* ROO :

* **Programme linéaire (PL) :**
  - variables de décision $x_i \geq 0 \ \forall i \in [1, N]$
  - fonction Objectif optimiser : maximiser ou minimiser : $Z = f(x_i)$
  - contraintes (système d'équation linéaire) inégalités

$\max Z = C_1 x_1 + \dots + C_n x_n$ (min) ⟹ Objectif

inégalité

$$SC \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1N} x_N \leq b_1 \\ \vdots \\ a_{N1} x_1 + \dots + a_{NN} x_N \leq b_N \end{cases}$$ ⟹ Contraintes

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ ⟹ Contraintes de positivité

- **Formes des Programme linéaire :**

* Forme canonique : – maximisation

$\max Z = CX$ – $x_i \geq 0, \forall i$

$\begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$ – contraintes : inéquations de type "$\leq$"

$\max Z = C_D X_D \ ; \ AX_D \leq b \ ; \ X_D \geq 0$

* Forme standard : – maximisation

$\max Z = CX$ – $X_i \geq 0, \forall i$

$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$ – contraintes : inéquations de type "="

$\max Z = C_D X_D + 0 \cdot X_E \ ; \ AX_D + 0X_E = b \ ; \ X_D, X_E \geq 0$

- canonique ⟶ standard : Ajout d'une variable d'écart X_E

- min ⟷ max : $\min f(x) = -\max(-f(x))$
- $(\geq) \longleftrightarrow (\leq)$: $ax \geq b \Rightarrow (-a)x \leq -b$
- $(=) \longleftrightarrow (\leq)$ ou $(\geq)$: $ax = b \Rightarrow \begin{cases} ax \leq b \\ ax \geq b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax \leq b \\ (-a)x \leq b \end{cases}$

- $(\geqslant)$ ou $(\leqslant) \longleftrightarrow (=)$: $\begin{cases} ax \leqslant b \\ ax \geqslant b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + s = b \\ ax - s = b \end{cases}$ où : $s \geqslant 0$
- variable libre $(\in \mathbb{R}) \longleftrightarrow$ positive : $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geqslant 0 \end{cases}$
- variable bornée inférieurement : $x \geqslant b \Rightarrow \begin{cases} x = x' + b \\ x' \geqslant 0 \end{cases}$

Résolution Graphique :

résolution PL $\rightarrow$ méthode graphique : limitée (2 variables de décision)

- contrainte $\rightarrow$ Tableau $\rightarrow$ droite D_i où i : nombre des contraintes

  inégalité $\rightarrow$ égalité
- intersection $\rightarrow$ Domaine admissible $\begin{cases} \text{inéquation linéaire : demi plan} \\ \text{équation linéaire : une droite} \end{cases}$
- traçage de la droite objectif D_z

  $\rightarrow$ polygonale

choix exacte du demi plan $\Rightarrow$ choisir un pt $\notin$ à la droite de contrainte et vérifie si elle $\in$ au plan qui vérifie l'inégalité de contrainte sinon on va prendre l'autre demi plan. Tester par le pt d'origine $(0,0)$

- solution optimale (كيف نرسمو فاها droite لازم متعداش م zone admissible)
- fonction objectif $z_{optimale}$ (remplacer (x_1, x_2) par les coordonnées de sol°. opt.)

Résolution algorithmique : méthode de simplexe :

- déplacement de l'origine O vers un autre pt :
  - pt adjacent à O
  - selon l'objectif $\begin{cases} \text{maximiser} \Rightarrow \text{الأبعد} \\ \text{minimiser} \Rightarrow \text{الأقرب} \end{cases}$

1ère étape : toutes les égalités se transforment en inégalités inférieures (SC) à une quantité positive (assure la convergence pour avoir une solution optimale). — forme canonique

2ème étape : transformer toute inégalité en égalité en ajoutant variables de décision à poids nuls — forme standard

- $x_1 = 0$
- $x_2 = 0$

} pt d'origine $\quad X_{\boxed{HB}} = \{x_1, x_2\}$

hors base : variables nulles avec poids non nuls

- $x_3 \neq 0$
- $x_4 \neq 0$

} $\quad X_{\boxed{B}} = \{x_3, x_4\}$

$\in$ base : variables non nulles avec poids nuls

$$Z \max Z = \boxed{}\, x_1 + \boxed{}\, x_2 + \boxed{0} \times x_3 + \boxed{0} \times x_4$$

