

# RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM LÓGICA MATEMÁTICA

2023

A Dedução Natural permite, por meio de um pequeno número de **regras de inferência**, demonstrar a validade de uma infinidade de fórmulas e <u>argumentos</u> sem a necessidade de considerar os valores que cada fórmula ou subfórmula recebe.

• O que é um **argumento**?

Argumento é a sequência de <u>premissas</u> seguida por uma conclusão.

Um argumento é válido quando sua conclusão é uma consequência lógica de suas premissas.

• O que é uma **premissa**?

É uma proposição ou afirmação que é usada como base ou fundamento para uma argumentação ou inferência.

• Por exemplo, considere o seguinte argumento:

P1: Todos os seres humanos são mortais.

P2: Sócrates é um ser humano.

C: Portanto, Sócrates é mortal.

Um argumento de premissas  $P_1, P_2, ..., P_n$  e de conclusão Q indica-se por

$$P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$$
.

#### Podemos dizer que:

- $\bullet$   $P_1, P_2, ..., P_n$  acarretam Q;
- Q decorre de  $P_1, P_2, ..., P_n$ ;
- Q se deduz de  $P_1, P_2, ..., P_n$ .

- Apresenta um conjunto de regras de inferências
  - Também chamadas de regras de dedução
  - Elas **modificam as fórmulas** de modo a preservar seu valor lógico
- Regras de inferências são passos que conduzem à uma conclusão a partir de premissas
- A sequência de fórmulas obtidas durante estes passos é chamada de sequência de demonstração ou demonstração formal da conclusão em função de suas premissas

• As **regras de inferência** são baseadas em implicações que já se tenha demonstrado (por tabela-verdade) serem tautológicas

#### Cuidado, não confundir!

- Regras de Equivalência
  - São reversíveis: pode-se substituir uma subfórmula de um argumento por outra equivalente sem alterar a validade lógica
- Regras de Inferência
  - Não são reversíveis
  - Se baseiam em implicações tautológicas, ou seja, implicações materiais provadamente tautológicas

# Regras de Inferência

#### Adição:

$$\frac{A}{B\vee A} \quad \frac{A}{A\vee B}$$

#### Simplificação:

$$\frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{B}$$

#### Conjunção:

$$\begin{array}{ccc} A & A \\ \frac{B}{A \wedge B} & \frac{B}{B \wedge A} \end{array}$$

#### Modus Ponens:

$$\begin{array}{c}
A \\
A \to B \\
B
\end{array}$$

#### Modus Tollens:

$$\frac{A \to B}{\neg B}$$

#### Silogismo Disjuntivo:

$$\begin{array}{cc} A \vee B & A \vee B \\ \hline \neg \ A & \hline B & A \end{array}$$

#### Silogismo Hipotético:

$$A \to B$$

$$B \to C$$

$$A \to C$$

#### Dilema Construtivo:

$$A \rightarrow B$$

$$C \rightarrow D$$

$$A \lor C$$

$$B \lor D$$

#### Dilema Destrutivo:

$$A \rightarrow B$$

$$C \rightarrow D$$

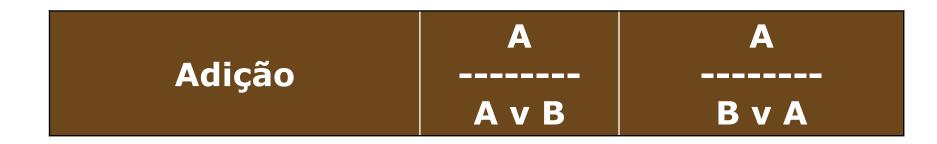
$$\frac{\neg B \lor \neg D}{\neg A \lor \neg C}$$

# Adição

- Também conhecida como introdução da disjunção.
- Sejam A e B proposições, se A é verdade então podemos deduzir que A v B também é verdade

Sócrates é homem (A);

Portanto, Sócrates é homem ou gatos latem (A v B)



