Probabilidad de ruina de una Compañía Aseguradora

Héctor San Román Caraza - Jaime Guzmán Parada - Luis Leopoldo Jiménez Pérez
Tecnológico de Monterrey
Departamento de Matematicas y Ciencias Aplicadas

Introducción

El riesgo puede ser definido como la combinación de la probabilidad de que ocurra un evento y las consecuencias negativas que pueda traer. En caso del riesgo económico, este tiene consecuencias directas en las decisiones de inversión que se determinan previamente en una empresa. En este trabajo se buscó aproximar la probabilidad de ruina de una compañía de seguros a partir de un conjunto de datos reales proporcionados por el Socio Formador.

Objetivos

Se busca implementar el modelo clásico de Cramer-Lundberg (CL) por medio de simulaciones Montecarlo (MC); al igual que utilizar métodos de aproximación como CL y Pollaczek-Khinchine. Nos centraremos en las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que una compañía aseguradora llegue a quiebra en un tiempo de 365 días?
- ¿Qué tan importante es iniciar con un número mayor o menor de capital?
- ¿Qué tipo de distribución estadística siguen nuestros datos?
- ¿Se puede dar un resultado realmente confiable para un proceso estocástico como este?

Modelo Clásico de CL

Tomando como nuestra variable u el monto monetario inicial con el que cuenta la compañía, la prima por unidad de tiempo c, los reclamos que llegan en tiempo aleatorios $W_1, W_2, ...$, y los tamaños de las reclamaciones están dados por $Z_1, Z_2, ...$, que son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con una cierta distribución común F, con $F(0)$=0 y media $E(Z_k) = \mu$:

$$X(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k$$

Donde nosotros utilizamos principalmente los valores de $2,000,000$ para nuestra variable u, nuestra λ tiene un valor de 74,3 y nuestra prima constante c toma el valor de 2,309,304.067.

Metodología Utilizada

1. Inferencia de Parámetros

- **Parámetro λ para distribución de Poisson homogénea:**

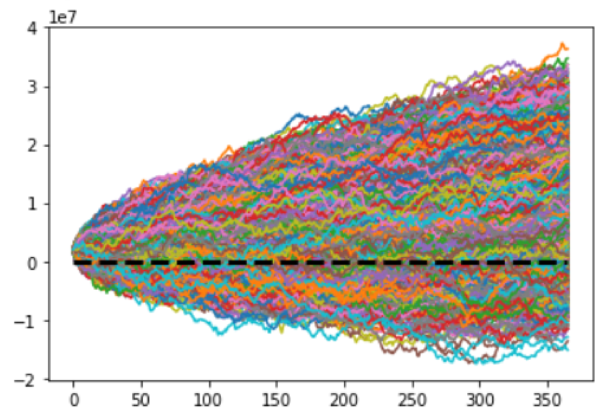
$$\hat{\lambda} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}} \leq \lambda \leq \hat{\lambda} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}$$

- **Parámetro μ para distribución exponencial:**

$$\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{2n}(1-\alpha/2)} \leq \frac{1}{\mu} \leq \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{2n}(\alpha/2)}$$

2. Simulación MC clásico y MC con Reducción de Varianza

De acuerdo al método MC, simularemos la probabilidad de ruina de una compañía de seguros a través de un año, lo que nos arroja un valor de ruina que se aproxima a la probabilidad real.
Para reducir la varianza de este método aplicaremos el Teorema Central del Límite, el cual nos permite usar el estadístico de prueba Z en nuestros intervalos de confianza y así reducir la varianza de la probabilidad de ruina, esto de acuerdo a un margen de error arbitrario.



3. J superior para probabilidad de ruina

$$\psi(u) \sim \frac{\rho\mu}{h'(R) - \frac{c}{\lambda}} e^{-Ru}$$

Donde R representa el coeficiente de ajuste, el cual solo existe en colas ligeras. También se presenta la carga de seguridad de la compañía, representada por la variable ρ.

