



คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

การสอบปลายภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2566

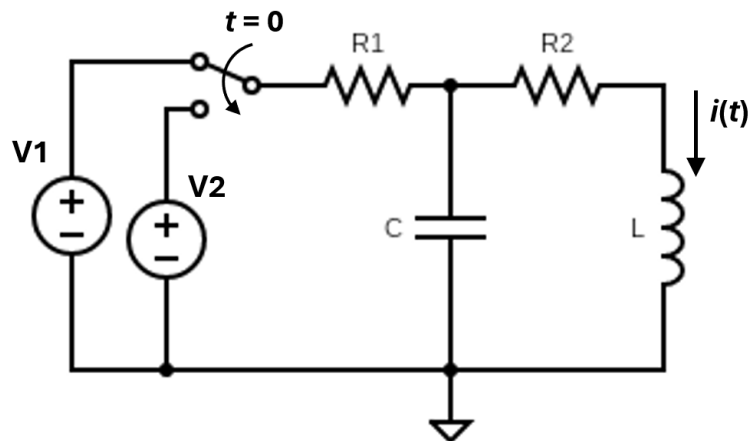
วิชา 01046701 ENGINEERING MATHEMATICS 4 ชั้นปีที่ 2C

วันสอบ วันจันทร์ที่ 25 มีนาคม 2567 เวลาสอบ 9:30 - 12:30 น.

**คำเตือน** นักศึกษาซึ่งทุจริตในการสอบ จะไม่ได้รับการพิจารณาผลการเรียนในภาคการศึกษาที่ นักศึกษา  
กระทำการทุจริตนั้น และพักการเรียนในภาคการศึกษาปกติถัดไปอีก 1 ภาคการศึกษา

- คำสั่ง**
1. อนุญาตให้ใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ได้ทุกชนิด
  2. ข้อสอบมีทั้งหมด 18 ข้อ ให้ใช้โปรแกรม MATLAB ตอบคำถามเท่านั้น
  3. ให้นำ user-defined function ทุกข้อใส่ไว้ท้ายโปรแกรม เพื่อการตรวจสอบ
  4. ถ้าข้อไหนดูเฉลยหรือคำแนะนำจากแหล่งเว็บไซต์ใด ให้นำลงไปโปรแกรมด้วย
  5. ใช้อักษร “M” และตามด้วยเลขประจำตัว และชื่อ เป็นชื่อไฟล์ในการส่งไฟล์

1. วงจร RLC ต่ออยู่กับแหล่งจ่าย  $V_1$  ในสภาวะ steady state ก่อนที่สวิตช์จะเปลี่ยนไปที่แหล่งจ่าย  $V_2$  ที่เวลา  $t = 0$  ดังแสดงในรูป



โดยมีค่าของอุปกรณ์ดังนี้  $V_1 = 5 \text{ V}$ ,  $V_2 = 15 \text{ V}$ ,  $R_1 = 30 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $C = 10 \text{ mF}$ ,  
 $L = 500 \text{ mH}$ .

จงหาค่าของกระแส  $i(t)$  โดยใช้วิธี RK-4 ที่เวลา  $0 \leq t \leq 0.5$  โดยกำหนดค่า  $\Delta t$  เอง และ  
เปรียบเทียบคำตอบกับกราฟจากวิธี built-in function.

2. ค่าความต่างศักย์และค่ากระแสของตัวต้านทานชนิดหนึ่ง แสดงความสัมพันธ์ดังตารางต่อไปนี้

$t$ (sec)	0	1	2	3	4	6	8	10	11	12
$v(t)$ (V)	0	0.2	0.4	0.8	1.0	1.4	1.6	1.8	2.0	1.2
$i(t)$ (A)	1	0.916	0.836	0.0741	0.624	0.224	0.265	0.291	0.361	0.429

- ก. จงหาค่าความต่างศักย์และค่ากระแสของตัวต้านทานนี้ที่เวลา  $t = 9$  sec. โดยใช้วิธี Newton's Divided differences.  
 ข. จงหาค่ากำลังงานเฉลี่ยที่เวลา  $t = 9$  sec. โดยใช้วิธี Newton-cotes ที่  $n = 4$  เปรียบเทียบกับ built-in function.

