AULA 5

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM LÓGICA MATEMÁTICA

2023

Manipulação Sintática

Regras para manipulação e substituição:

- São princípios que permitem a obtenção de fórmulas proposicionais equivalentes a uma fórmula dada, através da substituição de suas subfórmulas.

A fórmula substituída deve ser EQUIVALENTE à fórmula original.

Seja *A* uma fórmula que contém as variáveis p_1 , p_2 , ... , p_n. Se *A* é uma tautologia, então a fórmula *B*, obtida pela substituição de p_1, ... , p_n por fórmulas A_1 , ... , A_n, é uma tautologia.

O que é uma subfórmula?

Dada uma fórmula ***H***, suas subfórmulas são definidas por:

- ***H*** é uma subfórmula de ***H***.
- Se ***H*** **=** $\neg$***p***, então ***p*** é uma subfórmula de ***H***.
- Se ***H*** é uma fórmula do tipo: $(q \wedge r)$, $(q \vee r)$, $(q \rightarrow r)$ ou $(q \leftrightarrow r)$, então ***q*** e ***r*** são subfórmulas de ***H***.
- Se ***G*** é uma subfórmula de ***H***, então toda subfórmula de ***G*** é subfórmula de ***H***.

O que é uma subfórmula?

Quais são as subfórmulas?

Exemplos:

a) $H = (\neg p \wedge q)$

b) $G = ((p \leftrightarrow q) \vee \neg r)$

O que é uma subfórmula?

Quais são as subfórmulas?

Exemplos:

a) $H = (\neg p \wedge q)$

$\{\neg p \wedge q, \neg p, q, p\}$ **4 subfórmulas!**

b) $G = ((p \leftrightarrow q) \vee \neg r)$

O que é uma subfórmula?

Quais são as subfórmulas?

Exemplos:

a) $H = (\neg p \wedge q)$

$\{\neg p \wedge q, \neg p, q, p\}$ **4 subfórmulas!**

b) $G = ((p \leftrightarrow q) \vee \neg r)$

$\{(p \leftrightarrow q) \vee \neg r, p \leftrightarrow q, \neg r, p, q, r\}$ **6 subfórmulas!**

Equivalências entre os conectivos

1) $(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\sim P$	$\sim P \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

"Se **você fizer isto**, então **irá se arrepender**."

$p \rightarrow q$

"**Não faça isto** ou **irá se arrepender**."

$\sim p \vee q$

De acordo com a lógica proposicional, a frase que é equivalente a: "Se Marcos estudou, então foi aprovado" é:

(A) Marcos não estudou e foi aprovado.
(B) Marcos não estudou e não foi aprovado.
(C) Marcos estudou ou não foi aprovado.
(D) Marcos estudou se, e somente se, foi aprovado.
(E) Marcos não estudou ou foi aprovado.

Equivalências entre os conectivos

2) $(A \rightarrow B) \equiv \neg (A \wedge \neg B)$

3) $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

4) $(A \underline{\vee} B) \equiv \neg (A \leftrightarrow B) \equiv (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$

Equivalências entre os conectivos

5) $(A \uparrow B) \equiv \neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$

Negação disjunta: $\uparrow$

$p \uparrow q \equiv \sim p \vee \sim q$

$\sim p \uparrow q \equiv$

$\sim(p \uparrow q) \equiv$

$\sim p \uparrow \sim q \equiv$

Equivalências entre os conectivos

5) $(A \uparrow B) \equiv \neg (A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$

Negação disjunta: ↑

p ↑ q ≡ ~p V ~q

~p ↑ q ≡ ~~p V ~q ou seja p V ~q

~(p ↑ q) ≡ ~(~p V ~q)

~p ↑ ~q ≡ ~~p V ~~q ou seja p V q

Equivalências entre os conectivos

6) $(A \downarrow B) \equiv \neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$

