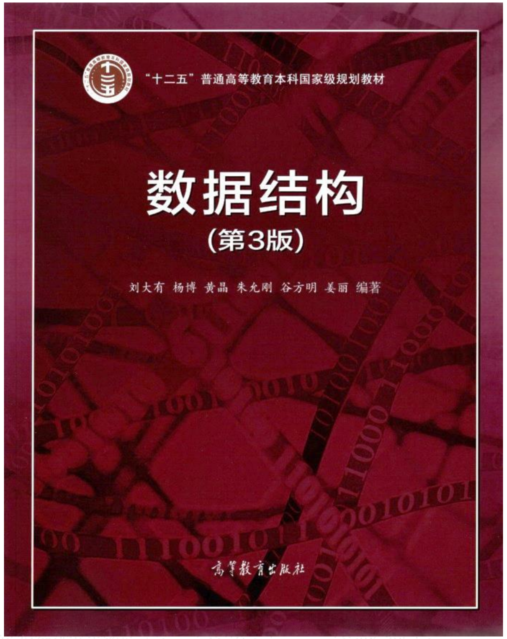


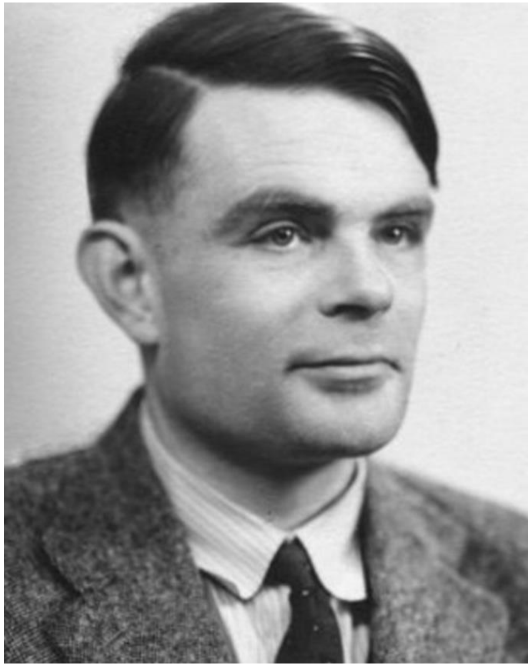
图的概念与存储结构

- 图的基本概念
- 图的存储结构

数据之法
结构之美
算法之道

Last updated on 2023.10

zhuyungang@jlu.edu.cn



Programming is a skill best acquired by practice and example rather than from books.

— *Alan Turing*

计算机科学之父

英国皇家科学院院士

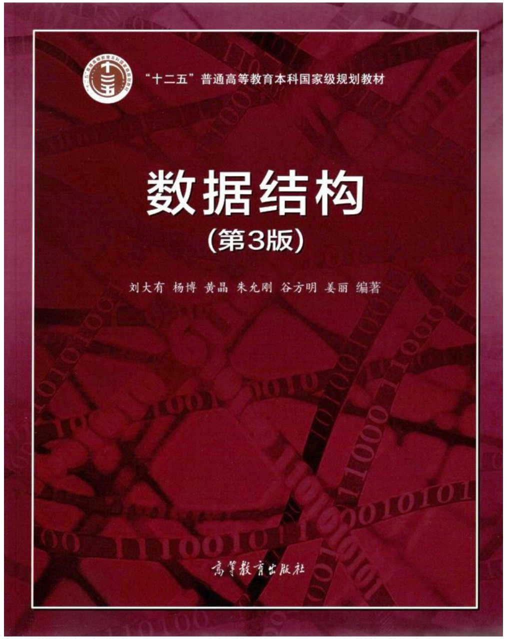
普林斯顿大学博士

曼彻斯特大学教授

剑桥大学研究员

图的概念与存储结构

- 图的基本概念
- 图的存储结构



数据之法
结构之美
算法之道

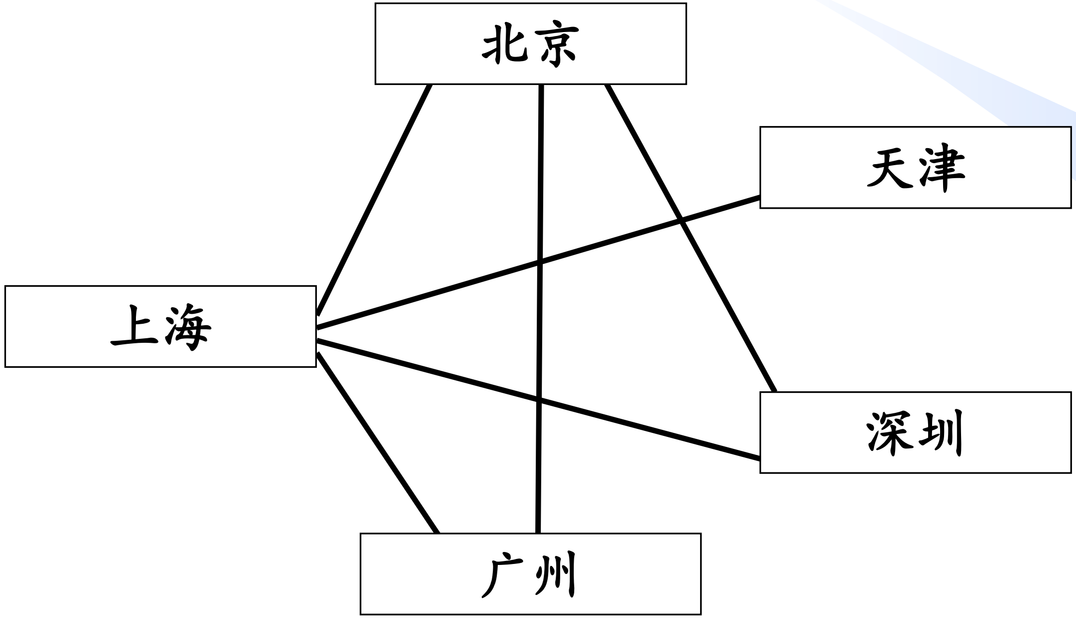
Last updated on 2023.10

zhuyungang@jlu.edu.cn

A

- 图（Graph）是一种较线性表和树更为复杂的非线性结构。在图结构中，对结点（图中常称为顶点）的前驱和后继个数不加限制，即结点之间的关系是任意的。图中任意两个结点之间都可能相关。图状结构可以描述各种复杂的数据对象。
- 图的应用极为广泛，特别是近年来的迅速发展，已经渗透到诸如语言学、逻辑学、物理、化学、电讯工程、计算机科学以及数学的其它分支中。

城市航线网



计算机网络

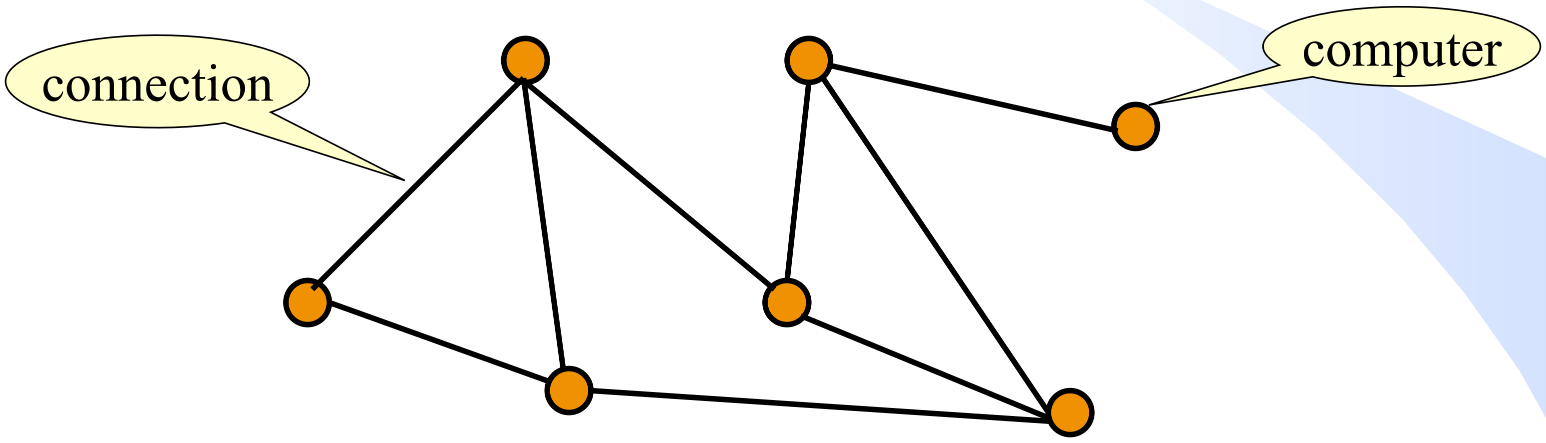


图 VS. 树

- 不一定具有一个根结点
- 没有明显的父子关系
- 从一个顶点到另一个顶点可能有多个（或0个）路径

图的基本概念

A

Vertex *Edge*

定义 图G由两个集合V和E组成，记为G = (V , E)；其中 V 是顶点的有穷非空集合，E 是连接 V 中两个不同顶点的边的有穷集合。通常，也将图G的顶点集和边集分别记为V(G)和E(G)。

