浅析以彭赛列闭合定理为背景的切线问题之解法

彭赛列闭合定理，可以被等价地描述为：**设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是圆锥曲线 $\varGamma_1$ 的内接 n 边形，则必存在圆锥曲线 $\varGamma_2$，满足直线 A_iA_{i+1} 与之相切**。在高中试题中，通常以 $n=3$ 的形式呈现，最近一次在高考中现身，是于 2021 年的全国甲卷中：

【2021 •全国甲卷】抛物线 C 的顶点为坐标原点 O，焦点在 x 轴上，直线 $l:x=1$ 交 C 于 P，Q 两点，且 $OP\perp OQ$. 已知 $M(2,0)$，且⊙ M 与 l 相切.

（1）求 C，⊙ M 的方程；

（2）设 A_1，A_2，A_3 是 C 上的三个点，直线 A_1A_2，A_1A_3 均与⊙ M 相切，判断直线 A_2A_3 与⊙ M 的位置关系，并说明理由.

追根溯源，彭赛列闭合定理第一次在高考中考查是 1982 年：

【1982】抛物线 $y^2=2px$ 的内接三角形有两边与抛物线 $x^2=2qy$ 相切，证明这个三角形的第三边也与 $x^2=2qy$ 相切.

还有一道典型的题是 2009 年的江西文科数学：

【2009 江西（文）】如图，已知圆 $G:(x-2)^2+y^2=r^2$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$ 的内接△ABC 的内切圆，其中 A 为椭圆的左顶点.

（1）求圆 G 的半径 r；

（2）过点 $M(0,1)$ 作圆 G 的两条切线交椭圆于 E，F 两点，证明：直线 EF 与圆 G 相切.

本文将以这三道高考真题为依托，探究这类问题的较优解法。

首先我们看这类题型的“鼻祖”——1982 年的高考题。作出示意图如图 *Fig*.1，不妨设△ABC 内接于抛物线 $y^2=2px$，已知直线 AB，AC 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切，要证直线 BC 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切。

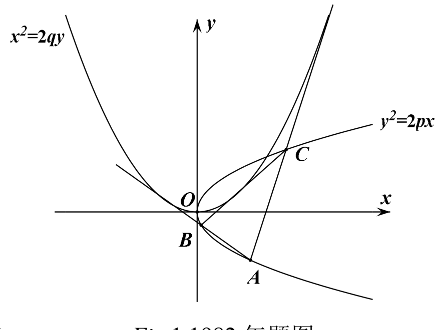

Fig.1 1982 年题图

解题伊始，道逢岔路：题中所有点、直线都不确定，必须自己设，但是从哪个元素设起，如何设，都

是问题。初步判断，大致有以下几种设法及相应思路：

（一）设直线。可以设直线 BC，优先反设，既没有斜率限制，也利于与抛物线 $y^2=2px$ 联立消元，然后根据 B，C 两点的坐标写出切线方程，再分别与抛物线 $y^2=2px$ 联立，得出点 A 的坐标，并以同一性建立方程，进而证明结论；也可以设直线 AB，AC，优先反设分别与抛物线 $y^2=2px$ 联立，得出点 A 的坐标，以同一性及相切关系建立方程组，进而证明结论。

（二）设点。可以设点 B，C，以此为起点写出切线方程，分别与抛物线 $y^2=2px$ 联立，得出点 A 的坐标，并以同一性建立方程，进而证明结论；也可以设三个点，写出直线 AB，AC 的方程，依据相切建立方程组，进而证明结论。以上两种思路，在设点时都可以选用 $(\frac{y^2}{2p},y)$ 或 $(2pt^2,2pt)$ 的形式。

