普通高中教科书 · 数学（A 版）

阅 读 提 示

编者：李子灏　微信公众号：『无花 de 蔷薇』

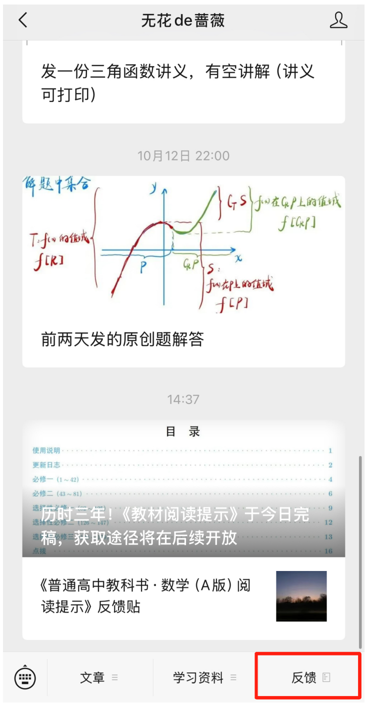
（2025 年 11 月 12 日版）

目　录

使用说明

1. 本资料综合性较强，适用于已经学习完所有高中课内基础知识的同学加深对教材内容的理解；
2. 带 “*” 的提示表示笔者认为涉及不在当前中学范围内的知识；
3. 本文中涉及的页码和小标题等均以人民教育出版社《普通高中教科书 · 数学（A 版）》（2023 年 7 月版）为准.
   为节省版面，教材中的内容不会在此再现，请读者自行参照教材阅读.
4. 如果发现资料中有错漏或其他不足，欢迎广大读者在公众号后台反馈，反馈方式如下：
   第一步：扫描二维码进入公众号页面

   第二步：点击 “发消息” 进入消息页面，点击右下角 “反馈”，在反馈贴的留言区填写反馈.



此外，也可以关注公众号后私信反馈.

更新日志

[2025 年 11 月 11 日版]

1. “点拨” 部分全部撰写完毕.

2. 修改部分提示:

(1) 第 28 条提示:“指对函数” 修正为 “指数和对数运算”.

(2) 在第 92 条提示中增加一道教材习题.

(3) 第 102 条提示: 明确指出解答第 (2) 小题.

(4) 第 104 条提示:“第 96 条提示” 修正为 “第 100 条提示”.

(5) 第 107 条提示:“第 91 条提示” 修正为 “第 97 条提示”.

(6) 第 111 条提示:“双曲线一节” 修正为 “第三章”.

(7) 第 117 条提示:“$y=x+\dfrac{a}{x}$” 修改为 “$y=mx+\dfrac{n}{x}$”.

(8) 第 124 条提示: 补充说明定值表示与 p 有关.

(9) 第 126 条提示: 补充条件限制 $ps\neq qr$.

(10) 第 135 条提示: 将限制条件 “$pq\neq 0$” 修改为 “$p\neq 0$”.

(11) 修改第 155 条 (原第 154 条) 提示的表述.

(12) 第 162 条 (原第 161 条) 提示: 与 “第 140 条提示” 的联系, 修正为与 “第 146 条提示” 的联系.

3. 在原第 140 条提示和 141 条提示之间新增一条提示 (现第 141 条).

4. 在原第 175 条提示和 176 条提示之间新增一条提示 (现第 177 条).

5. 修改下列点拨的表述中的一些细节: 2、7、12、20、21、22、23、25、26、38、44、47、48、51、55、57、59、60、63、64、70、129、130

6. 为目录、序号和 “点拨” 中的重点语句设置了蓝色突出.

[2025 年 04 月 08 日版]

1. 修改部分提示:

(1) 原第 76 条提示:“P208∼209” 修正为 “P210∼211”.

(2) 原第 84 条提示:“$\angle CA_1$” 修正为 “CA_1”.

(3) 原第 86 条提示习题第 2 题并入原第 83 条提示.

(4) 修改原第 87 条提示的表述.

(5) 修改原第 88 条提示的表述, 不限制求法向量夹角的方法.

(6) 在原第 126 条提示中引导思考一般化情形, 同时将原第 135 条提示第 11 题和原第 137 条提示并入本条.

(7) 原第 130 条提示:“解法 2” 修正为 “解法 1”; 将原第 131 条提示并入本条.

(8) 更换原第 131 条提示.

(9) 修改原第 132 条提示的表述.

(10) 删去原第 134 条提示的后半部分.

(11) 更换原第 135 条提示.

2. “点拨” 部分更新至第 1∼87 条（第 75 条，第 85 条提示待补充），第 126∼136 条（第 126、128、130、131、132、135 条待补充）.

3. 增设目录（含 pdf 版超链接）.

[2025 年 02 月 13 日版]

1. 将所有阅读提示内容转为 LaTeX 排版.

2. “点拨” 部分更新至第 72 条.

3. 修正部分内容.

必修一

1. 阅读 P1 导语，思考引入“集合”相关知识的目的和意义.

2. 结合“1.5 全称量词与存在量词”一节的内容，用严格的数学语言表达 P7 集合的“子集”和“相等”关系. 并思考对于集合 A，B，$A \subseteq B$ 和 $A = B$ 的证明策略是什么?

3. 解答 P13 练习第 3 题，并思考其隐含的集合运算知识.

4. 回顾“1.3 集合的基本运算”一节中“交集”、“并集”和“补集”的定义，尝试证明：

   (1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

   (2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

   (3) $\complement_U(A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$;

   (4) $\complement_U(A \cup B) = \complement_U A \cap \complement_U B$;

5. 解答 P14 习题 1.3 第 6 题.（提示：先用 Venn 图解答，再尝试用严谨的数学语言表述.）

6. (1) 阅读 P15~16 阅读与思考，尝试归纳出三元情形下的容斥原理，并解答 P35 复习参考题 1 第 11 题;

   (2*) 试归纳出 n 元情形下的容斥原理.

7. 参考 P22 例 4，规范解答练习第 3 题，再解答 2021 年新高考 II 卷第 20 题第 (2) 小题：

> 已知椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$，右焦点为 $(\sqrt{2}, 0)$，且离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.
>
> (1) 求椭圆 C 的方程;
>
> (2) 设 M，N 为椭圆 C 上的两点，直线 MN 与曲线 $x^2 + y^2 = b^2(x > 0)$ 相切. 证明：M，N，F 三点共线的充要条件是 $|MN| = \sqrt{3}$.

8. 解答 P23 习题 1.4 第 5 题.

9. 解答 P23 习题 1.4 第 6 题，并推广：设 $\triangle ABC$ 中，$a \leqslant b \leqslant c$，若 $a^n + b^n = c^n$ ($n \geqslant 3$，$n \in \mathbf{N}^*$)，判断 $\triangle ABC$ 的形状.

10. 在 P26~28 中寻找依据证明 2022 年新高考 I 卷对“素数”概念的考查并非超纲.

11. 参考 P29~30 中含有一个量词的命题的否定的结论，思考含有多个量词的命题的否定形式有何规律.

12. 阅读 P32 习题 1.5 第 5，6 题，感受自然语言中对量词的省略.

13. 阅读 P33 小结中的本章知识结构，并结合 P24~25 阅读与思考，深化对充分条件、必要条件和充要条件的认识.

14. 解答 P43 习题 2.1 第 10 题，并思考其隐含的不等式知识.

15. 解答 P43 习题 2.1 第 12 题.（提示：思考二元一次不等式的几何意义.）

16. 解答 P49 习题 2.2 第 4，8 题.

17. 解答 P49 习题 2.2 第 7 题和 P58 复习参考题 2 第 10 题，思考其隐含的不等式知识.

18. 用尽可能多的方法解答 P58 复习参考题 2 第 5 题.

19. 解答 P58 复习参考题 2 第 6 题.

20. 解答 P67 右下角旁注（? 栏），并思考：将一个函数的图象绕平面内一点旋转，若旋转后的图象仍然是函数的图象，旋转的角度应满足什么条件?

21. 阅读 P62 函数的定义，思考定义中的集合 B 与函数值域之间的关系.

22. 解答 P74 习题 3.1 第 15 题，并求 t 的最小值.

23. 解答 P74 习题 3.1 第 16 题，据此思考 2015 浙江卷（理科）第 7 题的考查角度并解答：

> 存在函数 $f(x)$ 满足：对任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有
>
> A. $f(\sin 2x) = \sin x$　　B. $f(\sin 2x) = x^2 + x$
>
> C. $f(x^2 + 1) = |x + 1|$　　D. $f(x^2 + 2x) = |x + 1|$

24. 用严格的数学语言定义函数的最大值，并参考 P80 中的定义进行校对.

25. 解答 P87 习题 3.2 第 13 题.

26. 解答 P101 复习参考题 3 第 8 题，并思考其隐含的函数知识. 推广：对于定义在 D 上的连续函数 $f(x)$，$I \subseteq D$，x_1，$x_2 \in I$，且 $x_1 \neq x_2$，试探究：$\forall \lambda \in (0,1)$，$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ 与 $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ 的大小关系取决于 $f(x)$ 的何性质?

27. 解答 P110 习题 4.1 第 7，8 题.

28. 阅读 P113，P130 对指数函数、对数函数的定义，结合指数和对数运算的性质，思考：
（1）$y = 2\log_2 x$ 和 $y = \log_2 x^2$ 是不是同一个函数；
（2）$y = 3\log_8 x$ 和 $y = \log_2 x$ 是不是同一个函数；
（3*）$y = 3\log_8 x$ 和 $y = \log_2 x$ 分别是不是对数函数；
（4*）教材对于指数函数和对数函数的定义是否不合理? 如果不合理，可以如何改进?

29. 在 P119 习题 4.2 第 8 题中，设本金 $a = 1$，每期利率 $r = \dfrac{k}{x}$（k 为常数），
（1）判断函数 $y = f(x)$ 的单调性；
（2*）当 $k = 1$ 时，利用计算工具计算当 $x = 10, 100, \cdots$ 时的函数值，并猜测 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的值；
（3*）猜测 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 的值（用含 k 的式子表示）.

30. 用尽可能多的方法解答 P141 习题 4.4 第 13 题.

31. 解答 P155 习题 4.5 第 7 题.

32. 解答 P156 习题 4.5 第 13 题.

33. 解答 P160 复习参考题 4 第 6 题. 若有兴趣，可以查阅资料了解题设函数的更多性质.

34. 解答 P186 习题 5.2 第 16 题.

35. 从 P225 例 8，P226 练习第 4，5 题中整理得到和差化积、积化和差公式.

36. 解答 P226 练习第 1 题，并思考：能否用关于 $\frac{\alpha}{2}$ 的某个三角函数值表示关于 α 的三个三角函数值，且可以避免符号讨论.

37. 解答 P228 练习第 3 题.

38. 解答 P228~230 习题 5.5 第 1-16 题，P254~255 复习参考题 5 第 11-23 题.

39. 解答 P230 习题 5.5 第 19 题，从“形”的角度把握和差化积公式.

40. 严格证明 P230 习题 5.5 第 20 题的猜想，并探究题设函数除值域外的其他性质.

41. 结合 P237 图 5.6-7，试证明：曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 在 $[0,\frac{\pi}{9}]$ 和 $[\frac{8\pi}{9},\frac{11\pi}{9}]$ 上各有且仅有一个交点.

42. 解答 P253 小结中回顾与思考第 4 题.

必修二

43. 分别从数和形的角度证明 P9 正文的不等式 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，并推广证明：
（1）$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为向量；
（2）$||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$，其中 a，b 为实数.
（从数和形的角度考虑（1），从数的角度考虑（2）.）

44. 对 P21 思考，考虑对于非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 成立的充分条件和必要条件是什么？

45. 结合 P23 习题 6.2 第 11 题，思考 P19 向量数量积的性质中，等式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ 仅仅表示符号记法的等同还是别有意义？

46. 解答 P23 习题 6.2 第 15 题.

47. 解答 P24 习题 6.2 第 24 题，思考：求向量的数量积是否必须要知道两个向量的夹角？并据此解答 2023 年全国乙卷第 12 题：

> 已知 $\odot O$ 的半径为 1，直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A. 直线 PB 与 $\odot O$ 交于 B，C 两点，D 为 BC 的中点，若 $|PO|=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值为
>
> A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$　　C. $1+\sqrt{2}$　　D. $2+2\sqrt{2}$
>
> （提示：注意到 $|PO|$ 和 $\angle ODP$ 均为定值.）

48. 思考 P26 例 1 及旁注（? 栏），据此解答 P40 练习第 3 题；再思考 $\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(k-t)\overrightarrow{OB}$（$k$ 为常数）的几何意义.

49. 解答 P33 探究.

50. 观察 P34 向量夹角的坐标表示公式的结构，据此尝试解答 2024 年 1 月 THUSSAT 诊断性测试第 16 题：

> 对任意的 $x \in \mathbf{R}$，不等式 $(x^2-7x+14)^2 \geqslant m(x^2-6x+13)(x^2-8x+17)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围为 ______ .

51. 解答 P37 习题 6.3 第 16 题（同时指出取等条件），并思考其隐含的不等式知识.

52. 阅读 P39 用向量方法解决平面几何问题的“三步曲”，据此回顾 P42 和 P46 余弦定理和正弦定理的推导过程，尝试从投影的角度理解正弦定理的向量推导，并思考 P62 复习参考题 6 第 19 题.

53. 分别用正余弦定理和向量方法解答 P39 练习第 2 题和 P53 习题 6.4 第 12 题，对比两种方法，感受向量方法在某种情形下的简洁性.

54. 解答 P52 习题 6.4 第 1 题，思考 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 的几何意义.

55. 解答 P52 习题 6.4 第 2 题，探究向量与三角形“四心”交汇的相关问题.

56. 证明 P53 习题 6.4 第 11 题中的向量旋转公式.

57. 解答 P53 习题 6.4 第 15 题，并分别用余弦定理和向量方法证明推广结论：在 $\triangle ABC$ 中，若点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}$，则

$$AP=\sqrt{\lambda b^2+(1-\lambda)c^2-\lambda(1-\lambda)a^2}=\sqrt{\lambda^2 b^2+(1-\lambda)^2c^2+2\lambda(1-\lambda)bc\cos A}$$

58. 解答 P54 习题 6.4 第 16 题并在下 $\triangle ABC$ 中证明 $c=a\cos\ B+b\cos\ A$，思考二者结论的几何意义. 据此解答 2022 年 10 月强基联盟第 18 题第（1）小题：

> 已知锐角 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且满足 $\sin^2 A-\sin^2 B=\sin B\cdot\sin(A+B)$.
>
> （1）证明：$A=2B$；
>
> （2）求 $\dfrac{b}{c}$ 的取值范围.

59. 解答 P54 习题 6.4 第 22 题.

60. 解答 P61 复习参考题 6 第 13 题第（5）（6）小题.

61. 解答 P61 复习参考题 6 第 14 题.

62. 结合 P71 复数与平面向量的关系，重新从形的角度思考第 43 条提示第（2）问. 回顾实数的相关知识点，思考：实数是否也与向量有着密切的联系?

63. 阅读 P81~82 阅读与思考，归纳 n 次方程的根与系数的关系.

64. 阅读 P83~88 “复数的三角表示”，把握复数四则运算的几何意义，在此基础上，

（1）分别利用复数的一般形式和三角形式证明：$\forall z_1$，$z_2 \in \mathbf{C}$（$z_2 \neq 0$），$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$，$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$；

（2）思考能否引入复数解决第 53 条提示中涉及的教材习题.

65. 阅读 P91~92 探究与发现，了解 “1 的 n 次方根”（即 n 次单位根）和棣莫弗定理. 并尝试推广第 64 条提示中（1）的结论.

66. * 在 P105 习题 8.1 第 3 题中，若给出相关数据，如何计算汽车内胎的容积.（提示：阅读 P121~123 探究与发现，了解祖暅原理.）

67. 思考 P125~127，P133 四个基本事实及其推论的意义.

68. 解答 P130 例 2，并归纳出一种判断异面直线的方法.

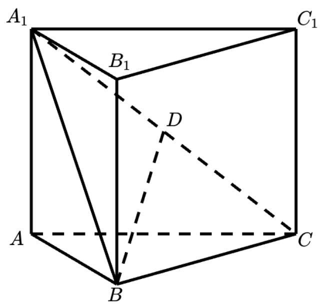
69. 解答 P144 习题 8.5 第 12 题，P170 复习参考题 8 第 8 题.

70. 解答 P151 右下角旁注（? 栏），思考其隐含的立体几何知识.

71. 解答 P152 练习第 4 题，并结合第（1）小题思考：如何找到三棱锥的外接球球心?

72. 解答 P159 练习第 3 题.

73. 精读 P161 例 10 的分析与证明，据此解答 2022 年新高考 I 卷第 19 题：

> 如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.
>
> （1）求 A 到平面 A_1BC 的距离；
>
> （2）设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1 = AB$，平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.
>
> 
>

74. 解答 P163 习题 8.6 第 9，10 题.

75. 结合所学知识，对 P167 小结的本章知识结构中 “空间平行、垂直关系之间的转化” 思维导图加以补充，并尝试在理论和实践层面加深理解.

76. 阅读并理解 P185~186，P210~211 阅读与思考.

77. 精读 P213 例 6 的解答，把握其关键步骤，并尝试推广证明：设样本总体被划分成 n 层，若第 i 层的样本频率（层样本量/总样本量）、平均数、方差分别为 f_i，$\overline{x}_i$，s_i^2，总体的平均数和方差分别为 $\overline{x}$，s^2，

则

$$s^2=\sum_{i=1}^{n}\{f_i\cdot[s_i^2+(\overline{x}_i-\overline{x})^2]\}$$

并从方差、平均数的实际意义角度理解上式.

78. 结合 P222 小结的本章知识结构，梳理第九章的整体脉络，加深对各统计量实际意义的理解.

79. 结合 P233 表 10.1-1，梳理事件的关系与运算及其概率的相关性质，着重关注互斥、对立、独立的区别与联系.

80. 结合 P237~238 对例 8 的相关讨论，思考：为什么不能认为，在单选题中从 A、B、C、D 四个选项中随机选择一项，只有“对”和“错”两种结果，因此选对的概率为 $\frac{1}{2}$?

81. 解答 P252 练习第 2 题，P253 习题 10.2 第 5 题，并思考：如何定义三个事件的独立.

选择性必修一

82. 解答 P8 右下角旁注（? 栏）.

83. 解答 P9 练习第 4 题，P10 习题 1.1 第 9 题，P15 习题 1.2 第 8 题，P41 练习第 2 题，P43 习题 1.4 第 8 题.

84. 解答 P14 练习第 1 题，P15 习题 1.2 第 6 题，P32 例 4，并思考下面的问题：

> 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各棱长相等，则“$\angle C_1CD=\angle C_1CB$”是“$CA_1\perp$ 平面 C_1BD”的
>
> A. 充分不必要条件　　　B. 必要不充分条件
>
> C. 充要条件　　　D. 既不充分也不必要条件

85. 分别用向量方法和综合几何法解答 P38 练习第 2，3，4 题.

86. 解答 P41 练习第 1 题.

87. 解答 P44 习题 1.4 第 17 题，并进一步证明：若平面 α 以 $\boldsymbol{u}=(a,b,c)$ 为法向量，则

（1）存在常数 d，使得平面 α 内任意一点 $P(x,y,z)$ 满足 $ax+by+cz+d=0$;

（2）$\boldsymbol{u}\parallel(\frac{1}{i},\frac{1}{j},\frac{1}{k})$，其中 i，j，k（$ijk\neq0$）分别是平面 α 在 x 轴，y 轴，z 轴上的截距.

88. 在 P49 复习参考题 1 第 11 题中作出平面 AEF 与平面 D_1B_1BD 的法向量，并求这两个法向量夹角的余弦值. 据此再次思考第 73 条提示中 2022 年新高考 I 卷第 19 题的第（2）小题.

89. 解答 P49 复习参考题 1 第 17 题.（注：题中 AA' 即为两空间直线的距离.）

90. 解答 P58 习题 2.1 第 9 题，并思考：如果将题目中的条件“$\angle MPN$ 为直角”改为“$\angle MPN=\theta$”（θ 是一个给定的角），如何求解点 P 的坐标?

91. 阅读 P59~65，P68~69 探究与发现，归纳各直线方程的形式、局限性和应用.

（1）尝试用直线的参数方程解答 2021 年新高考 I 卷第 21 题：

> 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1(-\sqrt{17},0)$，$F_2(\sqrt{17},0)$，点 M 满足 $|MF_1|-|MF_2|=2$. 记 M 的轨迹为 C.
>
> （1）求 C 的方程；
>
> （2）设点 T 在直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 上，过 T 的两条直线分别交 C 于 A，B 两点和 P，Q 两点，且 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

（2）证明：过点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 的直线方程为：$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0$，并观察系数的特点.

92. 解答 P67 习题 2.2 第 11 题，联系第 87 条提示思考向量 (A,B) 的意义，并据此理解 P68 习题 2.2 第 14 题所揭示的命题.

93. 解答 P68 习题 2.2 第 15 题，据此再次思考第 15 条提示中涉及的习题.

94. 阅读 P74~76，思考推导点到直线距离公式的其他方式. 证明：点 (x_0,y_0) 关于直线 $Ax+By+C=0$ 的对称点为 $(x_0-2A\cdot\dfrac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2},y_0-2B\cdot\dfrac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2})$.

95. 解答 P80 习题 2.3 第 16 题，并思考其隐含的解析几何知识.

96. 解答 P80 习题 2.3 第 17 题.

97. 精读 P87 例 5 的分析与解，并解答 P88~89 习题 2.4 第 7，8 题，归纳求动点轨迹的一般方法.

98. 解答 P88 习题 2.4 第 5 题.

99. 解答 P89 习题 2.4 第 10 题，思考参数 θ 的几何意义，并尝试推广到椭圆和双曲线.

100. 解答 P96 旁注（? 栏），并思考其隐含的解析几何知识.

101. 解答 P97 旁注（? 栏），并思考其隐含的解析几何知识.

102. 在深刻理解第 95 条提示的基础上，用类似的方法解答

（1）P98 习题 2.5 第 7，8 题，P102 复习参考题 2 第 10 题，P103 复习参考题 2 第 20 题；

（2*）2021 年新高考 I 卷第 21 题第（2）小题（题目见第 91 条提示）.

103. 解答 P99 习题 2.5 第 15 题，并思考：给定圆和圆外一点，如何用无刻度直尺和圆规作出过该点的圆的切线?

104. 解答 P103 复习参考题 2 第 17 题，并思考本题除坐标法外的解法及其与第 100 条提示的联系.

105. 解答 P103 复习参考题 2 第 18 题.

106. * 观察 P104 插图，探究平面截圆锥面所得曲线的形状和圆锥的轴与截面所成角的关系.

107. 精读 P108 例 2 的分析、解与旁注，据此回顾第 97 条提示.

108. * 思考 P108 例 2 及其后思考隐含的射影几何知识.

109. 解答 P116 习题 3.1 第 11 题.

110. 解答 P116 习题 3.1 第 14 题，并思考如何用无刻度直尺和圆规找到一个椭圆的中心.

111. 在第三章中发现与 P108 例 3，P113 例 6，P115 习题 3.1 第 6，10 题相似的例题或习题，体会椭圆和双曲线的统一性.

112. （1）教材阐明了到两定点“距离之和”、“距离之差”为定值的问题，请自主思考到两定点“距离之比”、“距离之积”为定值的问题；

（2）教材引导我们思考到两定点“斜率之积”为定值的问题，请自主思考到两定点“斜率之比”、“斜率之和”、“斜率之差”为定值的问题.

113. 解答 P121 练习第 4 题.

114. 解答 P127 习题 3.2 第 3 题，并思考如何准确地根据双曲线方程求解其渐近线方程，以及如何表示有相同渐近线的一系列双曲线.

115. 解答 P128 习题 3.2 第 11，13 题.

116. 解答 P128 习题 3.2 第 14 题，并尝试推广到椭圆.

117. 已知反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 和函数 $y=mx+\dfrac{n}{x}$ （$mn\neq 0$）的图象均为双曲线，试求其离心率和渐近线.

118. 解答 P136 例 5，P137 例 6，并思考前者的其他解法.

119. 解答 P138 练习第 5 题.

120. 解答 P138 习题 3.3 第 5 题，并思考：对于抛物线 $y^2=2px$（$p>0$），$|FM|$ 与直线 FM 倾斜角 θ 的关系.

121. 解答 P138 习题 3.3 第 6 题，并思考：对于抛物线 $y^2=2px$（$p>0$），当直线 AB 过 x 轴上的定点时，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 是否为定值?

122. 阅读 P140~141 阅读与思考，了解圆锥曲线的光学性质，并用数学语言描述.

123. 解答 P145 复习参考题 3 第 5 题，在此基础上，

（1）证明：对于给定的抛物线 C 和 C 上一点 P，过 P 作平行于抛物线轴的直线 l，在 l 上任取一点 Q，过 Q 的直线截抛物线得弦 AB，若 Q 为 AB 的中点，则 $\dfrac{|AQ|^2}{|PQ|}$ 为定值.

（2）证明：对于给定的椭圆或双曲线 C 和过 C 的中心且倾斜角为 θ 的弦 AB，在 AB 上任取一点 P，过 P 的直线截 C 得弦 QR，若 P 为 QR 的中点，则 $\dfrac{|PQ|^2}{|PA|\cdot|PB|}$ 为定值.

（3*）思考上述情形与平面直角坐标系下圆锥曲线方程的区别和联系.（注：若有兴趣可课外阅读 [古希腊] 阿波罗尼斯《圆锥曲线论》.）

124. 在 P146 复习参考题 3 第 10 题中，若不给出点 D 的坐标，求证：存在定点 E，使得 $|DE|$ 为定值（仅与 p 有关）. 据此解答 2020 年新高考 I 卷第 22 题：

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $A(2,1)$.

（1）求 C 的方程；

（2）点 M，N 在 C 上，且 $AM\perp AN$，$AD\perp MN$，D 为垂足，证明: 存在定点 Q，使得 $|DQ|$ 为定值.

125. 解答 P146 复习参考题 3 第 16 题.

选择性必修二

126. 不用数学归纳法，求解：P8 练习第 3 题中数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，P41 习题 4.3 第 11 题，P51 练习第 4 题，习题 4.4 第 3 题. 讨论如何求解满足分式型递推公式 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$（$r\neq 0$，$ps\neq qr$）的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

127. 解答 P18 练习第 3 题.

128. 解答 P23 练习第 3-5 题.

129. 解答 P24 练习第 2 题.

130. 阅读 P24 例 9 解法 1，解答 P24 练习第 5 题和 P34 练习第 5 题.

131. 阅读 P35 等比数列前 n 项和公式的推导过程，思考“错位相减法”的本质，并解答 P40 习题 4.3 第 3（2）题，P56 复习参考题 4 第 11 题.

132. 阅读 P37 例 9 的证明，思考在等差数列中是否有类似的结论.

133. 解答 P37 练习第 1 题第（3）小题，并将你的过程与 P36 例 8 比较.

134. 解答 P37 练习第 2 题.

135. 参考 P39 例 12，讨论如何求解满足一阶线性递推公式 $a_{n+1}=pa_n+q$（$p\neq 0$）的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

136. 解答 P41 习题 4.3 第 7，12 题.

137. 了解 P47 例 2，P51 习题 4.4 第 2 题第（3）小题的公式.

138. 分别用数学归纳法和其他方法解答 P52 习题 4.4 第 5，7 题.

139. * 分别用数学归纳法和其他方法解答 P52 习题 4.4 第 10 题，并思考本题与第 26 条提示的联系.（提示：对不等式两边同时取对数.）

140. 解答 P56 复习参考题 4 第 12 题.

141. 解答 P56 复习参考题 4 第 13 题.

142. 结合等比数列相关知识，解答 P57 复习参考题 4 第 15 题.

143. * 不用数学归纳法解答 P57 复习参考题 4 第 17 题.（提示：构造等比数列 $\{F_{n+1}-\lambda F_n\}$. 若有兴趣可以课外了解“特征方程与特征根”.）

144. * 阅读 P83~84 探究与发现，了解牛顿法.

145. 掌握 P89 例 4，P94 练习第 2 题，P97 练习第 1 题，P99 习题 5.3 第 12 题中的不等式.

146. 解答 P98 习题 5.3 第 9 题.

147. 解答 P104 复习参考题 5 第 18，19 题.（提示：考虑运用主元转换、分析函数、切线放缩、零点存在定理等思想方法.）

选择性必修三

148. 解答 P12 习题 6.1 第 11，12 题.

149. 解答 P25 练习第 2 题.

150. 解答 P26~28 习题 6.2 第 5~19 题.

151. 阅读 P28 探究与发现，解答 P38 复习参考题 6 第 10 题，从代数和组合的实际意义两个角度理解三个组合数性质.

152. 阅读 P29~30 二项式定理的推导过程，理解二项式定理的本质，并尝试脱离二项式定理，从计数原理的角度解答 P31 练习第 5 题，P34 习题 6.3 第 2 题，P38 复习参考题 6 第 5 题第（4）（5）小题.

153. 解答 P38 复习参考题 6 第 3 题第（2）（4）小题，第 4 题，第 7~9 题.

154. 理解 P45 问题 2 中（1）（2）两个问题的区别.

155. 阅读 P46 探究及其后正文，从条件概率的角度重新理解事件之间的“独立”.

156. 阅读 P46~47 例 1 的两种解法，归纳求条件概率的两种方法.

157. 将 P47 例 2 推广到 n 张奖券的情形，证明无论放回还是不放回，中奖概率与次序无关.

158. 阅读 P49，结合 P50 例 4 第（1）小题，理解全概率公式的实际意义，并归纳用全概率公式求解复杂事件概率的一般过程.

159. * 阅读 P51，结合 P50 第 4 第（2）小题和 P53-55 阅读与思考，对比贝叶斯公式和全概率公式，理解贝叶斯公式的实际意义.

160. 结合实际，将 P65 例 3 中的数据一般化，探究如何选择猜歌顺序可以使获得奖金的均值最大.

161. 解答 P71 习题 7.3 第 5 题.

162. 解答 P71 习题 7.3 第 8 题，思考其与第 146 条提示的联系.

163. 解答 P75 例 3 旁注（? 栏）.

164. * 尝试

（1）证明：二项分布的方差 $D(X)=np(1-p)$；

（2）理解 P79 超几何分布期望公式的推导；

（3）证明：超几何分布的方差 $D(X)=n\dfrac{M}{N}(1-\dfrac{M}{N})\dfrac{N-n}{N-1}$.

165. * 阅读 P79-80 例 6，试解释生态学中标志重捕法的重捕过程采用“不放回”抽样方式的原因：

标志重捕法的大致流程：

（1）在调查样地上随机捕获一部分个体，并且对被捕获对象进行标记。标记个体数记为 M；

（2）在一定限期后重捕，即在估计被标记个体与自然个体完全混合之后，重复步骤 (1)，捕获个体数量记为 n；统计第二次被捕获个体中被标记个体数，记为 m；

（3）根据理论公式

$$N = n\frac{M}{m}$$

计算得到种群数量 N；

（4）多次试验求平均值。

166. 解答 P81 习题 7.4 第 3，8 题.

167. 阅读 P81-82 探究与发现，证明：

（1）若随机变量 $X \sim B(n,p)$，$P(X=k)$ 取最大值的充要条件是 $(n+1)p-1 \le k \le (n+1)p$（$k \in \mathbf{N}$）；

（2）若二项式 $(a+bx)^n$ 的展开式通项 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k}(bx)^k$，其系数的绝对值取最大值的充要条件是 $(n+1)p-1 \le k \le (n+1)p$（$k \in \mathbf{N}$），其中 $p = \dfrac{b}{a+b}$.

168. 解答 P91 复习参考题 7 第 10 题，思考全概率公式在解答过程中的运用. 据此解答 2023 年新高考 I 卷第 21 题：

甲乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8，由抽签决定第一次投篮的人选，第一次投篮的人是甲，乙的概率各为 0.5.

（1）求第 2 次投篮的人是乙的概率；

（2）求第 i 次投篮的人是甲的概率；

（3）已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1) = 1-P(X_i=0) = q$，$i = 1,2,\cdots,n$，则 $E(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$，记前 n 次（即从第 1 次到第 n 次投篮）中甲投篮的次数为 Y，求 $E(Y)$.

169. 解答 P91 复习参考题 7 第 11 题.

170. 归纳各分布类型的概念及数字特征.

171. 阅读并理解 P96~99 样本相关系数的构造及其取值范围的求解过程.

172. 推导 P101 例 1 中①式的变形过程并推广到一般.

173. 阅读并理解 P107~110 经验回归方程的推导过程.

174. 阅读 P112 正文对“思考”中问题的讨论，解答 P138 复习参考题 8 第 2 题.

175. 解答 P113 练习第 5 题.

176. 阅读并理解 P128-130 随机变量 χ^2 的构造过程.

177. 解答 P136 习题 8.3 第 9 题.

178. 结合 P132 旁注，P134 正文，解答 P138 小结的回顾与思考第 9 题.

179. * 证明：当解释变量和响应变量均为随机变量时，若线性相关系数为 r，用最小二乘法所得线性回归模型的决定系数为 R^2，则 $r^2 = R^2$.

点拨

1. 如导语所言："明确研究对象、确定研究范围是研究数学问题的基础. 为了简洁、准确地表述数学对象及研究范围，我们需要使用集合的语言和工具." 句中的"研究对象"即为"元素"，"研究范围"即为元素构成的集合. 因此集合论研究的是元素与集合的关系，从集合的定义、性质到关系、运算，核心都是"元素（不）属于集合"，参考第 2 条和第 4 条提示，可以更深刻地理解这一点.

2. 任取集合 A，B. 则子集关系 $A \subseteq B$ 定义为：

$$\forall x\text{，如果}x \in A\text{，那么}x \in B$$

相等关系 $A = B$ 定义为：

$$\forall x\text{，如果}x \in A\text{，那么}x \in B\text{，且如果}x \in B\text{，那么}x \in A$$

或

$$A \subseteq B\text{，且}B \subseteq A$$

因此$A \subseteq B$ 的证明策略是：任取 x，假设 $x \in A$，证明 $x \in B$（可以将 $x \in A$ 作为条件）. $A = B$ 的证明策略则是分别证明 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq A$，这是类似的.

3. 本题实质上从 Venn 图的角度揭示了"德 · 摩根律"，参考第 4 条提示（3）（4）.

4. 证明：

（1）任取 x.

假设 $x \in A \bigcap (B \bigcup C)$.	（证明策略）
即 $x \in A$ 且 $x \in (B \bigcup C)$.	（交集的定义）
亦即 $x \in A$，且 $x \in B$ 或 $x \in C$.	（并集的定义）
若 $x \in B$，	（对析取命题进行分类讨论）
因为 $x \in A$，所以 $x \in (A \bigcap B)$.	（交集的定义）
即 $x \in (A \bigcap B)$ 或 $x \in (A \bigcap C)$.	（任一析取支成立则析取命题成立）
所以 $x \in (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.	（并集的定义）
假设 $x \in (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.	（证明策略）
……	（略，请自行补充）
所以 $x \in A \bigcap (B \bigcup C)$.	
综上，$A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.	

（2）任取 x.

假设 $x \in A \bigcup (B \bigcap C)$.	（证明策略）
……	（略，请自行补充）
所以 $x \in (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.	
假设 $x \in (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.	（证明策略）
……	（略，请自行补充）
所以 $x \in A \bigcup (B \bigcap C)$.	
综上，$A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.	

（3）任取 x.

假设 $x \in \complement_U (A \bigcap B)$.	（证明策略）

即 $x \in U$ 且 $x \notin (A \cap B)$.　　（补集的定义）

亦即 $x \in U$ 且 $x \notin A$ 或 $x \notin B$.　　（交集的定义）

……　　（略，请自行补充）

所以 $x \in \complement_U A \cup \complement_U B$.

假设 $x \in \complement_U A \cup \complement_U B$.

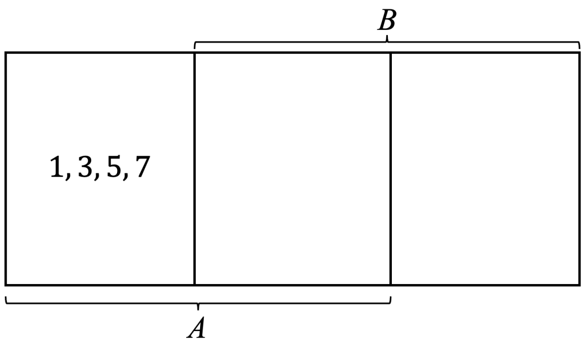
……　　（略，请自行补充）

所以 $x \in \complement_U (A \cap B)$.

综上，$\complement_U (A \cap B) = \complement_U A \cup \complement_U B$.

（4）略.

5. $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}$. Venn 图如下：



（*图中整体表示全集 U，左边两个矩形整体表示集合 A，右边两个矩形整体表示集合 B，最左边的一个矩形即为 $A \cap (\complement_U B)$*）.

需要注意的是，在画图过程中，首先画出一个大方框表示全集 U，接下来要使 $A \cup B = U$，A 和 B 可以有重叠部分，但不能“相离”，然后找到表示 $A \cap (\complement_U B)$ 的部分，就容易看出 B 即为 U 中除去 $A \cap (\complement_U B)$ 剩下的元素构成的集合.

依据 Venn 的直观，我们要证明 $A \cap (\complement_U B) = \complement_U B$，即 $\complement_U B \subseteq A$. 证明如下：

任取 $x \in \complement_U B$，即 $x \in U$ 且 $x \notin B$. 因为 $U = A \cup B$，所以 $x \in (A \cup B)$ 且 $x \notin B$，即 $x \in A$ 或 $x \in B$，且 $x \notin B$，所以 $x \in A$.

6. （1）$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$.

P35 复习参考题第 11 题解答如下：设参加游泳、田径和球类比赛的同学分别组成集合 A，B，C，由题意，$\text{card}(A \cup B \cup C) = 28$，$\text{card}(A) = 15$，$\text{card}(B) = 8$，$\text{card}(C) = 14$，$\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A \cap C) = 3$，$\text{card}(A \cap B \cap C) = 0$，代入上式解得 $\text{card}(B \cap C) = 3$，即同时参加田径和球类比赛的有 3 人，只参加游泳比赛的有 $\text{card}(A) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) = 9$ 人.

（2*）略.（*提示：可以考虑使用数学归纳法.*）

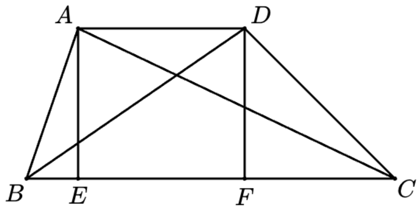
7. P22 练习第 3 题的一种证明方法：

如下页图，分别过 A，D 作 BC 的垂线，垂足为 E，F，则 $AE = DF$，于是：

$AC = BD \Leftrightarrow CE = BF \Leftrightarrow BE = CF \Leftrightarrow AB = CD.$

其中第一个等价符号和最后一个等价符号用到了勾股定理.

但是第 7 条提示的本意是提醒“充要条件”的证明格式. 证明“充要条件”最稳妥的策略是仿照 P22 例 4 的解答，对充分性和必要性分开证明.



当然，如果能保证每一步条件转化都是等价的，则可以全程用等价符号“⇔”书写，但该写法的风险是极高的，因为中途可能出现意想不到的纰漏，例如上述证法严格来说应该讨论垂足 E，F 落在 BC 上的位置.

2021 年新高考 II 卷第 20 题第（2）小题解答如下：

（i）先证充分性：

显然直线 MN 斜率不为 0，设 $MN: x=my+t$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

因为 MN 与曲线 $x^2+y^2=1$（$x>0$）相切，所以 $t>0$，$\dfrac{|t|}{\sqrt{m^2+1}}=1$，得 $t^2=m^2+1$.

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+y^2=1\\ x=my+t\end{cases}$ 得 $(m^2+3)y^2+2mty+(t^2-3)=0$，

于是 $|y_1-y_2|=\dfrac{\sqrt{4m^2t^2-4(m^2+3)(t^2-3)}}{m^2+3}=\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{m^2+3-t^2}}{m^2+3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{m^2+3}$，

因为 $|MN|=\sqrt{m^2+1}|y_1-y_2|=\dfrac{2\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}{m^2+3}=\sqrt{3}$，解得 $m^2=1$，

从而 $t=\sqrt{2}$，所以 MN 过 $F(\sqrt{2},0)$，即 M，N，F 三点共线；

（ii）再证必要性：

若 M，N，F 三点共线，设 $MN: x=my+1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

与（i）类似，由相切关系可得 $m^2=1$，联立直线与椭圆的方程可得 $|y_1-y_2|=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

从而 $|MN|=\sqrt{m^2+1}|y_1-y_2|=\sqrt{3}$.

综上，M，N，F 三点共线的充要条件是 $|MN|=\sqrt{3}$.

8. 提示：$a^2+b^2+c^2-ab+ac+bc=\dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$.

9. $\triangle ABC$ 是锐角三角形 $\Leftrightarrow a^2+b^2>c^2$；$\triangle ABC$ 是钝角三角形 $\Leftrightarrow a^2+b^2<c^2$.（可以用余弦定理的推论证明）

若 $a^n+b^n=c^n$（$n\geqslant 3$，$n\in\mathbf{N}^*$），

因为 $a\leqslant b\leqslant c$，所以 $c^n=a^n+b^n\leqslant c^{n-2}a^2+c^{n-2}b^2$（当且仅当 $a=b=c$ 时取等）.

