2023年普通高等学校招生全国统一考试

参 考 答 案

一、选择题：本题有8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. D　2. C　3. B　4. A　5. B　6. A　7. B　8. C

二、选择题：本题有4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. AB　10. AD　11. AC　12. BC

三、填空题：本题有4小题，每小题5分，共20分。

13. 30　14. 5　15. $\dfrac{8}{3\pi}$　16. $\sqrt{2}$；12

四、解答题：本大题有6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10分）

（1）解：

设前5项的公差为d，所以$3d=a_4-a_1=\dfrac{9}{2}$，即$d=\dfrac{3}{2}$，

所以当$n\le 5$时，$a_n=a_1+(n-1)d=\dfrac{3n-11}{2}$，且$a_5=2$，

所以从第4项起的公比$q=\dfrac{a_5}{a_4}=4$，

所以$n>5$时，$a_n=a_5\cdot q^{n-5}=2\cdot 4^{n-5}$，

综上，$a_n=\begin{cases}\dfrac{3n-11}{2},1\le n\le 5\\ 2\cdot 4^{n-5},n\ge 6\end{cases}$.

（2）解：

$\{a_n\}$的前4项依次为-4，$-\dfrac{5}{2}$，-1，$\dfrac{1}{2}$，

显然此4项中只有a_3，a_4满足$a_3\cdot a_4=a_3+a_4$，即$m=3$；

当$m\ge 4$时，若$a_m\cdot a_{m+1}=a_m+a_{m+1}$，即$2\cdot 4^{m-5}\cdot 2\cdot 4^{m-4}=2\cdot 4^{m-5}+2\cdot 4^{m-4}$，

亦即$2\cdot 4^{m-4}=5$，显然不存在整数m为该方程的解；

综上，所有满足$a_m\cdot a_{m+1}=a_m+a_{m+1}$的正整数$m$为$3$.

18. （12分）

（1）证明：

因为$\dfrac{\sin A}{\sin B}+\dfrac{\cos A}{\cos B}=2$，所以$\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin B\cos B$，

即 $\underline{\sin 2B=\sin(A+B)=\sin C}$ 3′，所以 $2B=C$ 或 $2B+C=\pi$，

又 $A\neq B$，所以 $2B+C\neq\pi$，所以 $\underline{2B=C}$. 3′ (无过程扣1分)

（2）解：

因为 $0<B<\pi$，$0<C=2B<\pi$，$0<A=\pi-3B<\pi$，且 $A=\pi-3B\neq B$，

$\underline{所以\ 0<B<\frac{\pi}{3}\ 且\ B\neq\frac{\pi}{4}}$， 3′

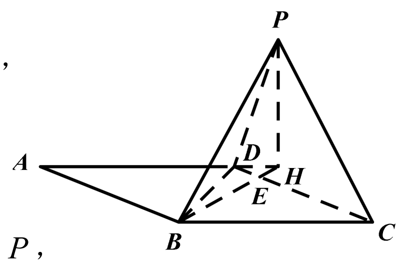
所以 $h=a\sin B=2\sin B\in\underline{(0,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\sqrt{3})}$. 3′ (不写 $h\neq\sqrt{2}$ 扣2分)

(有公式2分)

19. （12分）

（1）解：

如图，过点 P 作 $PH\perp AD$，垂足为 H，记 BH 与 CD 交于点 E，



因为 $\begin{cases}BD\perp AD\\BD\perp PD\\AD\cap PD=D\end{cases}$，所以 $BD\perp$ 平面 PAD，

所以 $BD\perp PH$，又 $PH\cap AD=H$，

所以 $\underline{PH\perp 平面\ ABCD}$ 2′，

所以 $PH\perp CD$，又 $\underline{PB\perp CD}$ 2′，$PB\cap PH=P$，

所以 $CD\perp$ 平面 PBH，所以 $CD\perp BH$，

从而 $\angle DBH=30^\circ$，$DH=BD\cdot\tan 30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

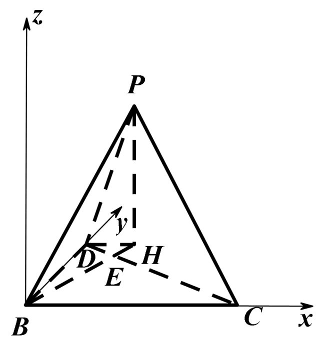
又在 $Rt\triangle PDH$ 中，由勾股定理计算得 $PH=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，

