

【专题】 含参函数问题

1. 设 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} \cos(2\pi x - 2\pi a) & , x < a \\ x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 5 & , x \geq a \end{cases}$, 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内恰有 6 个零点, 则 a 的取值范围是

A. $(2, \frac{9}{4}] \cup (\frac{5}{2}, \frac{11}{4}]$ B. $(\frac{7}{4}, 2) \cup (\frac{5}{2}, \frac{11}{4})$ C. $(2, \frac{9}{4}] \cup [\frac{11}{4}, 3)$ D. $(\frac{7}{4}, 2) \cup [\frac{11}{4}, 3]$

2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & , 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & , x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = -\frac{1}{4}x + a$ ($a \in \mathbf{R}$) 恰有两个互异的实数解, 则 a 的取值范围为

A. $[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}]$ B. $(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}]$ C. $(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}] \cup \{1\}$ D. $[\frac{5}{4}, \frac{9}{4}] \cup \{1\}$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & , x \leq 1 \\ x + \frac{2}{x} & , x > 1 \end{cases}$, 设 $a \in \mathbf{R}$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq |\frac{x}{2} + a|$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 则 a 的取值范围是
- A. $[-\frac{47}{16}, 2]$ B. $[-\frac{47}{16}, \frac{39}{16}]$ C. $[-2\sqrt{3}, 2]$ D. $[-2\sqrt{3}, \frac{39}{16}]$

4. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a - 2 & , x \leq 0 \\ -x^2 + 2x - 2a & , x > 0 \end{cases}$, 若对任意 $x \in [-3, +\infty)$, $f(x) \leq |x|$ 恒成立, 则 a 的取值范围为 _____ .

5. 已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2ax + a & , x \leq 0 \\ -x^2 + 2ax - 2a & , x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) = ax$ 恰有 2 个互异的实数解, 则 a 的取值范围为 _____.

6. 设 $a \in \mathbf{R}$, 对任意实数 x , 用 $f(x)$ 表示 $|x| - 2$, $x^2 - ax + 3a - 5$ 中的较小者, 若函数 $f(x)$ 至少有三个零点, 则 a 的取值范围为 _____.

7. 若函数 $f(x) = 2\sqrt{x^2 - ax} - |ax - 2| + 1$ 恰有一个零点, 则 a 的取值范围为 _____.

8. 设 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = ax^2 - 2x - |x^2 - ax + 1|$, 若 $f(x)$ 恰有两个零点, 则 a 的取值范围为 _____.

9. 已知函数 $f(x) = x^2 + a|x + 1|$.

- (1) 当 $a > 2$ 时, 判断 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的单调性;
- (2) 记 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的最小值为 $g(a)$, 求 $g(a)$ 的表达式及其最大值.

10. 已知函数 $f(x) = |x^2 - 1| - x^2 + ax$ ($a \in \mathbf{R}$, a 为常数) .

- (1) 若函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 求实数 a 的值;
- (2) 若函数 $y = f(x)$ 有 3 个零点, 求实数 a 的取值范围.

11. 已知函数 $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = x|x - 2a|$.

- (1) 若 $g(x)$ 是奇函数, 求 a 的值并判断 $g(x)$ 的单调性 (单调性不需证明);
- (2) 对任意 $x_1 \in [-1, +\infty)$, 总存在唯一的 $x_2 \in [2, +\infty)$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 求正实数 a 的取值范围.

12. 已知 $f(x) = \ln(ax)$, $a > 0$, $g(x) = \ln x^b$.

- (1) 若 $a = e$, $b = -1$, 求 $f(x) \cdot g(x)$ 的最大值;
- (2) 若 $a = 2$, 求关于 x 的不等式 $\frac{g(x)}{f(x)} \leq 0$ 的解集;
- (3) $F(x) = |f(x)| + |g(x)|$, 对于给定实数 b , 均有 x 满足 $F(x) \leq 1$, 求 a 的取值范围.