Лабораторна робота №3

Результанти поліномів

Мета роботи: навчитися застосовувати оператори SymPy для побудови результантів поліномів

Результантом двох поліномів P та Q зі старшими коефіцієнтами рівними одиниці, називається вираз

$$\mathrm{res}(P,Q) = \prod_{(x,y):\, P(x)=0,\; Q(y)=0} (x-y),$$

іншими словами, результант дорівнює добутку попарних різниць між їх коренями. Для многочленів, старші коефіцієнти яких (p та q відповідно) не обов'язково рівні 1, вищезазначений вираз домножується на

$$p^{degQ}q^{degP}$$
.

Степінь полінома f(x) позначається $\deg(f)$.

Основною властивістю результанта (і його основним застосуванням) є наступне: результант - многочлен від коефіцієнтів P і Q, рівний нулю в тому і лише у тому випадку, коли у многочленів P і Q є спільний корінь (можливо, в деякому розширенні поля \mathbb{K}).

Результант дорівнює визначнику матриці Сильвестра. Очевидно, якщо многочлени p і q мають спільний корінь то визначник матриці Сильвестра рівний нулю.

Матриця Сильвестра будується в такий спосіб: Починають з двох поліномів $P(x)=p_mx^m+\cdots+p_2x^2+p_1x+p_0$ та $Q(x)=q_nx^n+\cdots+q_2x^2+q_1x+q_0$

Потрібно отримати кортеж, що складається з коефіцієнтів кожного окремого полінома. Можна використати функції SymPy .degree() (ступінь многочлена) та .nth (i) (коефіцієнт монома ступеня i).

def coefficients(P):
 Pc = []
 for i in range(P.degree(), -1, -1):
 Pc.append(P.nth(i))
 return tuple(Pc)

Наприклад, якщо задано поліном $6x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 9$, або як у SymPy, Poly(6 * x ** 5 - 3 * x ** 4 + 2 * x ** 2 - x + 9, x), то функція буде працювати наступним чином:

Тепер, коли є спосіб, щоб отримати коефіцієнти, можемо побудувати матрицю Сильвестра. Перший рядок містить m+n елементів, перші m+1 є $p_m...p_0$, а потім n-1 нулів:

$$p_m \cdots p_0 \xrightarrow{n-1 \text{ zeroes}}$$

Другий рядок так само, як і перший, але нуль береться з останньої позиції та переставляється на початок рядка:

$$\begin{pmatrix}
p_m & \cdots & p_0 & \overbrace{0 & \cdots & 0} \\
0 & p_m & \cdots & p_0 & \underbrace{0 & \cdots & 0}_{n-2 \text{ zeroes}}
\end{pmatrix}$$

Повторіть цей процес, поки не будуть n-1 нулів на початку рядка:

$$\begin{pmatrix} p_m & \cdots & p_0 & \overbrace{0 \cdots 0} \\ 0 & p_m & \cdots & p_0 & \underbrace{0 \cdots 0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underbrace{0 \cdots 0}_{n-1 \text{ zeroes}} & p_m & \cdots & p_0 \end{pmatrix}$$

На цьому етапі буде n рядків. Для завершення матриці Сильвестра, наступний рядок буде починатися з n+1 результатів, $q_n...q_0$, а потім m-1 нулів:

Потім просто необхідно повторити процес, який було зроблено з коефіцієнтами поліному Р(х), щоб в кінцевому підсумку отримати:

Нехай функція побудови матриці Сільвестра визначена як sylvester(P, Q). Нехай задано два полінома,

$$U(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$$
 Ta $V(x) = 7x^3 + 3x^2 - 9x + 10$:

$$U = Poly(2*x**4+3*x**3+4*x**2+5*x+6, x)$$

$$V = Poly(7*x**3+8*x**2+9*x+10, x)$$

sylvester(U, V)

Matrix([[2, 3, 4, 5, 6, 0, 0], [0, 2, 3, 4, 5, 6, 0], [0, 0, 2, 3, 4, 5, 6], [7, 8, 9, 10, 0, 0, 0], [0, 7, 8, 9, 10, 0, 0], [0, 0, 7, 8, 9, 10, 0], [0, 0, 7, 8, 9, 10]])

Отримана матриця:

$$\begin{pmatrix}
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 9 & 10
\end{pmatrix}$$

Тепер, щоб отримати результант, необхідно взяти визначник цієї матриці. Можна використати .det(), щоб побудувати просту функцію:

```
def resultant(P, Q):
  return sylvester(P,Q).det()
```

Тепер можна отримати результант U(x) та V(x):

Важлива властивість результанта двох поліномів полягає в тому, що якщо два полінома мають спільний поліном-множник, їх результант дорівнює нулю.

Результанти може бути використаний в алгебраїчній геометрії для визначення перетину кривих, представлених в алгебраїчній формі.

Варіанти завдання:

Варіант 1

Написати за використанням SymPy алгоритм побудови матриці Сильвестра для двох поліномів. На основі матриці Сильвестра визначити результант поліномів $A(x) = (x-1)(2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6)$ та $B(x) = (x-1)(7x^3 + 3x^2 - 9x + 10)$.

Варіант 2

Написати за використанням SymPy алгоритм побудови матриці Сильвестра для двох поліномів. На основі матриці Сильвестра визначити результант поліномів A(x) = 2x + 3 та $B(x) = 4x^2 + 5x + 6$.

Варіант 3

Написати за використанням SymPy алгоритм побудови матриці Сильвестра для двох поліномів. На основі матриці Сильвестра визначити результант поліномів $A(x) = x^2 + 5x + 6$ та $B(x) = x^2 - 1$.

Варіант 4

Написати за використанням SymPy алгоритм побудови матриці Сильвестра для двох поліномів. На основі матриці Сильвестра визначити результант поліномів A(x) = 2x + 3 та $B(x) = cx^2 + 2x + 3$, де c - константа

Варіант 5

Написати за використанням SymPy алгоритм побудови матриці Сильвестра для двох поліномів. На основі матриці Сильвестра визначити результант поліномів $A(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ та $B(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

Варіант 6

Написати за використанням SymPy алгоритм побудови матриці Сильвестра для двох поліномів. На основі матриці Сильвестра визначити результант поліномів $A(x) = 2x^3 - 3x + 1$ та $B(x) = 3x^2 - 4x + 3$.

Варіант 7

При яких значеннях t два полінома $y = x^2 + 5x + t$ та $v = x^2 + tx + 9$ мають спільний множник-поліном позитивного ступеня?

Варіант 8

Розглянемо два рівняння $ax^2 + bx + a = 0$ та $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$. Покажіть, що ці два рівняння мають спільний корінь, якщо a = -b або a = -b/2.

Варіант 9

На основі обчислення результанту поліномів $A(x) = x^2 + 1$ та $B(x) = x^2 + 2x + 1$ визначити, чи мають ці поліноми спільний поліном-множник ступеня ≥ 1 .

Варіант 10

На основі обчислення результанту поліномів $A(x) = x^3 - 1$ та $B(x) = x^2 + 2$ визначити, чи мають ці поліноми спільний поліном-множник ступеня ≥ 1 .

Посилання на джерела:

Символьні обчислення мовою Python. -

https://ru.wikiversity.org/wiki/Программирование_и_научные_вычисления_н а_языке_Python/§19

Про бібліотеку SymPy. - http://www.sympy.org

SymPy Tutorial. - http://docs.sympy.org/latest/tutorial/index.html#tutorial

Матриця Сильвестра. - https://uk.wikipedia.org/wiki/Матриця Сильвестра