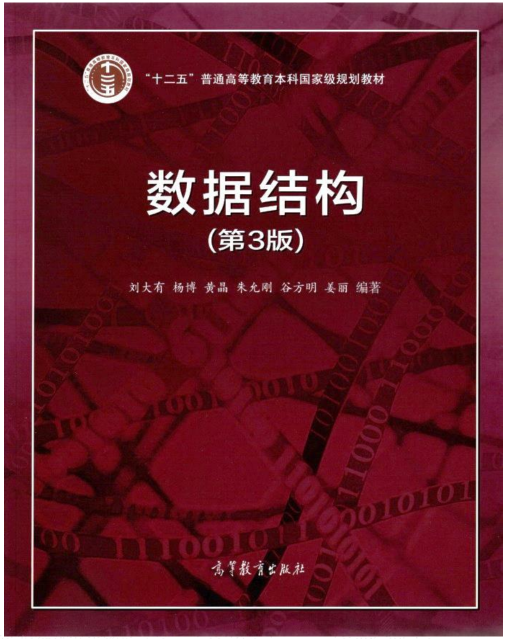


树和二叉树定义和性质

- 树的定义（慕课自学）
- 二叉树的定义
- 二叉树的性质

数据之法
结构之美
算法之道

Last updated on 2023.10

zhuyungang@jlu.edu.cn

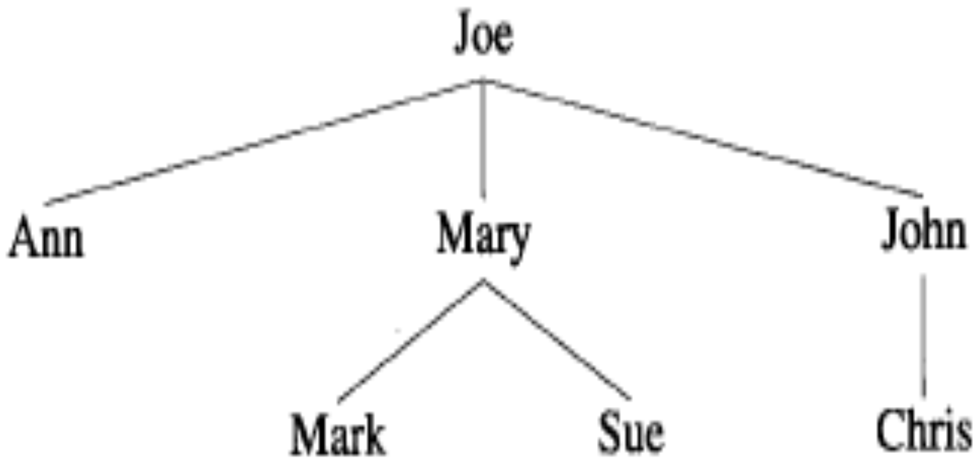
慕课自学内容（必看，计入期末成绩）

自学内容	视频时长
树的定义	6分58秒
树的相关术语	7分17秒

- 树结构在客观世界中是大量存在的，例如家谱、行政组织机构都可用树形象地表示。
- 树在计算机领域中也有着广泛的应用，例如在编译程序中，用树来表示源程序的语法结构；在数据库系统中，可用树来组织信息；在分析算法的行为时，可用树来描述其执行过程。

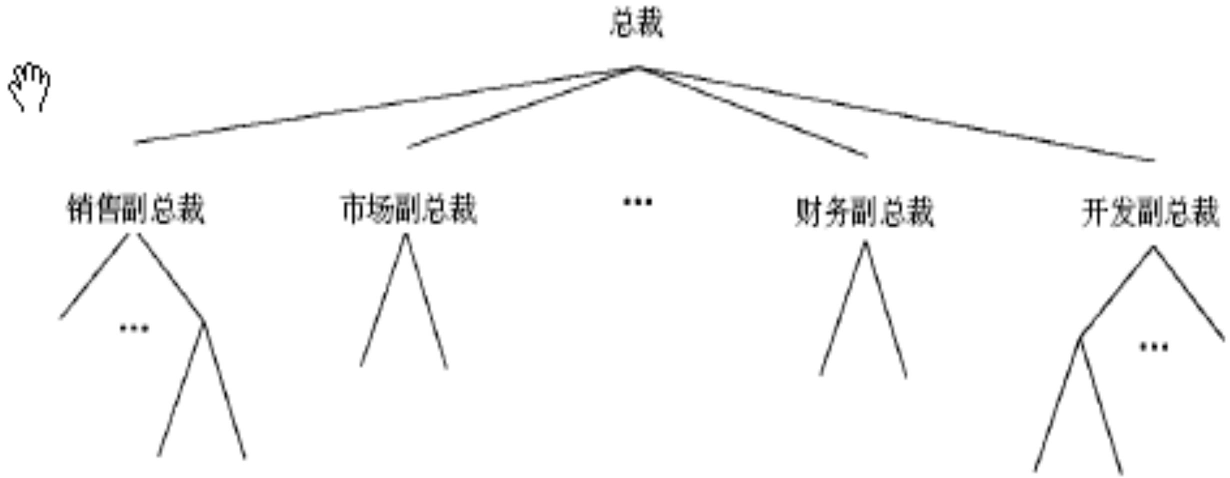
例 [父子关系]

下图给出了按层次方式组织的Joe的后代，其中Joe在最顶层。Joe的孩子（Ann，Mary和John）列在下一层，在父母和孩子间有一条边。在层次表示中，非常容易地找到Ann的兄弟姐妹，Joe的后代，Chris的祖先等。



例 [组织管理机构]

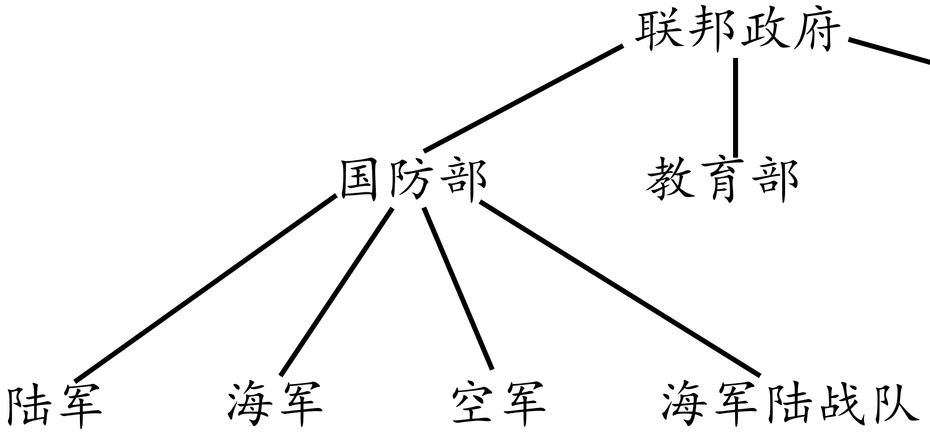
下图展现了一个组织管理机构.此处层次地位最高的人为总裁,在图中位置最高;副总裁的地位次之,在图中位于总裁之下.副总裁为总裁的下属,总裁是其上级。每个副总裁都有他自己的下属,而其下属可能又有他们自己的下属。图中,每个员工若有直接下属或直接上级,则两者间都有一条边互连。



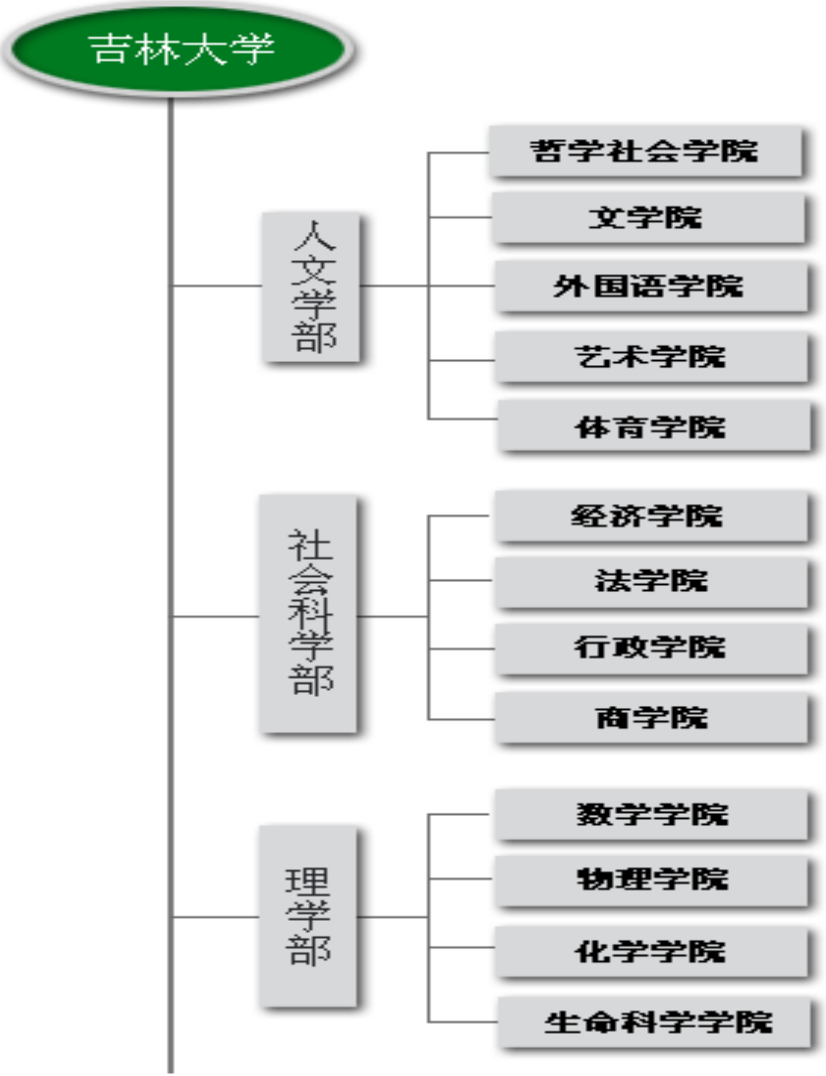
合作管理结构

例. [政府机构]

下图是联邦政府层次结构图. 顶层元素(亦称机构)是联邦政府, 下一级是其主要的隶属单位, 如不同的部. 每个部可进一步划分, 其分支在下一层示出. 例如国防部包括陆军, 海军, 空军和海军陆战队. 每个机构, 若有分支机构, 则两者间有一条边。下图展现了诸元素间的整体-部分关系.

