Jogos Combinatórios

Wladimir Araújo Tavares [1]

[1]Universidade Federal do Ceará - Campus de Quixadá

14 de junho de 2017

Jogo Combinatório

- 2 jogadores que jogam alternadamente e não podem passar suas vez.
- Informações perfeitas.
- Sem influência da sorte.
- Número finito de movimentos, sem empate, sempre vencedor;
- Vencedor determinado de acordo com a última jogada (sem pontuação)

Jogo Combinatório

- No jogo normal, o jogador que não pode se mover perde.
- No jogo miseré, o jogador que faz o último movimento possível perde.
- O jogo é imparcial quando as regras são as mesmas para ambos os jogadores, caso contrário, nós Chame isso de parcial.

Jogo Simples

- Existe uma pilha com n pedras. Dois jogadores se revezam e removem 1 ou 3 pedras por vez. Aquele que remover a última pedra ganha. Descubra quem é o vencedor se ambos os jogadores jogarem perfeitamente.
- Espaço de Estados: Cada estado pode ser representado por um número de pedras restantes na pilha
- Movimentos válidos de estado x: $x \to (x-1)$ ou $x \to (x-3)$, enquanto o número resultante não for negativo.
- Estado 0 é um estado perdedor.

Jogo Simples

- Sem ciclos nas transições de estados
  - Pode ser resolvido de maneira bottom-up
- Um jogador ganha se existe um maneira de forçar seu oponente perder
  - Por outro lado, perder se não existe tal maneira
- Um estado x é um estado vencedor W se
  - $(x - 1)$ é um estado perdedor
  - $(x - 3)$ é um estado perdedor
- Caso contrário, o estado x é um estado perdedor L

Jogo Simples

- Tabela de Programação Dinâmica

n	0	1	2	3	4	5	6	7
W/L	L	W	L	W	L	W	L	W

- Vê o padrão?
- Vamos provar sua conjectura

Jogo Simples

- Conjectura: Se n é ímpar então o primeiro jogador vence. Se n é par, então o segundo jogador vence.
- É verdade para o caso base $n = 0$
- Em geral,
  - Se n é ímpar, podemos remover uma pedra e deixamos um quantidade de pedras par para o oponente.
  - Se n é par então não importa o movimento realizado deixamos uma quantidade ímpar de pedras para o oponente.

Exercício

Existe uma pilha com n pedras. Dois jogadores se revezam e removem 1 ou 2 pedras por vez. Aquele que remover a última pedra ganha. Descubra quem é o vencedor se ambos os jogadores jogarem perfeitamente.

- Faça a tabela de programação dinâmica para os casos menores.
- Elabore uma conjectura.
- Tente provar sua conjectura.

CicloLândia

Em CicloLândia Jack e Jelly são dois amigos. Eles querem ir para UniversidadeCiclo por um ciclo (suponha que eles vivam na mesma casa). A distância entre UniversidadeCiclo e sua casa é 'N' km. Jack e Jelly gostam da sua colega Jenny. Eles decidiram jogar um jogo de tal forma que o vencedor terá a chance de se sentar com Jenny na escola. As regras do jogo são as seguintes:

- Inicialmente, Jelly anda no ciclo.
- Eles se alternam.
- Quando um está na bicicleta, o outro está sentado no transportador.
- Em cada passeio eles podem andar de ciclo exatamente 1, 2 ou 4 km. Não se pode andar mais do que a distância restante.
- Um que chega ao ciclo da UniversidadeCiclo terá a chance de se sentar com Jenny.

Ambos jogam otimamente. Você deve encontrar quem vencerá este jogo. Fonte: `http://practice.geeksforgeeks.org/problems/cycle-race/0`

Jogo dos números

Nikifor e Trofim jogam o seguinte jogo: eles escrevem um número inteiro positivo menor que 2.000.000.000 e se revezam um após o outro. Nikifor é o primeiro a fazer um movimento. O turno é feito pela seguinte regra: do inteiro escrito, qualquer dígito que não é zero é subtraído e o novo inteiro substitui o antigo na mesa. Por exemplo, para o número inteiro 40534, o próximo movimento pode ser: 40530, 40531 ou 40529. O vencedor é o jogador que escreve zero na mesa.

