

## 跨越——从极值点偏移到双变量不等式（一）

从特殊到一般，既是数学的思维过程，也是具体到抽象的哲学思维过程。数学就是如此奇妙，对于众多极值点偏移问题的研究，最终聚焦到简单的一个词——消元。极值点偏移问题隶属于双变量不等式这一大范畴内，当我们蜕去了“极值点偏移”这层外壳，抓住“消元”这一本质问题时，双变量不等式问题或许也就迎刃而解了。就仿佛在这岁宴之时，当我们洗褪过去一年里时光在我们身上覆盖的尘埃，我们便怀揣着内心深处的光明与热忱，去迎接新一年岁月的洗礼。

双变量不等式的类型有很多，实际解答过程中涉及的消元方法也五花八门。本文选取几个较典型的题进行探究。

**【例 1】**已知函数  $f(x) = a \ln x - x^2$  ( $a > 0$ )，设  $f(x)$  的导函数为  $f'(x)$ ，若  $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ ，

使得  $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ，求证： $x_1 + x_2 > 2x_0$ .

这是一道以拉格朗日中值定理为背景的考题，也是极值点偏移问题的“升级版”。首先我们从“形”的角度理解一下待证的不等式。

如图 Fig.1，在  $x = x_0$  处作曲线  $y = f(x)$  的切线，使得该

切线的斜率为  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ，即割线的斜率。由该函数极值

点偏移的性质发现， $\frac{x_1 + x_2}{2} > x_0$ 。

与之前的极值点偏移问题不同，这里的  $x_0$  不是函数  $f(x)$

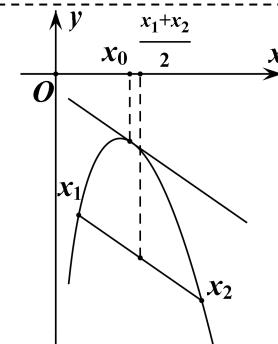


Fig.1 函数  $f(x) = a \ln x - x^2$  的图象

的性质，而是导函数  $f'(x)$ 。进一步说，之前的极值点偏移问题， $x_0$  是原函数的极值点，

代表了原函数的偏移性质，而这里的  $x_0$  是由  $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  来定义的，因此是导

函数的偏移性质。此外，在考虑消去未知数时，我们需要优先消去  $x_0$ ，因为  $x_1, x_2$  在条件等式和结论不等式中呈现出对称性。于是，我们类比极值点偏移问题中“借船出海”的方法，先将自变量的不等关系转化为函数值的不等关系，而且这里选取的函数应该是导函数  $f'(x)$ ，

因为它的单调性明确，且条件中有关于  $f'(x_0)$  的等式。

因为  $f''(x) = -(\frac{a}{x^2} + 2) < 0$ ，所以  $f'(x) = \frac{a - 2x^2}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减，

所以要证  $x_1 + x_2 > 2x_0$ ，即  $\frac{x_1 + x_2}{2} > x_0$ ，只要证  $f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) < f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

于是我们消去了  $x_0$ ，接下来将解析式展开整理，剩下的过程就比较自然了：

$$\text{即 } \frac{a - 2(\frac{x_1 + x_2}{2})^2}{\frac{x_1 + x_2}{2}} < \frac{a(\ln x_2 - \ln x_1) - (x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1},$$

$$\text{即 } \frac{2a}{x_1 + x_2} - (x_1 + x_2) < \frac{a \ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} - (x_2 + x_1), \text{ 亦即 } \ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{2(x_2 - x_1)}{x_2 + x_1} > 0$$

剩下的部分只要用比值换元就可以解决，又是我们常见的不等式了。因此解决本题的关键在于消去  $x_0$ ，我们是利用条件给的  $f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ，以及导函数  $f'(x)$  的单调性，

