Série n° 3

Exercice 1.
Les fonctions suivantes ont-elles une limite en (0,0) ?

1. $f(x,y) = (x+y)\sin(\dfrac{1}{x^2+y^2})$.
2. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
3. $f(x,y) = \dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$.

Exercice 2.
soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y}, & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer d'après la définition les dérivées partielles de la fonction f au point (0, 0).
2. La fonction est-elle continue au point (0, 0) ?

Exercice 3.
soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+xy^3}{x^2+y^2}, & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash(0,0)$, on $|f(x,y)| \leq \|(x,y)\|+(\|(x,y)\|)^2$.
2. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.
soit $\Omega = (]0,+\infty[)^2$ et f la fonction définie sur Ω par

$$f(x,y) = e^x \ln(xy), \quad (x,y) \in \Omega.$$

3. Montrer que les solutions de l'EDP sont : $u(x,;y) = f(y^2 - x)$
4. Expliquer pourquoi ce problème n'est pas bien posé.

Exercice 12. Problème de Cauchy On consid‘ere sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ le problème

$$\begin{cases} y\partial_x u - x\partial_y u = 0 \\ u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

1. Rappeler ce qu'une solution de cette EDP vérifie le long des courbes caractéristiques.
2. Montrer qu'il s'agit de demi-cercles.
3. Quelle condition doit vérifier f pour qu'il y ait existence d'une solution ?
4. Déterminer les solutions de l'EDP dans le cas $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^4}$.

Exercice 13. Soit l'EDP

$$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u = xt.$$

1. Déterminer l'opérateur différentiel linéaire et l'écrire comme produit de deux opérateurs de degré 1.
2. Résoudre $\partial_x v - \partial_t v = xy$ à l'aide du changement de variables $X = x$, $T = x + t$.
3. Résoudre l'EDP (on pourra effectuer un autre changement de variables $U = x$ et $V = x - t$).

1. Montrer que f est continue sur Ω.
2. Déterminer ses dérivées partielles d'ordre 1 en $(1, e)$.

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$. Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$. Démontrer que h est C^1 et exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 6. 1. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction :

$$f(x,y) = 3x^2y - 4xy,$$

au point $(x,y) = (1,2)$ le long la direction $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$.

2. Vérifier l'égalité :

$$D_v f(1,2) \doteq \nabla f(1,2) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) v_2.$$

Exercice 7. *Solutions d'une équation de propagation.* On considère l'équation de propagation $\partial^2_{tt} u - c^2 \partial^2_{xx} u = 0$.

1. a. Montrez que la fonction $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ est solution.
   b. Existe-t-il un point où $f(x-ct)$ est toujours nulle ?
   c. On suppose que $u(t=0,x) = F(x)$. Tracez $f(x-ct)$.
2. On cherche maintenant s'il existe une solution de la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$.
3. a. Montrez que si c'est le cas X et T doivent satisfaire des EDOs du second ordre, où apparaît une constante indéterminée.
   b. Montrez que le signe de cette constante est fixé si la solution doit rester finie dans le temps.
   c. Résoudre les EDO, exprimer la solution $u(x,t)$, et montrez qu'elle est nulle en certains points de l'espace à tout temps t.

Exercice 8. *Solutions d'une équation de diffusion. Fonction erreur.* On considère l'équation de diffusion $\partial_t u = a \partial^2_{xx} u$. On en cherche une solution sous la forme $u(x,t) = F(\frac{x}{\sqrt{at}})$.

1. La solution proposée est-elle justifiée par l'analyse dimensionnelle ?
2. Montrer que F doit vérifier une équation différentielle du second ordre que l'on écrira.
3. Résoudre l'équation et trouver F sous forme intégrale.
4. On définit la fonction erreur par :

$$E(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-u^2} du.$$

Exprimez la solution trouvée à l'aide de cette fonction,

Exercice 9.

1. Trouver la solution du problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + 2\partial_x u = 0 \\ u(x, t = 0) = \dfrac{1}{x^2 + 1} \end{cases}$$

2. Tracer $u(x, t = \frac{1}{2})$ en fonction de x.
3. En déduire une interprétation physique de l'équation.

Exercice 10. *Équation à coefficients non constants sans second membre.*

$$\begin{cases} y\partial_x u + x\partial_y u = 0 \\ u(0, y) = e^{-y^2} \end{cases}$$

1. Déterminer les courbes caractéristiques de cette équation. Tracez-les soigneusement.
2. Démontrer que la solution est constante le long des courbes caractéristiques.
3. Résoudre l'équation lorsque c'est possible. Que manque-t-il pour fermer le système ?