- Faça a tabela de programação dinâmica para os casos menores.
- Elabore uma conjectura.
- Tente provar sua conjectura

Fonte: `http://www.spoj.com/problems/NGM/`

Jogo da Multiplicação

Stan e Ollie jogam o jogo de multiplicação multiplicando um inteiro p por um dos números entre 2 e 9. Stan sempre começa com p = 1 e sua multiplicação, então Ollie multiplica seu número, então Stan e assim por diante. Antes que um jogo comece, eles escrevem um número inteiro de $1 < n < 4294967295$ e o vencedor é quem alcança primeiro $p \geq n$.

- Faça a tabela de programação dinâmica para os casos menores.
- Elabore uma conjectura.
- Tente provar sua conjectura

Fonte: `https://uva.onlinejudge.org/index.php?option=onlinejudge&page=show_problem&problem=788`

Bachet Game

O jogo de Bachet provavelmente é conhecido por todos, mas provavelmente não por esse nome. Inicialmente, temos n pedras na mesa. Há dois jogadores Stan e Ollie, que jogam alternadamente. Stan sempre começa. Os movimentos legais consistem na remoção de pelo menos uma, mas não mais do que k pedras da mesa. O vencedor é o que remove a última pedra. Aqui consideramos uma variação deste jogo. O número de pedras que podem ser removidas em um único movimento deve ser um membro de um certo conjunto de números de m. Entre os números de m números, há sempre 1 e, portanto, o jogo nunca fica parado.
Fonte:

- `https://uva.onlinejudge.org/index.php?option=com_onlinejudge&Itemid=8&page=show_problem&problem=1345`
- `https://kth.kattis.com/problems/bachetsgame`

Jogo do Chocolate

Existem duas caixas cheias de chocolates. Ambos podem comer L ($L \geq 1$) chocolates de qualquer caixa ou L chocolates de cada caixa em cada etapa. Eles jogam o jogo alternadamente e o último para comer o chocolate será o vencedor.
Como Bunty quer impressionar Dolly, ele quer que Dolly vença. Você deve ajudar Bunty a decidir quem deve jogar primeiro.
Suponha que ambos os jogadores jogam o jogo de forma otimizada.
Fonte: `http://practice.geeksforgeeks.org/problems/game-of-chocolates/0`

Jogo 21

- O jogo 21 é jogado como um jogo misère (jogador que faz o último movimento perder) com qualquer número de jogadores que se revezam dizendo um número.
- O primeiro jogador diz "1"e cada jogador, por sua vez, aumenta o número em 1, 2 ou 3, mas não pode exceder 21;
- O jogador forçado a dizer "21"perde.

Qual jogador tem a estratégia vencedora?

Jogo da sequencia

- Considere o seguinte jogo de dois jogadores.
- O tabuleiro do jogo consiste em uma seqüência de números inteiros positivos. Os dois jogadores se movem alternadamente.
- Quando um jogador se move, ele seleciona um número da esquerda ou da extremidade direita da sequencia. O número selecionado é excluído do quadro. O jogo acabou quando todos os números foram selecionados.
- O primeiro jogador ganha se a soma dos números que ele selecionou é maior ou igual ao selecionado pelo segundo jogador.
- O segundo jogador joga de maneira ótima.
- O primeiro jogador inicia o jogo.
- Se o quadro inicialmente contém um número par de elementos, o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora. Você deve escrever um programa que implemente a estratégia do primeiro jogador a vencer o jogo.

Fonte: `http://olympiads.win.tue.nl/ioi/ioi96/contest/ioi96g.html`

Exercício

Dois jogadores jogam um jogo começando com o inteiro N. Os movimentos legais consistem na substituição de N por $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ ou N-1. O jogador que substitui N por 0 vence. Assuma que os jogadores jogam de maneira ótima, quem é o jogador que vence o jogo?