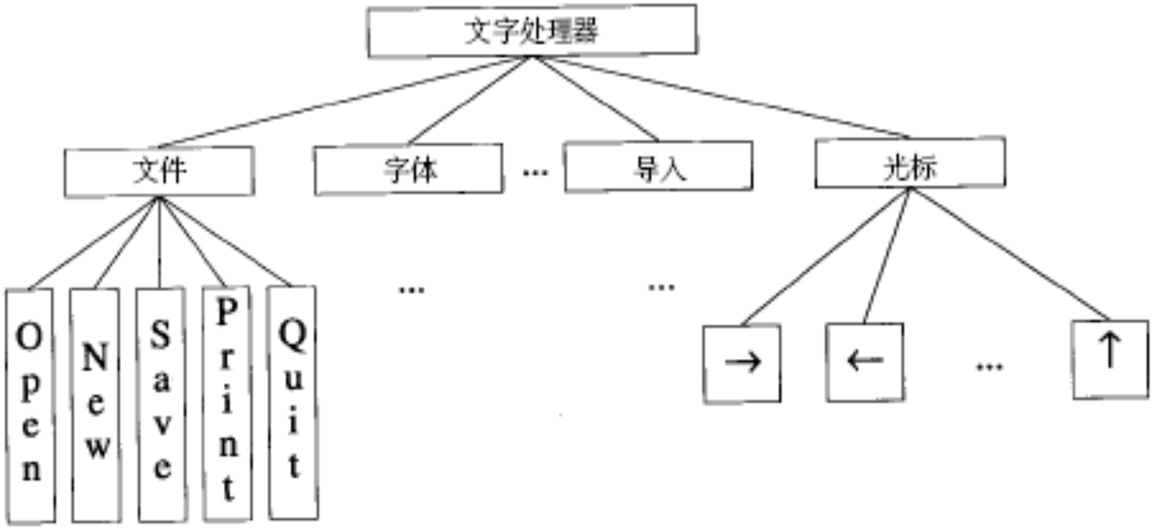


例 [整体-部分关系]


吉林大学
人文学部
哲学社会学院
文学院
外国语学院
艺术学院
体育学院
社会科学部
经济学院
法学院
行政学院
商学院
理学部
数学学院
物理学院
化学学院
生命科学学院

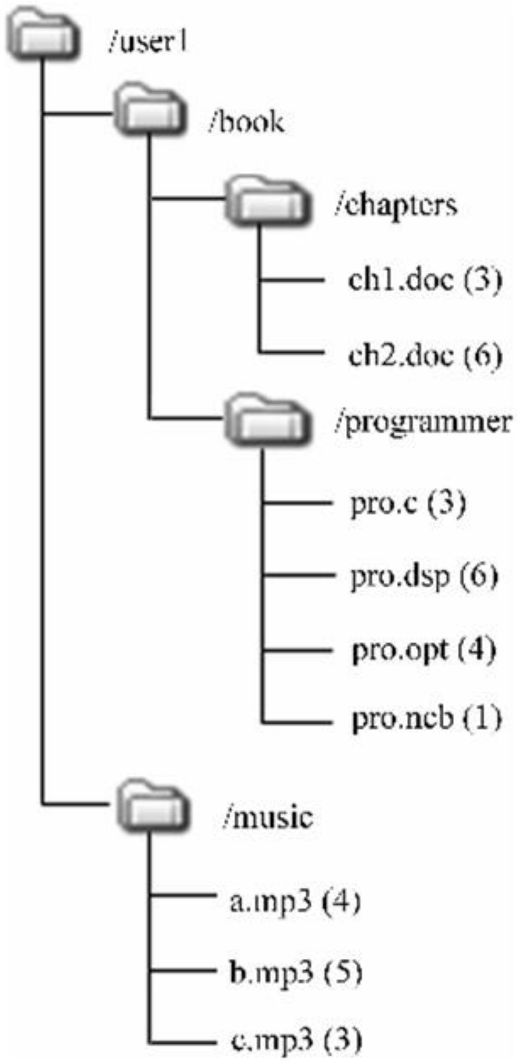
例 [模块化结构关系]

下面考察另一种层次数据——软件工程中的模块化技术。通过模块化，可以把大的复杂的任务分成一组小的不太复杂的任务。模块化的目标是将复杂的大软件系统，分成许多功能独立，较简单、较小的模块，以便多人同时对不同的模块进行开发，因此大大缩短整个软件的开发时间。下图给出了某文字处理器的一种模块分解图。

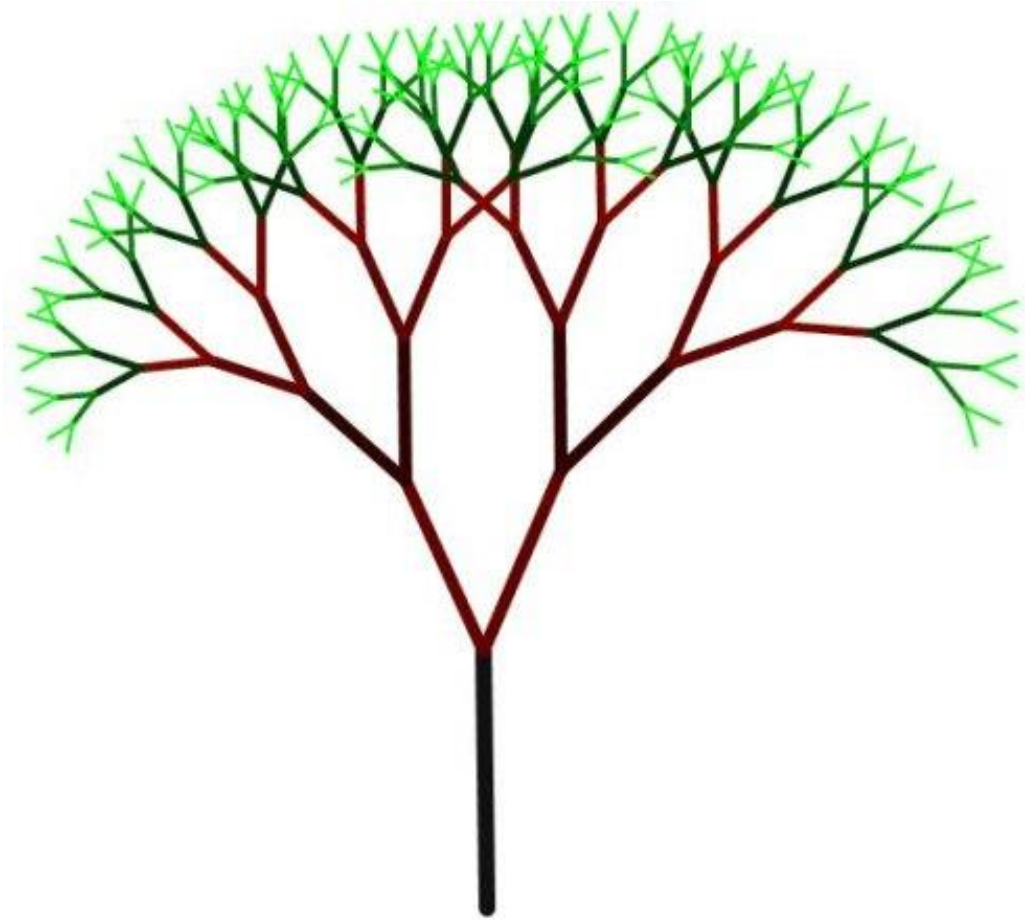


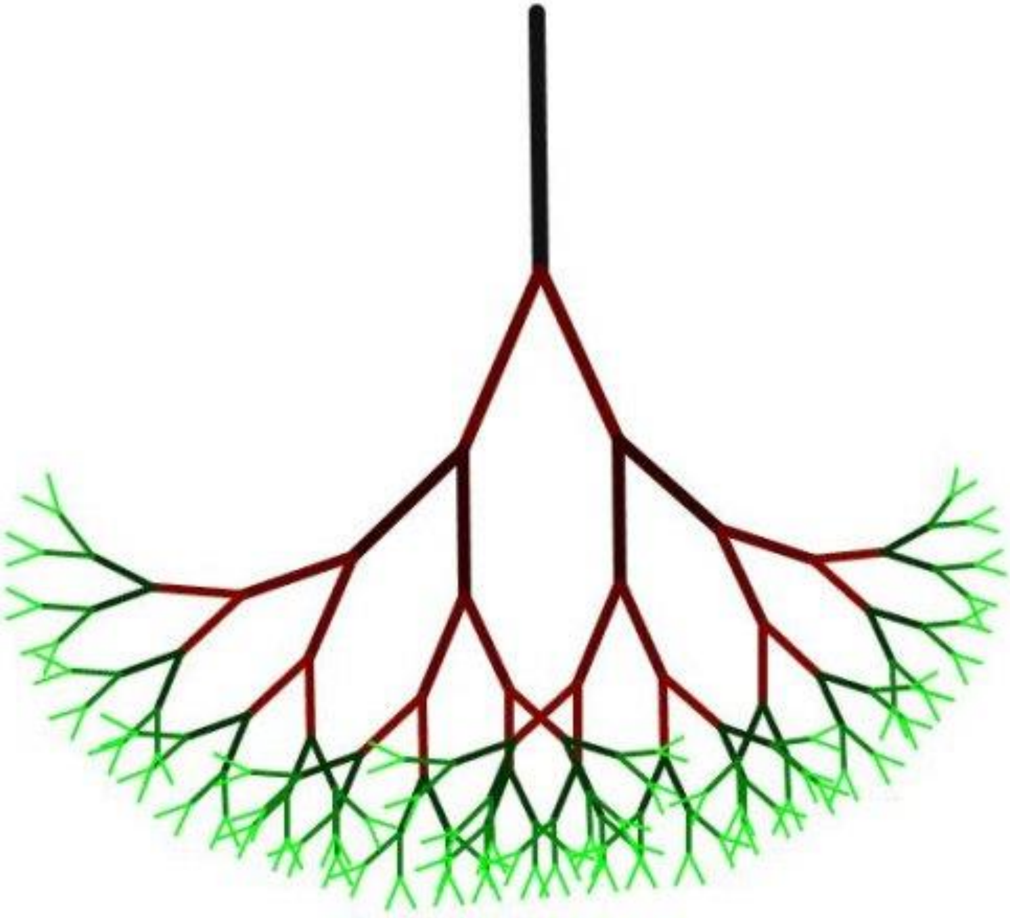
文字处理器的模块层次结构

文件系统层次结构

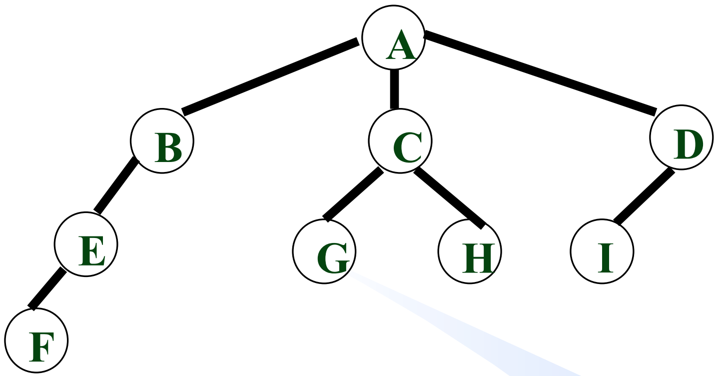


/user1
/book
/chapters
ch1.doc (3)
ch2.doc (6)
/programmer
pro.c (3)
pro.dsp (6)
pro.opt (4)
pro.ncb (1)
/music
a.mp3 (4)
b.mp3 (5)
c.mp3 (3)