3. จากข้อมูลในตารางต่อไปนี้

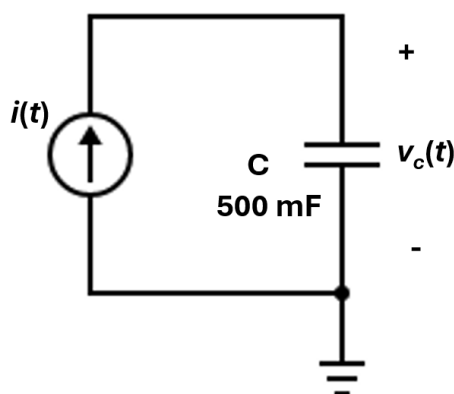
$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
13	0.9807	29	1.0051	60	1.0342
15	0.9845	30	1.0063	62	1.0357
16	0.9863	31	1.0075	64	1.0371
21	0.9944	36	1.0130	70	1.0413
22	0.9958	40	1.0171	72	1.0427
23	0.9973	42	1.0190	100	1.0592
25	1.0	55	1.0303	130	1.0737

จงใช้วิธี linear least-squares regression หาค่าสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชัน

$$y = [(\sqrt{x} + b)/a]^{1/5}$$

และพล็อตกราฟผลลัพธ์ที่ได้เปรียบเทียบกับ built-in function และข้อมูลจากตาราง

4. แหล่งจ่ายกระแส  $i(t)$  จ่ายกระแสให้วงจรดังรูปตามตารางที่เวลาต่างๆกัน โดยกำหนดให้ค่าศักดาของตัวเก็บประจุที่เวลา  $t = 0$  เป็น  $v_C(0) = 5$  V.



$t$ (sec)	0	0.75	1.5	2.25	3	3.75	4.5	5.25	6
$i(t)$	0	0.86603	1.22474	1.5	1.7321	1.9365	2.1213	2.2913	2.4495

- ก. จงหาค่าของกระแส  $i(t)$  ที่เวลา 5 วินาที โดยวิธี Newton's Divided differences และพล็อตกราฟของกระแสที่คำนวณได้เปรียบเทียบกับข้อมูลในตาราง
- ข. จากวงจรในรูป จงหาค่าประมาณของ  $v_c(t)$  ที่เวลา 5 วินาที โดยใช้วิธี Simson's 3/8 เปรียบเทียบผลลัพธ์กับวิธี Romberg integration ที่มีการปรับปรุง 5 ระดับและเปรียบเทียบกับ built-in function.
5. จงคำนวณหาค่าของ  $I = \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} \sin(x) dx$  ด้วยวิธี Gaussian quadrature โดยใช้  $n = 6$  เปรียบเทียบคำตอบกับ built-in function.
6. จงแก้สมการเมทริกซ์โดยใช้วิธี LU factorization เพื่อหาค่าของ  $x$  จากระบบสมการต่อไปนี้

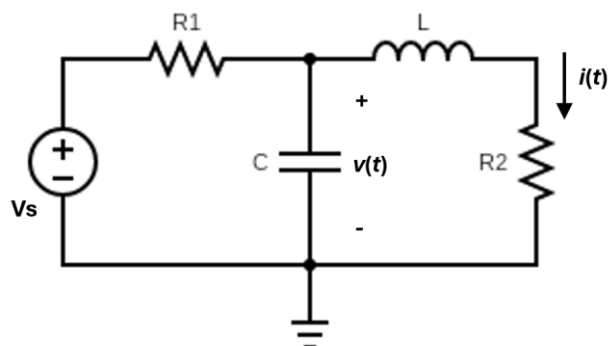
$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 9 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 8 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 8 \\ 2 \\ -10 \end{bmatrix}$$

โดยเริ่มจากการหาเมทริกซ์ L และ U ก่อน แล้วใช้เมทริกซ์ L และ U นี้แก้สมการเมทริกซ์ต่อไป

7. จงหาค่า Eigen values และ Eigen vectors ทุกค่าของเมทริกซ์ต่อไปนี้ โดยใช้วิธี Power method เปรียบเทียบกับ built-in function.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -0.5 & 1.5 \\ -2 & 5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & 5 & -2 \\ 1.5 & -0.5 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

