极值点偏移再出发

距离我写《从一道常规的极值点偏移问题说起》一文已经过去半年，而极值点偏移问题自 2010 年出现于高考题中，历经十余载春秋，被高考题和各大模考题不断推陈出新，如今的考题将其和同构、参数、放缩等问题熔于一炉，已然不再是“常规”的模样。环境新，人也要新，我们不应停止研究的脚步，看看原来的极值点偏移有了怎样的新面貌。

一、回顾

首先回顾一下常规极值点偏移的基本内容。

极值点偏移是指：在区间 (a,b) 上有定义的连续函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有唯一的极值点 x_0，对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $f(x_1)=f(x_2)$ 时，$\dfrac{x_1+x_2}{2}\neq x_0$，根据 $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 与 x_0 的大小关系可分为极值点左偏和极值点右偏，亦即极值点偏移问题主要考查的性质。

解决该问题最常规的方法是利用函数的单调性将双变量不等式转化为单变量不等式，然后构造差函数证明不等式成立。一种更简便的解法是利用比值或差值消元，用新元表示双变量，进而证明不等式。此外，针对具体问题，还有复合函数求导、指对分离等技巧可以简化求解过程。

打牢根基才能建楼造阁。熟练掌握了常规问题的各种解法，我们就要继续探索了。

二、变式

【例 1・同构】已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）设 a，b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<e$.

这是 2021 年新高考 I 卷的最后一题，常规中带着些新奇。第（1）问比较基础，不必多言，解答如下：

$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=-\ln x$，

当 x 变化时， $f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	单调递增	单调递减

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减。

第（2）问的关键在于同构，但是并不难注意到：

由 $b\ln a-a\ln b=a-b$ 得 $\dfrac{1}{a}(1-\ln\dfrac{1}{a})=\dfrac{1}{b}(1-\ln\dfrac{1}{b})$，即 $f(\dfrac{1}{a})=f(\dfrac{1}{b})$。

为方便书写，我们作换元处理：

令 $x_1=\dfrac{1}{a}$，$x_2=\dfrac{1}{b}$，注意到 $f(e)=0$，由(1)不妨设 $0<x_1<1<x_2$，则要证 $2<x_1+x_2<e$

第（1）问已知 $f(x)$ 的极值点是 1，因此不等式的左半部分是常规的极值点偏移，用最常规的构造差函数可以快速解决（事实上对于本题，构造差函数是最快的做法）：

令 $g(x)=f(x)-f(2-x)(0<x<2)$，

则 $g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=-\ln x(2-x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

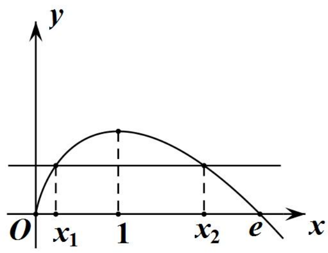
所以 $g'(x)>g'(1)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

所以 $g(x_1)<g(1)=0$，从而 $f(x_2)=f(x_1)<f(2-x_1)$，

又 $f(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递减，所以 $x_2>2-x_1$，即 $2<x_1+x_2$。

不等式左半边的几何意义已经在上篇文章中说明。

其实不等式的右半部分也有几何意义：如图 $Fig.1$，由函数图象可以形象地看出，当水平线从极大值向下移动时，x_1 从 1 向 0 移动，x_2 从 1 向 e 移动，但 x_2 的移速显然始终更快，因此 x_1+x_2 的值会从顶点处的 2 单调递增地向 x 轴处的 e 移动，因此可以得出 x_1+x_2 的范围恰为 $(2,e)$。



$Fig.1$ 函数 $f(x)=x(1-\ln x)$ 的图象

然而图象不能用作证明，为了严格地证明右半边不等式，可以照猫画虎来做：

要证 $x_1+x_2<e$，即 $x_2<e-x_1$，只要证 $f(x_2)>f(e-x_1)$，即 $f(x_1)>f(e-x_1)$，

令 $h(x)=f(x)-f(e-x)(0<x<1)$，$h'(x)=-\ln x(e-x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