一、树的定义



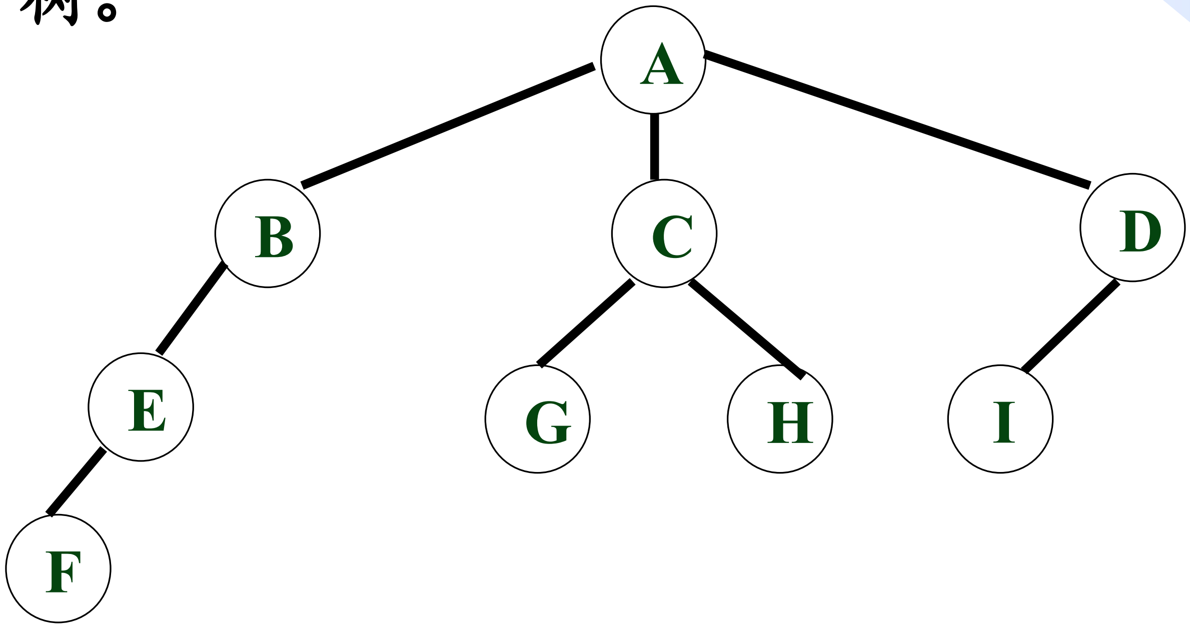
定义：一棵树是一个有限的结点集合T. 若T空，则称为空树。若T非空，则：

1. 有一个被称为根的结点，记为$root(T)$；
2. 其余结点被分成$m(m \geq 0)$个不相交的非空集合T_1，T_2，…，T_m，且T_1，T_2，…，T_m又都是树，称作$root(T)$的子树。

例：A为根结点，有三个子结点B、C和D（换句话说，A是B、C和D的父结点）；

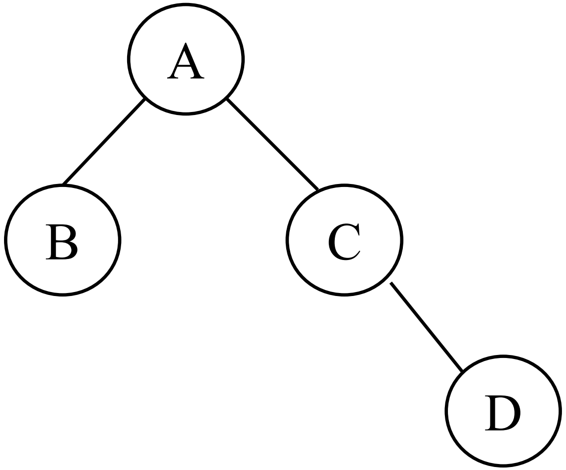
B有一个子结点E；E有一个子结点F；C有两个子结点G和H；F、G、H、I是叶结点，因为它们没有子结点。

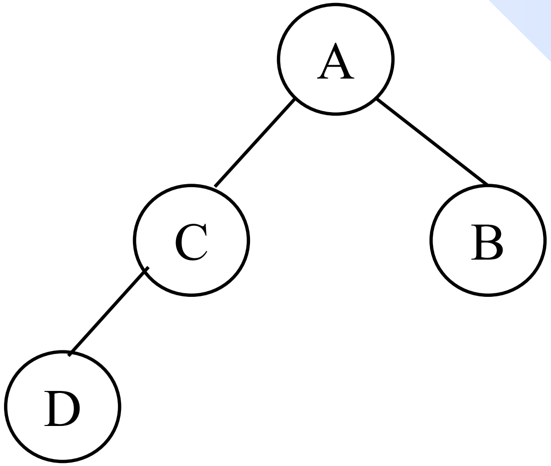
A有三棵子树。



有序树

如果树的子树$T_1, T_2, \ldots, T_m$的相对次序被指明，则称该树为有序树，否则称为无序树。在有序树中，把T_i称作根的第i个子树。





树与线性结构的比较	
线性结构	树结构
首结点(无前驱)	根结点(无前驱)
最后1个数据元素 (无后继)	叶子结点可能多个 (无后继)
其它数据元素 (一个前驱、一个后继)	树中其它结点 (一个前驱、多个后继)

树的相关术语

1. 度

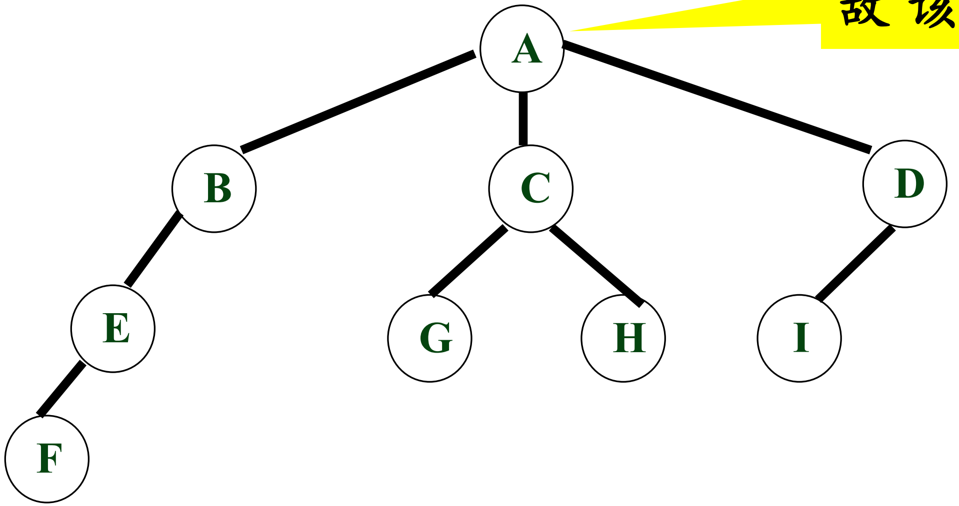
一个结点的子结点的数目，称为该结点的度或者次数。一棵树的度为$\max_{i=1,\ldots,n} D(i)$，其中n为树中结点总数，i指树中的第i个结点，$D(i)$表结点i的度。

2. 叶结点、分支结点

度为0的结点（即没有孩子的结点）被称为叶结点；
度＞0的结点被称为分支结点（即非叶结点）。

树的相关术语

在图中：*B*有一个子结点*E*，度为1；*A*有三个子结点*B*、*C*和*D*（换言之，*A*是*B*、*C*和*D*的父结点），度为3。因为在这棵树中，结点 *A* 的子结点数最多，故这棵树的度为 3 .



结点 *A* 的子结点数最多，故 该树的度为 3

3．结点的层数/深度

树形T中结点的层数递归定义如下：

(1) $root(T)$层数为0；

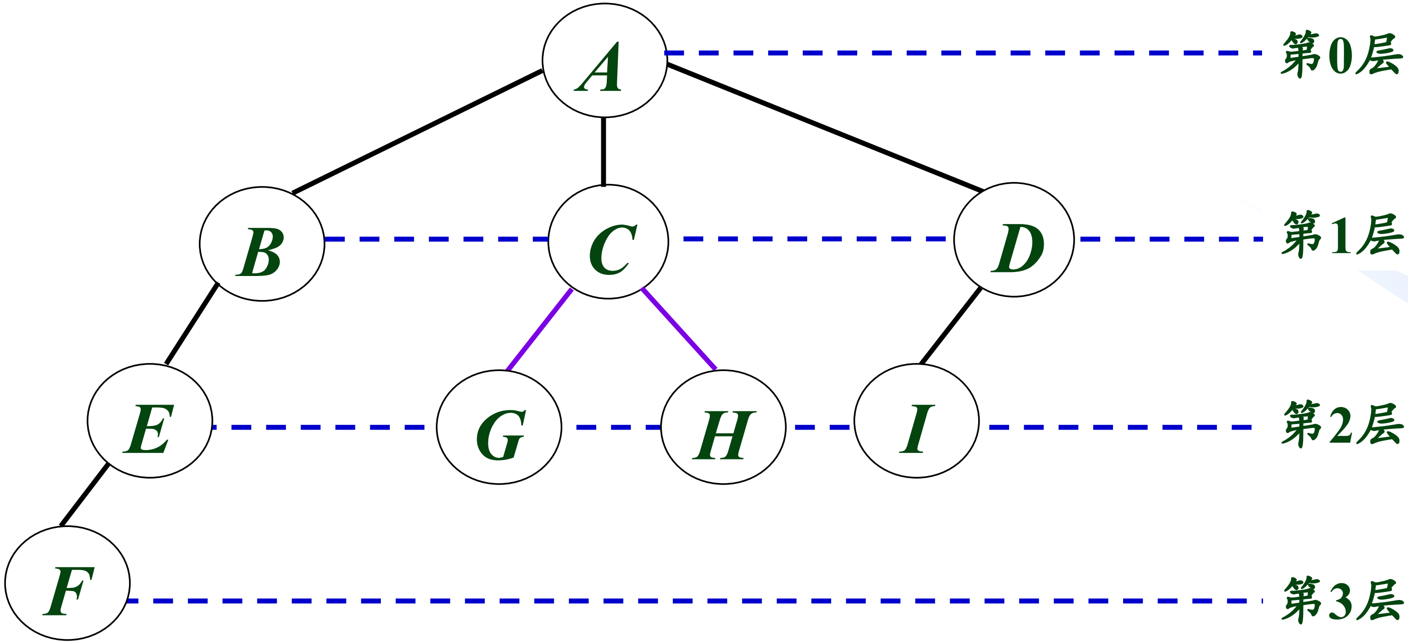
(2) 其余结点的层数为其父结点的层数加1．

4．树的高度/深度

树的高度为树中结点的最大层数。

5．结点的高度

以该结点为根的子树的高度。



	高度	深度
结点	以该结点为根的子树的高度	结点所在层数
树	树中结点的最大层数	

树中 *F*、*G*、*H*、*I* 为叶结点，其余结点为分支结点。结点*A*为根，其层数/深度为0；结点*F*的层数/深度为 3 ；该树高度/深度为3。结点*B*的高度为2，结点*C*的高度为1.

