โครงงานวิทยาศาตร์

เรื่อง รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชีแบบสมบูรณ์

(On complete generalized Fibonacci sequences)

โดย

นายวิษณุ พรภาวนาเลิศ

อาจารย์ที่ปรึกษา

อ.ดร.ภาสวรรณ   นพแก้ว

อ.ดร.ธนากร   ปริญญาศาสตร์

รายงานนี้ เป็นส่วนหนึ่งของรายวิชา ว32219 โครงงานวิทยาศาสตร์2

หลักสูตรห้องเรียนวิทยาศาสตร์โรงเรียนสิรินธรราชวิทยาลัยโดยการกำกับดูแลของ

มหาวิทยาลัยศิลปากร

ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ปีการศึกษา 2563

โครงงานวิทยาศาสตร์

เรื่อง รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชีแบบสมบูรณ์

(On complete generalized Fibonacci sequences)

โดย

นายวิษณุ พรภาวนาเลิศ

อาจารย์ที่ปรึกษา

อ.ดร.ภาสวรรณ   นพแก้ว

อ.ดร.ธนากร   ปริญญาศาสตร์

รายงานนี้ เป็นส่วนหนึ่งของรายวิชา ว32219 โครงงานวิทยาศาสตร์2

หลักสูตรห้องเรียนวิทยาศาสตร์โรงเรียนสิรินธรราชวิทยาลัยโดยการกำกับดูแลของ

มหาวิทยาลัยศิลปากร

ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ปีการศึกษา 2563

บทคัดย่อ

รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชี $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับที่ถูกกำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2}$ เมื่อ A_1, A_2, a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในโครงงานคณิตศาสตร์นี้ ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษา (a, b) ที่ทำให้ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ และหาเงื่อนไขที่ทำให้แต่ละจำนวนนับสามารถเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกในรูปทั่วไปของฟิโบนักชีที่เป็นลำดับสมบูรณ์ ได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น

คำสำคัญ: ลำดับสมบูรณ์, ลำดับฟิโบนักชี, Zeckendorf representation

กิตกรรมประกาศ

โครงงานเรื่องนี้ประกอบด้วยการดำเนินงานหลายขั้นตอน นับตั้งแต่การศึกษาหาข้อมูล คิดทฤษฎี พิสูจน์ การจัดทำโครงงานเป็นรูปเล่ม จนกระทั่งโครงงานนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ตลอดระยะเวลาที่กล่าวมานั้น ทางคณะผู้จัดทำได้รับความช่วยเหลือ คำชี้แนะในด้านต่าง ๆ รวมไปถึงกำลังใจจากบุคคลหลายท่าน คณะผู้จัดทำตระหนักและซาบซึ้งในความกรุณาจากทุก ๆ ท่านเป็นอย่างยิ่ง ณ โอกาสนี้ ขอขอบพระคุณทุก ๆ ท่าน ดังนี้

กราบขอบพระคุณ อาจารย์ภาสวรรณ พนแก้ว และอาจารย์ธนากร ปริญญาศาสตร์ จากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ผู้ให้คำแนะนำ และได้ให้ความเมตตา ช่วยเหลือในทุก ๆ ด้าน ตลอดจนเอื้อเฟื้อห้องประชุม และเครื่องมือต่าง ๆ ในการทำโครงงานนี้จนประสบความสำเร็จ

ขอขอบพระคุณโครงการสนับสนุนการจัดตั้งห้องเรียนวิทยาศาสตร์ในโรงเรียน โดยการกำกับดูแลของมหาวิทยาลัย (วมว.) ที่ให้เงินทุนสำหรับสนับสนุนการทำโครงงานครั้งนี้

ขอขอบคุณ เพื่อน ๆ ที่ได้ให้ความช่วยเหลือในการทำโครงงาน

ท้ายที่สุด ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อและคุณแม่ ผู้ที่ให้ความรัก ดูแลเอาใจใส่ คอยให้กำลังใจ และคอยสนับสนุนเรื่อยมา

วิษณุ พรภาวนาเลิศ

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

ลำดับฟิโบนักชี $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $F_0 = 0, F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$ ซึ่งลำดับฟิโบนักชีเป็นลำดับสมบูรณ์ [8] และนอกจากนี้ยังพบว่าสำหรับจำนวนนับ m ใด ๆ จะสามารถเขียนในรูป

$$m = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i F_i \, , \alpha_i \in \{0,1\}$$

ได้แบบเดียวภายใต้เงื่อนไข $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$ ซึ่งการเขียนจำนวนเต็มใด ๆ ในรูปผลรวมเชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขกล่าวเรียกว่า Zeckendorf Representation [12] ซึ่งมีการนำ Zeckendorf Representation ไปประยุกต์ใช้ในด้านการเข้ารหัสและด้านการเข้ารหัส [2,6] และยังใช้ในอังกอริทึมสำหรับเกม [3,10,11] ทำให้การศึกษาลำดับสมบูรณ์และหาเงื่อนไขที่จะทำให้จำนวนนับใด ๆ สามารถเขียนได้ในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกในลำดับสมบูรณ์ได้เพียงแบบเดียวเป็นที่น่าสนใจต่อมาในปี1969 J. L. BROWN [5] ได้ศึกษาเงื่อนไขที่ทำให้ลำดับลูคัสสามารถเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้นแต่ละจำนวนนับสามารถเขียนได้แบบเดียว ซึ่งลำดับลูคัสนิยามโดยให้ $L_0 = 2, L_1 = 1$ และ $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ เมื่อ $n \geq 0$ J. L. BROWN พบว่าถ้า m ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ แล้วจะมีลำดับ $(\alpha_n)_{n\in\{0\}\cup\mathbb{N}}$ ใน $\{0,1\}$ เพียงลำดับเดียวเท่านั้นที่ทำให้

$$m = \sum_{0}^{\infty} \alpha_i L_i$$

เมื่อ $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$ สำหรับทุก $i \geq 0$ และ $\alpha_0 \alpha_2 = 0$

