

Epreuve de Chapitres I, II et III :

Numéro de la feuille double	Total des feuilles doubles remises

Exercice 1. R.O.O chapitre 2:

$$\textcircled{1} \max(-z) = 3x_1 - 4x_2 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq -4 \end{cases}$$

$$x_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 = x_1^+ - x_1^- \text{ où } x_1^+, x_1^- \geq 0$$

$$\max(-z) = 3x_1^+ - 3x_1^- - 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1^+ - x_1^- + x_2 - x_3 \leq 6 \\ -x_1^+ + x_1^- + 2x_2 \leq -4 \end{cases}$$

$$x_1^+, x_1^-, x_2, x_3 \geq 0$$

Forme canonique

$$\textcircled{2} \max z = 15x_1 + 20x_2 + 12x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 120$$

$$-x_1 \leq -50$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 100$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x^+ - x^- \text{ où } x^+, x^- \geq 0$$

$$\max z = 15x_1 + 20x_2 + 12x_3^+ - 12x_3^-$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3^+ - x_3^- + x_4 \leq 120 \\ -x_1 \leq -50 \\ x_1 + 3x_2 \leq 100 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4 \geq 0$$

Forme canonique

Exercice 2: 200 chapitre 2

standard

① $\max (z) = -3x_1 - 2x_2$

② $\max (z) = x_1 - 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

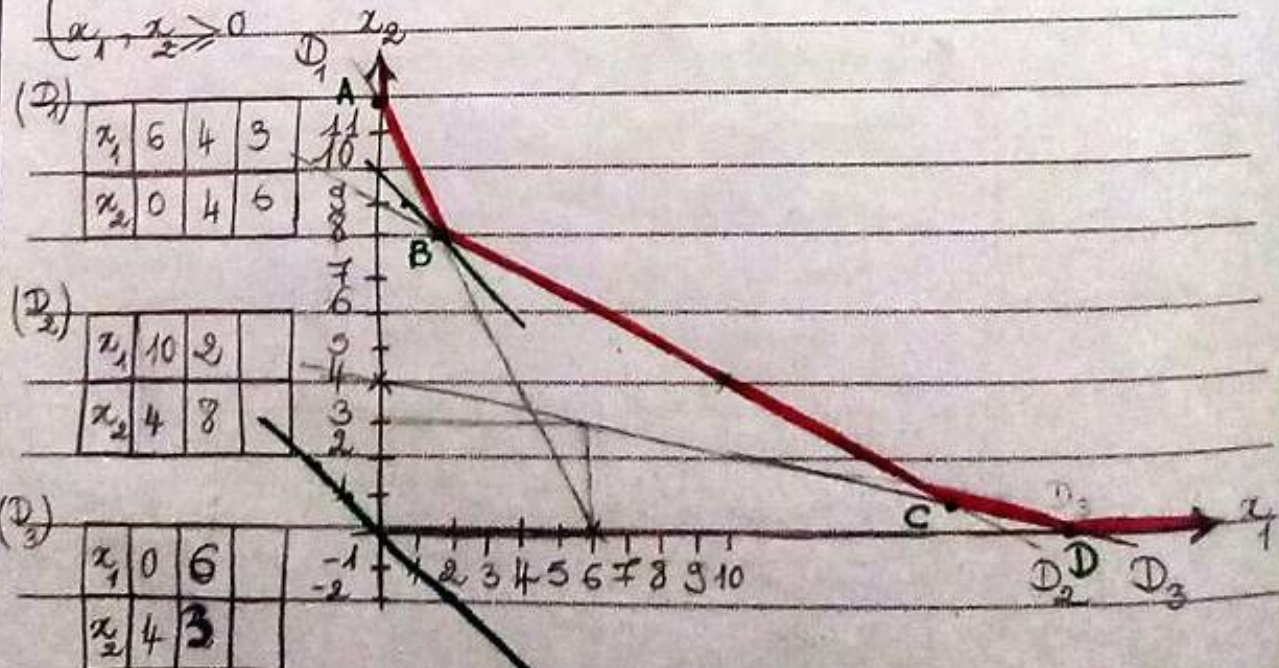
Forme

Standard

* Exemple 1 200 Chapitre 3:

$\min z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 12 \quad (D_1) \\ 5x_1 + 8x_2 \geq 74 \Rightarrow 5x_1 + 8x_2 = 74 \quad (D_2) \\ x_1 + 6x_2 \geq 24 \Rightarrow x_1 + 6x_2 = 24 \quad (D_3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



(D₃)

$$B = D_1 \cap D_2 \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 12 & (D_1) \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 74 & (D_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 12 = 0 \Rightarrow x_2 = 12 - 2x_1 \\ 5x_1 + 3x_2 - 74 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x_1 + x_2 - 12 = 5x_1 + 3x_2 - 74$$

$$\Rightarrow 3x_1 + 2x_2 - 62 = 0 \Rightarrow 3x_1 + 84 - 14x_1 - 62 = 0$$

$$\Rightarrow -11x_1 + 22 = 0 : x_1 = \frac{-22}{-11} = 2 \Rightarrow x_2 = 12 - 2 \times 2 = 8 \Rightarrow B = (2, 8)$$

fonction Objectif: $\max Z = x_1 + x_2 = 2 + 8 = 10$ \Rightarrow solution optimale

