

Vaja 32 Sklopljeno nihanje

Jure Kos

5.1.2022

Uvod

Oglejmo si nihanje nihala, sestavljenega iz dveh enakih težnih nihali, povezanih s prožno vzmetjo. Če vzmet odstranimo, niha vsako nihalo zase s frekvenco

$$\omega_0 = \sqrt{D/J}$$

, torej niha z nihajnim časom $t_0 = 2\pi\sqrt{J/D}$, kjer je J vztrajnostni moment nihala in D koeficient navora. Ko obe nihali povežemo z vzmetjo, ne moreta več nihati neodvisno, ampak vplivata drugo na drugo. Pravimo, da sta nihali sklopljeni. Račun pokaže, da lahko poljubno nihanje dveh sklopljenih nihali opišemo z linearno kombinacijo dveh sinusnih nihanj, ki jih imenujemo lastni nihanji. Frekvenci lastnih nihanj sta lastni frekvenci, nihajna časa pa lastna nihajna časa. Pri tej vaji želimo izračunati gravitacijski pospešek Zemlje. Pri tem uporabimo popravke, ki nam zgornjo formulo naredijo natančnejšo.

Meritve

Da bi najprej dobili koeficient vzmeti, smo ob spreminjanju sile opazovali raztezke vzmeti. Podatki so zbrani v tabeli

	x [m]	F [N]
1	0.011	0.2424
2	0.023	0.4996
3	0.06	1.4774

Tabela 1: Tabela meritev za izračun koeficienta vzmeti

Koeficient vzmeti določimo iz linearne regresije Hookovega zakona, saj velja $F = kx$. Koeficient k je torej strmina premice na grafu $F(x)$. S programom *gnuplot* sem prilagodila premico na meritve in dobila funkcijo

$$F(x) = (24,1885 \pm 0,7224) \frac{N}{m} \cdot x,$$

oziroma koeficient vzmeti je $k = 24,1885 \pm 0,7224 \frac{N}{m} = 24,1885(1 \pm 0,02995) \frac{N}{m}$

Slika 1: Graf meritev in prilagojena premica

Odklon nihal v isti smeri

Pri prvem delu smo obe nihali odklinili v isto smer in opazovali gibanje. Izmerili smo sledeče podatke:

- amplituda $x_0 = 10 \text{ cm} \pm 0,5 \text{ cm}$
- dolžina nihala $d_0 = 85,5 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$
- masa nihala $m = 1270 \text{ g} \pm 1 \text{ g}$

Izmerili smo tudi čas 30 nihajev, kjer meritve zopet predstavimo v tabeli

Meritev 30 nihajev	t [s]
1	56,40
2	56,17
3	56,28
4	56,32

Tabela 2: Tabela meritev časa 30 nihajev pri odklonu v isto smer

Izračunamo povprečen čas 30 nihajev

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{4} = 56,293s \pm 0,005s$$

Absolutna napaka posamezne meritve je $\delta t = 0,01s$, ki pa se s povprečenjem zmanjša kot $\delta \bar{t} = \frac{\delta t}{\sqrt{n}} = \frac{0,01s}{\sqrt{4}} = 0,005s$.

Povprečen nihajni čas enega nihaja je tako

$$t_0 = \frac{\bar{t}}{30} = 1,876s \pm 0,0002s$$

Izračunamo lahko tudi krožno frekvenco nihala kot

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0} = 3,349s^{-1}$$

Odklon nihal v nasprotni smeri

Pri drugem delu smo merili iste količine, le da smo nihali odklonili v nasprotnih smereh. Dolžina je v tem primeru $d = 17cm$.

