2026 年普通高等学校招生全国统一考试 模拟试题

数 学 参 考 答 案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. C

【解析】解不等式 $\dfrac{2}{x-1} \geqslant 1$：移项得 $\dfrac{3-x}{x-1} \geqslant 0$，即 $(x-1)(x-3) \leqslant 0$ 且 $x \neq 1$，解得 $A=(1,3]$，所以 $A \cap B=\{2,3\}$.

2. C

【解析】函数 $y=3\tan(2x+1)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$.

3. D

【解析】【方法一】设 $z=a+b\mathrm{i}$（a，$b \in \mathbf{R}$），则 $|a+b\mathrm{i}|=|(a-2)+b\mathrm{i}|$，即 $a^2+b^2=(a-2)^2+b^2$，解得 $a=1$，所以 $z+\overline{z}=2a=2$.

【方法二】$|z|=|z-2|$ 表示 z 在复平面内对应的点 Z 到原点 O 和到点 $A(2,0)$ 的距离相等，即 Z 在 OA 的中垂线 $x=1$ 上，所以 z 的实部为 1，$z+\overline{z}$ 等于 z 的实部的 2 倍，即 2.

4. A

【解析】因为 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a} \cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=x-y=0$，故 $x=y$.

5. B

【解析】$\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\dfrac{\tan\alpha-2\tan\alpha}{\tan\alpha+2\tan\alpha}=\dfrac{1}{3}$.

6. B

【解析】$S_k=a_k \Leftrightarrow S_{k-1}=0$，显然 $q \neq 1$，故 $S_{k-1}=\dfrac{(1-q^{k-1})a_1}{1-q}$. 因为 $a_1 \neq 0$，所以存在正整数 $k \geqslant 2$ 使得 $S_{k-1}=0$，等价于存在正整数 $k \geqslant 2$ 使得 $1-q^{k-1}=0$，即 $q=-1$. 所以“$q<0$”是“存在正整数 $k \geqslant 2$，使得 $S_k=a_k$”的必要不充分条件.

7. D

【解析】记角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，则 $V_1=\dfrac{\pi a^2 b}{3}$，$V_2=\dfrac{\pi ab^2}{3}$，所以 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{a}{b}$，故 $\cos A=\dfrac{b}{c}=\sqrt{\dfrac{b^2}{c^2}}=\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2+b^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{(\frac{a}{b})^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{V_1^2}{V_2^2}+1}}=\dfrac{V_2}{\sqrt{V_1^2+V_2^2}}$.

8. A

【解析】观察数据，注意到 y 随 x 的增大而减小，且数据点 (x,y) 均在同一条直线 $y=-x+3.5$ 上，故 $r_1=-1$；z 随 x 的增大而减小，但数据点 (x,z) 不共线，故 $-1<r_2<0$；z 随 y 的减小而减小，故 $r_3>0$. 所以 $r_1<r_2<r_3$.

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，至少有两项是符合题目要求的。若全部选对得 6 分，部分选对得部分分，选错或不选得 0 分。

9. BC

【解析】由椭圆方程知 $a=2$. 因为直线 AB 与椭圆 C 交于点 $(0,-\sqrt{3})$，所以 $b=\sqrt{3}$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，A 错误.

$\triangle ABF_2$ 的周长等于 $|AF_1|+|BF_1|+|AF_2|+|BF_2|=4a=8$，B 正确.

由 $c=1$ 知 $F_1(-1,0)$，所以 $|BF_1|=2$，$\angle BF_1F_2=60^\circ$，因为 $|y_A|<|y_B|$，所以 $|AF_1|=\dfrac{|y_A|}{\sin 60^\circ}<\dfrac{|y_B|}{\sin 60^\circ}=|BF_1|$，C 正确.

由 C 项知 $|AB|=|AF_1|+|BF_1|<2|BF_1|=4$，若 $AF_2 \perp BF_2$，则 $|AB|=\dfrac{|BF_2|}{\cos\angle ABF_2}=4$，与 $|AB|<4$ 矛盾，D 错误.

10. ACD

【解析】$f'(x)=3x^2$，$g(x)=\dfrac{(x_0+x)^3-x_0^3}{x}=x^2+3x_0x+3x_0^2$，$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=3x_0^2=f'(x_0)$，A 正确.

$\lim\limits_{x\to 0}g(-x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x_0x+3x_0^2)=3x_0^2 \neq -f'(x_0)$，B 错误.

