REGRAS DE INFERÊNCIA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM LÓGICA MATEMÁTICA

PUCPR

GRUPO MARISTA

2023

Dedução Natural

A Dedução Natural permite, por meio de um pequeno número de **regras de inferência**, demonstrar a validade de uma infinidade de fórmulas e <u>argumentos</u> sem a necessidade de considerar os valores que cada fórmula ou subfórmula recebe.

Dedução Natural

- O que é um **argumento**?

Argumento é a sequência de premissas seguida por uma conclusão.

Um argumento é válido quando sua conclusão é uma consequência lógica de suas premissas.

- O que é uma **premissa**?

É uma proposição ou afirmação que é usada como base ou fundamento para uma argumentação ou inferência.

Dedução Natural

- Por exemplo, considere o seguinte argumento:

P1: Todos os seres humanos são mortais.

P2: Sócrates é um ser humano.

C: Portanto, Sócrates é mortal.

Dedução Natural

Um argumento de premissas $P_1, P_2, ..., P_n$ e de conclusão Q indica-se por

$$P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q.$$

Podemos dizer que:

- $P_1, P_2, ..., P_n$ acarretam Q;
- Q decorre de $P_1, P_2, ..., P_n$;
- Q se deduz de $P_1, P_2, ..., P_n$.

Dedução Natural

- Apresenta um **conjunto de regras de inferências**
  - Também chamadas de regras de dedução
  - Elas **modificam as fórmulas** de modo a preservar seu valor lógico
- **Regras de inferências são passos que conduzem à uma conclusão a partir de premissas**
- A sequência de fórmulas obtidas durante estes passos é chamada de sequência de demonstração ou demonstração formal da conclusão em função de suas premissas

Dedução Natural

- As **regras de inferência** são baseadas em implicações que já se tenha demonstrado (por tabela-verdade) serem tautológicas

Cuidado, não confundir!

- Regras de Equivalência
  - São reversíveis: pode-se substituir uma subfórmula de um argumento por outra equivalente sem alterar a validade lógica
- Regras de Inferência
  - Não são reversíveis
  - Se baseiam em implicações tautológicas, ou seja, implicações materiais provadamente tautológicas

Regras de Inferência

Adição:

$$\frac{A}{B \lor A} \qquad \frac{A}{A \lor B}$$

Simplificação:

$$\frac{A \land B}{A} \qquad \frac{A \land B}{B}$$

Conjunção:

$$\frac{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}}{A \land B} \qquad \frac{\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}}{B \land A}$$

Modus Ponens:

$$\frac{\begin{matrix} A \\ A \rightarrow B \end{matrix}}{B}$$

Modus Tollens:

$$\frac{\begin{matrix} A \rightarrow B \\ \neg B \end{matrix}}{\neg A}$$

Silogismo Disjuntivo:

$$\frac{\begin{matrix} A \lor B \\ \neg A \end{matrix}}{B} \qquad \frac{\begin{matrix} A \lor B \\ \neg B \end{matrix}}{A}$$

Silogismo Hipotético:

$$\frac{\begin{matrix} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{matrix}}{A \rightarrow C}$$

Dilema Construtivo:

$$\frac{\begin{matrix} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ A \lor C \end{matrix}}{B \lor D}$$

Dilema Destrutivo:

$$\frac{\begin{matrix} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ \neg B \lor \neg D \end{matrix}}{\neg A \lor \neg C}$$

Adição

- Também conhecida como *introdução da disjunção*.
- Sejam **A** e **B** proposições, se **A** é verdade então podemos deduzir que **A v B** também é verdade

Sócrates é homem (A);

Portanto, Sócrates é homem ou gatos latem **(A v B)**

Adição	**A** **---------** **A v B**	**A** **---------** **B v A**

Adição

- Exemplos:

(1)	A	Prem
(2)	A v B	1 AD

(1)	A v B	Prem
(2)	(A v B) v C	1 AD

(1)	A v B	Prem
(2)	(A v B) v (C v D)	1 AD

Conjunção

- Também chamada de *introdução da conjunção*
- Podemos inferir uma conjunção a partir de qualquer uma de suas premissas
  - Sejam **A** e **B** proposições, se **A** é verdade e **B** também é verdade, então **A ^ B** também é verdade

Sócrates era grego, Platão era grego.

Logo, Platão e Sócrates eram gregos (A, B ⊢ A ^ B)

Adição (AD)	**A** **B** **---------** **A ^ B**	**A** **B** **---------** **B ^ A**

Conjunção

- Exemplos:

(1)	A v B	Prem
(2)	~C	Prem
(3)	(A v B) ^ ~C	1,2 CONJ

(1)	A v B	Prem
(2)	B v C	Prem
(3)	(A v B) ^ (B v C)	1,2 CONJ

(1)	X < 5	Prem
(2)	X > 1	Prem
(3)	(X > 1) ^ (X < 5)	1,2 CONJ

Simplificação (eliminação da conj)

- De uma conjunção podemos inferir qualquer uma de suas premissas

  - Sejam **A** e **B** proposições, se **A** ^ **B** é verdade, então **A** e **B** (individualmente) também são verdades

Ex.:

Sócrates e Platão eram gregos.

