Vaja 31

TORZIJSKO NIHALO

31.1 Lastno nihanje torzijskega nihala

Lastno nedušeno nihanje torzijskega nihaka opišemo z enačbo:

$$\phi = A\sin(\omega_0 t) \tag{31.1}$$

kjer je ϕ odmik nihala iz ravnovesne lege, A amplituda in $\omega_0 = \sqrt{D/J}$ lastna krožna frekvenca nihala, odvisna od koeficienta vzmeti D in od vztrajnostnega momenta nihala J. Čas štejemo od trenutka, ko gre nihalo skozi ravnovesno lego.
V resnici se pri vsakem, samemu sebi prepuščenem nihanju amplituda neprestano manjša, ker se energija nihanja manjša na račun negativnega dela trenja in upora. Pravimo, da je nihanje dušeno. Tako nihanje opišemo z nastavkom

$$\phi = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_d t) \tag{31.2}$$

kjer je A_0 začetna amplituda, β koeficient dušenja, ω_d pa krožna frekvenca nihala. Ta je zaradi dušenja manjša od ω_0, namreč

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{31.3}$$

Iz enačbe 31.2 vidimo, da je amplituda po n nihajih enaka:

$$A_n = A_0 e^{-\frac{2\pi\beta n}{\omega_d}} \tag{31.4}$$

Z logaritmiranjem lahko izračunamo:

$$\beta = \frac{\omega_d}{2\pi n}\ln\frac{A_0}{A_n} \tag{31.5}$$

31.2 Vsiljeno nihanje torzijskega nihala

V obeh navedenih primerih smo v začetku gibanja pognali nihalo iz ravnovesnega položaja s kratkim sunkom $M\delta t$ zunanjega navora M, kasneje pa na nihalo ni deloval noben zunanji navor več (navor trenja štejemo kot notranji navor). Nihalo niha s frekvenco, ki je določena z lastnostmi nihala (J, D, β), amplituda pa je odvisna od velikosti začetnega sunka.
Če pa na nihalo stalno deluje sinusno nihajoč zunanji navor, $M = M_0 \sin(\omega t)$, se kmalu ustali s frekvenco tega navora, le da obe nihanji nista v fazi. Pravimo, da nihalo vsiljeno niha. Tako nihanje opišemo z izrazom

$$\phi = B \sin(\omega t - \delta) \tag{31.6}$$

Amplituda B je odvisna od amplitude M_0 navora M, razen tega pa od krožne frekvence β in od lastnosti nihala. δ je zakasnitev (fazni premik) nihal glede na M:

$$B = \frac{B_0}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + a^2(\omega/\omega_0)^2}} \tag{31.7}$$

$$B_0 = \frac{M_0}{D} \tag{31.8}$$

$$a = \frac{2\beta}{\omega_0} \tag{31.9}$$

$$\tan\delta = \frac{a(\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \tag{31.10}$$

Amplituda B je konstantna, ker dovajana moč P, s poprečno vrednostjo

$$\overline{P} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\phi = \frac{1}{2}\omega M_0 B \sin(\delta) \tag{31.11}$$

ravno pokriva energijske izgube nihala.
Če spreminjamo frekvenco zunanjega navora M, lahko zasledujemo odvisnost amplitude B od frekvence. Pri majhnih ($\omega/\omega_0 \ll 1$) je odmik nihala iz ravnovesne lege ves čas skoraj sorazmeren z navorom M, amplituda pa je $B = B_0 = M_0/D$; fazna razlika med obema nihanjima je zelo majhna ($\delta \approx 0$).
Ko povečujemo frekvenco navora, se amplituda povečuje in doseže pri $\omega \approx \omega_0$ največjo vrednost. Pravimo, de je tedaj nihalo v resonanci z navorom. Fazni premik je tedaj približno 90° - nihalo zaostaja za navorom za četrt nihaja. Poprečna moč (glej enačbo), ki jo nihalo sprejema, je v okolici resonance največja. Pri nadaljnjem večanju frekvence začne amplituda padati, nihalo pa vedno bolj zaostaja za navorom. Pri $\omega \gg \omega_0$ gre amplituda B proti nič, fazni premik pa proti 180°.
Krivuljo, ki nam kaže odvisnost razmerja B/B_0 od frekvence navora, imenujemo resonančna krivulja (glej Kuščer, Moljk: Fizika II. del, pogl. 16).

31.3 Naloga

Izmeri in izračunaj resonančno krivuljo za torzijsko nihalo pri dveh različnih dušenjih!

