从一道常规的极值点偏移问题说起

问题呈现

这是一道极值点偏移问题：

已知函数$f(x)=\frac{e^x}{x}$，若$f(x_1)=f(x_2)\ (x_1\neq x_1)$，求证：$x_1+x_2>2.$

极值点偏移是导数大题中的常客，在 2010 年天津卷、2013 年湖南卷、2016 年全国 I 卷和 2021 年新高考 I 卷都有出现。昨天在给同学解答这题的过程中，发现了很多有意思的地方，比如：

（1）不是所有人都理解“极值点偏移”的含义；

（2）极值点偏移问题的解法有相对固定的“套路”，但针对具体的题目，又颇具“变数”；

（3）在实际操作过程中，有很多小技巧可以简化过程。

下面我打算对以上问题展开讨论。

问题探究

一、什么是“极值点偏移”

一般地，若连续函数$f(x)$在区间(a,b)有定义，且在区间(a,b)内有唯一的极值点x_0，对任意的x_1，$x_2\in(a,b)$，当$f(x_1)=f(x_2)$时，有$\frac{x_1+x_2}{2}\neq x_0$，则称函数$f(x)$在区间$(a,b)$上的极值点偏移。

特别地，若$\frac{x_1+x_2}{2}>x_0$，则称$f(x)$极值点左偏；若$\frac{x_1+x_2}{2}<x_0$，则称$f(x)$极值点右偏。

为了更直观地理解，可以观察下面两张函数图象：

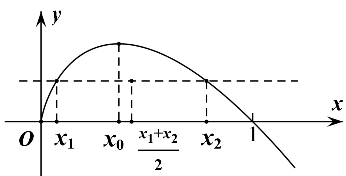


*Fig.*1 极值点左偏

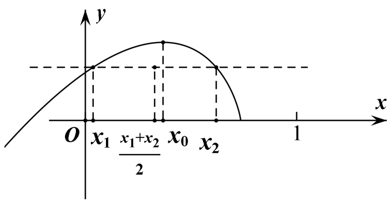


*Fig.*2 极值点右偏

观察图象，我们发现极值点偏移的两个几何意义：

（1）极值点在函数值相等的两自变量中点之左（或右）；

（2）函数$f(x)$在区间(a,b)上极值点x_0两侧函数值相等处的变化率大小总是一侧更大，即图象在极值点的一侧相较另一侧更“陡”。极值点总是朝变化率大的一侧偏移。

二、极值点偏移的性质

从以上几何意义中我们至少可以得到函数极值点偏移的两条性质：

（1）$\frac{x_1+x_2}{2}>x_0$（或$<x_0$）

（2）若$f(x_1)=f(x_2)$，有$f'(x_1)>f'(x_2)$（或$f'(x_1)<f'(x_2)$恒成立）

三、极值点偏移的证明

上述极值点偏移的性质（1），就是试题中常常要求证的命题。由于图象不能用于标准的证明过程（事实上，命题的过程常常是先画图的），所以需要另辟蹊径。下面以文首的题为例，介绍极值点偏移问题的两种常见做法。

原题：

已知函数$f(x)=\frac{e^x}{x}$，若$f(x_1)=f(x_2)\ (x_1\neq x_1)$，求证：$x_1+x_2>2$.

【方法一】构造差函数

对$f(x)$求导得

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

易知

$$f(x)\text{在}(-\infty,0)\text{，}(0,1)\text{上单调递减，在}(1,+\infty)\text{上单调递增}$$

作出$f(x)$的大致图象

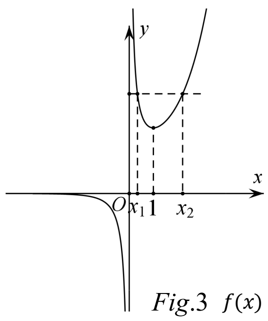


*Fig.*3 $f(x)=\frac{e^x}{x}$的图象

由图，不妨设 $0<x_1<1<x_2$. 要证$x_1+x_2>2$，只要证

$$x_2>2-x_1$$

因为x_2，$2-x_1\in(1,+\infty)$，而$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以只要证

$$f(x_2)>f(2-x_1)$$

又因为$f(x_1)=f(x_2)$，所以只要证

$$f(x_1)>f(2-x_1)$$

令$g(x)=f(x)-f(2-x)(0<x<1)$，则

$$g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}-\frac{e^{2-x}(x-1)}{(2-x)^2}=(x-1)\frac{[e^x(2-x)-ex][e^x(2-x)+ex]}{e^x x^2(2-x)^2}<0$$

