JEUDI 05/12/2024 à 08h30 durée : 1h30 GCR2 ANNEE UNIVERSITAIRE 2024-2025

ENIG

DEVOIR DE CONTROLE DSMO2

EXERCICE N°1

1)Déduire les équations de Maxwell en régime sinusoïdal en notation complexe à partir des équations écrites en notation réelle pour un régime variable.

2)On travaille maintenant en régime sinusoidal. On dispose d'un dipôle idéal vertical (suivant Oz) de longueur Δz, parcouru par un courant $I_o e^{j\omega t}$ où I_o *est constante.*

On montre qu'en un point M de l'espace on a :

$$\overrightarrow{H(M)} = \frac{I_0 \Delta z}{4\pi r^2} e^{-j\beta r}(1 + j\beta r)\sin(\theta)\overrightarrow{u_\varphi}$$

Déduire l'expression de $\overrightarrow{E(M)}$.

3)Simplifier les expressions des champs $\overrightarrow{H(M)}$ *et* $\overrightarrow{E(M)}$ lorsque le point M est proche du dipôle.

4)Déduire de la question 3) l'expression du vecteur de Poynting complexe.

5)Déduire de la question 4), l'expression de la puissance moyenne rayonnée.

EXERCICE N°2

Pour un dipôle dont la longueur l est telle que: $\lambda/50 \leq l \leq \lambda/10$, une bonne approximation de la distribution de courant serait :

$I(z_p)=$

$$\begin{cases} I_o\left(1-\dfrac{2z_p}{l}\right)\vec{k} & pour\ 0 \leq z_p \leq \dfrac{l}{2} \\ I_o\left(1+\dfrac{2z_p}{l}\right)\vec{k} & pour\ -\dfrac{l}{2} \leq z_p \leq 0 \end{cases}$$

Où I_o est une constante.

1°) Représenter I en fonction de z_p.

2°)a)Donner l'expression donnant $\vec{A}$ en fonction de la distribution du courant.

b)Remplacer le courant $I(z_p)$ par son expression dans l'intégrale

c) Calculer $\vec{A}$ (M), en adoptant **la même approximation que celle utilisée pour un dipôle idéal** dans la région de champ lointain, montrer qu'elle est :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu}{8\pi}\frac{I_o l}{r} e^{-j\beta r}\vec{k}$$

3°)Déduire les composantes du champ $\vec{E}$ (M), et du champ $\vec{H}$ (M), dans la région du champ lointain.

4°)a)Donner l'expression du vecteur de Poynting.

b)Quelle est alors la puissance totale rayonnée.

c)Quelle est la résistance de rayonnement.

EXERCICE N°3

On suppose qu'on est dans la région de champ lointain

1°) Quelle est l'expression du champ normalisé d'un dipôle idéal.

2°) Calculer l'angle solide Ω_A du dipôle idéal.

3°) Déduire la directivité du dipôle idéal.

4°) Quelle est la directivité du dipôle idéal dans la direction $\theta = 45°; \phi = 45°$

EXERCICE N°4

Soit une spire circulaire (supposée de petite dimension) de périmètre moyen 0,17λ et de diamètre de la section du fil 0,0015λ ; sachant que la conductivité du fil est

$\sigma = 5.10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$ et que la fréquence est f=1,5MHz, calculer pour cette antenne:

1)La résistance de dissipation (ohmique).

2)La résistance de rayonnement

3)La réactance.

4)l'efficacité du rayonnement.

5)L'impédance d'entrée.

Bon Travail

FORMULAIRE DC DSMO2 2024-2025

Equations de Maxwell :

$$\vec{rot}\,\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathcal{B}}\ ;\ \vec{rot}\,\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathcal{D}}$$

$$div\,\vec{\mathcal{D}} = \rho\ ;\ div\,\vec{\mathcal{B}} = 0$$

Relations importantes :

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu\vec{H} \qquad \vec{J} = \sigma\vec{E}$$

Relations de continuité :

$$\vec{n}\,x(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0}\ ;\ \vec{n}\,x(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s\ \vec{n}\,.(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma\ ;\ \vec{n}\,.(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

Puissance rayonnée moyenne:

$$P = \frac{1}{2}\oiint\left(\vec{E}x\vec{H}^*\right).\vec{dS}\ ;$$

Potentiels :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{rot}\,\vec{A}\ ;\vec{E} = -\vec{grad}\,V - j\omega\vec{A}\ ;$$

