【专题】　含参函数问题

1. 设 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}\cos(2\pi x-2\pi a) & ,x<a\\ x^2-2(a+1)x+a^2+5 & ,x\geqslant a\end{cases}$，若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内恰有 6 个零点，则 a 的取值范围是

A. $(2,\frac{9}{4}]\cup(\frac{5}{2},\frac{11}{4}]$　　B. $(\frac{7}{4},2)\cup(\frac{5}{2},\frac{11}{4})$　　C. $(2,\frac{9}{4}]\cup[\frac{11}{4},3)$　　D. $(\frac{7}{4},2)\cup[\frac{11}{4},3]$

【答案】A

【解析】

因为二次函数在 $[a,+\infty)$ 上的零点个数只可能是 0，1 或 2，相应地，三角函数的零点需要为 6，5 或 4，因此以二次函数在 $[a,+\infty)$ 上的零点个数作为分类依据分类讨论.

对于方程 $x^2-2(a+1)x+a^2+5=0$，$\varDelta=4(a+1)^2-4(a^2+5)=8a-16$.

注意到二次函数的对称轴为 $x=a+1>a$，所以二次函数一定可以在 $x=a+1$ 处取得最小值 $4-2a$.

（1）若二次函数在 $[a,+\infty)$ 上无零点，则 $\varDelta<0$，即 $a<2$，此时三角函数在 $(0,a)$ 上有 6 个零点，

当 $x\in(0,a)$ 时，$2\pi x-2\pi a\in(-2\pi a,0)$，所以 $-\frac{13}{2}\pi\leqslant-2\pi a<-\frac{11}{2}\pi$，

解得 $\frac{11}{4}<a\leqslant\frac{13}{4}$，与 $a<2$ 矛盾.

（2）若二次函数在 $[a,+\infty)$ 上恰有 1 个零点，则 $\varDelta=0$，或 $\varDelta>0$ 且 $f(a)<0$，即 $a=2$ 或 $a>\frac{5}{2}$，此时三角函数在 $(0,a)$ 上有 5 个零点，

所以 $-\frac{11}{2}\pi\leqslant-2\pi a<-\frac{9}{2}\pi$，

解得 $\frac{9}{4}<a\leqslant\frac{11}{4}$，所以 $\frac{5}{2}<a\leqslant\frac{11}{4}$.

此时观察选项，只有 A 项符合题意.

（3）若二次函数在 $[a,+\infty)$ 上恰有 2 个零点，则 $\varDelta>0$ 且 $f(a)\geqslant0$，即 $2<a\leqslant\frac{5}{2}$，此时三角函数在 $(0,a)$ 上有 4 个零点，

所以 $-\frac{9}{2}\pi\leqslant-2\pi a<-\frac{7}{2}\pi$，

解得 $\frac{7}{4}<a\leqslant\frac{9}{4}$，所以 $2<a\leqslant\frac{9}{4}$.

综上，a 的取值范围是 $(2,\frac{9}{4}]\cup(\frac{5}{2},\frac{11}{4}]$

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & ,0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{1}{x} & ,x>1\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(x)=-\dfrac{1}{4}x+a$（$a\in\mathbf{R}$）恰有两个互异的实数解，则 a 的取值范围为

A. $[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}]$　　B. $(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}]$　　C. $(\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}]\cup\{1\}$　　D. $[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}]\cup\{1\}$

【答案】D

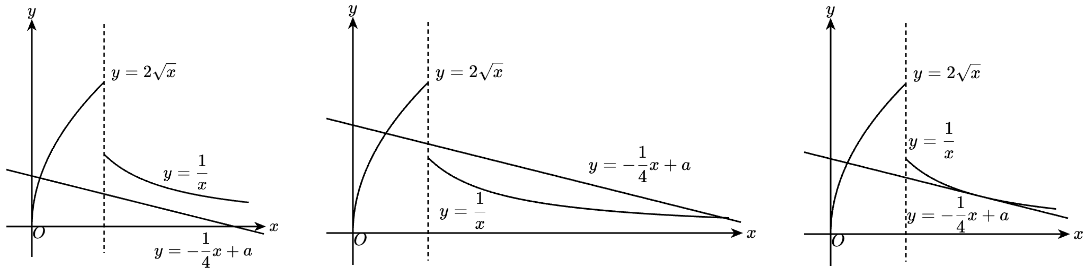
【解析】

思路一：$f(x)$ 的两段都是较为熟悉的曲线，且与 $y=-\dfrac{1}{4}x+a$ 联立的结果都是一元二次方程，因此可以考虑运用数形结合思想得到 a 满足的数量关系，进而求解 a 的范围.

思路二：$f(x)$ 的两段与 $y=-\dfrac{1}{4}x+a$ 联立的结果都是一元二次方程，因此可以考虑类比第 1 题，以两段上解的个数作为分类依据分类讨论.

思路三：注意到各选项的区别只在于是否包含 $\dfrac{5}{4}$ 和 1，因此只要将 $a=\dfrac{5}{4}$ 和 $a=1$ 代入检验即可. 这种思路与数形结合的思想共同作用能够更快地得到答案.

