MAT 1 ustni del

Rešitve pogostih vprašanj

Jure Kos

januar 2025

Številske množice

Naravna števila (lastnosti in operacije)

So števila, s katerimi štejemo. Možne operacije so seštevanje in množenje. 1 je nevtralni element za množenje. Množica je urejena. 2 naravni števili a in b lahko primerjamo. Lahko velja $a < b$ ali $a > b$ ali $a = b$. Vsakemu naravnemu številu lahko določimo neposrednega naslednika in tudi neposrednega predhodnika izjema je število 1. V množici naravnih števil je naslednik $n + 1$ predhodnik pa $n - 1$. Vsaka podmnožica naravnih števil ima najmanjši element. Je števno neskončna.

Matematična indukcija

Pri indukciji pokažemo, da neka lastnost velja za vsa naravna števila. Za indukcijo potrebujemo bazo indukcije in indukcijski korak.

Baza indukcije: dokažemo, da lastnost velja za najmanjše naravno število (število 1).

Indukcijski korak: dokažemo, da velja za vsa naslednja naravna števila, tako da predpostavimo, da velja za n in preverimo, če velja za $n + 1$.

Cela števila (lastnosti in operacije)

Množica celih števil množici naravnih doda 0 in negativna števila. Možne operacije so seštevanje, množenje in odštevanje. 0 je nevtralni element za seštevanje in odštevanje. So urejena množica. Vsem se da določiti neposrednega predhodnika in naslednika. Vsem podmnožicam se ne da določiti najmanjšega elementa zato izgubimo indukcijo. Je števno neskončna. Za vsako celo število a je definirano nasprotno število $-a$ za katerega velja $a + (-a) = 0$. Število $-a$ je inverzni element za seštevanje.

Racionalna števila (lastnosti in operacije)

Množica racionalnih števil je množica vseh števil, ki jih lahko zapišemo z ulomkom $\frac{a}{b}$, kjer sta a in b celi števili in b ni 0. Množica je urejena in števno neskončna. Številom ni možno določiti predhodnika ali naslednika. Dokaz za to: če imaš 2 racionalni števili $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$, jima lahko določiš aritmetično sredino po formuli $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$. Nastalo racionalno število leži med originalnima številoma. Definirane so operacije $+ - \cdot$ in /.

Iracionalna števila ($\sqrt{2}, \pi, e, ...$)

So števila, ki se jih ne da zapisati z ulomkom. V decimalni obliki imajo neskončen neperiodičen zapis.

Realna števila (lastnosti in operacije)

Realna števila so unija racionalnih in iracionalnih števil. Množica je neštevno neskončna. Množica je urejena. Množica racionalnih števil je gosta v množici realnih števil (za vsako realno število obstaja za poljubno majhen ε na intervalu $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ racionalno število). V množici realnih števil so definirane operacije $+ - \cdot$ in /.

Decimalni zapis realnega števila

Decimalni zapis spravi število na potence števila 10.
Primer: $126,83 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$.
Celi del od decimalnega ločuje decimalna vejica.

Absolutna vrednost

Predstavlja oddaljenost števila od izhodišča številske premice. Pri pozitivnih vrednostih je absolutna vrednost enaka originalnemu številu, pri negativnih se predznak obrne na pozitiven. Oznaka absolutne vrednosti števila a je $|a|$. Lastnosti: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $|-a| = |a|$, $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Kompleksna števila (lastnosti in operacije)

Enačbe $x^2 = -1$ se v realnih številih ne da rešiti. Rešitev te enačbe je število i. Kompleksna števila so sestavljene iz realnega in imaginarnega dela. Zapisujejo se v obliki $a + bi$. a predstavlja realno komponento b pa imaginarno. i ni del imaginarne komponente. Če je realna komponenta 0 in imaginarna ni 0 tedaj je število v celoti imaginarno. Definirane operacije za kompleksna števila so $+ - \cdot /$ in konjugiranje, ki imaginarni komponenti obrne predznak.

Polarni zapis kompleksnega števila

Kompleksna števila se prikazuje v kompleksni ravnini. Točke v ravnini se lahko poda s koordinatama ali s polarnim kotom in radijem. Radij kompleksnega števila je njegova absolutna vrednost, ki se jo dobi po formuli $\sqrt{a^2 + b^2}$. Polarni kot se dobi preko kotnih funkcij. $\frac{b}{a} = \tan\varphi$, torej je $\varphi = \arctan(\frac{b}{a})$. Pri iskanju kota je potrebno biti pozoren na kvadrant v katerem se kompleksno število nahaja. arctg vrne vrednosti med 0 in π, zato je potrebno vrednostim v 3. in 4. kvadrantu prišteti π. Polarni zapis je oblike $r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$. Za pretvarjanje iz polarnega zapisa v kartezični ponovno uporabimo kotne funkcije po formulah $a = r \cdot \cos\varphi, b = r \cdot \sin\varphi$

De Moivrova formula

De Moivrova formula se uporablja za hitro potenciranje kompleksnega števila. Število mora biti v polarni obliki. Tedaj velja

$$(r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi))^n = (r^n)(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

.

Pri korenjenju n-te stopnje gre r pod koren n-te stopnje in φ se deli z n (eksponent $\frac{1}{n}$ po zgornji formuli). Dobimo n rešitev na krožnici z enakimi razmaki.

Primer:

$$(16(\cos\pi + i\sin\pi))^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})) = 2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$$

.

To je samo ena rešitev, ker imajo rešitve med seboj enake razmake prištejemo osnovni rešitvi $k\frac{2\pi}{n}$, kjer je k celo število med 0 in vključno $n-1$. Na istem primeru je $\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2}$ in vrednosti $k = 0, 1, 2, 3$. Vse rešitve enačbe so tako:

$$2(\cos(\frac{\pi}{4} + 0)) + i\sin(\frac{\pi}{4} + 0))$$
$$2(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}))$$
$$2(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2}))$$
$$2(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}))$$

ali v poenostavljeni obliki

$$2(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}))$$
$$2(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$$
$$2(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4}))$$
$$2(\cos(\frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{7\pi}{4}))$$

Zaporedja

Zaporedja in lastnosti zaporedij

Zaporedje realnih števil je predpis, ki vsakemu naravnemu številu priredi realno število. Pišemo ga kot $a_n, n \in \mathbb{N}$, kjer je a_n n-ti člen zaporedja. Zaporedje lahko podamo z eksplicitnim zapisom (a_n je odvisen od n) ali z rekurzivnim zapisom (a_n je podan s prejšnjimi členi, hkrati moramo podati še nekaj začetnih členov). Predstavimo ga lahko z grafom v ravnini $\mathbb{R}^2$ ali kot točke na številski premici.

