

Universidade Federal do Ceará  
Campus de Quixadá  
Matemática Computacional (2017.1)  
Prof. Wladimir Araújo Tavares

**Trabalho de Implementação**  
**Raízes da Equação**  
**Trabalho em equipe máximo 2 alunos**  
**Data de Entrega: 30/05/2017**  
**Plágio será punidos com nota zero**

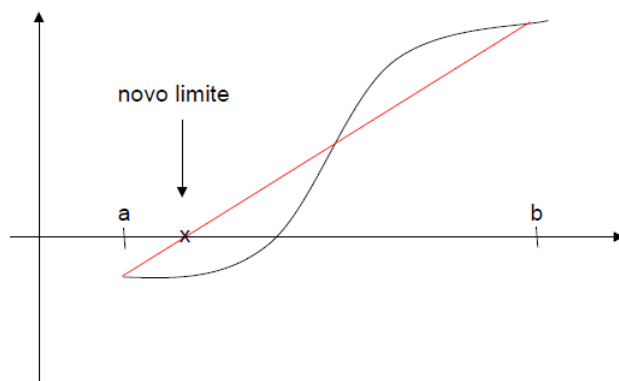
Repositório: [https://github.com/WladimirTavares/matematica\\_computacional2017/tree/master/raizes\\_de\\_equacoes](https://github.com/WladimirTavares/matematica_computacional2017/tree/master/raizes_de_equacoes)

No código disponível no repositório acima, temos a implementação dos seguintes métodos para encontrar raízes de equações:

- Método da Bisseção
- Método da Posição Falsa
- Método de Newton

**Método da Posição Falsa**

No método da posição falsa, a função  $f(x)$  é aproximada por uma função linear  $g(x)$ .



O coeficiente angular da função  $g(x)$  é:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (1)$$

Considerando  $(x_0, y_0) = (a, f(a))$ ,  $(x_1, y_1) = (b, f(b))$ ,  $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$  e  $(x, 0)$  é a raiz da função  $g(x)$ . Temos que

$$\begin{aligned}
y - y_0 &= m(x - x_0) \\
-f(a) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \\
-f(a) &= x \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - a \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\
x \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= -f(a) + a \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \\
x \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{-f(a)(b - a) + a(f(b) - f(a))}{b - a} \\
x(f(b) - f(a)) &= -bf(a) + af(a) + af(b) - af(a) \\
x(f(b) - f(a)) &= af(b) - bf(a) \\
x &= \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}
\end{aligned}$$

A raiz de  $g(x)$  é utilizada como uma aproximação da raiz de  $f(x)$

A ideia do método é partir de um intervalo  $[a_0, b_0]$  com  $f(a_0)f(b_0) < 0$ , em cada passo do algoritmo, encontrar um intervalo menor  $[a_k, b_k]$  com  $f(a_k)f(b_k) < 0$ . Na iteração  $k$ ,

$$c_{k+1} = \frac{a_{k-1}f(b_{k-1}) - b_{k-1}f(a_{k-1})}{f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})} \quad (2)$$

Se  $f(c_k)f(a_{k-1}) < 0$  então  $a_k = a_{k-1}$  e  $b_k = c_k$ , caso contrário,  $a_k = c_k$  e  $b_k = b_{k-1}$ . O processo é repetido até que seja encontrada uma raiz aproximada, suficientemente compatível com o erro estimado. A única diferença entre o método da posição falsa e o método da bissecção é que o último utiliza  $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$

A interpretação gráfica do método da Posição Falsa pode ser vista da Figura 1.

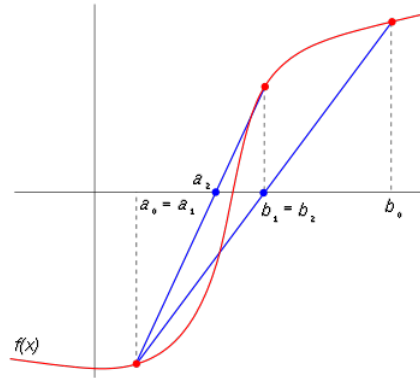


Figura 1: Interpretação Gráfica do método da Posição Falsa

Se a função é côncava ou convexa em  $[a, b]$ , então o método da Posição Falsa uma das extremidades permanece fixa, como demonstrado na Figura 2.

