Feuille d'exercices - Chapitre 10

Vrai ou faux ?

1. La valeur absolue n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.
2. Si f est continue, la dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est $x \mapsto f(x) - f(a)$.
3. Une primitive de la fonction constante égale à 1 est $x \mapsto x - 2021$.
4. La fonction inverse n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}^{-*}$.
5. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors $G : x \mapsto \displaystyle\int_{2x}^{3x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $G'(x) = f(3x) - f(2x)$.

1 Divers

Exercice 1 - Autour de la valeur absolue : ✪ Calculer :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^n \sum_{k=0}^n |x-k|\,\mathrm{d}x\,.$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-2}^5 \frac{|x+1|}{|x|+1}\,\mathrm{d}x\,.$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\,\mathrm{d}x\,.$ Donner sans calcul la valeur de $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^1 x|x|\,\mathrm{d}x\,.$

Correction :

1. Par linéarité de l'intégrale puis d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{k=0}^n \int_0^n |x-k|\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^n \int_0^k |x-k|\,\mathrm{d}x + \int_k^x |x-k|\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^n \int_0^k (k-x)\,\mathrm{d}x + \int_k^x (x-k)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^n \left[-\frac{(k-x)^2}{2}\right]_0^k + \left[\frac{(x-k)^2}{2}\right]_k^n \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{2} + \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)^2}{2} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{2} + \sum_{j=0}^n \frac{j^2}{2} \\
&= \sum_{k=0}^n k^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

2. Séparons les cas selon le signe de la fonction intégrée.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-2}^{-1} \frac{|x+1|}{|x|+1}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{|x+1|}{|x|+1}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{5} \frac{|x+1|}{|x|+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{-1} \frac{(-1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{x+1}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{5} \frac{x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{-1} \frac{1-x}{1-x}\,\mathrm{d}x - 2\int_{-2}^{-1} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{0} \frac{1-x}{1-x}\,\mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x + 5 \\
&= 1 - 2[-\ln(1-x)]_{-2}^{-1} - 1 + 2[-\ln(1-x)]_{-1}^{0} + 5 \\
&= -2(-\ln(2)+\ln(3)) + 2(\ln(2)) + 5 \\
&= -2\ln(3) + 4\ln(2) + 5
\end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{-1}^{0} -x^2\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x^2\,\mathrm{d}x \\
&= -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{2} \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Enfin, $I_4 = 0$ car intégrale d'une fonction impaire (car produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire) sur un intervalle centré en 0.

Exercices 2 - Fonctions composées : ✪ Donner une primitive des fonctions suivantes (on donnera des primitives sans s'intéresser aux domaines de définition ou de primitivation) :

1. $f : x \mapsto xe^{-x^2}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$.
7. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln(x)^2$.
8. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{1-x^2}}$.
9. $f : x \mapsto \cos^3(x)\sin^4(x)$.
10. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{1+x^2}$.
11. $f : x \mapsto \dfrac{\tan(\ln(x))}{x}$.
12. $f : x \mapsto e^{e^x+x}$.
13. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.
14. $f : x \mapsto e^x\sin(e^x)$.
15. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{a+b\cos(x)}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

Correction :

1. On a une fonction de la forme $-u'e^u/2$ qui se primitive en $-e^u/2$ si bien que

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-x^2}}{2}$$

2. On a une fonction de la forme $u' \times u^{-1/2}$ qui se primitive en $2u^{1/2}$, si bien que

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{\ln(x)}$$

3. On a une fonction de la forme $u'e^u$ qui se primitive en e^u donc une primitive de f est $x \mapsto e^{\tan(x)}$.
4. On a une fonction de la forme $u' \times u$ qui se primitive en $u^2/2$ si bien qu'une primitive de f est $x \mapsto \ln(x)^2/2$ (le carré est à l'extérieur du ln).

