Département Génie Électrique Automatique
Recherche Opérationnelle et Optimisation Numérique

# Travaux Pratiques N°3

**Objectifs de la manipulation :** Résolution des programmes linéaires en utilisant les fonctions prédéfinies sous Matlab : "linprog" et "fmincon".

**Travail demandé :** L'étudiant est amené à :

- savoir le type de PL et les variables d'entrée demandés par chaque fonction ;
- savoir utiliser chaque fonction pour résoudre des PL ;
- déterminer la solution optimale, si elle existe, et interpréter les résultats obtenus.

## Problème I

Une entreprise veut maximiser son gain net par jour. Elle fabrique 3 types de produits $P_1$, $P_2$ et $P_3$. Le premier produit est vendu à 15 DT l'unité, le deuxième est vendu à 20DT l'unité et le troisième coûte 5DT l'unité. L'entreprise fabrique $P_3$ pour l'utiliser comme étant matière première (MP1) pour la fabrication de $P_1$ et $P_2$. La quantité minimale de $P_3$ qu'elle doit produire est de 100 unités/jour. $P_1$ et $P_2$ utilisent respectivement 1 unité et 3 unités de $P_3$. La quantité totale utilisée par jour de $P_3$ doit être comprise entre 50% et 100% de la quantité produite en rajoutant entre 5 et 10 pièces du reserve de stock. Ces derniers sont toujours dans le stock pour assurer la continuité de production et ne sont pas comptées avec la quantité produite/jour. Une autre matière première (MP2) est utilisée pour la fabrication de trois produits. $P_1$, $P_2$ et $P_3$ utilisent chacun 1 unité de MP2. La quantité qui sera utilisée ne doit pas dépasser 200 pièces/jour.

1. Identifier les variables de décision du problème.
2. Formuler le programme linéaire associé à ce problème.
3. Déterminer la solution optimale.

## Problème II

Un atelier peut fabriquer trois types d'articles :
- l'article A à la cadence de 35 objets à l'heure
- l'article B à la cadence de 45 objets à l'heure
- l'article C à la cadence de 20 objets à l'heure

Cette fabrication utilise une machine-outil unique, disponible 200 heures par mois. Le bénéfice unitaire pour l'article A est de 10 DT par objet, pour B de 6 DT, pour C de 12 DT.

Ces objets sont vendus en totalité à des grossistes. On a observé que l'on ne pouvait pas écouler par mois plus de 4900 objets de type A, ni plus de 5400 objets de type B, ni plus de 2000 objets de type C.

D'autre part, chaque objet doit être vérifié avant sa commercialisation : une équipe de trois techniciens est chargée de cette mission. Chaque technicien travaille 170 heures par mois. La vérification d'un objet du type A prend quatre minutes, du type B trois minutes et du type C deux minutes.

L'atelier veut organiser sa production de telle manière que son bénéfice soit maximum.

1. Identifier les variables de décision du problème.
2. Formuler le programme linéaire associé à ce problème.
3. Déterminer la solution optimale.

# DC Recherche Opérationnelle & Optimisation

Enseignante : M. CHETOUI
Niveau : GEA2
Durée : 1h30
A.U : 2020-2021 *Documents non autorisés*

## Exercice

On considère le programme linéaire suivant :

$$\min \quad z = -25x_1 - 15x_2$$
$$sc \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_2 \geq 5 \\ x_1 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Tracer la zone admissible sur le plan $(o, x_1, x_2)$ et la droite de l'objectif.
2. Déterminer la solution optimale graphiquement, si elle existe. Déduire la valeur de l'objectif optimal.
3. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant l'algorithme de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.

## Problème

Dans une société de production de briques on veut maximiser le gain par jour.

Deux types de brique sont produits : type 1 (brique 8) et type 2 (brique 12). La phase la plus longue en terme de durée dans le cycle de fabrication est celle de cuisson dans le four. Elle se décompose en deux étapes : étape de cuisson et étape de refroidissement. Les deux types de briques se cuisent dans des chariots de taille moyenne (pour le brique 8) et de taille grande (pour le brique 12). Chaque type de chariots a une capacité de 100 briques chacun.

La durée du cycle de cuisson et 100 min pour un chariot de brique 8 et la moitié de temps pour un chariot de brique 12. Également, elle veut que les heures de cuisson de briques ne dépasse pas 8 heures par jour.

La société veut que la quantité de briques fabriquée soit minimum 200 et ne doit pas dépasser 1200 briques par jour. La quantité de brique 8 produite doit être au moins le double de la quantité de brique 12 produite.

Le gain pour une unité de brique 8 est de 1 DT et pour une unité de brique 12 est de 2 DT.

