证明：对于赛道上两点，A,B，我们采用车辆从A到B（顺时针）所耗油量

来表示A到B的距离，同理B到A的距离为车从B到A（顺时针）所耗油量。

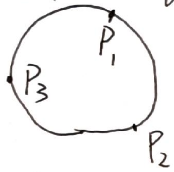
现在我们来定义会用到的符号：

(i) P_i：我们设赛道上，依次排布了n个加油站：设 P_i 表示第i个加油站

（i增大的方向是顺时针方向）。并且，我们令 p_i 表示 P_i 到 P_{i+1} 的距离。

特别地，p_n 表示 P_n 到 P_1 的距离

如图所示：



P_1, P_2, P_3 表示三个在跑道上等距分布的加油站。

那么它们各自的值就是 $\frac{1}{3}$，

(ii) a_i：我们用 a_i 表示 P_i 具有 a_i 单位的油，即第i个加油站有 a_i 单位油。

现在我们考虑特殊情况：$a_i = p_i + p_{i-1}$，($p_0 = p_n$)

也即每个加油站的油刚好能使从它出发，到上一站和下一站。

我们可以如下安排：

顺时针的车：从 P_1 出发加 p_1 单位油，此后，每到 P_i 就加 p_i 单位油。

逆时针的车：从 P_1 出发加 $p_0(p_n)$ 单位油，此后，每到 P_i 就加 p_{i-1} 单位油。

我们将证明：对于所有可能的 $\{a_i\}$ 并且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2$ 我们都能合理安排车，使得

题目条件满足。

~~不妨设~~ 由于 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2$，我们考虑 $b_i = a_i - p_{i-1}$，由我们的题目条件：

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$ （环行一圈消耗1单位油）

此时我们有 $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$，我们可以形象地理解成先使逆时针的车跑起来，

按照在 P_i 处加 p_{i-1} 油的方式。这会出现两种情况：

1. $b_i \geq 0$ 对所有 $i=1,2,\dots,n$ 成立。

由于此时，$\sum_{i=1}^{n} b_i \geq 1$，$b_i \geq 0$，我们可以考虑只有一辆车在跑道上，并且加油站的

存量之和为1的情况，我们会在引理1中讨论，现在我们使用引理1，

找到指标j，不妨设为1。那么我们可以按照如下方式安排车辆环行。

逆时针的车：从 P_1 出发，加 $p_0(p_n)$ 单位油，此后每到 P_i 就加 p_{i-1} 单位油。

顺时针的车：按照引理1所给方案环行即可。

2. $\exists k>0$, s.t. $b_k<0$,

由于此时 $\sum_{i=1}^{n} b_i=1$, 我们仍可以用引理1来找到指标j, 不妨设为1.

现在由于 $b_k<0$, 显然, 它的意思是: 如果逆时针的车从 P_1 出发, 每到 P_i 就加 p_{i-1} 单位油, 它是到不了 P_k 的, 或者说, 想到 P_k, 就得在之前的加油站多加 $-b_k$ 的油. 于是, 我们采用两个操作:

这里的前是相对于逆时针方向的.

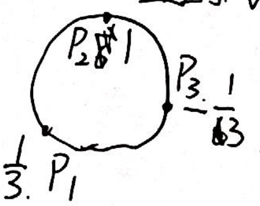
(i) 对于 $k<i\le n$ 的 P_i, 以及 P_1. 我们找到那些满足 $b_i-p_i\ge 0$ 的指标i, ($k\le i\le n$, 或者 $i=1$). ~~并且~~ 将 P_i 站多的油, b_i-p_i 匀到 P_k, 也就是下面的赋值

$b_k=b_k+\cancel{R}b_i-p_i$

$b_i=0$.

(注: 这一操作不会影响顺时针的车能否还行, 只是将后面才能加的油"预支"了)

如此反复, 直到 $\forall i>0$, $b_i\ge 0$. 或者, 找不到上述指标i. 下面是反例:



此时我们~~找~~找不到满足 $b_i-p_i\ge 0$. 的指标i, 于是我们引入第二个操作.

(ii). 我们可以将出发点, 设置到 P_2, 继续操作(i).

注.(由于此时, P_1 的油刚好够车从 P_1 顺时针到 P_2, 所以移动出发点并无影响).

由于 $\sum_{i=1}^{n} b_i=1>0$, 所以经过上述操作有限次后, 能够回到情况1.

接下来只需要按照情况1安排行驶加油方案即可。于是我们完成了证明.

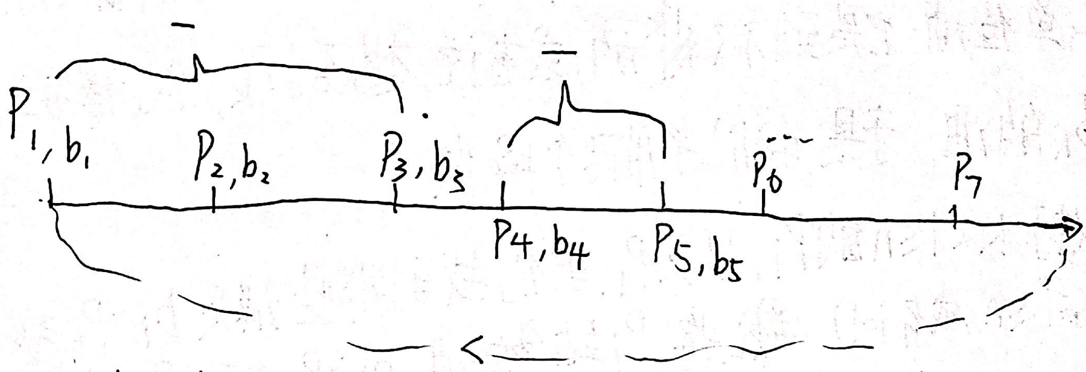
引理1: 通过这一引理, 我们想说明: 若环道上只有一辆车, 加油站的油总量为1. 那么对于任意, 加油站分布, 即油分布, 我们总能找到合适的方案满足题目。不妨设该车顺时针. 沿用之前的记号, 即 $\sum_{i=1}^{n} a_i=1$. ~~[illegible]~~, $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$. 我们设 $b_i=a_i-p_i$.

则我们引理的内容是 $\exists j>0$, s.t. $\sum_{i=j}^{j+k} b_i\ge 0$. (对所有 $k=1,2,\cdots n$ 成立, 此时 $b_{n+k}=b_k$, 也就是取模)

证明: 首先我们以 P_1 为起始点, 加 P_1 单位油, 若 b_1 为负, 则以 P_2 为起始点, 假设 b_1 不为负, 我们找到最小的使 $\sum_{i=1}^{1+k} b_i<0$ 的指标k, 若找不到, 则证毕. 然后我们以 P_{k+1} 为起始点继续寻找, (该步骤会在有限次后停止, 因为 $\sum_{i=1}^{n} b_i=0$. 即负的和正的能抵消) 我们停下来的点就是指标j.

从P_j出发，每到P_i站就加满P_i站已有的油，这样车辆一定能环行。

我们可以依据下图辅助理解寻找 j 的过程：



该图中有7个加油站，由于 $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$，所有 $b_6 + b_7 = -\sum_{i=1}^{5} b_i$

我们先从P_1出发，找到第1个不满足条件的 $k=2$（$\sum_{i=1}^{3} b_i < 0$）

于是移到P_4，找到第1个不满足条件的 $k=1$（$\sum_{i=1}^{2} b_i < 0$）

于是移到P_6，若 $b_6 < 0$，则移至P_7出发，这必然能环行）

若 $b_6 \ge 0$，则从P_6出发即可。