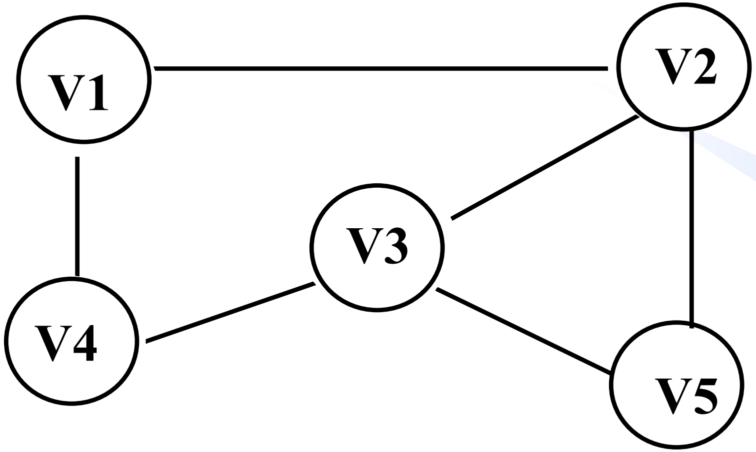
若图中的边限定为从一个顶点指向另一个顶点，则称此图为有向图。

若图中的边无方向性，则称之为无向图。

有向边

定义 若G = (V, E)是有向图，则它的一条有向边是由V中两个顶点构成的有序对，亦称为<u>弧</u>，记为<*w*, *v*>，其中*w*是边的始点，又称<u>弧尾</u>；*v*是边的终点，又称<u>弧头</u>。

无向图

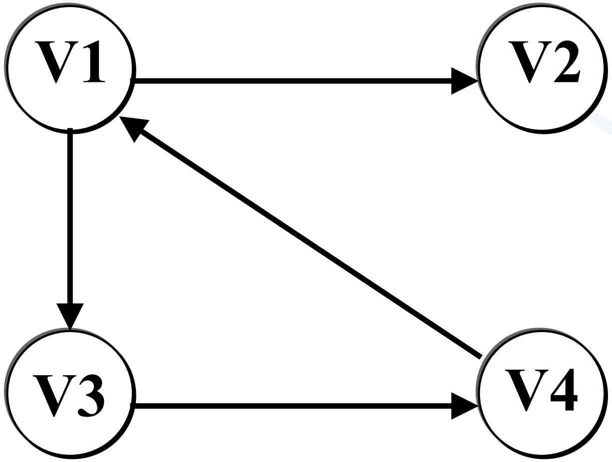


G=(V, E)

V={V1, V2, V3, V4 ,V5}

E={(V1, V4), (V1, V2), (V2, V3), (V2, V5),
(V3, V4), (V3, V5) }

有向图



G=（V，E）

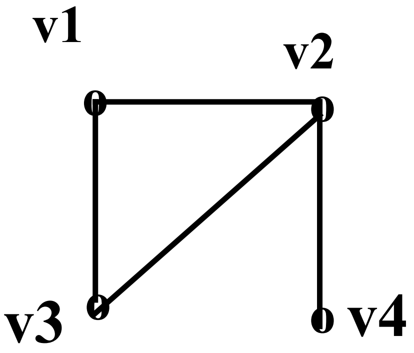
V={ V1，V2，V3，V4}

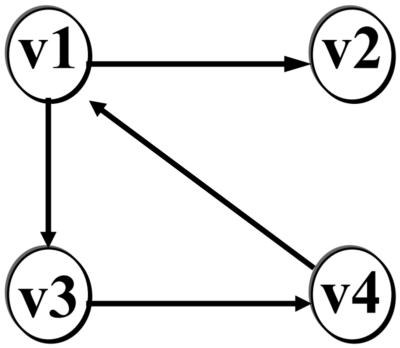
E={<V1,V2>, <V1,V3>, <V3,V4>, <V4,V1>}

邻接顶点

定义 在一个无向图中，若存在一条边(w, v)，则称w, v为此边的两个**端点**，它们是相邻的，并称它们互为**邻接顶点**。

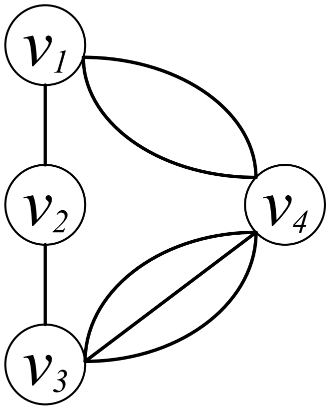
在一个有向图中，若存在一条边<w, v>，则称顶点w**邻接到**顶点v，顶点v**邻接自**顶点w。

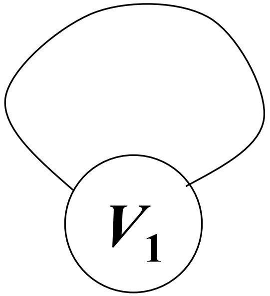




多重图和简单图

- 无向图中两个顶点之间不止有一条边，或者有向图中两个顶点之间不止有一条同方向的边，这类边称为**重边**。包含重边的图称为**多重图**。
- 一条边的两个端点是同一个顶点，则称为**自环**。
- 不含重边和自环的图称为**简单图**。
- 除非有特别说明，**本课程中的图都是简单图**。





很多问题都可以抽象成一个图结构，例如：

- 将多个城市构成顶点集V，如果城市a和城市b之间有一条高速公路，则在a和b之间连接一条边。允许在两个城市之间修建多条高速公路。按照这种方式建立的图是多重图。
- 社交网络中的好友关系，QQ、微信、微博、抖音等。

完全图

无向完全图：任意两个顶点之间都有一条边的无向图。包含n个顶点的无向完全图中，有$n(n-1)/2$条边。

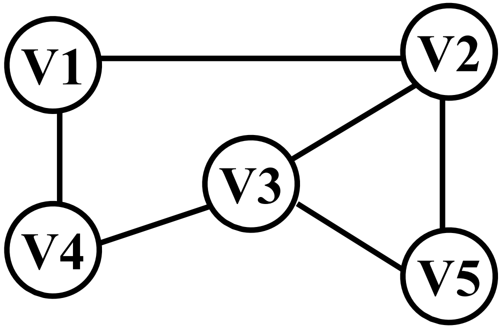
有向完全图：任意两个顶点之间都有方向相反的两条边。包含n个顶点的有向完全图中，有$n(n-1)$条边。

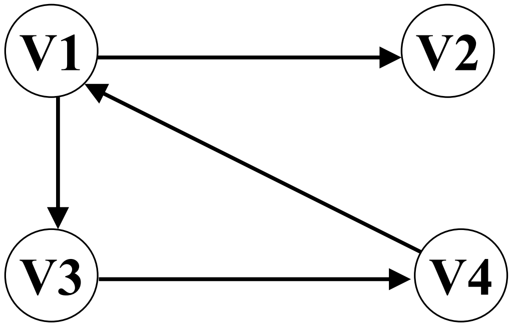
对于n个顶点的完全图，边的条数$e = O(n^2)$

顶点的度

A

- 设G是无向图，顶点v的度为以v为端点的边的条数。
- 若G是有向图，则v的出度为以v为始点的边的条数， v的入度为以v为终点的边的条数，顶点的度=入度+出度。





顶点的度和边的关系

A

设图G（可以为有向或无向图）共有n个顶点和e条边，若顶点v_i的度为$D(v_i)$，则

$$\sum_i D(v_i) = 2e$$

因为一条边关联两个顶点，而且使得这两个顶点的度数分别增加1。因此顶点的度数之和就是边的2倍。

已知顶点的度序列，即可求出边的条数。

例题

B

已知无向图G有16条边，其中度为4的顶点有3个，度为3的顶点有4个，其他顶点的度均小于3，则图G所含的顶点个数至少是_______。【考研题全国卷】

A. 10　　B. 11　　C. 13　　D.15

所有顶点度之和=2e，设顶点数为n

$$32 \le 4*3+3*4+2*(n-7)$$

所有顶点度之和的最大值

$n \ge 11$, 故选B

图的路径

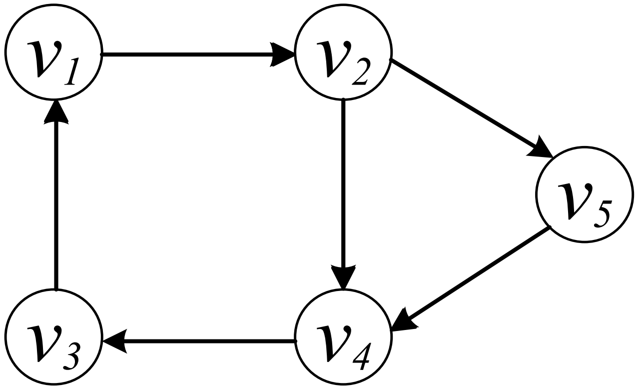
定义 设G是图，若存在一个顶点序列 $v_p, v_1, v_2, \cdots, v_{q-1}, v_q$ 使得 $<v_p,v_1>,<v_1,v_2>,\cdots,<v_{q-1},v_q>$ 或 $(v_p,v_1),(v_1,v_2),\cdots,(v_{q-1},v_q)$ 属于E(G)，则称v_p到v_q存在一条<u>路径</u>，其中v_p 称为起点，v_q称为终点。

