Análisis de Riesgo de una Compañía Aseguradora

Héctor San Román Caraza - A01422876, Jaime Guzmán Parada - A00827834, Luis Leopoldo Jiménez Pérez - A01275004

***Resumen*—En este artículo se exponen métodos para aproximar la probabilidad de ruina de una compañía de seguros. Para esto se hace uso del modelo clásico de Cramer-Lundberg en conjunto con otros métodos que nos permitirán desarrollar este y aproximar mejor dicha probabilidad. Los métodos son aplicados cuando la distribución de los datos es una mezcla entre Poisson y exponencial, las cuales comprobaremos por medio de inferencias y ajustes de bondad. Buscaremos implementar nuestras aproximaciones en base a datos verídicos de una compañía de seguros, con los cuales desarrollaremos nuestras conclusiones.**

Index Terms- Cramer-Lundberg, Monte Carlo, Probabilidad de Ruina, Procesos Estocasticos, Pollaczek–Khinchine

I. Introducción

El riesgo puede ser definido como la combinación de la probabilidad de que ocurra un evento y las consecuencias negativas que pueda traer. El riesgo está compuesto por dos factores:

- La amenaza: Es el fenómeno, actividad humana, sustancia o condición que constituye una posible causa de perjuicio para alguien o algo. La amenaza se determina en función de la intensidad y la frecuencia.
- La vulnerabilidad: Son las características y las circunstancias de una comunidad, sistema o bien(es) que los hacen susceptibles a los efectos dañinos de una amenaza.

Por representar algo negativo para nosotros los humanos, nos hemos dado a la tarea de clasificarlos, ya que en distintas ramas de la ciencia y la vida cotidiana se presentan o se tienen contemplados ciertos riesgos. Los riesgos pueden ser económicos, sociales, físicos, biológicos, psicológicos y/o financieros. [4]

En caso del riesgo económico, este tiene consecuencias directas en las decisiones de inversión que se determinan previamente en una empresa. Cuando la compañía que se ve involucrada en el caso es una aseguradora se habla de un riesgo actuarial. Este se refiere a la incertidumbre de que una compañía aseguradora sea capaz de cumplir o solventar las reclamaciones de sus clientes.

De manera general, una compañía aseguradora opera de la siguiente manera: existe un grupo de personas que reconocen un riesgo para el cual no se está preparado y puede causarles consecuencias graves, en su economía o en su salud. Entonces de este posible riesgo nace la necesidad de contratar una aseguradora; donde cada una de estas personas paga una cantidad de dinero por periodos ya definidos por la aseguradora, que en dicho momento hace la firme promesa de apoyar monetariamente a todas aquellas personas que sufran algún tipo de daño.

La principal característica de una compañía de seguros es la incertidumbre asociada al tamaño de los reclamos que se reciben en un determinado tiempo. Una de las mejores formas de calcular dicha incertidumbre es a través de la teoría de la probabilidad. La probabilidad se ha dedicado de manera formal a estudiar estos fenómenos de riesgo ya desde hace tiempo. Es así que del riesgo actuarial se ha desprendido el estudio de la teoría de riesgo.

Esta teoría de riesgo tuvo su punto de partida en el modelo clásico de riesgo introducido en 1903 por el actuario sueco Filip Lundberg en su tesis doctoral. En esta tésis, Lundberg proponía algunas fórmulas asintóticas para la probabilidad de ruina de una compañía aseguradora con reclamos pequeños. El modelo fue estudiado más tarde por el estadístico y probabilista Harald Cramer, introduciendo en el modelo nuevos métodos en teoría de riesgo. Más adelante el modelo fue extendido para relajar supuestod sobre la distribución del tiempo, la distribución de los tamaños de reclamos, etc., en la mayoría de los casos, el objetivo seguía siendo calcular la probabilidad de ruina.

Este modelo, ya extendido, es aquel que estaremos explorando en este trabajo. Buscaremos detallar la problemática, responder algunas preguntas y hablar de las mejoras parra el modelo clásico de Cramer-Lundberg. [8]

II. Descripción problemática

Las compañías aseguradoras cuentan con la existencia de incertidumbre en cuánto se refiere a analizar el futuro monetario de la empresa. Esto es debido a que las ocurrencias de los siniestros son procesos estocásticos, por ende, no se puede conocer la cantidad ni el tiempo exacto en el que la compañía deba pagar gastos. De cualquier forma, las firmas aseguradoras necesitan conocer los riesgos que puedan surgir en cierto tiempo, por eso es que con ayuda de métodos estadísticos y análisis de probabilidades se pueden simular diferentes estados con los que podremos llegar a obtener una probabilidad de ruina para la empresa, esta nos dirá cuál es la posibilidad de la firma de llegar a un punto de quiebra monetaria teniendo en consideración características como el capital inicial, los pagos que hagan los clientes y frecuencia de siniestros.

En este trabajo se toma una base de datos que fue proporcionada por una compañía aseguradora anónima, donde encontraremos información relevante como la fecha de los siniestros y cantidad de gasto a cubrir. Con estos datos podemos obtener el parámetro que nos indica la cantidad de siniestros que sucede al día, a este lo denominaremos λ bajo el supuesto que los siniestros ocurren mediante una distribución de Poisson. También tendremos el supuesto que los costos que podremos obtener de la base de datos están dados por una distribución exponencial $\mu = 1/\lambda$.

