République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Gabès
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès
Département Génie Electrique-Automatique

Cours Analyse Numérique

Réalisé par : DEHRI Khadija

Maitre Assistante en Génie Electrique-Automatique

Membre de l'unité de recherche
Commande Numérique des Procédés Industriels (CONPRI)

République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement
Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Gabès
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès
Département Génie Electrique-Automatique

Chapitre 4 :
Résolution Numériques des fonctions non linéaires

Réalisé par : DEHRI Khadija

Maitre Assistante en Génie Electrique-Automatique

Membre de l'unité de recherche
Commande Numérique des Procédés Industriels (CONPRI)

Introduction

L'objectif de ce chapitre est la résolution d'une équation non linéaire : $f(x)=0$

Pour une fonction $f(x)=ax^2+bx+c=0$ $\lambda_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Si $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$ alors elle possède n racines (réels ou complexe)

Jusqu'à aujourd'hui, il n'existe pas de formule générale exacte pour calculer les racines d'un polynôme de degré >=5

Objectif : Chercher $\alpha\in\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) solution de l'équation $f(x)=0$ itérativement

Les méthodes itératives permettent d'approcher la solution d'un problème que l'on ne sait pas résoudre exactement dans un temps réduit.

Actuellement, la résolution d'une équation non linéaire préoccupe toujours les mathématiciens : détermination des points d'équilibre ou/et minimisation d'une fonction non linéaire.

Parmi les méthodes de résolution d'une équation non linéaire, on cite :

- Méthode de Dichotomie (Bissection)
- Méthode de la Fausse position (Regula Falsi)
- Méthode de la Sécante
- Méthode de Newton
- Méthode de Point fixe

Introduction

Les méthodes qui seront traitées dans ce chapitre consistent à construire une suite itérative $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que : $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha$ avec α est une racine de f.

La convergence de ces méthodes dépend essentiellement du choix de la valeur initiale de $x^{(0)}$

Deux classes de méthodes sont distinguées

- Méthodes d'encadrement
- Méthodes du point fixe

Méthodes d'encadrement

Cette classe de méthode est basée sur une propriété relative à l'existance des racines d'une application d'une variable réelle à valeurs réelles

Théorème 1 : Existence d'un zéro d'une fonction

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ($[a,b]\subset\mathbb{R}$) vérifiant $f(a)f(b)<0$, alors il existe au moins $\alpha\in]a,b[$ tel que $f(\alpha)=0$

