# Modalidade Iniciação - Nível Júnior - Fase 2

Projeto Semeando Talentos<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Ceará - Campus de Quixadá

Oito alunos foram selecionados para a equipe de Programação de Computadores da escola, e treinarão aos sábados de manhã por um mês.

Cada aluno vai treinar usando um computador da escola, por duas horas seguidas. Como eles têm outras atividades no sábado de manhã, o professor pediu que cada um marcasse numa tabela um período que poderia treinar. A tabela abaixo mostra o planejamento dos alunos, onde um X indica que o aluno vai treinar naquele horário.

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	×	х				
Pedro				Х	×	
Clara			X	Х		
Joana				Х	×	
André					×	х
Marcos		×	×			
João			×	Х		
Sílvia				Х	Х	

**Questão 1.** Qual o menor número de computadores necessários para que todos os alunos trabalhem de acordo com o planejamento acima?

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 6
- (E) 7

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	X	Х				
Pedro				Х	Х	
Clara			×	×		
Joana				×	Х	
André					Х	Х
Marcos		Х	х			
João			×	×		
Sílvia				Х	Х	
-						

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	Х	х				
Pedro				Х	Х	
Clara			×	×		
Joana				×	Х	
André					Х	х
Marcos		х	х			
João			Х	Х		
Sílvia				Х	Х	
Computadores	1					•

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	х	х				
Pedro				х	×	
Clara			×	x		
Joana				х	Х	
André					Х	Х
Marcos		х	х			
João			×	х		
Sílvia				х	×	
Computadores	1	2				

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	×	×				
Pedro				Х	Х	
Clara			×	×		
Joana				×	×	
André					×	×
Marcos		×	×			
João			×	×		
Sílvia				×	×	
Computadores	1	2	3			

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	Х	х				
Pedro				х	×	
Clara			×	x		
Joana				х	×	
André					×	X
Marcos		x	×			
João			×	×		
Sílvia				х	×	
Computadores	1	2	3	5		

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	×	х				
Pedro				×	×	
Clara			×	×		
Joana				×	×	
André					×	×
Marcos		×	×			
João			×	×		
Sílvia				×	×	
Computadores	1	2	3	5	4	

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	×	х				
Pedro				×	X	
Clara			X	×		
Joana				×	X	
André					X	×
Marcos		×	X			
João			Х	×		
Sílvia				х	Х	
Computadores	1	2	3	5	4	1

**Questão 1.** Qual o menor número de computadores necessários para que todos os alunos trabalhem de acordo com o planejamento acima?

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 6
- (E) 7

**Questão 2.** Se os alunos não tivessem restrição de horário e pudessem ser alocados para iniciar o seu período de treinamento em qualquer horário, qual seria o menor número de computadores necessários?

- (A) 3
- (B) 4
- (C) 5
- (D) 6
- (E) 7

A melhor alocação dos alunos poderia ser obtida distribuindo de maneira igualitária entre os horários. No nosso exemplo, temos 8 alunos e cada aluno precisa estudar duas horas seguidas. Logo, temos no total 16 horas (TotalHoras) que precisam ser distribuídas. Temos 6 horários disponíveis (NumHorarios). Então, o menor número de computadores (Computadores) necessários é igual:

A melhor alocação dos alunos poderia ser obtida distribuindo de maneira igualitária entre os horários. No nosso exemplo, temos 8 alunos e cada aluno precisa estudar duas horas seguidas. Logo, temos no total 16 horas (TotalHoras) que precisam ser distribuídas. Temos 6 horários disponíveis (NumHorarios). Então, o menor número de computadores (Computadores) necessários é igual:

$$Computadores = \left\lceil \frac{TotalHoras}{NumHorarios} \right\rceil \tag{1}$$

A melhor alocação dos alunos poderia ser obtida distribuindo de maneira igualitária entre os horários. No nosso exemplo, temos 8 alunos e cada aluno precisa estudar duas horas seguidas. Logo, temos no total 16 horas (TotalHoras) que precisam ser distribuídas. Temos 6 horários disponíveis (NumHorarios). Então, o menor número de computadores (Computadores) necessários é igual:

$$Computadores = \left\lceil \frac{TotalHoras}{NumHorarios} \right\rceil \tag{1}$$

No nosso exemplo,

Computadores = 
$$\left\lceil \frac{16}{6} \right\rceil = \left\lceil 2.66 \right\rceil = 3$$
 (2)

7 / 51

A melhor alocação dos alunos poderia ser obtida distribuindo de maneira igualitária entre os horários. No nosso exemplo, temos 8 alunos e cada aluno precisa estudar duas horas seguidas. Logo, temos no total 16 horas (TotalHoras) que precisam ser distribuídas. Temos 6 horários disponíveis (NumHorarios). Então, o menor número de computadores (Computadores) necessários é igual:

$$Computadores = \left\lceil \frac{TotalHoras}{NumHorarios} \right\rceil \tag{1}$$

No nosso exemplo,

$$Computadores = \left\lceil \frac{16}{6} \right\rceil = \left\lceil 2.66 \right\rceil = 3 \tag{2}$$

Observe que este é um limite inferior para o número de computadores utilizado. Observe que pode não existir uma distribuição que utilize esse número de computadores. Mas se uma distribuição utiliza essa quantidade de computadores, ela será a melhor possível.

