2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

一、选择题：本题有 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，则 $\bar{z}-z=$

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-\mathrm{i}$

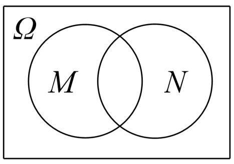
2. 在等边三角形 AOB 中，记 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\cos<\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}>$ 的值为

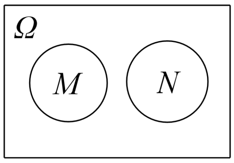
A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

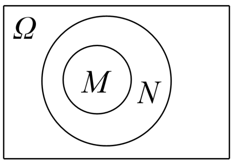
3. 集合 $A=\{(x,y)\,|\,3x^2-y^2=3\}$，$B=\{(x,y)\,|\,x=2-\dfrac{t}{2},y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,t\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B$ 中的元素个数有

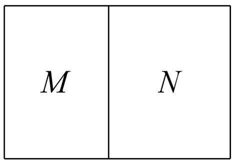
A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 4 个

4. 如图，M，N 表示事件，Ω 为样本空间，则下列表示事件关系的图形中，可能满足 $P(M\,|\,N)=P(M)$ 的是

A. 

B. 

C. 

D. 

5. 若正棱锥的各棱长均相等，则其顶点数的最大值为

A.5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

6. 函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x(ab\neq 0)$，则“$f(x)$ 取到最大值”是“$\tan x=\dfrac{a}{b}$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知计算机用 $x(x\in\mathbf{N}^*)$ 进制存储信息时，存储 n（n 非常大）位信息约占用 $x\log_x n$ 位空间. 为在保证存储信息量不变的前提下使占用的存储空间尽可能小，则 x 的值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 10

8. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_2=\sqrt{2}-1$，前n项和为S_n，设$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$满足$b_{n+1}=\dfrac{1}{2+b_n}$，

若$S_n<k$恒成立，则k的最小值为

A. $1+\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$

二、选择题：本题有4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 圆$M:x^2+y^2+2x-6y+a=0$过点$(1,3)$，且与直线$l:kx+y-3k-1=0$有交点，则

A. $a=6$　　B. 直线l恒过点$(3,1)$

C. k的最大值为$-\dfrac{4}{3}$　　D. 圆心M到l距离的最大值为$2\sqrt{5}$

10. 已知离散型随机变量X的所有可能取值为x_1，x_2，…，x_n，$P(X=x_i)=p_i$，$i=1$，2，…，n，X的均值$E(X)=\mu$，记$f(X,k)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(x_i-k)^2$，则

A. $E(aX+b)=a\mu+b$　　B. $f(aX+b,k)=a^2f(X,k)$

C. $f(X,k)\le f(X,\mu)$　　D. $f(X,k)\ge f(X,\mu)$

11. 在正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，已知$AB=3$，$A_1B_1=2$，$AA_1=1$，M，N分别为棱AB，B_1C_1的中点，A_1B_1与平面BCC_1B_1所成角为θ，则

A. 直线A_1M与BC_1异面　　B. MN // 平面ACC_1A_1

C. $AN\perp BB_1$　　D. $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

12. 已知函数$f_n(x)=(1+\dfrac{n}{x})^x(x\ge 1,n\in\mathbf{N}^*)$，$g_n(x)=\ln f_n(x)(x\ge 1)$，则

A. $\exists n\in\mathbf{N}^*$，$g_n(1)\le\dfrac{2n}{n+2}$　　B. $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$g_n(x)$为增函数

C. $\forall x\in[1,+\infty)$，$f_n(x)<\mathrm{e}^n$　　D. $\exists n\in\mathbf{N}^*$，$f_n(n+1)>f_{n+1}(n)$

三、填空题：本题有 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(x^2+x+y)^5$ 的展开式中含 x^5y^2 的项的系数为________（用数字作答）.

14. 正数 a，b 满足 $a+b=2(b>1)$，则 $\frac{1}{a}+\frac{b}{b-1}$ 的最小值为________.

15. 根据巴普斯定律，一个闭合平面区域绕一条定直线旋转所得几何体的体积，等于该封闭区域的质心所经路程乘该区域的面积．现有一个半径为 2 的半圆面，其质心为点 M，则 M 到半圆面直径的距离为________.