A execução do método da bissecção para encontrar a raiz  $x$  da função  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$  com  $\varepsilon = 0.001$  e  $x \in [-1, 0.5]$  pode ser acompanhada pela Tabela 1.

Um resumo da execução do método da bissecção:

x	-0.000244141
Iterações	10
Intervalo da solução	(-0.000976562, 0.000488281)
Erro absoluto	0.00073266

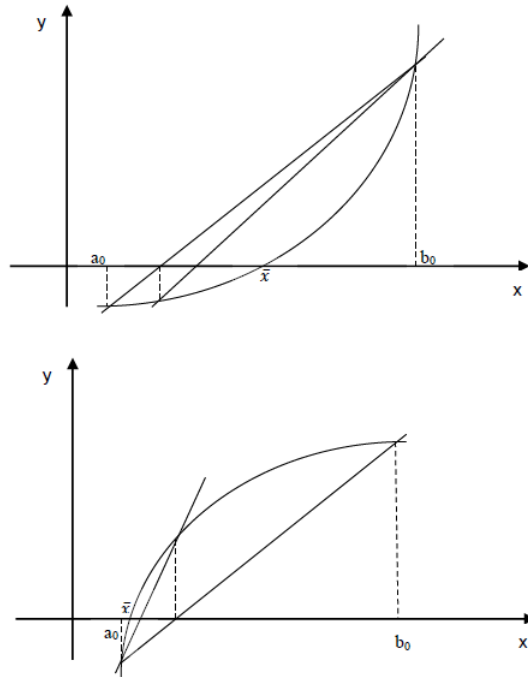


Figura 2: Comportamento do método da Posição Falsa quando a função  $f$  é côncava ou convexa no intervalo

A execução do método da posição falsa para encontrar a raiz  $x$  da função  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$  com  $\varepsilon = 0.001$  e  $x \in [-1, 0.5]$  pode ser acompanhada pela Tabela 2.

Um resumo da execução do método da posição falsa:

x	0.000266329
Iterações	19
Intervalo da solução	(-1, 0.00039944)
Erro absoluto	0.000798704

A interpretação gráfica do método da posição falsa pode ser vista na Figura 3.

Observe que neste caso, uma das extremidades do intervalo ficou fixa durante o método da posição falsa.

Na literatura, podemos encontrar algumas alterações do método da posição falsa para ter uma convergência mais rápida. O método de Pégaso é umas dessas adaptações. Durante o método de Pégaso, os pesos atribuídos aos pontos  $[a_k, b_k]$  são modificados apropriadamente.

### Método de Pégaso

A ideia do método é partir dos valores  $(a_0, F(a_0), b_0, F(b_0))$  com  $F(a_0) = f(a_0), F(b_0) = f(b_0)$  e  $F(a_0)F(b_0) < 0$ , encontrar novos valores  $(a_k, F(a_k), b_k, F(b_k))$  com  $F(a_k)F(b_k) < 0$  em cada passo do método. Na iteração  $k$ ,