Exemple 2 RCO Chapitre 3:

$$\max Z = 3x_1 + x_2$$

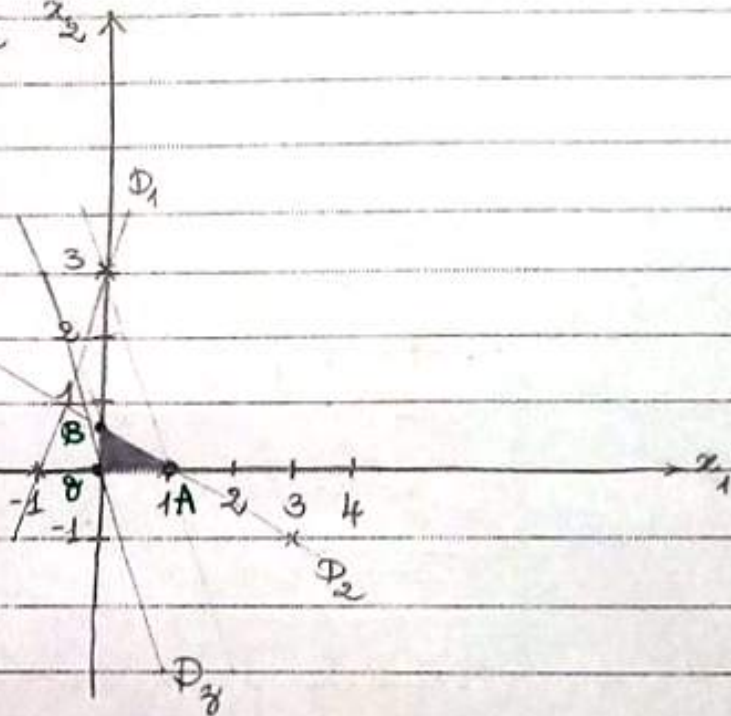
$$(D_1) \begin{cases} -3x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$(D_2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

$$(D_1) \begin{array}{cc|c} x_1 & 0 & -1 \\ x_2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$(D_2) \begin{array}{cc|c} x_1 & 1 & 3 \\ x_2 & 0 & -1 \end{array}$$

$$D_3: 3x_1 + x_2 = 0$$

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & 1 & -1 \\ x_2 & -3 & 3 \end{array}$$


$$A = D_2 \cap (x_2 = 0) \quad x_2(A) = 0 \quad x_1 + 2x_2 = 1 \text{ or } x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$\Rightarrow A = (1, 0)$ solution optimale

$$f^* \text{ Objectif: } \max Z = 3x_1 + x_2 = 3 \times 1 + 0 = 3$$

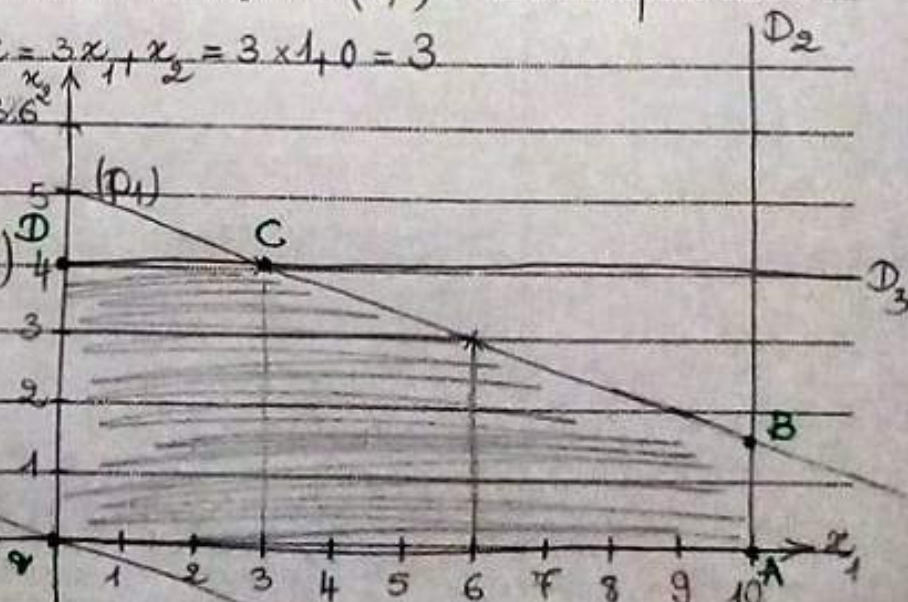
Exemple 3 RCO Ch 3.6

$$\max Z = x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 30 & (D_1) \\ x_1 = 10 & (D_2) \\ x_2 = 4 & (D_3) \end{cases}$$

$$(D_1) \begin{array}{cc|c} x_1 & 3 & 6 \\ x_2 & 4 & 3 \end{array}$$

$$D_3: x_1 + 3x_2 = 0$$

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & -3 & 3 \\ x_2 & 1 & -1 \end{array}$$


