2022 年高考圆锥曲线问题的射影几何视角

2022 年的四张高考卷的解析几何解答题中，全国甲、乙卷两道题均以射影几何为背景，若不了解相关知识，都具有相当的难度。这两道题将动中有静之美体现得淋漓尽致，探寻这种美感背后的实质，则是本文的出发点。

先一睹原题：

【2022 全国甲卷】设抛物线 $C: y^2 = 2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $D(p,0)$，过 F 的直线交 C 于 M，N 两点. 当直线 MD 垂直于 x 轴时，$|MF| = 3$.

（1）求 C 的方程；

（2）设直线 MD，ND 与 C 的另一个交点分别为 A，B，记直线 MN，AB 的倾斜角分别为 α，β，当 $\alpha-\beta$ 取得最大值时，求直线 AB 的方程.

【2022 全国乙卷】已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴，y 轴，且过点 $A(0,-2)$，$B(\frac{3}{2},-1)$ 两点.

（1）求 E 的方程；

（2）设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M，N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线于线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$，证明：直线 HN 过定点.

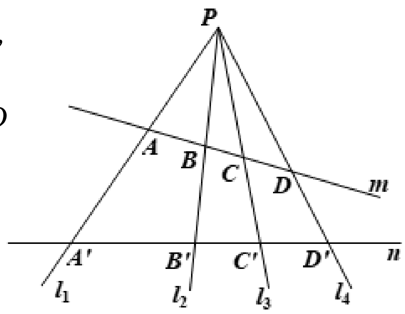
首先我们需要了解一些射影几何的相关知识。

定义 1 调和点列：设 A，B，C，D 是直线 l 上的四点，且 $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$，则称 A，B，C，D 为调和点列。

定义 2 调和线束：设 A，B，C，D 是直线 l 上的调和点列，P 为 l 外一点，则称射线 PA，PB，PC，PD 为调和线束。

定义 3 交比：共线点 A，B，C，D 的交比为 $\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}$，记作 (AB,CD)。

性质 1 交比的射影不变性：给定共定点的射线束 l_1，l_2，l_3，l_4，两条直线 m，n 分别与之交于 A，B，C，D 与 A'，B'，C'，D'，则 $(AB,CD) = (A'B',C'D')$。



性质 1 证明从简：将边长比转化成同高的三角形面积比，并用角的正弦值表示面积，于是有：

$$(AB,CD) = \frac{\sin\angle APC \cdot \sin\angle BPD}{\sin\angle BPC \cdot \sin\angle APD},$$

而对于给定的射线束，该值为定值，所以 $(AB,CD) = (A'B',C'D')$。

由性质 1 可知：

性质 2 任一直线截调和线束所得四点构成调和点列。

调和点列的定义中的比例关系可以被等价描述，于是有：

性质 3 A，B，C，D 为调和点列 $\Leftrightarrow$ AC 为 AB，AD 的调和平均数。

证明：A，B，C，D 为调和点列 $\Leftrightarrow \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{CD} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC-AB}=\dfrac{AD}{AD-AC}$

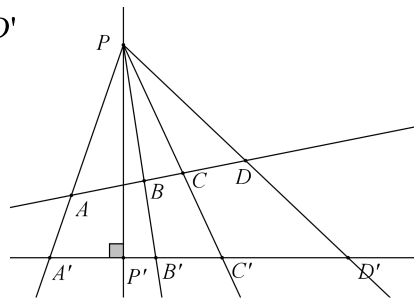
$\Leftrightarrow 2AB\cdot AD=(AB+AD)\cdot AC \Leftrightarrow \dfrac{2}{AC}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AD}$

性质 4 在调和线束 PA，PB，PC，PD 中，若 $PD//AB$，则 PB 平分 AC。

证明：据定义，若 $PD//AB$，则 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{\infty}{\infty}=1$，故 PB 平分 AC。

性质 5 调和线束 PA，PB，PC，PD 的斜率 k_{PA}，k_{PB}，k_{PC}，k_{PD} 满足：

$$2(k_{PA}\cdot k_{PC}+k_{PB}\cdot k_{PD})=(k_{PA}+k_{PC})\cdot(k_{PB}+k_{PD})$$



证明：如图，作一水平与调和线束交于 A'，B'，C'，D' 四点，由定义 1 与性质 2 得 $\dfrac{A'B'}{B'C'}=\dfrac{A'D'}{C'D'}$，

即 $\dfrac{\boldsymbol{P'A'-P'B'}}{\boldsymbol{P'B'-P'C'}}=\dfrac{\boldsymbol{P'A'-P'D'}}{\boldsymbol{P'C'-P'D'}}$，

