– Transformation de Laplace –

I/ Généralité :

Déf : Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$.
On appelle transformée de Laplace de f la fonction de variable réelle ou complexe :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Rque :

1/ $\mathcal{L}(f)(p)$ est définie si $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,|e^{-pt}|\,dt < +\infty$

c.à.d $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-\mathrm{Ré}(p)t}\, dt < +\infty$

dans ce cas on dit que $\mathcal{L}(f)$ est dite l'image et f est dite l'origine.

2/ on remarque que $\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$ ne prend en compte que les valeurs de $f(t)$ pour $t > 0$.
on peut donc supposer que f est définie sur $\mathbb{R}$ avec $f(t) = 0$, si $t < 0$
on dit alors que f est une fonction causale.

pour :

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad : \text{fonction Heaviside (échelon-unité)}$$

si f est définie sur $\mathbb{R} \Rightarrow f \cdot H$ est causale.

Théorème :

Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et P_1 un réel tq

$$\int_0^{+\infty} e^{-P_1 t}\, |f(t)|\, dt < +\infty.$$

Alors :

1/ $\forall p \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Ré}(p) > P_1$: $\int_0^{+\infty} |e^{-pt}|\,|f(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Ré}(p)t}\, |f(t)|\, dt < +\infty$

Df : $p \in \mathbb{C} \,/\, \int f e^{-pt} dt$ abs conv

2/ Il existe $P_0 \in [-\infty, +\infty]$ tq $\forall p \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{cases} \mathrm{Ré}(p) > P_0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Ré}(p)t}\, |f(t)|\, dt < +\infty \\ \mathrm{Ré}(p) < P_0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Ré}(p)t}\, |f(t)|\, dt = +\infty. \end{cases}$$

$P_0 = +\infty \Rightarrow D(f) = \emptyset$
$P_0 = -\infty \Rightarrow D(f) = \mathbb{C}$

ainsi $\mathcal{L}(f)(p)$ est définie pour tout $p \in \mathbb{C}$ tq $\mathrm{Ré}(p) > P_0$
et le réel P_0 est appelé abscisse de convergence absolue de f.

Exple :

pour $f(t) = 1$; $\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt$.

$\lim_{t \to +\infty} |e^{-pt}| = \lim_{+\infty} e^{-\mathrm{Ré}(p)t} = 0$ ssi $\mathrm{Ré}(p) > 0$. et dans ce cas

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}, \quad \forall p \in \mathbb{C},\ \mathrm{Ré}(p) > 0.$$

donc $\boxed{P_0 = 0}$

Déf : on dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est d'ordre exponentiel si :

$$\exists M>0,\ \text{et } \alpha\in\mathbb{R},\ t_0>0 \text{ telles que}$$
$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t},\ \forall t>t_0.$$

c.à.d $\exists \alpha>0$ $\lim_{t\to+\infty} e^{-\alpha t}|f(t)| = 0.$

exple :

- les fonctions polynômes, fonctions bornées, fonct° de la forme $a e^{at}$ sont d'ordre exp.
- la fonct° $f(t) = e^{+t^2}$ n'est pas d'ordre exponentiel car $\forall \alpha\in\mathbb{R}$, $e^{-\alpha t} e^{t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.

Théorème (condition suffisante d'existence de la transformée de Laplace)

Si f est localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (f est continue par morceaux sur tout intervalle $[0,x_0]$) et d'ordre exponentiel alors elle admet une transformée de Laplace. $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$, $D_{\mathcal{L}(f)} = \{p\in\mathbb{R} \mid p>\alpha\}$ ($p\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(p)>\alpha$)

Rque : bien que $\mathcal{L}(f)(p)$ soit complexe, ds la majorité des exples on prend p réel.