5. 路径

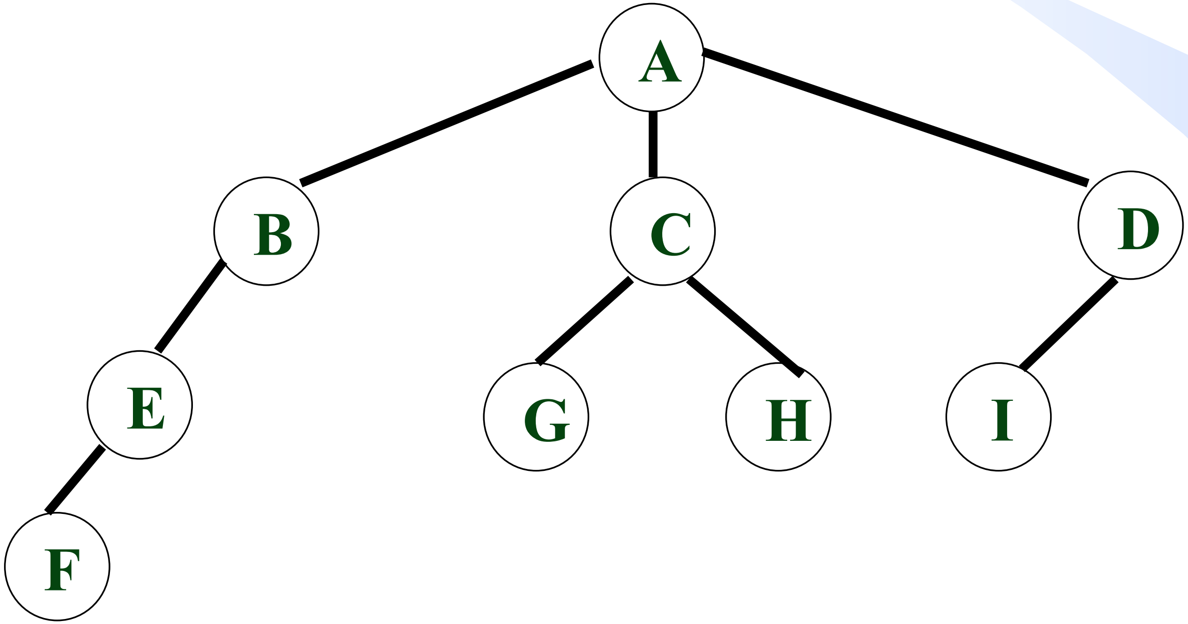
树形中结点间的连线被称为边。若树形T中存在结点序列$v_m \to v_{m+1} \to \ldots \to v_{m+k}$，$1 \le k \le T$的最大层数，满足$v_{i+1}$是$v_i$（$m \le i \le m+k-1$）的子结点，则称此结点序列为$v_m$到$v_{m+k}$的路径，该路径所经历的边数$k$被称为路径长度。

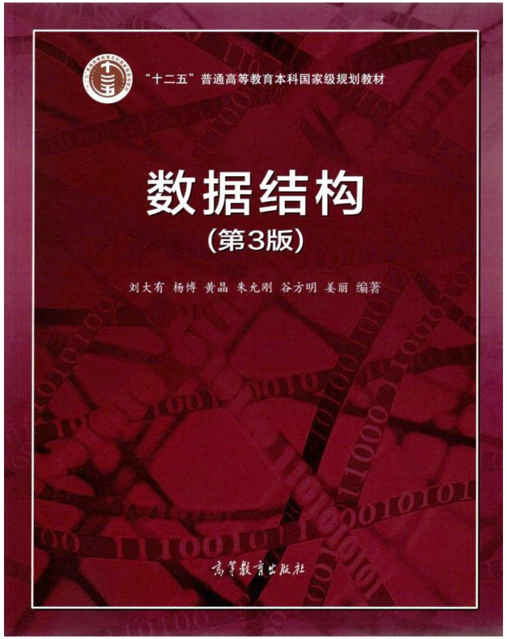
从根结点到某个结点的路径长度恰为该结点的层数。

6. 子孙结点、祖先结点

一棵树中若存在结点v_m到v_n的路径，则称v_n为v_m的子孙结点，v_m为v_n的祖先结点。

从A到F的路径为A-B-E-F，路径长度为3。结点F的<u>层数</u>也为3。A是F的祖先结点，F是A的子孙结点。





树和二叉树定义和性质

- 树的定义（慕课自学）
- 二叉树的定义
- 二叉树的性质

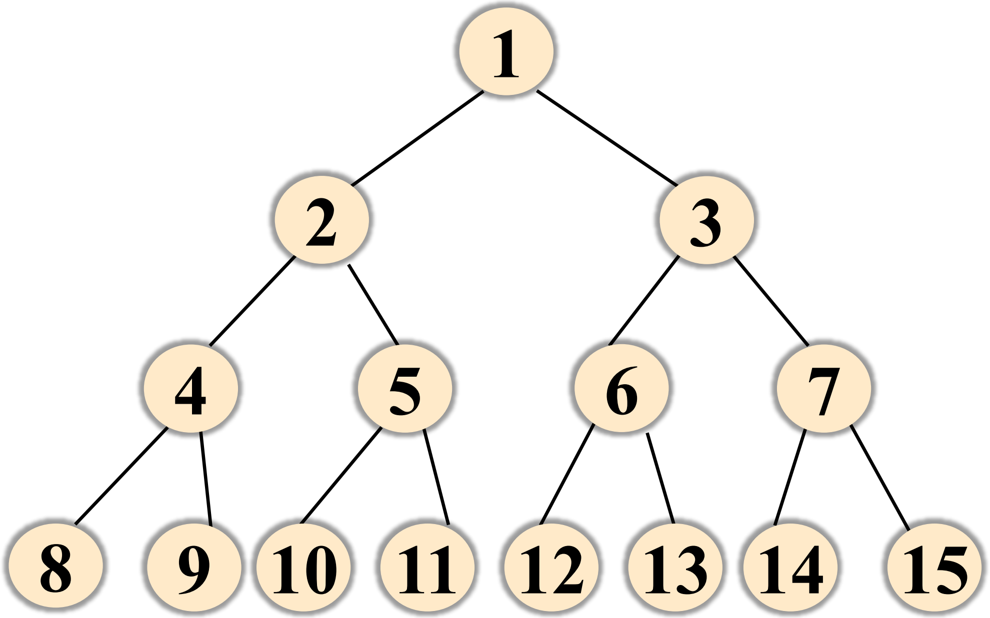
数据之法
结构之美
算法之道

Last updated on 2023.10

zhuyungang@jlu.edu.cn

二叉树（Binary Tree）

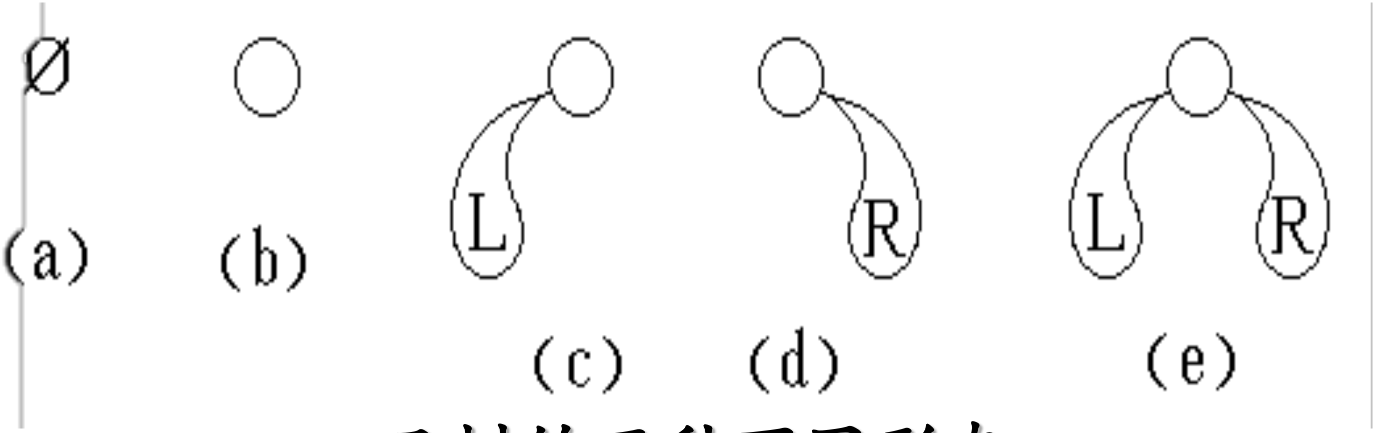
定义 二叉树是结点的有限集合，它或者是空集，或者由一个根结点及两棵不相交的称为该根的左、右子树的二叉树组成。