Negação conjunta: $\downarrow$

$p \downarrow q \equiv {\sim}p \wedge {\sim}q$

${\sim}p \downarrow q \equiv$

${\sim}(p \downarrow q) \equiv$

${\sim}p \downarrow {\sim}q \equiv$

Equivalências entre os conectivos

6) $(A \downarrow B) \equiv \neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$

Negação conjunta: ↓

$p \downarrow q \equiv \sim p \wedge \sim q$

$\sim p \downarrow q \equiv \sim\sim p \wedge \sim q$ ou seja $p \wedge \sim q$

$\sim(p \downarrow q) \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$

$\sim p \downarrow \sim q \equiv \sim\sim p \wedge \sim\sim q$ ou seja $p \wedge q$

Equivalências entre os conectivos

7) $\neg A \equiv (A \uparrow A) \equiv (A \downarrow A)$
8) $(A \wedge B) \equiv ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))$
9) $(A \vee B) \equiv ((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B))$

Princípio da Dualidade

Definição de dualidade:

- **Dada uma proposição composta P formada, exclusivamente, pelos conectivos { $\neg$, $\wedge$, $\vee$ }, mas não necessariamente todos.**

- **A proposição DUAL de P, chamada de P’, se dá pela troca dos conectivos $\vee$ por $\wedge$ e $\wedge$ por $\vee$.**

A fórmula dual de $\neg((p \wedge q) \vee \neg r)$ é $\neg((p \vee q) \wedge \neg r)$

Princípio da Dualidade

Definição do Princípio de Dualidade:

- **Se A e B são fórmulas equivalentes que contêm no máximo os conectivos { ¬ , ∧ , ∨ }, então as duais respectivas A’ e B’ também são equivalentes.**

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

b) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Princípio da Dualidade

Onde aplicar o Princípio de Dualidade na lógica matemática?

1. Teoria dos Conjuntos: O Princípio da Dualidade é aplicado na teoria dos conjuntos para estabelecer relações de dualidade entre afirmações envolvendo a união e interseção de conjuntos. Por exemplo, se uma afirmação é verdadeira para a união de conjuntos, sua dualidade pode ser obtida substituindo a união pela interseção e os elementos verdadeiros por falsos, e vice-versa.

2. Álgebra de Boole: O Princípio da Dualidade é aplicado na álgebra de Boole, que é uma forma de álgebra utilizada em lógica digital e projeto de circuitos eletrônicos. Ele permite estabelecer relações de dualidade entre as operações lógicas de "E" (AND) e "OU" (OR), bem como entre as constantes "0" e "1", que representam os valores falsos e verdadeiros, respectivamente, em lógica booleana.

3. Projeto de Circuitos Lógicos: O Princípio da Dualidade é aplicado no projeto de circuitos lógicos para simplificar a implementação de circuitos e reduzir o número de portas lógicas necessárias. Por exemplo, é possível obter uma versão dual de um circuito, trocando as operações "E" por "OU" e vice-versa, e invertendo as entradas e saídas do circuito.

Propriedades

São características específicas de cada conectivo lógico.

Propriedades dos Conectivos:		
1. Comutativa:	$(A \vee B) \equiv (B \vee A)$	$(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
2. Associativa:	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
3. Distributiva:	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
4.Identidade (elemento neutro):	$(A \vee F) \equiv A$	$(A \wedge V) \equiv A$
5. Complementativas (elem. absorvente):	$(A \vee V) \equiv V$	$(A \wedge F) \equiv F$
6. De Morgan:	$\neg (A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$	$\neg (A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
7. Idempotentes:	$(A \vee A) \equiv A$	$(A \wedge A) \equiv A$
8. Dupla Negação:	$A \equiv \neg \neg A$	
9. Absorção:	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
10. Contraposição:	$(A \rightarrow B) \equiv (\neg B \rightarrow \neg A)$	
11. Prova Condicional:	$A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$	
12. Tautologia:	$(A \vee \neg A) \equiv V$	
13. Contradição:	$(A \wedge \neg A) \equiv F$	