方法一：在同一坐标系下作出曲线 $y=f(x)$ 和直线 $y=-\dfrac{1}{4}x+a$，如图 (a) 所示：



(a)　　(b)　　(c)

由图易知，要使方程 $f(x)=-\dfrac{1}{4}x+a$ 恰有 2 个实数根，要么直线与线段 $x=1$（$1\leqslant y\leqslant 2$）相交，如图 (b) 所示；要么直线与曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 相切，如图 (c) 所示.

若直线与线段 $x=1$（$1\leqslant y\leqslant 2$）相交，则 $1\leqslant -\dfrac{1}{4}+a\leqslant 2$，解得 $\dfrac{5}{4}\leqslant a\leqslant\dfrac{9}{4}$；

若直线与曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 相切，则方程 $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{4}x+a$，即 $x^2-4ax+4=0$ 有且仅有一个正实根，所以 $\Delta=16a^2-16=0$，解得 $a=1$（负根舍去）.

综上，a 的取值范围为 $[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}]\cup\{1\}$.

事实上，分析图象可知，a 的取值范围应由一个闭区间和一个单点组成，由此可知答案只能为 D 项.

方法二：当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$2\sqrt{x}=-\dfrac{1}{4}x+a$，令 $t=\sqrt{x}\in[0,1]$，所以 $t^2+8t-4a=0$.

当 $x>1$ 时，$\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{4}x+a$，即 $x^2-4ax+4=0$.

首先讨论方程 $t^2+8t-4a=0$ 在 $[0,1]$ 上解的个数：

（1） 若方程在 $[0,1]$ 上有 2 个实根，则 $\begin{cases} \Delta=64+16a>0 \\ 0\leqslant t_1+t_2=-8\leqslant 2 \\ t_1t_2=-4a\geqslant 0 \\ (t_1-1)(t_2-1)=-4a+9\geqslant 0 \end{cases}$，不等式组无解.

（2） 若方程在 $[0,1]$ 上恰有 1 个实根，则 $-4a(9-4a)\leqslant 0$，解得 $0\leqslant a\leqslant \dfrac{9}{4}$.

（3） 若方程在 $[0,1]$ 上无实根，则 $a<0$ 或 $a>\dfrac{9}{4}$.

对于较为复杂的情况，可以取其他情况的补集得到结果.
再讨论方程 $x^2-4ax+4=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上解的个数：

（1） 若方程在 $(1,+\infty)$ 上有 2 个实根，则 $\begin{cases} \Delta=16a^2-16>0 \\ x_1+x_2=4a>2 \\ (x_1-1)(x_2-1)=5-4a\geqslant 0 \end{cases}\Rightarrow 1<a<\dfrac{5}{4}$.

（2） 若方程在 $(1,+\infty)$ 上恰有 1 个实根，则 $\begin{cases} \Delta=16a^2-16=0 \\ 2a>0 \end{cases}$ 或 $5-4a\leqslant 0\Rightarrow a=1$ 或 $a>\dfrac{5}{4}$.

（3） 若方程在 $(1,+\infty)$ 上无实根，则 $a<1$.

若方程 $f(x)=-\dfrac{1}{4}x+a$ 恰有 2 个实根，则 $\begin{cases} 0\leqslant a\leqslant \dfrac{9}{4} \\ a=1\text{或}a\geqslant\dfrac{5}{4} \end{cases}$，或 $\begin{cases} a<0\text{或}a>\dfrac{9}{4} \\ 1<a<\dfrac{5}{4} \end{cases}$，

解得 $a\in\{1\}\cup[\dfrac{5}{4},\dfrac{9}{4}]$.

方法三：当 $a=1$ 时，

解方程 $2\sqrt{x}=-\dfrac{1}{4}x+a$ 得 $x=-4\pm 2\sqrt{5}$，在 $[0,1]$ 上恰有 1 个实根；

解方程 $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{4}x+a$ 得 $x=2$，在 $(1,+\infty)$ 上恰有 1 个实根.

所以 $a=1$ 符合题意.

当 $a=\dfrac{5}{4}$ 时，

解方程 $2\sqrt{x}=-\dfrac{1}{4}x+a$ 得 $\sqrt{x}=-4\pm\sqrt{21}$，在 $[0,1]$ 上恰有 1 个实根；

解方程 $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{4}x+a$ 得 $x=-\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{11}{2}$，在 $(1,+\infty)$ 上恰有 1 个实根.

所以 $a=\dfrac{5}{4}$ 符合题意.

所以 $a=1$ 和 $a=\dfrac{5}{4}$ 属于 a 的取值范围，符合的选项只有 D 项.

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-x+3 & ,x\leqslant 1 \\ x+\dfrac{2}{x} & ,x>1 \end{cases}$，设 $a\in\mathbf{R}$，若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant|\dfrac{x}{2}+a|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围是

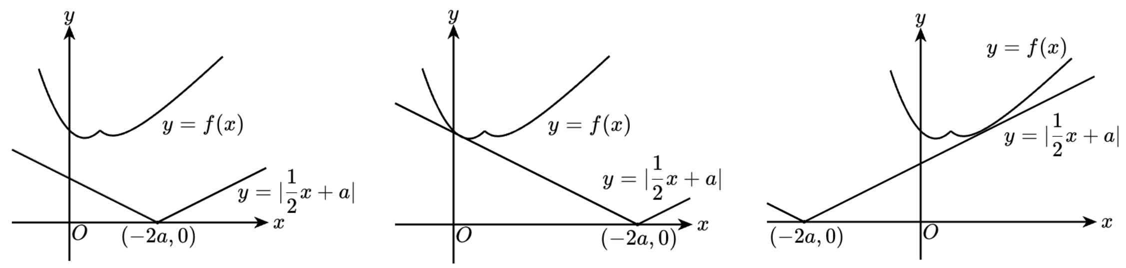
A. $[-\dfrac{47}{16},2]$　　B. $[-\dfrac{47}{16},\dfrac{39}{16}]$　　C. $[-2\sqrt{3},2]$　　D. $[-2\sqrt{3},\dfrac{39}{16}]$