Para realizar estas simulaciones de ruina utilizaremos el modelo clásico de Cramer-Lundberg el cuál se rige a través de la ecuación 1. Donde estamos tomando como nuestra variable u el monto monetario inicial con el que cuenta la compañía, el cuál le sumaremos la prima c (cantidad que pagan los clientes) multiplicada por el tiempo y restaremos la cantidad de dinero que se deba pagar dependiendo los siniestros que hayan ocurrido. Donde los reclamos llegan en tiempo aleatorios $W_1, W_2, ...$, y los tamaños de las reclamaciones están dados por $Z_1, Z_2, ...$, que son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con una cierta distribución común F, con $F(0)$=0 y media $E(Z_k) = \mu$:

$$X(t) = u + ct \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k \tag{1}$$

Se dice que la compañía aseguradora está en ruina cuando para algún $t \geq 0$. Cabe mencionar que llegar a un estado de ruina no significa que esta vaya a quebrar. Existe interés en saber en qué momento sucederá la ruina y qué probabilidad existe de que se llegue a este estado en tiempo finito. Entonces se denota la probabilidad de ruina de la compañía aseguradora por $\psi(u)$, empezando con un capital inicial u, entonces

$$\psi(u) = P(X(t) < 0, \text{para algún } t > 0 | X(0) = u)$$

La probabilidad de supervivencia de la compañía estará denotada por ϕ y por lo tanto,

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) \tag{2}$$

Por último, se tiene el supuesto que u=0 y si se usa la independencia entre $N(t)$ y $Z_1, Z_2, ...$, se puede deducir que,

$$E[X(t)] = t(c - \lambda\mu) \geq 0,$$

Y con esto ahora se supondrá que $c > \lambda\mu$. Este supuesto nos habla de que la prima que pagan por unidad de tiempo los que adquieren el servicio de la aseguradora debe ser mayor que los reclamos por unidad de tiempo multiplicados por el valor esperado de cada uno, lo que es que la compañía debe recibir más dinero de las primas que los reclamos que tiene.

Una vez tomados en cuenta todos los supuestos, simulamos una trayectoria considerando un periodo de tiempo de 365 días. Diremos que la empresa llego a ruina si en algún punto su cantidad monetaria fue de 0 o menor. Haciendo este proceso una gran cantidad de veces podemos analizar como hay veces que la compañía llegaba a la quiebra y otras que no, y a partir de esto, obtener una probabilidad en que la firma pueda llegar a la ruina. [5] [6]

III. Preguntas de Investigación

Para realizar este proyecto nos tuvimos que plantear algunas preguntas a resolver. Esto es de gran ayuda para darle un enfoque más especifico al trabajo y buscar respuestas más solidas. Las preguntamos que nos planteamos a resolver fueron:

- ¿Cuál es la probabilidad de que una compañía aseguradora llegue a quiebra en un tiempo de 365 días?
- ¿Qué tan importante es iniciar con un número mayor o menor de capital?
- ¿Qué tipo de distribución estadística siguen nuestros datos?
- ¿Se puede dar un resultado realmente confiable para un proceso estocástico como este?

IV. Metodología Utilizada

IV-A. *Inferencia de parámetros*

De acuerdo al Teorema Central del Límite sabemos que cuando una muestra aleatoria lo suficientemente grande, la distribución de la media muestral se asemeja a una distribución normal. Ahora el parámetro de nuestras distribuciones, que presentan los datos, seguirá este comportamiento, por lo cual utilizaremos el parámetro Z para realizar nuestras inferencias de parámetros. [7]

IV-A1. Parámetro λ para distribución de Poisson homogénea:

$$\hat{\lambda} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}} \leq \lambda \leq \hat{\lambda} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}} \tag{3}$$

IV-A2. Parámetro μ para distribución exponencial: Este parámetro es posible gracias a que se esta tomando un $\lambda = \frac{1}{\mu}$ [2]. Es con esto que se puede obtener el siguiente intervalo de confianza:

$$P\left(\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{2n}(1-\alpha/2)} \leq \frac{1}{\mu} \leq \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{\chi^2_{2n}(\alpha/2)}\right) \tag{4}$$

IV-B. *Método de Monte Carlo*

Como primera metodología para resolver la problemática utilizamos el método de aproximación de Monte Carlo. Este método consiste en realizar las simulaciones de como va a comportarse el capital de la empresa conforme el tiempo y observar si la firma llego a ruina, para poder hacer estas simulaciones nos basaremos en la ecuación 1.

Primero tendremos que tomar en cuenta que tenemos un capital inicial al cuál se le irán sumando las primas, es decir, la cantidad de dinero que la empresa recibirá de los clientes, y se le ira restando la cantidad de dinero que se requiera pagar por los siniestros que ocurran; esto se simulara en un tiempo t que tomaremos de 365 días.