即点 P 到底面 BCD 的距离为 $\underline{\frac{4\sqrt{6}}{3}}$. 2′

（2）解：

解法一

以 B 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，则：



$B(0,0,0)$，$C(2\sqrt{3},0,0)$，$D(0,2,0)$，$P(\frac{2\sqrt{3}}{3},2,\frac{4\sqrt{6}}{3})$，

$\overrightarrow{BC}=(2\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{BD}(0,2,0)$，$\overrightarrow{BP}(\frac{2\sqrt{3}}{3},2,\frac{4\sqrt{6}}{3})$，

设平面 CBP 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2\sqrt{3}x_1=0\\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x_1+2y_1+\dfrac{4\sqrt{6}}{3}z_1=0\end{cases}$，

取$x_1=0$，$y_1=2\sqrt{2}$，$z_1=-\sqrt{3}$，所以$\overrightarrow{n_1}=(0,2\sqrt{2},-\sqrt{3})$； 2'

设平面DBP的一个法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

所以$\begin{cases}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2y_2=0\\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x_2+2y_2+\dfrac{4\sqrt{6}}{3}z_2=0\end{cases}$，

取$x_2=2\sqrt{2}$，$y_2=0$，$z_2=-1$，所以$\overrightarrow{n_2}=(2\sqrt{2},0,-1)$； 2'

$$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{\sqrt{3}}{3\times\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{33}}{33},$$

所以二面角$C-PB-D$的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{33}}{33}$. 2'

解法二

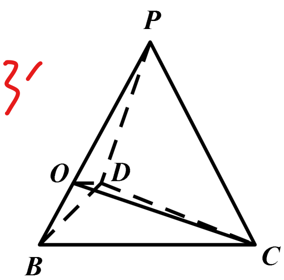
如图，过点D作$DO\perp PB$，垂足为O，

因为$PB\perp CD$，$CD\cap OD=D$，所以$PB\perp$平面COD，

所以$PB\perp OC$，故$\angle COD$为二面角$C-PB-D$的平面角，3'

在$\triangle PDB$中，$PD\perp BD$，$\angle BPD=30^\circ$，

所以$OD=\sqrt{3}$，$OB=1$，$OC=\sqrt{BC^2-OB^2}=\sqrt{11}$，



在$\triangle COD$中，$\cos\angle COD=\dfrac{OD^2+OC^2-CD^2}{2OC\cdot OD}=-\dfrac{\sqrt{33}}{33}$，

所以二面角$C-PB-D$的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{33}}{33}$. 3'

20. （12分）

（1）证明：

对于$f'(x)=1-a\cos x$，2' 因为$a>0$，$-1\le\cos x\le1$，

所以$f'(x)\ge1-a\ge0$（不恒为0），所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增， 2'

所以$\forall x_1<x_2$，$f(x_1)<f(x_2)$，即$x_1-a\sin x_1<x_2-a\sin x_2$，

所以$a(\sin x_1-\sin x_2)>x_1-x_2$. 2'

（2）解：

不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$，由（1）知，当 $a = 1$ 时，$\sin x_1 - \sin x_2 > x_1 - x_2$， 2′

所以 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{3(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})-(\sin x_2-\sin x_1)}{x_2-x_1} > \dfrac{3(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})}{x_2-x_1}-1$， 2′

又 $\dfrac{3(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})}{x_2-x_1}-1 = \dfrac{3}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}-1 > \dfrac{3}{2\sqrt{\dfrac{x_1+x_2}{2}}}-1 = \dfrac{1}{2}$，

故 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2} > \dfrac{1}{2}$. 2′

21. （12 分）

（1）解：

依题意，第一次和第二次分别标记了动物甲 32 只和 36 只，

其中第一次标记的占 $\dfrac{32}{32+36} = \dfrac{8}{17}$，

所以第三次捕获的被标记个体中属于第一次捕获中被标记个体的约有 $34 \times \dfrac{8}{17} = 16$ 只. 3′

（2）①证明：

记 $A = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$，$B = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$C = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$，