二叉树的特征

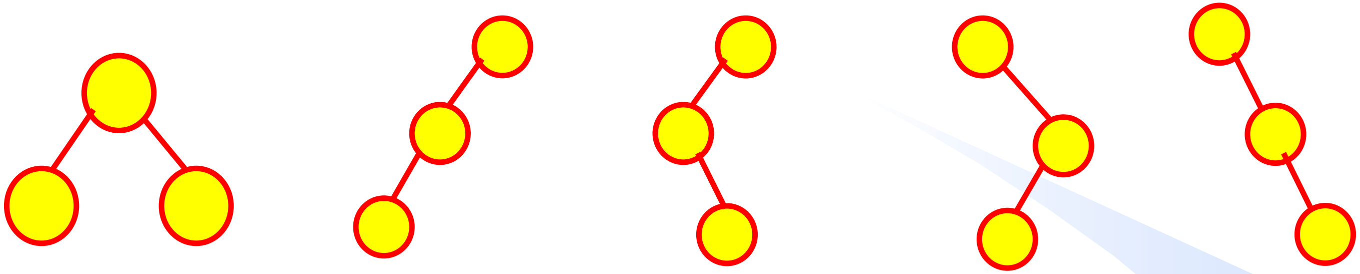
① 二叉树每个结点最多有2个子结点；

② 二叉树的子树有左右之分，即使某结点只有一棵子树，也要指明该子树是左子树，还是右子树；



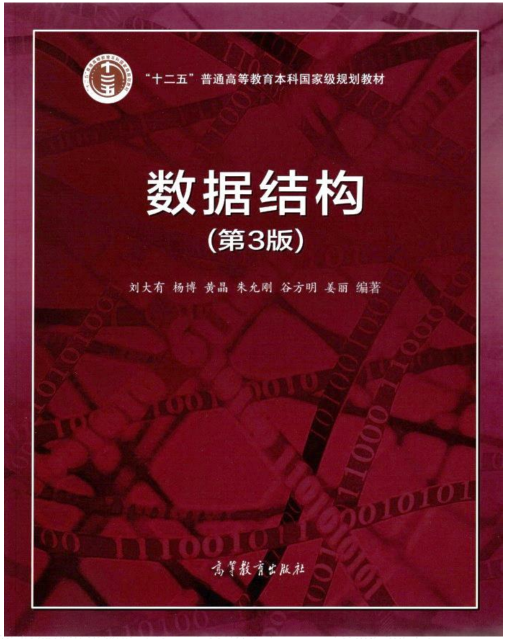
二叉树的五种不同形态

含有3个结点的不同的二叉树的形态



含有3个结点的不同的树的形态

问题：含有n个结点的二叉树有多少种的形态？



树和二叉树定义和性质

- 树的定义（慕课自学）
- 二叉树的定义
- 二叉树的性质

数据之法
结构之美
算法之道

Last updated on 2023.10

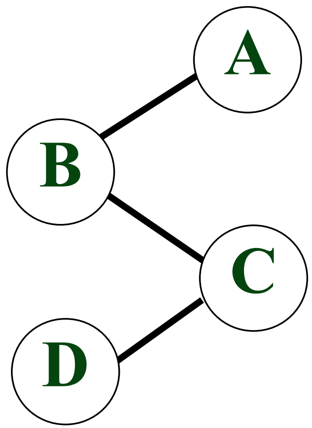
zhuyungang@jlu.edu.cn

引理 二叉树中第i层至多有2^i个结点，$i \geq 0$。

证明：用数学归纳法。

- 当 $i=0$ 时，仅有一个根结点，其层数为0，因此$i=0$时引理成立。
- 假定当 $i=k$ $(k\geq 0)$时，引理成立，即第 k 层上至多有2^k个结点。
- 对于二叉树的任意结点，其子结点个数最大为2，故第$k+1$层上至多有 $2^k\times 2= 2^{k+1}$ 个结点，因此当 $i=k+1$时，引理成立。
- 证毕 ▌

- 高度为k ($k \geq 1$)的二叉树中至少有$k+1$个结点。
- 含有k ($k \geq 1$)个结点的二叉树高度至多为$k-1$。
- 如下图是高度为3结点最少的二叉树之一。



有4个结点、高度为3的二叉树

引理 高度为k的二叉树中至多有$2^{k+1}-1$ $(k\geq 0)$个结点。

根据之前引理：第i层至多有2^i个结点

第0层上至多有2^0个结点，

第1层上至多有2^1个结点，

……

第k层上至多有2^k个结点，

因此，高度为k的二叉树中至多有

$2^0+2^1+\ldots\ldots+2^k=2^{k+1}-1$ 个结点。证毕 ▌

引理 在n个结点构成的二叉树中，若叶结点个数为n_0，度为2的结点个数为n_2，则有：$n_0=n_2+1$.

证明：设度为1的结点有n_1个，总结点个数为n，总边数为e，则 $n=n_0+n_1+n_2$

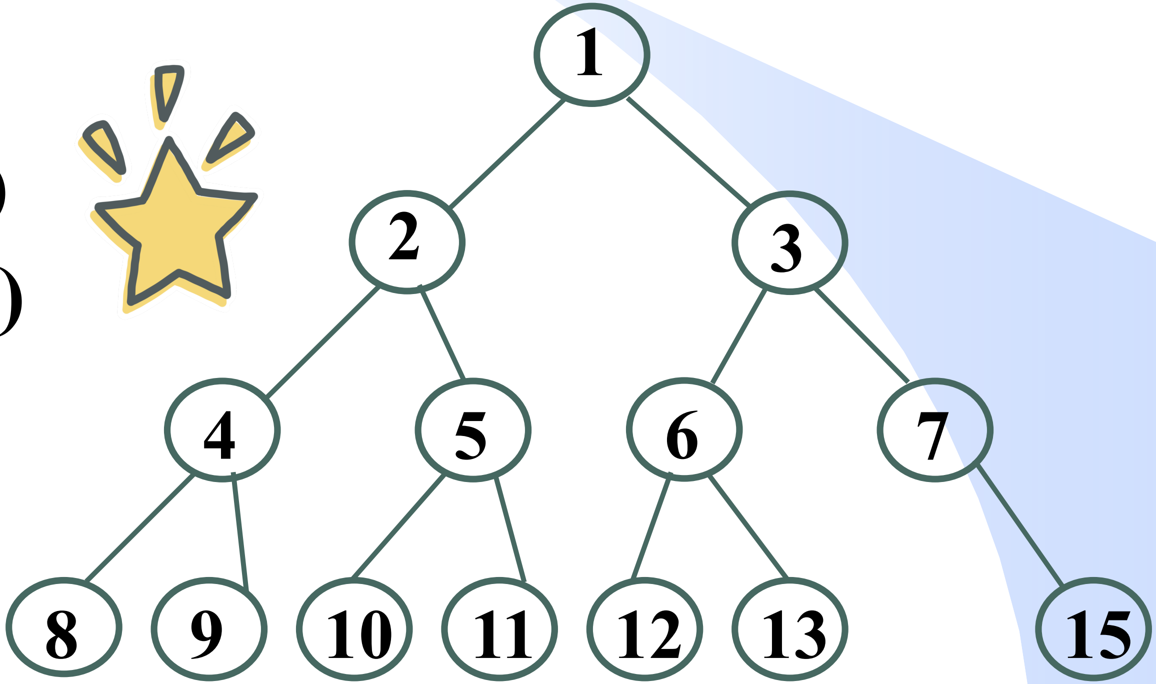
$e = n - 1$ （从下往上看）

$e = 2n_2 + n_1$ （从上往下看）

因此，有

$$2n_2 + n_1 = n - 1$$
$$= n_0 + n_1 + n_2 - 1$$

$\therefore\ n_0 = n_2 + 1$. 证毕 ▌



练习

若一棵二叉树具有10个度为2的结点，5个度为1的结点，则度为0的结点个数为________.【腾讯校园招聘笔试题】

A. 9　　B. 11　　C. 15　　D. 不确定

$$n_0 = n_2 + 1$$

练习

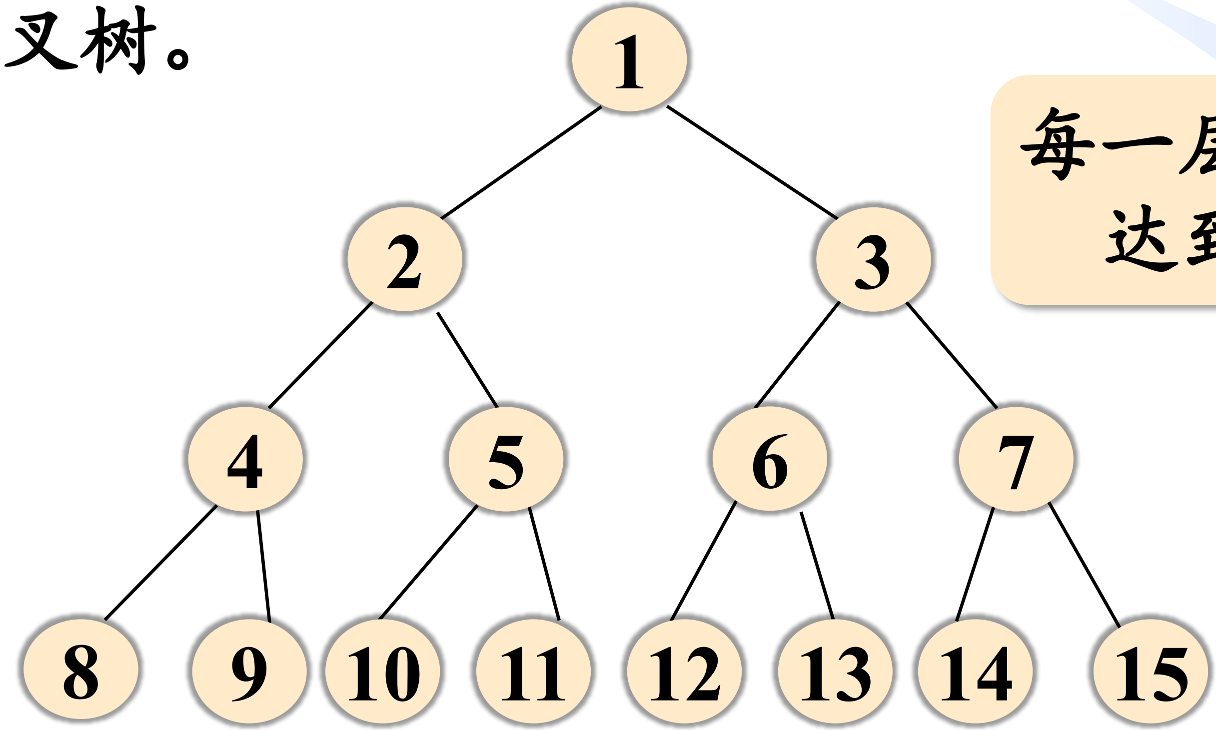
若二叉树有32个结点且度为1的结点有7个，则叶结点的个数为________.【搜狗校园招聘笔试题】