注意：这里对$e^x(2-x)-ex$的符号还需求导说明，此处省略。

所以$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，所以

$$g(x)>g(1)=f(1)-f(1)=0$$

所以

$$f(x_1)>f(2-x_1)$$

于是原命题得证.

从中我们可以得到解决极值点偏移问题的一般思路：

1 通过求导得到函数的单调性，确定x_1，x_2的范围

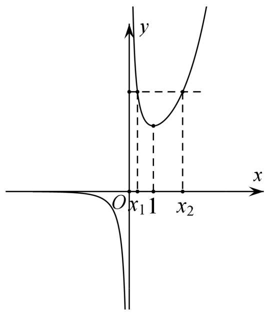
对$f(x)$求导得

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

易知

$$f(x)\text{在}(-\infty,0)\text{，}(0,1)\text{上单调递减，在}(1,+\infty)\text{上单调递增}$$

作出$f(x)$的大致图象



由图，不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2$.

注意：

（1）关注函数的定义域；

（2）主要研究x_1，x_2与函数的渐近线、极值点以及无穷的关系。

2 利用分析法，将待证双变量不等式转化为单变量不等式

2.1 利用不等式的性质将待证不等式中的双变量分离到不等号两边

要证$x_1 + x_2 > 2$，只要证

$$x_2 > 2 - x_1$$

2.2 利用函数的单调性及不等式两边的范围，将自变量的比较转化为函数值的比较

因为x_2，$2 - x_1 \in (1, +\infty)$，而$f(x)$在$(1, +\infty)$上单调递增，所以只要证

$$f(x_2) > f(2 - x_1)$$

注意：

函数的单调性与自变量的大小关系不要搞反。

2.3 利用条件$f(x_1) = f(x_2)$，将双变量问题转化为单变量问题

又因为$f(x_1) = f(x_2)$，所以只要证

$$f(x_1) > f(2 - x_1)$$

3 构造差函数，证明单变量不等式

3.1 构造差函数

令$g(x) = f(x) - f(2 - x)(0 < x < 1)$

注意：

（1）此处一定要写明定义域；

（2）不宜将$g(x)$的表达式“表达”出来，这是在自讨苦吃！

3.2 对差函数求导，整理，判断符号，得到差函数的单调性

$$g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} - \frac{e^{2-x}(x-1)}{(2-x)^2} = (x-1)\frac{[e^x(2-x) - ex][e^x(2-x) + ex]}{e^x x^2 (2-x)^2} < 0$$

所以$g(x)$在$(0,1)$上单调递减.

注意：

（1）不宜将$g(x)$的解析式写出来以后再求导，可以用复合函数求导公式，除非嫌考试时间太多；

（2）我们的目标仅仅是判断导函数的符号，不要迷失在字母的海洋中！

3.3 利用差函数的单调性证明单变量不等式，从而原命题得证

$$g(x) > g(1) = f(1) - f(1) = 0$$

所以

$$f(x_1) > f(2 - x_1)$$

于是原命题得证.