因为 $x=0$ 时 $x(e-x)=0<1$，$x=1$ 时，$x(e-x)=e-1>1$，

所以 $\exists x_0\in(0,1)$，$h'(x_0)=0$，当 $0<x<x_0$ 时，$h(x)$ 单调递增，当 $x_0<x<1$ 时，$h(x)$ 单调递减，

因为 $x\to 0$ 时，$h(x)\to 0$，$h(1)>0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$h(x)>0$，

所以 $h(x_1)>0$，即 $f(x_1)>f(e-x_1)$，亦即 $x_1+x_2<e$，

综上，$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<e$。

容易发现，在证明左半边不等式时，临界情况是在 $x\to 1$ 处取得的；而证明右半边不等式时，临界情况是在 $x\to 0$ 处取得的，这也契合上面的几何意义。

这题很好地体现了全国卷高考题在继承中有所创新的特点，有其难点，但又比较温和。

解题过程中没有用什么奇巧，只是常规方法的组合与延伸。因为说：与其把新奇的解法常挂嘴边，不如把常规的解法牢记心里。

再看下面一道题：

【例 2 •“纸老虎”参数】已知函数 $f(x)=\ln 2x+ax+2$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $g(x)=f(x)-2xe^{ax+1}$ 有且只有 x_1,x_2 两个零点，证明：$x_1+x_2>-\dfrac{2}{a}$.

尽管多了一个参数 a，但第（1）问仍旧比较基础常规，最终答案如下：

当 $a\ge 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,-\dfrac{1}{a})$ 上单调递增，在 $(-\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上单调递减。

万事开头难，第（2）问极值点偏移的部分其实并不算很难，关键是在解题之初要想到同构。对于函数 $g(x)=\ln 2x+ax+2-2xe^{ax+1}$，显然用直接求导的做法，后续将步履维艰，因为这个函数中同时含有指数和对数，一个求导后自身永远保留——本题中甚至还会在系数中不断产生参数 a——而对数函数求导后分母次数会越来越高，只会将问题变得复杂。面对这种情况，我们通常可以考虑同构：

令 $g(x)=\ln 2x+ax+2-2xe^{ax+1}=0$，即 $\ln 2xe^{ax+1}-2xe^{ax+1}+1=0$，

令 $h(x)=\ln x-x+1$，$h'(x)=\dfrac{1-x}{x}$，故 $h(x)$ 有最大值 $h(1)=0$，所以 $2xe^{ax+1}=1$。

接下来就是对于函数 $y=2xe^{ax+1}$ 进行极值点偏移的分析了，本题我们采取比值消元的方式解决：

不妨设 $0<x_1<x_2$，$k=\dfrac{x_2}{x_1}>1$ 由 $\begin{cases}2x_1e^{ax_1+1}=1\\2x_2e^{ax_2+1}=1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1=-\dfrac{\ln k}{a(k-1)}\\x_2=-\dfrac{k\ln k}{a(k-1)}\end{cases}$，

所以 $x_1+x_2>-\dfrac{2}{a}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{(k+1)\ln k}{k-1}>-\dfrac{2}{a}$，

由（1）知，要使函数 $g(x)=f(x)-2xe^{ax+1}$ 有两个零点，$a<0$，

所以要证 $-\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{(k+1)\ln k}{k-1}>-\dfrac{2}{a}$，只要证 $\dfrac{(k+1)\ln k}{k-1}>2$，即证 $\ln k-\dfrac{2(k-1)}{k+1}>0$。

函数 $\varphi(k)=\ln k-\dfrac{2(k-1)}{k+1}$ 在上一篇文章中已经研究过，通过求导容易证明当 $k>1$ 时，$\varphi(k)>0$。

之所以称这题是“纸老虎”参数，是因为参数几乎没有对运算过程造成影响，只需要判断其符号，确定约去参数时是否需要改变不等号方向即可。但是看到这一点还不够，我们要

思考为什么这题中参数会被约掉。这就要说到极值点偏移的源头——极值点。对于函数 $y=2xe^{ax+1}$ 求导后可知，$-\dfrac{1}{a}$ 恰为其极值点，因此参数 a 在运算中被约去是顺理成章的。了解这一点，在后续研究其他参数问题时，可以与之做个对照。

下面最后看一道较难的题：（为简便起见略微改编了原题）

【例 3·三角放缩】已知函数 $f(x)=x+b(1+\ln x)-\dfrac{1}{2}\sin x$，存在 $0<x_1<x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，求证：

（1）$b<0$；

（2）$x_1x_2<4b^2$.