A. 13　　B. 14　　C. 12　　D. 15

$$n_0 + n_2 = 25 \qquad n_0 = n_2 + 1$$

满二叉树的定义

一棵非空高度为k($k \geq 0$)的满二叉树，是有2^{k+1}-1个结点的二叉树。



每一层都充满了结点
达到最大结点数

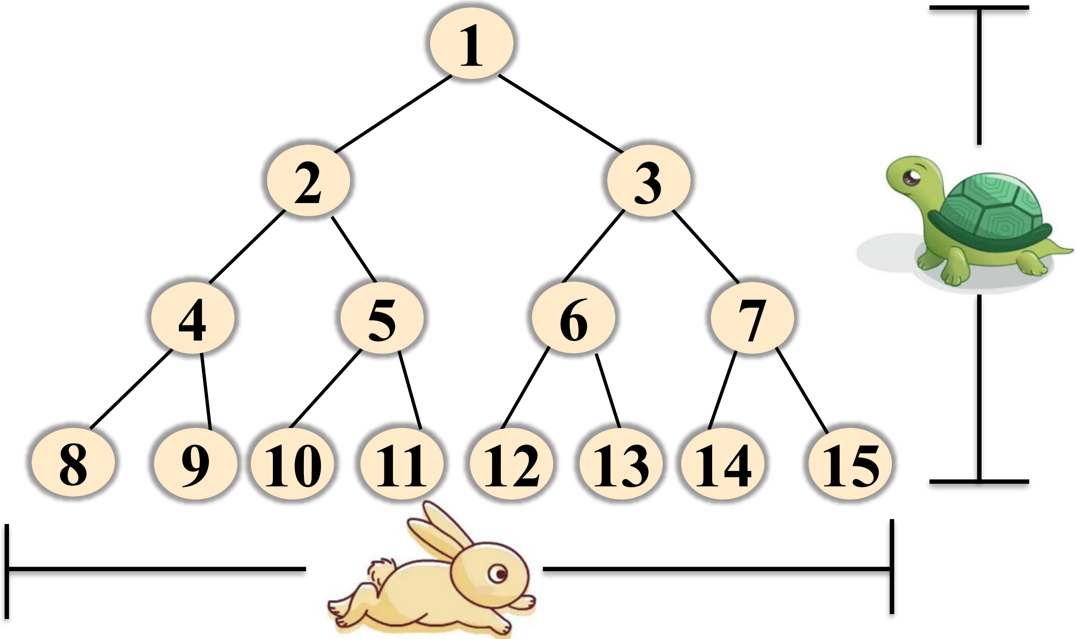
满二叉树的特点

① 叶结点都在最后一层；

② 每个非叶结点都有两个子结点；

③ 叶结点的个数等于非叶结点个数加1。

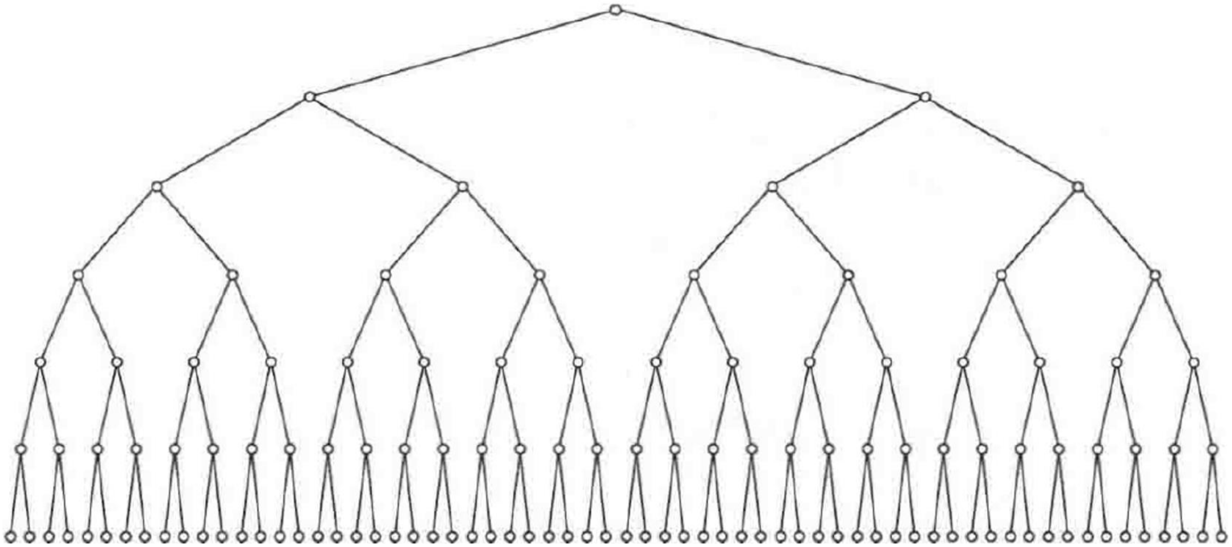
引理 $n_0=n_2+1.$



练习

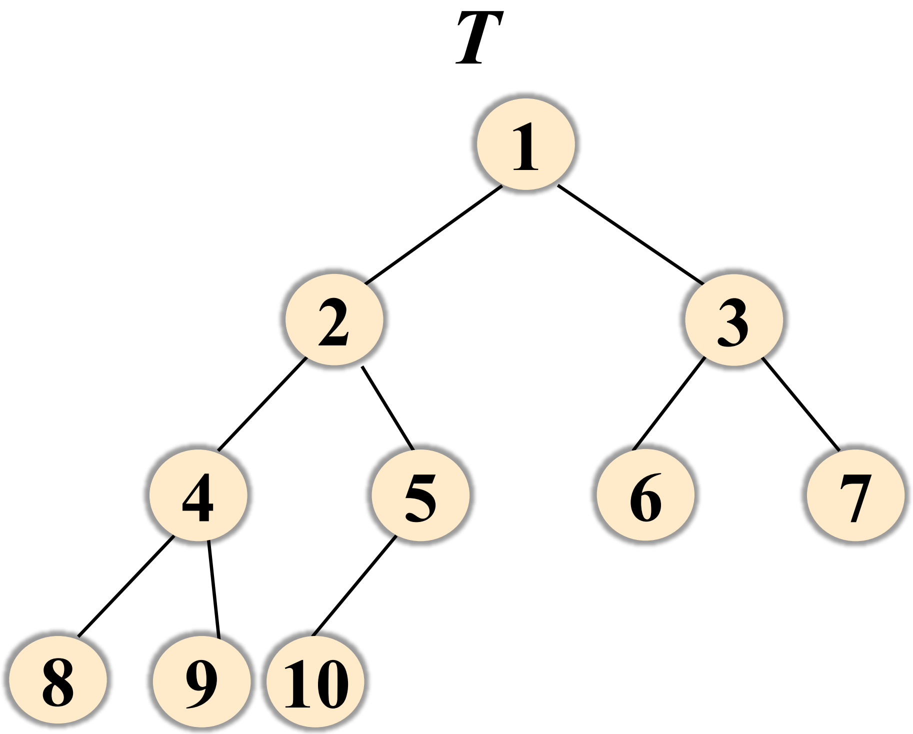
一棵满二叉树有k个叶结点，则其结点总数为 $\underline{\quad 2k\text{-}1 \quad}$。

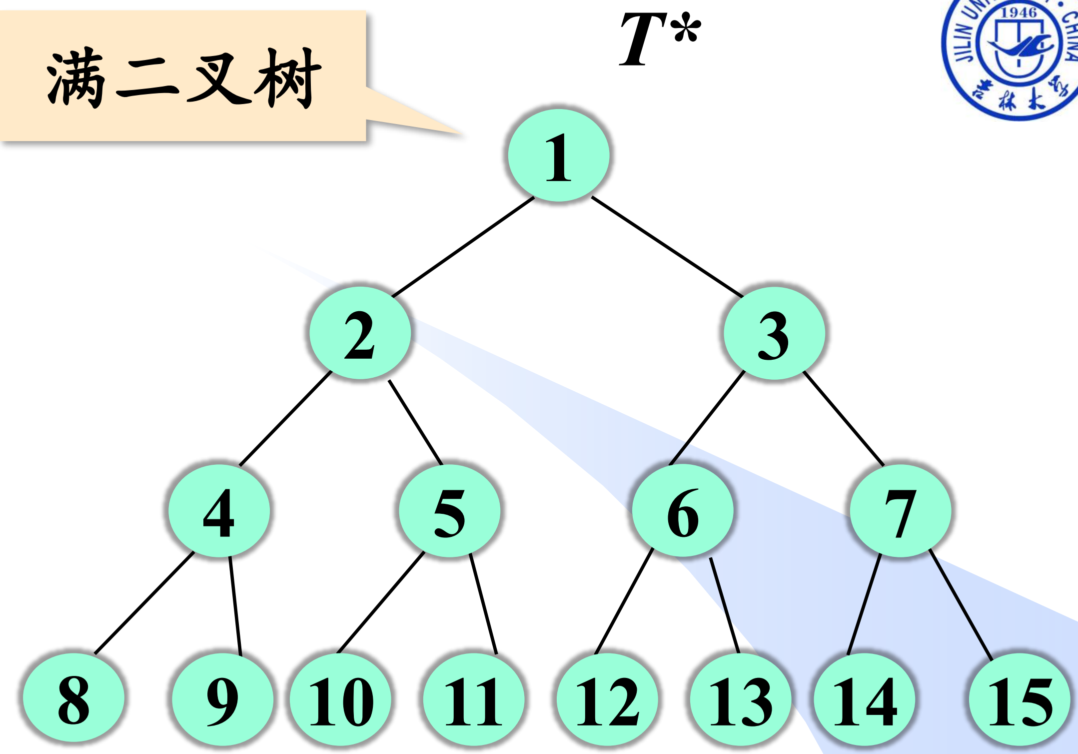
【2018年考研题全国卷】



完全二叉树

- 给定一棵有 n 个结点、高为 k 的二叉树 T，一棵高为 k 的满二叉树 T^*；
- 用正整数按层次顺序分别编号 T 和 T^* 的所有结点；
- 如果 T 之所有结点恰好对应于 T^* 的前 n 个结点，则称 T 为完全二叉树。
- 层次顺序：按层数从上至下（即从第0至第k层），同层结点由左到右的次序。





