Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá
Matemática Computacional (2017.1)
Prof. Wladimir Araújo Tavares

Trabalho de Implementação
Raízes da Equação
Trabalho em equipe máximo 2 alunos
Data de Entrega: 30/05/2017
Plágio será punidos com nota zero

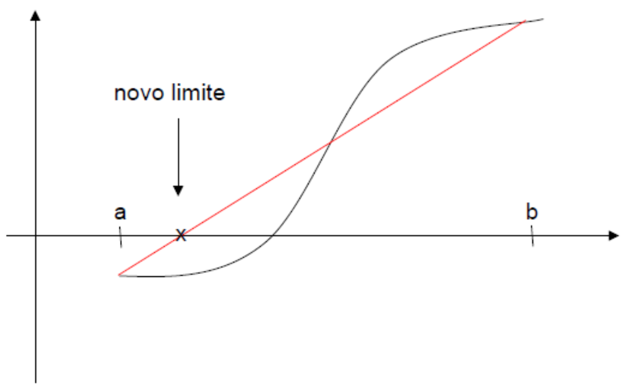
Repositório: `https://github.com/WladimirTavares/matematica_computacional2017/tree/master/raizes_de_equacoes`

No código disponível no repositório acima, temos a implementação dos seguintes métodos para encontrar raízes de equações:

- Método da Bisseção
- Método da Posição Falsa
- Método de Newton

Método da Posição Falsa

No método da posição falsa, a função $f(x)$ é aproximada por uma função linear $g(x)$.



O coeficiente angular da função $g(x)$ é:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (1)$$

Considerando $(x_0, y_0) = (a, f(a))$,$(x_1, y_1) = (b, f(b))$,$m = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$ e $(x, 0)$ é a raiz da função $g(x)$. Temos que

$$
\begin{aligned}
y - y_0 &= m(x - x_0) \\
-f(a) &= \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \\
-f(a) &= x\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - a\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \\
x\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} &= -f(a) + a\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \\
x\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} &= \tfrac{-f(a)(b-a)+a(f(b)-f(a))}{b-a} \\
x(f(b)-f(a)) &= -bf(a) + af(a) + af(b) - af(a) \\
x(f(b)-f(a)) &= af(b) - bf(a) \\
x &= \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}
\end{aligned}
$$

A raiz de $g(x)$ é utilizada como uma aproximação da raiz de $f(x)$

A ideia do método é partir de um intervalo $[a_0, b_0]$ com $f(a_0)f(b_0) < 0$, em cada passo do algoritmo, encontrar um intervalo menor $[a_k, b_k]$ com $f(a_k)f(b_k) < 0$. Na iteração k,

$$
c_{k+1} = \frac{a_{k-1}f(b_{k-1}) - b_{k-1}f(a_{k-1})}{f(b_{k-1}) - f(a_{k-1})} \tag{2}
$$

Se $f(c_k)f(a_{k-1}) < 0$ então $a_k = a_{k-1}$ e $b_k = c_k$, caso contrário, $a_k = c_k$ e $b_k = b_{k-1}$. O processo é repetido até que seja encontrada uma raiz aproximada, suficientemente compatível com o erro estimado. A única diferença entre o método da posição falsa e o método da bissecção é que o último utiliza $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$

A interpretação gráfica do método da Posição Falsa pode ser vista da Figura 1.

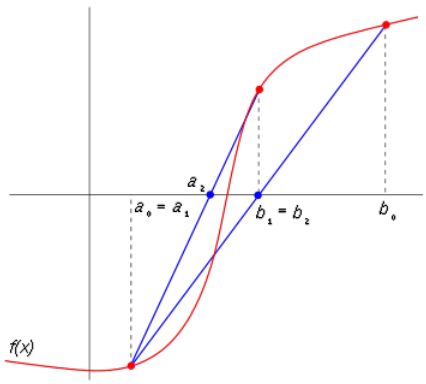


Figura 1: Interpretação Gráfica do método da Posição Falsa

Se a função é côncava ou convexa em $[a, b]$, então o método da Posição Falsa uma das extremidades permanece fixa, como demonstrado na Figura 2.

Utilizando o método da bissecção para encontrar a raiz ξ da função $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$ com $\varepsilon = 0.001$ e $\xi \in [-1, 0.5]$.