<b>8</b> • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	08·00	กละกก	10:00	11.00	12.00	13.00
	00.00	03.00	10.00	11.00	12.00	15.00

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	X	X				

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	Х	Х				
Pedro			Х	Х		

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	Х	Х				
Pedro			Х	Х		
Clara					X	×

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	Х	Х				
Pedro			х	Х		
Clara					Х	Х
Joana	×	×				

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	Х	Х				
Pedro			Х	Х		
Clara					Х	×
Joana	Х	Х				
André			×	×		

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	Х	Х				
Pedro			Х	Х		
Clara					Х	Х
Joana	X	×				
André			×	Х		
Marcos					×	×

6						
	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	Х	Х				
Pedro			Х	Х		
Clara					Х	Х
Joana	Х	Х				
André			Х	Х		
Marcos					Х	X
João	X	Х				

Vamos tentar construir uma distribuição dos horários de maneira mais igualitária possível.

<u> </u>	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	Х	Х				
Pedro			×	Х		
Clara					Х	Х
Joana	Х	х				
André			х	х		
Marcos					Х	Х
João	Х	х				
Sílvia			х	х		

0 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
	00:00	09:00	10:00	11:00	12:00	12:00
Aline	X	X				
Pedro			×	x		
Clara					Х	Х
Joana	×	×				
André			×	х		
Marcos					Х	X
João	Х	Х				
Sílvia			Х	Х		
Computadores	3					

-6						
	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	Х	Х				
Pedro			х	х		
Clara					Х	Х
Joana	Х	Х				
André			Х	Х		
Marcos					Х	Х
João	×	×				
Sílvia			Х	Х		
Computadores	3	3				

0 1						
	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	Х	Х				
Pedro			×	×		
Clara					×	×
Joana	×	×				
André			х	Х		
Marcos					Х	х
João	×	×				
Sílvia			×	×		
Computadores	3	3	3			

	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	×	×				
Pedro			х	х		
Clara					X	×
Joana	×	×				
André			×	×		
Marcos					X	×
João	×	×				
Sílvia			×	×		
Computadores	3	3	3	3		

0 1						
	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	Х	Х				
Pedro			×	×		
Clara					Х	×
Joana	×	×				
André			×	Х		
Marcos					×	×
João	×	×				
Sílvia			×	×		
Computadores	3	3	3	3	2	

- 6						
	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Aline	×	×				
Pedro			Х	Х		
Clara					Х	Х
Joana	Х	Х				
André			Х	Х		
Marcos					Х	×
João	Х	х				
Sílvia			Х	Х		
Computadores	3	3	3	3	2	2

# Modalidade Iniciação - Nível Júnior - Fase 2

Projeto Semeando Talentos<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal do Ceará - Campus de Quixadá

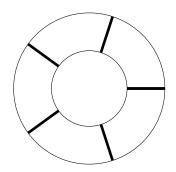
# Almoço

Para comemorar o aniversário de Cláudio, ele e mais quatro amigos: Alberto, Bruno, Dino e Eurico foram almoçar juntos no restaurante da escola. As mesas são redondas e acomodam exatamente cinco pessoas. Cláudio e Dino sentam-se um ao lado do outro. Alberto e Bruno não sentam-se um ao lado do outro.

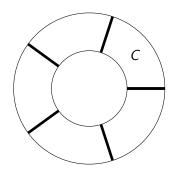
#### Questão 3. Os dois amigos sentados ao lado de Eurico são:

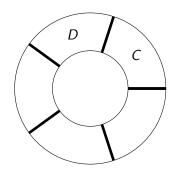
- (A) Alberto e Bruno
- (B) Cláudio e Dino
- (C) Dino e Bruno
- (D) Cláudio e Alberto
- (E) Alberto e Dino

