

Лабораторна робота №2

Розфарбування графів на основі базису Гребнера

Мета роботи: навчитися застосовувати оператори SymPy для побудови базису Гребнера для систем поліномів, що задають можливе розфарбування графів, визначити хроматичне число графу на основі розв'язання базису Гребнера

Дано граф $G(V, E)$, де V є множина вершин G , E є множина ребер G , k – позитивне число ($k \geq 1$). Необхідно з'ясувати, чи можна призначити колір кожній вершині з V , таким чином, що сусіднім вершинам (по'язаним ребром) присвоєні різні кольори.

В першу чергу треба призначити змінну кожній вершині. З огляду на те, що G має n вершин, тобто $|V| = n$, будемо мати змінні x_1, x_2, \dots, x_n . Далі записують поліноми системи рівнянь, яка описують той факт, що дозволено призначення одного з k кольорів до кожної вершині:

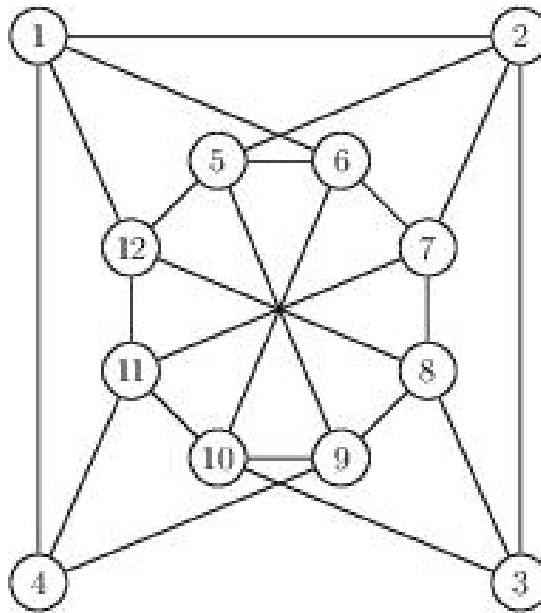
$$F_k = \{x^k - 1, \quad k = 1, \dots, n\}.$$

Також вимагають, щоб двом сусіднім вершинам (позначеним змінними x_i і x_j) були присвоєні різні кольори. Для цього задається система поліномів

$$F_G = \{(x_i^k - x_j^k)/(x_i - x_j), \quad k = 1, \dots, n\}.$$

Необхідно будувати базис Гребнера для системи поліномів $F_k + F_G$, вид якого означає можливість розфарбування. Якщо отримуємо базис Гребнера $\{1\}$, то граф не може бути розфарбований k фарбами. В іншому випадку розв'язок системи рівнянь, що утворені базисом Гребнера, дає повну інформацію про всіх можливі розфарбування k фарбами.

Приклад. З'ясувати чи може бути розфарбований трьома фарбами ($k=3$) нижченаведений граф



Граф містить 12 вершин та 23 ребра. Закодуємо вершини та ребра, використовуючи вбудовані структури мови Python:

```
V = range(1, 12+1) # vertices
```

```
E = [(1,2),(2,3),(1,4),(1,6),(1,12),(2,5),(2,7),(3,8),
      (3,10),(4,11),(4,9),(5,6),(6,7),(7,8),(8,9),(9,10),
      (10,11),(11,12),(5,12),(5,9),(6,10),(7,11),(8,12)] #edges
```

Далі представляють граф в алгебраїчній формі шляхом зіставлення змінних вершинам і кортежів змінних парам індексів:

```
Vx = [ Symbol('x' + str(i)) for i in V ]
Ex = [ (Vx[i-1], Vx[j-1]) for i, j in E ]
```

Наступний крок – це побудова систем поліномів, що утворюють базис Гребнера ($k=3$):

```
F3 = [ x**3 - 1 for x in Vx ]
Fg = [ factor((x**3 - y**3)/(x-y)) for x, y in Ex ]
```

Тепер можна обчислити базис Гребнера F3UFG щодо лексикографічного впорядкування термів:

```
G = groebner(F3 + Fg, Vx)
```

```
print(G)
```

Якщо побудована система поліноміальних рівнянь має розв'язок, то базис Гребнера має бути нетривіальним, що можуть бути легко перевірено в SymPy:

```
G != [1]
```

В даному випадку вищенаведений вираз приймає значення True, тобто граф може бути розфарбований трьома кольорами.