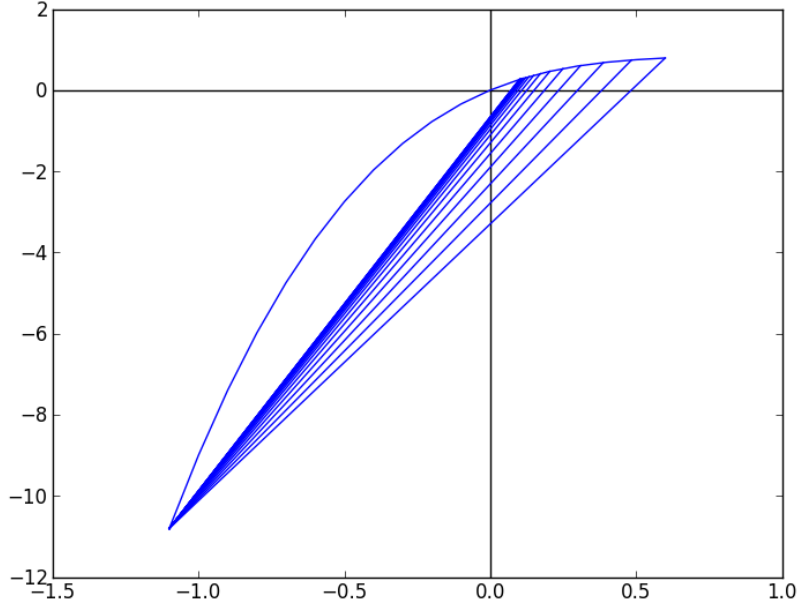


Figura 3: Interpretação gráfica da execução do método da posição falsa

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \frac{a_{k-1}F(b_{k-1}) - b_{k-1}F(a_{k-1})}{F(b_{k-1}) - F(a_{k-1})} \\ F(c_{k+1}) &= f(c_{k+1}) \end{aligned}$$

Se  $F(a_{k-1})F(c_k) < 0$  então

$$(a_k, F(a_k), b_k, F(b_k)) \leftarrow (a_{k-1}, F(a_{k-1}), \frac{F(b_{k-1})}{F(b_{k-1}) + F(c_k)}, c_k, F(c_k)) \quad (3)$$

Note que o valor  $F(a_k)$  é reduzido por um fator  $\frac{F(b_{k-1})}{F(b_{k-1}) + F(c_k)}$  para evitar a retenção de um ponto como ocorre no método da posição falsa. Com isso, estamos diminuindo o valor do ponto fixo na média ponderada e aumentando a velocidade de convergência. Em alguns casos, o valor de  $c_k$  pode passar da raiz, ou seja,  $F(a_{k-1})F(c_k) > 0$ . Quando isso acontece, consideramos que aconteceu um estouro. Essa condição será tratada a seguir.

Se  $F(a_{k-1})F(c_k) > 0$  então

$$(a_k, F(a_k), b_k, F(b_k)) \leftarrow (b_{k-1}, F(b_{k-1}), c_k, F(c_k)) \quad (4)$$

Observe que o ponto fixo da função muda de  $a_{k-1}$  para  $b_{k-1}$  tornando condição  $F(b_{k-1})F(c_k) < 0$  satisfeita. Dessa maneira a aproximação passa a ser contrária a anterior.

A execução do método de Pégaso para encontrar a raiz  $\xi$  da função  $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$  com  $\varepsilon = 0.001$  e  $\xi \in [-1, 0.5]$  pode ser acompanhada pela Tabela 3.

Um resumo da execução do método da Pégaso:

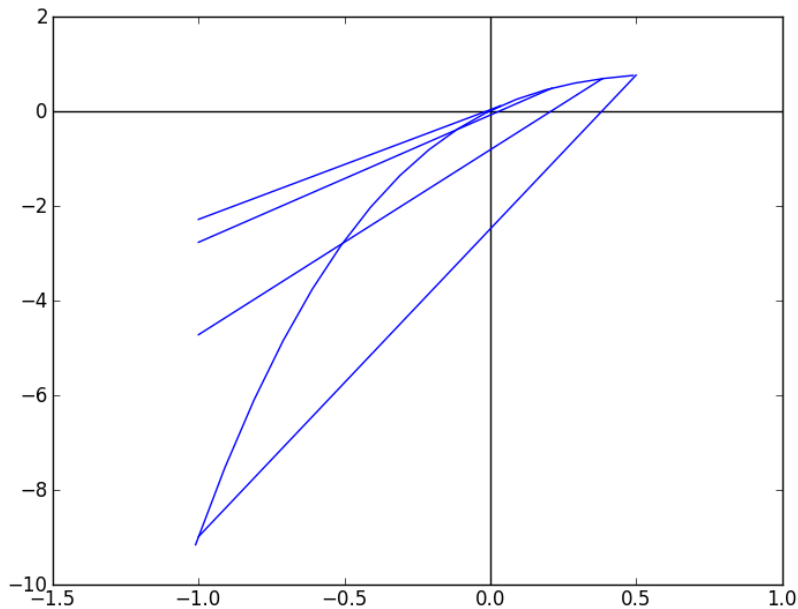


Figura 4: Interpretação gráfica da execução do método de Pégaso

x	4.29961e-006
Iterações	5
Intervalo da solução	(-0.00825343,0.000393277)
Erro absoluto	1.28987e-005