$g(x)=\dfrac{(x_0+x)^3-x_0^3}{x}=x^2+3x_0x+3x_0^2$，$f'(x_0)=3x_0^2$，当 $x>0$ 时，$g(x)-f'(x_0)=x^2+3x_0x=x(x+3x_0)>0$，即 $g(x) \leqslant f'(x_0)$，C 正确.

当 $g(x)=(x+\dfrac{3x_0}{2})^2+\dfrac{3x_0^2}{4}$ 取最小值时，$x=-\dfrac{3x_0}{2}$，$g(x)=\dfrac{3x_0^2}{4}$，此时 $f'(x_0+x)=f'(-\dfrac{x_0}{2})=\dfrac{3x_0^2}{4}=g(x)$，D 正确.

11. AB

【解析】因为 $A(2,0)$，$B(2,2\sqrt{3})$，所以 $AB \perp x$ 轴，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$. 因为 $S_{\triangle POQ}=\lambda S_{\triangle AOB}$，即 $\dfrac{1}{2}|OP| \cdot |OQ| \cdot \sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\lambda|OA| \cdot |OB| \cdot \sin\dfrac{\pi}{3}$，所以 $|OP| \cdot |OQ|=8\lambda$.

对任意给定的 $\lambda \in (0,1)$，$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}=|OP| \cdot |OQ| \cdot \cos\angle AOB=4\lambda$ 为定值，A 正确.

因为 $0<|OP| \leqslant |OA|=2$，所以要使 $|OP|<|OQ|=\dfrac{8\lambda}{|OP|}$，即 $|OP|<2\sqrt{2\lambda}$ 恒成立，故只要 $2<2\sqrt{2\lambda}$，即 $\lambda>\dfrac{1}{2}$，所以存在给定的 $\lambda \in (0,1)$，使得 $|OP|<|OQ|$ 恒成立，B 正确.

设点 O 到直线 $|PQ|$ 的距离为 d，由 $S_{\triangle POQ}=\dfrac{1}{2}|OP| \cdot |OQ| \cdot \sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}|PQ| \cdot d$，得 $d=\dfrac{4\sqrt{3}\lambda}{|PQ|}$. 在 $\triangle POQ$ 中，由余弦定理得 $|PQ|^2=|OP|^2+|OQ|^2-2|OP| \cdot |OQ| \cdot \cos\angle AOB=|OP|^2+|OQ|^2-8\lambda$，所以 $d=\dfrac{4\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2-8\lambda}} \leqslant \dfrac{4\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{2|OP| \cdot |OQ|-8\lambda}=\sqrt{6\lambda}}$，当且仅当 $|OP|=|OQ|$ 时取等. 而由 B 项知当 $\lambda>\dfrac{1}{2}$ 时，无法取等，所以并非对任意给定的 $\lambda \in (0,1)$，d 的最大值都为 $\sqrt{6\lambda}$，C 错误.

设 $P(p,0)$ $(0<p \leqslant 2)$，则 $|OQ|=\dfrac{8\lambda}{p}$，故 $Q(\dfrac{4\lambda}{p},\dfrac{4\sqrt{3}\lambda}{p})$，直线 PQ：$\dfrac{4\sqrt{3}\lambda}{p}x+(p-\dfrac{4\lambda}{p})y-4\sqrt{3}\lambda=0$，即

$yp+(4\sqrt{3}\lambda x-4\lambda y)\frac{1}{p}-4\sqrt{3}\lambda=0$，若对给定的 λ，直线 PQ 过定点，则 $y=4\sqrt{3}\lambda x-4\lambda y=-4\sqrt{3}\lambda=0$，该方程不存在符合条件的解，因此不存在给定的 $\lambda\in(0,1)$，使得直线 PQ 过定点，D 错误.

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 0

【解析】因为 $y=f(x)-1$ 是奇函数，所以 $f(a)-1+f(-a)-1=0$，代入 $f(a)=2$ 得 $f(-a)=0$.