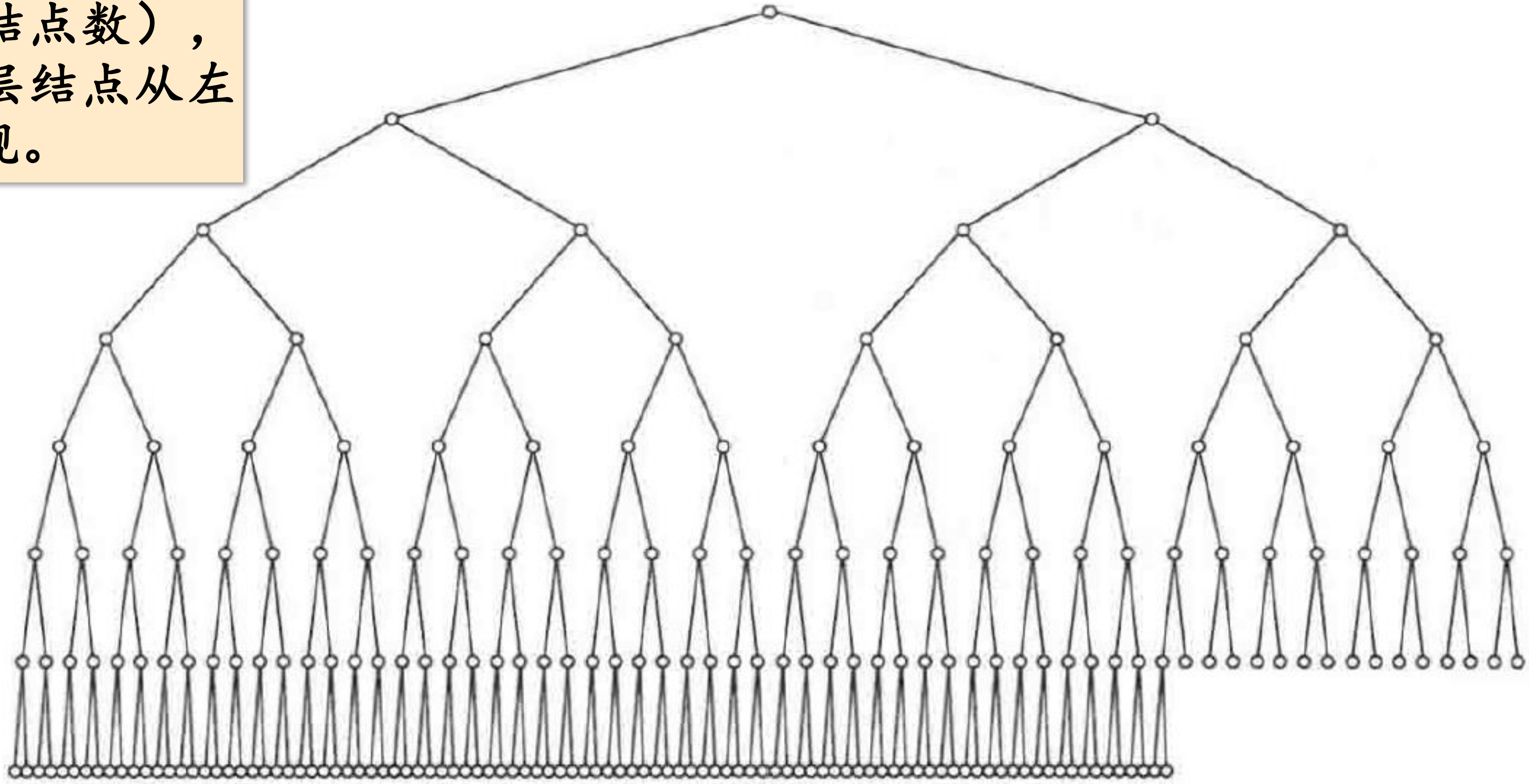
满二叉树

完全二叉树

特点：除最下一层外，每一层都是满的（达到最大结点数），最后一层结点从左至右出现。

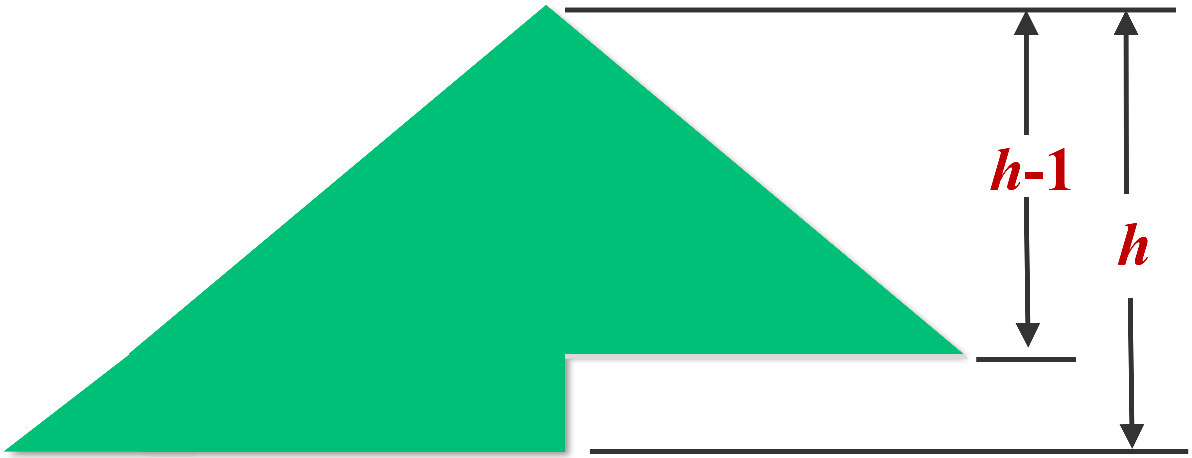
完全二叉树

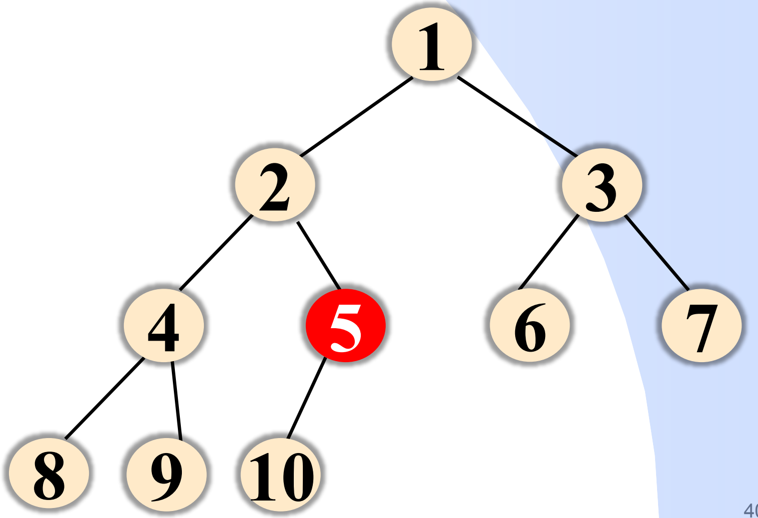
除最下一层外，每一层都是满的（达到最大结点数），最后一层结点从左至右出现。



完全二叉树的特点

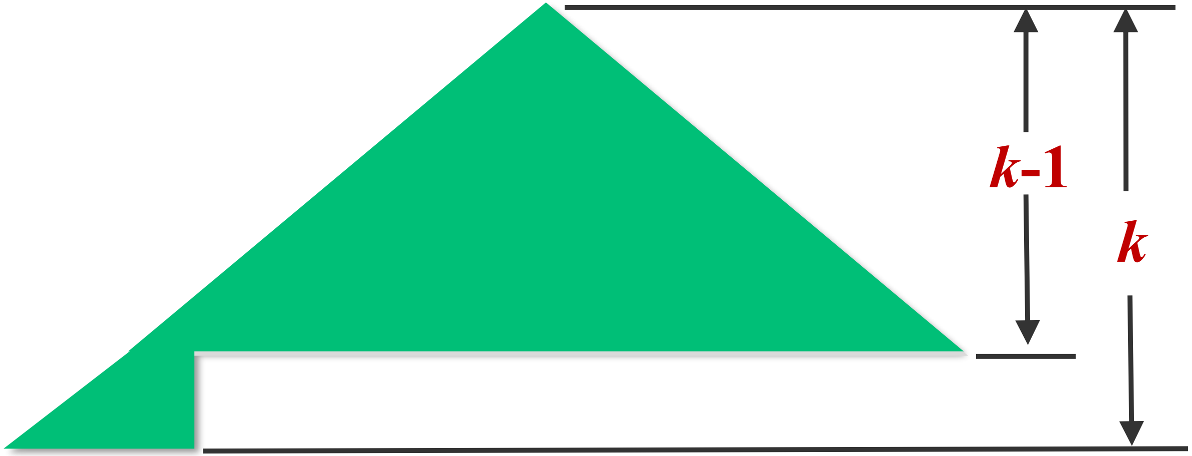
- 只有最下面两层结点的度可以小于2；
- 最下面一层的结点都集中在该层最左边的若干位置上；
- 叶结点只可能在最后两层出现；
- 对所有结点，按层次顺序从1开始编号，仅编号最大的非叶结点可以没有右孩子，其余非叶结点都有两个子结点。





练习

高度为k的完全二叉树最少有__ 2^k __个结点。



高度为k-1的满二叉树再加1个结点

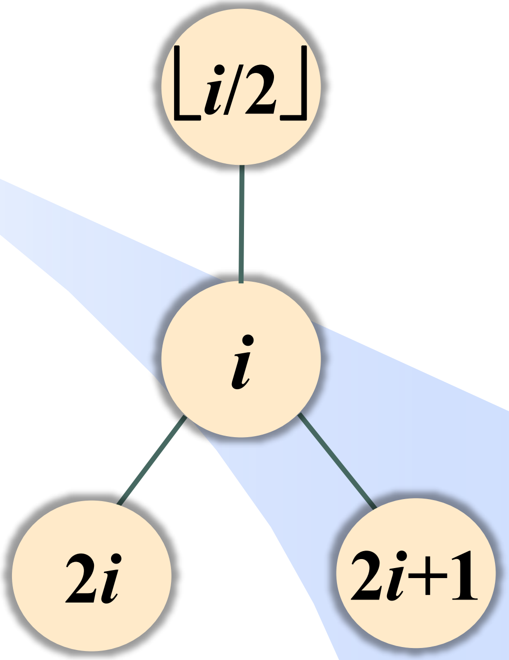
引理　高度为k的二叉树中至多有2^{k+1}-1个结点

引理 若将一棵具有n个结点的完全二叉树按层次顺序从1开始编号，则对编号为i ($1\le i \le n$)的结点有：

① 若$i\neq 1$，则编号为 i 的结点的父结点的编号为$\lfloor i/2 \rfloor$。

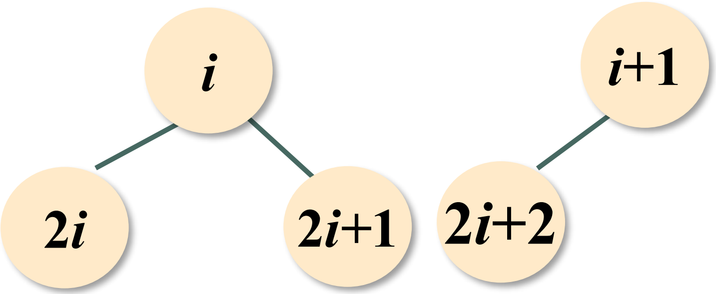
②若$2i \le n$，则编号为 i 的结点的左孩子的编号为 $2i$，否则 i 无左孩子。

