

TP4

Simulation de processus AR, MA et ARMA

I. But

Le but de ce TP est d'apprendre à simuler des séries temporelles de types AR, MA et ARMA et de visualiser leur chronogramme et leurs fonctions d'autocorrélation.

II. Processus MA (*MovingAverage, Moyenne Mobile*)

Les signaux à moyennes mobile sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre à réponse impulsionnelle finie (R.I.F).

L'équation de récurrence reliant la sortie x_n au signal d'entrée u_n est de la forme :

$$x_n = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_m u_{n-m}$$

La fonction de transfert de ce filtre s'écrit :

$$H(z) = \sum_{i=0}^m b_i z^{-i}$$

III. Processus AR (*AutoRegressifs*)

Les signaux à autoregressifs sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre à réponse impulsionnelle infinie (R.I.I).

L'équation de récurrence reliant la sortie x_n au signal d'entrée u_n est de la forme :

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_r x_{n-r} + u_n$$

Cette équation de récurrence s'écrit aussi sous forme plus condensée :

$$x_n = a^T X_n + u_n$$

Avec $a = [a_1, a_2, \dots, a_r]^T$ et $X_n = [x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-r}]^T$

La fonction de transfert de ce filtre est donnée par :

$$H(z) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{j=r} a_j z^{-j}}$$

IV. Processus ARMA (*Auto Regressif, MovingAverage*)

Les signaux ARMA sont obtenus par passage d'un bruit blanc dans un filtre à réponse impulsionnelle infinie (R.I.I). Ces signaux sont une combinaison des signaux AR et MA.

La fonction de transfert de ce filtre présente un numérateur et un dénominateur :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{i=r} b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{j=r} a_j z^{-j}}$$

V. Travail demandé

- 1) Générer un bruit blanc à distribution gaussienne ayant 5000 échantillons de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 1$.
- 2) Vérifier que le bruit est bien blanc en calculant sa fonction d'autocorrélation ainsi que sa densité spectrale.

Signaux AR

On considère le filtre de fonction de transfert :

$$H_{AR}(z) = \frac{0.3}{1 - 0.8z^{-1}}$$

- 1) Tracer la réponse fréquentielle du filtre.
- 2) Essayer de prédire la forme de la densité spectrale du signal de sortie (expression de DSP)
- 3) Calculer la réponse du filtre au signal bruit.
- 4) Tracer sa fonction d'autocorrélation ainsi que sa densité spectrale de puissance.
- 5) Pourquoi appelle-t-on ce genre de signal bruit blanc coloré ?

Signaux MA

On considère le filtre de fonction de transfert :

$$H_{MA}(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2}$$

- 1) Tracer le spectre de la fonction de transfert.
- 2) Calculer le signal de sortie $x(n)$, le bruit $b(n)$ étant le signal d'entrée.
- 3) Calculer et tracer la fonction d'autocorrélation de $x(n)$.
- 4) Calculer la DSP de $x(n)$. Commenter

Signaux ARMA

- 1) Déduire la fonction de transfert d'un filtre ARMA. ($H_{MA} * H_{AR}$)
- 2) Tracer sa réponse fréquentielle.