【答案】A

【解析】

可以作出曲线 $y=f(x)$ 和折线 $y=|\dfrac{x}{2}+a|$，运用数形结合思想得到 a 满足的数量关系，进而求解 a 的范围.

在同一坐标系下作出曲线 $y=f(x)$ 和折线 $y=|\dfrac{x}{2}+a|=\begin{cases} -\dfrac{x}{2}-a & ,x\leqslant -2a \\ \dfrac{x}{2}+a & ,x>-2a \end{cases}$，如图 (a) 所示：



(a)　　(b)　　(c)

由图可知，要使不等式 $f(x)\geqslant|\dfrac{x}{2}+a|$ 对任意的实数 x 恒成立，只要曲线 $y=f(x)$ 始终在折线 $y=|\dfrac{x}{2}+a|$ 上方，两个临界点是曲线的左段与折线的左段相切以及曲线的右段与折线的右段相切.

若曲线的左段与折线的左段相切，

则方程 $x^2-x+3=-\dfrac{x}{2}-a$ 即 $2x^2-x+2(a+3)=0$ 有且仅有 1 个实根，

$\Delta=1-16(3+a)=0$，解得 $a=-\dfrac{47}{16}$；

若曲线的右段与折线的右段相切，

则方程 $x+\dfrac{2}{x}=\dfrac{x}{2}+a$ 即 $x^2-2ax+4=0$ 有且仅有 1 个实根，

$\Delta=4a^2-16=0$，解得 $a=2$（负根舍去）.

所以 a 的取值范围是 $[-\dfrac{47}{16},2]$.

4. 已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a-2 & ,x\leqslant 0\\ -x^2+2x-2a & ,x>0\end{cases}$，若对任意 $x\in[-3,+\infty)$，$f(x)\leqslant|x|$ 恒成立，则 a 的取值范围为 ______ .

【答案】$[\frac{1}{8},2]$

【解析】

思路一：可以作出曲线 $y=f(x)$ 和折线 $y=|x|$，运用数形结合思想得到 a 满足的数量关系，进而求解 a 的范围.

思路二：因为 $f(x)$ 和 $y=|x|$ 是分段点相同的分段函数，因此可以分别对 $[-3,0]$ 和 $(0,+\infty)$ 两段区间讨论.

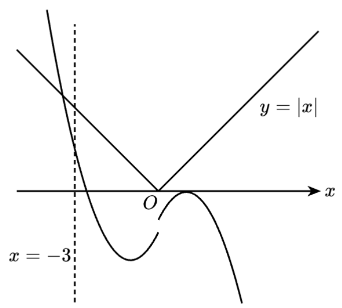
方法一：在同一坐标系下作出曲线 $y=f(x)$ 和折线 $y=|x|$，如下页图所示.

由图可知，要使不等式 $f(x)\leqslant|x|$ 对任意的 $x\in[-3,+\infty)$ 恒成立，需要满足 $f(-3)\leqslant|-3|$，$f(0)\leqslant 0$，且 $y=f(x)$ 的右段与 $y=x$ 无交点.

所以 $\begin{cases}f(-3)=a+1\leqslant 3\\ f(0)=a-2\leqslant 0\end{cases}\Rightarrow a\leqslant 2$，

且方程 $-x^2+2x-2a=x$，即 $x^2-x+2a=0$ 至多有一个实根，

所以 $\Delta=1-8a\leqslant 0\Rightarrow a\geqslant\frac{1}{8}$.



综上，a 的取值范围为 $[\frac{1}{8},2]$.

方法二：当 $x\in[-3,0]$ 时，$x^2+2x+a-2\leqslant -x$，即 $a\leqslant(-x^2-3x+2)_{\min}$，

因为 $-x^2-3x+2\geqslant 2$，所以 $a\leqslant 2$.

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$-x^2+2x-2a\leqslant x$，即 $2a\geqslant(-x^2+x)_{\max}$，

因为 $-x^2+x\leqslant\frac{1}{4}$，所以 $a\geqslant\frac{1}{8}$.

综上，a 的取值范围为 $[\frac{1}{8},2]$.

5. 已知 $a>0$，函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2ax+a & ,x\leqslant 0 \\ -x^2+2ax-2a & ,x>0 \end{cases}$，若关于 x 的方程 $f(x)=ax$ 恰有 2 个互异的实数解，则 a 的取值范围为 ______ .

【答案】$(4,8)$

【解析】

构造新的函数 $g(x)=f(x)-ax$，分类讨论即可.