三角函数出现在导数题中确实是令人害怕的，常见的处理技巧有分类讨论、放缩等。这道题与我们前面讨论的极值点偏移类问题不同，最后要讨论的不是两变量的和，而是两变量的积，但是基本思路是差不多的。

我们不妨先给 $f(x)$ 求个导：

$$f'(x)=1+\frac{b}{x}-\frac{1}{2}\cos x$$

要使“存在 $0<x_1<x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$”成立，实际上是要说明 $f(x)$ 不单调，即导函数 $f'(x)=1+\dfrac{b}{x}-\dfrac{1}{2}\cos x$ 存在变号零点，通常的思路是研究 $f'(x)$ 的单调性，应用零点存在定理求解 b 的范围。但是三角函数的存在使得这条路充满坎坷。正难则反，这里我们灵活采取反证法：

假设 $b\geq 0$，则 $f'(x)=1+\dfrac{b}{x}-\dfrac{1}{2}\cos x>1-\dfrac{1}{2}\cos x>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，与“存在 $0<x_1<x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$”矛盾，

因此假设不成立，所以 $b<0$。

第（1）问中我们用反证法巧妙地避开了三角函数，但第（2）问似乎就不那么容易了。如果按照我们的常规做法，似乎是要证明 $f(x)$ 的极值点 $x_0<-2b$，然而三角函数使得我们难以比较这个“隐零点” x_0 与 $-2b$ 的范围。而且在此之前，我或许需要解释一下为何原命题被转化为了 $x_0<-2b$。

为了便于研究，我们不妨先将三角函数抛之脑后，研究函数 $g(x)=x+b(1+\ln x)$。对 $g(x)$ 求导后容易得到极值点 $x_0=-b$ 及其单调性，并据此作出其大致图像（如图 $Fig.2$）。由图象可知，x_1x_2 的一个临界值是 b^2，但是究竟是大于还是小于是不显然的。我先给出结论：$x_1x_2<b^2$。证明的思路并不难，用比值消元法即可。

证明：不妨设$0<x_1<-b<x_2$，$t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$，

由$x_1+b(1+\ln x_1)=x_2+b(1+\ln x_2)$，

得$x_1=-b\dfrac{\ln t}{t-1}$，$x_2=-b\dfrac{t\ln t}{t-1}$，

所以$x_1x_2=b^2(\dfrac{\sqrt{t}\ln t}{t-1})^2$，设$\varphi(t)=\dfrac{\sqrt{t}\ln t}{t-1}$，

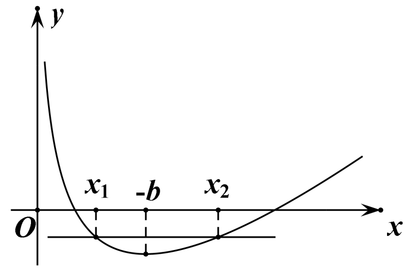


Fig.2 函数 $g(x)=x+b(1+\ln x)$ 的图象

$\varphi'(t)=\dfrac{\dfrac{2(t-1)}{t+1}-\ln t}{2\sqrt{t}(t+1)(t-1)^2}<0$，所以$\varphi(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$\varphi(t)<\lim\limits_{t\to1}\varphi(t)$。

关于这个问题做到这里已经足够了，因为接下来需要用到洛必达法则。所以这里直接给出结果$\varphi(t)<\lim\limits_{t\to1}\varphi(t)=1$，从而$x_1x_2=b^2(\dfrac{\sqrt{t}\ln t}{t-1})^2<b^2$。

