



**ข้อเสนอโครงการวิทยาศาสตร์ โครงการ วมว. - ม.ศิลปากร
ประจำปีการศึกษา 2563**

ชื่อโครงการ (ภาษาไทย) : รูปทั่วไปของลำดับฟีโบนัคซีแบบสมบูรณ์

ชื่อโครงการ (ภาษาอังกฤษ) : On complete generalized Fibonacci sequences

- โครงการอยู่ในสาขาวิชา
- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> เคมี | <input type="checkbox"/> ชีววิทยาและความหลากหลายทางชีวภาพ |
| <input type="checkbox"/> ฟิสิกส์และดาราศาสตร์ | <input type="checkbox"/> วิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อมและนิเวศวิทยา |
| <input checked="" type="checkbox"/> คณิตศาสตร์และสถิติ | <input type="checkbox"/> เทคโนโลยีและคอมพิวเตอร์ |
| <input type="checkbox"/> สะเต็มและนวัตกรรม | |

1. ข้อมูลทั่วไป

1.1 ผู้ทำโครงการ

1.1.1 ชื่อ-นามสกุล: วิชาญ พรภาวนาเลิศ เลขที่: 27 ระดับชั้น: ม.5/1
โทรศัพท์: 096-9541074 E-mail: Phonphaowanaloed_w@sipakorn.edu

1.2 อาจารย์ที่ปรึกษาโครงการ

1.2.1 ประธานที่ปรึกษาหลัก

ชื่อ-นามสกุล: อ.ดร.ภาสวรรณ พนแก้ว ตำแหน่ง: อาจารย์
สถานที่ทำงาน: ภาควิชาคณิตศาสตร์,มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์
ที่อยู่ทำงาน: เลขที่ 6 ถนนราชมรรคาใน อำเภอเมือง จังหวัดนครปฐม 73000
โทรศัพท์: 034-245320-1 ต่อ 28116 E-mail: pas_sa_wan@hotmail.com

1.2.2 กรรมการที่ปรึกษา

ชื่อ-นามสกุล: อ.ดร.ธนากร ปริญญาศาสตร์ ตำแหน่ง: อาจารย์
สถานที่ทำงาน: ภาควิชาคณิตศาสตร์,มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์
ที่อยู่ทำงาน: เลขที่ 6 ถนนราชมรรคาใน อำเภอเมือง จังหวัดนครปฐม 73000
โทรศัพท์: 034-245320-1 ต่อ 28102 E-mail: thanakorn_dpst@gmail.com

2. คำสำคัญ (keywords) ของโครงการ

ลำดับสมบูรณ์, ลำดับฟีโบนัคชี, Zeckendorf representation, Fibonacci sequences

3. ระยะในการทำโครงการ

สิงหาคม 2563-มีนาคม 2564

4. ที่มาและความสำคัญของโครงการ

ลำดับฟีโบนัคชี $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$ ซึ่งลำดับฟีโบนัคชีเป็นลำดับสมบูรณ์ [8] และนอกจากนี้ยังพบว่าสำหรับจำนวนนับ m ใดๆจะสามารถเขียนในรูป

$$m = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i F_i, \alpha_i \in \{0,1\}$$

ได้แบบเดียวภายใต้เงื่อนไข $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$ ซึ่งการเขียนจำนวนเต็มใดๆ ในรูปผลรวมเชิงเส้นภายใต้เงื่อนไขกล่าวเรียกว่า Zeckendorf Representation [12] ซึ่งมีการนำ Zeckendorf Representation ไปประยุกต์ใช้ในการเข้ารหัสและด้านการเข้ารหัส [2,6] และยังใช้ในอัลกอริทึมสำหรับเกม [3,10,11] ทำให้การศึกษาลำดับสมบูรณ์และหาเงื่อนไขที่จะทำให้จำนวนนับใดๆสามารถเขียนได้ในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกในลำดับสมบูรณ์ได้เพียงแบบเดียวเป็นที่น่าสนใจต่อมาในปี 1969 J. L. BROWN [5] ได้ศึกษาเงื่อนไขที่ทำให้ลำดับลูคัสสามารถเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้นแต่ละจำนวนนับสามารถเขียนได้แบบเดียว ซึ่งลำดับ

ลูคัสนิยามโดยให้ $L_0 = 2, L_1 = 1$ และ $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ เมื่อ $n \geq 0$ J. L. BROWN พบว่าถ้า m ไม่เป็นจำนวนเต็มลบ แล้วจะมีลำดับ $(\alpha_n)_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$ ใน $\{0,1\}$ เพียงลำดับเดียวเท่านั้นที่ทำให้

$$m = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i L_i$$

เมื่อ $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$ สำหรับทุก $i \geq 0$ และ $\alpha_0 \alpha_2 = 0$

