

Metody Optymalizacji

Projekt I, Zadanie 16

Witold Trzeciakowski, Patryk Zukowicz

8 stycznia 2026

Spis treści

1 Wstęp	2
2 Zadanie 1: Dwufazowa metoda sympleks	2
2.1 Opis problemu	2
2.2 Dwufazowa algebraiczna metoda sympleks	2
2.2.1 Faza I	2
2.2.2 Faza II	3
2.3 Dwufazowa tablicowa metoda sympleks	3
2.3.1 Faza I	3
2.3.2 Faza II	4
2.4 Wyniki	4
2.5 Weryfikacja ograniczeń	4
3 Zadanie 2: Problem firmy Greentree	4
3.1 Model matematyczny	4
3.1.1 Zmienne decyzyjne	4
3.1.2 Funkcja celu	5
3.1.3 Ograniczenia	5
3.2 Rozwiążanie za pomocą AMPL i solwera Gurobi	5
3.2.1 Wyniki AMPL	5
3.3 Rozwiążanie za pomocą linprog w MATLAB	5
3.3.1 Wyniki MATLAB	5
3.3.2 Analiza porównawcza	5
4 Wnioski ogólne	6
4.1 Zadanie 1	6
4.2 Zadanie 2	6
4.3 Podsumowanie	6

1 Wstęp

Niniejsze sprawozdanie przedstawia rozwiązania dwóch zadań programowania liniowego. Pierwsze zadanie rozwiązano dwiema wersjami metody sympleks: algebraiczną i tablicową. Drugie zadanie dotyczy praktycznego problemu planowania produkcji w firmie Greentree, rozwiązano je za pomocą pakietu AMPL oraz funkcji `linprog` w MATLAB.

2 Zadanie 1: Dwufazowa metoda sympleks

2.1 Opis problemu

Rozważamy następujące zadanie programowania liniowego:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} 9x_1 - 5x_2$$

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 - 3x_3 &= -10 \\ -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 &\leq -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 &\leq -16 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Po przekształceniu do postaci standardowej (dodanie zmiennych nadmiarowych i sztucznych) otrzymujemy:

$$\min 9x_1 - 5x_2 + 0x_3$$

przy:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + s_1 &= 10 && \text{(zmieniono znak)} \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - s_2 + a_1 &= 16 && \text{(zmieniono znak, dodano zmienną sztuczną)} \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_3 &= 16 && \text{(zmieniono znak, dodano zmienną nadmiarową)} \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, a_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

2.2 Dwufazowa algebraiczna metoda sympleks

2.2.1 Faza I

Minimalizacja sumy zmiennych sztucznych:

- **Krok 0:** Inicjalizacja. Wektor kosztów dla fazy I: $c_1 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]^T$. Początkowa baza: zmienne sztuczne i nadmiarowe.
- **Krok 1:** Wyznaczenie rozwiązania bazowego. Rozwiązanie początkowe: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, s_1 = 10, a_1 = 16, s_3 = 16$.
- **Krok 2:** Obliczenie zredukowanych kosztów. Dla zmiennych niebazowych (x_1, x_2, x_3, s_2) obliczamy zredukowane koszty.
- **Krok 3:** Wybór zmiennej wchodzącej. Wybieramy zmienną o najbardziej ujemnym zredukowanym koszcie.

- **Krok 4:** Wybór zmiennej wychodzącej na podstawie minimalnego nieujemnego ilorazu.
- **Krok 5:** Aktualizacja bazy poprzez wymianę zmiennych.
- Iteracje kontynuowane aż wszystkie zredukowane koszty będą nieujemne.

2.2.2 Faza II

Rozwiązywanie oryginalnego problemu z wyeliminowanymi zmiennymi sztucznymi:

- **Krok 0:** Rozpoczynamy od bazowego rozwiązania dopuszczalnego uzyskanego w fazie I.
- **Krok 1:** Ustalamy oryginalną funkcję celu: $\min 9x_1 - 5x_2$.
- **Krok 2:** Obliczamy zredukowane koszty dla zmiennych niebazowych.
- **Krok 3:** Wybieramy zmienną wchodząjącą (najbardziej ujemny zredukowany koszt dla minimalizacji).
- **Krok 4:** Wybieramy zmienną wychodzącą.
- **Krok 5:** Aktualizacja bazy.
- Iteracje kontynuowane aż do osiągnięcia optimum (wszystkie zredukowane koszty nieujemne).

2.3 Dwufazowa tablicowa metoda sympleks

2.3.1 Faza I

- **Krok 0:** Inicjalizacja tablicy sympleks z dodatkowym wierszem dla funkcji celu fazy I.
- **Krok 1:** Zerowanie wiersza celu dla zmiennych bazowych (operacje elementarne).
- **Krok 2:** Wybór kolumny głównej (najbardziej ujemny współczynnik w wierszu celu).
- **Krok 3:** Wybór wiersza głównego (minimalny nieujemny iloraz prawej strony przez elementy kolumny głównej).
- **Krok 4:** Operacja pivotowania - normalizacja wiersza głównego i eliminacja w pozostałych wierszach.
- Iteracje kontynuowane aż w wierszu celu nie będzie wartości ujemnych.