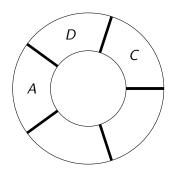
# Problema Almoço

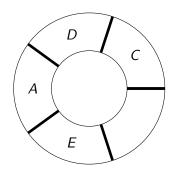


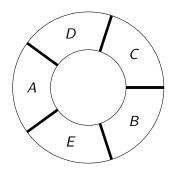
# Problema Almoço

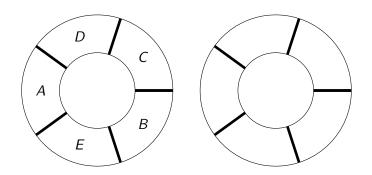


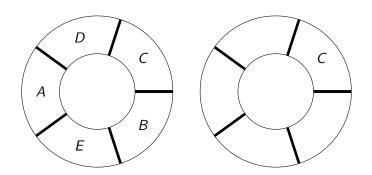


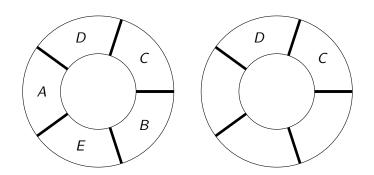


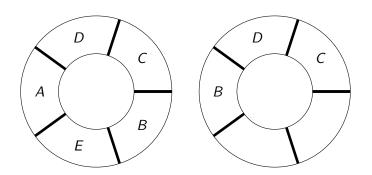


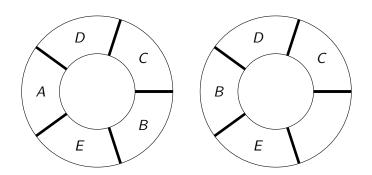


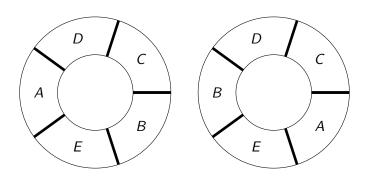












Questão 3. Os dois amigos sentados ao lado de Eurico são:

- (A) Alberto e Bruno
- (B) Cláudio e Dino
- (C) Dino e Bruno
- (D) Cláudio e Alberto
- (E) Alberto e Dino

#### Questão 4. Qual das alternativas abaixo não pode ser verdadeira?

- (A) Bruno senta ao lado de Dino.
- (B) Dino senta ao lado de Alberto.
- (C) Alberto senta ao lado de Cláudio.
- (D) Cláudio senta ao lado de Bruno.
- (E) Dino senta ao lado de Eurico.

#### Questão 4. Qual das alternativas abaixo não pode ser verdadeira?

- (A) Bruno senta ao lado de Dino.
- (B) Dino senta ao lado de Alberto.
- (C) Alberto senta ao lado de Cláudio.
- (D) Cláudio senta ao lado de Bruno.
- (E) Dino senta ao lado de Eurico.

Comentário: Se Dino sentar ao lado de Eurico, então Alberto e Bruno vão ficar sentados um ao lado do outro.

Vó Chica guardou suas jóias em um cofre com senha eletrônica. O cofre somente pode ser aberto com uma senha de nove dígitos. Vó Chica quer abrir o cofre, mas não se lembra da senha. Ela se lembra, entretanto, de alguns fatos sobre a senha:

- Os únicos dígitos usados na senha são 2, 6, 7 e 9.
- O dígito com o maior valor é o dígito usado menos vezes na senha.
- O dígito com o menor valor é o dígito usado mais vezes na senha.
- A senha é a mesma se lida da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita.
- Dígitos vizinhos na senha são diferentes.
- O dígito mais à direita é ímpar.

- Os únicos dígitos usados na senha são 2, 6, 7 e 9.
- 2 O dígito com o maior valor é o dígito usado menos vezes na senha.
- O dígito com o menor valor é o dígito usado mais vezes na senha.
- A senha é a mesma se lida da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita.
- Dígitos vizinhos na senha são diferentes.
- O dígito mais à direita é ímpar.

**Questão 5.** Qual das alternativas abaixo é a senha do cofre de Vó Chica?

(A) 262792627 [Regra 4]

- Os únicos dígitos usados na senha são 2, 6, 7 e 9.
- 2 O dígito com o maior valor é o dígito usado menos vezes na senha.
- O dígito com o menor valor é o dígito usado mais vezes na senha.
- A senha é a mesma se lida da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita.
- Dígitos vizinhos na senha são diferentes.
- O dígito mais à direita é ímpar.

- (A) 2 6 2 7 9 2 6 2 7 [Regra 4]
- (B) 2 6 9 2 7 2 9 6 2 [Regra 4]

- Os únicos dígitos usados na senha são 2, 6, 7 e 9.
- 2 O dígito com o maior valor é o dígito usado menos vezes na senha.
- O dígito com o menor valor é o dígito usado mais vezes na senha.
- A senha é a mesma se lida da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita.
- Dígitos vizinhos na senha são diferentes.
- O dígito mais à direita é ímpar.

- (A) 2 6 2 7 9 2 6 2 7 [Regra 4]
- (B) 269272962 [Regra 4]
- (C) 7 2 2 6 9 6 2 2 7 [Regra 5]

- Os únicos dígitos usados na senha são 2, 6, 7 e 9.
- O dígito com o maior valor é o dígito usado menos vezes na senha.
- O dígito com o menor valor é o dígito usado mais vezes na senha.
- A senha é a mesma se lida da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita.
- Dígitos vizinhos na senha são diferentes.
- O dígito mais à direita é ímpar.

- (A) 2 6 2 7 9 2 6 2 7 [Regra 4]
- (B) 269272962 [Regra 4]
- (C) 7 2 2 6 9 6 2 2 7 [Regra 5]
- (D) 726292627

- Os únicos dígitos usados na senha são 2, 6, 7 e 9.
- O dígito com o maior valor é o dígito
- usado menos vezes na senha.

  O dígito com o menor valor é o dígito usado mais vezes na senha.
- A senha é a mesma se lida da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita.
- Dígitos vizinhos na senha são diferentes.
- O dígito mais à direita é ímpar.