从而 $c^2\leqslant a^2+b^2$（当且仅当 $c=\sqrt{2}a=\sqrt{2}b$ 时取等）.

所以 $a^2+b^2>c^2$，即 $\triangle ABC$ 是锐角三角形.

10. 参见 P27 旁注 ❶. 第 10 条提示的本意是提醒教材的所有文字，包括导语、节前语、框内文字、旁注、章末小结等所有非正文内容都值得关注.

11. 通过嵌套括号的形式容易递归地写出含多个量词的命题的否定形式，如：

命题 $\exists w(\forall x(\exists y(\forall zP)))$ 的否定，可以先将 $(\forall x(\exists y(\forall zP)))$ 视为一个整体 Q，于是原命题的否定为 $\neg(\exists wQ)$，应用存在量词命题的否定规律，即 $\forall w(\neg Q)$，从而将求原命题的否定转化为求子命题 Q 的否定. 重复这一递归过程，最终得到原命题的否定的过程如下：

$$
\begin{aligned}
&\neg(\exists w(\forall x(\exists y(\forall z P))))\\
\Leftrightarrow\ &\forall w(\neg(\forall x(\exists y(\forall z P))))\\
\Leftrightarrow\ &\forall w(\exists x(\neg(\exists y(\forall z P))))\\
\Leftrightarrow\ &\forall w(\exists x(\forall y(\neg(\forall z P))))\\
\Leftrightarrow\ &\forall w(\exists x(\forall y(\exists z(\neg P))))
\end{aligned}
$$

12. 存在量词的省略往往以“不都是”“不全是”的形式出现，实质上是全称量词命题的否定，故重点讨论全称量词的省略，这里主要有两类.

一类是像第 5 题（1）（2）这样的主谓结构命题（P 是 Q），其中主词 P 指代一类事物，这类命题可以理解为全称量词命题“所有的 P 是 Q”.

另一类是像第 6 题这样的“若 p，则 q”形式的命题. 教材上将其理解为省略全称量词的全称量词命题，这其实是为了便于理解. 例如命题“若 $x>1$，则 $2x+1>5$”可以理解为“$\forall x$，如果 $x>1$，那么 $2x+1>5$”. 对于理解教材和参加考试而言，这样理解就足够了，因此请谨慎阅读以下内容：

实质上，命题“若 p 则 q”是一个由命题 p 和命题 q 通过逻辑联结词“若⋯则⋯”构成的复合命题，就像“p 且 q”由命题 p 和命题 q 通过逻辑联结词“⋯且⋯”构成一样. 因此，就像命题“p 且 q”符合如下真值表：

p	q	p 且 q
假	假	假
假	真	假
真	假	假
真	真	真

命题“若 p 则 q”则符合如下真值表：

p	q	若 p 则 q
假	假	真
假	真	真
真	假	假
真	真	真

注意到命题“若 p 则 q”为假，当且仅当 p 为真 q 为假. 因此对于命题“若 $x>1$，则 $2x+1>5$”来说，其真值是由 x 决定的，即：

x 的取值	p	q	若 p 则 q
$(-\infty,1]$	假	假	真
$\varnothing$	假	真	真
$(1,2]$	真	假	假
$(2,+\infty)$	真	真	真

在这个意义上，由于“若 $x>1$，则 $2x+1>5$”中的 x 是自由变元，因此在 x 的取值不确定的情况下，无法直接断定其为假命题.

13. 提示：一般地，数学中的判定定理给出的是一个充分条件，性质定理给出的是一个必要条件，数学定义给出的是一个充要条件.

14. 本题隐含的是糖水不等式：

$$\forall b > a > 0, m > 0,\ 有\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$$

注意不等式成立的条件. 以及当 $a > b > 0$ 时，有

$$\frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b}$$

可以在糖水不等式的基础上通过取倒数证明.

15. 本题隐含的知识点是线性规划. 该内容已经不在新高考考察范围内，但可以作为“数形结合”思想的典例来了解.

16. 提示：（1）对不等式左边的每一个因式用基本不等式放缩即可；
（2）注意到 $AP = CP$.

17. P49 习题 2.2 第 7 题实质是不等式

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \quad (a, b > 0)$$

当且仅当 $a = b$ 时取等.（注意杠杆原理的应用）
P58 复习参考题 2 第 10 题实质是不等式

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \frac{a+b}{2} \quad (a, b > 0)$$

当且仅当 $a = b$ 时取等.（提示：比较“平均单价”）

18. 本题提供了类似题型的几种基本做法：

方法一：$ab - 3 = a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \geqslant 3 \Rightarrow ab \geqslant 9$，当且仅当 $a = b = 3$ 时取等.

方法二：设 $ab = t$，则 $b = \dfrac{t}{a}$，代入条件并整理得关于 a 的方程 $a^2 + (3 - t)a + t = 0$，该方程有正实根，故 $\varDelta = t^2 - 10t + 9 \geqslant 0$，解得 $t \geqslant 9$ 或 $t \leqslant 1$（由 $ab = a + b + 3$ 知 $ab > 3$，故舍去）. 所以 $ab \geqslant 9$，当且仅当 $a = b = 3$ 时取等.

方法三：由已知条件得 $b = \dfrac{a+3}{a-1}$（显然 $a \neq 1$），所以 $ab = \dfrac{a^2+3a}{a-1} = (a-1) + \dfrac{4}{a-1} + 5 \geqslant 9$，当且仅当 $a = b = 3$ 时取等.

方法四：由已知条件得 $(a-1)(b-1) = 4$，所以 $ab = (a-1)(b-1) + (a-1) + (b-1) + 1 = 5 + (a-1) + (b-1) \geqslant 9$，当且仅当 $a - 1 = b - 1 = 2$，即 $a = b = 3$ 时取等.

19. 答案：$(-3, 0)$. 一般地，我们要有讨论高次项系数是否为 0 的习惯，这里题设规定了不等式为“一元二次不等式”，故排除了 $k = 0$ 的情况.

20. 一个图形是函数图象的充要条件是：除端点外，图形任意一点处的切线斜率都存在.
若某函数的图象上除端点外一点处的切线倾斜角为 α，绕平面内某点逆时针旋转角 β，则旋转后的图形仍为函数图象的充要条件是 $\alpha + \beta \neq \dfrac{\pi}{2}$ 恒成立.

21. 函数的值域 $\{f(x)|x \in A\} \subseteq B$. 因此要注意：写法“函数 $f: A \to B$”中的 B 不一定就是值域，而是一个不小于 B 的集合. 这也表明“函数 $f(x)$ 的值域为 D”和“$\forall x \in I$，$f(x) \in D$”是两个不同的命题（前者是后者的充分不必要条件）.

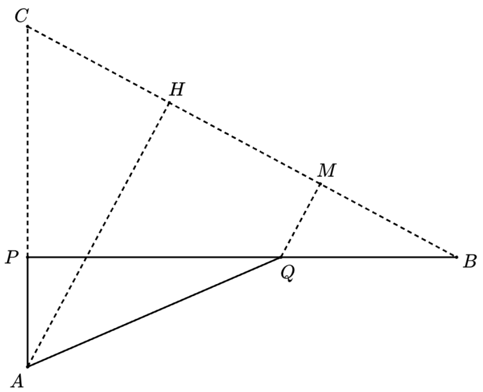
22. 第（1）问得到的函数为

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{12-x}{5}\ (0 \leqslant x \leqslant 12)$$

要求其最小值，可以依据 $t(x)$ 的导函数

$$t'(x) = \frac{1}{3\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} - \frac{1}{5}\ (0 \leqslant x \leqslant 12)$$

判断 $t(x)$ 的单调性，从而得到其最小值.
也可以完全采用几何做法：



如图，在 AP 的延长线上取一点 C，使得 $CP = 9$，于是 $\sin\angle CBP = \dfrac{3}{5}$. 分别过 A，Q 作 BC 的垂线，垂足为 H，M，于是 $AH = \dfrac{44}{5}$，$QM = \dfrac{3}{5}BQ$.
所以 $t = \dfrac{AQ}{3} + \dfrac{BQ}{5} = \dfrac{1}{3}(AQ + \dfrac{3}{5}BQ) = \dfrac{1}{3}(AQ + MQ) \geqslant \dfrac{1}{3}AH = \dfrac{44}{15}$.
这类问题称为“胡不归模型”.

23. P74 习题 3.1 第 16 题考查函数定义中最重要的一环，即一个自变量“唯一对应”一个因变量. 2015 年浙江卷的第 7 题也正是从该角度进行考查的，错误选项的证明策略是通过赋值使得相同自变量对应不同函数值. 以 A 项为例，分别赋值 $x = 0$ 和 $x = \dfrac{\pi}{2}$，将分别得到 $f(0) = 0$ 和 $f(0) = 1$，这与函数的定义是矛盾的. 其它错误选项同理.
对于正确选项，题设为“存在”，所以构造一个满足条件的函数即可. 故对于 D 项，取 $f(x) = \sqrt{x+1}$ 即可.

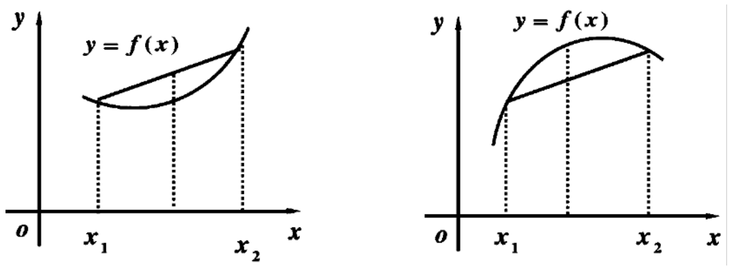
24. 本条提示意在提醒最大（小）值的定义由两部分组成，除了保证函数值始终不大（小）于某个定值外，还有一个容易忽视的点在于函数值必须能取到该定值，才能称其为最大（小）值.

25. (1) 设 $f(x+a) - b = (x+a)^3 - 3(x+a)^2 - b = x^3 + 3(a-1)x^2 + 3(a^2-2a)x + a^3 - 3a^2 - b$ 是奇函数，则 $3(a-1) = a^3 - 3a^2 - b = 0$，解得 $a = 1$，$b = -2$，因此 $y = f(x)$ 的对称中心为 $(1, -2)$.

事实上，三次函数的对称中心为 $(x_0, f(x_0))$，其中 $x_0 = -\dfrac{b}{3a}$ 为 $f''(x) = 0$ 的解.

（2）推论：函数 $y = f(x)$ 关于直线 $x = a$ 成轴对称图象的充要条件是函数 $y = f(x+a)$ 为偶函数.

26. 本题隐含的是函数的凹凸性与琴生不等式. 设曲线 $y = f(x)$ 上两点 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$. 则 $P = \lambda A + (1-\lambda)B = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2))$（$0 < \lambda < 1$）表示线段 AB（不含端点）上一点，而 $Q(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2))$ 为 P 纵向对应的曲线上的点，如图所示：



在左图中，线段上的点高于曲线上的点，即

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) > f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

在右图中，线段上的点低于曲线上的点，即

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) < f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

二者分别被称为下凸函数和上凸函数.

在高等数学中可以证明，若函数 $f(x)$ 在 I 上二阶可导，下面的三个式子是等价的：

（1）$\forall x_1, x_2 \in I$，$x_1 \neq x_2$，$\forall \lambda \in (0,1)$，$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) > f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$；

（2）$\forall x_0 \in I$，$\forall x \in I$，$x \neq x_0$，$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$；

（3）$\forall x \in I$，$f''(x) > 0$.

其中 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 分别为 $f(x)$ 的一阶和二阶导函数. 注意到（2）从切线与曲线的位置关系角度刻画了凹凸性.

27. 本题提示了我们一种换元方法，即可以将 $x \pm x^{-1}$ 视为一个整体，用它表示 $x^n + (\pm x)^{-n}$.

例如：求方程 $x^4 - 4x^3 + x^2 + 4x + 1 = 0$ 的实数解个数.

注意到该多项式的系数呈现某种对称性，并且 0 不是方程的解，因此对方程两边同时除以 x^2，得到

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 4(x - \frac{1}{x}) + 1 = 0$$

令 $x - x^{-1} = t$，则 $x^2 + x^{-2} = t^2 + 2$，于是方程化为

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

解得 $t = 1$ 或 $t = 3$. 考虑函数 $y = x - x^{-1}$ 的单调性和对称性，易知原方程有 4 个实数解.

28.（1）不是（提示：定义域不同）；（2）是（提示：换底公式）；

（3*）理论上讲，既然二者是同一个函数，那么要么二者都是对数函数，要么二者都不是对数函数. 但是按照教材中的定义，对数函数要求对数前的系数为 1（部分试题也这样考查），这就使

得前者不是对数函数，而后者是对数函数. 这样一来，要么我们对 “两个函数是同一个函数” 的理解有误，要么对数函数的定义有误.

（4*）事实上这是对数函数的定义有缺陷，教材中的定义只是为了便于中学教学. 一个形式上的修正方式是，一个函数 $f(x)$ 是对数函数，当且仅当：

（i） $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$；

（ii） $\exists a \in (0,1)\cup(1,+\infty)$，使得 $\forall x>0$，$f(x)=\log_a x$.

更加本质的定义是：$\forall x,y>0$，满足函数方程 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 的唯一不恒等于 0 的连续函数是 $f(x)=\log_a x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

指数函数的讨论类似.

29.（1） $f(x)=(1+\dfrac{k}{x})^x$ $(x\in\mathbf{N}^*)$.

由二项式定理得

$$(1+\frac{k}{x})^x=1+k+\sum_{m=2}^{x}\frac{x!}{m!(x-m)!}(\frac{k}{x})^m$$

其中

$$\frac{x!}{m!(x-m)!}(\frac{k}{x})^m=\frac{k^m}{m!}\frac{x(x-1)\cdots(x-m+1)}{x^m}=\frac{k^m}{m!}(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})\cdots(1-\frac{m-1}{x})$$

同理有

$$(1+\frac{k}{x+1})^{x+1}=1+k+\sum_{m=2}^{x}\frac{k^m}{m!}(1-\frac{1}{x+1})(1-\frac{2}{x+1})\cdots(1-\frac{m-1}{x+1})+(\frac{1}{x+1})^{x+1}$$

显然

$$\frac{k^m}{m!}(1-\frac{1}{x})(1-\frac{2}{x})\cdots(1-\frac{m-1}{x})<\frac{k^m}{m!}(1-\frac{1}{x+1})(1-\frac{2}{x+1})\cdots(1-\frac{m-1}{x+1})$$

又

$$(\frac{1}{x+1})^{x+1}>0$$

所以 $f(x)<f(x+1)$，即 $f(x)$ 单调递增.

事实上，对于在 $(0,+\infty)$ 上连续定义的函数 $f(x)$，也单调递增.

因为

$$f(x)=e^{x\ln(1+\frac{k}{x})}$$

设 $g(x)=x\ln(1+\dfrac{k}{x})$，则

$$g'(x)=\ln(1+\frac{k}{x})-\frac{k}{x+k}$$

令 $1+\dfrac{k}{x}=t>1$，易证

$$g'(x)=\ln t-1+\frac{1}{t}>0$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 由复合函数的单调性规律知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

（2*） $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\mathrm{e}$；

（3*） $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\mathrm{e}^k$.

30. 提示：换底公式.

对于（2），一种方法是研究函数 $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$ 的单调性；另一种方法是作差比较，以 $\log_2 3$ 和 $\log_3 4$ 为例：

$$\log_2 3-\log_3 4=\frac{\lg 3}{\lg 2}-\frac{\lg 4}{\lg 3}=\frac{(\lg 3)^2-\lg 2\cdot\lg 4}{\lg 2\cdot\lg 3}>\frac{(\lg 3)^2-(\frac{\lg 2+\lg 4}{2})^2}{\lg 2\cdot\lg 3}=\frac{(\lg 3)^2-(\lg\sqrt{8})^2}{\lg 2\cdot\lg 3}>0$$

所以 $\log_2 3>\log_3 4$.

还有一种方法是应用糖水不等式（见第 14 条提示）的推论：

$$\log_2 3=\frac{\lg 3}{\lg 2}>\frac{\lg 3+\lg\frac{4}{3}}{\lg 2+\lg\frac{4}{3}}=\frac{\lg 4}{\lg\frac{8}{3}}>\frac{\lg 4}{\lg 3}=\log_3 4$$

31. $f(1)=a+b+c=-\dfrac{a}{2}$，所以 $b=-c-\dfrac{3a}{2}$.

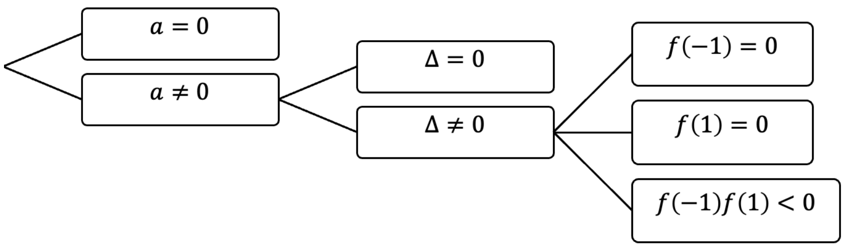
于是 $f(1)=-\dfrac{a}{2}<0$，$f(0)=c$，$f(2)=4a+2b+c=a-c$.

若 $f(0)=c>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上至少有一个零点；

若 $c\leqslant 0$，则 $f(2)=a-c>0$，$f(x)$ 在 $(1,2)$ 上至少有一个零点.

综上，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 上至少有一个零点.

32. 讨论思路如下：



答案：$a\in\{-\dfrac{1}{6}\}\cup[-\dfrac{1}{8},\dfrac{5}{24}]$.

33. 提示：可以查阅“双曲函数”以了解更多.

34. 提示：$\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\dfrac{(1+\sin\alpha)^2}{1-\sin^2\alpha}$.

本题的基本思路是配凑平方以消去根式，但是考虑 $1\pm\sin\alpha=(\sin\dfrac{\alpha}{2}\pm\cos\dfrac{\alpha}{2})^2$ 在本题中并不是好的策略，因为 $\dfrac{\alpha}{2}$ 所在象限无法确定，这会引发对符号的分类讨论.

35. 提示：相较于记忆这 8 条公式，掌握 P225 例 8 的推导方法更为重要.

36. 本题采用的是齐次化的思路，这启示我们：

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

自然还有

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

此即 “万能公式”.

37. 提示：作图易得 $r = \frac{\frac{a}{2}}{\tan\frac{\pi}{n}}$，$R = \frac{\frac{a}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}$，再应用上一条提示中的 “万能公式” 即可.

38. 本条提示所选取的题目都非常经典，适合作为三角恒等变换的练习题且值得反复训练. 部分题目提示如下：

- **P229.6(5)**

  注意到原式 $= \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{5\pi}{12}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{5\pi}{12}}$.

  事实上，我们有

  $$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \tan(\alpha+\frac{\pi}{4})$$

- **P229.11**

  注意分类讨论（圆心角可能是锐角，也可能是钝角）.

- **P230.15(2)**

  $$\frac{\tan\alpha\tan 2\alpha}{\tan 2\alpha-\tan\alpha} = \frac{\sin\alpha\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha\sin\alpha} = \sin 2\alpha$$

- **P230.16**

  由题意，$\frac{\alpha}{2}+\beta = \frac{\pi}{3}$，所以

  $$\tan(\frac{\alpha}{2}+\beta) = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\beta}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\beta} = \sqrt{3}$$

  因为

  $$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\beta = 2-\sqrt{3}$$

  所以

  $$\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\beta = 3-\sqrt{3}$$

  所以 $\tan\frac{\alpha}{2}$，$\tan\beta$ 是关于 x 的方程

  $$x^2-(3-\sqrt{3})x+2-\sqrt{3} = [x-(2-\sqrt{3})](x-1) = 0$$

  的两根，故

  $$\tan\frac{\alpha}{2} = 2-\sqrt{3},\quad \tan\beta = 1$$

  （因为 $\tan\frac{\alpha}{2}\neq 1$）即 $\alpha = \frac{\pi}{6}$，$\beta = \frac{\pi}{4}$.

- **P254.13(2)-(4)**

  提示：切化弦.

- **P255.15(2)**

  提示：将已知的两个等式平方后相加.

- **P255.16(4)**

  提示：结合 P230.15(1) 和 P255.16(1) 的结论.

- **P255.17**

  提示：先尝试解出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值.

- **P255.18**

  提示：原式可化为

$$\frac{2\sin x\cos x(\cos x+\sin x)}{\cos x-\sin x}=\frac{-\cos^2(x+\frac{\pi}{4})\cdot\cos(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}=\cos^2(x+\frac{\pi}{4})\tan(x+\frac{\pi}{4})$$

- **P255.23**

  方法一：在 AB 的延长线上取点 E 使得 $BE=DQ$，证明 $\triangle CPQ\cong\triangle CPE$，从而得到 $\angle CPQ=\frac{1}{2}\angle BCD=\frac{\pi}{4}$.

  方法二：设 $\angle BCP=\alpha$，$\angle DCQ=\beta$，由题意易得 $PQ=BP+DQ=\tan\alpha+\tan\beta$. 在 $Rt\triangle APQ$ 中，

$$PQ^2=AP^2+AQ^2\Rightarrow(1-\tan\alpha)^2+(1-\tan\beta)^2=(\tan\alpha+\tan\beta)^2$$

  化简得 $\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$，于是

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$$

  所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$，从而 $\angle PCQ=\frac{\pi}{4}$.

39. 提示：先表示出点 M 的坐标，注意到 $|OM|=|OA|\cdot\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$，然后根据

$$\sin\angle MOx=\sin\angle COx,\quad\cos\angle MOx=\cos\angle COx$$

利用三角函数的定义列出等式化简即可.

40. 提示：设 $t=\sin^2\alpha$，将 $f(\alpha)$ 表示成关于 t 的一元函数求解.

41. 设 $f(x)=\sin x-2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$，$f'(x)=\cos x-6\cos(3x-\frac{\pi}{6})$.

（i）当 $x\in[0,\frac{\pi}{9}]$ 时，$3x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$，$f'(x)\leqslant 1-6\times\frac{\sqrt{3}}{2}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{9}]$ 上单调递减，又 $f(0)=1>0$，$f(\frac{\pi}{9})=\sin\frac{\pi}{9}-1<0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{9}]$ 上有且仅有一个零点.

（ii）当 $x\in[\frac{8\pi}{9},\pi]$ 时，$\sin x<1$，$2\sin(3x-\frac{\pi}{6})>1$，$f(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $[\frac{8\pi}{9},\pi]$ 上无零点.

（iii）当 $x\in(\pi,\frac{10\pi}{9}]$ 时，$3x-\frac{\pi}{6}\in(\frac{17\pi}{6},\frac{19\pi}{6}]$，$f'(x)\geqslant$，$f'(x)>-1+6\times\frac{\sqrt{3}}{2}>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(\pi, \frac{10\pi}{9}]$ 上单调递增，又 $f(\pi) = -1 < 0$，$f(\frac{10\pi}{9}) = \sin\frac{10\pi}{9} + 1 > 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(\pi, \frac{10\pi}{9}]$ 上有且仅有一个零点.

（iv）当 $x \in (\frac{10\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}]$ 时，$\sin x > -1$，$2\sin(3x - \frac{\pi}{6}) < -1$，$f(x) > 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(\frac{10\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}]$ 上无零点.

综上，曲线 $y = \sin x$ 与 $y = 2\sin(3x - \frac{\pi}{6})$ 在 $[0, \frac{\pi}{9}]$ 和 $[\frac{8\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}]$ 上各有且仅有一个交点.

42. 提示：在差角余弦公式的基础上，通过对 α，β 的赋值，再结合三角函数的定义与特殊角的三角函数值，可以迭代出其他所有的和差角公式. 例如：

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

①$\beta \to \frac{\pi}{2}$：$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$　　$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$　　$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$　　$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$

②$\beta \to -\frac{\pi}{2}$：$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$

③$\beta \to \pi$：$\cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$　　$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$　　$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

③$\beta \to -\beta$：$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

④$\beta \to \beta + \frac{\pi}{2}$：$\cos\left(\alpha - \beta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$

*　　$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

⑤$\beta \to -\beta$：$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

⑥$\beta \to \pi$：$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$　　$\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$　　$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

⑦$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$：$\tan(\alpha \pm \pi) = \tan\alpha$

$\tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan\alpha}$　　$\tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan\alpha}$　　$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$　　$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

读者可以按教材所说绘制一张思维导图，以使逻辑结构更加清晰.

43. 提示：数的角度：通过平方去除绝对值即可（去除绝对值的一个常用方法是取平方）；
形的角度：根据向量加减法的三角形法则，结合“三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边”.

44. 若 $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$，考虑两种情况：

（1）$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0$，则 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{c}$；

（2）$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \neq 0$，则 $\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{c}$.

若 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{c}$，则存在 λ 使得 $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{c}$，所以 $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (\lambda\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$.

因此 $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$ 成立的充要条件是 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 共线.

45. 这个等式将向量和向量的模（数量）联系起来.

例如第（2）问中，要求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，我们通常很自然地将其平方：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cdots$$

这个我们习以为常的操作背后的理论依据就是 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，这个相等的完整过程应该是：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

这也提示我们求向量模的一种策略是对其平方后展开计算再开方.

46. 如下左图，注意到

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$$

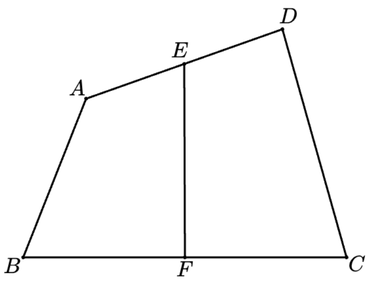
$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$$

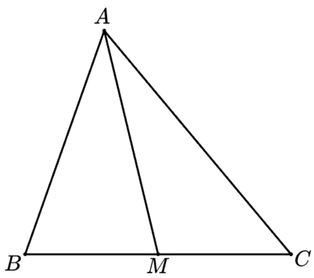
两式相加得

$$2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$

所以

$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$$





类似地，如上右图，假设 D 点与 A 点重合（变为 $\triangle ABC$），M 为 BC 的中点，同理有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM},\quad \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$$

两式相加得

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

此外，易得

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MB})$$

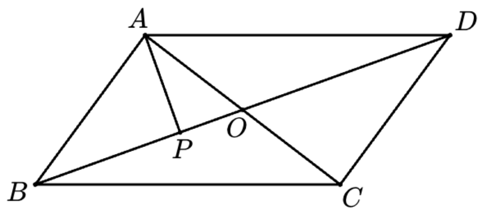
即 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AM^2-BM^2$. 此即极化恒等式.

47. 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 定义为 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$. 因此我们事实上只要知道 $|\boldsymbol{a}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$ 整体的值，以及 $|\boldsymbol{b}|$ 的值，就可以求出数量积. 其中 $|\boldsymbol{a}|\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$ 称为"$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上投影的数量"（注意：既然是"数量"，其取值范围就是全体实数），因此向量数量积的几何意义是一个向量在另一个向量上投影的数量乘以另一个向量的模.

这启示我们可以用"投影法"求向量数量积.

一个典型的例子是 **2012 年湖南卷（文）第 15 题**：

如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AP\perp BD$，垂足为 P，且 $AP=3$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ______ .

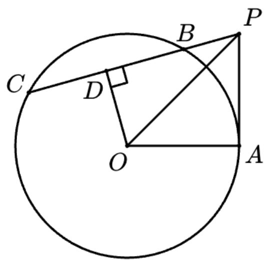


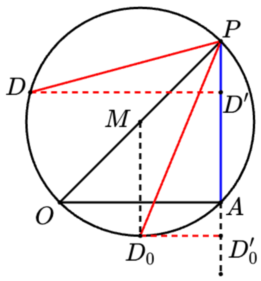
显然我们可以将 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}$ 视为 $\overrightarrow{AP}$ 乘以 $\overrightarrow{AO}$ 在 $\overrightarrow{AP}$ 上的投影数量的 2 倍，而因为 $AP\perp BD$，所以 $\overrightarrow{AO}$ 在 $\overrightarrow{AP}$ 上的投影数量为 $|\overrightarrow{AP}|$，因此 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot|\overrightarrow{AP}|^2=18$.

2023 年全国乙卷第 12 题

如图，因为 D 为弦 BC 的中点，由垂径定理得 $OD\perp PD$，又 $|PO|=\sqrt{2}$ 为定值，所以 D 在以 OP 为直径的圆上（设圆心为 M）.

而 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 为 $|\overrightarrow{PA}|$ 乘以 $\overrightarrow{PD}$ 在 $\overrightarrow{PA}$ 上的投影数量（PD'，带符号）. 显然当 D 在 D_0 位置时（$MD_0\perp D_0D_0'$），投影数量最大，为 $|MD_0|+\dfrac{1}{2}|PA|=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. 所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$ 的最大值为 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.





可以看出，当其中一个向量的方向和大小都确定，另一个向量的投影变化范围确定时，“投影法”能够发挥较好的作用.

48. P26 例 1 及旁注表明，对于平面内的一组基底 $\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\}$ 及任意向量 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，点 P 在直线 AB 上的充要条件是 $\lambda+\mu=1$.

对于 P40 练习第 3 题（见下页图），因为 O 为 BC 的中点，所以

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

又

$$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM},\quad \overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$$

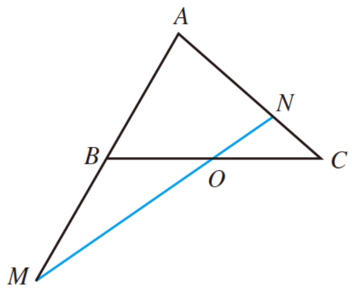
所以

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}m\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}n\overrightarrow{AN}$$

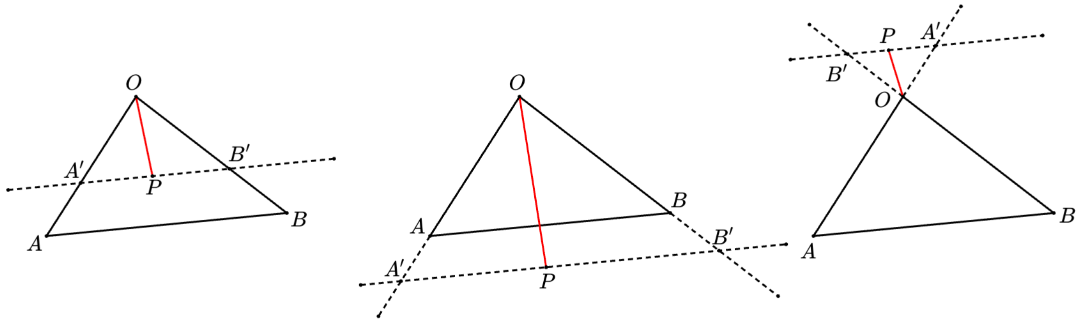
因为 O 在直线 MN 上，所以

$$\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n=1$$

即 $m+n=2$.



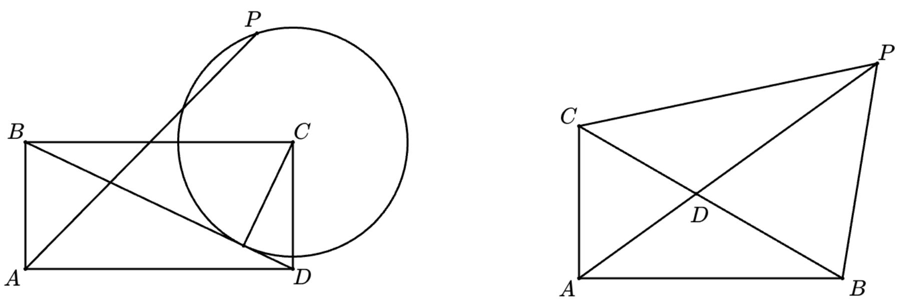
更一般地，对于平面内的一组基底 $\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\}$ 及任意向量 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，令 $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=k\overrightarrow{OB}$，则 P 在直线 $A'B'$ 上的充要条件是 $\lambda+\mu=k$（因为直线 AB 与 $A'B'$ 位似，O 为位似中心，k 为位似比）．下列各图依次示意了 $0<k<1$，$k>1$，$k<0$ 时的情形：



上述命题被称为“等和线定理”．由于该给出的是一个充要条件，因此既可以通过“点在直线上”的关系说明系数和为定值，也可以反过来通过系数和为定值说明点在直线上．下面分别举出两道高考题作为例子：

例 1.(2017 全国卷 III 理）如下左图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$AD=2$，动点 P 在与 BD 相切的圆 C 上，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为

A. 3　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 2



例 2.(2020 江苏）如上右图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$AC=3$，$\angle BAC=90^\circ$，D 在边 BC 上，延长 AD 至点 P，使得 $AP=9$. 若 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+(\dfrac{3}{2}-m)\overrightarrow{PC}$（$m$ 为常数），则 CD 的长度是 ______ .

提示：例 1 实际上是求，过 P 作 BD 的平行线 l，l 与 BD 关于点 A 的位似比的最大值（显然当 l 与圆 C 相切且不与 BD 重合时取到最大值 3)；例 2 的条件表明点 P 在平行于 BC，且与

BC 关于点 A 的位似比为 $\dfrac{3}{2}$ 的直线上，因此 $AP=\dfrac{3}{2}AD$，即 $AD=3$，从而得到 $CD=\dfrac{18}{5}$（或 0，取决于如何理解 “CD 的长度”）．

49. 因为 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，所以

$$\boldsymbol{P}-\overrightarrow{P_1}=\lambda(\overrightarrow{P_2}-\boldsymbol{P})$$

即

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{P_1}+\lambda\overrightarrow{P_2})$$

所以

$$P(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda})$$

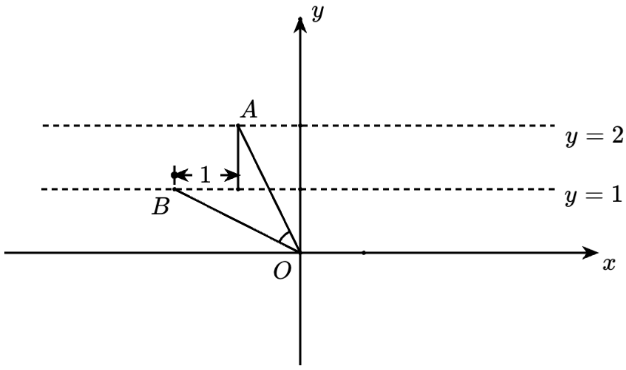
（粗体 $\boldsymbol{P}$ 表示点 P 的位置向量）

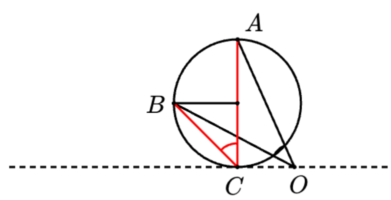
P 称为 P_1P_2 的定比分点. 用点的字母直接进行运算，从而用 P_1，P_2 的坐标表示点 P 的坐标，是求解定比分点坐标的一种比较简便的方法.

50. 提示：令平面向量 $\boldsymbol{a}=(x-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(x-4,1)$，则

$$m\leqslant\frac{(x^2-7x+14)^2}{(x^2-6x+13)(x^2-8x+17)}=\frac{[(x-3)(x-4)+2\cdot1]^2}{[(x-3)^2+2^2][(x-4)^2+1^2]}=\cos^2<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$$

如下左图，令 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则要求 $\angle AOB$ 在 A，B 分别在直线 $y=2$，$y=1$ 上运动且水平间距为 1 个单位的过程中的最大值. 这相当于固定点 A，B，令 O 在 x 轴上运动（如下右图）. 以 AB 为弦作与 x 轴相切的圆，切点为 C，则 $\angle AOB\leqslant\angle ACB=45^\circ$，当且仅当 O 与 C 重合时取等. 所以 $m\leqslant\cos^2 45^\circ=\dfrac{1}{2}$.





该问题提醒我们需要注意公式的反向配凑. 类似的例子还有形如 “$x_1x_2+y_1y_2$” 的式子可以视为两个平面向量的数量积等.

51. 该不等式即为二元柯西不等式. 如上一条提示所言，需要注意公式的反向配凑，该公式中左侧可以看作向量的数量积的平方，右侧可以看作向量模的平方之积.

设向量 $\boldsymbol{u}=(a,b)$，$\boldsymbol{v}=(c,d)$. 由

$$|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|\leqslant|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|$$

（见必修二第 19 页向量数量积的性质（4））

所以 $|ac+bd|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$，即 $(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

当且仅当 $\cos < \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >= \pm 1$，即 $\boldsymbol{u} \mathbin{/\mkern-6mu/} \boldsymbol{v}$ 时取等.

这一不等式可以拓展到 n 元形式，同样用向量方法证明：

设 n 维向量 $\boldsymbol{u} = (a_1, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{v} = (b_1, \cdots, b_n)$，类似地由上述向量数量积的性质有

$$|a_1 b_1 + \cdots a_n b_n| \leqslant \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$$

即

$$(a_1 b_1 + \cdots a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2), \quad \text{i.e. } (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

当且仅当 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ 时取等.

52. 提示：

(1) 余弦定理探究的是三角形三边与其中两边夹角的关系，因此选取三角形的两边为基底，表示出第三边，利用第 45 条提示表达的思想，通过平方产生向量的模及其夹角，从而得到余弦定理. 具体过程见教材.

(2) 正弦定理推导过程的实质是 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 在与 BC 垂直的方向上的投影数量相等.

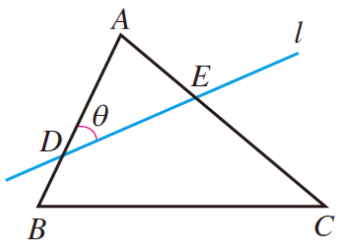
(3) $\overrightarrow{BC}$ 在 l 上的投影数量等于 $\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 在 l 上的投影数量之和，即

$$\frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{DE}|} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{DE}|} + \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{DE}|}$$

即

$$|\overrightarrow{BC}| \cdot \cos < \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DE} >= |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos < \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE} > + |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DE} >$$

亦即 $a\cos(B - \theta) = c\cos\theta - b\cos(A + \theta)$.



53. (1) **方法一**

如图，设 $\angle BAF = \alpha$，$\angle AED = \beta$，易得

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}; \qquad \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

从而

$$\cos\angle EMF = \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{10}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

方法二

设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AF} = \boldsymbol{a} + \dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DE} = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

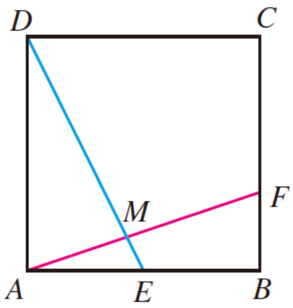
$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}^2-\frac{5}{6}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}^2$，$|\overrightarrow{AF}|=\frac{\sqrt{10}}{3}|\boldsymbol{a}|$，$|\overrightarrow{DE}|=\frac{\sqrt{5}}{2}|\boldsymbol{a}|$.

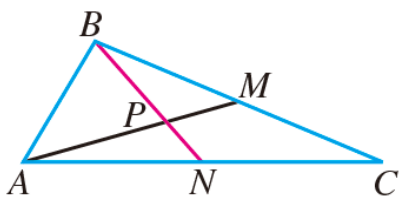
所以 $\cos\angle EMF=\cos<\overrightarrow{AF},\overrightarrow{DE}>=\frac{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{DE}|}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

方法三

不妨设 $AB=6$，则 $\overrightarrow{AF}=(6,2)$，$\overrightarrow{DE}=(3,-6)$.

所以 $\cos\angle EMF=\cos<\overrightarrow{AF},\overrightarrow{DE}>=\frac{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{DE}|}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.





（2）**方法一**

由余弦定理得 $BC=\sqrt{AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos\angle BAC}=\sqrt{19}$，

由中线长公式（见第 57 条提示）得 $AM=\frac{1}{2}\sqrt{2(AC^2+AB^2)-BC^2}=\frac{\sqrt{39}}{2}$，

类似地 $BN=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

所以 $AP=\frac{2}{3}AM=\frac{\sqrt{39}}{3}$，$BP=\frac{2}{3}BN=\frac{\sqrt{21}}{3}$.

于是 $\cos\angle MPN=\cos\angle APB=\frac{AP^2+BP^2-AB^2}{2AP\cdot BP}=\frac{4\sqrt{91}}{91}$.

方法二

设 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}^2-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2-\frac{1}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$.

$|\overrightarrow{AM}|=\frac{1}{2}\sqrt{5^2+2^2+2\times5\times2\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{39}}{2}$，同理有 $|\overrightarrow{BN}|=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

所以 $\cos\angle MPN=\cos<\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}>=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\frac{4\sqrt{91}}{91}$.

方法三

以 A 为原点，$\overrightarrow{AC}$ 为 x 轴正方向建立平面直角坐标系，

则 $B(1,\sqrt{3})$，$C(5,0)$，$M(3,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$N(\frac{5}{2},0)$，$\overrightarrow{AM}=(3,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{BN}=(\frac{3}{2},-\sqrt{3})$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}=3$，$|\overrightarrow{AM}|=\frac{\sqrt{39}}{2}$，$|\overrightarrow{BN}|=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

所以 $\cos\angle MPN=\cos<\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN}>=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\frac{4\sqrt{91}}{91}$.

