Condición necesaria y suficiente de Integrabilidad de Riemann

Alex David Montero Garay y Erick Hernández Peón

Equivalencias de Integrabilidad Riemann

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Demostrar que:

$f \in R : [a, b] \iff \forall\varepsilon > 0[\exists P_\varepsilon : P' \supseteq P_\varepsilon|\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon] \iff \overline{I} = \underline{I}$.

Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. f es Riemann integrable en [a, b].

$$f \in R : [a, b]$$

2. para todo epsilon, existe una partición P subepsilon tal que para toda partición más fina P subepsilon se encuentre contenida en la partición P' y cualquier elección de puntos Xi:

$$\forall\varepsilon > 0[\exists P_\varepsilon : P' \supseteq P_\varepsilon|\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon]$$

3. La integral superior e inferior coinciden:

$$\overline{I} = \underline{I}$$

Demostración de las equivalencias

Demostración. **(1)** $\Rightarrow$ **(2)**.
Hipótesis: f es Riemann integrable en $[a, b]$, es decir, la integral superior $\overline{I}$ y la integral inferior $\underline{I}$ coinciden:

$$\overline{I} = \underline{I} = I.$$

Tesis: Para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε tal que, para cualquier refinamiento $P' \supseteq P_\varepsilon$ y cualquier elección de puntos de muestra χ, se cumple:

$$|\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon.$$

I. Integral superior e inferior:

$$\overline{I} = \inf_P U(f, P), \quad \underline{I} = \sup_P L(f, P),$$

donde $U(f,P)$ y $L(f,P)$ son las sumas de Darboux (superior e inferior) asociadas a una partición P.

II. Criterio de Darboux para integrabilidad: Si f es Riemann integrable, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε tal que:

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Por la integrabilidad de f, aplicamos el criterio de Darboux. Para el $\varepsilon > 0$ dado, existe una partición $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que:

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Sea $P' \supseteq P_\varepsilon$ un afinamiento de P_ε.

Por propiedades de las sumas de Darboux: .

a). Monotonía:

$$L(f, P_\varepsilon) \leq L(f, P') \leq U(f, P') \leq U(f, P_\varepsilon).$$

b).

$$U(f, P') - L(f, P') \leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Sea $\sigma(f, P', \chi) = \sum_{i=1}^{m} f(\chi_i)\Delta x_i$ una suma de Riemann asociada a P' y puntos de muestra $\chi = \{\chi_1, \ldots, \chi_m\}$. Por definición:

$$L(f, P') \leq \sigma(f, P', \chi) \leq U(f, P').$$

Además, como f es integrable, I satisface:

$$L(f, P') \leq I \leq U(f, P').$$

Desigualdad triangular para la diferencia:

$$|\sigma(f, P', \chi) - I| \leq \max \{|U(f, P') - I|, |L(f, P') - I|\}.$$

Pero, $U(f, P') - L(f, P') < \varepsilon$, y como $I \in [L(f, P'), U(f, P')]$:

$$|U(f, P') - I| \leq U(f, P') - L(f, P') < \varepsilon,$$

$$|L(f, P') - I| \leq U(f, P') - L(f, P') < \varepsilon.$$

Por lo tanto:

$$|\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon.$$

Conclusión: Si f es Riemann integrable en $[a, b]$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε tal que cualquier afinamiento $P' \supseteq P_\varepsilon$ cumple $|\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon$. Esto demuestra la implicación:

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \implies \forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon : P' \supseteq P_\varepsilon \implies |\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon.$$

$$\boxed{f \in \mathcal{R}[a, b] \implies \forall \varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon : P' \supseteq P_\varepsilon \implies |\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon}$$

□

Demostración. **(2) ⇒ (3)**.
Hipótesis: Para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε tal que, para cualquier afinamiento $P' \supseteq P_\varepsilon$ y cualquier elección de puntos de muestra χ:

$$|\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon.$$

.
Tesis:

$$\overline{I} = \underline{I}.$$

I. Integral superior (Darboux):

$$\overline{I} = \inf_P U(f, P),$$

donde $U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$, con $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

II. Integral inferior (Darboux):

$$\underline{I} = \sup_P L(f, P),$$

donde $L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$, con $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

III. Propiedad fundamental: Para toda partición P, $L(f, P) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq U(f, P)$.