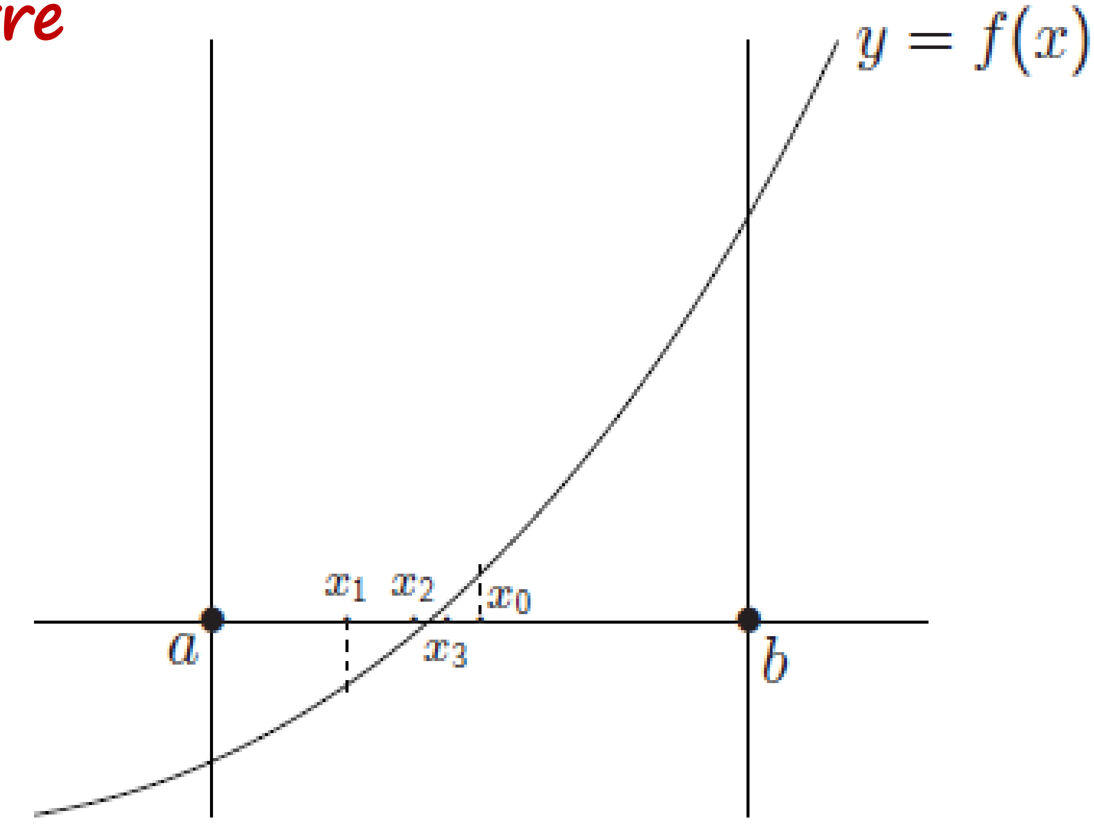
Méthode de Dichotomie

Principe

Soit f une fonction continue vérifiant théorème 1.

La méthode de dichotomie consiste à approcher la solution α par encadrement en réduisant à chaque itération la longueur de l'intervalle $[a,b]$

Algorithme de mise en œuvre



Entrées : f, a, b, ε

Sortie : x_k

Tant que $|a-b| > \varepsilon$ (ou $|f(x_k)| > \varepsilon$) faire

$x_k = \dfrac{a+b}{2}$

si $f(a)f(x_k) < 0$ alors

$b = x_k$

sinon si $f(b)f(x_k) < 0$ alors

$a = x_k$

fin si

si $f(x_k) = 0$ alors

x_k est une racine de f

fin si

fin tant que

Méthode de Dichotomie

Algorithme de mise en œuvre

Entrées : f, a, b, ε; Sortie : $x^{(k)}$

$k = 0$

$a^{(k)} = a, b^{(k)} = b$

Tant que $\left|a^{(k)} - b\right|^{(k)} > \varepsilon$ $\left(\text{ou } \left|f(x^{(k)})\right| > \varepsilon\right)$ faire

$$x^{(k)} = \frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}$$

si $f(a^{(k)}) f(x^{(k)}) < 0$ alors

$a^{(k+1)} = a^{(k)}$

$b^{(k+1)} = x^{(k)}$

sinon si $f(b^{(k)}) f(x^{(k)}) < 0$ alors

$a^{(k+1)} = x^{(k)}$

$b^{(k+1)} = b^{(k)}$

fin si

fin tant que

Remarques : La méthode de dichotomie est globalement convergente

Le problème peut avoir plusieurs solutions et l'algorithme converge vers une des solutions

Méthode de Dichotomie

Exemple

Soit $f(x) = x^2 - 2$, chercher les racines de f par la méthode de dichotomie sur l'intervalle $[1, 2]$ avec $\varepsilon = 10^{-2}$

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
0	1.0000	2.0000	1.5000	0.2500
1.0000	1.0000	1.5000	1.2500	-0.4375
2.0000	1.2500	1.5000	1.3750	-0.1094
3.0000	1.3750	1.5000	1.4375	0.0664
4.0000	1.3750	1.4375	1.4063	-0.0225
5.0000	1.4063	1.4375	1.4219	0.0217
6.0000	1.4063	1.4219	1.4141	-0.0004

