RÉPUBLIQUE TUNISIENNE

Ministère de l'Enseignement Supérieur, et de la Recherche Scientifique

Université de Gabès

Ecole Nationale d Ingénieurs de Gabés

# FEUILLE D'EXAMEN

| Identifiant secret |
|---|
| |

Epreuve de ..........

Session : ..........

Année / Diplôme : ..........

| Signatures des surveillants | Numéro de la feuille double |
|---|---|
| | |
| | Total des feuilles doubles remises |
| | |

Nom : ..........

Prénom ..........

Identifiant (CIN) : ..........

Série / Salle N° : ..........

---

| Identifiant secret |
|---|
| |

Epreuve de Revision générale

| Numéro de la feuille double | Total des feuilles doubles remises |
|---|---|
| | |

| Note attribuée |
|---|
| |

| Signatures des correcteurs |
|---|
| |

C'est pas important

I * Loi discrète : Tableau des Probabilités

- Loi de Probabilité < Fonction de répartition

II * Loi Continue : $\longrightarrow$ Fonction de répartition

- Loi uniforme — leurs propriétés $(E(X), V(X) \ldots)$
- Loi exponentielle

III * Echantillonnage :

- moyenne empirique :

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}$$

- variance empirique :

$$\boxed{S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$ ✓

$E(\overline{X}) = m$ et $Var(\overline{X}) = \frac{V(X)}{n}$

- Critère de C.V en proba :

$$\left.\begin{array}{l} E(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ V(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow X_n \xrightarrow{P_r} a$$

NE RIEN ECRIRE ICI

$C.V$ en m.q $\Rightarrow$ $C.V$ en p $\Rightarrow$ $C.V$ en loi

⚠

* Loi des grands nombres :

* $X$ v.a tq : $E(X) = m$ existe (finie)

$\Rightarrow \forall (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de v.a. 2 à 2 indépendantes et de m loi de $X$, la suite des V.a :

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1} X_i \xrightarrow[n \to +\infty]{P_r} E(X) = m$$

* Convergence en moyenne quadratique :

. Critère de convergence en m.q :

si $(X_n)$ est une suite de v.a vérifie

$\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = a$ et $\lim_{n \to +\infty} V(X_n) = 0$

$\Rightarrow (X_n)$ C.V en m.q vers a.

. Convergence en loi de la moyenne empirique :

* T.C.L :

si $X$ v.a de loi qcq tq $E(X^2)$ existe et si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite infinie de v.a. indépendantes et de même loi que $X$, alors la suite des v.a

$$U_n = \frac{\overline{X}_n - m}{\sigma / \sqrt{n}}, \text{ où } \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$m = E(X)$ ; $\sigma^2 = V(X)$

Convergence en loi vers loi $N(0,1)$ quand $n \to \infty$

En pratique
si la taille de l'echantillon est suffisament grande ($n \geq 50$)

TCL $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

où $m = E(X)$, $\sigma^2 = V(X)$

* Convergence de loi Binomiale vers la loi Normale :

Th de Moivre Laplace :

$(X_n)$ une suite de v.a de la loi Binomiale $B(n,p)$
alors quand $n \to \infty$ la suite de v.a $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{loi} N(0,1)$

En pratique
pour n assez grand, $B(n,p) \sim N(np, \sqrt{np(1-p)})$

* Seconde version du T.C.L :

En pratique :
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes, toutes de la loi.
$E(X_n) = m$, $V(X_n) = \sigma^2$

$\Longrightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \underset{approx}{\sim} N(n.m, \sigma\sqrt{n})$ (pour n assez grand)

* Petits echantillons issus d'une loi normale

* Proposition :

∀ la loi ⇒ n'importe qu'elle loi

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a indépendantes de lois respectives $N(m_i, \sigma_i)$, i variant de 1 à n alors la v.a $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ $\sim$ la loi Normale d'esperance $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ et l'écart-type $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}$

* Corollaire :

∀ la taille ⇒ n'importe qu'elle taille.

Si $(X_1, \dots, X_n)$ est un n-échantillon de la v.a. X de la loi $N(m, \sigma)$ ⟹ La moyenne empirique $\overline{X}_n \sim N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

## IV Estimation :

* Définition :

. l'estimateur $T_n$ est dit sans biais si $E(T_n) = \theta$ $\forall n$
. on appelle biais de l'estimateur $T_n$ la quantité
$b_n = E(T_n) - \theta$
. L'estimateur $T_n$ est dit asymptotiquement sans biais si $\lim_{n\to+\infty} b_n$ ~~$E(T_n)$~~ $= 0$ ; i.e $\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = \theta$

* moyenne empirique :

$T_n = \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ est un estimateur sans biais du paramètre $m = E(X)$

* Variance empirique corrigé :

. $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\sigma^2$.

. $S'^2_n = \frac{n}{n-1} S_n^2$ est un estimateur sans biais de la variance Théorique $\sigma^2$

Proposition :

un estimateur $T_n$ du paramètre $\theta$ est C.V en m.q SSi il est sans biais ou asymptotiquement sans biais et si sa variance tend vers 0 quand $n \to \infty$

important

* Comparaison d'estimateurs :

. si $T_n$ et $U_n$ sont estimateurs sans biais pour $\theta$ et si :

$V(T_n) < V(U_n) \Rightarrow T_n$ est meilleur que $U_n$

. L'un au moins est biaisé :

si $e.q.m(T_n) < e.q.m(U_n) \Rightarrow T_n$ est meilleur que $U_n$ où $e.q.m(T_n) = E((T_n - \theta)^2)$ et $eqm(U_n) = E((U_n - \theta)^2)$

espérance quadratique en moyenne

* Construction d'estimateurs :

. Méthode des moments :

Si $E(X) = f(\theta)$, où f est une fct bijective sur R, donc inversible, alors on prend pour estimateur de $\theta$, la statistique $T_n = f^{-1}(\overline{X})$

. Méthode du M.V : (maximum vraisemblance)

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la v.a. X dont la loi dépend du paramètre inconnu $\theta$. on appelle Vraisemblance de $\theta$, étant données les observations $(x_1, \ldots, x_n)$ le nombre :

M.V

$$\boxed{L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \ldots f(x_n, \theta)}$$

La fonction $\theta \longrightarrow L(x_1, \ldots, x_n)$ est appelée fonction de Vraisemblance de $\theta$

La méthode en Pratique :

$$\theta \longrightarrow Ln(L(\{x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)) = \sum_{i=1} Ln(f(x_i, \theta))$$

* C.N : $\frac{\partial Ln}{\partial \theta}(L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)) = 0 \Rightarrow \theta = \hat{\theta}$

* C.S : $\frac{\partial^2 Ln}{\partial \theta^2}(L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \hat{\theta})) < 0$

L'estimateur du M.V est alors la v.a. $W_n = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$