รูปทั่วไปของฟิโบนักชี $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับที่ถูกกำหนดโดย $A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2}$ เมื่อ A_1, A_2, a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จากการศึกษาเบื้องต้นพบว่า A_n ไม่จำเป็นต้องเป็นลำดับสมบูรณ์ เช่นเมื่อ $A_1 = A_2 = 1, (a, b) = (0,4)$ ดังนั้นในโครงงานนี้เราจะศึกษา (a, b) ทำให้ A_n เป็นลำดับสมบูรณ์ นอกจากนี้ผู้วิจัยต้องการเงื่อนไขที่ทำให้ผลรวมเชิงเส้นแต่ละจำนวนนับสามารถเขียนได้แบบเดียว

1.2 วัตถุประสงค์

1. ศึกษาคู่อันดับ (a, b) ที่ทำให้รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชี $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์
2. ศึกษาเงื่อนไขที่ทำให้การเขียนจำนวนนับใด ๆ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกในรูปทั่วไปของฟิโบนักชีที่สมบูรณ์ สามารถเขียนได้แบบเดียวเท่านั้น

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

ศึกษารูปทั่วไปของฟิโบนักชีซึ่ง A_1, A_2 เป็นจำนวนเต็มบวก และเป็นลำดับไม่ลด

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 1

ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมน เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก และมีเรนจ์ เป็นเซตของจำนวนจริง [1]
ตัวอย่าง ให้ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(n) = n + 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ แล้ว f เป็นลำดับ โดยเรานิยามเขียนแทนลำดับ f ด้วย $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$

บทนิยาม 2

ให้ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับของจำนวนนับ เราจะกล่าวว่า $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็น**ลำดับสมบูรณ์** [4] ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละจำนวนนับ k จะมีลำดับ $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ใน $\{0,1\}$ ซึ่ง $k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$
ตัวอย่าง $A_n = \{1,2,3, \dots, n, \dots\}, B_n = \{1,1,1, \dots, 1, \dots\}$ และ $C_n = \{1,3,5, \dots, 2n-1, \dots\}$ จะเห็นได้ว่า A_n, B_n เป็นลำดับสมบูรณ์ แต่ C_n ไม่เป็นลำดับสมบูรณ์เพราะ 2 ไม่สามารถเขียนในรูป $k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ เนื่องจาก $C_1 < 2$ และ $C_n > 2$ สำหรับ $n \geq 2$

บทนิยาม 3

จะเรียกลำดับ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ว่าเป็น **ลำดับไม่ลด** เมื่อ $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \cdots \leq A_n \leq \cdots$

ตัวอย่าง $A_n = \{1,1,2,2,3,3, \dots, n, n, \dots\}$ จะเห็นได้ว่า A_n เป็นลำดับไม่ลด

บทนิยาม 4

รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชี [7] คือ ลำดับ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ซึ่ง A_1, A_2, a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2}$

ทฤษฎีบท 1

ให้ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับไม่ลด ของจำนวนนับซึ่ง $A_1 = 1$ แล้ว $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็น**ลำดับสมบูรณ์** [4] ก็ต่อเมื่อ $A_{k+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{k} A_i$สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $F_1 = 1, F_2 = 1$ และ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ แล้วลำดับ $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับไม่ลดอย่างเห็นได้ชัด นอกจากนี้จากอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เราจะสามารถพิสูจน์ได้ว่า $F_{n+2} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n+1} F_i$ ดังนั้น F_n เป็นลำดับสมบูรณ์

บทที่ 3

วิธีดำเนินการทดลอง

3.1 วัสดุอุปกรณ์

1.คอมพิวเตอร์

2.กระดาษ

3.เครื่องเขียน

4.เครื่องคิดเลข

3.2 ขั้นตอนการดำเนินงาน

1. ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับลำดับ
2. ศึกษาข้อมูลที่เกี่ยวข้อง
3. หาคู่อันดับ (a, b) ที่ทำให้รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชี $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์
4. หาเงื่อนไขที่ทำให้การเขียนจำนวนนับใด ๆ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกในรูปทั่วไปของฟิโบนักชีที่สมบูรณ์ สามารถเขียนได้แบบเดียวเท่านั้น
5. เขียนรายงาน
6. ตรวจสอบ และแก้ไขรายงาน

บทที่ 4

ผลการทดลอง

1. ลำดับฟิโบนักชีแบบสมบูรณ์

กำหนดให้ A_n เป็นลำดับฟิโบนักชีแบบทั่วไปที่เป็นลำดับไม่ลดที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดที่กำหนดโดย $A_1 = 1,\ A_2 = 1,2$ และ $A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2}$ ในบทนี้เราจะหาสัมประสิทธิ์ (a, b) ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของความสัมพันธ์เวียนเกิดนี้ที่ทำให้ A_n เป็นลำดับสมบูรณ์