③若$2i+1 \le n$，则 i 结点的右孩子结点编号为$2i+1$，否则 i 无右孩子。



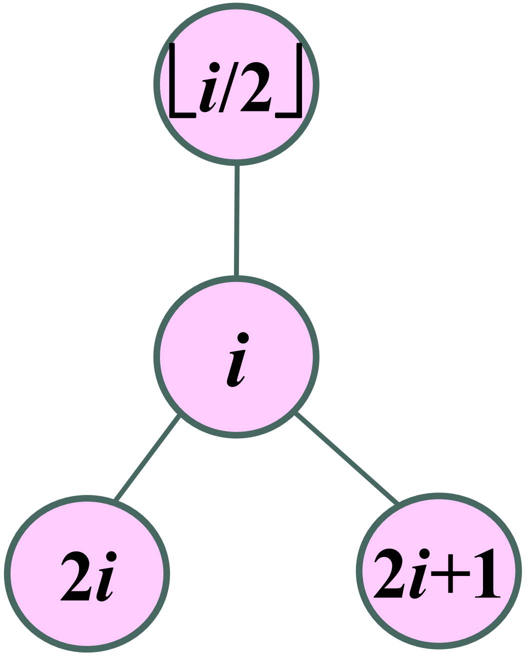
用归纳法证明②

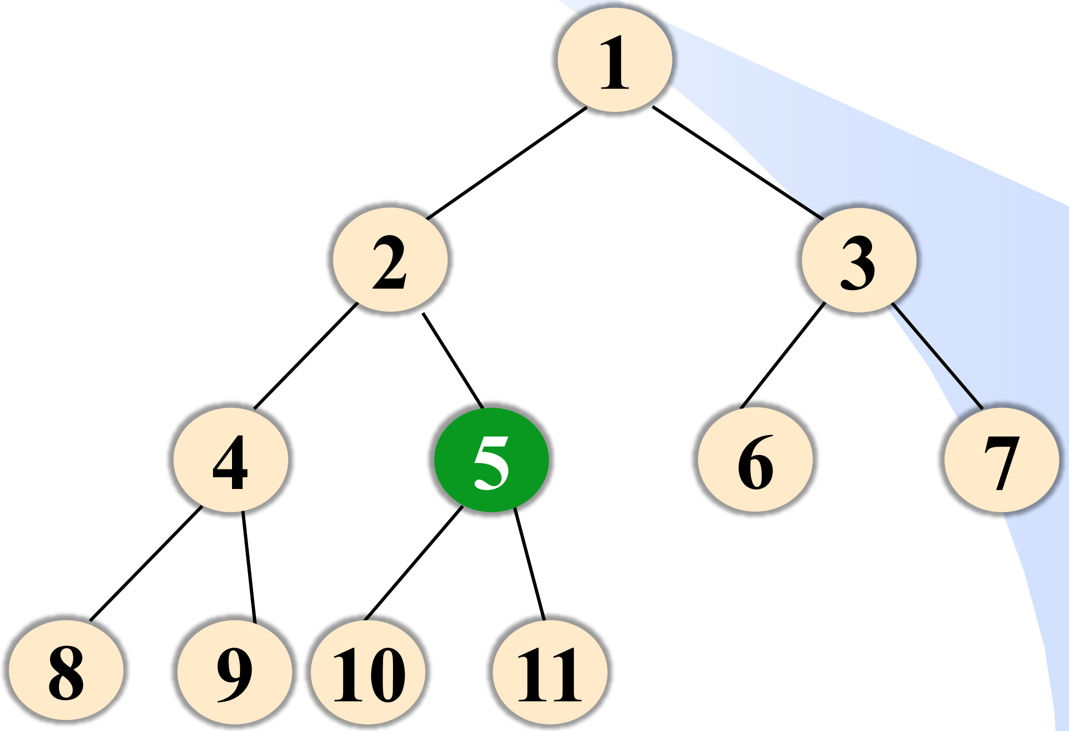
- 若i=1，如果$n\geq2$，则左孩子的编号显然为2 .
- 假定对所有j ($1\leq j\leq i$，$2i\leq n$)，知j的左孩子编号为$2j$.
- 往证结点i+1的左孩子编号为$2(i+1)$.
- 如果$2(i+1)\leq n$，则由层次次序得知，i+1的左孩子之前的两个结点就是i的左孩子和右孩子，因为i的左孩子编号为$2i$（归纳假设），故i的右孩子编号为$2i+1$，从而i+1的左孩子编号为 $2i+2=2(i+1)$.
- 由②可直接推出③，由②和③又可得到①，证毕 ∎



推论： 一棵具有n个结点的完全二叉树，其非叶结点个数为$\lfloor n/2 \rfloor$，叶结点个数为$\lceil n/2 \rceil$

证明： 最后一个结点编号为n，则最后一个非叶结点一定是其父结点，编号为$\lfloor n/2 \rfloor$，故非叶结点$\lfloor n/2 \rfloor$个，叶结点$n-\lfloor n/2 \rfloor=\lceil n/2 \rceil$个





练习

已知一棵完全二叉树有768个结点，则该完全二叉树的叶结点个数是________。【考研题全国卷】

推论： 一棵n个结点的完全二叉树，非叶结点个数为$\lfloor n/2 \rfloor$，叶结点个数为$\lceil n/2 \rceil$

叶结点个数$\lceil 768/2 \rceil=384$

引理 $n\ (n>0)$个结点的完全二叉树的高度是$\lfloor \log_2 n \rfloor$.

证明：

设二叉树高度为k，由完全二叉树的定义知，完全二叉树的结点个数介于高度为k-1和高度为k的满二叉树的结点数之间，即有：$2^k-1< n \le 2^{k+1}-1$

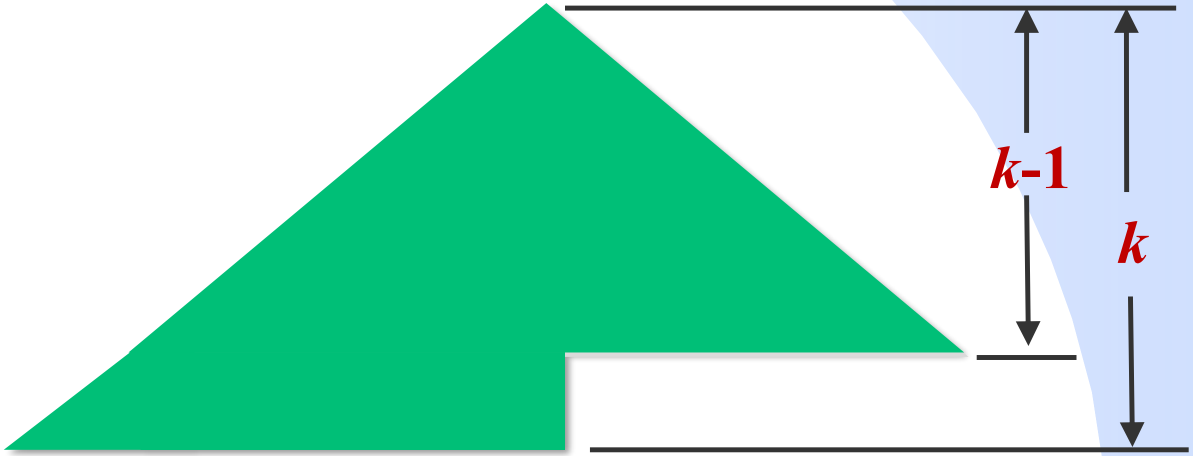
$$故\ 2^k \le n < 2^{k+1}，即 k \le \log_2 n < k+1,$$

有$\log_2 n-1< k\le \log_2 n$,

由于k为整数，

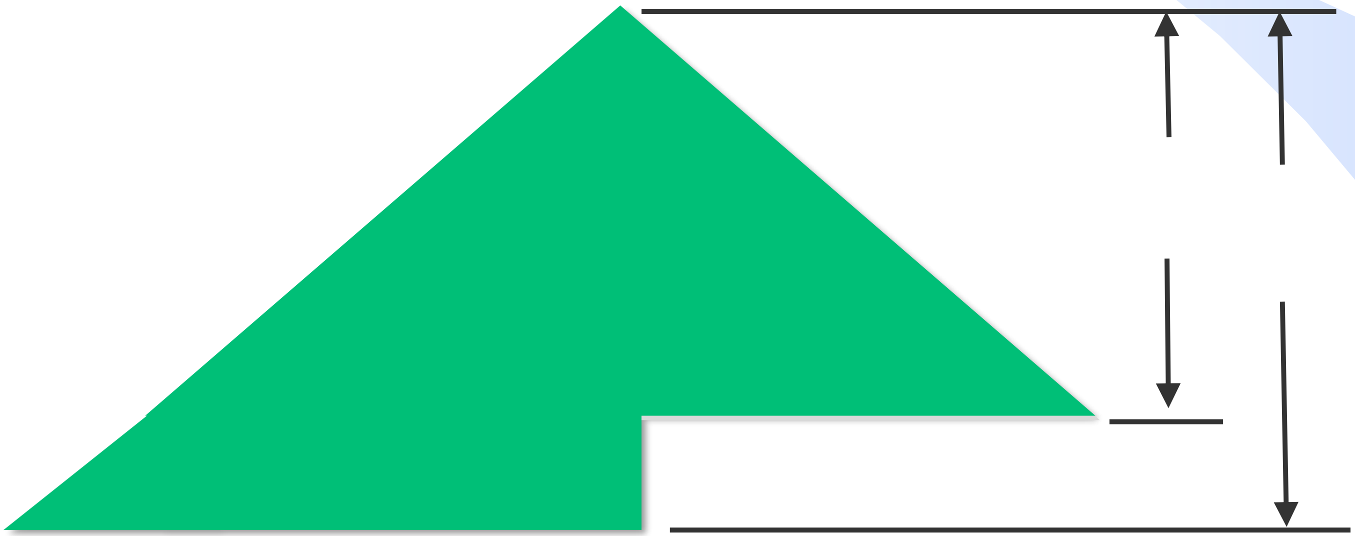
故有$k=\lfloor \log_2 n \rfloor$.

证毕 ▌



练习

已知一棵完全二叉树的第5层有8个叶结点，则该完全二叉树的结点个数最少是<u>39</u>，最多是<u>111</u>。【考研题全国卷】



课下思考

已知一棵完全二叉树的第n层有k个叶结点，则该完全二叉树的结点个数最少是 $\underline{2^n+k-1}$ ，最多是 $\underline{2^{n+2}-2k-1}$ 。