1. Donner les variables de décision de ce problème.
2. Formuler le programme linéaire associé à ce problème.
3. Tracer la zone admissible sur le plan $(o, x_1, x_2)$ et la droite de l'objectif.
4. Déterminer la solution optimale graphiquement, si elle existe. Déduire la valeur de l'objectif optimal.

La société veut limiter le cuisson du briques 8 à 300 unités par jour.

5. En rajoutant cette dernière contrainte, quelle est la nouvelle solution optimale et l'objectif optimal ?
6. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant l'algorithme de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.

# DC Recherche Opérationnelle & Optimisation

Enseignante : M. CHETOUI
Niveau : GEA2
Durée : 1h30
A.U : 2021-2022 *Documents non autorisés*

## Exercice 1

On considère le programme linéaire suivant :

$$\min \quad z = x_1 - x_2$$
$$sc \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 1 \leq x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Tracer la zone admissible sur le plan $(o, x_1, x_2)$ et la droite de l'objectif.
2. Déterminer la solution optimale graphiquement, si elle existe. Déduire la valeur de l'objectif optimal.
3. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant l'algorithme de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.
4. Si la deuxième contrainte devient $x_1 + 3x_2 \geq 6$, le problème aura toujours la même zone admissible et la même solution optimale ? Justifier votre réponse graphiquement.

## Exercice 2

Une entreprise veut maximiser son gain net par jour. Elle fabrique 3 types de produits $P_1$, $P_2$ et $P_3$. Le premier produit est vendu à 15 DT l'unité, le deuxième est vendu à 20DT l'unité et le troisième coûte 5DT l'unité. L'entreprise fabrique $P_3$ pour l'utiliser comme étant matière première (MP1) pour la fabrication de $P_1$ et $P_2$. La quantité minimale de $P_3$ qu'elle doit produire est de 100 unités/jour. $P_1$ et $P_2$ utilisent respectivement 1 unité et 3 unités de $P_3$. La quantité totale utilisée par jour de $P_3$ doit être comprise entre 50% et

100% de la quantité produite en rajoutant entre 5 et 10 pièces du reserve de stock. Ces derniers sont toujours dans le stock pour assurer la continuité de production et ne sont pas comptées avec la quantité produite/jour. Une autre matière première (MP2) est utilisée pour la fabrication de trois produits. $P_1$, $P_2$ et $P_3$ utilisent chacun 1 unité de MP2. La quantité qui sera utilisée ne doit pas dépasser 200 pièces/jour.

1. Identifier les variables de décision du problème.
2. Formuler le programme linéaire associé à ce problème.
3. Trouver la solution optimale du problème, si elle existe.

# Examen Recherche Opérationnelle & Optimisation

Enseignante : M. CHETOUI
Niveau : GEA2
Durée : 2h
A.U : 2020-2021

*Documents non autorisés*

## Exercice 1

On considère le programme linéaire suivant :

$$\min \quad z = x_1 + x_2$$
$$sc \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 2 \\ 6x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Tracer la zone admissible sur le plan $(o, x_1, x_2)$ et la droite de l'objectif.
2. Déterminer la solution optimale graphiquement, si elle existe. Déduire la valeur de l'objectif optimal.

## Exercice 2

On considère le programme linéaire suivant :

$$\max \quad z = 10x_1 + 9x_2$$
$$sc \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 \leq 30 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 50 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Tracer la zone admissible sur le plan $(o, x_1, x_2)$ et la droite de l'objectif.
2. Déterminer la solution optimale graphiquement, si elle existe. Déduire la valeur de l'objectif optimal.

3. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant l'algorithme de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.

## Exercice 3

Une société pétrolière veut distribuer 2 types de carburants vers 2 stations en utilisant 2 camions (camion i pour distribuer le carburant de type i (i=1,2)). Le premier camion a une capacité de 80KL et le deuxième une capacité de 70KL. La première station nécessite au moins 50 KL/semaine et un parcours de 100KM/semaine et la deuxième station nécessite au moins 20KL/semaine et un parcours de 250KM/semaine. Chaque station nécessite une quantité de carburant de type 2 double par rapport à la quantité de carburant de type 1 distribuée par chaque camion.

Les coûts en DT de distribution dépendent essentiellement de la distance parcourue. Ils sont résumés dans le tableau suivant :
La société veut maximiser son gain/semaine.

| Coût/KL | Station 1 | Station 2 |
|---|---|---|
| Carburant 1 | 5 | 25 |
| Carburant 2 | 10 | 50 |

1. Donner les variables de décision de ce problème (préciser les unités des variables).
2. Formuler le programme linéaire associé à ce problème.
3. Représenter le programme formulé sous la forme standard puis sous la forme canonique.
4. Résoudre le programme linéaire en utilisant l'algorithme de simplexe.

