Chapitre 3

EDP linéaires du premier ordre

3.1 Quelques notions supplémentaires autour des dérivées partielles.

On a étudié dans le premier Chapitre la notion de dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables. Il s'agissait en fait de propriétés de fonctions d'une variable, et l'on doit maintenant regarder la dépendance de toutes les variables prises ensemble. Il faudrait sans doute investir un peu de temps pour explorer la notion - plus délicate - de différentielle. Ceci étant fait dans un autre cours pour certains étudiants mathématiciens et n'étant pas revus par les étudiants physiciens, nous ne détaillerons pas cette partie et nous simplement développerons quelques points utiles pour les calculs ou pour expliquer certains théorèmes.
Comme pour les fonctions d'une variable, on doit d'abord rappeler la notion de continuité.

3.1.1 Continuité

On note d la distance euclidienne entre les points de $\mathbb{R}^2$:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

On note aussi $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ la norme euclidienne du vecteur (x, y) de $\mathbb{R}^2$, de sorte que

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\|.$$

Définition 3.1.1
On dit qu'un sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si, pour tout point

(x, y) de Ω, on peut trouver un disque ouvert de rayon $r_{x,y} > 0$ contenu dans Ω.

On peut penser comme exemples de base à $\Omega =]a, b[\times]c, d[$ ou à un disque ouvert).

Définition 3.1.2
Soit Ω un ouvert et $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est continue en un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ lorsque

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \to 0 \text{ quand } d((x, y), (x_0, y_0)) \to 0$$

On dit que f est continue sur Ω lorsque f est continue en chaque point de Ω.

Exemple 3.1.3
La fonction $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4$ est continue en $(0, 0)$, et même en n'importe quel $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Il est important de noter que pour (x_0, y_0) donné, la continuité des fonctions f_1 en y_0 et de f_2 en x_0 n'entraîne pas la continuité de f en (x_0, y_0), comme le montre l'exemple suivant.

Exercice 3.1.4
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$ bien que les deux applications partielles associées le soient. Montrer que f admet même des dérivées partielles en $(0, 0)$.

3.1.2 Dérivées directionnelles

Définition 3.1.5
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application, (x_0, y_0) un point de Ω et $u = (u_1, u_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On appelle dérivée directionnelle de f en (x_0, y_0) dans la direction de u la dérivée en $s = 0$, si elle existe, de la fonction d'une variable

$$f_u : s \mapsto f((x_0, y_0) + su).$$

On la note alors $\partial_u f(x_0, y_0)$.

Remarque 3.1.6
Bien sûr, lorsque $u = (0,0)$, la direction associée à u n'est pas vraiment définie mais la définition donne que

$$\partial_{u=(0,0)} f(x_0, y_0) = 0 \ ,$$

ce qui est cohérent avec ce que nous utiliserons après.
On notera que comme Ω est ouvert, la fonction f_u est bien définie pour $|s|$ assez petit.

Exemple 3.1.7
Les dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ ne sont autres que les dérivées directionnelles de f dans les directions des deux vecteurs de la base canonique e_1 et e_2.

On donne maintenant un critère très simple d'existence de dérivée directionnelle dans toute direction.

Définition 3.1.8
Lorsque f admet des dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ continues dans Ω, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans Ω.

Proposition 3.1.9
Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Alors f admet en tout point (x, y) une dérivée directionnelle dans toute direction u, et on a :

$$(\partial_u f)(x, y) = u_1 (\partial_x f)(x, y) + u_2 (\partial_y f)(x, y) \ . \tag{3.1}$$

Sous ces hypothèses, on peut alors définir, pour $(x, y) \in \Omega$, une application linéaire $(Df)_{(x,y)}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbb{R}^2 \ni u \mapsto (Df)_{(x,y)}(u) = (\partial_u f)(x, y) \ . \tag{3.2}$$

Cete application est appelée la dérivée (ou différentielle) de f au point (x, y).