$$B = D_1 \cap D_2 \Rightarrow 2x_1 + 6x_2 = 30 \text{ et } x_1 = 10 \Rightarrow x_2 = \frac{30 - 2 \times 10}{6} = \frac{30 - 20}{6} = \frac{10}{6}$$

$$\hookrightarrow B = (10, \frac{5}{3}) \leadsto Z = x_1 + 3x_2 = 10 + 3 \cdot \frac{5}{3} = 15 = Z_{\text{opt}}$$

$$C = D_1 \cap D_3 \Rightarrow 2x_1 + 6x_2 = 30 \text{ et } x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{30 - 6 \times 4}{2} = \frac{30 - 24}{2} = 3$$

$$\hookrightarrow C = (3, 4) \leadsto Z = x_1 + 3x_2 = 3 + 3 \cdot 4 = 15 = Z_{\text{opt}}$$

Les solutions optimales sont $B = (10, \frac{5}{3})$ et $C = (3, 4)$ et $Z_{\text{opt}} = 15$

Exemple 4 RCO Chapitre 3:

$$\max Z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 40 \quad (D_1) \\ x_1 = 10 \quad (D_2) \\ x_2 = 5 \quad (D_3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 10 \quad (D_2)$$

$$x_2 = 5 \quad (D_3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1	8	6
x_2	8	11

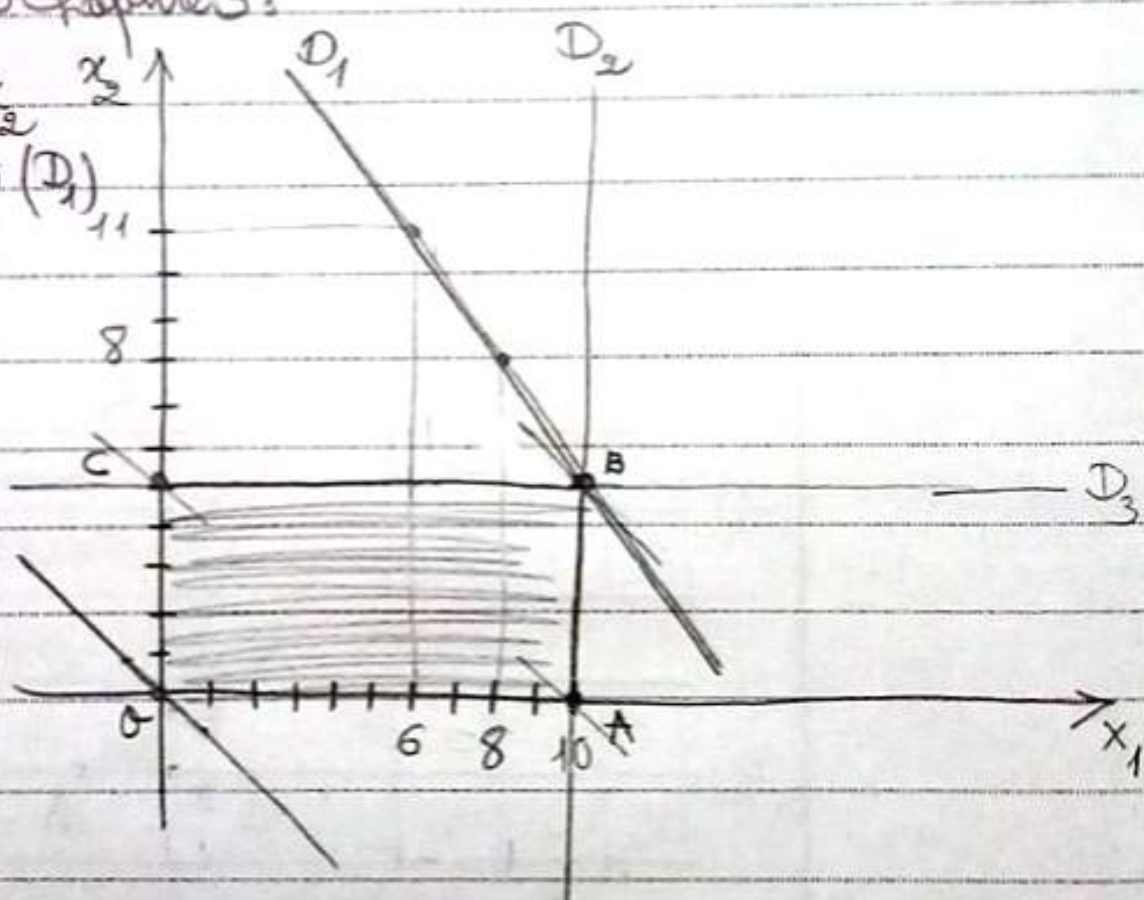
$$D_3: x_1 + x_2 = 0$$

x_1	1	-1
x_2	-1	1

$$B = D_1 \cap D_2 \cap D_3$$

$$x_1 = 10, x_2 = 5, 3x_1 + 2x_2 = 40$$

$$B = (10, 5) \text{ et } Z_{\text{opt}} = x_1 + x_2 = 5 + 10 = 15$$



Identifiant
secret

te attribuée

signatures
correcteurs

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1000}{4 \times 3}$$

2

$$\frac{1}{4} \times \frac{64}{3} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