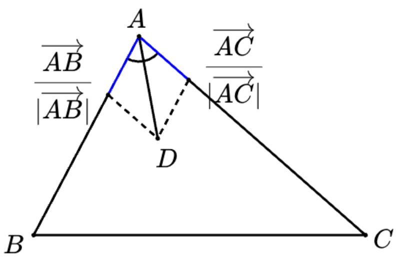
以上案例表明，在求平面内两直线的夹角（或其三角函数值）时，可以考虑转化成两个向量的夹角（或其三角函数值）来求解. 尤其是在已知两边及其夹角（或其余弦值）时（这种情况下我们具备良好的一组平面基底），或容易建系写出各点坐标时.

54. 因为 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot(-\cos B)}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos C}{|\overrightarrow{AC}|}=0$，

所以 $\cos B=\cos C$，于是 $B=C$.

又 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos A}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\cos A=\dfrac{1}{2}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形.



注意到，$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 分别表示 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 方向上的单位向量. 如图，根据平行四边形法则，

$\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 是长度为 1 的菱形的对角线，所以 $\overrightarrow{AD}$ 表示 $\angle A$ 的平分线向量.

因此 $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 表示 $\triangle ABC$ 中 A 的平分线与对边 BC 垂直，所以 $AB=AC$（等腰三角形三线合一）.

55. $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$ 表示 O 到 $\triangle ABC$ 各顶点距离相等，因此 O 为外心.

$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=0$ 等价于 $2\overrightarrow{ND}=\overrightarrow{CN}$，其中 D 为 AB 的中点，所以 N 为中线 CD 上靠近 D 的三等分点，因此 N 为重心.

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$ 等价于 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{PA}=0$，即 $PA\perp BC$，$PB\perp AC$，$PC\cdot AB$，因此 P 为垂心.

由第 54 条提示的结论，我们可以用等式组 $\dfrac{\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|},\dfrac{\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|},\dfrac{\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}=\dfrac{\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|}$ 表示 I 是 $\triangle ABC$ 的内心.

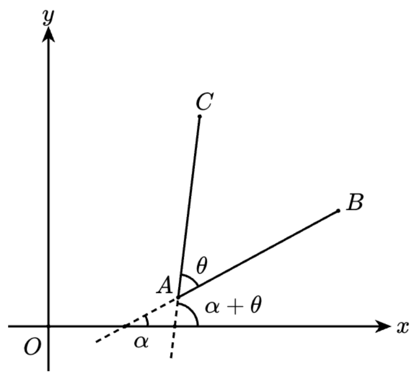
向量与三角形“四心”交汇会出现非常多的性质，如投影的性质、“奔驰定理”、欧拉线等，限于篇幅在此不详细展开，有兴趣的读者可以上网查阅相关关键词. 这部分内容也是必修二第 63-66 页所要求的内容，可以鼓励、支持学生课后思考、积极探究.

56. 如图，设 $|\overrightarrow{AB}|=\rho$，$\overrightarrow{AB}$ 的辐角为 α，则 $\overrightarrow{AP}$ 的辐角为 $\alpha+\theta$，$x=\rho\cos\alpha$，$y=\rho\sin\alpha$.

因为向量旋转后模长不变，辐角增大，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=(\rho\cos(\alpha+\theta),\rho\sin(\alpha+\theta))=(\rho\cos\alpha\cos\theta-\rho\sin\alpha\sin\theta,\rho\sin\alpha\cos\theta+\rho\cos\alpha\sin\theta)\\&=(x\cos\theta-y\sin\theta,y\cos\theta+x\sin\theta).\end{aligned}$$

注意到，从形式上看，$\overrightarrow{AP}$ 的横纵坐标分别是和角的余弦公式与正弦公式.



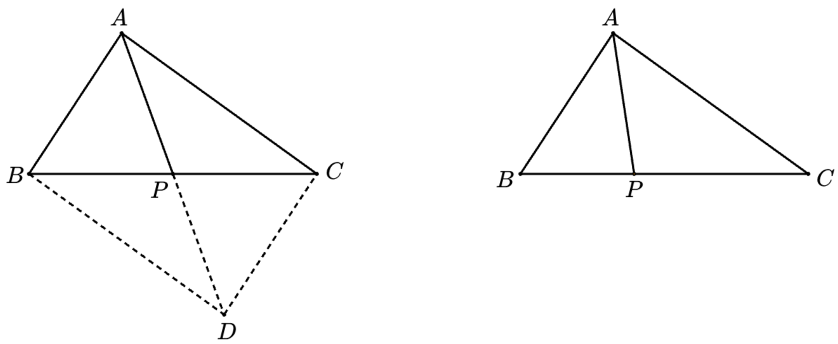
57. 以 m_a 为例. 如下左图，延长 BC 上的中线 AP 至点 D，使得 $PD = PA$，易知 $ABDC$ 为平行四边形.

因为平行四边形四边的平方和等于对角线的平方和（见必修二第 39 页例 2），所以

$$2(b^2+c^2) = a^2 + (2m_a)^2$$

整理得 $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$.

该公式也可以使用向量方法推导，可参考下面更一般情况的公式推导过程.



如上右图，当 $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC}$ 时，由 $\cos\angle APB + \cos\angle APC = 0$ 和余弦定理得推论得

$$\frac{(\lambda a)^2 + AP^2 - c^2}{2\lambda a\cdot AP} + \frac{[(1-\lambda)a]^2 + AP^2 - b^2}{2(1-\lambda)a\cdot AP} = 0$$

整理得

$$AP = \sqrt{\lambda b^2 + (1-\lambda)c^2 - \lambda(1-\lambda)a^2} \quad \cdots(*)$$

又由 $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AC} + (1-\lambda)\overrightarrow{AB}$ 得

$$AP = \sqrt{\lambda^2 b^2 + (1-\lambda)^2c^2 + 2\lambda(1-\lambda)\cos A} \quad \cdots(**)$$

用余弦定理 $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$ 代换 $(*)$ 中的 a^2，或用余弦定理的推论 $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 代换 $(**)$ 中的 $\cos A$，可以实现 $(*)$ 和 $(**)$ 的互化.

以上为解三角形定比分点模型的两种基本解法，一是对定比分点所在的两个互补角使用余弦定理的推论，再结合互补角的余弦互为相反数得到等量关系；二是使用定比分点的向量公式，用基底表示相应线段，然后根据相等向量模长相等得到等量关系. 显然，两种方法分别适用于已知三边长和已知两边及其夹角的情况.

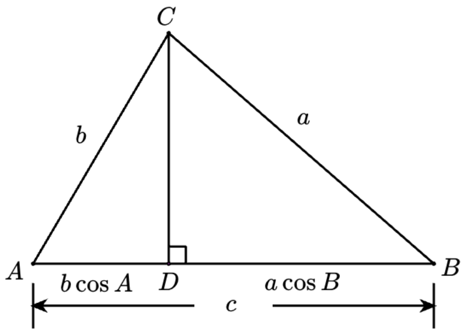
58. 证明：（1）由余弦定理的推论得

$$c(a\cos B - b\cos A) = ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} - bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2+c^2-b^2-b^2-c^2+a^2}{2} = a^2-b^2$$

（2）因为 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$，由正弦定理得

$$c = a\cos B + b\cos A$$

几何意义：



如图，以锐角 $\triangle ABC$ 为例，CD 为 AB 边上的高，则

$a^2-b^2 = (BD^2+CD^2)-(AD^2+CD^2) = BD^2-AD^2 = (BD+AD)(BD-AD) = c(a\cos B - b\cos A)$

且显然，$c = a\cos B + b\cos A$，此即任意三角形射影定理.
此外，在等式 $c(a\cos B - b\cos A) = a^2-b^2$ 中，由正弦定理可得

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin C(\sin A\cos B - \cos A\sin B)$$

即

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$$

此即三角形角正弦的平方差公式.
据此，题目条件 $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin B\cdot\sin(A+B)$ 可化为

$$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin B\sin(A+B)$$

因为 $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$，所以 $\sin(A-B) = \sin B$，$A-B=B$，即 $A=2B$.

59.（1）由已知及正弦定理得

$$\sin A\cos C + \sqrt{3}\sin A\sin C - \sin B - \sin C = 0$$

又 $\sin B = \sin(A+C) = \sin A\cos C + \cos A\sin C$，所以

$$\sqrt{3}\sin A\sin C - \cos A\sin C - \sin C = 0$$

因为 $\sin C \neq 0$，所以

$$\sqrt{3}\sin A - \cos A - 1 = 0$$

即

$$\sin(A - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）由已知得

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$$

即 $bc=4$. 又由余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

得 $b^2+c^2=8$. 因为 $b^2+c^2\geqslant 2bc=8$，当且仅当 $b=c$ 时成立，所以 $b=c=2$.

反思：本题作为一道经典的解三角形问题，提供了条件转化的基本范式，如齐次式边角互化、利用内角和关系消元、辅助角公式、三角形面积公式、余弦定理等，其中每一步变形的动机都值得仔细思考，方能举一反三，触类旁通.

60. 答案：（5）D；（6）C

第（5）题可以直接用数量积的定义求解（注意正确辨认向量夹角），也可以采用以下解法：

注意到，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，两边平方得

$$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=0$$

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{3}{2}$.

注意（6）中的夹角可以是 $\dfrac{2\pi}{3}$，也可以是 0.

61. 证明：（1）$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow \boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\overrightarrow{b^2}=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\overrightarrow{b^2}\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

（2）$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow |\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0\Leftrightarrow |\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

几何意义：根据向量加法的平行四边形法则，（1）表示平行四边形是矩形的充要条件是对角线相等；（2）表示平行四边形是菱形的充要条件是对角线互相垂直.

62. 实数集是复数集的子集，复数与向量一一对应，意味着实数也与向量一一对应，因此可以用与第（1）问相同的方式理解实数的绝对值不等式（向量加减法的三角形法则，两边之和大于第三边，两边之差小于第三边）.

在复平面内，复数与二维向量一一对应，因此我们可以认为在数轴上，实数与一维向量一一对应，实数也就同复数一样可以理解为向量.

63. 设一元 n 次方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$ 的 n 个复数根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则方程左边可以因式分解

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

考察等式两边 x^{n-1} 项的系数，得到 $a_{n-1}=-x_1-x_2-\cdots-x_n$，所以

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

类似地，依次考察等式两边 $x^{n-2},x^{n-3},\cdots,x^0$ 项的系数，可得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} x_i x_j x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\cdots$$

$$x_1 x_2 \cdots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

64.（1）**代数形式**：设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，则 $|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}$，$|z_2|=\sqrt{c^2+d^2}$，

$$z_1z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$$

$$|z_1z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2d^2+b^2c^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

所以 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{(a+b\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}{(c+d\mathrm{i})(c-d\mathrm{i})}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)\mathrm{i}}{c^2+d^2}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{1}{c^2+d^2}\sqrt{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}=\frac{1}{c^2+d^2}\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}$$

所以 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

三角形式：

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)(r_1,r_2\geqslant 0)$，则 $|z_1|=r_1$，$|z_2|=r_2$，

$z_1z_2=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]$

$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]$，

所以 $|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|$.

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)(\cos\theta_2-\mathrm{i}\sin\theta_2)}=$

$\frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$

所以 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

结论：复数乘除的几何意义——两个复数相乘，积的模等于各复数的模的积，积的辐角等于各复数的辐角的和（必修二第 87 页）；两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角所得的差（必修二第 88 页）.

（2）以第 53 页第 12 题为例. 以 A 为原点，$\overrightarrow{AC}$ 为实轴正方向建立复平面，

则 $B=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，$C=5$，$M=3+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$N=\frac{5}{2}$，$AM=3+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$BN=\frac{3}{2}-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

$\frac{AM}{BN}=\frac{3+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}{\frac{3}{2}-\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{1}{7}(4+5\sqrt{3}\mathrm{i})$，所以 $\cos\angle MPN=\frac{4}{\sqrt{4^2+(5\sqrt{3})^2}}=\frac{4\sqrt{91}}{91}$.

（注：$\angle MPN$ 即为向量 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{BN}$ 的夹角，即 $\overrightarrow{AM}$ 与 $\overrightarrow{BN}$ 所对应的复数的商的辐角.）

65. 棣莫弗定理：复数的乘方 $[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$.

设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(r\geqslant 0)$，则 $|z|=r$，$|z^n|=r^n=|z|^n$，

所以 $\forall z_1,z_2\in\mathbf{C}(z_1,z_2\neq 0)$，有

$$|z_1^\alpha z_2^\beta|=|z_1^\alpha||z_2^\beta|=|z_1|^\alpha|z_2|^\beta$$

当 $\alpha=\beta=1$ 时，即为 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$；当 $\alpha=1$，$\beta=-1$ 时，即为 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

66. 内胎是一个圆 C 以圆外一条直线 l 为轴旋转一周形成的，设圆 C 的半径为 r，C 到 l 的距离为 d，则形成的旋转体的体积等于圆 C 的面积乘以圆心 C 旋转过程中经过的路程，即 $2\pi d$，因此内胎的容积为 $\pi r^2\cdot 2\pi d=2\pi^2dr^2$.

67. 基本事实 1 及其三个推论给出了确定平面的依据，也是证明点共面以及在空间中延展平面的重要依据；

基本事实 2 给出了直线在平面内的判定；

基本事实 3 给出了确定平面交线的依据，由此可以证明点共线（证明若干个点都在两平面的交线上，结合平面交线的唯一性，得到这些点共线）或线共点（利用两直线的交点也是两平面交线上的点，证明交线与这两条直线共点）；

基本事实 4 是平行的传递性在空间的推广.

68. 异面直线的判定定理：与一个平面相交的直线和这个平面内不经过交点的直线是异面直线.

符号语言：$l\cap\alpha=P$，$m\subset\alpha$，$P\notin\alpha\Rightarrow l$，$m$ 异面.

69. **P144 习题 8.5 第 12 题：**

首先要注意的是，在木料表面画线和纯粹的数学中的空间几何问题不同．在实际画线时，不可能直接做出诸如“过点 P 作 VB 的平行线交平面 ABC 于点 Q”的操作的，因为我们不可能透视木料，更不可能穿透木料画线，因此画线时要考虑可行性.

在本题中，因为已知最终画出的截面与 VB 和 AV 平行，所以根据线面平行的性质定理，该平面与面 VAC 和 ABC 的交线应与 AC 平行，与面 VAB 和 VBC 的交线应与 VB 平行．而我们的初始条件只有点 P，而点 P 在截面上，也就在截面与面 VAC 的交线上.

结合上述分析，我们的画线步骤如下：第一步，过点 P 作 AC 的平行线，交 VA，VC 于点 E，F；第二步，分别过 E，F 作 VB 的平行线，分别交 BA，BC 于点 G，H；第三步，连接 GH，则面 $EFHG$ 即为所求作截面.

P170 复习参考题 8 第 8 题：

类似地，我们无法在实际操作中直接画出一条过点 E 且与 CE 垂直的直线．为了作出这条直线，我们需要找到线线垂直的充分条件（可以同时是必要条件，也可以不是），这样可以保证我们作出的直线一定与 CE 垂直．在所学的内容中，只有线面垂直的定义符合要求，它是线线垂直的充要条件．于是我们有两个思路：一是找到一个过点 E 且垂直于 CE 的平面，则这个平面在面 $A_1B_1C_1D_1$ 上的截线就是所求，因为这条截线在上面说的垂面内，自然也就与 CE 垂直；二是选择 CE 所在的一个平面，过 E 作出这个平面的垂线即为所求，因为这条线作为平面的垂线自然与平面内的任一直线（包括 CE）垂直.

观察几何体结构特征，显然在本题中选择后一个思路更合适，因为 CE 在平面 CC_1E 内，现在要求所求作直线 l 经过 E，在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内且垂直于平面 CC_1E，而要垂直于平面就要垂直于平面内的两条相交直线，又因为在正方体中侧棱 CC_1 垂直于面 $A_1B_1C_1D_1$，从而必然与 l 垂直，因此只要在面 $A_1B_1C_1D_1$ 内过 E 作 C_1E 的垂线，这条垂线即可满足与平面 CC_1E 垂直，从而垂直于 CE.

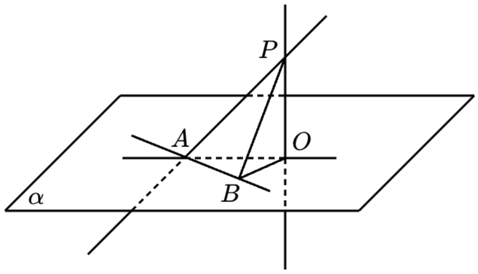
70. 最小角定理：对于给定的直线和平面，平面内的直线与给定直线所成角不小于给定直线与平面所成角．换言之，在课本图中，直线 PA 与 AB 所成角不小于 PA 与平面 α 所成角 θ，当且仅当 AB 与 PA 在 α 内的射影 AO 重合时取等．证明：

如图，设 O 在直线 AB 上的投影为 B，则

$\left\{\begin{array}{l} PO\perp\text{平面}\alpha \\ AB\subset\alpha \end{array}\right.\Rightarrow PO\perp AB$，$\left\{\begin{array}{l} PO\perp AB \\ OB\perp AB \\ PO\cap OB=O \end{array}\right.\Rightarrow AB\perp\text{平面}POB$，

$\left\{\begin{array}{l} AB\perp\text{平面}POB \\ PB\subset\text{平面}POB \end{array}\right.\Rightarrow AB\perp PB$，所以 $\sin\angle PAO=\dfrac{PO}{PA}$，$\sin\angle PAB=\dfrac{PB}{PA}$，

因为 $PO\perp OB$，所以 $PB\geqslant PO$，所以 $\sin\angle PAB\leqslant\sin\angle PAO$，即 $\angle PAB\leqslant\angle PAO$，当且仅当 AB 与 AO 重合时取等.



71. P152 练习第 4 题解答:

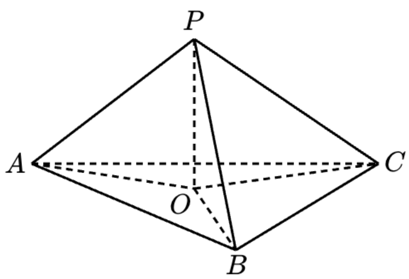
（1）外（心）;（2）中（点）;（3）垂（心）.

分析:（1）如图，因为 $PO\perp\alpha$，所以 $PO\perp OA$，所以 $OA=\sqrt{PA^2-PO^2}$.

同理有 $OB=\sqrt{PB^2-PO^2}$，$OC=\sqrt{PC^2-PO^2}$，

因为 $PA=PB=PC$，所以 $OA=OB=OC$，即 O 为 $\triangle ABC$ 的外心.

（2）由（1），O 为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的外心，所以 O 为其斜边 AB 的中点.



（3）$\left\{\begin{array}{l} PA\perp PB \\ PA\perp PC \\ PB\cap PC=P \end{array}\right.\Rightarrow PA\perp\text{平面}PBC$，$\left\{\begin{array}{l} PA\perp\text{平面}PBC \\ BC\subset\text{平面}PBC \end{array}\right.\Rightarrow PA\perp BC$，

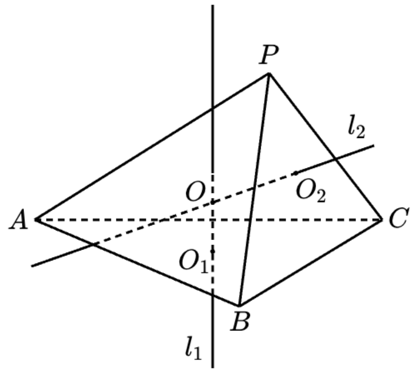
又 $\left\{\begin{array}{l} PO\perp\alpha \\ BC\subset\alpha \end{array}\right.\Rightarrow PO\perp BC$，于是 $\left\{\begin{array}{l} PA\perp BC \\ PO\perp BC \\ PA\cap PO=P \end{array}\right.\Rightarrow BC\perp\text{平面}POA$，

则 $\left\{\begin{array}{l} BC\perp\text{平面}POA \\ OA\subset\text{平面}POA \end{array}\right.\Rightarrow BC\perp OA$，同理有 $AC\perp OB$，$AB\perp OC$，

所以 O 是 $\triangle ABC$ 三条高线的交点，即 $\triangle ABC$ 的垂心.

由（1）知，过三角形面的外心作面的垂线，垂线上的点到三角形各顶点的距离相等. 而三棱锥外接球的球心实际上是一个到三棱锥各顶点距离均相等的点. 因此可以按如下步骤作出三棱锥外接球的球心:

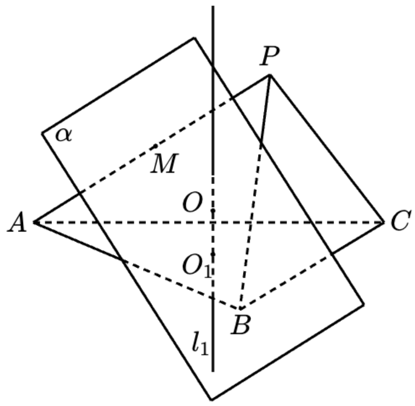
首先，作出三棱锥 $P-ABC$ 任意两个面（如面 ABC 和面 PBC）的外心 O_1，O_2；
接着，分别过 O_1，O_2 作所在面的垂线 l_1，l_2；
最后，l_1，l_2 的交点 O 即为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心.（如图）



根据前面的结论，l_1 上的点到 A，B，C 三点的距离相等，l_2 上的点到 P，B，C 三点的距离相等，所以 l_1，l_2 的交点 O 到 P，A，B，C 四点的距离均相等，根据定义，即三棱锥外接球的球心.

当然，我们可能会怀疑三棱锥的外接球是否一定存在，这个问题等价于问是否存在一个点到三棱锥各顶点的距离均相等. 我们可以简要证明如下：

如图，已知 l_1 上的点到 A，B，C 三点的距离相等. 过 PA 的中点 M 作与 PA 垂直的平面 α，易证 α 上的点到 P，A 的距离相等. 假设 α 与 l_1 没有交点，即 $l_1 /\!/ \alpha$，易证 $PA /\!/$ 平面ABC，与事实矛盾，所以 α 与 l_1 有交点，该交点 O 即为三棱锥外接球的球心.



72. 平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，平面 $ABC\perp$ 平面 ACD.

证明：$\left\{\begin{array}{l} AB\perp \text{平面}BCD \\ AB\subset \text{平面}ABC \end{array}\right. \Rightarrow \text{平面}ABC\perp\text{平面}BCD$，

$$\left\{\begin{array}{l} AB\perp \text{平面}BCD \\ AB\subset \text{平面}ABD \end{array}\right. \Rightarrow \text{平面}ABC\perp\text{平面}BCD.$$

$$\left\{\begin{array}{l} AB\perp \text{平面}BCD \\ CD\subset \text{平面}BCD \end{array}\right. \Rightarrow AB\perp CD,\ \left\{\begin{array}{l} AB\perp CD \\ BC\perp CD \\ AB\cap BC=B \end{array}\right. \Rightarrow CD\perp\text{平面}ABC,$$

$$\left\{\begin{array}{l} CD\perp \text{平面}ABC \\ CD\subset \text{平面}ACD \end{array}\right. \Rightarrow \text{平面}ABC\perp\text{平面}ACD.$$

实际上，像三棱锥 $A-BCD$ 这样，四个面都是直角三角形的三棱锥，在《九章算术》中被称为“鳖臑”，是一个重要的空间垂直关系模型，其中也蕴含了大量直线与直线、直线与平面的垂直：$AB\perp BC$，$AB\perp BD$，$AB\perp CD$，$BC\perp CD$，$AC\perp CD$；$AB\perp$平面BCD，$CD\perp$平面ABC.
读者可以自行证明.

73. （1）设 A 到平面 A_1BC 的距离为 d.

$V_{A-A_1BC}=\frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{4}{3}$，

又 $V_{A-A_1BC}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot d$，所以 $d=\sqrt{2}$.

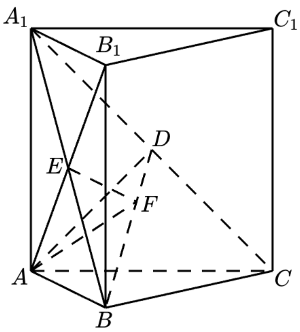
（2）第（2）问实际上是 P161 例 10 的改编：直三棱柱中 $AA_1\perp$ 平面 ABC，又平面 $A_1BC\perp$ 平面 AA_1B，这和例题的条件一致. 和例题一样，只要证明 $BC\perp$ 平面 AA_1B，从而证明 $BC\perp AB$，剩下的问题就可以交给空间向量解决.

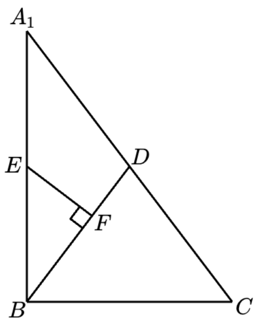
如下左图，设 A_1B 与 AB_1 的交点为 E，因为 $AA_1=AB$，所以 $AB_1\perp A_1B$，

$$\left\{\begin{array}{l}\text{平面}A_1BC\perp\text{平面}ABB_1A_1\\ \text{平面}A_1BC\cap\text{平面}ABB_1A_1=A_1B\\ AB_1\perp A_1B\end{array}\right.\Rightarrow AB_1\perp\text{平面}A_1BC,$$

$$\left\{\begin{array}{l}AB_1\perp\text{平面}A_1BC\\ BC\subset\text{平面}A_1BC\end{array}\right.\Rightarrow AB_1\perp BC,\quad \left\{\begin{array}{l}AA_1\perp\text{平面}ABC\\ BC\subset\text{平面}ABC\end{array}\right.\Rightarrow AA_1\perp BC,$$

$$\left\{\begin{array}{l}AA_1\perp BC\\ AB_1\perp BC\\ AA_1\cap AB_1=A\end{array}\right.\Rightarrow BC\perp\text{平面}ABB_1A_1,\quad \left\{\begin{array}{l}BC\perp\text{平面}ABB_1A_1\\ AB\subset\text{平面}ABB_1A_1\end{array}\right.\Rightarrow BC\perp AB.$$





至此，我们有 AB，BC，BB_1 两两垂直，以 B 为坐标原点建系，运用空间向量容易得到答案，下面简要用综合几何法继续解答本题.

已经证明 $AE\perp$ 平面 A_1BC，即平面 BDC，根据二面角的定义，需要在棱 BD 上找到一点 F，使得 $AF\perp BD$，$EF\perp BD$，由三垂线定理，只需 $EF\perp BD$ 即可.

作 $EF\perp BD$，垂足为 F，则 $\angle AFE$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角的补角.

由（1）知 $AE=\sqrt{2}$，所以 $A_1B=2AE=2\sqrt{2}$，$BC=AB=\sqrt{2}AE=2$.

如上右图，在 $\triangle ABC$ 中，$\tan\angle BA_1C=\dfrac{BC}{A_1B}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\sin\angle EBF=\sin\angle BA_1C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $EF=BE\cdot\sin\angle EBF=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故 $\tan\angle AFE=\dfrac{AE}{EF}=\sqrt{3}$，即 $\sin\angle AFE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

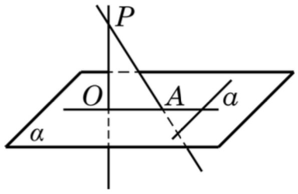
所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

补充：三垂线定理

平面上的一条直线和这个平面的一条斜线垂直的充要条件是它和这条斜线在平面上的投影垂直，即：

已知：斜线 $PA\cap\alpha=A$，$PO\perp\alpha$，$PO\cap\alpha=O$，$a\subset\alpha$，

则：$a\perp PA\Leftrightarrow a\perp OA$.



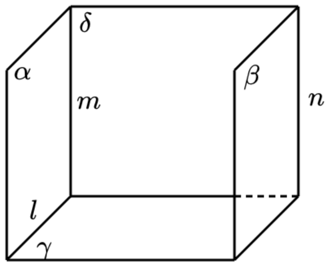
74. 第 9 题

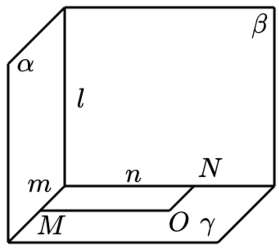
如下左图，设 $\alpha\cap\gamma=l$，在 α 内作直线 $m\perp l$，因为 $\alpha\perp\gamma$，所以 $m\perp\gamma$.

过直线 m 作平面 $\delta\cap\beta=n$，因为 $\alpha\,/\!/\,\beta$，所以 $m\,/\!/\,n$，故 $n\perp\gamma$，

又 $n\subseteq\beta$，所以 $\beta\perp\gamma$.

（证明过程中用到了定理“如果两条平行直线中的一条直线垂直于一个平面，那么另一条直线也垂直于这个平面”，该定理的证明见必修二 P151 例 3）





第 10 题

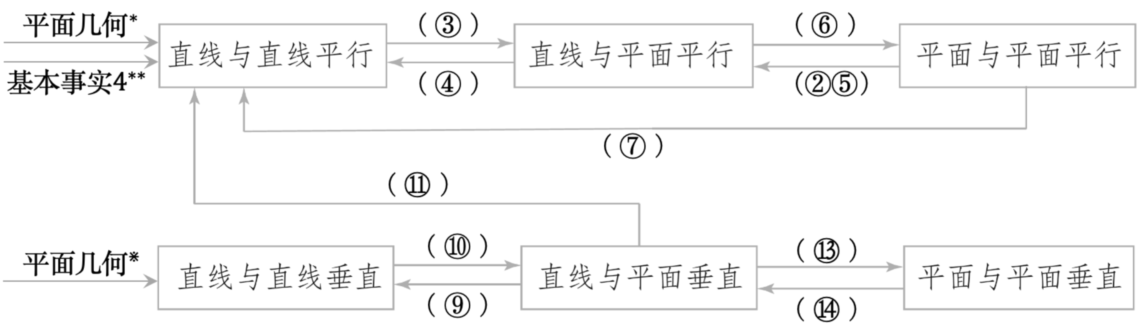
如上右图，设 $\alpha\cap\gamma=m$，$\beta\cap\gamma=n$，在 γ 内任取一点 O（不在 m，n 上），过 O 作 m，n 的垂线，垂足为 M，N.

因为 $\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，所以 $OM\perp\alpha$，$ON\perp\beta$，

又 $l=\alpha\cap\beta$，即 $l\subset\alpha$，$l\subset\beta$，所以 $OM\perp l$，$ON\perp l$，

因为 $OM\cap ON=O$，所以 $l\perp\gamma$.

75. 空间直线、平面的平行与垂直关系可以概括为以下思维导图：



① 线线平行的定义：$a\parallel b\Leftrightarrow\exists\alpha$，$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$\neg\exists P$，$P=a\bigcap b$（两直线共面且没有公共点）

② 线面平行的定义：$a\parallel\alpha\Leftrightarrow\neg\exists P$，$a\bigcap\alpha=P$（直线与平面没有公共点）

③ 线面平行的判定定理：$a\not\subset\alpha$，$\exists b\subset\alpha$，$a\parallel b$（存在平面内的直线，与平面外的直线平行）$\Rightarrow a\parallel\alpha$

④ 线面平行的性质定理：$a\parallel\alpha\Rightarrow\forall\beta\supset a$，$\alpha\bigcap\beta=b\rightarrow a\parallel b$（过该直线的任意平面截平面所得交线与该直线平行）

⑤ 面面平行的定义：$\alpha\parallel\beta\Leftrightarrow\neg\exists P$，$\alpha\bigcap\beta=P$（两平面没有公共点）

⑥ 面面平行的判定定理：$\exists a,b\subset\alpha$，$\exists P$，$a\bigcap b=P$，$a\parallel\beta$，$b\parallel\beta$（平行于同一平面的两条相交直线所确定的平面与该平面平行）$\Rightarrow\alpha\parallel\beta$

⑦ 面面平行的性质定理：$\alpha\parallel\beta\Rightarrow\forall\gamma$，$\alpha\bigcap\gamma=a$，$\beta\bigcap\gamma=b\rightarrow a\parallel b$（任意平面截两平行平面所得交线平行）

⑧ 线线垂直的定义：$a\perp b\Leftrightarrow a$，$b$ 的夹角为直角

⑨ 线面垂直的定义：$l\perp\alpha\Leftrightarrow\forall a\subset\alpha$，$l\perp\alpha$（直线与平面内的任意直线垂直）

⑩ 线面垂直的判定定理：$\exists a,b\subset\alpha$，$\exists P$，$a\bigcap b=P$，$l\perp a$，$\perp b$（垂直于两条相交直线的直线与这两条相交直线所确定的平面垂直）$\Rightarrow l\perp\alpha$

⑪ 线面垂直的性质定理：$l\perp\alpha\Rightarrow\forall a\perp\alpha$，$l\parallel a$（垂直于同一平面的两直线平行）

⑫ 面面垂直的定义：$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\alpha$，$\beta$ 的夹角（或半平面所成二面角）

⑬ 面面垂直的判定定理：$\exists l\subset\alpha$，$l\perp\beta$（经过平面垂线的平面与该平面垂直）$\Rightarrow\alpha\perp\beta$

⑭ 面面垂直的性质定理：$\alpha\perp\beta\Rightarrow\forall l\subset\alpha$，$a=\alpha\bigcap\beta$，$l\perp a\rightarrow l\perp\beta$（两垂直平面的其中一个平面内垂直于交线的直线与另一平面垂直）

* 证明直线与直线平行常用的平面几何定理：

- 中位线的性质；
- 平行线截线段成比例定理的逆定理.

** 基本事实 4（平行线的传递性）：如果 $a\parallel b$，$a\parallel c$，则 $b\parallel c$.

※ 证明直线与直线平行常用到的平面几何定理：

- 勾股定理的逆定理；
- 等腰三角形三线合一；
- 直径所对圆周角是直角.

在应用时，应当把握以下三个方面：

空间直线、平面平行与垂直的 $\begin{cases}\text{充要条件，即数学定义(是什么)}\\\text{充分条件，即判定定理(怎么证)}\\\text{必要条件，即性质定理(怎么用)}\end{cases}$

76. P185-186

该问题涉及条件概率和全概率公式.

记“选中回答问题 1”为 A，“回答‘是”’为 B. 由题意，将频率视为概率，则问题变为：

已知 $P(A)=P(\overline{A})=0.5$，$P(B|A)=\dfrac{186}{365}\approx 0.51$，$P(B)=\dfrac{58}{200}=0.29$，求 $P(B|\overline{A})$.

由全概率公式，$P(B)=P(B|A)\cdot P(A)+P(B|\overline{A})\cdot P(\overline{A})$，

代入已知数据，解得 $P(B|\overline{A})=0.07$.

作出如下的列联表，有助于理解题意：

（其中 58，142 和 200 为已知量，51，49 和两个 100 是根据概率估计的量，据此可以求出“?”处的量，即 100 个人中抽烟的估计人数）

	回答问题 1（A）	回答问题 2（$\overline{A}$）	总计
回答“是”（B）	51	?	58
回答“否”（$\overline{B}$）	49		142
总计	100	100	200

P210-211

该问题是统计中的估计问题，此处用到的估计方法是“矩估计”. 简单来说，我们可以将问题抽象为以下数学模型：从 $1\sim N$ 这 N 个正整数中随机取出 n 个，得到 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，记 $M=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 现在已知 n 和 M，要估计 N 的值.

这里所用的矩估计，是计算出 M 的理论期望（与 N，n），令其等于实际值，从而得到 N 的估计值，具体步骤如下：

（1）第一步：计算 $E(M)$

随机变量 M 的所有可能取值为 n，$n+1$，$\cdots$，N.

由古典概型，$n(\Omega)=C_N^n$；要使 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的最大值为 m，只需选出 m，并从 $1\sim m-1$ 中选出剩下 $n-1$ 个数，即 $n(M=m)=C_{m-1}^{n-1}$，所以 $P(M=m)=\dfrac{C_{m-1}^{n-1}}{C_N^n}$.

从而 $E(M)=\displaystyle\sum_{m=n}^{N} m\cdot P(M=m)=\sum_{m=n}^{N} m\cdot\frac{C_{m-1}^{n-1}}{C_N^n}=\frac{1}{C_N^n}\sum_{m=n}^{N} m\cdot C_{m-1}^{n-1}$，

注意到 $m\cdot C_{m-1}^{n-1}=\dfrac{m(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!}=\dfrac{m!}{(n-1)!(m-n)!}=n\cdot\dfrac{m!}{n!(m-n)!}=n\cdot C_m^n$，

所以 $E(M)=\dfrac{n}{C_N^n}\displaystyle\sum_{m=n}^{N} C_m^n=\frac{n}{C_N^n}\cdot(C_n^n+C_{n+1}^n+\cdots+C_N^n)$，

由组合恒等式 $C_n^m+C_n^{m+1}=C_{n+1}^{m+1}$ 得：

$C_n^n+C_{n+1}^n+\cdots+C_N^n=C_{n+1}^{n+1}+C_{n+1}^n+C_{n+2}^n+\cdots+C_N^n=C_{n+2}^{n+1}+C_{n+2}^n+\cdots+C_N^n=C_{N+1}^{n+1}$，

所以 $E(M)=\dfrac{n}{C_N^n}\cdot C_{N+1}^{n+1}=\dfrac{n}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}\cdot\dfrac{(N+1)!}{(n+1)!(N-n)!}=\dfrac{n(N+1)}{n+1}$.

（2）第二步：估计 N

令 $M=E(M)=\dfrac{n(N+1)}{n+1}$，解得 $\hat{N}=\dfrac{(n+1)M}{n}-1$，

我们将这个值即为 N 的估计值.

这与教材中的估计值 $\hat{N}=\dfrac{(n+1)M}{n}$ 略有差异，这是由于教材中增设了 0 作为首项.

77. 关键步骤：

教材的推导过程中，最关键的步骤是

$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{50}\left[\sum_{i=1}^{23}(x_i-\overline{z})^2+\sum_{i=1}^{27}(y_i-\overline{z})^2\right] \\
&= \frac{1}{50}\left[\sum_{i=1}^{23}(x_i-\overline{x}+\overline{x}-\overline{z})^2+\sum_{i=1}^{27}(y_i-\overline{y}+\overline{y}-\overline{z})^2\right]
\end{aligned}
$$

这里的变形方法是添加项 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$，目的是构造 $(x_i-\overline{x})$，$(y_i-\overline{y})$，以便用完全平方公式展开后与各层的方差 s_x^2，s_y^2 产生联系，因为层方差 $s_x^2=\dfrac{1}{23}\sum\limits_{i=1}^{23}(x_i-\overline{x})^2$，$s_y^2=\dfrac{1}{27}\sum\limits_{i=1}^{27}(y_i-\overline{y})^2$ 的形式中含有 $(x_i-\overline{x})$，$(y_i-\overline{y})$.

另一个要点是注意到在用完全平方公式对方差公式展开后出现的交叉项 $\sum\limits_{i=1}^{23}2(x_i-\overline{x})(\overline{x}-\overline{z})$，$\sum\limits_{i=1}^{23}2(y_i-\overline{y})(\overline{y}-\overline{z})$，可以通过提取公因式 $2(\overline{x}-\overline{z})$，$2(\overline{y}-\overline{z})$，对剩余部分根据求和符号的含义与平均数的定义进行化简得到 0，即由 $\sum\limits_{i=1}^{23}(x_i-\overline{x})=\sum\limits_{i=1}^{23}x_i-23\overline{x}=0$ 可得 $\sum\limits_{i=1}^{23}2(x_i-\overline{x})(\overline{x}-\overline{z})=2(\overline{x}-\overline{z})\sum\limits_{i=1}^{23}(x_i-\overline{x})=0$.

但是第一个关键步骤可能难以想到，我们也可以利用方差的简化形式 $s_x^2=\dfrac{1}{23}\sum\limits_{i=1}^{23}x_i^2-\overline{x}^2$，即 $\sum\limits_{i=1}^{23}x_i^2=23(s_x^2+\overline{x}^2)$ 进行计算：

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{23}(x_i-\overline{z})^2 &= \sum_{i=1}^{23}(x_i^2-2x_i\overline{z}+\overline{z}^2) \\
&= \sum_{i=1}^{23}x_i^2-2\overline{z}\sum_{i=1}^{23}x_i+23\overline{z}^2 \\
&= 23(s_x^2+\overline{x}^2)-2\overline{z}\cdot 23\overline{x}+23\overline{z}^2 \\
&= 23s_x^2+23(\overline{x}-\overline{z})^2
\end{aligned}
$$

同理可得 $\sum\limits_{i=1}^{27}(y_i-\overline{z})^2=27s_y^2+27(\overline{y}-\overline{z})^2$，从而得到 s^2 的表达式.

