FILTRAGE OPTIMAL

GEA2

2020-2021

Plan

I. *Introduction générale*

II. **Observateur d'état des systèmes linéaires**

III. ***Filtrage de Wiener***

IV. ***Filtrage de Kalman***

V. ***Applications du filtrage de Kalman***

Chapitre 1

Introduction générale

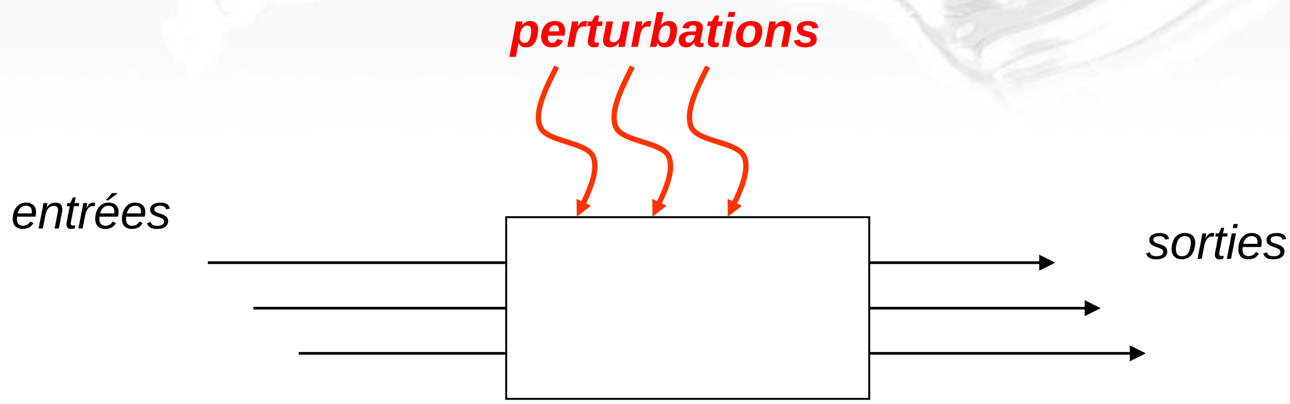
I.1. Processus

Un processus ?

système physique

temps → continu / discret

Influences internes et externes



Sortie : variable mesurable caractéristique de l'évolution du système

Entrée : variable d'origine externe susceptible d'influencer l'évolution du système

Un processus est un système physique qui évolue au cours du temps sous l'effet de diverses influences internes et externes.

I.2. Processus continu

Un processus est dit **continu** si les **grandeurs** qui le caractérisent sont de nature **continues**.

L'évolution au cours du temps est décrite par des signaux **continus au sens mathématique du terme**.

Le **processus continu** peut être caractérisé par un ensemble **d'équations différentielles et algébriques** de la forme:

$$\dot{x} = f(x, u, t, p)$$

$$y = h(x, u, t, p)$$

$t \in R$ temps

$x \in R^n$ état

$u \in R^l$ commande

$y \in R^m$ sortie

$p \in R^n$ perturbation

$f(.)$ fonction d'évolution

$h(.)$ fonction de sortie

I.2. Processus continu

Si les signaux ou les variables intervenant dans la description du processus sont des **fonction du temps alors ils sont :**

- **déterministes** si leurs valeurs sont **parfaitement définis** à chaque instant

- **aléatoires** si seul leurs probabilités d'avoir une amplitude sont définies à chaque instant (cas des signaux bruités)

I.2.1. Processus continu linéaire

Processus **linéaire** ?

Il valide le principe de superposition :

Si $\forall i \in \{1,\ldots,k\}$ l'entrée $u_i(t)$ provoque la sortie $y_i(t)$

alors $u(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i(t),\ \alpha_i \in R$ provoque $y(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i y_i(t)$

Processus **continu linéaire non bruité**

$$\dot{x}(t) = A(t).x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t).x(t) + D(t)u(t)$$

Processus continu linéaire **stationnaire**

$$A(t) = A,\ B(t) = B, C(t) = C,\ D(t) = D$$

I.3. Processus discret

Un processus est dit **discret** si l'évolution et/ou l'observation des grandeurs qui le caractérisent ne peut se faire qu'à des **instants particuliers**.

systèmes échantillonnés
systèmes logiques séquentielle

Le processus **discret** peut être caractérisé par un ensemble de **relations récurrentes** de la forme:

$$x_{k+1} = f\left(x_k, u_k, t_k, p_k\right)$$
$$y_{k+1} = h\left(x_k, u_k, t_k, p_k\right)$$

$t_k \in R$ temps

$x_k \in R^n$ état à l'instant t_k

$u_k \in R^l$ commande à l'instant t_k

$y_k \in R^m$ sortie à l'instant t_k

$p_k \in R^n$ perturbation à l'instant t_k

$f(.)$ fonction d'évolution

$h(.)$ fonction de sortie

I.3.1. Processus discret linéaire

Processus **linéaire**

Il valide le principe de superposition :

Si $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ l'entrée $u_i(t_k)$ provoque la sortie $y_i(t_k)$

alors $u(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i(t_k),\ \alpha_i \in R$ provoque $y(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i(t_k)$

Processus **discret linéaire non bruité**

$$x_{k+1} = A_k . x_k + B_k . u_k$$

$$y_k = C_k . x_k + D_k . u_k$$

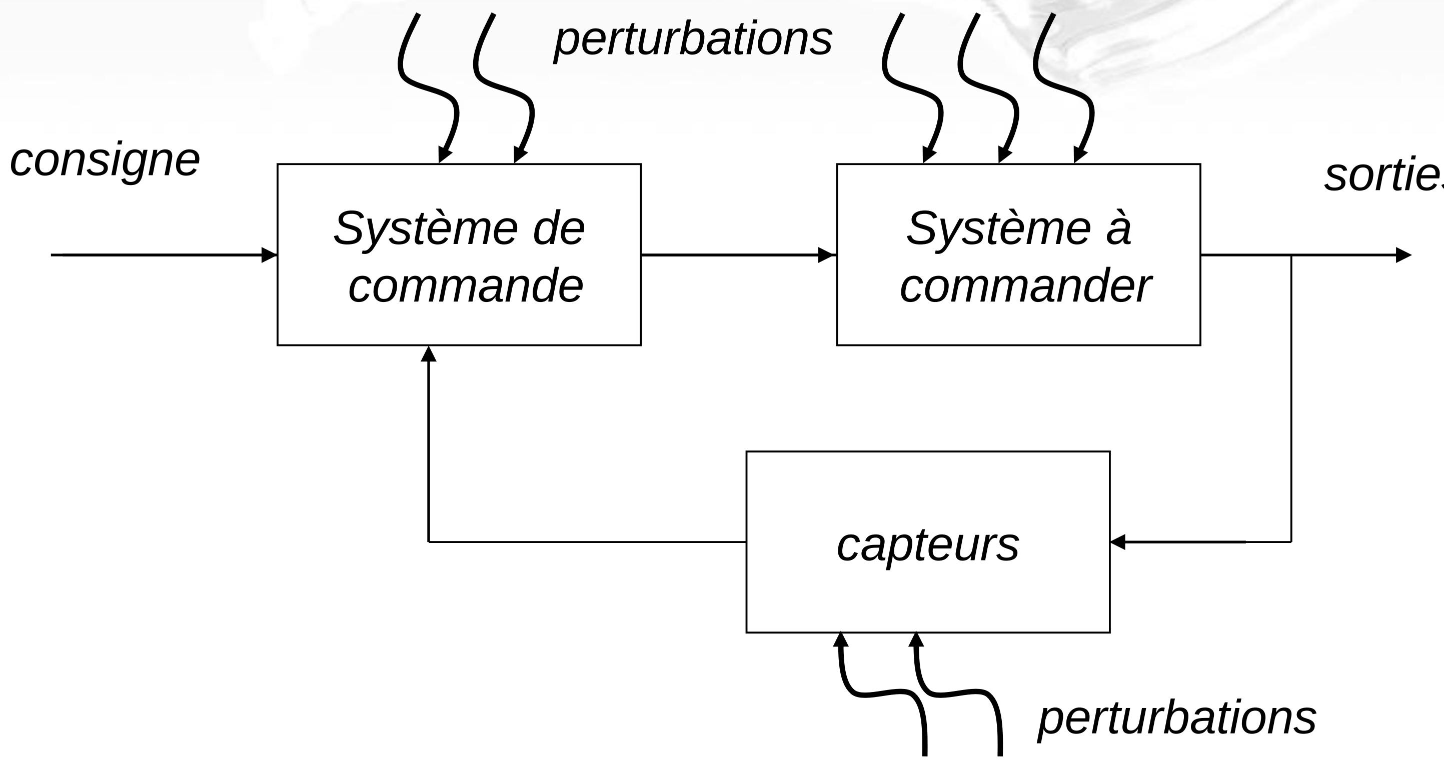
Processus discret linéaire **stationnaire**