Zaporedje je aritmetično, če je razlika (diferenca [d]) sosednjih dveh členov konstantna.

Zaporedje je geometrijsko, če je kvocient [q] dveh zaporednih členov konstanten.

Zaporedje je alternirajoče, če se členom zaporedja izmenično spreminja predznak.

Zaporedje je naraščajoče, če je $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.
Zaporedje je strogo naraščajoče, če je $a_{n+1} > a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.
Če so vsi členi zaporedja pozitivni, bo zaporedje naraščajoče, če je kvocient dveh sosednjih členov večji (ali enak) 1. Vedno velja, da je razlika dveh sosednjih členov večja (ali enaka) 0.

Zaporedje je padajoče, če je $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.
Zaporedje je strogo padajoče, če je $a_{n+1} < a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Zaporedje je monotono, če je bodisi naraščajoče ali pa padajoče.

Zgornje in spodnje meje zaporedij

Zaporedje je navzgor omejeno, če obstaja $M \in \mathbb{R}$, da je $a_n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. (M je tako število, da so vsi členi zaporedja manjši.) M je zgornja meja zaporedja.
Zaporedje je navzdol omejeno, če obstaja $m \in \mathbb{R}$, da je $a_n \geq m$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. (m je tako število, da so vsi členi zaporedja večji.) m je spodnja meja zaporedja.

Zaporedje je omejeno, če je omejeno navzgor in navzdol. Supremum je najmanjša zgornja meja zaporedja (natančna zgornja meja). Število M_0 je supremum, če velja: $a_n \leq M_0$ in za vsak (še tako majhen) $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je $a_{n_0} > M_0 - \varepsilon$.

Infimum je največja spodnja meja zaporedja (natančna spodnja meja). Število m_0 je infimum, če velja: $a_n \geq m_0$ in za vsak (še tako majhen) $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je $a_{n_0} < m_0 + \varepsilon$.

Supremum in infimum sta lahko člena zaporedja (npr. pri strogo padajočem zaporedju je supremum a_1, pri strogo naraščajočem je infimum a_1).

Limite in stekališča zaporedij

Število A je stekališče zaporedja, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja neskončno mnogo členov zaporedja, za katere velja $|A - a_n| < \varepsilon$.

Število A je limita zaporedja, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $|A - a_n| < \varepsilon$ za vsak $n > n_0$ (od nekega n dalje vsi členi ležijo v ε okolici števila A).

Izven ε okolice leži le končno mnogo členov. Vsaka limita je stekališče, ni pa vsako stekališče limita.

Konvergenca zaporedij in Cauchyjev pogoj

Če limita zaporedja obstaja, potem je to zaporedje konvergentno.
Če limite ni, je divergentno.

Če je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, potem je konvergentno - limita je enaka supremumu.
Če je zaporedje padajoče in navzdol omejeno, je konvergentno - limita je enaka infimumu.

Cauchyjev pogoj: Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, tako da za vse $n > n_0$ in vse $k \in \mathbb{N}$ velja $|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$ (za vsak $\varepsilon > 0$ od nekega člena a_{n_0} naprej se poljubna dva člena zaporedja razlikujeta za manj kot ε).

Limita zaporedja $a_n = c^n, c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} C^n = \begin{Bmatrix} \nexists; c \leq -1 \\ 0; |c| < 1 \\ 1; c = 1 \\ \infty; c > 1 \end{Bmatrix}$$

Definicija potence z iracionalnim eksponentom

Radi bi definirali c^r, kjer je $r, c \in \mathbb{R}, c > 0$. Izberemo zaporedje q_n racionalnih števil, ki konvergira proti r:

$$\lim_{n\to\infty} q_n = r$$

.

Ker je q_n konvergentno, ustreza Cauchyjevemu pogoju, zato tudi c^{q_n} ustreza Cauchyjevemu pogoju, torej tudi to zaporedje konvergira.

$$c^r = \lim_{n\to\infty} c^{q_n}$$

- limita je neodvisna od izbire zaporedja q_n.

Definicija števila e

e ali Eulerjevo število je osnova naravnega logaritma. Funkcija e^x je edina funkcija, za katero velja $f'(x) = f(x)$. Je iracionalen, njegova vrednost je približno $2,718$. Dobi se ga po formuli

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

Številske vrste

Številske vrste

Vsoto neskončno členov zaporedja imenujemo številska vrsta. Označi se jo kot

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

a_n se imenuje splošni člen vrste. Če seštejemo končno število členov se to imenuje delna vsota in se označuje s s_n.

Delne vsote in konvergenca vrst

Vrsta je konvergentna, če je njena vsota enaka končni vrednosti. Za konvergenco mora konvergirati zaporedje delnih vsot.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Da vrsta konvergira, mora zaporedje a_n imeti limito v neskončnosti enako 0. Če limita zaporedja ni enaka 0, vrsta vedno divergira.

Cauchyjev pogoj za vrste

Če je vrsta konvergentna za vsak $\varepsilon > 0$, obstaja naravno število n_0 za katerega velja

$$\varepsilon > \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$$

Geometrijska vrsta

Je vrsta za katero velja $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, kjer je q konstanten za vse n. Geometrijska vrsta konvergira kadar velja $-1 < q < 1$

Harmonična vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Vrsta členov zaporedja $\frac{1}{n}$ se imenuje harmonična vrsta. Limita zaporedja je sicer enaka 0, vrsta pa divergira.