- (A) 2 6 2 7 9 2 6 2 7 [Regra 4]
- (B) 269272962 [Regra 4]
- (C) 7 2 2 6 9 6 2 2 7 [Regra 5]
- (D) 726292627
- (E) 9 2 7 2 6 2 7 2 9 [Regra 2]

### Distância entre palavras

Vamos definir três tipos de operações básicas:

- inserir uma letra em uma palavra;
- remover uma letra de uma palavra;
- substituir um letra de uma palavra.

Definimos também a distância entre duas palavras como o número mínimo de operações básicas para transformar a primeira palavra na segunda. Por exemplo, a distância entre as palavras maria e clara é 3:

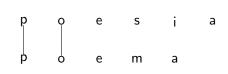
- $lue{1}$  remover a letra i: maria o mara
- $oldsymbol{2}$  substituir a letra m pela letra c: mara ightarrow cara
- **3** inserir a letra l: cara  $\rightarrow$  clara

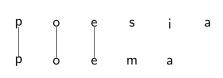
Questão 6. Qual a distância entre poesia e poema?

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

p o e s i a

p o e s i a p o e m a





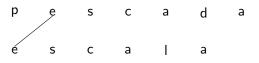


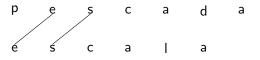
A distância entre si e m é 2.

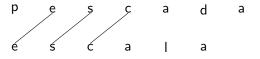
Questão 7. Qual a distância entre pescada e escala?

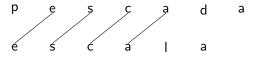
- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4
- (E) 5

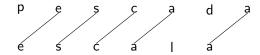
p e s c a d a e s c a l a

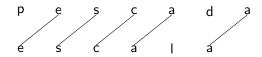












A distância entre pescada e escala será 2.

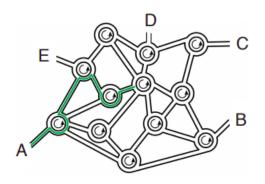
### Aplicativo de navegação

Aplicativos de navegação, para auxílio ao motorista, são muito comuns hoje em dia. Num país distante, a Rotatolândia, todos os entroncamentos de ruas são planejados como rotatórias. Como no Brasil, os carros em Rotatolândia trafegam nas rotatórias em sentido anti-horário. Nesse país os aplicativos de navegação não dão instruções como

- Na próxima rotatória, pegue a quarta saída;
- na próxima rotatória, pegue a primeira saída;
- na próxima rotatória, pegue a segunda saída.

### Aplicativo de navegação

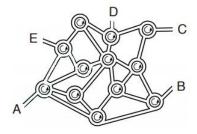
Ao invés disso, os aplicativos informam apenas a sequência de números que correspondem às saídas, como "4 1 2" no exemplo acima. No mapa abaixo, essa sequência é mostrada como um caminho parcial.



# Aplicativo de navegação

**Questão 8.** Considerando o mapa acima, se o motorista partir de A e seguir as instruções "3 1 3 2 3", qual será o seu destino?

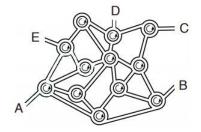
- (A) A
- (R) B
- (C)
- (D) [
- (E) E



# Aplicativo de navegação

**Questão 9.** Considerando o mapa acima, se o motorista partir de B, qual das seguintes sequências de instruções o leva para o ponto E?

- 3 2 1 1
- 3 1 3 2 2
- **3** 2 1 3 2
- **4** 1 1 1 1
- 3 2 2 2 3



Joel é um artesão que faz colares com conchinhas. Ele utiliza dois tipos de conchinhas, que vamos representar por [] e  $\{\}$ . Para fazer um colar Joel inicia com um par de conchinhas, como mostra o passo 1 da figura abaixo, em que ele escolheu para iniciar a conchinha do tipo . Para terminar o colar novos pares de conchinhas são repetidamente inseridos em qualquer posição do colar, como mostram o passo 2 (novo par []), o passo 3 (novo par  $\{\}$ ) e o passo 4 (novo par  $\{\}$ ).



Analisando o processo de construção de um colar

Analisando o processo de construção de um colar

$$\left\{ \right. \right. \left. \left\{ \right. \right] \left. \left\{ \right. \right] \left\{ \right. \right\} \left. \left\{ \right. \right] \left\{ \right. \right\} \left\{ \right. \right\}$$
 passo 1 passo 2 passo 3 passo 4

Observações:

Analisando o processo de construção de um colar

$$\left\{ \ \right\} \qquad \left\{ \ \left[ \ \right] \ \right\} \qquad \left\{ \ \left[ \ \right] \ \left\{ \ \right\} \ \right\} \ \left\{ \ \right\}$$
 passo 1 passo 2 passo 3 passo 4

#### Observações:

 Olhando da esquerda para a direita cada colar, não podemos ter mais conchinhas } e ] do que conchinhas { e [.