Equation d'Helmholtz et sa solution :

$$\Delta\vec{A} + \beta^2\vec{A} = -\mu\vec{J};\quad avec \quad \beta^2 = \omega^2\mu\varepsilon\ ;$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V \frac{\vec{J}\,e^{-j\beta R}}{R}d\tau_P \leftrightarrow \frac{\mu}{4\pi}\int_{source}\frac{I\,e^{-j\beta R}}{R}\,\vec{dl}_P$$

Dipôle Idéal dans la région de champ lointain :

$$\vec{E} = j\omega\mu\frac{I\Delta z}{4\pi r}e^{-j\beta r}\sin\theta.\vec{u}_\theta \quad ;$$

$$\vec{H} = j\beta\frac{I\Delta z}{4\pi r}e^{-j\beta r}\sin\theta.\vec{u}_\varphi \quad ;$$

$$P = \frac{\omega\mu\beta}{12\pi}|I\Delta z|^2\ ;\ \zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi$$

Dipôle de dimension finie :

$$\vec{H} = j\beta\frac{\sin\theta}{\mu}.A_z\vec{u}_\phi \quad ; \qquad \vec{E} = -j\omega A_\theta\vec{u}_\theta$$

Limite de la region de champ proche :

$$r = \frac{2D^2}{\lambda}$$

Cas général (région de champ lointain ou RCL)

$$\vec{A} = \frac{\mu e^{-j\beta R}}{4\pi r}\iiint_V \vec{J}\,e^{j\beta\vec{u}_r.\vec{r}'}\,d\tau_P\ ;\ \vec{r}' = \vec{OP}$$

$$\vec{E} = -j\omega(A_\theta\vec{u}_\theta + A_\phi\vec{u}_\phi)$$

$$\vec{u}_r x\vec{E} = \zeta\vec{H}$$

Champ normalisé : $F(\theta,\phi) = \frac{E}{E_{max}}$

Diagramme de puissance normalisée :

$$\mathcal{P}(\theta,\phi) = |F(\theta,\phi)|^2$$

Intensité de rayonnement :

$$U(\theta,\phi) = \frac{1}{2\zeta}\left|\vec{E}\right|^2 r^2\ ;\ U_{moy} = \frac{P}{4\pi}$$

Directivité : $D(\theta,\phi) = \frac{U(\theta,\phi)}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}|F(\theta,\phi)|^2$;

$$\Omega_A = \iint |F(\theta,\phi)|^2\,d\Omega,$$

$$D = \frac{U_{max}}{U_{moy}} = \frac{4\pi}{\Omega_A}$$

Gain :

$$G(\theta,\phi) = \frac{4\pi U(\theta,\phi)}{P_e}\ ;\ G = \frac{4\pi U_{max}}{P_e}$$

Efficacité du rayonnement : $e_r = \frac{P}{P_e}$

Dipôle demi-onde :

$$I(z) = I_0\sin\left[\beta\left(\frac{\lambda}{4} - |z|\right)\right] pour \quad |z| \le \frac{\lambda}{4}$$

Impédance d'antenne :

$$Z_A = R_r + R_d + jX_A\ ;\ R_r = \frac{2P}{|I|^2}$$

Résistance de dissipation : R_d

Epaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$; $R_S = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$;

Conducteur cylindrique

Dipôle idéal : $R_d = \frac{l}{2\pi a}R_S$

Dipôle court : $R_d = \frac{1}{3}\frac{l}{2\pi a}R_S$

$$P_e = P + P_d\ ;\ R_A = R_r + R_d\ ;\ R_A = \frac{2P}{|I|^2}$$

Monopole (Mono):

$R_r(\text{Mono}) = \frac{1}{2}R_r(\text{Dipole})$; $D(\text{Mono}) = \frac{1}{2}D(\text{Dipole})$; $Z_e(\text{Mono}) = \frac{1}{2}Z_e(\text{Dipole})$

dipôle magnétique -spire circulaire :

Résistance du rayonnement : $R_r \cong 31200\left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2$

inductance : $L = \mu_o b\left[Log\left(\frac{8b}{a}\right) - 1{,}75\right]$ $pour\ a << b$

b :rayon de la spire ; a : rayon de section du fil ;

$\mu_o = 4\pi 10^{-7}$ **F/m**

Antenne à la réception :

P_{max}**(réçue)=** $\frac{1}{8}\frac{|V|^2}{R_r}$; **Pmax=**$|\vec{\Pi}|A_{emax}$;

A_{emax} :surface équivalente maximale de réception.