Exercice 11. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0; y > 0\}$. On considére alors sur Ω le probléme :

$$\begin{cases} 2y\partial_x u + \partial_y u = 0 \\ u(x, 0) = f(x), \ x > 0. \end{cases}$$

1. Rappeler ce qu'une solution de cette EDP vérifie le long des courbes caractéristiques.
2. Déterminer les courbes caractéristiques et tracez-les soigneusement.

Rappel du Cours :

$(E)\ a\partial_t u(t,x) + b\,\partial_x u(t,x) = 0.$

changement de variable.

on pose $t' = bt - ax$.

$x' = at + bx$.

$v(t',x') = u(t,x)$

$(E) \Leftrightarrow \underbrace{(a^2+b^2)}_{\neq 0}\partial_2 v(t',x') = 0.$

$\Rightarrow \partial_2 v(t',x') = 0.$

$\Rightarrow v(t',x') = f(t')$ avec f est $\mathcal{C}^1$.

$\Rightarrow u(t,x) = f(bt-ax)$ avec f est de class $\mathcal{C}^1$.

Exemple 3.6.1 : p50

3/ $\begin{cases} 2\partial_t u(t,x) + 3\partial_x u(t,x) = 0. \\ u(0,x) = \sin(x). \end{cases}$

on pose $t' = 3t - 2x$.

$x' = 2t + 3x$.

et $v(t',x') = u(t,x)$

L'éq vérifiée par v (d'après le cours)

$(2^2+3^2)\partial_2 v(t',x') = 0 \Leftrightarrow \partial_2 v(t',x') = 0$

$\Leftrightarrow v(t',x') = f(t')$ avec f est de classe $\mathcal{C}^1$

$\Leftrightarrow u(t,x) = f(3t-2x)$ avec f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Comme $u(0,x) = f(-2x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

on pose $X = -2x$.

$x = -\frac{X}{2}$.

$f(X) = \sin\left(-\frac{X}{2}\right) \forall X.$

$\Rightarrow u(t,x) = f(3t-2x).$

$= \sin\left(-\frac{3t-2x}{2}\right)$

$u(t,x) = \sin\left(-\frac{3}{2}t + x\right), \forall (t,x) \in \mathbb{R}^2.$

Ex 3.6.3 : p51

1/ si X un champ de vecteurs.

γ la courbe intégrale de X ssi $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$

on a $X(x,y) = (1, -xy)$.

Soit $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intégrale X, càd $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$.

$\Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (1, -a(t)b(t))$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = 1 \quad (1) \\ b'(t) = -a(t)b(t) \quad (2). \end{cases}$

(1) $\Rightarrow a(t) = t + a_0.$

(2) $\Rightarrow b'(t) = -(t+a_0)b(t).$

$\Leftrightarrow \frac{b'(t)}{b(t)} = -(t+a_0)$

$\Leftrightarrow \ln|b(t)| = -\left(\frac{t^2}{2} + a_0 t\right) + c.$

$\Leftrightarrow |b(t)| = e^{-\left(\frac{t^2}{2}+a_0 t\right)+c}.$

$\Leftrightarrow b(t) = \pm e^{c} e^{-\left(t^2/2 + a_0 t\right)}$

$\Leftrightarrow b(t) = k\, e^{-\left(t^2/2 + a_0 t\right)}$

pour $t=0$ $b(0) = k.e^0 \Rightarrow k = b(0) = b_0.$

$\Rightarrow b(t) = b_0 e^{-\left(t^2/2 + a_0 t\right)}.$

On a $a(t) = t + a_0.$

$a^2(t) = (t+a_0)^2.$

$= t^2 + 2a_0 t.$

$\Rightarrow \frac{t^2}{2} + a_0 t = \frac{a^2(t) + a_0^2}{2}.$

d'où : $b = b_0\, e^{-\left(\frac{a^2 - a_0^2}{2}\right)}$

b/ page 47 : les 7 exemples page 51 Il faut le faire.