通过“借船出海”完成的。

下面这道题就要求我们对常见函数的性质有深刻的认识，或者说需要有敏锐的观察力：

**【例 2】** 已知函数  $f(x) = (x-1)\ln x - a(x+1)$  ( $a > 0$ ) 的两个零点为  $x_1, x_2$ ，求证：

$$\frac{1}{\ln x_1 - a} + \frac{1}{\ln x_2 - a} > 0.$$

拿到这道题，起手从  $f(x)$  思考是比较盲目的，因为它与待证结果看上去八竿子打不着。

正难则反，我们不妨先从结果入手。可以看到结果中含有  $\ln x - a$  这么一个奇怪的结构，为了更接近这个结构，我们可以对  $f(x)$  的解析式进行改写：

$$\text{令 } f(x) = (x-1)(\ln x - a) + a(x-1) - a(x+1) = (x-1)(\ln x + a) - 2a = 0,$$

$$\text{则 } \frac{1}{\ln x_1 + a} = \frac{x_1 - 1}{2a}, \quad \frac{1}{\ln x_2 + a} = \frac{x_2 - 1}{2a}.$$

于是待证不等式转化为了：

$$\frac{x_1 - 1}{2a} + \frac{x_2 - 1}{2a} > 0, \text{ 即 } x_1 + x_2 > 2.$$

这样看起来就像一个常规的极值点偏移问题了。但是  $f(x)$  的解析式很复杂，直接利用它进行证明并不方便。所以依据“对数单身狗”的原则，先对代数式进行转化，并分析零点的分布情况：

$$\text{显然 } x \neq 1, \text{ 所以 } f(x) = 0 \Rightarrow \ln x - \frac{a(x+1)}{x-1} = 0, \text{ 设 } g(x) = \ln x - \frac{a(x+1)}{x-1},$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - a \left[ \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} \right] = \frac{(x-1)^2 + 2a}{x(x-1)^2} > 0,$$

所以  $g(x)$  在  $(0,1)$ ,  $(1,+\infty)$  上单调递增，不妨设  $0 < x_1 < 1 < x_2$ 。

做好铺垫后，再用常规方法证明  $x_1 + x_2 > 2$ ：

设  $h(x) = g(x) - g(2-x)$  ( $1 < x < 2$ )，

$$\text{则 } h'(x) = \frac{(x-1)^2 + 2a}{x(x-1)^2} - \frac{(1-x)^2 + 2a}{(2-x)(1-x)^2} = \frac{2[(1-x)^2 + 2a]}{x(2-x)(x-1)^2} > 0,$$

所以  $h(x)$  在  $(1,2)$  上单调递增， $h(x) > h(1) = 0$ ，

所以  $g(2-x_2) < g(x_2) = g(x_1) = 0$ ，

又  $2-x_2 \in (0,1)$ ， $x_1 \in (0,1)$ ，所以  $2-x_2 < x_1$ ，即  $x_1 + x_2 > 2$ 。

解决这道题的过程中进行了两次关键的代数变形，第一次是为了向结论的代数结构靠拢，第二次是为了简化运算。因此在解决导数问题的过程中，根据实际情况因地制宜，灵活应变是很重要的。上文之所以说这题需要有敏锐的观察力，是因为如果看到了  $a = \frac{(x-1)\ln x}{x+1}$  中的  $\frac{x-1}{x+1}$  和  $\ln x$  两部分都有  $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$  的性质，则显然  $x_1 x_2 = 1$ ，再结合第一步中已经将待证结果转化为了  $x_1 + x_2 > 2$ ，配合基本不等式即可证毕。因此对特殊点的函数值、特殊性质的敏感性也是很重要的。

除了已经提到一些思路之外，还有一种常见的消元思路，是专门针对含参乘积型极值点偏移问题的。例如下面这道题：

**【例 3】** 已知函数  $f(x) = \ln x - ax - \frac{1}{x}$  ( $a > 0$ ) 的两个零点为  $x_1$ ,  $x_2$ ，求证  $x_1 x_2 > 2e^2$ .

上回我们研究过一个“ $x_1 x_2 < 4b^2$ ”的问题，其中除了用到三角放缩，还用到了对数均值不等式。考虑到文章篇幅，笔者在做了很多同类型的题后，粗略地总结出如下规律：首先写出题设的两个同构等式，并将两式相减，然后分为两种情况：一，若只有一个等式或两式相减后参数被消去，则考虑运用对数均值不等式或直接进行比值消元；二，若两式相减后参数未被消去，则再将两式相加，用相减所得等式表示参数，代入相加所得等式，再进一步消元。以上面这题为例：

$$\text{由 } \begin{cases} \ln x_1 - ax_1 - \frac{1}{x_1} = 0 \\ \ln x_2 - ax_2 - \frac{1}{x_2} = 0 \end{cases}, \text{ 两式相减得 } \ln x_1 - \ln x_2 + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} = a(x_1 - x_2) \cdots ①$$