Théorème (valeur initiale et valeur finale) :

soit f une fonction admettant une transformée de Laplace, alors on a :

1) $\lim_{p\to+\infty} \mathcal{L}(f)(p) = 0.$

2) $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\mathcal{L}(f)(p)$

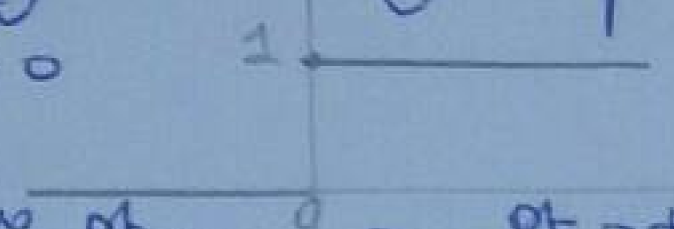
3) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to+\infty} p\mathcal{L}(f)(p)$

$pF(p) = p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$
$= \int_0^{+\infty} p e^{-pt} f(t)\,dt$
avec $\int_0^{+\infty} p e^{-pt}\,dt = 1$

Exemples de référence :

① fonction échelon unité : c'est la fonction définie par :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$\mathcal{L}(u(t))(p) = \int_0^{+\infty} u(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p} - \lim_{+\infty} \frac{e^{-pt}}{p}$$

or

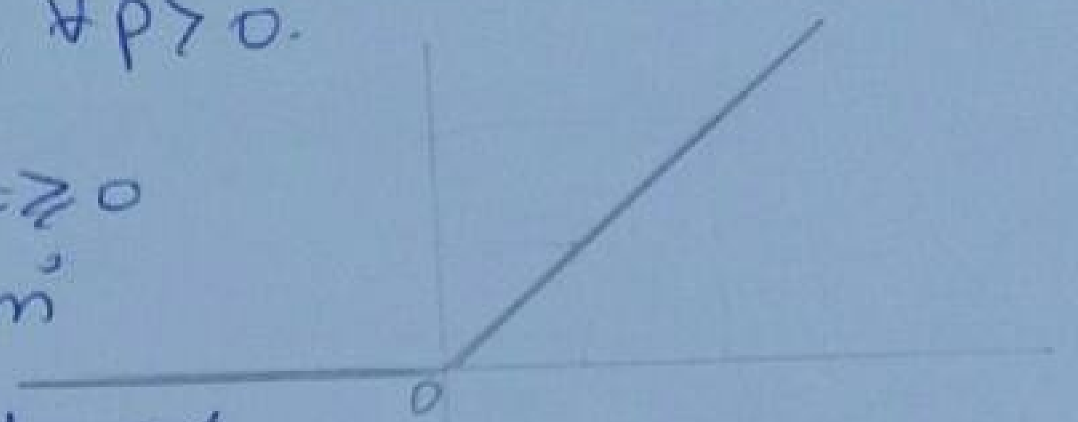
$$|e^{-pt}| = e^{-pt} \Rightarrow e^{-pt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \text{ si } p > 0.$$

donc

$$\mathcal{L}(u(t))(p) = \frac{1}{p}, \quad \forall p > 0.$$

② fonction rampe :