$\underbrace{x_1, x_2}_{\in X_{HB}} \qquad \underbrace{x_3, x_4}_{\in X_B}$

Toutes les variables

B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	CQ
x_3						
x_4						
Z						$\boxed{}$

CQ → critère du quotient

Variables de Base

$\boxed{} \to -Z$ optimale (lorsque l'algorithme s'arrête)

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{\text{coef}(L_i)}{\text{pivot}} L_j$$

L_j → ligne de pivot

- **1ère étape** : Colonne de pivot : selon la valeur de Z : maximiser : أكبر ; minimiser : أصغر $\neq 0$
- **2ème étape** : Ligne de pivot : valeur de CQ أصغر لها : où $CQ = \dfrac{b}{\text{coefficient de colonne pivot}}$
- **3ème étape** : L'intersection de ligne et colonne nous donne le 1er pivot

Remarque : Pour le choix de CQ la plus petite, seuls les éléments > 0 sont considérés (on ne tient pas compte des éléments $\leqslant 0$)

- Si on cherche à maximiser Z, l'algorithme s'arrête lorsque tous les coefficients de la f^t objectif sont négatifs ou nuls.
- Si on cherche à minimiser Z, l'algorithme s'arrête lorsque tous les coefficients de la f^t objectif sont positifs ou nuls.

⚠ notre nouvelle base devient $\{x_1, x_2\} = B \Rightarrow$ Solution optimale :

$\{x_1, x_2\} = \{$les valeurs de b ونتخذ$\}$ $\quad$ ($-Z_{opt}$ نتخذوها من Tableau)

hors base نخلط 0 ونتخذ les x بقية $\Rightarrow x_i = 0$ (اللي حددناهم من قبل)

كيف نلقو colonne d'éléments négatifs ou nuls وقتها نقولو عندنا :

solution non bornée $\Rightarrow$ خاطر منجموش نطبقو ال critère du quotient

on doit avoir au moins un $CQ > 0$ et ce n'est pas notre cas

Problème non borné inférieurement $\Rightarrow$ PL n'admet pas de solution optimale !

Algorithme de simplexe : <u>Méthode de deux phases</u> :

SC : inégalités $\rightarrow$ S.C : inégalités inférieures (forme canonique) $\rightarrow$ S.C : égalités (forme standard) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \max z = CX \\ AX \leqslant b \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} AX + X_E = b \\ X, X_E \geqslant 0 \end{cases}$ si $\boxed{b < 0}$ solution n'est pas admissible !

solution de base : l'origine du plan de coordonnées : $(x_1, x_2, \underbrace{b, b'}_{<0})$

Solution Proposée :

· <u>Phase I</u>. $\min z = x_0$, prenons $x_0 \geqslant 0$

$SC \begin{cases} Ax - x_0 e \leqslant b \\ x, x_0 \geqslant 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $(x, 0)$ solution du problème de la phase I

↳ appliquée ssi $b_i < 0$

· étape ① : $\left[\begin{array}{c|c|c} A & -e & b \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right] z = x_0$ $\Rightarrow B = \{x_{n+1}, \dots, x_{n+m}\}$

· étape ② : choix du pt de départ
- $(x, x_0) = (0, -b)$: pt non admissible si $b_i > 0$
- ligne i $\min\{b_i \mid i = [1, m]\}$ si $b_i \leqslant 0$

$\Rightarrow B = \{x_{n+1}, \dots, x_{n+m}, x_0\}$

· étape ③ : méthode de simplexe

· étape ④ :
- valeur minimale de $z = x_0 \neq 0$: Pas de solution admissible
- valeur minimale de $z = x_0 = 0$: solution de base admissible ne contenant pas x_0 $\rightarrow$ Passer à la phase II

· <u>Phase II</u>.

- utiliser le dernier tableau obtenu en phase I :
  - modifier la dernière ligne par les coefficients de la f^t objectif z initiale.
  - enlever la colonne de x_0