Solution

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
0	1.0000	2.0000	1.5000	0.2500
1.0000	1.0000	1.5000	1.2500	-0.4375
2.0000	1.2500	1.5000	1.3750	-0.1094
3.0000	1.3750	1.5000	1.4375	0.0664
4.0000	1.3750	1.4375	1.4063	-0.0225
5.0000	1.4063	1.4375	1.4219	0.0217
6.0000	1.4063	1.4219	1.4141	-0.0004
7.0000	1.4141	1.4219	1.4180	0.0106
8.0000	1.4141	1.4180	1.4160	0.0051
9.0000	1.4141	1.4160	1.4150	0.0023
10.0000	1.4141	1.4150	1.4146	0.0010
11.0000	1.4141	1.4146	1.4143	0.0003
12.0000	1.4141	1.4143	1.4142	-0.0001
13.0000	1.4142	1.4143	1.4142	0.0001

$\varepsilon = 10^{-4}$

Solution

Méthode de Dichotomie

Convergence

Soit f est une fonction continue sur $[a,b]$ vérifiant $f(a)f(b)<0$ et soit α l'unique solution de l'équation $f(x)=0$. Alors la suite $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ construite par la méthode de dichotomie est convergente et on a l'estimation suivante :

$$\left|x^{(k)}-\alpha\right|\le\frac{b-a}{2^{k+1}};\ \forall k\in\mathbb{N}\quad k \text{ étant le nombre d'itérations}$$

Démonstration

Soit $\left[a\ \ b\right]=\left[a^{(0)}\ b^{(0)}\right],\left[a^{(1)}\ b^{(1)}\right],\left[a^{(2)}\ b^{(2)}\right],\ldots,\left[a^{(n)}\ b^{(n)}\right]$ les intervalles engendrés par L'algorithme de Dichotomie, alors les suites $a^{(n)}$ et $b^{(n)}$ sont adjacentes et leur limite commune est un zéro de *f*.

On pose $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}x^{(n)}$

Par construction la suite $a^{(n)}$ est croissante et majorée donc converge

$$(a=a^{(0)}\le a^{(1)}\le a^{(2)}\le\cdots\le b)$$

Par construction la suite $b^{(n)}$ est décroissante et minorée donc converge

De plus pour tout *n*, $a^{(n)}\le b^{(n)}$ et

$$(b=b^{(0)}\ge b^{(1)}\ge b^{(2)}\ge\cdots\ge a)$$

$$b^{(n)}-a^{(n)}=\frac{b^{(n-1)}-a^{(n-1)}}{2}=\frac{b^{(n-2)}-a^{(n-2)}}{2^2}=\cdots=\frac{b^{(0)}-a^{(0)}}{2^n}$$

Méthode de Dichotomie

Démonstration

Donc $\lim_{n\to\infty} b^{(n)} - a^{(n)} = 0$ d'ou $\lim_{n\to\infty} b^{(n)} = \lim_{n\to\infty} a^{(n)} = \alpha$

C'est-à-dire que les deux suites $a^{(n)}$ et $b^{(n)}$ convergent vers la même limite

D'autre part la relation $f(a^{(n)})f(b^{(n)}) \le 0$ et vérifie à chaque itération et particulièrement quand $n \to \infty$

Donc $f^2(\alpha^{(n)}) \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\alpha^{(n)}) = f(\alpha) = 0$

L'erreur absolue de la méthode de Dichotomie $\left|\alpha - \alpha^{(n)}\right| \le \dfrac{b^{(n)} - a^{(n)}}{2} \le \dfrac{b^{(0)} - a^{(0)}}{2^{n+1}}$

En d'autres termes, l'erreur est diminué de moitié à chaque étape, ainsi la méthode converge linéairement.

Remarques

L'avantage de la méthode de Dichotomie est la convergence inconditionnelle si $f(a)f(b)<0$

L'estimation de l'erreur fournit par ailleurs directement un critère d'arrêt pour la méthode, puisque, à précison ε donnée, cette dernière permet d'approcher α en un nombre $N_{\max}$ d'itérations

$$\frac{|b-a|}{2^{N_{\max}+1}} \le \varepsilon \Leftrightarrow N_{\max} \ge \frac{\log_{10}\left(|b-a|\right) - \log_{10}(\varepsilon)}{\log_{10}(2)} - 1$$