# Adição

#### • Exemplos:

(1)	A	Prem
(2)	AvB	IAD

(1)	AvB	Prem
(2)	(A v B) v C	IAD

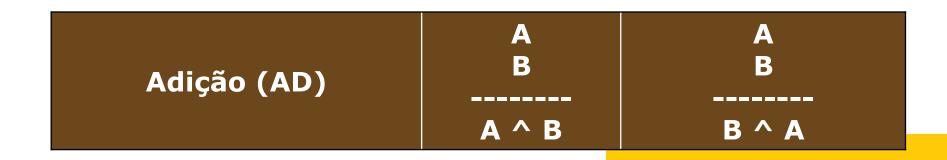
(1)	AvB	Prem
(2)	(A v B) v (C v D)	IAD

# Conjunção

- Também chamada de introdução da conjunção
- Podemos inferir uma conjunção a partir de qualquer uma de suas premissas
  - Sejam A e B proposições, se A é verdade e B também é verdade, então A ^ B também é verdade

Sócrates era grego, Platão era grego.

Logo, Platão e Sócrates eram gregos (A, B ⊢ A ^ B)



# Conjunção

• Exemplos:

(1)	AvB	Prem
(2)	~C	Prem
(3)	(A v B) ^ ~C	I,2 CONJ

(1)	AvB	Prem
(2)	BvC	Prem
(3)	(A v B) ^ (B v C)	1,2 CONJ

(1)	X < 5	Prem
(2)	X > I	Prem
(3)	(X > I) ^ (X < 5)	1,2 CONJ

# Simplificação (eliminação da conj)

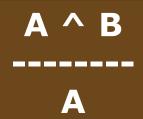
- De uma conjunção podemos inferir qualquer uma de suas premissas
  - Sejam A e B proposições, se A ^ B é verdade, então A e B (individualmente) também são verdades

Ex.:

Sócrates e Platão eram gregos.

Logo, Sócrates era grego (A  $^{\land}$  B  $\vdash$  A)

Simplificação (SIMP)





# Simplificação (eliminação da conj)

• Exemplos:

<b>(I)</b>	(A v B) ^ C	Prem
(2)	AvB	SIMP

<b>(1)</b>	P ^ ~Q	Prem
(2)	~Q	SIMP

(1)	X > 0 ^ X ≠ I	Prem
(2)	X≠I	SIMP

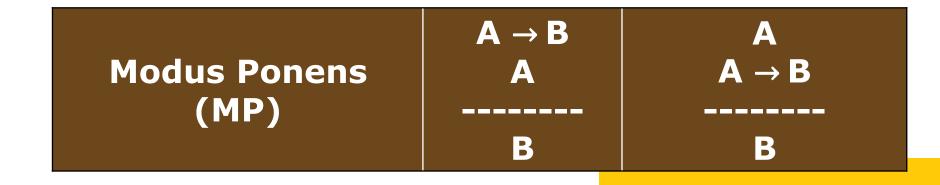
### Modus Ponens

- Também chamada de *eliminação da implicação* ou eliminação da condicional
- Se o antecedente de um condicional for verdadeiro, o seu consequente necessariamente é verdadeiro

Se Deus existe, a vida é sagrada; (A → B)

Deus existe. (A)

Logo, a vida é sagrada ( ⊢ B )



# **Modus Tollens**

• Se uma proposição condicional é verdadeira e sua consequência é falsa, então sua antecedente também é falsa

```
Se eu sair na chuva, vou me molhar; (A \rightarrow B)
Eu não me molhei. (\sim B)
Logo, eu não sai na chuva (\vdash \sim A)
```

A → B

Modus Tollens
(MT)

----
~A

```
1) { p \rightarrow q, \sim p \rightarrow r, \sim q } \vdash r
```

Como deduzir que {  $p \rightarrow q, \sim p \rightarrow r, \sim q$  } é igual a r ?