3

Epreuve de Chapitre IV :

Exemple 1:

$$\max Z = 20x_1 + 25x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 40 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 48 \end{cases}$$

colonne pivot

B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	CQ
x_3	2	3	1	0	40	$\frac{40}{3}$
x_4	4	2	0	1	48	$\frac{48}{2}$
Z	20	25	0	0	0	—

→ CQ $\frac{40}{3}$: ligne Pivot

ligne pivot

On permute x_3 par x_2

$$\begin{cases} L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{25}{3} L_1 \end{cases}$$

maximiser Z
colonne pivot

B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	CQ
x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{40}{3}$	$\frac{40}{2} = 20$
x_4	$\frac{8}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{64}{3}$	$\frac{64}{8} = 8$
Z	$-\frac{10}{3}$	0	$-\frac{25}{3}$	0	$-\frac{1000}{3}$	—

ligne de pivot

On permute x_4 par x_1

variables de base

B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	CQ
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{24}{3} = 8$	—
x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{64}{8} = 8$	—
Z	0	0	$-\frac{15}{8}$	$-\frac{5}{4}$	-360	—

solution optimale (8,8) (Z_{opt})

$$-\frac{25}{3} + \frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = -\frac{50}{6} + \frac{15}{6} = -\frac{35}{6}$$

$$-\frac{1000}{3} - \frac{5}{4} \times \frac{64}{3} = -\frac{1000}{3} - \frac{80}{3} = -\frac{1080}{3} = -360$$

Exemple 2:

$$\max Z = 30x_1 + 50x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 1800 \\ x_1 \leq 400 \\ x_2 \leq 600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1800 \\ x_1 + x_4 = 400 \\ x_2 + x_5 = 600 \end{cases}$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	CQ
x_3	3	2	1	0	0	1800	900
x_4	1	0	0	1	0	400	∞
x_5	0	1	0	0	1	600	600
Z	30	50	0	0	0	0	-

on permute x_5 par x_2

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & \leftarrow & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & \leftarrow & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & \leftarrow & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & \leftarrow & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & \leftarrow & 1 & 50 & 1 & 3 \end{array} \end{array}$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	CQ
x_3	3	0	1	0	-2	600	200
x_4	1	0	0	1	0	400	400
x_2	0	1	0	0	1	600	∞
Z	30	0	0	0	-50	-30000	-100

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & \leftarrow & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \leftarrow & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \leftarrow & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & \leftarrow & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & \leftarrow & 3 & 3 & 1 & 1 \end{array} \end{array}$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	CQ
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	200	
x_4	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	200	
x_2	0	1	0	0	1	600	
Z	0	0	-10	0	-30	-36000	

(max Z)
 $C_i < 0$ on ne peut plus augmenter
solution optimale: $\begin{cases} x_1 = 200 \\ x_2 = 600 \end{cases}$

$$-Z_{opt} \Rightarrow Z_{opt} = 36000$$

$$\begin{aligned} &= 600 \times 50 \\ &= 30000 - 10 \times 600 \\ &= -36000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max Z &(C_i < 0) \\ \min Z &(C_i > 0) \end{aligned}$$

Exemple 3:

$$\begin{aligned} \min Z &= 3x_1 - 6x_2 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 1 \\ -2x_1 - x_2 &\leq 0 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + 4x_2 &\leq 13 \\ 4x_1 - x_2 &\leq 23 \\ -x_1 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ -2x_1 - \frac{x_2}{2} + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_5 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 + x_6 &= 13 \\ 4x_1 - x_2 + x_7 &= 23 \end{aligned}$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	CG
x_3	-1	-2	1	0	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$
x_4	-2	-1	0	1	0	0	0	0	
x_5	-1	1	0	0	1	0	0	1	1
x_6	-1	4	0	0	0	1	0	13	$\frac{13}{4}$
x_7	4	-1	0	0	0	0	1	23	$\frac{23}{4}$
Z	3	-6	0	0	0	0	0	0	-

minimiser
valeur

on permute x_5 par x_2

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	CG
x_3	-3	0	1	0	2	0	0	3	-1
x_4	-3	0	0	1	1	0	0	1	$-\frac{1}{3}$
x_2	-1	1	0	0	1	0	0	1	-1
x_6	3	0	0	0	-4	1	0	9	3
x_7	3	0	0	0	1	0	1	24	8
Z	-3	0	0	0	6	0	-0	6	-3

on permute x_6 par x_1

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b	CG
x_3	0	0	1	0	-2	1	0	12	
x_4	0	0	0	1	-3	1	0	10	
x_2	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	4	
x_1	1	0	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3	
x_7	0	0	0	0	5	-1	1	15	
Z	0	0	0	0	2	1	0	15	

$C_i > 0$: on ne peut pas minimiser

$Z_{opt} = -15$:
fonction objectif
solution optimale

$$\min Z = 3 \times 3 - 6 \times 4 = 9 - 24 = -15 \quad \checkmark \quad -Z_{opt}$$

$$x_1 = 3, x_2 = 4$$

Exemple 4:

$$\max Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 11$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 8$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CQ
x_4	2	3	1	1	0	0	5	$\frac{5}{2}$
x_5	1	1	2	0	1	0	11	$\frac{11}{4}$
x_6	3	4	2	0	0	1	8	$\frac{8}{3}$
Z	5	4	3	0	0	0	0	—