Méthode de Dichotomie

Exemple

Soit $g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 1$, chercher les racines de g par la méthode de dichotomie sur l'intervalle $[1, 2]$ avec $\varepsilon = 10^{-4}$

$$\begin{cases} \text{Intervalle}[1,2] \\ \varepsilon = 10^{-4} \end{cases} \Rightarrow N_{\max} \geq \frac{\log_{10}\left(|b-a|\right) - \log_{10}\left(\varepsilon\right)}{\log_{10}(2)} - 1 = \frac{\log_{10}\left(|2-1|\right) - \log_{10}\left(10^{-4}\right)}{\log_{10}(2)} - 1 = 12,2877$$

Méthode de la Fausse position

Principe

La méthode de Dichotomie n'utilise que la signe de *f(x)* pour progresser, alors qu'on peut penser qu'une méthode qui utilise plus d'informations sur *f(x)* progressera plus vite.

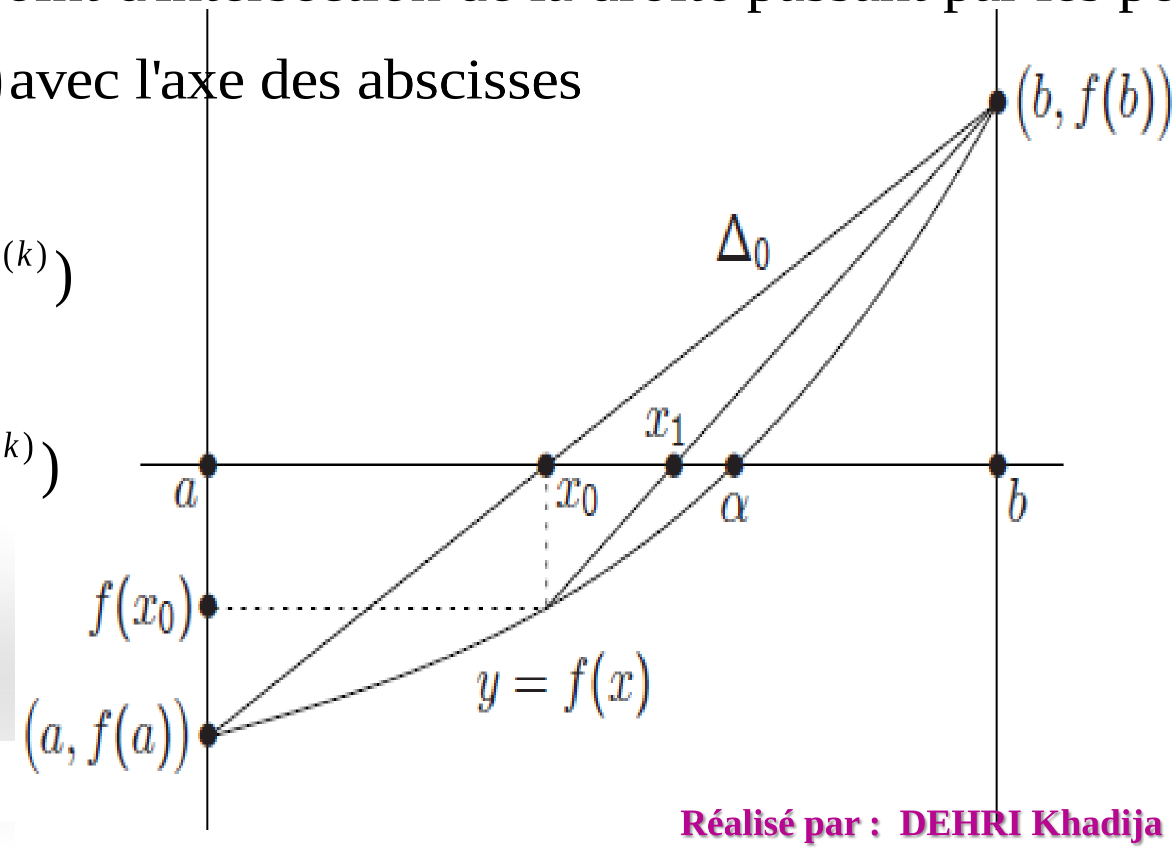
La méthode de fausse position (ou regula falsi) a le même principe de la méthode de dichotomie sauf le choix de $x^{(k)}$ diffère.