推广证明：

设总样本量为 N，第 i 层的样本量为 N_i，第 i 层的数据为 $(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{iN_i})$，

则 $f_i=\dfrac{N_i}{N}$，$s_i^2=\dfrac{1}{N_i}\sum\limits_{j=1}^{N_i}x_{ij}^2-\overline{x}_i^2$，所以

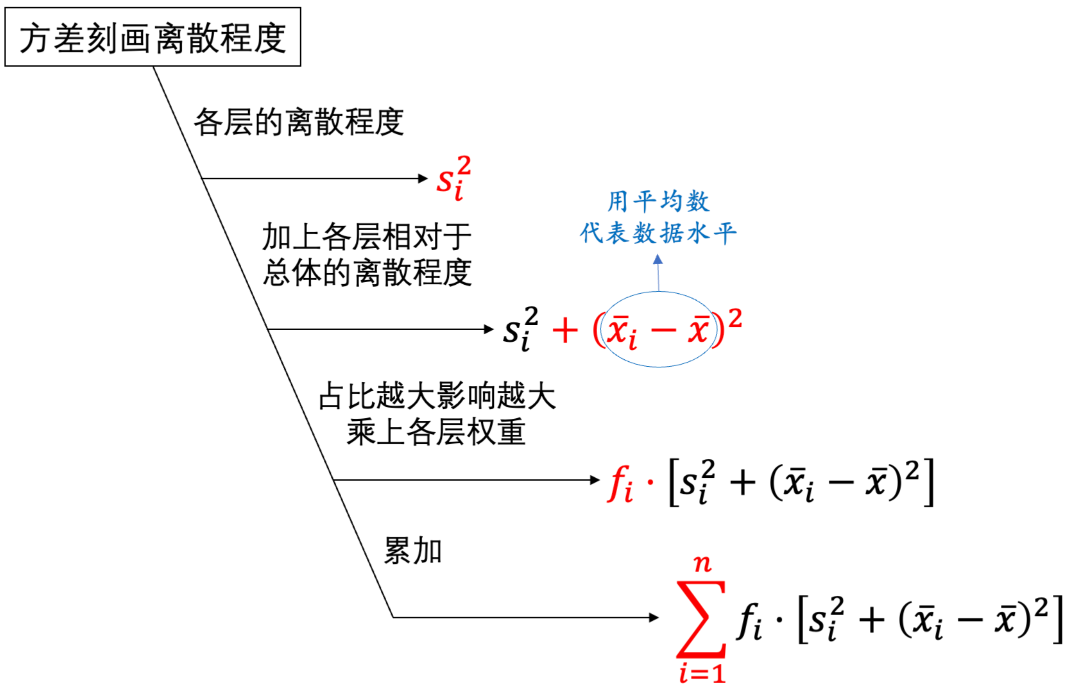
$$
\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i}(x_{ij}-\overline{x})^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{N_i}x_{ij}^2-2\overline{x}\sum_{j=1}^{N_i}x_{ij}+N_i\overline{x}^2\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\left[N_i(s_i^2+\overline{x}_i^2)-2N_i\overline{x}_i\overline{x}+N_i\overline{x}^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{N_i}{N}\left[s_i^2+(\overline{x}_i^2-2\overline{x}_i\overline{x}+\overline{x}^2)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}f_i\left[s_i^2+(\overline{x}_i-\overline{x})^2\right]
\end{aligned}
$$

对该公式的理解:

首先，从结构上看，该公式是如下形式的累加:

f_i	$\cdot$	$[s_i^2$	$+$	$(\overline{x}_i$	$-$	$\overline{x})$	$^2]$
权	乘	[各层方差	加	(各层平均	减	总样本平均)	的平方]

其次，从方差的实际意义看，方差的是对样本数据离散程度的刻画，因此可以这样理解：对于各层样本，它们有首先各自层内的离散程度，即方差 s_i^2. 而总样本是将各层样本合并起来，合并后，由于各层的数据水平之间也存在差异，因而离散程度会加大，也就是在本身离散程度 s_i^2 的基础上加上“各层相对于合并后总样本的偏差”$(x_i-\overline{x})$，类似于方差的定义，我们通过对其平方得到 $(x_i-\overline{x})^2$ 以消去符号影响（这里用各层的平均数代表了各层的数据水平）. 接着，由于各层样本量不同，显然样本量越大，对总体的影响也越大，因此要在此基础上乘以各层的权重，从而得到上述结构，最后累加即可. 该过程如下图所示:



78. 第九章的主要思路是用样本估计总体，包括用样本的频率分布、百分位数、集中趋势和离散程度分别估计总体的取值规律、百分位数、集中趋势和离散程度. 其中刻画集中趋势的参数包括平均数、中位数和众数，刻画离散程度的参数包括标准差、方差和极差. 这些统计量的特点、适用场景和局限性如下:

刻画集中趋势的量:

- **平均数**
  - 特点：对极端值敏感；反映样本数据中的更多信息
  - 适用场景：数据分布较为对称（如正态分布）
  - 局限性：数据偏态或存在极端值时，可能无法准确反映“典型值”
- **中位数**
  - 特点：对极端值不敏感；仅依赖数据位置，仅利用中间位置的一个或两个值

· 适用场景：数据偏态或含极端值时（如房价、收入）

· 局限性：无法反映数据的具体分布形态；对数据排序敏感

· **众数**

· 特点：对极端值不敏感；反映信息少，仅利用出现次数最多的数据

· 适用场景：描述类别数据的典型特征（如商品销量最高类型）；多峰分布的峰值分析

· 局限性：数据分布均匀时无众数；样本量小时众数可能不稳定；无法反映众数比其他数据多的程度

刻画离散程度的量：

· **极差**

· 特点：对极端值敏感；仅反映数据范围两端信息

· 适用场景：快速了解数据波动范围（如气温日较差）

· 局限性：忽略中间数据的分布；易受极端值干扰

· **方差、标准差**

· 特点：全面反映数据离散性

· 适用场景：结合平均数分析数据整体波动（如投资风险、实验误差）

· 局限性：数值大小受异常值影响

79. 在原表的基础上修改、扩充如下：

关系或运算	定义	符号表示	性质
包含	若 A 发生，则 B 发生	$A\subseteq B$	$P(A)\leqslant P(B)$
并事件	A 发生或 B 发生	$A\cup B$ 或 $A+B$	$P(A\cup B)=$ $P(A)+P(B)-P(AB)$
交事件	A 发生且 B 发生	$A\cap B$ 或 AB	
互斥	A,B 不可能都发生	$A\cap B=\varnothing$	$P(AB)=0$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
互为对立	A,B 有且仅有一个发生	$A\cap B=\varnothing$ $A\cup B=\Omega$	$P(AB)=0$，$P(A\cup B)=1$
相互独立	A,B 的发生互不影响	/	$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$

注：

（1）这里对“包含”的定义与原表中不同，因为“导致”在字面上带有因果性含义，然而包含事件并不一定是因果性的，如掷一枚骰子，记 A 表示“朝上的点数为 2”，B 表示“朝上的点数为偶数”，则有 $A\subseteq B$，但在因果性上，并不能说 A 导致了 B 的发生.

（2）这里尽量避免了“同时发生”的表述，因为“同时”可能引起歧义. 数学定义上的“同时”表示逻辑上的“且”，而不是事实上时间的同一. 例如，记 A 表示“今天下雨”，B 表示“明天天晴”，A 与 B 在时间上不同时，但在逻辑上是可以同时发生的. 这里将“A,B 同时发生”换成“A 发生且 B 发生”，以免引起歧义.

（3）关于“相互独立”的定义的讨论，参考第 154 条提示.

80. $\frac{1}{2}$ 的结果是根据古典概型算出来的，即样本空间 $\Omega=\{对,错\}$，$A=\{对\}$，$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{1}{2}$.
但由于“对”、“错”两个样本点不是等概率的，因此不满足古典概型的定义，也就不能使用古典概型的概率公式计算.

这个问题提醒我们，不能不加反思地使用概率公式 $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$，使用前应当确认问题是否满足古典概型.

81. **P252 练习第 2 题**

由题意，$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$，而 $A\cap B=A\cap C=B\cap C=\{a\}$，所以 $P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}$，
故 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，即 A，B，C 两两独立.
但 $A\cap B\cap C=\{a\}$，$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)$.

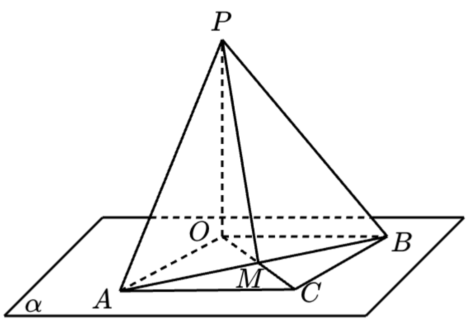
P253 习题 10.2 第 5 题

令 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,2,3,5\}$，$C=\{1,6,7,8\}$，则 $A\cap B=\{1,2,3\}$，$A\cap C=B\cap C=A\cap B\cap C=\{1\}$，
所以 $P(ABC)=\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$，但 $P(AB)=\frac{3}{8}\neq P(A)P(B)$，$P(AC)=\frac{1}{8}\neq P(A)P(C)$，$P(BC)=\frac{1}{8}\neq P(B)P(C)$.

三个事件独立的定义

设 A_1，A_2，A_3 为三个事件.
首先要求三个事件两两独立，即 $P(A_iA_j)\neq P(A_i)P(A_j)$（$1\leqslant i<j\leqslant 3$）.
其次要求任意两个事件的积事件不影响第三个事件的发生，即 $P(A_iA_jA_k)=P(A_iA_j)P(A_k)$（$\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$），由第一个要求，$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$，所以 $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.
综上，三个事件独立的充要条件是它们两两独立，且 $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

82. 百度百科词条“线面垂直”列举了多种证明方法，下面简要摘录一种：
根据直线与平面垂直的判定定理，若 $a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，a 与 b 相交且 $l\perp a$，$l\perp b$，则 $l\perp\alpha$. 根据直线与平面垂直的定义，要证 $l\perp\alpha$，即要证 l 垂直于 α 内的任意直线.



如图，任取直线 $c\subset\alpha$，由于平移不改变直线与直线的夹角，不妨设直线 a，b，c，l 交于点 O，$P\in l$ 且异于点 O.
在直线 c 取一点 C，过 C 分别作 b，a 的平行线，交 a，b 于点 A，B，则四边形 $OABC$ 为平

行四边形. 设 $OC \cap AB = M$，则 M 为 OC，AB 的中点.
由 $PO \perp OA$，$PO \perp OB$ 得：$OA^2 + OP^2 = PA^2$，$OB^2 + OP^2 = PB^2$，
由第 57 条提示的结论得：$PM^2 = \dfrac{1}{2}(PA^2 + PB^2) - AB^2$，$OM^2 = \dfrac{1}{2}(OA^2 + OB^2) - AB^2$，
两式相减得：$PM^2 - OM^2 = \dfrac{1}{2}(PA^2 - OA^2 + PB^2 - OB^2) = \dfrac{1}{2}(OP^2 + OP^2) = OP^2$，
即 $PM^2 = OM^2 + OP^2$，故 $PO \perp OM$.
由 c 的任意性，l 垂直于 α 内的任意直线，故 $l \perp \alpha$.

83. P9 练习第 4 题

- **方法一（综合几何法）**

  因为 $AC \perp \alpha$，$AD \subset \alpha$，所以 $AC \perp AD$，
  所以 $CD = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{AB^2 + BD^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

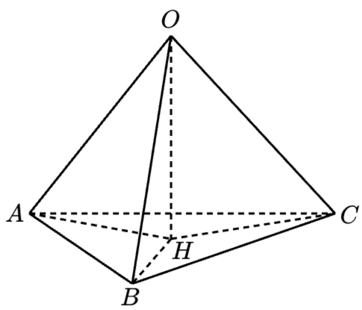
- **方法二（向量法）**

  以 $\{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}\}$ 为空间的一组基底，同方法一可得 $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$ 两两垂直，所以 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
  所以 $|\overrightarrow{CD}|^2 = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})^2 = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BD}^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = a^2 + b^2 + c^2$，故 $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

P10 习题 1.1 第 9 题

- **方法一（综合几何法）**

  如图，设 O 在平面 ABC 上的射影为 H.
  因为 $OA \perp BC$，$OB \perp AC$，由三垂线定理（见第 73 条提示）得：$AH \perp OC$，$BH \perp AC$，从而 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，故 $CH \perp AB$，于是 $OC \perp AB$.



- **方法二（向量法）**

  以 $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ 为空间的一组基底，则 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$.
  因为 $OA \perp BC$，所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = 0$，
  即 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$. 同理，由 $OB \perp AC$ 可得 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$.
  所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$，即 $\overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$，亦即 $OC \perp AB$.

P15 习题 1.2 第 8 题

- **方法一（综合几何法）**

  如下页图，设 AB，AC，BD，CD 的中点分别为 E，F，G，H.

因为 $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GH}$，所以四边形 $EFHG$ 是平行四边形，

由题意知 $EH=FG$，所以四边形 $EFHG$ 是矩形，故 $EF\perp EG$，

又 $EF\parallel BC$，$EG\parallel AD$，所以 $BC\perp AD$.

同理可证 $AB\perp CD$，$AC\perp BD$.

· **方法二（向量法）**

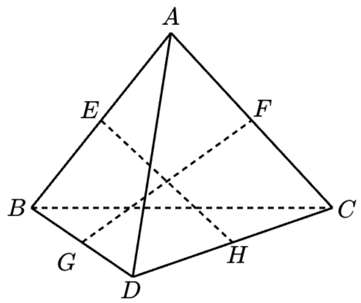
以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\}$ 为空间的一组基底，则 $\overrightarrow{EH}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$，$\overrightarrow{FG}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$.

因为 $|\overrightarrow{EH}|=|\overrightarrow{FG}|$，所以 $\left[\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\right]^2=\left[\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\right]^2$，即

$\dfrac{1}{4}\left[(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\right]\cdot\left[(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\right]=0$，

化简得 $\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，所以 $AD\perp BC$.

同理可证 $AB\perp CD$，$AC\perp BD$.



P41 练习第 2 题

· **方法一（综合几何法）**

如图，在长方体 $AC_1BD_1-A_1CB_1D$ 中取四面体 $ABCD$，设 $AC_1=x$，$AD_1=y$，$AA_1=z$，

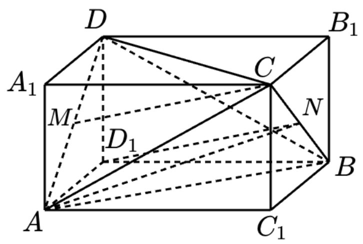
则 $\begin{cases}x^2+y^2=AB^2=9\\x^2+z^2=AC^2=9\\y^2+z^2=AD^2=4\end{cases}$，解得 $x=\sqrt{7}$，$y=z=\sqrt{2}$.

在长方体 $AC_1BD_1-A_1CB_1D$ 中，易得 $D_1N\parallel CM$，所以 $\angle AND_1$ 为异面直线 CM，AN 所成角.

在 $\triangle ACD$ 中，由中线长定理（见第 57 条提示）得 $CM=\dfrac{1}{2}\sqrt{2(AC^2+CD^2)-AD^2}=2\sqrt{2}$，

同理 $AN=2\sqrt{2}$；在 $\triangle AND_1$ 中，$\cos\angle AND_1=\dfrac{AN^2+D_1N^2-AD_1^2}{2AN\cdot D_1N}=\dfrac{7}{8}$，

所以异面直线 CM，AN 所成角的余弦值为 $\dfrac{7}{8}$.



一般地，对于各组对棱分别相等的四面体，可以由长方体的六条相连的面对角线构成. 借助长方体良好的平行和垂直性质，我们可以更容易地讨论四面体中的几何性质.

· **方法二（向量法）**

以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\}$ 为空间的一组基底，则 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$.

由 $|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})^2}=3$，解得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2$，

同理可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=7$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2$，

所以 $|\overrightarrow{AN}|=\sqrt{\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\right]^2}=2\sqrt{2}$，同理可得 $|\overrightarrow{CM}|=2\sqrt{2}$，

又 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2=$
$\frac{1}{2}-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}-\frac{9}{2}=-7$，所以 $\cos<\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}>=\frac{\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{CM}}{|\overrightarrow{AN}|\cdot|\overrightarrow{CM}|}=-\frac{7}{8}$，

即异面直线 CM，AN 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$.

P43 习题 1.4 第 8 题

· **方法一（综合几何法）**

因为四面体 $ABCD$ 的各棱长都等于 a，所以 $AN\perp CD$，$BN\perp CD$，

又 $AN\bigcap BN=N$，所以 $CD\perp$ 平面 ABN，从而 $CD\perp MN$. 同理可证 $MN\perp AB$.

· **方法二（向量法）**

以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\}$ 为空间的一组基底，则 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$.

因为四面体 $ABCD$ 的各棱长都等于 a，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}a^2$，

所以 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2-a^2)=0$，

所以 $MN\perp AB$. 同理可证 $MN\perp CD$.

这几道题表明，在三棱锥中，三条侧棱是一组良好的空间基底，因此可以考虑运用空间向量解决问题.

84. P14 练习第 1 题

以 $\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$ 为空间的一组基底，则 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$.

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cos\theta-|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\theta=0$，

所以 $OA\perp BC$.

P15 习题 1.2 第 6 题

因为 $ABCD$ 是菱形，$CD=CC_1$，所以平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各棱长均相等.

后续解答过程参考下面的思考题.

P32 例 4

参考教材的解答.

思考题

以 $\{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CC_1}\}$ 为空间的一组基底，则 $\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CC_1}$，$\overrightarrow{C_1B}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CC_1}$，
$\overrightarrow{C_1D}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CC_1}$.

设平行六面体的棱长为 a，则 $CA_1\perp$ 平面 $C_1BD \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CA_1}\perp\overrightarrow{C_1B} \\ \overrightarrow{CA_1}\perp\overrightarrow{C_1B} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CC_1})\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CC_1}) = a^2\cos\angle BCD - a^2\cos\angle C_1CD = 0 \\ (\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CC_1})\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CC_1}) = a^2\cos\angle BCD - a^2\cos\angle C_1CB = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \angle C_1CB = \angle C_1CD = \angle BCD$.

所以 $\angle C_1CB = \angle C_1CD$ 是 $CA_1\perp$ 平面 C_1BD 的必要不充分条件.

这几道题表明，平行六面体中，从一个顶点出发的三条棱，是一组良好的空间基底，因此可以考虑运用空间向量解决问题.

85. P38 练习第 2 题

- **方法一（向量法）**

  不妨设 $PA=PB=PC=1$，$\overrightarrow{PA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{PB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{PC}=\boldsymbol{c}$，以 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 为空间向量的一组基底，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{2}$.

  设 $\boldsymbol{n}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$ 为平面 PAB 的法向量，则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0 \\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0 \\ \frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}z=0 \end{cases}$，

  解得 $x=y=-\dfrac{1}{3}z$，不妨取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$.

  所以 $\cos<\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，因此 PC 与平面 PAB 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

- **方法二（综合几何法）**

  如下左图，不妨设 $PA=PB=PC=2$，则 $\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCA$ 为等边三角形，从而 $AB=BC=CA=2$，所以四面体 $P-ABC$ 为正四面体.

  取 AB 的中点 M，于是 $CM\perp AB$，$PM\perp AB$，所以 $AB\perp$ 平面 PCM.

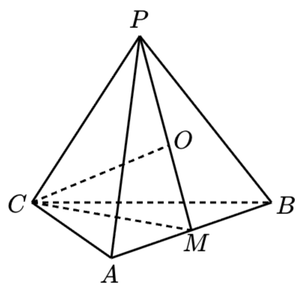
  过点 C 作 PM 的垂线，垂足为 O，因为 $OC\subseteq$ 平面 PCM，所以 $AB\perp OC$，

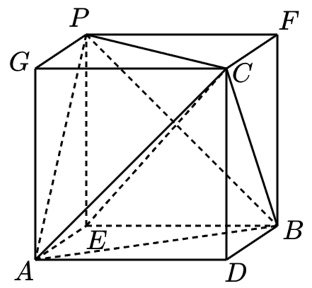
  又 $PM\bigcap AB=M$，所以 $CO\perp$ 平面 PAB.

  所以 $\angle CPM$ 即为直线 PC 与平面 PAB 所成角.

  易得 $CM=PM=\sqrt{3}$，在 $\triangle PCM$ 中，$\cos\angle CPM=\dfrac{PC^2+PM^2-CM^2}{2PC\cdot PM}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

  即直线 PC 与平面 PAB 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.





此外，如上右图，由第 83 条提示 P41 练习第 2 题的总结，可以将正四面体 $P-ABC$ 嵌入正方体 $ADBE-GCFP$ 中，从而 $\overrightarrow{CE}$ 是平面 PAB 的一个法向量（可以尝试证明 $PA\perp$ 平面 $BEGC$ 和 $PB\perp$ 平面 $AEFC$，得到 $PA\perp CE$，$PB\perp CE$，从而证明 $CE\perp$ 平面 PAB）.

在 $\triangle PCE$ 中，$\angle CPE=\dfrac{\pi}{2}$，$CP=\sqrt{2}EP$，所以 $\sin\angle PCE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即直线 PC 与平面 PAB 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

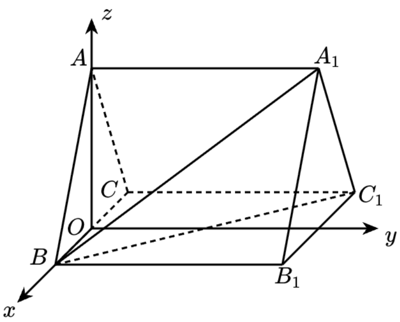
P38 练习第 3 题

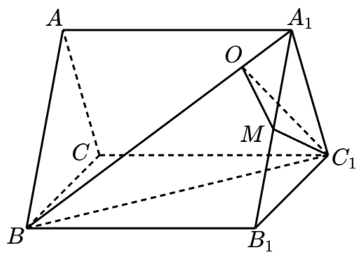
· **方法一（向量法）**

如下左图，以 BC 的中点 O 为原点建立空间直角坐标系，

计算得平面 AA_1B，平面 A_1BC_1 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},0,1)$，$\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},\sqrt{3},-1)$（具体过程略）. $\cos<\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2>=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

所以平面 AA_1B 与平面 A_1BC_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.





· **方法二（综合几何法）**

如上右图，取 A_1B_1 的中点 M，过 M 作 A_1B 的垂线，垂足为 O.

则由 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ 得 $AA_1\perp C_1M$，又 $AA_1\cap A_1B_1=A_1$，所以 $C_1M\perp$ 平面 AA_1B_1B，所以 $\angle C_1OM$ 即为平面 AA_1B 与平面 A_1BC_1 的夹角或其补角.

计算得 $C_1M=\sqrt{3}$，$OM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\tan\angle C_1OM=\sqrt{6}$，$\cos\angle C_1OM=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

所以平面 AA_1B 与平面 A_1BC_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

P38 练习第 4 题

· **方法一（向量法）**

设 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}$ 是空间内的一组基底.

不妨设 $BA=BC=BD=2$，$\angle ABD=\theta$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=-2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=4\cos\theta$.

（1）$\overrightarrow{AD}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=0$，所以 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$，

即直线 BC 与 AD 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{2}$.

（2）本题若直接在上述基底下求解平面 ABC 和平面 BCD 的法向量，计算量较大，因此考虑运用平面垂直的性质定理，即平面 ABC 内垂直于交线 BC 的直线垂直于平面 BCD.

设平面 ABC 内的向量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 BC 垂直，即 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}=-2+4\lambda=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

于是 $\boldsymbol{u}\perp$ 平面 BCD，所以 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{c}=4\cos\theta-1=0$，解得 $\cos\theta=\dfrac{1}{4}$.

由上述讨论，平面 BCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

所以 $\cos < \overrightarrow{AD}, \boldsymbol{n} >= \dfrac{\overrightarrow{AD} \cdot \boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即直线 AD 与平面 BCD 的夹角大小为 $\dfrac{\pi}{4}$.

(3) 设平面 ABD 的法向量 $\boldsymbol{m} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}$，则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{BA} = 4x - 2y + z = 0 \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{BD} = x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} x = z \\ y = \dfrac{5}{2}z \end{cases}$，取 $\boldsymbol{m} = 2\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}$，所以 $\cos < \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} >= \dfrac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}| \cdot |\boldsymbol{n}|} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

即平面 ABD 与平面 BDC 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

· **方法二（综合几何法）**

(1) 过 A 作 BC 的垂线，垂足为 O. 则由 $\begin{cases} AB = DB \\ \angle ABO = \angle DBO \\ BO = BO \end{cases}$ 得 $\triangle ABO \cong \triangle DBO$，

所以 $\angle DOB = \angle AOB = \dfrac{\pi}{2}$，即 $DO \perp BC$. 又 $AO \cap DO = O$，所以 $BC \perp$ 平面 AOD，

所以 $BC \perp AD$，即直线 BC 与 AD 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{2}$.

(2) 因为平面 $ABC \perp$ 平面 DBC，平面 $ABC \cap$ 平面 $DBC = BC$，所以 $AO \perp$ 平面 BCD. 所以 $\angle ADO$ 即为直线 AD 与平面 BCD 的夹角.

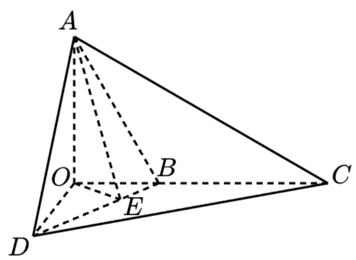
计算得 $OA = OD = \sqrt{3}$，所以 $\cos\angle ADO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle ADO = \dfrac{\pi}{4}$，

即直线 AD 与平面 BCD 的夹角大小为 $\dfrac{\pi}{4}$.

(3) 如图，过 O 作 BD 的垂线，垂足为 E，所以 $\angle AEO$ 即为平面 ABD 与平面 BDC 的夹角或其补角.

计算得 $OA = \sqrt{3}$，$OE = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\tan\angle AEO = 2$，$\cos\angle AEO = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

即平面 ABD 与平面 BDC 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



当然，也可以在证明 OA、OC、OD 两两垂直后，再以 O 为原点建立空间直角坐标系求解本题.

86. 以 $\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}\}$ 为空间的一组基底，则 $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC}$.

因为 $AC \subset \alpha$，$BD \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = AB$，$AC \perp AB$，$BD \perp AB$，所以异面直线 AC，BD 所成角 θ 等于平面 α，β 的夹角.

由 $|\overrightarrow{CD}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC})^2 = 4^2 + 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8\cos\theta$ 得 $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$，

所以平面 α，β 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$.

在“二面角的平面角”的定义中，要求从二面角的棱上一点出发，在两个半平面内分别作棱的垂线，则两射线组成的角即为二面角的平面角. 事实上，这两条射线也可以异面，利用它们所在直线的方向向量来计算夹角.

87. 第 17 题

（1）因为 $\boldsymbol{u}$ 是直线 l 的方向向量，所以对直线上任意一点 P，有 $\boldsymbol{u} \,/\!/\, \overrightarrow{P_0P}$，即存在非零实数 λ，使得 $\overrightarrow{P_0P}=\lambda\boldsymbol{u}$，即 $\begin{cases} x-x_0=\lambda a \\ y-y_0=\lambda b \\ z-z_0=\lambda c \end{cases}$，所以 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}=\lambda$.

由于该方程可以用直线 l 上一点及其方向向量表示直线上的任意点，因此该方程称为直线 l 的点向式方程.

由上述过程我们也可以得到方程组 $\begin{cases} x=x_0+\lambda a \\ y=y_0+\lambda b \\ z=z_0+\lambda c \end{cases}$，若 $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=1$，则该方程为空间直线的参数方程.

（2）因为 $\boldsymbol{u}$ 是平面 α 的法向量，所以对平面内任意一点 P，有 $\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{P_0P}=(a,b,c)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

由于该方程可以用平面 α 上一点及其法向量表示平面上的任意点，因此该方程称为平面 α 的点法式方程.

进一步证明

（1）设平面 α 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，由上面第 17 题（2）得 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$，即 $ax+by+cz+d=0$，其中 $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$ 为常数.

类似于直线的一般式方程，只要 $(A,B,C,D) \,/\!/\, (a,b,c,d)$，则平面 α 也可以用方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 表示，该方程称为平面 α 的一般式方程.

（2）由题意，平面 α 过点 $A(i,0,0)$，$B(0,j,0)$，$C(0,0,k)$，于是 $\overrightarrow{AB}=(-i,j,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-i,0,k)$，

所以 $\begin{cases} \overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{u}=-ia+jb=0 \\ \overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{u}=-ia+kc=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} b=\dfrac{i}{j}a \\ c=\dfrac{i}{k}a \end{cases}$，

所以 $\boldsymbol{u}=(a,\dfrac{i}{j}a,\dfrac{i}{k}a)=\dfrac{1}{ia}(\dfrac{1}{i},\dfrac{1}{j},\dfrac{1}{k})$，故 $\boldsymbol{u} \,/\!/\, (\dfrac{1}{i},\dfrac{1}{j},\dfrac{1}{k})$.

88. 平面 AEF 的法向量为 $\overrightarrow{A_1C}$.

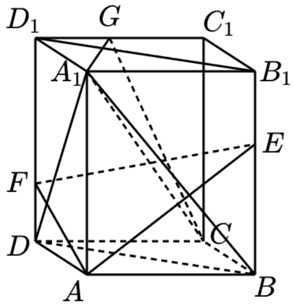
如下页图，在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内过点 A_1 作 B_1D_1 的垂线，交 C_1D_1 于点 G，则 $\overrightarrow{A_1G}$ 为平面 D_1B_1BD 的一个法向量.

$A_1C=\sqrt{AB^2+AD^2+AA_1^2}=5\sqrt{2}$，$A_1G=\dfrac{A_1D_1}{\cos\angle D_1A_1G}=\dfrac{15}{4}$，

$D_1G=A_1D_1\tan\angle D_1A_1G=\dfrac{9}{4}$，$C_1G=\dfrac{7}{4}$，$CG^2=C_1G^2+CC_1^2=\dfrac{449}{16}$.

在 $\triangle A_1GC$ 中，由余弦定理的推论得 $\cos\angle CA_1G=\dfrac{A_1C^2+A_1G^2-CG^2}{2A_1G\cdot A_1C}=\dfrac{12\sqrt{2}}{25}$.

这一解法表明，在求解线面角或二面角时，我们可以先找出平面的法向量，再运用几何方法求解向量的夹角，从而求出线面角或二面角.



在 2022 年新高考 I 卷第 19 题中，可以由条件 “平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1” 和直棱柱的性质推出 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC（即平面 BCD）以及 $AB\perp BC$，$AB=BC$（详细证明见第 73 条提示）．由此容易证明，$AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，从而 $AB\perp B_1C$，又 $B_1C\perp BC_1$，$AB\cap BC_1=B$，所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC_1（即平面 ABD）．故 $\overrightarrow{B_1A}$，$\overrightarrow{B_1C}$ 分别是平面 CBD 和平面 ABD 的法向量，故二面角 $A-BD-C$ 的正弦值等于 $\sin<\overrightarrow{B_1A},\overrightarrow{B_1C}>=\sin\angle AB_1C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（易知 $\triangle AB_1C$ 为等边三角形. 事实上直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是正方体的一半）．

89. 条件中 $\overrightarrow{A'E}$，$\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{AA'}$ 两两之间的夹角和其中两者的模长已知，故考虑以之为空间中的一组基底.

由题意，$\overrightarrow{A'E}\cdot\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AA'}=0$，$\overrightarrow{A'E}\cdot\overrightarrow{AF}=\pm mn\cos\theta$.

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{A'E}-\overrightarrow{AA'}$，所以 $|\overrightarrow{EF}|^2=(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{A'E}-\overrightarrow{AA'})^2=m^2+n^2+|\overrightarrow{AA'}|^2\pm 2mn\cos\theta=l^2$，所以 $AA'=\sqrt{l^2-m^2-n^2\pm 2mn\cos\theta}$.

90. 方法一（用直线斜率表示角度）

设 $P(p,0)$，因为 $\angle MPN$ 为直角，在此条件下 MP，NP 的斜率显然都存在，所以 $k_{MP}\cdot k_{NP}=\dfrac{2}{2-p}\cdot\dfrac{-2}{5-p}=-1$，整理得 $p^2-7p+6=0$，解得 $p=1$ 或 6，所以 P 的坐标为 $(1,0)$ 或 $(6,0)$.

方法二（用向量表示角度）

设 $P(p,0)$，因为 $\angle MPN$ 为直角，所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(2-p,2)\cdot(5-p,-2)=p^2-7p+6=0$，解得 $p=1$ 或 6，所以 P 的坐标为 $(1,0)$ 或 $(6,0)$.

用解析方法研究几何问题时，刻画角度的方法主要有直线的倾斜角（斜率）和向量的夹角.

如果将题目中的条件 “$\angle MPN$ 为直角” 改为 “$\angle MPN=\theta$”，同样可以从直线的倾斜角和向量夹角两个角度入手.

从直线倾斜角的角度入手，设直线 MP，NP 的倾斜角分别为 α，β，斜率分别为 k_1，k_2，则 $\alpha-\beta=\theta$，故 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\alpha}=\tan\theta$，即需要解方程 $\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$，但要注意讨论斜率不存在的情况.

从向量夹角的角度入手，则需要解方程 $\dfrac{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{PN}|}=\cos\theta$.

91. 归纳：（如下表）

直线方程	参数意义	应用情形/优点	局限性
两点式方程 $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$	(x_1,y_1)，(x_2,y_2)：直线上两点	已知直线上两点坐标	不能表示斜率不存在或为 0 的直线
点斜式方程 $y-y_0=k(x-x_0)$	(x_0,y_0)：直线上一点 k：直线斜率	已知直线上一点及斜率	不能表示斜率不存在的直线
斜截式方程 $y=kx+m$	k：直线斜率 m：直线在 y 轴上的截距	已知直线斜率和截距 形式简洁便于消元	不能表示斜率不存在的直线
斜截（反）式方程 $x=my+t$	m：直线斜率的倒数 t：直线在 x 轴上的截距	已知直线斜率和截距 形式简洁便于消元	不能表示斜率为 0 的直线
截距式方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	a：直线在 x 轴上的截距 b：直线在 y 轴上的截距	已知直线的横截距和纵截距几何意义鲜明	不能表示过原点的直线
一般式方程 $Ax+By+C=0$	(A,B)：直线的法向量	可以表示任意直线	通常不便于消元
参数方程 $\begin{cases} x=x_0+t\cos\theta \\ y=y_0+t\sin\theta \end{cases}$	(x_0,y_0)：直线上一点 θ：直线的倾斜角 t：从 (x_0,y_0) 出发的有向距离	已知直线上一点及方向 适用涉及直线上两点距离的情形	聚焦于有向距离 可能忽视了其他信息

（1）2021 年新高考 I 卷第 21 题

（1）$C: x^2-\dfrac{y^2}{16}=1$（$x>0$），具体过程略；

（2）设 $T(\dfrac{1}{2},t)$，直线 AB，PQ 的倾斜角分别为 α，β，则

$AB:\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+m\cos\alpha \\ y=t+m\sin\alpha \end{cases}$，$PQ:\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+n\cos\beta \\ y=t+n\sin\beta \end{cases}$，代入 C 的方程得：

$(16\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)m^2+(16\cos\alpha-2t\sin\alpha)m-(t^2+12)=0$，

所以 $|TA|\cdot|TB|=m_1m_2=\dfrac{t^2+12}{\sin^2\alpha-16\cos^2\alpha}=\dfrac{t^2+12}{1-17\cos^2\alpha}$，

同理有 $|TP|\cdot|TQ|=\dfrac{t^2+12}{1-17\cos^2\beta}$，所以 $\dfrac{t^2+12}{1-17\cos^2\alpha}=\dfrac{t^2+12}{1-17\cos^2\beta}$，即 $\cos^2\alpha=\cos^2\beta$，

因为 $\alpha\neq\beta$，所以 $\cos\alpha+\cos\beta=0$，即 $\alpha+\beta=\pi$，所以直线 AB，PQ 的斜率之和为 0.

（2）

过 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 的两点式方程为 $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$，

去分母得：$(x_2-x_1)y-y_1(x_2-x_1)=(y_2-y_1)x-x_2(y_2-y_1)$，

移项整理得：$(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0$.

观察发现，x 的系数是已知两点的纵坐标之差，y 的系数是已知两点的横坐标之差，常数项是已知两点坐标构成的行列式的展开.

该公式可以由直线上两点的坐标快速写出直线的一般方程，为后续使用点到直线距离公式等创造便利.

92. P67 第 11 题

因为 $P_0(x_0,y_0)$ 在直线 $Ax+By+C=0$ 上，所以 $Ax_0+By_0+C=0$，即 $C=-Ax_0-By_0$，代入直线方程得 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

将 (x,y) 视为直线上任意一点 P 的坐标，则上式表示向量 $\boldsymbol{n}=(A,B)$ 与 $\overrightarrow{P_0P}$ 的数量积为 0，即 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{P_0P}$，因此直线一般式中的 (A,B) 是直线的一个法向量.

P68 第 14 题

$A_1A_2+B_1B_2=0$ 可以视为直线 l_1，l_2 的法向量 (A_1,B_2)，(A_2,B_2) 的数量积为 0，即两个法向量垂直. 类似于空间中两平面垂直当且仅当两平面的法向量垂直，在平面中，两直线垂直当且仅当两直线的法向量垂直.

93. 注意到，选取的点 (x_0,y_0) 在直线 l 上方，当且仅当二元函数 $L(x,y)=2x-y+3$ 的函数值 $L(x_0,y_0)<0$.

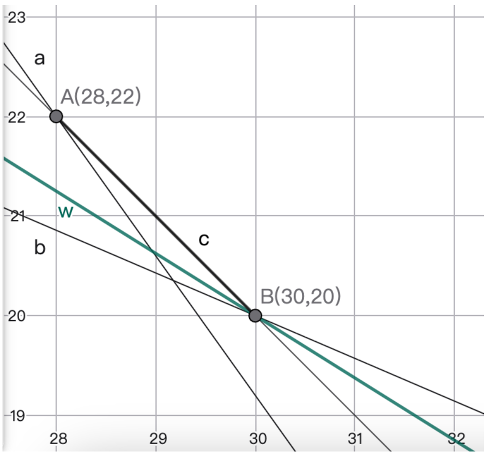
这表明，二元一次不等式在平面当中表示被直线分割成的两个区域的其中一个. 如果将该不等式视为“约束条件”，那么所有约束条件表示的范围的交集就称为“可行域”，在可行域中求解目标函数的最优解或最值的方法，称为线性规划.

第 15 条提示的问题中，设安排 x 节 A 型车厢，y 节 B 型车厢（x，$y\in\mathbf{N}$），则变量 x，y 满足以下约束条件：

$$\begin{cases} x+y=50 & \text{（总节数）} \\ 35x+25y\geqslant 1530 & \text{（甲种货物运输量）} \\ 15x+35y\geqslant 1150 & \text{（乙种货物运输量）} \end{cases}$$

在此条件下，求目标函数 $w(x,y)=0.5x+0.8y$ 的最小值.

如图，作出上述约束条件的可行域（线段 AB），再调整 w，在直线 $0.5x+0.8y=w$ 与可行域有交点（满足可行域）的前提下，使得 w 尽可能小. 注意到当直线 $0.5x+0.8y=w$ 过点 B 时，w 取得最小值 31.



94. 方法一（联立求解交点 + 距离公式的改进）

教材 P75 提示我们根据方程①直接求出②式的值. 考虑将 $x-x_0$，$y-y_0$ 视为整体，将方程①变形为 $\begin{cases} A(x-x_0)+B(y-y_0)=-(Ax_0+By_0+C) \\ B(x-x_0)-A(y-y_0)=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x-x_0=-A\cdot\dfrac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2} \\ y-y_0=-B\cdot\dfrac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2} \end{cases}$，

所以 $d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{A^2+B^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2}=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

方法二（向量投影）

设 $Q(x,y)$ 为直线 $l: Ax+By+C=0$ 上任意一点，$P(x_0,y_0)$ 到直线 l 的距离，等于向量 $\overrightarrow{PQ}$ 在 l 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 上的投影的数量的绝对值.

由第 92 条提示的结论，取 $\boldsymbol{n}=(A,B)$，$\overrightarrow{PQ}=(x-x_0,y-y_0)$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影为 $\overrightarrow{PQ}\cdot\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{A(x-x_0)+B(y-y_0)}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{Ax+By-Ax_0-By_0}{\sqrt{A^2+B^2}}$，由 $Ax+By+C=0$ 得 $Ax+By=-C$，所以 $\dfrac{Ax+By-Ax_0-By_0}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$，所以 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

方法三（直线参数方程联立求解）

如教材 P74 图 2.3-5，将点到直线的距离 $|PQ|$ 视为直线 PQ 上的有向距离，因此考虑设直线 PQ 的参数方程：$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases}$，因为直线 PQ 的方向向量即为直线 l 的法向量 (A,B)，所以不妨令 $\cos\alpha=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$，$\sin\alpha=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$. 因为点 Q 在直线 l 上，所以 $A(x_0+t\cos\alpha)+B(y_0+t\sin\alpha)+C=0$，即 $(A\cos\alpha+B\sin\alpha)t+Ax_0+By_0+C=0$，亦即 $\sqrt{A^2+B^2}\cdot t+Ax_0+By_0+C=0$，解得 $t=-\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$，所以 $d=|t|=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

利用直线参数方程的优势，我们继续运用方法三证明点关于直线的对称点坐标公式. 记 P 的对称点为 P'，由对称性，$\overrightarrow{PP'}=2\overrightarrow{PQ}$，所以 $P'(x_0+2t\cos\alpha,y_0+2t\sin\alpha)$，即

$$\left(x_0-2A\cdot\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2},y_0-2B\cdot\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}\right)$$

95. 方程 $3x+4y-2+\lambda(2x+y+2)=0$ 是二元一次方程，因此表示一条直线 l.