13. 4

【解析】设 $P(\frac{y_0^2}{4},y_0)$，则 $|MP|=\sqrt{(\frac{y_0^2}{4}-m)^2+y_0^2}=\frac{1}{4}\sqrt{y_0^4+(16-8m)y_0^2+16m^2}$，令 $t=y_0^2\geqslant 0$，则 $|MP|=\frac{1}{4}\sqrt{y_0^4+(16-8m)y_0^2+16m^2}=\frac{1}{4}\sqrt{t^2+(16-8m)t+16m^2}$，由题意，该式取到最小值，当且仅当 $y_0=0$，即 $t=0$，所以该二次函数的对称轴 $4m-8\leqslant 0$，故 $m\leqslant 2$.

14. $(2,+\infty)$

【解析】因为函数 $y=1-\log_2 x$ 和 $y=(\frac{1}{2})^{x-1}$ 单调递减，且 $1-\log_2 1=1=(\frac{1}{2})^{1-1}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\{f(x)|x\in D\}=[f(b),f(a)]\subseteq[a,b]$，于是 $\begin{cases}f(b)=(\frac{1}{2})^{b-1}\geqslant a\\ f(a)=1-\log_2 a\leqslant b\end{cases}$，即 $\begin{cases}2^{1-b}\geqslant a\\ 2^{1-b}\leqslant 2^{\log_2 a}=a\end{cases}$，所以 $2^{1-b}=a$，故 $a+b=2^{1-b}+b$. 设 $g(b)=2^{1-b}+b$，$g'(b)=-2^{1-b}\ln 2+1>1-\ln 2>0$，所以 $g(b)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$g(b)>g(1)=2$，故 $a+b$ 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本小题满分 13 分）

（1） 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $S_4=4a_1+6d=16$，即 $2a_1+3d=8$；

因为 $a_3^2-a_2^2=2(a_1+a_4)$，

所以 $a_3^2-a_2^2-2(a_1+a_4)=(a_1+2d)^2-(a_1+d)^2-2(2a_1+3d)=(2a_1+3d)(d-2)=8(d-2)=0$，

解得 $d=2$.……………………………………………………………………2 分

（正确求出公差 d）

代入 $2a_1+3d=8$ 解得 $a_1=1$，…………………………………………………………4 分

（正确求出首项）

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.……………………………………………………6 分

（正确求出 $\{a_n\}$ 的通项公式）

（2） $S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2=n^2$，……………………………………………………8 分

（正确求出 S_n）

$b_n=(-1)^nS_n=(-1)^n\cdot n^2$，

设 $c_n=b_{2n-1}+b_{2n}=(-1)^{2n-1}\cdot(2n-1)^2+(-1)^{2n}\cdot(2n)^2=4n-1$，……………………11 分

（表现出分组求和思想）

所以 $b_1+b_2+\cdots+b_{20}=c_1+c_2+\cdots+c_{10}=10\times 3+\frac{10\times 9}{2}\times 4=210$.………………13 分

（正确求出结果）

16.（本小题满分 15 分）

（1） **解法一：**

由正三棱台的对称性可得 $AB_1=AC_1$，又 M 为 B_1C_1 的中点，所以 $AM\perp B_1C_1$.…………2 分

（正确证明 AM 与面 BCC_1B_1 中的一条直线垂直）

如图，取 BC 的中点 N.

在梯形 ABB_1A_1 中，分别过 B_1，C_1 作 BC 的垂线，垂足为 E，F，

则 $EF=B_1C_1=2$，$BE=CF=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}BB_1$，所以 $\angle B_1BC=\frac{\pi}{3}$，$MN=B_1E=\frac{\sqrt{3}}{2}$.……5 分

（正确求出三棱台侧面等腰梯形的底角或高）

同理有 $\angle B_1BA=\frac{\pi}{3}$，所以 $AC_1=AB_1=\sqrt{AB^2+BB_1^2-2AB\cdot BB_1\cdot\cos\angle ABB_1}=\sqrt{7}$，

所以 $AM=\sqrt{AB_1^2-(\frac{B_1C_1}{2})^2}=\sqrt{6}$；又在 $\triangle ABC$ 中，$AN=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

从而 $AM^2+MN^2=\frac{27}{4}=AN^2$，所以 $AM\perp MN$.…………………………………7 分

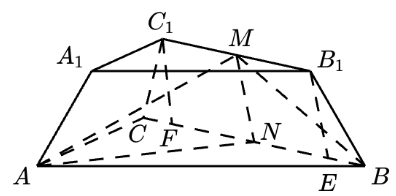
（正确证明 AM 与面 BCC_1B_1 中的与第一条直线相交的另一条直线垂直）

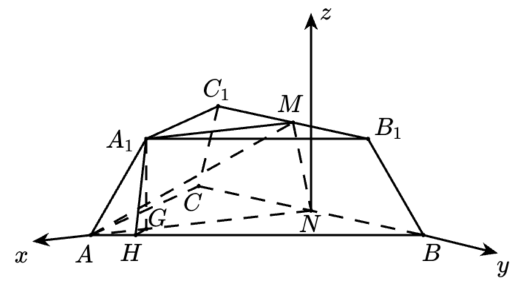
又 $MN\cap B_1C_1=M$，所以 $AM\perp$ 平面 BCC_1B_1.