令 $g(x)=f(x)-ax=\begin{cases} x^2+ax+a & ,x\leqslant 0 \\ -x^2+ax-2a & ,x>0 \end{cases}$，

先讨论方程 $x^2+ax+a=0$ 在 $(-\infty,0]$ 上实根的个数：

（1） 若方程 $x^2+ax+a=0$ 在 $(-\infty,0]$ 上有 2 个实根，则 $\begin{cases} \Delta=a^2-4a>0 \\ x_1+x_2=-a<0 \\ x_1x_2=a>0 \end{cases}$，解得 $a>4$.

（2） 若方程 $x^2+ax+a=0$ 在 $(-\infty,0]$ 上恰有 1 个实根，则 $\Delta=a^2-4a=0$，解得 $a=4$.

（3） 若方程 $x^2+ax+a=0$ 在 $(-\infty,0]$ 上无实根，则 $0<a<4$.

事实上，因为 $g(0)=a>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\to+\infty$，所以当 $x\leqslant 0$ 时，不会出现方程 $x^2+ax+a=0$ 的两个实根一正一负的情况. 当 $x>0$ 时类似.

再讨论方程 $-x^2+ax-2a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上实根的个数：

（1） 若方程 $-x^2+ax-2a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个实根，则 $\begin{cases} \Delta=a^2-8a>0 \\ x_1+x_2=a<0 \\ x_1x_2=2a>0 \end{cases}$，解得 $a>8$.

（2） 若方程 $-x^2+ax-2a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有 1 个实根，则 $\Delta=a^2-8a=0$，解得 $a=8$.

（3） 若方程 $-x^2+ax-2a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上无实根，则 $0<a<8$.

要使 $g(x)$ 恰有 2 个互异的实数解，则 $\begin{cases} a>4 \\ 0<a<8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=4 \\ a=8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0<a<4 \\ a>8 \end{cases}$，

解得 a 的取值范围为 $(4,8)$.

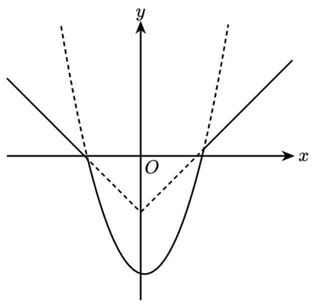
6. 设 $a \in \mathbf{R}$，对任意实数 x，用 $f(x)$ 表示 $|x|-2$，$x^2-ax+3a-5$ 中的较小者，若函数 $f(x)$ 至少有三个零点，则 a 的取值范围为 ______ .

【答案】$[10,+\infty)$

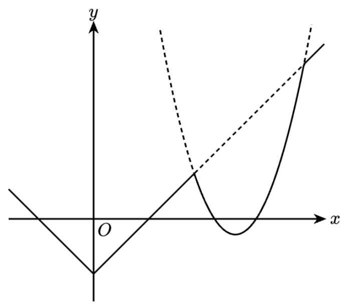
【解析】

所给函数都是较为熟悉的曲线，可以考虑运用数形结合思想得到 a 满足的数量关系，进而求解 a 的范围. 对于取小函数，作图时可以先分别作出各个函数的图象，再描出图象较低的部分.

在同一坐标系下作出折线 $y=|x|-2$ 和曲线 $y=x^2-ax+2a-5$（虚线），并取小得到 $y=f(x)$ 的图象（实线）如图 (a) 所示：



(a)



(b)

要使 $f(x)$ 至少有 3 个零点，必须使抛物线与折线交于 $(-\infty,-2)$ 或 $(2,+\infty)$，且与 x 轴有交点（如图 (b)），即

$$\begin{cases} \varDelta=a^2-12+20\geqslant 0 \\ 2^2-2a+3a-5\geqslant 0 \\ \dfrac{a}{2}>2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \varDelta=a^2-12+20\geqslant 0 \\ (-2)^2+2a+3a-5\geqslant 0 \\ \dfrac{a}{2}<-2 \end{cases}，\text{解得 } a\geqslant 10.$$

7. 设 $a \in \mathbf{R}$，函数 $f(x)=ax^2-2x-|x^2-ax+1|$，若 $f(x)$ 恰有两个零点，则 a 的取值范围为 ______ .

【答案】$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

【解析】

思路一：通过分类讨论去绝对值；

思路二：通过平方法去绝对值；

思路三：通过提取 x^2 降低次数，可以减小计算量.

方法一：设 $g(x)=x^2-ax+1$.

当 $g(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)=0 \Leftrightarrow (a-1)x^2+(a-2)x-1=0$，即 $[(a-1)x-1]\cdot(x+1)=0$.

当 $g(x)<0$ 时，$f(x)=0 \Leftrightarrow (a+1)x^2-(a+2)x+1=0$，即 $[(a+1)x-1]\cdot(x-1)=0$.

讨论与方法二类似.

方法二：$f(x)=0 \Rightarrow (ax^2-2x)^2=(x^2-ax+1)^2$，

整理得 $[(a+1)x^2-(a+2)x+1]\cdot[(a-1)x^2+(a-2)x-1]=0$，

即 $[(a+1)x-1]\cdot(x-1)\cdot[(a-1)x-1]\cdot(x+1)=0$，同时 $g(x)=ax^2-2x\geqslant 0$.

$g(1)=a-2$，$g(-1)=a+2$，$g(\dfrac{1}{a+1})=-\dfrac{a+2}{(a+1)^2}$，$g(\dfrac{1}{a-1})=-\dfrac{a-2}{(a-1)^2}$.