1) {  $p \rightarrow q, \sim p \rightarrow r, \sim q$  }  $\vdash r$ 

(1)	p  o q	Prem
(2)	$\sim$ p → r	Prem
(3)	~q	Prem

1) { 
$$p \rightarrow q, \sim p \rightarrow r, \sim q$$
 }  $\vdash r$ 

(1)	p  o q	Prem
(2)	$\sim p \rightarrow r$	Prem
(3)	~q	Prem
(4)	~p	MT (1, 3)
(5)	r	MP (2, 4)

# Modus Tollens: $A \rightarrow B$ -B -A

Modus Ponens:

A
$$A \rightarrow B$$
B

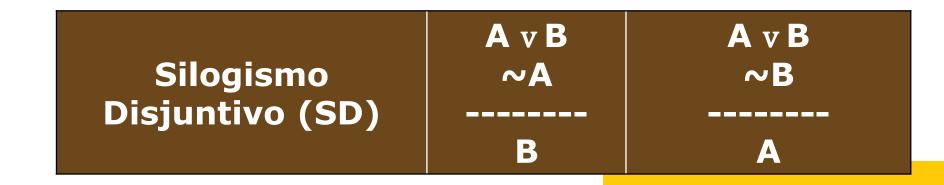
# Silogismo Disjuntivo

- Também chamado de *eliminação da disjunção* OU modus tollendo ponens
- Afirma que pelo menos uma das suas alternativas é verdadeira.

```
A realidade existe OU é tudo um sonho. (A v B)

Não é tudo um sonho. (~A)

Logo, a realidade existe. (B)
```



# Silogismo Hipotético

 Aplicada quando temos duas proposições condicionais e queremos deduzir uma conclusão a partir delas.

Se eu estudar para a prova, eu vou passar.

 $(A \rightarrow B)$ 

Se eu passar na prova, eu vou comemorar.

 $(\mathbf{B} \to \mathbf{C})$ 

Logo, se eu estudar para a prova, eu vou comemorar.  $(A \rightarrow C)$ 

Silogismo Hipotético (SH)  $A \rightarrow B$   $B \rightarrow C$   $A \rightarrow C$ 

# Dilema Construtivo

Se eu estudar para a prova, eu vou passar.  $(A \rightarrow B)$ 

Se eu fizer um bom trabalho, meu chefe vai me elogiar.  $(C \rightarrow D)$ 

Eu vou estudar para a prova OU vou fazer um bom trabalho. (A v C)

Logo, eu vou passar na prova ou meu chefe vai me elogiar. (B v D)

Dilema Construtivo (DC)  $\begin{array}{c} A \to B \\ C \to D \\ A \lor C \\ \hline B \lor D \end{array}$ 

## Dilema Destrutivo

Se eu estudar para a prova, eu vou passar.

 $(A \rightarrow B)$ 

Se eu fizer um bom trabalho, meu chefe vai me elogiar.

 $(C \rightarrow D)$ 

Eu não vou passar na prova ou meu chefe não vai me elogiar.

 $(\sim B \ v \sim D)$ 

Logo, eu não vou estudar para a prova ou não vou fazer um bom trabalho. (~A v ~C)

Dilema Destrutivo (DD)

 $A \rightarrow B$   $C \rightarrow D$   $\sim B \vee \sim D$   $\sim A \vee \sim C$ 

$$P \rightarrow Q, P \wedge R \vdash Q$$

$$P \rightarrow Q, P \wedge R \vdash Q$$

(1)	$P \rightarrow Q$	Prem
(2)	P^R	Prem
(3)	Р	SIMP (2)
(4)	Q	MP (1, 3)

Simplificação: A∧B A∧B A B Modus Ponens:

A  $\underline{A \to B}$ B

$$P \wedge Q, P \vee Q \rightarrow S \vdash P \wedge S$$

$$P \wedge Q, P \vee Q \rightarrow S \vdash P \wedge S$$

(1)	P ^ Q	Prem
(2)	P v Q → S	Prem
(3)	P	SIMP (1)
(4)	PvQ	ADIÇÃO (3)
(5)	S	MP (2, 4)
(6)	P^S	CONJ (3, 5)

Simplificação: A∧B A∧B A B

 $\begin{array}{cc} \textit{Adição}: \\ \frac{A}{B \vee A} & \frac{A}{A \vee B} \end{array}$ 

Modus Ponens:

A  $\underline{A \to B}$ B

 $\begin{array}{ccc} \textit{Conjunção:} \\ & \text{A} & \text{A} \\ & \text{B} & \text{B} \\ & \text{A} \wedge \text{B} & \text{B} \wedge \text{A} \end{array}$ 

