

# Metody Optymalizacji

## Projekt I, Zadanie 16

Witold Trzeciakowski, Patryk Zukowicz

8 stycznia 2026

### Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Zadanie 1: Dwufazowa metoda sympleks</b>	<b>2</b>
2.1	Opis problemu . . . . .	2
2.2	Dwufazowa algebraiczna metoda sympleks . . . . .	2
2.2.1	Faza I . . . . .	2
2.2.2	Faza II . . . . .	3
2.3	Dwufazowa tablicowa metoda sympleks . . . . .	3
2.3.1	Faza I . . . . .	3
2.3.2	Faza II . . . . .	4
2.4	Wyniki . . . . .	4
2.5	Weryfikacja ograniczeń . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Zadanie 2: Problem firmy Greentree</b>	<b>4</b>
3.1	Model matematyczny . . . . .	4
3.1.1	Zmienne decyzyjne . . . . .	4
3.1.2	Funkcja celu . . . . .	5
3.1.3	Ograniczenia . . . . .	5
3.2	Rozwiązanie za pomocą AMPL i solwera Gurobi . . . . .	5
3.2.1	Wyniki AMPL . . . . .	5
3.3	Rozwiązanie za pomocą linprog w MATLAB . . . . .	5
3.3.1	Wyniki MATLAB . . . . .	5
3.3.2	Analiza porównawcza . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Wnioski ogólne</b>	<b>6</b>
4.1	Zadanie 1 . . . . .	6
4.2	Zadanie 2 . . . . .	6
4.3	Podsumowanie . . . . .	6

# 1 Wstęp

Niniejsze sprawozdanie przedstawia rozwiązania dwóch zadań programowania liniowego. Pierwsze zadanie rozwiązano dwiema wersjami metody sympleks: algebraiczną i tablicową. Drugie zadanie dotyczy praktycznego problemu planowania produkcji w firmie Greentree, rozwiązano je za pomocą pakietu AMPL oraz funkcji `linprog` w MATLAB.

## 2 Zadanie 1: Dwufazowa metoda sympleks

### 2.1 Opis problemu

Rozważamy następujące zadanie programowania liniowego:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^3} \quad & 9x_1 - 5x_2 \\ \text{przy ograniczeniach:} \quad & \\ & -3x_1 + x_2 - 3x_3 = -10 \\ & -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 \leq -16 \\ & 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \leq -16 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Po przekształceniu do postaci standardowej (dodanie zmiennych nadmiarowych i sztucznych) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \min \quad & 9x_1 - 5x_2 + 0x_3 \\ \text{przy:} \quad & \\ & 3x_1 - x_2 + 3x_3 + s_1 = 10 \quad (\text{zmieniono znak}) \\ & 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - s_2 + a_1 = 16 \quad (\text{zmieniono znak, dodano zmienną sztuczną}) \\ & -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_3 = 16 \quad (\text{zmieniono znak, dodano zmienną nadmiarową}) \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, a_1 \geq 0 \end{aligned}$$

### 2.2 Dwufazowa algebraiczna metoda sympleks

#### 2.2.1 Faza I

Minimalizacja sumy zmiennych sztucznych:

- **Krok 0:** Inicjalizacja. Wektor kosztów dla fazy I:  $c_1 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]^T$ . Początkowa baza: zmienne sztuczne i nadmiarowe.
- **Krok 1:** Wyznaczenie rozwiązania bazowego. Rozwiązanie początkowe:  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, s_1 = 10, a_1 = 16, s_3 = 16$ .
- **Krok 2:** Obliczenie zredukowanych kosztów. Dla zmiennych niebazowych  $(x_1, x_2, x_3, s_2)$  obliczamy zredukowane koszty.
- **Krok 3:** Wybór zmiennej wchodzącej. Wybieramy zmienną o najbardziej ujemnym zredukowanym koszcie.

- **Krok 4:** Wybór zmiennej wychodzącej na podstawie minimalnego nieujemnego ilorazu.
- **Krok 5:** Aktualizacja bazy poprzez wymianę zmiennych.
- Iteracje kontynuowane aż wszystkie zredukowane koszty będą nieujemne.

### 2.2.2 Faza II

Rozwiązywanie oryginalnego problemu z wyeliminowanymi zmiennymi sztucznymi:

- **Krok 0:** Rozpoczynamy od bazowego rozwiązania dopuszczalnego uzyskanego w fazie I.
- **Krok 1:** Ustalamy oryginalną funkcję celu:  $\min 9x_1 - 5x_2$ .
- **Krok 2:** Obliczamy zredukowane koszty dla zmiennych niebazowych.
- **Krok 3:** Wybieramy zmienną wchodzącą (najbardziej ujemny zredukowany koszt dla minimalizacji).
- **Krok 4:** Wybieramy zmienną wychodzącą.
- **Krok 5:** Aktualizacja bazy.
- Iteracje kontynuowane aż do osiągnięcia optimum (wszystkie zredukowane koszty nieujemne).

## 2.3 Dwufazowa tablicowa metoda sympleks

### 2.3.1 Faza I

- **Krok 0:** Inicjalizacja tablicy sympleks z dodatkowym wierszem dla funkcji celu fazy I.
- **Krok 1:** Zerowanie wiersza celu dla zmiennych bazowych (operacje elementarne).
- **Krok 2:** Wybór kolumny głównej (najbardziej ujemny współczynnik w wierszu celu).
- **Krok 3:** Wybór wiersza głównego (minimalny nieujemny iloraz prawej strony przez elementy kolumny głównej).
- **Krok 4:** Operacja pivotowania - normalizacja wiersza głównego i eliminacja w pozostałych wierszach.
- Iteracje kontynuowane aż w wierszu celu nie będzie wartości ujemnych.