设 $L(x,y)=3x+4y-2+\lambda(2x+y+2)$，$L_1(x,y)=3x+4y-2$，$L_2(x,y)=2x+y+2$，因为对任意的实数 λ，方程组 $\begin{cases} 3x+4y-2=0 \\ 2x+y+2=0 \end{cases}$ 的解 $(-2,2)$ 始终满足 $L(-2,2)=0$，所以直线 l 恒过点 $(-2,2)$.

事实上，$(-2,2)$ 是方程组 $\begin{cases} L_1(x,y)=0 \\ L_2(x,y)=0 \end{cases}$ 的解，因此也必然在方程 $L_1(x,y)=0$ 和 $L_2(x,y)=0$ 表示的直线 l_1，l_2 上，即 $(-2,2)$ 是 l_1，l_2 的交点. 因此，集合

$$\mathfrak{L}=\{l: 3x+4y-2+\lambda(2x+y+2)=0|\lambda\in\mathbf{R}\}$$

是所有过 l_1，l_2 交点的直线的集合（直线 l_2 除外）.

像这样，一系列具有共同特征的直线 $\mathfrak{L}$ 称为直线系，其方程 $L(x,y)=0$ 称为直线系方程.

96. (1)只需证明 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geqslant\sqrt{2}$ 且 $\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}\geqslant\sqrt{2}$.

我们证明 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geqslant\sqrt{2}$，另一个不等式同理可证.

方法一（不等式的基本性质）：

要证 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geqslant\sqrt{2}$，

即证 $\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\geqslant\sqrt{2}-\sqrt{x^2+y^2}$，

因为 $0<x,y<1$，所以 $\sqrt{2}-\sqrt{x^2+y^2}>0$，

所以即证 $(1-x)^2+(1-y)^2 \geqslant 2+x^2+y^2-2\sqrt{2(x^2+y^2)}$，
即证 $\sqrt{2(x^2+y^2)} \geqslant x+y$，即 $2(x^2+y^2) \geqslant (x+y)^2$，亦即 $(x-y)^2 \geqslant 0$，
遂得证.

方法二（绝对值不等式）：

设平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，$\boldsymbol{b}=(1-x,1-y)$，所以 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，
由第 43 条提示的结论，$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \geqslant |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|(1,1)|=\sqrt{2}$，遂得证.

（2）设 $A(0,0)$，$B(1,0)$，$C(1,1)$，$D(0,1)$，$P(x,y)$，则
$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}$ 表示正方形 $ABCD$ 内任意一点 P 到正方形的四个顶点之和，因此该不等式表明正方形内的点到四个顶点的距离之和不小于对角线长的两倍.

97. P87 例 5 的旁注指出，动点的轨迹方程就是动点的坐标 (x,y) 满足的关系式，因此求动点轨迹方程时，应当利用题目条件建立动点横、纵坐标满足的等量（或不等）关系，并消去无关变量，得到轨迹方程.

第 7 题

设 $C(x,y)$，因为 $\triangle ABC$ 是以 BC 为底边的等腰三角形，所以 $|AC|=|AB|$，且 $C \notin AB$，
即 $\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(4-3)^2+(2-5)^2}$，亦即 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$，
且 $(x,y) \neq (3,5)$ 或 $(5,-1)$. 因此 C 的轨迹是以 $(4,2)$ 为圆心，$\sqrt{10}$ 为半径的圆（不含点 $(3,5)$、$(5,-1)$）.

第 8 题

设 AB 的中点 $M(x,y)$，$A(i,0)$，$B(0,j)$，
则 $x=\dfrac{i}{2}$，$y=\dfrac{j}{2}$，$|AB|=\sqrt{i^2+j^2}=2a$，即 $i^2+j^2=4a^2$，
代入 $i=2x$，$j=2y$ 消去 i，j，整理得 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2=a^2$.
因此 M 的轨迹是以 $(0,0)$ 为圆心，a 为半径的圆.
下面延伸讨论更一般的情况：
设长为 l 的线段 AB 的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动，动点 M 满足 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$，探究 M 的轨迹.
设 $M(x,y)$，$A(a,0)$，$B(0,b)$，由第 49 条提示的方法可得 $x=(1-\lambda)a$，$y=\lambda b$. 由题设，$|AB|^2=a^2+b^2=l^2$.
若 $\lambda=0$，则 $M(a,0)$，因为 $a^2=l^2-b^2 \in [0,l^2] \Rightarrow -l \leqslant a \leqslant l$，所以 M 的轨迹方程为 $y=0(-l \leqslant x \leqslant l)$；
若 $\lambda=1$，则 $M(0,b)$，因为 $b^2=l^2-a^2 \in [0,l^2] \Rightarrow -l \leqslant b \leqslant l$，所以 M 的轨迹方程为 $x=0(-l \leqslant y \leqslant l)$；
若 $\lambda \neq 0$ 或 1，则 $a=\dfrac{x}{1-\lambda}$，$b=\dfrac{y}{\lambda}$，所以 $\left(\dfrac{x}{1-\lambda}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\lambda}\right)^2=l^2$，即 $\dfrac{x^2}{(1-\lambda)^2l^2}+\dfrac{y^2}{\lambda^2l^2}=1$.
所以当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，M 的轨迹是圆 $x^2+y^2=\dfrac{l^2}{4}$；
当 $\lambda \neq 0,1,\dfrac{1}{2}$ 时，M 的轨迹是椭圆 $\dfrac{x^2}{(1-\lambda)^2l^2}+\dfrac{y^2}{\lambda^2l^2}=1$.

98. **方法一（标准方程法）**：

圆心为 AB 的中点 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$，半径为 $\dfrac{1}{2}|AB|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，

所以以 AB 为直径的圆的方程为 $\left(x-\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]$，

即 $\left(x-\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x_1 2x_2}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)^2-\left(\dfrac{y_1 2y_2}{2}\right)^2=0$，

由平方差公式，即 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

方法二（斜率法）:

设以 AB 为直径的圆上的点 $P(x,y)$，则 $AP\perp BP$，即 $k_{AP}\cdot k_{BP}=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\dfrac{y-y_2}{x-x_2}=-1$，

整理得 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

方法三（向量法）:

方法二实际上并不严谨，还需要讨论点 P 与 A 或 B 重合，亦即直线 AP 或 BP 斜率不存在的情况. 使用向量刻画数量关系，可以避免这一点.

设以 AB 为直径的圆上的点 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

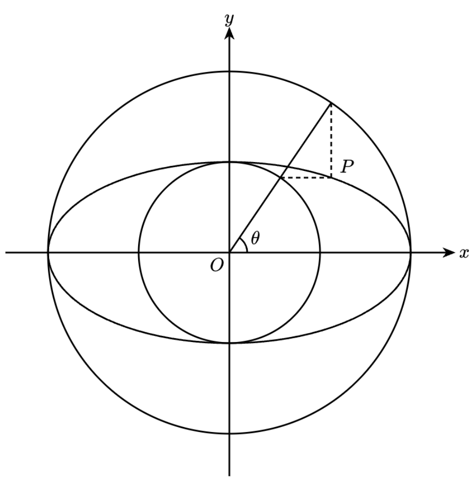
99. 证明:点 P 到 (a,b) 的距离为 $\sqrt{[(a+r\cos\theta)-a]^2+[(b+r\sin\theta)-b]^2}=\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=r$，所以 P 的轨迹是圆心为 (a,b)，半径为 r 的圆.

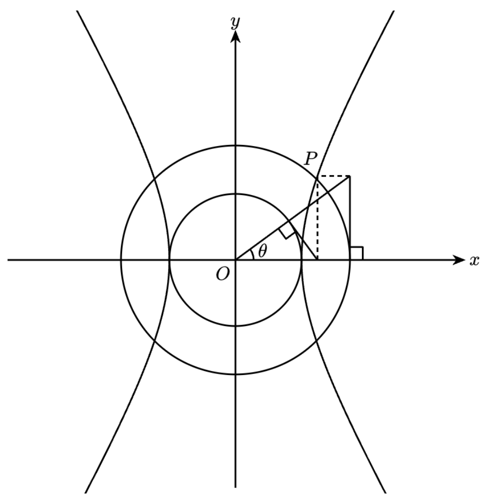
方程组 $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\y=b+r\sin\theta\end{cases}$ 是圆的参数方程，其中 $C(a,b)$ 是圆心，r 为半径，参数 θ 表示圆上的点 $P(x,y)$ 的角度，即向量 $\overrightarrow{CP}$ 的辐角.

类似地，基于三角恒等式 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，我们可以得到椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程:

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$$

但需要注意的是，椭圆参数方程中的参数 θ 不是椭圆上的点相对于原点 O 的辐角，而是以椭圆的中心作辅助圆 $x^2+y^2=a^2$ 和圆 $x^2+y^2=b^2$，椭圆上的点在辅助圆上对应点的角度，即分别取角 θ 的终边与两圆交点的横、纵坐标，作为点 P 的横、纵坐标，如下左图.





基于三角恒等式 $\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2 - \tan^2\theta = 1$，我们可以得到、双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 的参数方程：

$$\begin{cases} x = a\dfrac{1}{\cos\theta} \\ y = b\tan\theta \end{cases}$$

双曲线参数方程中，参数 θ 的几何意义是，以双曲线的中心作辅助圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 和圆 $x^2 + y^2 = b^2$，角 θ 对应的点为 P，如上页右图.

由第 36 条提示的"万能公式"，上述参数方程中的 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 和 $\tan\theta$，都可以用 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ 表示，即：

$$圆：\begin{cases} x = x_0 + r\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = y_0 + r\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad 椭圆：\begin{cases} x = a\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad 双曲线：\begin{cases} x = a\dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = b\dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

该形式中的代数式均为有理式，且单变量 t（几乎）可以取遍全体实数，在多项式运算中具有优势，称为"有理参数方程".

100. 设 $C_1(x,y) = (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2$，$C_2(x,y) = (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r_2^2$，
则方程 $C_1(x,y) = 0$，$C_2(x,y) = 0$ 表示圆 C_1，C_2.
$L(x,y) = C_1(x,y) - C_2(x,y)$ 是一个二元一次式，因此方程 $L(x,y) = 0$ 表示一条直线 l.
因为 $\forall(x,y)$，$C_1(x,y) = C_2(x,y) = 0 \Rightarrow L(x,y) = 0$，所以所有同时在圆 C_1，C_2 上的点也在直线 l 上.
因此若 C_1，C_2 相交，则 l 是 C_1，C_2 公共弦所在的直线；
若 C_1，C_2 相切，则 l 是 C_1，C_2 的公切线（首先，l 过 C_1，C_2 的切点，其次，如果 l 与 C_1，C_2 中的任何一个还有除切点以外的交点，则根据 $C_1(x,y) = C_2(x,y) + L(x,y)$，该交点也在另一个圆上，于是该交点也是两圆的交点，与两圆相切矛盾）；
若 C_1，C_2 相离，则 $\forall(x,y)$，$L(x,y) = 0$，即

$$(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2 = (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r_2^2$$

即 l 上的任意一点 P 到两圆的幂（点到圆的幂定义为点到圆心距离的平方与半径平方之差）相等，亦即 P 到两圆的切线长相等（根据勾股定理，切线长的平方等于点到圆心距离的平方与半径平方之差）.
因此，两圆方程相减所得方程表示一条直线，这条直线称为两圆的"等幂线"或"根轴".

101. 该问题隐含着"阿波罗尼斯圆"相关的知识. 给定平面内两定点，到两定点距离之比为定值的点形成的轨迹圆称为阿波罗尼斯圆.
问题：给定两定点 A，B，$|AB| = 2a$（$a > 0$），点 P 满足 $\dfrac{|PA|}{|PB|} = \lambda$（$\lambda > 0$），求点 P 的轨迹方程.
解答：以 AB 的中点 O 为原点，$\overrightarrow{OB}$ 为 x 轴正方向建立平面直角坐标系，则 $A(-a,0)$，$B(a,0)$.
当 $\lambda = 1$，即 $|PA| = |PB|$ 时，显然 P 的轨迹是线段 AB 的中垂线 $x = 0$；
当 $\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$ 时，$\dfrac{|PA|}{|PB|} = \dfrac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = \lambda$，

整理得 $\left(x-\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}a\right)^2+y^2=\left(\dfrac{2\lambda a}{\lambda^2-1}\right)^2$.

因此点 P 的轨迹是以 $\left(\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}a,0\right)$ 为圆心，$\dfrac{2\lambda a}{\lambda^2-1}$ 为半径的圆.

102. **(1) P98 习题 2.5 第 7 题**

类似于第 95 条提示，我们可以利用曲线系方程解决本题.

设 $C_1(x,y)=x^2+y^2-6x$，$C_2(x,y)=x^2+y^2-4$，

$C(x,y)=\lambda C_1(x,y)+\mu C_2(x,y)=(\lambda+\mu)x^2+(\lambda+\mu)y^2-6\lambda x-4\mu$（$\lambda+\mu\neq 0$），

显然方程 $C(x,y)=0$ 表示圆，且 $C_1(x,y)=C_2(x,y)=0\Rightarrow C(x,y)=0$，因此所有同时在圆 C_1 和 C_2 上的点也在圆 C 上，即圆 C 恒过圆 C_1 和 C_2 的交点.

又因为圆 C 过点 $M(2,-2)$，所以 $(\lambda+\mu)\cdot 2^2+(\lambda+\mu)\cdot(-2)^2-6\lambda\cdot 2-4\mu=0$，

解得 $\lambda=\mu$，不妨取 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$，则 $C:x^2+y^2-3x-2=0$.

P98 习题 2.5 第 8 题

设 $C_1(x,y)=x^2+y^2+6x-4$，$C_2(x,y)=x^2+y^2+6y-28$，

$C(x,y)=\lambda C_1(x,y)+\mu C_2(x,y)=(\lambda+\mu)x^2+(\lambda+\mu)y^2+6\lambda x+6\mu y-(4\lambda+28\mu)$（$\lambda+\mu\neq 0$），

所以方程 $C(x,y)=0$ 表示过圆 C_1 和 C_2 交点的圆，圆心为 $\left(\dfrac{-3\lambda}{\lambda+\mu},\dfrac{-3\mu}{\lambda+\mu}\right)$.

因为圆心在直线 $x-y-4=0$ 上，所以 $\dfrac{-3\lambda}{\lambda+\mu}-\dfrac{-3\mu}{\lambda+\mu}-4=0$，

解得 $\mu=-7\lambda$，不妨取 $\lambda=-\dfrac{1}{6}$，$\mu=\dfrac{7}{6}$，则 $C:x^2+y^2-x+7y+32=0$.

P102 复习参考题 2 第 10 题

整理直线 l 的方程得 $(x+y-2)+\lambda(3x+y-4)=0$，因此 l 恒过直线 $x+y-2=0$ 和 $3x+y-4=0$ 的交点 $Q(1,1)$，

点 $P(-2,-1)$ 到直线 l 的距离 $d\leqslant|PQ|=\sqrt{13}$，当且仅当 $PQ\perp l$，即 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 时取等，

所以点 P 到 l 的距离的最大值为 $\sqrt{13}$.

P103 复习参考题 3 第 20 题

（1）整理直线 l 的方程得 $(x+y-4)+m(2x+y-7)=0$，因此 l 恒过直线 $x+y-4=0$ 和 $2x+y-7=0$ 的交点 $P(3,1)$.

（2）因为圆 C 的半径为 5，$C(1,2)$，$|CP|=\sqrt{5}<5$，所以点 P 在圆 C 内部，因此直线 l 与圆 C 相交.

设 C 到直线 l 的距离为 d，类似 P102 复习参考题 2 第 10 题的分析，$d_{\max}=|CP|=\sqrt{5}$，当且仅当 $l\perp CP$，即 $m=-\dfrac{3}{4}$ 时取得.

所以直线 l 被圆截得的弦长为 $2\sqrt{5^2-d^2}\leqslant 2\sqrt{25-5}=4\sqrt{5}$，故最短弦长为 $4\sqrt{5}$，此时 $m=-\dfrac{3}{4}$.

(2) 因为 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，所以 A，B，P，Q 四点共圆.

设 $T(\dfrac{1}{2},t)$, $H(x,y)=x^2-\dfrac{y^2}{16}-1$, $L_1(x,y)=y-k_1x+\dfrac{1}{2}k_1-t$, $L_2(x,y)=y-k_2x+\dfrac{1}{2}k_2-t$,

则方程 $H(x,y)=0$ 表示曲线 C，方程 $L_1(x,y)=0$，$L_2(x,y)=0$ 分别表示直线 AB，PQ.

令 $F(x,y)=\lambda H(x,y)+\mu L_1(x,y)L_2(x,y)$（$\lambda\mu\neq 0$），则 $H(x,y)=0$，且 $L_1(x,y)=0$ 或

$L_2(x,y)=0$ 是 $F(x,y)=0$ 的充分条件，

故二次曲线 $F(x,y)=\lambda\left(x^2-\dfrac{y^2}{16}-1\right)+\left(y-k_1x+\dfrac{1}{2}k_1-t\right)\left(y-k_2x+\dfrac{1}{2}k_2-t\right)=0$

恒过直线 AB，PQ 与曲线 C 的交点，即点 A，B，P，Q.

所以二次曲线 $F(x,y)=0$ 是一个圆，因此 $F(x,y)$ 中含有 xy 的项的系数 $-\mu(k_1+k_2)$ 恒为 0，故 $k_1+k_2=0$，即直线 AB，PQ 的斜率之和为 0.

103. 第 15 题

（1）$P(-2,-3)$，$Q(4,2)$，由第 98 条提示的结论得，圆 Q' 的方程为 $(x+2)(x-4)+(y+3)(y-2)=0$，即 $x^2+y^2-2x+y-14=0$.

（2）直线 PA，PB 是圆 Q 的切线，理由：

因为点 A，B 在以 PQ 为直径的圆上，所以 $AP\perp AQ$，$BP\perp BQ$，

因为 AQ，BQ 是圆 Q 的半径，所以 PA，PB 与圆 Q 相切.

（3）由第 100 条提示的结论，将圆 Q 与圆 Q' 的方程作差：

$$(x-4)^2+(y-2)^2-9-(x^2+y^2-3x+y-14)=0$$

整理得 $x+y-5=0$，此即直线 AB 的方程.

思考题

由本题第（2）问的结论可知，我们可以依照以下步骤作出圆外一点 P 到圆 Q 的切线：

首先，分别以 P，Q 为圆心，大于 $\dfrac{1}{2}|PQ|$ 长为半径作圆，作出两圆交点所在直线，交 PQ 于点 Q'，则 Q' 为 PQ 的中点；

然后，以 Q' 为圆心，$\dfrac{1}{2}|PQ|$ 为半径作圆，与圆 Q 交于 A，B 两点；

最后，连接 PA，PB，即为圆 Q 的切线.

104. 方法一（坐标法）：

不妨令四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 在 x 轴上，且 A 与原点重合，即 $A(0,0)$，

设 $C(c,0)$，设 $B(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，由题意，$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|DA|^2$，

即 $x_1^2+y_1^2+(x_2-c^2)+y_2^2=(x_1-c)^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2$，整理得 $x_1=x_2$，所以 $AC\perp BD$.

方法二（向量法）：

$$\begin{aligned}
& AB^2+CD^2=BC^2+AD^2\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{CD}^2\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD})\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD})=0\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AC}\cdot(2\overrightarrow{DB})=0\\
\Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{DB}
\end{aligned}$$

所以 $AC\perp BD$.

方法三（同一法）：

如下页图，过点 B，D 作 AC 的垂线，垂足分别为 M，N，于是：

$$\begin{aligned}
& AB^2+CD^2=BC^2+AD^2\\
\Leftrightarrow\ & AB^2-BC^2=AD^2-CD^2\\
\Leftrightarrow\ & (AM^2+BM^2)-(CM^2+BM^2)=(AN^2+DN^2)-(CN^2+DN^2)
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow\ AM^2-CM^2=AN^2-CN^2$

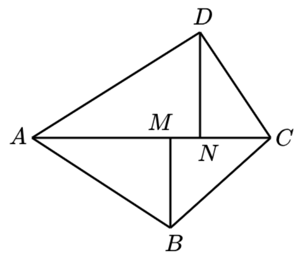
$\Leftrightarrow\ AC\cdot(AM-CM)=AC\cdot(AN-CN)$

$\Leftrightarrow\ AC-2CM=AC-2CN$

$\Leftrightarrow\ CM=CN$

所以点 M，N 重合，故 $BD\perp AC$.

实际上，如果给定一条线段，则到线段两端点距离平方之差为定值的点的轨迹，是一条垂直于给定线段的直线，证明如下：



已知 $|AB|=2a$（$a>0$），点 P 满足 $|PA|^2-|PB|^2=\lambda$ 为定值.

不妨设 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$P(x,y)$，

则 $|PA|^2-|PB|^2=(x+a)^2+y^2-(x-a)^2-y^2=4ax=\lambda$，所以 $x=\dfrac{\lambda}{4a}$.

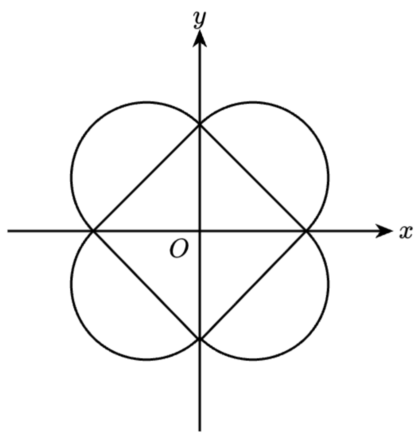
因此点 P 的轨迹是直线 $x=\dfrac{\lambda}{4a}$.

如果分别以 A, B 为圆心, r_1, r_2 为半径作圆, 其中 r_1, r_2 满足 $r_1^2-r_2^2=\lambda$, 则 $|PA|^2-|PB|^2=\lambda\Leftrightarrow|PA|^2-r_1^2=|PB|^2-r_2^2$，即点 P 到圆 A 和圆 B 的幂相等，因此 P 的轨迹是两圆的根轴. 这就是本题与第 100 条提示的联系. 事实上，根轴的其中一个性质就是根轴垂直于两圆的连心线.

105. 因为用 $-x$ 替换 x 或用 $-y$ 替换 y，方程仍然成立，因此曲线 $x^2+y^2=|x|+|y|$ 关于 x 轴和 y 轴对称，故不妨考虑其在第一象限的图象.

当 x，$y\geqslant0$ 时，曲线方程化为 $x^2+y^2=x+y$，即 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$，

所以曲线在第一象限的图象是以 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 为圆心，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的一部分；根据对称性，可以得到曲线的完整图象，如图所示：



通过计算易得曲线与坐标轴的交点为 $(0,\pm1)$，$(\pm1,0)$，所以曲线在每一象限的图象是一段半圆弧，因此曲线围成的部分是四角的四个半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的半圆和中间的边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，总面积 $S=4\cdot\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2=\pi+2$.

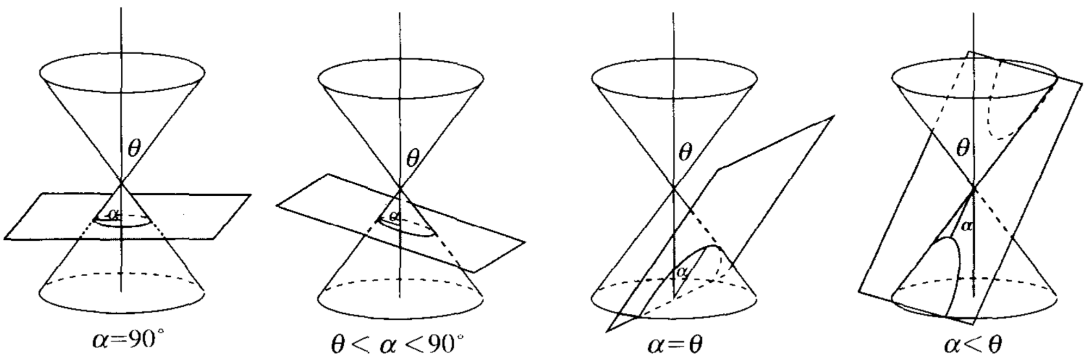
106. 如图，设圆锥面的轴线与母线的夹角为 θ，与平面的所成角为 α，当 α 变化时，平面截圆锥面可得不同的截线：

（1）当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时，截线是一个圆；

（2）当 $\theta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 时，截线为椭圆；

（3）当 $\alpha=\theta$ 时，截线为抛物线；

（4）当 $0<\alpha<\theta$ 时，截线为双曲线.



α=90° 圆　　$\theta<\alpha<$90° 椭圆　　$\alpha=\theta$ 抛物线　　$\alpha<\theta$ 双曲线

107. 本题的旁注再次提示我们求解轨迹方程的方法：求点 M 的轨迹方程，就是要求其横、纵坐标满足的关系式，但是题中只有 (x_0,y_0) 满足的关系式，因此可以寻求 x，y 与 x_0，y_0 之间的关系，然后消去 x_0，y_0，从而得到点 M 的轨迹方程.

108. 圆与椭圆之间存在“仿射变换”的关系. 由于从椭圆的方程到圆的方程，仅有线性变换（即 x，y 代换为原来的若干倍），因此这一变换将保留：

（1）点的共线性（同一直线上的点变换后仍在同一直线上）；

（2）向量沿着一条线的比例（共线向量的比例变换后不变）.

109. 更一般地，我们证明当 $\overrightarrow{OR}=\lambda\overrightarrow{OF}$，$\overrightarrow{CR'}=\lambda\overrightarrow{CF}$ 时，直线 ER 与 GR' 的交点 L 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上.

由题设，$R(\lambda a,0)$，$R'(a,(1-\lambda)b)$，

所以 $ER: bx-\lambda ay-\lambda ab=0$，$GR': \lambda bx+ay-ab=0$，联立解得 $L\left(\dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}a,\dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}b\right)$.

而 $\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{2\lambda}{1+\lambda^2}a\right)^2+\dfrac{1}{b^2}\left(\dfrac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}b\right)^2=\dfrac{(2\lambda)^2+(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}=1$，故 L 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上.

110. 第 14 题

（1）设直线 $l: y=\dfrac{3}{2}x+m$，联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1\\ y=\dfrac{3}{2}x+m\end{cases}$ 得 $9x^2+6mx+2(m^2-9)=0$，

l 与椭圆有两个公共点，当且仅当该方程有两个不同的实根，即 $\varDelta=36m^2-72(m^2-9)=36(18-m^2)>0$，即 $-3\sqrt{2}<m<3\sqrt{2}$.

所以当且仅当这组直线的截距在 $(-3\sqrt{2},3\sqrt{2})$ 上时，与椭圆有两个公共点.

(2) 设这组直线与椭圆的公共点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 时，AB 的中点 $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.
由韦达定理得，$x_1+x_2=-\dfrac{2m}{3}$，$y_1+y_2=\dfrac{3}{2}(x_1+x_2)+2m=m$，故 $M(-\dfrac{m}{3},\dfrac{m}{2})$.
因为 $y_M=-\dfrac{3}{2}x_M$，所以 M 在直线 $y=-\dfrac{3}{2}$ 上.

事实上，在圆锥曲线 $mx^2+ny^2=1$（$mn\neq 0$）中，弦 AB 的中点 M 满足 $k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{m}{n}$，
下面证明这一结论：
设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为 A，B 在曲线 $mx^2+ny^2=1$ 上，所以
$\begin{cases} mx_1^2+ny_1^2=1 \\ mx_2^2+ny_2^2=1 \end{cases}$，两式相减得 $m(x_1+x_2)(x_1-x_2)+n(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，
即 $\dfrac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{m}{n}$，亦即 $k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{m}{n}$.

注意到圆锥曲线 $mx^2+ny^2=1$ 的弦中点必定在过中心的直线上，据此，我们可以按照以下步骤用尺规作出椭圆或双曲线 C 的中心：
(1) 取 C 的两条平行弦 a，b（尺规作平行线的方法略）；
(2) 作弦 a，b 的中点 A，B，并作出直线 AB，则 AB 过 C 的中心；
(3) 类似地，作 C 的另一组平行弦 d，e，作出两条弦中点所在直线 DE，则 DE 过 C 的中心；
(4) AB，DE 的交点即为 C 的中心.

111. P108 例 3，P121 探究，P126 练习第 1 题

这几题揭示了椭圆和双曲线的“第三定义”：与定点 $(-a,0)$，$(a,0)$（$a>0$）连线的斜率之积为定值 $-\dfrac{b^2}{a^2}$（或 $\dfrac{b^2}{a^2}$）的点的轨迹是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，不含两定点，证明略.

P113 例 6，P125 例 5，P127 习题 3.2 第 10 题

这几题揭示了椭圆和双曲线的“第二定义”，也是体现三类圆锥曲线统一性的定义. 到焦点与到准线的距离之比为定值 e 的点的轨迹为（1）椭圆，若 $0<e<1$；（2）抛物线，若 $e=1$；（3）双曲线，若 $e>1$. 这个定值 e 就是离心率.

P115 习题 3.1 第 6 题，P127 习题 3.2 第 5 题

这几题给出了椭圆或双曲线（一支）的一种生成方式，其本质是椭圆或双曲线的“第一定义”.
当圆的半径变为无穷大，圆周变为直线，半径变为垂直于直径的射线，则我们也可以给出生成抛物线的一种方式：给定直线 l 与定点 F，P 为 l 上的动点，过 P 且垂直于 l 的直线与 PF 的中垂线交于点 Q，则点 Q 的轨迹为抛物线.

P115 习题 3.1 第 10 题，P145 复习参考题 3 第 2（2）题

这几题给出了椭圆或双曲线（一支）的另一种生成方式，其本质也是“第一定义”.
当其中一个圆的半径变为无穷大，圆周变为直线，半径变为垂直于直径的射线，则我们也可以给出生成抛物线的另一种方式：给定直线 l 与圆 F（与 l 相离），则与 l 和圆 F 同时相切的圆的圆心 P 的轨迹为抛物线.

112. (1) **距离之比：**
详见第 101 条提示.

距离之积：

设定点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$（$c>0$），动点 $P(x,y)$ 满足 $|PF_1|\cdot|PF_2|=a^2$（$a>0$），

则 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2$，整理得 $y^4+2(x^2+c^2)y^2+(x^2-c^2)^2-a^4=0$，

解得 $y^2=\sqrt{4c^2x^2+a^4}-(x^2+c^2)$，该曲线称为“卡西尼卵形线”.

下面我们研究该曲线的范围：

因为 $y^2=\sqrt{4c^2x^2+a^4}-(x^2+c^2)\geqslant 0$，所以 $c^2-a^2\leqslant x^2\leqslant c^2+a^2$，

当 $0<\dfrac{c}{a}<1$ 时，$-\sqrt{c^2+a^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{c^2+a^2}$，曲线 C 是连续光滑的曲线.

当 $\dfrac{c}{a}=1$ 时，曲线 C 过原点，退化为双纽线，如图 (c).

当 $\dfrac{c}{a}>1$ 时，$\sqrt{c^2-a^2}\leqslant x\leqslant\sqrt{c^2+a^2}$ 或 $-\sqrt{c^2+a^2}\leqslant x\leqslant-\sqrt{c^2-a^2}$，曲线 C 分为两支.

下面我们研究该曲线的极值点：

设 $y^2=f(x)$，$f'(x)=\dfrac{2x(2c^2-\sqrt{4c^2x^2+a^4})}{\sqrt{4c^2x^2+a^4}}$，令 $f'(x)>0$，

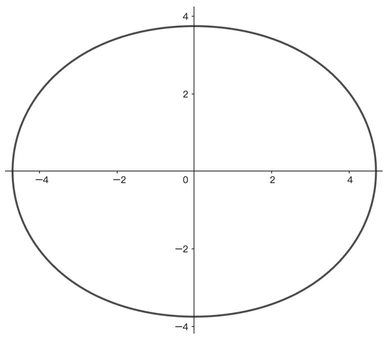
解得 $x>0$ 且 $x^2<\dfrac{4c^4-a^4}{4c^2}$，或 $x<0$ 且 $x^2>\dfrac{4c^4-a^4}{4c^2}$.

（I）若 $0<\dfrac{c}{a}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $f(x)$ 有极大值点 $x=0$，如图 (a)；

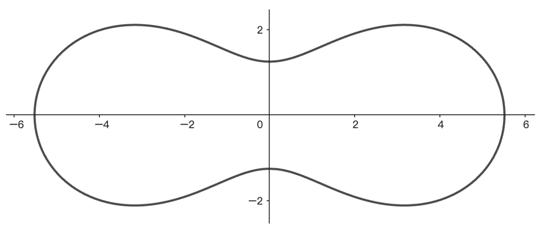
（II）若 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{c}{a}<1$，则 $f(x)$ 有极小值点 $x=0$，极大值点 $x=\pm\dfrac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}$，如图 (b)；

（III）若 $\dfrac{c}{a}=1$，则 $f(x)$ 有极小值点 $x=0$，极大值点 $x=\pm\dfrac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}$，但在 $x=0$ 处不光滑，如图 (c)；

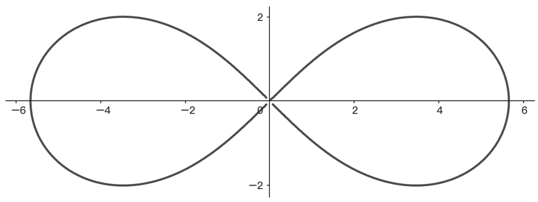
（IV）若 $\dfrac{c}{a}>1$，则 $f(x)$ 有极大值点 $x=\pm\dfrac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}$，如图 (d).



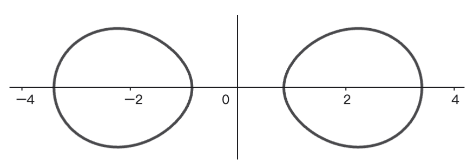
(a)



(b)



(c)



(d)

（2）**斜率之比**：

设定点 $A(-a,0)$，$B(a,0)$（$a>0$），动点 $P(x,y)$ 满足 $\dfrac{k_{PA}}{k_{PB}}=\lambda$（$\lambda\neq 0,1$），

则 $\dfrac{\frac{y}{x+a}}{\frac{y}{x-a}}=\dfrac{x-a}{x+a}=\lambda$，即 $x=\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}a$.

所以动点 P 的轨迹为直线 $x=\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}a$.

斜率之和：

设定点 $A(-a,0)$，$B(a,0)$（$a>0$），动点 $P(x,y)$ 满足 $k_{PA}+k_{PB}=\lambda$，

则 $\dfrac{y}{x+a}+\dfrac{y}{x-a}=\dfrac{2xy}{x^2-a^2}=\lambda$，

若 $\lambda=0$，则 $x=0$ 或 $y=0$，P 的轨迹为 x 轴和 y 轴（不含 A，B）；

若 $\lambda\neq 0$，则 $y=\dfrac{\lambda}{2}x-\dfrac{\lambda a^2}{2x}$（$x\neq\pm a$），故 P 的轨迹为曲线 $y=\dfrac{\lambda}{2}x-\dfrac{\lambda a^2}{2x}$（不含 A，B）.

斜率之差：

设定点 $A(-a,0)$，$B(a,0)$（$a>0$），动点 $P(x,y)$ 满足 $k_{PA}-k_{PB}=\lambda$，

则 $\dfrac{y}{x+a}-\dfrac{y}{x-a}=\dfrac{-2ay}{x^2-a^2}=\lambda$，

若 $\lambda=0$，则 $y=0$，P 的轨迹为 x 轴（不含点 A，B）；

若 $\lambda\neq 0$，则 $y=\dfrac{\lambda a}{2}-\dfrac{\lambda}{2a}x^2$（$x\neq\pm a$），故 P 的轨迹为抛物线 $y=\dfrac{\lambda a}{2}-\dfrac{\lambda}{2a}x^2$（不含 A，B）.

113. 因为双曲线的焦距为 8，所以 $a^2+12=16$，解得 $a=2$.

所以 $||MF_1|-|MF_2||=2a=4$，解得 $|MF_2|=9$ 或 1.

当 $|MF_2|=1$ 时，$|MF_1|+|MF_2|=6<|F_1F_2|$，舍去. 所以 $|MF_2|=9$.

事实上，双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的焦半径 $|MF|$（双曲线上的点 M 到焦点 F 的距离）取值范围是 $[c-a,+\infty)$，下面进行证明：

不妨设 $F(c,0)$，$P(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，即 $y_0^2=b^2\left(\dfrac{x_0^2}{a^2}-1\right)$，

所以 $|MF|=\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0-c)^2+\dfrac{b^2}{a^2}x_0^2-b^2}=\sqrt{\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)x_0^2-2cx_0+c^2-b^2}=$

$\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}x_0^2-2cx_0+a^2}=\sqrt{\left(\dfrac{c}{a}x_0-a\right)^2}=\left|\dfrac{c}{a}x_0-a\right|$，

因为 $x_0\in(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$，所以 $|MF|\in[c-a,+\infty)$.

114.（1）将方程改写为标准形式：$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$，因此双曲线的焦点为 $(-5,0)$，$(5,0)$，离心率为 $\dfrac{5}{3}$，渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{4}{3}x$.

（2）将方程改写为标准形式：$\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$，因此双曲线的焦点为 $(0,-5)$，$(0,5)$，离心率为 $\dfrac{5}{4}$，渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{4}{3}x$.

实际上，我们将双曲线方程 $mx^2-ny^2=1$（$mn>0$）右边的 1 直接改为 0，得到的方程 $mx^2-ny^2=0$ 即为其渐近线方程，证明过程可参考 P128～129“探究与发现”，只需改动其中的双曲线方程即可.

这意味着，双曲线 $mx^2-ny^2=1$ 的渐近线方程只与 m,n 的比值有关，所有形如 $mx^2-ny^2=\lambda$（$\lambda\neq 0$）的双曲线的渐近线都相同，对于这样的双曲线方程，我们同样可以直接令方程右边的 $\lambda=0$ 得到渐近线的方程. 事实上，我们可以将渐近线 $mx^2-ny^2=0$ 看作退化的双曲线.

115. 第 11 题

设 $M(x,y)$（$|y|\leqslant|x|$），则 $|MA|=\dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}}$，$|MB|=\dfrac{|x+y|}{\sqrt{2}}$，

所以 $S_{四边形OAMB}=|MA|\cdot|MB|=\dfrac{|x^2-y^2|}{2}=\dfrac{x^2-y^2}{2}=3$，

所以 M 的轨迹方程为 $x^2-y^2=6$.

第 13 题

在第 110 条提示中，我们证明了"$k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{m}{n}$"是"二次曲线 $mx^2+ny^2=1$（$mn\neq 0$）的弦 AB 上的点 M 是 AB 的中点"的必要条件，下面证明其充分性：

设 $M(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，同第 110 条提示，我们得到 $\dfrac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}\cdot\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\dfrac{m}{n}$，

即 $\dfrac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}\cdot k_{AB}=-\dfrac{m}{n}$，如若 $k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{m}{n}$，则 $\dfrac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}=k_{OM}$.

所以 O，M 和 AB 的中点共线，又 M 是 AB 上一点，所以 M 是 AB 中点.

综上，若 M 是圆锥曲线 $mx^2+ny^2=1$ 的弦 AB 上一点，则 M 为 AB 中点的充要条件是 $k_{OM}\cdot k_{AB}=-\dfrac{m}{n}$.

因此，给定圆锥曲线 $C:mx^2+ny^2=1$ 和点 $M(x_0,y_0)$，"C 上存在过点 M 的弦"的充要条件是"过点 M 且斜率为 $-\dfrac{mx_0}{ny_0}$ 的直线与 C 有两个公共点".

所以，在本题中，若 P 是线段 AB 的中点，则 AB 的斜率为 2，我们验证直线 $y-1=2(x-1)$ 即 $y=2x-1$ 与双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 是否有两个公共点：

联立 $\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=2x-1\end{cases}$ 得 $2x^2-4x+3=0$，$\varDelta=-8<0$，

所以直线 $y=2x-1$ 与双曲线没有公共点，故 P 不能是线段 AB 的中点.

116. 我们考虑一般的二次曲线 $C:mx^2+ny^2=1$（$mn\neq 0$ 且 $m\neq n$）.

首先证明，C 在 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $mx_0x+ny_0y=1$.

证法一：

设过 M 的切线为 l.

若 l 的斜率存在，设 $l:y-y_0=k(x-x_0)$，即 $y=kx+y_0-kx_0$，与 C 的方程联立得：

$(m+nk^2)x^2+2nk(y_0-kx_0)x+n(y_0-kx_0)^2-1=0$，

因为 l 与 C 相切，所以该方程有唯一实根，故 $\varDelta=0$，化简得 $m+nk^2=mn(y_0-kx_0)^2$，

且 $x_0=-\dfrac{nk(y_0-kx_0)}{m+nk^2}=-\dfrac{nk(y_0-kx_0)}{mn(y_0-kx_0)^2}=-\dfrac{k}{m(y_0-kx_0)}$，

解得 $k=\dfrac{mx_0y_0}{mx_0^2-1}=-\dfrac{mx_0y_0}{ny_0^2}=-\dfrac{mx_0}{ny_0}$，所以 $l:-\dfrac{mx_0}{ny_0}x-y+y_0+\dfrac{mx_0^2}{ny_0}=0$，

即 $mx_0x+ny_0y=1$.