因为 $BB_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $AM\perp BB_1$.………………………………………9 分

（借助线面垂直证明 AM 与 BB_1 垂直）

另：若平移 BB_1 使 B_1 与 M 重合，用勾股定理证明，则：正确求出三棱台侧面等腰梯形的底角或高得 3 分，正确使用勾股定理证明垂直得 3 分，通过平移说明 AM 与 BB_1 垂直得 3 分.





解法二：

如图，以 BC 的中点 N 为坐标原点建立空间直角坐标系，

过 A_1 作 AN 的垂线，垂足为 G，过 G 作 AB 的垂线，垂足为 H.

因为 $AM\perp B_1C_1$，$MN\perp B_1C_1$，$AM\cap MN=M$，所以 $B_1C_1\perp$ 平面 AA_1MN，

又 $BC\,/\!/\,B_1C_1$，所以 $BC\perp$ 平面 AA_1MN，

因为 $BC\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 AA_1MN，

因为平面 $ABC\cap$ 平面 $AA_1MN=AN$，$A_1G\perp AN$，所以 $A_1G\perp$ 平面 ABC，…………2 分

（正确作出三棱台的高）

于是 $A_1G\perp AH$，又 $GH\perp AH$，$GH\cap A_1G=G$，所以 $AH\perp$ 平面 A_1GH，故 $A_1H\perp AB$.

同解法一，得到 $AH=\frac{1}{2}$，所以 $AG=\frac{2\sqrt{3}}{3}AH=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$A_1G=\sqrt{AA_1^2-AG^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.……5 分

（正确求出三棱台的高）

所以 $A(\frac{3\sqrt{3}}{2},0,0)$，$B(0,\frac{3}{2},0)$，$M(\frac{\sqrt{3}}{6},0,\frac{\sqrt{6}}{3})$，$B_1(\frac{\sqrt{3}}{6},1,\frac{\sqrt{6}}{3})$.…………………………7 分

（正确求出相关点的坐标）

于是 $\overrightarrow{AM}=(-\frac{4\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{6}}{3})$，$\overrightarrow{BB_1}=(\frac{\sqrt{3}}{6},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{6}}{3})$，

故 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BB_1}=-\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=0$，即 $AM\perp BB_1$.…………………………9 分

（用向量数量积证明 $AM\perp BB_1$）

解法三：

同解法一，得到 $\angle A_1AC=\angle A_1AB=\frac{\pi}{3}$.…………………………2 分

（正确求出侧面等腰梯形的底角）

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA_1}=\frac{3}{2}$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AA_1}=\frac{3}{2}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{9}{2}$.

因为 M 是 B_1C_1 的中点，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}&=\overrightarrow{AC_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1}\\&=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\\&=\overrightarrow{AA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\\&=\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BB_1}&=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}\\&=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\\&=\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

…………………………6 分

（用空间向量的一组基底正确表示出 $\overrightarrow{AM}$ 和 $\overrightarrow{BB_1}$，各 2 分）

$$\begin{aligned}于是\ \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BB_1}&=(\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB})\\&=|\overrightarrow{AA_1}|^2-\frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=1-1+\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}-\frac{1}{9}\times\frac{9}{2}\\&=0\end{aligned}$$

所以 $AM\perp BB_1$.…………………………9 分

（用向量数量积证明 $AM\perp BB_1$）

（2）**解法一**：

因为 $A_1B_1\,/\!/\,AB$，所以直线 A_1B_1 与平面 BCC_1B_1 所成角等于 AB 与平面 BCC_1B_1 所成角.