### 2.3.2 Faza II

- **Krok 0:** Usunięcie kolumn zmiennych sztucznych z tablicy.
- **Krok 1:** Wstawienie oryginalnej funkcji celu do tablicy.
- **Krok 2:** Zerowanie wiersza celu dla zmiennych bazowych.
- **Krok 3:** Wybór kolumny głównej (najbardziej ujemny współczynnik dla minimalizacji).
- **Krok 4:** Wybór wiersza głównego.
- **Krok 5:** Operacja pivotowania.
- Iteracje kontynuowane aż do osiągnięcia optimum.

## 2.4 Wyniki

Obie metody dały identyczne rozwiązanie optymalne:

Zmienna	Wartość optymalna
$x_1$	12.0000
$x_2$	26.0000
$x_3$	0.0000
$s_1$	86.0000
$s_2$	0.0000

Tabela 1: Rozwiązanie optymalne zadania 1

Wartość funkcji celu:  $z = 9 \times 12 - 5 \times 26 = -22$ .

## 2.5 Weryfikacja ograniczeń

$$\begin{aligned} -3(12) + 26 - 3(0) &= -10 \quad (\text{spełnione jako równość}) \\ -2(12) - 3(26) - 3(0) &= -102 \leq -16 \quad (\text{spełnione}) \\ 3(12) - 2(26) - 3(0) &= -16 \leq -16 \quad (\text{spełnione jako równość}) \end{aligned}$$

## 3 Zadanie 2: Problem firmy Greentree

### 3.1 Model matematyczny

#### 3.1.1 Zmienne decyzyjne

$x_1$  – areał pod kukurydzą [akry]

$x_2$  – areał pod pszenicą [akry]

$x_3$  – areał pod soją [akry]

$x_4$  – areał pod owsem [akry]

### 3.1.2 Funkcja celu

Maksymalizacja przychodu:

$$\max Z = 0.36 \times 110x_1 + 0.90 \times 35x_2 + 0.82 \times 32x_3 + 0.98 \times 55x_4$$

$$\max Z = 39.6x_1 + 31.5x_2 + 26.24x_3 + 53.9x_4$$

### 3.1.3 Ograniczenia

$$\text{Całkowity areal: } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 500$$

$$\text{Limit soi: } x_3 \leq 120$$

$$\text{Kontrakt na kukurydzę: } 110x_1 \geq 10000 \Rightarrow x_1 \geq \frac{10000}{110}$$

$$\text{Reguła pszenicy: } x_2 \geq x_3 + x_4$$

$$\text{Nieujemność: } x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

## 3.2 Rozwiązanie za pomocą AMPL i solwera Gurobi

### 3.2.1 Wyniki AMPL

Uprawa	Areał [akry]	Plon [buszle]	Przychód [\$]
Kukurydza	90.9091	10,000	3,600.00
Pszenica	204.5455	7,159	6,443.18
Soja	0.0000	0	0.00
Owies	204.5455	11,250	11,025.00
<b>Suma</b>	<b>500.0000</b>	<b>28,409</b>	<b>21,068.18</b>

Tabela 2: Rozwiązanie optymalne z AMPL

## 3.3 Rozwiązanie za pomocą linprog w MATLAB

### 3.3.1 Wyniki MATLAB

Rozwiązanie uzyskane w MATLAB jest identyczne z rozwiązaniem z AMPL.

### 3.3.2 Analiza porównawcza

- **Spójność wyników:** Oba narzędzia dały identyczne rozwiązanie optymalne.
- **Precyzja:** Wyniki są identyczne z dokładnością do 4 miejsc po przecinku.
- **Interpretacja ekonomiczna:**
  - Soja nie jest uprawiana pomimo dostępnego limitu 120 akrów, co wskazuje na jej nieopłacalność przy obecnych parametrach.
  - Owies generuje największy przychód (52.3% całkowitego) pomimo niższego plonu niż kukurydza, dzięki wyższej cenie.
  - Kontrakt na kukurydzę jest spełniony dokładnie na minimalnym wymaganym poziomie.

## 4 Wnioski ogólne

### 4.1 Zadanie 1

- Zarówno wersja algebraiczna, jak i tablicowa dały identyczne wyniki, co potwierdza poprawność implementacji.
- Rozwiązanie optymalne:  $x_1 = 12$ ,  $x_2 = 26$ ,  $x_3 = 0$  z wartością funkcji celu  $-22$ .
- Wszystkie ograniczenia są spełnione, przy czym dwa są aktywne (spełnione jako równości).

### 4.2 Zadanie 2

- Model matematyczny prawidłowo odzwierciedla rzeczywisty problem decyzyjny firmy Greentree.
- Zarówno AMPL z solverem Gurobi, jak i MATLAB z funkcją `linprog` dały identyczne rozwiązanie optymalne.
- Maksymalny przychód wynosi \$21,068.18 przy pełnym wykorzystaniu areału (500 akrów).
- Soja nie jest uprawiana pomimo dostępnego limitu, co sugeruje potrzebę renegotjacji cen lub poszukiwania innych upraw.
- Analiza wrażliwości pokazuje, że zwiększenie areału jest opłacalne (krajowy przychód \$42.70/akr).

### 4.3 Podsumowanie

Obydwa zadania potwierdzają skuteczność metod programowania liniowego w rozwiązywaniu problemów optymalizacyjnych. Metoda sympleks okazała się niezawodna dla problemów o niewielkiej skali, podczas gotowe solwery (AMPL/Gurobi, MATLAB `linprog`) skutecznie radzą sobie z problemami praktycznymi o większej skali.