立体几何无脑建系？时代变了！

常常听到有些同学说，立体几何不会就建系！

诚然，笛卡尔建立的解析几何确为我们研究数学提供了一件强有力的工具（当然，狭义上讲笛卡尔建立的是平面解析几何）。但是解析几何本就是联系几何与代数两大领域的工具，只具备代数领域的能力，显然还不具备完全驾驭解析几何的资格。2022 年，也就是刚刚考完了新高考 I 卷，恰恰给我们下一届考生敲响了警钟——时代已经变了，我们需要加强几何方面的功底！

本文主要包括以下内容：

（1）解答 2022 年新高考 I 卷第 19 题；

（2）谈谈我在本题中的发现。

一、问题解答

【原题呈现】

如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，ΔA_1BC 的面积为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求 A 到平面 A_1BC 的距离；

(2) 设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1=AB$，平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值.

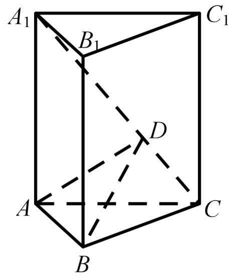


*Fig.*1 原题图

【分析】

第(1)问没有什么悬念，很容易想到利用ΔA_1BC 的面积和三棱锥A_1-ABC的体积得到 A 到平面 A_1BC 的距离（毕竟题目也就给了三个条件，有数据的只有两个），解答如下：

设 A 到平面 A_1BC 的距离为d，则

$$V_{A_1-ABC}=\frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}S_{\Delta A_1BC}\cdot d$$

解得

$$d=\sqrt{2}$$

第(2)问就难倒了很多“建系党”了，因为虽然有个很明显的原点B摆在那里，可就是没说它是直角！但是不要急，我们可以先分析题目给我们的条件：

① D 为 A_1C 的中点，这是用来确定所求二面角的；

②$AA_1=AB$，长度关系，用于计算；也可利用等腰三角形三线合一证明垂直关系；

③平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，最重要的垂直关系。

我们通常先从集合元素之间的关系入手，比如这里的面面垂直。很多时候一拿到面面垂直的条件，整个人就懵了——这个怎么用？事实上，这就是对立体几何中的平行、垂直关系不够熟悉，这一点在后文会提到。

面面垂直的性质定理：

两个平面垂直，如果一个平面内有一条直线垂直于这两个平面的交线，那么这条直线与另一个平面垂直。

这就是我们利用面面垂直这一条件的依据。运用的关键在于："找垂面——找交线——找交线的垂线。"

如图 $Fig.2$，题设已经给出了垂面——平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1；从图上可以找出交线——A_1B；那么交线的垂线在哪里呢？结合条件②$AA_1 = AB$及"等腰三角形三线合一"知，取A_1B的中点E，则$AE \perp A_1B$，从而$AE \perp$ 平面 A_1BC，进一步得到$AE \perp BC$。又直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$中有$AA_1 \perp BC$，所以$BC \perp$ 平面 ABB_1A_1，从而$BC \perp AB$。

这就得到了我们想要的直角，接下来也就可以建系了。建系计算的具体过程不说，相关边长可以由等腰直角三角形A_1AB及三棱柱的体积得到。标准过程如下：

取A_1B的中点E，因为$AA_1 = AB$，所以$AE \perp A_1B$，
又平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1（交线为A_1B），
所以$AE \perp$ 平面 A_1BC，$AE = \sqrt{2}$，从而$AE \perp BC$，
因为直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$中，$AA_1 \perp BC$，$AE \cap AA_1 = A$，
所以$BC \perp$ 平面 ABB_1A_1，从而$BC \perp AB$.

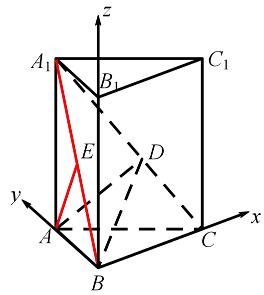
由$V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}AB{\cdot}BC{\cdot}AA_1$得$BC = 2$.

以B为原点建系如图，则$B(0,0,0)$，$A(0,2,0)$，$C(2,0,0)$，$D(1,1,1)$，$E(0,1,1)$，
平面BDC的一个法向量$\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{AE} = (0,-1,1)$，
设平面BDA的一个法向量$\overrightarrow{n_2} = (x,y,z)$，
$\overrightarrow{BA} = (0,2,0)$，$\overrightarrow{BD} = (1,1,1)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{BA}{\cdot}\overrightarrow{n_2} = 0\\ \overrightarrow{BD}{\cdot}\overrightarrow{n_2} = 0\end{cases}$，解得$\begin{cases}2y = 0\\ x + y + z = 0\end{cases}$，不妨设$\begin{cases}x = 1\\ y = 0\\ z = -1\end{cases}$，

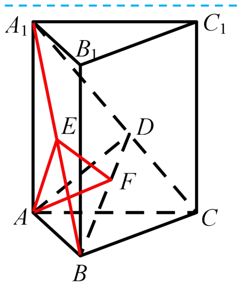
则$\cos\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\rangle = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = -\frac{1}{2}$，

所以二面角 $A - BD - C$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.



