l'algo. permettant d'obtenir L à partir de en utilisant la factorisation de Cholesky

pour tout i de 1 à n :
pour tout j de 1 à n :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik}\, l_{jk}$$

* $j = 1$:
  * $i = 1$:

$$a_{11} = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}} \; ; \; a_{11} > 0$$

  * i de 2 à n :

$$a_{i1} = \sum_{k=1}^{1} l_{ik}\, l_{1k} = l_{i1}\, l_{11} = l_{i1}\sqrt{a_{11}} \Rightarrow l_{i1} = \frac{a_{i1}}{\sqrt{a_{11}}}$$

supposons que le coeff de colonne de 1 jusqu'a $j-1$ sont connus, cherchons à determiner les coefficients de la colonne j.

$$\begin{matrix} l_{11} & \cdots & & \\ \vdots & & l_{j-1\,j-1} & l_{jj} \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,j-1} & l_{nj} \end{matrix}$$

connus — à determiner

* j de 2 à n :
  * $i = j$:

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} (l_{jk})^2 = \overbrace{\sum_{k=1}^{j-1} (l_{jk})^2}^{\text{connu}} + (l_{jj})^2$$

$$\Rightarrow \boxed{l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} (l_{jk})^2}}$$

  * i de $j+1$ à n :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik}\, l_{jk} = \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, l_{jk}}_{\text{connu}} + l_{ij}\, \underbrace{l_{jj}}_{\text{connu}}$$

$$\Rightarrow \boxed{l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}}\left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, l_{jk}\right]}$$

Algo Cholesky

Entrée $A \in M_{n\times n}$

Sortie $L \in M_{n\times n}$

Debut

$L \leftarrow 0_{n\times n}$

/* 1er colonne */

$l_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$

Pour i de 2 à n faire

$l_{i1} \leftarrow \frac{a_{i1}}{l_{11}}$

Fin

/* colonne j de 2 à n */

Pour j de 2 à n faire

/* 1er coef */

$l_{jj} \leftarrow \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} (l_{jk})^2}$

Pour i de j+1 à n faire

$l_{ij} \leftarrow \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}\right) / l_{jj}$

Fin

Fin

retourner L

Fin

EX :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

unique sol ⇐ inv ⇐ rg = 3 ; rg < 3 ; rg ou det

-1- Verifier si $(\mathcal{E})$: $AX = b$, admet une solᵉ

-2- verifier si A admet une fact de Cholesky

-3- Determiner L par l'algo.

-4- Résoudre en utilisant L.

Rep :

-1- $\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 21 - 1 - 16 = 4 \neq 0$

$\Rightarrow$ A est inversible et par la suite le système $(\mathcal{E})$ admet une unique solution.

-2- $A = {}^tA \Leftrightarrow$ A est symétrique (cond 1 vérifié)

• $\det(A - \lambda I_3) = \mathcal{X}$

$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

$\mathcal{X} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5-\lambda & 2 \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\left[(5-\lambda)^2 - 4\right] + \left(-(5-\lambda) + 4\right) - 2\left[2(5-\lambda) - 2\right]$

$= (1-\lambda)\left[21 + \lambda^2 - 2\lambda\right] + \lambda - 1 \quad + 4 - 20 + 4\lambda$

$= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 26\lambda + 4$

$\begin{cases} \lambda_1 = 0{,}165 \\ \lambda_2 = 7{,}68 \\ \lambda_3 = 3{,}15 \end{cases}$

$sp(A) = \{0{,}165 ; 7{,}68 ; 3{,}15\} \subseteq \mathbb{R}_+^*$ (cond 2 vérifié)

$\Rightarrow$ A est définie positive

cond 1 et cond 2 $\Rightarrow$ que A admet une factorisation de Cholesky

-3- $n = 3$; $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

* $j = 1$;

① $i = 1$:

$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$

$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

* $i = 2$;

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -1 \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* $i = 3$;

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = -2 \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* $j = 2$:
  * $i = 2$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = 2$$

$$\Downarrow$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* $i = 3$

$$l_{32} = (a_{32} - l_{31} \times l_{21}) / l_{22} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* $j = 3$;
  * $i = 3$;

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$; $\boxed{(E_1) : Ly = b}$

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ -y_1 + 2y_2 = 2 \\ -2y_1 + y_3 = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{3}{2} \\ y_3 = 1 \end{cases} ; \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{(E_2) : L^T X = Y}$ on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$L^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E_2) \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_2 = \frac{3}{2} \\ x_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \frac{3}{4} \\ x_3 = 1 \\ x_1 = \frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ 3/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* Méthode QR

$$A = QR$$

$Q \in M_{n \times n}$ orthogonale $({}^tQ = Q^{-1})$

$R \in M_{n \times n}$ triangulaire supérieure

$AX = b = QRX \Rightarrow {}^tQQRX = {}^tQb = b'$

$\Rightarrow (E') = RX = b'$

La méthode QR permet d'écrire A comme le produit de matrices Q et R avec Q est une matrice orthogonale de taille n et R une matrice triang. sup.

si A s'écrit Q.R, alors pour résoudre (E) il suffit de résoudre (E') : $RX = b' = {}^tQb$

Le système (E') est facile à résoudre car c'est un système à matrice triangulaire.

Il est tjrs possible d'écrire A ~~da~~ sous forme QR
(Pas de condᵗ)
on a unicité de Q et de R si A est inversible
pour déterminer Q et R il ∃ différents
méthode :

- Méthode Housholder
- Méthode d'jivens
- Méthode de Graham Smith

Scanné avec CamScanner