Uso de jogos para o ensino de Indução em Matemática Discreta

Gildard Chlodulfe Adebayo Myehouenou, Wladimir Araújo Tavares

Universidade Federal do Ceará (UFC) – Campus de Quixadá
Quixadá – CE – Brazil

gildardmhn93@gmail.com, wladimirufc@gmail.com

Abstract. *This paper aims to show how the use of games can help in teaching induction proof in Discrete Mathematics and make classes more fun for students.*

Resumo. *Este artigo matemático tem como objetivo mostrar como o uso de jogos pode ajudar no ensino da indução na disciplina Matemática Discreta e tornar as aulas mais divertidas para os alunos.*

1. Introdução

Na disciplina de Matemática Discreta, vários assuntos são abordados, como por exemplo, métodos de provas (prova direta, pela contrapositiva, por casos, por absurdo, por indução, etc), teoria dos números, teoria dos conjuntos, funções, relações entre outros. A prova por indução merece uma atenção especial uma vez que ela permite provar propriedades sobre conjuntos indutivamente definidos como o conjunto dos números naturais, conjunto de fórmulas lógicas, árvores binárias, etc. Neste artigo, apresentaremos a utilização da indução para achar estratégias vencedoras no Jogo Chomp e mostraremos umas das suas variantes. Das várias variantes que existem, mostraremos as variantes de (*n * n), (2 * n) e (3 * n)*. Para que o assunto seja mais divertido, deixaremos a variante (*n * n * n)* aberta para que os alunos tentem encontrar a solução. Acreditamos que os jogos despertam um atração natural nos alunos por ter uma componente lúdica.

O artigo está organizado da maneira seguinte. Na Seção 2, faremos uma rápida revisão do princípio da Indução Fraca e Forte da matemática. Na Seção 3, apresentaremos três variantes do Jogo Chomp e mostraremos por indução que o primeiro jogador sempre tem uma estratégia vencedora.

2. Indução Matemática (Fraca e Forte)

2.1 Indução Fraca

A **Indução Fraca** é um método de prova matemática usado para demonstrar a verdade de um número infinito de proposições. A **Indução Fraca** prova que um enunciado vale para todos os números n e consiste em dois passos:

1. *A **base:** mostrar que o enunciado vale para um **k = c***

2. *O **passo indutivo:** mostrar que o enunciado vale para um **k**, então o mesmo enunciado vale para **k + 1**. Logo o enunciado seria verdadeiro para qualquer inteiro positivo.*

Esse método funciona provando que o enunciado é verdadeiro para um valor inicial, e então provando que o processo usado para ir de um valor para o próximo é válido. Se ambas as coisas são provadas, então qualquer valor pode ser obtido através da repetição desse processo. Para entender porque os dois passos são suficientes, é útil no **efeito dominó**: se você tem uma longa fila de dominós em pé e você puder assegurar que:

1. O primeiro dominó cairá.
2. Sempre que um dominó cair, seu próximo vizinho também cairá

Assim, você pode concluir que *todos* os dominós cairão

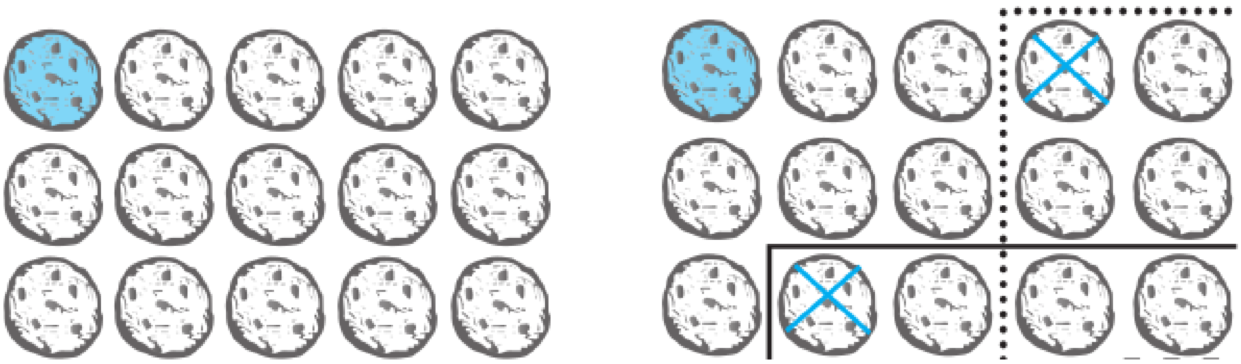
2.2 Indução Forte

Em algumas situações, não conseguimos realizar uma demonstração por *Indução* usando apenas a *Indução Fraca*. Nesses casos a **Indução Forte** é absolutamente necessário. A Indução Forte segue os passos seguintes:

1. *A **base:** mostrar que o enunciado vale para um* ***k = c***

2. *O **passo indutivo:** mostrar que para todo **k,** se o enunciado é verdadeiro para um **r** onde $1 \leq r \leq k$, então ele é verdadeiro para um **k + 1.** Logo o enunciado seria verdadeiro para qualquer inteiro positivo.*

3. Jogo Chomp



Chomp é um jogo para dois jogadores. Nesse jogo, biscoitos são dispostos em uma grade retangular. O biscoito na ponta esquerda é envenenado. Os dois jogadores fazem movimentos alternadamente, um tem de comer um biscoito restante, junto com todos os biscoitos a direita e/ou abaixo deste. O perdedor é o jogador que não tiver escolha e tiver de comer o biscoito envenenado.