Logo, Sócrates era grego (A ^ B ⊢ A)

Simplificação (SIMP)	**A ^ B** **---------** **A**	**A ^ B** **---------** **B**

Simplificação (eliminação da conj)

- Exemplos:

(1)	(A v B) ^ C	Prem
(2)	A v B	SIMP

(1)	P ^ ~Q	Prem
(2)	~Q	SIMP

(1)	X > 0 ^ X ≠ 1	Prem
(2)	X ≠ 1	SIMP

Modus Ponens

- Também chamada de *eliminação da implicação* ou eliminação da condicional

- Se o antecedente de um condicional for verdadeiro, o seu consequente necessariamente é verdadeiro

Se Deus existe, a vida é sagrada;	**($A \rightarrow B$)**
Deus existe.	**(A)**
Logo, a vida é sagrada	**($\vdash B$)**

Modus Ponens (MP)	**$A \rightarrow B$** **A** **---------** **B**	**A** **$A \rightarrow B$** **---------** **B**

Modus Tollens

- Se uma proposição condicional é verdadeira e sua consequência é falsa, então sua antecedente também é falsa

Se eu sair na chuva, vou me molhar;	**($A \rightarrow B$)**
Eu não me molhei.	**($\sim B$)**
Logo, eu não sai na chuva	**($\vdash \sim A$)**

Modus Tollens (MT)	**$A \rightarrow B$** **$\sim B$** **---------** **$\sim A$**

Exercícios

1) $\{\ p \rightarrow q, \sim p \rightarrow r, \sim q\ \} \vdash r$

Como deduzir que $\{\ p \rightarrow q, \sim p \rightarrow r, \sim q\ \}$ é igual a r ?

Exercícios

1) $\{ \ p \rightarrow q, \sim p \rightarrow r, \sim q \ \} \vdash r$

(1)	$p \rightarrow q$	Prem
(2)	$\sim p \rightarrow r$	Prem
(3)	$\sim q$	Prem

Exercícios

1) $\{\ p \rightarrow q, \sim p \rightarrow r, \sim q\ \} \vdash r$

(1)	$p \rightarrow q$	Prem
(2)	$\sim p \rightarrow r$	Prem
(3)	$\sim q$	Prem
(4)	$\sim p$	MT (1, 3)
(5)	r	MP (2, 4)

Modus Tollens:

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \neg B \end{array}}{\neg A}$$

Modus Ponens:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ A \rightarrow B \end{array}}{B}$$

Silogismo Disjuntivo

- Também chamado de *eliminação da disjunção* OU modus tollendo ponens

- Afirma que pelo menos uma das suas alternativas é verdadeira.

A realidade existe OU é tudo um sonho.	**(A v B)**
Não é tudo um sonho.	**(~A)**
Logo, a realidade existe.	**(B)**

Silogismo Disjuntivo (SD)	**A v B** **~A** **---------** **B**	**A v B** **~B** **---------** **A**

Silogismo Hipotético

- Aplicada quando temos duas proposições condicionais e queremos deduzir uma conclusão a partir delas.

Se eu estudar para a prova, eu vou passar.	**($A \rightarrow B$)**
Se eu passar na prova, eu vou comemorar.	**($B \rightarrow C$)**
Logo, se eu estudar para a prova, eu vou comemorar.	**($A \rightarrow C$)**

Silogismo Hipotético (SH)	$A \rightarrow B$ $B \rightarrow C$ --------- $A \rightarrow C$

Dilema Construtivo

Se eu estudar para a prova, eu vou passar. **($A \rightarrow B$)**

Se eu fizer um bom trabalho, meu chefe vai me elogiar. **($C \rightarrow D$)**

Eu vou estudar para a prova OU vou fazer um bom trabalho. **($A \vee C$)**

Logo, eu vou passar na prova ou meu chefe vai me elogiar. **($B \vee D$)**

Dilema Construtivo (DC)	$A \rightarrow B$ $C \rightarrow D$ $A \vee C$ --------- $B \vee D$

Dilema Destrutivo

Se eu estudar para a prova, eu vou passar. $(A \rightarrow B)$

Se eu fizer um bom trabalho, meu chefe vai me elogiar. $(C \rightarrow D)$

Eu não vou passar na prova ou meu chefe não vai me elogiar. $(\sim B \vee \sim D)$

Logo, eu não vou estudar para a prova ou não vou fazer um bom trabalho. $(\sim A \vee \sim C)$

Dilema Destrutivo (DD)	$A \rightarrow B$ $C \rightarrow D$ $\sim B \vee \sim D$ --------- $\sim A \vee \sim C$

Exercícios

$P \rightarrow Q, P \wedge R \vdash Q$

Exercícios

$$P \rightarrow Q,\ P \wedge R \ \vdash\ Q$$

(1)	$P \rightarrow Q$	Prem
(2)	$P \wedge R$	Prem
(3)	P	SIMP (2)
(4)	Q	MP (1, 3)

Simplificação:

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

Modus Ponens:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ A \rightarrow B \end{array}}{B}$$

Exercícios

$P \land Q, P \lor Q \rightarrow S \vdash P \land S$

Exercícios

$P \wedge Q,\ P \vee Q \rightarrow S \ \vdash\ P \wedge S$

(1)	$P \wedge Q$	Prem
(2)	$P \vee Q \rightarrow S$	Prem
(3)	P	SIMP (1)
(4)	$P \vee Q$	ADIÇÃO (3)
(5)	S	MP (2, 4)
(6)	$P \wedge S$	CONJ (3, 5)

Simplificação:

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

Adição:

$$\frac{A}{B \vee A} \qquad \frac{A}{A \vee B}$$

Modus Ponens:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ A \rightarrow B \end{array}}{B}$$

Conjunção:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \wedge B} \qquad \frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{B \wedge A}$$

Contato:

andreza.sousa@pucpr.br