为尽可能减少直线与曲线的联立次数、产生同构形式、减少出现分数运算，考虑采用 $(2pt^2,2pt)$ 的形式设点解决。

【解法一】设 $A(2pa^2,2pa)$，$B(2pb^2,2pb)$，$C(2pc^2,2pc)$，则：

$AB:x-(a+b)y+2pab=0$，AB 与抛物线 $x^2=2qy$ 联立：

$x^2-\frac{2q}{a+b}x-\frac{4pqab}{a+b}=0$，二者相切等价于：

$\Delta=\frac{4q^2}{(a+b)^2}+\frac{16pqab}{a+b}=0$，即 $q+4pab(a+b)=4pab^2+4pa^2b+q=0$ ⋯ ①，

同理，AC 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切等价于：$4pac^2+4pa^2c+q=0$ ⋯ ②，

由①②得，b，c 是关于 t 的一元二次方程 $4pat^2+4pa^2t+q=0$ 的两根，于是：

$\begin{cases}b+c=-a\\ bc=\frac{q}{4pa}\end{cases}$，所以 $4pbc(b+c)+q=4p\cdot\frac{q}{4pa}\cdot(-a)+q=0$，

而 $4pbc(b+c)+q=0$ 等价于 BC 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切，于是命题得证.

另外，注意到直线 AB，AC 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切意味着两直线斜率必定满足一个特定的一元二次方程，故考虑采用平移与齐次化：

【解法二】设 $A(\frac{{y_0}^2}{2p},y_0)$，过点 A 的直线 $y=kx+y_0-\frac{k{y_0}^2}{2p}$，与抛物线 $x^2=2qy$ 联立得：

$x^2-2kqx-2q(y_0-\frac{k{y_0}^2}{2p})=0$，

令 $\Delta=4q^2k^2+8q(y_0-\frac{k{y_0}^2}{2p})=0$，即 $pqk^2-{y_0}^2k+2py_0=0$，故 $\begin{cases}k_1+k_2=\frac{{y_0}^2}{pq}\\k_1k_2=\frac{2y_0}{q}\end{cases}$，

设 $BC:m(x-\frac{{y_0}^2}{2p})+n(y-y_0)=1$，

$y^2=2px\Rightarrow(y-y_0)^2+2y_0(y-y_0)-2p(x-\frac{{y_0}^2}{2p})=0$，

联立得 $(2ny_0+1)(y-y_0)^2+(2my_0-2pn)(y-y_0)(x-\frac{{y_0}^2}{2p})-2pm(x-\frac{{y_0}^2}{2p})^2=0$，

即 $(2ny_0+1)k^2+(2my_0-2pn)k-2pm=0$，

所以 $\begin{cases}\frac{2pn-2my_0}{2ny_0+1}=\frac{{y_0}^2}{pq}\\\frac{-2pm}{2ny_0+1}=\frac{2y_0}{q}\end{cases}$，且 $\frac{2pn-2my_0}{-2pm}=\frac{{y_0}^2q}{2y_0pq}$，即 $2pn=my_0$，

将 BC 与抛物线 $x^2=2qy$ 联立得 $\frac{n}{2q}x^2+mx-(\frac{m{y_0}^2}{2p}+ny_0+1)=0$，

$\Delta=m^2+\frac{2n}{q}(\frac{m{y_0}^2}{2p}+ny_0+1)=\frac{2m^2ny_0+m^2+2mn(pn-my_0)-2pmn^2}{2ny_0+1}+\frac{2n}{q}$

$=\frac{m^2}{2ny_0+1}+\frac{2n}{q}=-\frac{my_0}{pq}+\frac{2n}{q}=\frac{2pn-my_0}{pq}=0$，

所以 BC 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切，于是命题得证.

对比两种方法发现，本题中解法一较为简洁，原因是设点情形下，三组“相切”具有本质上的同一性，体现在代数上，即具有同构性，因此在计算时可以做到一劳永逸。而解法二涉及多次直线与曲线联立并计算判别式，较为繁杂，且对代数变形消元的能力要求较高。

接下来我们不妨先研究同样以抛物线为依托的 2021 年全国甲卷的题：

【2021 •全国甲卷】抛物线C的顶点为坐标原点O，焦点在x轴上，直线$l:x=1$交C于P，Q两点，且$OP\perp OQ$. 已知$M(2,0)$，且$\odot M$ 与l相切.