由（1）知，$AM\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 $\angle ABM$ 即为直线 AB 与平面 BCC_1B_1 所成角.…12 分

（正确作出直线 A_1B_1 与平面 BCC_1B_1 所成角）

因为 $AM=\sqrt{6}$，$AB=3$，所以 $\sin\angle ABM=\frac{AM}{AB}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

故直线 A_1B_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.…………………………15 分

（正确求出直线 A_1B_1 与平面 BCC_1B_1 所成角）

解法二：

设平面 BCC_1B_1 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-3y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=\frac{\sqrt{3}}{6}x-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{6}}{3}z=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}y=0\\ x=-2\sqrt{2}z\end{cases}$，不妨取 $\boldsymbol{n}=(-2\sqrt{2},0,1)$.…12 分

（正确求出平面 BCC_1B_1 的一个法向量）

$\overrightarrow{AB}=(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$，

所以 $\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{A_1B_1}>=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{A_1B_1}|}=\frac{2\sqrt{6}}{3\times2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

故直线 A_1B_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.…………………………15 分

（正确求出直线 A_1B_1 与平面 BCC_1B_1 所成角）

解法三：

由（1）知，$AM\perp BB_1$，

由正三棱台的对称性可得 $AB_1=AC_1$，又 M 为 B_1C_1 的中点，所以 $AM\perp B_1C_1$，

因为 $BB_1\cap B_1C_1=B_1$，所以 $AM\perp$ 平面 BCC_1B_1，

故 $\overrightarrow{AM}$ 为平面 BCC_1B_1 的一个法向量.…………………………12 分

（正确指出平面 BCC_1B_1 的一个法向量）

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=(\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\times(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\times9+\frac{1}{3}\times\frac{9}{2})=4$，

$|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{(\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})^2}=\sqrt{1+\frac{1}{9}\times9+\frac{1}{9}\times9+\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}+\frac{2}{9}\times\frac{9}{2}}=\sqrt{6}$，

所以 $\cos<\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A_1B_1}>=\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{A_1B_1}|}=\frac{4}{\sqrt{6}\times2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

故直线 A_1B_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.…………………………15 分

（正确求出直线 A_1B_1 与平面 BCC_1B_1 所成角）

17.（本小题满分 15 分）

（1） 记“患该病”为 A，“使用该检测方法结果为阳性”为 B，

由全概率公式得 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=1\%\times90\%+(1-1\%)\times(1-91\%)=9.81\%$.

因为不同人之间是否患病、检测结果均互不影响，所以 $X\sim(10,9.81\%)$，

所以 $E(X)=10\times9.81\%=0.981$.

（2） 证明：由条件概率及古典概型的定义得

$$\frac{P(A)P(B|A)}{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{P(AB)}{P(\overline{A}B)}=\frac{\frac{P(AB)}{P(B)}}{\frac{P(\overline{A}B)}{PB}}=\frac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}=\frac{n(A|B)}{n(\overline{A}|B)}$$

（3） 由（2）得 $\frac{n(A|B)}{n(\overline{A}|B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{1\%\times90\%}{(1-1\%)\times(1-91\%)}=\frac{10}{99}$，

又 $n(A|B)+n(\overline{A}|B)=n(B)=110$，所以 $n(A|B)=110\times\dfrac{10}{10+99}\approx 10$，

即检测为阳性的 110 人中确患该疾病的人数约为 10 人.

18.（本小题满分 17 分）

（1） 设 $P(x,y)$，因为点 P 到 $F(2,0)$ 的距离与到直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 的距离之比为 2，

所以 $\dfrac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{|x-\frac{1}{2}|}=2$，……………………………………………………2 分

（正确写出点 P 到 $F(2,0)$ 的距离与到直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 的距离之比）

整理得 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，即 Γ 的方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.…………………………………………4 分

（正确求出 Γ 的方程）

（2） （i）设 $E(x_0,y_0)$，则 $x_0^2-\dfrac{y_0^2}{3}=1$，即 $3x_0^2-y_0^2=3$

设直线 PE：$y-y_0=k(x-x_0)$（$k\neq\pm\sqrt{3}$），即 $y=kx+y_0-kx_0$，

联立 $\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{3}=1 \\ y=kx+y_0-kx_0 \end{cases}$ 得 $(k^2-3)x^2+2k(y_0-kx_0)x+(y_0-kx_0)^2+3=0$，