$Fig.2$ 解析法

当然，还可以用三垂线定理计算，过程如下：



$Fig.3$ 三垂线法

取A_1B的中点E，因为$AA_1 = AB$，所以$AE \perp A_1B$，
又平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1（交线为A_1B），
所以$AE \perp$ 平面 A_1BC，$AE = \sqrt{2}$，从而$AE \perp BC$，
因为直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$中，$AA_1 \perp BC$，$AE \cap AA_1 = A$，
所以$BC \perp$ 平面 ABB_1A_1，从而$BC \perp AB$.

由$V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}AB{\cdot}BC{\cdot}AA_1$得$BC = 2$.

（以上过程与解析法相同。）

作$EF \perp BD$，垂足为F，则$\angle AFE$为二面角 $A - BD - C$ 的平面角的补角.

在$Rt\Delta AEF$中，$\angle AEF = 90°$，$AE = \sqrt{2}$，$EF = \frac{BE \cdot DE}{BD} = \frac{\sqrt{2}\cdot 1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，

所以$\tan\angle AEF = \sqrt{3}$，所以二面角 $A - BD - C$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

此外，如果注意到直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$是正方体的一部分，也可以补形后再计算，这会更加简单：

（前面过程相同。不要迷惑于图形的五彩斑斓的外表。）

将直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成如图所示的正方体，

注意到$\overrightarrow{B_1A}$和$\overrightarrow{B_1C}$分别是平面BDC和平面BDA的法向量，

在正方体中，易知$\angle AB_1C=60°$，

所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

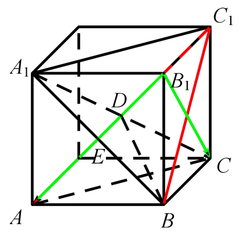


Fig.4 补形法

二、问题探究

这本身不是一道很难的题，不过其中有很多东西值得说一说。

（一）繁杂的垂直关系

线与线、线与面、面与面之间垂直关系的转化可以算得上是比较考验几何功底和逻辑能力的了。要熟练解决这道题，扎实掌握课本上基本的几何定理以及定义是前提。解答过程中的每一步都有其依据，有些定理要反复使用，综合性很强。每个步骤用到的几何定理如下：

取A_1B的中点E，

因为$AA_1=AB$，所以$AE\perp A_1B$，

（等腰三角形三线合一）

又平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1（交线为A_1B），所以$AE\perp$ 平面 A_1BC，

（面面垂直的性质定理）

从而$AE\perp BC$，

（线面垂直的定义）

因为直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1\perp BC$，

（直三棱柱的定义、线面垂直的定义）

$AE\cap AA_1=A$，所以$BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，

（线面垂直的判定定理）

从而$BC\perp AB$.

（线面垂直的定义）

我们有时候上新课根本不知道自己在学什么，自然知识也就难成体系。所幸我们的新教材的编排非常有条理，每个章节都有一个明确的标题和一段引言来告诉我们：这一章节在讲什么，我们为什么要研究这些问题。而且教材的编者还非常贴心地在每章的章末附有“小结”，其中包括本章知识的思维导图和“回顾与思考”，帮助我们总结知识。然而苦了编者一番心思，这些东西并没有多少人看。思维导图中最有用的莫过于“第八章 立体几何初步”的这张思维导图了（必修二教材第 167 页）：

Fig.5 思维导图 空间平行、垂直之间的转化

如果熟练掌握了这张图中所有箭头的依据，应对这道题是很容易的。当然，我认为这张图仍然有待我们自己去完善。比如判定线线平行的方法还有中位线定理、基本事实 4 等；判

定线线垂直的方法还有勾股定理、等腰三角形的性质等；空间垂直关系的转化还有三垂线定理……除此之外，还有各种几何体的定义——因为许多条件正是藏在这些“名字”里的，比如这里的直三棱柱，就蕴含了侧棱与底面垂直这一条件。反过来讲，有时题目没说是直三棱柱，图又画得不标准的时候，千万不能误当垂直。在感性思维的基础上，我们也要学会脱离标准的图形，不被图的外观迷惑，而是关注其内在的关系本质。

无论如何，至少还是要“以本为本”，没有基础知识的支撑，一切都成了空中楼阁。

（二）向量≠坐标

我们很多时候有个误区，认为向量法就是坐标法，这是片面的。实际上，教材选择性必修一在提出空间直角坐标系之前，先讲的是空间向量。这就像必修二讲平面向量的坐标表示之前，先讲了平面向量的基底表示。所以说，立体几何的向量法包括两种——基底法和坐标法。或者说，基底法是任意角坐标系，坐标法是直角坐标系，两者是一般和特殊的关系。而作为联系几何和代数的桥梁，向量这种工具本身在使用时就不应局限于哪一领域。