Analisando o processo de construção de um colar

$$\left\{ \ \right\} \qquad \left\{ \ \left[ \ \right] \ \right\} \qquad \left\{ \ \left[ \ \right] \ \left\{ \ \right\} \ \right\} \ \left\{ \ \right\}$$
 passo 1 passo 2 passo 3 passo 4

#### Observações:

- Olhando da esquerda para a direita cada colar, não podemos ter mais conchinhas } e ] do que conchinhas { e [.
- 2. Além disso, precisamos respeitar a ordem que as conchinhas de tipo diferentes são fechadas. Por exemplo, essa conchinha {[}] não pode ser feita pelo processo acima.

**Questão 10.** Qual dos seguintes colares foi feito usando o método descrito acima?

```
(A) {}{[]]{}
```

- (B) [[[[[{{]}}
- (C) {{[]}}[[]]
- (D) {{{{]]]]}
- (E) {[][]{}]

```
item (A) \{\ \}\ \{\ [\ ]\ ]\ \{\ \} Não satisfaz a observação (1)
```

**Questão 10.** Qual dos seguintes colares foi feito usando o método descrito acima?

```
(A) {}{[]]{}
```

- (B) [][][{{]}
- (C) {{||}}||||
- (D) {{{}]]]]
- (E) {[][]{}]

```
item (B)  [\ ]\ [\ ]\ \{\ \{\ ]\ ] \ \}  Não satisfaz a observação (1)
```

Questão 10. Qual dos seguintes colares foi feito usando o método descrito acima?

```
(A) {}{[]]{}
```

(E) { [ [ ] [ ] ]

```
item (C)
{ { [ ] } } [ [ ] ]
Satisfaz a observação (1) e (2).
```

**Questão 10.** Qual dos seguintes colares foi feito usando o método descrito acima?

```
(A) {}{[]]{}
(B) [][][]{{]}
```

- (C) {{[]}}[[]]
- (C) {{[]}}[[]]
- (D) {{{|]]]
- (E) {[][]{}]

**Questão 10.** Qual dos seguintes colares foi feito usando o método descrito acima?

```
(A) {}{[]]{}
```

- (B) [][][{{]}
- (C) {{[]}}[[]]
- (D) {{{{]]]]
- (E) {[][]{}]

```
item (E)  \{ \ [\ ] \ [\ ] \ \} \ \boxed{]}  Não satisfaz a observação (1) .
```

Questão 11. Qual dos seguintes colares não foi feito usando o método descrito acima?

```
(A) { { { } } } [] }
(B) { [ } ] { } []
(C) { { { { { } } } } [] }
(D) { } { } { } [] [] [
(E) { [ { [ ] [ ] } ] }
```

```
}
[]}
][][]
```

item (A)

{ } { [ ] | ] { }

Não satisfaz a observação (1)

Questão 11. Qual dos seguintes colares não foi feito usando o método descrito acima?

```
(A) { { { } } } [] }
```

```
(E) { [ { [ ] [ ] } ] }
```

```
item (B)
[][][]{{]}}
Não satisfaz a observação (1)
```

Questão 11. Qual dos seguintes colares não foi feito usando o método descrito acima?

```
(A) { { { } } } [] }
(B) { [ } ] { } []
(C) { { { { } } } } []
```

(E) { [ { [ ] [ ] } ] }

```
item (C) { { [ ] } } [ [ ] ] Satisfaz a observação (1) e (2).
```

Questão 11. Qual dos seguintes colares não foi feito usando o método descrito acima?

```
(A) { { } } [] }(B) { [ } ] { } [](C) { { { { } } } } [] }(D) { } { } { } [] [] []
```

```
item (D)  \{ \ \{ \ \{ \ \boxed{]} \ ] \ ] \ ]  Não satisfaz a observação (1) .
```

Questão 11. Qual dos seguintes colares não foi feito usando o método descrito acima?

```
(A) { { { } } } [] } (B) { [ } ] { } [] (C) { { { { } } } } []
```

```
(D) { } { } { } [] [] []
```

```
(E) { [ { [ ] [ ] } ] }
```

```
item (E)  \{ \ [ \ ] \ [ \ ] \ \} \ \boxed{]}   Não satisfaz a observação (1) .
```

Para expor seus limões para venda, um feirante os empilha em camadas, cada uma das quais tem a forma de um triângulo. A figura abaixo mostra as quatro primeiras camadas da pilha de limões.

















**Questão 12.** Se a pilha tem quatro camadas, quantos limões conterá uma pilha no formato acima?

- **1**5
- 2 16
- **3** 17
- **4** 18
- 10
- **5** 20





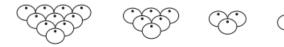




**Questão 12.** Se a pilha tem quatro camadas, quantos limões conterá uma pilha no formato acima?

Precisamos apenas realizar o seguinte cálculo:

$$1 + 3 + 6 + 10 = 20$$



**Questão 13.** O feirante sabe que não pode fazer uma pilha com mais do que oito camadas, para não estragar as frutas. Qual é o maior número de limões que podem ser empilhados no formato acima?