ทฤษฎีบท 1.1

ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับไม่ลดซึ่ง $A_1 = A_2 = 1$ และ $A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2}$ สำหรับทุกจำนวนนับ $n \geq 3$ เราได้ว่าลำดับ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ จะเป็นลำดับสมบูรณ์ก็ต่อเมื่อ $(a, b) \in \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0)\}$

พิสูจน์

สมมติว่า $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ สังเกตว่า ถ้า $(a, b) = (0,0)$ แล้ว $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ไม่เป็นลำดับไม่ลด ดังนั้น $(a, b) \neq (0,0)$

เนื่องจาก $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ที่เป็นลำดับไม่ลด โดยทฤษฎีบท 1 เราได้ว่า

$$a + b = A_3 \leq 1 + A_1 + A_2 = 3$$

ดังนั้น

$$(a, b) \in \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (3,0)\}$$

สังเกตว่า ถ้า $(a,b)=(2,1)$ แล้ว A_1,A_2,A_3,A_4 จะมีค่าเป็น $1,1,3,7$ ตามลำดับ ซึ่งทำให้ได้ว่า $A_4=7>6=1+\sum_{i=1}^{3}A_i$ และ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ไม่เป็นลำดับสมบูรณ์โดยทฤษฎีบท 1 เราจึงได้ว่า $(a,b)\neq(2,1)$ ในทำนองเดียวกัน ถ้า $(a,b)=(3,0)$ แล้ว A_1,A_2,A_3,A_4 จะมีค่าเป็น $1,1,3,9$ ตามลำดับ ซึ่งทำให้ได้ว่า $A_4=9>6=1+\sum_{i=1}^{3}A_i$ และ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ไม่เป็นลำดับสมบูรณ์โดยทฤษฎีบท 1 เช่นเดียวกัน ดังนั้น $(a,b)\neq(3,0)$ ทำให้เราสรุปได้ว่า

$$(a,b)\in\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0)\}$$

ตามต้องการ

ในทางกลับกันสมมติว่า

$$(a,b)\in\{(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0)\}$$

เราต้องการจะแสดงว่า $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ นั่นคือ เราจะแสดงว่า $A_{n+1}\leq 1+\sum_{i=1}^{n}A_i$ สำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$

- **กรณี $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in\{(\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{0},\mathbf{2}),(\mathbf{0},\mathbf{3}),(\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{1},\mathbf{1})\}$**

สังเกตว่า $A_2=1\leq 2=1+A_1$ และ $A_3=a+b\leq 3=1+A_1+A_2$

ให้ $k\in\mathbb{N}$ สมมติว่า $A_{k+1}\leq 1+\sum_{i=1}^{k}A_i$ และ $A_{k+2}\leq 1+\sum_{i=1}^{k+1}A_i$

เนื่องจาก $2a+b\leq 3=1+A_1+A_2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
A_{k+3} &= aA_{k+2}+bA_{k+1}\\
&\leq a+\left(\sum_{i=1}^{k+1}aA_i\right)+b+\left(\sum_{i=1}^{k}bA_i\right)\\
&= a+b+aA_1+\sum_{i=3}^{k+2}(aA_{i-1}+bA_{i-2})\\
&= 2a+b+\sum_{i=3}^{k+2}A_i\\
&\leq 1+A_1+A_2+\sum_{i=3}^{k+2}A_i\\
&= 1+\sum_{i=1}^{k+2}A_i
\end{aligned}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า $A_{n+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} A_i$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

- **กรณี $\boldsymbol{a = 2}$ และ $\boldsymbol{b = 0}$**

สังเกตว่า $A_2 = 1 \leq 2 = 1 + A_1$

ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $A_{k+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{k} A_i$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_{k+2} &= 2A_{k+1} \\ &= A_{k+1} + A_{k+1} \\ &\leq \left(1 + \sum_{i=1}^{k} A_i\right) + A_{k+1} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{k+1} A_i \end{aligned}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า $A_{n+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} A_i$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

- **กรณี $\boldsymbol{a = 1}$ และ $\boldsymbol{b = 2}$**

ในกรณีนี้ เราจะแสดงว่า สำหรับทุกจำนวนนับ n

$$A_{n+1} = \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{n} A_i & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \sum_{i=1}^{n} A_i & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

สังเกตว่า $A_2 = 1 = A_1$ และ $A_3 = 3 = 1 + A_1 + A_2$

ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า

$$A_{k+1} = \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{k} A_i & \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \sum_{i=1}^{k} A_i & \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

และ

$$A_{k+2} = \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{k+1} A_i & \text{เมื่อ } k+1 \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \sum_{i=1}^{k+1} A_i & \text{เมื่อ } k+1 \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_{k+3} &= A_{k+2} + 2A_{k+1} \\ &= \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{k+1} A_i\right) + 2\left(1 + \sum_{i=1}^{k} A_i\right) & \text{เมื่อ } k+2 \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \left(1 + \sum_{i=1}^{k+1} A_i\right) + 2\sum_{i=1}^{k} A_i & \text{เมื่อ } k+2 \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases} \\ &= \begin{cases} A_1 + 2 + \sum_{i=2}^{k+1} (A_i + 2A_{i-1}) & \text{เมื่อ } k+2 \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ A_1 + 1 + \sum_{i=2}^{k+1} (A_i + 2A_{i-1}) & \text{เมื่อ } k+2 \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases} \\ &= \begin{cases} A_1 + 2 + \sum_{i=2}^{k+1} A_{i+1} & \text{เมื่อ } k+2 \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ A_1 + 1 + \sum_{i=2}^{k+1} A_{i+1} & \text{เมื่อ } k+2 \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{k+2} A_i & \text{เมื่อ } k+2 \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \sum_{i=1}^{k+2} A_i & \text{เมื่อ } k+2 \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases} \end{aligned}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า สำหรับทุกจำนวนนับ n

$$A_{n+1} = \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{n} A_i & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \sum_{i=1}^{n} A_i & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

