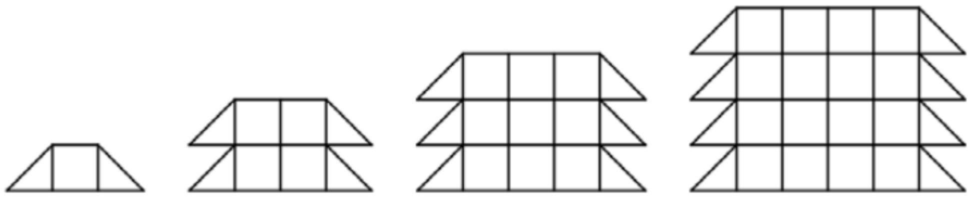
Atividade de Estrutura de Dados
Semana 1

1. Considere a seguinte sequência de imagens:

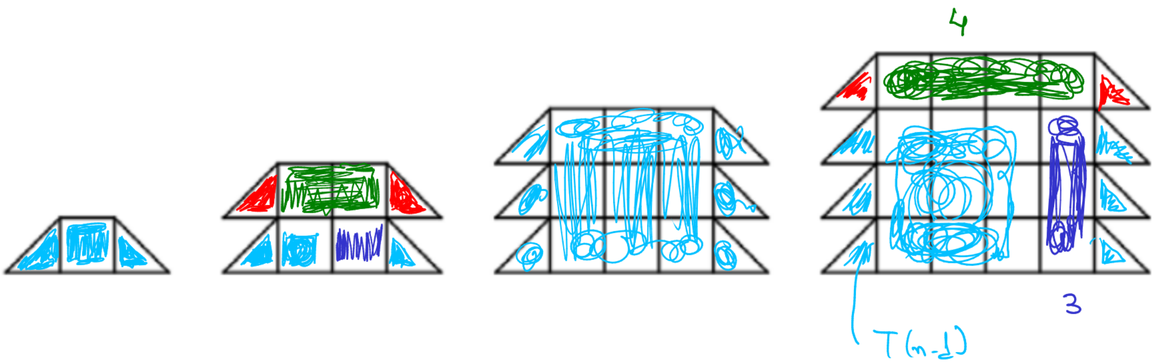


Cada imagem na sequência é formada por um número de peças (uma peça pode ser um quadrado ou triângulo).

A tabela seguinte apresenta uma relação entre a ordem da imagem na sequência e o número total de peças utilizadas:

ordem	1	2	3	4
número de peças	3	8	15	24

Descreva uma relação recorrente entre a ordem da imagem na sequência e o número de total de peças.



Observe que podemos obter a imagem da ordem 2, a partir da imagem de ordem 1 adicionando 2 triângulos e 3 quadrados. De maneira geral, podemos obter uma imagem de ordem n, a partir da imagem de ordem $n-1$ adicionando 2 triângulos, n quadrados da primeira linha e $n-1$ quadrados da última coluna. Logo,

$$T(n) = \begin{cases} 3 & n = 1 \\ T(n-1) + n + n - 1 + 2 & n \geq 2 \end{cases}$$

Solução alternativa 1:

$$T(n) = \begin{cases} 3 & n = 1 \\ T(n-1) + 2n + 1 & n \geq 2 \end{cases}$$

Solução alternativa 2:

$$T(n) = \begin{cases} 3 & n = 1 \\ 8 & n = 2 \\ T(n-1) + T(n-1) - T(n-2) & n \geq 2 \end{cases}$$

Solução alternativa 3:

$$T(n) = \begin{cases} 3 & n = 1 \\ \left(\dfrac{T(n-1)}{n-1}\right) n + n & n \geq 2 \end{cases}$$

Podemos provar usando indução que a fórmula fechada para as recorrências acima é:

$$T(n) = n^2 + 2n$$

Caso Base: $n = 1$

$$T(1) \quad = \quad 1^2 + 2(1) = 3$$

Mostramos que a fórmula fechada equivale ao caso base da recorrência.

Passo Indutivo: Vamos mostrar que se assumimos que a fórmula fechada coincide com recorrência vale para $n = k$, então ela também coincide para $n = k + 1$

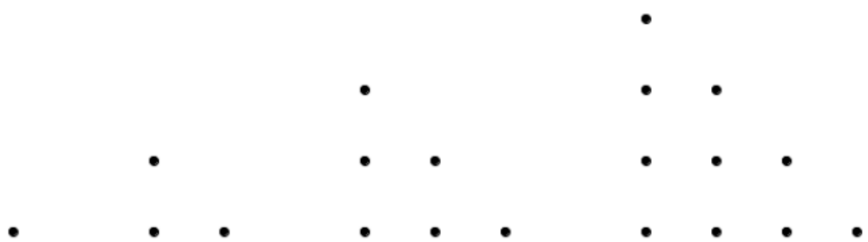
Hipótese de Indução:

Assuma que $T(k) = k^2 + 2k$ para algum $k \geq 1$

Passo Indutivo: Vamos mostrar que a recorrência coincide com a fórmula fechada para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + 2(k+1) + 1 && \text{(Pela relação de recorrência)} \\ T(k+1) &= k^2 + 2k + 2(k+1) + 1 && \text{(Pela hipótese de Indução)} \\ T(k+1) &= k^2 + 2k + 1 + 2(k+1) && \text{(Reagrupando)} \\ T(k+1) &= (k+1)^2 + 2(k+1) \end{aligned}$$

2. Considere a seguinte sequência de imagens:



Cada imagem da sequência é formada por pontos em uma forma triangular.