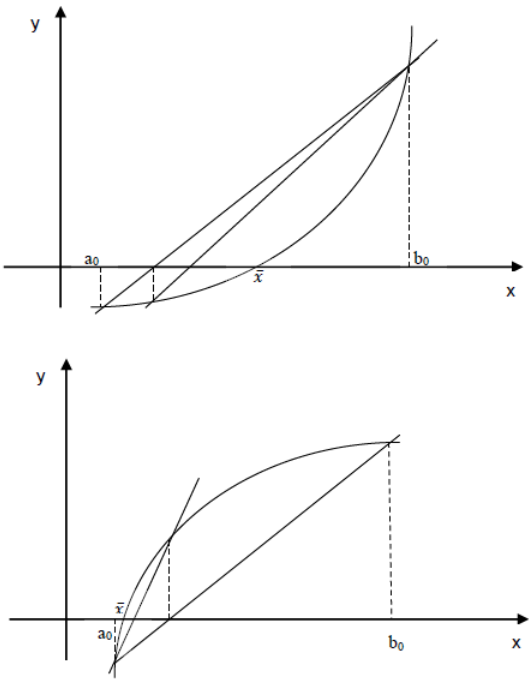


Figura 2: Comportamento do método da Posição Falsa quando a função f é côncava ou convexa no intercalo

k	a_k	b_k	c_k	$f(c_k)$	$b_k - a_k$
0	-1.00000	0.50000	-0.25000	-1.03125	1.50000
1	-0.25000	0.50000	0.12500	0.31641	0.75000
2	-0.25000	0.12500	-0.06250	-0.20361	0.37500
3	-0.06250	0.12500	0.03125	0.08990	0.18750
4	-0.06250	0.03125	-0.01562	-0.04786	0.09375
5	-0.01562	0.03125	0.00781	0.02319	0.04688
6	-0.01562	0.00781	-0.00391	-0.01178	0.02344
7	-0.00391	0.00781	0.00195	0.00584	0.01172
8	-0.00391	0.00195	-0.00098	-0.00293	0.00586
9	-0.00098	0.00195	0.00049	0.00146	0.00293
10	-0.00098	0.00049	-0.00024	-0.00073	0.00146

O valor de ξ encontrado foi -0.000244141.

Utilizando o método da posição falsa para encontrar a raiz ξ da função $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$ com $\varepsilon = 0.001$ e $\xi \in [-1, 0.5]$.

k	a_k	b_k	c_k	$f(c_k)$	$b_k - a_k$
0	-1.00000	0.50000	0.38462	0.67592	1.50000
1	-1.00000	0.38462	0.28789	0.57987	1.38462
2	-1.00000	0.28789	0.20994	0.47202	1.28789
3	-1.00000	0.20994	0.14964	0.36605	1.20994
4	-1.00000	0.14964	0.10471	0.27257	1.14964
5	-1.00000	0.10471	0.07224	0.19659	1.10471
6	-1.00000	0.07224	0.04932	0.13846	1.07224
7	-1.00000	0.04932	0.03342	0.09586	1.04932
8	-1.00000	0.03342	0.02253	0.06557	1.03342
9	-1.00000	0.02253	0.01513	0.04448	1.02253
10	-1.00000	0.01513	0.01014	0.03000	1.01513
11	-1.00000	0.01014	0.00678	0.02016	1.01014
12	-1.00000	0.00678	0.00453	0.01351	1.00678
13	-1.00000	0.00453	0.00303	0.00904	1.00453
14	-1.00000	0.00303	0.00202	0.00604	1.00303
15	-1.00000	0.00202	0.00135	0.00403	1.00202
16	-1.00000	0.00135	0.00090	0.00269	1.00135
17	-1.00000	0.00090	0.00060	0.00180	1.00090
18	-1.00000	0.00060	0.00040	0.00120	1.00060
19	-1.00000	0.00040	0.00027	0.00080	1.00040

O valor de ξ encontrado foi 0.000266329.

Observe que neste caso, uma das extremidades do intervalo ficou fixa durante o método da posição falsa.

Na literatura, podemos encontrar algumas alterações do método da posição falsa para ter uma convergência mais rápida. O método de Pégaso é umas dessas adaptações. Durante o método de Pégaso, os pesos atribuídos aos pontos $[a_k, b_k]$ são modificados apropriadamente.

Método de Pégaso

A ideia do método é partir dos valores $(a_0, F(a_0), b_0, F(b_0))$ com $F(a_0) = f(a_0)$,$F(b_0) = f(b_0)$ e $F(a_0)F(b_0) < 0$, encontrar novos valores $(a_k, F(a_k), b_k, F(b_k))$ com $F(a_k)F(b_k) < 0$ em cada passo do método. Na iteração k,

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= \frac{a_{k-1}F(b_{k-1}) - b_{k-1}F(a_{k-1})}{F(b_{k-1}) - F(a_{k-1})} \\ F(c_{k+1}) &= f(c_{k+1}) \end{aligned}$$

Se $F(a_{k-1})F(c_k) < 0$ então

$$(a_k, F(a_k), b_k, F(b_k)) \leftarrow (a_{k-1}, F(a_{k-1})\frac{F(b_{k-1})}{F(b_{k-1}) + F(c_k)}, c_k, F(c_k)) \tag{3}$$

Note que o valor $F(a_k)$ é reduzido por um fator $\frac{F(b_{k-1})}{F(b_{k-1})+F(c_k)}$ para evitar a retenção de um ponto como ocorre no método da posição falsa. Com isso, estamos diminuindo o valor do ponto fixo na média ponderada e aumentando a velocidade de convergência. Em alguns casos, o valor de c_k pode passar da raiz, ou seja, $F(a_{k-1})F(c_k) > 0$. Quando isso acontece, consideramos que aconteceu um estouro. Essa condição será tratada a seguir.