- (A) 120
- (B) 140
- (C) 160
- (D) 180
- (E) 200









Neste problema, vamos utilizar uma técnica matemática chamada de recorrência que permite definir sequências, conjuntos, operações, algoritmos partindo de casos simples.

Vamos definir a função T(n) como sendo a função que recebe o valor n representando uma camada da pilha de limões e calcula o número de limões desta camada n.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

$$T(1) = 1$$
  
 $T(2) = T(1) + 2$ 

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

$$T(1) = 1$$

$$T(2) = 3$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

$$T(1) = 1$$
  
 $T(2) = 3$   
 $T(3) = T(3) + 3$ 

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

$$T(1) = 1$$
  
 $T(2) = 3$   
 $T(3) = 6$ 

$$T(3) = 6$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

$$T(1) = 1$$
  
 $T(2) = 3$   
 $T(3) = 6$   
 $T(4) = T(3) + 4$ 

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

$$T(1) = 1$$

$$T(2) = 3$$

$$T(3) = 6$$

$$T(4) = 10$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

$$T(1) = 1$$
  
 $T(2) = 3$   
 $T(3) = 6$   
 $T(4) = 10$   
 $T(5) = T(4) + 5$ 

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

- T(1) = 1
- T(2) = 3 T(3) = 6 T(4) = 10

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

$$T(1) = 1$$
  
 $T(2) = 3$   
 $T(3) = 6$   
 $T(4) = 10$   
 $T(5) = 15$   
 $T(6) = T(5) + 6$ 

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

$$T(1) = 1$$

$$T(2) = 3$$

$$T(3) = 6$$

$$T(3) = 6$$
  
 $T(4) = 10$ 

$$T(5) = 15$$

$$T(6) = 21$$

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

$$T(1) = 1$$
  
 $T(2) = 3$   
 $T(3) = 6$   
 $T(4) = 10$   
 $T(5) = 15$   
 $T(6) = 21$   
 $T(7) = T(6) + 7$ 

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

- T(1) = 1
- T(2) = 3T(3) = 6
- T(4) = 10
- T(5) = 15
- T(6) = 21



$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

$$T(1) = 1$$
  
 $T(2) = 3$   
 $T(3) = 6$   
 $T(4) = 10$   
 $T(5) = 15$   
 $T(6) = 21$   
 $T(7) = 28$   
 $T(8) = T(7) + 8$ 

## Pilha de Limões

$$T(n) = \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ T(n-1) + n & , n \geq 2 \end{cases}$$

Agora, podemos utilizar a recorrência acima para calcular o número de limões até a oitava camada.

$$T(1) = 1$$

$$T(2) = 3$$
  
 $T(3) = 6$ 

$$T(3) = 6$$

$$T(4) = 10$$

$$T(4) - 10$$

$$T(5) = 15$$

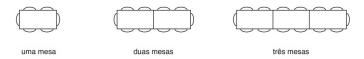
$$T(6) = 21$$

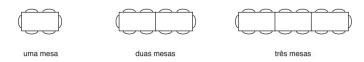
$$T(7) = 28$$

$$T(8) = 36$$

Somando o número de limões da primeira camada até a oitava camada obtermos 120.

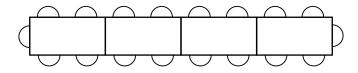
Uma nova sala de aula foi inaugurada, para estudo e exercícios em grupo. A sala de aula tem mesas para seis estudantes. Quando as mesas são colocadas juntas, numa única fila de mesas, elas podem ser usadas pelo número de estudantes mostrado na figura abaixo:





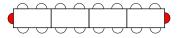
# **Questão 14.** Quantos estudantes podem usar quatro mesas colocadas juntas como mostrado?

- (A) 15
- (B) 16
- (C) 18
- (D) 20
- (E) 24

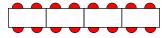


Na figura acima, podemos ver que o número de estudantes que podem usar quatro mesas colocadas juntas é 18.

Podemos observar que em toda configuração de cadeiras teremos sempre 2 cadeiras nas mesas das pontas.



Tirando as cadeiras das duas pontas, podemos colocar 4 cadeiras em cada mesa.



Com isso, podemos definir uma função cadeiras(n) que calcula o número de cadeiras em função do número de mesas representado por n.

$$cadeiras(n) = 4 * n + 2$$

Para n = 4, temos

$$cadeiras(4) = (4*4) + 2 = 18$$



**Questão 14.** Quantos estudantes podem usar quatro mesas colocadas juntas como mostrado?

- (A) 15
- (B) 16
- (C) 18
- (D) 20
- (E) 24

**Questão 15.** Para que 42 estudantes usem mesas colocadas juntas como mostrado, quantas mesas são necessárias?

- (A) 6
- (B) 7
- (C) 8
- (D) 9
- (E) 10

## Mesas - Resolução

Para calcular a quantidade de mesas, podemos utilizar a fórmula que encontramos:

$$qntCadeiras = 2 + (4 * qntMesas)$$

Dessa vez, vamos substituir a quantidade de cadeiras (qntCadeiras) e encontrar a quantidade de mesas (qntMesas). Então, para 42 estudantes temos que