Examen Recherche Opérationnelle

Proposé par : M. CHETOUI

| Niveau : GEA2 | Durée : 2h |
|---|---|
| Documents non autorisés | Calculatrices autorisées |
| Session : Principale | Date : 04 Janvier 2022 |

# Exercice 1

Une entreprise d'électronique est engagée à la fabrication de deux composantes $C_1$ et $C_2$ qui sont utilisées pour les postes de radio. La fabrication de l'unité de composante $C_1$ coûte 10DT et celle de $C_2$ coûte 40DT (coût de main d'oeuvre et matériel).

L'entreprise vend les deux produits à crédit sur une période donnée, mais les frais de main d'œuvre et de matériel doivent être payés en comptant. Le prix de vente de $C_1$ est de 30DT l'unité et celui de $C_2$ est de 70DT l'unité. $C_1, C_2 \geq 0$

La capacité de production est limitée par deux contraintes :

- Contrainte 1 : l'entreprise dispose d'un budget initial total 4000DT.
- Contrainte 2 : l'entreprise dispose de 2000 heures de temps de travail de machines et de 1400 heures de temps de montage de composantes. L'unite de composante $C_1$ nécessite 3 heures de temps de machine et 2 heures de temps de montage tandis que la composante $C_2$ nécessite 2 heures de temps de machine et 3 heures de temps de montage.

L'entreprise veut maximiser son bénéfice net total.

1. Compléter le tableau suivant qui résume les données du problème.

| Ressources | Composante $C_1$ | Composante $C_2$ | Total |
|---|---|---|---|
| Budget | 10 | 40 | 4000 |
| Machine | 3 | 2 | 2000 |
| Montage | 2 | 3 | 1400 |
| Prix de vente | 30 | 70 | X |

2. Identifier les variables de décision du problème.
3. Formuler le programme linéaire associé à ce problème.
4. Tracer la zone admissible sur le plan $(o, x_1, x_2)$ et la droite de l'objectif.
5. Déterminer la solution optimale graphiquement, si elle existe. Déduire la valeur de l'objectif optimal.



$10C_1 + 40C_2 \leqslant 4000$

$3C_1 + 2C_2 \leqslant 2000$ $\quad$ $\max Z = (30-10)C_1 + (70-40)C_2 = 20C_1 + 30C_2$

$2C_1 + 3C_2 \leqslant 1400$

6. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant l'algorithme de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.

## Exercice 2

On considère le programme linéaire suivant :

$$\max \quad z = 5x_1 + 10x_2$$
$$sc \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

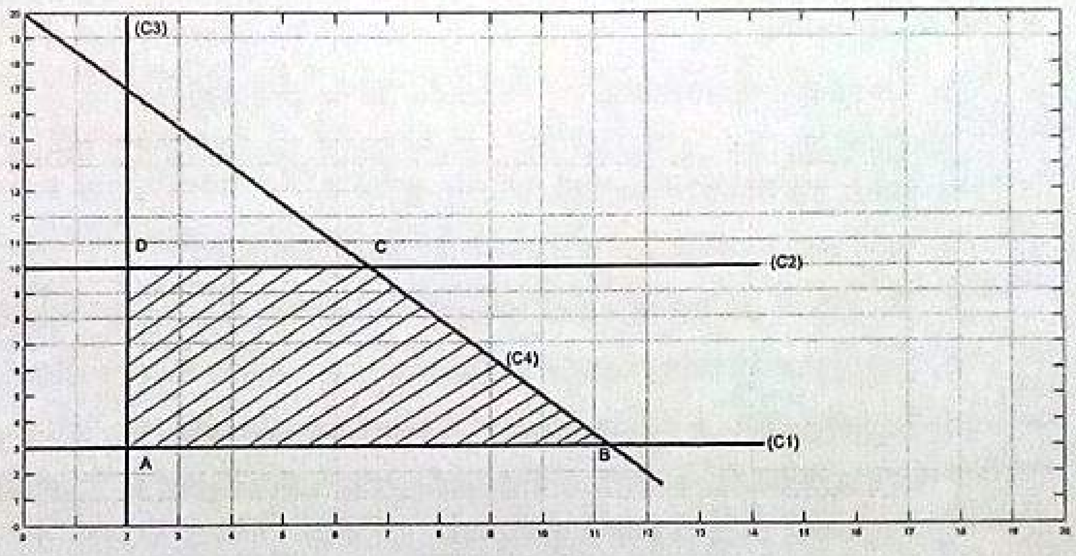
1. Tracer la zone admissible sur le plan $(o, x_1, x_2)$ et la droite de l'objectif.
2. Déterminer la solution optimale graphiquement, si elle existe. Déduire la valeur de l'objectif optimal.
3. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant l'algorithme de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.
4. S'il s'agit d'un problème de minimisation au lieu de maximisation de l'objectif, quels seront la solution optimale et l'objectif optimal ? Justifier votre réponse graphiquement.