En particulier $\partial_x f(x, y) = (Df)_{(x,y)}(e_1)$ et $\partial_y f(x, y) = (Df)_{(x,y)}(e_2)$. Autrement dit la matrice 1×2 de $(Df)_{(x,y)}$ dans la base canonique est simplement

$$(Df)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) & \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} .$$

Une autre manière d'écrire est :

$$(\partial_u f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y) & \partial_y f(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} .$$

3.1.3 Applications de classe C^k

On présente maintenant l'extension au cas de dérivées d'ordre supérieure. On a déjà défini les applications de classe C^1.

Définition 3.1.10
Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert Ω. On dira que f est de classe C^2 si ces d{erivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont de classe C^1.

On notera

$$\begin{array}{ll} \partial^2_{xx} f = \partial_x(\partial_x f)\ , & \partial^2_{yx} f = \partial_y(\partial_x f) \\ \partial^2_{xy} f = \partial_x(\partial_y f)\ , & \partial^2_{yy} f = \partial_y(\partial_y f) \end{array}$$

Comme mentionné au chapitre 1, on a le théorème suivant :

Théorème 3.1.11
Si f est de classe C^2 dans Ω, alors on a :

$$\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f\ , \quad dans\ \Omega\ . \tag{3.3}$$

On note aussi les dérivées secondes

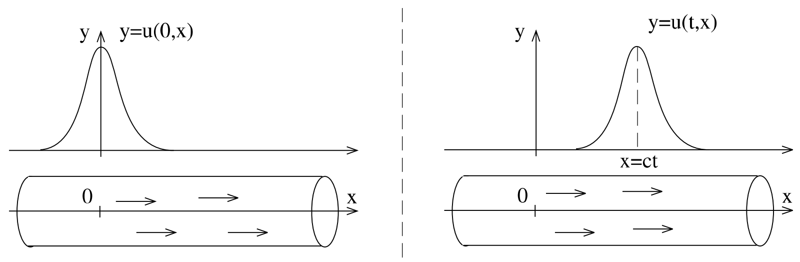
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dots$$

Rappelons que l'utilisation de ∂ est impérative quand on considère plusieurs variables.
On laisse au lecteur le soin de définir la notion d'application de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On posera

$$C^\infty(\Omega) = \cap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)\ .$$

3.2 Les équations de transport

On considère un tube horizontal cylindrique, dans lequel coule de l'eau par exemple, à la vitesse constante c (en m/s). Un polluant (du pétrole) est en suspension dans l'eau. On note $u(t,x)$ la concentration (en gr/m) de polluant à l'instant t et à l'abscisse x.



La fonction u vérifie l'EDP

$$\partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = 0. \tag{3.4}$$

En effet, à l'instant t, la quantité de polluant entre les points d'abscisse 0 et x est

$$Q(t) = \int_0^x u(t,y)dy.$$

A l'instant $t+h$, le polluant s'est deplacé de ch mètres. La quantité de polluant entre les points d'abscisse ch et $x+ch$ est donc celle qui se trouvait à l'instant t entre 0 et x. On a donc

$$Q(t) = \int_{ch}^{x+ch} u(t+h,y)dy.$$

Nous voulons dériver l'égalité obtenue par rapport à x. Pour ce faire nous effectuons le changement de variable $y' = y - ch$ dans la deuxième intégrale. Nous obtenons

$$Q(t) = \int_0^x u(t+h, y'+ch)dy',$$

et donc

$$u(x,t) = u(t+h, x+ch). \tag{3.5}$$

Nous voulons enfin dériver par rapport à h l'égalité (3.5). On utilisera très souvent le lemme suivant (dérivée d'une fonction composée).

Lemme 3.2.1
Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Soit aussi f_1 et f_2 deux applications de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = u(f_1(t), f_2(t))$$

est dérivable, sa dérivée est continue et donnée par

$$F'(t) = (Du)_{(f_1(t),f_2(t))}((f_1'(t), f_2'(t)),$$

ou encore :

$$F'(t) = f_1'(t)\,\frac{\partial u}{\partial x}(f_1(t), f_2(t)) + f_2'(t)\,\frac{\partial u}{\partial y}(f_1(t), f_2(t))\ .$$

Preuve : Elle est admise.