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_{emax}\ ;\ \lambda^2 = \Omega_A A_{emax}$$

$$A_e = e_r A_{emax}\ ;\ G = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_e$$

Formule de FRIIS :

$$P_R = P_E G_E G_R\left(\frac{\lambda}{4\pi R}\right)^2$$

EIRP=$P_E G_E = 4\pi U_{max}$.

$$\vec{rot}\,\vec{rot}\vec{X} = \vec{grad}(div(\vec{X})) - \Delta\vec{X}$$

$$\vec{rot}\left(f\vec{u}\right) = \vec{grad}(f)\wedge\vec{u} + f\vec{rot}\left(\vec{u}\right)$$

$$\vec{rot}(\vec{X}) = \frac{\vec{u}_r}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(X_\phi\sin\theta) - \frac{\partial X_\theta}{\partial\phi}\right] + \frac{\vec{u}_\theta}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial X_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rX_\phi)}{\partial r}\right] + \frac{\vec{u}_\phi}{r}\left[\frac{\partial(rX_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial X_r}{\partial\theta}\right]$$

EX1 Corrigé DC DSM02 2024-2025 (1)

1°) $\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{B}}(M,t) = 0 \Rightarrow \mathrm{div}\left(\underline{\vec{B}}(M)e^{j\omega t}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\,\underline{\vec{B}}(M) = 0}$

$\mathrm{div}\,\vec{\mathcal{D}}(M,t) = \rho(M,t) \Rightarrow \mathrm{div}\,\underline{\vec{D}}(M)e^{j\omega t} = \underline{\rho}(M)e^{j\omega t} \Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\,\underline{\vec{D}}(M) = \underline{\rho}(M)}$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{E}}(M,t) = -\dfrac{\partial \vec{\mathcal{B}}(M,t)}{\partial t} \Rightarrow \vec{\mathrm{rot}}\left(\underline{\vec{E}}(M)e^{j\omega t}\right) = -j\omega\underline{\vec{B}}(M)e^{j\omega t}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{E}}(M) = -j\omega\underline{\vec{B}}(M)}$; $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathcal{H}}(M,t) = \vec{\mathcal{J}}(M,t) + \dfrac{\partial \vec{\mathcal{D}}(M,t)}{\partial t}$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{H}}(M)e^{j\omega t} = \underline{\vec{J}}(M)e^{j\omega t} + j\omega\underline{\vec{D}}(M)e^{j\omega t}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\mathrm{rot}}\,\underline{\vec{H}}(M) = \underline{\vec{J}}(M) + j\omega\underline{\vec{D}}(M)}$

6pts

2°) Ici $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{H}(M) = j\omega\varepsilon\vec{E}(M)$ $\left(\vec{D}(M) = \varepsilon\vec{E}(M)\right.$ et $\left.\vec{J}(M) = 0\right)$

$\vec{H} = H_\varphi\vec{u_\varphi} \Rightarrow \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{H} = \dfrac{\vec{u_r}}{r\sin\theta}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta}(H_\varphi\sin\theta)\right) - \dfrac{\vec{u_\theta}}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)$

$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{H} = \dfrac{\vec{u_r}}{r\sin\theta}\left(2\sin\theta\cos\theta\dfrac{I_0\Delta z}{4\pi r^2}e^{-j\beta r}(1+j\beta r)\right) - \dfrac{\vec{u_\theta}}{r}\dfrac{I_0\Delta z}{4\pi}\sin\theta\left[-j\beta e^{-j\beta r}\left(\dfrac{1}{r}+j\beta\right)\right.$

$\left.+e^{-j\beta r}\left(-\dfrac{1}{r^2}\right)\right] = \dfrac{I_0\Delta z e^{-j\beta r}}{4\pi r^3}\left[(1+j\beta r)2\cos\theta\vec{u_r} + (1+j\beta r-\beta^2r^2)\sin\theta\vec{u_\theta}\right]$

$\vec{E}(M) = \dfrac{1}{j\omega\varepsilon}\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{H}(M) \Rightarrow \vec{E}(M) = \dfrac{1}{j\omega\varepsilon}\dfrac{I_0\Delta z e^{-j\beta r}}{4\pi r^3}\left[(1+j\beta r)2\cos\theta\vec{u_r} + (1+j\beta r-\beta^2r^2)\sin\theta\vec{u_\theta}\right]$