Para la simulación obtenemos tendremos que obtener nuestro valor λ de la base de datos, el cuál nos dirá la media de los siniestros que ocurren en un día, también necesitaremos nuestro valor μ el cuál nos dirá el promedio que se gasta al día dependiendo los siniestros. Cómo no podemos trabajar con estos valores de forma fija, utilizaremos la distribución de Poisson con parámetro λ para simular los siniestros que ocurran al día (Z_n), con cada uno de estos siniestros utilizaremos la distribución exponencial con media μ para establecer el costo de cada uno y al final le restaremos todos al capital de la compañía. Este proceso lo llevaremos a cabo 365 veces simulando todos los días del año; si en algún punto del año el capital de la empresa llega a ser 0 o menos el código lo considerara como ruina y diremos que la empresa llego a quedar en bancarrota con una probabilidad de 100 %, pero si la empresa sobrevive los 365 días con un capital mayor a 0, diremos que hubo una probabilidad de ruina del 0 %. Este proceso es para poder hacer una sola simulación.

El Método Monte Carlo consta en hacer un número grande de simulaciones y a cada una de estas obtener su probabilidad de ruina, la cuál como se menciona anteriormente será entre los valores 0 - 1. Con todas estas probabilidades asignadas a cada una de las simulaciones iremos sacándole las medias, este valor se lo asignaremos a $\psi(u)$ el cuál nos dirá la probabilidad de ruina. Entre más valores tengamos notaremos que $\psi(u)$ va convergiendo en un mismo valor el cuál entenderemos que es la probabilidad de ruina real.

El problema de este método es que las probabilidades suelen variar mucho, ya que estas van con probabilidades de 0 y 1. Para intentar disminuir la varianza del problema implementamos el mismo Método Monte Carlo pero con la diferencia que el programa en vez de iterar una cantidad de n veces, va a ir analizando la desviación estándar de cada iteración hasta que esta se reduzca en un valor de intervalo de confianza que nosotros le asignemos. Esto nos resultara muy útil ya que nos ayudara a ahorrarnos memoria computacional y también nos dará un resultado que no varié de forma tan grande.

IV-C. *Método Monte Carlo con reducción de varianza*

Usando el Teorema Central del Límite [7] sabemos que sean la colección de familias $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ idénticamente distribuidas e independientes, tales que $\mu = E(X_1) = \theta < \infty$ y $\sigma_x^2 < \infty$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma}\right) \sim N(0,1) \tag{5}$$

Y dado que se comporta con una distribución normal, donde Z representa el estadístico Z y no los montos de reclamos, tenemos

$$\mathbb{P}\ (-Z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \tfrac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma_{\hat{\sigma}}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$\mathbb{P}\ (-Z_{\frac{\alpha}{2}} * \sigma_{\hat{\sigma}} \leq \hat{\theta}-\theta \leq Z_{\frac{\alpha}{2}} * \sigma_{\hat{\sigma}}) = 1-\alpha$$

Entonces

$$|\hat{\theta}-\theta| \leq Z_{\frac{\alpha}{2}} * \sigma_{\hat{\sigma}}$$

Donde $\epsilon := |\hat{\sigma}-\sigma|$, y en caso de nuestro reto, definiremos θ como la probabilidad de ruina $\phi(u)$.

IV-C1. *Aproximación de Cramer-Lundberg:*

$$\lim_{u\to+\infty} exp(Ru)\psi(u) = \frac{\rho u}{h'(R)-\frac{c}{\lambda}} \tag{6}$$

En la ecuación antes mencionada R es un coeficiente de ajuste que definiremos más adelante. Y para poder obtener dicha aproximación, primero se obtendrá una ecuación integro-diferencial para $\phi(u)$.

Suponiendo que el tiempo del primer reclamo, W_1 no es tiempo de ruina se tiene:

$$\phi(u) = \quad \mathbb{P}(\text{No ruina en } [0,\infty] \mid X(0)=u)$$

Como $X(t)$ tiene incrementos independientes y estacionarios, entonces

$$= \quad \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \phi(u+ct-z)dF(z)dt.$$

Y tras hacer un cambio de variable $x = u + ct$, donde ahora se tiene $t = \frac{x-u}{c}, x(0) = u, dx = cdt, \frac{dx}{c} = dt$, y tras desarrollo de la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} g(u) &= \quad -\int_{-\infty}^{u} \exp(-\lambda \tfrac{x}{c}) \int_0^x \phi(x-z)dF(z)dx \\ \phi(u) &= \quad \tfrac{\lambda}{c}\exp(\tfrac{\lambda u}{c})g(u) \end{aligned}$$

Tras integración y desarrollo, tenemos

$$\phi(u) = \phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \phi(\infty - z)[1-F(z)]dz \tag{7}$$

Entonces, dado que

$$\mu = \quad -\int_0^\infty [1-F(z)]dz$$

Se tiene

$$\rho = \frac{c-\lambda\mu}{\lambda\mu} = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 \tag{8}$$

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\rho} = \frac{\lambda\mu}{c} \tag{9}$$

De aquí notamos que la probabilidad de ruina no depende de la elección particular de la función de distribución F, solo de su media μ. Y entre más grande es el coeficiente de ajuste ρ, más pequeña es la probabilidad de ruina $\psi(0)$