- Prove que se o jogador joga com N ímpar vence.
- Quem vence o jogo quando N é igual a 1000.

Fibonacci Nim

- Fibonacci nim é jogado por dois jogadores, que alternam a remoção de moedas de uma pilha de moedas.
- No primeiro movimento, não é permitido tirar todas as moedas, e em cada movimento subseqüente, o número de moedas removidas dever ser um número de Fibonacci.
- De acordo com a convenção de jogo normal, o jogador que leva a última moeda ganha.

1. Faça uma tabela de programação dinâmica para os casos menores.
2. O que acontece se a quantidade de moedas inicial é um número de Fibonacci?
3. O que acontece se a quantidade de moedas inicial não é um número de Fibonacci?

Jogo Nim

- Temos n pilhas de pedras. Dois jogadores jogam alternadamente. Cada jogador escolhe uma pilha e remove qualquer quantidade de pedras da pilha. O jogador que remove a última pedra vence. Encontre o vencedor se ambos jogam perfeitamente.
- Se o número de pilhas for grande não será possível usar PD porque o espaço de estado é enorme.

Jogo Nim

- Começa com pilhas de 3, 4 e 5 pedras
- Vamos representar o estado por (A,B,C), onde A , B e C representam a quantidade de pedras de cada pilha
- Alice toma 2 pedras de A: (1, 4, 5)
- Bob leva 4 de C: (1, 4, 1)
- Alice leva 4 de B: (1, 0, 1)
- Bob leva 1 de A: (0, 0, 1)
- Alice leva 1 de C e ganha: (0, 0, 0)

Jogo Nim

- Dado pilhas de tamanho $n_1, n_2, \ldots, n_m$
- O primeiro jogador ganha se e somente se a soma-nim $n_1 \oplus n2 \oplus \ldots \oplus n_m$ é diferente de zero (é o operador XOR no meio do bit)
- Se a soma-nim for zero, o que quer que o jogador atual faça, a soma-nim do próximo estado é diferente de zero.
- Se a soma-nim for diferente de zero, é possível forçá-la a se tornar zero.
- Leitura: `http://www.geeksforgeeks.org/combinatorial-game-theory-set-4-sprague-grundy-the`

Jogo Nim

- Estado Inicial (3,4,5)

$$\begin{array}{lcl} 3 & = & 011 \\ 4 & = & 100 \\ 5 & = & 101 \\ \hline \text{soma-nim} & = & 010 \end{array}$$

- O jogador 1 precisa deixa uma soma-nim igual a zero para o segundo jogador.
- Teste se $pilha[i] \oplus soma\_nim > pilha[i]$
- Removendo 2 duas pedras da primeira pilha deixamos uma configuração zero

$$\begin{array}{lcl} 1 & = & 001 \\ 4 & = & 100 \\ 5 & = & 101 \\ \hline \text{soma-nim} & = & 000 \end{array}$$

- Qualquer escolha do segundo jogador resultará em soma-nim diferente de zero.

Jogo Nim

- Configuração Atual (1,4,5)
- O jogador 2 remove 2 pedras da segunda pilha.

$$\begin{array}{lcl} 1 & = & 001 \\ 2 & = & 010 \\ 5 & = & 101 \\ \hline \text{soma-nim} & = & 110 \end{array}$$

- O jogador 1 precisa deixa uma soma-nim igual a zero para o segundo jogador.
- Teste se $pilha[i] \oplus soma\_nim > pilha[i]$
- Remova três pedras da terceira pilha

$$\begin{array}{lcl} 1 & = & 001 \\ 2 & = & 010 \\ 3 & = & 011 \\ \hline \text{soma-nim} & = & 000 \end{array}$$

- Qualquer escolha do segundo jogador resultará em soma-nim diferente de zero.