5. On a $f(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$ donc f est de la forme $u'/2\sqrt{u}$ donc
$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{x^2+3}$$
6. On a une fonction de la forme $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u^2}$ donc une primitive de f est $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{-1}{u}$ donc
$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{2\left(e^{2x}+1\right)}$$
7. On a une fonction de la forme $u' \times u^2$ donc une primitive de f est $u^3/3$ c'est-à-dire :
$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(x)^3}{3}$$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \sqrt{\mathrm{Arcsin}(x)}$ donc on a une fonction de la forme $u' \times \sqrt{u} = u' \times u^{1/2}$ si bien qu'une primitive est $u^{3/2}/(3/2) = 2u^{3/2}/3$ si bien qu'une primitive de f est $x \mapsto \dfrac{2}{3}\mathrm{Arcsin}^{3/2}(x)$.
9. Si $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) \times \cos^2(x)\sin^4(x) \\ &= \cos(x) \times \left(1 - \sin^2(x)\right)\sin^4(x) \\ &= \cos(x)\sin^4(x) - \cos(x)\sin^6(x) \end{aligned}$$
On a des fonctions de la forme $u'u^4$ et $u'u^6$ donc une primitive de f est $x \mapsto \dfrac{\sin^5(x)}{5} - \dfrac{\sin^7(x)}{7}$.
10. On a une fonction de la forme $u' \times u$ donc une primitive de f est u^2 c'est-à-dire $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)^2$.
11. On a une fonction de la forme $u' \times \tan(u)$. Or, une primitive de tan est $-\ln|\cos|$ donc une primitive de f est $x \mapsto -\ln|\cos(u)| = -\ln|\cos(\ln(x))|$.
12. Tout d'abord, si $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \times e^{e^x}$ donc on a une fonction de la forme $u' \times e^u$ donc une primitive de f est $x \mapsto e^{e^x}$.
13. On a $f(x) = (x-1)^{-1/3}$ donc une primitive de f est $x \mapsto \dfrac{(x-1)^{2/3}}{2/3} = \dfrac{3}{2}(x-1)^{2/3}$.
14. On a une fonction du type $u'\sin(u)$ donc
$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\cos\left(e^x\right)$$
15. On a une fonction sous la forme $-\dfrac{1}{b} \times \dfrac{u'}{u}$ donc une primitive de f est $x \mapsto -\dfrac{1}{b}\ln(a + b\cos(x))$.

Exercice 3 - Polynômes de Bernoulli : ✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe une unique fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que
$$g' = f \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
2. On peut donc définir par récurrence la suite de fonctions polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
   - $B_0 = 1$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*, {B_n}' = n \times B_{n-1}$
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$

   Ainsi, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie : les fonctions polynômes B_n sont appelés polynômes de Bernoulli.
   (a) Expliciter B_1, B_2 et B_3.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 2, B_n(1) - B_n(0) = 0$.

Correction :

1. Soit F une primitive de f (qui existe car f est continue). Soit g une autre primitive de f. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = F + \lambda$. Alors :

$$\begin{aligned} g \text{ convient} &\iff \int_0^1 F(t) + \lambda \,\mathrm{d}t = 0 \\ &\iff \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \lambda \,\mathrm{d}t = 0 \\ &\iff \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t + \lambda = 0 \\ &\iff \lambda = -\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En d'autres termes, il existe un unique λ tel que $F + \lambda$ convienne : d'où l'existence et l'unicité de g.

2. (a) ${B_1}' = 1 \times B_0 = 1$ donc il existe b_1 tel que, pour tout x, $B_1(x) = x + b_1$. Or,

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_1(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 t + b_1 \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + b_1 \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + b_1 \\ &= \frac{1}{2} + b_1 \end{aligned}$$

et puisque cette intégrale est nulle, on en déduit que $b_1 = -1/2$ si bien que B_1 est la fonction $x \mapsto x - 1/2$. On sait que ${B_2}' = 2 \times B_1$ donc, pour tout x, ${B_2}'(x) = 2x - 1$ si bien qu'il existe b_2 tel que pour tout x, $B_2(x) = x^2 - x + b_2$. On trouve de même que $b_2 = 1/6$ si bien que B_2 est la fonction $x \mapsto x^2 - x + \dfrac{1}{6}$. On trouve de même que B_3 est la fonction $x \mapsto x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$.

(b) Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} B_n(1) - B_n(0) &= \int_0^1 {B_n}'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 nB_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= n\int_0^1 B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

2 Fonctions rationnelles

Exercice 4 : ✪ Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x-2)(x-3)(x-4)}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 4x + 7}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 6x + 9}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3 + 1}$.

Correction :

1. Décomposons en éléments simples. Puisque le quotient est nul (le degré du numérateur vaut 1 et celui du dénominateur vaut 3), il existe a, b, c tels que, pour tout $x \neq 2, 3, 4$:

$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x-4}$$

On trouve comme d'habitude $a = 5/2$, $b = -7$ et $c = 9/2$ si bien que pour tout $x \neq 2, 3, 4$,

$$f(x) = \frac{5}{2(x-2)} - \frac{7}{x-3} + \frac{9}{2(x-4)}$$

Dès lors, une primitive de f est (ne pas oublier les valeurs absolues) $x \mapsto \dfrac{5}{2} \ln|x-2| - 7\ln|x-3| + \dfrac{9}{2} \ln|x-4|$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ si bien que, pour tout $x \neq 1, 2$,

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

On trouve de même qu'une primitive de f est $x \mapsto -\ln|x-1| + \ln|x-2|$.