Ahora al sustituir la (9) en (7) y desarrollar, se tiene

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty [1-F(z)]dz + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-z)[1-F(z)]dz \tag{10}$$

Supóngase que existe una constante $R > 0$ tal que:

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \exp(Rz)[1-F(z)]dz = 1 \tag{11}$$

Cuando la constante existe, es única y se llama coeficiente de Cramer-Lundberg o coeficiente de ajuste. Para demostrar la aproximación de Cramer-Lundberg, es necesario multiplicar (10) por $\exp(Ru)$. Tras esto, se obtiene una ecuación de renovación, donde utilizando el Teorema de Renovación podemos acortar expresiones. Tras un proceso de simplificación y desarrollo obtenemos

$$\lim_{u\to+\infty} \exp(Ru)\psi(u) = \frac{\rho\mu}{h'(R)-\frac{c}{\lambda}} \tag{12}$$

Y la forma asintótica (12) es la llamada aproximación de Cramer-Lundberg, para el modelo clásico de riesgo.

$$\psi(u) \sim \frac{\rho\mu}{h'(R)-\frac{c}{\lambda}}\exp(-Ru) \tag{13}$$

Donde la carga de seguridad de la compañía (ρ) está dada con (8). Y considerando que se tiene una distribución exponencial, tenemos que el coeficiente de Cramer-Lundberg está dado por:

$$R = \frac{\rho}{\mu(1+\rho)} \tag{14}$$

Además,

$$h'(R) = \frac{\mu}{(1-\mu R)^2} = \mu(1+\rho)^2 \tag{15}$$

IV-C2. Fórmula de Pollaczek–Khinchine: $Convolución$

Otro método de aproximación que veremos será el método de Pollaczek–Khinchine, el cual necesitará del desarrollo de la siguiente fórmula:

$$F_Z^s(X) = \frac{1}{\mu}\int_0^x [1 - F_Z(x)]dx \tag{16}$$

Para $x \geq 0$

$$F_Z^s(X) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Nosotros sabemos que en nuestra distribución de Poisson, $\lambda = \frac{1}{\mu}$, por lo que tenemos la siguiente ecuación:

$$F_Z^s(X) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu}x}$$

Ahora se presenta la fórmula de convolución de funciones:

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{17}$$

Nosotros buscamos calcular la siguiente convolución:

$$(F_z^s)^*(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F_Z^s(\tau)F_Z^s(u-\tau)d\tau$$

Por la naturaleza de que nuestra función es exponencial el $-\infty$ se puede cambia a un 0, de la misma manera, nosotros no buscamos llegar hasta ∞, sino que nuestro limite superior sera u dejándonos con la siguiente fórmula:

$$(F_z^s)^*(u) = \int_0^u F_Z^s(\tau)F_Z^s(u-\tau)d\tau$$

Ahora remplazamos el valor de nuestra funcion exponencial en la formula y obtenemos lo siguiente:

$$(F_z^s)^*(u) = \int_0^u (1 - e^{-\frac{1}{\mu}\tau})(1 - e^{-(\frac{1}{\mu})(u-\tau)})d\tau$$

Para facilitar este proceso se estara haciendo un cambio de variable para $1/\mu$, donde esta sera representada por κ. Esto hace que nuestra equacion se observe de la siguiente manera:

$$(F_z^s)^*(u) = \int_0^u (1 - e^{-\kappa\tau})(1 - e^{-\kappa(u-\tau)})d\tau$$

Al expandir nuestra ecuacion mediante multiplicacion obtenemos:

$$(F_z^s)^*(u) = \int_0^u (1 - e^{-\kappa\tau} - e^{-\kappa(u-\tau)} + e^{-\kappa\tau})d\tau$$

Ahora se tiene que expandir nuestro termino conjunto de $e^{-\kappa\tau}$ de la siguiente forma:

$$(F_z^s)^*(u) = \int_0^u (1 - e^{-\kappa\tau} - e^{-\kappa u}e^{\kappa\tau} + e^{-\kappa\tau})d\tau$$

Calculando la integral obtenemos:

$$(F_z^s)^*(u) = [\tau(1 + e^{-\kappa u}) + \frac{1}{\kappa}e^{-\kappa\tau} - \frac{e^{-\kappa u}}{\kappa}e^{\kappa\tau}]_0^u$$

Calculando la integral con los valores de u y 0, y tras simplificar la fórmula, llegamos a que tenemos lo siguiente:

$$(F_z^s)^*(u) = u(1 + e^{-\kappa u}) + \frac{1}{\kappa}e^{-\kappa u} - \frac{e^{-\kappa u}}{\kappa}e^{\kappa u} - \frac{1}{\kappa} + \frac{e^{-\kappa u}}{\kappa}$$

$$(F_z^s)^*(u) = u(1 + e^{-\kappa u}) + \frac{1}{\kappa}(e^{-\kappa u} + e^{-\kappa u} - 1 - 1)$$

$$(F_z^s)^*(u) = u(1 + e^{-\kappa u}) + \frac{2(e^{-\kappa u} - 1)}{\kappa} \tag{18}$$

Si observamos, la ecuación 18 es la primera convolución de nuestra formula de Pollaczek-Khinchine.

