Уравнение теплопроводности.
Что это такое? Применение и визуализация.

Нехаева Екатерина

Май 2023

1. Уравнение теплопроводности

Уравнение теплопроводности позволяет рассчитать температуру в конкретной точке тела в конкретный момент времени.

В декартовой системе координат уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} + \ldots + \frac{\partial^2 T}{\partial x_n^2}) = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, t)$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты точки, в которой рассчитывается температура

t – время (момент времени)

T – температура в точке, a - коэффициент температуропроводности

$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, t)$ – функция тепловых источников

2. Жан-Батист Жозеф Фурье

Жан-Батист Жозеф Фурье (1768-1830) — французский математик и физик.

Член Парижской академии наук (1817), Французской академии (1826), иностранный член Лондонского королевского общества (1823), иностранный почётный член Петербургской академии наук (1829).

Основная область научных занятий Фурье — математическая физика. Фурье сделал важную математическую работу по теории распространения тепла. Она была начата в 1804 и закончена в 1807 году под названием «О распространении тепла в твердых телах». Работа была представлена в Парижский институт 21 декабря 1807 г. Рецензентом был комитет из известных математиков. Теперь эта работа оценивается очень высоко, но в то время она вызвала полемику. Комитет отклонил эту работу по двум причинам. Первая была указана Лагранжем и Лапласом в 1808 году и состояла в том, что Фурье использовал представление функций в виде тригонометрических рядов, что не является, по их мнению, общим методом. Они нашли ошибки в его усовершенствованном подходе к решению задач, выполненных Даниилом Бернулли в XVIII столетии. Объяснения Фурье показались им неубедительными.

Вторая причина была отмечена Био, возражавшего против интегрирования уравнений переноса тепла. Дело в том, что Фурье не сделал ссылки на статью Био, опубликованную в 1804 г. по этой теме, так как статья Био была некорректной. Лаплас и позднее Пуассон указали на подобную причину. Институт, тем не менее, присудил Фурье за работу по распространению тепла в твердых телах премию в конкурсе работ по математике за 1811 год. Он представлял на конкурс свою работу 1807 года вместе с работами по охлаждению неограниченных тел, Земли и по излучению. Почему-то только вторая часть была получена комитетом, и за решение о присуждении премии голосовали Лагранж, Лаплас и др. Однако отзыв о работе был не очень благоприятным.

Фурье стал секретарем отделения академии в 1822 г., и после 15 летней задержки выходит его книга «Аналитическая теория тепла» ("Théorie analytique de la chaleur"). В ней Фурье вывел дифференциальное уравнение теплопроводности и далеко развил идеи, в самых общих чертах намеченные ранее Д.Бернулли, разработал для решения уравнения теплопроводности при тех или иных заданных граничных условиях метод разделения переменных (т.н. метод Фурье), который он применял к ряду частных случаев (куб, цилиндр и др.). В основе этого метода лежит представление функций тригонометрическими рядами Фурье, которые хотя и рассматривались иногда ранее, но стали действительным и важным орудием математической физики только у Фурье. "Аналитическая теория тепла"явилась отправным пунктом создания теории тригонометрических рядов и разработки некоторых общих проблем математического анализа. Фурье привел первые примеры разложения в тригонометрические ряды Фурье функций, которые заданы на различных участках различными аналитическими выражениями. Тем самым он внес важный вклад в решение знаменитого спора о понятии функции, в котором участвовали крупнейшие математики XVIII в. Его попытка доказать возможность разложения в тригонометрический ряд Фурье любой произвольной функции была неудачна, но положила начало большому циклу исследований, посвященных проблеме представимости функций тригонометрическими рядами и интегралами (интеграл Фурье). С этими исследованиями было связано возникновение теории множеств и теории функций действительного переменного.

3. Закон Фурье

В 1807 году Фурье экспериментально доказал следующую зависимость:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

q - количество теплоты, передаваемое через единицу поверхности в единицу времени. Знак минус указывает на то, что тепловой поток изменяется в сторону уменьшения температуры.

$\frac{\partial T}{\partial x}$ - изменение температуры на единицу длины нормали к изотермической поверхности.

λ - коэффициент теплопроводности.