Для пошуку всіх можливих розфарбувань необхідно отримати розв'язок системи рівнянь, що утворені базисом Гребнера:

```
colorings = solve(G, Vx)
```

Кількість елементів розв'язку показує кількість можливих варіантів розфарбувань

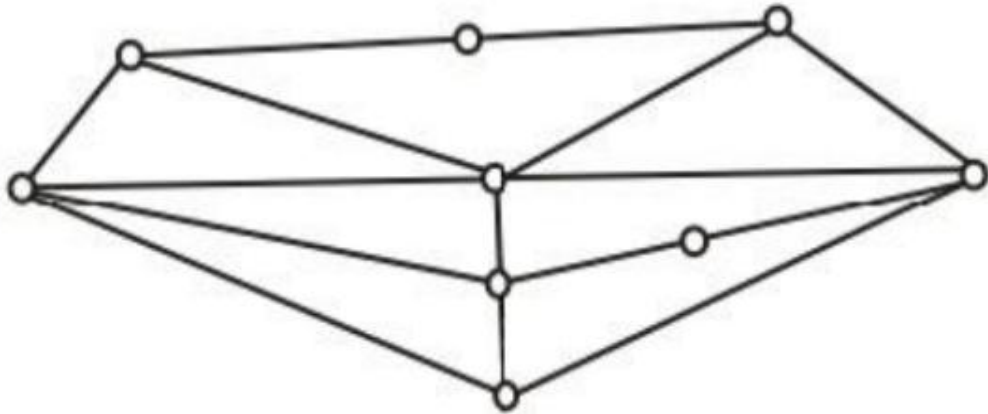
```
print(len(colorings))
```

Завдання

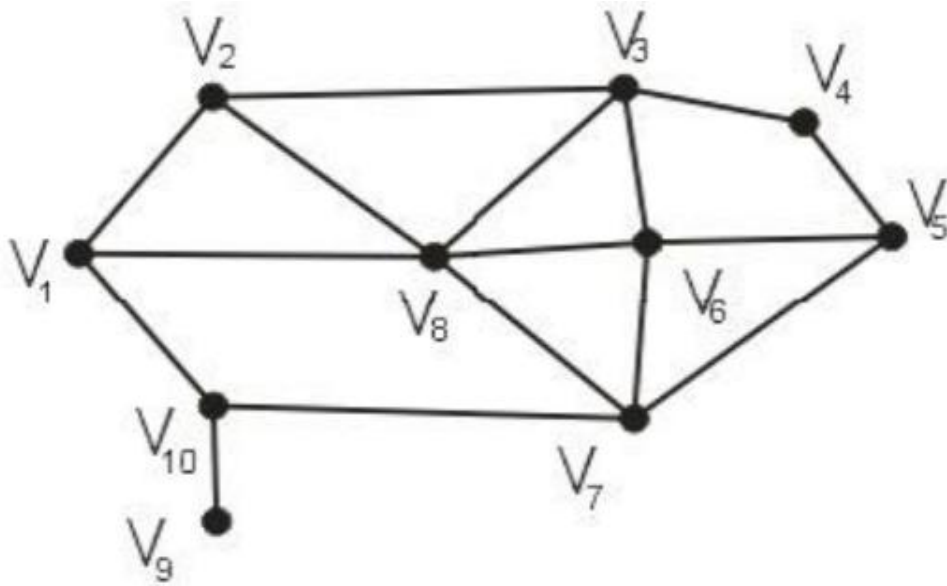
1. Побудувати базис Гребнера для графа, розв'язання якого визначає можливість k -розфарбування (за варіантом, $k=3$).
2. Побудувати розв'язок системи поліноміальних рівнянь, що відповідають базису Гребнера. За отриманим розв'язком знайти кількість розфарбувань та написати алгоритм побудови всіх можливих списків розфарбувань для вершин графа.
3. Знайти хроматичне число графа. Для цього зменшити кількість кольорів k та перевірити чи існує розфарбування при меншій кількості. Хроматичне число графа — мінімальна кількість кольорів, в які можна розфарбувати вершини графа таким чином, щоб кінці будь-якого ребра мали різні кольори.

