Exercices du cours :

1/ $\begin{cases} 4\,\partial_t u(t,x) - 3\,\partial_x u(t,x) = 0 \quad (1) \\ u(0,x) = x^3 \quad (2). \end{cases}$ $\quad \boxed{a=4\ ;\ b=-3}$

On pose : $\begin{cases} t' = -3t - 4x \\ x' = 4t - 3x. \end{cases}$

et $v(t',x') = u(t,x)$.

Si u est solt de (1), alors v est solt de

$$\underbrace{(4^2+(-3)^2)}_{\neq 0}(\partial_2 v)(t',x') = 0 \quad \text{(Cours)}.$$

donc : $v(t',x') = f(t')$

c-à-d : $u(t,x) = f(-3t-4x)$, avec f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2) $\Rightarrow u(0,x) = f(-4x) = x^3$

on pose : $X = -4x \Leftrightarrow x = -\frac{X}{4}$.

donc : $f(X) = -\left(\frac{X}{4}\right)^3 = -\frac{X^3}{64}$.

d'où $u(t,x) = \frac{(-3t-4x)^3}{64} = \frac{-(3t+4x)^3}{64}$, $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$

1)
$$\begin{cases} 2\partial_t u(t,x) + 3\partial_x u(t,x) = 0 \ (1) \\ u(0,x) = \sin(x) \ (2) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} a = 2 \\ b = 3 \end{matrix}}$$

On pose $\begin{cases} t' = 3t - 2x \\ x' = 2t + 3x \end{cases}$ et $v(t',x') = u(t,x)$.

Si u est solt de (1), alors v est solt de

$$\underbrace{(2^2 + 3^2)}_{\neq 0} (\partial_2 v)(t',x') = 0 \quad \text{(cours)}.$$

donc : $v(t',x') = f(t')$

c.à.d : $u(t,x) = f(3t-2x)$, avec f est de classe $\mathcal{C}^1$.

(2) $\Rightarrow u(0,x) = f(-2x) = \sin x$

On pose : $X = -2x \Leftrightarrow x = -\frac{X}{2}$.

donc : $f(X) = \sin\left(-\frac{X}{2}\right)$

d'où $u(t,x) = \sin\left(-\frac{(3t-2x)}{2}\right) = \sin\left(\frac{2x-3t}{2}\right)$, $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2$.

2/
$$\begin{cases} 3\partial_t u(t,x) + 5\partial_x u(t,x) = 0 \\ u(t,0) = t^2. \end{cases}$$

$a = 3$
$b = 5$

On pose : $\begin{cases} t' = 5t - 3x \\ x' = 3t + 5x \end{cases}$ et $v(t',x') = u(t,x)$

Si u est solt de (1) alors v est solt de $(3^2+5^2)\partial_2 v(t',x') = 0$

donc $v(t',x') = f(t')$ avec f est de classe $\mathcal{C}^1$.

c.à.d : $u(t,x) = f(5t-3x)$

(2) $\Rightarrow u(t,0) = f(5t) = t^2$

On pose $T = 5t \Rightarrow t = \frac{T}{5}$.

donc $f(T) = \left(\frac{T}{5}\right)^2 = \frac{T^2}{25}$

d'où $u(t,x) = \frac{(5t-3x)^2}{25}$

Ex n°05 :

1/ La fction $t \longmapsto (2+2t, t^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (polynôme), donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition. On applique ensuite la formule de dérivées d'une fction composée. Si on note $u(t) = 2+2t$ et $v(t) = t^2$ alors :

$$g'(t) = u'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$$

$$= 2 \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + 2t \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$$

2/ La fction $(u,v) \longmapsto (uv, u^2+v^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (polynôme), donc h est de classe $\mathcal{C}^1$. Notons $r(u,v) = uv$ et $q(u,v) = u^2+v^2$.

La formule de dérivée d'une fction composée donne :

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial x}(r(u,v), q(u,v)) + \frac{\partial q}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(r(u,v), q(u,$$

$$= v \frac{\partial f}{\partial x}(r(u,v), q(u,v)) + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(r(u,v), q(u,v))$$

$$= v \frac{\partial f}{\partial x}(u \times v, u^2+v^2) + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2+v^2).$$

et de même, on a :

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = u \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2+v^2) + 2v \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2+$$

Ex N°06 : $f(x,y) = 3x^2y - 4xy$.

1/ $(x_0,y_0) = (1,2)$; $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

$$\partial_v f(x_0,y_0) = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_1'(x_0)$ avec $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f_1(x) = f(x,y_0)$

$= 3x^2y_0 - 4xy_0$.

$= 6x_0y_0 - 4y_0$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f_2'(y_0)$ avec $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \mapsto f_2(y) = f(x_0,y) = 3x_0^2y - 4x_0y$

$= 3x_0^2 - 4x_0$.

donc : $\partial_v f(x_0,y_0) = \frac{\sqrt{3}}{2} \; 6 \times 1 \times 2 - 4 \times 2 \; \cancel{= 6\sqrt{3} - 8} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (3 - 4)$

$= 6\sqrt{3} - 8 + \frac{1}{2}$

$= \frac{6\sqrt{3} - 15}{2}$