Equação Linear Diofantina na Programação Competitiva

Michael Douglas Gonçalves Nóbrega[1],
Wladimir Araújo Tavares[1], **Paulo de Tarso Guerra Oliveira**[1]

[1]Universidade Federal do Ceará (UFC) – Campus Quixadá

dougnobrega@alu.ufc.br, wladimir@lia.ufc.br, paulodetarso@ufc.br

Abstract. *In this article, we will present some applications of the competitive programming linear diophantine equation, focusing on demonstrating how to solve some classical problems and algorithms that returned a valid solution to the problem.*

Resumo. *Neste artigo será apresentado algumas aplicações da equação linear diofantina na programação competitiva focando em demonstrar como resolver alguns problemas clássicos e algoritmos que retornam uma solução valida para o problema.*

1. Introdução

A equação linear diofantina é uma equação composta pela soma de dois monômios de grau um, o qual duas variáveis que multiplicam os respectivos monômios assumem apenas valores inteiros. No exemplo abaixo temos uma equação linear diofantina de forma geral, sendo as variáveis x, y e c com os monômios a e b .

$$x \cdot a + y \cdot b = c \tag{1}$$

Vários problemas computacionais podem ser modelados com o auxílio da equação diofantina.

Problema 1 De quantas formas é possível sacar R$ 110,00 em um caixa eletrônico que dispõe apenas de cédulas de R$ 10,00 e de R$ 20,00?

Considerando x a quantidade de cédulas de R$ 10,00 e y a quantidade de cédulas de R$ 20,00. O problema pode ser estabelecido da seguinte maneira, quantas soluções inteiras tem a seguinte equação $10x + 20y = 110$

Neste artigo vamos apresentar soluções para os seguintes problemas clássicos abaixo.

- Encontrar uma solução válida;
- Encontrar todas as soluções válidas.
- Encontrar a solução com menor valor de $x + y$.

Neste artigo, não vamos considerar o caso onde a e b são iguais a zero. O motivo disso é que quando o a e o b são iguais a zero dependendo do valor de c pode existir infinitas soluções ou nenhuma solução.

2. Conceitos de Teoria dos números

Considere o seguinte problema:

Problema 2 Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês uma certa quantia para a compra de CDs ou DVDs. Se um CD custa R$ 12,00 e um DVD R$ 16,00, quais são as várias possibilidades de aquisição de um deles ou de ambos, gastando-se exatamente R$ 70,00? E qual a equação que representa este problema? [Wagner Marcelo Pommer 2008].

Considerando x sendo a quantidade de CD e y a quantidade de DVD. A equação que representa este problema é $12x + 16y = 70$. Podemos dividir todos os coeficientes por 2, obtendo $6x + 8y = 35$. Neste caso, o lado esquerdo pode ser dividido por 2 e o lado direito não. Logo, este problema não tem solução.

Voltando ao **Problema 1** que pode ser representado pela equação $10x+20y = 110$. Ela pode ser simplificada para a equação $x+2y = 11$. Neste caso, a solução desta equação será obtida a partir da solução de uma outra equação $x_g + 2y_g = 1$. Neste caso, $x_g = -1$ e $y_g = 1$. Observe que $x = 11x_g$ e $y = 11y_g$ é uma solução da equação $x + 2y = 11$.

Após a simplificação da equação, podemos chegar em duas situações:

- O máximo divisor comum de a e b, denotado por g, não divide c. Então a equação não tem solução.
- O máximo divisor comum de a e b, denotado por g, divide c. Neste caso, precisamos resolver a equação do tipo $ax + by = g$

Para encontrar a solução da equação do tipo $ax + by = g$, necessita-se ter um conhecimento prévio do algoritmo de Euclides estendido. O algoritmo de Euclides estendido fornece os coeficientes x_g e y_g da seguinte equação assumindo que o valor de a e b são positivos:

$$x_g \cdot a + y_g \cdot b = g \tag{2}$$

A variável g corresponde ao valor do maior divisor comum entre a e b.

As variáveis x_g e y_g correspondem aos coeficientes que vão satisfazer essa equação. Nota-se que essa equação é uma equação linear diofantina. Portanto o x_g e y_g são os valores que fornece a solução da equação se ela tivesse aquele formato(2).