16. 抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，直线 $l:y=\sqrt{2p}$ 与 C 交于点 M，$|MF|=3$．A，B 是 C 上的两点，且 AB 的中点 N 在 l 上，则直线 AB 的斜率为________；$\frac{|AN|^2}{|MN|}$ 的值为________.

四、解答题：本大题有 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10 分）

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-4$，$a_4=\frac{1}{2}$，前 5 项依次成等差数列，第 4 项起依次成等比数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求所有满足 $a_m\cdot a_{m+1}=a_m+a_{m+1}$ 的正整数 m 的值.

18. （12 分）

$\triangle ABC$ 中，$\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\cos A}{\cos B}=2$，$A\neq B$.

（1）证明：$C=2B$；

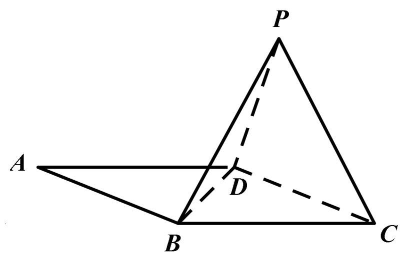
（2）若 $a=2$，求 AB 边上的高 h 的取值范围.

19. （12 分）

如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=2\sqrt{3}$，$BD\perp BC$，将△ ABD 沿 BD 翻折得到三棱锥 $P-BCD$，使得 $PB\perp CD$.

（1）求点 P 到底面 BCD 的距离；

（2）求二面角 $C-PB-D$ 的余弦值.



20. （12 分）

已知函数 $f(x)=x-a\sin x$，$g(x)=3\sqrt{x}-\sin x$.

（1）当 $0<a\leq 1$ 时，证明：$\forall x_1<x_2$，有 $a(\sin x_1-\sin x_2)>x_1-x_2$；

（2）若正数 x_1，x_2 满足 $x_1+x_2=2$，证明：$\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}>\frac{1}{2}$.

21. （12 分）

生态学家采用施奈贝尔法（*Schnabel method*）调查某生境内动物甲的数量，过程中的部分操作如下：第一次捕获动物甲 32 只并全部做上标记后放生；第二次捕获动物甲 54 只，发现其中 18 只已被标记，对未被标记者做上标记后全部放生；第三次捕获动物甲 40 只，发现其中 34 只已被标记，对未被标记者做上标记后全部放生……最终通过计算估计该生境中动物甲的数量.

（1）估计第三次捕获的被标记个体中属于第一次捕获中被标记个体的数目；

（2）生态学家对该生境内物种甲的种群数量 Y（单位：只）进行长期调查统计，2017~2021 年间第 t 年的数据如下表（以 2017 年为第 1 年）.

t	1	2	3	4	5
Y	97	134	152	162	169

①设变量 x，y 的样本相关系数为 r，由最小二乘法得到的线性回归函数的决定系数为 R^2，证明：$|r|=\sqrt{R^2}$；

②令 $w=\ln t$，Y 关于 t 的线性回归函数为 $F_1(t)$，Y 关于 w 的线性回归函数为 $F_2(w)$，已知 Y 与 t 的样本相关系数为 $r_1\approx 0.945$，试根据决定系数比较 $F_1(t)$ 与 $F_2(w)$ 的拟合效果.

附：变量x与y的样本相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$，

最小二乘估计 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\cdot\overline{x}$，决定系数 $R^2=1-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$；

$\sum\limits_{i=1}^{n}(w_i-\overline{w})(Y_i-\overline{Y})\approx 72.8$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(w_i-\overline{w})^2}\approx 1.3$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}\approx 57.6$.

22. （12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$，且经过点 $A(\dfrac{8}{5},-\dfrac{3}{5})$，$B$ 为其下顶点，$P(1,t)(t<0)$ 为椭圆外一点.

（1）若 $t=-1$，判断直线 PA 与 C 的公共点个数；

（2）过 C 内一点 Q 分别作 y 轴的垂线 l_1 和 PA 的平行线 l_2，记 l_1 与 C 交于点 M，N，l_2 与 C 交于点 S，T，若 $\dfrac{|QS|\cdot|QT|}{|QM|\cdot|QN|}=\dfrac{|PA|^2}{|PB|^2}$，求 t 的值.