3.3 Equations à coefficients constants

On va résoudre les EDP de la forme (3.4), ou de manière un peu plus générale, les équations

$$a\partial_t u(t,x) + b\partial_x u(t,x) = 0, \tag{3.6}$$

où a et b sont deux constantes réelles, dont l'une au moins n'est pas nulle. Comme on l'a vu dans le premier chapitre, il est important de préciser ce que l'on entend par "résoudre". On cherche ici toutes les fonctions u définies sur $\mathbb{R}^2$ (ou sur une partie plus petite Ω, réunion de boules ouvertes) de classe $\mathcal{C}^1$ et telles que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ l'égalité (3.6) soit vérifiée. Commençons pour fixer les idées par examiner le cas de l'équation ($a = 1$ et $b = 0$)

$$\partial_t u(t,x) = 0.$$

On voit immédiatement que u est solution si et seulement si u ne dépend pas de t. Autrement dit, les solutions sont les fonctions u qui s'écrivent

$$u(t,x) = f(x)$$

pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. La première remarque qui s'impose, c'est qu'il y a beaucoup de solutions !
On fait aussi une remarque d'ordre plus géométrique :
Les solutions $(t,x) \mapsto u(t,x)$ sont exactement les fonctions qui sont constantes le long des droites horizontales du plan (Otx), c'est-à-dire le long des droites dirigées par le vecteur $(a,b) = (1,0)$. Ce phénomène a également lieu pour toutes les équations (3.6), et c'est que nous allons mettre en évidence.

3.3.1 Méthode des caractéristiques

On reprend l'équation (3.6). Supposons que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, soit solution. En terme de différentielle ou dérivée, (3.6) se traduit par

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, (Du)_{(t,x)}(a,b) = 0. \tag{3.7}$$

Autrement dit la dérivée directionnelle $\partial_{(a,b)} u(t,x)$ de u dans la direction du vecteur (a,b) est nulle en tout point (t,x) de $\mathbb{R}^2$. On a alors la proposition suivante.

Proposition 3.3.1
Si u est solution de (3.6), alors u est constante le long de chaque droite de direction (a,b).

Preuve :
Soit (t,x) un point de $\mathbb{R}^2$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

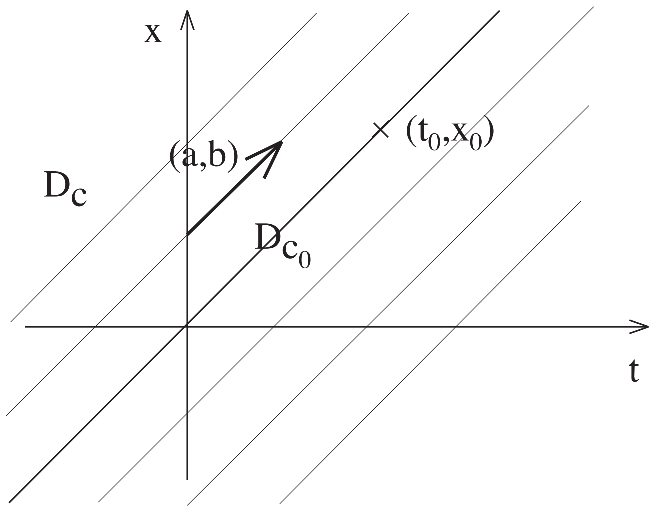
$$k \mapsto \varphi(k) = u((t,x) + k(a,b)) = u(t+ka, x+kb).$$

La fonction f donne les valeurs de u en chaque point $(t',x') = (t,x) + k(a,b)$ de la droite $\mathcal{D}$ de direction (a,b) passant par (t,x). Or, en utilisant à nouveau le Lemme 3.2.1, on a

$$\varphi'(k) = (Du)_{((t,x)+k(a,b))}(a,b) = 0.$$

Donc φ est constante, et u l'est sur la droite $\mathcal{D}$. □

Définition 3.3.2
On appelle caractéristiques de l'équation (3.6) les droites de vecteur directeur (a,b). Ce sont toutes les droites $\mathcal{D}_c$ d'équation $bt - ax = c$, où c parcourt l'ensemble des réels.