因为 Γ 与直线 PE 恰有一个交点 E，且 $k\neq\pm\sqrt{3}$，

所以 $x_0=-\dfrac{2k(y_0-kx_0)}{2(k^2-3)}$，得 $k=\dfrac{3x_0}{y_0}$，……………………………………………7 分

（正确求出直线 PE 的斜率，用所设的未知量表示；不加证明地使用二级结论得 1 分）

所以 PE：$y=\dfrac{3x_0}{y_0}x+\dfrac{y_0^2-3x_0^2}{y_0}=\dfrac{3x_0}{y_0}x-\dfrac{3}{y_0}$，

令 $x=\dfrac{1}{2}$，得 $y=\dfrac{3x_0-6}{2y_0}$，即 $P(\dfrac{1}{2},\dfrac{3x_0-6}{2y_0})$.…………………………………………9 分

（正确求出点 P 或点 E 的坐标，用所设的未知量表示）

所以 $\overrightarrow{PF}=(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3x_0-6}{2y_0})$，$\overrightarrow{EF}=(2-x_0,-y_0)$，

所以 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{EF}=\dfrac{3}{2}(2-x_0)+y_0\cdot\dfrac{3(x_0-2)}{2y_0}=0$.……………………………………11 分

（正确证明结论）

（ii）**解法一**：

设直线 PQ：$y=\sqrt{3}x+m$，

令 $x=\dfrac{1}{2}$，得 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+m$，即 $P(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}+m)$；

联立 $\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{3}=1 \\ y=\sqrt{3}x+m \end{cases}$ 得 $2\sqrt{3}mx+m^2+3=0$，

解得 $x=-\dfrac{m^2+3}{2\sqrt{3}m}$，$y=\dfrac{m^2-3}{2m}$，即 $Q(-\dfrac{m^2+3}{2\sqrt{3}m},\dfrac{m^2-3}{2m})$，

$\overrightarrow{PF}=(\dfrac{3}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-m)$，因为 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{EF}=0$，所以直线 EF 的一个方向向量为 $(\sqrt{3}+2m,3)$，

所以 EF：$3x-(\sqrt{3}+2m)y-6=0$.

点 P 到 EF 的距离 $d_1=\dfrac{|\frac{3}{2}-(\sqrt{3}+2m)(\frac{\sqrt{3}}{2}+m)-6|}{\sqrt{9+(\sqrt{3}+2m)^2}}=\dfrac{|2m^2+2\sqrt{3}m+6|}{\sqrt{9+(\sqrt{3}+2m)^2}}$；

点 Q 到 EF 的距离 $d_2=\dfrac{|-\frac{3(m^2+3)}{2\sqrt{3}m}-\frac{(\sqrt{3}+2m)(m^2-3)}{2m}+3|}{\sqrt{9+(\sqrt{3}+2m)^2}}=\dfrac{|m^2+\sqrt{3}m+3|}{\sqrt{9+(\sqrt{3}+2m)^2}}$，……14 分

（用单一变量或一个点的坐标表示所有需要的量，不要求结果正确）

所以 $\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{|2m^2+2\sqrt{3}m+6|}{|m^2+\sqrt{3}m+3|}=2$，所以 $\dfrac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle QEF}}=\dfrac{\frac{1}{2}|EF|\cdot d_1}{\frac{1}{2}|EF|\cdot d_2}=2$.…………………17 分

（正确化简三角形面积的比值并求出正确结果，仅有正确结果得 1 分）

解法二：

如图，过 Q 作 l 和 PF 的垂线，垂足分别为 M，N.

由（1）知，$|QF|=2|QN|$.

又 PQ 的斜率为 $\sqrt{3}$，即 $\angle PQM=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $|PQ|=2|QN|=|QF|$，……………14 分

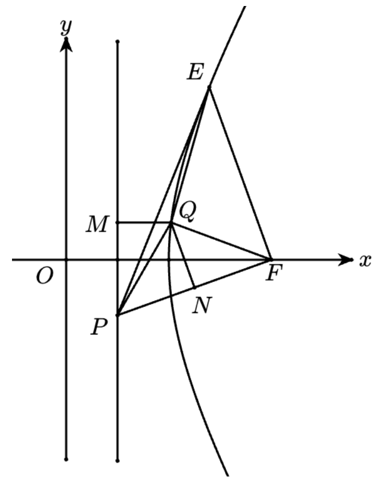
（正确证明 $|PQ|=|QF|$）

又 $QN\perp PF$，所以 $|PN|=|NF|$.