$$f(t) = t\, u(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



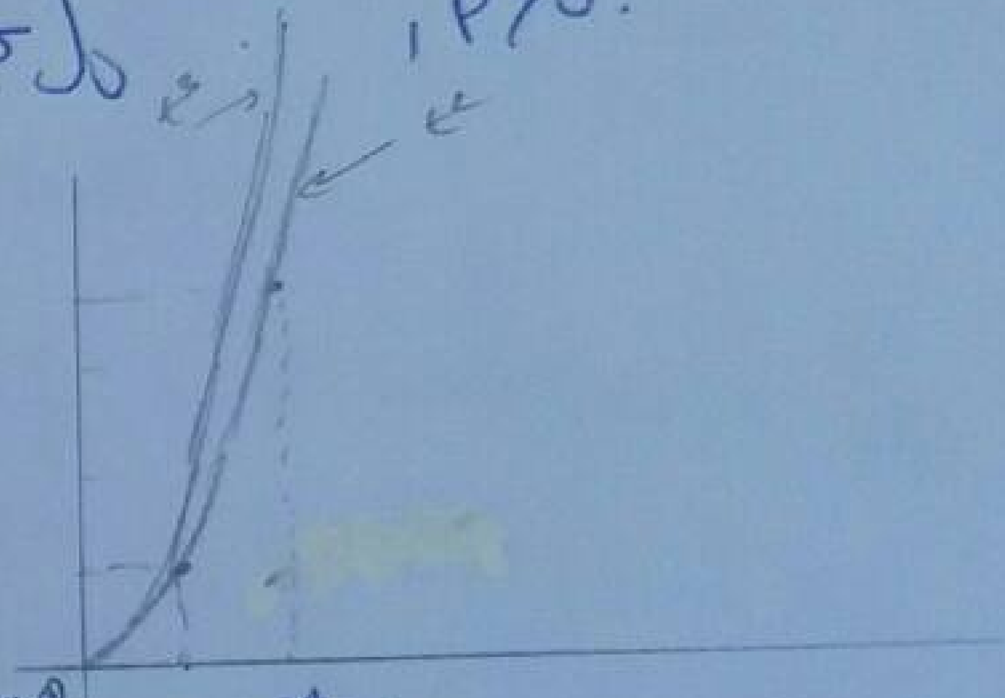
$$\mathcal{L}(t\, u(t))(p) = \int_0^{+\infty} t\, e^{-pt}\, dt \qquad \text{IPP} \begin{cases} t \longrightarrow 1 \\ e^{-pt} \longrightarrow -\frac{e^{-pt}}{p} \end{cases}$$

$$= \left[-t e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}, \quad p > 0.$$

$$= \frac{1}{p^2}, \quad p > 0.$$

③ fonctions puissances :

$$f(t) = t^n u(t) = \begin{cases} t^n, & t \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$



$$\mathcal{L}(t^n u(t)) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}\, dt.$$

$t^n \to n t^{n-1}$, $e^{-pt} \to -\frac{e^{-pt}}{p}$

$$= \left[-\frac{t^n e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-pt}\, dt \; ; \; p > 0.$$

$t^{n-1} \to (n-1)t^{n-2}$, $e^{-pt} \to -\frac{e^{-pt}}{p}$

$$= 0 + \frac{n}{p}\left(\underbrace{\left[-t^{n-1}\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \frac{(n-1)}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-2} e^{-pt}\, dt \right)$$

$$= \frac{n}{p} \cdot \frac{(n-1)}{p} \cdot \frac{n-2}{p} \int_0^{+\infty} t^{n-3} e^{-pt}\, dt.$$

$$= \frac{n}{p}\, \frac{(n-1)}{p}\, \frac{(n-2)}{p} \cdots \frac{n-(n-1)}{p} \int_0^{+\infty} t^{n-n} e^{-pt}\, dt$$

$$= \frac{n}{p}\, \frac{n-1}{p}\, \frac{n-2}{2} \cdots \frac{1}{p}\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}.$$

$$= \frac{n!}{p^n} \cdot \frac{1}{p} = \frac{n!}{p^{n+1}} \Rightarrow \mathcal{L}(t^n u(t)) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \; p > 0$$

autrement :

$$\mathcal{L}(t^n u(t))(p) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}\, dt \quad \begin{matrix} y = pt \\ dy = p\,dt \end{matrix} \quad = \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{p}\right)^n e^{-y}\, \frac{1}{p}\, dy = \left(\frac{1}{p}\right)^{n+1} \int_0^{+\infty} y^n e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{p^{n+1}}\Gamma(n+1) = \frac{1}{p^{n+1}} \cdot n!.$$

④ fonction exponentielle : $f(t) = e^{at}\, u(t)$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}(e^{at}u(t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{at}\, e^{-pt}\, dt.$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}\, dt$$