$$A_k = A,\ B_k = B, C_k = C,\ D_k = D$$

Commander ?

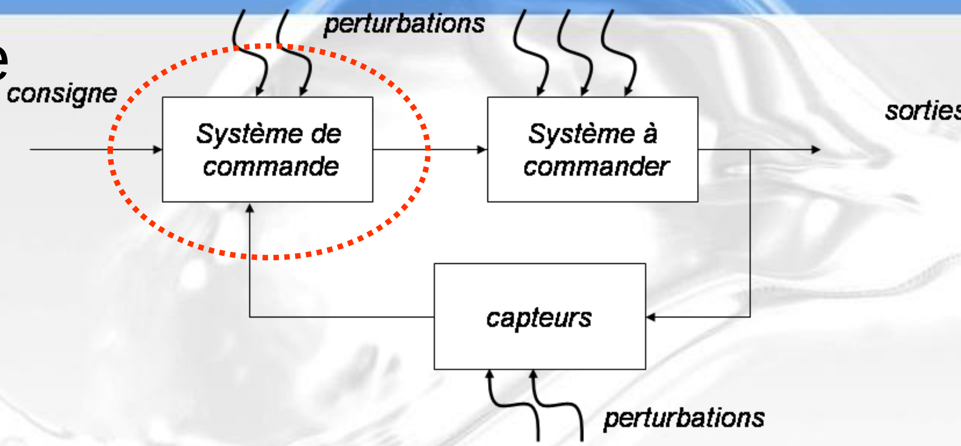
Imposer un comportement souhaité

régulation et asservissement



I.4.1. Système de commande

Le système de commande utilise des variables internes, donc l'**estimation** et le filtrage en vue de générer ou de donner une estimation des informations manquantes



L'**estimation** peut être:

- l'**observation** qui a pour but l'estimation des variables dans un cadre **déterministe**

- Le **filtrage** qui a pour but l'estimation des variables dans un cadre **stochastique**

I.5. Le filtrage

Filtrer ?

Mettre en forme un signal

Éliminer le bruit superposé au signal utile

Avec l'utilisation de plus en plus de calculateurs numérique dans la chaîne de commande, le filtrage est devenu un **outil fondamental**.

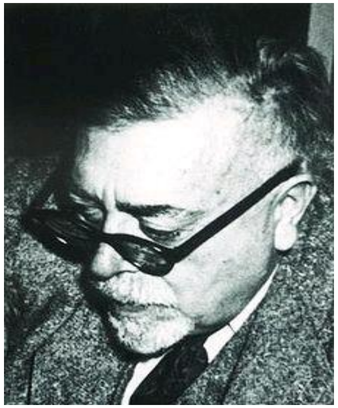
Shanon a montré la nécessité d'un **filtrage préalable à tout traitement numérique** pour garantir l'équivalence analogique - numérique

Filtrage de Wiener et Kalman

Point de vue d'Automatique, l'objectif est de **déterminer des estimateurs** des variables du système lorsque l'**environnement** présente des **perturbations aléatoires**

Déterminer un système (**filtre**), **optimal** au sens de la **minimisation de la variance d'erreur** entre la variable réelle et son estimation

Wiener: approche fréquentielle



Kalman: approche temporelle

Chapitre 2

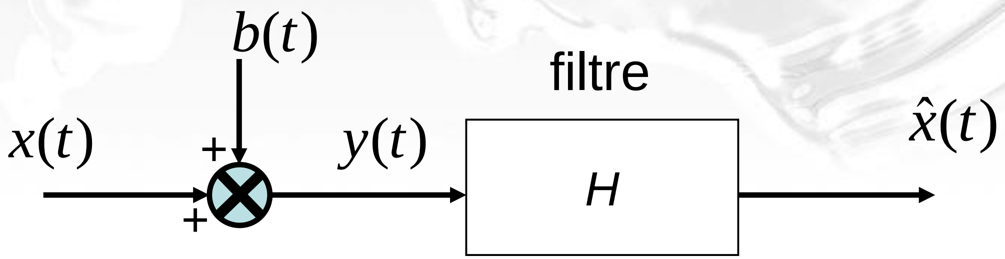
Observateur d'état des systèmes linéaires

Chapitre 3

Filtrage de Wiener

I. Filtrage de Wiener

La méthode de Wiener permet de déterminer la fonction de transfert du filtre qui reconstitue un signal *x(t)* à partir d'une mesure *y(t)* entachée d'un bruit *b(t)*

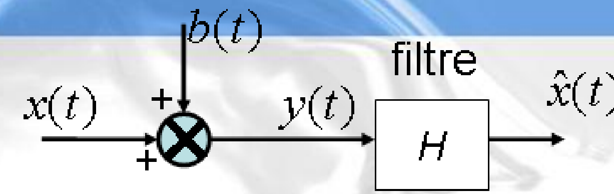


Le **filtre optimal** minimise **la variance de l'erreur** entre la variable réelle et son estimation

$$V = \mathrm{E}\left[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\right]$$

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

II. Cas des signaux continus



Déterminer le filtre continu optimal *H(**p**)*

➢ Hypothèses

x(t) et *b(t)*, sont des signaux aléatoires, scalaires, centrés, non corrélés et stationnaires.

