2024年普通高等学校招生全国统一考试 模拟试题

数 学

一、选择题：本题有 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 相关变量 x，y 的一组数据如下表所示. 根据表中数据用最小二乘法得到线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，则

x	1	2	3	4	5
y	1.6	1.4	1.0	0.6	0.4

A. $\hat{b}<0$，$\hat{a}<0$　　B. $\hat{b}<0$，$\hat{a}>0$

C. $\hat{b}>0$，$\hat{a}<0$　　D. $\hat{b}>0$，$\hat{a}>0$

2. 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被平面 A_1BC_1 截出一个棱锥，则棱锥的体积与剩下的几何体体积的比为

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{5}$　　D. $\dfrac{1}{6}$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，则“$|a_3|=|a_7|$”是“$a_5=0$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 假设在一排8个天线中，前3个失效了，后5个仍然有效，并且所有有效的天线之间不可区分，所有失效的天线之间也不可区分。为保证通信，须对天线重新排列（仍然排成一排），以确保任何两个失效的天线都不相邻，则不同的排列方式有

A. 36种　　B. 30种　　C. 24种　　D. 20种

5. 正数 x，y 满足 $2x+y=1$，则 $\dfrac{2y}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值为

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

6. 单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $2\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

7. 定义数集 S：① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\in S$；② $\forall x$，y，若 $x\in S$，$y\in S$，且 $xy\neq 1$，则 $\dfrac{x+y}{1-xy}\in S$；③除①②所确定的 S 中的数外，S 中没有其他数. 则集合 S 中的元素个数为

A. 4个　　B. 5个　　C. 6个　　D. 无穷多个

8. 已知抛物线$C: x^2 = 2py$的焦点为$F(0,1)$，P为C上一点，过P作抛物线准线l的垂线，垂足为M，抛物线在点P处的切线与l交于点N，则四边形$MNFP$面积的最小值为

A. $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$　　B. $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

二、选择题：本题有 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。

9. 已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，则下列命题中可能正确的有

A. $\exists x_0 \in \mathbf{R}$，$x_0$是$f(x)$的极值点，且$f'(x_0) \neq 0$

B. $\forall x \in \mathbf{R}$，$f'(x) = f(x+1)$

C. $\forall x \in \mathbf{R}$，$f(x) = f(-x)$，且$f'(x) > 1$

D. $\forall x \in \mathbf{R}$，$f(x) \neq 0$，且$f(x) + f'(x) = 0$

10. 已知一个命题的真值要么为真，要么为假. 设p，q表示两个命题，“$\to$”是一个真值算子，用其连接p，q得到一个新命题$p \to q$，这个命题的真值由p，q的真值决定，规定：命题$p \to q$为假，当且仅当p为真且q为假. 则对任意的两个命题p，q，下列命题中必然为真的有

A. $q \to (p \to q)$　　B. $(\neg p) \to (p \to q)$

C. $(p \to q) \to p$　　D. $(p \to q) \to \neg q$

11. 正方体$ABCD - A_1B_1C_1D_1$的边长为2，点E，F满足$\overrightarrow{BE} = \lambda\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CF} = \lambda\overrightarrow{CB_1}$（$0 \le \lambda \le 1$），则

A. $\exists \lambda \in [0,1]$，$EF$ // 平面ACD_1

B. 当$\lambda = \dfrac{1}{2}$时，点A到直线EF的距离为1

C. 当直线EF与BD所成角最大时，二面角$C - BD - F$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

D. 存在唯一的$\lambda \in [0,1]$，使得直线EF与BD所成角的余弦值为$\dfrac{3}{4}$

三、填空题：本题有 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 复平面内的点 A，B，C，D 分别对应复数 $1-2\mathrm{i}$，$3+4\mathrm{i}$，$-2+\mathrm{i}$，z，若以 A，B，C，D 为顶点的四边形是平行四边形，写出 $z\cdot\overline{z}$ 的一个可能的值：________.