Notons maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui a un réel c associe la valeur de u sur la droite $\mathcal{D}_c$. Soit (t_0,x_0) un point de $\mathbb{R}^2$. Il existe une et une seule caractéristique qui passe par (t_0,x_0) : c'est la droite $\mathcal{D}_{c_0}$, où $c_0 = bt_0 - ax_0$. On a donc

$$u(t_0,x_0) = f(c_0) = f(bt_0 - ax_0).$$

Ce raisonnement étant valable pour tout (t_0,x_0) de $\mathbb{R}^2$, on a finalement

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, u(t,x) = f(bt - ax). \tag{3.8}$$

On remarque au passage que, puisque u est $\mathcal{C}^1$, f l'est aussi (Exercice !).

On a raisonné jusqu'ici par condition nécessaire. Il reste à prouver que toute fonction u de la forme (3.8) avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est bien solution de (3.6). C'est une vérification très simple, grâce encore une fois au Lemme 3.2.1, et qu'on laisse au lecteur. On a alors démontré le résultat suivant.

Théorème 3.3.3
Les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient l'équation (3.6) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$u(t,x) = f(bt - ax)$$

pour une certaine fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque 3.3.4
Dans le théorème ci-dessus, on peut remplacer $\mathbb{R}^2$ par un convexe ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. La fonction f est alors définie sur un intervalle qui est l'image dans $\mathbb{R}$ de Ω par l'aplication $(t,x) \mapsto bt - ax$,.

3.3.2 Méthode du changement de variables

Nous allons retrouver le résultat précédent à l'aide d'une autre méthode, qui s'avère être très pratique. Plutôt que d'une méthode totalement différente, il s'agit d'une autre formulation de la même idée. On a vu que les solutions de l'équation (3.6) ne dépendent que de la variable $bt - ax$. On pose donc $t' = bt - ax$ et on choisit une autre coordonnée x' indépendante. On prend par exemple

$$\begin{cases} t' = bt - ax \\ x' = at + bx. \end{cases}$$

On pose alors $v : (x', t') \mapsto v(t', x') = u(t,x)$, et l'on examine l'équation vérifiée par v lorsque u est solution de (3.6). On calcule d'abord les dérivées partielles de u en fonction de celles de v. Là encore l'ingrédient essentiel est le Lemme 3.2.1. On a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u(t,x) & = & \partial_t(v(bt-ax, at+bx)) \\ & = & b(\partial_1 v)(bt-ax, at+bx) + a(\partial_2 v)(bt-ax, at+bx), \\ \partial_x u(t,x) & = & \partial_x(v(bt-ax, at+bx)) \\ & = & -a(\partial_1 v)(bt-ax, at+bx) + b(\partial_2 v)(bt-ax, at+bx). \end{array} \right.$$

Donc u, de classe $\mathcal{C}^1$, est solution de l'équation (3.6) si et seulement si v vérifie l'équation

$$(a^2 + b^2)(\partial_2 v)(t', x') = 0.$$

Autrement dit, puisque $a^2 + b^2 \neq 0$, u est solution de l'équation (3.6) si et seulement si v ne dépend pas de x' : $v(t', x') = f(t')$ pour une certaine fonction f, de classe $\mathcal{C}^1$ puisque v l'est. Revenant à u, on retrouve le Théorème 3.3.3 :

$$u(t, x) = f(bt - ax).$$

Donnons une approche légèrement différente. Si on fait plus généralement le changement de variables

$$\begin{cases} t' = \alpha' t + \beta' x \\ x' = \gamma' t + b\delta' \ , \end{cases}$$

où on suppose que $\alpha'\delta' - \gamma'\beta' \neq 0$.
Alors l'équation satisfaite par v est :

$$a'\partial_{t'} v + b'\partial_{x'} v = 0 \ ,$$

avec

$$\begin{cases} a' = \alpha' a + \beta' b \\ b' = \gamma' a + \delta' b \ . \end{cases}$$

Le choix proposé précédemment consistait en choisir le changement de variables de telle sorte que $a' = 0$, soit $\alpha' a + \beta' b = 0$. La paire $\alpha' = b$, $\beta' = -a$ convient. On trouve alors $b' = a^2 + b^2$.

Application à des problèmes avec conditions initiales Cette méthode est aussi adaptée pour résoudre le problème de trouver u de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} &a\partial_t u + b\partial_x u = f(t, x) \ , \\ &u(0, x) = \varphi(x) \ , \end{aligned}$$

où $a \neq 0$, f est donnée dans C^0, φ est donné dans C^1.

