exercice

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

$(x_0, y_0) = (0,0)$

on pose : $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f_1(x) = f(x,0) = 0 = f_1(0)$

$\hookrightarrow f_1$ est continue en 0

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \mapsto f_2(y) = f(0,y) = 0 = f_2(0) \Rightarrow f_2$ est continue en 0

on a : $\lim\limits_{d((x,y),(0,0)) \to 0} f(x,y) - f(0,0) =$

$= \lim\limits_{\substack{\sqrt{x^2+y^2} \to 0 \\ x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

on pose $x_n = 1/n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$y_n = 1/n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$\lim\limits_{\substack{\sqrt{x_n^2+y_n^2} \to 0 \\ n \to \infty}} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{\substack{\sqrt{x_n^2+y_n^2} \to 0 \\ n \to \infty}} \dfrac{1/n^2}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2} \neq 0$

$\Rightarrow f$ n'est pas continue en $(0,0)$

② soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$ ③

continuité de f en $(0,0)$:

on a : $\left.\begin{array}{l} f(x,0) = 1 \\ \text{et } f(0,y) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2} \to 0} f(x,y) - f(0,0)$

n'existe pas.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \Omega$; $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in$

La dérivée directionnelle de f en (x_0, y_0) :

$\partial_\mu f(x_0, y_0) = f_\mu'(0)$

avec $f_\mu(s) = f((x_0, y_0) + s\mu)$

si $\mu = (0,0) \Rightarrow \partial_{\mu=(0,0)} f(x_0, y_0) = 0$

on a : $\partial_x f(x_0, y_0) = \partial_{\underbrace{(1,0)}_{e_1}} f(x_0, y_0)$

$\partial_y f(x,y) \cancel{= \partial_{(0,1)}} = \partial_{\underbrace{(0,1)}_{e_2}} f(x_0, y_0)$

Proposition :

soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 alors f admet une dérivée directionnelle dans toute direction μ et on a :

$\partial_\mu f(x,y) = \mu_1 (\partial_x f)(x,y) + \mu_2 (\partial_y f)(x,$

Exemple : $f(x,y) = x^2 e^{xy}$, $\mu = (1, 2)$

$\partial_\mu f(x,y)$?

on a : $\partial_x f(x,y) = 2x e^{xy} + x^2 y\, e^{xy}$

$= (2x + x^2 y)\, e^{xy}$

$= x^3 e^{xy} = \partial_y f(x,y)$

$\Rightarrow \partial_\mu f(x,y) = 1 \times (2x + x^2 y) e^{xy} + (-1) \times (x^3 e^{xy})$

$= (2x + x^2 y - x^3)\, e^{xy}$

$(Df)_{(x,y)}(\mu) = (\partial_\mu f)(x,y)$

$= \mu_1 \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \mu_2 \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = Df_{(x,y)}(e_1)$

et $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = Df_{(x,y)}(e_2)$

$Df(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$

$Q(t) = \int_0^x u(t,x)\, dx$: la qualité du polluant.

$Q(t+h) = \int_{ch}^{x+ch} u(t+y)\, dy$

on pose $y' = y - ch$

$\Rightarrow Q(t) = \int_0^x u(t,y')\, dy'$

$\Rightarrow u(t,x) = u(t+h, x+ch)$

Lemme : $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1

$f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C_1 on a :

Chapitre 3 :

$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \| (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \|$

f est continue en (x_0,y_0)

ssi $\lim f(x,y) - f(x_0,y_0) = 0$

$d((x,y),(x_0,y_0)) \to 0$

Exp : $f(x,y) = x^4 + y^4$

continuité en $(0,0)$: $\lim f(x,y) - f(0,0)$

$= d((x,y),(0,0)) \to 0$

$= \lim x^4 + y^4 = 0 + 0 = 0$

$\sqrt{x^2+y^2} \to 0$

$x \to 0$

$y \to 0$

$\Rightarrow$ f est continue en $(0,0)$

soit $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$: $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f_1(x) = f(x, y_0)$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \mapsto f_2(y) = f(x_0, y)$

si f est continue en (x_0,y_0) alors f_1 est continue en x_0 et f_2 est continue en y_0.