上述过程以及一些注意点，概括起来，再现如下：

1 通过求导得到函数的单调性，确定x_1，x_2的范围（铺垫）

注意：

（1）关注函数的定义域；

（2）主要研究x_1，x_2与函数的渐近线、极值点以及无穷的关系。

2 利用分析法，将待证双变量不等式转化为单变量不等式（易错）

2.1 利用不等式的性质将待证不等式中的双变量分离到不等号两边

2.2 利用函数的单调性及不等式两边的范围，将自变量的比较转化为函数值的比较

注意：

函数的单调性与自变量的大小关系不要搞反。

2.3 利用条件$f(x_1) = f(x_2)$，将双变量问题转化为单变量问题

3 构造差函数，证明单变量不等式（易错，难点）

3.1 构造差函数

注意：

（1）此处一定要写明定义域；

（2）不宜将差函数的表达式“表达”出来，这是在自讨苦吃！

3.2 对差函数求导，整理，判断符号，得到差函数的单调性

注意：

（1）不宜将差函数的解析式写出来以后再求导，可以用复合函数求导公式，除非嫌考试时间太多；

（2）我们的目标仅仅是判断导函数的符号，不要迷失在字母的海洋中！

3.3 利用差函数的单调性证明单变量不等式，从而原命题得证

上面的过程行云流水，但是在实际给同学解答的过程中，我原本的做法与之有细微的差异。然而正是这一细微的差异，导致解答过程出现了很大的不同。

起手的求导和确定x_1，x_2的范围都和上述过程相同，但是从分析法开始，出现了不同。

由图，不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2$. 要证$x_1 + x_2 > 2$，只要证

$$x_1 > 2 - x_2 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

因为x_1，$2 - x_2 \in (0,1)$，而$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，所以只要证

$$f(x_1) < f(2 - x_2) \quad \cdots\cdots \text{②}$$

又因为$f(x_1) = f(x_2)$，所以只要证

$$f(x_2) < f(2 - x_2)$$

令$g(x) = f(x) - f(2 - x)(x > 1)$，则

$$g'(x) = (x - 1)\frac{[e^x(2 - x) - ex][e^x(2 - x) + ex]}{e^x x^2 (2 - x)^2}$$

这里我选择将x_2移向不等式右边，却导致$g'(x)$的符号难以直接判断，而其中$e^x(2 - x) + ex$部分的阻碍最大（事实上其他部分为负）。而实际上，当$x > 2$时，$g(x) > 0$，并非我们想

要的结果，但是命题肯定是成立的，那么问题出在哪里呢？

回过头看过程，我发现，由①至②的转化是有问题的，导致错误的点就在，$2-x_2$的范围并不一定是$(0,1)$，也有可能是非正值，也就是$x_2 \geq 2$。这该怎么办呢？对待不同的情况，我们可以分类讨论。事实上，当$x_2 \geq 2$ 时，原命题$x_1+x_2>2$ 显然成立。所以我们只要在命题转化之前加一步分类讨论，其他过程就和我们的第一种做法一样了。

构造差函数思路并不难，混分很容易，只是差函数的求导和符号判断是最让人头疼的，权当锻炼计算能力吧！

【方法二】差值/比值消元（换元消元）

设$f(x_1)=f(x_2)=a$，则

$$\begin{cases}\frac{e^{x_1}}{x_1}=a\\ \frac{e^{x_2}}{x_2}=a\end{cases}$$

两式作比得$\frac{x_2}{x_1}=e^{x_2-x_1}$（设为$t>1$），则

$$e^{(t-1)x_1}=t$$

解得

$$\begin{cases}x_1=\frac{\ln t}{t-1}\\ x_2=\frac{t\ln t}{t-1}\end{cases}$$

要证$x_1+x_2>2$，即要证

$$\frac{(t+1)\ln t}{t-1}>2$$

亦即证

$$g(t)=\frac{2(t-1)}{t+1}-ln\,t<0$$

对$g(t)$求导得

$$g'(t)=\frac{-(t-1)^2}{t(t+1)^2}<0$$

所以$g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以

$$g(t)<g(1)=0$$

于是原命题得证.

从中我们提炼出换元消元法的一般过程：

1 将自变量代入方程得到方程组

设$f(x_1)=f(x_2)=a$，则

$$\begin{cases}\frac{e^{x_1}}{x_1}=a\\ \frac{e^{x_2}}{x_2}=a\end{cases}$$

2 将双变量用单变量（双变量的比值或差值）表示

2.1 对方程变形，消去参数

两式作比得$\frac{x_2}{x_1}=e^{x_2-x_1}$（设为$t>1$）

注意：任何换元都莫忘新元的取值范围！

注意：
（1）换元时要写取值范围；
（2）为降低因符号问题致错的几率，建议比值换元时以大比小，差值换元时以大减小。

2.2 将双变量的比值或差值换元为t，用t表示x_1，x_2

解得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\ln t}{t-1} \\ x_2 = \frac{t\ln t}{t-1} \end{cases}$$