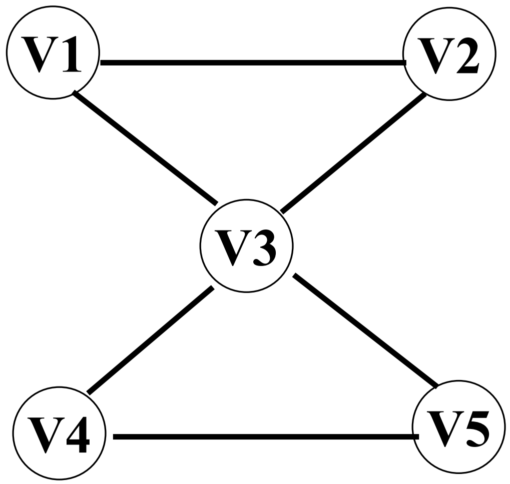
<u>路径的长度</u>是该路径上边的个数。

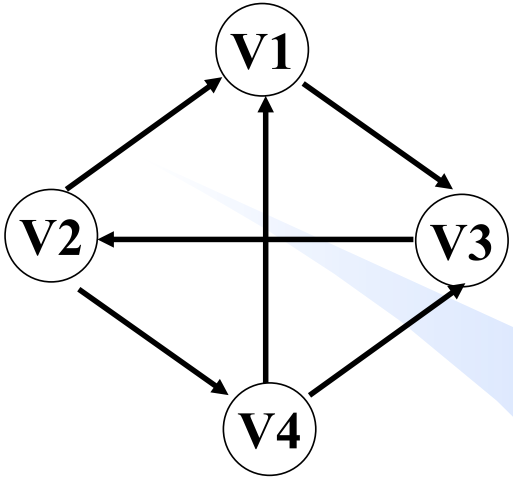
- 如果一条路径上除了起点和终点可以相同外，再不能有相同的顶点，则称此路径为<u>简单路径</u>。
- 如果一条简单路径的起点和终点相同，且路径长度大于等于2，则称之为<u>简单回路</u>。

A

- 下图中，*v*1到*v*3之间存在一条路径*v*1, *v*2, *v*5, *v*4, *v*3，同时这也是一条简单路径；*v*1, *v*2, *v*5, *v*4, *v*3, *v*1是一条简单回路。