Kriteriji za konvergenco vrst

Kvocientni kriterij: Velja za vrste s pozitivnimi členi. Pri kvocientnem kriteriju gledamo limito kvocienta zaporednih členov v neskončnosti. Vrednost limite označimo s q.

$$q = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n + 1}{a_n}$$

Če je $q < 1$, vrsta konvergira, če je $q > 1$, vrsta divergira in če je $q = 1$, kriterij odpove.

Korenski kriterij: Pri korenskemu kriteriju gledamo limito n-tega korena a_n ko pošljemo n v neskončnost. Vrednost limite označimo s q.

$$q = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Če je $q < 1$, vrsta konvergira, če je $q > 1$, vrsta divergira in če je $q = 1$, kriterij odpove.

Primerjalni kriterij: Če imamo dve vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ in za vsak n velja $0 < a_n < b_n$: Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, tedaj tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, tedaj tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira

Bonus kriterij za vrste z racionalnimi predpisi: Če je predpis zaporedja racionalna funkcija in je stopnja imenovalca od stopnje števca večja za 2 ali več, vrsta konvergira.

Alternirajoče vrste in Leibnitzov kriterij

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je alternirajoča, ko velja $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ za vsak n. Leibnitzov kriterij določa konvergenco alternirajočih vrst. Če je zaporedje $|a_n|$ padajoče in velja

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

tedaj alternirajoča vrsta konvergira.

Absolutna konvergenca vrste

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergira, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Vsaka absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.

Funkcije

Definicija preslikave in funkcije

Preslikava je predpis, ki vsakemu elementu a iz množice $\mathcal{A}$ priredi natanko določen element $f(a)$ iz množice $\mathcal{B}$. $f(a)$ je slika elementa a. Funkcija je vrsta preslikave, ki slika iz neke podmnožice realnih števil v realna števila.

Definicijsko območje in zaloga vrednosti preslikave

Množica $\mathcal{A}$ je definicijsko območje, množica $\mathcal{B}$ je kodomena. Množica vseh slik se imenuje zaloga vrednosti in je podmnožica kodomene.

Injektivne, surjektivne in bijektivne funkcije

Preslikava je injektivna, če je vsak element iz $\mathcal{B}$ slika kvečjemu enega elementa iz $\mathcal{A}$.

Preslikava je surjektivna, če je vsak element iz $\mathcal{B}$ slika vsaj enega elementa iz $\mathcal{A}$.

Preslikava je bijektivna, če je vsak element iz $\mathcal{B}$ slika natanko enega elementa iz $\mathcal{A}$ - preslikava je hkrati injektivna in surjektivna.

Kompozitum preslikav

Naj bodo $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ neprazne množice, določimo preslikavi $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Kompozitum preslikav definiramo kot $f \circ g : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.

Lihe in sode funkcije

Funkcija je liha, če velja $f(-x) = -f(x)$. Graf takšne funkcije je simetričen glede na izhodišče.

Funkcija je soda, če velja $f(-x) = f(x)$. Graf je simetričen glede na ordinatno os.

Inverzna funkcija

Naj bo funkcija f injektivna. Funkcijo f^{-1}, za katero velja $f^{-1}(f(x)) = x$, imenujemo inverzna funkcija. Graf takšne funkcije je zrcalen grafu originalne funkcije čez simetralo lihih kvadrantov.

Polinomi in racionalne funkcije

Polinom je funkcija oblike $f(x) = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + k_{n-2} x^{n-2} + ... + k_1 x + k_0$, kjer k_n ni enak 0 in je k_i realno število. n je stopnja polinoma. Definicijsko območje vsakega polinoma so vsa realna števila. Ničle polinoma so vrednosti x_i za katere velja $f(x_i) = 0$. Polinom n-te stopnje ima največ n realnih ničel. Polinomi lihih stopenj imajo vsaj eno realno ničlo.

Racionalna funkcija je funkcija oblike $\frac{p(x)}{q(x)}$, pri čemer sta p in q (neničelna) polinoma. Definicijsko območje funkcije je enako $\mathbb{R} \setminus \{x; q(x) = 0\}$.

Ničle racionalne funkcije so enake ničlam polinoma p, poli pa ničlam polinoma q. Za pole velja: če so lihe stopnje, funkcija spremeni predznak, če so sode, pa ne. Asimptota funkcije je taka krivulja, da se ji graf funkcije f približuje, ko gre x proti $\pm\infty$. Izračunamo tako, da delimo $p(x)$ z $q(x)$ - če je stopnja p manjša od stopnje q, potem je asimptota enaka $y = 0$.
Če sta stopnji p in q enaki, je asimptota vodoravna. Graf lahko seka asimptoto (ko je ostanek pri deljenju $r(x)$ enak 0).

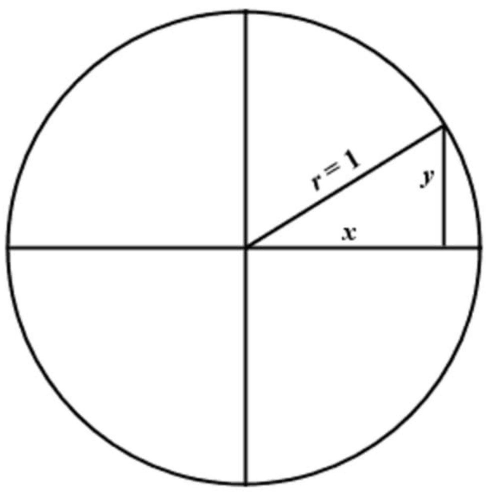
Eksponentna in logaritemska funkcija

Eksponentna funkcija je podana v obliki $f(x) = a^x$. $a > 0$ in $a \neq 1$. Navzgor je neomejena, navzdol pa je omejena z 0. Če je $a > 1$ potem ima funkcija limito v