ทำให้ได้ว่า $A_{n+1} \le 1 + \sum_{i=1}^{n} A_i$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

จากทั้งสามกรณี เราได้ว่า $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์

ทฤษฎีบท 1.2

ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับไม่ลดซึ่ง $A_1 = 1, A_2 = 2$ และ $A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2}$ สำหรับทุกจำนวนนับ $n \ge 3$ เราได้ว่าลำดับ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ จะเป็นลำดับสมบูรณ์ก็ต่อเมื่อ

$$(a, b) \in \{(0,2), (0,3), (0,4), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0)\}$$

พิสูจน์

สมมติว่า $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ สังเกตว่า ถ้า $(a, b) = (0,0)$ หรือ $(a, b) = (0,1)$ แล้ว $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ จะเป็นลำดับไม่ลด ดังนั้น $a \ge 1$ หรือ $b \ge 2$

เนื่องจาก $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ที่เป็นลำดับไม่ลด โดยทฤษฎีบท 1 เราได้ว่า

$$2a + b = A_3 \le 1 + A_1 + A_2 = 4$$

ดังนั้น

$$(a, b) \in \{(0,2), (0,3), (0,4), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0)\}$$

ตามต้องการ

ในทางกลับกันสมมติว่า

$$(a, b) \in \{(0,2), (0,3), (0,4), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0)\}$$

เราต้องการจะแสดงว่า $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ นั่นคือ เราจะแสดงว่า $A_{n+1} \le 1 + \sum_{i=1}^{n} A_i$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

สังเกตว่า $A_2 = 2 \le 1 + A_1$ และ $A_3 = 2a + b \le 4 = 1 + A_1 + A_2$

ให้ $k \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $A_{k+1} \le 1 + \sum_{i=1}^{k} A_i$ และ $A_{k+2} \le 1 + \sum_{i=1}^{k+1} A_i$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
A_{k+3} &= aA_{k+2} + bA_{k+1} \\
&\leq a + \left(\sum_{i=1}^{k+1} aA_i\right) + b + \left(\sum_{i=1}^{k} bA_i\right) \\
&= a + b + aA_1 + \sum_{i=3}^{k+2} (aA_{i-1} + bA_{i-2}) \\
&= 2a + b + \sum_{i=3}^{k+2} A_i \\
&\leq 1 + A_1 + A_2 + \sum_{i=3}^{k+2} A_i \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{k+2} A_i
\end{aligned}
$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสรุปได้ว่า $A_{n+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n} A_i$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

2. การเขียนจำนวนนับในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นของพจน์ในลำดับฟิโบนักชีแบบทั่วไป

จากบทก่อนหน้าเราทราบแล้วว่าลำดับฟิโบนักชีแบบทั่วไป $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ที่เป็นลำดับไม่ลดจะเป็นลำดับสมบูรณ์เมื่อใด ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาเงื่อนไขที่ทำให้จำนวนนับใด ๆ สามารถเขียนอยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของพจน์ใน $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ได้

2.1 เงื่อนไขเมื่อ $\boldsymbol{A_1 = A_2 = 1}$

ในหัวข้อนี้เราให้ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับซึ่ง $A_1 = A_2 = 1$ และ $A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 3$ เมื่อ

$$(a,b) \in \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0)\}$$

เราได้ผลการศึกษาดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1

ให้ $(a,b) = (0,1)$ ถ้า $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ แล้วจะมีลำดับ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ ที่ทำให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ และ $\alpha_i = 0$ สำหรับทุก $i > n$

พิสูจน์

ให้ $n \in \mathbb{N} \cup 0$ กำหนดให้ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับซึ่ง $\alpha_i = 1$ สำหรับทุก $i \leq n$ และ $\alpha_i = 0$ สำหรับทุก $i > n$ จะได้ว่า $n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$

ทฤษฎีบท 2.2

กำหนดให้ $(a,b) = (0,1)$ และ

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_{i,}\ \alpha_i \in \{0,1\}$$

เมื่อ $\alpha_i = 0$ สำหรับทุก $i > n$ เราได้ว่าการเขียน n ในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขดังกล่าวนั้นเขียนได้แบบเดียว

พิสูจน์ เนื่องจาก $\alpha_i = 0$ สำหรับทุก $i > n$ ดังนั้น $n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$ ถ้ามี $i \leq n$ ซึ่ง $\alpha_i = 0$ แล้ว $n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i < n$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $\alpha_i = 1$ สำหรับทุก $i \leq n$ ซึ่งทำให้ได้ว่าการเขียน n ในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขนี้เขียนได้แบบเดียว

ทฤษฎีบท 2.3

กำหนดให้ $(a,b) = (0,2)$ และ $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ เราได้ว่ามีลำดับ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ ที่ทำให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ และ $\alpha_{2i-1} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$

พิสูจน์

โดยทฤษฎีบท 1.2 เราจะได้ว่า $(A_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ ดังนั้น มีลำดับ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ ที่ทำให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ และ $\alpha_{2i-1} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$