IV-D. Aproximación de Pollaczek–Khinchine

Como sabemos, nuestro modelo de Cramber-Lundberg puede también utilizar partes de la fórmula de Pollaczek-Khinchine. Esto aplica gracias a que tenemos una distribución exponencial en nuestros datos.

La versión de la fórmula de Pollaczek-Khinchine que estaremos usando es la siguiente:

$$(1 - \frac{\lambda\mu}{c})\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\lambda\mu}{c})(F_Z^s)^{*n}(u) \tag{19}$$

donde $(F_Z^s)^{*n}(u)$ es la n-ésima convolución de nuestra función cumulativa de densidad. Nosotros estaremos utilizando la función de densidad de probabilidad, ya que está integrada nos da la función cumulativa de densidad.

$$\int \lambda e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x} \tag{20}$$

Es por esta razón que haremos uso de esta propiedad para obtener con mayor facilidad la n-ésima convolución de nuestra pdf [1] y luego integraremos esta para obtener la n-ésima convolución de nuestra función cumulativa de densidad.

El desarrollo de una convolución ya fue demostrado en la sección $IV-C2$, por lo que estaremos utilizando un código [3] para obtener la n-ésima convolución de la función de densidad de probabilidad, la cual llega a ser lo siguiente:

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1}e^{-\lambda x}$$

Es importante recalcar que esta fórmula solo funciona en la función de densidad de probabilidad.

V. Análisis de Datos

Los datos con los que trabajamos son de una aseguradora anónima, de los cuáles podemos rescatar información de las variables 'Fecha', 'Monto del Siniestro' y 'Deducible'.

Analizando la base de datos podemos ver que si graficamos los siniestros se observa que se distribuyen por lo que parece ser una distribución de Poisson, esto se observa en la figura 5. Sin embargo para poder validar esto hacemos una prueba de bondad con 95 % de confianza donde tenemos que:

$$H_0 : X_i \sim Po(\lambda)$$
$$H_1 : X_i \nsim Po(\lambda)$$

Al hacer el análisis obtenemos un P-value de 0.2225 y como se tiene que P-value > 0.05 no rechazamos a H_0. Esto se puede observar en la figura 9

Haciendo el mismo proceso con los costos de cada siniestro, parece que tenemos una distribución exponencial, por eso en la simulación de la probabilidad de ruina usamos la distribución exponencial con media μ para los costos, esto se observa en la figura 6.

También para comprobar que en efecto esta sea una distribución exponencial realizamos una prueba de bondad con 95 % de confianza donde:

$$H_0 : Z_i \sim Exp(\mu)$$
$$H_1 : Z_i \nsim Exp(\mu)$$

Realizando los cálculos obtenemos un P-value de 0.3028, entonces no rechazamos nuestra H_0 ya que P > 0.05. Esto se puede observar en la figura 8

VI. Resultados

VI-A. *Inferencia de parámetros*

- **Parámetro λ para distribución de Poisson homogénea:** De acuerdo a la fórmula que describimos en nuestra metodología haremos una sustitución de variables para hacer nuestra inferencia del parámetro λ donde con una confianza del 95 % podemos decir que el valor real de este se encuentra entre los valores de:

$$74{,}198 \leq \lambda \leq 74{,}403$$

- **Parámetro μ para distribución exponencial:** De acuerdo a nuestra ecuación para inferir el parámetro μ de la distribución exponencial, con un 95 % de confianza, podemos decir que el valor real del parámetro yace entre el intervalo:

$$30,408{,}42 \leq \mu \leq 31,140{,}91$$

  La media de los reclamos al día que utilizamos fue $\lambda =$ 74,304, mientras que la media del tamaño de los reclamos usada fue de $\mu = 30,771{,}376$. Ambos valores notamos se encuentran dentro de nuestros intervalos de confianza del 95 %.

VI-B. *Método Monte Carlo*

Para el método de aproximación de Monte Carlo primero definimos cuantas veces queremos hacer la simulación, teniendo en cuenta que entre más simulaciones hagamos el valor debería converger al valor real. En este ejemplo tomamos el valor de 10,000 iteraciones ya que es un número lo suficiente mente grande para darnos un valor creíble y que tampoco sea tan grande para que pueda ser soportable hablando en cuanto a recursos computacionales. Mediante este método obtuvimos las simulaciones que se observan en la gráfica 1.

En la gráfica 2 vemos la probabilidad de ruina, la cuál observamos como comienza siendo muy dispareja hasta que llega a converger en un valor. Por medio del método de Monte Carlo clásico decimos que una empresa la cuál inicia con 2,000,000 de pesos como monto inicial y gana una prima de $c = \lambda * \mu * 1{,}01$ tiene un 45.89 % de llegar a la ruina en un periodo de un año, o 365 días.

VI-C. *Método Monte Carlo con variación reducida*

Parecido al método anterior, utilizaremos el método Monte Carlo que consiste en hacer un gran número de iteraciones para obtener la probabilidad de ruina, sin embargo ahora este número n de iteraciones será hasta que la varianza del valor $\psi(u)$ llegue a nuestro intervalo de confianza.

