

Vaja 15

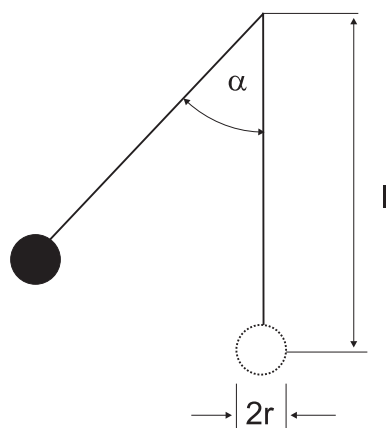
TEŽNO NIHALO

Nihajni čas *matematičnega nihala* (točkastega telesa na breztežni nitki), ki niha nedušeno in z majhno amplitudo, je:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (15.1)$$

Iz izmerjene dolžine nihala in nihajnega časa T lahko izračunamo težni pospešek:

$$g = l(2\pi/T)^2 \quad (15.2)$$



Slika 15.1: Težno nihalo.

Matematičnega nihala sicer ne moremo narediti, vendar se mu lahko približamo, da so odmiki od zgornje formule majhni. Upoštevamo jih s tem, da formuli dodamo naslednje popravke:

1. Natančnejša formula, ki velja pri matematičnem nihalu za poljubno amplitudo α , je:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2(\alpha/2) + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \sin^4(\alpha/2) \dots \right] \quad (15.3)$$

2. Naše nihalo ni matematično, ker imamo namesto masne točke kroglo in ker ta visi na žici, ki ni brez mase. Pri majhnih amplitudah ima togo težno nihalo lastni nihajni čas $T = 2\pi\sqrt{J/mgl^*}$, kjer je J vztrajnostni moment nihala okrog osi, m masa, l^* pa razdalja težišča od osi. Vztrajnostni moment izračunamo po Steinerjevem izreku: $J = m_k l_o^2 + 2m_k r^2/5 + m_z(l_o - r)^2/3$, pri čemer je m_k masa krogle in m_z masa žice, l_o razdalja od osi nihala do središča krogle ter r radij krogle. Za moment mase pa dobimo: $ml^* = m_k l_o + m_z(l_o - r)/2$. Nihajni čas pri majhni amplitudi je torej (vse izpelj!):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_k l_o^2 + 2m_k r^2/5 + m_z(l_o - r)^2/3}{[m_k l_o + m_z(l_o - r)/2]g}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{l_o}{g} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{r}{l_o} - \frac{1}{6} \frac{m_z}{m_k} \right)} \quad (15.4)$$

3. Zaradi vzgona v zraku dobimo z našim nihalom vrednost g , ki je premajhna za faktor $(1 - \rho_{zr}/\rho_{Fe})$. (Zakaj?)
Podatki: $\rho_{zr} = 1,2 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{Fe} = 7800 \text{ kg/m}^3$.
4. Zaradi dušenja je nihajni čas $1 + (\Lambda/2)^2$ krat daljši od prej izračunanega. Pri tem je Λ logaritemski dekrement, ki je enak naravnemu logaritmu razmerja med dvema zaporednima amplitudama na isti strani $\Lambda = \ln \frac{s_n}{s_{n+1}}$. Zaporednih amplitud ne moremo odčitati dovolj natančno, da bi dekrement lahko izračunali. Odčitajte začetno amplitudo s_0 ter amplitudo po 150 nihajih s_{150} in upoštevate dušenje: $s_n = s_0 \exp(-\beta n T)$. Sami izrazite Λ z n , s_0 ter s_n !
5. Poleg krogle niha še zrak okrog nje. Za približen račun lahko vzamemo, da niha s kroglo še k -krat tolikšna prostornina zraka, pri čemer je k empirično določen koeficient (po Besselu je za kroglo $k = 0,6$). Računati moramo torej z vztrajnostnim momentom, povečanim za faktor $(1 + k\rho_{zr}/\rho_{Fe})$ tako, da je nihajni čas podaljšan še za faktor $\sqrt{1 + k\rho_{zr}/\rho_{Fe}}$.
6. Popravke zaradi mehaničnih napak nihala je najtežje oceniti; upoštevati bi bilo treba sonihanje obesišča, nenatančnost ležaja (ostrine), elastičnost žice i.dr. Pri dobrem nihalu pa so ti popravki manjši kot prejšnji.

Če upoštevamo vse popravke od 1 do 5 in jih poenostavimo tako, kot je bilo opisano v uvodnem poglavju o računanju z majhnimi količinami, dobimo končni izraz za g :

$$g = l_o \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{2}{5} \left(\frac{r}{l_o} \right)^2 - \frac{1}{6} \frac{m_z}{m_k} + (1 + k) \frac{\rho_{zr}}{\rho_{Fe}} + \left(\frac{\Lambda}{2\pi} \right)^2 \right] \quad (15.5)$$

Oceni sam, katere izmed teh popravkov je pri tvoji natančnosti treba upoštevati!

15.1 Naloga

Z merjenjem nihajnega časa nihala določi težni pospešek vsaj na 0,1 % natančno!

15.2 Potrebščine

1. Nihalo, obešeno na stropu,
2. merilo z zrcalcem, pritrjenim na zidu,
3. vrvica,
4. kreda,
5. štoparica*,
6. kljunasto merilo*,
7. vžigalice*.

15.3 Navodilo

Dolžino nihala prebereš na navpičnem merilu. S pogledom projiciraš vrhnje teme krogle na merilo. (Zrcalce pomaga, da se ogneš paralaksni napaki.) Prištej polovico premera, ki ga izmeriš s kljunastim merilom. Umiri kroglo, da ni nobenega torzijskega nihanja in zaznamuj s kredo dva meridianska kroga, ki naj pomagata, da ne boš zasukal krogle okrog navpične osi. Z zanko iz vrvice potegni kroglo iz mirovne lege in priveži vrvico na palico na zidu.

Prežgi vrvico. Zapisuj si čase, ko gre nihalo skozi mirovno lego (zadošča, da zapišeš vsak peti prehod v eno smer)! Nalogo delata dva; prvi gleda na nihalo, drugi na uro (pri ponovitvi se zamenjata). Oceni še petinke sekunde! Štej glasno: 0, 1, 2, 3... do 150! Pazi, da se ne ušteješ za en nihaj, da ne bo delo zaman! Izračunaj teleskovne razlike: $t_{100} - t_0, t_{105} - t_5, t_{110} - t_{10}, \dots, t_{150} - t_{50}$. Tako dobiš 10 vrednosti za sto nihajnih časov. Izračunaj poprečje in efektivno napako poprečja! Kolikšna je natančnost končnega rezultata (g)? Katera meritev je prinesla največjo natančnost? Δ določiš iz pojevanja amplitude po približno 100 nihajih.

Pripomba: Meritev z nihalom je eden izmed najbolj natančnih načinov za določitev težnostnega pospeška. Pri resnih meritvah, pri katerih uporabijo še razne izboljšave (primerjavo dveh podobnih različno dolgih nihala, nihala v vakuumu), dosežejo natančnost 1:100.000.