注意到其中两两符号相同.

当 $a=1$ 时，只有 $x=-1$ 满足条件，不合题意.

当 $a=-1$ 时，有 $x=1,-\dfrac{1}{2}$ 满足条件，符合题意.

当 $a=0$ 时，只有 $x=-1$ 满足条件，不合题意.

当 $a=2$ 时，有 $x=1,\dfrac{1}{3}$ 满足条件，符合题意.

当 $a=-2$ 时，有 $x=-1,-\dfrac{1}{3}$ 满足条件，符合题意.

当 $a\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ 时，$g(1),g(-1),g(\dfrac{1}{a+1}),g(\dfrac{1}{a-1})$ 中恰有两个不小于 0，且 $1,-1,\dfrac{1}{a+1},\dfrac{1}{a-1}$ 两两不同，符合题意.

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

方法三：显然 $f(0)\neq 0$，所以 $f(x)=0\Leftrightarrow a-\dfrac{2}{x}=|1-\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{x^2}|$，

设 $t=\dfrac{1}{x}$，则原方程等价于 $-2t+a=|t^2-at+1|$，

所以 $(t^2-at+1)^2=(-2t+a)^2$，即 $(t-1)\cdot[t-(a+1)]\cdot(t+1)\cdot[t-(a-1)]=0$，

所以不等式-方程组 $\begin{cases}(t-1)\cdot[t-(a+1)]\cdot(t+1)\cdot[t-(a-1)]=0\\ -2t+a\geqslant 0\end{cases}$ 恰有 2 个实数根，

分类讨论与方法二类似.

8. 若函数 $f(x)=2\sqrt{x^2-ax}-|ax-2|+1$ 恰有一个零点，则 a 的取值范围为 ______ .

【答案】$(-\sqrt{3},-1)\cup(1,\sqrt{3})$

【解析】

思路一：考虑分类讨论去绝对值，但 ax 含有参数 a，不便于讨论，因此不妨通过换元，将 ax 整体作为研究对象.

思路二：考虑分析函数，转化为曲线 $y=2\sqrt{x^2-ax}$ 和折线 $|ax-2|-1$ 的交点个数来研究.

方法一：当 $a=0$ 时，$f(x)=2|x|-1$，有 2 个零点，不合题意.

当 $a\neq 0$ 时，令 $t=ax$，$g(t)=f(x)=2\sqrt{\dfrac{t^2}{a^2}-t}-|t-2|+1$，

$g(t)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{\dfrac{t^2}{a^2}-t}=|t-2|-1$，所以 $|t-2|-1\geqslant 0$，即 $t\geqslant 3$ 或 $t\leqslant 1$，

注意到代数式中仅一处含有 a，且没有超越方程，因此可以考虑参变分离.

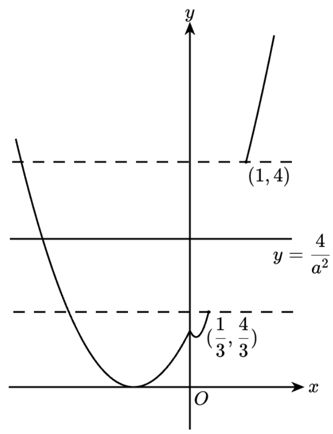
当 $t\in(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$ 时，$4(\dfrac{t^2}{a^2}-t)=(|t-2|-1)^2$，显然 $t=0$ 不是方程的根，

所以 $\dfrac{4}{a^2}=\dfrac{t^2+5-2|t-2|}{t^2}=\begin{cases}9(\dfrac{1}{t})^2-2(\dfrac{1}{t})+1 & ,t\geqslant 3\\ (\dfrac{1}{t})^2+2(\dfrac{1}{t})+1 & ,t\leqslant 1,t\neq 0\end{cases}$，

令 $m=\dfrac{1}{t}$，$h(m)=g(t)=\begin{cases}9m^2-2m+1 & ,0<m\leqslant\dfrac{1}{3}\\ m^2+2m+1 & ,m\geqslant 1\text{或}m<0\end{cases}$，

$h(m)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,\dfrac{1}{9}]$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{3})$ 上单调递增，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

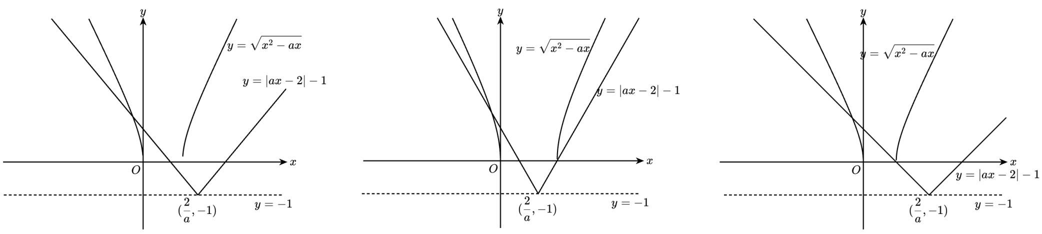
所以 $h(m)$ 的大致图象如下：



因为 x，t，m 一一对应，所以 $f(x)$ 恰有一个零点，等价于直线 $y=\dfrac{4}{a^2}$ 与 $y=h(m)$ 的图象恰有一个交点，

由图可知，$\dfrac{4}{3}<\dfrac{4}{a^2}<4$，解得 a 的取值范围为 $(-\sqrt{3},-1)\cup(1,\sqrt{3})$.