on pose $X(x,y) = (1, -xy)$

d'après on a : $\gamma : y = y_0 e^{-\left(\frac{x^2 - x_0^2}{2}\right)}$

La courbe intégrale de X. On sait que u est constante le long de la courbe intégrale γ qui passe par le pt (x_0, y_0). Cette courbe coupe l'axe des ordonnées au pt $(x_1 = 0, y_1 = y_0 e^{x_0^2/2})$

d'on sait que $u(x_0,y_0) = u(x_1,y_1)$
$= f(y_2)$

$\Rightarrow f(y_2) = f(y_0 e^{\frac{1}{2}x_0^2}) \quad \forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}$

avec f est de classe $\mathcal{C}^1$

d'où $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : u(x,y) = f(y e^{\frac{1}{2}x^2})$

c/ $\begin{cases} \partial_x u(x,y) - xy\,\partial_y u(x,y) = 0 \\ u(0,y) = y^2. \end{cases}$

d'après b/ : on a : $u(x,y) = f(y e^{\frac{1}{2}x^2})$, avec f $\mathcal{C}^1$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et comme $u(0,y) = f(y) = y^2$.

donc $u(x,y) = (y e^{\frac{1}{2}x^2})^2 = y^2 e^{x^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

d/ $\begin{cases} \partial_x u(x,y) - xy\,\partial_y u(x,y) = 0. \\ u(x,0) = x^2. \end{cases}$

d'après b/ on a $u(x,y) = f(y e^{\frac{1}{2}x^2})$

et comme $u(x,0) = f(0) = x^2$. impossible

donc le système (S_2) n'admet pas de

solts.

$\Rightarrow u(x_0, y_0) = f\left(2\sqrt{\left(\frac{x_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{2}\right)^2}\right)$

$\boxed{u(x_0, y_0) = f\left(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right)}$ $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}$.

4/ $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^4}$.

$u(x,y) = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)^2}$

EX10 :

$\begin{cases} y\partial_x u + x\partial_y u = 0. \\ u(0,x) = e^{-y^2}. \end{cases}$

1/ voir l'ex du cours 3.6.2

$X = (y, x)$ exple 4 i.

Soit $\delta(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intégrale de $X \Rightarrow \delta'(t) = X(\delta(t))$

$\begin{cases} a(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t}. \\ b(t) = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t}. \end{cases}$

pour $t=0$: $a_0 = C_1 + C_2$: (1).

$b_0 = C_1 - C_2$ (2)

(1)+(2) : $2C_1 = a_0 + b_0$.

$C_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$.

(1) $C_2 = a_0 - C_1$.

$= a_0 - \dfrac{a_0+b_0}{2}$.

$\boxed{C_2 = \dfrac{a_0-b_0}{2}.}$

$a^2(t) = C_1^2 e^{2t} + 2C_1C_2 + C_2^2 e^{-2t}$.

$b^2(t) = C_1^2 e^{2t} - 2C_1C_2 + C_2^2 e^{-2t}$.

$a^2 + b^2 = 2C_1^2 e^{2t} + 2C_2^2 e^{-2t}$.

EX N°11 : abs le cours

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x>0, y>0\}$.

$\begin{cases} 2y\partial_x u + \partial_y u = 0. \\ u(x,0) = f(x), \; x>0. \end{cases}$

$2y\partial_x u + \partial_y u = 0$.

$X(x,y) = (2y, 1)$

$\delta(t) = (a(t), b(t))$ tq $\delta'(t) = X(\delta(t))$

$\begin{cases} a'(t) = 2b(t) \; (1) \\ b'(t) = 1 \; (2) \end{cases}$

avec $(a(0), b(0)) = (a_0, b_0)$ on a :

(2) : $b(t) = t + b_0$.

(1) $a'(t) = 2(t+b_0)$

$a(t) = 2\int (t + b_0)\, dt$.

$a(t) = 2\left(\frac{t^2}{2} + b_0 t\right) + C$.

pour $t=0$; $a_0 = C$.

$\Rightarrow a(t) = t^2 + 2b_0 t + a_0$.

$b^2(t) = (t+b_0)^2$

$= t^2 + 2b_0 t + b_0^2$.