➢ Notations

Covariance de deux signaux *x(t)* et *y(t)*:

$$\forall \tau \in R, \qquad \phi_{xy}(\tau) = \mathrm{E}\left[x(t+\tau)y(t)\right]$$

Spectre de covariance de deux signaux *x(t)* et *y(t)*:

$$S_{xy}(p) = \mathcal{L}_b\left(\phi_{xy}(\tau)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{xy}(\tau) e^{-\tau p} d\tau$$

Transformée de Laplace bilatérale

II.1. Transformée de Laplace bilatérale

La transformée de Laplace bilatérale d'une fonction *f* peut être calculée à partir de la transformée de Laplace selon:

$$\mathcal{L}_b\left(f(t)\right) = \mathcal{L}\left(f_+(t)\right) + \mathcal{L}^*\left(f_-(t)\right)$$

avec

$$f_+(t) = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$f_-(t) = \begin{cases} f(-t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^*(.) = \left\{\mathcal{L}(.)\right\}_{p \to -p}$$

II.2. Autovariance

L'**autovariance** d'un signal *x(t):*

$$\phi_{xx}(\tau) = \mathrm{E}\left[x(t+\tau)x(t)\right]$$

L'autovariance est une fonction paire

$$\phi_{xx}(\tau) = \phi_{xx}(-\tau)$$

Le spectre d'autovariance

$$S_{xx}(p) = \mathsf{L}_b\left(\phi_{xx}(\tau)\right)$$

$$= \mathsf{L}\left(\phi_{xx}(\tau)\right) + \mathsf{L}^*\left(\phi_{xx}(-\tau)\right)$$

$$= \mathsf{L}\left(\phi_{xx}(\tau)\right) + \left\{\mathsf{L}\left(\phi_{xx}(-\tau)\right)\right\}_{p \to -p}$$

$$\exists G(p) \;/\; S_{xx}(p) = G(p) + G(-p)$$

fonction paire

Pour pouvoir estimer x(t), on dispose de l'ensemble des mesures sur la sortie

$$Y(t)=\{y(t-\tau)\quad \tau\geq 0\}$$

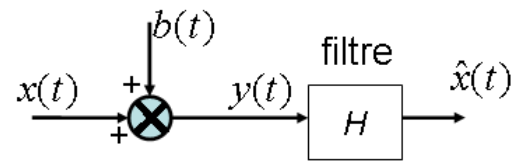
D'après le principe d'estimation des v.a., l'estimation linéaire optimale cherchée vérifie le principe d'orthogonalité:

$$\forall\tau\geq 0\quad \mathrm{E}\left[\left(x(t)-\hat{x}(t)\right)y(t-\tau)\right]=0$$

$$\forall\tau\geq 0\quad \mathrm{E}\left[x(t)y(t-\tau)-\hat{x}(t)y(t-\tau)\right]=0$$

$$\forall\tau\geq 0\quad \phi_{xy}(\tau)=\mathrm{E}\left[\hat{x}(t)y(t-\tau)\right]$$

Le filtre *H(p)* étant causal, sa reponse impulsionnelle est nulle pour *t*<0



$$\hat{x}(t)=\int_0^{+\infty}h(\nu)y(t-\nu)d\nu$$

$$\forall\tau\geq 0\quad \phi_{xy}(\tau)=\mathrm{E}\left[\int_0^{+\infty}h(\nu)y(t-\nu)y(t-\tau)d\nu\right]$$

$$\boxed{\forall\tau\geq 0\quad \phi_{xy}(\tau)=\int_0^{+\infty}h(\nu)\phi_{yy}(\tau-\nu)d\nu}$$

Équation de Wiener-Hopf

(Éq. A)

$(t-\nu)-(t-\tau)$

❑ Préliminaires

➢ Remarque

Si *f(t) est une fonction* ***bornée*** *tel que* $f(t)=0 \quad t\geq 0$

alors $\mathrm{L}_b\left(f(t)\right)$ ne présente pas de pôle à partie réelle négative

En effet,

$$\mathrm{L}^*(.)=\left\{\mathrm{L}(.)\right\}_{p\to -p}$$

$$\mathrm{L}_b\left(f(t)\right)=\mathrm{L}\left(\cancel{f_+(t)}\right)+\mathrm{L}^*\left(f_-(t)\right)$$

$$=\underbrace{\mathbf{0}\quad\left\{\underbrace{\mathrm{L}\left(f_-(t)\right)}_{\text{ne présente pas de pôle à partie réelle }\textbf{positive}}\right\}_{p\to -p}}_{\text{ne présente pas de pôle à partie réelle }\textbf{négative}}$$

II.3.1. Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

❑ Préliminaires

➢ Fonction rationnelle paire

Si *F(p) est une* fonction rationnelle paire

alors

- ✓ $F(p) = F(-p)$
- ✓ si p_1 est un pôle de *F* alors $-p_1$ l'est aussi
- ✓ *si* z_1 *est un zéros de F alors* $-z_1$ *l'est aussi*

II.3.1. Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

❑ Préliminaires

➢ Factorisation

Soit une fonction rationnelle *F(p)*. *F(p)* peut être factorisée sous la forme:

$$F(p) = F^{+}(p)F^{-}(p)$$

avec

$$F^{+}(p) \text{ et } \left(F^{+}(p)\right)^{-1} \text{ stables}$$

$$F^{-}(p) \text{ et } \left(F^{-}(p)\right)^{-1} \text{ instables}$$

Si de plus *F(p)* est une fonction rationnelle paire

alors $$F^{-}(p) = F^{+}(-p)$$

et on obtient

$$\boxed{F(p) = F^{+}(p)F^{+}(-p)} \qquad \textbf{\textit{(Éq. B)}}$$

avec tous les zéros et pôles de $F^{+}(p)$ dans le demi plan complexe gauche

II.3.1. Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

❑ Préliminaires

➢ Factorisation – exemple 1

Soit la fonction rationnelle $F(p)=\dfrac{2p-1}{p^2-p-2}$

Calculer $F^+(p)$ et $F^-(p)$

$$F^+(p)=\frac{1}{p+1} \qquad F^-(p)=\frac{2p-1}{p-2}$$

➢ Factorisation – exemple 2

Soit la fonction rationnelle $F(p)=\dfrac{1}{p-1}$

Calculer $F^+(p)$ et $F^-(p)$

$$F^+(p)=1 \qquad F^-(p)=\frac{1}{p-1}$$

II.3.1. Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

- Préliminaires

Décomposition

Soit une fonction rationnelle *F(p)*. F(p) peut être écrite, par décomposition en éléments simples, sous la forme:

$$F(p) = F_-(p) + F_+(p)$$

avec

$$F_+(p) \text{ stables}$$

$$F_-(p) \text{ instables}$$

!

Attention à la notation

$$F_+(p) \neq F^+(p)$$

$$F_-(p) \neq F^-(p)$$

II.3.1. Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

❑ Préliminaires

➢ Décomposition – exemple 1

Soit la fonction rationnelle $F(p)=\dfrac{2p-1}{p^2-p-2}$

Calculer $F_+(p)$ et $F_-(p)$

$$F_+(p)=\frac{1}{p+1} \qquad F_-(p)=\frac{1}{p-2}$$

➢ Décomposition– exemple 2

Soit la fonction rationnelle $F(p)=\dfrac{1}{p-2}$

Calculer $F_+(p)$ et $F_-(p)$

$$F_+(p)=0 \qquad F_-(p)=\frac{1}{p-2}$$

II.3.1. Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

❖ Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

Soit la fonction *f(t)* définie par:

$$f(t) = \phi_{xy}(t) - \left[\int_0^{+\infty} h(\tau)\phi_{yy}(t-\tau)d\tau\right] \quad \textbf{(*)}$$

Compte tenu de l'équation de Wiener-Hopf (eq. A)

$$\forall \tau \geq 0 \quad \phi_{xy}(\tau) = \int_0^{+\infty} h(\nu)\phi_{yy}(\tau-\nu)d\nu$$

f(t) doit être nulle pour tout *t* positif ou nul.

