AU : 2019-2020
Section : GEA1
Enseignants : Kamel ABDERRAHIM, Zeineb LASSOUED
TD 2 : Analyse des Processus

Exercice 1 :

Soit le système décrit par la fonction de transfert suivante :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^2}$$

1. Donner la représentation d'état du système en considérant l'état $X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$
2. Résoudre l'équation d'état en supposant que l'état initial égal à zéro et l'entrée est une impulsion.
3. Discrétiser la représentation d'état avec une période d'échantillonnage Te.
4. Déduire la fonction de transfert échantillonnée.

Exercice 2 :

Soit un système linéaire décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + 3p + 2}$$

1. Donner le schéma fonctionnel sous forme commandable et déduire la représentation d'état.
2. Calculer la matrice de transition par la méthode de la Transformé de Laplace inverse.
3. Réaliser une nouvelle représentation d'état obtenus à partir de la décomposition en éléments simples de G(p).
4. A partir de la représentation canonique de commandabilité précédente, appliquer un changement de base approprié de manière à retrouver la représentation d'état de la question 3. Retrouver ensuite l'expression de la matrice de transition calculée à la question 2.
5. Discrétiser la représentation d'état avec une période d'échantillonnage Te.

Exercice 3 :

Donner la représentation d'état pour chacun des systèmes suivants :

- **Système 1 :**

$$y(k+2) - 0.3y(k+1) - 0.1y(k) = 4u(k+1) + 0.8u(k)$$

- **Système 2 :**

$$y(k+2) + y(k+1) + y(k) = u(k)$$

AU : 2019-2020
Section : GEA1
Enseignants : Kamel ABDERRAHIM, Zeineb LASSOUED
Correction TD 2 : Analyse des Processus

Exercice 1 :

1. **Représentation d'état pour** $H(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{1}{p^2}$; donc $\ddot{y}(t)=u(t)$

On pose

$$X(t)=\begin{cases} x_1(t)=y(t) \\ x_2(t)=\dot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \dot{X}(t)=\begin{cases} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t)=u(t) \end{cases}$$

Alors $\begin{cases} \dot{X}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) \end{cases}$

2. **Résoudre l'équation d'état** X(0)=0 et $u(t)=\delta(t)$

$X(t)=e^{A(t-t_0)}X(t_0)+\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}B\,u(\tau)d\tau$ avec (u(t) est une impulsion de Dirac donc elle est nulle partout sauf en 0, ou sa valeur infinie correspond à 1)

$X(t)=e^{A(t)}B$ on cherche donc $e^{A(t)}$??

En utilisant la méthode de transformé de Laplace

$$(pI-A)=\begin{bmatrix} p & -1 \\ 0 & p \end{bmatrix} \Rightarrow (pI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \frac{1}{p^2} \\ 0 & \frac{1}{p} \end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}\left((pI-A)^{-1}\right)=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc $X(t)=e^{At}B=\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$

3. **Discrétiser la RE avec Te période d'échantillonnage**

$$\begin{cases} X(k+1)=F\,X(k)+G\,u(k) \\ y(k)=H\,X(k) \end{cases}$$

$$F = e^{ATe} = \begin{bmatrix} 1 & Te \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \int_0^{Te} e^{A\theta} B\, d\theta = \int_0^{Te} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\theta = \int_0^{Te} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} d\theta = \begin{bmatrix} \frac{T_e^{\,2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient donc

$$\begin{cases} X(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & Te \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} \frac{T_e^{\,2}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(k) \end{cases}$$

4. La fonction de transfert obtenu à partir de la RE est

$$G(z) = H\left(zI - F\right)^{-1} G + e$$

$$G(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} z-1 & -Te \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} T_e^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

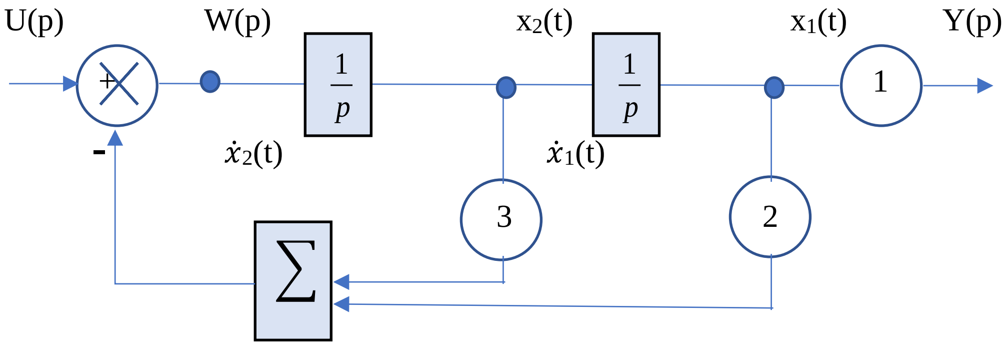
Exercice 2 :

1. **RE sous la forme commandable avec schéma fonctionnel**

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{Y(p)}{W(p)} * \frac{W(p)}{U(p)} = \frac{(1)\left(\frac{1}{p}\right)^2}{\left(p^2+3p+2\right)\left(\frac{1}{p}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^2}{1+3\left(\frac{1}{p}\right)+2\left(\frac{1}{p}\right)^2}$$