路径：v1 v3 v4 v3 v5

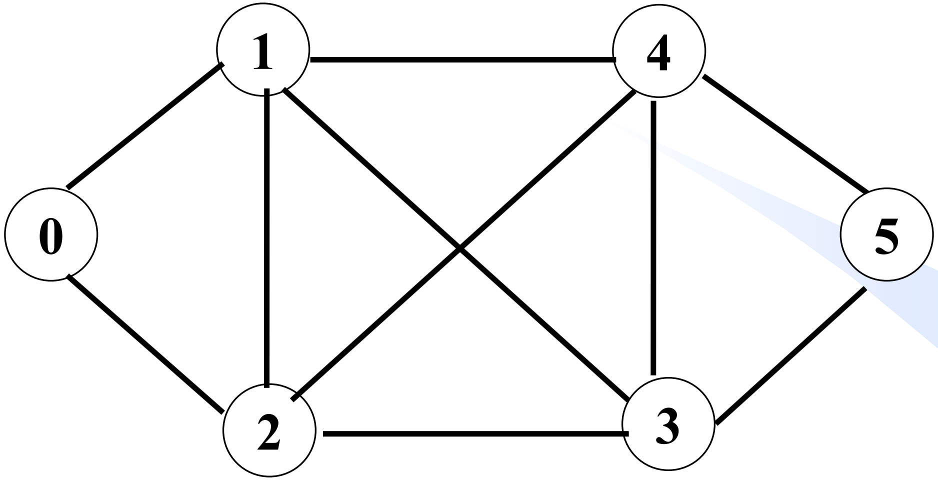
简单路径：v1 v3 v5

简单回路：v1 v2 v3 v1

路径：v1 v3 v2 v4 v3 v2

简单路径：v1 v3 v2

简单回路：v1 v3 v2 v1



欧拉回路（一笔画）

每条边经过一次

5-4-1-2-0-1-3-2-4-3-5

汉密尔顿回路

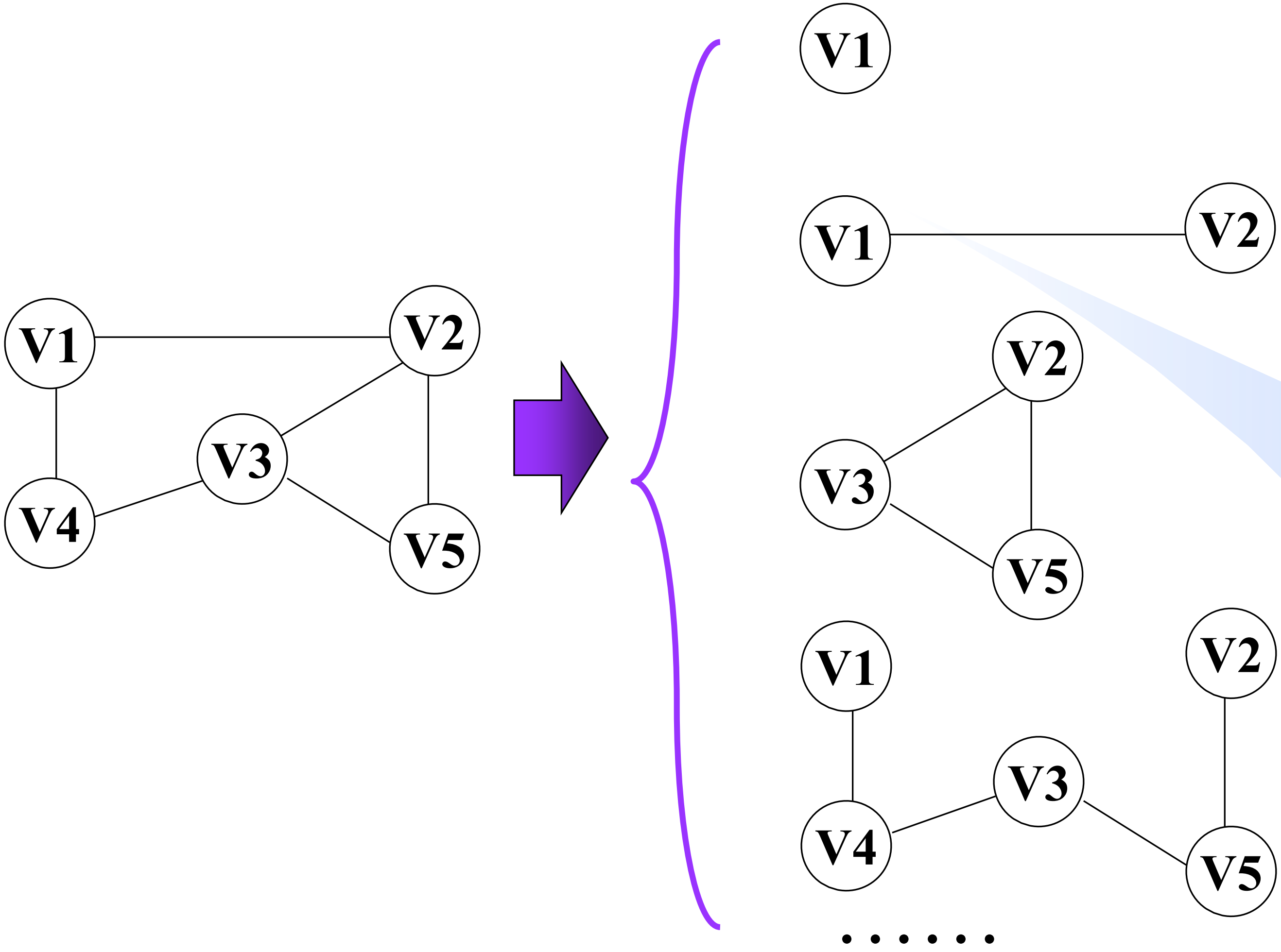
每个顶点经过一次

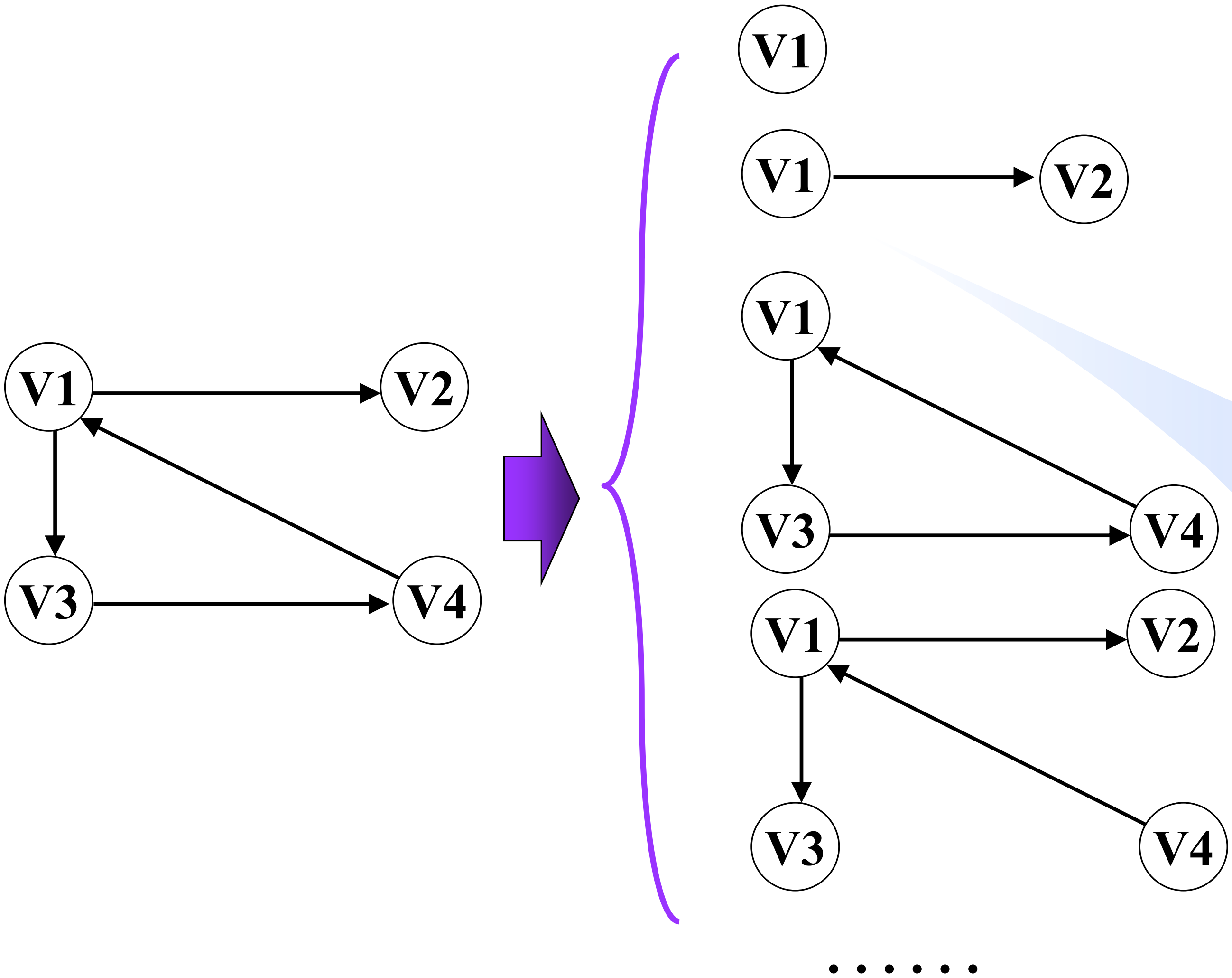
5-4-1-0-2-3-5

子图

定义 设G，H是图，如果$V(H) \subseteq V(G)$，$E(H) \subseteq E(G)$，则称H是G的子图，G是H的母图。如果H是G的子图，并且$V(H) = V(G)$，则称H为G的支撑子图。

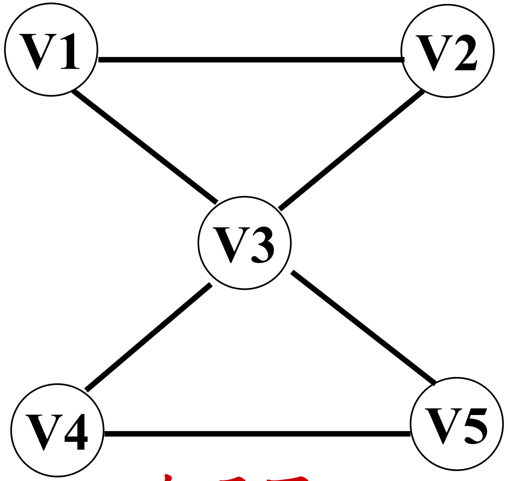
图G的子图就是从G中抽取一部分顶点或边构成的图。


V1
V2
V3
V4
V5
V1
V1
V2
V2
V3
V5
V1
V2
V3
V4
V5
……

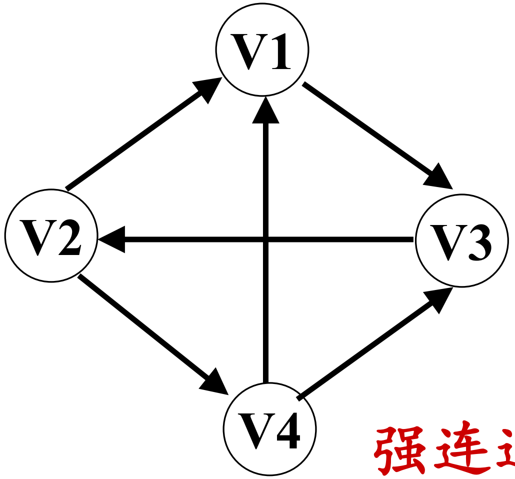

V1
V2
V3
V4
V1
V1
V2
V1
V3
V4
V1
V2
V3
V4
……

连通性

- **定义** 设G是图，若存在一条从顶点v_i到顶点v_j的路径，则称v_i与v_j可及（连通）。
- 若G为无向图，且图中任意两个顶点都可及，则称G为连通图。
- 若G为有向图，且对于图中任意两个不同的顶点v_i和v_j，v_i与v_j可及，v_j与v_i也可及，则称G为强连通图



连通图



强连通图

例题

B

- 具有n个顶点的无向图，当至少有___条边时可确保它一定是一个连通图。【吉林大学考研题】

答：n-1个顶点的完全图再加1条边，$C^2_{n-1}+1$，故$(n-1)(n-2)/2+1$

- 无向图G包含7个顶点，要保证G在任何情况下都是连通的，则需要边数最少是___条。【考研题全国卷】

A. 6　　B. 15　　C. 16　　D. 21

B

例题

G是一个具有36条边的无向非连通图，则G的顶点数至少为______。【北京大学、吉林大学考研题】

A. 12　　B. 11　　C. 10　　D. 9

无向图有n个顶点，则边的条数$\le C^2_n = n(n-1)/2$，

即$36 \le n(n-1)/2$，即$72 \le n(n-1)$，故$n \ge 9$。

对于连通图，n至少为9，对于非连通图，n至少为10。

故选C

课下思考

A

对于无向图G ＝（V,E），下列选项中正确的是______。【2022年考研题全国卷】

A. 当|V| > |E|时，G一定是连通的

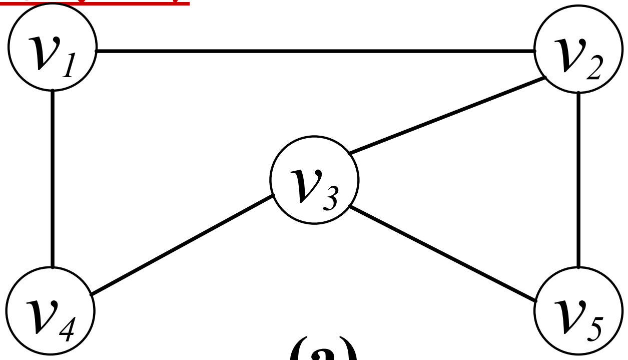
B. 当|V| < |E|时，G一定是连通的

C. 当|V| = |E| - 1时，G一定是不连通的

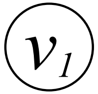
D. 当|V| > |E| + 1时，G一定是不连通的

连通子图

设图G是无向图，若G的子图G_K是一个连通图，则称G_K为G的**连通子图**。

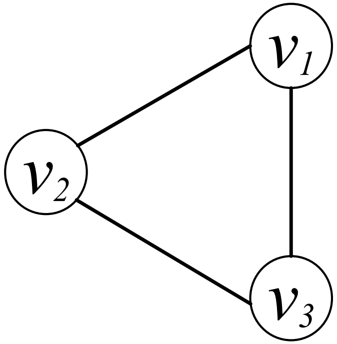


(a)

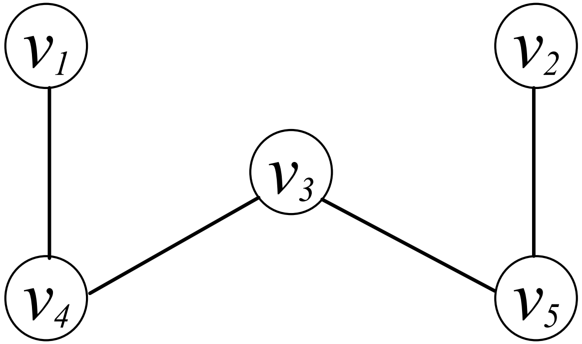


(b)

(c)



(d)



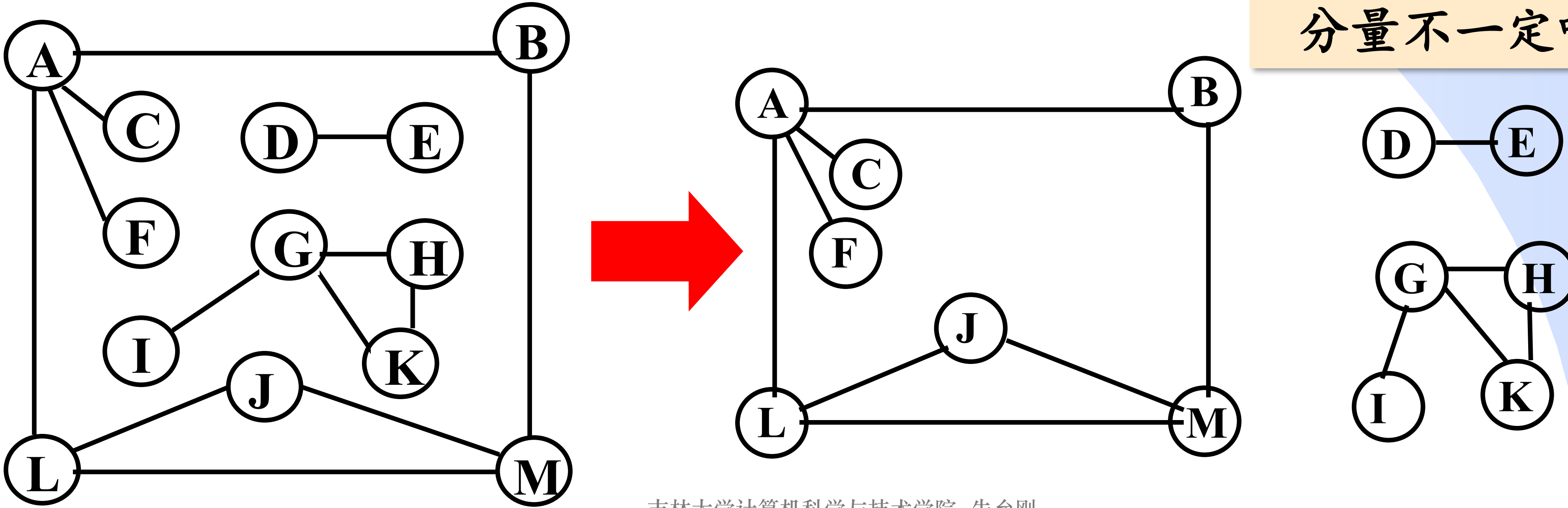
(e)