3°) Zone proche $\Rightarrow \beta r \ll 1$ $(r \ll \lambda)$

$\Rightarrow \vec{H}(M) \simeq \dfrac{I_0\Delta z}{4\pi r^2}e^{-j\beta r}\sin\theta\vec{u_\varphi}$ et $\vec{E}(M) \simeq \dfrac{1}{j\omega\varepsilon}\dfrac{I_0\Delta z e^{-j\beta r}}{4\pi r^3}\left[2\cos\theta\vec{u_r} + \sin\theta\vec{u_\theta}\right]$

4°) $\vec{\Pi} = \dfrac{1}{2}\vec{E}\wedge\vec{H}^* = \dfrac{-j|I_0|^2\Delta z^2}{32\pi^2 r^5}\sin\theta\left[2\cos\theta\vec{u_\varphi}\wedge\vec{u_r} + \sin\theta\vec{u_\varphi}\wedge\vec{u_\theta}\right]$

$\vec{\Pi} = -j\dfrac{|I_0|^2\Delta z^2}{32\pi^2 r^5}\sin\theta\left[2\cos\theta\vec{u_\theta} - \sin\theta\vec{u_r}\right]$

5°) $P = \mathrm{Re}\displaystyle\iint_{\substack{\text{surface fermée}\\ \text{(sphère de rayon r)}}}\vec{\Pi}\cdot d\vec{S}$ comme $\vec{\Pi}$ est imaginaire pure $P = 0$

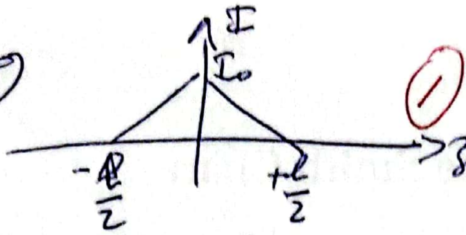
21pts

$21 + 23,5 + 9 + 13,5 = 67$

$\dfrac{20}{67} = 0,2985 \to 0,375$

note sur 25,5pts 65

EX2

1) 

2) a) $\vec{A}(M) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{dipole} \frac{I(z_p)\, e^{-j\beta R}}{R}\, \vec{dl_p}$

b) $\vec{A}(M) = \frac{\mu I_0}{4\pi}\left[\int_{-\frac{\ell}{2}}^{0} \frac{(1+\frac{2z_p}{\ell})\,e^{-j\beta R}}{R}\, dz_p\, \vec{k} + \int_0^{\ell/2} \frac{(1-\frac{2z_p}{\ell})\,e^{-j\beta R}}{R}\, dz_p\, \vec{k}\right]$

c) $\vec{A}(M) = \frac{\mu I_0\, e^{-j\beta r}}{4\pi r}\left[\int_{-\frac{\ell}{2}}^{0} (1+\frac{2z_p}{\ell})\, dz_p\, \vec{k} + \int_0^{\ell/2}(1-\frac{2z_p}{\ell})\, dz_p\, \vec{k}\right]$

$= \underset{\boxed{\text{parité}}}{2}\, \frac{\mu I_0\, e^{-j\beta r}}{4\pi r}\underbrace{\int_0^{\ell/2}(1-\frac{2z_p}{\ell})\, dz_p\, \vec{k}}_{\mathcal{I}}$, on pose $u = 1-\frac{2z_p}{\ell}$; $du = \frac{-2dz_p}{\ell}$

$\Rightarrow dz_p = -\frac{\ell}{2}du$; $z_p = 0 \Rightarrow u = 1$

$z_p = \ell/2 \Rightarrow u = 0$

$\mathcal{I} = \frac{\mu I_0 \ell\, e^{-j\beta r}}{4\pi r}\int_0^1 u\, du\, \vec{k} = \mu\frac{I_0 \ell\, e^{-j\beta r}}{4\pi r}\vec{k}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \underbrace{\frac{\mu I_0 \ell\, e^{-j\beta r}}{8\pi r}}_{A_z}\vec{k}$

3) RCL $\Rightarrow \vec{E} \simeq -j\omega A_\theta \vec{u}_\theta - j\omega A_\varphi \vec{u}_\varphi$

on a $\vec{A} = A_z\vec{k} = A_z(\cos\theta\, \vec{u_r} - \sin\theta\, \vec{u_\theta})$ donc $A_\theta = -\sin\theta\, A_z$

$\Rightarrow \vec{E} \simeq j\omega A_z \sin\theta\, \vec{u_\theta} \simeq j\omega\mu\frac{I_0 \ell}{8\pi r}e^{-j\beta r}\sin\theta\, \vec{u_\theta}$