Варіанти:

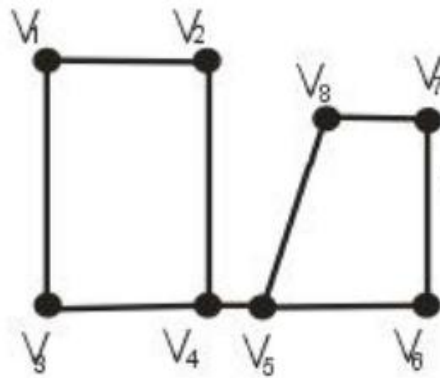
Варіант 1



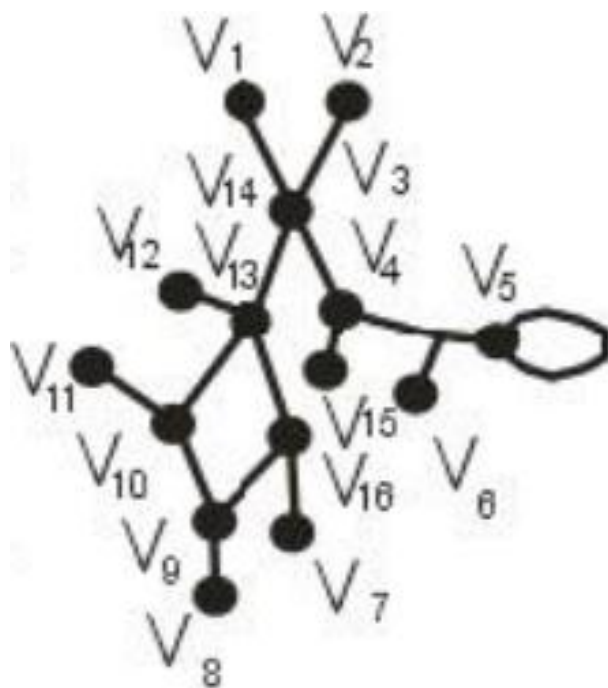
Варіант 2



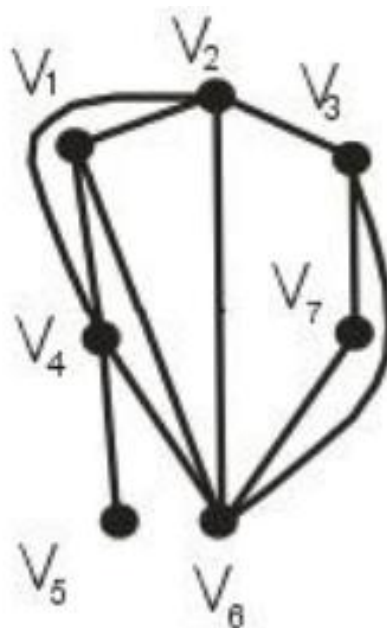
Варіант 3



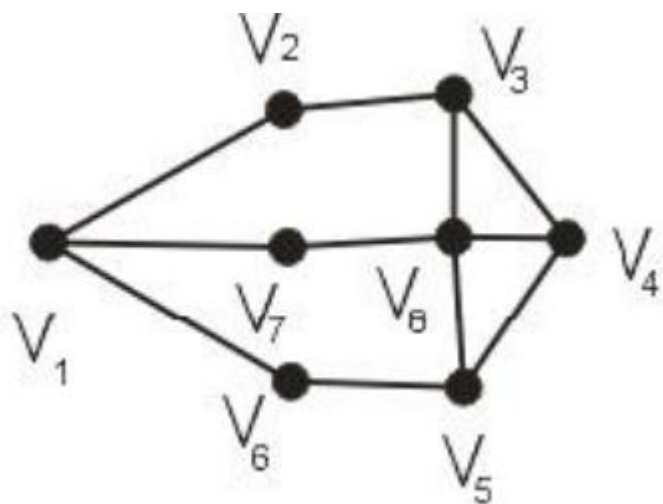
Варіант 4



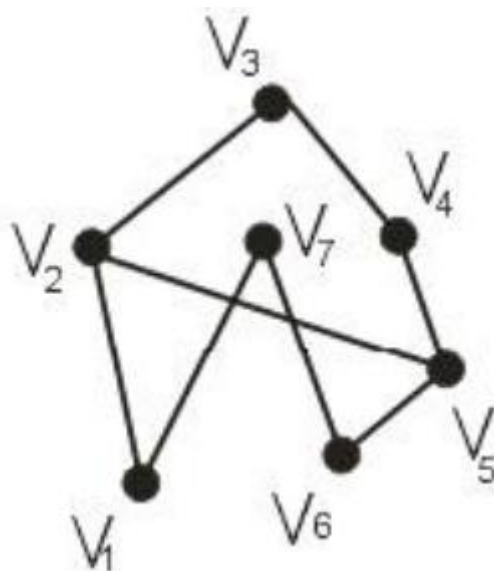
Варіант 5



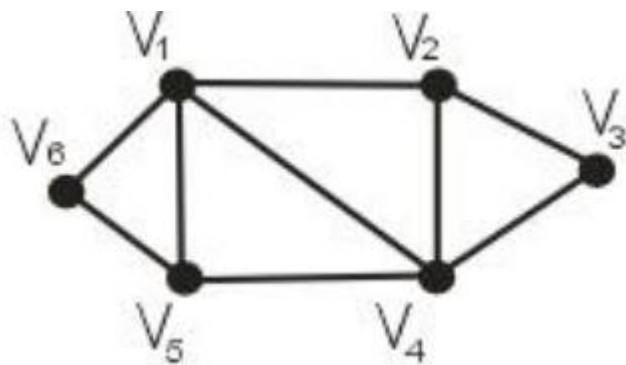
Варіант 6



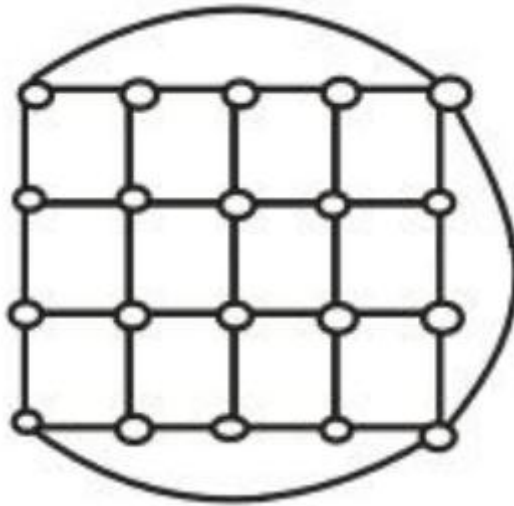
Варіант 7



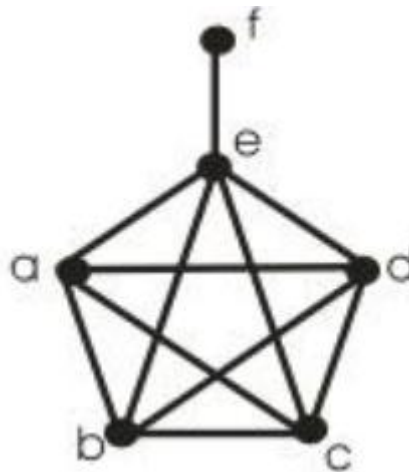
Варіант 8



Варіант 9



Варіант 10



Посилання на джерела:

Символьні обчислення мовою Python. -

https://ru.wikiversity.org/wiki/Программирование_и_научные_вычисления_на_языке_Python/§19

Про бібліотеку SymPy. - <http://www.sympy.org/ru/>

SymPy Tutorial. - <http://docs.sympy.org/latest/tutorial/index.html#tutorial>

https://uk.wikipedia.org/wiki/Хроматичне_число