4. Коэффициенты теплопроводности и температуропроводности

Коэффициент теплопроводности показывает, какое количество теплоты проходит вследствие теплопроводности за 1 с через 1 м^2 поверхности теплообмена при падении температуры на 1 $^\circ C$ на 1 м нормали к изотермической поверхности.

$\lambda = \left[\frac{\text{Дж}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{с}\cdot\text{К}}\right] = \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}\right]$

Коэффициент температуропроводности характеризует скорость выравнивания температуры вещества в неравновесных тепловых процессах. Численно коэффициент температуропроводности равен:

$$a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}$$

Чем выше коэффициент теплопроводности, тем быстрее меняется и выравнивается температура. Чем больше теплоты требуется для изменения температуры единицы объёма вещества $(c \cdot \rho)$, тем медленнее меняется и выравнивается температура. $a = \left[\frac{\text{Дж}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{с}\cdot\text{К}} \cdot \frac{1}{\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}\cdot\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}\right] = \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}}\right]$

5. Вывод уравнения теплопроводности

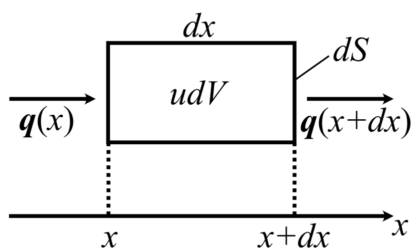

Рис. 1: К выводу уравнения теплопроводности

Рассмотрим перенос тепловой энергии вдоль оси x. В объеме $dV = dSdx$ количество энергии, содержащейся в данный момент времени t, равно $dU = udV$, где $u = u(x,t)$ – объемная плотность энергии.

Пусть $q = q(x, t)$ – плотность потока тепла. Количество энергии, поступившей в объем dV в единицу времени, равно

$$(q(x,t) - q(x+dx,t))dS = -\frac{\partial q}{\partial x}dV. \tag{1}$$

Однако эта же величина есть скорость изменения количества энергии в выделенном объеме dV и её можно представить в виде $\frac{\partial u}{\partial t}dV$. Таким образом, мы приходим к уравнению теплового баланса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

Теперь обратим внимание, что $u(x, t)$ это тепло в малом объеме и тогда его изменение по температуре это теплоемкость:

$$\frac{\partial u}{\partial T} = c \cdot \rho \tag{3}$$

Если учесть это и подставить в эту формулу уравнение для закона Фурье, то получим:

$$c \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right), \tag{4}$$

что в свою очередь аналогично:

$$c \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{5}$$

В трехмерном случае это эквивалентно уравнению

$$c \cdot \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right). \tag{6}$$

Если считать c, ρ и λ постоянными, то можно упростить до:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T, \tag{7}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho}\left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}}\right]$ – коэффициент температуропроводности.

Так же можем ввести дополнительную функцию $f(x, y, z, t)$, которая будет отвечать за источники тепла. Тогда согласно ЗСЭ:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T + f(x, y, z, t), \tag{8}$$

6. Численное решение уравнения теплопроводности

Уравнение теплопроводности можно решать аналитически или численно.

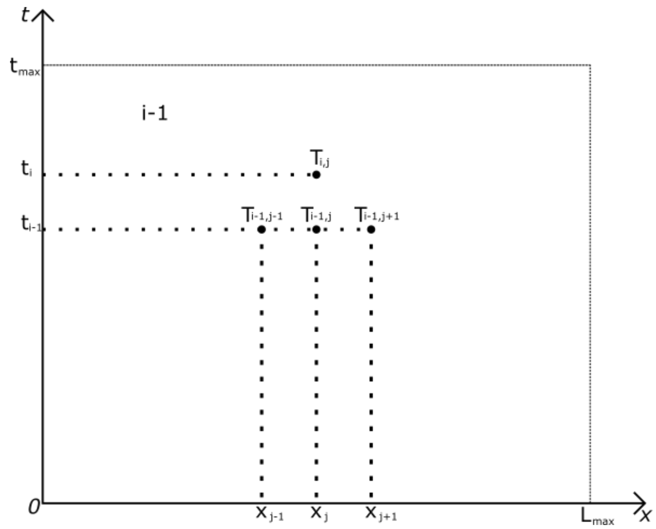

Рис. 2: Сетка

Далее мы будем рассматривать численный метод решения на "сетке"на примере распределения температуры по времени в стержне.