Il est donné par l'abscisse du point d'intersection de la droite passant par les points $\left(a^{(k)},\ f(a^{(k)})\right)$ et $\left(b^{(k)},\ f(b^{(k)})\right)$ avec l'axe des abscisses

$$x^{(k)} = a^{(k)} - \frac{a^{(k)} - b^{(k)}}{f(a^{(k)}) - f(b^{(k)})} f(a^{(k)})$$

$$= b^{(k)} - \frac{b^{(k)} - a^{(k)}}{f(b^{(k)}) - f(a^{(k)})} f(b^{(k)})$$

$$= \frac{f(a^{(k)})b^{(k)} - f(b^{(k)})a^{(k)}}{f(a^{(k)}) - f(b^{(k)})}$$



Méthode de la Fausse position

Algorithme

Entrées : f, a, b, ε; Sortie : $x^{(k)}$

$k = 0$

$a^{(k)} = a, b^{(k)} = b$

Tant que $\left|f(x^{(k)})\right| > \varepsilon$ faire

$$x^{(k)} = \frac{f(a^{(k)})b^{(k)} - f(b^{(k)})a^{(k)}}{f(a^{(k)}) - f(b^{(k)})}$$

si $f(a^{(k)})\,f(x^{(k)}) < 0$ alors

$a^{(k+1)} = a^{(k)}$

$b^{(k+1)} = x^{(k)}$

sinon si $f(b^{(k)})\,f(x^{(k)}) < 0$ alors

$a^{(k+1)} = x^{(k)}$

$b^{(k+1)} = b^{(k)}$

fin si

fin tant que

Exemple

Soit $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$,

chercher la racine de f par la méthode

de la Fausse position sur l'intervalle $[1, 2]$

avec $\varepsilon = 10^{-2}$

$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$f(a^{(k)})$	$f(b^{(k)})$	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
1	2	-5	14	1.263	-1.6053
1.263	2	-1.6053	14	1.3388	-0.4306
1.3388	2	-0.4306	14	1.3585	-0.1107
1.3585	2	-0.1107	14	1.3635	-0.0285

Méthode de la Sécante

Principe

Le principe de la méthode de sécante est le même que la méthode de fausse position, c'est-à-dire utiliser une approximation linéaire de $f(x)$ entre deux points.

La différence est que la méthode de fausse position retient deux points qui encadrent certainement la solution alors que la méthode de sécante retient les deux derniers points calculés :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)} f\left(x^{(k)}\right)$$

Algorithme

Entrées : $f, x^{(0)}, x^{(1)}$

Sortie : $x^{(k)}$

$k = 2$

Tant que $\left| f(x^{(k)}) \right| > \varepsilon$ faire

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)} f\left(x^{(k)}\right)$$

$k = k + 1$

fin tant que

Méthode de la Sécante

Exemple

Effectuer les deux premières itérations de la méthode de la sécante sur l'équation

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin(x)$$

avec comme approximations initiales $x_0 = 1.5 \text{ et } x_1 = 2$

On obtient x2 = 1, 433 812 et x3 = 1, 413 777.

Méthode de Newton

Principe

L'approche graphique est la suivante : on choisi une valeur d'abscisse raisonnablement Proche de vrai zéro. On remplace alors la courbe par sa tangente et on calcule le zéro de l'approximation affine associée à la tangente. Ce zéro de la tangente sera généralement plus proche du zéro de la fonction et la méthode peut être réitérée.