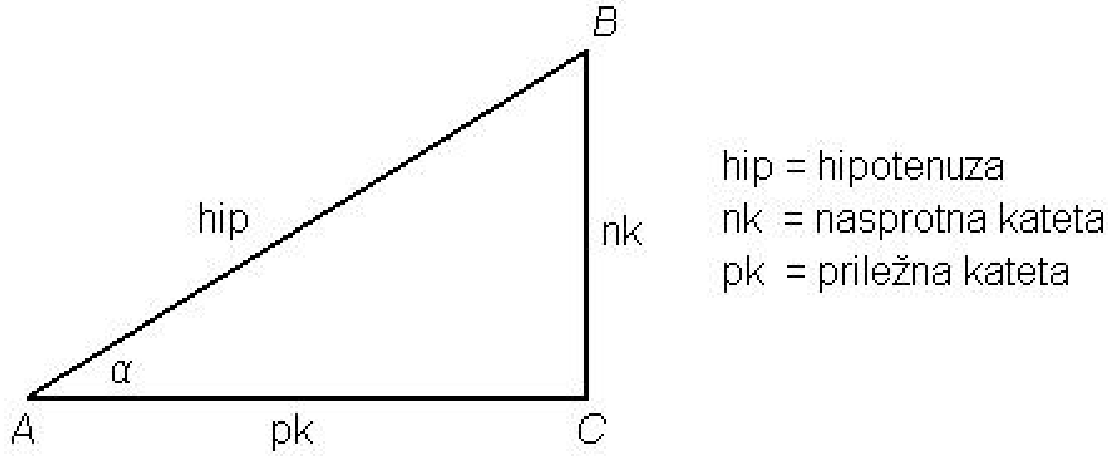
$-\infty$ enako 0. Ko gre x proti ∞ pa nima limite (je neomejena). Ravno obratno velja če je $0 < a < 1$.
$D_f = \mathbb{R}$
$Z_f = (0, \infty)$

Logaritemska funkcija je podana v obliki $f(x) = log_a(x)$. Je inverz eksponentne funkcije. Če je $a > 1$ potem funkcija povsod narašča. Če je manjši pa pada. Logaritemska funkcija ni omejena.
$D_f = (0, \infty)$
$Z_f = \mathbb{R}$

Kotne funkcije in ciklometrične funkcije

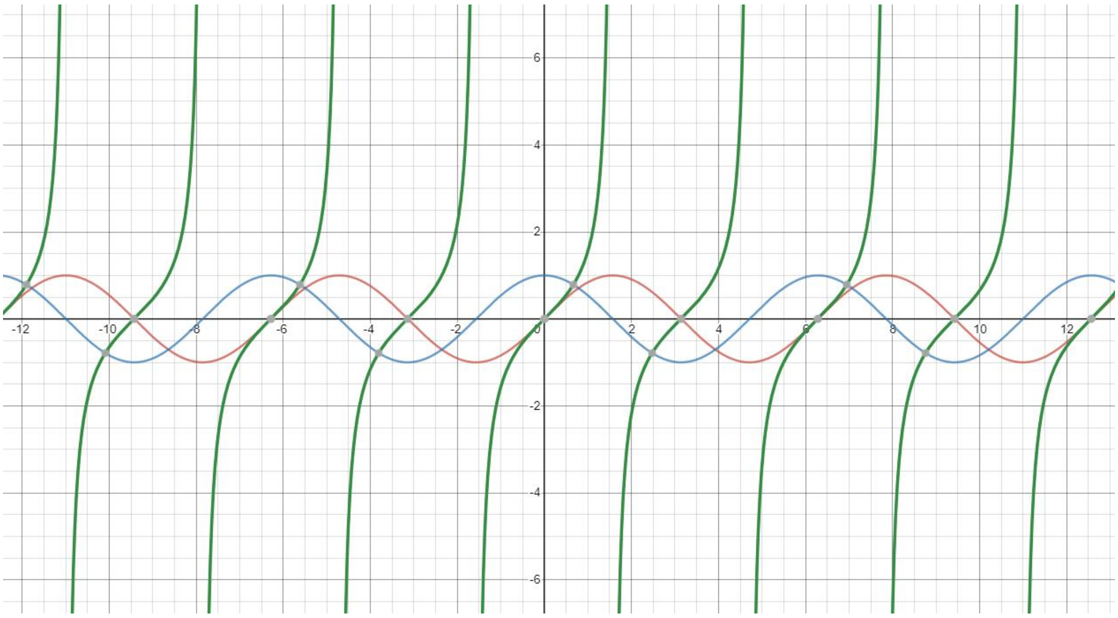


Kotne funkcije definiramo preko enotske krožnice (krožnica z radijem 1 s središčem v koordinatnem izhodišču). Od središča krožnice na poljubno točko $T(x, y)$ na krožnici potegnemo daljico r. Kot φ je definiran kot kot med abscisno osjo in r. Velja: $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$ $\frac{y}{x} = \tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$



x, y in r v enotski krožnici, ko je T v 1. kvadrantu, tvorijo pravokotni trikotnik. Preko podobnih trikotnikov za poljubni pravokotni trikotnik dobimo sledeče zveze: $\frac{nk}{hip} = \sin\alpha$, $\frac{pk}{hip} = \cos\alpha$, $\frac{nk}{pk} = \tan\alpha$

Kotne funkcije so periodične. Sinus in kosinus imata periodo 2π, tangens pa π. Sinus ima ničle v $k\pi; k \in \mathbb{Z}$. Kosinus ima ničle v $\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$. Ker je tangens definiran kot $\frac{\sin}{\cos}$ ima ničle v $k\pi; k \in Z$(ničle sinusa) in pole v $\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$(ničle kosinusa). Sinus in kosinus imata zalogo vrednosti $[-1, 1]$. Definicijsko območje so vsa realna števila. Tangens ima za zalogo vrednosti vsa realna števila, definicijsko območje pa je $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$



