“洛”和“必达”，可以兼得

如果看到下面这道题，你第一反应想到的思路是什么？

已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$，当 $x>1$ 时 $f(x)>0$ 恒成立，求 a 的范围.

答：参变分离。于是你开始在答题卷上奋笔疾书：

$f(x)>0 \Leftrightarrow a<\dfrac{(x+1)\ln x}{x-1}$，要使不等式恒成立，只要使 $a<[\dfrac{(x+1)\ln x}{x-1}]_{\min}$，

设 $g(x)=\dfrac{(x+1)\ln x}{x-1}$，$g'(x)=\dfrac{x-\frac{1}{x}-2\ln x}{(x-1)^2}$，

设 $h(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$，$h'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x}\geq 0$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$h(x)>h(1)=0$，

所以 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增。

当你畅通无阻地写到这里，以为这题不过如此的时候，问题来了：a 的临界值应为 $g(1)$，

但 $g(1)$ 的分母是 0！且为之奈何？于是洛必达法则来了：

若函数 $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$，且 $g'(x)\neq 0$，则：

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,^{*}$$

它告诉了你最终答案：

$$a\leq\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1+\frac{1}{x}}{1}=2$$

结果是被扣了 2 分。当然大多数人已然满足于在最后一题中只扣 2 分，现实的问题是，随着洛必达法则的普及，这类问题可能会被提到第（1）问，或者在试题中增加第（3）问。何况多拿两分，何乐而不为？

如此看来，似乎洛必达法则与拿分是相背而行的，其实不然。**事实证明，一般需要用洛必达法则求极限的问题，都可以用分类讨论化解**。但是分类讨论何从下手呢？当发现将端点值代入参变分离后的函数后，函数值为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 时，不妨**用洛必达法则先求出答案，再以此为分界展开讨论**。如此，“洛”与“达”，便可兼得。

---

*实际上，洛必达法则成立还有一个条件，但初等数学暂不考虑“去心邻域可导”的问题。

譬如上面这道 2016 年全国Ⅲ卷文科数学的大轴，参变分离后代入端点值发现为$\frac{0}{0}$，此时用洛必达法则得到端点值 2，然后展开分类讨论：（当然先对原不等式进行变形，做一些铺垫便于后续运算）

当$x>1$时，$f(x)>0\Leftrightarrow \ln x-\frac{a(x-1)}{x+1}>0$，令$g(x)=\ln x-\frac{a(x-1)}{x+1}$，

则$g'(x)=\frac{x^2+2(1-a)x+1}{x(x+1)^2}$，并注意到$g(1)=0$。

（Ⅰ）当$a\le 2$时，$x^2+2(1-a)x+1\ge (x-1)^2\ge 0$，所以$g'(x)\ge 0$，

$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以$g(x)>g(1)=0$，符合题意；

（Ⅱ）当$a>2$时，令$g'(x)=0$，得$x=(a-1)\pm\sqrt{(a-1)^2-1}$，

因为$x>1$，所以取$x_0=(a-1)+\sqrt{(a-1)^2-1}$，

所以$g(x)$在$(1,x_0)$上单调递减，此时$g(x)<g(1)=0$，不合题意。

综上，$a\le 2$。

$\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$
是常见的切线放缩

与之相似地，还有 2019 年全国 I 卷文科数学：

若$\forall x>1$，$e^{x-1}-x\ge a(x^2-x-x\ln x)$恒成立，求$a$的取值范围.

直接参变分离可以得到$a\le(\frac{e^{x-1}-x}{x^2-x-x\ln x})_{\min}$，令$x\to 1$，应用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-x}{x^2-x-x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{2x-2-\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}}{2-\frac{1}{x}}=1$$

这里运用了两次洛必达法则，保证每一次使用都符合“$\frac{0}{0}$”条件。$x\to 1$时，上式的极限是 1。由此，答案多半是$a\le 1$（实际上需要对参变分离后的函数求导证明）。于是我们可以展开分类：

因为$x>1$，所以$e^{x-1}-x\ge a(x^2-x-x\ln x)\Leftrightarrow \frac{e^{x-1}}{x}-1-a(x-1-\ln x)\ge 0$

设$f(x)=\frac{e^{x-1}}{x}-1-a(x-1-\ln x)$，$f'(x)=\frac{(x-1)(e^{x-1}-ax)}{x^2}$，

设$g(x)=e^{x-1}-ax$，$g'(x)=e^{x-1}-a$

（Ⅰ）当$a\le 1$时，$g'(x)\ge e^{x-1}-1>0$，所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以 $g(x)>g(1)=1-a\geq 0$，于是 $f'(x)>0$， $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)>f(1)=0$，符合题意；

（Ⅱ）当 $a>1$ 时，令 $g'(x)=0$，得 $x=\ln a+1$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,\ln a+1)$ 上单调递减，此时 $g(x)<g(1)=0$， $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\ln a+1)$ 上单调递减，此时 $f(x)<f(1)=0$，不合题意。

综上， $a\leq 1$。

如今以洛必达法则为背景的题目层出不穷，也在不断更新迭代，这些三脚猫功夫其实已经不足以完全应对如今的试题了。而且本文的目的不在于推广洛必达法则的用法，毕竟在“麻瓜”面前“魔法”被禁用了。

其实如果仔细研究解题过程，发现分类讨论的依据未必要依靠洛必达法则得到。解这两道题的过程中，我们都不是起手分类，而是先转换、求导，然后分类。这个分类不是凭空出现的，这之中蕴含的是我们用导数解决问题的基本思想：要证明不等式，可以构造差函数，然后研究特定区间内的单调性，这就需要求导，并研究导函数的符号；当导函数的符号未定时，分类就诞生了。

试看两题中产生分类的函数 $y=x^2+2(1-a)x+1$ 和 $y=e^{x-1}-a$，这些都是原函数的导数（或部分），是决定导数符号，也就是觉得原函数单调性的，产生分类的原因就在于，在既定的定义域内，导函数的零点存在性和位置不确定且随参数变化。

我想这“真刀真枪”，或许比“魔法”重要得多吧。

二零二三年一月十八日