发现参数无法消去，则再将两式相加：

$$\text{两式相加得 } \ln x_1 x_2 - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = (x_1 + x_2)a, \text{ 于是 } a = \frac{\ln x_1 x_2}{x_1 + x_2} - \frac{1}{x_1 x_2} \cdots ②,$$

然后将相加所得结果代入相减所得结果，消去参数：

将②代入①，有  $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{\ln x_1 x_2}{x_1 + x_2} - \frac{1}{x_1 x_2}$ ，

$$\text{即 } \ln x_1 x_2 - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2) \ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2}。$$

由常用不等式，显然等式右边大于 2（证明略）。于是：

$$\ln x_1 x_2 - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} > 2$$

此式距离结果中的乘积，还多出了一个  $x_1 + x_2$ ，在无法进行相等转换的情况下，只能考虑不等转换，最常见的是基本不等式，所以：

$$2 < \ln x_1 x_2 - \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} < \ln x_1 x_2 - \frac{4\sqrt{x_1 x_2}}{x_1 x_2} = 2 \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{4}{\sqrt{x_1 x_2}}，$$

$$\text{即 } \ln \sqrt{x_1 x_2} - \frac{2}{\sqrt{x_1 x_2}} > 1。$$

显然后一步转换是为了将自变量统一为  $\sqrt{x_1 x_2}$ ，此时构造一个辅助函数：

$$\varphi(x) = \ln x - \frac{2}{x}，\text{ 显然 } \varphi(x) \text{ 在定义域上单调递增，而 } \varphi(\sqrt{x_1 x_2}) > 1，$$

所以要证  $x_1 x_2 > 2e^2$ ，即  $\sqrt{x_1 x_2} > \sqrt{2}e$ ，只要证  $\varphi(\sqrt{x_1 x_2}) > \varphi(\sqrt{2}e)$ ，

$$\text{只要证 } \varphi(\sqrt{2}e) < 1，\text{ 即证 } \varphi(\sqrt{2}e) = \frac{1}{2} \ln 2 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{e} < 1，\text{ 即 } \frac{2\sqrt{2}}{\ln 2} > e，$$

显然该不等式成立，所以  $\varphi(\sqrt{x_1 x_2}) > 1 > \varphi(\sqrt{2}e)$ ，故  $\sqrt{x_1 x_2} > \sqrt{2}e$ ，即  $x_1 x_2 > 2e^2$ 。

这题在考查了消元之后，又考查了放缩，综合性很强。初步判断，命制这类题对构造函数的要求很高，基本上必须包含对数函数或指数函数，而且函数结构不能过于复杂，否则会对消元造成太大困难，这样的题不出则已，出了则可能需要另辟蹊径。

本文通过三道例题探究了三类消元或消参的思路，归结起来，就是题目给了条件就尽可能的利用它（如例 1），题目没有给出足够等量或不等关系的，就自己创造条件，如例 2 中我们通过观察得出  $x_1 x_2 = 1$  的性质，例 3 中我们通过代数式的加减、代入变换，创造新的、更简洁的等量关系，也可以调用基本不等式、二级结论对数均值不等式等题意之外的不等关系。此外，在例 2 中，我们学会了从结论出发，将条件向结论靠拢，从而转化结论，为我们指明方向，这是一种正难则反的思想。如果再往深处考虑：为什么例 3 中一加一减能够达到消元的目的呢？这实际上蕴含了齐次化的思想。

双变量不等式远不止这些内容，可谓任重而道远。

2023 年 01 月 21 日