由（i）知 $PF\perp EF$，所以 $QN\parallel EF$，

所以 $\dfrac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle QEF}}=\dfrac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle NEF}}=2$.………………………………………………………17 分

（正确求出三角形面积的比值）



19.（本小题满分 17 分）

（1） $u(x)=1+x$，$v(x)=(1+x)\mathrm{e}^{-x}$，$g(x)=x\mathrm{e}^{1-x}$；…………………………………………4 分

（正确写出 $u(x)$、$v(x)$ 各得 1 分，正确写出 $g(x)$ 得 2 分）

（2） 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，

令 $y=0$，得 $x=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，即 $u(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$；

令 $x=0$，得 $y=f(x_0)-x_0f'(x_0)$，即 $v(x)=f(x)-xf'(x)$.

所以 $v(x)=-h(x)u(x)$，两边求导得 $v'(x)=-h'(x)u(x)-h(x)u'(x)$，

又由 $v(x)=g(u(x))$ 得 $v'(x)=g'(u(x))u'(x)$，…………6 分

（出现两边求导的操作）

所以 $-h'(x)u(x)-h(x)u'(x)=g'(u(x))u'(x)$，

当 $u(x)\neq 0$ 时，若 $u'(x)=0$，则 $h'(x)=-\dfrac{u'(x)\left[g'(u(x))+h(x)\right]}{u(x)}=0$.…………8 分

（正确证明结论）

（3）当 $b=-\dfrac{1}{2}$ 时，$h(x)=f'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+a)^2}<0$，$h'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-a)}{(\mathrm{e}^x+a)^3}$，

$u(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^x}{2}+a(1-\dfrac{1}{2}a)\mathrm{e}^{-x}+x-a+1$，$u'(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\left[(\mathrm{e}^x+a-2)(\mathrm{e}^x-a)\right]$.

情形一： $a=1$

此时 $u'(x)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x-1)^2\leqslant 0$，$u(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

所以若 $u(x_1)=u(x_2)$，则 $x_1=x_2$，$v(x_1)=v(x_2)$，故存在函数 g 使得 $v(x)=g(u(x))$，符合题意.…………10 分

（正确证明 $a=1$ 的情形符合题意）

情形二： $0<a<2$ 且 $a\neq 1$

此时 $u(\ln(2-a))=\ln(2-a)\neq 0$，$u'(\ln(2-a))=0$，

而 $h'(\ln(2-a))\neq 0$，不符合（2）中的结论.…………12 分

（利用第（2）问中的结论正确证明 $0<a<2$ 且 $a\neq 1$ 的情形不符合题意）

情形三： $a\geqslant 2$

此时 $\mathrm{e}^x+a-2>0$，若 $x<\ln a$，则 $u'(x)>0$，$u(x)$ 单调递增；

若 $x>\ln a$，则 $u'(x)<0$，$u(x)$ 单调递减.

所以存在实数 x_1，x_2，使得 $x_1<\ln a<x_2$，且 $u(x_1)=u(x_2)<u(\ln a)=\ln a-2a+2<0$，

所以 $h(x_1)=-\dfrac{v(x_1)}{u(x_1)}=-\dfrac{v(x_2)}{u(x_2)}=h(x_2)$，即 $-\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}}{(\mathrm{e}^{x_1}+a)^2}=-\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}}{(\mathrm{e}^{x_2}+a)^2}$，

整理得 $x_1+x_2=2\ln a$.

于是 $u(x_1)-u(x_2)=u(x_1)-u(2\ln a-x_1)=-\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{x_1}+a\mathrm{e}^{-x_1}+2x_1-2\ln a$.

设 $\varphi(x)=-\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^{-x}+2x-2\ln a$，$\varphi'(x)=2-(\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^x+a\mathrm{e}^{-x})\leqslant 2-2\sqrt{\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^x\cdot a\mathrm{e}^{-x}}=0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，所以 $\varphi(x_1)>\varphi(\ln a)=0$，即 $u(x_1)>u(x_2)$，与 $u(x_1)=u(x_2)$ 矛盾.…………15 分

（正确证明 $a\geqslant 2$ 的情形不合题意）

综上所述，$a=1$.

此时 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}-1=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}+\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}-1=0$，

所以 $f(x)$ 为奇函数.…………17 分

（正确证明 $f(x)$ 是奇函数）