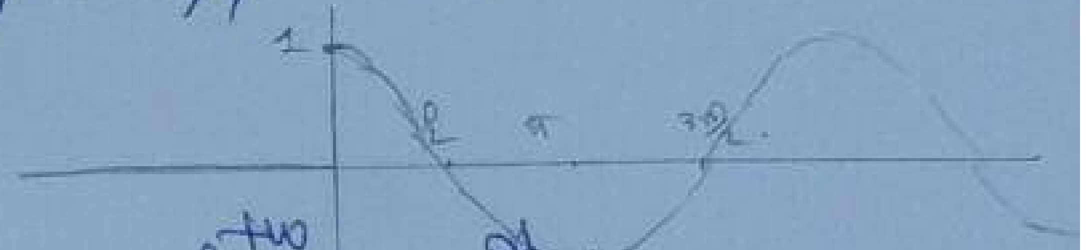
$$= \left[-\frac{e^{-(p-a)t}}{(p-a)} \right]_0^{+\infty} \quad ; \ p > a.$$

$$= \frac{1}{p-a}.$$

⑤ fonctions sinusoïdales :

→ on considère la fonction $f(t) = \cos(t)\, u(t)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{L}(\cos t\, u(t))(p) = \int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-pt}\, dt$$



$\cos t \to -\sin t$
$e^{-pt} \to -\frac{e^{-pt}}{p}$

$$= \left[-\cos t\, \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt}\, dt \quad , \ p > 0.$$

$\sin t \to \cos t$
$e^{-pt} \to -\frac{e^{-pt}}{p}$

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \left(\left[-\sin t\, \frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-pt}\, dt \right)$$

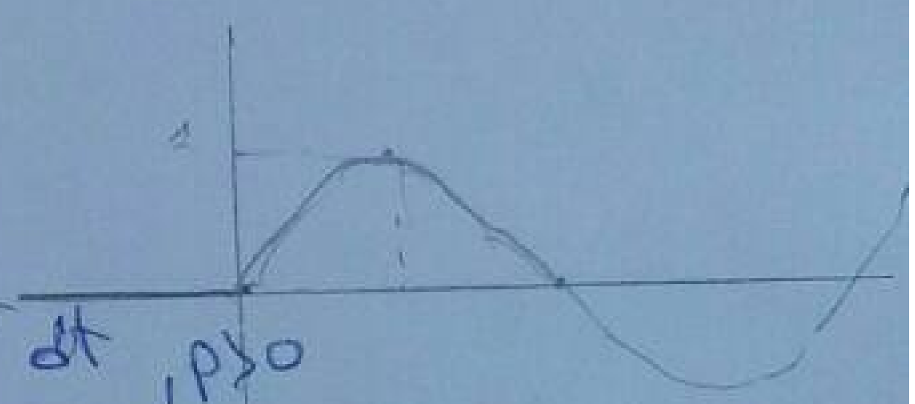
$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \cdot \mathcal{L}(\cos t\, u(t))(p).$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\cos t\, u(t))(p) \left[1 + \frac{1}{p^2} \right] = \frac{1}{p} \Rightarrow \mathcal{L}(\cos t\, u(t))(p) = \frac{p^2}{p^2+1}\, \frac{1}{p}.$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\cos t\, u(t))(p) = \frac{p}{p^2+1} \quad , \ p > 0.$$

→ on considère la fonct° $g(t) = \sin t\, u(t)$

$$\mathcal{L}(\sin t\, u(t))(p) = \int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt}\, dt.$$



$\sin t \to \cos t$
$e^{-pt} \to -\frac{e^{-pt}}{p}$

$$= \left[-\frac{\sin t}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-pt}\, dt \quad , \ p > 0$$

$\cos t \to -\sin t$
$e^{-pt} \to -\frac{e^{-pt}}{p}$

$$= \frac{1}{p} \left(\left[-\frac{\cos t}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} \sin t\, e^{-pt}\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} \mathcal{L}(\sin t\, u(t))(p).$$

$$\mathcal{L}(\sin t\, u(t))(p) \left(1 + \frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{p^2}.$$

$$\mathcal{L}(\sin t\, u(t))(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1} \quad , \ p > 0$$