République Tunisienne Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université de Gabès Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès Département Génie Electrique-Automatique

TD 4 : **Résolution Numériques des fonctions non linéaires**

Réalisé par : DEHRI Khadija

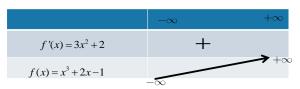
Maitre Assistante en Génie Electrique-Automatique

Membre de l'unité de recherche Commande Numérique des Procédés Industriels (CONPRI)

TD 4 AN

Exercice 1

f est une fonction de classe C^1 sur R



f est une fonction croissante et change de signe sur $R \Rightarrow$ il existe une unique racine de f sur R $f(0)f(1) = -1 \times 2 = -2 < 0$

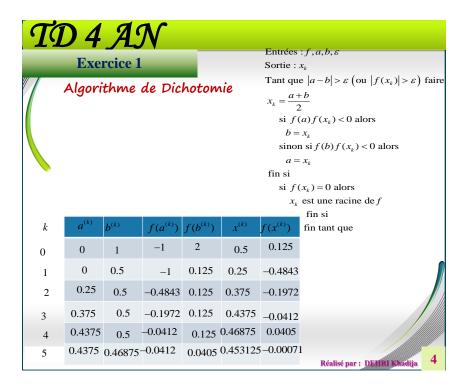
alors la racine de f existe dans l'intervalle [1 2]

Principe

Soit f est une fonction continue sur [a,b] dans \mathbb{R} ($[a,b] \subset \mathbb{R}$) vérifiant f(a)f(b) < 0,

La méthode de dichotomie consiste à approcher la racine de f par encadrement en réduisant à chaque itération la longueur de l'intervalle [a,b] à la moitié tout en vérifiant le théorème de valeurs intermédiaires

Réalisé par : DEHRI Khadija



Exercice 2

Principe La méthode de la sécante a le principe que la solution est le point d'intersection de la droite passant par les points

 $(x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)})) \text{ et } (x^{(k)}, f(x^{(k)})) \text{ avec l'axe des abscisses}$ $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} f(x^{(k)})$

Entrées : $f, x^{(0)}, x^{(1)}, Nmax$

Sortie: $x^{(k)}$

k = 2

Tant que $|f(x^{(k)})| > \varepsilon$ et $k \le N$ max faire

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)} f\left(x^{(k)}\right)$$

k	$x^{(k-1)}$	$x^{(k)}$	$f(x^{(k-1)})$	$f(x^{(k)})$
1	-1	0	0.4597	-1
2	0	-0.6851	_1 -	-0.45285
3	-0.6851	-1.25207	-0.45285	5 1.6495

k = k + 1

fin tant que

La méthode de Dichotomie n'utilise que la signe de f(x) pour progresser, alors que la méthode de la sécante utilise plus d'informations sur f(x) et progressera plus vite.

La méthode de Dichotomie est basé sur le principe des valeurs intermédiaires et toujours convergente alors que la méthode de sécante non. Réalisé par : DETIRI Khadija

TD 4 AN

Exercice 3

Principe

La méthode de fausse positionest basé sur le théorème des valeurs intermédiaires.

La solution est donné par l'abscisse du point d'intersection de la droite passant par les points

$$(a^{(k)}, f(a^{(k)}))$$
et $(b^{(k)}, f(b^{(k)}))$ avec l'axe des abscisses $x^{(k)} = \frac{f(a^{(k)})b^{(k)} - f(b^{(k)})a^{(k)}}{f(a^{(k)}) - f(b^{(k)})}$

Entrées : f , a, b, ε ; Sortie : $x^{(k)}$

k = 0

$$a^{(k)} = a, b^{(k)} = b$$

Tant que $|f(x^{(k)})| > \varepsilon$ faire

$$x^{(k)} = \frac{f(a^{(k)})b^{(k)} - f(b^{(k)})a^{(k)}}{f(a^{(k)}) - f(b^{(k)})}$$
si $f(a^{(k)}) f(x^{(k)}) \le 0$ sloves

si
$$f(a^{(k)}) f(x^{(k)}) < 0$$
 alors
 $a^{(k+1)} = a^{(k)}$

$$b^{(k+1)} = x^{(k)}$$

sinon si
$$f(b^{(k)}) f(x^{(k)}) < 0$$
 alors

$$a^{(k+1)} = x^{(k)}$$

 $b^{(k+1)} = b^{(k)}$

fin si

fin tant que

Les deux méthodes sont basées sur le théorème des valeurs intermédiaires Donc convergentes

La solution pour la méthode de la fausse position dépend de l'intervalle [a b] et de f alors que la solution Dichotomie dépend uniquement de l'intervalle [a bi

