测度论

基本概念

σ-代数

- 定义:
  设X为非空集合，$\mathcal{F}$ 中的元素是 X 的子集合，满足以下条件的集合系$\mathcal{F}$称为X上的一个σ代数:
  X在$\mathcal{F}$中;
  如果一个集合A在$\mathcal{F}$中，那么它的差集A^c也在$\mathcal{F}$中。
  如果有可数个集合$A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$都在$\mathcal{F}$中，那么它们的并集也在$\mathcal{F}$中。

  用数学语言来表示，就是
  $X \in \mathcal{F}$;

$$A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F};$$

$$(\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \in \mathcal{F}) \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

不借助逻辑符号的话，也可以使用如下定义：
设X为非空集合。则X上的一个σ代数是指其幂集的一个子集合 $\mathcal{F}$， $\mathcal{F}$ 中的元素，在经过有限个差集、交集或可数个并集这三种运算后依然属于 $\mathcal{F}$，也就是说 $\mathcal{F}$ 对这三运算是封闭（closed）的 。

- 概念理解
  在测度论里 $(X, \mathcal{F})$称为一个可测空间。 集合族 $\mathcal{F}$ 中的元素，也就是 X 的某子集，称为可测集合。而在概率论中，这些集合被称为随机事件。
  是测度论的基础概念之一。

- 例子：
  有两个σ-代数的简单例子，它们分别是：
  X上含集合最少的σ代数$\{\emptyset, X\}$；和
  X上含集合最多的σ代数是X的幂集$2^X := \{A : A \subset X\}$。
  假设集合$X = \{a, b, c, d\}$，那么$\mathcal{F} = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c, d\}, X\}$ 是集合X上的一个σ代数。
  这也是所有包含$\{a\}$的σ代数中最“小”的一个。

勒贝格σ代数

1901年亨利·勒贝格建立的勒贝格σ代数。而现代的测度理论的公理化体系就建立在勒贝格的相关理论之上。在这个领域中，σ代数不仅仅是用于建立公理体系，也是一个强有力的工具，在定义许多重要的概念如条件期望和鞅的时候，都需要用到。