这个结果已经与我们最初问题中的结论$x_1x_2<4b^2$很近了，显然这是把上面的计算过程中所有$-b$替换成$-2b$得到的。我们可以敏锐地注意到，如果将$g(x)=x+b(1+\ln x)$的解析式换成$h(x)=\dfrac{1}{2}x+b(1+\ln x)$，极值点就从$-b$变成了$-2b$，重复上面的过程就可以得到答案。对比$h(x)=\dfrac{1}{2}x+b(1+\ln x)$与$f(x)=x+b(1+\ln x)-\dfrac{1}{2}\sin x$，注意到二者之差为$\dfrac{1}{2}(x-\sin x)$，这是典型的三角放缩形式。但是这一放缩不能直接对$f(x)$使用，因为放缩后的函数不再是$f(x)$，条件$f(x_1)=f(x_2)$就无法应用了。因此我们先遵照常规做法：

因为$x_1+b(1+\ln x_1)-\dfrac{1}{2}\sin x_1=x_2+b(1+\ln x_2)-\dfrac{1}{2}\sin x_2$，

所以$-b(\ln x_2-\ln x_1)=x_2-x_1-\dfrac{1}{2}(\sin x_2-\sin x_1)$，

此处再利用函数$y=x-\sin x$的单调性进行放缩：

设函数$m(x)=x-\sin x$，$m'(x)=1-\cos x\ge0$，所以$m(x)$单调递增，

所以$x_2-\sin x_2>x_1-\sin x_1$，即$\sin x_2-\sin x_1<x_2-x_1$，

所以$-b(\ln x_2-\ln x_1)>\dfrac{1}{2}(x_2-x_1)$，即$0<\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<-2b$，

最后利用对数均值不等式，行云流水带走：（实际书写时需要证明）

下证 $\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$：

设 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$，则 $\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}\Leftrightarrow\sqrt{t}<\dfrac{t-1}{\ln t}\Leftrightarrow\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\ln t>0$

设函数 $p(t)=\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\ln t$，$p'(t)=\dfrac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t^{\frac{3}{2}}}\geq 0$，所以 $p(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $p(t)>p(1)=0$，所以 $\sqrt{x_1x_2}<\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$ 成立，

故 $x_1x_2<(\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1})^2<4b^2$。

回顾解这道题的过程，发现其关键在于能否想到放缩式 $\sin x_2-\sin x_1<x_2-x_1$。这里我先用一个更简单、我们更熟悉的函数 $g(x)=x+b(1+\ln x)$ 引入，再通过修改系数，构造出函数 $h(x)=\dfrac{1}{2}x+b(1+\ln x)$，最后与函数 $f(x)=x+b(1+\ln x)-\dfrac{1}{2}\sin x$ 对比，从而发现了题中蕴含的放缩思想，并在适当的时机加以运用，解决了问题。这实际上是一种由易到难、扬长避短、避实就虚的思想。

同样可以运用避实就虚思想的是，上面我们在讨论 $g(x)=x+b(1+\ln x)$ 时无法判断 x_1x_2 与 b^2 的关系，其实不然。我们虽然没有研究过双变量的几何平均数与极值点的关系，但研究过算术平均数与极值点的关系，并且可以很快从形的角度得出结论。因此对于这个含有对数式的函数，我们可以利用指对关系，将我们不会的转化为我们熟悉的：

令 $t=\ln x$，$q(t)=e^t+b(1+t)$，于是 $x_1x_2-4b^2=t_1+t_2-2\ln(-2b)$。

其中 $\ln(-2b)$ 是函数 $q(t)$ 的极值点，因此我们只需画出函数 $q(t)$ 的图象，判断极值点的偏移方向即可。显然，对于以指数函数为主导的函数，极值点是右偏的，因此此处应为小于号。

三、总结

通过三道例题，我们可以发现，变式题的难度体现在其延伸性、综合性。这要求我们以熟练掌握原型常规题为基础，善于迁移运用，善于融会贯通，更要善于运用由易到难、避实就虚的思维，将不熟悉的变成熟悉的，把客场变成我们的主场。

数形结合是重要的数学思想。我国数学家华罗庚有诗云："数缺形时少直观，形少数时难入微。数形结合百般好，隔离分家万事休。"他的观点在我们的研究过程中体现得淋漓尽致。我们要善于运用数形结合思想，从感性的形入题，从理性的数破题。

2023 年 01 月 16 日