3.4 Equations à coefficients variables

3.4.1 Champs de vecteurs

Considérons par exemple l'équation

$$\partial_x u(x, y) + x\partial_y u(x, y) = 0 \tag{3.9}$$

On cherche à appliquer la méthode des caractéristiques à cette équation. Lisons l'équation. La dérivée directionnelle de u dans la direction du vecteur $X = (1, x)$ doit être nulle :

$$\partial_{(1,x)} u(x, y) = 0.$$

Evidemment, la difficulté qui apparaît est que le vecteur en question dépend du point (x, y) où l'on se trouve. On doit adapter un peu la notion de caractéristique.

Définition 3.4.1
On appelle champ de vecteur une application (régulière) X de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, considéré comme sous-ensemble des points du plan, dans $\mathbb{R}^2$ considéré comme ensemble des vecteurs du plan (i.e. l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$).

Ici régulière signifie de classe C^0 ou de classe C^1.

Par exemple, l'équation (3.9) amène naturellement à considérer le champ de vecteur $X(x, y) = (1, x)$. Un autre exemple est le champ de vecteurs grad V, où V est une fonction régulière, définie sur Ω :

$$\text{grad V } (x, y) = ((\partial_x V)(x, y), (\partial_y V)(x, y)) .$$

On peut par exemple prendre $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $V(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. Le champ de vecteur est appelé central car il est parallèle, au point (x, y) au vecteur (x, y).

Définition 3.4.2
Soit X un champ de vecteurs régulier sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Une courbe intégrale de X est une courbe paramétrée $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \Omega$ telle que, pour tout $t \in I$,

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)).$$

On appelle caractéristiques de l'équation (3.9) les courbes intégrales du champ de vecteurs $X(x, y) = (1, x)$ (il y a une petite ambiguité ici car les courbes intégrales sont des courbes paramétrées !). Cette définition est motivée par la

Proposition 3.4.3
Si u est une solution de l'équation (3.9), u est constante le long des courbes intégrales $t \mapsto \gamma(t)$ du champ X :

$$\frac{d(u(\gamma))}{dt} = 0.$$

Cette proposition généralise ce que l'on a vu dans le cas des équations à coefficients constants : dans ce cas-là, le champ de vecteurs X associé à l'équation est le champ constant $X(x, y) = (a, b)$, dont les courbes intégrales sont le droites de direction (a, b). La preuve est la même, et constitue un excellent **Exercice**.

3.4.2 Un problème de Cauchy pour l'équation (3.9)

A titre d'exemple nous allons résoudre un problème de Cauchy associé à l'équation (3.9) :

$$\begin{cases} \partial_x u(x, y) + x\partial_y u(x, y) = 0, \\ u(0, y) = \phi(y), \end{cases} \tag{3.10}$$

où $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{C}^1$ donnée.
On commence en cherchant les courbes caractéristiques de l'équation. Ce sont les courbes intégrales $t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ du champ de vecteur $X(x, y) = (1, x)$. Par définition on a donc

$$\begin{cases} x'(t) = 1, \\ y'(t) = x(t), \end{cases}$$

ce qui donne $x(t) = t + x_0$ et $y(t) = \dfrac{t^2}{2} + x_0 t + y_0$, où l'on a noté (x_0, y_0) le point de γ correspondant à $t = 0$. Si l'on préfère une équation cartésienne, on voit que la courbe γ qui passe par (x_0, y_0) (il y en a une et une seule...), a pour équation

$$\gamma : y = \frac{x^2}{2} + y_0 - \frac{x_0^2}{2}.$$

On veut maintenant déterminer la valeur de la solution du problème de Cauchy (3.10) au point (x_0, y_0). On sait que u est constante le long de la courbe intégrale qui passe par le point (x_0, y_0). Cette courbe coupe l'axe des ordonnées au point $(x_1 = 0, y_1 = y_0 - \dfrac{x_0^2}{2})$, et l'on sait que

$$u(x_1, y_1) = u(0, y_1) = \phi(y_1) = \phi(y_0 - \frac{x_0^2}{2}).$$

On obtient donc, pour n'importe quel (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$,

$$u(x_0, y_0) = \phi(y_0 - \frac{x_0^2}{2}).$$

En raisonnant par condition nécessaire, on obtient donc $u(x, y) = \phi(y - \dfrac{x^2}{2})$. Il est très simple de vérifier que cette fonction est effectivement solution de

(3.10), et la méthode des caractéristiques nous a encore permis de construire l'unique solution de ce problème.