ทฤษฎีบท 2.4

กำหนดให้ $(a,b) = (0,2)$ และ

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i, \alpha_i \in \{0,1\}$$

เมื่อ $\alpha_{2i-1} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ เราได้ว่าการเขียน n ในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขดังกล่าวนั้นเขียนได้แบบเดียว

พิสูจน์

ให้ $n=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i A_i, \beta_i \in \{0,1\}$ และ $\beta_{2i-1}=0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $(\alpha_{2i})_{i\in\mathbb{N}} \neq (\beta_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$ ให้ k เป็นจำนวนนับที่มากที่สุดที่ $\alpha_{2k} \neq \beta_{2k}$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป กำหนดให้ $\alpha_{2k}=1$ และ $\beta_{2k}=0$

ดังนั้น

$$A_{2k}+\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_{2i}A_{2i}=\sum_{i=1}^{k-1}\beta_{2i}A_{2i}$$

ทำให้ได้ว่า

$$2^{k-1}\leq A_{2k}+\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_{2i}A_{2i}=\sum_{i=1}^{k-1}\beta_{2i}A_{2i}\leq\sum_{i=1}^{k-1}A_{2i}=2^{k-1}-1$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้น $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}=(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$

ทฤษฎีบท 2.5

กำหนดให้ $(a,b)=(0,3)$ และ $n \in \{0\}\cup\mathbb{N}$ เราได้ว่ามีลำดับ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ ที่ทำให้

$$n=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i A_i$$

เมื่อ $\alpha_{2i-1}\leq\alpha_{2i}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$

พิสูจน์ ให้ $n \in \{0\}\cup\mathbb{N}$ จากทฤษฎีบท 1.1 จะมีลำดับ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ ที่ทำให้ $n=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i A_i$ นิยาม $\beta_i \in \{0,1\}$ สำหรับแต่ละ $i \in \mathbb{N}$ โดย

$$\beta_{2i-1}=\begin{cases}\alpha_{2i} & \text{เมื่อ } \alpha_{2i-1}>\alpha_{2i}\\ \alpha_{2i-1} & \text{เมื่อ } \alpha_{2i-1}\leq\alpha_{2i}\end{cases} \text{ และ } \beta_{2i}=\begin{cases}\alpha_{2i-1} & \text{เมื่อ } \alpha_{2i-1}>\alpha_{2i}\\ \alpha_{2i} & \text{เมื่อ } \alpha_{2i-1}\leq\alpha_{2i}\end{cases}$$

สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก $A_{2i-1}=A_{2i}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$

ดังนั้น

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i A_i$$

และจากการสร้าง β_i จะได้ว่า $\beta_{2i-1} \leq \beta_{2i}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$

ทฤษฎีบท 2.6

กำหนดให้ $(a,b) = (0,3)$ และ

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i, \alpha_i \in \{0,1\}$$

เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ และ $\alpha_{2i-1} \leq \alpha_{2i}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ เราได้ว่าการเขียน n ในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขดังกล่าวนั้นเขียนได้แบบเดียว

พิสูจน์ สมมติ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i A_i$ เมื่อ $\beta_i \in \{0,1\}$ และ $\beta_{2i-1} \leq \beta_{2i}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ เราจะพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งโดย สมมติ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \neq (\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ให้ k เป็นจำนวนนับที่มากที่สุดที่ทำให้ $\alpha_k \neq \beta_k$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป กำหนดให้ $\alpha_k = 1, \beta_k = 0$ จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i A_i$$

กรณีที่ k เป็นจำนวนคู่ เนื่องจาก $\beta_k = 0$ และ $\beta_{2i-1} \leq \beta_{2i}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ ทำให้ $\beta_{k-1} = 0$ และ

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{k-2} \beta_i A_i$$

แต่ $\sum_{i=1}^{k-2} \beta_i A_i \leq \sum_{i=1}^{k-2} A_i = A_k - 1 < \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{k-2} \beta_i A_i$ ซึ่งทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่ k เป็นจำนวนคี่

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i A_i$$

แต่ $\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i A_i \le \sum_{i=1}^{k-1} A_i = A_k - 1 < \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i A_i$ ซึ่งทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$

ทฤษฎีบท 2.7

กำหนดให้ $(a,b) = (1,0)$ และ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ เราได้ว่ามีลำดับ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ ที่ทำให้

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$$

และ $\alpha_i = 0$ สำหรับทุก $i > n$

พิสูจน์

กำหนดให้ $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ และให้ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับซึ่ง $\alpha_i = 1$ สำหรับทุก $i \le n$ และ $\alpha_i = 0$ สำหรับทุก $i > n$ จะได้ว่า $n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ เพราะ $A_i = 1$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$

ทฤษฎีบท 2.8

กำหนดให้ $(a,b) = (1,0)$ และ

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i \, , \alpha_i \in \{0,1\}$$

เมื่อ $\alpha_i = 0$ สำหรับทุก $i > n$ เราจะได้ว่าการเขียน n ในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขดังกล่าวนั้นได้แบบเดียว

พิสูจน์

ให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$, $\alpha_i \in \{0,1\}$ เมื่อ $\alpha_i = 0$ สำหรับทุก $i > n$ ดังนั้น $n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$ ถ้ามี $i \leq n$ ซึ่ง $\alpha_i = 0$ แล้ว $n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i < n$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะฉะนั้น $\alpha_i = 1$ สำหรับทุก $i \leq n$ ซึ่งทำให้ได้ว่าการเขียน n ในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขนี้เขียนได้แบบเดียว