方法二：在同一坐标系下作出曲线 $y=2\sqrt{x^2-ax}$ 和折线 $y=|ax-2|-1$ 如图 (a) 所示：



(a) (b) (c)

显然 $a=0$ 不合题意，首先讨论 $a>0$ 的情况.

当 $a>0$ 时，$y=2\sqrt{x^2-ax}\Leftrightarrow\dfrac{(x-\dfrac{a}{2})^2}{\dfrac{a^2}{4}}-\dfrac{y^2}{a^2}=1(y\geqslant 0)$ 表示一个双曲线的上半部分，其中心是 $(\dfrac{a}{2},0)$，渐近线斜率为 ± 2.

注意到曲线过 $(0,0)$，$(a,0)$，因此当曲线与折线恰有 1 个交点时，考虑两种边界情况：

如图 (b) 所示，当折线的顶点左移、斜率增大，右段恰好过点 $(a,0)$ 时，

有 $a^2-2-1=0$，解得 $a=\sqrt{3}$.

如图 (c) 所示，当折线的顶点右移、斜率减小，左段恰好过点 $(a,0)$ 时，

有 $2-a^2-1=0$，解得 $a=1$.

当 $a\in(1,\sqrt{3})$ 时，折线的斜率小于渐近线斜率，又折线过 $(0,3)$，所以折线的左段与曲线左支必有一个交点，符合题意.

同理，$a\in(-\sqrt{3},-1)$ 也符合题意.

所以 a 的取值范围为 $(-\sqrt{3},-1)\cup(1,\sqrt{3})$.

9. 已知函数 $f(x)=x^2+a|x+1|$.

（1） 当 $a>2$ 时，判断 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的单调性；

（2） 记 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $g(a)$，求 $g(a)$ 的表达式及其最大值.

【解答】

（1） 当 $x\leqslant -1$ 时，$f(x)=x^2-ax-a$，对称轴 $x=\dfrac{a}{2}>1>-1$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减.

当 $x>-1$ 时，$f(x)=x^2+ax+a$，对称轴 $x=-\dfrac{a}{2}<-1$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

综上，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

（2） $f(x)=\begin{cases} x^2-ax-a & ,x\leqslant -1 \\ x^2+ax+a & ,x>-1 \end{cases}$，

注意到 $f(x)$ 两段的对称轴互为相反数，因此只有对称轴横坐标都大于 -1、一个大于 -1 一个小于 -1，以及反之的三种情况.

(i) 当 $\dfrac{a}{2}<-1$，即 $a<-2$ 时，$-\dfrac{a}{2}>1>-1$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\dfrac{a}{2})$，$(-1,-\dfrac{a}{2})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{a}{2},-1)$，$(-\dfrac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增，

而 $f(\dfrac{a}{2})=-\dfrac{a^2}{4}-a$，$f(-\dfrac{a}{2})=-\dfrac{a^2}{4}+a$，$f(\dfrac{a}{2})>f(-\dfrac{a}{2})$，

所以 $g(a)=-\dfrac{a^2}{4}+a$.

(ii) 当 $\dfrac{a}{2}\geqslant -1$ 且 $-\dfrac{a}{2}\geqslant -1$，即 $-2\leqslant a\leqslant 2$ 时，

$f(x)$ 在 $(-\infty,-\dfrac{a}{2})$ 上单调递减，在 $(-\dfrac{a}{2},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(a)=f(-\dfrac{a}{2})=-\dfrac{a^2}{4}+a$.

(i) 当 $-\dfrac{a}{2}<-1$，即 $a>2$ 时，$\dfrac{a}{2}>1>-1$，

所以 $f(x)$ 在在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(a)=f(-1)=1$.

综上，$g(a)=\begin{cases} -\dfrac{a^2}{4}+a & ,a\leqslant 2 \\ 1 & ,a>2 \end{cases}$，

当 $a\leqslant 2$ 时，$g(a)=-\dfrac{a^2}{4}+a\leqslant g(2)=1$，所以 $g(a)_{\max}=1$.

10. 已知函数 $f(x)=|x^2-1|-x^2+ax$（$a\in\mathbf{R}$，a 为常数）.

（1） 若函数 $y=f(x)$ 是偶函数，求实数 a 的值；

（2） 若函数 $y=f(x)$ 有 3 个零点，求实数 a 的取值范围.

【解答】

（1） 因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)=f(-x)$，
即 $|x^2-1|-x^2+ax=|x^2-1|-x^2-ax$，所以 $a=0$.

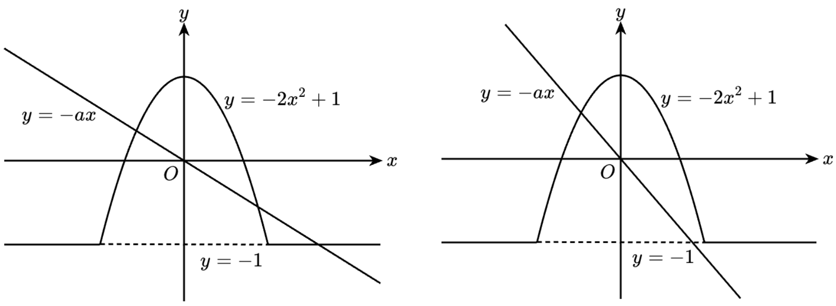
（2） **思路一：** 由于 $f(x)$ 由两条曲线（$y=|x^2-1|$ 和 $y=x^2-ax$）组成，因此图象难以分析，且考虑到当 $x^2>1$ 时函数形式简单，故可以直接分类讨论.
思路二： 考虑到将 $f(x)$ 拆分为 $y=|x^2-1|-x^2$ 和 $y=ax$ 也较为简单，可以运用数形结合思想得到 a 满足的数量关系，进而求解 a 的范围.

