

跨越——从极值点偏移到双变量不等式（一）

从特殊到一般，既是数学的思维过程，也是具体到抽象的哲学思维过程。数学就是如此奇妙，对于众多极值点偏移问题的研究，最终聚焦到简单的一个词——消元。极值点偏移问题隶属于双变量不等式这一大范畴内，当我们蜕去了“极值点偏移”这层外壳，抓住“消元”这一本质问题时，双变量不等式问题或许也就迎刃而解了。就仿佛在这岁宴之时，当我们洗褪过去一年里时光在我们身上覆盖的尘埃，我们便怀揣着内心深处的光明与热忱，去迎接新的一年岁月的洗礼。

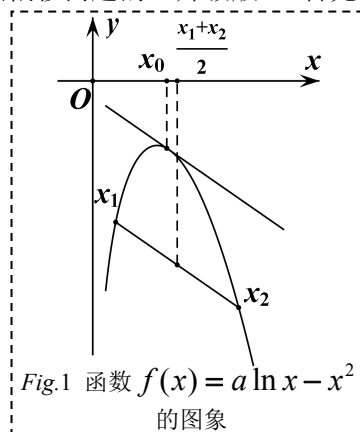
双变量不等式的类型有很多，实际解答过程中涉及的消元方法也五花八门。本文选取几个较典型的题进行探究。

【例 1】已知函数 $f(x) = a \ln x - x^2 (a > 0)$ ，设 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，若 $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ ，使得 $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ，求证： $x_1 + x_2 > 2x_0$ 。

这是一道以拉格朗日中值定理为背景的考题，也是极值点偏移问题的“升级版”。首先我们从“形”的角度理解一下待证的不等式。

如图 Fig.1，在 $x = x_0$ 处作曲线 $y = f(x)$ 的切线，使得该切线的斜率为 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ，即割线的斜率。由该函数极值

点偏移的性质发现， $\frac{x_1 + x_2}{2} > x_0$ 。



与之前的极值点偏移问题不同，这里的 x_0 不是函数 $f(x)$ 的性质，而是导函数 $f'(x)$ 。进一步说，之前的极值点偏移问题， x_0 是原函数的极值点，

代表了原函数的偏移性质，而这里的 x_0 是由 $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 来定义的，因此是导

函数的偏移性质。此外，在考虑消去未知数时，我们需要优先消去 x_0 ，因为 x_1, x_2 在条件等式和结论不等式中呈现出对称性。于是，我们类比极值点偏移问题中“借船出海”的方法，先将自变量的不等关系转化为函数值的不等关系，而且这里选取的函数应该是导函数 $f'(x)$ ，因为它的单调性明确，且条件中有关于 $f'(x_0)$ 的等式。

因为 $f''(x) = -(\frac{a}{x^2} + 2) < 0$ ，所以 $f'(x) = \frac{a - 2x^2}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减，

所以要证 $x_1 + x_2 > 2x_0$ ，即 $\frac{x_1 + x_2}{2} > x_0$ ，只要证 $f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) < f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

于是我们消去了 x_0 ，接下来将解析式展开整理，剩下的过程就比较自然了：

$$\begin{aligned} \text{即 } \frac{a - 2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}{\frac{x_1 + x_2}{2}} &< \frac{a(\ln x_2 - \ln x_1) - (x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1}, \\ \text{即 } \frac{2a}{x_1 + x_2} - (x_1 + x_2) &< \frac{a \ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} - (x_2 + x_1), \text{ 亦即 } \ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{2(x_2 - x_1)}{x_2 + x_1} > 0 \end{aligned}$$

剩下的部分只要用比值换元就可以解决，又是我们常见的不等式了。因此解决本题的关键在于消去 x_0 ，我们是利用条件给的 $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ，以及导函数 $f'(x)$ 的单调性，