一个典型的例子，就是很多时候我们求法向量未必要用待定系数法，而可以先用几何法找到法向量，再用坐标表示，这会省去计算时间，题中计算平面BDC的法向量时正是如此：由于根据题目条件我们已经得到了$AE\perp$ 平面 A_1BC（即平面BDC），所以完全可以直接写出$\overrightarrow{AE}$作为平面BDC的法向量，从而减少了计算量。

另一个值得注意的点是，假如题目不想考直角坐标系呢？一个典型的模型是平行六面体模型。例如选择性必修一教材第 14 页的一道练习题，虽然不是完全不能建直角系，但是很复杂，此时基底法成为了首选：

如图，在平行六面体$ABCD-A'B'C'D'$中，$AB=AD=2$，$AA'=3$，$\angle BAD=\angle BAA'=\angle DAA'=60°$，求$BC'$与$CA'$所成角的余弦值.

解：以$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\}$为空间内的一组基底，则

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'}=3$，

$\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$

所以$\overrightarrow{A'C}\cdot\overrightarrow{BC'}=0$，即$\overrightarrow{A'C}\perp\overrightarrow{BC'}$，

所以BC'与CA'所成角的余弦值为 0.

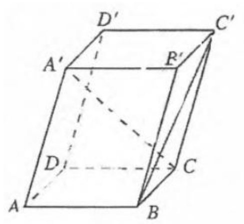


Fig.6 教材习题

因此，不能忽视向量作为几何的那一重身份以及基底法的力量。

（三）模型思想——课本例题与《九章算术》

对比了新旧教材之后，我觉得新教材是很值得重视的。无论是它的编排思路还是精选的例题、习题，都非常讲究。

但是，我发现新旧教材在立体几何这一模块都有同一个模型——鳖臑。鳖臑，出自《九章算术·商功》：

“斜解立方，得两壍堵。斜解壍堵，其一为阳马，
一为鳖臑。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。”

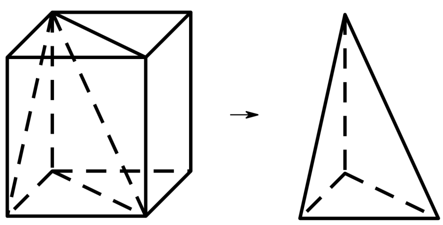


Fig.7 鳖臑

鳖臑指的是四个面均为直角三角形的三棱锥。正因其垂直关系多，所以经常被用来出题，也常常令我们头疼。

必修二教材在第 158 页例 8、第 158 页练习 3、第 160 页例 10、第 163 页习题 7、第 170 页第 9 题、第 171 页第 13 题等多处出现了这个模型，可见其重要性。倘若将这些题目的结论综合起来，应该基本概括了鳖臑的所有空间垂直关系及其证明。而恰好的是，这道高考题很可能就是第 160 页例 10 改编而来的：

如图，已知$PA\perp$平面ABC，平面$PAB\perp$平面PBC，求证：$BC\perp$平面PAB.

证明：过点A作$AE\perp PB$，垂足为E.

∵ 平面$PAB\perp$平面PBC， 平面$PAB\cap$平面$PBC=PB$,

∴ $AE\perp$平面PBC,

∵ $BC\subset$平面PBC,

∴ $AE\perp BC$.

∵ $PA\perp$平面ABC，$BC\subset$平面ABC,

∴ $PA\perp BC$.

又 $PA\cap AE=A$,

∴ $BC\perp$平面PAB.

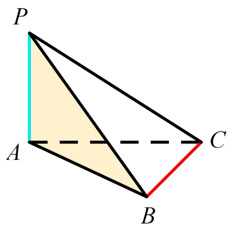


Fig.8 教材例题

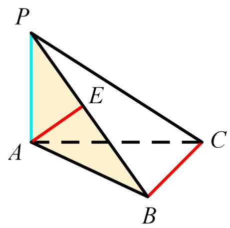


Fig.9 解答

高考题和这道题的关系显而易见了。高考题不过是把鳖臑又放回了“堑堵”（底面为直角三角形的三棱柱）中罢了。

这不仅提醒我们，新教材很重要，我们真的需要花一点时间去好好看书。另一方面，我们需要有一种模型思想，对于常见的、经典的东西，我们建立一个基本的模型，经常去研究它、弄透它，实战不过是基本模型的升级与组合，换汤不换药。这样的思想不仅适用于立体几何的学习，任何一个知识点都一样。我刚刚研究的极值点偏移问题也如此，“极值点偏移”就是一种模型。从我们做过的大量习题里，去提炼它们的本质，其中本质相同的，就可以归为一种模型。

就立体几何来说，立方体内各种空间关系和数量关系，《九章算术》中的堑堵、阳马和鳖臑，外接球、内切球的各种做法，都是典型的模型，其中有一些还是建立在更基本的模型之上的。所以，我们要培养模型思想，这样才能更深入地认识事物，更好地改造事物。