$b^2(t) = a(t) - a_0 + b_0^2$.

$b(t) = \pm\sqrt{a(t) - a_0 + b_0^2}$

$\gamma : b = \pm\sqrt{a - a_0 + b_0^2}$.

Scanné avec CamScanner

Ex.12 :

1) La sol de l'équation u de l'équation est constante le long (des caractéristiques) - [La caractéristique qui passe par le pt (x_0, y_0) et coupe l'axe l'abs ordonnées au pt $(x_1 = 0, y_1)$] (utilisé dans le recherche de la sol].

2/ (E) : $y\partial_x u - x\partial_y = 0$.

on pose : $X(x,y) = (y, -x)$

Soit $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intég de $X \Leftrightarrow \gamma'(t) = X(\gamma(t)) = X(a(t), b(t))$

$\Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (b(t), -a(t))$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = +b(t) \\ b'(t) = -a(t). \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$.

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$.

on pose $\lambda_1 = i$.

Soit $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ tq $Au_1 = iu_1$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia_1 \\ ib_2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = ia_1 \\ -a_2 = ib_1. \end{cases}$

$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ ia_1 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

on prend $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$X(t) = 2e^{\alpha t}\left((c_1 \cos(\beta t) - c_2 \sin(\beta t))v - (c_2 \cos(\beta t) + c_1 \sin(\beta t))w\right)$

$= 2\left([c_1 \cos(t) - c_2 \sin(t)]\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + [c_2 \cos(t) + c_1 \sin(t)]\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(c_1 \cos(t) - c_2 \sin(t)) \\ 2(c_2 \cos(t) + c_1 \sin(t)) \end{pmatrix}$

à apprendre

$\Rightarrow \begin{cases} a(t) = 2(c_1 \cos(t) - c_2 \sin(t)). \\ b(t) = 2(c_2 \cos(t) + c_1 \sin(t)). \end{cases}$

$2c_1 \sin(t) = a(t) - 2c_1 \cos(t)$

$\sin(t) = \dfrac{2c_1 \cos(t) - a(t)}{2c_2}$

$= \boxed{\dfrac{c_1}{c_2} \cos(t) - \dfrac{a(t)}{2c_2}}$.

$\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$.

$b(t) = 2c_2 \cos(t) + 2c_1 \sin(t)$.

$= 2c_2 \cos(t) + 2\dfrac{c_1^2}{c_2}\cos(t) - \dfrac{c_1 a(t)}{c_1}$.

$= \left(2c_2 + \dfrac{2c_1^2}{c_2}\right)\cos(t) - \dfrac{c_1}{c_2} a(t)$.

à compléter

2ème méthode :

$a^2(t) = 2\left((c_1 \cos(t))^2 - 2c_1c_2 \cos(t)\sin(t) + (c_2 \sin(t))^2\right.$.

$b^2(t) = 2\left((c_2 \cos(t))^2 + 2c_1c_2 \cos(t)\sin(t) + (c_1 \sin(t))^2\right.$.

$a^2(t) + b^2(t) = 4\left[(c_1^2 + c_2)\cos(t)^2 + (c_1^2 + c_2^2)\sin^2(t)\right]$

$= 4(c_1^2 + c_2^2)\left[\cos^2(t) + \sin^2(t)\right]$.

$\Leftrightarrow a^2(t) + b^2(t) = 4(c_1^2 + c_2^2)$

$\Rightarrow$ l'eq de γ $a^2(t) + b^2(t) = 4(c_1^2 + c_2^2)$

3/ d'après 2/ γ $x^2 + y^2 = 4(c_1^2 + c_2^2)$

à apprendre

d'après 1/ on a u est constante le long de γ :

$u(x_0, y_0) = u(x_1, y_1) = f(x_1)$

$u(x_1, 0) = f(2\sqrt{c_1^2 + c_2^2})$

$a(t) = 2(c_1 \cos(t) - c_2 \sin(t))$.

$b(t) = 2(c_2 \cos(t) + c_1 \sin(t))$

$t_0 = 0$: $a_0 = 2c_1 \Rightarrow c_1 = \dfrac{a_0}{2}$.

$b_0 = 2c_2 \Rightarrow c_2 = \dfrac{b_0}{2}$.