En appliquant la transformée de Laplace Bilatérale sur ***(*)****,* *il vient :* L_b

$$F(p) = S_{xy}(p) - H(p)S_{yy}(p)$$

f(t) étant bornée les pôles de *F(p)* n'appartiennent pas au demi plan complexe gauche.

II.3.1. Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

$$F(p) = S_{xy}(p) - H(p)S_{yy}(p)$$

D'autre part, comme S_{yy} est une fonction paire, on peut écrire selon (eq. B) :

$$S_{yy}(p) = S_{yy}^{+}(p)S_{yy}^{+}(-p)$$

où S^{+}_{yy} a tous ses zéros dans le demi plan complexe gauche.

Ainsi $U(p)$, définie par:

$$U(p) = \frac{F(p)}{S_{yy}^{+}(-p)} = \frac{S_{xy}(p)}{S_{yy}^{+}(-p)} - H(p)S_{yy}^{+}(p)$$

doit avoir tous ses pôles dans le demi plan complexe droit.

II.3.1. Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

Si on décompose $\dfrac{S_{xy}(p)}{S_{yy}^{+}(-p)}$ sous la forme:

$$\frac{S_{xy}(p)}{S_{yy}^{+}(-p)}=\left[\frac{S_{xy}(p)}{S_{yy}^{+}(-p)}\right]_{-}+\left[\frac{S_{xy}(p)}{S_{yy}^{+}(-p)}\right]_{+}$$

Le fait que *H(p)* soit stable conduit à écrire il existe un polynôme *P(p)* tel que:

$$H(p)=\frac{1}{S_{yy}^{+}(p)}\left[\left[\frac{S_{xy}(p)}{S_{yy}^{+}(-p)}\right]_{+}+P(p)\right]$$

Comme le filtre *H(p)* doit être réalisable et stable, on doit avoir $P(p)\Xi 0$. On peut en déduire :

$$\boxed{H(p)=\frac{1}{S_{yy}^{+}(p)}\left[\frac{S_{xy}(p)}{S_{yy}^{+}(-p)}\right]_{+}}$$

Filtre de Wiener

II.4. Exemple

Soit : $$y(t)=x(t)+b(t)$$

où *x(t)* est un message de spectre d'autovariance : $$S_{xx}(p)=\frac{1}{1-p^2}$$

et *b(t)* un bruit blanc de spectre $S_{bb}=b^2$, indépendant de *x(t)*

Déterminer le filtre de Wiener optimal estimant *x(t)*

$$S_{yy}(p)=\frac{1}{1-p^2}+b^2$$

$$S_{xy}(p)=\frac{1}{1-p^2}$$

$$S_{yy}^{+}(p)=\frac{\sqrt{1+b^2}+bp}{1+p}$$

$$\frac{S_{xy}(p)}{S_{yy}^{+}(p)}=\frac{1}{(1+p)\left(\sqrt{1+b^2}-bp\right)}$$

$$\left[\frac{S_{xy}(p)}{S_{yy}^{+}(-p)}\right]_{+}=\frac{1}{(1+p)\left(\sqrt{1+b^2}+b\right)}$$

$$\boxed{H(p)=\frac{1}{\left(\sqrt{1+b^2}+b\right)\left(\sqrt{1+b^2}+bp\right)}}$$

Exercice 2

Considérons le système stochastique continu suivant :

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t) + w(t) \qquad \text{a,b=ctes}$$

$$y(t) = x(t) + v(t)$$

avec :

$w(t)$ et $v(t)$ sont deux bruits blancs gaussiens indépendants de variance 1.

$w(t)$ et $v(t)$ sont indépendants de l'état.

Le spectre de covariance des signaux $x(t)$ et $v(t)$ sont :

$$S_{xx}(p) = \frac{1}{25 - p^2} \quad ; \quad S_{vv}(p) = 1$$

Déterminer l'estimé de l'état $x(t)$ en minimisant la variance de l'erreur.

II.5. Équation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets

On procède comme dans le cas continu

On considère qu'on dispose de l'ensemble des mesures scalaires, centrées et stationnaires

$$\{x_i\} \text{ et } \{y_i\}$$

La covariance de deux signaux *x* et *y* échantillonnés

$$\phi_{xy}(j) = \mathrm{E}\left[x(i+j)y(i)\right]$$

L'équation de Winer-Hopf discrète du filtre optimal discret H, s'écrit :

$$\boxed{\forall j \in \mathrm{N}, \quad \phi_{xy}(j) = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\infty} h_i \phi_{yy}(j-i)}$$

avec h_i la réponse impulsionnelle du filtre

II.5.1. Résolution de l'équation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets

De même que dans le cas continu, la résolution utilise la **transformée en z bilatérale** d'une suite

$$F(z) = \mathrm{Z}_b\{f_i\} = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_i z^{-i} \qquad \{f_i, i \in N\}$$

qui se calcule à partir de la transformé en z (monolatérale) par :

$$\mathrm{Z}_b\{f_i\} = \mathrm{Z}\{f_i^+\} + \mathrm{Z}^*\{f_i^-\} - f_0$$

avec

$$f_i^+ = \begin{cases} 0 & \text{pour } i < 0 \\ f_i & \text{pour } i \geq 0 \end{cases} \qquad f_i^- = \begin{cases} 0 & \text{pour } i < 0 \\ f_{-i} & \text{pour } i \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Z}^*\{.\} = \left[\mathrm{Z}\{.\}\right]_{z \to z^{-1}}$$

II.5.1. Résolution de l'équation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets

Le **spectre de covariance** est, par définition, la transformée en z bilatérale de la fonction de covariance:

$$S_{xy}(z) = \mathrm{Z}_b\{\phi_{xy}(j)\}$$

Pour une fonction d'autovariance on a :

$$\forall j \in N\,,\phi_{xx}(j) = \phi_{xx}(-j)$$

Le spectre d'autovariance s'écrit alors :

$$\exists G(z), \quad S_{xx}(z) = G(z) + G\left(z^{-1}\right) - \phi_{xx}(0)$$

conduisant à la propriété :

$$S_{xx}(z) = S_{xx}\left(z^{-1}\right) \quad \textbf{\textit{(Éq. C)}}$$

II.5.1. Résolution de l'équation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets

On utilise de même les notions de factorisation et de décompositions de fractions rationnelles en *z*

- Factorisation $$F(z) = F^{+}(z)F^{-}(z)$$

où

$F^{+}(z)$ a tous ses zéros et pôles à l'intérieur du cercle unité

$F^{-}(z)$ a tous ses zéros et pôles à l'extérieur du cercle unité

D'où on peut écrire le spectre d'autovariance *(Éq. B)* sous la forme :

$$S_{xx}(z) = S_{xx}^{+}(z)S_{xx}^{+}\left(z^{-1}\right)$$

car

$$S_{xx}^{-}(z) = S_{xx}^{+}\left(z^{-1}\right)$$

avec $S_{xx}^{+}(z)$ a tous ses zéros et pôles à l'intérieur du cercle unité

II.5.1. Résolution de l'équation de Winer-Hopf / cas des signaux discrets

➢ Décomposition

$$F(z) = F_+(z) + F_-(z) - f0$$

où

$F_+(z)$ a tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité

$F_-(z)$ a tous ses pôles à l'extérieur du cercle unité

➢ Résolution

La même démonstration que dans le cas des signaux continus conduit à exprimer la fonction du transfert du filtre optimal pour les signaux discrets par :

$$\boxed{H(z) = \frac{1}{S_{yy}^+(z)}\left[\frac{S_{xy}(z)}{S_{yy}^+(z^{-1})}\right]_+}$$

