Exponentielle d'une matrice.

Pour toute solution de l'équaton $x'(t) = Ax(t)$ on a $\frac{d^k x(t)}{dt^k} = A^k x(t)$.
La série de Taylot de $x(t)$, $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} x^{(n)}(0)$ s'écrit donc
$\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$, où $v = x(0)$.

2.1. Proposition. Soit $A \in M_n(C)$ et $v \in C^n$. La série $\sum_0^\infty \frac{t}{n!} A^n v$ converge normalement sur tout intevalle fini de R. La somme de cette série $\varphi(t) = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$ est dérivable par rapport à t et $\frac{d}{dt}\varphi(t) = A\varphi(t)$.

En particulier, pour toute matrice A la série $\sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$ converge (absolument).

Définition. La somme de la série

$$e^A = \sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$$

s'appelle l'exponentielle de A.

2.2. Corollaire. La série (à coefficients matriciels) $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n$ converge normalement sur tout intervalle fini. Sa somme e^{tA} est dérivable par rapport à t et $\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}$.

2.3. Corollaire: existence. Pour $v \in K^n$, $\varphi(t) = e^{tA}v$ est une solution de l'équation $x' = Ax$ vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = v$.

Unicité de la solution. Soit $\varphi(t)$ une solution quelconque vérifiant $\varphi(0) = v$. Posons $\psi(t) = e^{-tA}\varphi(t)$. La dérivation donne $\psi'(t) = 0$, d'où $\psi(t) = v$. Si on prend $e^{tA}v$ comme $\varphi(t)$ on a $e^{-tA}e^{tA}v = v$ ce qui est valable quelque soit v.

Donc $e^{-tA}e^{tA} = Id$, e^{-tA} est l 'inverse de e^{tA}. Finalement,
$\psi(t) = e^{-tA}\varphi(t) = v$ entraine $\varphi(t) = e^{tA}v$.

2.4. Corollaire. e^{tA} est l'unique fonction matricielle $U(t)$ vérifiant l'équation $\frac{d}{dt}U(t) = AU(t)$ et la condition initiale $U(0) = Id$.

Cas diagonalisable: si $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $e^A = diag(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$.

Changement de base: $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$.

2.5. Lemme. a) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ les valeurs propres de A. Alors $(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$ sont les valeurs propres de e^A.

b) $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.

(La démonstration est fait par la trigonalisation.)

.

2.6. Lemme. Si $AB + BA$, on a $e^{A+B} = e^A e^B$.

.

[En pârticulier, e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.]

.

Démonstration. On note que $AB = BA$ entraine $e^{tA}B = e^{tA}B$. Soit $U(t) = e^{tA}e^{tB}$. Alors

$U'(t) = Ae^{tA}e^{tB} + e^{tA}Be^{tB} = (A+B)e^{tA}e^{tB} = (A+B)U(t)$.

En plus $U(0) = Id$. L'unicité entraine que $U(t) = e^{t(A+B)}$. Ensuite on pose $t = 0$.

.

Noter que $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$: la famille $\{e^{tA}\}$ est un "groupe à un paramètre". En particulier, e^{tA} est inversible et $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

.

2.7. Cas général. Soit $A = \mathcal{D} + \mathcal{N}$ la décomposition de Dunford et $\mathcal{N}^{l+1} = 0$. Alors

$$e^{tA} = e^{t\mathcal{D}+t\mathcal{N}} = e^{t\mathcal{D}}(I + t\mathcal{N} + t^2\mathcal{N}^2/2! + ... + t^l\mathcal{N}^l/l!)$$

Utilisation des projecteurs spectraux. Rappeleons que $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Pi_i$, où Π_i est le projecteur spectral sur le sous-espace caractéristique associé à λ_i, et $\mathcal{N} = A - \mathcal{D}$. Alors

$$e^{t\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t}\Pi_i$$

On en déduit la structure des éléments de e^{tA} en tant que fonctions de t.

.

Remarque. Les colonnes de e^{tA} sont les solutions du système $x' = Ax$ vérifiant les conditions initiales particulières: sa j-ème colonne ψ_j vérifie $\psi_j(0) = e_j$, le j-ème vecteur canonique.