若 l 的斜率不存在，易证上述方程同样适用.

证法二:

当切线斜率存在时，设 y 是 x 的隐函数，$mx^2+ny^2=1$ 两边同时对 x 求导得 $2mx+2nyy'=0$，所以 $y'=-\dfrac{mx}{ny}$，其余步骤同证法一.

于是过 M 且垂直于 l 的直线 $l':ny_0x-mx_0y=(n-m)x_0y_0$，

l' 与坐标轴的交点为 $\left(\dfrac{n-m}{n}x_0,0\right)$，$\left(0,-\dfrac{n-m}{m}y_0\right)$，所以 $x_0=\dfrac{n}{n-m}x$，$y_0=-\dfrac{m}{n-m}y$，

代入 $mx_0^2+ny_0^2=1$ 化简得 $\dfrac{mn^2}{(m-n)^2}x^2+\dfrac{m^2n}{(m-n)^2}y^2=1$.

因此动点 (x,y) 的轨迹是与 C 同类的圆锥曲线.

此外，我们考虑抛物线 $C:y=ax^2$（$a\neq0$）.

C 在点 $M(x_0,ax_0^2)$ 处的切线方程为 $y-ax_0^2=2ax_0(x-x_0)$，

所以过 M 且垂直于切线的直线 $l:x+2ax_0y=x_0+2a^2x_0^3$，

l 与坐标轴的交点为 $(x_0+2a^2x_0^3,0)$，$\left(\dfrac{1}{2a}+ax_0^2,0\right)$，所以 $x=x_0+2a^2x_0^2$，$y=\dfrac{1}{2a}+ax_0^2$，

所以 $x=x_0(1+2a^2x_0^2)=x_0\left[1+2a\left(y-\dfrac{1}{2a}\right)\right]=2ayx_0$，

所以 $y-\dfrac{1}{2a}=a\left(\dfrac{x}{2ay}\right)^2$，即 $x^2=4ay^3-2y^2$，这是一条高次曲线.

117. 我们将两类曲线合并为 $y=mx+\dfrac{n}{x}$（$n\neq0$）处理.

当 $mn\geqslant0$ 时，显然曲线 $y=mx+\dfrac{n}{x}$ 的一条渐近线为 $x=0$.

设 $f(x)=mx+\dfrac{n}{x}-mx=\dfrac{x}{n}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，所以 $y=mx$ 也是曲线的一条渐近线.

设渐近线与实轴的夹角为 α，则 $\tan2\alpha=\dfrac{1}{|m|}$，所以 $\tan\alpha=\sqrt{m^2+1}-|m|$，

所以离心率 $e=\sqrt{\tan^2\alpha+1}=\sqrt{2\left(m^2+1-|m|\sqrt{m^2+1}\right)}$.

当 $mn<0$ 时，同理可得渐近线为 $x=0$ 和 $y=mx$，离心率 $e=\sqrt{2\left(m^2+1+|m|\sqrt{m^2+1}\right)}$.

特别地，当 $m=0$ 且 $n>0$ 时，双曲线的焦点和顶点在直线 $y=x$ 上，

联立 $y=\dfrac{n}{x}$ 和 $y=x$ 可得顶点坐标 $(-\sqrt{n},-\sqrt{n})$，$(\sqrt{n},\sqrt{n})$，实半轴长 $a=\sqrt{2n}$，离心率 $e=\sqrt{2}$，半焦距 $c=2\sqrt{n}$，因此双曲线的焦点为 $(-\sqrt{2n},-\sqrt{2n})$，$(\sqrt{2n},\sqrt{2n})$.

类似地，当 $m=0$ 且 $n<0$ 时，双曲线的顶点为 $(-\sqrt{-n},-\sqrt{-n})$，$(\sqrt{-n},\sqrt{-n})$，焦点为 $(-\sqrt{-2n},-\sqrt{-2n})$，$(\sqrt{-2n},\sqrt{-2n})$，离心率为 $\sqrt{2}$.

118. 解答可参考教材对例题的解答. 对于 P136 例 5，教材的解法以证明 $y_D=y_B$（或 $k_{BD}=0$）为目标，教材的解法通过联立直线 AF 和抛物线的方程求解 B 的坐标，计算量稍大，可以用直线 AF，BF 斜率相等来替代. 除了这种思路之外，下面提供另一种运用抛物线几何性质的思路作为参考：

因为 $\dfrac{|AF|}{|BF|}=\dfrac{x_A+\frac{p}{2}}{x_B+\frac{p}{2}}=\dfrac{x_A-\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}-x_B}$，由等比定理，$\dfrac{|AF|}{|BF|}=\dfrac{x_A+\frac{p}{2}+x_A-\frac{p}{2}}{x_B+\frac{p}{2}+\frac{p}{2}-x_B}=\dfrac{x_A}{\frac{p}{2}}=\dfrac{|OA|}{|OD|}$，

所以 $BD\parallel x$ 轴.

119. 方法一（坐标法）:

设圆心 $C(0,c)$，则 $C: x^2+(y-c)^2=(c-5)^2$，

令 $x=0$，解得 $y=2c-5$ 或 $y=5$（舍去）；令 $y=0$，则 $x=\pm\sqrt{-5(2c-5)}$，

所以 M 的轨迹方程为 $x^2=-5y$.

方法二（几何法）:

设 $P(x,0)$，$Q(y,0)$，则在 $\text{Rt}\triangle APQ$ 中，$|OP|^2=|OA|\cdot|OQ|$，即 $x^2=-5y$.

所以 M 的轨迹方程为 $x^2=-5y$.

120. 方法一:

因为 $F(1,0)$，$\angle xFM=60^\circ$，所以 $FM: x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+1$，

联立 $\begin{cases} y^2=4x \\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}y+1 \end{cases}$ 得 $y^2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}y-4=0$，解得 $y=2\sqrt{3}$（负根舍去），

所以 $M(3,2\sqrt{3})$，故 $|FM|=4$.

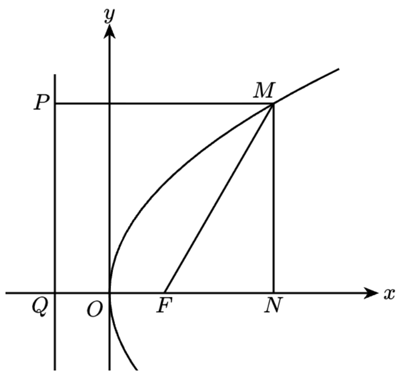
方法二:

设 $M(\dfrac{y_0^2}{4},y_0)$，则 $\tan\angle xFM=\dfrac{y_0}{\frac{y_0^2}{4}-1}=\sqrt{3}$，整理得 $y^2-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}y-4=0$，其余步骤同方法一.

方法三:

如图，过 M 分别作 x 轴和抛物线准线的垂线，垂足为 P,N，则 $|PM|=|FM|,|FN|=\dfrac{1}{2}|FM|$，

所以 $|PM|=|FQ|+|FN|$ 即 $|FM|=2+\dfrac{1}{2}|FM|$，解得 $|FM|=4$.

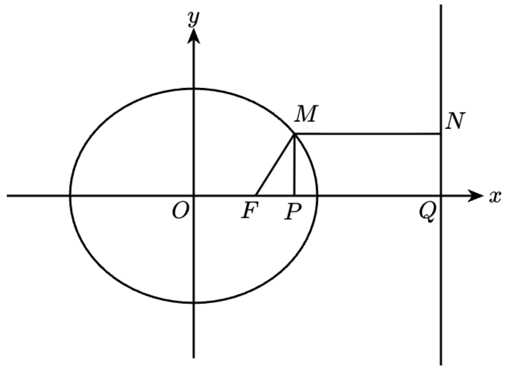


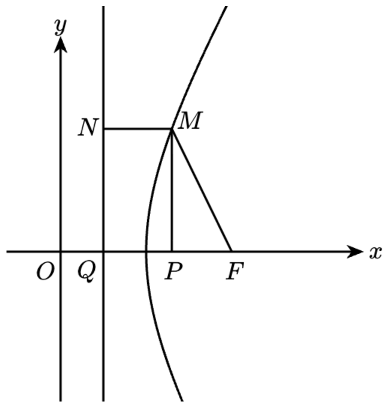
一般地，在抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）中，若焦半径 ρ 的辐角 α，则由 $|PM|=|FQ|+|FN|$ 即 $\rho=p+\rho\cos\alpha$ 可得 $\rho=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$，即焦半径的角度式.

类似地，第 111 条提示已经指出椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）和双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a$，$b>0$）的准线均为 $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$，因此也可以得到类似的结论:

如下页左图，在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中，以右焦点和右准线为例，设焦半径 $|MP|=\rho$ 的辐角为 α，于是 $|FQ|=|MN|+|FM|\cos\alpha$，即 $\dfrac{a^2}{c}-c=\dfrac{a}{c}\rho+\rho\cos\alpha$，解得 $\rho=\dfrac{\frac{a^2}{c}-c}{\cos\alpha+\frac{a}{c}}=$

$$\frac{\frac{b^2}{c}}{\cos\alpha+\frac{1}{e}}=\frac{\frac{b^2}{a}}{1+e\cos\alpha}.$$





如上右图，在双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 中，以右焦点和右准线为例，设焦半径 $|MP|=\rho$ 的辐角为 α，于是 $|FQ|=|MN|-|FM|\cos\alpha$，即 $c-\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{a}{c}\rho-\rho\cos\alpha$，解得 $\rho=\dfrac{c-\frac{a^2}{c}}{\frac{a}{c}-\cos\alpha}=\dfrac{\frac{b^2}{c}}{\frac{1}{e}-\cos\alpha}=\dfrac{\frac{b^2}{a}}{1-e\cos\alpha}$.

因此，三类圆锥曲线有统一的焦半径形式，即$\rho=\dfrac{p}{1\pm e\cos\alpha}$，其中 p 是半通径长，即过焦点且垂直于对称轴的弦长的一半.

121. 联立 $\begin{cases} y^2=2x \\ x=y+2 \end{cases}$ 得 $y^2-2y-4=0$，所以 $y_1y_2=-4$，$x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{2}\cdot\dfrac{y_2^2}{2}=4$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$，故 $OA\perp OB$.

一般地，对于抛物线 $y^2=2px$，若直线 AB 过 x 轴上的定点 $(t,0)$，则 $AB:x=my+t$，

联立 $\begin{cases} y^2=2px \\ x=my+t \end{cases}$ 得 $y^2-2pmy-2pt=0$，所以 $y_1y_2=-2pt$，$x_1x_2=\dfrac{y_1^2}{2p}\cdot\dfrac{y_2^2}{2p}=t^2$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=t^2-2pt$ 为定值.

122. **椭圆**

设椭圆 E 的焦点为 F_1，F_2，E 在点 M 处的法线（切线的垂线）为 l，则 $\overrightarrow{MF_1}$，$\overrightarrow{MF_2}$ 与 l 的方向向量夹角相等.

双曲线

设双曲线 H 的焦点为 F_1，F_2，H 在点 M 处的法线为 l，则 $\overrightarrow{MF_1}$，$\overrightarrow{F_2M}$ 与 l 的方向向量夹角相等.

抛物线

设抛物线 P 的焦点为 F，P 在点 M 处的法线为 l，直线 MG 与抛物线的对称轴平行，则 MF 与 MG 关于 l 对称.

123. (1) 推广：设抛物线的方程为 $y^2=2px(p>0)$，$l:y=k$，$AB:x=my+t$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

联立直线 l 与抛物线的方程得 $P(\dfrac{k^2}{2p},k)$.

联立直线 AB 与抛物线的方程得 $y^2-2pmy-2pt=0$.

所以 $y_1+y_2=2pm$，$x_1+x_2=2pm^2+2t$，于是 $Q(pm^2+t,pm)$.

因为 Q 在直线 l 上，所以 $pm=k$，即 $m=\dfrac{k}{p}$，于是 $Q(\dfrac{k^2}{p}+t,k)$.

所以

$$|AQ|^2=\frac{1}{4}(\sqrt{m^2+1}|y_1-y_2|)^2=(\frac{k^2}{p^2}+1)(k^2+2pt)$$

$$|PQ|=\frac{k^2}{p}+t-\frac{k^2}{2p}=\frac{1}{2p}(k^2+2pt)$$

所以

$$\frac{|AQ|^2}{|PQ|}=2p(\frac{k^2}{p^2}+1)$$

为定值.

对于椭圆和双曲线，以椭圆为例：给定椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 和直线 $l:y=kx$，l 交椭圆于 P，Q 两点，直线 AB 交椭圆于 A，B 两点，交 l 于点 M，使得 M 为 AB 中点，则 $\dfrac{|AM|^2}{|PM|\cdot|QM|}$ 为定值（只与 a,b,k 有关）.（请自行讨论直线 l 斜率不存在的情况）

证明：本题适合运用直线的参数方程.

设 $M(x_0,y_0)$，$l:\begin{cases} x=x_0+\lambda\cos\alpha \\ y=y_0+\lambda\sin\alpha \end{cases}$，$AB:\begin{cases} x=x_0+\mu\cos\beta \\ y=y_0+\mu\sin\beta \end{cases}$，

其中 α，β 分别为 l，AB 的倾斜角. $\tan\alpha=k$.

因为 l 平分弦 AB，所以 $\tan\alpha\tan\beta=-\dfrac{b^2}{a^2}$，$\tan\beta=-\dfrac{b^2}{a^2k}$.

将直线 l 的方程代入椭圆方程得

$$(b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha)\lambda^2+2(b^2x_0\cos\alpha+a^2y_0\sin\alpha)\lambda+b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2=0$$

所以

$$|PM|\cdot|QM|=-\lambda_1\lambda_2=-\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}$$

同理有

$$|AM|^2=|AM|\cdot|BM|=-\frac{b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2}{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}$$

所以

$$\frac{|AM|^2}{|PM|\cdot|QM|}=\frac{b^2\cos^2\alpha+a^2\sin^2\alpha}{b^2\cos^2\beta+a^2\sin^2\beta}=\frac{\frac{b^2+a^2\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}}{\frac{b^2+a^2\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}}=\frac{k^2+(\frac{b}{a})^4}{(\frac{b}{a})^2(1+k^2)}$$

该结论及证明过程对于双曲线类似.

（2）从以上证明过程中都可以看出，圆锥曲线的弦以及平分它的直线有着特定的斜率关系——对于一个给定的圆锥曲线，一旦弦的斜率确定，那么平分它的直线的斜率也确定. 古希腊数学家阿波罗尼斯将平分圆锥曲线上一组平行的弦的直线称为圆锥曲线的一条“直径”，被平分的弦的一半称为该直径对应的一条“纵线”.“直径”和“纵线”标示了两个方向，构成了“平面斜坐标系”. 当“直径”和“纵线”互相垂直时，如椭圆的长轴和短轴，它们标示的方向构成的坐标系就成为了我们常用的平面直角坐标系.

124. P146 复习参考题 3 第 10 题

设 $A(2pa^2, 2pa)$，$B(2pb^2, 2pb)$（a，$b \neq 0$）.

因为 $OA \perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 4p^2a^2b^2 + 4p^2ab = 0$，解得 $ab = -1$.

由 A，B 的坐标得：直线 $AB: x - (a+b)y + 2pab = 0$，即 $x - (a+b)y - 2p = 0$，所以直线 AB 恒过点 $M(2p, 0)$.

因为 $AD \perp MD$，所以 D 在以 AM 为直径的圆上，圆心为 $(p, 0)$，半径为 p.

所以存在点 $E(p, 0)$，使得 $|DE|$ 为定值 p.

实际上，若 $k_{OA} \cdot k_{OB}$ 为定值 λ，则直线 AB 过 x 轴上的定点 $\left(-\dfrac{2p}{\lambda}, 0\right)$.

2020 年新高考 I 卷第 22 题

（1）$C: \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.（具体过程略）

（2）思路同上述教材习题，我们尝试证明直线 MN 过某个定点 P，则点 D 在以 AP 为直径的圆上，于是圆心 Q 即为所求定点.

设 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$. 若直线 MN 的斜率存在，设 $MN: y = kx + m$.

联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2 + 4kmx + 2(m^2-3) = 0$，所以 $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-4km}{2k^2+1} \\ x_1x_2 = \dfrac{2(m^2-3)}{2k^2+1} \end{cases}$.

因为 $AM \perp AN$，所以 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (x_1-2)(x_2-2) + (y_1-1)(y_2-1) = (k^2+1)x_1x_2 + (km - k - 2)(x_1+x_2) + (m-1)^2 + 4 = 0$，

代入 $x_1 + x_2$，x_1x_2 并整理得 $4k^2 + 8km + 3m^2 - 2m - 1 = (2k+3m+1)(2k+m-1) = 0$，

解得 $m = -\dfrac{2k+1}{3}$ 或 $m = 1 - 2k$.

若 $m = 1 - 2k$，则直线 $MN: y = kx + 1 - 2k = 0$ 过点 $(2, 1)$，不合题意；

若 $m = -\dfrac{2k+1}{3}$，则直线 $MN: y = kx - \dfrac{2k+1}{3}$ 过定点 $(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3})$.

若直线 MN 的斜率不存在，设 $MN: x = t$（$-\sqrt{6} < t < \sqrt{6}$）.

联立 $\begin{cases} x = t \\ \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得 $2y^2 + t^2 - 6 = 0$，所以 $\begin{cases} y_1 + y_2 = 0 \\ y_1y_2 = \dfrac{t^2-6}{2} \end{cases}$.

因为 $AM \perp AN$，所以 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (t-2)^2 + (y_1-1)(y_2-1) = \dfrac{3}{2}t^2 - 4t + 2 = 0$，解得 $t = \dfrac{2}{3}$ 或 2（舍去）.

所以直线 $MN: x = \dfrac{2}{3}$ 过定点 $(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3})$.

综上，直线 MN 恒过点 $P(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3})$，

因为 $AD \perp PD$，所以 D 在以 AP 为直径的圆上，圆心为 $(\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3})$，

所以存在点 $Q(\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3})$，使得 $|DQ| = \dfrac{1}{2}|AP| = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 为定值.

125. 设圆锥曲线 C 的离心率为 e，C 上的两点 A，B 到焦点 F 的距离为 ρ_1，ρ_2，到准线 l 的距离分别为 d_1，d_2，则 $\rho_1 = ed_1$，$\rho_2 = ed_2$.

设 AB 的中点为 M，则 M 到 l 的距离 $d' = \dfrac{1}{2}(d_1 + d_2)$，

以 AB 为直径的圆 M 半径 $r=\dfrac{\rho_1+\rho_2}{2}=\dfrac{e}{2}(d_1+d_2)$，因此：
若 C 为抛物线，则 $e=1$，$r=d'$，圆 M 与准线 l 相切；
若 C 为椭圆，则 $0<e<1$，$r<d'$，圆 M 与准线 l 相离；
若 C 为双曲线，则 $e>1$，$r>d'$，圆 M 与准线 l 相交.

126. P8 练习第 3 题

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n-1=1-\dfrac{1}{a_{n-1}}=\dfrac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}}$，显然 $a_n\neq 1$，所以 $\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}-1}=\dfrac{1}{a_{n-1}-1}+1$，因为 $\dfrac{1}{a_1-1}=1$，所以 $\left\{\dfrac{1}{a_n-1}\right\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，所以 $\dfrac{1}{a_n-1}=n$，故 $a_n=\dfrac{1}{n}+1$.

P41 习题 4.3 第 11 题

(1) 对 $a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+1}$ 两边取倒数得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{a_n}+2)$，所以 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-1=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{a_n}-1)$.
因为 $\dfrac{1}{a_1}-1=\dfrac{2}{3}$，所以 $\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$ 是以 $\dfrac{2}{3}$ 为首项，$\dfrac{1}{3}$ 为公比的等比数列.

(2) 由 (1) 得 $\dfrac{1}{a_n}-1=2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$，即 $\dfrac{1}{a_n}=2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+1$. 所以 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=n+1-\dfrac{1}{3^n}$.
因为 $f(n)=n+1-\dfrac{1}{3^n}$ ($n\in\mathbf{N}^*$) 单调递增，$f(99)<100$，$f(100)>100$，所以 n 的最大值为 99.

P51 练习第 4 题

显然 $a_n\neq 2$, 所以 $2a_{n+1}-a_na_{n+1}=1\Leftrightarrow a_{n+1}=\dfrac{1}{2-a_n}$, 所以 $a_{n+1}-1=\dfrac{1}{2-a_n}-1=\dfrac{a_n-1}{2-a_n}$.
若 $a=1$，则 $a_n=1$；若 $a\neq 1$，则 $\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{1}{a_n-1}-1$，所以 $\dfrac{1}{a_n-1}$ 是以 $\dfrac{1}{a-1}$ 为首项，-1 为公差的等差数列，所以 $\dfrac{1}{a_n-1}=\dfrac{1}{a-1}-n+1$，即 $a_n=\dfrac{1-a}{(a-1)n-a}+1$.
综上，若 $a=1$，则 $a_n=1$；若 $a\neq 1,2$，则 $a_n=\dfrac{1-a}{(a-1)n-a}+1$.

习题 4.4 第 3 题

由 $4a_{n+1}-a_na_{n+1}+2a_n=9$ 得 $a_{n+1}=\dfrac{9-2a_n}{4-a_n}$，所以 $a_{n+1}-3=\dfrac{9-2a_n}{4-a_n}-3=\dfrac{a_n-3}{4-a_n}$，$\dfrac{1}{a_n-3}=\dfrac{4-a_n}{a_n-3}=\dfrac{1}{a_n-3}-1$，因为 $\dfrac{1}{a_1-3}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\left\{\dfrac{1}{a_n-3}\right\}$ 是以 $\dfrac{1}{2}$ 为首项，-1 为公差的等差数列，所以 $\dfrac{1}{a_n-3}=\dfrac{3}{2}-n$，故 $a_n=\dfrac{6n-11}{2n-3}$.

一般化

定义：函数 f 的定义域为 D，若 $x_0\in D$ 满足 $f(x_0)=x_0$，则称 x_0 为函数 f 的不动点.
分式递推性数列的通项公式与递推关系 $f(a_n)$ 的不动点有关，首先求解递推函数的不动点：
设 $f(x)=\dfrac{px+q}{rx+s}$，令 $f(x)=x$，即 $rx^2+(s-p)x-q=0$.

情形一：方程有 2 个相等的实根 $x=\alpha=-\dfrac{s-p}{2r}$

若 $a_1=\alpha$，则归纳地，有 $a_n=\alpha$.

若 $a_1 \neq \alpha$，作变量代换：$b_n = \dfrac{1}{a_n - \alpha}$，则：

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+1}-\alpha} \\
&= \frac{1}{\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha} \\
&= \frac{ra_n+s}{pa_n+q-\alpha(ra_n+s)} \\
&= \frac{ra_n+s}{(p-\alpha r)a_n+(q-\alpha s)}
\end{aligned}$$

因为 $r\alpha^2+(s-p)\alpha-q=0$，所以 $q-\alpha s=\alpha(\alpha r-p)$，所以

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{ra_n+s}{(p-\alpha r)a_n+\alpha(\alpha r-p)} \\
&= \frac{r(a_n-\alpha)+\alpha r+s}{(p-\alpha r)(a_n-\alpha)} \\
&= \frac{\alpha r+s}{p-\alpha r}b_n+\frac{r}{p-\alpha r} \\
&= \frac{-\frac{s-p}{2}+s}{p+\frac{s-p}{2}}b_n+\frac{r}{p+\frac{s-p}{2}} \\
&= b_n+\frac{2r}{p+s}
\end{aligned}$$

所以 $\left\{\dfrac{1}{a_n-\alpha}\right\}$ 是以 $\dfrac{2r}{p+s}$ 为公差的等差数列，进而可以求解 a_n 的通项公式.

情形二：方程有 2 个不同实根 $x=\alpha$，$x=\beta$

若 $a_1=\alpha$ 或 β，则归纳地，有 $a_n=a_1$.

若 $a_1\neq\alpha$，β，作变量代换：$b_n=\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$，则：

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha} \\
&= \frac{\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-\beta}{\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha} \\
&= \frac{pa_n+q-\beta(ra_n+s)}{pa_n+q-\alpha(ra_n+s)} \\
&= \frac{(p-\beta r)a_n+(q-\beta s)}{(p-\alpha r)a_n+(q-\alpha s)}
\end{aligned}$$

因为 $q-\alpha s=\alpha(\alpha r-p)$，$q-\beta s=\beta(\beta r-p)$，所以

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{(p-\beta r)(a_n-\beta)}{(p-\alpha r)(a_n-\alpha)} \\
&= \frac{p-\beta r}{p-\alpha r}\cdot b_n
\end{aligned}$$

所以 $\{\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}\}$ 是以 $\dfrac{p-\beta r}{p-\alpha r}$ 为公比的等比数列，进而可以求解 a_n 的通项公式.

情形三：方程有两个共轭复根 $x=\alpha$，$x=\beta$

记 $u=\dfrac{p-s}{2}$，$v=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$，其中 $\Delta=(s-p)^2+4qr$，则 $\alpha=u+v\mathrm{i}$，$\beta=u-v\mathrm{i}$.

类似情形二，我们得到 $b_{n+1}=k\cdot b_n$，其中 $k=\dfrac{p-\beta r}{p-\alpha r}=\dfrac{(p-ur)+vri}{(p-ur)-vri}$，

该式的分子和分母可以看作复数 z 及其共轭复数 $\overline{z}$，由 $|z|=|\overline{z}|$ 及第 64 条提示可得，$|k|=\left|\dfrac{z}{\overline{z}}\right|=\dfrac{|z|}{|\overline{z}|}=1$，因此可设 $k=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$.

又 $b_1=\dfrac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}=\dfrac{(a_1-u)+v\mathrm{i}}{(a_1-u)-v\mathrm{i}}$，所以 $|b_1|=1$，设 $b_1=\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi$.

由棣莫弗定理（见第 65 条提示）得 $b_n=k^{n-1}b_1=\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi$，其中 $\psi=\phi+(n-1)\theta$.

由 $b_n=\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$ 得：

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{\beta-\alpha b_n}{1-b_n}\\
&= \frac{(u-v\mathrm{i})-(u+v\mathrm{i})(\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi)}{1-\cos\psi-\mathrm{i}\sin\psi}\\
&= \frac{u(1-\cos\psi)+v\sin\psi-\mathrm{i}[v(1+\cos\psi)+u\sin\psi]}{1-\cos\psi-\mathrm{i}\sin\psi}\\
&= \frac{2u\sin^2\frac{\psi}{2}+2v\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}-\mathrm{i}[2v\cos^2\frac{\psi}{2}+2u\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}]}{2\sin^2\frac{\psi}{2}-2\mathrm{i}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}}\\
&= \frac{u(2\sin^2\frac{\psi}{2}-2\mathrm{i}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2})+v(2\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}-2\mathrm{i}\cos^2\frac{\psi}{2})}{2\sin^2\frac{\psi}{2}-2\mathrm{i}\sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\psi}{2}}\\
&= u+\frac{v}{\tan\frac{\psi}{2}}\\
&= u+\frac{v}{\tan\left[\frac{\phi}{2}+\frac{(n-1)\theta}{2}\right]}
\end{aligned}
$$

可以看到，尽管推导过程引入了复数，但是 a_n 的值总是实数.

特别地，由正切函数的周期性，当 θ 是 2π 的有理数倍时，$\{a_n\}$ 是周期数列，最小正周期为 $\dfrac{2\pi}{\theta}$.

127. 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_n=a_1+(n-1)d=m$，$a_m=a_1+(m-1)d=n$，

两式相减得 $(n-m)d=m-n$，因为 $m\neq n$，所以 $d=-1$，代入 a_n 或 a_m 得 $a_1=m+n-1$，

所以 $a_{m+n}=a_1+(m+n-1)d=(m+n-1)-(m+n-1)=0$.

128. **第 3 题**

方法一

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $\begin{cases} S_4=4a_1+6d=6\\ S_8=8a_1+28d=20\end{cases}$，解得 $\begin{cases} a_1=\dfrac{3}{4}\\ d=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，

所以 $S_{16}=16a_1+120d=72$.

方法二

先证引理：若 $\{a_n\}$ 是以 d 为公差的等差数列，则 $\{S_{nk}-S_{(n-1)k}\}$ 是以 k^2d 为公差的等差数列（规定 $S_0=0$）.

证明：$S_{nk}-S_{(n-1)k}=(a_1+a_2+\cdots+a_{nk})-(a_1+a_2+\cdots+a_{(n-1)k})=a_{(n-1)k+1}+a_{(n-1)k+2}+\cdots+a_{nk}$，

$S_{(n+1)k}-S_{nk}=a_{nk+1}+a_{nk+2}+\cdots+a_{(n+1)k}$，

所以 $(S_{(n+1)k}-S_{nk})-(S_{nk}-S_{(n-1)k})=(a_{nk+1}-a_{(n-1)k+1})+(a_{nk+2}-a_{(n-1)k+2})+\cdots+(a_{(n+1)k}-$

$a_{nk})=kd+kd+\cdots+kd=k^2d$，即 $\{S_{nk}-S_{(n-1)k}\}$ 是以 k^2d 为公差的等差数列.
由 $S_4=6$，$S_8=20$，取 $k=4$，列表递推如下：

n	1	2	3	4
S_{4n}	6	20	$20+22=42$	$42+30=72$
$S_{4n}-S_{4n-4}$	$6-0=6$	$20-6=14$	$14+8=22$	$22+8=30$

第 4 题

方法一

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d,则 $S_{15}=5(a_2+a_6+a_k)\Leftrightarrow 15a_1+105d=5[a_1+d+a_1+5d+a_1+(k-1)d]=15a_1+5(k+5)d$，解得 $k=16$.

方法二

先证引理：若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $a_i+a_j=2a_{\frac{i+j}{2}}$（$i,j\in\mathbf{N}^*$，若 $i+j$ 为奇数，则 $a_{\frac{i+j}{2}}$ 定义为 $\frac{1}{2}(a_{\frac{i+j-1}{2}}+a_{\frac{i+j+1}{2}})$）.

证明：设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_i+a_j=2a_1+(i+j-2)d=2\left[a_1+(\frac{i+j}{2}-1)d\right]=2a_{\frac{i+j}{2}}$.

由此引理我们还可以得到推论：设 $m_i\in\mathbf{N}^*$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{m_i}=a_{\overline{m}}$，其中 $\overline{m}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i$. 若 $\overline{m}\notin\mathbf{N}^*$，则 $a_{\overline{m}}$ 定义为 $(1-\{\overline{m}\})a_{[\overline{m}]}+\{\overline{m}\}a_{[\overline{m}]+1}$，其中 $[\overline{m}]$，$\{\overline{m}\}$ 分别表示 $\overline{m}$ 的整数部分和小数部分. 该推论的证明略.

由以上引理及推论可得，$S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8$，$5(a_2+a_6+a_k)=15a_{\frac{2+6+k}{3}}$，所以 $a_8=a_{\frac{2+6+k}{3}}$，即 $8=\frac{2+6+k}{3}$，解得 $k=16$.

该结论的本质是等差数列是一个离散型的一次函数 $f(n)$，如果补全其定义域，变成定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数 $f(x)$，则具有良好的线性性，即 $\forall x,y,\lambda,\mu$，$f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$. 推而广之：$\forall\lambda_i,x_i$（$i=1,2,\cdots,n$，$n\in\mathbf{N}^*$），有 $f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$. 特别地，当 $\lambda_i=\frac{1}{n}$ 时，就会得到上面的结论 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_{m_i}=a_{\overline{m}}$. 而且由于一次函数是严格单调的，因此自变量（对于数列而言是下角标）相等等价于因变量相等.

第 5 题

方法一

设这个等差数列为 $\{a_n\}$（$n=1,2,\cdots,2m-1$，$m\in\mathbf{N}^*$），公差为 d.
由题意，$a_1+a_3+\cdots+a_{2m-1}=ma_1+[2+4+\cdots+(2m-2)]d=ma_1+m(m-1)d=290$，
$a_2+a_4+\cdots+a_{2m-2}=(m-1)a_1+[1+3+\cdots+(2m-3)]d=(m-1)a_1+(m-1)^2d=261$，
解得 $m=10$，所以项数 $2m-1=19$，中间项 $a_m=a_1+(m-1)d=\frac{290}{m}=29$.

方法二

运用上面第 4 题中讨论的结论，得：

$$\begin{cases}a_1+a_3+\cdots+a_{2m-1}=ma_m=290\\a_2+a_4+\cdots+a_{2m-2}=(m-1)a_m=261\end{cases}$$，解得 $a_m=29$，$m=10$.

129. 当 $n=1$ 时，$a_n=a_1=S_1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}+3=\dfrac{47}{12}$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{4}n^2+\dfrac{2}{3}n+3-\left[\dfrac{1}{4}(n-1)^2+\dfrac{2}{3}(n-1)+3\right]=\dfrac{1}{2}n+\dfrac{5}{12}$.

所以 $a_n=\begin{cases}\dfrac{47}{12} & ,n=1\\ \dfrac{1}{2}n+\dfrac{5}{12} & ,n\geqslant 2\end{cases}$.

由数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 求通项公式的本质是：a_{n+1} 是 S_n 的差分，但需要注意的是，a_1 作为端点值，需要单独讨论，如果 $n\geqslant 2$ 的情形下求出 a_n 同样适用于 $n=1$ 的情形，则可以将结论合并，否则必须写成分段表达式.

对于公差不为 0 的等差数列而言，其通项一定是一次函数 $kn+b$ 的形式，前 n 项和一定是不含常数项的二次函数 pn^2+qn 的形式；反之亦然.

而如果一个数列的前 n 项和是常数项不为 0 的二次函数，则这个数列必定从第 2 项起成等差数列. 这一结论请读者自行证明.

130. P24 例 9 的解法 1 表明，如果将 $\{S_n\}$ 看成一个数列（离散型函数），$\{a_n\}$ 看成这个数列的差分数列，那么 $\{a_n\}$ 相当于一个离散型函数的 “导函数”，其符号与原函数的单调性一一对应. 因此类似于借助导数研究函数的单调性，我们可以借助差分研究数列的单调性，从而研究其极值、最值和取值范围.

P24 练习第 5 题

因为 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，所以 S_n 在 $[n,n+1)$ 上单调递增，当且仅当 $a_{n+1}>0$.

令 $a_{n+1}=\dfrac{n-1}{2n-13}>0$，解得 $n\geqslant 7$，所以：

n	$[1,2)$	$[2,7)$	$[7,+\infty)$
a_{n+1}	0	$-$	$+$
S_n	不变	单调递减	单调递增

由表可知，当且仅当 $n=7$ 时，S_n 取最小值.

P34 练习第 5 题

方法一

设 $\Delta a_n=a_{n+1}-a_n=\dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}}-\dfrac{n^3}{3^n}=\dfrac{-2n^3+3n^2+3n+1}{3^{n+1}}$.

设 $b_n=-2n^3+3n^2+3n+1$，$\Delta b_n=b_{n+1}-b_n=-6n^2+4<0$，所以 b_n 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，又 $b_1=5>0$，$b_2=3>0$，$b_3=-17<0$，所以：

n	$[1,3)$	$[3,+\infty)$
Δa_n	$+$	$-$
a_n	单调递增	单调递减

由表可知，当且仅当 $n=3$ 时，a_n 取最大值.

这个做法仍然利用的是差分思想，而且用到了两次，相当于在连续函数的问题中，通过二阶导函数的符号判断一阶导函数的单调性，结合特殊值得到一阶导函数的符号，从而得到原函数的单调性.

方法二

由于 $\{a_n\}$ 的分母是等比数列，且是正项数列，故可以考虑相邻两项的比值构成的数列 $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$，根据比值与 1 的大小关系判断 a_n 的单调性.

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}}=\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^3$，令 $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$，即 $(1+\frac{1}{n})^3>3$，解得 $n\leqslant 2$，

所以 a_n 在 $[1,3)$ 上单调递增，在 $[3,+\infty)$ 上单调递减，

故当且仅当 $n=3$ 时，a_n 取最大值.

方法三

对于已知解析式的数列而言，也可以直接利用其连续形式的导函数来判断单调性.

设 $f(x)=\frac{x^3}{3^x}$，$f'(x)=\frac{x^2(3-\ln 3x)}{3^x}$，

令 $f'(x)>0$，即 $3-\ln 3x>0$，解得 $x<\frac{3}{\ln 3}\in(2,3)$，

又 $a_2=\frac{8}{9}<1=a_3$，所以 a_n 在 $[1,3)$ 上单调递增，在 $[3,+\infty)$ 上单调递减，

故当且仅当 $n=3$ 时，a_n 取最大值.

131. 从形式上看，对于形如 $a_n=f(n)q^{n-1}$ 的数列 $\{a_n\}$，通过错位相减，将 $f(n)q^{n-1}$ 这一难以求和的形式简化为 $a_{n+1}-qa_n=[f(n+1)-f(n)]q^n$ 这一相对容易求和的形式. 对于等比数列，$f(n)$ 是一个常值函数，因此 $f(n+1)-f(n)=0$，使得错位相减的过程中大量的项都被消去.

从差分思想的角度看，对于等比数列 $\{a_n\}$，差分 $\Delta a_n=a_{n+1}-a_n=(q-1)a_n$，对两边同时求和，得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}(q-1)a_i$，即 $a_{n+1}-a_1=(q-1)\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=(q-1)S_n$，当 $q\neq 1$ 时，$S_n=\frac{a_{n+1}-a_1}{q-1}=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$.

按照这个思路，我们解决教材上的下列习题：

P40 习题 4.3 第 3（2）题

记 $a_n=nx^{n-1}$，$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=S_n$，

若 $x=1$，则 $a_n=n$，$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$；

若 $x\neq 1$，则：$\Delta a_n=(n+1)x^n-nx^{n-1}=(x-1)a_n+x^i$，

对两边同时求和，得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}[(x-1)a_i+x^i]$，

即 $a_{n+1}-a_1=(x-1)\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+\sum\limits_{i=1}^{n}x^i=(x-1)S_n+\frac{(x^n-1)x}{x-1}$，

所以 $S_n=\frac{a_{n+1}-a_1}{x-1}-\frac{x\cdot x^n-x}{(x-1)^2}=\frac{(n+1)x^n-1}{x-1}-\frac{x\cdot x^n-x}{(x-1)^2}=\frac{(nx-n-1)x^n+1}{(x-1)^2}$.

P56 复习参考题 4 第 11 题

(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，所以 $\begin{cases}S_4=4S_2\\a_{2n}=2a_n+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a_1+6d=4(2a_1+d)\\a_1+(2n-1)d=2a_1+2(n-1)d+1\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a_1=1\\d=2\end{cases}$，所以 $a_n=2n-1$.

(2) $c_n=(2n-1)3^{n-1}$，$\Delta c_n=(2n+1)3^n-(2n-1)3^{n-1}=2c_n+6\cdot 3^{n-1}$，

对两边同时求和，得 $\sum_{i=1}^{n}\Delta c_n=\sum_{i=1}^{n}(2c_i+6\cdot 3^{i-1})$，即 $c_{n+1}-c_1=2T_n+6\cdot\dfrac{3^n-1}{3-1}$，

即 $(2n+1)3^n-1=2T_n+3\cdot 3^n-3$，所以 $T_n=(n-1)3^n+1$.

一次型 · 指数型数列的前 n 项和公式

一般地，我们考虑数列 $a_n=(\alpha n+\beta)q^{n-1}$ 的前 n 项和公式的求法. 将 a_n 视为数列 $\{\alpha\cdot nq^{n-1}\}$ 与 $\beta\cdot q^{n-1}$ 的和，对两个数列分别求和即可. 前者的求和方法如上述 P40 习题 4.3 第 3（2）题的解答过程所示，后者为等比数列.

二次型 · 指数型数列的前 n 项和公式

再考虑数列 $a_n=(\alpha n^2+\beta n+\gamma)q^{n-1}$ 的前 n 项和公式的求法. 我们仅需考虑求数列 $b_n=n^2q^{n-1}$ 的前 n 项和 S_n.

对 $\{b_n\}$ 做差分得：$\Delta b_n=(n+1)^2q^n-n^2q^{n-1}=(q-1)b_n+(2n+1)q^n$，

对两边同时求和得：$(n+1)q^n-nq^{n-1}=(q-1)S_n+\sum_{i=1}^{n}(2i+1)q^i$，

其中 $\sum_{i=1}^{n}(2i+1)q^i$ 是一个一次型 · 指数型的求和，于是 S_n 可求.

132. 详见第 128 条提示练习第 3 题方法二中的引理.

在等差数列和等比数列中，$S_{kn}-Sk(n-1)$ 实际上表示数列中固定长度（k）的部分和. 等差数列的部分和是关于 n 的一次函数，因此 $\{S_{kn}-Sk(n-1)\}$ 成等差数列；等比数列的部分和是关于 n 的指数型函数，因此 $\{S_{kn}-Sk(n-1)\}$ 成等比数列.