2′

$$D = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{b}x_i-\overline{y}+\hat{b}\cdot\overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}[y_i-\overline{y}-\hat{b}\cdot(x_i-\overline{x})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2 + \hat{b}^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 - 2\hat{b}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$$ 2′

$$= C^2 + \hat{b}^2B^2 - 2\hat{b}A$$

其中 $\hat{b} = \dfrac{A}{B^2}$，故 $D = C^2 - \dfrac{A^2}{B^2}$，所以 $R^2 = 1 - \dfrac{D^2}{C^2} = \dfrac{A^2}{B^2C^2}$，

又 $r = \dfrac{A}{BC}$，所以 $|r| = \sqrt{R^2}$； 2′

②解：

Y 与 w 的样本相关系数

$$r_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(w_i-\overline{w})(Y_i-\overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(w_i-\overline{w})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2}}\approx\frac{72.8}{1.3\times 57.6}=\frac{35}{36}\approx 0.972>r_1>0,$$

2′ 1′

由①知，$F_1(t)$ 的决定系数小于 $F_2(w)$ 的决定系数，所以 $F_2(w)$ 的拟合效果更好。

22. （12 分）

（1）解：

因为椭圆 C 的焦距为 $2\sqrt{3}$，所以 $a^2-b^2=3$，

又点 $A(\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$ 在 C 上，所以 $\frac{64}{25a^2}+\frac{9}{25b^2}=1$，

联立解得 $a^2=4$，$b^2=1$； 2′

当 $t=-1$ 时，直线 PA 的方程为 $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$，

与 C 的方程联立得 $\frac{25}{9}x^2-\frac{80}{9}x+\frac{64}{9}=0$，即 $\frac{1}{9}(5x-8)^2=0$，

方程有且仅有一个实根，所以直线 PA 与 C 有且仅有一个公共点. 2′

（2）解：

设 $Q(x_0,y_0)$，直线 PA 的斜率 $k=\dfrac{-\frac{3}{5}-t}{\frac{8}{5}-1}=-\dfrac{5t+3}{3}$；

将 $l_1: y=y_0$ 与 C 的方程联立得 $x^2+4{y_0}^2-4=0$，设 $M(x_1,y_0)$，$N(x_2,y_0)$，

则 $x_1+x_2=0$，$x_1x_2=4{y_0}^2-4$，

所以 $|QM|\cdot|QN|=(x_0-x_1)(x_2-x_0)=-x_1x_2-{x_0}^2+(x_1+x_2)x_0=4-{x_0}^2-4{y_0}^2$， 2′

将 $l_2: y-y_0=k(x-x_0)$ 与 C 的方程联立得

$(4k^2+1)x^2+8k(y_0-kx_0)x+4[(y_0-kx_0)^2-1]=0$，设 $S(x_3,y_3)$，$T(x_4,y_4)$，

则 $x_3+x_4=\dfrac{-8k(y_0-kx_0)}{4k^2+1}$，$x_3x_4=\dfrac{4[(y_0-kx_0)^2-1]}{4k^2+1}$，

所以$|QS|\cdot|QN|=\sqrt{k^2+1}(x_0-x_3)\cdot\sqrt{k^2+1}(x_4-x_0)$

$=(k^2+1)[-x_3x_4-x_0{}^2+(x_3+x_4)x_0]$，

$=\dfrac{(k^2+1)(4-x_0{}^2-4y_0{}^2)}{4k^2+1}$，　2′

所以$\dfrac{|QS|\cdot|QT|}{|QM|\cdot|QN|}=\dfrac{k^2+1}{4k^2+1}=\dfrac{(-\frac{5t+3}{3})^2+1}{4(-\frac{5t+3}{3})^2+1}=\dfrac{25t^2+30t+18}{100t^2+120t+45}$；

又$\dfrac{|PA|^2}{|PB|^2}=\dfrac{(\frac{8}{5}-1)^2+(-\frac{3}{5}-t)^2}{(1-0)^2+(t+1)^2}=\dfrac{25t^2+30t+18}{25(t^2+2t+2)}$，　2′

所以$\dfrac{25t^2+30t+18}{100t^2+120t+45}=\dfrac{25t^2+30t+18}{25(t^2+2t+2)}$，化简得$15t^2+14t-1=0$，

解得$t=-1$．　2′