方法一： $f(x)=\begin{cases} ax-1 & ,x<-1\text{或}x>1 \\ -2x^2+ax+1 & ,-1\leqslant x\leqslant 1 \end{cases}$，

因为当 $x\in(-1,1)$ 时函数至多有 2 个零点，因此要使 $f(x)$ 有 3 个零点，必须使 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 上有 1 个零点，在 $[-1,1]$ 上有 2 个零点.

所以 $\begin{cases} \dfrac{1}{a}<-1\text{或}\dfrac{1}{a}>1 \\ \varDelta=a^2+8>0 \\ -2\leqslant x_1+x_2=\dfrac{a}{2}\leqslant 2 \\ (x_1-1)(x_2-1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{a}{2}\geqslant 0 \\ (x_1+1)(x_2+1)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{2}\geqslant 0 \end{cases}\Rightarrow a\in(-1,0)\cup(0,1).$

方法二： 在同一坐标系下作出曲线 $y=|x^2-1|-x^2$ 和直线 $y=-ax$ 如图 (a)(b) 所示：



(a) (b)

注意到直线 $y=-ax$ 与 $y=|x^2-1|-x^2$ 在 $x^2\geqslant 1$ 的部分相交时，与 $x^2\leqslant 1$ 的部分也必有 2 个交点（如图 (a)）；
反之，若直线 $y=-ax$ 与 $y=|x^2-1|-x^2$ 在 $x^2\geqslant 1$ 的部分不相交，则其与 $x^2\leqslant 1$ 的部分只有 1 个交点（如图 (b)）.
所以要使 $f(x)$ 有 3 个零点，只要使方程 $-ax=-1$ 在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 上有解，
所以 $a=\dfrac{1}{x}\in(-1,0)\cup(0,1)$.

11. 已知函数 $f(x)=2^{x+1}$，$g(x)=x|x-2a|$.

（1） 若 $g(x)$ 是奇函数，求 a 的值并判断 $g(x)$ 的单调性（单调性不需证明）；

（2） 对任意 $x_1\in[-1,+\infty)$，总存在唯一的 $x_2\in[2,+\infty)$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，求正实数 a 的取值范围.

【解答】

（1） 因为 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $g(x)+g(-x)=x|x-2a|-x|x+2a|=0$，
所以 $(x-2a)^2=(x+2a)^2$ 即 $8ax=0$ 对任意的实数 x 恒成立，所以 $a=0$.
$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

（2） 因为当 $x_1\in[-1,+\infty)$ 时，$f(x_1)\in[1,+\infty)$，
所以原命题等价于 $\forall y\geqslant 1$，方程 $g(x)=y$ 在 $[2,+\infty)$ 上恰有 1 个实根.

$g(x)=\begin{cases}x^2-2ax & ,x\geqslant 2a\\ -x^2+2ax & ,x<2a\end{cases}$，二次函数的对称轴为 $x=a$.

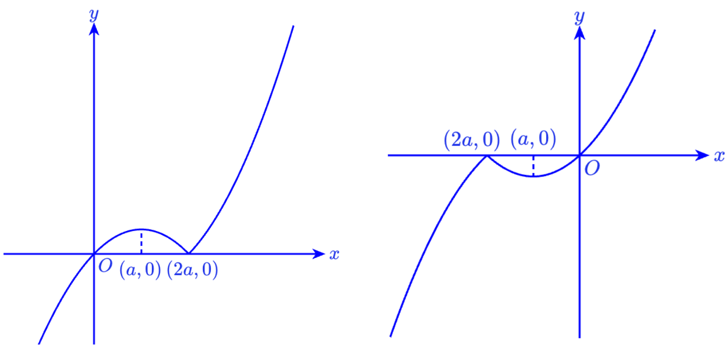
（i）当 $2a\leqslant 2$，即 $a\leqslant 1$ 时，$g(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，
此时 $g(2)=4-4a\leqslant 1$，解得 $a\geqslant\dfrac{3}{4}$，所以 $\dfrac{3}{4}\leqslant a\leqslant 1$.

（ii）当 $a<2<2a$，即 $1<a<2$ 时，$g(x)$ 在 $(2,2a)$ 上单调递减，在 $(2a,+\infty)$ 上单调递增，
此时 $g(2)=4a-4<1$，解得 $a<\dfrac{5}{4}$，所以 $1<a<\dfrac{5}{4}$.

（iii）当 $a\geqslant 2$ 时，$g(x)$ 在 $[2,a)$ 上单调递增，在 $(a,2a)$ 上单调递减，在 $(2a,+\infty)$ 上单调递增，
此时 $g(a)=a^2<1$，解得 $-1<a<1$，与 $a\geqslant 2$ 矛盾.