2.3.2 Faza II

- **Krok 0:** Usunięcie kolumn zmiennych sztucznych z tablicy.
- **Krok 1:** Wstawienie oryginalnej funkcji celu do tablicy.
- **Krok 2:** Zerowanie wiersza celu dla zmiennych bazowych.
- **Krok 3:** Wybór kolumny głównej (najbardziej ujemny współczynnik dla minimalizacji).
- **Krok 4:** Wybór wiersza głównego.
- **Krok 5:** Operacja pivotowania.
- Iteracje kontynuowane aż do osiągnięcia optimum.

2.4 Wyniki

Obie metody dały identyczne rozwiązanie optymalne:

Zmienna	Wartość optymalna
x_1	12.0000
x_2	26.0000
x_3	0.0000
s_1	86.0000
s_2	0.0000

Tabela 1: Rozwiązanie optymalne zadania 1

Wartość funkcji celu: $z = 9 \times 12 - 5 \times 26 = -22$.

2.5 Weryfikacja ograniczeń

$$\begin{aligned} -3(12) + 26 - 3(0) &= -10 \quad (\text{spełnione jako równość}) \\ -2(12) - 3(26) - 3(0) &= -102 \leq -16 \quad (\text{spełnione}) \\ 3(12) - 2(26) - 3(0) &= -16 \leq -16 \quad (\text{spełnione jako równość}) \end{aligned}$$

3 Zadanie 2: Problem firmy Greentree

3.1 Model matematyczny

3.1.1 Zmienne decyzyjne

- x_1 – areał pod kukurydzą [akry]
- x_2 – areał pod pszenicą [akry]
- x_3 – areał pod soją [akry]
- x_4 – areał pod owsem [akry]

3.1.2 Funkcja celu

Maksymalizacja przychodu:

$$\max Z = 0.36 \times 110x_1 + 0.90 \times 35x_2 + 0.82 \times 32x_3 + 0.98 \times 55x_4$$

$$\max Z = 39.6x_1 + 31.5x_2 + 26.24x_3 + 53.9x_4$$

3.1.3 Ograniczenia

Całkowity areał: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 500$

Limit soi: $x_3 \leq 120$

Kontrakt na kukurydzę: $110x_1 \geq 10000 \Rightarrow x_1 \geq \frac{10000}{110}$

Reguła pszenicy: $x_2 \geq x_3 + x_4$

Nieujemność: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

3.2 Rozwiążanie za pomocą AMPL i solwera Gurobi

3.2.1 Wyniki AMPL

Uprawa	Areał [akry]	Plon [buszle]	Przychód [\$]
Kukurydza	90.9091	10,000	3,600.00
Pszenica	204.5455	7,159	6,443.18
Soja	0.0000	0	0.00
Owies	204.5455	11,250	11,025.00
Suma	500.0000	28,409	21,068.18

Tabela 2: Rozwiążanie optymalne z AMPL

3.3 Rozwiążanie za pomocą linprog w MATLAB

3.3.1 Wyniki MATLAB

Rozwiążanie uzyskane w MATLAB jest identyczne z rozwiązaniem z AMPL.

3.3.2 Analiza porównawcza

- **Spójność wyników:** Oba narzędzia dały identyczne rozwiązanie optymalne.
- **Precyzja:** Wyniki są identyczne z dokładnością do 4 miejsc po przecinku.
- **Interpretacja ekonomiczna:**
 - Soja nie jest uprawiana pomimo dostępnego limitu 120 akrów, co wskazuje na jej nieopłacalność przy obecnych parametrach.
 - Owies generuje największy przychód (52.3% całkowitego) pomimo niższego plonu niż kukurydza, dzięki wyższej cenie.
 - Kontrakt na kukurydzę jest spełniony dokładnie na minimalnym wymaganym poziomie.

4 Wnioski ogólne

4.1 Zadanie 1

- Zarówno wersja algebraiczna, jak i tablicowa dały identyczne wyniki, co potwierdza poprawność implementacji.
- Rozwiążanie optymalne: $x_1 = 12$, $x_2 = 26$, $x_3 = 0$ z wartością funkcji celu -22 .
- Wszystkie ograniczenia są spełnione, przy czym dwa są aktywne (spełnione jako równości).

4.2 Zadanie 2

- Model matematyczny prawidłowo odzwierciedla rzeczywisty problem decyzyjny firmy Greentree.
- Zarówno AMPL z solverem Gurobi, jak i MATLAB z funkcją `linprog` dały identyczne rozwiązanie optymalne.
- Maksymalny przychód wynosi $\$21,068.18$ przy pełnym wykorzystaniu areału (500 akrów).
- Soja nie jest uprawiana pomimo dostępnego limitu, co sugeruje potrzebę renegocjacji cen lub poszukiwania innych upraw.
- Analiza wrażliwości pokazuje, że zwiększenie areału jest opłacalne (krańcowy przychód $\$42.70/\text{akr}$).

4.3 Podsumowanie

Obydwa zadania potwierdzają skuteczność metod programowania liniowego w rozwiązywaniu problemów optymalizacyjnych. Metoda sympleks okazała się niezawodna dla problemów o niewielkiej skali, podczas gotowe solwery (AMPL/Gurobi, MATLAB `linprog`) skutecznie radzą sobie z problemami praktycznymi o większej skali.