$$42 = 2 + (4 * qntMesas)$$

Mudando de lado na equação, temos que

$$2 + (4 * qntMesas) = 42$$

Fazendo a manipulação algébrica

$$4*qntMesas = 42-2$$

$$4*qntMesas = 40$$

Logo,

$$qntMesas = 40 \div 4 = 10 mesas$$

**Questão 15.** Para que 42 estudantes usem mesas colocadas juntas como mostrado, quantas mesas são necessárias?

- (A) 6
- (B) 7
- (C) 8
- (D) 9
- (E) 10

Seis frutas (abacaxi, banana, caqui, laranja, pera e romã ) vão servir de lanche para três amigos: Mario, Nei e Olga. Cada amigo vai comer exatamente duas frutas, respeitando as seguintes condições:

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario não pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

**Questão 16.** Qual das seguintes alternativas é uma possível lista de frutas e pessoas que as comem?

- (A) Mario: banana, pera; Nei: caqui, romã; Olga: abacaxi, laranja
- (B) Mario: banana, romã; Nei: abacaxi, pera; Olga: caqui, laranja
- (C) Mario: caqui, pera; Nei: abacaxi, laranja; Olga: banana, romã
- (D) Mario: caqui, romã; Nei: abacaxi, pera; Olga: banana, laranja
- (E) Mario: abacaxi, laranja; Nei: banana, caqui; Olga: pera, romã

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario n\u00e3o pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

## item (A)

Mario	banana	pera
Nei	caqui	romã
Olga	abacaxi	laranja

Olga come abacaxi e Mário não com caqui.

**Questão 16.** Qual das seguintes alternativas é uma possível lista de frutas e pessoas que as comem?

- (A) Mario: banana, pera; Nei: caqui, romã; Olga: abacaxi, laranja
- (B) Mario: banana, romã; Nei: abacaxi, pera; Olga: caqui, laranja
- (C) Mario: caqui, pera; Nei: abacaxi, laranja; Olga: banana, romã
- (D) Mario: caqui, romã; Nei: abacaxi, pera; Olga: banana, laranja
- (E) Mario: abacaxi, laranja; Nei: banana, caqui; Olga: pera, romã

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario n\u00e3o pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

#### item (B)

Mario	banana	romã
Nei	abacaxi	pera
Olga	caqui	laranja

Olga não come banana e Nei não come romã.

**Questão 16.** Qual das seguintes alternativas é uma possível lista de frutas e pessoas que as comem?

- (A) Mario: banana, pera; Nei: caqui, romã; Olga: abacaxi, laranja
- (B) Mario: banana, romã; Nei: abacaxi, pera; Olga: caqui, laranja
- (C) Mario: caqui, pera; Nei: abacaxi, laranja; Olga: banana, romã
- (D) Mario: caqui, romã; Nei: abacaxi, pera; Olga: banana, laranja
- (E) Mario: abacaxi, laranja; Nei: banana, caqui; Olga: pera, romã

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario n\u00e3o pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

## item (C)

Mario	caqui	pera
Nei	abacaxi	laranja
Olga	banana	romã

Caqui e pera não pode ser comido pela mesma pessoa

**Questão 16.** Qual das seguintes alternativas é uma possível lista de frutas e pessoas que as comem?

- (A) Mario: banana, pera; Nei: caqui, romã; Olga: abacaxi, laranja
- (B) Mario: banana, romã; Nei: abacaxi, pera; Olga: caqui, laranja
- (C) Mario: caqui, pera; Nei: abacaxi, laranja; Olga: banana, romã
- (D) Mario: caqui, romã; Nei: abacaxi, pera; Olga: banana, laranja
- (E) Mario: abacaxi, laranja; Nei: banana, caqui; Olga: pera, romã

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario n\u00e3o pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

## item (D)

Mario	caqui	romã
Nei	abacaxi	pera
Olga	banana	laranja

**Questão 16.** Qual das seguintes alternativas é uma possível lista de frutas e pessoas que as comem?

- (A) Mario: banana, pera; Nei: caqui, romã; Olga: abacaxi, laranja
- (B) Mario: banana, romã; Nei: abacaxi, pera; Olga: caqui, laranja
- (C) Mario: caqui, pera; Nei: abacaxi, laranja; Olga: banana, romã
- (D) Mario: caqui, romã; Nei: abacaxi, pera; Olga: banana, laranja
- (E) Mario: abacaxi, laranja; Nei: banana, caqui; Olga: pera, romã

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario n\u00e3o pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

## item (E)

Mario	abacaxi	laranja
Nei	banana	caqui
Olga	pera	romã

Mário não pode comer laranja.

- (A) Abacaxi é comido pela mesma pessoa que come romã.
- (B) Mario come pera.
- (C) Banana é comida pela mesma pessoa que come pera
- (D) Nei come abacaxi.
- (E) Mario come banana

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario não pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

Mario		
Nei		
Olga	caqui	laranja

**Questão 17.** Se Olga come caqui e laranja, qual das seguintes alternativas é necessariamente verdadeira?

- (A) Abacaxi é comido pela mesma pessoa que come romã.
- (B) Mario come pera.
- (C) Banana é comida pela mesma pessoa que come pera
- (D) Nei come abacaxi.
- (E) Mario come banana

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario não pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

Mario		
Nei		
Olga	caqui	laranja

Como Olga não come banana, então Nei come romã.