3.1 Grade *n * n*

Para mostrar que o primeiro jogador possui uma estratégia vencedora, vamos assumir que a primeira jogada do primeiro jogador será escolher o biscoito na posição (2,2).

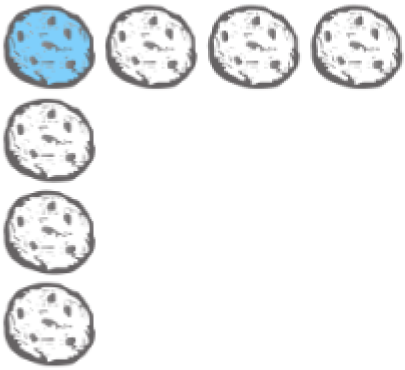
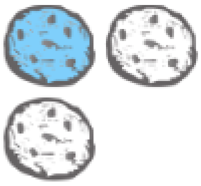
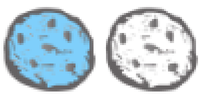
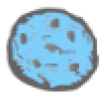


Figura 1: O primeiro jogador realiza sua primeira jogada em uma grade 4x4.

Vamos mostrar por indução que para $n >= 1$, o segundo jogador sempre perde quando recebe uma configuração em “L”

Passo base:

Para $n = 1$, o segundo jogador é obrigado a comer o biscoito envenenado. Para $n=2$, temos o seguinte caso:

		
O segundo jogador recebe a seguinte configuração	Se o segundo jogador seleciona o biscoito na posição (2,1).	O primeiro jogador seleciona o biscoito na posição (1,2)

De maneira análoga, quando o segundo jogador seleciona o biscoito na posição (1,2). O primeiro jogador seleciona o biscoito na posição (2,1). Deixando o biscoito envenenado para o segundo jogador.

Passo indutivo:

Vamos assumir a hipótese que para uma configuração em *“L” com tamanho r*, onde $1 < r \leq n$, o segundo jogador sempre perde.

Vamos mostrar que para uma configuração em “L” com tamanho $n+1$, o segundo jogador sempre perde. Se o segundo jogador escolher o biscoito na posição (1,m) com $1 < m \leq n+1$. Então o primeiro jogador escolherá o biscoito na posição (m,1). Dessa maneira, o primeiro jogador deixa para o segundo jogador uma configuração em “L” com tamanho $m-1$. Por hipótese de indução, o segundo jogador sempre perde em uma configuração em “L” com tamanho $m-1$.

3.2 Grade *2 * n*

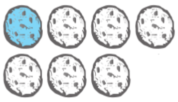
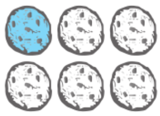
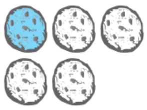
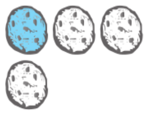
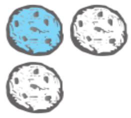
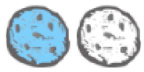
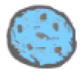
Para mostrar que o primeiro jogador possui uma estratégia vencedora, vamos assumir que a primeira jogada do primeiro jogador será escolher o biscoito na posição (2, n).

Figura 2: O primeiro jogador realiza sua primeira jogada em uma grade 2x4.

Vamos mostrar por indução que para n >= 1, o segundo jogador sempre perde quando recebe uma configuração em igual da figura 2.

Passo base:

Quando *n = 1,* o segundo jogador é obrigado a comer o biscoito envenenado. Para *n = 4* temos o caso seguinte:

						
O segundo jogador recebe a seguinte configuração	Se o segundo jogador seleciona o biscoito na posição (1,4)	O primeiro jogador seleciona o biscoito na posição (2,3)	Se o segundo jogador seleciona o biscoito na posição (2,2)	O primeiro jogador seleciona o biscoito na posição (1,3)	Se o segundo jogador seleciona o biscoito na posição (2,1).	O primeiro jogador seleciona o biscoito na posição (1,2)

Passo indutivo:

Vamos assumir que para a configuração na figura 2 com tamanho *r* onde $1 < r \leq n,$ o segundo jogador sempre perde.

