Exercices du cours : 3.6.2

1/ Soit $X(x,y) = (1, 2xy^2)$.

On pose : $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intégrale de X.

donc : $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (1, 2a(t)b^2(t))$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = 1 & (1) \\ b'(t) = 2a(t)b^2(t) & (2) \end{cases}$$

(1) : $a(t) = t + a_0$.

(2) : $b'(t) = 2(t+a_0)b^2(t)$.

$\Leftrightarrow \frac{b'(t)}{b^2(t)} = 2(t+a_0) \Leftrightarrow \int \frac{b'(t)}{b^2(t)} dt = 2\int (t+a_0) dt$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{b(t)} = t^2 + 2a_0 t + b_0 \Leftrightarrow b(t) = \frac{-1}{t^2 + 2a_0 t + b_0}$.

$\Leftrightarrow b = \frac{-1}{a^2 - a_0^2 + b_0}$

2/ Soit $X(x,y) = (1+x^2, 1)$

On pose : $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intégrale de X.

donc $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (1+a^2(t), 1)$.

$$\begin{cases} a'(t) = 1 + a^2(t) & (1) \\ b'(t) = 1 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow a'(t) = 1 + a^2(t)$

(2) $\Rightarrow b(t) = t + b_0$

(1) (E) : $a'(t) - a^2(t) = 1$.

(E_h) : $a'(t) - a^2(t) = 0$

$\Leftrightarrow a'(t) = a^2(t)$

$\Leftrightarrow \frac{a'(t)}{a^2(t)} = 1$.

$\Leftrightarrow \int \frac{a'(t)}{a^2(t)} dt = t + C$. pour $t = 0$ on a : $C = -\frac{1}{a_0}$

$-\frac{1}{a(t)} = t + C \Rightarrow \frac{1}{a(t)} = -t + \frac{1}{a_0}$.

$$\frac{1}{a_h(t)} = \frac{1-a_0 t}{a_0} \Rightarrow \boxed{a_h(t) = \frac{a_0}{1-a_0 t}}$$

soit $a_p(t) = \tan(t)$, on a $a_p'(t) = 1 + \tan^2(t)$
$= 1 + a^2(t)$

donc a_p est sol t de (E) d'où $a(t) = a_h(t) + a_p(t)$

$$a(t) = \frac{a_0}{1-a_0 t} + \tan(t)$$

comme $b(t) = b_0 + t$, il faut exprimer t en fction de a.

3/ $X(t) = (\sqrt{1-x^2}, 1)$

Soit $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intégrale de X

alors $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (\sqrt{1-a^2(t)}, 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = \sqrt{1-a^2(t)} & (1). \\ b'(t) = 1 & (2). \end{cases}$, avec : $1 - a^2(t) \geq 0 \Leftrightarrow a^2(t) \leq 1$

$\Leftrightarrow D_a = [-1, 1]$.

(2) : $b(t) = t + b_0$.

(1) : $\frac{a'(t)}{\sqrt{1-a^2(t)}} = 1 \Leftrightarrow \int \underbrace{\frac{a'(t)}{\sqrt{1-a^2(t)}}} dt = t + C$

$\Leftrightarrow \arcsin(a(t)) = t + C$. pour $t = 0$: $C = \arcsin(a_0)$

$\Leftrightarrow a(t) = \sin(t + \arcsin(a_0))$.

donc $b(t) = \arcsin(a) - \arcsin(a_0) + b_0$.

4/ Soit $X(x,y) = (y,x)$

On pose : $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intégrale de X.

donc $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (b(t), a(t))$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a'(t) = b(t) \\ b'(t) = a(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(b) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1$ ou $\lambda = -1$

on pose : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

Soit $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tq $Au_1 = \lambda_1 u_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = a_1 \\ a_1 = b_1 \end{cases}$ donc $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; on prend $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $u_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tq : $Au_2 = \lambda_2 u_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ -b_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} b_2 = -a_2 \\ a_2 = -b_2 \end{cases} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_2 \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; on prend $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d'où $\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} u_2$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ C_1 e^t - C_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} \\ b(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} \end{cases}$$

5/ $X(x,y) = (x,y)$.

Soit $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intégrale de X

alors : $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (a(t), b(t))$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = a(t) & (1) \\ b'(t) = b(t) & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow a(t) = a_0 e^t \Rightarrow e^t = \frac{a(t)}{a_0}$.

$(2) \Rightarrow b(t) = b_0 e^t$

donc $\gamma : b = \frac{b_0}{a_0} a$.

6/ $X(x,y) = (y, -y)$

Soit $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intégrale de X

alors $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (b(t), -b(t))$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = b(t) & (1) \\ b'(t) = -b(t). & (2) \end{cases}$

$(2) \Rightarrow b(t) = b_0 e^{-t}$

$(1) \Rightarrow a'(t) = b_0 e^{-t} \Leftrightarrow a(t) = -b_0 e^{-t} + a_0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{a - a_0}{-b_0}$

d'où $b = b_0 \times \frac{(a - a_0)}{-b_0} \Leftrightarrow \gamma : b = a_0 - a$

7/ $X(x,y) = (x, 2y)$

Soit $\gamma(t) = (a(t), b(t))$ la courbe intégrale de X.

alors : $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) \Leftrightarrow (a'(t), b'(t)) = (a(t), 2b(t))$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a'(t) = a(t) & (1) \\ b'(t) = 2b(t) & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow a(t) = a_0 e^t \Rightarrow e^t = \frac{a(t)}{a_0}$.

(4)

$(2) \Rightarrow b(t) = b_0 e^{2t}$.

d'où $\gamma : b = b_0 \left(\frac{a}{a_0}\right)^2$.