2024年普通高等学校招生全国统一考试 模拟试题

参 考 答 案

一、选择题：本题有8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. C　2. B　3. A　4. D　5. A　6. A　7. B　8. C

二、选择题：本题有4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. AB　10. BC　11. ACD　12. ABD

三、填空题：本题有4小题，每小题5分，共20分。

13. $(-\infty,4]$　14. 2　15. 1　16. $\dfrac{\sqrt{3}}{9\pi}$

四、解答题：本大题有6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10分）

（1）解：

因为$\sqrt{a_1}=1$，$\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+2}}=2\sqrt{a_{n+1}}$，所以$\{\sqrt{a_n}\}$是首项为1的等差数列，

设其公差为d，因为$\dfrac{a_6-a_3}{\sqrt{a_8}+1}=\dfrac{a_6-a_3}{\sqrt{a_8}+\sqrt{a_1}}=\dfrac{a_6-a_3}{\sqrt{a_6}+\sqrt{a_3}}=\sqrt{a_6}-\sqrt{a_3}=3d=6$，

所以$d=2$，所以$\sqrt{a_n}=1+2(n-1)=2n-1$，

从而$a_n=(2n-1)^2$.

（2）解：

因为$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}=\dfrac{(1+2n-1)n}{2}=n^2$，

所以$(2n-1)^2\ge kn^2\,(n\in\mathbf{N}^*)$恒成立，

显然$k\ge0$，所以$2n-1\ge\sqrt{k}n$恒成立，

所以$\sqrt{k}\le\left(2-\dfrac{1}{n}\right)_{\min}=1$，

故k的最大值为1.

18. （12 分）

（1）解：

记“患该病”为 A，“检测为阳性”为 B，由全概率公式得

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=1\%\times 90\%+99\%\times(1-91\%)=9.81\%.$$

（2）证明：

由条件概率及古典概型的定义得

$$\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})}=\frac{P(AB)}{P(\overline{A}B)}=\frac{\dfrac{P(AB)}{P(B)}}{\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(B)}}=\frac{P(A\mid B)}{P(\overline{A}\mid B)}=\frac{n(A\mid B)}{n(\overline{A}\mid B)},$$

证毕.

（3）解：

由（2）知

$$\frac{n(A\mid B)}{n(\overline{A}\mid B)}=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})}=\frac{1\%\times 90\%}{99\%\times(1-91\%)}=\frac{10}{99},$$

所以 $n(A\mid B)=110\times\dfrac{10}{10+99}\approx 10$，

即检测为阳性的 110 人中确患该疾病的人数约为 10 人.

19. （12分）

（1）解：

由 $x\sin B=(1-x)\sin C$ 及正弦定理得 $xAC=(1-x)AB$，

所以 $x=\dfrac{1}{3}$，即 $BP=3$，$CP=6$，

因为 $\cos\angle APB+\cos\angle APC=0$，由余弦定理得

$$\frac{AP^2+BP^2-AB^2}{2AP\cdot BP}+\frac{AP^2+CP^2-AC^2}{2AP\cdot CP}=0,$$

即 $\dfrac{AP^2+9-16}{2AP\times 3}+\dfrac{AP^2+36-64}{2AP\times 6}=0$，

解得 $AP=\sqrt{14}$.

（2）解：

因为 $\overrightarrow{BP}=x\overrightarrow{BC}$，

所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+x(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=x\overrightarrow{AC}+(1-x)\overrightarrow{AB}$，

所以 $\left|\overrightarrow{AP}\right|^2=x^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+(1-x)^2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2x(1-x)\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\angle BAC$，

其中$\cos\angle BAC=\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}{2\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|}$,

代入得$\left|\overrightarrow{AP}\right|^2=x\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+(1-x)\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-x(1-x)\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$,

即$AP^2=64x+16(1-x)-81x(1-x)=81x^2-33x+16$,

所以$l(x)=AP=\sqrt{81x^2-33x+16}(x\in\mathbf{R})$,

对于二次函数$y=81x^2-33x+16$,当且仅当$x=-\dfrac{-33}{2\times 81}=\dfrac{11}{54}$时取最小值,

此时$\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{11}{43}$.

20. (12分)

(1)解:

设$A_1E\cap AB=G$,则G为直线AB与平面A_1DFE的交点,

又$AB\not\subset$平面A_1DFE,所以G为直线AB与平面A_1DFE唯一的交点,

于是$AB\cap DF=G$,

因为E是BB_1的中点,且$A_1B_1 // AB$,所以$AB=BG$,

又$AD=DC$,所以F为$\triangle ACG$的重心,

所以$BF=\dfrac{1}{3}BC=2$.