En fait, e^{tA} contient autant d'information que n'importe quelle base des solutions:

2.8. Lemme. (i) Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ une famille des solutions de l'équation $x' = Ax$. Soit $\Phi(t)$ la matrice dont les colonnes sont $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$. Alors $\Phi(t) = e^{tA}\Phi(0)$.

(ii) Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ une base des solutions de l'équation $x' = Ax$. Soit $\Phi(t)$ la matrice dont les colonnes sont $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$. Alors $e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$. [On appelle $\Phi(t)$ une solution (ou une matrice) fondamentale.]

Exemple en dimension 2.

Soit le polynôme caractéristique $p_A(z) = z^2 + az + b$.

Cas 1: racines simples $\lambda \neq \mu$. Alors
$\Pi_\lambda = \frac{1}{\lambda-\mu}(A - \mu I)$ et $\Pi_\mu = \frac{1}{\mu-\lambda}(A - \lambda I)$. Ensuite
$e^A = e^\lambda \Pi_\lambda + e^\mu \Pi_\mu = \frac{1}{\lambda-\mu}[(e^\lambda - e^\mu)A - (\mu e^\lambda - \lambda e^\mu)I$.

Cas particulier: $a = 0$, alors $\mu = -\lambda$ et on a
$e^A = \frac{1}{2\lambda}(e^\lambda - e^{-\lambda})A + \frac{1}{2}(e^\lambda + e^{-\lambda})I$.

Oscillations harmoniques: si $a = 0$ et en plus $b > 0$, alors λ est imaginaire, $\lambda = i\omega$, et $e^A = \frac{1}{\omega}\sin\omega A + \cos\omega I$. De même,
$e^{tA} = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)A + \cos(\omega t)I$.

Cas 2: racine double λ. Alors $A = \lambda I + N$ où N est nilpotente: $N^2 = 0$. On a $e^A = e^\lambda(I + N)$.

Proposition: l'exponentielle et la méthode d'Euler.

Pour toute matrice A on a $e^A = \lim_{n\to\infty}(I + A/n)^n$.

Equation non homogène: méthode de la variation des constantes.

On considère l'équation non-homogène:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = A\mathbf{x}(t) + b(t)$$

2.9. *"Principe de superposition":* **a)** Soit $x' = Ax + b_1$ et $y' = Ay + b_2$. Alors $z(t) = x(t) + y(t)$ vérifie $z' = Az + (b_1 + b_2)$.

b) *Toute solution de l'equation non-homogène $x' = Ax + b(t)$ est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène $y' = Ay$.*

On cherche la solution $x(t)$ sous la forme $x(t) = e^{tA}y(t)$. On obtient pour $y(t)$ l'équation $y'(t) = e^{-tA}b(t)$, d'où la solution $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-sA}b(s)ds$. On remarque que $y(t_0) = e^{-t_0A}x(t_0)$.

2.10. Formule de Duhamel:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds$$

Dans cette formule $x(t)$ est la somme de deux termes: $u(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)ds$ est la solution particulière de l'équation $x' = Ax + b(t)$ vérifiant la condition initiale $u(t_0) = 0$ et $v(t) = e^{(t-t_0)A}x(0)$ est la solution de l'équation homogène vérifiant la condition initiale $v(t_0) = x(t_0)$.

2.11. Corollaire: existence et unicité. Soit $b : I \to K^n$ une fonction continue définie sur un intervalle I. Pour tout $x_0 \in K^n$ et $t_0 \in I$ il existe une solution unique $x(t)$ de l'équation $\frac{dx}{dt}(t) = A\mathbf{x}(t) + b(t)$ définie sur I à valeurs dans K^n vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Equation scalaire d'ordre n.

$$\frac{d^n}{dt^n}x + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x + ... + a_1\frac{d}{dt}x + a_0x = 0(*)$$

A l'équation (*) on peut associer un système différentiel équivalent d'ordre 1 en introduisant de nouvelles inconnues: $x_0 = x$, $x_1 = x'$, $x_{n-1} = x^{(n-1)}$.
Le système s'écrit $x_0' = x_1, ..., x_{n-2}' = x_{n-1}, x_{n-1}' = -(a_0x_0 + ... + a_{n-1}x_{n-1})$.
En notation vectorielle cela donne $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ où $\mathbf{x} = (x_0, ..., x_{n-1}) = (x, x', x'', ..., x^{(n-1)})$ et $A = (a_{ij})$ est la matrice "compagnon":
$a_{i,i+1} = 1$, $a_{n,j} = -a_{j-1}$ et les autres éléments de A sont nuls.