Jogo Nim

- Configuração Atual (1,2,3)
- O jogador 2 remove 2 pedras da segunda pilha.

$$
\begin{array}{lcl}
1 & = & 001 \\
0 & = & 000 \\
3 & = & 011 \\
\hline
\text{soma-nim} & = & 010
\end{array}
$$

- O jogador 1 precisa deixa uma soma-nim igual a zero para o segundo jogador.
- Teste se $pilha[i] \oplus soma\_nim > pilha[i]$
- Remova duas pedras da terceira pilha

$$
\begin{array}{lcl}
1 & = & 001 \\
0 & = & 000 \\
1 & = & 001 \\
\hline
\text{soma-nim} & = & 000
\end{array}
$$

- (1,0,1) Configuração perdedora para o jogador 2.

Last Year at Marienbad

- O jogo começa com 6 fileiras de palitos. A primeira fileira contém 1 palito, a segunda contém 3, a terceira 5, a quarta 7, a quinta 9 e a sexta 11. Segue abaixo um desenho com o esquema do jogo inicial.
- articipam do jogo duas pessoas, que alternam seus movimentos. Em cada jogada, uma pessoa deve tirar uma quantidade diferente de zero de palitos do tabuleiro. Todos os palitos retirados em uma jogada devem pertencer à mesma fileira. Assim, se uma fileira contém k palitos e um jogador decide retirar palitos dessa fileira em sua jogada atual, ele tem k opções distintas de jogadas (poderá remover entre 1 e k palitos).
- Se após uma jogada o tabuleiro ficar completamente vazio (i.e., sem palitos em qualquer uma das 6 fileiras), o jogador que realizou a última jogada (o jogador que removeu os últimos palitos) perde o jogo.

Fonte: `http://br.spoj.com/problems/MARIENBA/`

Número Grundy

- Para cada jogo, nós computamos o número Grundy.
- O primeiro jogador vence se somente se o XOR de todos os números Grundy é diferente de zero.
- Por exemplo, o número Grundy do jogo nim com uma pilha é igual ao número de pedras da pilha.

Número Grundy

- Seja S um estado e $T_1, T_2, \ldots, T_m$ os estados alcançados por S usando um único movimento.
- O número Grundy $g(S)$ de S é o menor inteiro não negativo que não aparece em $\{g(T_1), g(T_2), \ldots, g(T_m)\}$
- O número Grundy do estado perdedor é zero.

Número Grundy

- Considere o jogo nim com uma pilha
- $g(0) = 0$, porque é um estado perdedor
- O estado 0 é alcançado pelo estado 1 então o menor inteiro não-negativo que não aparece em $\{g(0)\} = 1$. Logo, g(1)=1.
- O número grundy do estado n é $g(n) = n$

Número Grundy

- Considere a variante do jogo: 1 ou 2 pedras pode ser removida em cada turno.
- A tabela de número Grundy

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$g(n)$	0	1	2	0	1	2	0	1

Número Grundy

```
int calculateGrundy(int n){
    if (n == 0) return (0);
    int moves = [] //
    unordered_set<int> Set; // A Hash Table
    for (int i=0; i< n; i++)
            Set.insert(calculateGrundy( moves[i] ));
    int Mex = 0;
    while (Set.find(Mex) != Set.end())
        Mex++;
    return (Mex);
}
```

Número Grundy

- A tabela de número Grundy

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$g(n)$	0	1	2	0	1	2	0	1

- Quem vai ganhar se existe três pilhas de pedras (2,4,5)?
- $g(2) \oplus g(4) \oplus g(5) = 2 \oplus 1 \oplus 2 = 1$
- O jogador 1 tem uma estratégia vencedora.
- O jogador 1 começa removendo 4 pedras da segunda pilha. Deixando a configuração (2,0,5) para o segundo jogador ($2 \oplus 0 \oplus 2 = 0$)
- Se o jogador 2 remover duas pedras da primeira pilha, o jogador 1 vence.
- Suponha que o jogador 2 remova apenas uma pedra da primeira pilha deixando (1,0,5)

Número Grundy

- A tabela de número Grundy

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$g(n)$	0	1	2	0	1	2	0	1

- Quem vai ganhar se existe três pilhas de pedras (1,0,5)?
- $g(1) \oplus g(0) \oplus g(5) = 1 \oplus 0 \oplus 2 = 3$
- O jogador 1 tem uma estratégia vencedora.
- O jogador 1 começa removendo 1 pedra da terceira pilha. Deixando a configuração (1,0,4) para o segundo jogador ($1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$)
- Se o jogador 2 remover 1 pedra da primeira pilha, então o jogador 1 vence em (0,0,4).
- Se o jogador 2 remova 1 pedra da terceira pilha , então o jogador 1 vence em (1,0,3).
- Suponha que o jogador 2 remova 2 pedras da terceira pilha.