Idempotente

Quando uma proposição composta pela mesma proposição simples é equivalente à proposição simples.

p v p <=> p

p ^ p <=> p

p	p v p
V	V
F	F

p	p ^ p
V	V
F	F

Comutativa

Quando a ordem das proposições não altera a tabela verdade.

p ^ q <=> q ^ p

p	q	p ^ q	q ^ p
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

p v q <=> q v p

p	q	p v q	q v p
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

Associativa

Usando um mesmo conectivo a ordem da resolução não altera a tabela verdade.

p v (q v r) <=> (p v q) v r

p	q	r	(q v r)	p v (q v r)	(p v q)	(p v q) v r
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	F	F

p ^ (q ^ r) <=> (p ^ q) ^ r

p	q	r	(q ^ r)	p ^ (q ^ r)	(p ^ q)	(p ^ q) ^ r
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Distributiva

Ao usar o conectivo E e OU podemos distribuir o conectivo fora do parênteses para dentro.

p ^ (q v r) <=> (p ^ q) v (p ^ r)

p v (q ^ r) <=> (p v q) ^ (p v r)

Exercícios

Transforme nas equivalentes as seguintes proposições:

1) q v q v q v q ^ r

2) (p v q) ^ (p v r)

3) p v p ^ (p v r)

Exercícios

Transforme nas equivalentes as seguintes proposições:

1) q v q v q v q ^ r
   q v q v q ^ r
   q v q ^ r
   q ^ r **(Idempotente)**

2) (p v q) ^ (p v r)
   p v (q ^ r) **(Distributiva)**

3) p v p ^ (p v r)
   p ^ (p v r) **(Idempotente)**
   (p ^ p) v (p ^ r) **(Distributiva)**
   p v (p ^ r) **(Idempotente)**

Leis de De Morgan

Primeira Lei:

- **Negar duas proposições ligadas com "E" é o mesmo que negar duas proposições e ligá-las com "OU".**

$$\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$$

Exemplo:

Não é verdade que (Maria trabalha **e** João estuda).

$\sim(p \wedge q)$

Aplicando a primeira lei:

Maria não trabalha **ou** João não estuda.

$\sim p \vee \sim q$

Exemplo:

Não é verdade que (Pedro não brinca **e** Ana dorme).

$\sim(\sim p \wedge q)$

Aplicando a primeira lei:

Pedro brinca **ou** Ana não dorme.

$p \vee \sim q$

Leis de De Morgan

Será que são equivalentes mesmo? Como confirmar?

Exemplo:

Não é verdade que (Maria trabalha **e** João estuda).
~(p ∧ q)

Aplicando a primeira lei:

Maria não trabalha **ou** João não estuda.
~p V ~q

Exemplo:

Não é verdade que (Pedro não brinca **e** Ana dorme).
~(~p ∧ q)

Aplicando a primeira lei:

Pedro brinca **ou** Ana não dorme.
p V ~q

Leis de De Morgan

<u>Segunda Lei:</u>

- **Negar duas proposições ligadas com "OU" é o mesmo que negar duas proposições e ligá-las com "E".**

$$\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

<u>Exemplo:</u>

Não é verdade que (Maria trabalha **ou** João estuda).

$\sim(p \vee q)$

Aplicando a segunda lei:

Maria não trabalha **e** João não estuda.

$\sim p \wedge \sim q$

Dupla negação

A negação da negação de uma proposição apresenta o mesmo valor lógico que a própria proposição.

$$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$$

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
V	F	V
F	V	F

$\Leftrightarrow$

Exercícios

1) A frase “Se o time jogou bem, então foi campeão” é equivalente a qual alternativa? Mostre sua demonstração através da expressão lógica formada.

a) O time jogou bem e foi campeão.
b) O time não jogou bem ou não foi campeão.
c) O time não jogou bem ou foi campeão.
d) Se o time não jogou bem, então não foi campeão.
e) O time jogou bem se, e somente se, foi campeão.