On sait que le polynôme caractéristique de A est
$p_A(z) = (-1)^n(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0)$,
et on sait que le polynôme minimal est égal (au signe près) au polynôme caractéristique; soit $p_A(z) = (-1)^n(z-\lambda_1)^{m_1}...(z-\lambda_k)^{m_k}$.

Donc pour chaque valeur propre λ_i l'indice de nilpotence dans le sous-espace caractéristique associé est égal à m_i. (Noter que les espaces propres sont tous de dimension 1.) On en déduit:

2.12. Proposition. Soit $p_A(z) = (-1)^n(z-\lambda_1)^{m_1}...(z-\lambda_k)^{m_k}$. Les fonctions $t^{p_j}e^{\lambda_j t}$, où $j = 1, ..., k$ et $0 \le p_j < m_j$ forment une base (complèxe) des solutions de l'équation (*).

Toute solution s'écrit donc comme $\sum_{j=1}^{k} q_j(t)e^{\lambda_j t}$, où $q_j(t)$ sont des polynôm deg$(q_j) < m_j$.

Remarque. A chaque racine λ de l'équation $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$ est associée une solution exponentielle $x(t) = e^{\lambda t}$. Réciproquement, on obtient l'équation caractéristique $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$ en exigeant que la fonction $x(t) = e^{\lambda t}$ vérifie l'équation différentielle.

Si les coefficients $a_0, ..., a_{n-1}$ sont réels, une base des solutions reélles est donnée par les fonctions $t^{p_j}e^{\lambda_j t}$ (pour les λ_j réelles) et $t^{p_j}e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t)$ et $t^{p_j}e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t))$ (pour les λ_j complèxes, où $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$) et $0 \leq p_j < m_j$.

En vu de ce résultat, on n'a pas besoin de passer par la matrice, mais on peut traiter l'équation (*) directement:

2.13. Lemme. λ est une racine du polynôme caractéristique $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ de multiplicité m si et seulement si les "monômes" $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$,..., $t^{m-1}e^{\lambda t}$ vérifient l'équation différentielle (*).

•• *Démonstration.* Faisons dans l'équation (*) la substitution suivante : $x(t) = u(t)e^{\lambda t}$. On a $\frac{d}{dt}(ue^{\lambda t}) = (\frac{d}{dt}u + \lambda u)e^{\lambda t} = (\frac{d}{dt} + \lambda)ue^{\lambda t}$.

Donc l'équation (*) devient

$(\frac{d}{dt} + \lambda)^n u + a_{n-1}(\frac{d}{dt} + \lambda)^{n-1}u + ... + a_1(\frac{d}{dt} + \lambda)u + a_0 u = 0$ (**)

ou, si on développe,

$u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + ... + b_0 u = 0.$

Pour le polynôme caractéristique $\tilde{p}(z) = z^n + b_{n-1}z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$ de (**) on a $\tilde{p}(z) = p(z + \lambda)$ (facile à vérifier). Donc λ est une racine de $p(z)$ de multiplicité m si et seulement si 0 est une racine de $\tilde{p}(z)$ de multiplicité m, ce qui veut dire que $b_0 = 0$, ... $b_{m-1} = 0$.

L'équation (**) devient $u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + ... + b_m u^{(m)} = 0$ et admet donc des solutions $1, t, ..., t^{m-1}$. Reciproquement, si (**) admet des solutions $1, t, ..., t^{m-1}$, alors $b_0 = 0$, ... $b_{m-1} = 0$ et 0 est une racine de $\tilde{p}(z)$ de multiplicité m. ••

Démarche à suivre: pour résoudre l'équation scalaire (*) avec la condition initiale $x(0) = c_1$, $x'(0) = c_2$, ..., $x^{(n-1)}(0) = c_n$ il faut

1) résoudre l'équation caractéristique $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$ qui se déduit directement de l'équation différentielle, sans passer par la matrice;

2) écrire la solution comme une combinaison linéaire des solutions de base explicitées dans la Proposition 2.12 avec des coefficients indéterminés et calculer les coefficients afin de satisfaire les conditions initiales (cela revient à résoudre un système d'équations linéaires).