一个图的连通子图不一定唯一

连通分量

- 无向图G的一个连通子图G_K，如果不存在G的另一个连通子图G′，使得$V(G_K) \subset V(G')$ 或 $E(G_K) \subset E(G')$，则称G_K为G的连通分量。
- 无向图G的连通分量即为G的极大连通子图。

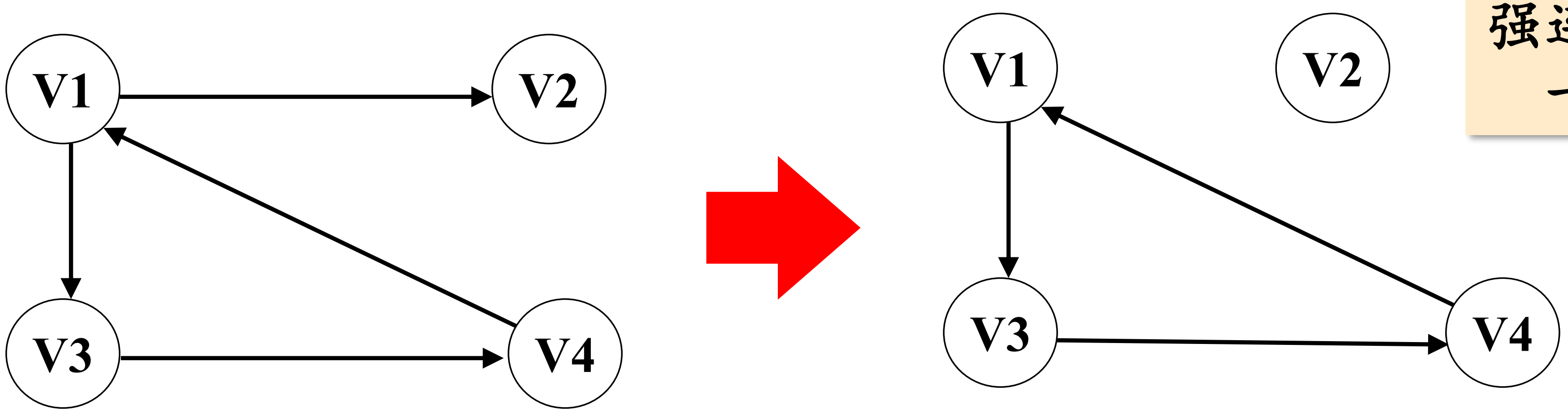
一个无向图的连通分量不一定唯一



强连通子图和强连通分量

- 设图G是有向图，若G的子图G_K是一个强连通图，则称G_K为G的强连通子图。
- 如果不存在G的另一个强连通子图G′，使得$V(G_K) \subset V(G')$或$E(G_K) \subset E(G')$，则称G_K是G的强连通分量。
- G的强连通分量即为G的极大强连通子图。

一个有向图的强连通分量不一定唯一



带权图

A

设G = (V, E)是图，若对图中的任意一条边l，都有实数$w(l)$与其对应，则称G为**权图**，记为G = (V, E, w)。记$w(u, v)$为以u, v为端点的边的权值，规定：

$\forall u \in V$, 有 $w(u, u)=0$

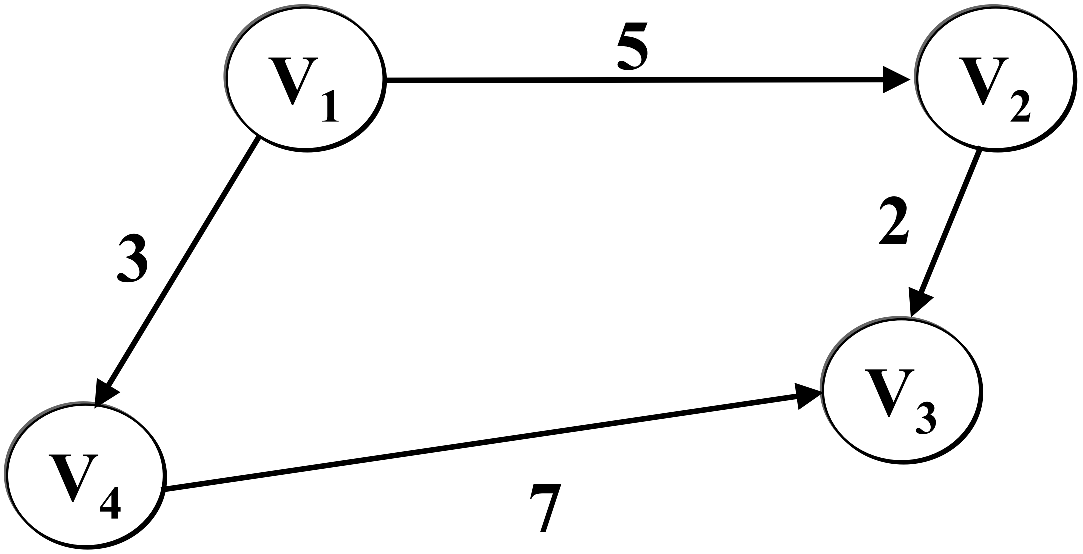
$\forall u, v \in V$, 若顶点u和v之间不存在边，则则$w(u, v)=\infty$

权值通常用于表示一个顶点到另一个顶点的距离或费用。

带权路径

A

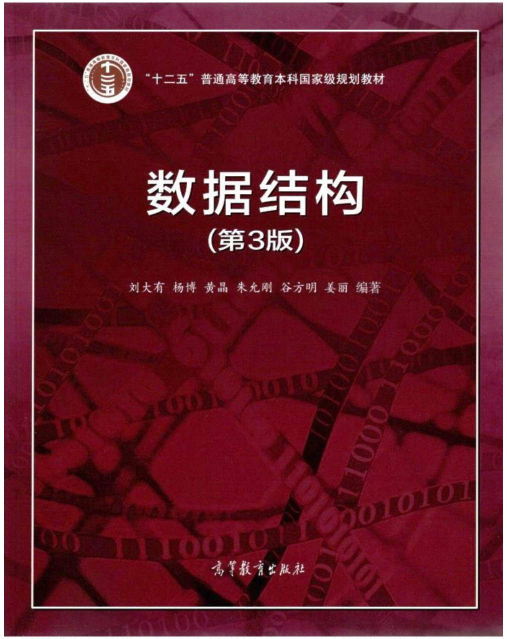
- 若 $\sigma=(v_0,v_1,v_2,\cdots,v_k)$ 是权图G中的一条路径，则路径所包含的边的权值之和 $|\sigma|=\sum_{i=1}^{k}w(v_{i-1},v_i)$ 称为**路径** σ 的长度。



无向图	有向图
无向边	有向边（弧）
端点	弧头 弧尾
相邻的	邻接到 邻接自
度	出度 入度
连通图	强连通图
连通子图	强连通子图
连通分量	强连通分量

图的概念与存储结构

- 图的基本概念
- **图的存储结构**



数据之法
结构之美
算法之道

Last updated on 2023.10

zhuyungang@jlu.edu.cn

邻接矩阵

A

用顺序方式存储图的顶点表$v_0, v_1, \ldots v_{n-1}$，图的边用 $n\times n$ 阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 表示，A 的定义如下：

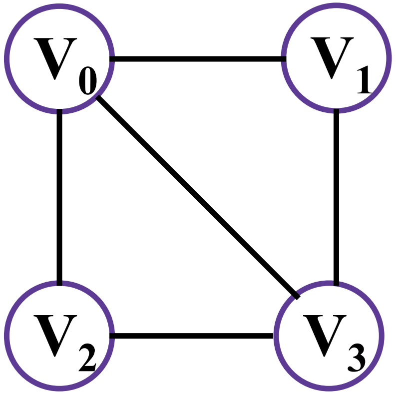
(1)若非权图，则：

- $a_{ii}=0$;
- $a_{ij}=1$，当 $i\neq j$ 且 v_i与v_j之间存在边；
- $a_{ij}=0$，当 $i\neq j$ 且 v_i与v_j之间不存在边。

(2)若权图，则：

- $a_{ii}=0$;
- $a_{ij}=$边的权值，当 $i\neq j$ 且 v_i与v_j之间存在边；
- $a_{ij}=\infty$，当 $i\neq j$ 且 v_i与v_j之间不存在边。

