ENIG	République Tunisienne Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique Université de Gabès Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès	**Réf : DE-EX-01** **Indice : 4**
	EPREUVE D'EVALUATION	**Date : 02/12/2019**

Année Universitaire : 2023/2024.	**Date de l'Examen** : 10/01/2024
Nature : ☐ DC ☑ Examen ☐ DR	**Durée:** ☐ 1h ☐ 1h30min ☑ 2h ☐ 3h
Diplôme : ☐ Mastère ☑ Ingénieur	**Nombre de pages : 2**
Section : ☑ GCP ☐ GCV ☐ GEA ☑ GCR ☐ GM	**Enseignant (e) : Ferid BELDI**
Niveau d'étude : ☑ 1ère ☐ 2ème ☐ 3ème année	**Documents Autorisés:** Les Tables Statistiques sont autorisées. **Calculatrice autorisée:** ☑ Oui ☐ Non
Matière : Probabilités & Statistiques	**Remarque:** Veuillez écrire de façon lisible. Les réponses illisibles ne seront ni corrigées ni évaluées.

Exercice 1 : **(05points)**

Soit Y une variable aléatoire discrète dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Valeurs de Y	-2	-1	0	1	2
Probabilités	0,1	2a	0,2	0,1	a^2

1) Déterminer a puis calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
2) Calculer la fonction de répartition G de la variable aléatoire Y et tracer son graphe.
3) Calculer la loi et l'espérance mathématique de la variable aléatoire $Z = Y^2 - 1$.

Exercice 2 : **(08 points)**

Soit X une variable aléatoire admettant une densité de la forme

$$f(x) = \begin{cases} -ax, & \text{si } x \in [-1,0], \\ 1 - ax, & \text{si } x \in]0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où a est un paramètre de valeur inconnue, $0 < a < 1$.

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. On considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de la variable aléatoire X. Déterminer un estimateur T du paramètre a par la méthode des moments, puis étudier ses propriétés (biais, convergence). Calculer sa variance en fonction de a.
3. On désigne par K le nombre des variables aléatoires X_i prenant une valeur comprise entre -1 et 0. Indiquer la loi de K, en justifiant votre réponse. Montrer que la variable aléatoire $W = 2K/n$ est un estimateur sans biais de a. Calculer sa variance et montrer qu'il est convergent en moyenne quadratique vers a, lorsque la taille n de l'échantillon tend vers l'infini.
4. Comparer les estimateurs T et W. Préciser si le résultat de cette comparaison dépend de la valeur du paramètre a.

Exercice 3 : **(07 points)**

On admet que la distribution d'un certain caractère quantitatif dans une population est normale, d'espérance mathématique m inconnue. On désire estimer ce paramètre au moyen d'un intervalle de confiance.

1. On suppose d'abord que σ est connu et égal à 4. Dans un échantillon de taille $n = 16$, prélevé au hasard dans la population, on a observé que $\sum x_i = 204$. Construire un intervalle de confiance pour m au seuil de risque $10\ \%$.

2. Dans cette question on suppose σ inconnu. Cependant, on suppose que $n \geq 1$ dans l'échantillon précédent, on a observé $\sum x_i^2 = 2841$. Déterminer un nouvel intervalle de confiance pour le paramètre m, au même seuil de risque, et le comparer à l'intervalle obtenu au question 1.

3. On suppose à nouveau que σ est connu et égal à 4. Quelle devrait être la taille minimale de l'échantillon à prélever pour que l'erreur absolue sur m soit inférieure à 1, à un niveau de confiance de 90%.

Bon Courage.