$\Rightarrow \frac{t^2}{2} + a_0 t = \frac{a^2(t)}{2} - \frac{a_0^2}{2}$

$\Rightarrow b(t) = \frac{a^2}{2}(t) - \frac{a_0^2}{2} + b_0$

$\Rightarrow \gamma : b = \frac{a^2}{2} - \frac{a_0^2}{2} + b_0$

$\gamma : y = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} + y_0$ (parabole)

on veut maintenant déterminer u au pt (x_0, y_0)

Puisque u est constante le long de $\gamma : y = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} + y_0$ qui passe par le pt (x_0, y_0). cette courbe γ coupe (Oy) au pt : $(x_1 ; y_1 = y_0 - \frac{x_0^2}{2})$. et comme ~~...~~

$\Rightarrow$ cette phrase change / à partir cas initial

$u(x_1, y_1) = u(0, y_1) = \phi(y_1) = \phi(y_0 - \frac{x_0^2}{2})$

donc : $u(x_0, y_0) = \phi(y_0 - \frac{x_0^2}{2})$

$\Rightarrow$ Soit $u(x,y) = \phi(y - \frac{x^2}{2})$

on a : $\partial_x u(x,y) = -x \phi'(y - x^2/2)$

$\partial_y u(x,y) = \phi'(y - x^2/2)$

donc : $\partial_x u(x,y) + x \partial_y u(x,y)$

$= -x \phi'(y - x^2/2) + x \phi'(x,y) = 0$

conclusion : Toute solt de (S) s'écrit sous la forme $u(x,y) = \phi(y - x^2/2)$, avec ϕ de classe ...

En rouge n ... 5.6.a.

$X(x,y) = (1, 2xy^2)$ tq : $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$

$= X(a(t), b(t))$

$\Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (1, 2a(t) b^2(t))$

$\Rightarrow \begin{cases} a'(t) = 1 & (1) \\ b'(t) = 2 a(t) b^2(t) & (2) \end{cases}$

$a_0 = a(0)$

(1) : $a'(t) = 1 \Rightarrow a(t) = t + a_0$

$b'(t) = 2(t + a_0) b^2(t)$

$\frac{b'(t)}{b^2(t)} = 2t + a_0$ avec $b(t) \neq 0$, $\forall t$.

$\int \frac{b'(t)}{b^2(t)} dt = 2\int t + a_0 \, dt$

$\frac{-1}{b(t)} = \frac{t^2}{\cancel{2}} + 2a_0 t + c$

pour $t = 0$: $\frac{-1}{b(0)} = c \Leftrightarrow c = \frac{-1}{b(0)} = -\frac{1}{b_0}$

$\Rightarrow \frac{-1}{b(t)} = \frac{t^2}{\cancel{2}} + 2a_0 t - \frac{1}{b_0}$

$\Rightarrow b(t) = \frac{-1}{t^2 + 2a_0 t - \frac{1}{b_0}}$

$b(t) = \frac{-1}{\frac{b_0(t^2 + 2a_0 t) - 1}{b_0}}$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow b(t) = \frac{}{1 - b_0(t^2 + 2a_0 t)}$$

on a : $a^2(t) = t^2 + 2a_0 t + a_0^2$

$\Rightarrow t^2 + 2a_0 t = a^2(t) - a_0^2$

$$b(t) = \frac{b_0}{1 - b_0(a^2(t) - a_0^2)}$$

$$\gamma : b = \frac{b_0}{1 - b_0(a^2 - a_0^2)}$$

3)

$X(x, y) = (\sqrt{1 - x^2}, 1)$

soit $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intégrale de X

c.à.d $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$

$\Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (\sqrt{1 - a^2(t)}, 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = \sqrt{1 - a^2(t)} & (1) \\ b'(t) = 1 & (2) \end{cases}$

(2) $b'(t) = 1$

$\Rightarrow b(t) = t + b_0$; avec $b_0 = b(0)$

1) : $a'(t) = \sqrt{\underbrace{1 - a^2(t)}_{>0}}$; on suppose que $a(t) \in]-1, 1[$

$$\frac{a'(t)}{\sqrt{1 - a^2(t)}} = 1 \quad \Bigg| \quad \int \frac{a'(t)}{\sqrt{1 - a^2(t)}} dt = t + a_0$$

$\arcsin(a(t)) = t + a_0$

finalement, $a_0 \in$

$\begin{cases} \partial_x u(x,y) + x\, \partial_y u(x,y) = 0 \\ u(0,y) = \phi(y) \end{cases}$