Se $F(a_{k-1})F(c_k) > 0$ então

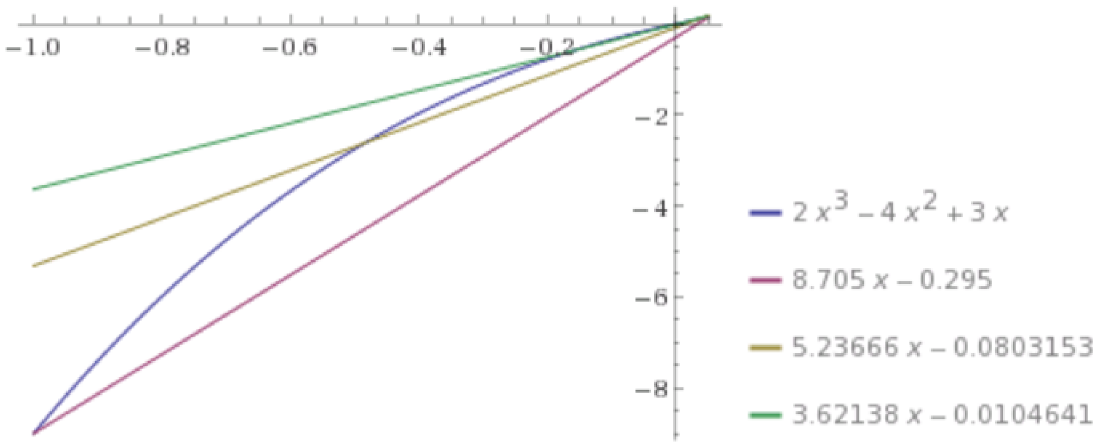
$$(a_k, F(a_k), b_k, F(b_k)) \leftarrow (b_{k-1}, F(b_{k-1}), c_k, F(c_k)) \quad (4)$$

Observe que o ponto fixo da função muda de a_{k-1} para b_{k-1} tornando condição $F(b_{k-1})F(c_k) < 0$ satisfeita. Dessa maneira a aproximação passa a ser contrária a anterior.

Utilizando o método de Pégaso, encontre a raiz ξ da função $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x$ com $\varepsilon = 0.001$ e $\xi \in [-1, 0.5]$.

k	a_k	b_k	c_k	$f(c_k)$	$b_k - a_k$
0	-1.00000	0.05000	0.03389	0.09715	1.05000
1	-1.00000	0.03389	0.01534	0.04508	1.03389
2	-1.00000	0.01534	0.00289	0.00863	1.01534
3	-1.00000	0.00289	0.00006	0.00017	1.00289

Interpretação gráfica do método de Pégaso:



1. Implemente o Método de Pégaso para encontrar uma raiz da equação $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ com erro ε.

2. Use o método da Bisseção, Posição Falsa, Método de Pégaso para encontrar uma raiz de $x^5 - 3x^4 - 3x^2 + 2$ com $\varepsilon = 2^{-5}$.

3. Use o método da Bisseção, Posição Falsa e Método de Pégaso para encontrar uma raiz de $\sqrt{x} - 5^{-x}$ com $\varepsilon = 10^{-3}$

4. Use o método da Bisseção, Posição Falsa e Método de Pégaso para aproximar uma raiz de $x^5 - x^4 - 4x + 1$ com $\varepsilon = 0.01$.

5. Use o método da Bisseção, Posição Falsa e Método de Pégaso para encontrar uma raiz de $f(x) = 0.05x^3 - 0.4x^2 + 3xsenx = 0$ com $\varepsilon = 0.005$

6. Uma condição suficiente para a convergência do método de Newton é que $f'(x)$ e $f''(x)$ sejam não nulas e preservem o sinal em (a, b) e x_0 seja tal que $f(x_0)f''(x_0) > 0$. Desenvolva uma função que tente verificar se essa condição é satisfeita.

7. Use o método da Newton para encontrar uma raiz de $x^5 - 3x^4 - 3x^2 + 2$ com $\varepsilon = 2^{-5}$ utilizando sua função que verifica a condição de convergência.

8. A concentração hidrogeniônica $[H3O+]$ de uma solução diluída em um ácido fraco pode ser calculada resolvendo-se a equação $[H3O+]^3 + K_a[H3O+]^2 - (K_aC_a + K_w)[H3O+] - K_wK_a = 0$, em que K_a é a constante de dissociação do ácido, C_a a concentração do ácido e K_w o produto iônico da água. Determine o pH de uma solução de ácido bórico a 250řC, sabendo-se que $pH = -log_1 0[H3O+]$, $K_a = 6.510^{-10}M$, $C_a = 2.010^{-5}M$ e $K_w = 1.010^{-14}M$ utilizando o Método da Bisseção com $\varepsilon = 10^{-2}$