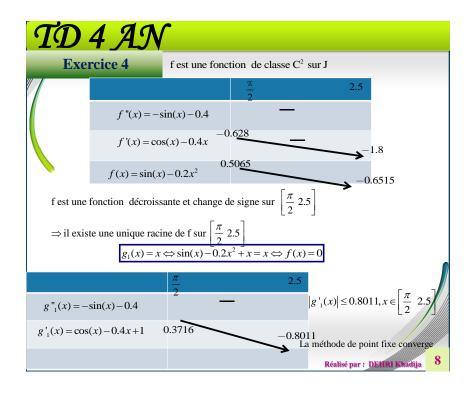
Réalisé par : DEMRI Khadija

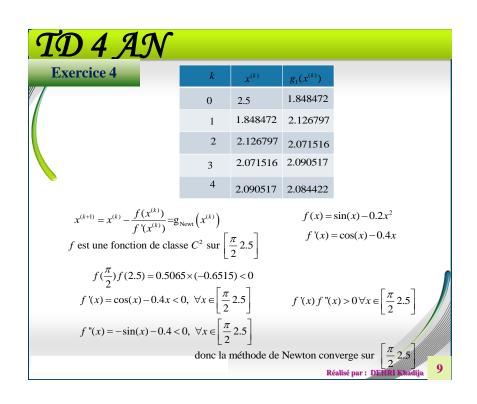
TD 4 AN

Exercice 3

а	$\iota^{(k)}$	$b^{\scriptscriptstyle(k)}$	$f(a^{(k)})$	$f(b^{(k)})$	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
-2	2.4	-1.6	0.49071	-0.1981	-1.83007	-9.52078×10^{-3}
-:	2.4	-1.83007	0.49071	-9.52078×10 ⁻³	-1.84092	-4.0423×10^{-4}
_	2.4	-1.84092	0.49071	-4.0423×10^{-4}	-1.84138	-1.7067×10^{-5}

Réalisé par : DEHRI Khadija





TD 4 AI	V		
Exercice 4			
	k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
	0	2.5	-0.651527
	1	2.13827	-7.1178×10^{-2}
	2	2.08716606	-1.63508×10^{-3}
	3	2.085935309	-9.62353×10^{-7}
	4	2.085934584	-2.56658×10^{-10}
	5	2.085934584	-2.56658×10^{-10}
			Réalisé par : Deffit Knadija 10

TD 4 AN

Exercice 5

Considérons la fonction suivante :

$$f(x) = e^x - x - 2$$

1- Montrer que la solution de f est les points fixes des équations

$$g_1(x) = e^x - 2$$
 $g_2(x) = \ln(2+x)$

- 2- Dans quel intervalle de longueur 1 se trouve la racine de f
- 3- En déduire si les méthodes de points fixes utilisant g1 et g2 convergent.
- 4- Calculer les 2 itérations à partir de x0 = 1 pour chacune des 2 méthodes de point fixe.
- 5- Pour quelle(s) valeur(s) de *x*0 ne peut-on pas démarrer la méthode de Newton
- 6- Calculer les 2 itérations à partir de x0 = 1 par Newton.

Réalisé par : DEHRI Khadija

TD 4 AN

Exercice 5

$$f(x) = e^x - x - 2$$

$$g_1(x) = x \Leftrightarrow e^x - 2 = x \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$f(x) = 0 \iff f(x) + x = x$$

$$e^x - x - 2 = 0 \iff e^x = x + 2 \iff x = \ln(x + 2) \iff g_2(x) = x$$

f est une fonction de classe C^2 sur $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ $f(1)f(2) = -0.2817 \times (3.3891) < 0$

$$g_1'(x) = e^x$$
 $1 \le x \le 2 \Leftrightarrow e \le e^x \le e^2$ $\Leftrightarrow 2.7183 \le g_1'(x)$

donc la méthode de point fixe par g_1 diverge sur [12]

$$g_2'(x) = \frac{1}{2+x}$$
 $1 \le x \le 2 \Leftrightarrow 3 \le 2+x \le 4 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \frac{1}{2+x} \le \frac{1}{3} \Leftrightarrow g_2'(x) < 1$

donc la méthode de point fixe par g_2 converge sur [12]

Réalisé par : DETRI Khadija 12

TD 4 AN

Exercice 5

$$f(x) = e^x - x - 2$$

$$g(x) = e^x - 2$$

$$g_1(x) = e^x - 2$$
 $g_2(x) = \ln(2+x)$

k	$x^{(k)}$	$g_1(x^{(k)})$
0	1	0.7183
1	0.7183	0.0509
2	0.0509	-0.9478

k	$x^{(k)}$	$g_2(x^{(k)})$
0	1	1.0986
1	1.0986	1.1310
2	1.1310	1.1414

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = g_{\text{Newt}}(x^{(k)}) \qquad f'(x) = e^x - 1$$

k	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$
0	1	-0.2817
1	1.1639	0.0498
2	1.1464	4.4386×10 ⁻

Réalisé par : DEMRI Khadija 13