Filtre de Wiener

Chapitre 4

Filtrage de Kalman

Introduction

Le filtre de Kalman est une **reconstitution d'état** dans un **environnement stochastique** minimisant la **variance de l'erreur d'estimation**

Les algorithmes donnant la solution à ce problème ont été déterminés initialement par

- Kalman en 1960 pour la cas discret
- Kalman et Bucy en 1961 pour le cas continu

Chapitre 4

Filtrage de Kalman

Filtre de Kalman Discret

Hypothèses

Soit le système linéaire stochastique modélisé par l'équation d'état :

bruit d'entrée (de dynamique)

état

entrée

$$x_{k+1} = A_k . x_k + B_k . u_k + G_k . w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1} . x_{k+1} + v_{k+1}$$

bruit de mesure

Ce modèle peut être considéré comme représentatif d'un système à temps discret ou plus généralement être obtenu à partir de la discrétisation d'un modèle représentatif d'un système à temps continu.

Hypothèses

bruit d'entrée (de dynamique)

état

entrée

$$x_{k+1} = A_k . x_k + B_k . u_k + G_k . w_k$$

bruit de mesure

$$y_{k+1} = C_{k+1} . x_{k+1} + v_{k+1}$$

$\{u_k\}$ entrée déterministe

$\{w_k\}$ et $\{v_k\}$ des séquences indépendantes de bruit blancs centrés

x_0, l'état initial, une variable aléatoire indépendante de $\{w_k\}$ et $\{v_k\}$

$$\mathrm{E}[w_k] = 0 \qquad \mathrm{E}[v_k] = 0 \qquad \mathrm{E}[x_0] = \bar{x}_0$$

$$\mathrm{E}\left[\begin{bmatrix} v_k \\ w_k \\ \tilde{x}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_l^T & w_l^T & \tilde{x}_0^T \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} R_k \delta_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k \delta_{kl} & 0 \\ 0 & 0 & P_0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x}_0 = x_0 - \bar{x}_0$$

$R_k \quad Q_k \quad P_0$ matrices symétriques définies positives

Notations

$\hat{x}_{k/j}$ meilleure estimation de x à l'instant *k* fonction des observations $\{y_0, y_1, \ldots, y_j\}$

$$\tilde{x}_{k/j} = x_k - \hat{x}_{k/j}$$

$$\tilde{y}_{k/j} = y_k - C_k \hat{x}_{k/j}$$

$$\mathrm{cov}(z) = \mathrm{E}\{zz^T\}$$

$$P_{k/t} = \mathrm{cov}(\tilde{x}_{k/t})$$

Filtrage Lissage Prédiction

$\hat{x}_{k/j}$ meilleure estimation de x à l'instant *k* fonction des observations $\{y_0, y_1, \ldots, y_j\}$

Selon la valeur de *k* par rapport à *j*

$\hat{x}_{k/j}$ est une valeur filtrée si *k=j*

$\hat{x}_{k/j}$ est une valeur prédite si *k> j*

$\hat{x}_{k/j}$ est une valeur lissée si *k< j*

Équations du filtre de Kalman

Les équations de fonctionnement du filtre de Kalman se décomposent en 2 étapes:

- Étape de prédiction :

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k \hat{x}_{k/k} + B_k u_k$$

$$P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q_k G_k^T$$

- Étape de correction :

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k \left(y_k - C_k \hat{x}_{k/k-1} \right)$$

$$P_{k/k} = \left(I - K_k C_k \right) P_{k/k-1}$$

où K_k est le gain optimal du filtre donné par :

$$K_k = P_{k/k-1} C_k^T \left(R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T \right)^{-1}$$

Équations du filtre de Kalman

Les équations du filtre de Kalman sont obtenues en calculant

$$\mathrm{E}[x_{k+1}]$$

$$P_{k+1} = \mathrm{E}\left[(x_{k+1} - \mathrm{E}[x_{k+1}])(x_{k+1} - \mathrm{E}[x_{k+1}])^T \right]$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = \mathrm{E}[x_{k+1/k}]$$

$$P_{k+1/k} = \mathrm{E}\left[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k})^T \right]$$

$$\hat{x}_{k+1/k+1}$$

$$P_{k+1/k+1} = \mathrm{E}\left[(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k+1})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k+1})^T \right]$$

Équations du filtre de Kalman

$$x_{k+1} = A_k . x_k + B_k . u_k + G_k . w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1} . x_{k+1} + v_{k+1}$$

$\mathrm{E}[x_{k+1}]$?

déterministe

$$\mathrm{E}[x_{k+1}] = A_k . \mathrm{E}[x_k] + B_k . u_k + G_k . \underbrace{\mathrm{E}[w_k]}_{0}$$

$$\boxed{\mathrm{E}[x_{k+1}] = A_k . \mathrm{E}[x_k] + B_k . u_k}$$

Équations du filtre de Kalman

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

P_{k+1} ?

$$P_{k+1} = \mathrm{E}\left[\left(x_{k+1} - \mathrm{E}[x_{k+1}] \right)\left(x_{k+1} - \mathrm{E}[x_{k+1}] \right)^T \right]$$

$$P_{k+1} = \mathrm{E}\left[\left(A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k - \mathrm{E}[x_{k+1}] \right)\left(A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k - \mathrm{E}[x_{k+1}] \right)^T \right]$$

$$P_{k+1} = \mathrm{E}\left[\left(A_k.\tilde{x}_k + G_k.w_k \right)\left(A_k.\tilde{x}_k + G_k.w_k \right)^T \right]$$

$$\boxed{P_{k+1} = A_k P_k A_k^T + G_k Q G_k^T}$$

Équations du filtre de Kalman

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$
$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

$\mathrm{E}[y_{k+1}]$?

$$\mathrm{E}[y_{k+1}] = \mathrm{E}[C_{k+1}x_{k+1} + v_{k+1}]$$

$$\boxed{\mathrm{E}[y_{k+1}] = C_{k+1}\mathrm{E}[x_{k+1}]}$$

$\mathrm{cov}(\tilde{y}_{k+1})$?

$$\mathrm{cov}(\tilde{y}_{k+1}) = \mathrm{E}\left[(y_{k+1} - \mathrm{E}[y_{k+1}])(y_{k+1} - \mathrm{E}[y_{k+1}])^T\right]$$

$$\mathrm{cov}(\tilde{y}_{k+1}) = \mathrm{E}\left[(C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1} - C_{k+1}\mathrm{E}[x_{k+1}])(C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1} - C_{k+1}\mathrm{E}[x_{k+1}])^T\right]$$

$$\mathrm{cov}(\tilde{y}_{k+1}) = \mathrm{E}\left[(C_{k+1}.\tilde{x}_{k+1} + v_{k+1})(C_{k+1}.\tilde{x}_{k+1} + v_{k+1})^T\right]$$

$$\boxed{\mathrm{cov}(\tilde{y}_{k+1}) = C_{k+1}P_{k+1}C_{k+1}^T + R}$$

Équations du filtre de Kalman

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

La connaissance de toutes les valeurs du signal jusqu'à l'instant *k* se résume à une estimation de la valeur $\hat{x}_{k/k}$ de son état à l'instant k, établie à l'aide de toutes les valeurs de la sortie *y* mesurées jusqu'à l'instant *k*.