ϕ : de classe C^1

on pose $X = (1, x)$, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

soit $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ tq : $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$

$\Rightarrow (a'(t), b'(t)) = (1, a(t))$

$\Rightarrow \begin{cases} a'(t) = 1 & (1) \\ b'(t) = a(t) & (2) \end{cases}$

(1) $\Rightarrow a(t) = t + c$

pour $t = t_0$: $c = a(t_0) = a_0$

(1) $\Rightarrow a(t) = t + a_0$

(2) $b'(t) = t + a_0$

$\Rightarrow b(t) = \frac{1}{2}t^2 + t a_0 + c$

pour $t = t_0$; $b(t_0) = c = b_0$

$\Rightarrow b(t) = \frac{1}{2}t^2 + t a_0 + b_0$

$\gamma(t) = (t + a_0, \frac{1}{2}t^2 + t a_0 + b_0)$

$\begin{cases} \text{on a : } a^2(t) = t^2 + 2a_0 t + a_0^2 \\ \frac{a^2}{2}(t) = \frac{t^2}{2} + a_0 t + \frac{a_0^2}{2} \end{cases}$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

finalement $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2$, $u(t,x) = f(bt - ax)$

avec f une fonction donnée de classe C^1

on a : $\partial_t u(t,x) = b f'(bt - ax)$

$\partial_x u(t,x) = -a f'(bt - ax)$

et $a \partial_t u(t,x) + b \partial_x u(t,x) = ab f'(bt - ax) - ab f'(bt - ax) = 0$

$\Rightarrow u(t,x) = f(\underbrace{bt - ax})$ est sol de (E).

$a \partial_t u(t,x) + b \partial_x u(t,x) = 0$

on pose : $t' = bt - ax$

$x' = at + bx$

$v(t', x') = u(t,x)$

on a : $\partial_t u(t,x) = \partial_t v(t', x')$

$= \partial_t v(bt - ax, at + bx)$

$= (bt - ax)' \partial_1 v(bt - ax, at + bx) + (at + bx)' \partial_2 v(bt - ax, at + bx)$

$= b \partial_1 v(bt - ax, at + bx) + a \partial_2 v(bt - ax, at + bx)$

de $\partial_x u(t,x) = -a \partial_1 v(bt - ax, at + bx)$

$+ b \partial_2 v(bt - ax, at + bx)$

(E) : $\Leftrightarrow ab \partial_1 v(bt - ax, at + bx) + a^2 \partial_2 v(bt - a$

$\Leftrightarrow$ (E) : $(\underbrace{a^2 + b^2}_{\neq 0}) \partial_{x'} v(t', x') = 0$

!!

$\Rightarrow \partial_{x'} v(t', x') = 0$

$\Leftrightarrow v(t', x') = f(t')$ $\Leftrightarrow u(t,x) = f(bt - ax)$

Exemple :

exp 1 page 50 (3.6.1)

1) $\begin{cases} 4 \partial_t u(t,x) - 3 \partial_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = x^3 \\ \text{on pose } t' \end{cases}$ $\begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}$

on pose : $t' = -3t - 4x$

$x' = 4t - 3x$

$v(t', x') = u(t,x)$

on a : si u est sol de (E)

alors v est sol de : (E') $= (4^2 + (-3)^2) \partial_{x'} v(t', x') = 0$

$\Leftrightarrow \partial_{x'} v(t', x') = 0$

$\Leftrightarrow v(t', x') = f(t')$

$\Leftrightarrow u(t,x) = f(-3t - 4x)$ avec

f une fct donné de classe C^1

comme : $u(0,x) = x^3$

Scanné avec CamScanner

$\mu(0,x) = f(-4x)$

Par identification : $f(-4x) = x^3$

on pose : $X = -4x \iff x = \frac{-X}{4}$

$\Rightarrow f(X) = \left(\frac{-X}{4}\right)^3 = -\frac{X^3}{64}$

$\Rightarrow \forall\ x \in \mathbb{R} : f(x) = -\frac{x^3}{64}$

$\Rightarrow \mu(t,x) = \frac{-(-3t-4x)^3}{64}$

$\Rightarrow \mu(t,x) = \frac{(3t+4x)^3}{64}$

Eq à coefficient variable :