通过“借船出海”完成的。

下面这道题就要求我们对常见函数的性质有深刻的认识，或者说需要有敏锐的观察力：

【例 2】 已知函数 $f(x) = (x-1)\ln x - a(x+1) (a > 0)$ 的两个零点为 x_1, x_2 ，求证：

$$\frac{1}{\ln x_1 - a} + \frac{1}{\ln x_2 - a} > 0.$$

拿到这道题，起手从 $f(x)$ 思考是比较盲目的，因为它与待证结果看上去八竿子打不着。正难则反，我们不妨先从结果入手。可以看到结果中含有 $\ln x - a$ 这么一个奇怪的结构，为了更接近这个结构，我们可以对 $f(x)$ 的解析式进行改写：

$$\text{令 } f(x) = (x-1)(\ln x - a) + a(x-1) - a(x+1) = (x-1)(\ln x + a) - 2a = 0,$$

$$\text{则 } \frac{1}{\ln x_1 + a} = \frac{x_1 - 1}{2a}, \quad \frac{1}{\ln x_2 + a} = \frac{x_2 - 1}{2a}.$$

于是待证不等式转化为了：

$$\frac{x_1 - 1}{2a} + \frac{x_2 - 1}{2a} > 0, \text{ 即 } x_1 + x_2 > 2.$$

这样看起来就像一个常规的极值点偏移问题了。但是 $f(x)$ 的解析式很复杂，直接利用它进行证明并不方便。所以依据“对数单身狗”的原则，先对代数式进行转化，并分析零点的分布情况：

$$\text{显然 } x \neq 1, \text{ 所以 } f(x) = 0 \Rightarrow \ln x - \frac{a(x+1)}{x-1} = 0, \text{ 设 } g(x) = \ln x - \frac{a(x+1)}{x-1},$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - a \left[\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} \right] = \frac{(x-1)^2 + 2a}{x(x-1)^2} > 0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ ， $(1,+\infty)$ 上单调递增，不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2$ 。

做好铺垫后，再用常规方法证明 $x_1 + x_2 > 2$ ：

设 $h(x) = g(x) - g(2-x) (1 < x < 2)$,

$$\text{则 } h'(x) = \frac{(x-1)^2 + 2a}{x(x-1)^2} - \frac{(1-x)^2 + 2a}{(2-x)(1-x)^2} = \frac{2[(1-x)^2 + 2a]}{x(2-x)(x-1)^2} > 0,$$

所以 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增, $h(x) > h(1) = 0$,

所以 $g(2-x_2) < g(x_2) = g(x_1) = 0$,

又 $2-x_2 \in (0,1)$, $x_1 \in (0,1)$, 所以 $2-x_2 < x_1$, 即 $x_1 + x_2 > 2$ 。

解决这道题的过程中进行了两次关键的代数变形,第一次是为了向结论的代数结构靠拢,第二次是为了简化运算。因此在解决导数问题的过程中,根据实际情况因地制宜,灵活应变是很重要的。上文之所以说这题需要有敏锐的观察力,是因为如果看到了 $a = \frac{(x-1)\ln x}{x+1}$ 中的 $\frac{x-1}{x+1}$ 和 $\ln x$ 两部分都有 $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ 的性质,则显然 $x_1 x_2 = 1$,再结合第一步中已经将待证结果转化为了 $x_1 + x_2 > 2$,配合基本不等式即可证毕。因此对特殊点的函数值、特殊性质的敏感性也是很重要的。

除了已经提到一些思路之外,还有一种常见的消元思路,是专门针对含参乘积型极值点偏移问题的。例如下面这道题:

【例3】已知函数 $f(x) = \ln x - ax - \frac{1}{x} (a > 0)$ 的两个零点为 x_1, x_2 , 求证 $x_1 x_2 > 2e^2$ 。