Exercícios

1) A frase “Se o time jogou bem, então foi campeão” é equivalente a qual alternativa? Mostre sua demonstração através da expressão lógica formada.

a) O time jogou bem e foi campeão.
b) O time não jogou bem ou não foi campeão.
c) O time não jogou bem ou foi campeão.
d) Se o time não jogou bem, então não foi campeão.
e) O time jogou bem se, e somente se, foi campeão.

Exercícios

2) Simplifique as expressões lógicas usando as propriedades e regras vistas até o momento.

a) $\sim(P \vee Q) \vee \sim(\sim R)$

b) $P \rightarrow (Q \vee R)$

c) $\sim(P \vee (Q \wedge R))$

Exercícios

2) Simplifique as expressões lógicas usando as propriedades e regras vistas até o momento.

a) $\sim(P \vee Q) \vee \sim(\sim R)$

$\sim(P \vee Q) \vee R$ (remove dupla negação)

$(\sim P \wedge \sim Q) \vee R$ (De Morgan)

$(R \vee \sim P) \wedge (R \vee \sim Q)$ (Distributiva)

b) $P \rightarrow (Q \vee R)$

c) $\sim(P \vee (Q \wedge R))$

Exercícios

2) Simplifique as expressões lógicas usando as propriedades e regras vistas até o momento.

a) $\sim(P \vee Q) \vee \sim(\sim R)$

~(P V Q) v R (remove dupla negação)

(~P ^ ~Q) v R (De Morgan)

(R v ~P) ^ (R v ~ Q) (Distributiva)

b) $P \rightarrow (Q \vee R)$

~P v (Q v R) (Simplificação da implicação)

(~P v Q) v (~P v R) (Distributiva)

c) $\sim(P \vee (Q \wedge R))$

Exercícios

2) Simplifique as expressões lógicas usando as propriedades e regras vistas até o momento.

a) $\sim(P \lor Q) \lor \sim(\sim R)$

~(P ∨ Q) v R (remove dupla negação)

(~P ^ ~Q) v R (De Morgan)

(R v ~P) ^ (R v ~ Q) (Distributiva)

b) $P \rightarrow (Q \lor R)$

~P v (Q v R) (Simplificação da implicação)

(~P v Q) v (~P v R) (Distributiva)

c) $\sim(P \lor (Q \land R))$

~P ^ ~(Q ^ R) (De Morgan)

~P ^ (~Q v ~R)

Exercícios

3) Simplifique as expressões lógicas usando as propriedades e regras vistas até o momento.

d) $\sim(P \leftrightarrow Q)$

e) $\sim(P \vee Q) \vee \sim R$ (usando as propriedades de Morgan e distributiva)

Exercícios

3) Simplifique as expressões lógicas usando as propriedades e regras vistas até o momento.

d) $\sim(P \leftrightarrow Q)$

$\sim [\ (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)\ ]$
$\sim [\ (\sim P \vee Q) \wedge (\sim Q \vee P)\ ]$
$\sim (\sim P \vee Q) \vee \sim (\sim Q \vee P)$
$(P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)$

e) $\sim(P \vee Q) \vee \sim R$ (usando as propriedades de Morgan e distributiva)

Exercícios

3) Simplifique as expressões lógicas usando as propriedades e regras vistas até o momento.

d) $\sim(P \leftrightarrow Q)$

$\sim [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$
$\sim [(\sim P \vee Q) \wedge (\sim Q \vee P)]$
$\sim (\sim P \vee Q) \vee \sim (\sim Q \vee P)$
$(P \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge \sim P)$

e) $\sim(P \vee Q) \vee \sim R$ (usando as propriedades de Morgan e distributiva)

$(\sim P \wedge \sim Q) \vee \sim R$
$(\sim R \vee \sim P) \wedge (\sim R \vee \sim P)$

