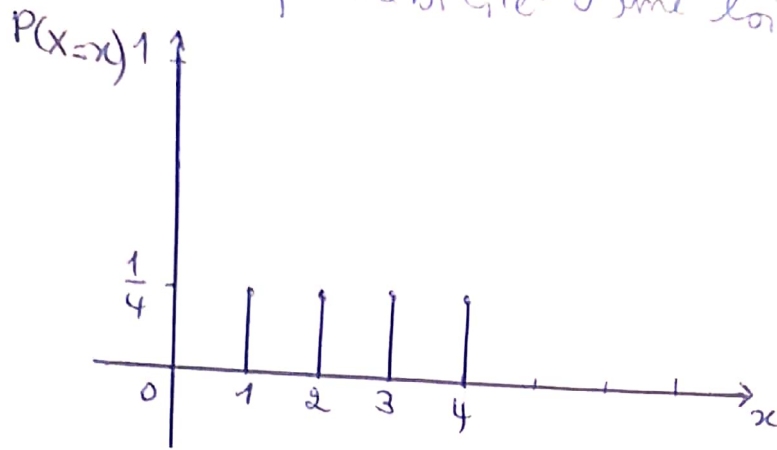


La distribution de probabilité d'une loi uniforme discrète :



$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X=x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n} (1+2+\dots+n) = \frac{n+1}{2}$$

$$V(X) = m_2 - m_1^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 P(X=x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

$$M_X(t) = E(e^{tx}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{tj} = \frac{1}{n} e^t \frac{(1-e^{nt})}{1-e^t}$$

Pour montrer que la loi uniforme n'est pas stable par l'addition, il suffit de mg la fonction génératrice des moments de  $Z = X+Y$  ne prend pas la forme de celle d'une loi uniforme.

Pour mg  $P(X=m) = \frac{1}{n}$  est une loi de proba, on mg  $\sum_{i=1}^n P(X=x_i) = 1$ .

Exemple p.18:  $Z$ : 'le numéro obtenu lors du jette'.

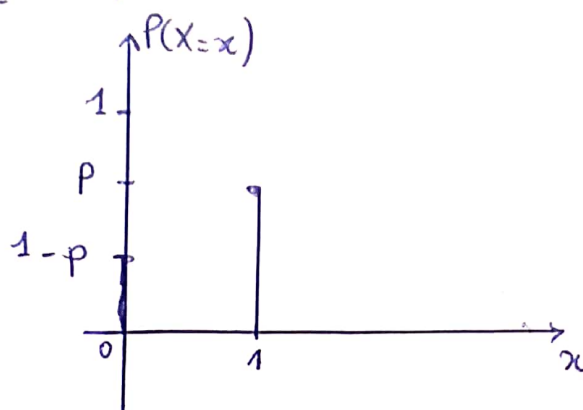
$$Z \sim \mathcal{U}_{\{1, \dots, 4\}} \quad P(Z=3) = \frac{1}{4}.$$

$$P(Z \leq 3) = P(Z=1) + P(Z=2) + P(Z=3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$P(Z \leq 8) = \sum_{j=1}^4 P(Z=j) = 1. \quad \left| \begin{array}{l} V(Z) = \frac{m^2-1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \\ M_Z(t) = \frac{e^t}{4} \frac{(1-e^{4t})}{(1-e^t)} \end{array} \right.$$

$$E(Z) = \frac{m+1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Loi de Bernoulli:



$$m_k = E(X^k) = \sum_{x=0}^1 x^k f(x) = 0^k \cdot p(1-p)^{1-0} + 1^k \cdot p^1(1-p)^{1-1} = 0 + p = p.$$

$$E(X) = m_1 = p.$$

$$V(X) = p \cdot p^2 = p(1-p)$$

$$M_X(t) = E(e^{xt}) = e^{xt} p^0(1-p)^{1-0} + e^{1t} p^1(1-p)^{1-1} = (1-p) + p e^t.$$

Rq: on a:  $M_X(t) = 1-p + p e^t$

$$M_Y(t) = 1-p + p e^t$$

$$M_Z(t) = E(e^{Zt}) = E(e^{(X+Y)t}) = E(e^{Xt} \cdot e^{Yt}) = E(e^{Xt}) \cdot E(e^{Yt}) = M_X(t) \cdot M_Y(t) = (1-p + p e^t)^2.$$

→  $Z$  ne suit pas une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ .

## Loi binomiale:

Ex d'application 1/  $X$ : 'le nombre des échantillons non conformes'

$$\Omega_X = \{0, \dots, 20\}. \quad X \sim B(20, p) \quad p = 0,1.$$

2/ Les chances d'observer au hasard un échantillon respectant la norme:  $1 - \frac{10}{100} = \frac{90}{100}$ .

$$3/ P(X=x) = \binom{20}{x} 0,1^x 0,9^{20-x}, \quad x \in \{0, \dots, 20\}.$$

$$4/ P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{20}{0} 0,9^{20} + \binom{20}{1} 0,1 \times 0,9^{19} = 0,39.$$

La loi binomiale est stable par l'addition:

$$\left. \begin{array}{l} X \sim B(n_1, p) \\ Y \sim B(n_2, p) \end{array} \right\} \mu = X + Y \text{ suit une loi binomiale de paramètre } (n_1 + n_2, p) \text{ car:}$$

$$\begin{aligned} M_\mu(t) &= E(e^{ut}) = E(e^{(X+Y)t}) = E(e^{xt}) \cdot E(e^{yt}) \\ &= (1-p + pet)^{n_1} \cdot (1-p + pet)^{n_2} \\ &= (1-p + pet)^{n_1+n_2} \end{aligned}$$

donc  $M_\mu$  est une fonction génératrice des moments d'une loi binomiale de paramètres  $(n_1+n_2, p)$ .

Rq:  $B(n, p) \simeq P(\lambda=np)$  si

$$\left\{ \begin{array}{l} n > 20 \\ p \leq 0,1 \\ np \leq 5. \end{array} \right.$$

EX d'application p 21:  $X$ : 'le nombre des disquettes non conformes'.

$$\Omega_X = \{0, \dots, 125\}. \quad X \sim B(125; 0,02)$$

$$\text{on a: } \left\{ \begin{array}{l} n = 125 > 20 \\ p = 0,02 \leq 0,1 \\ np = 2,5 \end{array} \right\} \Rightarrow X \sim P(2,5)$$

(3)

$$1/ P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3).$$

$$P(X=x) = e^{-2,5} \cdot \frac{(2,5)^x}{x!} \quad \text{for } x \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= e^{-2,5} + e^{-2,5} \cdot 2,5 + e^{-2,5} \cdot \frac{2,5^2}{2} + e^{-2,5} \cdot \frac{(2,5)^3}{6} \\ &= e^{-2,5} (1 + 2,5 + 3,125 + 2,60) \\ &= e^{-2,5} \times 9,225 = \end{aligned}$$

$$2/ P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) =$$