133. $a_3=a_1q^2=\dfrac{3}{2}$，

若 $q=1$，则 $S_3=3a_3=\dfrac{9}{2}$，$a_1=a_3=\dfrac{3}{2}$；

若 $q\neq 1$，则 $S_3=\dfrac{(q^3-1)a_1}{q-1}=(q^2+q+1)a_1=\dfrac{9}{2}$，

所以 $\dfrac{q^2+q+1}{q^2}=3$，即 $2q^2-q-1=0$，解得 $q=-\dfrac{1}{2}$ 或 1（舍去），

$a_1=\dfrac{a_3}{q^2}=6$.

综上，$a_1=\dfrac{3}{2}$，$q=1$；或 $a_1=6$，$q=-\dfrac{1}{2}$.

本题提醒我们注意等比数列求和公式的使用条件：公比不等于 1.

134. 等式左边为数列 $\{a^{n+1-k}b^{k-1}\}$（$1\leqslant k\leqslant n+1$）的和，注意到这是以 $\dfrac{b}{a}$ 的等比数列，

所以左边 $=\dfrac{[1-(\frac{b}{a})^{n+1}]a^n}{1-\frac{b}{a}}=\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}=$ 右边.

135. 一阶线性递推和分式型递推的通项公式求解一样，都与不动点有关.

设函数 $f(x)=px+q$，令 $f(x)=x$，若 $p=1$，则方程无解；若 $p\neq 1$，则不动点 $x=\dfrac{q}{1-p}$.

若 $p=1$，则 $\{a_n\}$ 是以 q 为公差的等差数列；

若 $p\neq 1$，作变量代换：$b_n=a_n-\dfrac{q}{1-p}$，于是 $b_{n+1}=a_{n+1}-\dfrac{q}{1-p}=pa_n+q-\dfrac{q}{1-p}=pa_n-\dfrac{pq}{1-p}=p(a_n-\dfrac{q}{1-p})=b_n$，

若 $b_1=a_1-\dfrac{q}{1-p}=0$，则归纳地有 $a_n=\dfrac{q}{1-p}$；

若 $b_1\neq 0$，则 $\{b_n\}$ 是以 p 为公比的等比数列，进而可以求解 $\{a_n\}$ 的通项公式.

136. 第 7 题

（1）证明：由 $a_{n+1}+a_n=3\times 2^n$ 得 $a_{n+1}-2^{n+1}=-(a_n-2^n)$，

又 $a_1-2^1=-1$，所以 $\{a_n-2^n\}$ 是以 -1 为首项和公比的等比数列.

（2）由（1）知，$a_n-2^n=(-1)^n$，即 $a_n=2^n+(-1)^n$，

所以 $S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}2^i+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i=\frac{(2^n-1)\cdot 2}{2-1}+\frac{[(-1)^n-1]\cdot(-1)}{-1-1}=2^{n+1}+\frac{(-1)^n-5}{2}$.

注意：$(-1)^n$ 可以视为等比数列而不分奇偶性讨论.

第 12 题

（1）由 $a_1=1$，$a_3=2\sqrt{2}+1$ 得 $d=\dfrac{2\sqrt{2}+1-1}{3-1}=\sqrt{2}$，

所以 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}=n+\dfrac{\sqrt{2}}{2}n(n-1)$，

所以 $b_n=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}n+1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此 b_n 是以 1 为首项，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 为公差的等差数列.

（2）由（1）知，$a_n=a_1+(n-1)d=(n-1)\sqrt{2}+1$，

假设存在 $\{a_n\}$ 中的三项 a_i，a_j，a_k（$i<j<k$）构成等比数列，则 $a_j^2=a_ia_k$，

即 $[(j-1)\sqrt{2}+1]^2=[(i-1)\sqrt{2}+1][(k-1)\sqrt{2}+1]$，亦即 $2[(j-1)^2-(i-1)(k-1)]=\sqrt{2}(i+k-2j)$，

因为 $i,j,k\in\mathbf{N}^*$，所以 $(j-1)^2-(i-1)(k-1)\in\mathbf{Z}$，$i+k-2j\in\mathbf{Z}$，

所以该等式成立当且仅当 $\begin{cases}(j-1)^2-(i-1)(k-1)=0 & ①\\ i+k-2j=0 & ②\end{cases}$，

由②得 $j=\dfrac{i+k}{2}$，代入①化简得 $\dfrac{(i-k)^2}{4}=0$，所以 $i=j=k$，与 $i<j<k$ 矛盾.

所以数列 $\{a_n\}$ 中的任意三项均不能构成等比数列.

要证明符合条件的项不存在，可以考虑反证法，即假设存在符合条件的项，并以之为条件，推出矛盾，从而证明假设不成立. 在这个问题中，引发矛盾的核心是有理数域对四则运算的封闭性——有理数经过有限次四则运算，得到的仍为有理数，因此 $\sqrt{2}$ 前的系数必须为 0.

137. 这里给出求 $a_n=n^k$（$k\in\mathbf{N}^*$）前 n 项和 S_k 的方法.

考虑数列 $b_n=n^{k+1}$，$\Delta b_n=(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=\mathrm{C}_{k+1}^1n^k+\mathrm{C}_{k+1}^2n^{k-1}+\cdots+\mathrm{C}_{k+1}^kn+1$，

对两边同时求和，得 $(n+1)^{k+1}-1=(k+1)S_k+\mathrm{C}_{k+1}^2S_{k-1}+\cdots+\mathrm{C}_{k+1}^kS_1+n$，

所以 $S_k=\dfrac{(n+1)^{k+1}-\mathrm{C}_{k+1}^2S_{k-1}-\cdots-\mathrm{C}_{k+1}^kS_1-n-1}{k+1}$.

从 $k=1$ 开始，可以逐步求出 S_k.

138. 第 5 题

· **方法一（数学归纳法）：**

记 $a_n=\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$，$\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n.

归纳奠基：当 $n=1$ 时，$S_1=\dfrac{1^2}{1\times 3}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{1\times 2}{2\times 3}$，所以 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ 成立.

归纳递推：假设当 $n=k$ 时，有 $S_k=\dfrac{k(k+1)}{2(2k+1)}$. 所以当 $n=k+1$ 时，$S_{k+1}=S_k+a_{k+1}=\dfrac{k(k+1)}{2(2k+1)}+\dfrac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{k(k+1)(2k+3)+2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$，所以 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$ 成立.

综上，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$S_n=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

· **方法二（差分验证）：**

因为 $\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}-\dfrac{(n-1)n}{2(2n-1)}=\dfrac{n(n+1)(2n-1)-n(n-1)(2n+1)}{2(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n\cdot(2n)}{2(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=a_n$,

所以 $S_n=\dfrac{1\times 2}{2\times 5}-\dfrac{0\times 1}{2\times 3}+\dfrac{2\times 3}{2\times 7}-\dfrac{1\times 2}{2\times 5}+\cdots+\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}-\dfrac{(n-1)n}{2(2n-1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

第 7 题

· **方法一（数学归纳法）：**

归纳奠基：当 $n=1$ 时，$x_n=x_1=1>0$ 成立.

归纳递推：假设当 $n=k$ 时，$x_k>0$，则当 $n=k+1$ 时，若 $x_n\leqslant 0$，则 $x_k=x_{k+1}+\ln(1+x_{k+1})\leqslant 0+\ln 1=0$，与假设矛盾！所以 $x_n>0$.

综上，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$x_n>0$.

所以 $x_n-x_{n+1}=\ln(1+x_{n+1})>0$，即 $x_n>x_{n+1}$.

· **方法二（反证法）：**

假设存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $x_n\leqslant 0$，令 k 为最小的满足 $x_k\leqslant 0$ 的正整数，显然 $k>1$.

于是 $x_{k-1}=x_k+\ln(1+x_k)\leqslant 0$，与 k 是满足 $x_k\leqslant 0$ 的最小正整数矛盾！

所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$x_n>0$，从而 $x_n>x_{n+1}$.

139. 推广命题：$\forall n\geqslant 2$，若 $a_1,a_2,\cdots,a_n\geqslant 0$，$b_1,b_2,\cdots,b_n>0$，且 $b_1+b_2+\cdots+b_n=1$，则

$$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

当存在 $a_i=0$ 时，不等式左边 $=0\leqslant$ 右边平凡地成立；因此该命题等价于 $a_n>0$ 时，

$$b_1\ln a_1+b_2\ln a_2+\cdots+b_n\ln a_n\leqslant\ln\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)\qquad(*)$$

方法一（数学归纳法）：

归纳奠基：当 $n=2$ 时，$(*)$ 式等价于 $b_1\ln a_1+(1-b_1)\ln a_2-\ln\left(a_1b_1+a_2(1-b_1)\right)\leqslant 0$.

设 $f(x)=b_1\ln a_1+(1-b_1)\ln x-\ln\left(a_1b_1+(1-b_1)x\right)$,

则 $f'(x)=\dfrac{1-b_1}{x}-\dfrac{1-b_1}{a_1b_1+(1-b_1)x}=\dfrac{b_1(1-b_1)(a_1-x)}{x[a_1b_1+(1-b_1)x]}$，$f'(x)>0\Leftrightarrow 0<x<a_1$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,a_1)$ 上单调递增，在 $(a_1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(a_2)\leqslant f(a_1)=0$，证毕.

归纳递推：假设当 $n=k$ 时，命题 $(*)$ 成立.

当 $n=k+1$，要证

$$b_1\ln a_1+b_2\ln a_2+\cdots+b_k\ln a_k+b_{k+1}\ln a_{k+1}\leqslant\ln\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1}\right)$$

考虑将第 k 和 $k+1$ 项整体化处理，以便使用归纳假设：

记 $b=b_k+b_{k+1}$，$c=\dfrac{b_k}{b}a_k+\dfrac{b_{k+1}}{b}a_{k+1}$，

因为 $\dfrac{b_k}{b}+\dfrac{b_{k+1}}{b}=1$，由归纳奠基得 $\dfrac{b_k}{b}\ln a_k+\dfrac{b_{k+1}}{b}\ln a_{k+1}\leqslant\ln\left(\dfrac{b_k}{b}a_k+\dfrac{b_{k+1}}{b}a_{k+1}\right)=\ln c$，

即 $b_k\ln a_k+bk+1\ln a_{k+1}\leqslant b\ln c$.

所以 $b_1\ln a_1+b_2\ln a_2+\cdots+b_k\ln a_k+b_{k+1}\ln a_{k+1}\leqslant b_1\ln a_1+b_2\ln a_2+\cdots+b_{k-1}\ln a_{k-1}+b\ln c$，

因为 $b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}+b=1$，由归纳假设得

$$b_1\ln a_1+b_2\ln a_2+\cdots+b_{k-1}\ln a_{k-1}+b\ln c\leqslant\ln\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{k-1}b_{k-1}+bc\right)$$

代入 $b=b_k+b_{k+1}$，$c=\dfrac{b_k}{b}a_k+\dfrac{b_{k+1}}{b}a_{k+1}$，即

$$b_1\ln a_1+b_2\ln a_2+\cdots+b_k\ln a_k+b_{k+1}\ln a_{k+1}\leqslant\ln\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1}\right)$$

证毕.

方法二（琴生不等式）：

第 26 条提示介绍了琴生不等式，其 n 元加权形式为：

（1）$f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_if(x_i)$ （凹函数）；

（2）$f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i\right)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}a_if(x_i)$ （凸函数）.

其中 $x_i\in[a,b]$，$[a,b]$ 是 $f(x)$ 的一个凹（凸）区间，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$.

因此，对于命题 $(*)$，由于 $y=\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数，所以

$$\ln\left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\right)\geqslant b_1\ln a_1+b_2\ln a_2+\cdots+b_n\ln a_n$$

将不等式调转方向即为 $(*)$ 式.

140.（1）当 $n\geqslant2$ 时，$\begin{cases}a_{n+1}=2S_n+2\\a_n=2S_{n-1}+2\end{cases}$，两式相减得 $a_{n+1}-a_n=2a_n$，即 $a_{n+1}=3a_n$，所以 $\{a_n\}$ 的公比为 3.

令 $n=1$，得 $a_2=2S_1+2=2a_1+2$，即 $3a_1=2a_1+2$，解得 $a_1=2$.

所以 $a_n=2\cdot3^{n-1}$.

（2）由题意，$d_n=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{n+1}=\dfrac{4\cdot3^{n-1}}{n+1}$.

若数列 $\{d_n\}$ 中存在三项 d_m，d_k，d_p 成等比数列，则 $\dfrac{4\cdot3^{m-1}}{m+1}\cdot\dfrac{4\cdot3^{p-1}}{p+1}=\left(\dfrac{4\cdot3^{k-1}}{k+1}\right)^2$，

整理得 $(k+1)^2\cdot3^{m+p}=(m+1)(p+1)\cdot3^{2k}$，因为 m，k，p 成等差数列，所以 $m+p=2k$，故 $(k+1)^2=(m+1)(p+1)=mp+2k+1$，即 $k^2=mp$. 结合 $m+p=2k$ 得 $m=k=p$，矛盾！

故数列 $\{d_n\}$ 中不存在三项 d_m，d_k，d_p（m，k，p 成等差数列）成等比数列.

141.（1）如下表：

名称	等差数列 $\{a_n\}$	等比数列 $\{b_n\}$
定义	$a_{n+1}-a_n=d$	$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=q$
通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d$	$b_n=b_1q^{n-1}=b_mq^{n-m}$
常用性质	① $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots$ ② $a_{n-k}+a_{n+k}=2a_n$ ③ 若 $m+n=k+l$，则 $a_m+a_n=a_k+a_l$ ④ $a_1+a_2+\cdots+a_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$	① $b_1b_n=b_2b_{n-1}=\cdots$ ② $b_{n-k}b_{n+k}=b_n^2$ ③ 若 $m+n=k+l$，则 $b_mb_n=b_kb_l$ ④ $b_1b_2\cdots b_n=b_1b_n^{\frac{n}{2}}$

等差数列与等比数列的对偶关系来源于指对运算的性质．从定义上看，对等比数列 b_n 取对数后，$\ln b_n$ 是等差数列，因此等比数列中的乘除法、乘方运算在等差数列中表现为加减法和数乘．包括通项公式在内的其他性质都是在定义的基础上推导而来，因此也具有对偶性．

（2）我们证明，若等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_m=0$，则 $\forall n<2m-1$，有 $S_n=S_{2m-1-n}$，其中 S_n 表示 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．

方法一（基本量法）：

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $a_m=a_1+(m-1)d=0$，所以 $a_1=(1-m)d$.

于是，一方面，$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{2n(1-m)}{2}d+\dfrac{n(n-1)}{2}d=\dfrac{n(n-2m+1)}{2}d$;

另一方面，$S_{2m-1-n}=(2m-1-n)a_1+\dfrac{(2m-1-n)(2m-2-n)}{2}d=(2m-2-n+2-2m)\cdot\dfrac{(2m-1-n)}{2}d=\dfrac{n(n-2m+1)}{2}d$,

所以 $S_n=S_{2m-1-n}$.

方法二（性质法）：

由对称性，不妨设 $n<m$，则 $S_{2m-1-n}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2m-2-n}+a_{2m-1-n}=(a_{n+1}+a_{2m-1-n})+(a_{n+2}+a_{2m-2-n})+\cdots+(a_{m-1}+a_{m+1})+a_m=(2m-2n-1)a_m=0$，所以 $S_n=S_{2m-1-n}$.

142.（1）$1.\dot{2}=1+0.2+0.02+\cdots=1+2\cdot(10^{-1}+10^{-2}+\cdots)=1+2\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right]\cdot\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\dfrac{11}{9}$.

（2）$1.\dot{2}\dot{4}=1+24\cdot(100^{-1}+100^{-2}+\cdots)=1+24\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[1-\left(\frac{1}{100}\right)^n\right]\cdot\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\dfrac{123}{99}$.

类似地，可以证明所有的无限循环小数（包括纯循环小数和混循环小数）都等于一个有理分数.

143. 设 $\lambda\neq0$ 使得 $\{F_{n+1}-\lambda F_n\}$ 是以 μ 为公比的等比数列，则 $F_{n+2}-\lambda F_{n+1}=\mu(F_{n+1}-\lambda F_n)$，

整理得 $F_{n+2}=(\lambda+\mu)F_{n+1}-\lambda\mu F_n$，与 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 对比系数得 $\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda\mu=-1\end{cases}$，

所以 λ，μ 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两根，故 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \mu=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\ \mu=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$，

所以 $\begin{cases} F_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}F_n=\left(F_2-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}F_1\right)\cdot\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\ F_{n+1}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}F_n=\left(F_2-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}F_1\right)\cdot\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \end{cases}$,

两式相减得 $\sqrt{5}F_n=\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$,

即 $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

对于像斐波那契数列这样以二阶线性递推公式定义的数列，其通项公式的求解和前述的分式型递推和一阶线性递推一样，可以借助特征方程和特征根完成，有兴趣的读者可以自行查阅相关资料.

144. 略.

145. 本条提示指出了一些常见的函数不等式：

（1）P89 例 4：$\forall x>0$，$\ln x\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$，当且仅当 $x=1$ 时取等；

（2）P94 练习第 2 题：$\forall x>0$，$x-1\geqslant \ln x$，当且仅当 $x=1$ 时取等；

（3）P97 练习第 1 题：$\forall x\in\mathbf{R}$，$|\sin x|\leqslant|x|$，当且仅当 $x=0$ 时取等；

（4）P99 习题 5.3 第 12 题（1）：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\mathrm{e}^x\geqslant x+1$，当且仅当 $x=0$ 时取等；

（5）P99 习题 5.3 第 12 题（2）的加强：$\forall x>-1$，$\ln(x+1)\leqslant x\leqslant \mathrm{e}^{x-1}$，前一个不等号当且仅当 $x=0$ 时取等，后一个不等号当且仅当 $x=1$ 时取等.

这些不等式能够将超越函数放缩为更易处理的多项式函数或有理函数，且不等式两端的函数图象都是相切关系. 有兴趣的读者可以了解“泰勒公式”，其利用函数的导数值，构建一个多项式来近似函数在某点附近的值.

146. $f'(x)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}2(x-a_1)=2\left(x-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)$ 上单调递增，

所以 $x=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 能使方差 $f(x)$ 最小.

147. 第 18 题

方法一（带参讨论 + 隐零点）：

$f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x+m}$，显然 $f'(x)$ 在 $(-m,+\infty)$ 上单调递增，当 $x\to -m$ 时，$f'(x)\to-\infty$ 时，$x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$，

所以存在唯一的 $x_0\in(-m,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$，$f'(x)>0\Leftrightarrow x>x_0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-m,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，$f(x)\geqslant f(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\ln(x_0+m)$，

因为 $f'(x_0)=0$，所以 $\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0+m}$，$\ln(x_0+m)=-x_0$，

所以 $f(x_0)=\dfrac{1}{x_0+m}+x_0=x_0+m+\dfrac{1}{x_0+m}-m\geqslant 2-m\geqslant 0$，当且仅当 $x_0=-1$，$m=2$ 时取等，此时 $f'(x_0)\neq 0$，因此上式无法取等，故 $f(x)>0$.

方法二（主元转换消参 + 隐零点）：

设 $g(m)=-\ln(m+x)+\mathrm{e}^x$，显然 $g(m)$ 单调递减，所以 $g(m)\geqslant g(2)=\mathrm{e}^x-\ln(x+2)$.

设 $h(x)=\mathrm{e}^x-\ln(x+2)$，$h'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x+2}$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $h'(-1)=\mathrm{e}^{-1}-1$，$h'(0)=\dfrac{1}{2}>0$，所以存在唯一的 $x_0\in(-1,0)$，使得 $h'(x_0)=0$，

所以 $h(x)$ 在 $(-2,x_0)$ 上单调递减，$(x_0,+\infty)$ 上单调递增，$h(x)\geqslant h(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\ln(x_0+2)$，

因为 $h'(x_0)=0$，所以 $\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0+2}$，$\ln(x_0+2)=-x_0$，

所以 $h(x_0)=\dfrac{1}{x_0+2}+x_2=x_0+2+\dfrac{1}{x_0+2}-2\geqslant 2-2=0$，当且仅当 $x_0=-1$ 时取等，

所以 $f(x)\geqslant h(x)>0$.

方法三（主元转换消参 + 切线放缩）：

同方法二得 $f(x)\geqslant\mathrm{e}^x-\ln(x+2)$.

由第 145 条提示的结论得：$\mathrm{e}^x\geqslant x+1$，当且仅当 $x=0$ 时取等，$x+1\geqslant\ln(x+2)$，当且仅当 $x=-1$ 时取等，所以 $\mathrm{e}^x-\ln(x+2)>0$，故 $f(x)>0$.

第 19 题

（1）$f'(x)=2a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-1=(a\mathrm{e}^x-1)(2\mathrm{e}^x+1)$，所以 $f'(x)>0\Leftrightarrow a\mathrm{e}^x>1$.

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减；

若 $a>0$，则 $f'(x)>0\Leftrightarrow x>-\ln a$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

（2）若 $a\leqslant 0$，$f(x)$ 单调，至多有一个零点，不合题意.

若 $a>0$，$f(x)$ 有两个零点的必要条件是 $f(x)_{\min}=f(-\ln a)=\ln a-\dfrac{1}{a}+1<0$，即 $0<a<1$，

下证充分性：

因为当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$；$f(-\ln a)<0$，

所以存在唯一的 $x_1\in(-\infty,-\ln a)$ 和唯一的 $x_2\in(-\ln a,+\infty)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

所以 a 的取值范围是 $(0,1)$.

148. 第 11 题

运用分步乘法计数：第一步，确定第一天的值班人，有 7 种选择；第二步，确定第二天的值班人，由于不能与前一天相同，只有 6 种选择；第三步至第七步，同理，均只有 6 种选择. 综上，共有 $7\times 6^6=326592$ 种安排方式.

第 12 题

分解质因数得 $2160=2^4\times 3^3\times 5$，正整数 n 是 2160 的因数，当且仅当 n 是由 $0\sim 4$ 个 2、$0\sim 3$ 个 3 和 $0\sim 1$ 个 5 相乘得到. 运用分步乘法计数：第一步，选择 2 的个数，有 $4+1=5$ 种选择；第二步，选择 3 的个数，有 $3+1=4$ 种选择；第三步，选择 5 的个数，有 $1+1=2$ 种选择. 综上，2160 有 $5\times 4\times 2=40$ 个不同的质因数.

事实上，如果正整数 n 的质因数分解式为 $n=\alpha_1^{\beta_1}\cdot\alpha_2^{\beta_2}\cdot\cdots\cdot\alpha_m^{\beta_m}$，则 n 的不同正因数的个数为 $(\beta_1+1)(\beta_2+1)\cdots(\beta_m+1)$.

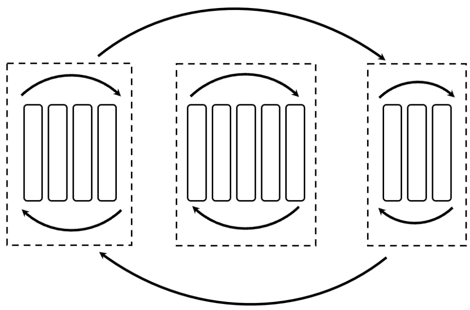
149. 证明：左边 $=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}=\dfrac{m+1}{n+1}\cdot\dfrac{(n+1)n!}{(m+1)m!(n-m)!}=\dfrac{m+1}{n+1}\cdot\dfrac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!}$

$=\dfrac{m+1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=$ 右边.

150. 第 5 题

（1）分步乘法：$12 \times 11 \times 10 = \mathrm{A}_{12}^{3} = 1320$（种）．

（2）有要求相邻的元素做排列时，运用“捆绑法”：先将要求相邻的元素视为一个整体与其他元素参与排列，再对被捆绑的元素进行排列，最后将两个步骤的排列数相乘（如图）．



对于本题，先将数学、物理、化学书分别看成三个整体进行排列，有 $\mathrm{A}_3^3 = 6$ 种排列方式；再对 4 本数学书做排列，有 $\mathrm{A}_4^4 = 24$ 种排列方式；同理，对物理书和化学书分别有 $\mathrm{A}_5^5 = 120$ 种和 $\mathrm{A}_3^3 = 6$ 种排列方式. 综上，共有 $6 \times 24 \times 120 \times 6 = 103680$ 种排列方式.

第 6 题

（1）8 个点中每 3 个点可以唯一确定一个平面，因此无序地从 8 个点中选 3 个点，共 $\mathrm{C}_8^3 = 56$ 种选法，即可以作 56 个平面.

（2）10 个点中每 4 个点可以唯一确定一个四面体，因此无序地从 10 个点中选 4 个点，共 $\mathrm{C}_{10}^4 = 210$ 种选法，即可以作 210 个四面体.

第 7 题

运用分步乘法计数：先确定第 1 题的选择，无序地从 4 题中选 3 题，有 $\mathrm{C}_4^3 = 4$ 种选法；同理，依次确定第 2，3 题的选择，分别有 $\mathrm{C}_3^2 = 3$ 种和 $\mathrm{C}_2^1 = 2$ 种选择，因此共有 $4 \times 3 \times 2 = 24$ 种选择.

第 8 题

（1）证明：左边 $= (n+1)! - n! = (n+1)n! - n! = n \cdot n! = n^2 \cdot (n-1)! = n^2\mathrm{A}_{n-1}^{n_1} =$ 右边.

（2）证明：左边 $= \dfrac{(n+1)n!}{k!} - \dfrac{k \cdot n!}{k(k-1)!} = \dfrac{(n+1-k)n!}{k!} =$ 右边.

第 9 题

在排列组合问题中，一般对有特殊要求的元素优先进行排列. 在本题中，先对 4 个音乐节目在指定的 4 个位置进行排列，有 $\mathrm{A}_4^4 = 24$ 种排法；同理，对 3 个舞蹈节目和 2 个曲艺节目，分别有 $\mathrm{A}_3^3 = 6$ 种和 $\mathrm{A}_2^2 = 2$ 种排法. 因此，共有 $24 \times 6 \times 2 = 288$ 种排法.

第 10 题

（1）从 12 名同学中无序地选择 4 名同学，有 $\mathrm{C}_{12}^4 = 495$ 种选法.

（2）分步乘法：先无序地选出 4 名同学，有 495 种选法；再从 4 名同学中选 1 名作为替补，有 4 种选法，因此共有 $495 \times 4 = 1980$ 种选法.

（3）从 12 名同学中有序地选择 4 名同学，有 $\mathrm{A}_{12}^4 = 11880$ 种选法.

第 11 题

n 个不同数的全排列数为 $n!$，当 $m = n!$ 时，m 行恰好遍历 n 个数的所有不同排列；当 $m > n!$ 时，根据抽屉原理，必然存在两行数的排列相同，故 m 的最大值为 $n!$.

第 12 题

（1）由于选出的数字是否含有 0 对后续的排列数有影响，因此分类讨论：若从 0，2，4，6 种选取的 3 个数字中含有 0，则还要从 2，4，6 中任取 2 个数字，有 $C_3^2=3$ 种选法，再从 1，3，5 种任取 2 个数字，有 $C_3^2=3$ 种选法，最后将选出的 5 个数字排列成没有重复数字的五位数，第一位（最高位）数字不能为 0，有 4 种选法，剩余 4 位数字有 $A_4^4=24$ 种选法. 因此，如果从 0，2，4，6 种选取的 3 个数字中含有 0，则共有 $3\times3\times4\times24=864$ 种选法. 若从 0，2，4，6 种选取的 3 个数字中不含 0，则只有选 2，4，6 这 1 种选法，再从 1，3，5 种任取 2 个数字，有 $C_3^2=3$ 种选法，最后将选出的 5 个数字排列成没有重复数字的五位数，有 $A_5^5=120$ 种选法. 因此，如果从 0，2，4，6 种选取的 3 个数字中不含 0，则共有 $1\times3\times120=360$ 种选法. 综上，共可组成 $864+360=1224$ 个没有重复数字的五位数.

（2）要比 5000000 大，必须是最高位不小于 5 的七位数，所以最高位有 5 或 6 这 2 种选法，剩余 6 位数字可以任意排列，有 $A_6^6=720$ 种选法. 因此，共有 $2\times720=1440$ 个符合条件的正整数.

第 13 题

（1）分步乘法：先确定男生人选，在 5 名男生中无序地选 2 名，有 $C_5^2=10$ 种选法；再确定女生人选，在 4 名女生中无序地选 2 名，有 $C_4^2=6$ 种选法，因此共有 $10\times6=60$ 种选法.

（2）从除去甲、乙的剩下 7 人中无序地选择 2 人，有 $C_7^2=21$ 种选法.

（3）**方法一（正向考虑）：**

若只选了甲，没有选乙，则需要在除去甲、乙的剩下 7 人中选 3 人，有 $C_7^3=35$ 种选法；

若只选了乙，没有选甲，同理有 $C_7^3=35$ 种选法；

若甲、乙都选，由（2）知有 $C_7^2=21$ 种选法.

综上，共有 $35+35+21=91$ 种选法.

方法二（反向排除）：

考虑“甲、乙至少有一人在内”的反面，即“甲、乙均不在内”，则需要在除去甲、乙的 7 人中选 4 人，有 $C_7^4=35$ 种选法；

从 9 人中任选 4 人，有 $C_9^4=126$ 种选法，所以“甲、乙至少有一人在内”的选法有 $126-35=91$ 种.

对于要求“至少（至多）”的排列组合问题，如果从正面入手，需要考虑齐全所有可能的情况；如果情况较多，可以尝试考虑所求的对立情形。可能会有所简化.

（4）**方法一（正向考虑）：**

情形一：3 男 +1 女，有 $C_5^3C_4^1=40$ 种选法；

情形二：2 男 +2 女，由（1）知有 60 种选法；

情形三：1 男 +3 女，有 $C_5^1C_4^3=20$ 种选法；

综上，共有 $40+60+20=120$ 种选法.

方法二（反向排除）：

考虑“既有男生又有女生”的反面，即“只有男生或只有女生”.

如果只有男生，有 $C_5^4=5$ 种选法；如果只有女生，有 $C_4^4=1$ 种选法.

因此“既有男生又有女生”的选法有 $126-5-1=120$ 种.

第 14 题

（1）**方法一（正向考虑）：**

分为去 1 ∼ 6 人 6 种情况，共 $C_6^1+C_6^2+\cdots+C_6^6=63$ 种去法.

方法二（反向排除）：

考虑“必须有人去”的反面，即没有人去，有 1 种去法，而不加任何限制的情况下，每个人都有去或不去 2 种选择，根据分步乘法计数原理，有 $2^6=64$ 种去法，因此“必须有人去”的去法有 $64-1=63$ 种.

事实上，$\mathrm{C}_6^0+\mathrm{C}_6^1+\cdots+\mathrm{C}_6^6=2^6$. 更一般地，有 $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n$，即 n 次二项式展开式的二次项系数之和为 2^n.

（2）若甲、乙都去，剩下 4 人都有去或不去 2 种选择，有 $2^4=16$ 种去法；同理，若甲、乙都不去，剩下 4 人也有 16 种去法，因此共有 $16+16=32$ 种去法.

第 15 题

（1）从 97 件合格品中无序地抽取 5 件，有 C_{97}^5 种抽法.

（2）分步乘法：先从 3 件次品中无序地抽取 2 件，有 C_3^2 种抽法，再从 97 件合格品中无序地抽取 3 件，有 C_{97}^3 种抽法，因此共有 $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_{97}^3$ 种抽法.

（3）“至少有 2 件”包含“恰好有 2 件”和“恰好有 3 件”两种情况. 由（2）知“恰好有 2 件次品”的抽法有 $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_{97}^3$ 种，若恰好有 3 件次品，则需要先从 3 件次品中抽取 3 件，再从 97 件合格品中无序地抽取 2 件，有 $\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_{97}^2$ 种抽法，因此共有 $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_{97}^3+\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_{97}^2$ 种抽法.

（4）“至多有 2 件”包含“恰好有 2 件”、“恰好有 1 件”和“没有次品”三种情况. 由（2）知“恰好有 2 件次品”的抽法有 $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_{97}^3$ 种，同理可得，“恰好有 1 件”和“没有次品”的抽法分别有 $\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_{97}^4$ 种和 $\mathrm{C}_3^0\mathrm{C}_{97}^5$ 种抽法，因此共有 $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_{97}^3+\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_{97}^4+\mathrm{C}_3^0\mathrm{C}_{97}^5$ 种抽法.

此外，也可以用总抽法 C_{100}^5 减去“恰好有 3 件”的情形，即 $\mathrm{C}_{100}^5-\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_{97}^2$ 种抽法.

事实上，$\mathrm{C}_{100}^5=\mathrm{C}_3^0\mathrm{C}_{97}^5+\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_{97}^4+\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_{97}^3+\mathrm{C}_3^3\mathrm{C}_{97}^2$. 更一般地，$\mathrm{C}_N^n=\sum\limits_{k=m}^{r}\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}$，其中 $m=\max\{0,n-N+M\}$，$r=\min\{n,M\}$.

第 16 题

（1）由于不管排列顺序，从 37 个数中选 7 个数共有 $\mathrm{C}_{37}^7=10295472$ 种选法，根据抽屉原理，至少 10295472 注不同号码可有一注与开出的 7 个数相同，即中一等奖.

（2）设在 37 个数中取 n 个数，则一等奖的中奖机会为 $\dfrac{1}{\mathrm{C}_{37}^n}$，由题意，$\dfrac{1}{2000000}<\dfrac{1}{\mathrm{C}_{37}^n}<\dfrac{1}{3000000}$，即 $2000000<\mathrm{C}_{37}^n<3000000$. 设 $a_n=\mathrm{C}_{37}^n=\dfrac{37!}{n!(37-n)!}$，令 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\frac{37!}{(n+1)!(36-n)!}}{\frac{37!}{n!(37-n)!}}=\dfrac{37-n}{n+1}\geqslant 1$，解得 $n\leqslant 18$，所以当 $1\leqslant n\leqslant 18$ 时，$\{a_n\}$ 单调递增；当 $19\leqslant n\leqslant 37$ 时，$\{a_n\}$ 单调递减. 由组合数的对称性（详见第 151 条提示），考虑 $1\leqslant n\leqslant 18$，因为 $a_7=10295472>3000000$，$a_6=2324784\in(2000000,3000000)$，$a_5=435897<2000000$，所以 $n=6$；由对称性，$n=37-6=31$ 也符合题意. 因此可以在 37 个数中取 6 个数或 31 个数（当然，考虑实际情景，通常会选择 $n=6$）.

探究含组合数的函数（数列）的单调性，可以判断相邻两项的比值与 1 的关系，若比值大于 1 则单调递增，若比值小于 1 则单调递减.

第 17 题

将五种颜色记为 A~E，运用分步乘法计数：先考虑 I 号区域，没有任何限制，有 5 种选择，不妨设选涂了 A 颜色；再考虑 II 号区域，由于与 I 号区域相邻，除去 A 颜色，还有 4 种选择，不妨设选涂了 B 颜色；然后考虑 III 号区域，由于与 I 号和 II 号区域相邻，除去 A、B 颜色，还有 3 种选择，不妨设选涂了 C 颜色；最后考虑 III 号区域，由于与 II 号和 III 号区域相邻，除去 B、C 颜色，还有 3 种选择. 综上，共有 $5\times4\times3\times3=180$ 种着色方法.

第 18 题

由题意，群内除了发信息者本人外的 9 人中，有 3 人一定是其好友，剩余 6 人可能是其好友，也可能不是（可能看到了信息但没有表示）. 类似于第 15 题，我们需要在 9 人中选择 k 人（$3 \leqslant k \leqslant 9$）人作为发信息者的好友，剩余 $9-k$ 人均为非好友，故一共有 $\mathrm{C}_9^3+\mathrm{C}_9^4+\cdots+\mathrm{C}_9^9=2^9-\mathrm{C}_9^0-\mathrm{C}_9^1-\mathrm{C}_9^2=466$ 种情况.

第 19 题

由题意，甲、乙均不在第一位，且乙不在第五位. 乙最为特殊，故先考虑乙：除去第一位和第五位，乙的排名有 3 种情况. 接下来考虑特殊元素甲，除去第一位和乙所在的位置外，还有 3 种情况. 最后 3 人没有任何限制，在剩余 3 个空位中排列，有 $\mathrm{A}_3^3=6$ 种情况. 综上，共有 $3\times3\times6=54$ 种不同情况.

151. 本条提示点出了三个重要的组合数性质：

（1）$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$

（2）$\mathrm{C}_{n+1}^m=\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}$

（3）$\mathrm{C}_n^k\cdot\mathrm{C}_{n-k}^{m-k}=\mathrm{C}_n^m\cdot\mathrm{C}_m^k$

从代数角度看：

（1）左边 $=\dfrac{n!}{(n-m)!m!}=$ 右边.

（2）右边 $=\dfrac{n!}{(n-m)!m!}+\dfrac{n!}{(n-m+1)!(m-1)!}=\dfrac{(n-m+1)\cdot n!+m\cdot n!}{(n-m+1)!m!}=\dfrac{(n+1)!}{(n+1-m)!m!}$ $=$ 左边.

（3）左边 $=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}\cdot\dfrac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!}=\dfrac{n!}{(n-m)!(m-k)!k!}$，

右边 $=\dfrac{n!}{(n-m)!m!}\cdot\dfrac{m!}{(m-k)!k!}=\dfrac{n!}{(n-m)!(m-k)!k!}$，所以左边 $=$ 右边.

从组合数的实际意义角度看：

（1）考虑一个要从 n 个元素中选取 m 个元素的情景（例如，要从 n 个候选者中选择 m 个入选）. 一方面，可以直接选出所需的元素，有 C_n^m 种选法；另一方面，也可以从 n 个元素中剔除 $n-m$ 个元素，有 C_n^{n-m} 种选法. 两种做法得到的结果应当一致，因此 $\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$.

（2）考虑一个要从 $n+1$ 个元素（其中有一个特殊元素）中选取 m 个元素的情景（例如，要从 $n+1$ 个候选者中选择 m 个入选，将第一个候选者作为特殊元素）. 一方面，可以直接选出所需的元素，有 C_{n+1}^m 种选法；另一方面，可以分为两种情况：如果不选这个特殊元素，则需要从剩下 n 个元素中选取 m 个元素，有 C_n^m 种选法；如果选择这个特殊元素，则还需要从剩下 n 个元素中选取 $m-1$ 个元素，有 C_n^{m-1} 种选法，因此共有 $\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}$ 种选法. 两种做法得到的结果应当一致，因此 $\mathrm{C}_{n+1}^m=\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}$.

（3）考虑一个要从 n 个元素中选出 I 类元素和 II 类元素共 m 个（其中 I 类元素 k 个）的情景（例如，从 n 名参赛者中选出 m 人获奖，其中 k 人获一等奖，$m-k$ 人获二等奖）. 一方面，可以先从全部 n 个元素中选出 k 个 I 类元素，有 C_n^k 种选法，再从剩下 $n-k$ 个元素中选出 $m-k$ 个 II 类元素，有 C_{n-k}^{m-k} 种选法，因此共有 $\mathrm{C}_n^k\cdot\mathrm{C}_{n-k}^{m-k}$ 种选法；另一方面，可以先从全部 n 个元素中选出 m 个作为 I 类或 II 元素，有 C_n^m 种选法，再从这 m 个元素中选出 k 个 I 类元素（剩余 $m-k$ 个自然为 II 类元素），有 C_m^k 种选法，因此共有 $\mathrm{C}_n^m\cdot\mathrm{C}_m^k$ 种选法. 两种做法得到的结果应当一致，因此 $\mathrm{C}_n^k\cdot\mathrm{C}_{n-k}^{m-k}=\mathrm{C}_n^m\cdot\mathrm{C}_m^k$.

恒等式（1）揭示了组合数的对称性. 恒等式（2）在杨辉三角中也有所体现，表明了组合数的

递归性，可以将参数较大的组合数拆分为两个参数较小的组合数之和，或将参数较小的组合数写为两个参数较大的组合数之差，常用于合并参数相近的组合数. 恒等式（3）体现了组合计算的“路径无关性”，在计算两个参数有继承性的组合数乘积时，可以用以代数变形.

152. 二项式定理实际上是考察二项式 $(a+b)^n$ 的展开式中，$a^{n-k}b^k$ 项是如何产生的. 显然，$a^{n-k}b^k$ 应当由 $n-k$ 个 a 和 k 个 b 相乘得到，而每个 $(a+b)$ 中要么选出一个 a，要么选出一个 b 构成展开式中的项. 因此，要构成 $a^{n-k}b^k$，需要在 n 个 $(a+b)$ 中选出 k 个 $(a+b)$ 从中拿取 b，有 C_n^k 种取法，而剩下 $(n-k)$ 个 $(a+b)$ 中均拿取 a，所以构成 $a^{n-k}b^k$ 有 C_n^k 种取法，即其二项式系数为 C_n^k.

这意味着，从组合数的实际意义出发，我们不需要依赖于二项展开式的通项公式来解决一些问题，例如：

P31 练习第 5 题

每个因数仅由 x 得一次项和常数构成，因此要组成展开式中的 x^4，需要在五个因式中选出 4 个从中拿取 x，剩下一个因式拿取常数. 如果选择从 $(x-1)$，$(x-2)$，$(x-3)$，$(x-4)$ 中拿取 x，$(x-5)$ 中拿取 -5，组成 $-5x^4$. 同理，还可以组成 $-4x^4$（从 $x-4$ 中拿取常数，其余四个因式拿取 x，下略），$-3x^4$，$-2x^4$，$-x^4$，因此含 x^4 项的系数为 $-5-4-3-2-1=-15$.