上回我们研究过一个“ $x_1 x_2 < 4b^2$ ”的问题,其中除了用到三角放缩,还用到了对数均值不等式。考虑到文章篇幅,笔者在做了很多同类型的题后,粗略地总结出如下规律:首先写出题设的两个同构等式,并将两式相减,然后分为两种情况:一,若只有一个等式或两式相减后参数被消去,则考虑运用对数均值不等式或直接进行比值消元;二,若两式相减后参数未被消去,则再将两式相加,用相减所得等式表示参数,代入相加所得等式,再进一步消元。以上面这题为例:

$$\text{由 } \begin{cases} \ln x_1 - ax_1 - \frac{1}{x_1} = 0 \\ \ln x_2 - ax_2 - \frac{1}{x_2} = 0 \end{cases}, \text{ 两式相减得 } \ln x_1 - \ln x_2 + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = a(x_1 - x_2) \cdots \textcircled{1}$$

发现参数无法消去,则再将两式相加:

$$\text{两式相加得 } \ln x_1 x_2 - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = (x_1 + x_2)a, \text{ 于是 } a = \frac{\ln x_1 x_2}{x_1 + x_2} - \frac{1}{x_1 x_2} \cdots \textcircled{2},$$

然后将相加所得结果代入相减所得结果,消去参数:

将②代入①，有 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{\ln x_1 x_2}{x_1 + x_2} - \frac{1}{x_1 x_2}$ ，

$$\text{即 } \ln x_1 x_2 - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2) \ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2}。$$

由常用不等式，显然等式右边大于 2（证明略）。于是：

$$\ln x_1 x_2 - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} > 2$$

此式距离结果中的乘积，还多出了一个 $x_1 + x_2$ ，在无法进行相等转换的情况下，只能考虑不等转换，最常见的是基本不等式，所以：

$$2 < \ln x_1 x_2 - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} < \ln x_1 x_2 - \frac{4\sqrt{x_1 x_2}}{x_1 x_2} = 2 \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}}，$$

$$\text{即 } \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}} > 1。$$

显然后一步转换是为了将自变量统一为 $\sqrt{x_1 x_2}$ ，此时构造一个辅助函数：

$$\varphi(x) = \ln x - \frac{2}{x}，\text{显然 } \varphi(x) \text{ 在定义域上单调递增，而 } \varphi(\sqrt{x_1 x_2}) > 1，$$

所以要证 $x_1 x_2 > 2e^2$ ，即 $\sqrt{x_1 x_2} > \sqrt{2}e$ ，只要证 $\varphi(\sqrt{x_1 x_2}) > \varphi(\sqrt{2}e)$ ，

$$\text{只要证 } \varphi(\sqrt{2}e) < 1，\text{即证 } \varphi(\sqrt{2}e) = \frac{1}{2} \ln 2 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{e} < 1，\text{即 } \frac{2\sqrt{2}}{\ln 2} > e，$$

显然该不等式成立，所以 $\varphi(\sqrt{x_1 x_2}) > 1 > \varphi(\sqrt{2}e)$ ，故 $\sqrt{x_1 x_2} > \sqrt{2}e$ ，即 $x_1 x_2 > 2e^2$ 。

这题在考查了消元之后，又考查了放缩，综合性很强。初步判断，命制这类题对构造函数的要求很高，基本上必须包含对数函数或指数函数，而且函数结构不能过于复杂，否则会对消元造成太大困难，这样的题不出则已，出了则可能需要另辟蹊径。

本文通过三道例题探究了三类消元或消参的思路，归结起来，就是题目给了条件就尽可能的利用它（如例 1），题目没有给出足够等量或不等关系的，就自己创造条件，如例 2 中我们通过观察得出 $x_1 x_2 = 1$ 的性质，例 3 中我们通过代数式的加减、代入变换，创造新的、更简洁的等量关系，也可以调用基本不等式、二级结论对数均值不等式等题意之外的不等关系。此外，在例 2 中，我们学会了从结论出发，将条件向结论靠拢，从而转化结论，为我们指明方向，这是一种正难则反的思想。如果再往深处考虑：为什么例 3 中一加一减能够达到消元的目的呢？这实际上蕴含了齐次化的思想。

双变量不等式远不止这些内容，可谓任重而道远。

2023 年 01 月 21 日