Exercice : (Estimation)

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in [-1,0] \\ 1-a & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 0<a<1$$

-1- • f est continue presque partout

• f est positive

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} a\,dx + \int_{0}^{1} (1-a)\,dx = [ax]_{-1}^{0} + [(1-a)x]_{0}^{1} = a+1-a = 1$

$\Rightarrow$ f définit bien une densité

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} ax\,dx + \int_{0}^{1} x - ax\,dx = \left[\frac{ax^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2 - ax^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$= -\frac{a}{2} + \frac{1-a}{2} = \frac{1}{2} - a$$

$$V(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx - (E(X))^2 = \int_{-1}^{0} ax^2\,dx + \int_{0}^{1} x^2 - ax^2\,dx - \left(\frac{1}{2}-a\right)^2$$

$$= \left[\frac{ax^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^3}{3}\right]_{0}^{1} - \left(\frac{1}{2}-a\right)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}-a\right)^2$$

$$P(X<0) = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = a$$

-2- La méthode de moment : $E(X) = \frac{1}{2} - a = \varphi(a)$

avec $\varphi :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{2} - x$

• $\varphi(x)$ est bijective sur $]0,1[$ donc inversible.

$\Rightarrow \varphi^{-1}(x)$ $\quad Y = \frac{1}{2} - X \Rightarrow X = \frac{1}{2} - Y$

on a $T = \varphi^{-1}(\overline{X}) = \frac{1}{2} - \overline{X} \Rightarrow T = \frac{1}{2} - \overline{X}$.

$$E(T) = E\left(\frac{1}{2} - \overline{X}\right) = \frac{1}{2} - E(\overline{X}) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - a\right) = a$$

D'après la loi des grands nombre

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{Pr.} E(X) = \frac{1}{2} - a$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} - \overline{X} \xrightarrow[n \to +\infty]{Pr.} \frac{1}{2} - E(\overline{X}) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - a\right)$$

$$\Rightarrow T \xrightarrow[n \to +\infty]{Pr.} a$$

- 3 - y l'effectif empirique de l'evenement $(X<0)$:

$$L(X_1, \dots, X_n, a) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, a) = \underbrace{\prod_{i=1}^{y} f(x_i, a)}_{(X<0)} \cdot \underbrace{\prod_{i=y+1}^{n} f(x_i, a)}_{\ }$$

$$= a^y (1-a)^{n-y}$$

- 4 - $L(X_1, \dots, X_n, a) = a^y (1-a)^{n-y}$

$$\ln(L(X_1, \dots, X_n, a)) = y \ln(a) + \ln(1-a) \cdot (n-y)$$

C.N : $\frac{\partial \ln}{\partial a}(L(X_1, \dots, X_n, a)) = 0$

Cond^{t} ~~suffisante~~ Necessaire

$$\Rightarrow \frac{y}{a} - \frac{n-y}{1-a} = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{a} = \frac{n-y}{1-a}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{y}{n}}$$

C.S : (Cond^{t} suffisante) $\frac{\partial^2 \ln}{\partial^2 a}(L(x_1, \dots, x_n, a))$

$$\Rightarrow \frac{-y}{a^2} - \frac{n-y}{(1-a)^2} < 0$$

Je peux maintenant fixer l'estimateur $\Rightarrow W = \frac{y}{n}$ est un estimateur pour a.

$Y \rightsquigarrow B(n, a)$

$E(W) = \frac{E(Y)}{n} = \frac{na}{n} = a \Rightarrow W$ est un estimateur sans biais.

$V(W) = V\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(Y) = \frac{na(1-a)}{n^2} = \frac{a(1-a)}{n}$

-5- T et W sont 2 estimateurs sans biais de paramètre a donc le meilleur choix pour la comparaison et de calculer la variance.

$V(T) = V\left(\frac{1}{2} - \bar{X}\right) = V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{1/3 - \left(\frac{1}{2} - a\right)^2}{n} = \frac{\frac{1}{12} - a^2 + a}{n}$

$V(W) = \frac{a(1-a)}{n} = \frac{a - a^2}{n}$

$\Rightarrow V(T) > V(W) \Rightarrow W$ est le meilleur estimateur.

Exercice 10 (Echantillonage) :

-1- $Z_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$

$\Rightarrow Z_n$ prend des valeurs dans $[\theta, 1]$ car $X \rightsquigarrow U([\theta, 1])$

$E(X) = \frac{\theta + 1}{2}$; $V(\theta) = \frac{(1-\theta)^2}{12}$

$F(x) = P(X < x)$

• pour $x \in [\theta, 1]$: $F(x) = \int_\theta^x f(t)\,dt = \int_\theta^x \frac{1}{1-\theta}\,dt = \left[\frac{t}{1-\theta}\right]_\theta^x$

$= \frac{x - \theta}{1 - \theta}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ \frac{x-\theta}{1-\theta} & \text{si } x \in [\theta, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$P(Z_n > z) = P(\min(x_1, \ldots, x_n) > z) =$

$= P(\{x_1 > z\} \cap \{x_2 > z\} \cap \ldots \cap \{x_n > z\}) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i > z)$

$= \left(P(x_i > z)\right)^n = \left(1 - P(x_i < z)\right)^n = \left(1 - F(z)\right)^n$

- pour $z \in [\theta, 1]$:

$$P(Z_n > z) = \left(1 - F(z)\right)^n = \left(1 - \frac{z-\theta}{1-\theta}\right)^n = \left(\frac{1-\theta-(z-\theta)}{1-\theta}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^n$$

$$F_n(z) = P(Z_n < z) = 1 - P(Z_n > z) = 1 - \left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^n$$

$$f_n(z) = \frac{\partial F_n(z)}{\partial z} = \frac{+n}{1-\theta}\left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^{n-1}$$

$$f_n(z) = \begin{cases} \frac{n}{1-\theta}\left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^{n-1} & z \in [\theta, 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2- $E(Z_n) = \int_{\mathbb{R}} f_n(z) \cdot z \, dz = \int_{\theta}^{1} \frac{n}{1-\theta}\left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^{n-1} z \, dz$

