2024年普通高等学校招生全国统一考试 模拟试题

数学参考答案

一、选择题：本题有8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	B	D	A	D	B	A

二、选择题：本题有3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。

题号	9	10	11
答案	BD	AB	ACD

三、填空题：本题有3小题，每小题5分，共15分。

题号	12	13	14
答案	37或41或49	$[\frac{11}{3},\frac{13}{3})$	$[1,3]$

四、解答题：本大题有5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. （13分）

（1）

设$P(x,y)$（$-2<x<2$），则$\dfrac{|PM|^2}{|AM|\cdot|BM|}=\dfrac{y^2}{(x+2)(2-x)}=\dfrac{3}{4}$，

整理得$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$（$-2<x<2$），　　3分

所以Γ是长轴为4，短轴为$2\sqrt{3}$的椭圆（不含左、右顶点），焦距为2，

由椭圆的定义知，存在C，D为椭圆的焦点，使得$\triangle PCD$的周长为定值.　　6分

（2）

显然直线l的斜率存在且不为0，设$l: y=kx+m$（$y\neq\pm 2k+m$），$P_0(x_0,y_0)$，

与Γ的方程联立得$(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

令$\Delta=64k^2m^2-4(4k^2+3)(4m^2-12)=0$，得$4k^2+3=m^2$，　　9分

$x_0=-\dfrac{8km}{2(4k^2+3)}=-\dfrac{4km}{m^2}=-\dfrac{4k}{m}$，　　11分

由l的方程得$Q(-\dfrac{m}{k},0)$，故$\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\dfrac{m}{k}x_0+0=4$.　　13分

16. （15 分）

（1）

原不等式等价于$(e^{x+1}+x)(x+1)\geq 0$， 2 分

设$g(x)=e^{x+1}+x$，因为$g'(x)=e^{x+1}+1>0$，所以$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增； 4 分

所以当$x\leq -1$时，$g(x)\leq g(-1)=0$，$x+1\leq 0$，于是$(e^{x+1}+x)(x+1)\geq 0$；

当$x>-1$时，$g(x)>g(-1)=0$，$x+1>0$，于是$(e^{x+1}+x)(x+1)\geq 0$；

综上，原不等式恒成立. 7 分

（2）

$f'(x)=\dfrac{(2x+1)e^x-(x^2+x)e^x}{(e^x)^2}=\dfrac{-x^2+x+1}{e^x}$， 9 分

曲线$y=f(x)$在点$(t,f(t))$处切线的方程为$y=f'(t)(x-t)+f(t)$，

令$x=0$，则$y_0=f(t)-tf'(t)=\dfrac{t^3}{e^t}$， 11 分

设$h(t)=\dfrac{t^3}{e^t}$，则$h'(t)=\dfrac{t^2(3-t)}{e^t}$，

当$t<3$时，$h'(t)\geq 0$，$h(t)$单调递增；当$t>3$时，$h'(t)<0$，$h(t)$单调递减， 13 分

所以$h(t)\leq h(3)=\dfrac{27}{e^3}$，即$y_0$的最大值为$\dfrac{27}{e^3}$. 15 分

17. （15 分）

（1）

$\cos(A-B)+\cos C=\sqrt{3}\sin B$，

所以$\cos(A-B)-\cos(A+B)=\sqrt{3}\sin B$，

即$\cos A\cos B+\sin A\sin B-(\cos A\cos B-\sin A\sin B)=2\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B$，

因为$\sin B>0$，所以$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos A=\pm\dfrac{1}{2}$， 3 分

由余弦定理得$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos A=\pm\dfrac{1}{2}$，

代入$a=5\sqrt{3}$，$b=8$，解得$c=3\sqrt{3}\pm 4$. 6 分

（2）

因为$a<b$，所以$A<B$，A为锐角，所以$A=\frac{\pi}{3}$，$\cos A=\frac{1}{2}$， 7 分

因为$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r=\frac{1}{2}ah$，所以$\frac{h}{r}=\frac{b+c}{a}+1$， 9 分

由正弦定理得$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{2\sqrt{3}}{3}[\sin B+\sin(\frac{2\pi}{3}-B)]$

$$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B)=2\sin(B+\frac{\pi}{6}),$$ 12 分

因为$\begin{cases}B>A\\A+B<\pi\end{cases}$，所以$B\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$，所以$\frac{h}{r}=2\sin(B+\frac{\pi}{6})+1\in(2,3)$，

所以$\frac{r}{h}$的取值范围为$(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$. 15 分

18. （17 分）

（1）

由题意，$P(X=\frac{m}{n})=C_n^m(\frac{i-1}{k})^m(1-\frac{i-1}{k})^{n-m}$（$m=0,1,\cdots,n$）， 2 分