（1）求C，$\odot M$ 的方程;

（2）设A_1，A_2，A_3是C上的三个点，直线A_1A_2，A_1A_3均与$\odot M$ 相切，判断直线A_2A_3与$\odot M$ 的位置关系，并说明理由.

作出大致图像如图 *Fig*.2.在（1）中得到抛物线与圆的方程分别为：$C:y^2=x$，$\odot M:(x-2)^2+y^2=1$，

与 1982 的题相比，本题将方程中的参数具体化，且将其中一条抛物线改为圆，但题目的本质还是由两个“相切”推出第三个“相切”。由于三个点均在抛物线上，上述设点和平移齐次化的解法仍然适用。

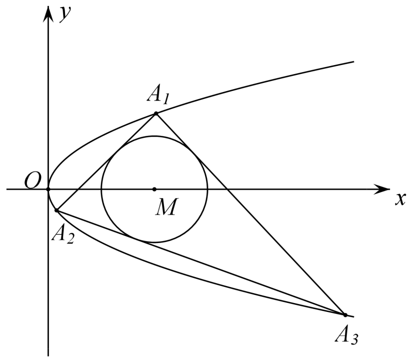

Fig.2 2021 年全国甲卷题图

下面我们用上述两种方法尝试解答本题：

【解法一】设$A_i({y_i}^2,y_i)(i=1,2,3)$，

则直线$A_iA_j(i,j=1,2,3,i\neq j)$的方程为：$x-(y_i+y_j)y+y_iy_j=0$，

直线A_iA_j与$\odot M$ 相切等价于$\dfrac{|2+y_iy_j|}{\sqrt{1+(y_i+y_j)^2}}=1$，即$(y_iy_j)^2+4y_iy_j-(y_i+y_j)^2+3=0$，

由直线A_1A_2，A_1A_3与$\odot M$ 相切得$\begin{cases}({y_1}^2-1){y_2}^2+2y_1y_2+(3-{y_1}^2)=0\\({y_1}^2-1){y_3}^2+2y_1y_3+(3-{y_1}^2)=0\end{cases}$，

所以y_2，y_3是关于y的一元二次方程$({y_1}^2-1)y^2+2y_1y+(3-{y_1}^2)=0$的两根，

所以$\begin{cases}y_2+y_3=\dfrac{2y_1}{{y_1}^2-1}\\y_2y_3=\dfrac{3-{y_1}^2}{{y_1}^2-1}\end{cases}$，于是：

$$(y_2y_3)^2+4y_2y_3-(y_2+y_3)^2+3=(\frac{{y_1}^2+1}{{y_1}^2-1})^2-\frac{4{y_1}^2}{({y_1}^2-1)^2}-1=(\frac{{y_1}^2-1}{{y_1}^2-1})^2-1=0,$$

所以直线A_2A_3与$\odot M$ 相切.

由于参数的具体化，以及直线与圆相切的特殊性，解法一在解决本题时得到了进一步的简化。

【解法二】设 $A_1(y_0{}^2, y_0)$，过点 A_1 的直线 $x = my + y_0{}^2 - my_0$ 与⊙ M 相切：

$\dfrac{\left|y_0{}^2 - my_0 - 2\right|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$，即 $(y_0{}^2-1)m^2 - 2y_0(y_0{}^2-2)m + (y_0{}^2-2)^2 - 1 = 0$，

所以 $\begin{cases} m_1 + m_2 = \dfrac{2y_0(y_0{}^2-2)}{y_0{}^2-1} \\ m_1m_2 = \dfrac{(y_0{}^2-2)^2-1}{y_0{}^2-1} \end{cases}$，