A interpretação gráfica do método da posição falsa pode ser vista na Figura

4.

Uma comparação entre os três métodos:

	Bisseção	Posição Falsa	Pégaso
x	-0.000244141	0.000266329	4.29961e-006
Iterações	10	19	5
Intervalo da solução	(-0.000976562,0.000488281)	(-1,0.00039944)	(-0.00825343,0.000393277)
Erro absoluto	0.00073266	0.000798704	1.28987e-005

### Exercícios

1. Implemente o Método de Pégaso para encontrar uma raiz da equação  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  com erro  $\varepsilon$ .
2. Compare os método da Bisseção, Posição Falsa, Método de Pégaso para encontrar uma raiz de  $x^5 - 3x^4 - 3x^2 + 2$  com  $\varepsilon = 2^{-5}$ .
3. Compare os método da Bisseção, Posição Falsa e Método de Pégaso para encontrar uma raiz de  $\sqrt{x} - 5^{-x}$  com  $\varepsilon = 10^{-3}$

4. Compare os métodos da Bisseção, Posição Falsa e Método de Pégaso para aproximar uma raiz de  $x^5 - x^4 - 4x + 1$  com  $\varepsilon = 0.01$ .
5. Compare os métodos da Bisseção, Posição Falsa e Método de Pégaso para encontrar uma raiz de  $f(x) = 0.05x^3 - 0.4x^2 + 3x \operatorname{sen} x = 0$  com  $\varepsilon = 0.005$ .
6. Uma condição suficiente para a convergência do método de Newton é que  $f'(x)$  e  $f''(x)$  sejam não nulas e preservem o sinal em  $(a, b)$  e  $x_0$  seja tal que  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ . Desenvolva uma função que tente verificar se essa condição é satisfeita.
7. Use o método de Newton para encontrar uma raiz de  $x^5 - 3x^4 - 3x^2 + 2$  com  $\varepsilon = 2^{-5}$  utilizando sua função que verifica a condição de convergência.
8. A concentração hidrogeniônica  $[H_3O^+]$  de uma solução diluída em um ácido fraco pode ser calculada resolvendo-se a equação  $[H_3O^+]^3 + K_a[H_3O^+]^2 - (K_a C_a + K_w)[H_3O^+] - K_w K_a = 0$ , em que  $K_a$  é a constante de dissociação do ácido,  $C_a$  a concentração do ácido e  $K_w$  o produto iônico da água. Determine o pH de uma solução de ácido bórico a 250°C, sabendo-se que  $pH = -\log_{10}[H_3O^+]$ ,  $K_a = 6.5 \cdot 10^{-10} M$ ,  $C_a = 2.0 \cdot 10^{-5} M$  e  $K_w = 1.0 \cdot 10^{-14} M$  utilizando o Método da Bisseção com  $\varepsilon = 10^{-2}$ .
9. Uma loja de eletrodomésticos oferece dois planos de financiamento para um produto cujo preço à vista é R\$16.200,00:
  - Plano A: entrada de R\$2.200,00 + 9 prestações mensais de R\$2.652,52.
  - Plano B: entrada de R\$2.200,00 + 12 prestações mensais de R\$2.152,27.