8. กำหนดให้วงจร RLC เป็นดังรูป

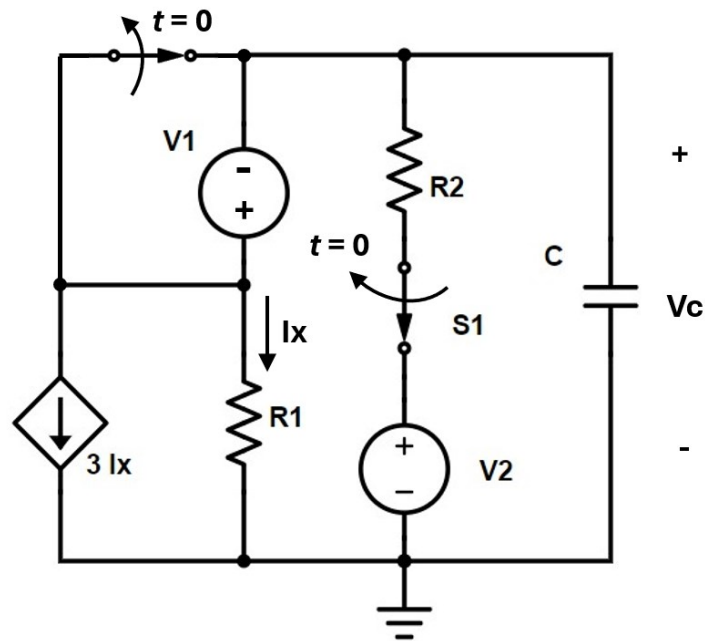


จากวงจรสามารถเขียนเป็นสมการปัญหาหาค่าเริ่มต้นได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 C} & \frac{-1}{C} \\ \frac{1}{L} & \frac{-R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} v(0) &= \frac{5R_1}{R_1+R_2}, \\ i(0) &= \frac{5}{R_1+R_2}, \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq 0.5 \text{ โดยกำหนดค่า } \Delta t \text{ เอง}$$

โดยมีค่าอุปกรณ์ดังนี้  $V_S = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 20 \Omega$ ,  $C = 250 \text{ mF}$ ,  $L = 500 \text{ mH}$ .  
จงหาค่าศักดาไฟฟ้าที่ตกคร่อม  $R_2$  ด้วยวิธี Heun และพล็อตกราฟของ  $V_{R_2}(t)$  ที่ได้เปรียบเทียบกับ built-in function.

9. จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของวงจรต่อไปนี้ ด้วยวิธี Ralston's ตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้



ค่าของอุปกรณ์มีดังนี้  $V_1 = 10 \text{ V}$ ,  $V_2 = 20 \text{ V}$ ,  $R_1 = 20 \Omega$ ,  $R_2 = 100 \Omega$ ,  $C = 50 \text{ mF}$  จงหาค่าศักดา  $V_C(t)$  ที่เวลา  $0 \leq t \leq 2$  ให้กำหนดค่า  $\Delta t$  เอง และพล็อตกราฟของ  $V_C(t)$  ที่ได้เปรียบเทียบกับ built-in function.

10. จงแก้สมการปัญหาค่าขอบเขตต่อไปนี้ ด้วยวิธี RK อันดับ 4 ตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$y'' + 4xy' + 4y - 4x - 10 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(0.5) = 2, \quad 0 \leq x \leq 0.5, \quad n = 10 \text{ และ}$$

พล็อตกราฟผลลัพธ์ที่ได้เปรียบเทียบกับ built-in function.

11. จงแก้สมการปัญหาค่าขอบเขตต่อไปนี้ ด้วยวิธี Finite-difference ตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$y'' - xy' = 2x - 4y + 8, \quad y(1) = 1, \quad y(1.5) = 0, \quad \Delta x = 0.1, \quad 1 \leq x \leq 1.5$$

และพล็อตกราฟผลลัพธ์ที่ได้เปรียบเทียบกับ built-in function bvp5c().

12. จงแก้สมการความร้อนด้วยวิธี Crank-Nicolson ตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$u_{xx} = 9u_t \quad , \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad u(2, t) = 10 \quad , \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

โดยมีค่าช่วงดังนี้  $\Delta x = 0.2$  ,  $\Delta t = 0.02$  พร้อมทั้งพล็อตกราฟผลลัพธ์ที่ได้เปรียบเทียบกับวิธีของ build-in function pdepe().

13. จงแก้สมการคลื่นด้วยวิธี explicit ตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$9u_{xx} = u_{tt} \quad , \quad 0 \leq x \leq 5, \quad 0 \leq t \leq 0.5;$$

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad u(5, t) = e^{-t}, \quad 0 \leq t \leq 0.5;$$

$$u_t(x, 0) = e^{-x} (1 - x) \quad , \quad u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 5$$

โดยมีค่าช่วงดังนี้  $\Delta x = 0.1$  ,  $\Delta t = 0.01$  พร้อมทั้งพล็อตกราฟผลลัพธ์

14. จงแก้สมการลาปลาซด้วยวิธี Finite difference ตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 3;$$

$$u(x, 0) = 50 \sin^2\left(\frac{\pi x}{9}\right) \quad , \quad u(x, 1) = x(1 + x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 3;$$

$$u(0, y) = 0 \quad , \quad u(1, y) = y(y + 1) \quad , \quad 0 \leq y \leq 3;$$

โดยมีค่าช่วงคือ  $\Delta x = 0.1$  ,  $\Delta t = 0.1$  พร้อมทั้งพล็อตกราฟผลลัพธ์

15. จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้ด้วยวิธี Newton-Raphson

$$y - x^5 = 5 - e^y x$$

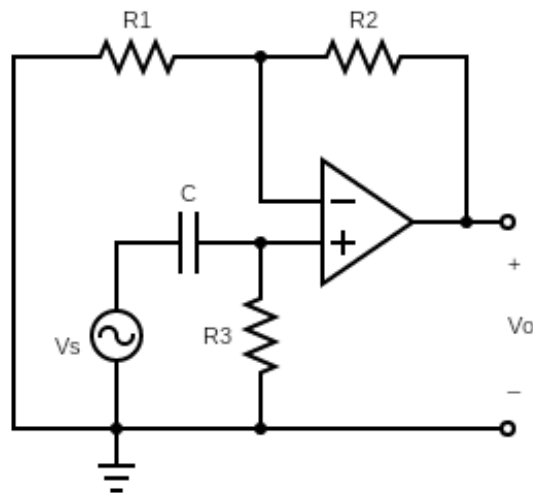
$$x + y = \sin(y) - 2\tan(x)$$

ให้ตรวจสอบความถูกต้องอยู่ที่ทศนิยม 10 ตำแหน่งและเปรียบเทียบคำตอบกับ built-in function.

16. จงหาคำตอบปัญหาค่าเริ่มต้นของระบบสมการด้วยวิธี Picard's และวิธี Taylor series เปรียบเทียบกับคำตอบที่ได้จาก built-in function ode45() โดยทั้งสองวิธีนั้นให้ใช้การประมาณค่าอันดับที่ 4 ในการประมาณค่าในช่วง  $0 \leq x \leq 0.2$  ตามสมการและเงื่อนไขดังต่อไปนี้

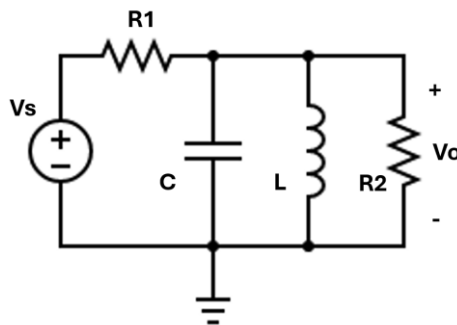
$$\frac{dy}{dx} = 2z + y \quad , \quad \frac{dz}{dx} = y - z^2 \quad \text{โดย } y(0) = 0, \quad z(0) = 1, \quad \text{ใช้ค่า } \Delta x = 0.1$$

17. วงจรกรองความถี่ดังรูปต่อไปนี้



มีค่าอัตราขยาย  $gain = \frac{v_o(\omega)}{v_s(\omega)}$  ซึ่งค่า frequency cutoff (Hz) ของวงจรคือค่าซึ่งมีอัตราขยาย  $gain = 0.707$  (passband gain) ซึ่ง  $\omega$  คือค่าความถี่ของสัญญาณอินพุต  $= 2\pi f$  โดยวงจรมีค่าอุปกรณ์ดังนี้  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$  และ  $C = 100 \text{ nF}$  จงหาค่าความถี่คัทออฟนี้ โดยใช้วิธี False-Position และ Secant เปรียบเทียบคำตอบกับวิธี built-in function และแสดงกราฟของอัตราขยายในช่วงความถี่  $1 < \omega < 10^6$

18. กำหนดให้วงจรรีโซแนนซ์ RLC อยู่ในสถานะ steady state ที่เวลา  $t \geq 0$  ดังรูป



วงจรมีค่าอุปกรณ์ดังนี้  $R_1 = 12 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 45 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 60 \text{ mH}$  และ  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$

ก. จงหาค่าความถี่รีโซแนนซ์ (Hz) ที่ทำให้ส่วนจินตภาพของอัตราขยาย  $gain = \frac{v_o(\omega)}{v_s(\omega)}$  มีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือส่วนที่เป็นอิมพีแดนซ์ของตัวเก็บประจุและตัวเหนี่ยวนำจะหักล้างกันหมด ค่าอัตราขยายจึงมีแต่ส่วนค่าจริงเท่านั้น การหาคำตอบของสมการให้ใช้วิธี Fixed-point iteration ในรูปสมการ  $x = f(x)$  เปรียบเทียบคำตอบกับวิธีของ built-in function.

ข. จงหาค่าอัตราขยายที่ความถี่รีโซแนนซ์