ในกรณีที่ $(a, b) = (1,1)$ เราจะได้ว่าลำดับนี้เป็นลำดับฟิโบนักชีไม่รวม 0 ดังนั้นโดย Zeckendorf Representation จะได้ว่าสำหรับ $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ จะมีลำดับ $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ เพียงลำดับเดียวที่ทำให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$, $\alpha_1 = 0$ และ $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$

ทฤษฎีบท 2.9

ให้ $(a, b) = (1,2)$ ถ้า $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ แล้วจะมีลำดับ $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ ที่ทำให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ และ $min\,\{k | \alpha_k = 1\}$ เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์

ให้ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ เนื่องจาก $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ ดังนั้นจะมีลำดับ $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ที่ทำให้ ให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$

กรณี $min\,\{k | \alpha_k = 1\}$ เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ต้องการ

กรณี $m = min\,\{k | \alpha_k = 1\}$ เป็นจำนวนคู่ จากบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 1.1 เราทราบว่า $\sum_{i=1}^{m-1} A_i = A_m$ ดังนั้น ถ้าเราให้ $\gamma_i = 1$ เมื่อ $1 \leq i \leq m-1, \gamma_m = 0$ และ $\gamma_j = \alpha_j$ เมื่อ $j > m$ จะได้ว่า $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i A_i$ และ $min\,\{k | \gamma_k = 1\} = 1$ ซึ่งเป็นจำนวนคี่ จะเห็นว่ามีลำดับ $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ที่ทำให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i A_i$, $\gamma_i \in \{0,1\}$ ภายใต้เงื่อนไขที่ต้องการ

ทฤษฎีบท 2.10

กำหนดให้ $(a,b)=(1,2)$ และ

$$n=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i A_i\,,\alpha_i\in\{0,1\}$$

เมื่อ $min\,\{k|\alpha_k=1\}$ เป็นจำนวนคี่ เราได้ว่าการเขียน n ในรูปแบบผลรวมเชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขดังกล่าวนั้นเขียนได้แบบเดียว

พิสูจน์

สมมติ $n=\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i A_i$ เมื่อ $\gamma_i\in\{0,1\}$ สำหรับทุก $i\in\mathbb{N}$ และ $min\,\{k|\gamma_k=1\}$ เป็นจำนวนคี่ เราจะพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งโดยสมมติว่า $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}\neq(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ให้ l เป็นจำนวนนับมากที่สุดที่ทำให้ $\alpha_l\neq\gamma_l$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปกำหนดให้ $\alpha_l=1,\gamma_l=0$ จะได้ว่า

$$n=\sum_{i=1}^{l}\alpha_i A_i=\sum_{i=1}^{l-1}\gamma_i A_i$$

กรณี l เป็นจำนวนคี่

จากบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 1.1 เราทราบว่า

$$A_k=1+\sum_{i=1}^{k-1}A_i$$

ดังนั้น

$$A_k\leq\sum_{i=1}^{k}\alpha_i A_i=n=\sum_{i=1}^{k-1}\gamma_i A_i\leq\sum_{i=1}^{k-1}A_i=A_k-1$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

กรณี l เป็นจำนวนคู่

จาก $m = min\,\{k|\alpha_k = 1\}$ เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $m < l$ และ

$$A_m + A_l \leq \sum_{i=1}^{l} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{l-1} \gamma_i A_i \leq \sum_{i=1}^{l-1} A_i$$

จากบทพิสูจน์ของทฤษฎีบท 1.1 เราทราบว่า

$$\sum_{i=1}^{l-1} A_i = A_l$$

ดังนั้น $A_m + A_l \leq A_l$ นั่นคือ $A_m \leq 0$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้น $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$

ทฤษฎีบท 2.11

ให้ $(a,b) = (2,0)$ ถ้า $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ แล้วจะมีลำดับ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ เพียงลำดับเดียวเท่าที่ทำให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ และ $\alpha_1 = 0$

พิสูจน์

ให้ $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับซึ่ง $B_1 = B_2 = 1$ และ $B_n = 2B_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 3$ เนื่องจากลำดับ $(A_{i+1})_{i\in\mathbb{N}} = (B_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.3 และทฤษฎีบท 2.4 เราจะได้ว่า มีลำดับ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ เพียงลำดับเดียวเท่าที่ทำให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ และ $\alpha_1 = 0$

2.2 เงื่อนไขเมื่อ $A_1 = 1$ และ $A_2 = 2$

ทฤษฎีบท 2.12

กำหนดให้ $(a,b) \in \{(0,4),(1,2),(2,0)\}$ และ $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ เราได้ว่า จะมีลำดับ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ เพียงลำดับเดียวที่ทำให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$

พิสูจน์

ให้ $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับซึ่ง $B_1 = B_2 = 1$ และ $B_n = 2B_{n-2}$ สำหรับทุก $n \geq 3$ จะเห็นว่า $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} = (B_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.3 และทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า มีลำดับ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ เพียงลำดับเดียวที่ทำให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$

ทฤษฎีบท 2.13

กำหนดให้ $(a,b) = (0,2)$ และ $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ เราได้ว่า จะมีลำดับ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ เพียงลำดับเดียวที่ทำให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ และ $\alpha_{2i} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$