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - \frac{5}{2}L_1 \end{aligned}$$

on permute x_4 par x_1

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CQ
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	5
x_5	0	-5	0	-2	1	0	1	∞
x_6	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	1
Z	0	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{25}{2}$	—

on permute x_6 par x_3

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CQ
x_1	1	1	0	2	0	-1	2	
x_5	0	-5	0	-2	1	0	1	
x_3	0	-1	1	-3	0	2	1	
Z	0	-3	0	-1	0	-1	-13	

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - 0 \times L_3 \\ L_3 &\leftarrow 2L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - L_3 \end{aligned}$$

$C_i < 0$ on ne peut pas augmenter Z $\leftarrow Z_{opt}$

$Z_{opt} = -13$, solution optimale: $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$

$$\max Z = 5 \times 2 + 4 \times 0 + 3 \times 1 = 10 + 3 = 13 \checkmark$$

Exemple 5:

$$\min Z = -2x_1 - 3x_2 + x_3$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CQ
x_4	-1	-1	-1	1	0	0	3	-3
x_5	1	-1	1	0	1	0	4	-4
x_6	-1	1	2	0	0	1	1	1
Z	-2	-3	1	0	0	0	0	—

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 &\leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 + 3L_3 \end{aligned}$$

on permute x_6 par x_2

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\frac{-25}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-26}{2} = -13$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 4$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 1$$

Epreuve de

Chapitre IV :

Numéro de la feuille double	Total des feuilles doubles remises

Suite Exemple 5 200 Chapitre 4 :

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CG	
x_4	-2	0	1	1	0	1	4	-2	solution
x_5	0	0	3	0	1	1	5	∞	non bornée
x_2	-1	1	2	0	0	1	1	-1	
Z	-5	0	7	0	0	3	3	—	

↑
colonne d'éléments négatifs ou nuls

$$\left. \begin{aligned} -2x_1 + x_3 + x_4 + x_6 &= 4 \\ 3x_3 + x_5 + x_6 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{SC}$$

$$B = (x_2, x_4, x_5)$$

⇒ Objectif : x_1 devient $\in B$

$$x_3 = x_6 = 0$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_4 = 4 \\ x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \begin{cases} x_4 = 4 + 2x_1 \\ x_5 = 5 \\ x_2 = 1 - x_1 \end{cases}$$

$$\min Z = -5x_1 + 7x_3 + 3x_6 - 3, \quad x_3 = x_6 = 0$$

$$\hookrightarrow \min Z = -3 - 5x_1, \quad \text{si } x_1 \rightarrow +\infty \text{ alors } Z \rightarrow -\infty$$

⇒ PL n'admet pas de solution optimale : Problème non borné inférieurement !

NE RIEN ECRIRE ICI

Exemple 6 Chapitre 4: 2 Phases

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ -5x_1 - 4x_2 \leq -20 \end{cases}$$

Forme standard

$$\begin{cases} \max Z = 2x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ -5x_1 - 4x_2 + x_4 = -20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ -5x_1 - 4x_2 + x_4 = -20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Solution non admissible

Phase I: $\min Z = x_0$

Phase I:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_0 = 10 \\ -5x_1 - 4x_2 + x_4 - x_0 = -20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_0 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{base initiale: } (x_3, x_4) \rightarrow \text{Solution de base initiale: } (x_1=0, x_2=0, x_3=10, x_4=0, x_0=20)$$

colonne pivot

ligne pivot

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0	b
x_3	1	1	1	0	-1	10
x_4	-5	-4	0	1	-1	-20
Z	0	0	0	0	1	0

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 &\leftarrow -L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 + L_2 \end{aligned}$$

on permute x_1 par $x_0 \Rightarrow B = (x_3, x_0)$

colonne pivot

ligne pivot

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0	b	CQ
x_3	5	5	1	-1	0	30	5
x_0	5	4	0	-1	1	20	4
Z	-5	-4	0	1	0	-20	4

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - \frac{5}{4}L_2 \\ L_2 &\leftarrow \frac{1}{5}L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 + L_2 \end{aligned}$$

on permute x_2 par $x_1 \Rightarrow B = (x_2, x_1)$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{6}{5}$	6
x_1	1	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	4
Z	0	0	0	0	1	0

\Rightarrow on ne peut plus améliorer l'objectif

\rightarrow phase I s'arrête $x = x_0 = 0$

$B = \{x_3, x_1\}$, solution de base initiale de

l'aplanir $\Pi(4, 0, 6, 0)$

$B = \{x_3, x_1\}$, Tableau initial de phase II:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	6
x_1	1	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	4
Z	2	3	0	0	0

colonne de x_2 نغينا ①

ligne de l'objectif مزيج ②

ligne initiale de Z كبريا

les valeurs بنفس

x_1 et x_3 colonnes pivots \Rightarrow coefficients de la f. objectif nuls !