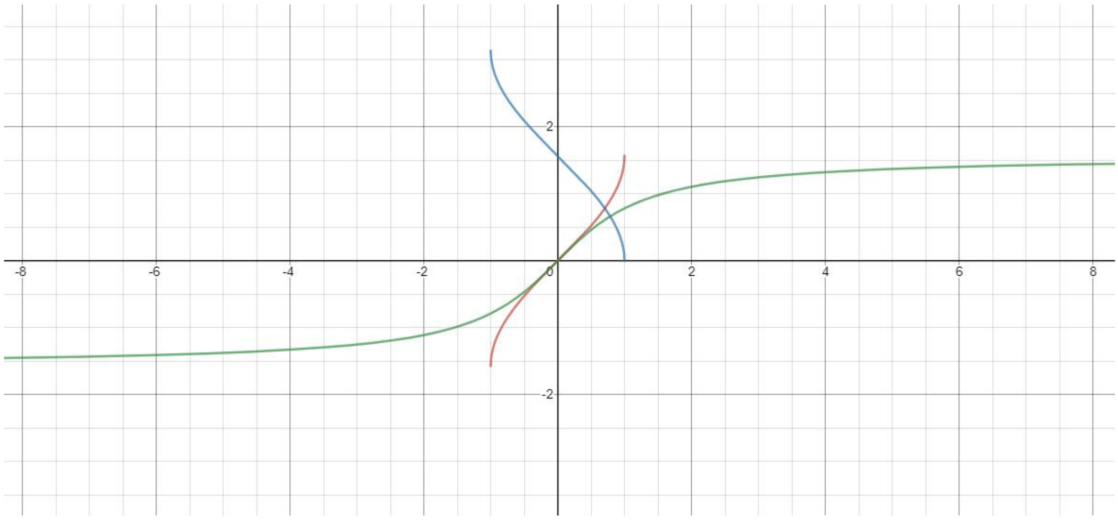
Slika prikazuje grafe $f(x) = \sin(x)$ (rdeča) $g(x) = \cos(x)$ (modra) in $h(x) = \tan(x)$ (zelena). Opazimo, da imata sin in cos enak graf, samo zamaknjen za $\frac{\pi}{2}$. Iz tega dobimo zvezo $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ in $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$.

Ciklometrične funkcije ali arkus funkcije so inverzne kotnim. Inverzno funkcijo se lahko določi samo za bijektivne funkcije, zato je potrebno kotnim funkcijam omejiti definicijsko območje. Pri cos vzamemo interval $[0, \pi]$, pri $\sin[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in pri $\tan(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Funkcija arcsin je definirana na intervalu $[-1, 1]$ in ima zalogo vrednosti $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Funkcija arccos je definirana na intervalu $[-1, 1]$ in ima zalogo vrednosti $[0, \pi]$

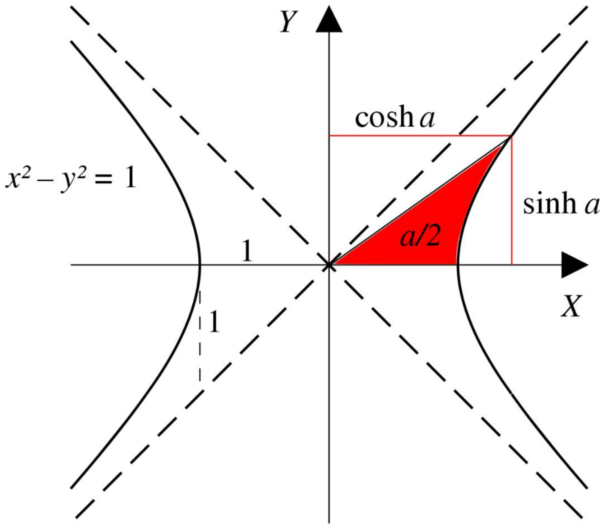
Funkcija arctan je definirana za vsa realna števila in ima zalogo vrednosti $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



Slika prikazuje grafe $f(x) = \arcsin(x)$ (rdeča) $g(x) = \arccos(x)$ (modra) in$h(x) = \arctan(x)$ (zelena). Grafa arcsin in arccos sta enaka samo zrcaljena čez x os in zamaknjena za $\frac{\pi}{2}$ po y osi. Iz tega dobimo zvezo $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

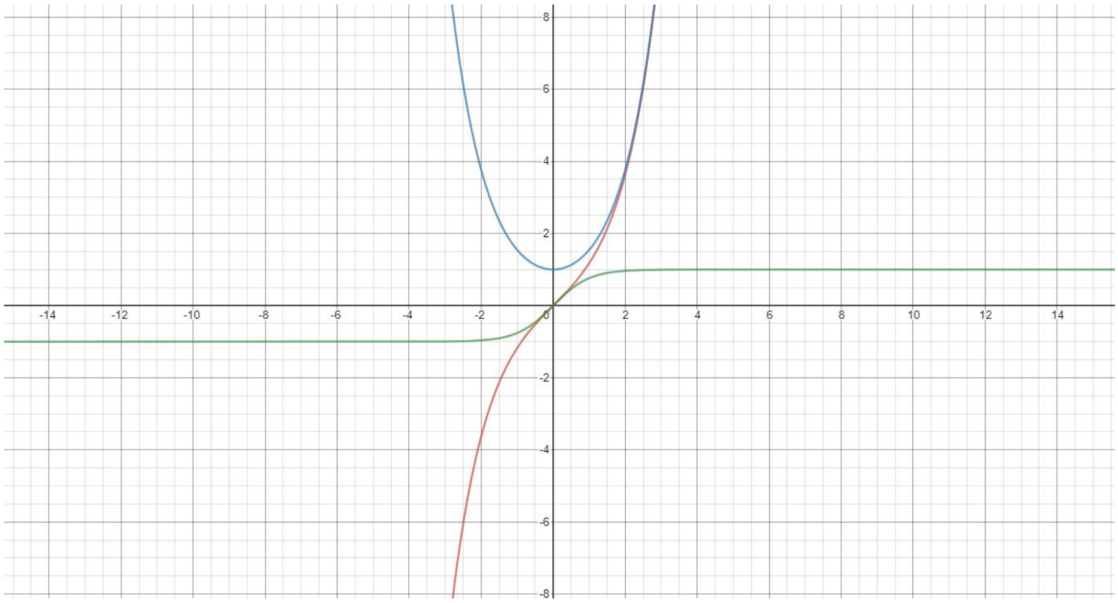
Hiperbolične funkcije in area funkcije

Hiperbolične funkcije so podobne kotnim, le da so za hiperbole. Definirane so preko desne polovice enotske hiperbole $x^2 - y^2 = 1$. Spet izberemo točko $T(x, y)$ na hiperboli in potegnemo daljico do izhodišča. Območje med daljico, hiperbolo in abscisno osjo predstavlja polovico hiperboličnega kota α. Podobno velja $x = \cosh(\alpha)$, $y = \sinh(\alpha)$.