$\hat{x}_{k+1/k}$?

$\hat{x}_{k+1/k}$ l'estimation de x_{k+1}

$$\hat{x}_{k+1/k} = \mathrm{E}\left[x_{k+1} \middle| \hat{x}_{k/k}\right]$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = \mathrm{E}\left[A_k.x_{k/k} + B_k.u_k + G_k.w_k\right]$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = \mathrm{E}\left[A_k.x_{k/k}\right] + B_k.u_k$$

$$\boxed{\hat{x}_{k+1/k} = A_k\hat{x}_{k/k} + B_k.u_k}$$

Équations du filtre de Kalman

$P_{k+1/k}$?

erreur de prédiction

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

$$P_{k+1/k} = \mathrm{cov}\left(\tilde{x}_{k+1/k}\right)$$

$$\tilde{x}_{k+1/k} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k - \hat{x}_{k+1/k}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k - A_k\hat{x}_{k/k} - B_k.u_k$$

$$\tilde{x}_{k+1/k} = A_k.\tilde{x}_{k/k} + G_k.w_k$$

$$P_{k+1/k} = \mathrm{E}\left[\left(A_k.\tilde{x}_{k/k} + G_k.w_k\right)\left(A_k.\tilde{x}_{k/k} + G_k.w_k\right)^T\right]$$

$$\boxed{P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} A_k^T + G_k Q G_k^T}$$

Équations du filtre de Kalman

La prédiction $\hat{x}_{k+1/k}$ peut être corrigée en tenant compte de la nouvelle mesure y_{k+1}, à l'aide d'une correction linéaire.

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

$$\boxed{\hat{x}_{k+1/k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + \underbrace{K_{k+1}}_{\text{gain}}\underbrace{\left(y_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}_{k+1/k}\right)}_{\text{innovation}}}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k+1}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k} - K_{k+1}\left(y_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}_{k+1/k}\right)$$

$$\tilde{x}_{k+1/k+1} = x_{k+1} - \left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)\hat{x}_{k+1/k} - K_{k+1}y_{k+1}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k+1} = x_{k+1} - \left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)\hat{x}_{k+1/k} - K_{k+1}C_{k+1}.x_{k+1} - K_{k+1}v_{k+1}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k+1} = \left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)\left(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k}\right) - K_{k+1}v_{k+1}$$

$$\boxed{\tilde{x}_{k+1/k+1} = \left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)\left(\tilde{x}_{k+1/k}\right) - K_{k+1}v_{k+1}}$$

$$\boxed{P_{k+1/k+1} = \left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)P_{k+1/k}\left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)^T + K_{k+1}R_{k+1}K_{k+1}^T}$$

Équations du filtre de Kalman

Le gain K est calculé pour que l'erreur d'estimation soit statistiquement orthogonale à l'innovation (nouvelle information apportée au filtre) :

$$x_{k+1} = A_k.x_k + B_k.u_k + G_k.w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

$$\mathrm{E}\left[\tilde{x}_{k+1/k+1}\left(y_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}_{k+1/k}\right)^T\right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[\left(\left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)\left(\tilde{x}_{k+1/k}\right) - K_{k+1}v_{k+1}\right)\left(C_{k+1}\tilde{x}_{k+1/k} + v_{k+1}\right)^T\right] = 0$$

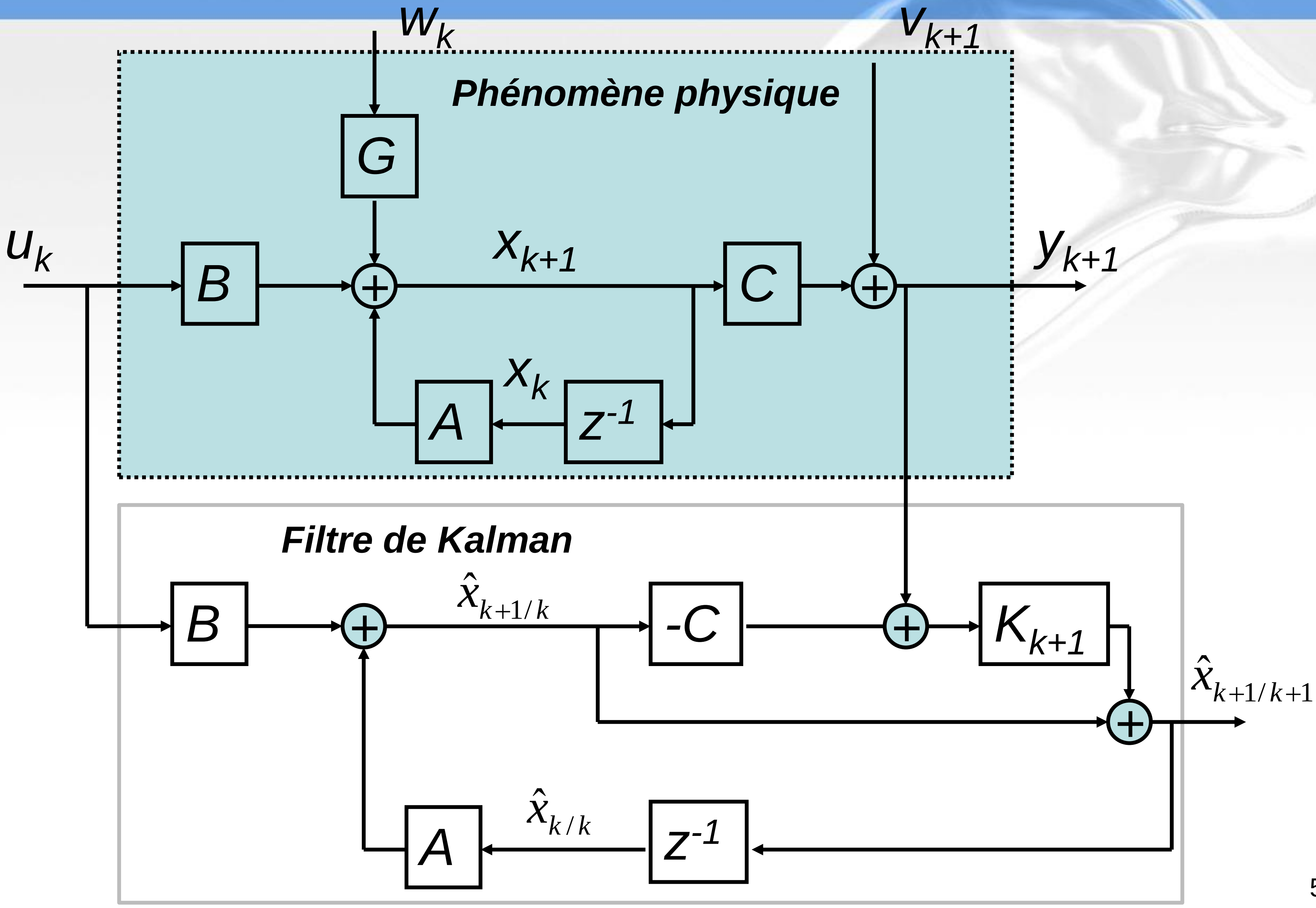
$$\mathrm{E}\left[\left(\left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)\tilde{x}_{k+1/k}\tilde{x}_{k+1/k}^T C_{k+1}^T\right)\right] - E\left[K_{k+1}v_{k+1}v_{k+1}^T\right] = 0$$

car $\mathrm{E}\left[\tilde{x}_{k+1/k}v_{k+1}{}^T\right] = 0$

$$\left(I - K_{k+1}C_{k+1}\right)P_{k+1/k}C_{k+1}^T - K_{k+1}R = 0$$

$$\boxed{K_{k+1} = P_{k+1/k}C_{k+1}^T\left(C_{k+1}P_{k+1/k}C_{k+1}^T + R\right)^{-1}}$$

