

Vaja 32

SKLOPLJENO NIHANJE

Oglejmo si nihanje nihala, sestavljenega iz dveh enakih težnih nihali, povezanih s prožno vzmetjo.

Če vzmet odstranimo, niha vsako nihalo zase s frekvenco $\omega_o = \sqrt{D/J}$, torej niha z nihajnim časom $t_o = 2\pi\sqrt{J/D}$, kjer je J vztrajnostni moment nihala in D koeficient navora. Ko obe nihali povežemo z vzmetjo, ne moreta več nihati neodvisno, ampak vplivata drugo na drugo. Pravimo, da sta nihali sklopljeni. Račun pokaže, da lahko poljubno nihanje dveh sklopljenih nihali opišemo z linearno kombinacijo dveh sinusnih nihanj, ki jih imenujemo lastni nihanji. Frekvenci lastnih nihanj sta lastni frekvenci, nihajna časa pa lastna nihajna časa.

32.1 Lastni nihanji in lastni frekvenci

Poženimo nihali z enakima sunkoma v isto smer. Nihali nihata tedaj sočasno in z enakima amplitudama, vzmet pa je ves čas napeta in ne vpliva na nihanje. Nihali imata zato enako frekvenco, kot če sta ločeni, t.j. ω_o . To je prva lastna frekvenca, nihanje pa prvo lastno nihanje. Opišemo ga lahko z izrazom:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = A \cos(\omega_o t), \quad (32.1)$$

kjer sta φ_1 in φ_2 odklona nihali iz ravnovesne lege, A pa je amplituda. Čas štejemo od trenutka, ko sta nihali v amplitudi.

Poženimo sedaj nihali z enakima sunkoma v nasprotnih smereh. Nihali nihata drugo proti drugemu z enako amplitudo. Pri takem nihanju se napetost vzmeti neprestano spreminja, zaradi česar deluje na nihali dodaten spremenljiv navor:

$$M' = D'(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (32.2)$$

kjer je D' koeficient odvisen od koeficienta vzmeti in od lege prijemališča vzmeti (glej navodilo). Zaradi tega navora nihata nihali hitreje in sicer s frekvenco

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D + 2D'}{J}} \quad (32.3)$$

oziroma z nihajnim časom: $t_1 = 2\pi/\omega_1$. To sta druga lastna frekvenca in drugi lastni nihajni čas obeh nihali, opisano nihanje pa je drugo lastno nihanje. Opišemo ga z izrazom:

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = A \cos(\omega_1 t); \quad (32.4)$$

čas šteujemo kot prej.

32.2 Splošno nihanje sestavljenega nihala - utripanje

V splošnem opišemo nihanje sklopljenih nihali z vsoto in razliko lastnih nihanj, ki pa sta lahko še poljubno fazno premaknjeni:

$$\varphi_1 = A \cos(\omega_o t - \delta_1) + B \cos(\omega_1 t - \delta_2) \quad (32.5)$$

$$\varphi_2 = A \cos(\omega_o t - \delta_1) - B \cos(\omega_1 t - \delta_2) \quad (32.6)$$

Konstanti A in B , pa fazna kota δ_1 in δ_2 so odvisni od tega, kako vzbudimo nihanje in od kdaj šteujemo čas.

Oglejmo si poseben primer sestavljenega nihanja. Odklonimo eno nihalo za amplitudo A , drugo pa zadržimo v ravnovesni legi in obe hkrati spustimo! Poskus pokaže, da nihali utripata - energija se prenaša s prvega nihala na drugo, pa spet nazaj. Tako nihanje lahko opišemo z zgornjo enačbo, če postavimo, da imata obe lastni nihanji enaki amplitudi in enaki fazi:

$$\varphi_1 = A(\cos \omega_o t + \cos \omega_1 t) \quad (32.7)$$

$$\varphi_2 = A(\cos \omega_o t - \cos \omega_1 t) \quad (32.8)$$

Po znani trigonometrični zvezi sledi:

$$\varphi_1 = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_o}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_o}{2}t\right) \quad (32.9)$$

$$\varphi_2 = 2A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_o}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_o}{2}t\right) \quad (32.10)$$

