Condición de Integrabilidad de Riemann

Alex David Montero Garay y Erick Herández Peón

20 de marzo de 2025

1. Equivalencias de Integrabilidad Riemann

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. f es Riemann integrable en $[a, b]$.
2. Para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε tal que para toda partición más fina $P' \supseteq P_\varepsilon$ y cualquier elección de puntos χ:

$$|\sigma(f, P', \chi) - I| < \varepsilon,$$

   donde $\sigma(f, P', \chi)$ es una suma de Riemann y $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

3. La integral superior e inferior coinciden:

$$\overline{I} = \underline{I}$$

Demostración de las equivalencias

Demostración (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que f es Riemann integrable. Por el criterio de Darboux, para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición P_ε tal que:

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon.$$

Si $P' \supseteq P_\varepsilon$, entonces:

$$L(P_\varepsilon, f) \le L(P', f) \le \sigma(f, P', \chi) \le U(P', f) \le U(P_\varepsilon, f).$$

Como $I = \int_a^b f(x)\,dx$, se cumple:

$$|\sigma(f, P', \chi) - I| \le U(P', f) - L(P', f) < \varepsilon. \qquad \square$$

Demostración (2) $\Rightarrow$ (3). Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis existe P_ε tal que para todo $P' \supseteq P_\varepsilon$:

$$I - \varepsilon < \sigma(f, P', \chi) < I + \varepsilon.$$

Tomando supremo e ínfimo sobre las sumas de Riemann:

$$I - \varepsilon \leq L(P', f) \leq \underline{(I)} \leq \overline{(I)} \leq U(P', f) \leq I + \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, se concluye:

$$\overline{I} = \underline{I} = I. \qquad \square$$

Demostración (3) $\Rightarrow$ (1). Por definición, f es Riemann integrable si y solo si:

$$\overline{I} = \underline{I}.$$

La igualdad en (3) implica directamente la integrabilidad, con $I = \int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 \implies 2 \implies 3 \implies 1 \\ \text{Equivalencia completa.} \end{array}}$$