设 $A_2A_3: a(x-y_0{}^2) + b(y-y_0) = 1$，$C: y^2 = x \Rightarrow (y-y_0)^2 + 2y_0(y-y_0) - (x-y_0{}^2) = 0$，

联立得 $a(x-y_0{}^2)^2 - (2ay_0-b)(x-y_0{}^2)(y-y_0) - (2by_0+1)(y-y_0)^2 = 0$，

即 $am^2 - (2ay_0-b)m - (2by_0+1) = 0$，所以 $\begin{cases} \dfrac{2ay_0-b}{a} = \dfrac{2y_0(y_0{}^2-2)}{y_0{}^2-1} \\ \dfrac{-(2by_0+1)}{a} = \dfrac{(y_0{}^2-2)^2-1}{y_0{}^2-1} \end{cases} \cdots (*)$，

直线 A_2A_3 与⊙ M 相切等价于 $\dfrac{\left|a(2-y_0{}^2) - by_0 - 1\right|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$，

即 $[(2-y_0{}^2)^2-1]a^2 + (y_0{}^2-1)b^2 - 2aby_0(2-y_0{}^2) - 2a(2-y_0{}^2) + 2by_0 = 0$，

代入 $(*)$ 式知上式成立，于是直线 A_2A_3 与⊙ M 相切.

在解答本题时，解法二仍然存在多次联立、消元困难的问题，究其原因。不难发现导致计算复杂的主要因素是点 A_1 的坐标用字母书写，后续计算一直带着很多 y_0，因而计算繁杂。

与之不同的是，2009 年江西文科卷的这道题中，所以具体数值都是已知的，这能否消除由于大量字母带来的复杂性呢？我们不妨一试。

【2009 江西（文）】如图，已知圆 $G:(x-2)^2 + y^2 = r^2$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{16} + y^2 = 1$ 的内接△ABC 的内切圆，其中 A 为椭圆的左顶点.

（1）求圆 G 的半径 r；

（2）过点 $M(0,1)$ 作圆 G 的两条切线交椭圆于 E，F 两点，证明：直线 EF 与圆 G 相切.

在（1）中利用相似可以得到 $r = \dfrac{2}{3}$，具体过程略。

作出大致图像如图 *Fig.*3。

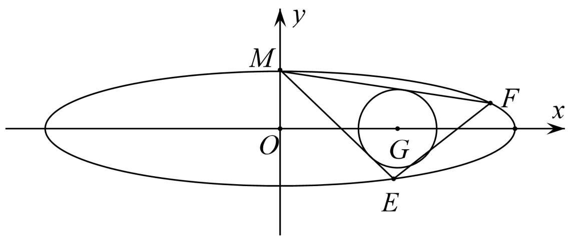

*Fig.*3 2009 年江西（文）题图

【解法一】设过点 M 的直线 $y=kx+1$ 与圆 G 相切，则：

$$\frac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2}{3}\Rightarrow 32k^2+36k+5=0\text{，所以}\begin{cases}k_1+k_2=-\dfrac{9}{8}\\ k_1k_2=\dfrac{5}{32}\end{cases},$$

设 $EF:mx+n(y-1)=1$，椭圆 $\frac{x^2}{16}+y^2=1$ 即 $x^2+16(y-1)^2+32(y-1)=0$，联立得：

$16(2n+1)(y-1)^2+32mx(y-1)+x^2=0$，即 $16(2n+1)k+32mk+1=0$，所以：

$$\begin{cases}-\dfrac{2m}{2n+1}=-\dfrac{9}{8}\\ \dfrac{1}{16(2n+1)}=\dfrac{5}{32}\end{cases}\text{，解得}\begin{cases}m=\dfrac{9}{40}\\ n=-\dfrac{3}{10}\end{cases}\text{，所以 }EF:9x-12y-28=0,$$

因为 G 到 EF 的距离 $\frac{|18-28|}{\sqrt{9^2+12^2}}=\frac{2}{3}=r$，所以直线 EF 与圆 G 相切.