3.5 Un exemple d'équation non-linéaire : Equation de Burgers

On s'intéresse maintenant à l'EDP du premier ordre non-linéaire

$$\partial_x u(x,y) + u(x,y)\partial_y u(x,y) = 0. \tag{3.11}$$

S'agissant d'une équation du premier ordre, on va encore tenter d'utiliser la méthode des caractéristiques. Cette fois, le champ de vecteur X associé à l'équation

$$X(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ u(x,y) \end{pmatrix}$$

dépend de la solution ! Supposons que celle-ci est connue, et considérons les courbes intégrales du champ de vecteurs X. Ce sont les courbes paramétrées $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ telles que

$$x'(t) = 1, y'(t) = u(x(t), y(t)). \tag{3.12}$$

Sur une telle courbe, on a donc

$$\begin{aligned} \partial_t(u(x(t),y(t)) &= (Du)_{(x(t),y(t))}(x'(t),y'(t)) = x'(t)(\partial_x u(x(t),y(t))) + y'(t)(\partial_y u(x(t),y(t))) \\ &= \partial_x u(x(t),y(t)) + u(x(t),y(t))\partial_y u(x(t),y(t)) = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit la fonction u est constante le long des courbes intégrales du champ $X = X_u$. Reprenons alors (3.12) : notant C_γ la valeur (constante !) de u sur la courbe intégrale γ de X_u, on a

$$x'(t) = 1, y'(t) = C_\gamma.$$

Ces courbes intégrales sont donc des droites $y = mx + p$, puisque

$$x(t) = t + x_0, y(t) = C_\gamma t + y_0.$$

Considérons maintenant le problème de Cauchy pour l'équation (3.11)

$$\begin{cases} \partial_x u(x,y) + u(x,y)\partial_y u(x,y) = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{3.13}$$

où ϕ est une fonction régulière donnée. On cherche d'abord les caractéristiques. Ce sont des droites d'équation $y = mx + p$ et la pente m est égale à la valeur de u sur cette droite. La caractéristique issue du point $(x_0, 0)$ est donc la droite d'équation

$$y = \phi(x_0)(x - x_0). \tag{3.14}$$

Contrairement au cas des équations linéaires, ces caractéristiques peuvent donc se couper ! Supposons par exemple que deux d'entre elles, issues respectivement de $(x_1, 0)$ et de $(x_2, 0)$, se coupent en $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Si u est définie en ce point on doit avoir

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \phi(x_1) = \phi(x_2),$$

ce qui est absurde. On peut donc conclure que le problème (3.13) n'admet en général pas de solutions définies dans le plan tout entier, mais seulement dans un domaine $\mathcal{D}_\phi$ du plan dans lequel les droites caractéristiques (3.14) ne se coupent pas.

Etudions le problème (3.13) pour $\phi(x) = x^2$. Partant d'un point (x_0, y_0) tel que $u(x_0, y_0) \neq 0$, on obtient la courbe intégrale :

$$x(t) = x_0 + t \ , \ y(t) = y_0 + u(x_0, y_0)t \ .$$

La courbe intégrale coupe la droite $\{y = 0\}$ au temps $t = -y_0/u(x_0, y_0)$. On a donc $u(x_0, y_0) = u(x_0 - y_0/u(x_0, y_0), 0) = \phi(x_0 - y_0/u(x_0, y_0))$.
Dans notre cas particulier, on obtient l'équation

$$u(x_0, y_0) = (x_0 - y_0/u(x_0, y_0))^2 \ .$$

Si cette équation détermine un unique u, on aura résolu le problème. Dans tous les autres cas le problème sera mal posé. Notre question devient donc : Discuter en fonction de (x_0, y_0) les solutions, non nulles, de

$$f(\lambda) := \lambda^3 - (x_0\lambda - y_0)^2 \ .$$

Noter qu'on peut toujours supposer $y_0 \neq 0$, puisque u est connue sur $x = 0$. Un cas simple est celui où l'on peut montrer que $\lambda \mapsto f(\lambda)$ est strictement croissante sur $] - \infty, +\infty[$. Un critère simple est de montrer que la dérivée de f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. On a

$$f'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2x_0(x_0\lambda - y_0) \ .$$