4. Pollaczek-Khinchine

En este método se utiliza la fórmula de Pollaczek-Khinchine para todo $u \geq 0$.

$$\phi(u) = (1 - \frac{\lambda\mu}{c})\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\lambda\mu}{c})^n (F_Z^s)^{*n}(u)$$

Donde la n-ésima convolución de la función F_z^s es dada por :

$$\int_0^x (\lambda e^{-\lambda x})^{*n} dx = (F_Z^s)^{*n}$$

Resultados Gráficos

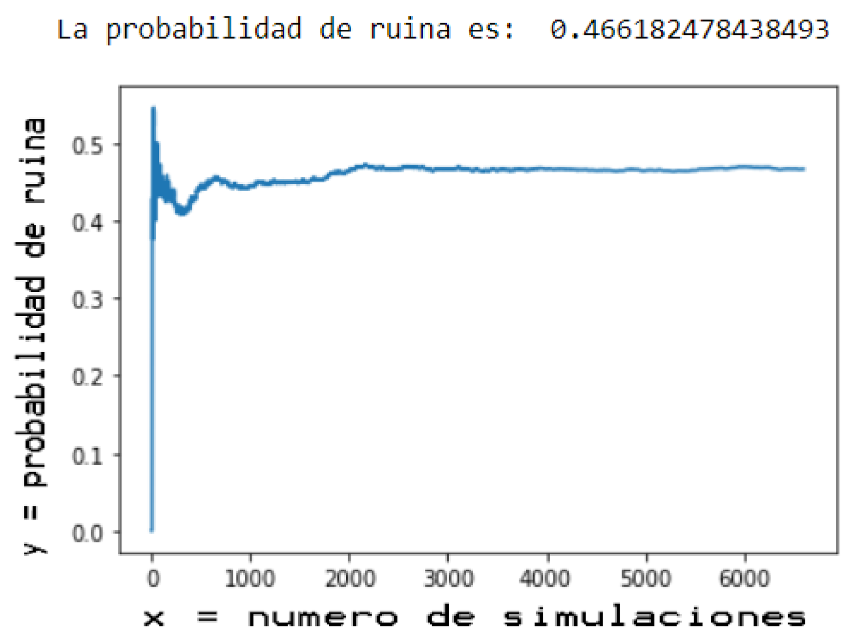


Figura 1: Probabilidad de ruina por método MC con variación reducida. Se redujo la varianza del resultado MC y se obtuvo un resultado que representa mejor la probabilidad de ruina real.