Nihali nihata torej s frekvenco

$$\omega' = \frac{\omega_0 + \omega_1}{2}, \quad (32.11)$$

ki ji ustreza nihajni čas $t' = 2t_1t_o/(t_1 + t_o)$. Njuni amplitudi pa se spreminjata, kot kažeta oglata oklepaja v enačbah. Prvo nihalo ima največji odklon, ko drugo miruje in obratno - to je utripanje, ki nam ga je pokazal poskus. Čas T med dvema zaporednima mirovanjema istega nihala dobimo tedaj iz

$$\frac{\omega_1 - \omega_o}{2}T = \pi, \quad (32.12)$$

torej $1/T = 1/t_1 - 1/t_o$. Temu ustreza frekvenca utripanja: $\omega_u = \omega_1 - \omega_o$.

32.3 Naloga

Opazuj sklopljeno nihanje dveh enakih fizičnih nihal! Izmeri in izračunaj lastni krožni frekvenci ω_o in ω_1 ter še ω' in ω_u ! Določi koeficient vzmeti, izračunaj D' in faktor sklopitve $K = D'/(D + D')$!

32.4 Potrebščine

1. Nihali na stojalu,
2. vzmeti za sklopitev,
3. merilo za določevanje koeficienta vzmeti,
4. centimetrsko merilo, kljunasto merilo,
5. tehtnica,
6. uteži 5 g, 10 g, 20 g,
7. štoparica*.

32.5 Navodilo

1. Skrbno preveri, če sta nihali pravilno nameščeni tako, da sta osi natančno v ležiščih. Pri vsakem nihalu izmeri čas 20 do 40 nihajev ter izračunaj nihajni čas in frekvenco. Če se nihajna časa ne ujemata bolje kot na 1%, ju izravnaj s premikanjem uteži!
2.
 - Spni nihalo z vzmetjo! Vzmet pripni v taki višini, da pade v en utrip 20 do 30 nihajev enega nihala. Pazi, da ostane vzmet napeta tudi pri največjih razlikah v odmikih nihal.
 - Odkloni nihali v isti smeri za enako amplitudo in ju hkrati spusti! Pri vsakem nihalu izmeri čas 30 do 40 nihajev in vsakokrat napravi 4 do 5 meritev. Tako dobiš t_o in ω_o .
 - Odkloni nihali v nasprotnih smereh! Meri kot prej in izračunaj t_1 in ω_1 !

- Zadrži eno nihalo v ravnovesni legi in odkloni drugo za amplitudo A ! Spusti obe nihali hkrati! Nekajkrat izmeri čas 15 do 20 nihajev posameznega nihala in izračunaj nihajni čas t' in frekvenco ω' . Iz opazovanja 4 do 5 mirovanj posameznega nihala izračunaj T in frekvenco utripanja ω_u ! Meri vsaj po dvakrat na vsakem nihalu! Primerjaj izmerjene vrednosti z vrednostmi, ki jih po zgornjih enačbah izračunaš z izmerjenima ω_o in ω_1 , oziroma t_o in t_1 !
3. Izmeri nihali in izračunaj J in $D = mgd_o$, kjer je m masa nihala in d_o razdalja od težišča do osi. Podatke o gostoti nihala poišči v tabelah. Določi koeficient vzmeti in izračunaj D' . Obesi vzmet na vertikalno merilo in jo obremenjuj z znanimi utežmi. Zapisuj sile in ustrezne podaljške in jih vnesi v diagram. Koeficient k sledi iz strmine dobljene premice. Izmeri še razdaljo d med prijemališčem vzmeti in osjo nihala. S tem izračunaš:

$$D' = kd^2. \quad (32.13)$$

Izračunaj t_o , t_1 , t' in T in jih primerjaj z izmerjenimi. Vse vrednosti vnesi v tabelo:

	t_o	t_1	t'	T	ω_o	ω_1	ω'	ω_u
izmerjeno								
izračunano								

4. Izračunaj faktor sklopitve:

$$K = \frac{D'}{D + D'} = \frac{1 - (\omega_o/\omega_1)^2}{1 + (\omega_o/\omega_1)^2} \quad (32.14)$$

najprej z izmerjenima ω_o in ω_1 , nato pa še z izračunanima D in D' in primerjaj oba rezultata.