从而 $\dfrac{\dfrac{PP'}{k_{PA}}-\dfrac{PP'}{k_{PB}}}{\dfrac{PP'}{k_{PB}}-\dfrac{PP'}{k_{PC}}}=\dfrac{\dfrac{PP'}{k_{PA}}-\dfrac{PP'}{k_{PD}}}{\dfrac{PP'}{k_{PC}}-\dfrac{PP'}{k_{PD}}}$，

化简得 $2(k_{PA}\cdot k_{PC}+k_{PB}\cdot k_{PD})=(k_{PA}+k_{PC})\cdot(k_{PB}+k_{PD})$

（加粗表示的线段为有向线段）

从性质 5 出发，我们可以得到以下三种特殊情形：

推论 1 若 $k_{PD}=0$，则 k_{PB} 为 k_{PA}，k_{PC} 的调和平均数。

推论 2 若 $k_{PD}=\infty$，则 k_{PB} 为 k_{PA}，k_{PC} 的算数平均数。

推论 3 若 $k_{PB}+k_{PD}=0$，则 $k_{PA}\cdot k_{PC}={k_{PB}}^2$。

（证明略）

性质 6 设平面四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 交于点 P，对边 AB 与 CD，AD 与 BC 分别交于点 M，N，MP 与 BC，AD 分别交于 S，T，则 B，S，C，N 与 A，T，D，N 均为调和点列。

（证明过程涉及梅涅劳斯定理和塞瓦定理，故略）

定义 5 极点极线的代数定义：对于圆锥曲线 $\Gamma: Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，称平面内一点 (x_0,y_0) 与直线 $Ax_0x+Cy_0y+\dfrac{D}{2}(x+x_0)+\dfrac{E}{2}(y+y_0)+F=0$ 为一对极点极线。

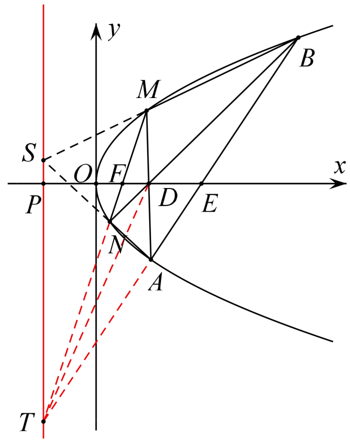
定义 6 极点极线的几何定义： 对于平面内一圆锥曲线 Γ 与一点 P，当 P 在 Γ 上时，则 P 与圆锥曲线在 P 处的切线为一对极点极线；当 P 不在 Γ 上时，过 P 作 Γ 的两割线 PAB，PCD，直线 AB 与 CD， AC 与 BD 分别交于点 M， N，则 P 与 MN 为一对极点极线。

做完这些铺垫，我们再来看 2022 全国甲卷的解析几何解答题。

【2022 全国甲卷】设抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F 点 $D(p,0)$，过 F 的直线交 C 于 M， N 两点. 当直线 MD 垂直于 x 轴时，$|MF|=3$.

（1）求 C 的方程；

（2）设直线 MD， ND 与 C 的另一个交点分别为 A，B，记直线 MN， AB 的倾斜角分别为 α， β，当 $\alpha-\beta$ 取得最大值时，求直线 AB 的方程.



第（1）问中得到 $C:y^2=4x$，据题意画出草图如上。将四边形 $ABMN$ 的各对边延长相交，根据定义 6 知直线 ST 与点 D 是一对极线极点，根据定义 5 得 $ST:x=-2$，又由性质 6、性质 2 和定义 1 知 $E(4,0)$。设 $T(-2,t)$，于是 $k_{MN}=\dfrac{t}{-2-1}=-\dfrac{t}{3}$，$k_{AB}=\dfrac{t}{-2-4}=-\dfrac{t}{6}$，所以 $\tan\alpha=2\tan\beta$。

后续过程用差角公式计算 $\tan(\alpha-\beta)$ 即可，具体过程略。

但是在实际解题时不能运用射影几何知识，我们可以用抛物线的参数方程代替。

解：过 C 上两点 $(\dfrac{y_1^2}{4},y_1)$，$(\dfrac{y_2^2}{4},y_2)$ 的直线方程为 $4x-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$，