Modélisation du Filtre de Kalman



Exemple 1

Soit le système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . x \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} . x + v \end{cases}$$

$$x_0 = m_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad y_0 = 1.2$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad y_1 = 2$$

$$\mathrm{E}\left[v_k v_k^T\right] = 1 \qquad T_e = 0.1 \text{ seconde}$$

Déterminer une estimation de l'état aux instants 0 et 1

$$\hat{x}_{0/0} \quad \text{et} \quad \hat{x}_{1/1}$$

Chapitre 4

Filtrage de Kalman

Filtre de Kalman Continu

Filtre de Kalman continu

Le filtre de Kalman à temps continu est souvent appelé filtre de Kalman-Bucy. Il résout le problème de l'estimation de l'état d'un système continu défini par les équations d'états:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)w(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + v(t)$$

On suppose que ses bruits sont blancs, gaussiens, et connus par leurs matrices de covariance :

$$\mathrm{E}\left[w(t)w^T(t')\right] = Q(t)\delta_{t-t'} \qquad \mathrm{E}\left[v(t)\tilde{x}^T(0)\right] = 0$$
$$\mathrm{E}\left[v(t)v^T(t')\right] = R(t)\delta_{t-t'} \qquad \mathrm{E}\left[v(t)w^T(t')\right] = 0$$
$$\mathrm{E}\left[\tilde{x}(0)\tilde{x}^T(0)\right] = P_0 \qquad \mathrm{E}\left[w(t)\tilde{x}^T(0)\right] = 0$$

Où δ_t l'impulsion de Dirac en t, et en considérant $x(0)$ comme une variable aléatoire d'espérance m_0, $\tilde{x}(0) = x(0) - m_0$

Filtre de Kalman continu

Les équations du filtre de Kalman discret peuvent être appliquées aux systèmes continus après échantillonnage. Le filtre continu est obtenu par passage à la limite (faire tendre la période d'échantillonnage vers 0)

- Étape 1 : discrétisation du modèle avec une période d'échantillonnage constante par la méthode d'Euler
- Étape 2 : passage à la limite en faisant tendre la période d'échantillonnage vers 0

Filtre de Kalman continu

Soit Δ la période de discrétisation :

$$\Delta = t_n - t_{n-1}$$

Posons:

impulsion de Dirac

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\delta_{ij}}{\Delta} = \delta_{(i-j)\Delta}$$

$$\lim_{\Delta \to 0} Q_k \Delta = Q(t_k)$$

$$\lim_{\Delta \to 0} R_k \Delta = R(t_k)$$

Filtre de Kalman continu

➤ Discrétisation du modèle

modèle continu

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)w(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + v(t)$$

Lorsque Δ tend vers 0

$$\dot{x} \rightarrow \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta}$$ Approximation d'Euler

Le modèle continu est équivalent à :

$$x_{k+1} = \left(I + A_k\Delta\right)x_k + \Delta B_k.u_k + \Delta G_k.w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

Filtre de Kalman continu

- Application du filtre de Kalman

$$x_{k+1} = (I + A_k\Delta)x_k + \Delta B_k.u_k + \Delta G_k.w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

L'utilisation du filtre de Kalman prédicateur à 1 pas

sur ce système donne:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1/k} &= (I + A_k\Delta)(I - K_kC_k)\hat{x}_{k/k-1} + \Delta B_k u_k + (I + A_k\Delta)K_k y_k \\ &= (I + A_k\Delta)\hat{x}_{k/k-1} + \Delta B_k u_k + (I + A_k\Delta)K_k(y_k - C_k\hat{x}_{k/k-1})\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

Filtre de Kalman continu

$$\frac{\hat{x}_{k+1/k}-\hat{x}_{k/k-1}}{\Delta}=A_k\hat{x}_{k/k-1}+B_k u_k+\left(I+A_k\Delta\right)\frac{K_k}{\Delta}\left(y_k-C_k\hat{x}_{k/k-1}\right)$$

En considérant :

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\hat{x}_{k+1/k}-\hat{x}_{k/k-1}}{\Delta}=\dot{\hat{x}}(t)$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{K_k}{\Delta}=K(t)$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\hat{x}_{k/k-1}=\hat{x}(t)$$

On obtient alors l’équation de l’estimateur :

$$\dot{\hat{x}}(t)=A(t)\hat{x}(t)+B(t)u(t)+\left(I+\underbrace{\cancel{A_k\Delta}}_{0}\right)K(t)\left(y(t)-C(t)\hat{x}(t)\right)$$

$$\boxed{\dot{\hat{x}}(t)=A(t)\hat{x}(t)+B(t)u(t)+K(t)\left(y(t)-C(t)\hat{x}(t)\right)}$$

Filtre de Kalman continu

➤ Remarques

Le gain de Kalman est déterminé également par passage à la limite à partir des équations discrètes.

$$K(t) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{K_k}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{P_{k/k-1} C_k^T \left(R_k + C_k P_{k/k-1} C_k^T \right)^{-1}}{\Delta}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} P_{k/k-1} C_k^T \left(R_k \Delta + C_k P_{k/k-1} C_k^T \Delta \right)^{-1}$$

0

$$= \lim_{\Delta \to 0} P_{k/k-1} C_k^T R^{-1}(t)$$

En posant $\lim_{\Delta \to 0} P_{k/k-1} = P(t)$, le gain optimal est :

$$\boxed{K(t) = P(t) C^T(t) R^{-1}(t)}$$

Filtre de Kalman continu

➢ Remarque

$$P_{k/k} = (I - K_k C_k) P_{k/k-1}$$

$$= P_{k/k-1} - K_k C_k P_{k/k-1}$$

$$= P_{k/k-1} - \frac{K_k}{\Delta} C_k P_{k/k-1} \Delta$$

$$\lim_{\Delta \to 0} P_{k/k} = \lim_{\Delta \to 0} P_{k/k-1} - K(t) \lim_{\Delta \to 0} C_k P_{k/k-1} \Delta$$