Zapiše se jih lahko z eksponentnimi funkcijami

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



Slika prikazuje grafe $f(x) = \sinh(x)$ (rdeča), $g(x) = \cosh(x)$ (modra) in $h(x) = \tanh(x)$ (zelena).

Area funkcije so inverzne hiperboličnim. Kot parameter vzamejo vrednost x ali y na enotski hiperboli in vrnejo hiperbolični kot. $\alpha = \operatorname{arsinh}(y)$, $\alpha = \operatorname{arcosh}(x)$

Zapiše se jih lahko z logaritmi

$$\operatorname{arsinh} x = ln(x + \sqrt{x^2 + 1}$$
$$\operatorname{arcosh} x = ln(x + \sqrt{x^2 - 1}$$
$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} ln(\frac{1+x}{1-x})$$

Limita funkcije, leva limita in desna limita funkcije

Limita funkcije nam pove, kateri vrednosti se približuje $f(x_0)$, ko se x približuje neki vrednosti x_0. Če je število n limita funkcije v točki x_0 obstaja za vsak $\varepsilon > 0$ nek $\delta > 0$ za katerega velja $|f(x) - n| < \varepsilon$, ko je $|x - x_0| < \delta$ in $x \neq x_0$

Limita v x_0 ni odvisna od vrednosti $f(x_0)$, zato jo lahko izračunamo tudi ko v x_0 funkcija ni definirana. Limito $f(x)$ ko se x približuje x_0 označujemo z

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Leva limita funkcije poda vrednost funkcije $f(x)$, ko se približuje neki vrednosti x z leve. Število n je leva limita funkcije če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ za katerega velja $|f(x) - n| < \varepsilon$ za vsak $x < x_0$ kjer je $x_0 - x < \delta$

Levo limito $f(x)$ označujemo z

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$$

Na podoben način desna limita funkcije poda vrednost funkcije $f(x)$, ko se približuje neki vrednosti x z desne. Število n je desna limita funkcije če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ za katerega velja $|f(x) - n| < \varepsilon$ za vsak $x > x_0$ kjer je $x - x_0 < \delta$

Desno limito $f(x)$ označujemo z

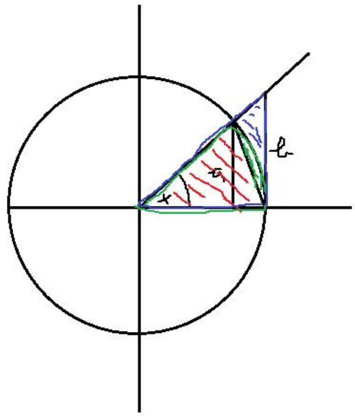
$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$$

Limita funkcije obstaja samo, ko sta leva in desna limita enaki

Limita $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

Vrednost limite bomo izračunali s pomočjo sendvič izreka. Če je $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$, tedaj je $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$

Začnemo s skico enotske krožnice



Velja: $a = \sin x$ in $b = \tan x$ Ploščino rdečega trikotnika dobimo iz osnovnice in višine $S_r = \frac{\sin x}{2}$ Ploščino modrega trikotnika dobimo iz obeh katet $S_m = \frac{\tan x}{2}$

Ploščino zelenega krožnega izseka dobimo iz ploščine kroga in kota $S_z = \frac{x\pi r^2}{2\pi}$ Velja:$S_r \leq S_z \leq S_m$, torej je $\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan x}{2}$. Enačbo množimo z 2 in delimo s $\sin x$. Dobimo $1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$. Vzamemo inverzne vrednosti in dobimo $1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$. Izračunamo limite 1 in $\cos x$. $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$,. Ker velja $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} 1 = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ in $1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$ je po sendvič izreku $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Hitrejši način je preko L'Hospitalovega pravila, kjer lahko dobimo limito funkcije nedoločene oblike $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$ po formuli

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Torej je

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Zveznost funkcije

Funkcija je zvezna ko "nima lukenj". Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ je zvezna v točki x_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ za vsak x, za katerega velja $|x - x_0| < \delta$. Funkcija je zvezna na D, če je zvezna za vsak $x \in D$.

Lastnosti zveznih funkcij na zaprtem intervalu

Če je $f(a)f(b) < 0$ (nasprotni predznak), tedaj je na intervalu $[a, b]$ vsaj ena ničla

Na zaprtem intervalu so zvezne funkcije omejene

Zvezna funkcija na zaprtem intervalu doseže svojo natančno zgornjo in spodnjo mejo

Zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$ doseže vsako vrednost med $f(a)$ in $f(b)$.

Odvod

Definicija odvoda funkcije in geometrijski pomen odvoda

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ Geometrijski pomen: Odvod funkcije f v točki x nam pove, kako hitro se vrednost funkcije f v x spreminja (smerni koeficient tangente na graf funkcije v tej točki).

Izpeljave nekaterih osnovnih odvodov

$(x^n)'$ Izračunamo po definiciji

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$(x+h)^n$ razstavimo po binomskem izreku

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}x^{n-1}h + ... + \frac{n!}{1!(n-1)!}xh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

x^n in $-x^n$ se krajša, delimo s h

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \Big(\frac{n!}{1!(n-1)!}x^{n-1} + ... + \frac{n!}{1!(n-1)!}xh^{n-2} + h^{n-1} \Big)$$

Vsi členi razen prvega postanejo 0. krajšamo z $(n-1)!$ Končni rezultat

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Ali po drugi poti

$$(x^n)' = e^{lnx \cdot n} n \frac{1}{x} = x^n \frac{n}{x} = nx^{n-1}$$

$(\sin(x))'$ Izračunamo po definciji

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$\sin(x+h)$ razbijemo po adicijskem izreku

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

Razstavimo na dve limiti

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \sin h}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h - \sin x}{h}$$

Iz leve limite izpostavimo $\cos x$, iz desne pa $-\sin(x)$.