(2)解:

过C作DF的垂线,垂足为H,

因为$CC_1\perp$平面CDF,所以$\angle C_1HC$即二面角C_1-DF-C的平面角,

在$\triangle CDF$中,$CH=\dfrac{2S_{\triangle CDF}}{DF}=\dfrac{CD\cdot CF\cdot\sin\angle DCF}{\sqrt{CD^2+CF^2-2CD\cdot CF\cdot\cos\angle DCF}}=\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$,

所以$\tan\angle C_1HC=\dfrac{CC_1}{CH}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

21. (12 分)

(1)证明:

因为$f'(x)=\dfrac{1}{x}$,所以要证原不等式,即要证

$$\frac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\frac{b-a}{a}$$

亦即要证

$$1-\frac{1}{\frac{b}{a}}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b}{a}-1$$

设$t=\frac{b}{a}\in(1,+\infty)$，即要证

$$1-\frac{1}{t}<\ln t<t-1$$

设$\varphi(t)=\ln t-t+1$，则$\varphi'(t)=\frac{1-t}{t}$，

所以$\varphi(t)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以$\varphi(t)<\varphi(1)=0$，即$\ln t<t-1$，

又$\frac{1}{t}\in(0,1)$，所以$\varphi(\frac{1}{t})<\varphi(1)=0$，即$\ln t>1-\frac{1}{t}$，

综上，$1-\frac{1}{t}<\ln t<t-1$，从而原不等式得证.

（2）证明：

要证$f(b)-f(a)<[\lambda f'(a)+(1-\lambda)f'(b)](b-a)$，即证

$$\ln\frac{b}{a}-\lambda\cdot\frac{b}{a}+\frac{(1-\lambda)}{\frac{b}{a}}-(1-2\lambda)<0$$

设$t=\frac{b}{a}\in(1,+\infty)$，即要证

$$\ln t-\lambda t+\frac{(1-\lambda)}{t}-(1-2\lambda)<0$$

设$g(t)=\ln t-\lambda t+\frac{(1-\lambda)}{t}-(1-2\lambda)(t>1)$，则$g'(t)=\frac{-\lambda(t-1)[t-(\frac{1}{\lambda}-1)]}{t^2}$，

其中$-\lambda(t-1)<0$，又$\frac{1}{2}\le\lambda<1$，所以$t-(\frac{1}{\lambda}-1)\ge t-(2-1)=t-1>0$，

所以$g'(t)<0$，$g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以$g(t)<g(1)=0$，于是原不等式得证.

22. （12分）

（1）解：

根据双曲线的定义，Γ是焦距为4，长轴为2的双曲线的右支，

故Γ的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1(x>0)$，渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$.

（2）解：

显然直线l的斜率不为0，可设$l:x=my+t$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

联立$\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\\x=my+t\end{cases}$得$(3m^2-1)y^2+6mty+3t^2-3=0$，所以$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{-6mt}{3m^2-1}\\y_1y_2=\dfrac{3t^2-3}{3m^2-1}\end{cases}$，

又$\begin{cases}x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2t=\dfrac{-2t}{3m^2-1}>0\\x_1x_2=m^2y_1y_2+mt(y_1+y_2)+t^2=\dfrac{-3m^2-t^2}{3m^2-1}>0\end{cases}$，所以$0<1-3m^2<1$，

联立$\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{3}=0\\x=my+t\end{cases}$得$(3m^2-1)y^2+6mty+3t^2=0$，所以$\begin{cases}y_3+y_4=\dfrac{-6mt}{3m^2-1}\\y_3y_4=\dfrac{3t^2}{3m^2-1}\end{cases}$，

$$|AC|\cdot|AD|=\sqrt{m^2+1}|y_1-y_3|\cdot\sqrt{m^2+1}|y_1-y_4|=(m^2+1)\left|y_1{}^2-(y_3+y_4)y_1+y_3y_4\right|$$

$$=(m^2+1)\left|\frac{(3m^2-1)y_1{}^2+6mty_1+3t^2}{3m^2-1}\right|,$$

又$(3m^2-1)y_1{}^2+6mty_1+3t^2-3=0$，即$(3m^2-1)y_1{}^2+6mty_1+3t^2=3$，

所以$|AC|\cdot|AD|=\dfrac{3(m^2+1)}{1-3m^2}=\dfrac{4}{1-3m^2}-1$，$1-3m^2\in(0,1]$，

所以$\dfrac{4}{1-3m^2}-1$的取值范围为$[3,+\infty)$.