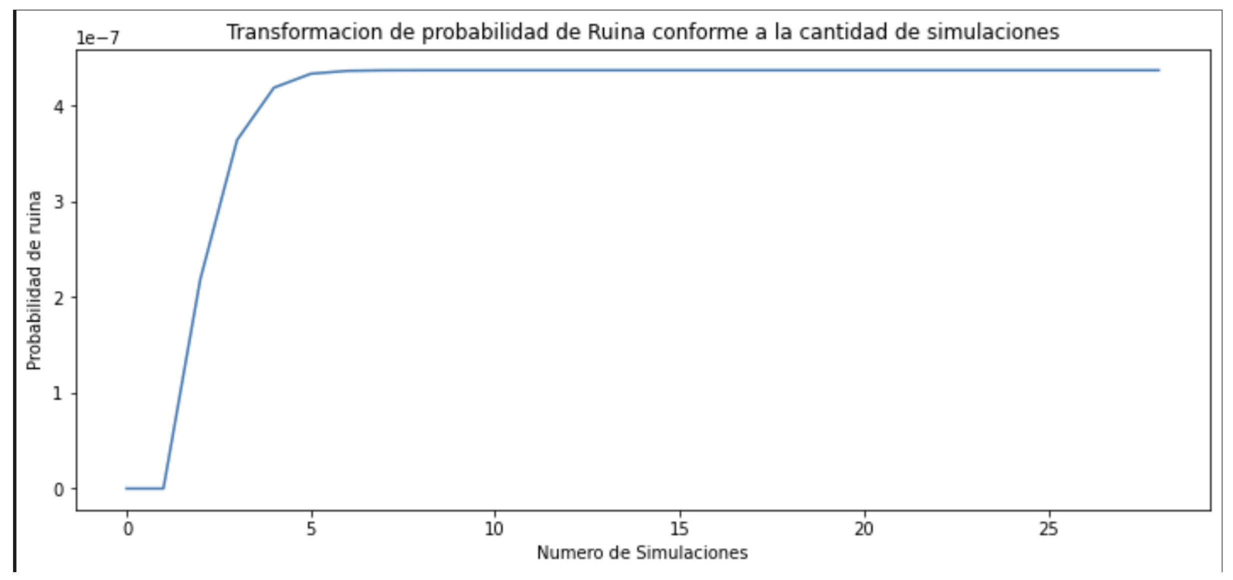


Figura 2: Gráfica de ruina con la fórmula de Pollaczek-Khinchine. Tras evaluar la fórmula se puede ver como cambia la probabilidad de ruina conforme variamos el número de simulaciones.

Resultados

Al final del trabajo es necesario revisar la información que obtuvimos con cada metodología y compararlas entre ellas, es importante ver si se observa una similitud en la probabilidad de ruina de los diferentes métodos o si esta cambia mucho.

1. **Simulación Montecarlo Clásico:**

   Haciendo 10,000 iteraciones con el método Montecarlo obtenemos una probabilidad de ruina de 0.4589 cuando analizamos para un periodo finito de un año y teniendo un monto inicial de 2,000,000.

2. **Simulación Montecarlo con Reducción de Varianza:**

   Para el método de Montecarlo con reducción de varianza tuvimos una probabilidad de ruina que va desde 0.44 hasta 0.491 con un intervalo de confianza del 95 % llegando a reducir la varianza hasta 0.02551 y realizando menos iteraciones, en vez de 10,000 solo necesitamos 6,609.

3. **Aproximación de Cramer-Lundberg:**

   La aproximación de Cramer-Lundberg nos da una probabilidad de ruina de 0.5202 tomando como nuestro coeficiente de ajuste R = 0.0000003127.

4. **Pollaczek-Khinchine:**

   Finalmente el método de Pollaczek nos da una probabilidad de ruina estabilizada de $4.19e^{-07}$. El valor es lejano al de los otros métodos.

Conclusión

Al observar los resultados de los 4 métodos aplicados podemos nosotros concluir que la probabilidad de ruina de una empresa modelada con el modelo clásico de CL puede ser reducida de gran manera al incrementar cualquiera de nuestras dos variable u o c. Estos modelos aplicados también han demostrado diferentes ventajas y desventajas respectivas al modelo con el que se analizó. Nosotros concluimos que la utilización de la metodología de CL para analizar este problema es la mas aplicable ambos por su simplicidad de aplicación a comparación de los otros métodos al igual que su utilidad. Esto no quiere decir que los otros modelos no sean útiles, pero nosotros consideramos la aproximación de CL como el mejor método en el caso que se tomo.

Referencias

[1] Alma D. Maldonado Santiago. Probabilidad de ruina con el modelo cl asico de cramer-lundberg para distribuciones de cola ligera. 2011, Oaxaca, UNIVERSIDAD TECNOL OGICA DE LA MIXTECA.

[2] Anónimo. Definición de riesgo. Accedido en octubre 09, 2021 a url https://ciifen.org/definicion-de-riesgo/, 2021.

[3] Probabilidad de ruina en el modelo clásico de cramer-lundberg. https://www.utm.mx/edi_anteriores/ temas45/1ENSAYO_45_2.pdf. (10/16/2021).