所以$E(X)=\sum_{m=0}^{n}\frac{m}{n}C_n^m(\frac{i-1}{k})^m(1-\frac{i-1}{k})^{n-m}=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n}mC_n^m(\frac{i-1}{k})^m(1-\frac{i-1}{k})^{n-m}$，

由二项分布的期望公式知$\sum_{m=0}^{n}mC_n^m(\frac{i-1}{k})^m(1-\frac{i-1}{k})^{n-m}=n\cdot\frac{i-1}{k}$， 4 分

故$E(X)=\frac{i-1}{k}$. 6 分

（2）

记“选中第i个商家”为A_i，“m位买家对选中的商家均打好评”为G_m，

则$P(A_i)=\frac{1}{k+1}$，$P(G_n|A_i)=(\frac{i-1}{k})^n$，

由全概率公式得$P(G_n)=\sum_{i=1}^{k+1}P(A_i)P(G_n|A_i)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}(\frac{i-1}{k})^n=\frac{1}{n+1}$. 12 分

（3）

$$P(G_{n+1})=\sum_{i=1}^{k+1}P(A_i)P(G_{n+1}|A_i)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}(\frac{i-1}{k})^{n+1}=\frac{1}{n+2}$$

$$P(G_{n+1}|G_n)=\frac{P(G_{n+1})}{P(G_n)}=\frac{n+1}{n+2},$$ 15 分

这是一个关于n的单调递增的函数，也就是说在n个人打出好评的条件下，n越大，下一位买家打出好评的概率也越大（购物体验越好），因此人们在好评率相同的商家中倾向于选择评价人数多的商家. 17 分

19. （17 分）

（1）

设$\{c_n\}$的公比为μ，则$L_{n+2}-\lambda L_{n+1}=\mu(L_{n+1}-\lambda L_n)$，

即$L_{n+2}-(\lambda+\mu)L_{n+1}+\lambda\mu L_n=0$，

对比$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$即$L_{n+2}-L_{n+1}-L_n=0$得$\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda\mu=-1\end{cases}$，

所以λ，μ是关于x的方程$x^2-x-1=0$的两根，解得$\begin{cases}\lambda=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \mu=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}\lambda=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ \mu=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$，

故所有满足题意的λ为$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$（即ϕ和$1-\phi$）. 5 分

（2）

取$\lambda=\phi$，则$L_{n+1}-\phi L_n=(3-\phi)(1-\phi)^{n-1}=-\sqrt{5}(1-\phi)^n\cdots$①；

另取$\lambda=1-\phi$，则$L_{n+1}-(1-\phi)L_n=[3-(1-\phi)]\phi^{n-1}=\sqrt{5}\phi^n\cdots$②.

②式减去①式得$\sqrt{5}L_n=\sqrt{5}[\phi^n+(1-\phi)^n]$，

于是$L_n=\phi^n+(1-\phi)^n$. 8 分

所以$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{L_{n+1}}{L_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\phi^{n+1}+(1-\phi)^{n+1}}{\phi^n+(1-\phi)^n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}\phi^{n+1}+\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\phi)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\phi^n+\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\phi)^n}$，

因为$|1-\phi|<1$，所以$\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\phi)^{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\phi)^n=0$，

所以$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{L_{n+1}}{L_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}\phi^{n+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty}\phi^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\phi^{n+1}}{\phi^n}=\phi$. 11 分

（3）设$d_n=\dfrac{L_n}{10^n}=(\dfrac{\phi}{10})^n+(\dfrac{1-\phi}{10})^n$，

则$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}d_k=\dfrac{\dfrac{\phi}{10}[1-(\dfrac{\phi}{10})^n]}{1-\dfrac{\phi}{10}}+\dfrac{\dfrac{1-\phi}{10}[1-(\dfrac{1-\phi}{10})^n]}{1-\dfrac{1-\phi}{10}}$

$$=\frac{\phi[1-(\frac{\phi}{10})^n]}{10-\phi}+\frac{(1-\phi)[1-(\frac{\phi}{10})^n]}{9+\phi}$$ 14 分

其中$\left|\frac{\phi}{10}\right|<1$，$\left|\frac{1-\phi}{10}\right|<1$，所以$\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{\phi}{10})^n=\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1-\phi}{10})^n=0$，

于是$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{\phi}{10-\phi}+\frac{1-\phi}{9+\phi}=\frac{2(\phi^2-\phi)+10}{90-(\phi^2-\phi)}$，

因为$\phi^2-\phi-1=0$，即$\phi^2-\phi=1$，

所以$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{12}{89}$，此即题述无限循环小数的分数形式. 17 分