รูปแบบทั่วไปของฟีโบนัคชี $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับที่ถูกกำหนดโดย $A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2}$ เมื่อ A_1, A_2, a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จากการศึกษาเบื้องต้นพบว่า A_n ไม่จำเป็นต้องเป็นลำดับสมบูรณ์ เช่นเมื่อ $A_1 = A_2 = 1, (a, b) = (0,4)$ ดังนั้นผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษา (a, b) ทำให้ A_n เป็นลำดับสมบูรณ์ นอกจากนี้ผู้วิจัยต้องการเงื่อนไขที่ทำให้ผลรวมเชิงเส้นแต่ละจำนวนนับสามารถเขียนได้แบบเดียว

5. หลักการ เหตุผลและผลงานที่มีมาก่อน

5.1 หลักการและเหตุผล

บทนิยาม 1 ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมน เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก และมีเรนจ์ เป็นเซตของจำนวนจริง [1]

ตัวอย่าง ให้ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(n) = n + 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ แล้ว f เป็นลำดับ โดยเรานิยามเขียนแทนลำดับ f ด้วย $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$

บทนิยาม 2 ให้ $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับของจำนวนนับ เราจะกล่าวว่า $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ [4] ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละจำนวนนับ k จะมีลำดับ $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ใน $\{0,1\}$ ซึ่ง $k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$

ตัวอย่าง $A_n = \{1,2,3, \dots, n, \dots\}$, $B_n = \{1,1,1, \dots, 1, \dots\}$ และ $C_n = \{1,3,5, \dots, 2n-1, \dots\}$ จะเห็นได้ว่า A_n, B_n เป็นลำดับสมบูรณ์ แต่ C_n ไม่เป็นลำดับสมบูรณ์ เพราะ 2 ไม่สามารถเขียนในรูป $k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$ เนื่องจาก $C_1 < 2$ และ $C_n > 2$ สำหรับ $n \geq 2$

บทนิยาม 3 จะเรียกลำดับ $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ว่าเป็น ลำดับไม่ลด เมื่อ $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \dots \leq A_n \leq \dots$

ตัวอย่าง $A_n = \{1,1,2,2,3,3, \dots, n, n, \dots\}$ จะเห็นได้ว่า A_n เป็นลำดับไม่ลด

บทนิยาม 4 ให้ $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับไม่ลด ของจำนวนนับซึ่ง $A_1 = 1$ แล้ว $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ [4] ก็ต่อเมื่อ $A_{k+1} \leq 1 + \sum_{i=1}^k A_i$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $F_1 = 1, F_2 = 1$ และ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ แล้วลำดับ $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับไม่ลดอย่างเห็นได้ชัด นอกจากนี้จากอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เราจะสามารถพิสูจน์ได้ว่า $F_{n+2} \leq 1 + \sum_{i=1}^{n+1} F_i$ ดังนั้น F_n เป็นลำดับสมบูรณ์

บทนิยาม 5 รูปทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชี [7] คือ ลำดับ $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ซึ่ง A_1, A_2, a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2}$

5.2 ผลงานที่มีมาก่อน

5.2.1 J. L. BROWN, JR. [5] ได้ศึกษาเงื่อนไขที่ทำให้ลำดับลูคัส $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ซึ่งนิยามโดย $L_0 = 2, L_1 = 1$ และ $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ เมื่อ $n \geq 0$ ให้ m ไม่เป็นจำนวนเต็มลบแล้ว จะมีลำดับ $(\alpha_n)_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}}$ ใน $\{0,1\}$ เพียงลำดับเดียวเท่านั้นที่ทำให้

$$m = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i L_i$$

เมื่อ $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$ สำหรับทุก $i \geq 0$ และ $\alpha_0 \alpha_2 = 0$

6. วัตถุประสงค์ของโครงการ

6.1. ศึกษาคู่อันดับ (a, b) ที่ทำให้รูปทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชี $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์

6.2. ศึกษาเงื่อนไขที่ทำให้การเขียนจำนวนนับใดๆในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกในรูปทั่วไปของฟีโบนัชชีที่สมบูรณ์ สามารถเขียนได้แบบเดียวเท่านั้น

7. แผนการดำเนินโครงการ

7.1 ระเบียบวิธีดำเนินโครงการ

7.1.1 ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับลำดับ

7.1.2 ศึกษาข้อมูลที่เกี่ยวข้อง







7.1.3 หาคู่อันดับ (a, b) ที่ทำให้รูปทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชี $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์

7.1.4 หาเงื่อนไขที่ทำให้การเขียนจำนวนนับใดๆในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกในรูปทั่วไปของฟีโบนัชชีที่สมบูรณ์ สามารถเขียนได้แบบเดียวเท่านั้น