$\vec{H}(M) \underset{\boxed{RCL}}{\simeq} \frac{1}{\eta}\vec{u_r}\wedge\vec{E} \Rightarrow \vec{H}(M) \simeq \frac{j\omega\mu}{\eta}\frac{I_0 \ell}{8\pi r}e^{-j\beta r}\sin\theta\, \underbrace{\vec{u_r}\wedge\vec{u_\theta}}_{\vec{u_\varphi}}$; $\frac{j\omega\mu}{\eta} = j\beta$

$\Rightarrow \vec{H}(M) \simeq j\beta\frac{I_0 \ell\, e^{-j\beta r}}{8\pi r}\sin\theta\, \vec{u_\varphi}$

4) a) $\vec{\Pi} = \frac{1}{2}\vec{E}\wedge\vec{H}^* = \frac{\omega\mu\beta|I_0|^2\ell^2\sin^2\theta}{128\pi^2 r^2}\vec{u_r}$

DN

b) $P = \mathcal{Re}\iint_{\text{sphère de rayon } r}\vec{\Pi}\cdot\vec{dS} \underset{\vec{dS} = dS\,\vec{u_r}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Pi\cdot r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

DN

$P = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi} \frac{\omega\mu\beta|I_0|^2\ell^2}{128\pi^2}\sin^3\theta\, d\theta$; $\int_0^{\pi}\sin^3\theta = \int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\, d(-\cos\theta)$

$= -\int_1^{-1}(1-u^2)\, du$

$= \left[u-\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1-\frac{1}{3}-(-1+\frac{1}{3}) = 4/3$

$= \frac{\omega\mu\beta|I_0|^2\ell^2}{128\pi^2}\times 2\pi\times\frac{4}{3} = \frac{\eta\beta^2|I_0|^2\ell^2}{48\pi}$; $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

$= 10\pi\left|\frac{\ell}{\lambda}\right|^2|I_0|^2$

5°) $R^r = \frac{2P}{|I_0|^2} = 20\pi\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$ (1) (1) (23,5 pts) (3)

$\boxed{Ex3}$ 1°) pour un dipôle idéal et dans la RCL on a:

$\vec{E} = j\omega\mu \frac{I_0 \Delta z}{4\pi r} e^{-j\beta r} \sin\theta \vec{u_\theta} = E_\theta \vec{u_\theta}$

le champ normalisé $F(\theta,\varphi) = \frac{E_\theta}{E_{\theta max}} = \frac{j\omega\mu \frac{I_0\Delta z}{4\pi} e^{-j\beta r} \sin\theta}{j\omega\mu \frac{I_0\Delta z}{4\pi} e^{-j\beta r}}$ (1)

$F(\theta) = \sin\theta$ (1)

2°) $\Omega_A = \iint_{l'espace} |F(\theta)|^2 d\Omega$ (1) $= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |F(\theta)|^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ (1)

$\Omega_A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = 2\pi \times \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}$ Sr (1)

$\boxed{\text{voir ex 2}}$

3°) $D = \frac{4\pi}{\Omega_A}$ (1) $= \frac{4\pi}{\left(\frac{8\pi}{3}\right)} = \frac{3}{2} = 1,5$ (1)

(9 pts)

4°) $D(\theta = 45°, \varphi = 45°) = D \times \sin^2\theta$ (1) $= \frac{3}{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0,75$ (1)

$\boxed{Ex4}$ 1°) $R_d = R_s \frac{L}{2\pi a}$ (1) ; $R_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}$ (1) ; $\omega = 2\pi f$; $f = 1,5$ MHz

$\mu = 4\pi 10^{-7}$ H/m ; $\sigma = 5.10^7 \Omega^{-1}m^{-1}$

$R_d = 0,012415\ \Omega$ (+1)

2°) $R^r = 31200\left(\frac{S}{\lambda^2}\right)^2$ (1) ; $S = \pi b^2$; $b = \frac{L}{2\pi}$

$R^r = 31200\left(\frac{\pi(0,17)^2\lambda^2/(4\pi^2)}{\lambda^2}\right)^2 = 0,16502\ \Omega$ (1)

3°) $X_A = \omega L = 2\pi\frac{c}{\lambda} \times \mu_0 \frac{0,17\lambda}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{8 \times 0,17\lambda/2\pi}{0,0015\lambda/2}\right) - 1,75\right]$ (1)

$= 362,67\ \Omega$ (+1)

4°) $e_r = \frac{R^r}{R^r + R_d}$ (1) $= 0,9300$ (1)

(13,5)

5°) $Z_A = R^r + R_d + jX_A$ (1) $= (0,17743 + j\,362,67)\ \Omega$ (1)