31.4 Potrebščine

1. Torzijsko nihalo,
2. elektromotor z vzvodom,
3. štoparica.

31.5 Navodilo

Priprava, s katero si bomo ogledali vsiljeno nihanje je sestavljena iz torzijskega nihala na vijačno vzmet in generatorja spremenljive frekvence. En konec vijačne vzmeti je pritrjen na drog, ki ga poganjamo z jedrom tuljave po kateri teče izmenični tok iz generatorja. Jedro tuljave je premično vpeto z vzmetjo. Če premiki vzvoda niso veliki, drog pri tem sinusno niha in povzroča na nihalu sinusen navor. Če štejemo čas od trenutka, ko gre drog skozi ravnovesno lego, lahko postavimo, da je navor enak $M = M_0 \sin(\omega t)$, kot smo prej računali. Frekvenco droga in s tem tudi navora spreminjamo z generatorjem. Ob kolesu nihala je pritrjen magnet, s katerim spreminjamo dušenje.
Naravnaj magnet tako, da je dušenje majhno. Izmeri nihajni čas: poženi nihalo s prstom in izmeri čas, potreben za 5 ali 10 nihajev - s tem podatkom izračunaš ω_d. Obenem odberi tudi prvo in zadnjo amplitudo na isti strani (A_0 in A_5 ali A_{10}). S tem izračunaš koeficient dušenja β. Sedaj lahko izračunaš še lastno frekvenco ω_0, ki bi jo imelo nedušeno nihalo:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \beta^2}. \tag{31.12}$$

Preden se lotiš meritev, najprej na hitro "otipaj"resonančno krivuljo. S potenciometrom spreminjaj frekvenco vzbujanja. Tako dobiš približno sliko o resonančni krivulji preden se lotiš natančnejše meritve. S potenciometrom naravnaj frekvenco na najmanjšo mogočo vrednost! Počakaj, da se nihanje ustali in šele nato izmeri nihajni čas nihala, ki se ujema z nihajnim časom droga. Na ta način določiš amplitudo B_0. Nato postopoma povečuj frekvenco. Zapiši amplitudo B; vedno odčitavaj na isti strani. Z opazovanjem nihanja kazalca na nihalu in kazalca na drogu lahko oceniš še fazni premik med nihanjima. Meritve ponavljaj pri rastočih frekvencah. Posebno na gosto meri okrog resonance. Tam moraš spreminjati frekvenco zelo počasi in previdno, sicer lahko resonančno frekvenco preskočiš. Na obeh straneh resonance, kjer se amplituda bolj počasi spreminja z vsiljeno frekvenco, pa meri bolj na redko. Ponovi celotno meritev še pri večjem dušenju, t.j. pri drugačni legi magneta.

Obe meritvi vnesi v isti diagram! Kot absciso nanašaj ω/ω_0, kot ordinato pa B/B_0. Določi še enačbo za resonančno krivuljo z merjenimi B_0, ω_0 in β, jo načrtaj in jo primerjaj z izmerjeno. Izračunaj in nariši še diagram za fazni premik in povprečno sprejeto moč v odvisnosti od ω/ω_0!

31.6 Dodatek za matematike in fizike

Gibalna enačba za vsiljeno nihanje torzijskega nihala:

Na nihalo delujejo v našem primeru trije navori: navor droga, navor vzmeti in navor upora. Če drog sinusno niha s krožno frekvenco ω in dovolj majhno amplitudo, je njegov navor enak $M_0 \sin(\omega t)$, če se domenimo, da štejemo čas od trenutka, ko je navor enak 0. Navor vzmeti je enak $-D\phi$, kjer je D koeficient vzmeti, ϕ pa kot, za katerega nihalo zasukamo iz ravnovesne lege. Za navor upora navadno privzamemo, da je sorazmeren s kotno hitrostjo $\dot{\phi}$. Ker ta navor gibanje zavira, postavimo, da je enak $-R\dot{\phi}$, pri čemer je R koeficient upora. Vsota vseh treh navorov je enaka časovnemu odvodu vrtilne količine nihala, t.j. $J\ddot{\phi}$

$$J\ddot{\phi} = M_0 \sin(\omega t) - D\phi - R\dot{\phi} \tag{31.13}$$

Zapišimo enačbo nekoliko drugače

$$\ddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = \frac{M_0}{J}\sin(\omega t), \tag{31.14}$$

kjer je $\beta = R/2J$ in $\omega_0^2 = D/J$. Enačbo rešimo z nastavkom, ki nam ga narekuje eksperiment: nihalo niha po daljšem času prav tako sinusno in z enako frekvenco kot drog, le da obe nihanji nista v fazi. Zato postavimo:

$$\phi = B\sin(\omega t - \delta) \tag{31.15}$$

kjer je B za zdaj še neznana amplituda in δ neznani fazni premik. Nastavek 31.15 vstavimo v enačbo 31.14 in upoštevamo, da ji mora identično ustrezati ob vsakem času, pa dobimo že znani vrednosti za B in $\tan\delta$.
Iz enačbe 31.14 lahko izračunamo tudi lastno dušeno nihanje torzijskega nihala, če postavimo $M_0/J = 0$. Gibalno enačbo, ki jo tako dobimo, poskusimo rešiti z nastavkom

$$\phi = A\sin(\omega_d t) \tag{31.16}$$

$$A = A_0 e^{-\alpha t} \tag{31.17}$$

kjer je A_0 začetna amplituda, ω_d frekvenca nihanja in α neznani koeficient. To vstavimo v zgornjo enačbo in upoštevamo, da mora biti ves čas izpolnjena, pa dobimo znane zveze:

$$\alpha = \beta \tag{31.18}$$

$$\omega_d^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \tag{31.19}$$

Amplituda A_0 je še nedoločena in je odvisna od tega, s kolikšno hitrostjo poženemo nihalo iz ravnovesne lege.