发现在有具体数值的情况下，利用平移齐次化的方法解决该问题显得更为简洁。

此外，可以用椭圆的有理参数方程解决该问题。但在正式解题之前，需要先引入一些预备知识：

预备知识 1 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 上的点可以表示为 $(a\frac{1-t^2}{1+t^2},b\frac{2t}{1+t^2})$，其中 $t\in\mathbf{R}$.

预备知识 2 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 上两点 $(a\frac{1-{t_1}^2}{1+{t_1}^2},b\frac{2t_1}{1+{t_1}^2})$，$(a\frac{1-{t_2}^2}{1+{t_2}^2},b\frac{2t_2}{1+{t_2}^2})$

的直线方程为 $\dfrac{\frac{1-t_1t_2}{1+t_1t_2}}{a}x+\dfrac{\frac{t_1+t_2}{1+t_1t_2}}{b}y=1$，其中 $t_1,t_2\in\mathbf{R}$.

这实际上是利用万能公式对椭圆的三角参数方程变形得到的。据此解题如下：

【解法二】易知点M对应的参数$t_0=1$，

过椭圆上两点$(4\frac{1-t_1^{2}}{1+t_1^{2}},\frac{2t_1}{1+t_1^{2}})$，$(4\frac{1-t_2^{2}}{1+t_2^{2}},\frac{2t_2}{1+t_2^{2}})$的直线$\frac{\frac{1-t_1t_2}{1+t_1t_2}}{4}x+\frac{t_1+t_2}{1+t_1t_2}y=1$与圆$G$

相切等价于$\frac{\left|\frac{1-t_1t_2}{2}-(1+t_1t_2)\right|}{\sqrt{\frac{(1-t_1t_2)^2}{16}+(t_1+t_2)^2}}=\frac{2}{3}$，即$10t_1^{2}t_2^{2}+3t_1t_2-2(t_1^{2}+t_2^{2})+1=0$，

设E，F对应的参数为t_1，t_2，于是由ME，MF与圆G相切得：

$\begin{cases}8t_1^{2}+3t_1-1=0\\8t_2^{2}+3t_2-1=0\end{cases}$，所以$t_1$，$t_2$是关于$t$的一元二次方程$8t^2+3t-1=0$的两根，

所以$\begin{cases}t_1+t_2=-\frac{3}{8}\\t_1t_2=-\frac{1}{8}\end{cases}$，所以$10t_1^{2}t_2^{2}+3t_1t_2-2(t_1^{2}+t_2^{2})+1=\frac{10}{64}-\frac{3}{8}-2(\frac{9}{64}+\frac{1}{4})+1=0$，

所以直线EF与圆G相切.

有理参数方程的引入对于本题来说，或许未能得到比解法一更简便的方法，但是作为前两题中抛物线参数方程的延伸，蕴含了圆锥曲线的统一性，具有更广泛的意义。

经过三道题的比较，我们不难得出：

（1）圆锥曲线的有理参数方程与平移齐次化方法在解决以彭赛列闭合定理为背景的切线问题时表现出相较于常规解法的优越性，但二者之间孰优孰劣取决于实际情况。具体地说，由于抛物线解析式中具有一次项，因而抛物线的有理参数方程具有降次的作用，故对于以抛物线为依托的问题，通常选用有理参数方程会更为简洁。而在椭圆中，有理参数方程不具有此优点，尤其是遇到数值具体化的情况时，可以优先选用平移齐次化方法。

（2）消元困难往往是解析几何、导数难题的绊脚石。在上面讨论的三个问题中，我们通过对称化构造（同构），利用一元二次方程的韦达定理寻找对称式的关系来消元，具有较强的技巧性，我们应当积累这样的技巧。

此外，高考题中以一些竞赛知识为背景的题并不少，典型的还有 2022 年高考中射影几何的体现。我们不妨将同类问题放在一起比较，或许会有更多的收获。

2023 年 03 月 12 日