斜率为 $\dfrac{4}{y_1+y_2}$。若该直线过 $(t,0)$，则有 $y_1y_2=-4t\ \cdots\ (*)$，

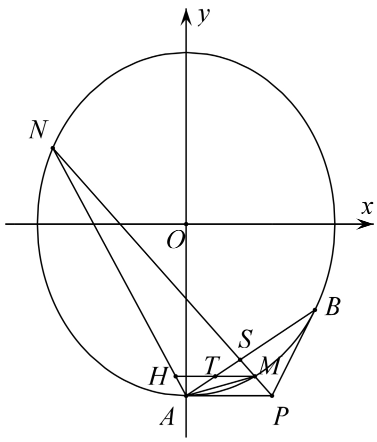
设 $M(\dfrac{y_1^2}{4},y_1)$，$N(\dfrac{y_2^2}{4},y_2)$，$A(\dfrac{y_3^2}{4},y_3)$，$B(\dfrac{y_4^2}{4},y_4)$，则由 $(*)$ 有：

$y_1y_2=-4$，$y_1y_3=y_2y_4=-8$，所以 $\dfrac{y_3}{y_2}=\dfrac{y_4}{y_1}=2$，从而 $\dfrac{y_3+y_4}{y_2+y_1}=\dfrac{y_3}{y_2}=2$，

于是 $\dfrac{k_{MN}}{k_{AB}}=\dfrac{y_3+y_4}{y_1+y_2}=2$。

后续过程略。

【2022全国乙卷】已知椭圆E的中心为坐标原点，对称轴为x轴，y轴，且过点$A(0,-2)$，$B(\frac{3}{2},-1)$两点.



（1）求E的方程；

（2）设过点$P(1,-2)$的直线交E于M，N两点，过M且平行于x轴的直线于线段AB交于点T，点H满足$\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$，证明：直线$HN$过定点.

在解决此题前，需要再补充一个性质：

性质7 设圆锥曲线$\varGamma$的一对极点极线为P，l，过P作$\varGamma$的割线PAB，且交l于点Q，则P，A，Q，B成调和点列。

（证明略）

对于本题（注意：此时尚未证明A，H，N共线，即尚未证明k_{AH}与k_{AN}相等），注意到定义5和切点弦方程一致，且PA，PB均为椭圆的切线，所以P与AB恰为一对极点极线。由性质7知P，M，S，N成调和点列，于是AP，AM，AS，AN成调和线束，且AP斜率为0，由性质5的推论1知k_{AB}为k_{AM}，k_{AN}的调和平均数。

又据题意，T为H，M的中点，且$PA // HM$，根据性质4的逆定理知H，T，M，P成调和点列，且满足性质5的推论1，故k_{AB}为k_{AM}，k_{AH}的调和平均数。

综上，$k_{AH}=k_{AN}$，故A，H，N共线。

同样地，实际操作过程中不能直接运用高等数学知识。对于这道题，我们既然提前洞悉到直线的斜率关系，则不妨用常规方法进行证明：

解：一方面，因为$HM // x$轴，T为HM的中点，

设$T(x_0,y_0)$，$M(x_0+\Delta x,y_0)$，$H(x_0-\Delta x,y_0)$，

所以$\frac{1}{k_{AH}}+\frac{1}{k_{AM}}=\frac{-x_0-\Delta x}{-2-y_0}+\frac{-x_0+\Delta x}{-2-y_0}=\frac{-2x_0}{-2-y_0}=\frac{2}{k_{AT}}$，

即$\frac{1}{k_{AH}}+\frac{1}{k_{AM}}=\frac{2}{k_{AB}}=3$；

另一方面，设 $MN:mx+n(y+2)=1$，则 $m\cdot 1+n(-2+2)=1$，$m=1$，

所以 $MN:x+n(y+2)=1$，而 $E:\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1\Leftrightarrow 4x^2+3(y+2)^2-12(y+2)=0$，

则 $4x^2+3(y+2)^2-12(y+2)[x+n(y+2)]=0$，

即 $4x^2+(3-12n)(y+2)^2-12x(y+2)=0$，亦即 $(3-12n)k^2-12k+4=0$，

所以 $\dfrac{1}{k_{AN}}+\dfrac{1}{k_{AM}}=\dfrac{k_{AN}+k_{AM}}{k_{AN}\cdot k_{AM}}=\dfrac{\dfrac{12}{3-12n}}{\dfrac{4}{3-12n}}=3$。

故 $\dfrac{1}{k_{AH}}+\dfrac{1}{k_{AM}}=\dfrac{1}{k_{AN}}+\dfrac{1}{k_{AM}}$，所以 $k_{AH}=k_{AN}$，即 A，H，N 共线。

结合这两题，我们探寻了 2022 年全国甲、乙卷两道解析几何解答题背后的射影几何实质，并采取“曲线救国”的方式，用初等数学解法代替了高等数学解法。

2023 年 03 月 13 日