Tomando en cuenta una prueba de bondad con confianza del 95 % y un margen de error (ϵ) igual a 0.05, para reducir la variabilidad tenemos que el criterio de confianza será cuando la varianza sea menor a 0.02551. Esta meta se llega a cumplir hasta la iteración 6,609 llegando a tener una desviación de 0.02535 como se puede observar en la gráfica 3.

En la figura 4 vemos como al igual que en el método anterior inicia con una varianza alta pero con el tiempo llega a encontrar una linea delgada. Con el método de Monte Carlo y varianza reducida obtenemos que la probabilidad de ruina para los mismos parametros de la empresa aseguradora puede ir desde 44 % hasta 49.1 % en un intervalo de confianza del 95 %. Comparándolo con el otro método Monte Carlo vemos que las probabilidades de ruina son bastante cercanas pero en este caso presenta una menor varianza en el resultado, dándonos una cifra más precisa.

VI-D. *Método de Cramer-Lundberg*

Para obtener el valor de ruina por el método de aproximación de Cramer-Lundberg tenemos que sustituir en la ecuación 14.

Como primer paso necesitamos obtener el coeficiente Cramer-Lundberg (R) que está dado por la ecuación 15. Sustituyendo con los valores de nuestra compañía aseguradora obtenemos que el coeficiente de Cramer-Lundberg es $R = 0{,}0000003127$. Este valor al igual tenemos que sustituirlo en la ecuación 15 para poder llegar a la probabilidad de ruina.

Finalmente con los valores ya calculados obtenemos que con el método de Cramer-Lumberg la probabilidad de ruina a una empresa aseguradora con los parámetros antes ya mencionados es de 52.02 %.

Si comparamos este valor con los antes ya obtenidos por los métodos de Monte Carlo vemos que obtenemos resultados diferentes aunque no tan distantes, por lo que podemos intuir que la probabilidad de ruina real si ronda entre estos valores.

VI-E. Formula de Pollaczek–Khinchine

Si se busca obtener le valor de ruina utilizando la formula de Pollaczek-Khinchine, entonces estaremos utilizando la formula 19.

Primero que nada, se debe de obtener nuestra F_Z^s, la cual se debe de tener en su n-ésima convolución. Esto se puede lograr utilizando la formula 20 y obteniendo su integral de 0 a x.

Es gracias a esto que podemos obtener nuestra probabilidad de ruina en un pequeño numero de iteraciones, ya que los números se hacen muy grandes entre mas iteraciones se tienen.

Nuestro valor de ruina es 0 en las primeras iteraciones, como se observa en la figura 7. Cuando se llega alrededor de la iteración 60 se incrementa el riesgo hasta un pico de $1{,}6e^{-6}$. Una vez que se alcanza ese valor empieza a bajar la probabilidad de ruina a 0.

VII. Conclusiones

En la vida profesional los procesos estocásticos y la incertidumbre abundan entre las actividades que las compañías y empresas necesitan modelar; entenderlos y aprender a predecirlos es esencial para el funcionamiento de algunos lugares. En este caso, al hablar de una firma aseguradora el trabajo con incertidumbre es algo que se vive cuando queremos simular casi que cualquier proceso relacionado con esta, en el caso especifico de poder analizar el comportamiento que tendrá económicamente la compañía pueden ocurrir muchas variables las cuáles hay que tomar en cuenta y que también podemos modelar por medio de probabilidades.

En este trabajo vimos que hay diferentes métodos que nos ayudan a poder encontrar una probabilidad de ruina para la empresa aseguradora. Siguiendo el modelo clásico de Cramer-Lundberg pudimos hacer las debidas simulaciones de como se comportaría la empresa monetaria mente conforme al tiempo. Cuando la firma llegaba a un nivel monetario de 0 o menos, decíamos que la empresa llegaba a la ruina.

Utilizamos 4 diferentes métodos para poder calcular la probabilidad de ruina. Primero utilizamos el método método de Monte Carlo para simular una empresa de seguros con el modelo clásico de Cramer-Lundberg con muchas iteraciones donde el valor final de la empresa en cada iteración yacía entre los valores de 0 o 1. De ahí, el conjunto de probabilidades de ruina llegaba a converger en un valor entre mayor fuera el número de iteraciones, dándonos un valor aproximado de la verdadera probabilidad de ruina. Este método resultó bastante aceptable en cuestión del valor arrojado, sin embargo tenía dos consideraciones bastante fuertes, primero que necesitaba un gran número de iteraciones para funcionar y esto ocupa muchos recursos computacionales, y segundo que la probabilidad de ruina llegaba a tener mucha varianza y esto no nos llegaba a dar la confianza necesaria.

Después aplicamos el método Monte Carlo pero con reducción de varianza, éste hacía un proceso similar al Monte Carlo original con la diferencia que buscaba disminuir la varianza que tenia nuestra probabilidad de ruina, esto lo hacia ser más creíble y entrar en un intervalo de confianza que nos ayudará a aproximar mejor el valor de ruina, por lo que nos ahorraba bastante tiempo y memoria computacional. Observamos como bajo la varianza y las iteraciones en comparación del método anterior.