D'un autre point de vue, on peut déduire la méthode de Newton de la méthode de la sécante. En effet

$$\frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)} \simeq \frac{1}{f'\left(x^{(k)}\right)}$$

Par conséquent, on suppose que la fonction *f* est dérivable, on choisit une valeur arbitraire $x^{(0)}$ (le plus près de zéro est le mieux) et on définit :

la suite de Newton par :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{donnée} \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \end{cases}$$

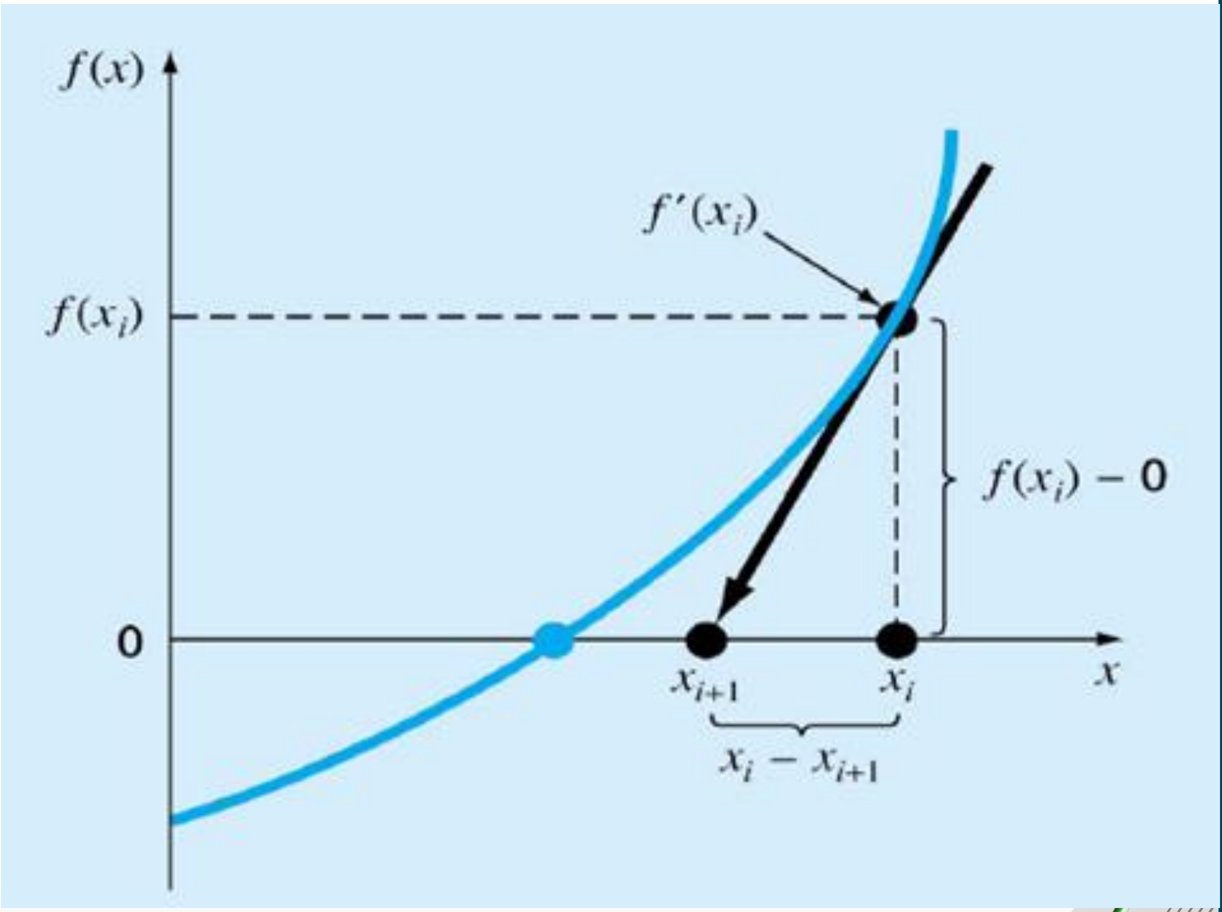
Méthode de Newton

Soit Δ_n la tangente à la courbe représentative de f au point x_n

Alors x_{n+1} est l'abscisse d'intersection entre Δ_n est l'axe des abscisses

$$(x_{n+1},0)=\Delta_n \cap (y=0)$$

Algorithme



Entrées : $f, f', x^{(0)}, \varepsilon$; Sortie : $x^{(k+1)}$

$k=0$

Tant que $\left|f(x^{(k)})\right| > \varepsilon$ faire

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

$k = k+1$

fin tant que

Méthode de Newton

Remarques

1. Si la valeur de départ $x^{(0)}$ est trop éloignée de la vraie racine, alors la suite de Newton peut entrer dans une boucle infinie sans produire une approximation améliorée