7.1.5 เขียนรายงาน

7.1.6 ตรวจสอบ และแก้ไขรายงาน

7.2. ตารางเวลาของกิจกรรม

กิจกรรม	เดือนที่								ผู้รับผิดชอบ
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	
	2563	2563	2563	2563	2563	2564	2564	2564	
ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับลำดับ									วิษณุ
ศึกษาข้อมูลที่เกี่ยวข้อง									
หาคู่อันดับ (a, b) ที่ทำให้รูปทั่วไปของลำดับฟีโบนัชชี $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์									
หาเงื่อนไขที่ทำให้การเขียนจำนวนนับใดๆในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกในรูปทั่วไปของฟีโบนัชชีที่สมบูรณ์ สามารถเขียนได้แบบเดียวเท่านั้น									
เขียนรายงาน									
ตรวจสอบและแก้ไขรายงาน									

8. ขอบเขตของโครงการ

ศึกษารูปแบบทั่วไปของฟีโบนัคซีซึ่ง A_1, A_2 เป็นจำนวนเต็มบวก

9. วัสดุ อุปกรณ์ และสถานที่ ที่ใช้

9.1 อุปกรณ์

-คอมพิวเตอร์

-กระดาษ

-เครื่องเขียน

-เครื่องคิดเลข

9.2 สถานที่ทำการทดลอง/เก็บข้อมูล

-อาคารวิทย์ 1 ชั้น 5 ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

10. งบประมาณ

รายการ	งบประมาณ(บาท)
ค่าวัสดุ	
กระดาษ	1000
เครื่องเขียน	1000
ค่าพิมพ์รายรายงาน	2000
ค่าโปสเตอร์	2000
อื่นๆ	2000
ค่าใช้สอย	
ค่าเดินทาง	2000
รวม	10000

*หมายเหตุ ขอถัวจ่ายทุกรายการ

11. ผลที่คาดว่าจะได้รับ

11.1. สามารถหาคู่อันดับ (a, b) ที่ทำให้รูปทั่วไปของลำดับฟีโบนัคซี $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์

11.2. สามารถหาเงื่อนไขที่ทำให้การเขียนจำนวนนับใดๆในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกในรูปทั่วไปของฟีโบนัคซีที่สมบูรณ์ สามารถเขียนได้แบบเดียวเท่านั้น

12. เอกสารอ้างอิง

- [1] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ, *รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1*, พิมพ์ครั้งที่ 1, สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2563
- [2] A. Apostolico and A. S. Fraenkel, *Robust Transmission of Unbounded Strings Using Fibonacci Representations*, IEEE Trans. Inform. Theory 33 (1987), 238–245.
- [3] Brother Alfred Brousseau, *Fibonacci Magic Cards*, *Fibonacci Quarterly*, Vol. 10, No. 2, 1972, pp. 197-198.
- [4] J. L. Brown, Jr., *Note on Complete Sequences of Integers*, The American Mathematical Monthly, Vol. 68, No. 6 (Jun. -Jul., 1961), pp. 557-560.
- [5] J. L. BROWN, JR., *UNIQUE REPRESENTATIONS OF INTEGERS AS SUMS OF DISTINCT LUCAS NUMBERS*, Ordnance Research Laboratory, The Pennsylvania State University, State College, Pennsylvania, 1969, p. 243-252.
- [6] A. S. Fraenkel and S. T. Klein, *Robust Universal Complete Codes for Transmission and Compression*, Discr. Appl. Math. 64 (1996), 31–55.
- [7] V.K. Gupta, Yashwant K. Panwar and Omprakash Sikhwal, *Generalized Fibonacci Sequences, Theoretical Mathematics & Applications*, vol.2, no.2, 2012, p. 115-124.
- [8] V. E. Hoggatt, Jr., and C. King, *Problem E1424*, Amer. Math. Monthly, Vol. 67, 1960, p. 593.
- [9] Bencharat Prempeesuk, Passawan Noppakaew, Prapanpong Pongsriiam, *Zeckendorf Representation and Multiplicative Inverse of F_m mod F_n* , International Journal of Mathematics and Computer Science, 15(2020), no. 1, p. 17–25.
- [10] R. Silber, *Wythoff's Nim and Fibonacci Representations*, The Fibonacci Quarterly 15 (1977), 85–88.
- [11] W. A. Wythoff, *A Modification of the Game of Nim*, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 7 (1907), 199–202.
- [12] É. Zeckendorf, *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 1972.

ลงชื่อ.....ผู้ทำโครงการงาน

(นายวิษณุ พรภาวนาเลิศ)

ลงชื่อ.....ประธานที่ปรึกษาหลัก

(อาจารย์ ดร.ภาสวรรณ พนแก้ว)

ลงชื่อ.....ประธานที่ปรึกษาหลัก

(อาจารย์ ดร.ธนากร ปริญญาศาสตร์)

ลงชื่อ.....เลขานุการคณะกรรมการวิชาการฯ

(อาจารย์ ดร.ภาณุพันธ์ ลิ้มปชยาพร)

ผลการพิจารณาข้อเสนอโครงการ

☐ อนุมัติ

☐ ไม่อนุมัติ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กนกอร ะยะยานิล)

รองคณบดีฝ่ายบริหาร

ประธานคณะกรรมการวิชาการและจัดการเรียนการสอนฯ