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

ne de pivot

B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	CQ
x_3	0	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	6	30
x_1	1	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	4	5
Z	0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	-8	$-\frac{40}{7}$

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{4}L_2$$

$$L_2 \leftarrow \frac{5}{4}L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{4}L_2$$

ligne de pivot

on permute x_1 par x_2
ne de pivot

B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	CQ
x_3	$-\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	5	20
x_2	$\frac{5}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	5	-20
Z	$\frac{7}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$	-15	$-\frac{20}{4}$

$$L_1 \leftarrow 4L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

ligne de pivot

on permute x_3 par x_4

B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_4	-1	0	4	1	20
x_2	1	1	1	0	10
Z	-1	0	-3	0	-30

on ne peut plus augmenter l'objectif Z.

$Z_{opt} = 30$

Solution de base: sommet de coordonnées

$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 10, 0, 20)$ $(x_1, x_2) = (0, 10)$

Solution optimale

$C_4 < 0$

Z_{opt}

Phase II:



$$\frac{1}{5} \cdot 4 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{5} \left(2 + \frac{1}{5} \right) = \frac{15}{4}$$

$$\frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{10}{4}$$

Epreuve de _____

Numéro de la feuille double	Total des feuilles doubles remises

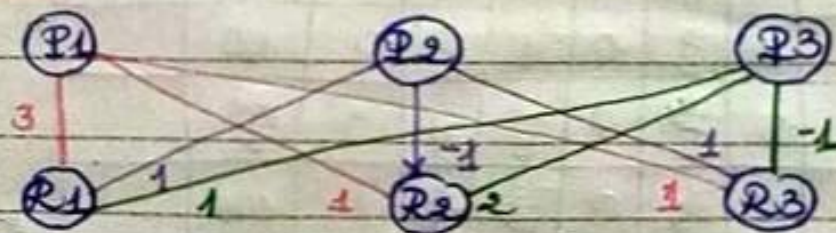
* Exercice 4 : T.D

x_{ij} : $\begin{cases} i=1,2 \\ j=1,2 \end{cases}$ quantité / nombre de Gwh envoyée depuis la centrale i ($i=1,2$) vers la ville j ($j=1,2$)

$$\min z = 8x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 12x_4$$

$$SC \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 35 \\ x_3 + x_4 \leq 50 \\ x_1 + x_3 \geq 45 \\ x_2 + x_4 \geq 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 35 \\ x_3 + x_4 \leq 50 \\ -x_1 - x_3 \leq -45 \\ -x_2 - x_4 \leq -20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

* Exercice 6 :



$$\max z = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 180 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 160 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 80 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 180 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 160 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 80 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CQ
x_1	3	1	1	1	0	0	180	60
x_5	1	-1	2	0	1	0	160	160
x_6	1	1	-1	0	0	1	80	80
max Z	4	-2	2	0	0	0	0	-

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{3} L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3} L_1$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{4}{3} L_1$$

on permute x_4 par x_1

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CQ
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	60	180
x_5	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	100	60
x_6	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	20	-15
max Z	0	$-\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	-240	-

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{5} L_2$$

$$L_2 \leftarrow \frac{3}{5} L_2$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{4}{5} L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{5} L_2$$

on permute x_5 par x_3

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CQ
x_1	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	40	
x_3	0	$-\frac{4}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	60	
x_6	0	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	100	
max Z	0	$\frac{42}{15}$	0	$-\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	-280	-

\Rightarrow on ne peut plus augmenter
la v^e de l'objectif : l'algorithme
s'arrête : solution optimale : (40, 0, 60)

$$Z_{opt} = 280$$

$-Z_{opt}$

Epreuve de T.D N°2 : Simplexe :

Numéro de la feuille double	Total des feuilles doubles remises

Exercice 1:

$$\max Z = 2x_1 + 6x_2$$

$$\max Z = 2x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 - x_2 \leq 30 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	CQ
x_3	-1	1	1	0	40	40
x_4	1	-1	0	1	30	-30
Z	2	6	0	0	0	-

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 6L_1 \end{aligned}$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	b	CQ
x_2	-1	1	1	0	40	-40
x_4	0	0	1	1	70	∞
Z	8	0	-6	0	-240	-

PL non bornée

< 0 Pas de solution optimale

»

* Exercice 2:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	CQ
x_3	-1	2	1	0	0	4	-4
x_4	3	2	0	1	0	14	$\frac{14}{3}$
x_5	1	-1	0	0	1	3	3
Z	3	2	0	0	0	0	-

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \end{array}$$

on permute x_5 par x_1

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	CQ
x_3	0	1	1	0	1	7	7
x_4	0	5	0	1	-3	5	1
x_5	1	-1	0	0	1	3	-3
Z	0	5	0	0	-3	-9	-

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 1L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2 \end{array}$$

on permute x_4 par x_2

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	CQ
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$	6	
x_2	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	
x_1	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	4	
Z	0	0	0	-1	0	-14	-

On ne peut pas
augmenter z

$Z_{opt} = 14$
solution optimale:

$\checkmark x_1 = 4, x_2 = 1$

On veut entrer x_5 dans la base $\rightarrow x_3$ sort de la base

La nouvelle base est: $\{x_1, x_2, x_5\}$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	CQ
x_5	0	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{15}{4}$	
x_2	0	1	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{13}{4}$	
x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{2}$	
Z	0	0	0	-1	0	-14	

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{5}{8} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{-3}{8} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{4} L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 \end{array}$$

$Z_{opt} = 14, x_1 = \frac{5}{2}$ et $x_2 = \frac{13}{4}$ segment $[BC], B = (\frac{5}{2}, \frac{13}{4})$

$\max Z = 3x_1 + 2x_2$

$D_1: -x_1 + 2x_2 = 4$

x_1	2	4
x_2	3	4

$D_2: 3x_1 + 2x_2 = 14$

x_1	2	4
x_2	4	1

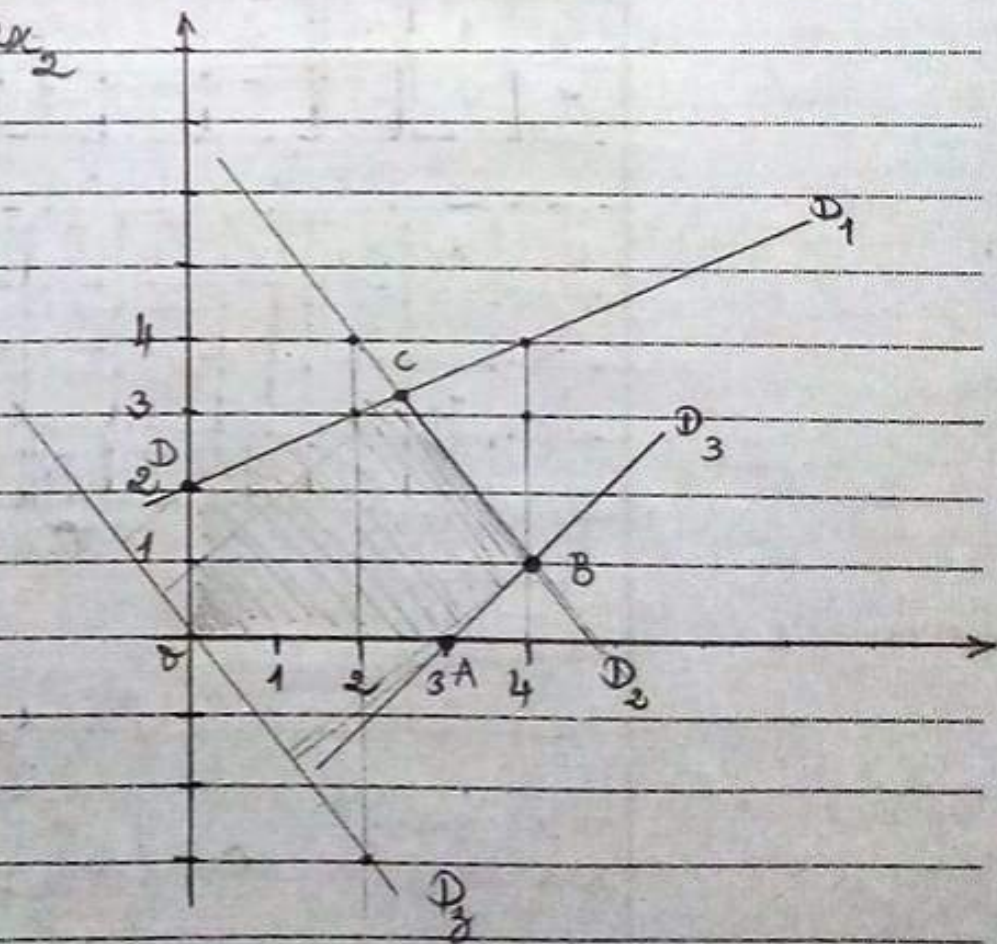
$D_3: x_1 - x_2 = 3$

x_1	4	3
x_2	1	0

$D_4: 3x_1 + 2x_2 = 0$

x_1	2	-2
x_2	-3	3

Solution optimale: segment (BC)



Exercice 3:

$$\min Z = -2x_1 + 2x_2 \Rightarrow -\max(\bar{w}) = \min Z$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq -1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \quad B = \{x_3, x_4\}, HB = \{x_1, x_2\}$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	B	CQ
x_3	-1	3	1	0	1	1
x_4	1	-1	0	1	1	1
Z	2	-1	0	0	0	-

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 &\leftarrow L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - 2L_2 \end{aligned}$$

on permute x_4 par x_1

B	x_1	x_2	x_3	x_4	B	CQ
x_3	0	2	1	1	2	1
x_1	1	-1	0	1	1	1
Z	0	1	0	-2	-2	-

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1 \end{aligned}$$

on permute x_3 par x_1

B	x_1	x_2	x_3	x_4	B	CQ
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	
Z	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-3	-

on ne peut pas augmenter Z
tous les $C_i \leq 0 \Rightarrow$ on s'arrête

$w_{opt} = 3$, solution optimale:
 $x_1 = 2$ et $x_2 = 1$
 $w = -Z$ donc $Z_{opt} = -3$