พิสูจน์

ให้ $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับซึ่ง $B_1 = 1, B_2 = 2$ และ $B_n = 2B_{n-1}$ สำหรับทุก $n \geq 3$ จะเห็นว่า $(A_{2i-1})_{i\in\mathbb{N}} = (B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.13 จะได้ว่า มีลำดับ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ เพียงลำดับเดียวที่ทำให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ และ $\alpha_{2i} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$

ทฤษฎีบท 2.14

ให้ $(a, b) = (1,0)$ ถ้า $n = \{0\} \cup \mathbb{N}$ แล้วจะมีลำดับ $(\alpha)_{i\in\mathbb{N}}$ เมื่อ $\alpha_i \in \{0,1\}$ ที่ทำให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ และ $\alpha_{i+1} \leq \alpha_i$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N} - \{1\}$

พิสูจน์

กำหนดให้ $n = \{0\} \cup \mathbb{N}$

กรณี n เป็นคู่

กำหนดให้

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 \text{ เมื่อ } 2 \leq i \leq \dfrac{n}{2} + 1 \\ 0 \text{ เมื่อ } i = 1 \text{ หรือ } i > \dfrac{n}{2} + 1 \end{cases}$$

จะได้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ และ $\alpha_{i+1} \leq \alpha_i$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N} - \{1\}$

กรณี n เป็นคี่

กำหนดให้

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 \text{ เมื่อ } 1 \leq i \leq \dfrac{n+1}{2} \\ 0 \text{ เมื่อ } i > \dfrac{n+1}{2} \end{cases}$$

จะได้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ และ $\alpha_{i+1} \leq \alpha_i$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N} - \{1\}$

ทฤษฎีบท 2.15

กำหนดให้ $(a, b) = (1,0)$ และ

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i \, , \alpha_i \in \{0,1\}$$

เมื่อ $\alpha_{i+1} \leq \alpha_i$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N} - \{1\}$ จะได้ว่า n เขียนในรูปผลรวมเชิงเส้นได้แบบเดียว

พิสูจน์

สมมติ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i A_i$ เมื่อ $\gamma_i \in \{0,1\}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ และ $\gamma_{i+1} \leq \gamma_i$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N} - \{1\}$ ซึ่งเราจะพิสูจน์โดยข้อขัดแย้งโดยสมมติว่ามี $i \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $\gamma_i \neq \alpha_i$ ให้ k เป็นจำนวนนับมากที่สุดที่ทำให้ $\gamma_k \neq \alpha_k$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปกำหนดให้ $\alpha_k = 1, \gamma_k = 0$ จะได้ว่า

$$n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i A_i$$

เนื่องจาก $\alpha_k = 1$ และ $\alpha_{i+1} \leq \alpha_i$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N} - \{1\}$ ทำให้ $\alpha_i = 1$ สำหรับทุก $1 < i \leq k$

แต่เมื่อ n เป็นจำนวนคี่เราจะได้ว่า $n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i = 2k - 1$ และ $n = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i A_i \leq 2k - 3$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

นอกจากนี้ถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว $n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i = 2k - 2$ และ $n = \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_i A_i \leq 2k - 4$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้งเช่นเดียวกัน

ดังนั้น n สามารถเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้นได้แบบเดียวภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด

ทฤษฎีบท 2.16

ให้ $(a,b) = (0,3)$ ถ้า $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ แล้วจะมีลำดับ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ที่ทำให้ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i, \alpha_i \in \{0,1\}$ และ $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$ สำหรับทุก i ที่เป็นจำนวนคี่

พิสูจน์

กำหนดให้ $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับซึ่งกำหนดโดยเงื่อนไข $B_1 = 1, B_2 = 1$ และ $B_n = 3B_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$ ให้ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จากทฤษฎีบท 2.5 จะมีลำดับ $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เมื่อ $\gamma_i \in \{0,1\}$ ซึ่ง $n = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i B_i$ ให้ $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับซึ่ง $\alpha_{2i} = \begin{cases} 1 \text{ เมื่อ } \gamma_{2i}\gamma_{2i-1} = 1 \\ 0 \text{ เมื่อ } \gamma_{2i}\gamma_{2i-1} = 0 \end{cases}$ และ $\alpha_{2i-1} = \begin{cases} 1 \text{ เมื่อ } \gamma_{2i} \neq \gamma_{2i-1} \\ 0 \text{ เมื่อ } \gamma_{2i} = \gamma_{2i-1} \end{cases}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก $A_{2i} = B_{2i-1} + B_{2i}$ และ $A_{2i-1} = B_{2i-1} = B_{2i}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i B_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$$

และจากเงื่อนไขข้างต้นจะเห็นได้ชัดว่า $\alpha_{2i-1}\alpha_{2i} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$

ทฤษฎีบท 2.17

กำหนดให้ $(a,b) = (0,3)$ และ

$$n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i, \alpha_i \in \{0,1\}$$

เมื่อ $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$ สำหรับทุก i ที่เป็นจำนวนคี่จะได้ว่า n เขียนในรูปเชิงเส้นได้แบบเดียว

