รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชีแบบสมบูรณ์

ON COMPLETE GENERALIZED FIBONACCI SEQUENCES

สมาชิก

นาย วิษณุ พรภาวนาเลิศ ม.5/1 เลขที่ 27

อาจารย์ที่ปรึกษา

อาจารย์ ดร.ภาสวรรณ นพแก้ว

อาจารย์ ดร.ธนากร ปริญญาศาสตร์

ที่มา และความสำคัญของโครงงาน

ลำดับฟิโบนักชี

$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$

$F_0 = 0$	$F_7 = 13$
$F_1 = 1$	$F_8 = 21$
$F_2 = 1$	$F_9 = 34$
$F_3 = 2$	$F_{10} = 55$
$F_4 = 3$	$\cdot$
$F_5 = 5$	$\cdot$
$F_6 = 8$	$\cdot$

รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชีแบบสมบูรณ์

ที่มา และความสำคัญของโครงงาน

ลำดับสมบูรณ์ [Brown,1961]

ให้ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับของจำนวนนับ เราจะกล่าวว่า $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็น**ลำดับสมบูรณ์** ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละจำนวนนับ k จะมีลำดับ $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ใน $\{0,1\}$ ซึ่ง $k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i$

ตัวอย่าง $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{1,1,1,\ldots,1,\ldots\}$ และ $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{1,3,5,\ldots,2n-1,\ldots\}$ จะเห็นได้ว่า $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$เป็นลำดับสมบูรณ์ แต่ $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ไม่เป็นลำดับสมบูรณ์เพราะ 2 ไม่สามารถเขียนในรูป $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i C_i$ เนื่องจาก $C_1 < 2$ และ $C_n > 2$ สำหรับ $n \geq 2$

ที่มา และความสำคัญของโครงงาน

ลำดับฟิโบนักชี

$(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ สำหรับ $n \geq 2$

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_3 = 2$$
$$F_4 = 3$$
$$F_5 = 5$$
$$F_6 = 8$$

$$F_7 = 13$$
$$F_8 = 21$$
$$F_9 = 34$$
$$F_{10} = 55$$
$$\vdots$$

$$1 = F_1 = F_2$$
$$2 = F_1 + F_2 = F_3$$
$$3 = F_1 + F_3 = F_2 + F_3$$
$$4 = F_1 + F_4 = F_2 + F_4$$
$$5 = F_3 + F_4 = F_5$$
$$6 = F_2 + F_3 + F_4 = F_1 + F_5$$
$$\vdots$$

ที่มา และความสำคัญของโครงงาน

Zeckendorf Representation [Zeckendorf,1972]

สำหรับจำนวนนับ m ใด ๆ จะสามารถเขียนในรูป

$$m = \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i F_i \, , \alpha_i \in \{0,1\}$$

ได้แบบเดียวภายใต้เงื่อนไข $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$

$$1 = F_2$$
$$2 = F_3$$
$$3 = F_1 + F_3$$
$$4 = F_2 + F_4$$
$$5 = F_5$$
$$6 = F_1 + F_5$$
$$7 = F_3 + F_5$$
$$\vdots$$

ที่มา และความสำคัญของโครงงาน

รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชี [Gupta,2012]

รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชี คือ ลำดับ $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ซึ่ง A_1, A_2, a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $A_n = aA_{n-1} + bA_{n-2}$

$$A_1 = 1, A_2 = 1, a = 1, b = 1$$
$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$$
$$A_1 = 1$$
$$A_2 = 1$$
$$A_3 = 2$$
$$A_4 = 3$$
$$A_5 = 5$$

$$A_1 = 1, A_2 = 1, a = 1, b = 4$$
$$A_n = A_{n-1} + 4A_{n-2}$$
$$A_1 = 1$$
$$A_2 = 1$$
$$A_3 = 5$$
$$A_4 = 9$$
$$A_5 = 29$$

วัตถุประสงค์

- ศึกษาคู่อันดับ (a, b) ที่ทำให้รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชี $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์
- ศึกษาเงื่อนไขที่ทำให้การเขียนจำนวนนับใด ๆ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกในรูปทั่วไปของฟิโบนักชีที่สมบูรณ์สามารถเขียนได้แบบเดียวเท่านั้น

ขอบเขตของการศึกษา

ศึกษารูปทั่วไปของฟิโบนักชีซึ่ง A_1, A_2 เป็นจำนวนเต็มบวก

ผลการศึกษา

(a,b)	เงื่อนไข
$(0,1)$	$\alpha_{\mathrm{i}} = 0$ สำหรับทุก $i > n$
$(0,2)$	$\alpha_{2\mathrm{i}-1} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
$(0,3)$	$\alpha_{2\mathrm{i}-1} \leq \alpha_{\mathrm{i}}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
$(1,0)$	$\alpha_{\mathrm{i}} = 0$ สำหรับทุก $i > n$
$(1,1)$	$\alpha_1 = 0, \alpha_{\mathrm{i}}\alpha_{\mathrm{i}+1} = 0$กสำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
$(1,2)$	$\min\{k \mid \alpha_k = 1\}$ เป็นจำนวนคี่
$(2,0)$	$\alpha_1 = 0$