[例]无向图的邻接矩阵



A

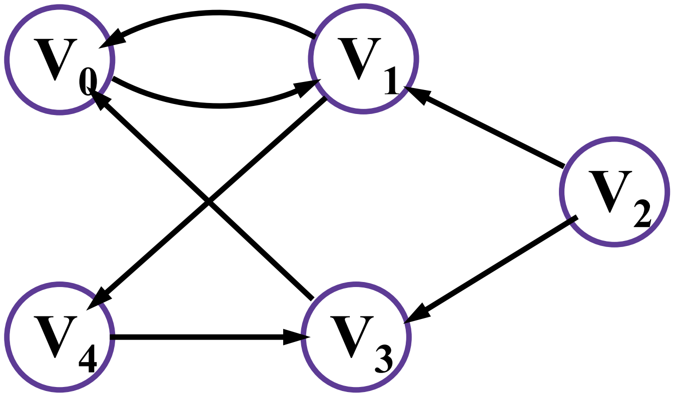
$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

无向图的邻接矩阵是对称矩阵。

A

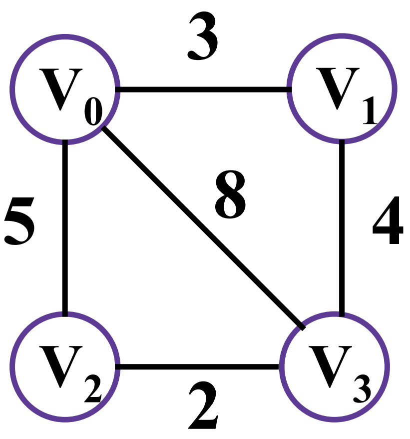
[例]有向图的邻接矩阵

A



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

[例]权图的邻接矩阵



A

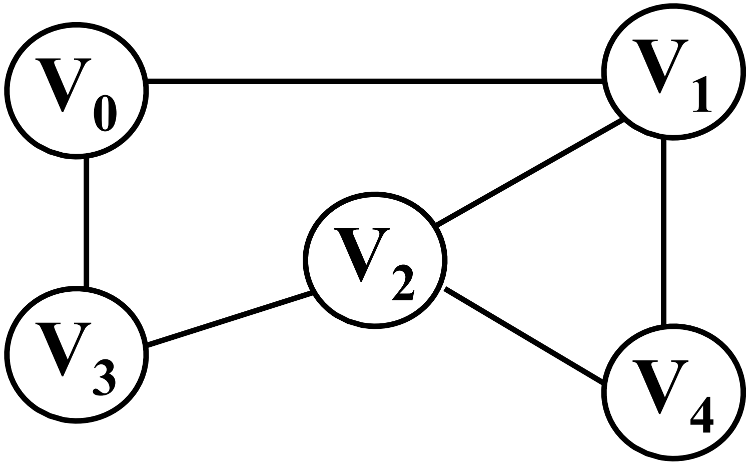
$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 3 & 5 & 8 \\
3 & 0 & \infty & 4 \\
5 & \infty & 0 & 2 \\
8 & 4 & 2 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

特点： 无向图的邻接矩阵是对称矩阵，有向图邻接矩阵不一定对称。

基于邻接矩阵求图中顶点的度

无向无权图 矩阵的第i行（或第i列）的1的个数是**顶点V_i的度**。

第i行有一个1就意味着有一条以顶点V_i为端点的边



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

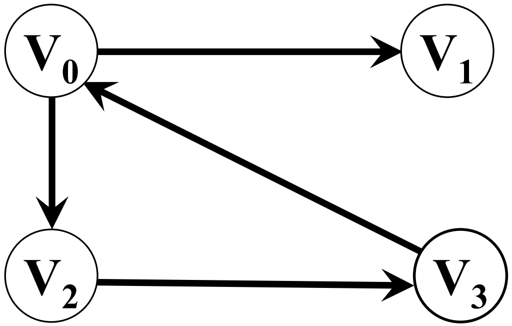
基于邻接矩阵求图中顶点的度

有向无权图邻接矩阵第i行的1的个数为顶点V_i的出度

第i行有一个1，就意味着有一条由V_i引出的边

- 第i列的1的个数为顶点V_i的入度。

第i列有一个1，就意味着有一条引入（指向）V_i的边



$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

课下思考

已知无向连通图G由顶点集V和边集E组成，|E|>0，当G中**度为奇数的顶点个数为0或2时**，G存在包含所有边且长度为|E|的路径（称为EL路径），设G采用**邻接矩阵**存储，请设计算法，判断G是否存在EL路径。【2021年考研题全国卷】

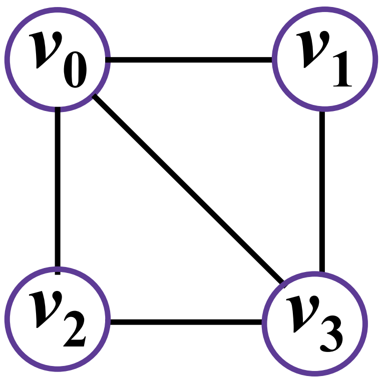
邻接矩阵

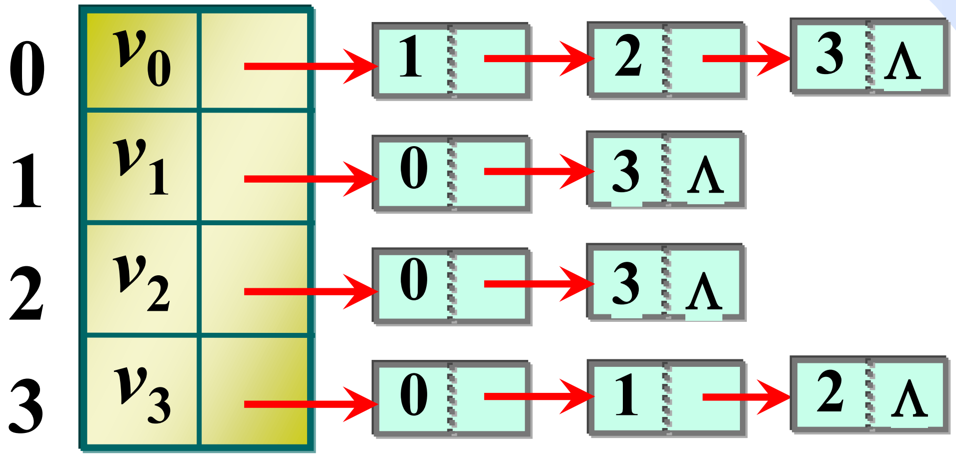
- 空间： O(n^2)
- 判断图中是否包含某条边(V_i, V_j)： O(1)
- 找某个点的邻接顶点： O(n)
- 缺点：存储稀疏图（点多边少），邻接矩阵为稀疏矩阵，浪费空间。

2、邻接表

- 顺序存储顶点表。
- 对图的每个顶点建立一个单链表，第 i 个单链表中的结点包含顶点v_i的所有邻接顶点（边链表）。
- 由顺序存储的顶点表和链接存储的边链表构成的图存储结构被称为邻接表。

没有顺序要求.
仅表示相邻关系





➢与顶点 v 邻接的所有顶点以某种次序组成的单链表称为顶点 v 的边链表。

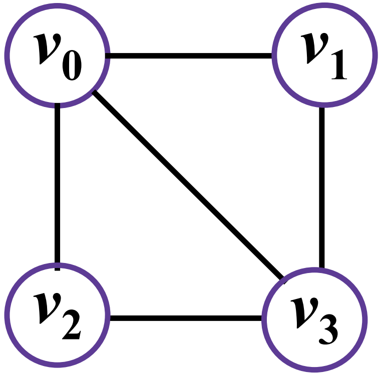
➢边链表的每一个结点叫做边结点，对于非权图和权图边结点结构分别为：

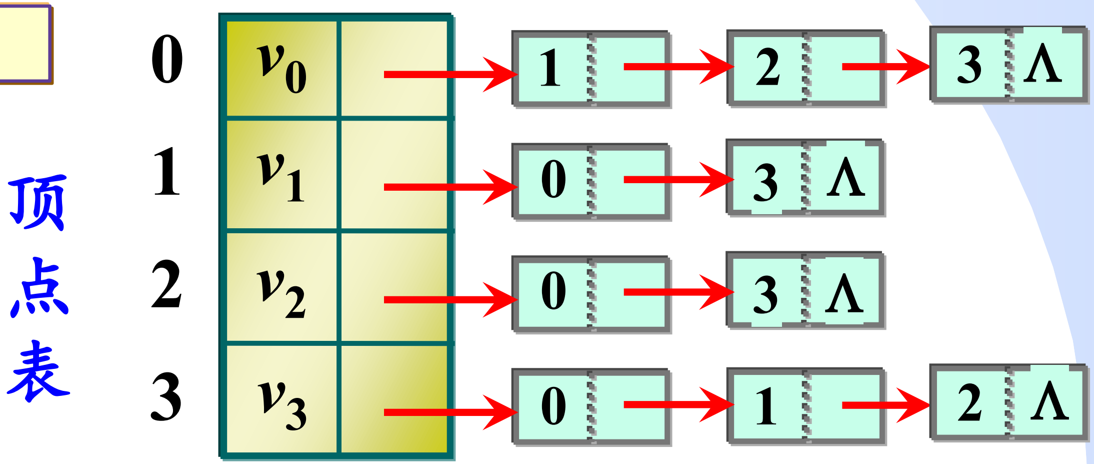
VerAdj	link

VerAdj	cost	link

其中，域*VerAdj*存放 v 的某个邻接顶点在顶点表中的下标；域*link*存放指向 v 的边链表中结点 *VerAdj* 的下一个结点的指针。域*cost* 存放边(v, VerAdj)或<v, VerAdj>的权值；