A tabela seguinte apresenta uma relação entre a ordem da imagem na sequência e o número total de pontos:

ordem	1	2	3	4
número de pontos	1	3	6	10

Descreva uma relação recorrente entre a ordem da imagem na sequência e o número total de poentos.

Observe que podemos obter a imagem da ordem 2, a partir da imagem de ordem 1 adicionando 2 pontos. De maneira geral, podemos obter uma imagem de ordem n, a partir da imagem de ordem $n - 1$ adicionando n pontos da diagonal. Logo,

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(n-1) + n & n \geq 2 \end{cases}$$

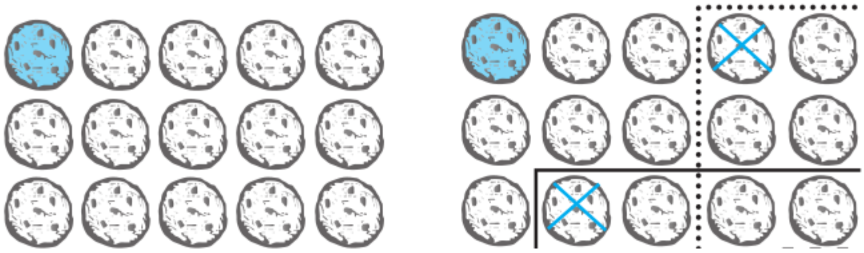
3. Suponha que duas pessoas participam de um jogo, e que cada uma na sua vez toma um, duas, três ou quatro pedras de uma pilha que contém 17 pedras. A pessoa que remove a última pedra ganha o jogo. Mostre que o primeiro jogador vence, não importando o que o segundo jogador faça. Em seguida, estenda a sua estratégia vencedora para n qualquer.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
W	W	W	W	L	W	W	W	W	L	W	W	W	W	L	W	W

A estratégia vencedora para o jogador 1 é sempre remover uma certa quantidade de pedras deixando sempre uma quantidade de pedras múltiplo de 5 para o segundo jogador. Para n = 17, ele começa removendo 2 pedras e deixando 15 pedras para o segundo jogador. Em seguida, se o jogador 2 remove k pedras, entao o jogador 1 remove 5-k pedras. Utilizando essa estratégia, a quantidade de pedras na pilha deixadas para o segundo jogador será sempre um múltiplo de 5.

Para um n qualquer que n não é múltiplo de 5, o jogador 1 deve começar removendo n **mod** 5 pedras. Em seguida, se o jogador 2 remove k pedras então o jogador 1 remove 5-k pedras. Se n for um múltiplo de 5, o primeiro jogador não tem uma estratégia vencedora.

4. (Desafio)Chomp é um jogo para dois jogadores. Nesse jogo, biscoitos são dispostos em uma grade retangular. O biscoito na ponta esquerda é envenenado. Os dois jogadores fazem movimentos alternadamente, um tem de comer um biscoito restante, junto com todos os biscoitos a direita e/ou abaixo deste. O perdedor é o jogador que não tiver escolha e tiver de comer o biscoito envenenado.



Na Figura acima, tem o jogo Chomp para uma grade 3 x 5, se o primeiro jogador escolhe o biscoito (1,4) então ele deverá comer todos os biscoitos à direita e abaixo da posição escolhida. A Figura destaca os biscoitos que devem ser comido pelo jogador 1.

Apresente uma estratégia vencedora o primeiro jogador para uma grade retangular 3 x 5.

Preencha uma tabela 3 x 5 para registrar as posições vencedora e perdedora para o primeiro jogador.

O primeiro jogador possui uma estratégia vencedora para a grade 1 x m para todo m. Começando retirando o biscoito na posição (1,2) e deixando o biscoito envenenado para o segundo jogador.
O primeiro jogador possui uma estratégia vencedora para a grade 2 x m para todo m. Começando retirando o biscoito na posição (2,n).
O primeiro jogador possui uma estratégia vencedora para a grade 3 x m para todo m.

Consulte: https://github.com/WladimirTavares/ED2022/blob/main/extra/Uso%20de%20jogos%20para%20o%20ensino%20de%20Indu%C3%A7%C3%A3o%20em%20Matem%C3%A1tica%20Discreta.pdf

$n \times m$	1	2	3	4	5
1	L	W	W	W	W
2	W	W	W	W	W
3	W	W	W	W	W