Como tercer método vimos el de Cramer-Lundberg, el cuál es un método analítico que nos ayudó a obtener la probabilidad de ruina sin tener que modelar o simular, por medio de iteraciones, la vida de una compañía de seguros a través de un año. Tras la substitución matemática observamos que da un resultado bastante parecido al que obtenemos por ambos métodos Monte Carlo realizados.

Finalmente usamos la formula de Pollaczek-Khinchine, donde se debe calcular la n-ésima convolución de una función y sustituir nuestras variables previamente establecidas. Esto lo logramos utilizando propiedades de la misma distribución de los datos y con una integral de la distribución Erlang, la cual encontramos se asemeja a la función de convolución tras su n-ésima potencia. Podemos observar que en Pollaczek-Khinchine no tenemos un valor que se parezca a Cramer-Lundberg o a Monte Carlo.

Después de haber analizado estos 4 métodos y haber cambiado las variables de capital inicial (u) y la prima que recibe de sus clientes en un determinado periodo de tiempo (c) las suficientes veces para ver como cambia el patrón, nos damos cuenta que lo que realmente marca la diferencia en la probabilidad de ruina es la variable que habla del monto inicial de la aseguradora (u). Esta variable es la causante en la mayoría de los casos que una empresa aseguradora se vaya a la ruina, entre más grande sea esta, menos probable será la ruina, esto ocurre en todos los métodos. Y dado que la empresa ya tenga tiempo de vida establecido, la prima que recibe de sus clientes(c) es aquella que puede alterar de mayor forma la probabilidad de ruina.

Con esto nos damos cuenta de la importancia de la teoría de probabilidad y sus aplicaciones en la vida laboral, como podemos utilizar ésta para predecir y analizar procesos que tendrán un gran impacto en la economía o el tiempo de ciertas personas. Existen muchos métodos que podemos utilizar para esto, si bien algunos son más o menos acertados, depende mucho de que sea lo que estemos buscando para implementarlos y de los datos que tengamos a nuestro alcance.

El presente trabajo sirve como modelo de estudio para matemáticas actuariales. Es importante recalcar que lo trabajado en este artículo no simula la vida real en su totalidad, ya que ésta tiene muchos más aspectos en cuanto al funcionamiento de una aseguradora y la economía del ambiente en el que la empresa se encuentre. Lo que buscamos es lograr una aproximación con la cual podamos basar decisiones futuras y lograr un mejor manejo de recursos e información dentro de una compañía aseguradora.

VIII. Figuras

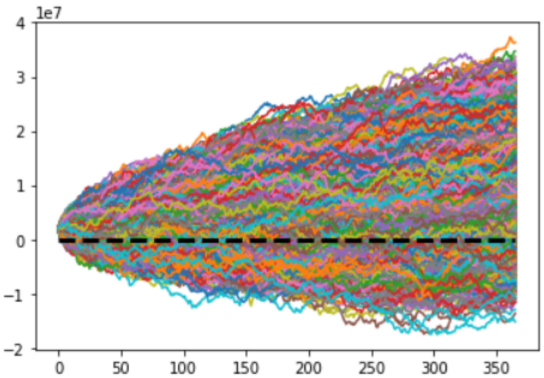


Figura 1. Gráfica de las simulaciones del Método Monte Carlo.

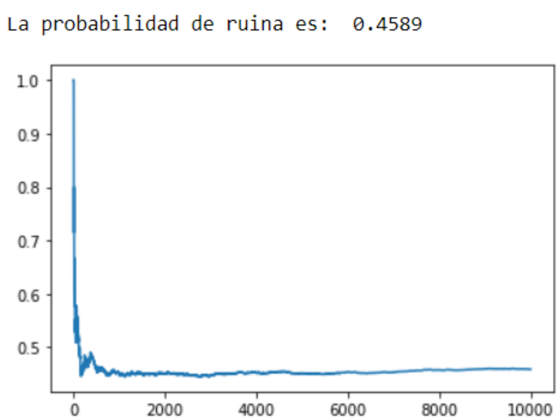


Figura 2. Probabilidad de ruina del método Monte Carlo.

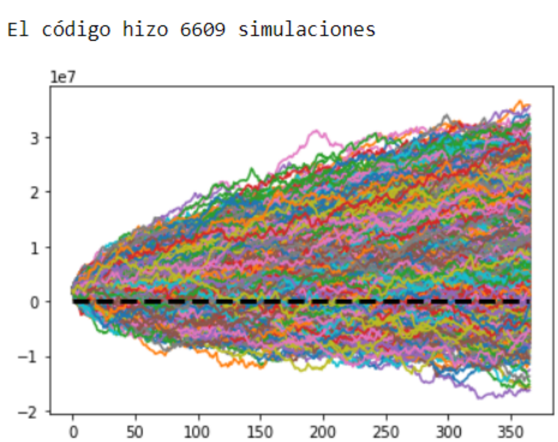


Figura 3. Gráfica de las simulaciones del método Monte Carlo con reducción de varianza.