<u>IPP</u> soit $u(z) = z \longrightarrow u'(z) = 1$

$v'(z) = \left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^{n-1} \frac{n}{1-\theta} \longrightarrow v(z) = -\left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^n$

donc $E(Z_n) = \left[-z\left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^n\right]_{\theta}^{1} + \int_{\theta}^{1}\left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^n dz$

$$E(Z_n) = \left[-z\left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^n\right]_{\theta}^{1} + \int_{\theta}^{1}\left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^n dz$$

$$= \theta + \left[-\left(\frac{1-\theta}{n+1}\right)\left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^{n+1}\right]_{\theta}^{1}$$

$$= \theta + \frac{1-\theta}{n+1} > \theta$$

$$\bullet \lim_{n\to+\infty} E(Z_n-\theta) = \lim_{n\to+\infty} E(Z_n)-\theta = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\theta}{n+1} = 0$$

-3- $$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z<\theta \\ 1-\left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^n & z\in[\theta,1] \\ 1 & \text{si } z>1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(z) = \lim_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1-z}{1-\theta}\right)^n$$

$$z\in[\theta,1] \qquad -1<-z<-\theta$$

$$0<\frac{1-z}{1-\theta}<\frac{1-\theta}{1-\theta}=1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(z)=1 \text{ si } z\in[\theta,1]$$

$Z_n \xrightarrow{\text{loi}} Z^*$ qui a pour loi

$$\Rightarrow F^*(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z<\theta \\ 1 & \text{si } z>\theta \end{cases}$$

Exercice 2 (Examen)

-1- f : fonction densité

- f positive • f continue p.p
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$

car $$\int_{-1}^{0} -ax\,dx + \int_{0}^{1} 1-ax\,dx = \left[-\frac{ax^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[x-\frac{ax^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{a}{2} + 1 - \frac{a}{2} = 1$$

$$\cdot\ E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) = \int_{-1}^{0} -a x^2 \, dx + \int_0^1 (1-ax) x \, dx$$

$$= \left[-\frac{a x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{a x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= -\frac{a}{3} + \frac{1}{2} - \frac{a}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2a}{3}$$

$$\cdot\ V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) = \int_{-1}^{0} x^2 a x \, dx + \int_0^1 (1-ax) x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{a x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{+a}{4} + \frac{1}{3} + \frac{a}{4} = \frac{1}{3}$$

$$= \cancel{\frac{1}{3} - \frac{2a}{4}} = \cancel{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a}$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2a}{3}\right)^2$$

- 2 - La méthode des moments :

$$E(X) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} a = \varphi(a)$$

avec $\varphi : \left]0,1\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{2} - \frac{2}{3} x$$

$$\varphi^{-1} : \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{3} x = y \Rightarrow \frac{2}{3} x = \frac{1}{2} - y \Rightarrow x = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - y\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{2} y$$

$$T = \varphi^{-1}(\overline{X}) \Rightarrow T = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \overline{X}$$

$$E(T) = E\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\overline{X}\right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}a\right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + a$$

$$= a$$

T est un estimateur pour a sans biais $T \xrightarrow[n\to+\infty]{P_r} a$

D'après loi des grands nombre : $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to+\infty]{P_r} E(X) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}a$

$\Rightarrow T \xrightarrow[n\to+\infty]{P_r} a$

$$V(T) = V\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\overline{X}\right) = \frac{9}{4}V(\overline{X}) = \frac{9}{4}\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}a\right)^2\right] \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{9}{4n}\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}a\right)^2\right]$$

-3- $K \sim B(n, p)$

$K = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ avec $Z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x_i < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$P(-1 < X_i < 0) = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} -ax\,dx = \left[-\frac{ax^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \frac{a}{2} = p$$

$K \sim \left(n, \frac{a}{2}\right)$

$W = \frac{2K}{n}$

$E(W) = \frac{2}{n}E(K) = \frac{2n}{n} \times \frac{a}{2} = a$

$\Rightarrow$ W est un estimateur sans biais de paramètre a

$$V(W) = \left(\frac{2K}{n}\right) = \frac{4}{n^2}V(K) = \frac{4}{n^2}\left(n \times \frac{a}{2}\left(1 - \frac{a}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{n}\left(a\left(1 - \frac{a}{2}\right)\right)$$

W est un estimateur sans biais de paramètre a

en plus $V(W) = \frac{2}{n}\left(a\left(1 - \frac{a}{2}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{cv} 0$

W cvg en moyenne quadratique vers a.

-4- T et W estimateur sans biais pour le paramètre a.

$$V(T) = \frac{9}{4n}\left[\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}a\right)^2\right]$$

$$V(W) = \frac{2}{n} - \left(a - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$2a - a^2 \quad ? \quad \frac{9}{4}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3}a - \frac{4}{9}a^2\right]$$

$$2a - a^2 \quad ? \quad \underbrace{\frac{3}{4} - \frac{9}{16}}_{\frac{3}{16}} + \frac{3}{2}a - a^2$$

$$2a - \frac{3}{2}a - \frac{3}{16} \quad ? \quad 0$$

$$\frac{a}{2} - \frac{3}{16} \quad ? \quad 0$$

$$a \qquad \frac{3}{8}$$

- si $a > \frac{3}{8}$, W est meilleur estimateur.
- si $a < \frac{3}{8}$, T est meilleur estimateur.