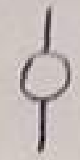
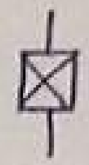
• Modélisation des Robots :

• 6 composantes : 3 pour l'orientation et 3 pour le positionnement

• 2 mouvements : – rotoïde (R : rotation)  ou 

– prismatique (P : translation)  ou 

• matrice homogène $\mathcal{M}_{01}$: entre 0 et 1 dans le repère 0

$\in M_1$ vecteur : $M_{(3,1)}$

$$\underbrace{\mathcal{M}_{if}}_{\in M_{(4,4)}} = \left(\begin{array}{c|c} R_{if} & O_iO_f \\ \hline 000 & 1 \end{array}\right)$$

modèle géométrique

* $\underline{X} = f(q)$ vecteur articulaire : $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$

3 orientations et 3 positions : $\underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

* nombre de l'articulation = nombre des repères − 1

mvt fixe

$\boxed{0 \longrightarrow 1}$

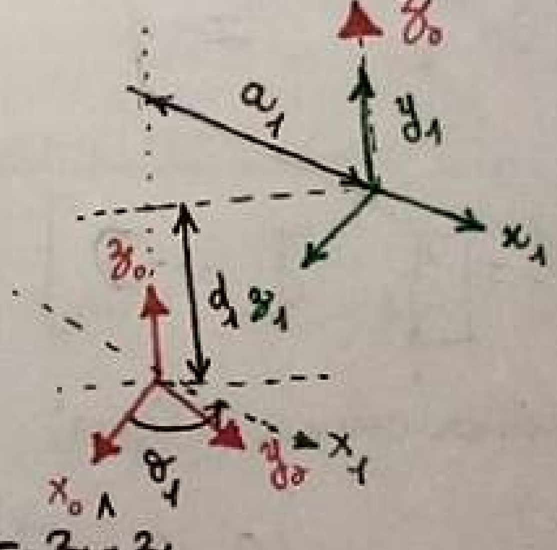
* Paramètres de Denavit-Hartenberg :

_ Rotation autour de z_{i-1} : angle θ_i

_ Translation le long de z_{i-1} : longueur d_i

_ Translation le long de x_i : longueur a_i

_ Rotation autour de x_i : angle α_i



$d_1 = \overline{x_0 x_1}$, $\theta_1 = \widehat{x_0, x_1}$, $a_1 = \overline{z_0 z_1}$, $\alpha_1 = \widehat{z_0, z_1}$

θ_i	d_i	a_i	α_i

$$\ast\ M_{i-1,i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \sin\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} C & -SC & SS & a_i C \\ S & CC & -CS & a_i S \\ 0 & S & C & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\ast \text{ Cinématique :}}$

$\ast$ $\dot{x} = \underbrace{J(q)}\cdot\dot{q}$: modèle cinématique, $\underbrace{J(q)}$: matrice jacobienne

$\cdot\ J_i = \begin{bmatrix} {}^0z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$ si axe i est P (translation)

$\cdot\ J_i = \begin{bmatrix} {}^0z_{i-1} \wedge (R_{0,i-1}\, {}^{i-1}O_n) \\ {}^0z_{i-1} \end{bmatrix}$ si axe i est R (rotation)

$J = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & \cdots & J_n \end{bmatrix}$: n articulations

vecteur colonne (6 lignes)

$\hookrightarrow J = {}^0C_{on}$: torseur cinématique

vitesse de translation

$J = \begin{bmatrix} V_{on} \\ \Omega_{on} \end{bmatrix}$

vitesse angulaire de rotation

matrice : asymétrique $A_S = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix}$

q : vecteur articulaire , $\dot{q}$: vitesse du servo-moteur

$J(q)$: matrice jacobienne ; modèle géométrique $\rightsquigarrow$ modèle cinématique

- vecteur vitesse de rotation est porté par l'axe de rotation et noté $\vec{\Omega}$
- vecteur vitesse instantanée $\perp$ à la vecteur vitesse de rotation :

$\mapsto$ vecteur vitesse instantanée est égal à ${}^0v^P_{01} = {}^0\Omega \wedge {}^0(OP)$

vitesse de rotation — vecteur de position

- ${}^0v^P_{01}$: exprimé dans le repère R_0, 0

- $C.S. + S.C. = S(\cdot + \cdot)$
- $CC - SS = C(\cdot + \cdot)$

$\boxed{\text{Dynamique :}}$

- énergie cinématique linéaire : $K = \frac{1}{2} m v^2$
- énergie cinématique rotative : $K_{rot} = \frac{1}{2} I w^2$, $w = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

avec le moment d'inertie I est : $I = \int_{vol} \rho(r)\, r^2 dr = m r^2$

$\rho(r)$ → distribution massique

- $K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m r^2 . \dot{\theta}^2$
- énergie potentielle : $P = mgh$

R.F.D : $m\ddot{y} = f - mg$

- $m\ddot{y} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{y}}\right) \mapsto m\ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{y}}\right)$
- $mg = \frac{d}{dt}(mgy) = \frac{\partial P}{\partial y} \mapsto mg = \frac{\partial P}{\partial y}$

* Lagrangien du système : $\mathcal{L} = K - \mathcal{P} = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - m g y$

↳ $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = f}$: P.F.D

Soient $q = [q_1 \cdots q_n]$ vecteur des variables et $\mathcal{T} = [\mathcal{T}_1 \cdots \mathcal{T}_n]$ vecteur des forces

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \mathcal{T}}$$: équation de Lagrange