EXP :

$$\partial_x \mu(x,y) + x\, \partial_y \mu(x,y) = 0$$

Methodes des caractéristiques :

on pose : $X = (1,x)$

$\hookrightarrow D_{(x,y)} u(X) = 0 \iff \partial_{(1,x)} u(x,y) = 0$

$\Rightarrow \mu$ est constant le long des caractéristique de direction $X = (1,x)$.

on pose : $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq : $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$

X ... [illegible]

(E) : $a\,\partial_t u(t,x) + b\,\partial_x u(t,x) = 0$

avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

si $a = 1$ et $b = 0$

(E) : $\partial_t u(t,x) = 0$

$\iff u(t,x) = f(x)$. avec f fonction donc de classe $\mathcal{C}^1$

$D : ax + by + c = 0$

$u(-b,a)$ vecteur directeur de D

si $V = (a,b)$ vecteur directeur de D

$D = bx - ay + c = 0$

$\Rightarrow$ Les solts de (E) sont constantes le long des droites D.

Proposition :

u la solt de (3.6) est constante le long des droites de direction (a,b)

Déf :

$D_c = bt - ax = c \quad ; c \in \mathbb{R}$

on appelle D_c les caractéristiques de l'eq (3.

Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, $\exists!\ D_{c_0} : bt_0 - ax_0 = c_0$

$\Rightarrow \mu(t_0,x_0) = f(c_0) = f(bt_0 - ax_0)$

$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$; $(u_1, \dots, u_n)$ sont les vecteurs propre associé à (T_1, T_2) $= \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

$\Rightarrow N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad e^{tA} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ N est nilpotente d'ordre 2 : $\underline{N^k} = 0, \forall k \geq 2$

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{1} \frac{(tN)^k}{k!} = I + tN$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3t & 3t \\ 0 & -3t & 3t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3t & 3t \\ 0 & -3t & 1+3t \end{pmatrix}$$

on a : $e^{tA} = e^{t(D+N)}$

$= e^{tD} \cdot e^{tN} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3t & 3t \\ 0 & -3t & 1+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & (1-3t)e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & -3te^{2t} & (1+3t)e^{2t} \end{pmatrix}$$

$x(t) = e^{tA} \cdot X(0)$

$$X(t) = \begin{cases} x(t) = (-3t+3)\,e^{2t} - 2e^t \\ y(t) = (-3t+2)\,e^{2t} - e^t \\ z(t) = te^{2t} \end{cases}$$

$x(0) = 1$

$y(0) = 1$

$z(0) = 0$

(H) : $X'(t) = A\,X(t)$

(S) : $X'(t) = A\,X(t) + b(t)$

$X(t) = Z(t) + X_0(t)$

avec $Z(t)$ solt de (H)

et $X_0(t)$ solt particulière de (S)

$\hookrightarrow \boxed{X_0(t) = X_0(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-sA}\, b(s)\, ds}$

avec : $X_0(t_0) = e^{-t_0 A} \cdot X(t_0)$

$B = P^{-1} A P$

$\Leftrightarrow A = P B P^{-1}$

$$e^{tA} = e^{PtBP^{-1}}$$

$$= P e^{tB} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & (1-3t)e^{2t} & 3te^{2t} \\ 0 & -3te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -3 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exo1e : Résoudre le :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - 3z(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) - 6z(t) \\ z'(t) = -x(t) + 2y(t) + 5z(t) \end{cases}$$

avec $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{cases}$

on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

(S) $\Rightarrow X'(t) = A X(t)$ donc $X(t) = e^{tA} X(0)$

$\det(A - \lambda I) = 0$ $\quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e^{tA} = ?$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -3 \\ 1 & -1-\lambda & -6 \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -1-\lambda \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(5-\lambda) + 12\right] - 3(2-1-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left[-5 + \lambda - 5\lambda + \lambda^2 + 12\right] - 3 + 3\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 7 - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 7\lambda - 3 + 3\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$$

pour $\lambda = 1$

$-1 + 5 - 8 + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

Par identification : $\left.\begin{matrix} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{matrix}\right\} \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ V.P simple de A et $\lambda_2 = 2$ V.P double de A

La décomposition de Dunford de A

$A = D + N$

avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = A - D$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -9 \\ -2 & 7 & -3 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$B = P A P^{-1} = D + N$

avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 \end{pmatrix}$