พิสูจน์

สมมติ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i A_i$ เมื่อ $\gamma_i \in \{0,1\}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ และ $\gamma_i \gamma_{i+1} = 0$ สำหรับทุก i ที่เป็นคี่ เราจะพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้งโดยสมมติว่า $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}} \neq (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ กำหนดให้ $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับซึ่ง $B_1 = 1, B_2 = 1$ และ $B_n = 3B_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 3$ ให้ $(\alpha_i')_{i\in\mathbb{N}}$ และ $(\gamma_i')_{i\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับซึ่ง $\alpha_{2i}' = max\ (\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}), \alpha_{2i-1}' = \alpha_{2i}, \gamma_{2i}' = max\ (\gamma_{2i-1}, \gamma_{2i})$ และ $\gamma_{2i-1}' = \gamma_{2i}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ สังเกตว่า $\alpha_{2i-1}' \leq \alpha_{2i}'$ และ $\gamma_{2i-1}' \leq \gamma_{2i}'$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก $A_{2i} = B_{2i-1} + B_{2i}$ และ $A_{2i-1} = B_{2i-1} = B_{2i}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ เราจึงได้ว่า $n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i' B_i$ และ $n = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i A_i = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i' B_i$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.6 เราได้ว่า $(\gamma_i')_{i\in\mathbb{N}} = (\alpha_i')_{i\in\mathbb{N}}$ เนื่องจาก $\alpha_{2i-1}\alpha_{2i} = 0, \gamma_{2i-1}\gamma_{2i} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ และ $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}} \neq (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ เราจึงได้ว่า $(\gamma_i')_{i\in\mathbb{N}} \neq (\alpha_i')_{i\in\mathbb{N}}$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

กรณี $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$

ถ้า $(a, b) = (1,1)$ แล้วจะได้ว่าลำดับ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เหมือนลำดับ $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ทำให้ได้ว่าสามารถเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้นได้แบบเดียวภายใต้เงื่อนไข $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$ ซึ่งเป็นจริงโดย Zeckendorf's theorem

บทที่ 5

สรุป

ตารางที่ 1 แสดงคู่อันดับ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ ที่ทำให้รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชี $(\boldsymbol{A_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ และเงื่อนไขที่ทำให้การเขียนจำนวนนับใด ๆ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกในรูปทั่วไปของฟิโบนักชีที่สมบูรณ์ สามารถเขียนได้แบบเดียวเท่านั้น เมื่อ $\boldsymbol{A_1=1,\ A_2=1}$

(a,b)	เงื่อนไข
(0,1)	$\alpha_i = 0$ สำหรับทุก $i > n$
(0,2)	$\alpha_{2i-1} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
(0,3)	$\alpha_{2i-1} \le \alpha_i$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
(1,0)	$\alpha_i = 0$ สำหรับทุก $i > n$
(1,1)	$\alpha_1 = 0, \alpha_i\alpha_{i+1} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
(1,2)	$min\,\{k \mid \alpha_k = 1\}$ เป็นจำนวนคี่
(2,0)	$\alpha_1 = 0$

ตารางที่ 2 แสดงคู่อันดับ $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ ที่ทำให้รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชี $(\boldsymbol{A_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ และเงื่อนไขที่ทำให้การเขียนจำนวนนับใด ๆ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกในรูปทั่วไปของฟิโบนักชีที่สมบูรณ์ สามารถเขียนได้แบบเดียวเท่านั้น เมื่อ $\boldsymbol{A_1=1,\ A_2=2}$

(a,b)	เงื่อนไข
(0,2)	$\alpha_{2i} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
(0,3)	$\alpha_i\alpha_{i+1} = 0$ สำหรับทุก i ที่เป็นจำนวนคี่
(0,4)	$-$
(1,0)	$\alpha_{2i+1} \le \alpha_i$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N} - \{1\}$
(1,1)	$\alpha_i\alpha_{i+1} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
(1,2)	$-$
(2,0)	$-$

เอกสารอ้างอิง

[1] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ, *รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1,* พิมพ์ครั้งที่ 1, สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2563

[2] A. Apostolico and A. S. Fraenkel, *Robust Transmission of Unbounded Strings Using Fibonacci Represen-tations*, IEEE Trans. Inform. Theory 33 (1987), 238–245.

[3] Brother Alfred Brousseau, *Fibonacci Magic Cards*, Fibonacci Quarterly, Vol. 10, No. 2, 1972, pp. 197-198.

[4] J. L. Brown, Jr., *Note on Complete Sequences of Integers*, The American Mathematical Monthly, Vol. 68, No. 6 (Jun. -Jul., 1961), pp. 557-560.

[5] J. L. BROWN, JR., *UNIQUE REPRESENTATIONS OF INTEGERS AS SUMS OF DISTINCT LUCAS NUMBERS*, Ordnance Research Laboratory, The Pennsylvania State University, State College, Pennsylvania, 1969, p. 243-252.

[6] A. S. Fraenkel and S. T. Klein, *Robust Universal Complete Codes for Transmission and Compression*, Discr. Appl. Math. 64 (1996), 31–55.

[7] V.K. Gupta, Yashwant K. Panwar and Omprakash Sikhwal, *Generalized Fibonacci Sequences*, Theoretical Mathematics & Applications, vol.2, no.2, 2012, p. 115-124.

[8] V. E. Hoggatt, Jr., and C. King, *Problem E1424*, Amer. Math. Monthly, Vol. 67, 1960, p. 593.

[9] Bencharat Prempreesuk, Passawan Noppakaew, Prapanpong Pongsriiam, *Zeckendorf Representation and Multiplicative Inverse of* F_m *mod* F_n*,* International Journal of Mathematics and Computer Science, 15(2020), no. 1, p. 17–25.

[10] R. Silber, *Wythoff 's Nim and Fibonacci Representations*, The Fibonacci Quartertly 15 (1977), 85–88.

[11] W. A. Wythoff, *A Modification of the Game of Nim*, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 7 (1907), 199–202.

[12] É. Zeckendorf, *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 1972.