Exercice 4:

$$\max Z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 60 \\ x_1 + 2x_2 \leq 100 \\ 3x_1 + x_2 \leq 120 \\ x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 60 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 100 \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 120 \\ x_2 + x_6 = 45 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

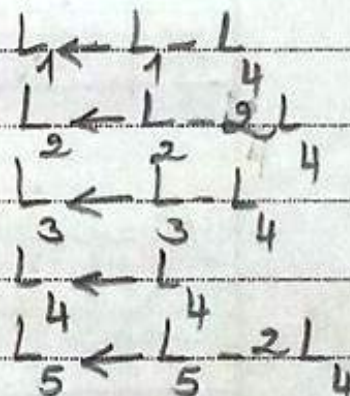
ifiant
ret

Epreuve de

Numéro de la feuille double	Total des feuille doubles remises

tribuée

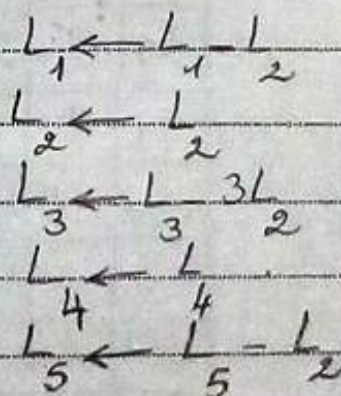
B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CQ
x_3	1	1	1	0	0	0	60	60
x_4	1	2	0	1	0	0	100	50
x_5	3	1	0	0	1	0	120	120
x_6	0	1	0	0	0	1	45	45
Z	1	2	0	0	0	0	0	—



on permute x_6 par x_2

atures
recteurs

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CQ
x_3	1	0	1	0	0	-1	15	15
x_4	1	0	0	1	0	-2	10	10
x_5	3	0	0	0	1	-1	75	25
x_2	0	1	0	0	0	1	45	∞
Z	1	0	0	0	0	-2	-30	—



on permute x_4 par x_1

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CG
x_3	0	0	1	-1	0	1	5	5
x_1	1	0	0	1	0	-2	10	5
x_5	0	0	0	-3	1	5	45	9
x_2	0	1	0	0	0	1	45	45
Z	0	0	0	-1	0	0	-100	-

$-Z_{opt}$

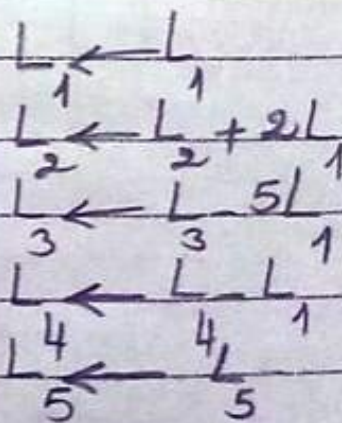
Tous les $C_i < 0$ donc on

s'arrête: $Z_{opt} = 100$

$x_1 = 10, x_2 = 45$

3/B = $\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$ HB = $\{x_4, x_6\}$, $\max Z = -1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_6$
 x_6 n'a aucun effet: entrer x_6 dans B $\rightarrow x_3$ sort: on permute x_3 par x_6

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	CG
x_6	0	0	1	-1	0	1	5	
x_1	1	0	2	-1	0	0	20	
x_5	0	0	-5	2	1	0	20	
x_2	0	1	-1	1	0	0	40	
Z	0	0	0	-1	0	0	-100	-



$Z_{opt} = 100, x_1 = 20, x_2 = 40$ $-Z_{opt}$

pt C (20, 40)

segment [BC]: résultat conforme avec le résultat graphique

DC 2020/2021

Exercice :

$$\min Z = -25x_1 - 15x_2 = -\max(-Z) \quad \begin{cases} \max(w) = 25x_1 + 15x_2 \\ \max(-Z) = -25x_1 - 15x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 50 \\ x_2 \geq 5 \\ x_1 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 50 \\ -x_2 \leq -5 \\ x_1 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ -x_2 + x_4 = -5 \\ x_1 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	CQ
x_3	1	1	1	0	0	50	50
x_4	0	-1	0	1	0	-5	00
x_5	1	0	0	0	1	10	10
Z	25	15	0	0	0	0	-

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 &\leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 25L_3 \end{aligned}$$

on permute x_5 par x_1

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	CQ
x_3	0	1	1	0	-1	40	40
x_4	0	-1	0	1	0	-5	5
x_1	1	0	0	0	1	10	∞
Z	0	15	0	0	-25	-250	-

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 &\leftarrow -L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 + 15L_2 \end{aligned}$$

on permute x_4 par x_2

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	CQ
x_3	0	0	1	1	-1	35	35
x_2	0	1	0	-1	0	5	5
x_1	1	0	0	0	1	10	∞
Z	0	0	0	15	-25	-175	-

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 \\ L_2 &\leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 \\ L_4 &\leftarrow L_4 - 15L_1 \end{aligned}$$

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	CQ
x_4	0	0	1	1	-1	35	
x_2	0	1	1	0	-1	40	
x_1	1	0	0	0	1	10	
Z	0	0	-15	0	-10	-700	-

$$-25 + 15$$

$$-175 - 15 \times 35$$

w_{opt}