Sabendo os valores de x_g e y_g, é possível transformar a equação(2) na equação(1). Para isso é necessário que $g|c$, ou seja, o c é divisível por g. Caso isso seja verdade é suficiente apenas multiplicar toda a equação(2) por $\frac{c}{g}$. Caso contrario, não vai existir x e y que satisfaçam essa equação. Logo, se $g|c$ a nova equação terá o seguinte formato.

$$\frac{c}{g} \cdot x_g \cdot a + \frac{c}{g} \cdot y_g \cdot b = \frac{c}{g} \cdot g \tag{3}$$

Fazendo as multiplicações obtêm-se:

$$(\frac{c}{g} \cdot x_g) \cdot a + (\frac{c}{g} \cdot y_g) \cdot b = c \tag{4}$$

Com isso o x e y que soluciona a equação(1) foi descoberto. Onde:

$$x = \frac{c}{g} \cdot x_g \tag{5}$$

$$y = \frac{c}{g} \cdot y_g \tag{6}$$

3. Encontrando uma solução válida

Para encontrar uma solução qualquer válida necessita-se apenas da redução do problema.

Algorithm 1 EUCLIDES

Entrada: a, b
Saída: x_g, y_g, g

início
  se a == *0* **então**
    retorna 0, 1, b
  x1, y1, g1 = Euclides($b\%a$, a);
  x = y1 - ($\frac{b}{a}$) $\cdot\, x1$;
  y = x1;
  g = g1;
  retorna *x, y, g*

Algorithm 2 ELD

Entrada: a, b,c
Saída: x_g, y_g, g

início
  x, y, g = Euclides(abs(a), abs(b));
  se $c\%g! = 0$ **então**
    retorna 0, 0, -1
  $x = x \cdot \frac{c}{g}$;
  $y = y \cdot \frac{c}{g}$;
  se $a < 0$ **então**
    x = - x;
  se $b < 0$ **então**
    y = - y;
  retorna *x, y, g*

4. Encontrando todas as soluções válidas

Calculando o valor de uma solução válida é possível encontrar todas as soluções que o valor de x e y podem receber. Para isso a equação(7) tem que manter a igualdade enquanto os valores de x e y são modificados.

$$x \cdot a + y \cdot b = c \tag{7}$$

Vamos definir g sendo o maior divisor comum entre a e b.
Uma alternativa para gerar todas as soluções é somar $\frac{a}{g}$ dos dois lados da equação. Obtendo então:

$$x \cdot a + y \cdot b + \frac{a \cdot b}{g} = c + \frac{a \cdot b}{g} \tag{8}$$

$$x \cdot a + \frac{a \cdot b}{g} + y \cdot b - \frac{a \cdot b}{g} = c \tag{9}$$

$$(x + \frac{b}{g}) \cdot a + (y - \frac{a}{g}) \cdot b = c \tag{10}$$

Logo, para gerar todas as soluções de x e y utiliza-se a seguinte fórmula. Apenas escolhendo o valor de k, já que o cálculo pode ser repetido infinitas vezes.

$$x_0 = x + k \cdot \frac{b}{g} \tag{11}$$

$$y_0 = y - k \cdot \frac{a}{g} \tag{12}$$

5. Encontrando a solução com menor valor de x + y

Para gerar a solução com menor valor de x + y é preciso escolher o k que melhor satisfará a equação tal que $x = x_0 + k \cdot \frac{b}{g} e y = y_0 - k \cdot \frac{a}{g}$.

$$x + y = x_0 + k \cdot \frac{b}{g} + y_0 - k \cdot \frac{a}{g} \tag{13}$$

Reorganizando a equação.

$$x_0 + y_0 + k \cdot (\frac{b}{g} - \frac{a}{g}) \tag{14}$$

$$x_0 + y_0 + k \cdot \frac{b - a}{g} \tag{15}$$

Com isso, nota-se que dependendo dos valores de a e b a escolha para k muda. Então, se

$b > a$, a melhor solução é escolher o menor valor de k possível. A razão disso é $\frac{b-a}{g}$ que resulta em um valor positivo. Caso $b = a$, todas as soluções vão ter o mesmo valor de $x + y$ independente do k escolhido, e o último caso se $b < a$, o melhor a se fazer é escolher o maior k possível, já que a fração resultará em um valor negativo e irá reduzir o valor da soma de $x + y$.

6. Conclusão

A disciplina de Matemática Discreta apresenta algumas possíveis aplicações da equação linear Diofantina, mas através do estudo aprofundado fica mais claro como aplicar na programação competitiva e como modelar o problema para solucioná-lo com está ferramenta.

Referências

Wagner Marcelo Pommer, S. D. A. M. (2008). Equações diofantinas lineares: Um desafio motivador para alunos do ensino médio.