Vamos mostrar que para a configuração na figura 2 com tamanho $n + 1$ o segundo jogador sempre perde. Se o segundo jogador escolher o biscoito na posição *(1, m)* com $1 < m \leq n + 1$, então o primeiro jogador escolherá o biscoito na posição *(2, m – 1).* Dessa maneira, o primeiro jogador deixa para o segundo jogador uma configuração igual da figura 2 com tamanho *m-1 .* Logo por hipótese de indução o segundo jogador sempre perde em uma configuração igual da figura 2 com tamanho *m-1*. Se o segundo jogador escolher o biscoito na posição *(2, m),* então o primeiro jogador escolherá o biscoito na posição *(1, m + 1).* Dessa maneira, o primeiro jogador deixa para o segundo jogador uma configuração igual da figura 2 com tamanho *m-1 .* Logo por hipótese de indução o segundo jogador sempre perde em uma configuração igual da figura 2 com tamanho *m-1*.

3.3 Grade *3 * n*

Para mostrar que o primeiro jogador possui uma estratégia vencedora, vamos assumir que a primeira jogada do primeiro jogador será escolher o biscoito na posição (3, 1) em uma grade 3x5.

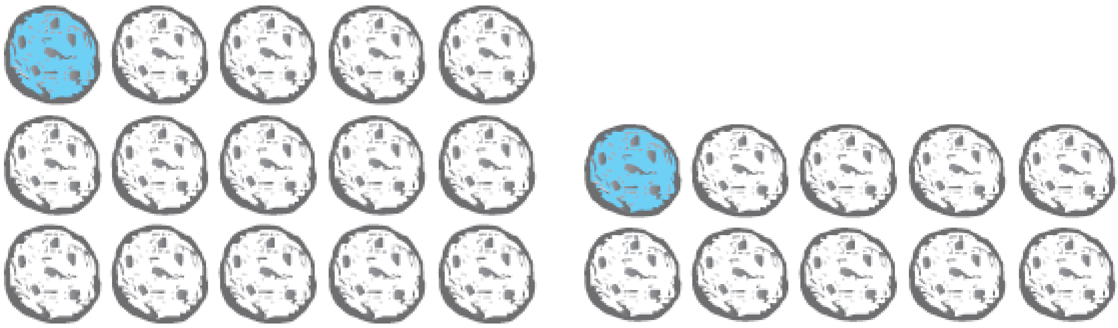
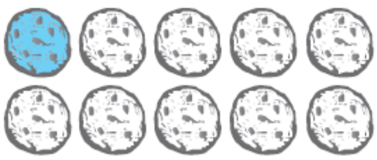
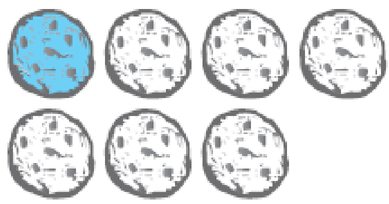


Figura 3: Na esquerda a configuração inicial do jogo, e na direita a configuração depois da primeiro jogada do primeiro jogador.

Vamos mostrar por indução que para n >= 1, o primeiro jogador pode ganhar quando recebe uma configuração em igual da figura 3.

Quando *n = 1,* o primeiro jogador come o biscoito na posição (2,1), o segundo jogador é obrigado a comer o biscoito envenenado. Para *n = 5* temos o caso seguinte:

		
O segundo jogador recebe a seguinte configuração	Se o segundo jogador seleciona o biscoito na posição (1,5)	O primeiro jogador seleciona o biscoito na posição (2,4). Desse jeito, caímos naquela configuração do exemplo da grade (2 * n) e o primeiro jogador ganha.

Passo indutivo:
Vamos assumir que para a configuração na figura 3 com tamanho *r* onde $1 < r \leq n$, o segundo jogador sempre perde.
Vamos mostrar que para a configuração na figura 3 com tamanho $n + 1$ o segundo jogador sempre perde. Se o segundo jogador escolher o biscoito na posição *(1, m)* com $1 < m \leq n + 1$, então o primeiro jogador escolherá o biscoito na posição *(2, m – 1).* Dessa maneira, o jogo fica na mesma configuração do exemplo da grade $2 * n$ que já provamos, logo o primeiro jogador ganha.

4. Conclusão

Usar situações do dia a dia do aluno como jogos, pode ajudar bastante o aluno a pensar de maneira mais simples na hora de aplicar os teoremas dos diferentes tipos de indução que ele aprende na disciplina de Matemática Discreta. Desse jeito, ele facilmente relaciona a teoria com a prática e de maneira divertida. O aluno desenvolve a curiosidade de aprender mais jogos e achar estratégias vencedoras nesses jogos com a indução. Na sala de aula, o professor poderia desafiar os alunos para achar uma estratégia vencedora para uma grade de (n* n * n).

Referências

Kenneth H. Rosen (2012), “The foundation: Logic and Proof”, “Induction and Recursion”, in: Discrete Mathematics and Its Applications, Editado por McGraw Hill, New York USA.

Rosilaine Sanches Martins (2015), “O princípio da Indução Finita e jogos para o ensino de funções”, https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/138456/000863145.pdf?sequence=1

Thiago Henrique Santos Torres (2017), “Contribuição dos jogos na compreensão de conceitos matemáticos”, http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/31192/1/2017_ThiagoHenriqueSantosTorres.pdf