综上，a 的取值范围为 $[\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4})$.

可以分别作出 $a<0$，$a>0$ 时 $g(x)$ 的大致图象（如图 (a)，(b) 所示）辅助判断.



(a) (b)

12. 已知 $f(x)=\ln(ax)$，$a>0$，$g(x)=\ln x^b$.

（1） 若 $a=\mathrm{e}$，$b=-1$，求 $f(x)\cdot g(x)$ 的最大值；

（2） 若 $a=2$，求关于 x 的不等式 $\dfrac{g(x)}{f(x)}\leqslant 0$ 的解集；

（3） $F(x)=|f(x)|+|g(x)|$，对于给定实数 b，均有 x 满足 $F(x)\leqslant 1$，求 a 的取值范围.

【解答】

（1） 若 $a=\mathrm{e}$，$b=-1$，则 $f(x)=\ln x+1$，$g(x)=-\ln x$，

$f(x)\cdot g(x)=-\ln x(\ln x+1)=-(\ln x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}\leqslant\dfrac{1}{4}$，

当且仅当 $\ln x=-\dfrac{1}{2}$，即 $x=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ 时取等，

所以 $f(x)\cdot g(x)$ 的最大值为 $\dfrac{1}{4}$.

（2） 若 $a=2$，则 $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{b\ln x}{\ln(2x)}$，

当 $b=0$ 时，$f(x)\neq 0$，解集为 $(-\infty,\dfrac{1}{2})\cup(\dfrac{1}{2},+\infty)$.

当 $b>0$ 时，$\dfrac{g(x)}{f(x)}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x\leqslant 0\\ \ln(2x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\ln x>0\\ \ln(2x)<0\end{cases}$，解集为 $(\dfrac{1}{2},1]$.

当 $b<0$ 时，$\dfrac{g(x)}{f(x)}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x\geqslant 0\\ \ln(2x)>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\ln x<0\\ \ln(2x)<0\end{cases}$，解集为 $(0,\dfrac{1}{2})\cup[1,+\infty)$.

（3） *对于两个绝对值函数，可以多段讨论取绝对值.*

原命题等价于 $F(x)=|\ln x+\ln a|+|b\ln x|$ 的最小值不大于 1.

（i） 当 $a=1$ 时，$F(x)=(1+|b|)|\ln x|$.

$F(x)_{\min}=F(1)=0\leqslant 1$，符合题意.

（ii） 当 $0<a<1$ 时，$F(x)=\begin{cases}-(1+|b|)\ln x-\ln a & ,0<x\leqslant 1\\ (|b|-1)\ln x-\ln a & ,1<x\leqslant\dfrac{1}{a}\\ (|b|+1)\ln x+\ln a & ,x>\dfrac{1}{a}\end{cases}$，

若 $|b|>1$，$F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$F(x)_{\min}=F(1)=-\ln a\leqslant 1\Rightarrow a\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $a\in[\dfrac{1}{\mathrm{e}},1)$.

若 $|b|=1$，$F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,\dfrac{1}{a})$ 上不变，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，

$F(x)_{\min}=F(1)=-\ln a\leqslant 1\Rightarrow a\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，所以 $a\in[\dfrac{1}{\mathrm{e}},1)$.

若 $0<|b|<1$，$F(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，

$F(x)_{\min}=F(\dfrac{1}{a})=-|b|\ln a\leqslant 1\Rightarrow a\geqslant\mathrm{e}^{-\frac{1}{|b|}}$，所以 $a\in[\mathrm{e}^{-\frac{1}{|b|}},1)$.

若 $|b|=0$，则 $F(x)_{\min}=0\leqslant 1$，所以 $a\in(0,+\infty)$.

（iii）当 $a>1$ 时，$F(x)=\begin{cases} -(1+|b|)\ln x-\ln a & ,0<x\leqslant \dfrac{1}{a} \\ (1-|b|)\ln x+\ln a & ,\dfrac{1}{a}<x\leqslant 1 \\ (|b|+1)\ln x+\ln a & ,x>1 \end{cases}$，

若 $|b|>1$，$F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，
$F(x)_{\min}=F(1)=\ln a\leqslant 1\Rightarrow a\leqslant \mathrm{e}$，所以 $a\in(1,\mathrm{e}]$.

若 $|b|=1$，$F(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{a},1)$ 上不变，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，
$F(x)_{\min}=F(1)=\ln a\leqslant 1\Rightarrow a\leqslant \mathrm{e}$，所以 $a\in(1,\mathrm{e}]$.

若 $|b|<1$，$F(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{a})$ 上单调递减，在 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增，
$F(x)_{\min}=F(\dfrac{1}{a})=|b|\ln a\leqslant 1\Rightarrow a\leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{|b|}}$，所以 $a\in(1,\mathrm{e}^{\frac{1}{|b|}}]$. 若 $|b|=0$，则 $F(x)_{\min}=0\leqslant 1$，所以 $a\in(0,+\infty)$.

综上，若 $|b|\geqslant 1$，则 $a\in[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}]$；
若 $0<|b|<1$，则 $a\in[\mathrm{e}^{-\frac{1}{|b|}},\mathrm{e}^{\frac{1}{|b|}}]$；
若 $|b|=0$，则 $a\in(0,+\infty)$.