Tomando supremo e ínfimo sobre las sumas de Riemann:

$$I - \varepsilon \leq L(P', f) \leq \underline{(I)} \leq \overline{(I)} \leq U(P', f) \leq I + \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, se concluye:

$$\overline{I} = \underline{I} = I. \qquad \square$$

Por hipótesis, para todo $\varepsilon > 0$, existe P_ε tal que:

$$|\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon \quad \forall P' \supseteq P_\varepsilon, \forall \chi.$$

Esto implica:

$$I - \varepsilon < \sigma(f, P', \chi) < I + \varepsilon.$$

Como $U(f, P') = \sup_\chi \sigma(f, P', \chi)$, se tiene:

$$U(f, P') \leq I + \varepsilon.$$

Cota para la suma inferior $L(f, P')$: Como $L(f, P') = \inf_\chi \sigma(f, P', \chi)$, se tiene:

$$L(f, P') \geq I - \varepsilon.$$

Acotación de $\overline{I}$: Por definición, $\overline{I}$ es el ínfimo de todas las sumas superiores. Dado que $U(f, P') \leq I + \varepsilon$ para todo afinamiento $P' \supseteq P_\varepsilon$:

$$\overline{I} \leq I + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, tomando $\varepsilon \to 0^+$:

$$\overline{I} \leq I.$$

Acotación de $\underline{I}$: Por definición, $\underline{I}$ es el supremo de todas las sumas inferiores. Dado que $L(f, P') \geq I - \varepsilon$ para todo afinamiento $P' \supseteq P_\varepsilon$:

$$\underline{I} \geq I - \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon \to 0^+$:

$$\underline{I} \geq I.$$

De los resultados anteriores:

$$\overline{I} \leq I \quad \text{y} \quad \underline{I} \geq I.$$

Pero por la propiedad fundamental $\underline{I} \leq \overline{I}$, se concluye:

$$\underline{I} \geq I \geq \overline{I} \geq \underline{I}.$$

Esto solo es posible si:

$$\overline{I} = \underline{I} = I.$$

Conclusión: La condición $\forall\varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon : P' \supseteq P_\varepsilon \implies |\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon$ implica necesariamente que las integrales superior e inferior coinciden ($\overline{I} = \underline{I}$)

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon : P' \supseteq P_\varepsilon \implies |\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon \quad \implies \quad \overline{I} = \underline{I}}$$

Demostración. **(3)** $\Rightarrow$**(1)**:
Hipótesis:

$$\overline{I} = \underline{I} = I,$$

donde $\overline{I}$ es la integral superior de Darboux y $\underline{I}$ la integral inferior.
Tesis: f es Riemann integrable en $[a, b]$, es decir:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon : \forall P' \supseteq P_\varepsilon, |\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon.$$

Integral superior:

$$\overline{I} = \inf_P U(f, P), \quad U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Integral inferior:

$$\underline{I} = \sup_P L(f, P), \quad L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

Criterio de Darboux: f es Riemann integrable si y solo si:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists P_\varepsilon : U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Aplicación del Criterio de Darboux Dado que $\overline{I} = \underline{I} = I$, por definición de ínfimo y supremo: - Para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_1 tal que:

$$U(f, P_1) < \overline{I} + \frac{\varepsilon}{2} = I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

- Existe una partición P_2 tal que:

$$L(f, P_2) > \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} = I - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$ (afinamiento común de P_1 y P_2). Por propiedades de las sumas de Darboux:

$$U(f, P_\varepsilon) \leq U(f, P_1) < I + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$L(f, P_\varepsilon) \geq L(f, P_2) > I - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo tanto:

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \left(I + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(I - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Sea $P' \supseteq P_\varepsilon$ un afinamiento de P_ε. Para cualquier elección de puntos χ:

$$L(f, P_\varepsilon) \leq L(f, P') \leq \sigma(f, P', \chi) \leq U(f, P') \leq U(f, P_\varepsilon).$$

Dado que $I = \overline{I} = \underline{I}$, tenemos:

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, P_\varepsilon) \leq L(f, P') \leq \sigma(f, P', \chi) \leq U(f, P') \leq U(f, P_\varepsilon) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esto implica:

$$|\sigma(f, P', \chi) - I| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Conclusión Si $\overline{I} = \underline{I}$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε tal que cualquier refinamiento $P' \supseteq P_\varepsilon$ satisface:

$$|\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, f es Riemann integrable en $[a, b]$.

$$\boxed{\overline{I} = \underline{I} \implies f \in \mathcal{R}[a,\ b]}$$

$\square$

Por Tanto:

$$\boxed{f \in R : [a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 [\exists P_\varepsilon : P' \supseteq P_\varepsilon |\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon] \iff \overline{I} = \underline{I}.}$$