On pose $\frac{Y(p)}{W(p)} = \left(\frac{1}{p}\right)^2 \iff \boxed{Y(p) = W(p) * \left(\frac{1}{p}\right)^2}$

$$\frac{W(p)}{U(p)} = \frac{1}{1+3\left(\frac{1}{p}\right)+2\left(\frac{1}{p}\right)^2} \iff \boxed{W(p) = U(p) - W(p)\left(3\left(\frac{1}{p}\right)+2\left(\frac{1}{p}\right)^2\right)}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) + u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

On obtient donc la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) \end{cases}$$

2. **Calcul de la matrice de transition par la méthode de Laplace**

$$(pI - A) = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 2 & p+3 \end{bmatrix}$$

$$(pI - A)^{-1} = \frac{1}{p^2 + 3p + 2} \begin{bmatrix} p+3 & 1 \\ -2 & p \end{bmatrix} = \frac{1}{(p+2)(p+1)} \begin{bmatrix} p+3 & 1 \\ -2 & p \end{bmatrix}$$

$$(pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{p+2} + \frac{2}{p+1} & \frac{-1}{p+2} + \frac{1}{p+1} \\ \frac{2}{p+2} + \frac{-2}{p+1} & \frac{2}{p+2} + \frac{-1}{p+1} \end{bmatrix}$$

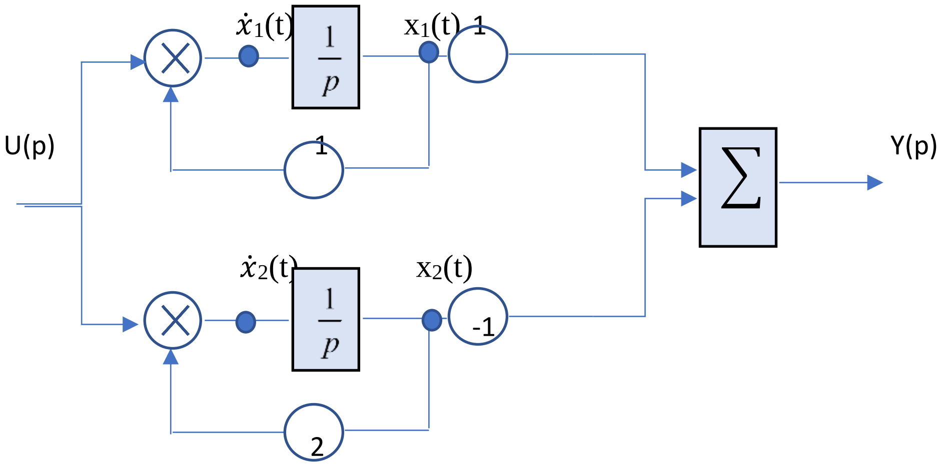
En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient

$$\boxed{e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}}$$

3. **Réalisation d'une nouvelle représentation d'état à partir de la décomposition en éléments simples**

$$G(p)=\frac{1}{(p+2)(p+1)}=\frac{\alpha_1}{p+2}+\frac{\alpha_2}{p+1}$$ Avec (α_1 obtenu en multipliant G(p) par (p+2) et en remplaçant p par 2 de même pour α_2)

$$G(p)=\frac{-1}{p+2}+\frac{1}{p+1}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=-x_1(t)+u(t) \\ \dot{x}_2(t)=-2x_2(t)+u(t) \\ y(t)=x_1(t)-x_2(t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{X}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -2\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix} \\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}X(t) \end{cases}$$

4. **Obtenir la RE de la question 3 à partir de la RE de la question 1**

On a $\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & -2\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}$

$\det(A)=\begin{vmatrix}0 & 1 \\ -2 & -3\end{vmatrix}=2\neq 0$ donc A est diagonalisable , elle peut se mettre sous la forme suivante :

$$A=T\Delta T^{-1}$$

On détermine donc une matrice de passage

- Les valeurs propres : $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 \\ -2 & -3\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+3\lambda+2$

On a 2 valeurs propres $\lambda_1=-1$ et $\lambda_2=-2$

- Les vecteurs propres :

$$AV_i=\lambda_i V_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}=\lambda_i\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda_i x \\ -2x-3y=\lambda_i y \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -1 \text{ donc } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\lambda_2 = -2 \text{ donc } V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On pose X(t) = T*Z(t)

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A\,X(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\,X(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Z(t) = T^{-1}AT\;Z(t) + T^{-1}Bu(t) \\ y(t) = CT\;Z(t) \end{cases}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C\,T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Retrouver l'expression de la matrice de transition

On a $A = T\Delta T^{-1}$ $\Longrightarrow$ $e^{At} = Te^{\Delta t}T^{-1}$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-2t} + 2e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

5. Discrétiser la RE avec une période d'échantillonnage Te

$$\begin{cases} X(k+1) = F\;X(k) + Gu(k) \\ y(k) = H\;X(k) \end{cases}$$