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \cos x \frac{\sin h}{h} - \lim_{h \to 0} \sin x \frac{1 - \cos h}{h}$$

Limita $\frac{\sin h}{h}$ ko gre h proti 0 gre v 1, limita od $\frac{1-\cos h}{h}$ ko gre h proti 0 gre v 0. Ostane

$$(\sin x)' = 1 \cos x - 0 \sin x = \cos x$$

Tangente in normala na graf funkcije

Izračunamo 1. odvod funkcije in vstavimo tisti x kjer nas zanima tangenta rezultat je koeficient tangente. V enačbo $y = kx + n$ vstavimo točko in tako dobimo enačbo tangente. Pri normali moramo vedeti da je $k_t \cdot k_n = -1$

Pravila za odvajanje

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$C \cdot f(x)$	$C \cdot f'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
$(f \circ g)(x)$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Odvod inverzne funkcije

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Diferencial funkcije in računanje približnih vrednosti funkcije

$$\eta = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$$

Ko se h približuje 0 se η približuje 0. Pomnožimo enačbo s h in damo $f'(x)$ na drugo stran.

$$f(x+h) - f(x) = \eta h + f'(x)h$$

$f(x+h) - f(x)$ predstavlja spremembo vrednosti funkcije in jo označimo z Δf. h predstavlja spremembo spremenljivke x. Označimo ga z Δx. Dobimo končno enačbo

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + \eta \Delta x$$

$f'(x)\Delta x$ se imenuje diferencial funkcije in ga označimo z df. η je razlika med dejansko spremembo funkcije in diferencialom funkcije. Za majhne Δx postane η

v primerjavi z df majhen, zato ga lahko zanemarimo in s pomočjo diferencialov računamo približne vrednosti funkcije. Pri računanju približne vrednosti $f(x_0)$ vzamemo funkcijo v vrednosti x ki jo znamo izračunati. x mora biti blizu x_0, da dobimo dober približek. h je v tem primeru $x_0 - x$. Vstavimo v enačbo

$$f(x+h) \doteq f(x) + f'(x)h$$

Višji odvodi funkcije

Višje odvode dobimo, ko odvod ponovno odvajamo. Odvod odvoda se imenuje drugi odvod in se označuje z $f''(x)$. Odvod drugega odvoda se imenuje tretji odvod in se označuje z $f'''(x)$. Na podoben način se definira ostale višje odvode, se jih pa od vključno četrtega odvoda dalje označuje s številko v oklepaju.
Primer: 6. odvod $f(x) = f^{(6)}(x)$

Naraščanje in padanje funkcij in povezava z odvodom

Odvod je enak naklonu tangente na graf funkcije. Ko je naklon tangente pozitiven funkcija narašča, ko je negativen funkcija pada.
Torej ko je $f'(x) < 0$ funkcija pada,
ko je $f'(x) > 0$ funkcija narašča.
Če je $f'(x) = 0$ je tam stacionarna točka.

Fermatov izrek

Če je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija, ki ima v točki x_0 lokalni ekstrem, tedaj je $f'(x_0) = 0$ (točka x_0 je stacionarna točka funkcije).

Rollov izrek

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in naj velja $f(a) = f(b)$. Potem obstaja vsaj ena točka x_0, da je $f'(x_0) = 0$.

Lagrangov izrek

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Tedaj obstaja vsaj ena točka x_0, za katero velja $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Kar pomeni, da na intervalu $[a, b]$ obstaja vsaj ena točka x_0, v kateri je naklon tangente na graf (torej odvod v tej točki) enak naklonu sekante skozi krajišči intervala.

Stacionarne točke funkcije

So točke, za katere velja $f'(x_0) = 0; x_0 \in D_f$ Tangenta grafa v stacionarni točki je vzporedna abscisni osi

Lokalni ekstremi funkcije

Se nahajajo v ničlah odvoda. Torej funkcijo odvajamo in ta odvod enačimo z 0.

Določanje lokalnih ekstremov s prvim in drugim odvodom funkcije

Funkcija ima lokalni minimum v x_0, če obstaja tak $\delta > 0$ da je $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$ za vsak $|h| < \delta$
Funkcija ima lokalni maksimum v x_0, če obstaja tak $\delta > 0$ da je $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$ za vsak $|h| < \delta$

$f'(x_0) = 0$ in $f''(x_0) < 0$: funkcija ima v x_0 lokalni maksimum.
$f'(x_0) = 0$ in $f''(x_0) > 0$: funkcija ima v x_0 lokalni minimum.
$f'(x_0) = 0$ in $f''(x_0) = 0$: funkcija ima v x_0 prevoj

Prevoji, konveksnost in konkavnost funkcije

Funkcija je na intervalu $[a, b]$ konveksna, če sekanta skozi graf funkcije v točkah $f(a)$ in $f(b)$ leži nad grafom funkcije. Če leži pod grafom pa je konkavna.
Prevoj je točka na grafu v kateri funkcija preide iz konkavnosti v konveksnost ali obratno.

2. odvod nam pove ali je funkcija konkavna/konveksna in hkrati kako se spreminja vrednost 1. odvoda

$f''(x) > 0$: funkcija je konveksna.
$f''(x) < 0$: funkcija je konkavna.
$f''(x) = 0$: funkcija ima prevoj.

Globalni ekstremi funkcije na danem območju

Globalni maksimum funkcije na intervalu $[a, b]$ je največja vrednost funkcije na intervalu $[a, b]$. Ekstremi so možni na točkah, kjer je odvod funkcije enak nič, na mejah intervala $[a, b]$ ter v točkah, kjer funkcija ni odvedljiva. To najlažje preverimo tako, da x vstavimo v funkcijo. Lahko pa tudi tako:

$f'(x) = 0$ in $f''(x) < 0$: funkcija ima tu lokalni maksimum.
$f'(x) = 0$ in $f''(x) > 0$: funkcija ima tu lokalni minimum.
Preverjamo kateri $y = f'(x)$ je večji/manjši za globalni maksimum/minimum.