Численный метод позволяет рассчитать температуру в заданной точке в заданный момент времени с помощью температур в этой и соседних точках в предыдущий момент времени.

t - время, dt - шаг по времени

x - координата на стержне, dx - шаг по координате

L_{max} - длина стержная

t_{max} - максимальный рассматриваемый момент времени

$T_{i,j}$ - температура в момент времени i, в точке с координатой j на стержне

Используя уравнение теплопроводности для одномерного пространства (стержня), выведем уравнение для расчёта $T_{i,j}$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f(x,t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T(x,t+dt) - T(x,t)}{dt}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T(x+dx,t) - T(x,t)}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\frac{T(x+dx,t)-T(x,t)}{dx} - \frac{T(x,t)-T(x-dx,t)}{dx}}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(x+dx,t) - 2T(x,t) + T(x-dx,t)}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \frac{T(x,t+dt)-T(x,t)}{dt} = a\frac{T(x+dx,t)-2T(x,t)+T(x-dx,t)}{dx^2} + f(x,t) \Rightarrow$$

$$T(x,t+dt) = T(x,t) + \frac{a \cdot dt}{dx^2}(T(x+dx,t)-2T(x,t)+T(x-dx,t)) + f(x,t)dt$$

Тогда уравнение для сетки:

$$T_{i+1,j} = T_{i,j} + \frac{a \cdot dt}{dx^2}(T(i,j+dx)-2T(i,j)+T(i,j-dx)) + f(i,j)dt$$

7. Визуализация и моделирование с помощью программ

Существует множество различных прикладных программ, которые позволяют решать задачу теплопроводности численными методами. Практически любая система автоматизированного проектирования или моделирования физики имеет в себе функционал для симуляции процесса теплопереноса. Среди них:

- Dassault Systems SolidWorks
- Siemens NX
- Freecad
- Autodesk Fusion/Inventor
- COMSOL Multiphysics
- КОМПАС-3D (KompassFlow)

и многие другие.

В целях построения наглядной картинки процесса теплопроводности, я сама попробовала реализовать программу, которая визуализирует распределения тепла на плоскости в каждый момент времени. На протяжении заданного времени (1000 секунд) в центре поля размером 100 на 100 находится нагреватель. Справа от поля расположена шкала температур, в верхней части окна расположены часы, отображающие момент времени, в котором программа строит картинку. Далее, я немного переделала программу и смогла получить gif-изображение для данного процесса.

Язык программирования: Python

Использованные библиотеки: для расчета и визуализации - numpy, matplotlib, time, для проектирования gif-изображения - PIL, imageio.

Недостатки программы: В качестве коэффициента температуропроводности я приняла $k = 0.2$, что не совсем корректно, потому что обычно коэффициент принимает значения в диапозоне от 10^{-6} до 10^{-3}. Однако с коэффициентом 0.2 процесс происходил наиболее наглядно (то, зачем я писала программу), поэтому я его оставила.

В эту программу можно также добавить "препятствие"в виде материала с другой теплопроводностью.

Аналогично, можно промоделировать окно, то есть снаружи есть некоторая постоянная отрицательная температура, внутри конаты некоторая постоянная положительная температура. Со временем температура между этими точками выравнивается в плавный градиент. Линейность зависимости температуры от расстояния до улицы можно также проверить с помощью видоизменения программы.

8. Применение уравнения теплопроводности

Место основного применения уравнения теплопроводности - технологические процессы химической, строительной и других отраслей промышленности. Например, уравнения теплопроводности применяется при расчете тепловых аппаратов, работающих при нестационарном режиме, ограждающих конструкций в условиях переменных тепловых воздействий (теплоизоляция зданий, печей, трубопроводов), при проектировании машин, компьютеров и другой техники, для расчета температурных напряжений в мостах и дорогах. Особо важно применение уравнения при проектировании реактивной и ракетной техники, где аппаратура работает в экстремальных условиях нестационарного режима.

9. Ссылки и литература

Список литературы

[1] Н. А. Кириченко "Термодинамика, статистическая и молекулярная физика"

[2] Википедия: Уравнение теплопроводности, Температуропроводность, Теплопередача и пр.

[3] П. Л. Кириллов "Имена и числа подобия (четыре портрета)"

[4] Ю. И. Дытнерский "Основные процессы и аппараты химической технологии"

[5] А. В. Лыков "Теория теплопроводности"