3 将用t表示的双变量代入待证不等式，用导数方法求证

要证$x_1 + x_2 > 2$，即要证

$$\frac{(t+1)\ln t}{t-1} > 2$$

亦即证

$$g(t) = \frac{2(t-1)}{t+1} - ln\, t < 0$$

对$g(t)$求导得

$$g'(t) = \frac{-(t-1)^2}{t(t+1)^2} < 0$$

所以$g(t)$在$(1, +\infty)$上单调递减，所以

$$g(t) < g(1) = 0$$

于是原命题得证.

指对函数处理技巧：
对数单身狗，指数找基友

常用不等式：

$\ln x > \frac{2(x-1)}{(x+1)} (x > 1)$

$\ln x < \frac{2(x-1)}{(x+1)} (0 < x < 1)$

注意：
（1）此处有很多地方要运用不等式的性质，注意不等号是否要变向；
（2）需要用到指对函数相关的处理技巧，注意灵活运用；
（3）会用到很多的常见不等式，注意积累掌握。

归纳如下：

1 将自变量代入方程得到方程组

2 将双变量用单变量（双变量的比值或差值）表示

2.1 对方程变形，通常消去参数

注意：
（1）换元时要写取值范围；
（2）为降低因符号问题致错的几率，建议比值换元时以大比小，差值换元时以大减小。

2.2 将双变量的比值或差值换元为t，用t表示x_1，x_2

3 将用t表示的双变量代入待证不等式，用导数方法求证

注意：
（1）此处有很多地方要运用不等式的性质，注意不等号是否要变向；
（2）需要用到指对函数相关的处理技巧（如“对数单身狗，指数找基友”等），注意灵活运用（尽量避免使用洛必达法则；洛必达法则也可以用分类讨论代替）；
（3）会用到很多的常见不等式，注意积累掌握（虽然自己也还没掌握）。

当然，我们也可以用差值消元来完成：

设$f(x_1)=f(x_2)=a$，则

$$\begin{cases}\frac{e^{x_1}}{x_1}=a\\ \frac{e^{x_2}}{x_2}=a\end{cases}$$

两式作比得$\frac{x_2}{x_1}=e^{x_2-x_1}$（设$x_2-x_1=t>0$），则

$$\frac{x_1+t}{x_1}=e^t$$

解得

$$\begin{cases}x_1=\frac{t}{e^t-1}\\ x_2=\frac{te^t}{e^t-1}\end{cases}$$

要证$x_1+x_2>2$，即要证

$$\frac{(e^t+1)t}{e^t-1}>2$$

亦即证

$$g(t)=(t-2)e^t+(t+2)>0$$

对$g(t)$求导得

$$g'(t)=(t-1)e^t+1>(t-1)(t+1)+1=t^2>0$$

所以$g(t)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以

$$g(t)>g(0)=0$$

于是原命题得证.

常用不等式：

$$e^t>t+1\ (t\neq 0)$$

四、总结

对比不同的方法会发现，一道题的做法千千万，但是难易程度有别；即使采用同一种做法，中间过程的一点细微差别，也会影响后续步骤的难易。这需要我们仔细对比不同的做法，细心探究不同做法产生不同效果背后的原因，多从做过的题，尤其是错误中积累经验、吸取教训，从而做到少走弯路。

我们应当崇尚一题多解，既是对一类题型方法的积累，产生做一道题会一类题的效果，也是对思维的开拓，对多方面知识点的回顾。

做题的过程中要注重观察和积累。对于多次出现的知识点要注意总结归纳。

数学是讲求严谨的，应试考试中的解答题非常考验这一点。换元时新元的取值范围、函数的定义域，这些不仅是对知识点的考察，也是对做事严谨性的考察。数学教会我们，既要顾全大局，又要注重细节。

最后，互帮互助是一个重要的过程，是一个互利共赢的过程。我们需要在小组里、班级里、学校里甚至学校之间形成这种良好风气，而不是一味地看重竞争，闭门造车，甚至互相排挤，这样才能取得共同的进步。

2022 年 06 月 15 日