2. On peut utiliser la méthode de Newton avec un point de départ $x^{(0)} \in]a,b[$ mais la convergence n'est pas garantie.
En pratique, souvent la méthode de dichotomie est utilisée pour trouver $x^{(0)}$ assez proche de la racine.

3. Pour éviter les boucles infinies, il faut rajouter dans la condition d'arrêt de la boucle tant que une condition sur le nombre maximal d'itérations à atteindre.

4. La méthode de Newton nécessite la connaissance de la dérivée de f alors que cette dernière n'est pas toujours connue.
Pour résoudre ce problème, une approximation de f' peut être utilisée.

Formule des différences finis Pour h donné et petit on a :

$$f'(x^{(k)}) = \frac{f(x^{(k)}+h) - f(x^{(k)})}{h}$$

Méthode de Newton

Théorème de convergence 1

On considère une fonction réelle définie sur $[a,b]$ de classe C^2 telle que $f(a)f(b)<0$. On suppose que les fonctions f' et f'' ne s'annulent pas et gardent chacun un signe constant sur $[a,b]$

$$\text{Soit } g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Si $f'f''$ est positive (respectivement négative) sur $[a,b]$ on pose $x^{(0)}=b$ (respectivement $x^{(0)}=a$)

Alors la suite $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = g\left(x^{(k)}\right)$ converge vers l'unique solution de $\alpha \in [ab]$

Démonstration

Méthode de Newton

Démonstration

On suppose que $f' > 0$ et $f'' < 0$ sur $[a\ b]$ (les autres se traitent de manière similaire).

Ces hypothèses assurent l'existence et l'unicité de $\alpha \in [a\ b]$ telque $f(\alpha) = 0$

On a $x^{(0)} = a$, donc $x^{(0)} \leq \alpha$ supposons que $x^{(n)} \leq \alpha$, alors comme :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$$

et $f' > 0$ donc f est croissante ($x^{(k+1)} \geq x^{(k)}$), alors $x^{(k)}$ est croissante.

De plus : $x^{(k+1)} - \alpha = g(x^{(k)}) - g(\alpha) = g'(\xi)(x^{(k)} - \alpha)$ avec $\xi \in]x^{(k)}\ \alpha[$

Or

$$g'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

Donc $g'(\xi) > 0$ et $x^{(k+1)} \leq \alpha$

$x^{(n)}$ est croissante et majorée, elle est donc convergente

Méthode de Newton

Remarques

On suppose que la fonction f est de classe C^3 sur $[a,b]$ tels que $f(a)f(b)<0$ et que les deux fonctions f' et f'' sont toutes les deux strictement positives sur $[a,b]$.

Ceci garantit l'existence et l'unicité d'une racine simple α de f sur $[a,b]$. On a donc :

$$\begin{cases} f(\alpha)=0 \\ f'(\alpha)\neq 0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\left|x^{(k+1)}-\alpha\right|}{\left|x^{(k)}-\alpha\right|}=0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\left|x^{(k+1)}-\alpha\right|}{\left|x^{(k)}-\alpha\right|^2}=\dfrac{f''(x^{(k)})}{2f'(x^{(k)})} \end{cases}$$

Méthode de Newton

Théorème de convergence 2

Soit $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 vérifiant :

$$f(a)f(b)<0$$

$$f'(x)\neq 0,\ \forall x\in[a,b]$$

$$f''(x)\neq 0,\ \forall x\in[a,b]$$

alors la suite définie par :

$$\begin{cases} x^{(0)}\in[a,b] \text{ tel que } f(x^{(0)})f''(x^{(0)})>0 \\ x^{(k+1)}=x^{(k)}-\dfrac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \end{cases}$$

est convergente vers α

Méthode de Newton

Exemple

Soit $f(x) = x^3 + x^2 + 7x - 3$,

1- Montrer qu'il existe une unique solution $\alpha \in \Re$ telque $f(\alpha) = 0$