L'Hospitalovo pravilo

Ko pri računanju limite pridemo do funkcije nedoločene oblike $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$ lahko limito izračunamo tako, da števec in imenovalec odvajamo.

Odvajamo lahko tolikokrat, dokler imamo funkcijo prej omenjene nedoločene oblike

Nedoločeni integral

Nedoločeni integral

Je družina funkcij $F(x)$ katerih odvod je enak funkciji $f(x)$. Takim funkcijam F pravimo primitivne funkcije. $\int f(x)dx = F(x) + C$, pri čemer je $F'(x) = f(x)$

Nedoločeni integrali elementarnih funkcij

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln\ x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{ln\ a}\ a^x + C$$

$$\int sin\ x\ dx = \ -cos\ x + C$$

$$\int cos\ x\ dx = sin\ x + C$$

$$\int \frac{1}{(cos\ x)^2} dx = tan\ x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsin\ x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctan\ x\ + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = log(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

Pravila za integriranje

$$\int (f(x) \pm g(x))\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$$

$$\int k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int f(x)\ dx$$

Vpeljava nove spremenljivke v integral

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt$$

Integracija po delih (per-partes)

$$\int u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \cdot dx$$

ali krajše

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Integral racionalne funkcije

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int \left(k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}\right) dx$$

Integrali s trigonometričnimi funkcijami

Naj bo R racionalna funkcija sinusov in kosinusov, torej v števcu in imenovalcu nastopata polinoma sinusov in kosinusov (npr.$\frac{\sin 2x \cos x - 4\cos x}{3\cos 4x - \sin x \cos x + 1}$). Potem znamo integral $\int R(\sin x, \cos x)dx$ z univerzalno substitucijo $\tan(\frac{x}{2})$ pretvoriti v integral racionalne funkcije, ki se ga da vedno rešiti.

-Univerzalna nova spremenljivka $\to t = \tan(\frac{x}{2})$

$$\int(\sin ax)dx = -\frac{1}{a}\cos ax \qquad \int(\cos ax)dx = \frac{1}{a}\sin ax$$

$$\int(\tan ax)dx = -\frac{1}{a}\log\cos ax \qquad \int(\cot ax)dx = \frac{1}{a}\log\sin ax$$

$$\int(\sec ax)dx = \frac{1}{a}\log(\sec ax + \tan ax)$$

$$\int(\csc ax)dx = \frac{1}{a}\log(\csc ax - \cot ax)$$

$$\int(\sin^2 ax)dx = -\frac{1}{2a}\cos ax\sin ax + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$\int(\cos^2 ax)dx = \frac{1}{2a}\sin ax\cos ax + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\tan ax \qquad \int\frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\cot ax$$

$$\int(\tan^2 ax)dx = \frac{1}{a}\tan ax - x \qquad \int(\cot^2 ax)dx = -\frac{1}{a}\cot ax - x$$

$$\int(\sin^{-1} ax)dx = x(\sin^{-1} ax) + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$$

$$\int(\cos^{-1} ax)dx = x(\cos^{-1} ax) - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$$

Določeni integral

Definicija določenega integrala

Določeni integral v mejah od a do b nam pove ploščino lika, ki ga oklepa graf funkcije z abscisno osjo na intervalu $[a, b]$. Definirali smo ga s pomočjo Riemannovih vsot.

Lastnosti določenega integrala

Če sta meji enaki, je vrednost integrala enaka 0. Če damo minus pred integral s tem obrnemo integracijske meje. Integral vsote je vsota integralov in konstanto lahko nesemo pred integral (enako kot pri nedoločenem). Integracijsko spremenljivko lahko poljubno označimo. Integral $a \to b$ kjer $a < c < b$ lahko zapisemo kot vsoto integralov $a \to c$ in $c \to b$.

Izrek o povprečni vrednosti funkcije

Reče se mu tudi Lagrangeov izrek. V danem odseku funkcije obstaja točka kjer je odvod (nagib) krivulje enak "povprečnemu"odvodu intervala. Izrek se uporablja pri dokazovanju izrekov, ki obravnavajo funkcije na intervalu.

$$P = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Izrek o povprečni vrednosti: m je natančna spodnja meja in M natančna zgornja meja integrabilne funkcije f na intervalu $[a, b]$. Potem obstaja tako število P, da je $m < P < M$ in

$$P = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Če je funkcija f tudi zvezna na intervalu [a,b], potem obstaja vsaj ena taka točka $\xi \in [a,b]$, da je $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Med nedoločenim in določenim integralom velja zveza, ki jo imenujemo Newton-Leibnitzova formula ali osnovni izrek integralskega računa:
Določeni integral je razlika nedoločenih integralov na zgornji in spodnji meji.
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, pri čemer $F'(x) = f(x)$

Nova spremenljivka in per-partes za določeni integral

Določeni integral z uvedbo nove spremenljivke $t = f(x)$ se računa na enak način kot nedoločeni, se pa spremenijo meje. Če so bile prejšnje meje a in b so zdaj $f(a)$ in $f(b)$ Pri per partes se meje ohranijo

$$\int_a^b udv = (uv)|_a^b - \int_a^b vdu$$

Posplošeni integral funkcije

Uporablja se za integrale neomejenih funkcij ali funkcij na neomejenih intervalih primer neomejene funkcije $\frac{1}{x}$ v $x = 0$ Posplošeni integral za funkcijo neomejeno v točki b na intervalu $[a,c], a < b < c$

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{b+\varepsilon}^c f(x)dx$$

Posplošeni integral za funkcijo na intervalu od a do neskončno

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Kartezično, polarno in parametrično podane krivulje

Karteznično: najbolj pogost zapis. $y = f(x)$
Polarno: polarni radij v odvisnosti od kota $r = f(\varphi)$
Parametrično: podana z več funkcijami $x = f(t)$ $y = g(t)$

Ploščina krivočrtnih likov

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

pri čemer je $f(x)$ zgornja in $g(x)$ spodnja funkcija

Ploščina izseka polarno podane krivulje

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r(\varphi))^2 d\varphi$$

Dolžina krivulje

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Prostornina vrtenine

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Površina vrtenine

$$P = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$