Podatki so predstavljeni v tabeli

Meritev 30 nihajev	t [s]
1	50,82
2	50,46
3	50,20
4	50,66

Tabela 3: Tabela meritev časa 30 nihajev pri odklonu v nasprotno smer

Po istem postopku izračunamo povprečen nihajni čas enega nihaja in krožno frekvenco nihala

$$t_1 = 1,685s \pm 0,0002s$$

$$\omega_1 = 3,729s^{-1}$$

Odklonitev posameznega nihala

Zdaj odklonimo le eno nihalo, drugo pa na začetku miruje v ravnovesni legi. Merili smo čas 15 nihajev vsakega nihala in zopet podatke zbrali v tabeli

Meritev 15 nihajev	Nihalo 1 t [s]	Nihalo 2 t [s]
1	28,53	27,48
2	28,65	27,66
3	28,31	27,52

Tabela 4: Meritev 15 nihajev posameznega nihala

Po podobnih postopkih lahko izračunamo povprečni čas t' in krožno frekvenco ω'

$$t' = 1,8683s$$

$$\omega' = 3,363s^{-1}$$

Izmerili smo tudi čas med dvema mirovnima legama

$$T = 18,5s \pm 0,1s$$

ter frekvenco utripanja

$$\omega_u = \frac{2\pi}{T} = 0,340s^{-1}$$

Izračuni

Odklon nihal v isti smeri

Izračunamo lahko koeficient prožnosti $D = mgd_0 = 10,6 \frac{m^2 kg}{s^2} (1 \pm 0,07)$. Del naloge je tudi primerjava izmerjenih količin s teoretično izračunanimi. Za prvo nihanje lahko izračunamo nihajni čas in frekvenco kot

$$\tilde{t}_0 = 2\pi \sqrt{\frac{d_0}{g}} = 1,855s(1 \pm 0,006)$$

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{2\pi}{\tilde{t}_0} = 3,387s^{-1}$$

kjer z znakom \sim označim izračunano vrednost.

Izračunamo lahko tudi vztrajnostni moment nihala kot

$$\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\frac{D}{J}} \longrightarrow J = \frac{D}{\omega_0^2} = 3,13 \frac{m^2 kg}{s^2} (1 \pm 0,013)$$

kjer sem uporabila izračunano vrednost.

Odklon nihal v nasprotni smeri

Izračunajmo koeficient navora v tem primeru D' kot

$$D' = kd^2 = 0,6990Nm$$

in frekvenco

$$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{D + 2D'}{J}} = 1,858s^{-1}(1 \pm 0,026)$$

$$\tilde{t}_1 = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}_1} = 1,69s(1 \pm 0,042)$$

Odklonitev posameznega nihala

Tudi pri tretjem načinu nihanja lahko izračunamo nihajne čase in frekvence kot

$$\tilde{t}' = \frac{2\tilde{t}_0\tilde{t}_1}{\tilde{t}_0 + \tilde{t}_1} = 1,769s(1 \pm 0,032)$$

$$\tilde{\omega}' = \frac{\tilde{\omega}_0 + \tilde{\omega}_1}{2} = 2,865 \text{ s}^{-1}(1 \pm 0,032)$$

Izračunamo lahko tudi čas med dvema mirovnima legama

$$\tilde{T} = \frac{t_1 t_0}{t_0 - t_1} = 19,00 \text{ s}(1 \pm 0,025)$$

ter frekvenco utripanja

$$\tilde{\omega}_u = \tilde{\omega}_0 - \tilde{\omega}_1 = 0,36 \text{ s}^{-1}(1 \pm 0,022)$$

Tabela rezultatov

Vse rezultate, izmerjene in izračunane lahko predstavim v tabeli

Količina	t_0 [s]	t_1 [s]	t' [s]	$\omega_0 \text{ s}^{-1}$	$\omega_1 \text{ s}^{-1}$	$\omega' \text{ s}^{-1}$	T[s]	$\omega_u \text{ s}^{-1}$
Izmerjeno	1,876	1,685	1,8683	3,349	3,729	3,363	18,5	1,340
Izračunano	1,855	1,69	1,769	3,387	1,858	2,865	19,0	0,36

Tabela 5: Tabela vseh izmerjenih in izračunanih vrednosti

Izračunamo lahko še faktorja sklopitve K_1 in K_2

$$K_1 = \frac{1 - \frac{\omega_0}{\omega_1}}{1 + \frac{\omega_0}{\omega_1}} = 0,107$$

$$K_2 = \frac{D'}{D + D'} = 0,0062(1 \pm 0,22)$$