# DC Recherche Opérationnelle & Optimisation

Enseignante : M. CHETOUI
Niveau : GEA2
Durée : 1h30
A.U : 2022-2023 *Documents non autorisés*

## Exercice 1

On vous donne sur la figure suivante la zone admissible d'un programme linéaire telle que sa fonction objectif est la suivante : $max\, z = x_1 + x_2$




1. Donner les équations des contraintes linéaires.
2. Tracer la droite de l'objectif.
3. Déterminer, graphiquement, la solution optimale ainsi que la valeur de l'objectif optimal.

## Exercice 2

Une entreprise stocke deux produits $P_1$ et $P2$ dans trois entrepôts distincts $E_1$, $E_2$ et $E_3$. Les deux produits nécessitent des traitements spécifiques dans les trois entrepôts avant qu'ils soient vendus. Le produit $P_1$ nécessite 3 jours dans l'entrepôt $E_1$, 1 jour dans l'entrepôt $E_2$ et 12 heures dans l'entrepôt $E_3$. Le produit $P_2$ nécessite un stockage de 2 jours dans chaque entrepôt. L'entrepôt $E_1$ fonctionne au maximum 360 jours/année, l'entrepôt $E_2$ fonctionne au maximum 160 jours/année et l'entrepôt $E_3$ ne peut pas fonctionner plus que 120 jours/année.

Les coûts de fabrication de produits $P_1$ et $P_2$ sont, respectivement, 600DT/tonne et 400DT/tonne. Le coût de fonctionnement de l'entrepôt $E_1$ est de 200DT/jour, celui de $E_2$ est de 400DT/jour et celui de $E_3$ est de 300Dt/jour.

Selon la demande de clients, l'entreprise a limité la production de $P_1$ à 120 tonnes au maximum et la production de $P_2$ à 50 tonnes au maximum.

L'entreprise veut maximiser son bénéfice annuel de la production de deux produits $P_1$ et $P_2$ sachant qu'elle vend $P_1$ à 1990DT/tonne et $P_2$ à 2680DT/tonne.

1. Donner les variables de décision de ce problème.
2. Calculer les coûts de fonctionnement annuel d'un tonne de $P_1$ et $P_2$ dans les 3 entrepôts $E_1$, $E_2$ et $E_3$.
3. Déduire le bénéfice d'un tonne de $P_1$ et de $P_2$.
4. Proposer un graphe qui récapitule les données du problème.
5. Formuler le programme linéaire qui modélise ce problème.
6. Représenter le domaine de solutions réalisables.
7. Déterminer la solution optimale graphiquement, si elle existe. Déduire la valeur de l'objectif optimal.
8. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant l'algorithme de simplexe. Préciser, à chaque itération, la solution de base courante et justifier le choix des variables entrantes et sortantes.

## Partie II

**Problème N°1** Un atelier fabrique deux types de produits :

- Le produit P1 à la cadence de 20 articles à l'heure.
- Le produit P2 à la cadence de 40 articles à l'heure.

La fabrication de P1 et P2 se fait sur la même machine d'assemblage de pièces. Elle est disponible 200 heures par mois.

Une étape de vérification et de mise en place des articles est primordiale. Un article de P1 nécessite 4 minutes de vérification et un article de P2 nécessite 6 minutes. Les chargés de cette étape travaillent 100 heures par mois.

Le nombre total des articles fabriqués par mois doit être au minimum 400 et au maximum 800 articles. L'atelier est engagé à fabriquer au moins 300 articles de produit P1 et au moins 100 articles de produit P2.

Le bénéfice d'un article de P1 est de 20 dinars et celui d'un article de P2 est de 15 dinars. L'atelier veut maximiser son profit par mois.

1. Donner les variables de décision de ce problème.
2. Formuler le programme linéaire associé à ce problème.
3. Déterminer la zone admissible sur le plan $(o, x_1, x_2)$.
4. Déterminer la solution optimale graphiquement, si elle existe. Déduire la valeur de l'objectif optimal.

**Problème N°2** Une usine fabrique 2 produits P1 et P2 en utilisant un certain nombre de ressources : post opératoire (machine), main-d'oeuvre et emballage. Ces besoins sont indiqués dans le tableau ci-dessous. Par ailleurs, chaque ressource est disponible en quantités limitées.

| | P1 | P2 | Ressources |
|---|---|---|---|
| Heure/Machine | 3 | 9 | 81 |
| Main d'œuvre | 4 | 5 | 55 |
| Emballage | 2 | 1 | 20 |

Les deux produits P1 et P2 rapportent à la vente respectivement des bénéfices de 600 DT et 400 DT par unité. Quelles quantités de produits P1 et P2, doit produire l'usine afin de maximiser le bénéfice total venant de la vente de 2 produits ?

1. Formuler le programme linéaire décrivant ce problème.
2. Résoudre le problème linéaire graphiquement.