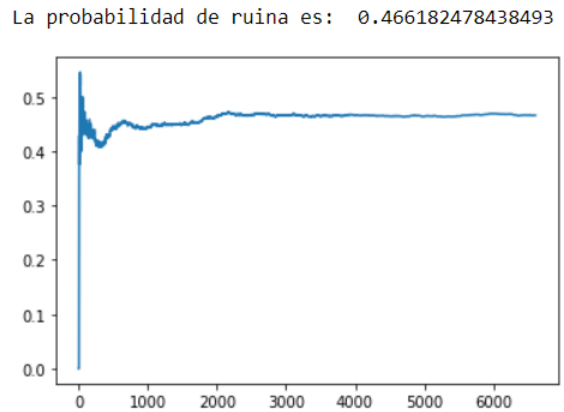


Figura 4. Probabilidad de ruina del método Monte Carlo con reducción de Varianza.

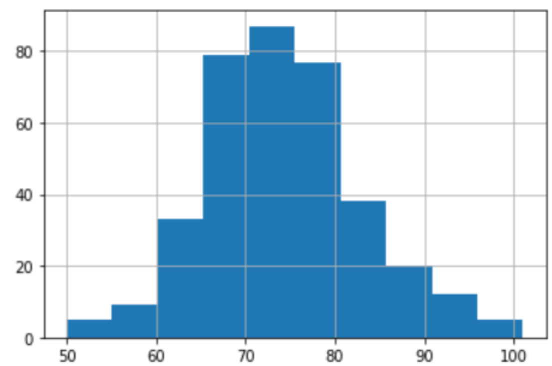


Figura 5. Histograma que muestra la distribución de nuestro número de reclamos.

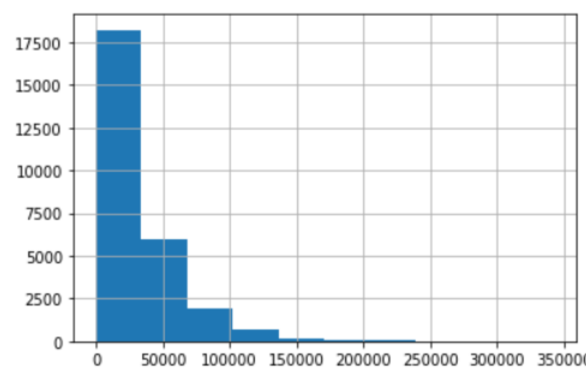


Figura 6. Histograma que muestra la distribución del tamaño de los reclamos.

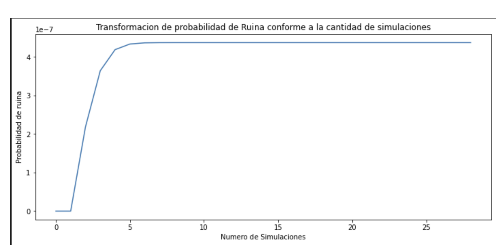
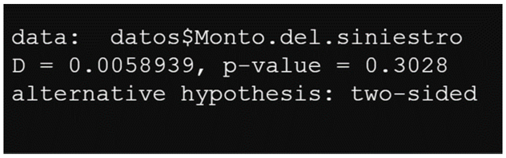
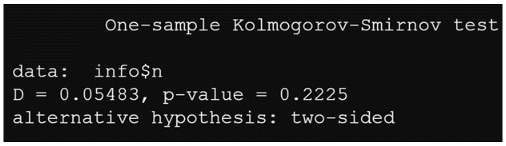


Figura 7. Gráfica de ruina con la formula de Pollaczek.



```
data:  datos$Monto.del.siniestro
D = 0.0058939, p-value = 0.3028
alternative hypothesis: two-sided
```

Figura 8. Comprobacion de prueba de hipotesis para distribucion exponencial.



```
        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  info$n
D = 0.05483, p-value = 0.2225
alternative hypothesis: two-sided
```

Figura 9. Comprobacion de prueba de hipotesis para distribucion poisson.

REFERENCIAS

[1] Convolutions in image processing — week 1 — mit 18.s191 fall 2020 — grant sanderson - youtube. https://www.youtube.com/watch?v=8rrHTtUzyZA. (Accessed on 10/19/2021).

[2] Exponential distribution - wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution. (Accessed on 10/19/2021).

[3] probability - convolution of n exponential distributions - mathematics stack exchange. https://math.stackexchange.com/questions/2496512/convolution-of-n-exponential-distributions. (Accessed on 10/19/2021).

[4] Anónimo. Definición de riesgo. Accedido en octubre 09, 2021 a url https://ciifen.org/definicion-de-riesgo/, 2021.

[5] Brenda I. García Maya. EstimaciÓn numÉrica de la probabilidad de ruina: Caso subexponencial. 2016, México, CDMX, UNIVERSIDAD ANTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA.

[6] Todorova Kolkovska E. Maldonado Santiago Alma D. José del Carmen, Jiménez Hernández. Probabilidad de ruina en el modelo clásico de cramer-lundberg. 2011, Temas de Ciencia y Tecnología.

[7] J. López Abellán. Teorema central del límite (tcl). Accedido en octubre 19, 2021 a url https://economipedia.com/definiciones/teorema-central-del-limite.html, 2018.

[8] Alma D. Maldonado Santiago. Probabilidad de ruina con el modelo cl asico de cramer-lundberg para distribuciones de cola ligera. 2011, Oaxaca, UNIVERSIDAD TECNOL OGICA DE LA MIXTECA.