VerName	adjacent





顶点的结构

VerName	*adjacent*

非权图中边结点结构为

VerAdj	*link*

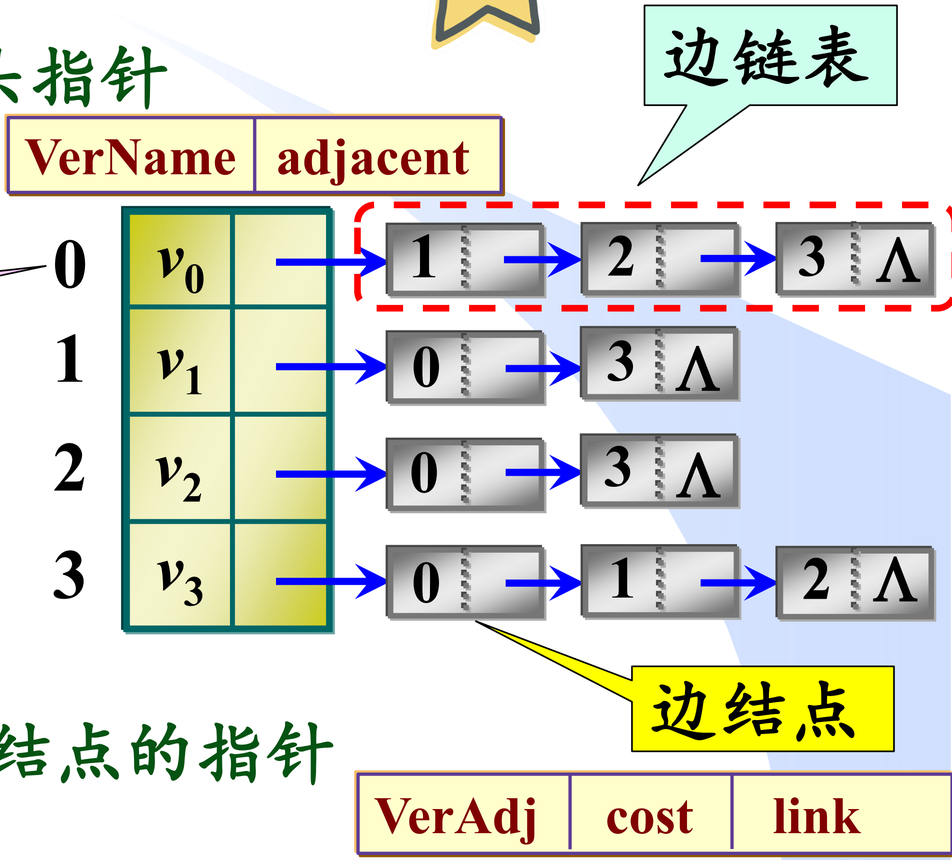
权图中边结点结构为

VerAdj	*cost*	*link*

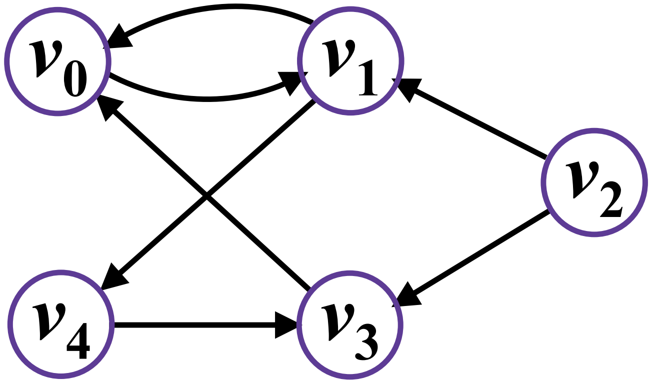
用邻接表存储图

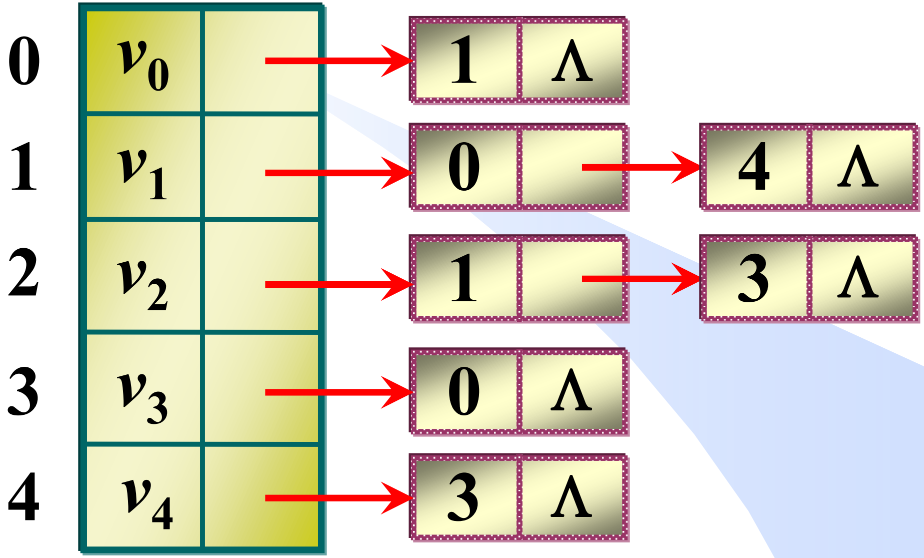
```
struct Vertex{     //顶点表中结点的结构
  int VerName;     //顶点名称
  Edge *adjacent;//边链表的头指针
};

struct Edge{  //边结点的结构
  int VerAdj; //邻接顶点序号
  int cost;    //边的权值
  Edge *link; //指向下一个边结点的指针
};
```



[例]有向图的邻接表





边结点的个数 = e

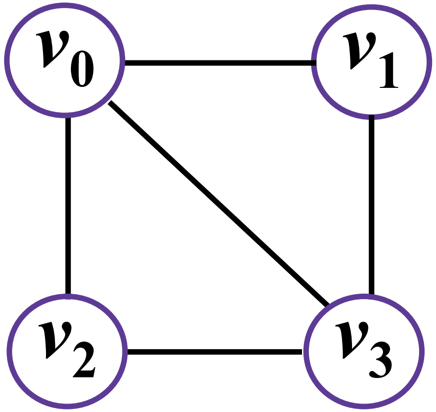
e为图中边的条数

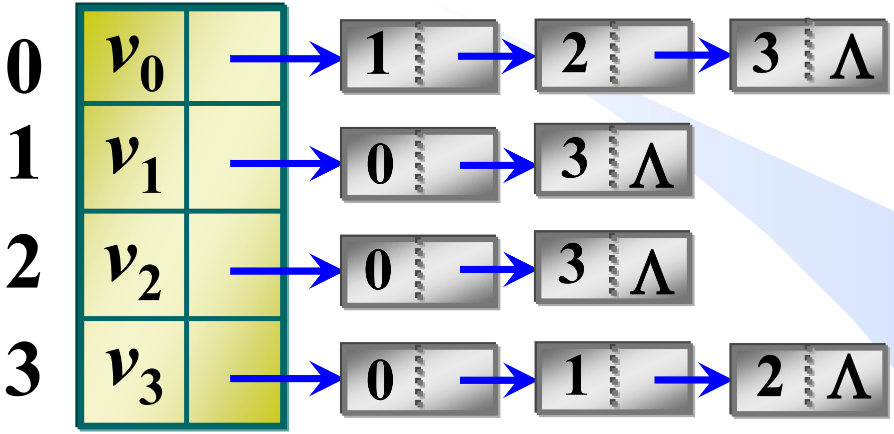
1个边结点 ⇔ 1条边

占用空间

$O(n+e)$

[例]无向图的邻接表



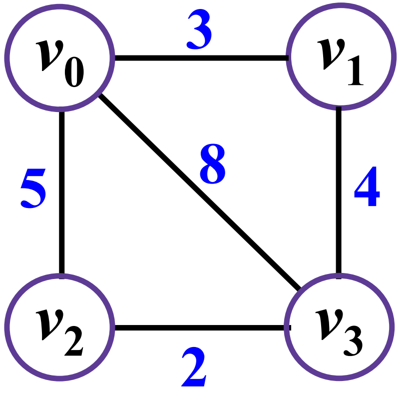


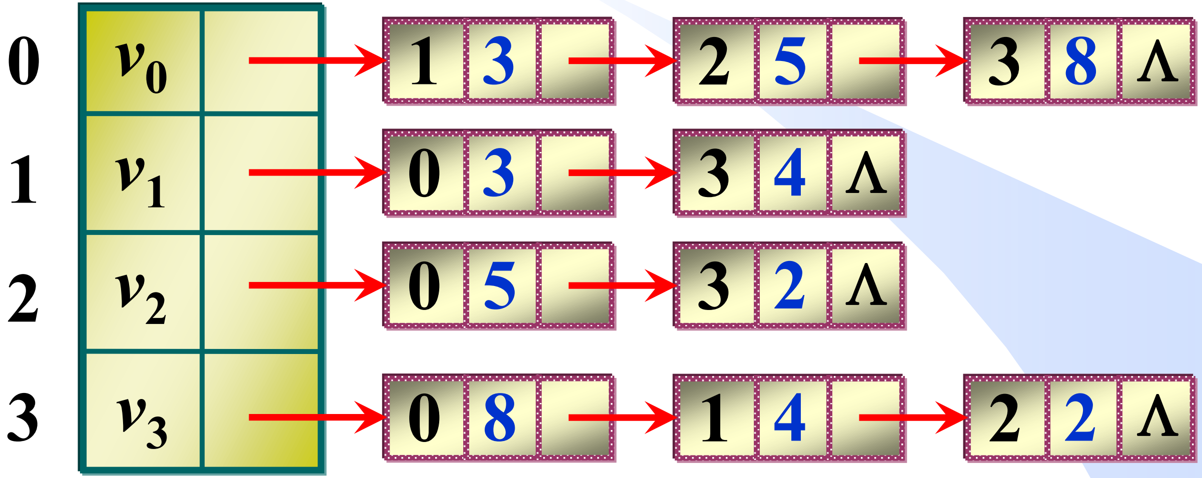
边结点的个数=2*e*
*e*为图中边的条数

占用空间
O(*n*+*e*)