P34 习题 6.3 第 2 题

要构成 x^3y^3，需要从 $(x+y)$ 中拿取 x，再从 $(x-y)^5$ 中拿取 x^2y^3，即从 5 个 $(x-y)$ 中选出 2 个拿取 x，剩下 3 个拿取 $-y$，有 C_5^2 种选法，系数为 $-\mathrm{C}_5^2$；或者从 $(x+y)$ 中拿取 y，再从 $(x-y)^5$ 中拿取 x^3y^2，即从 5 个 $(x-y)$ 中选出 3 个拿取 x，剩下 2 个拿取 $-y$，有 C_5^3 种选法，系数为 C_5^3. 因此含 x^3y^3 项的系数为 $-\mathrm{C}_5^2+\mathrm{C}_5^3=0$.

P38 复习参考题 6 第 5 题（4）

要构成 x^4，可以：

（I）从 $(1+x+x^2)$ 中拿取 1，从 10 个 $(1-x)$ 中选出 4 个从中拿取 $-x$，其余 6 个拿取常数，系数为 C_{10}^4；

（II）从 $(1+x+x^2)$ 中拿取 x，从 10 个 $(1-x)$ 中选出 3 个从中拿取 $-x$，其余 7 个拿取常数，系数为 $-\mathrm{C}_{10}^3$；

（III）从 $(1+x+x^2)$ 中拿取 x^2，从 10 个 $(1-x)$ 中选出 2 个从中拿取 $-x$，其余 8 个拿取常数，系数为 C_{10}^2；

因此，含 x^4 项的系数为 $\mathrm{C}_{10}^4-\mathrm{C}_{10}^3+\mathrm{C}_{10}^2=135$.

此外，如果注意到 $(1+x+x^2)(1-x)=1-x^3$，因此 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}=(1-x^3)(1-x)^9$，那么只需分两种情况，含 x^4 项的系数为 $\mathrm{C}_9^4+\mathrm{C}_9^1=135$.

P38 复习参考题 6 第 5 题（5）

要组成 x^5y^2，必须从 5 个 (x^2+x+y) 中选取 2 个从中拿取 y，有 C_5^2 种选法. 剩下 3 个 (x^2+x+y) 要组成 x^5，只能从 5 个 (x^2+x+y) 中选取 2 个从中拿取 x^2，剩下 1 个从中拿取 x，因此含 x^5y^2 项的系数为 $\mathrm{C}_5^2\cdot\mathrm{C}_3^2=30$.

153. 第 3 题第（2）小题

优先考虑特殊元素数学课和体育课：数学课在上午，有 4 种排法；体育课在下午，有 2 种排法. 再考虑其余 4 堂课，在剩下 4 个时间段任意排列，有 $\mathrm{A}_4^4=24$ 种排法. 综上，共有 $4\times2\times24=192$ 种排法.

第 3 题第（4）小题

本题正向考虑较为麻烦，故考虑反向排除. 首先，从正方体的 8 个顶点中任选 4 个有 $\mathrm{C}_8^4 = 70$ 种选法. 再考虑什么条件下这样选出的 4 个点无法构成三棱锥，即四点共面. 在正方体中，四点共面的组合有：正方体的 6 个表面和 6 个体对角面（由两条相对的棱组成的面），因此构成三棱锥的组合有 $70 - 6 - 6 = 58$ 个.

第 4 题

（1）由于 n 条直线不存在平行和多线共点的情况，因此每两条直线可以确定唯一的交点，故一共有 $\mathrm{C}_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 个交点.

（2）类似地，两个不平行的平面有且仅有一条交线，又不存在共交线的平面，因此每两个平面可以确定唯一的交线，故一共有 $\mathrm{C}_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 条交线.

第 7 题

（1）由于从第一组平行线（m 条）中任选两条，再从第二组平行线（n 条）中任选两条，所交成的四条线段可以确定唯一的平行四边形，因此一共有 $\mathrm{C}_m^2\mathrm{C}_n^2$ 个平行四边形.

（2）类似地，从三组平行平面的每一组中任选两个平面，所交成的六个面可以确定唯一的平行六面体，因此一共有 $\mathrm{C}_m^2\mathrm{C}_n^2\mathrm{C}_l^2$ 个平行六面体.

第 8 题

（1）先考虑特殊元素：不能放在最后的工序有 4 种放法，其余 4 道工序在剩余 4 个位置任意排列，有 $\mathrm{A}_4^4 = 24$ 种排法，因此共有 $4 \times 24 = 96$ 种加工顺序.

（2）先考虑特殊元素：不能放在最前和最后的 2 道工序在中间 3 个位置可以任意排列，有 $\mathrm{A}_3^2 = 6$ 种排法，其余 3 道工序在剩余 3 个位置任意排列，有 $\mathrm{A}_3^3 = 6$ 种排法，因此共有 $6 \times 6 = 36$ 种加工顺序.

（3）有要求相邻的元素，考虑将 2 道工序视为一个元素，与其余 3 道工序任意排列，有 $\mathrm{A}_4^4 = 24$ 种排法；再考虑 2 道工序的顺序，有 $\mathrm{A}_2^2 = 2$ 种排法，因此共有 $24 \times 2 = 48$ 种加工顺序.

（4）有要求不能相邻的元素做排列时，运用“插空法”：先对无要求的元素做排列，再将不能相邻的元素排入已排好元素中间的空位，最后将两个步骤的排列数相乘.

对于本题，先对无要求的 3 道工序（不妨记为 A，B，C）任意排列，有 $\mathrm{A}_3^3 = 6$ 种排法，再将其余 2 道工序排入，有 $\mathrm{A}_4^2 = 12$ 种排法（如下图），因此共有 $6 \times 12 = 72$ 种加工顺序.

$$\underline{\qquad}\ \ \mathrm{A}\ \ \underline{\qquad}\ \ \mathrm{B}\ \ \underline{\qquad}\ \ \mathrm{C}\ \ \underline{\qquad}$$

由于本题不能相邻的元素只有 2 个，也可以考虑反向排除，用所有排列数 $\mathrm{A}_5^5 = 120$ 减去 2 道工序相邻的排列数 48 得到结果.

第 9 题

方法一（二项式定理 + 分类加法计数 + 组合数求和）：

要由 $(x+1)^m$ 构成 x^2，需要从 m 个 $x+1$ 中选出 2 个从中拿取 x，其余拿取 1，有 C_m^2 种选法. 根据分类加法计数原理，要由原式构成 x^2，可以由 $(x+1)^3$ 构成，系数为 C_3^2；可以由 $(x+1)^4$ 构成，系数为 C_4^2，……，也可以由 $(x+1)^{n+2}$ 构成，系数为 C_{n+2}^2，因此含 x^2 项的系数为 $\mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_4^2 + \cdot + \mathrm{C}_{n+2}^2$. 运用第 151 条提示的恒等式（2），将 C_m^2 裂项为 $\mathrm{C}_{m+1}^3 - \mathrm{C}_m^3$，所以：

$\mathrm{C}_3^2 + \mathrm{C}_4^2 + \cdot + \mathrm{C}_{n+2}^2 = (\mathrm{C}_4^3 - \mathrm{C}_3^3) + (\mathrm{C}_4^3 - \mathrm{C}_3^3) + \cdots + (\mathrm{C}_{n+3}^3 - \mathrm{C}_{n+2}^3) = \mathrm{C}_{n+3}^3 - \mathrm{C}_3^3 = \mathrm{C}_{n+3}^3 - 1.$

方法二（等比数列求和 + 分类加法计数）：

由等比数列求和公式，原式 $=\dfrac{[(x+1)^n-1](x+1)^3}{(x+1)-x}=\dfrac{1}{x}(x+1)^{n+3}-\dfrac{1}{x}(x+1)^3$，要构成 x^2，要么从个 $(x+1)^{n+3}$ 中拿取 3 个 x，要么从 $(x+1)^3$ 中拿取 3 个 x，因此含 x^2 项的系数为 $\mathrm{C}_{n+3}^3-\mathrm{C}_3^3=\mathrm{C}_{n+3}^3-1$.

这一做法也从代数恒等式的角度证明了组合数恒等式．这种计算或证明组合数等式的方法称为“母函数法”.

154. 第(2)个问题相比于第(1)个问题多出了“这个家庭有女孩”的条件，使得样本空间由 $\{bb,bg,gb,gg\}$ 缩小为了 $\{bg,gb,gg\}$. 这两个问题在沪教版中还有一个更具迷惑性的问法：

> 一个家庭有两个孩子.
> （1）已知年龄大的是女孩，求年龄小的也是女孩的概率；
> （2）已知其中一个是女孩，求另一个也是女孩的概率.

初看容易认为两个问题的条件都确定了其中一个孩子的性别，那么第二个孩子的性别是男或女的概率应该相等．但实际上，由于问题（1）的条件的确明确地指出了两个孩子中某个特定者的年龄，样本空间被缩小为了 $\{gb,gg\}$；而问题（2）的条件信息量少于问题（1）的条件，仅仅指出了“其中一个”孩子的性别，但没有确定具体是哪一个，因此样本空间仅被缩小为了 $\{bg,gb,gg\}$. 所以两个问题的答案也是不同的.

155. 根据乘法公式和独立的定义，当 $P(A),P(B)>0$ 时，$P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)$（实际上，也等价于 $P(B|A)=P(B)$，$P(A|\overline{B})=P(A)$，$P(B|\overline{A})=P(B)$ 等）.

根据条件概率的实际意义，$P(A|B)=P(A)$ 意味着事件 B 发生的情况下，事件 A 发生的概率和没有给出“事件 B 发生”这一条件下的概率相同，简言之，事件 B 的发生对事件 A 发生的概率没有影响，因此这个式子可以更直观地描述了事件“独立”的关系.

但相比于条件概率对事件独立的刻画，独立的定义式主要有两个优点：

（1）在 $P(B)=0$ 时，条件概率 $P(A|B)$ 无意义，此时 B 为不可能事件，实际上也与 A 独立，因此定义式将这一情况也纳入了考虑，更为全面；

（2）形式对称、优美，揭示了独立事件的“可乘性”.

156. 定义法：要求 $P(A|B)$，可以分别求出条件事件 B 的概率 $P(B)$ 和积事件 AB 的概率 $P(AB)$，再根据条件概率的定义求解，即 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

样本空间（实际意义）法：$P(A|B)$ 实际上表示在缩小的样本空间 B 下求事件 A 发生的概率，因此对于古典概型，可以在新的样本空间下，用概率的定义求解，即 $P(A|B)=\dfrac{n(AB)}{n(B)}$.

157. 假设 n 张奖券中有 m 张有奖，某人第 k 个抽奖的，记“第 k 个位置是有奖的券”为 A_k.

如果奖券不放回，从古典概型的角度看，将这 n 张奖券随机排列，由于每张奖券都等可能地出现在第 $1\sim n$ 个位置，因此这 n 张奖券的所有排列符合古典概型，$n(\Omega)=\mathrm{A}_n^n=n!$. 不妨设，则 A_k 发生的排列有 $\mathrm{C}_m^1\mathrm{A}_{n-1}^{n-1}=m\cdot(n-1)!$ 种（从 m 张有奖的券中选出 1 张放在第 k 位，其余 $n-1$ 张奖券做全排列），即 $n(A_k)=m\cdot(n-1)!$. 所以 $P(A_k)=\dfrac{n(A_k)}{n(\omega)}=\dfrac{m}{n}$. 这个值与 k 无关，故中奖概率与抽奖次序无关.

从条件概率的角度看，假设第 k 个人抽奖前还有 a 张奖券，其中 b 张有奖，则根据全概率公式，有 $P(A_k)=P(A_k|A_{k-1})P(A_{k-1})+P(A_k|\overline{A_{k-1}})P(\overline{A_{k-1}})=\frac{b}{a}\cdot\frac{b-1}{a-1}+(1-\frac{b}{a})\cdot\frac{b}{a-1}=\frac{b}{a}=P(A_{k-1})$，于是归纳地，有 $\forall k\in[1,n]$，$P(A_k)=P(A_1)=\frac{m}{n}$.

如果奖券放回，则显然 $P(A_k)=\frac{m}{n}$ 为定值.

158. 当我们直接计算一个复杂事件 B 的概率 $P(B)$ 很困难时，我们可以找出事件 B 发生的所有"原因"或"路径"，通过这些"原因"或"路径"去间接地求出事件 B 的概率，体现了一种"分治"的思想. 实际上，概率 $P(B)$ 可以视为"完备事件组"$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 中每一个事件发生的条件下，事件 B 发生概率的加权平均.
用全概率公式求解复杂事件 B 的概率的一般过程是：

（1）明确目标事件 B；

（2）构造完备事件组 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，满足：

（I）互斥性，即 $A_i\cap A_j=\varnothing$，$(1\leqslant i<j\leqslant n)$；

（II）完备性，即 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$.

常见的构造方法包括：

（I）按来源/原因划分，如产品分别来自甲、乙、丙工厂三种情况；

（II）按前阶段的结果分，如第一次取到合格品或次品两种情况；

（III）按状态划分，如机器运行正常或故障两种情况；等.

（3）计算两类概率：

（I）各"原因"或"路径"发生的概率 $P(A_i)$；

（II）各"原因"或"路径"发生的条件下目标事件发生的概率 $P(B|A_i)$.

（4）代入全概率公式计算.

159. 全概率公式计算的是一个复杂事件在所有"原因"或"路径"下发生概率的加权平均，即"由因溯果"；而贝叶斯公式计算的是已知复杂事件发生的条件下，某个或某些"原因"或"路径"发生的概率，即"由果溯因".
如果一个复杂事件的发生有很多原因，问这些原因综合之下事件发生的概率有多大，应当运用全概率公式；如果已经知道一个复杂事件发生，但是有多种原因可能使得其大声，问事件的发生是由于其中某个原因的概率有多大，应当运用贝叶斯公式.
利用贝叶斯公式，我们可以在新信息产生后，将先验概率修正为后验概率.

160. 先证一个引理，即期望的线性性：设 X，Y 为随机变量，则 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.
证明：

$$\begin{aligned}E(X+Y)&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i+y_j)P(X=x_i,Y=y_j)\\&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iP(X=x_i,Y=y_j)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_jP(X=x_i,Y=y_j)\\&=\sum_{i=1}^{m}x_i\sum_{j=1}^{n}P(X=x_i,Y=y_j)+\sum_{j=1}^{n}y_j\sum_{i=1}^{m}P(X=x_i,Y=y_j)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i=1}^{m} x_iP(X=x_i)+\sum_{j=1}^{n} y_jP(Y=y_j)\\
&=E(X)+E(Y)
\end{aligned}
$$

运用数学归纳法可以证明，对于 n 个随机变量 X_1，X_2，$\cdots$，X_n，有：
$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$.
考虑 n 首歌，猜对第 i 首歌 s_i 的奖金为 r_i，猜对的概率为 p_i（$i=1,2,\cdots,n$）.
若按照 $s_1\sim s_n$ 的顺序猜，设从第 i 首歌获得的奖金为 X_i，则 X_i 的分布列为：

X_i	r_i	0
P	$p_1p_2\cdots p_i$	$1-p_1p_2\cdots p_i$

所以 $E(X_i)=r_i\prod_{j=1}^{i}p_j$，而获得的奖金总数 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$，所以

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(r_i\prod_{j=1}^{i}p_j\right)$$

若交换其中第 k 和 $k+1$ 首的顺序，则交换后奖金的期望

$$E(X')=\sum_{i=1}^{k-1}\left(r_i\prod_{j=1}^{i}p_j\right)+r_{k+1}\left(\prod_{j=1}^{k-1}p_j\right)p_{k+1}+r_k\prod_{j=1}^{k+1}+\sum_{i=k+2}^{n}\left(r_i\prod_{j=1}^{i}p_j\right)$$

于是

$$
\begin{aligned}
E(X)-E(X') &= r_k\prod_{j=1}^{k}p_j+r_{k+1}\prod_{j=1}^{k+1}p_j-r_{k+1}\left(\prod_{j=1}^{k-1}p_j\right)p_{k+1}-r_k\prod_{j=1}^{k+1}p_j\\
&=(r_kp_k+r_{k+1}p_kp_{k+1}-r_{k+1}p_{k+1}-r_kp_kp_{k+1})\cdot\prod_{j=1}^{k-1}p_j\\
&=[r_kp_k(1-p_{k+1})-r_{k+1}p_{k+1}(1-p_k)]\cdot\prod_{j=1}^{k-1}p_j\\
&=\left(\frac{r_kp_k}{1-p_k}-\frac{r_{k+1}p_{k+1}}{1-p_{k+1}}\right)\cdot(1-p_k)(1-p_{k+1})\prod_{j=1}^{k-1}p_j
\end{aligned}
$$

所以 $E(X)>E(X')\Leftrightarrow\dfrac{r_kp_k}{1-p_k}>\dfrac{r_{k+1}p_{k+1}}{1-p_{k+1}}$.
因此，为使获奖期望最高，应当按指标 $\dfrac{r_ip_i}{1-p_i}$ 降序排列. 指标 $\dfrac{r_ip_i}{1-p_i}$ 可以理解为每单位失败风险带来的期望收益，显然应该将每单位失败风险带来期望收益高的歌曲排在前面.

161. 证明：$E(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}p_i(ax_i+b)=a\sum_{i=1}^{n}p_ix_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i=aE(X)+b$，

所以 $D(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}p_i(ax_i+b-E(X))^2=a^2\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-E(X))^2=a^2D(X)$.

162. 设 $f(a)=D_a(X)=\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-a)^2$，

则 $f'(a)=\sum_{i=1}^{n}2p_i(a-x_i)=2\left(a\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{n}p_ix_i\right)=2\,(a-\mu)$，

所以 $f'(a)>0\Leftrightarrow a>\mu$，所以 $f(a)$ 在 $(-\infty,\mu)$ 上单调递减，在 $(\mu,+\infty)$ 上单调递增.
所以 $f(a)_{\min}=f(\mu)$，即随机变量的均值是使得随机变量相对其偏离最小的点，因此期望是随机变量在概率意义上的中心.
第 146 条提示则揭示了均值作为数据在统计意义上的中心.

163. 我们考虑 $2n+1$ 局 $n+1$ 胜的赛制，若比赛分出胜负即停止，则甲赢得比赛时的局数可能为 $n+1$，$n+2$，…，$2n+1$，记甲恰在比赛的前 m 局赢得比赛（即恰好胜出 $n+1$ 场）的概率为 P_m，则甲赢得比赛的概率为 $\sum\limits_{m=n+1}^{2n+1}P_m$. 当假设赛满 $2n+1$ 局时，对于未赛满 $2n+1$ 局的场次，由于比赛的胜负已经在前 m 局确定了，剩下若干局的胜负都不会影响比赛的最终结果，因此根据全概率公式，甲赢得比赛的概率为 $\sum\limits_{m=n+1}^{2n+1}P_m\cdot 1=\sum\limits_{m=n+1}^{2n+1}P_m$（该式中，$P_m$ 表示甲恰在前 m 局中胜出 $n+1$ 场的概率，1 表示在此条件下，赛满 $2n+1$ 局后甲胜出的概率），所以假设赛满对甲胜的概率没有影响.

164.（1）若 $X\sim B(n,p)$，则 X 的分布列为 $P(X=k)=\mathrm{C}_n^kp^k(1-p)^{n-k}$（$k=0,1,\cdots,n$），期望 $E(X)=np$，所以方差

$$\begin{aligned}D(X)&=E(X^2)-E^2(X)\\&=\sum_{k=0}^{n}k^2\mathrm{C}_n^kp^k(1-p)^{n-k}-(np)^2\\&=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\mathrm{C}_n^kp^k(1-p)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}k\mathrm{C}_n^kp^k(1-p)^{n-k}-n^2p^2\\&=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\mathrm{C}_n^kp^k(1-p)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}k\mathrm{C}_n^kp^k(1-p)^{n-k}-n^2p^2\\&=n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}p^k(1-p)^{n-k}+n\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k}-n^2p^2\\&=n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_{n-2}^{j}p^j(1-p)^{n-j-2}+np\sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_{n-1}^{j}p^j(1-p)^{n-j-1}-n^2p^2\\&=n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2}+np(p+1-p)^{n-1}-n^2p^2\\&=np(1-p)\end{aligned}$$

其中用到了组合恒等式 $k\mathrm{C}_n^k=n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$ 和 $k(k-1)\mathrm{C}_n^k=n(n-1)\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}$ 将关于 k 的求和转化为关于 n 的表达式，以降低组合数求和的复杂度.

（2）在超几何分布的期望公式推导过程中，除了用到恒等式 $k\mathrm{C}_M^k=M\mathrm{C}_{M-1}^{k-1}$ 外，还有一个重要等式是 $\sum\limits_{k=m}^{r}\mathrm{C}_{M-1}^{k-1}\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}=\mathrm{C}_{N-1}^{n-1}$（$m=\max\{0,n-N+M\}$，$r=\min\{n,M\}$），我们用母函数法证明这一等式.
考虑恒等式 $(1+x)^{N-1}=(1+x)^{M-1}\cdot(1+x)^{N-M}$，考察 x^{n-1} 项的系数：
对于等式左边，在 $N-1$ 个 $1+x$ 中选出 $n-1$ 个取 x，有 C_{N-1}^{n-1} 种取法，故 x^{n-1} 项的系数为 C_{N-1}^{n-1}；
对于等式右边，可以先在前 $M-1$ 个 $1+x$ 中选出 $m-1$ 个取 x，再在后 $N-M$ 个 $1+x$ 中选出 $n-m$ 个取 x，有 $\mathrm{C}_{M-1}^{m-1}\mathrm{C}_{N-M}^{n-m}$ 种取法；或先在前 $M-1$ 个 $1+x$ 中选出 m 个取 x，再在后 $N-M$ 个 $1+x$ 中选出 $n-m-1$ 个取 x，有 $\mathrm{C}_{M-1}^{m}\mathrm{C}_{N-M}^{n-m-1}$ 种取法；……；或先在前 $M-1$ 个 $1+x$ 中选出 r 个取 x，再在后 $N-M$ 个 $1+x$ 中选出 $n-r$ 个取 x，有 $\mathrm{C}_{M-1}^{r}\mathrm{C}_{N-M}^{n-r}$

种取法.

因此，$\sum\limits_{k=m}^{r}\mathrm{C}_{M-1}^{k-1}\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}=\mathrm{C}_{N-1}^{n-1}$.

(3)

$$\begin{aligned}
D(X) &= E(X^2)-E^2(X)\\
&=\sum_{k=m}^{r}k^2\frac{\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}-\left(n\frac{M}{N}\right)^2\\
&=\sum_{k=m}^{r}k(k-1)\frac{\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}+\sum_{k=m}^{r}k\frac{\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}-n^2\left(\frac{M}{N}\right)^2\\
&=\frac{1}{\mathrm{C}_N^n}\sum_{k=m}^{r}k(k-1)\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}+\frac{nM}{N}-n^2\left(\frac{M}{N}\right)^2\\
&=\frac{M(M-1)}{\mathrm{C}_N^n}\sum_{k=m}^{r}\mathrm{C}_{M-2}^{k-2}\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}+\frac{nM}{N}-n^2\left(\frac{M}{N}\right)^2\\
&=\frac{M(M-1)}{\mathrm{C}_N^n}\mathrm{C}_{N-2}^{n-2}+\frac{nM}{N}-n^2\left(\frac{M}{N}\right)^2\\
&=n(n-1)\frac{M(M-1)}{N(N-1)}+\frac{nM}{N}-n^2\left(\frac{M}{N}\right)^2\\
&=n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}
\end{aligned}$$

其中用到了恒等式 $k(k-1)\mathrm{C}_M^k=M(M-1)\mathrm{C}_{M-2}^{k-2}$，动机与第（1）问中二项分布方差公式的推导过程相同. 还用到了恒等式 $\sum\limits_{k=m}^{r}\mathrm{C}_{M-2}^{k-2}\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}=\mathrm{C}_{N-2}^{n-2}$，原理与第（2）问中所提到的相同.

165. 设 N 个元素中有 M 个标记元素，从全部 N 个元素中分别采取放回和不放回的抽样方式抽取 n 个元素，记这 n 的元素中标记元素的个数分别为随机变量 X_1，X_2，则 $X_1\sim B(n,\frac{N}{M})$，$X_2\sim H(N,n,M)$，易知二者的期望均为 $\frac{nM}{N}$.

但是例 6 表明，在相同误差限制下，不放回抽样的结果在规定误差范围内的概率高于放回抽样. P80 的图 7.4-4 在直观上表明，超几何分布（对应不放回抽样）的概率分布更集中在均值附近. 这实际上表明，$D(X_1)>D(X_2)$. 在上一条提示中，我们已经推导得出

$$D(X_1)=n\frac{M}{N}(1-\frac{M}{N})\qquad D(X_2)=n\frac{M}{N}(1-\frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}$$

在上述实际问题中，由于 $n>1$，所以 $\frac{N-n}{N-1}<1$，因此 $D(X_1)>D(X_2)$. 从直观上看，采取不放回抽样时，已经抽出若干样本后，如果抽出的样本中标记元素的占比高于 $\frac{M}{N}$，那么剩余样本中标记元素的占比将小于 $\frac{M}{N}$，因此在接下来的抽样中，抽到标记元素的比例将向 $\frac{M}{N}$ 回归；如果抽出的样本中标记元素占比偏低，接下来同样也会向 $\frac{M}{N}$ 回归. 相比之下，采取放回抽样时，如果已经抽出的部分样本中标记元素的占比偏高或偏低，接下来抽样仍然不受影响，起不到“纠偏”的作用，因此偏离均值的概率将会更大.

166. 第 3 题

(1) 记“质点位于 $x=m$”为 A_m（$m\in\mathbf{Z}$）.

由于质点每次运动都等可能地向左或向右移动一个单位，因此 6 次运动共有 $2^6=64$ 种等可能

地情况.

要在 6 次运动后回到原点，当且仅当 6 次运动中有 3 次向左，3 次向右，所以 $n(A_0) = \mathrm{C}_6^3 = 20$.

所以 $P(A_0) = \dfrac{n(A_0)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{16}$.

（2）6 次运动后位于 $x=4$，当且仅当 6 次运动中有 1 次向左，5 次向右，所以 $n(A_4) = \mathrm{C}_6^1 = 6$.

所以 $P(A_4) = \dfrac{n(A_4)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{32}$.

第 8 题

在统计学上严格地解答本题，需要用到二项分布的单边假设检验，基本思路类似于卡方检验.

零假设 H_0：$p = 0.9$. 备择假设 H_1：$p < 0.9$.

检验统计量为治愈人数 $X \sim B(10, p)$，

计算 P 值：$P(X \leqslant 6 | p = 0.9) = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} \mathrm{C}_{10}^k (0.9)^k (0.1)^{10-k} \approx 0.0128$.

取显著性水平 $\alpha = 0.05$，因为 $P < \alpha$，所以有理由拒绝 H_0 而接受 H_1. 这意味着，如果药厂宣传正确，治愈人数不超过 6 人的概率非常低（约 1.28%），表明观察到的结果与宣传不符. 因此，我们怀疑药厂的宣传.

167. （1）设 $P(X = k) = a_k = \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$（$k = 0, 1, \cdots, n$），显然 $a_k > 0$，

则 $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{\mathrm{C}_n^{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}} = \dfrac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}} = \dfrac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$，

所以 $a_{k+1} \geqslant a_k \Leftrightarrow \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} \geqslant 1 \Leftrightarrow k \leqslant (n+1)p - 1$，

因此数列 $\{a_k\}$ 在 $0 \leqslant k \leqslant (n+1)p - 1$ 时递增，在 $(n+1)p \leqslant k \leqslant n$ 时递减，

所以 a_k 取最大值，当且仅当 $(n+1)p - 1 \leqslant k \leqslant (n+1)p$.

（2）不妨设 a，$b > 0$，因为 $T_{k+1} = (a+b)^n \mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$，所以系数绝对值最大的项即为 $\mathrm{C}_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 最大的项，此时问题与（1）完全相同，不再赘述.

168. P91 复习参考题 7 第 10 题

设 “n 次传球后球在甲手里” 为 A_n，$P(A_n) = p_n$.

如果 n 较大，A_n 是一个复杂事件，参考第 158 条提示，我们考虑运用全概率公式.

由于 A_n 的发生情况完全由 A_{n-1} 是否发生决定，因此按照前阶段的结果划分，构造完备事件组 $\{A_{n-1}, \overline{A_{n-1}}\}$，于是

$$P(A_n) = P(A_n | A_{n-1}) P(A_{n-1}) + P(A_n | \overline{A_{n-1}}) P(\overline{A_{n-1}})$$

即

$$p_n = 0 \cdot p_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (1 - p_{n-1}) = -\frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{2}$$

由 $p_0 = 1$，参考第 135 条提示，求解 $\{p_n\}$ 的通项公式为 $p_n = \dfrac{2}{3} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{1}{3}$.

2023 年新高考 I 卷第 21 题

设 “第 n 次投篮的人是甲” 为 A_n，$P(A_n) = p_n$.

由全概率公式得：

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} | A_n) P(A_n) + P(A_{n+1} | \overline{A_n}) P(\overline{A_n})$$

即

$$p_{n+1}=\frac{3}{5}p_n+\left(1-\frac{4}{5}\right)(1-p_n)=\frac{2}{5}p_n+\frac{1}{5}$$

所以 $p_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$，又 $p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，

所以 $\left\{p_n-\frac{1}{3}\right\}$ 是以 $\frac{1}{6}$ 为首项，$\frac{2}{5}$ 为公比的等比数列，

所以 $p_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$，即 $p_n=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$.

(1) $P(\overline{A_2})=1-p_2=\frac{3}{5}$.

(2) $P(A_i)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$.

(3) 设随机变量 $X_i=\begin{cases}1,\text{第}i\text{次投篮的人是甲}\\0,\text{第}i\text{次投篮的人是乙}\end{cases}$，则 X_i 服从两点分布，$P(X_i=1)=\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$，

所以 $E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}\right]=\frac{n}{3}+\frac{5}{18}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right]$.

169. (1) 设平均每个人需要化验的次数为 X，如果某人所在的组化验结果均为阴性，则 5 个人只化验了 1 次，$X=\frac{1}{5}$；如果其所在的组化验结果为阳性，则每个人还需额外再化验 1 次，5 个人共化验了 6 次，$X=\frac{6}{5}$. 所以 X 的分布列为:

X	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$
P	0.95^5	$1-0.95^5$

所以 $E(X)=\frac{1}{5}\times0.95^5+\frac{6}{5}\times(1-0.95^5)\approx0.4262<1$，因此这种化验方法能减少化验次数.

(2) 设平均每个人需要化验的次数为 Y，如果某人所在的组化验结果均为阴性，则 k 个人只化验了 1 次，$X=\frac{1}{k}$；如果其所在的组化验结果为阳性，则每个人还需额外再化验 1 次，k 个人共化验了 $k+1$ 次，$X=\frac{1}{k}+1$. 所以 X 的分布列为:

X	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}+1$
P	0.98^k	$1-0.98^k$

所以 $E(Y)=\frac{1}{k}\times0.98^k+\left(\frac{1}{k}+1\right)\times(1-0.98^k)=\frac{1}{k}-0.98^k+1$，

利用计算工具计算得，当 $k=8$ 时，$E(Y)$ 取到最小值.

170. 如下表:

分布类型	概念	分布列（概率密度函数）	期望	方差
两点分布	只有两种对立结果的单次随机试验的结果分布	$P(X=1)=p$，$P(X=0)=1-p$	$E(X)=p$	$D(X)=p(1-p)$
二项分布	n 重伯努利实验成功次数的分布	$P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^n(1-p)^{n-k}$ $(0\leqslant k\leqslant n)$	$E(X)=np$	$D(X)=np(1-p)$
超几何分布	不放回抽样下，抽取的样本中具有指定特征的个体数的分布	$P(X=k)=\dfrac{\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}$ $(m\leqslant k\leqslant r)$	$E(X)=n\dfrac{M}{N}$	$D(X)=n\dfrac{M}{N}\left(1-\dfrac{M}{N}\right)\cdot\dfrac{N-n}{N-1}$
正态分布	描述许多自然现象和随机变量之和的分布	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$E(X)=\mu$	$D(X)=\sigma^2$

注：超几何分布的分布列中，$m=\max\{0,n-N+M\}$，$r=\min\{n,M\}$.

171. 样本相关系数 r 的目的是量化两个变量 x 和 y 之间线性关系的强度和方向.

首先我们关心 x，y 相对于样本中心的偏离程度，即

去中心化:

$$x_i-\overline{x}\qquad y_i-\overline{y}$$

接下来我们关心二者的协同性，即 y 与 x 的变化方向是否总是一致（总是相同或总是相反），我们依据 $x_i-\overline{x}$ 与 $y_i-\overline{y}$ 的符号来判断，即二者同号（乘积 $(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})>0$）时，$y$ 与 x 的变化方向相同；二者异号（乘积 $(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})<0$）时，$y$ 与 x 的变化方向相反；如果乘积 $(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$ 正负相抵，则 y 与 x 的线性关系不明显. 因此，我们

构造协方差:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$$

但由于协方差的量纲（单位）是 x 与 y 单位的乘积，且随二者线性变化，这是我们不希望看到的（因为单位的变化会使得协方差成倍变化，但同样的数据下线性相关程度理应不变），因此我们除以 x 和 y 的标准差，从而

标准化:

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

这就得到了皮尔逊相关系数.

此外，还可以从向量的角度理解. 设 n 维向量

$$\boldsymbol{X}=(x_1-\overline{x},x_2-\overline{x},\cdots,x_n-\overline{x})\qquad \boldsymbol{Y}=(y_1-\overline{y},y_2-\overline{y},\cdots,y_n-\overline{y})$$

则 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的夹角代表了两个向量方向的关系，也就代表了两组数据线性关系的方向和强度，因此

$$r=\cos<\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}>=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

从向量的角度也很容易证明，$-1\leqslant r\leqslant 1$.

172. 我们证明：

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{xy}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2}}$$

对于分子，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})&=\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i-x_i\overline{y}-y_i\overline{x}+\overline{xy})\\&=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{y}\sum_{i=1}^{n}x_i-\overline{x}\sum_{i=1}^{n}y_i+\sum_{i=1}^{n}\overline{xy}\\&=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\overline{y}\cdot n\overline{x}-\overline{x}\cdot\overline{y}+n\overline{xy}\\&=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{xy}\end{aligned}$$

分母的变形实际上就是方差简化公式的推导，从略.

173. 确定经验回归方程的斜率系数 b 和截距系数 a，实际上是要找到使残差平方和 $Q(a,b)=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-a)^2$ 最小的 (a,b). 这是一个二元函数的最值问题，教材通过变形将 $Q(a,b)$ 整理成关于 a，b 的二次函数求解，颇具技巧性. 下面用主元法分析：

设 $F(a)=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-a)^2$，则 $F'(a)=2\sum\limits_{i=1}^{n}(a+bx_i-y_i)$，易知 $F(a)$ 在 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a+bx_i-y_i)=n(a+\overline{x}b-\overline{y})=0$ 时取最小值.

设 $G(b)=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-bx_i-a)^2$，则 $G'(b)=2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(bx_i+a-y_i)$，易知 $G(b)$ 在 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(bx_i+a-y_i)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)b+n\overline{x}a-\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=0$ 时取最小值.

综上，$Q(a,b)$ 在 $\begin{cases}n(a+\overline{x}b-\overline{y})=0\\\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\right)b+n\overline{x}a-\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{xy}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}\\a=\overline{y}-b\overline{x}\end{cases}$ 时取最小值.

174. 题图中，残差的分散程度随 x 增大而增大，但始终均匀分布在 x 轴两侧，因此满足期望 $E(e)=0$ 的假设，但不满足方差 $D(e)=\sigma^2$ 为常数的假设，故选择 C 项.

175. 由题意，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=0$，故 $\hat{b}=\dfrac{\overline{y}}{\overline{x}}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$.

176. 卡方检验类似于法庭中的有罪推定，我们先假设“无罪”（零假设 H_0：分类变量 X 与 Y 相互独立），然后在此假设下“收集证据”（观测值与 H_0 成立下的理论期望值有多大差距），“证据”越确凿（观测值与理论值偏差越大），就越有理由推翻“无罪”假设（有理由拒绝 H_0），即判处“有罪”（认为分类变量 X 与 Y 不独立或有关）.

因此需要构造一个统计量 χ^2 来衡量观测值与 H_0 成立下的理论期望值的偏离程度.

以事件 $\{X=0,Y=0\}$ 为例，在 H_0 成立（X 与 Y 独立）的条件下，事件 $\{X=0,Y=0\}$ 发生的概率 $P(X=0,Y=0|H_0)=P(X=0)P(Y=0)=\dfrac{(a+b)(a+c)}{n^2}$，所以事件 $\{X=0,Y=0\}$ 发生的频数的期望值为 $n\cdot\dfrac{(a+b)(a+c)}{n^2}=\dfrac{(a+b)(a+c)}{n}$，因此事件 $\{X=0,Y=0\}$ 发生频数的观测值与期望值的偏差为 $\left|a-\dfrac{(a+b)(a+c)}{n}\right|$.

将所有事件发生频数的偏差相加，就可以衡量观测值与 H_0 成立下的理论期望值的偏离程度. 但这样存在的问题是绝对值不便于计算，因此采取用平方代替绝对值的“老办法”，将每一项偏差取平方，而为了保持量纲不变，再除以期望值，然后求和并化简，便得到了我们所学的 χ^2 公式. 这里除以期望值，而不是除以期望值平方的原因是希望这个指标与样本量线性相关，因为这里我们需要绝对偏差而非相对偏差（偏差的比例）——即使偏差的比例相同，但如果偏差的绝对值更大，则表明越有理由拒斥零假设.

177. 根据 $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，如果 n，a，b，c，d 都扩大为原来的 10 倍，则 χ^2 将扩大为原来的 10 倍，相应的分类变量越有可能相关. 这是因为样本量成比例扩大后，观测的频数与（独立假设下的）期望值之间绝对偏差也越大，表明越有可能不独立.

178. 承接第 176 条提示，我们将卡方检验视为一种“有罪推定”，χ^2 是我们做推定的证据，χ^2 越大，表明观测的情况与零假设 H_0（变量 X 与 Y 独立）越不符，就越有理由拒绝 H_0.

但这是一种归纳推理，存在犯错误的可能，正如法庭中再确凿的证据也有极小的错误的可能性. 因此，我们要人为设定一个界限，当 χ^2 超过一定值时，我们就拒绝 H_0. 例如，显著性水平 $\alpha=0.05$ 对应的 $x_\alpha=3.841$，表示在 H_0 的条件下，$\chi^2\geqslant 3.841$ 的概率仅有 0.05. 所以，如果我们在承认 H_0 的条件下计算出的 χ^2 值超过 3.841，意味着一个小概率事件的发生，因此我们宁可拒绝 H_0. 当然，小概率事件不是不可能发生的，所以拒绝 H_0 还存在 0.05 的风险；但反过来也可以说，我们有 95% 的把握. α 越小，对应的 x_α 越大，这意味着 χ^2 可以超过更大的值，落在了更不可能的区间，我们就越应该拒绝 H_0，且拒绝的风险越低.

反之，如果计算出的 $\chi^2<3.841$，只能说我们没有 95% 的把握拒绝 H_0，故而选择接受 H_0. 接受 H_0 同样存在风险，但我们无法说出犯错概率的具体大小，不过 α 越大，对应的 x_α 越小，这意味着 χ^2 没有超过更小的值，就落在了越接近 H_0 成立下的区间，犯错概率就越小.

综上，若 χ^2 超过一定界限，表明偏离 H_0，且超过的界限越大，意味着更小概率事件的发生，拒绝 H_0 的犯错概率越低（把握越高），且不超过 α（或拒绝 H_0 的把握不低于 $1-\alpha$）. 若 χ^2 没有达到一定界限，表明没有过分偏离 H_0，即没有充分理由拒绝 H_0（或可以接受 H_0），且越小的界限下 χ^2 未超过，意味着越不偏离 H_0，接受 H_0 的犯错概率越低（把握越高）.

179. 已知样本相关系数

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$

一元线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中

$$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\qquad \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$$

决定系数

$$R^2=1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$$

记 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$，$B=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$C=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$，$D=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$，

则 $r=\dfrac{A}{BC}$，$\hat{b}=\dfrac{A}{B^2}$，$R^2=1-\dfrac{D^2}{C^2}$，

$$\begin{aligned}D&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{b}x_i-\overline{y}+\hat{b}\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-\overline{y}-\hat{b}\,(x_i-\overline{x})\right]^2\\&=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2+\hat{b}^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2-2\hat{b}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=C^2+\hat{b}^2B^2-2\hat{b}A\\&=C^2+\frac{A}{B^2}\cdot B^2-2\frac{A}{B^2}\cdot A=C^2-\frac{A^2}{B^2}\end{aligned}$$

所以 $R^2=1-\dfrac{D^2}{C^2}=1-\dfrac{1}{C^2}\left(C^2-\dfrac{A^2}{B^2}\right)=\dfrac{A^2}{B^2C^2}=r^2$.