**Questão 17.** Se Olga come caqui e laranja, qual das seguintes alternativas é necessariamente verdadeira?

- (A) Abacaxi é comido pela mesma pessoa que come romã.
- (B) Mario come pera.
- Banana é comida pela mesma pessoa que come pera
- (D) Nei come abacaxi.
- (E) Mario come banana

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario n\u00e3o pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

Mario		
Nei	romã	
Olga	caqui	laranja

Como Olga não come banana, então Nei come romã.

- (A) Abacaxi é comido pela mesma pessoa que come romã.
- (B) Mario come pera.
- Banana é comida pela mesma pessoa que come pera
- (D) Nei come abacaxi.
- (E) Mario come banana

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario n\u00e3o pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

Mario		
Nei	romã	
Olga	caqui	laranja

- Sobram abacaxi, pera, banana.
- Como Mário não pode comer abacaxi e banana ao mesmo tempo, então Mário come pera.

- (A) Abacaxi é comido pela mesma pessoa que come romã.
- (B) Mario come pera.
- (C) Banana é comida pela mesma pessoa que come pera
- (D) Nei come abacaxi.
- (E) Mario come banana

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario n\u00e3o pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

Mario	pera	
Nei	romã	
Olga	caqui	laranja

- Sobram abacaxi, pera, banana.
- Como Mário não pode comer abacaxi e banana ao mesmo tempo, então Mário come pera.

- (A) Nei come caqui.
- (B) Mario come caqui.
- (C) Mario come pera.
- (D) Mario come laranja.
- (E) Mario come abacaxi.

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario não pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

Mario		
Nei		
Olga	romã	

- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Como Nei não pode comer romã, então Olga come banana.

- (A) Nei come caqui.
- (B) Mario come caqui.
- (C) Mario come pera.
- (D) Mario come laranja.
- (E) Mario come abacaxi.

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario não pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

Mario		
Nei		
Olga	romã	banana

- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Como Nei não pode comer romã, então Olga come banana.

- (A) Nei come caqui.
- (B) Mario come caqui.
- (C) Mario come pera.
- (D) Mario come laranja.
- (E) Mario come abacaxi.

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario não pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

Mario		
Nei		
Olga	romã	banana

- Sobram laranja, abacaxi, pera, caqui.
- Como Mário não pode comer laranja, então Nei come laranja.

- (A) Nei come caqui.
- (B) Mario come caqui.
- (C) Mario come pera.
- (D) Mario come laranja.
- (E) Mario come abacaxi.

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario n\u00e3o pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

Mario		
Nei	laranja	
Olga	romã	banana

- Sobram abacaxi, pera, caqui.
- Mario não pode comer caqui e pera ao mesmo tempo, então Mário come abacaxi

- (A) Nei come caqui.
- (B) Mario come caqui.
- (C) Mario come pera.
- (D) Mario come laranja.
- (E) Mario come abacaxi.

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario não pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

Mario	abacaxi	
Nei	laranja	
Olga	romã	banana

- Sobram abacaxi, pera, caqui.
- Mario não pode comer caqui e pera ao mesmo tempo, então Mário come abacaxi

- (A) Nei come caqui.
- (B) Mario come caqui.
- (C) Mario come pera.
- (D) Mario come laranja.
- (E) Mario come abacaxi.

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario não pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

**Questão 19.** Qual dos seguintes pares de frutas Nei não pode comer?

- (A) banana e laranja
- (B) abacaxi e caqui
- (C) abacaxi e romã
- (D) caqui e laranja
- (E) pera e romã

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario não pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

## item (A)

Mario		
Nei	banana	laranja
Olga		

 Se Olga não come banana, então Nei come romã.

**Questão 19.** Qual dos seguintes pares de frutas Nei não pode comer?

- (A) banana e laranja
- (B) abacaxi e caqui
- (C) abacaxi e romã
- (D) caqui e laranja
- (E) pera e romã

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario não pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

## item (A)

Mario		
Nei	banana	laranja
Olga		

 Se Olga não come banana, então Nei come romã.

**Questão 20.** Qual dos seguintes pares de frutas Mario não pode comer?

- (A) abacaxi e caqui
- (B) abacaxi e pera
- (C) banana e pera
- (D) pera e laranja
- (E) pera e romã

- Se Olga come abacaxi, Mario come caqui.
- Se Olga não come banana, então Nei come romã.
- Mario não pode comer laranja.
- Abacaxi não é comido pela mesma pessoa que come banana, nem caqui é comido pela mesma pessoa que come pera, nem laranja é comida pela mesma pessoa que come romã.

## item (A)

Mario		
Nei	banana	laranja
Olga		

 Se Olga não come banana, então Nei come romã.