) = (y, -y)$

soit $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intégrale associée à X.

tq $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (b(t), -b(t))$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = b(t) \ (1) \\ b'(t) = -b(t) \ (2) \end{cases}$ $(2) \Rightarrow \dfrac{b'(t)}{b(t)} = -1$, on suppose que $b(t) \neq 0, \forall t$.

$\Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{b'(t)}{b(t)} dt = -\int dt \Leftrightarrow \ln|b(t)| = -t + C$

$\Leftrightarrow |b(t)| = e^{-t+C} \Leftrightarrow b(t) = \pm e^{-t+C}$

donc $b(t) = b_0 e^{-t}$, pour $t=0$: $b_0 = b(0) = \pm e^{C}$.

$(1) \Rightarrow a'(t) = b_0 e^{-t}$

$\Leftrightarrow a(t) = -b_0 e^{-t} + C$.

pour $t=0$: $a_0 = a(0) = -b_0 + C \Leftrightarrow C = a_0 + b_0$.

d'où $a(t) = -b_0 e^{-t} + a_0 + b_0 = b_0(1 - e^{-t}) + a_0$.

l'éq cartésienne de γ: $a(t) - a_0 - b_0 = -b_0 e^{-t}$

$\Leftrightarrow a(t) - a_0 - b_0 = b(t)$

$\Leftrightarrow \gamma: b = a - a_0 - b_0$.

Exercice 3.6.3 p 38 :

1/ $X(x,y) = (1, -xy)$

a/ Soit $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ une courbe intégrale associée à X.

tq $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (1, -a(t)\, b(t))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = 1 & (1) \\ b'(t) = -a(t)\, b(t) & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow a(t) = t + a_0$

$(2) \Rightarrow b'(t) = -(t+a_0)\, b(t) \Leftrightarrow \frac{b'(t)}{b(t)} = -(t+a_0)$

$\Leftrightarrow \int \frac{b'(t)}{b(t)} dt = -\int (t+a_0)\, dt$

$\Leftrightarrow \ln|b(t)| = -\left(\frac{1}{2}t^2 + a_0 t\right) + C.$

$\Leftrightarrow |b(t)| = e^{-\left(\frac{1}{2}t^2 + a_0 t\right) + C}$

$\Leftrightarrow b(t) = \pm e^{C}\, e^{-\left(\frac{1}{2}t^2 + a_0 t\right)}$

d'où $b(t) = b_0\, e^{-\left(\frac{1}{2}t^2 + a_0 t\right)}$, pour $t = 0$: $b_0 = b(0) = \pm e^{C}$

l'éq cartésienne de γ : $a^2(t) = t^2 + 2a_0 t + a_0^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a^2(t) - a_0^2) = \frac{1}{2} t^2 + a_0 t$

d'où $b(t) = b_0\, e^{-\frac{1}{2}(a^2(t) - a_0^2)}$.

donc $\gamma : b = b_0\, e^{-\frac{1}{2}(a^2 - a_0^2)}$

. c'est une courbe exponentielle

b/ mq les solts de l'éq : $\partial_x u(x,y) - xy\, \partial_y u(x,y) = 0$ (✱)
s'écrivent nécessairement sous la forme : $u(x,y) = f(y\, e^{x^2/2})$.
avec f de classe $\mathcal{C}^1$.

⚠ Il s'agit de la condition nécessaire, c.à.d chercher la forme de la solt de l'équation. La condition suffisante, c'est de vérifier si la fction de cette forme vérifie l'équation (voir cours p35).

d'après 1/a/ on a les courbes caractéristiques de l'éq sont les courbes intégrales associées au champ de vecteurs $X(x,y) = (1, -xy)$
Elles sont données par : $\gamma : b = b_0\, e^{-\frac{1}{2}(a^2 - a_0^2)}$.
On veut maintenant déterminer la valeur de la solt de l'éq (✱) pour $t=0$, la courbe passe par le pt (a_0, b_0).
On sait que u est constante le long de la courbe intégrale qui passe par ce pt (a_0, b_0). Cette courbe coupe l'axe (oy) (l'axe des ordonnées) au pt ($a_1 = 0$, $b_1 = b_0\, e^{\frac{1}{2}a_0^2}$) et l'on sait que :
$u(a_1, b_1) = u(0, b_1) = f(b_1) = f(b_0\, e^{\frac{1}{2}a_0^2})$. voir rédaction cours p35
on obtient donc pour tout pt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $u(x,y) = f(y\, e^{\frac{1}{2}x^2})$.
[on a juste changé la notation ~~de u~~ est constante]

[il faut bien apprendre la rédaction de la démonstration de la forme de la solt d'une éq à coefficients constants (cours p35) Méthode des caractéristiques] c/ $(\mathrm{I})\begin{cases} \partial_x u(x,y) - xy\,\partial_y u(x,y) = 0 \quad (*) \\ u(0,y) = y^2. \end{cases}$ (7)

d'après b/ $u(x,y) = f(y e^{\frac{x^2}{2}})$ est une solt de $(*)$

on suppose que u est solt du système (I)

pour $x = 0$ on a : $u(0,y) = f(y) = y^2$, donc $\forall Y : f(Y) = Y^2$.

d'où $u(x,y) = (y e^{\frac{x^2}{2}})^2 = y^2 e^{x^2}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

d/ $(\mathrm{II})\begin{cases} \partial_x u(x,y) - xy\,\partial_y u(x,y) = 0 \\ u(x,0) = x^2. \end{cases}$

[le fait de poser la question " a-t-il des solutions " implique qu'il y a une grande possibilité qu'il n'admet pas de solts (c.à.d il suffit de mq il n'admet pas de solts).]

on suppose que $u(x,y) = f(y e^{\frac{x^2}{2}})$, $\forall (x,y)$ est une solt de (II), [elle est solt de l'éq, mais est-ce qu'elle vérifie la condition initiale]

pour $y = 0$, on a : $u(x,0) = f(0) = cte$

d'autre part par hypothèse, on a : $u(x,0) = x^2 \neq cte$

donc impossible d'avoir une telle solt.

<u>Conclusion</u> : le problème (II) n'admet pas de solts

3.6.2 Courbes intégrales de champs de vecteurs

1. Déterminer les courbes intégrales du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (1, 2xy^2)$.
2. Déterminer les courbes intégrales du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (1 + x^2, 1)$.
3. Déterminer les courbes intégrales du champ de vecteurs de $[-1,1] \times \mathbb{R}$ défini par $X(x,y) = (\sqrt{1-x^2}, 1)$.
4. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (y,x)$.
5. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (x,y)$.
6. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (y,-y)$.
7. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (x, 2y)$.

3.6.3 EDP du premier ordre à coefficients non-constants

1. On considère le champ de vecteurs $X(x,y) = (1, -xy)$.

   a. Déterminer et tracer ses courbes intégrales.

   b. Montrer que les solutions (de classe $\mathcal{C}^1$) de l'équation

   $$\partial_x u(x,y) - xy\partial_y u(x,y) = 0$$

   s'écrivent nécessairement $u(x,y) = f(ye^{x^2/2})$ pour une certaine fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

   c. Trouver toutes les solutions du problème de Cauchy

   $$\begin{cases} \partial_x u(x,y) - xy\partial_y u(x,y) = 0, \\ u(0,y) = y^2. \end{cases}$$

   d. Le problème de Cauchy

   $$\begin{cases} \partial_x u(x,y) - xy\partial_y u(x,y) = 0, \\ u(x,0) = x^2, \end{cases}$$

   a-t-il des solutions ?