2个边结点 ⇔ 1条边

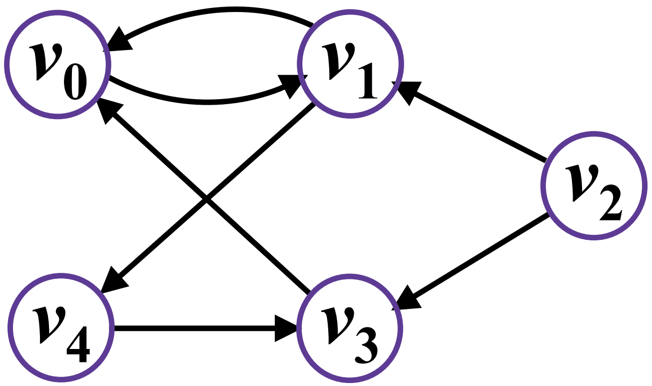
[例] 带权图的邻接表

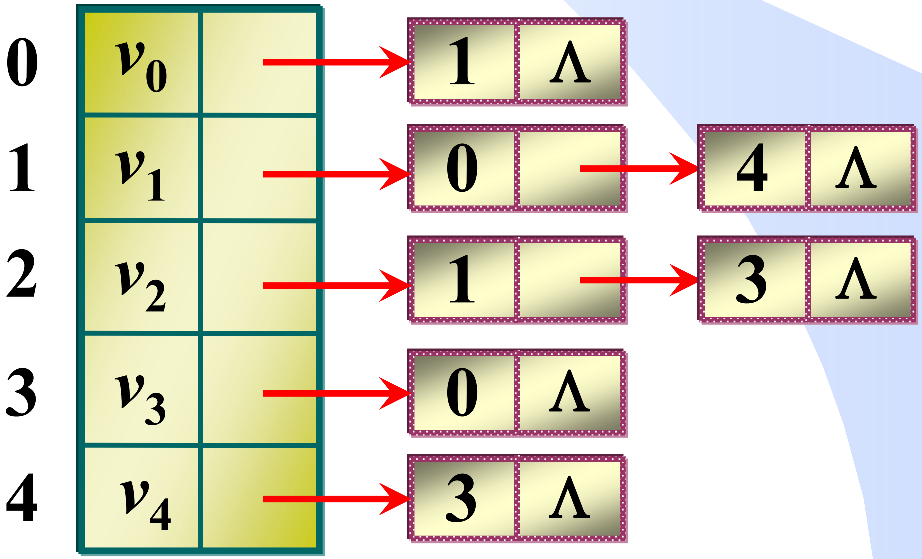




邻接表中统计结点的度

- 根据邻接表，可统计出有向图中每个顶点的**出度**。
- 但是，如果要统计一个顶点的入度，就要遍历所有的边结点，其时间复杂度为O(e)（e为图中边的个数），
- 统计所有顶点入度的需要O(ne)？（n为图的顶点个数）
- **只需O(n+e)**





VerName	adjacent

统计结点入度

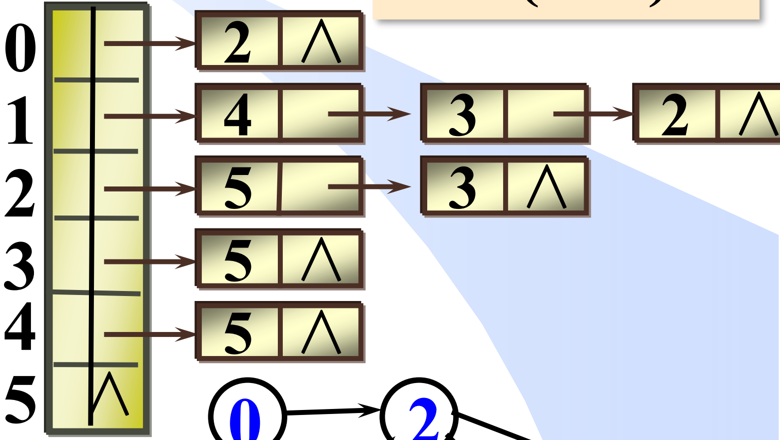
VerAdj	link

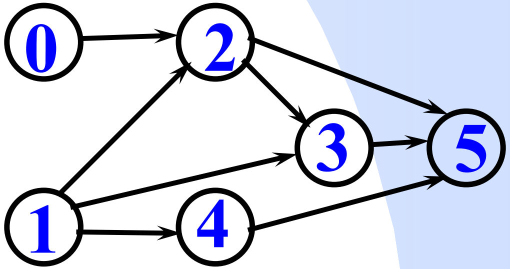
A

```
void getInDegree(Vertex Head[],int n, int InDegree[]) {
   for(int i=0;i<n;i++) InDegree[i]=0;
   for(int i=0;i<n;i++){//用i扫描每个顶点
      Edge* p=Head[i].adjacent;
      while(p!=NULL){
         int k = p->VerAdj;
         InDegree[k]++;
         p = p->link;
      }
   }
}
```

时间复杂度 $O(n+e)$

用 *p* 扫描每个顶点对应的边结点（邻接顶点）



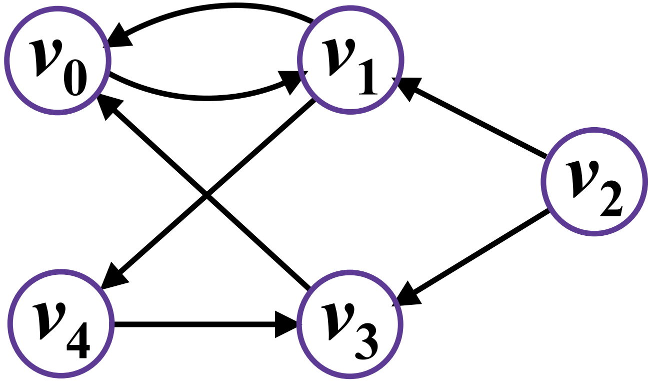


InDegree

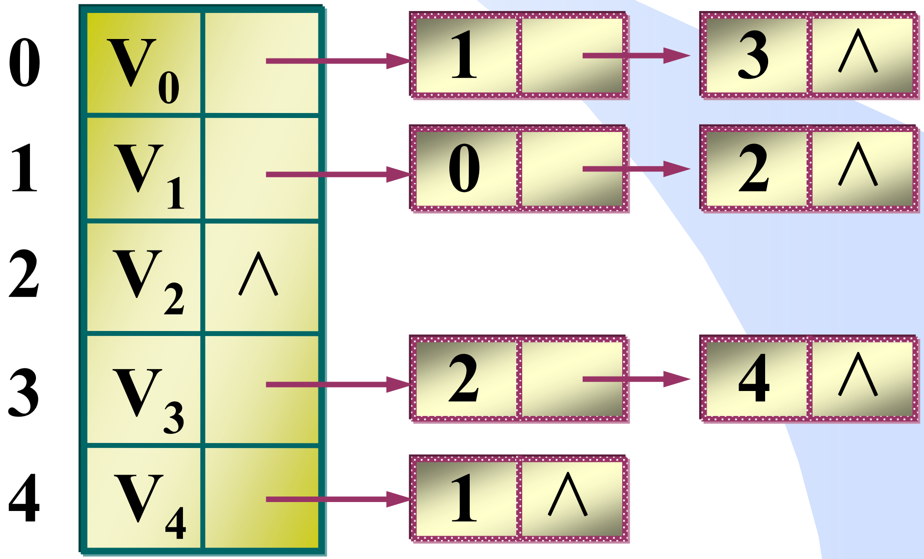
0	1	2	3	4	5

```
for(Edge* p=Head[i].adjacent; p!=NULL; p=p->link )
```

有向图的逆邻接表



在有向图的逆邻接表中，第 i 个边链表链接的边都是指向顶点 i 的边。



对有向图建立逆邻接表（顶点的指向关系与邻接表恰好相反），根据逆邻接表，很容易统计出图中每个顶点的入度。

邻接矩阵 vs. 邻接链表

A

	邻接矩阵	邻接表
检测是否存在边(V_i, V_j)	O(1)	O(d_i)
改删边(V_i, V_j)	O(1)	O(d_i)
找顶点V_i的邻接顶点	O(n)	O(d_i)
占用空间	O(n^2)	O(n+e)
适用于	稠密图	稀疏图
	经常查改删边	经常找邻接顶点

n为顶点个数；e为边的条数；d_i为顶点V_i的度，$d_i \le n$