2- Montrer que $\alpha \in \left]0\ 1\right[$

3- Prouver la convergence globale de la méthode de Newton sur $[0,1]$

Méthode de Point fixe

Principe

Un procédé générale pour trouver les racines d'une équation non linéaire *f(x)=0* consiste en la transformer en un problème équivalent *x-g(x)=0* ou la fonction auxiliaire $g:[a\ b]\rightarrow\Re$ doit avoir la propriété suivante $x=g(x)\Leftrightarrow f(x)=0$

$f(\alpha)=0$ par l'équivalence, il suit alors que $g(\alpha)=\alpha$

On dit que α est un point fixe de g.

Approcher les zéros de f se ramène donc au problème de la détermination des points fixe de g.

L'idée consiste à construire, une suite $x^{(n+1)}=g(x^{(n)})$

tel que $\lim_{n\to\infty} x^{(n)}=\alpha$

C'est à dire la suite doit converger vers le point fixe et par conséquent vers la racine de f.

La méthode de Newton peut etre considéré comme un cas particulier de la méthode du point fixe.

En effet, l'itération de Newton est exprimée par : $x^{(n+1)}=x^{(n)}-\dfrac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}=g(x^{(n)})$

Cependant cette fonction n'est toujours pas la seule, il existe toujours d'autre fonctions g qui peuvent vérifier cette relation d'équivalence.

Méthode de Point fixe

Théorème de convergence

1- Il existe un intervalle $[a\ b]$ tel que $\forall x \in [a\ b]$

la fonction g est définie, continue et $g(x) \in [a\ b]$

Alors, on peut déduire que g admet un point fixe dans $[a\ b]$.

2- $\max\limits_{x\in[a\ b]} |g'(x)| \leq m < 1$, on peut déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} = \alpha$

(g est strictement contractuante $\forall x, y\ |g(x) - g(y)| \leq m|x - y|$)

Démonstration

$$\varepsilon^{(n)} = \alpha - x^{(n)} = g(\alpha) - g(x^{(n-1)})$$

$$\xrightarrow{\text{Théorème des accroissements finis}} \exists \xi^{(n)} \in \left]\alpha\ x^{(n-1)}\right[\text{ ou } \xi^{(n)} \in \left]x^{(n-1)}\ \alpha\right[$$

$$\text{telque } \varepsilon^{(n)} = g'(\xi^{(n)})(\alpha - x^{(n-1)}) = g'(\xi^{(n)})\varepsilon^{(n-1)}$$

$$\text{d'ou } |\varepsilon^{(n)}| = |g'(\xi^{(n)})||\varepsilon^{(n-1)}| \leq m|\varepsilon^{(n-1)}|$$

$$\text{Il suit alors que } \lim_{n\to\infty} \varepsilon^{(n)} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^{(n)} = \alpha$$

Méthode de Point de fixe

Remarques

1- On rappelle une analogie entre la méthode du point fixe et la méthode de Dichotomie :

Pour Dichotomie : $\alpha - x^{(n)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{b-a}{2}$ donc $m = \frac{1}{2}$

2- Il est évident que si $\max_{x\in[a\ b]} |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$, alors la méthode du point fixe converge plus rapide que Dichotomie.

Exemple

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

$$g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$$

n	x_n	$\lvert e_n \rvert$	$\lvert \frac{e_{n+1}}{e_n} \rvert$
1	1,500 00	0,134 77	0,580 84
2	1,286 95	0,078 28	0,476 62
3	1,402 54	0,037 31	0,529 88
4	1,345 46	0,019 77	0,502 78
5	1,375 17	0,009 94	0,517 10
6	1,360 09	0,005 14	0,509 72
7	1,367 85	0,002 62	0,511 45
8	1,363 89	0,001 34	0,514 92
9	1,365 92	0,000 69	
⋮	⋮	⋮	⋮
17	1,365 23	0,000 00	