13. 函数 $f(x)=2\cos(\omega\pi\sin x)-1$（$\omega>0$）在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上恰有 4 个零点，则 ω 的取值范围为________.

14. 已知点集 $H=\{(x,y)\,|\,2x^2-y^2<2\}$，$C=\{(x,y)\,|\,(x-a)^2+y^2<(a-1)^2\}$，对于平面内的点 $P(x_0,y_0)$，定义集合 $U(P,\delta)=\{(x,y)\,|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$. 若 $\forall P\in C$，$\exists\delta>0$，$H\bigcap U(P,\delta)=\varnothing$，则 a 的取值范围为________.

四、解答题：本大题有 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，过平面内一动点 P 作 AB 的垂线，交线段 AB（不含端点）于点 M，满足 $\frac{|PM|^2}{|AM|\cdot|BM|}=\frac{3}{4}$. 记动点 P 的轨迹为 $\varGamma$.

（1）求 $\varGamma$ 的方程，并证明：存在平面内两定点 C，D，使得 $\triangle PCD$ 的周长为定值；

（2）若不过点 A，B 的直线 l 与 $\varGamma$ 有且仅有一个交点 P_0，且与 x 轴交于点 Q，求 $\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OQ}$.

16.（15 分）

已知函数 $f(x)=\frac{x^2+x}{\mathrm{e}^x}$.

（1）证明：$f(x)+\mathrm{e}x\geq-\mathrm{e}$；

（2）求曲线 $y=f(x)$ 在动点 $(t,f(t))$ 处切线的纵截距 y_0 的最大值.

17.（15 分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $\cos(A-B)+\cos C=\sqrt{3}\sin B$.

（1）若 $a=5\sqrt{3}$，$b=8$，求 c；

（2）设三角形内切圆半径为 r，BC 边上的高为 h，若 $a<b$，求 $\frac{r}{h}$ 的取值范围.

18.（17 分）

某网购平台上有$k+1$个商家，第i个商家被买家打好评的概率为$\dfrac{i-1}{k}$（$i=1$，2，$\cdots$，$k+1$），每个商家均已有n位买家对其进行了评价. 假设所有的评价相互独立.

（1）设第i个商家获得的好评率为X，求X的期望（好评率＝好评数 / 评价人数）；

（2）在平台上等可能地随机选择一个商家，求该商家获得100%好评的概率；

（3）在平台上等可能地随机选择一个商家，发现其获得了100%好评，如果现在有第$n+1$位买家对其进行评价，求该商家仍能获得100%好评的概率；并据此推测日常生活中人们在好评率相同的商家中倾向于选择评价人数多的商家的原因.

（取$\dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k+1}\left(\dfrac{i-1}{k}\right)^n=\dfrac{1}{n+1}$.）

19.（17 分）

已知数列$\{L_n\}$满足$L_1=1$，$L_2=3$，$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$（$n\in\mathbf{N}^*$）. 记$\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

（1）设$c_n=L_{n+1}-\lambda L_n$，求所有使得数列$\{c_n\}$为等比数列的常数λ；

（2）求$\{L_n\}$的通项公式，并证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{L_{n+1}}{L_n}=\phi$；

（3）按如图所示的方式将$\{L_n\}$的前n项相应地右移n位（L_1右移1位，L_2右移2位，依此类推）并累加得到S_n（如$S_1=0.1$，$S_2=0.13$，$S_7=0.1348309$）. 注意到，当$n\to+\infty$时，S_n趋近于一个无限循环小数$0.\dot{1}34\cdots29\dot{2}$，试求其分数形式.

```
0 . 1
0 .  3
0 .   4
0 .    7
0 .    11
0 .     18
0 .      29
          ……
-------------
0 . 1348309 ……
```

参考公式：

若$|q|<1$，则$\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$；

对于数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$和$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$均存在，则

$\lim\limits_{n\to+\infty}(ka_n+m)=k\lim\limits_{n\to+\infty}a_n+m$；$\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$；

$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\cdot b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$；$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}b_n}$（$b_n\neq0$）.