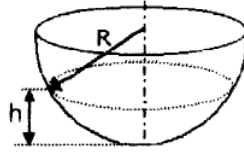
Qual dos dois planos é melhor para o consumidor? Sugestão: Lembre que a taxa de juros ( $j$ ) pode ser determinada pela equação abaixo, em que  $n$  representa o número de prestações mensais,  $v$  o preço à vista,  $e$  o valor da entrada e  $p$  o valor da prestação mensal:

$$\frac{1 - (1 + j)^{-n}}{j} = \frac{v - e}{p} \quad (5)$$

10. O Engenheiro recém formado Sávio projetou um reservatório de água na forma de semiesfera de raio  $4m$  que será utilizado em um prédio e cometeu um erro no cálculo: o volume de água possível nesse reservatório é bem maior que  $50m^3$ , estabelecido como limite. Dessa forma, é preciso determinar o nível  $h$  máximo que a água pode atingir nesse recipiente para não ultrapassar o limite de volume estabelecido. Determine o valor de  $h$  com precisão  $10^{-3}$  e um máximo de 5 iterações utilizando o método da bisseção e o método de pégaso.

O volume de uma calota esférica é dado por:

$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h) \quad (6)$$



$k$	$a_k$	$b_k$	$c_k$	$f(c_k)$	$b_k - a_k$
0	-1.00000	0.50000	-0.25000	-1.03125	1.50000
1	-0.25000	0.50000	0.12500	0.31641	0.75000
2	-0.25000	0.12500	-0.06250	-0.20361	0.37500
3	-0.06250	0.12500	0.03125	0.08990	0.18750
4	-0.06250	0.03125	-0.01562	-0.04786	0.09375
5	-0.01562	0.03125	0.00781	0.02319	0.04688
6	-0.01562	0.00781	-0.00391	-0.01178	0.02344
7	-0.00391	0.00781	0.00195	0.00584	0.01172
8	-0.00391	0.00195	-0.00098	-0.00293	0.00586
9	-0.00098	0.00195	0.00049	0.00146	0.00293
10	-0.00098	0.00049	-0.00024	-0.00073	0.00146

Tabela 1: Iterações do método da bisseção

$k$	$a_k$	$b_k$	$c_k$	$f(c_k)$	$b_k - a_k$
0	-1.00000	0.50000	0.38462	0.67592	1.50000
1	-1.00000	0.38462	0.28789	0.57987	1.38462
2	-1.00000	0.28789	0.20994	0.47202	1.28789
3	-1.00000	0.20994	0.14964	0.36605	1.20994
4	-1.00000	0.14964	0.10471	0.27257	1.14964
5	-1.00000	0.10471	0.07224	0.19659	1.10471
6	-1.00000	0.07224	0.04932	0.13846	1.07224
7	-1.00000	0.04932	0.03342	0.09586	1.04932
8	-1.00000	0.03342	0.02253	0.06557	1.03342
9	-1.00000	0.02253	0.01513	0.04448	1.02253
10	-1.00000	0.01513	0.01014	0.03000	1.01513
11	-1.00000	0.01014	0.00678	0.02016	1.01014
12	-1.00000	0.00678	0.00453	0.01351	1.00678
13	-1.00000	0.00453	0.00303	0.00904	1.00453
14	-1.00000	0.00303	0.00202	0.00604	1.00303
15	-1.00000	0.00202	0.00135	0.00403	1.00202
16	-1.00000	0.00135	0.00090	0.00269	1.00135
17	-1.00000	0.00090	0.00060	0.00180	1.00090
18	-1.00000	0.00060	0.00040	0.00120	1.00060
19	-1.00000	0.00040	0.00027	0.00080	1.00040

Tabela 2: Iterações do método da posição falsa

$k$	$a_k$	$b_k$	$c_k$	$f(c_k)$	$b_k - a_k$
0	-1.00000	0.50000	0.38462	0.67592	1.50000
1	-1.00000	0.38462	0.21161	0.47467	1.38462
2	-1.00000	0.21161	0.03496	0.10007	1.21161
3	-1.00000	0.03496	-0.00825	-0.02503	1.03496
4	0.03496	-0.00825	0.00039	0.00118	0.04321
5	-0.00825	0.00039	0.00000	0.00001	0.00865

Tabela 3: Execução do método de Pégaso