0

$$\boxed{\lim_{\Delta \to 0} P_{k/k} = \lim_{\Delta \to 0} P_{k/k-1} = P(t)}$$

Filtre de Kalman continu

- Équation de Riccati

L'équation de Riccati pour le système discret équivalent :

$$x_{k+1} = (I + A_k\Delta)x_k + \Delta B_k.u_k + \Delta G_k.w_k$$

$$y_{k+1} = C_{k+1}.x_{k+1} + v_{k+1}$$

s'écrit :

$$P_{k+1/k} = (I + A_k\Delta)P_{k/k-1}(I + A_k\Delta)^T + \Delta G_k Q_k G_k^T \Delta$$

$$-(I + A_k\Delta)P_{k/k-1}C_k^T\left(R_k + C_k P_{k/k-1}C_k^T\right)^{-1}C_k P_{k/k-1}(I + A_k\Delta)^T$$

$$\frac{P_{k+1/k} - P_{k/k-1}}{\Delta} = G_k \underbrace{Q_k\Delta}_{Q(t)} G_k^T + A_k P_{k/k-1} + P_{k/k-1}A_k^T$$

$$-(I + A_k\underbrace{\Delta}_{0})P_{k/k-1}C_k^T\left(\underbrace{\Delta R_k}_{R(t)} + \underbrace{\Delta C_k P_{k/k-1}C_k^T}_{0}\right)^{-1}C_k P_{k/k-1}(I + \underbrace{A_k\Delta}_{0})^T$$

$$+\underbrace{\Delta A_k P_{k/k-1}A_k^T}_{0}$$

0

Équation de Riccati

$$\boxed{\dot{P}(t) = G(t)Q(t)G^T(t) + A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t)}$$

Filtre de Kalman continu

➢ Conclusion

Le filtre de Kalman d'un système à temps continu stochastique est définie par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)\big(y(t) - C(t)\hat{x}(t)\big)$$

avec

$$\hat{x}(0) = m_0$$

K(t) le gain de Kalman

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t)$$

et *P(t)* solution de l'équation de Ricatti

$$\dot{P}(t) = G(t)Q(t)G^T(t) + A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t)$$

$$P(0) = P_0$$

Exemple

Soit :

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + w(t)$$

$$y(t) = x(t) + v(t)$$

$$S_{xx}(p) = \frac{1}{4 - p^2}$$

$$S_{vv}(p) = 1$$

où $w(t)$ et $v(t)$ sont 2 bruits blancs gaussiens, centrés et indépendants

$w(t)$ est indépendant de l'état initial

$v(t)$ est indépendant de l'état

$$\mathrm{E}\left[w(t)w^T(t')\right] = \mathrm{E}\left[v(t)v^T(t')\right] = 1 * \delta_{t-t'}$$

Déterminer l'estimation de *x(t)* par deux méthodes (Wiener et de Kalman)

Comparer les deux filtres

Chapitre 5

Applications du filtrage de Kalman

Commande Optimale des systèmes linéaires à critère quadratique évoluant dans un environnement stochastique

Introduction

L'estimation statistique de l'état d'un système est généralement effectuée dans le but de réaliser une commande par retour d'état.

Dans *un cadre déterministe*, la notion de régulateur - observateur permet de générer une commande à partir de l'état reconstruit.

Dans *un cadre stochastique*, la commande optimale d'un système stochastique est obtenue en construisant la commande optimale obtenue sur le système déterministe associé à l'aide de l'état estimé à partir d'un filtre de Kalman

Commande Optimale

Soit le système continu défini par les équations d'états:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)w(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + v(t)$$

On suppose que ses bruits sont blancs, gaussiens, et connus par leurs matrices de covariance :

$$\mathrm{E}\left[w(t)w^T(t')\right] = Q(t)\delta_{t-t'} \qquad \mathrm{E}\left[v(t)\tilde{x}^T(t_0)\right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[v(t)v^T(t')\right] = R(t)\delta_{t-t'} \qquad \mathrm{E}\left[v(t)w^T(t')\right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[\tilde{x}(t_0)\tilde{x}^T(t_0)\right] = \Delta_{t_0} \qquad \mathrm{E}\left[w(t_0)\tilde{x}^T(t_0)\right] = 0$$

Où δ_t l'impulsion de Dirac en *t*, et en considérant *x(0)* comme une variable aléatoire d'espérance m_0, $\tilde{x}(0) = x(0) - m_0$

Commande Optimale

Le problème d'optimisation stochastique consiste à chercher la commande optimale minimisant le critère :

$$J = \mathrm{E}\left\{ x^T(t_f) S_{t_f} x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} x^T(t) M(t) x(t) + u^T(t) N(t) u(t) dt \right\}$$

Dans le cas d'un système où ***l'état est complètement accessible***, la commande optimale a la forme usuelle :

$$u^*(t) = -N^{-1}(t) B^T(t) P(t) x(t)$$

où $P(t)$ est solution de l'équation de Riccati :

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) - M(t) + P(t)B(t)N^{-1}(t)B^T(t)P(t)$$

$P(t_f)=S_{tf}$.

Dans le cas où ***seule la sortie est accessible*** (systèmes à état non complètement accessible), la commande optimale s'écrit sous la forme :

$$u(t) = -N^{-1}(t)B^T(t)P(t)\widehat{x}(t)$$

où $P(t)$ est solution de l'équation de Riccati :

$$\dot{P}(t) = -A^T(t)P(t) - P(t)A(t) - M(t) + P(t)B(t)N^{-1}(t)B^T(t)P(t), \quad P(t_f)=S_{tf}.$$

et $\widehat{x}(t)$ est l'estimation optimale de $x(t)$ obtenue à l'aide du filtre de Kalman continu :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + K(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t))$$

$$K(t) = \Delta(t)C^T(t)R^{-1}(t)$$

avec $\Delta(t)$ solution de l'équation de Ricatti

$$\dot{\Delta}(t) = G(t)Q(t)G^T(t) + A(t)\Delta(t) + \Delta(t)A^T(t) - \Delta(t)C^T(t)R^{-1}(t)C\Delta(t)$$

$$\Delta(t_0) = \Delta_{t_0}$$

Commande Optimale

Ces différentes relations précédentes constituent le principe de séparation : si la commande et l'observateur sont calculés séparément, mais de façon optimale, alors l'ensemble, réuni dans une structure de commande de type régulateur-observateur, sera également optimal.

Les relations ont été établies dans un cadre continu mais peuvent bien sûr l'être dans un cadre discret.

Exemple

Soit le système :

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t) + w(t)$$
$$y(t) = x(t) + v(t)$$

$$\mathrm{E}\left[w(t)w^T(t')\right] = 1 * \delta_{t-t'}$$
$$\mathrm{E}\left[v(t)v^T(t')\right] = 1 * \delta_{t-t'}$$
$$\mathrm{E}\left[\tilde{x}(0)\tilde{x}^T(0)\right] = 1$$

On suppose que toutes les hypothèses pour l'application d'une loi de commande optimale sont vérifiées

Déterminer l'expression de la loi de commande en régime permanant minimisant le critère : $J = \mathrm{E}\left\{\int_0^1 u^2(t)\,dt\right\}$

Donner un schéma bloc

$$A = 1,\quad B = 1,\quad C = 1,\quad R = 1,\quad Q = 1,\quad \Delta_0 = 1$$
$$S_{tf} = 0,\quad M = 0,\quad N = 1$$

Exercice

Considérons le système stochastique continu suivant :

$$\dot{x}(t) = -5\,x(t) + u(t) + w(t)$$
$$y(t) = x(t) + v(t)$$

avec : *w(t)* et *v(t)* sont deux bruits blancs gaussiens de variance respectivement Q=1 et R=1.

1. Donner la commande optimale minimisant le critère J.

$$J = \mathrm{E}\left[\int_0^1 3x^2(t) + 2u^2(t)\ dt\right]$$

2. Donner un schéma bloc