Número Grundy

- A tabela de número Grundy

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$g(n)$	0	1	2	0	1	2	0	1

- Quem vai ganhar se existe três pilhas de pedras (1,0,2)?
- $g(1) \oplus g(0) \oplus g(5) = 1 \oplus 0 \oplus 2 = 3$
- O jogador 1 tem uma estratégia vencedora.
- O jogador 1 começa removendo 1 pedra da terceira pilha. Deixando a configuração (1,0,1) para o segundo jogador ($1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$)
- Se o jogador 2 remover 1 pedra da primeira pilha, então o jogador 1 vence em (0,0,1).
- Se o jogador 2 remova 1 pedra da terceira pilha , então o jogador 1 vence em (1,0,0).

Jogo da Divisão

O jogo começa com um número n. O jogador pode substitui o número pelo piso da divisão de n por 2, 3 ou 6. Se o número torna-se zero, ele é removido. Os jogadores jogam alternadamente. O jogador que realiza o último movimento vence. Qual é o jogador que vence?

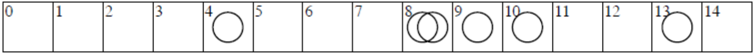
Número Grundy

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
int calculateMex(unordered_set<int> Set){
    int Mex = 0;
    while (Set.find(Mex) != Set.end()) Mex++;
    return (Mex);
}

int calculateGrundy (int n){
    if (n == 0)
        return (0);
    unordered_set<int> Set; // A Hash Table
    Set.insert(calculateGrundy(n/2));
    Set.insert(calculateGrundy(n/3));
    Set.insert(calculateGrundy(n/6));
    return (calculateMex(Set));
}
int main(){
    int n = 10;
    printf("%d", calculateGrundy (n));
}
```

Nimble

Nimble é jogado em um tabuleiro consistindo de uma linha de quadrados rotulados: $0, 1, 2, 3, \ldots$. Um número finito de moedas é colocado nos quadrados, possivelmente mais de uma moeda em um único quadrado. Um movimento consiste em tomar uma das moedas e movê-la para qualquer quadrado para a esquerda, possivelmente para um quadrado que já contém uma ou mais moedas. Os jogadores alternam movimentos e o jogo termina quando todas as moedas estão no quadrado com 0. O último jogador a mover ganha.



Fonte:
`https://www.hackerrank.com/challenges/nimble-game-1`

Take-and-Break Games

Suponha que cada jogador, por sua vez, seja permitido:

- remover qualquer número de fichas de uma pilha como no nim, ou
- dividir uma pilha contendo pelo menos duas fichas em duas pilhas não vazias (não são removidas as fichas).

1. Calcule o número grundy para $n \leq 12$
2. Considerando 3 pilhas com 2, 5 e 7 moedas. Qual jogador tem a estratégia vencedora?

Exercícios

- http://www.spoj.com/problems/MCOINS/
- http://www.spoj.com/problems/EALP1/
- http://www.spoj.com/problems/TEAMNIM/
- http://www.spoj.com/problems/HUBULLU/
- http://www.spoj.com/problems/QCJ3/
- http://codeforces.com/problemset/problem/346/A
- http://www.spoj.com/problems/NIMGAME/
- http://www.spoj.com/problems/MATGAME/
- http://codeforces.com/problemset/problem/276/B
- https://community.topcoder.com/stat?c=problem_statement&pm=7424
- https://www.codechef.com/problems/IITK1P06
- https://www.codechef.com/problems/TWONIM