แสดงคู่อันดับ (a,b) ที่ทำให้รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชี $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ และเงื่อนไขที่ทำให้การเขียนจำนวนนับใด ๆ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกในรูปทั่วไปของฟิโบนักชีที่สมบูรณ์ สามารถเขียนได้แบบเดียวเท่านั้น เมื่อ $A_1 = 1,\ A_2 = 1$

ผลการศึกษา

(a,b)	เงื่อนไข
$(0,2)$	$\alpha_{2\mathrm{i}} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
$(0,3)$	$\alpha_{\mathrm{i}}\alpha_{\mathrm{i}+1} = 0$ สำหรับทุก i ที่เป็นจำนวนคี่
$(0,4)$	$-$
$(1,0)$	$\alpha_{2\mathrm{i}+1} \leq \alpha_{\mathrm{i}}$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N} - \{1\}$
$(1,1)$	$\alpha_{\mathrm{i}}\alpha_{\mathrm{i}+1} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
$(1,2)$	$-$
$(2,0)$	$-$

แสดงคู่อันดับ (a,b) ที่ทำให้รูปทั่วไปของลำดับฟิโบนักชี $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ เป็นลำดับสมบูรณ์ และเงื่อนไขที่ทำให้การเขียนจำนวนนับใด ๆ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกในรูปทั่วไปของฟิโบนักชีที่สมบูรณ์ สามารถเขียนได้แบบเดียวเท่านั้น เมื่อ $A_1 = 1,\ A_2 = 2$

สรุป

$A_1 = 1, A_2 = 1$

(a,b)	เงื่อนไข
$(0,1)$	$\alpha_i = 0$ สำหรับทุก $i > n$
$(0,2)$	$\alpha_{2i-1} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
$(0,3)$	$\alpha_{2i-1} \leq \alpha_i$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
$(1,0)$	$\alpha_i = 0$ สำหรับทุก $i > n$
$(1,1)$	$\alpha_1 = 0, \alpha_i\alpha_{i+1} = 0$กสำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
$(1,2)$	$\min\{k \vert \alpha_k = 1\}$ เป็นจำนวนคี่
$(2,0)$	$\alpha_1 = 0$

$A_1 = 1, A_2 = 2$

(a,b)	เงื่อนไข
$(0,2)$	$\alpha_{2i} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
$(0,3)$	$\alpha_i\alpha_{i+1} = 0$ สำหรับทุก i ที่เป็นจำนวนคี่
$(0,4)$	$-$
$(1,0)$	$\alpha_{2i+1} \leq \alpha_i$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N} - \{1\}$
$(1,1)$	$\alpha_i\alpha_{i+1} = 0$ สำหรับทุก $i \in \mathbb{N}$
$(1,2)$	$-$
$(2,0)$	$-$

เอกสารอ้างอิง

[1] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ, รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 เล่ม 1, พิมพ์ครั้งที่ 1, สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2563

[2] A. Apostolico and A. S. Fraenkel, Robust Transmission of Unbounded Strings Using Fibonacci Representations, IEEE Trans. Inform. Theory 33 (1987), 238–245.

[3] Brother Alfred Brousseau, Fibonacci Magic Cards, Fibonacci Quarterly, Vol. 10, No. 2, 1972, pp. 197-198.

[4] J. L. Brown, Jr., Note on Complete Sequences of Integers, The American Mathematical Monthly, Vol. 68, No. 6 (Jun. -Jul., 1961), pp. 557-560.

[5] J. L. BROWN, JR., *UNIQUE REPRESENTATIONS OF INTEGERS AS SUMS OF DISTINCT LUCAS NUMBERS*, Ordnance Research Laboratory, The Pennsylvania State University, State College, Pennsylvania, 1969, p. 243-252.

[6] A. S. Fraenkel and S. T. Klein, *Robust Universal Complete Codes for Transmission and Compression*, Discr. Appl. Math. 64 (1996), 31–55.

[7] V.K. Gupta, Yashwant K. Panwar and Omprakash Sikhwal, *Generalized Fibonacci Sequences, Theoretical Mathematics & Applications*, vol.2, no.2, 2012, p. 115-124.

[8] V. E. Hoggatt, Jr., and C. King, *Problem E1424*, Amer. Math. Monthly, Vol. 67, 1960, p. 593.

[9] Bencharat Prempreesuk, Passawan Noppakaew, Prapanpong Pongsriiam, *Zeckendorf Representation and Multiplicative Inverse of F_m mod F_n,* International Journal of Mathematics and Computer Science, 15(2020), no. 1, p. 17–25.

[10] R. Silber, *Wythoff 's Nim and Fibonacci Representations*, The Fibonacci Quartertly 15 (1977), 85–88.

[11] W. A. Wythoff, *A Modification of the Game of Nim*, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 7 (1907), 199–202.

[12] É. Zeckendorf, *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 1972.