Identidade (elemento neutro)

$$(A \vee F) \equiv A$$

F v F = F

V v F = V

$$(A \wedge V) \equiv A$$

F $\wedge$ V = F

V $\wedge$ V = V

Complementativas (elemento absorvente)

$$(A \vee V) \equiv V$$

F v V = V

V v V = V

$$(A \wedge F) \equiv F$$

F ∧ F = F

V ∧ F = F

Absorção

$$A \vee (A \wedge B) \equiv A$$

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A$$

Contraposição

$$(A \rightarrow B) \equiv (\neg B \rightarrow \neg A)$$

A $\longrightarrow$ B: Se hoje é Páscoa então amanhã é segunda-feira.

¬B $\longrightarrow$ ¬A: Se amanhã não é segunda-feira então hoje não é Páscoa

Prova Condicional

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$$

Tautologia

$$(A \vee \neg A) \equiv V$$

V v F = V

F v V = V

Contradição

$$(A \wedge \neg A) \equiv F$$

V ^ F = F

F ^ V = F

Propriedades

Propriedades dos Conectivos:		
1. Comutativa:	$(A \vee B) \equiv (B \vee A)$	$(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$
2. Associativa:	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
3. Distributiva:	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
4.Identidade (elemento neutro):	$(A \vee F) \equiv A$	$(A \wedge V) \equiv A$
5. Complementativas (elem. absorvente):	$(A \vee V) \equiv V$	$(A \wedge F) \equiv F$
6. De Morgan:	$\neg (A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$	$\neg (A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
7. Idempotentes:	$(A \vee A) \equiv A$	$(A \wedge A) \equiv A$
8. Dupla Negação:	$A \equiv \neg \neg A$	
9. Absorção:	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	$A \wedge (A \vee B) \equiv A$
10. Contraposição:	$(A \rightarrow B) \equiv (\neg B \rightarrow \neg A)$	
11. Prova Condicional:	$A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C$	
12. Tautologia:	$(A \vee \neg A) \equiv V$	
13. Contradição:	$(A \wedge \neg A) \equiv F$	

Equivalências entre os conectivos:

1) $(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$
2) $(A \rightarrow B) \equiv \neg (A \wedge \neg B)$
3) $(A \leftrightarrow B) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
4) $(A \underline{\vee} B) \equiv \neg (A \leftrightarrow B) \equiv (A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$
5) $(A \uparrow B) \equiv \neg (A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$
6) $(A \downarrow B) \equiv \neg (A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$
7) $\neg A \equiv (A \uparrow A) \equiv (A \downarrow A)$
8) $(A \wedge B) \equiv ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))$
9) $(A \vee B) \equiv ((A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B))$

Exercícios

1) Demonstre a equivalência entre as expressões a seguir.

a) $((p \wedge \sim p) \rightarrow q) \equiv V$

b) $\sim(\sim A \rightarrow B) \equiv \sim A \wedge \sim B$

Exercícios

1) Simplifique as expressões lógicas.

a) $((p \wedge \sim p) \rightarrow q) \equiv V$

$(\sim(p \wedge \neg p) \vee q)$

$(\sim p \vee \sim\sim p) \vee q$

$(\neg\, p \vee p) \vee q$ (Tautologia)

$V \vee q$ (Complementativa)

V

b) $\sim(\sim A \rightarrow B) \equiv \sim A \wedge \sim B$

$\sim(\sim\sim A \vee B)$

$\sim(A \vee B)$

$\sim A \wedge \sim B$

Exercícios

1) Simplifique as expressões lógicas.

c) $p \rightarrow q \wedge r \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

Exercícios

1) Simplifique as expressões lógicas.

c) $p \to q \wedge r \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$

~p v (q ^ r) (Substitui implicação)

(~p v q) ^ (~p v r) (Substitui implicação inversa)

(p -> q) ^ (p -> r)

PUCPR
GRUPO MARISTA

Contato:

andreza.sousa@pucpr.br