Son discriminant est

$$\Delta(x_0, y_0) := 4(x_0^2 - 6x_0y_0) = 4x_0(x_0 - 6y_0) \ .$$

Le problème est que le discriminant est positif pour y_0 petit par rapport à x_0, situation qui n'est pas favorable ! !

Le problème est plus simple si on se donne une condition sur $\{x = 0\}$:

$$u(0, y) = y \ .$$

On trouve assez facilement que la solution est déterminée par $u(x, y) = y/(1+x)$ sur le domaine $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1\}$.

3.6 Exercices

3.6.1 EDP du premier ordre à coefficients constants

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le problème
$$\begin{cases} 4\partial_t u(t,x) - 3\partial_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = x^3 \end{cases}$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le problème
$$\begin{cases} 3\partial_t u(t,x) + 5\partial_x u(t,x) = 0 \\ u(t,0) = t^2 \end{cases}$$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le problème
$$\begin{cases} 2\partial_t u(t,x) + 3\partial_x u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = \sin(x) \end{cases}$$
4. On cherche les solutions $\mathcal{C}^2$ du problème
$$\begin{cases} \partial^2_{tt} u(t,x) - 3\partial^2_{tx} u(t,x) - 4\partial^2_{xx} u(t,x) = 0, \\ u(0,x) = x^2, \\ \partial_t u(0,x) = 0. \end{cases}$$

   a. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que
$$(\partial_t - 4\partial_x)((\partial_t + \partial_x)u)(t,x) = \partial^2_{tt} u(t,x) - 3\partial^2_{tx} u(t,x) - 4\partial^2_{xx} u(t,x).$$
   b. Trouver toutes les fonctions $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que
$$\partial_t v(t,x) - 4\partial_x v(t,x) = 0. \tag{1}$$
   c. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On veut trouver toutes les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que
$$\partial_t u(t,x) + \partial_x u(t,x) = f(4t + x). \tag{2}$$
   On pose $t' = -t + x$, $x' = 4t + x$ et l'on note $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $w(t', x') = u(t, x)$.
   c1) Quelle équation vérifie w lorsque u est solution de (2) ?
   c2) Résoudre cette équation. En déduire les solutions de (2).
   d. Conclure.

3.6.2 Courbes intégrales de champs de vecteurs

1. Déterminer les courbes intégrales du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (1, 2xy^2)$.
2. Déterminer les courbes intégrales du champ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (1 + x^2, 1)$.
3. Déterminer les courbes intégrales du champ de vecteurs de $[-1,1] \times \mathbb{R}$ défini par $X(x,y) = (\sqrt{1-x^2}, 1)$.
4. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (y, x)$.
5. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (x, y)$.
6. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (y, -y)$.
7. Etudier les courbes intégrales du champ de vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $X(x,y) = (x, 2y)$.

3.6.3 EDP du premier ordre à coefficients non-constants

1. On considère le champ de vecteurs $X(x,y) = (1, -xy)$.

   a. Déterminer et tracer ses courbes intégrales.

   b. Montrer que les solutions (de classe $\mathcal{C}^1$) de l'équation

   $$\partial_x u(x,y) - xy\partial_y u(x,y) = 0$$

   s'écrivent nécessairement $u(x,y) = f(ye^{x^2/2})$ pour une certaine fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

   c. Trouver toutes les solutions du problème de Cauchy

   $$\begin{cases} \partial_x u(x,y) - xy\partial_y u(x,y) = 0, \\ u(0,y) = y^2. \end{cases}$$

   d. Le problème de Cauchy

   $$\begin{cases} \partial_x u(x,y) - xy\partial_y u(x,y) = 0, \\ u(x,0) = x^2, \end{cases}$$

   a-t-il des solutions ?