3. Le discriminant de $x^2 + 4x + 7$ étant strictement négatif, f ne peut pas être écrite sous une forme plus simple. On se retrouve donc dans le cas de figure du cours. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisqu'il n'y a pas de x, on se ramène à la deuxième étape : mettre le dénominateur sous forme canonique.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 + 2 \times x \times 2 + 7} \\ &= \frac{1}{(x+2)^2 + 3} \end{aligned}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} \int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+2)^2 + 3} \\ &= \frac{1}{3} \int^x \frac{\mathrm{d}t}{1 + \dfrac{(t+2)^2}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \int^x \frac{\mathrm{d}t}{1 + \left(\dfrac{t+2}{\sqrt{3}}\right)^2} \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $u = \dfrac{t+2}{\sqrt{3}}$, $t = u\sqrt{3} - 2$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u\,\sqrt{3}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{3} \int^{\frac{x+2}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{d}t\,\sqrt{3}}{1+u^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \mathrm{Arctan}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

4. Le dénominateur a un discriminant nul (ou on reconnaît une identité remarquable) si bien que, pour tout $x \neq 3$,

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$$

On en déduit qu'une primitive de f est $x \mapsto \dfrac{-1}{x-3}$.

5. Pour tout $x \neq -1$,

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

Dès lors, il existe a, b, c tels que pour tout $x \neq -1$,

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}$$

En multipliant par $x + 1$ et en faisant tendre x vers -1, il vient $a = 1/3$. En évaluant en 0, on trouve $1 = a + c$ donc $c = 2/3$ et en évaluant en 1 on trouve $1/2 = a/2 + b + c$ si bien que $b = -1/3$. En d'autres termes, pour tout $x \neq -1$,

$$f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \times \frac{-x+2}{x^2 - x + 1}$$

Soit $x \neq -1$. Posons $g(x) = \dfrac{-x+2}{x^2-x+1}$. Il suffit donc de trouver une primitive de g. Première étape : faire apparaître du u'/u.

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2} \times \frac{2x-4}{x^2-x+1} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

Posons enfin $h(x) = \dfrac{1}{x^2-x+1}$. Idem, comme en cours, écrivons le dénominateur sous forme canonique :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{2} + 1} \\ &= \frac{1}{(x-1/2)^2 + 3/4} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{1}{1 + \frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2} \end{aligned}$$

Dès lors, en effectuant le changement de variable $u = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \dfrac{1}{2}\right)$, $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}u + \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}u}{2}$, une primitive de h est :

$$\begin{aligned} \int^x h(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{4}{3} \times \int^x \frac{\mathrm{d}t}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^2} \\ &= \frac{4}{3} \times \int^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x-1/2)} \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Finalement, une primitive de f est :

$$x \mapsto \frac{1}{3} \times \ln|x+1| + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

c'est-à-dire :

$$x \mapsto \frac{1}{3} \times \ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

Exercice 5 : ✪ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_3^4 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t-2)}$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{2t+3}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{9t^2+6t+5}$.
5. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t-2}$.
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+5}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$.
7. $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{t(t^2-4)}\,\mathrm{d}t$.
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{6t^2+t+5}{2t+1}\,\mathrm{d}t$.
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3+2t}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$.

Correction :

1. Pour tout $t \neq \pm 1$,
$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)}$$
Il existe donc a et b tels que pour tout $t \neq \pm 1$,
$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}$$
On trouve comme d'habitude $a = 1/2$ et $b = -1/2$ si bien que
$$\begin{aligned}
\int_3^4 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} &= \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} \\
&= \frac{1}{2}[\ln|t-1|]_3^4 - \frac{1}{2}[\ln[t+1|]_3^4 \\
&= \frac{1}{2}(\ln(3)-\ln(2)) - \frac{1}{2}(\ln(5)-\ln(4)) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3\times 4}{2\times 5}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{6}{5}\right)
\end{aligned}$$
2. On décompose en éléments simples : pour tout $t \neq -1, 2$:
$$\frac{1}{(t+1)(t-2)} = -\frac{1}{3}\times\frac{1}{t+1} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{t-2}$$
si bien que (ne pas oublier la valeur absolue dans la deuxième intégrale !)
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t-2)} &= -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t-2} \\
&= -\frac{1}{3}[\ln|t+1|]_0^1 + \frac{1}{3}[\ln|t-2|]_0^1 \\
&= -\frac{1}{3}\times\ln(2) - \frac{1}{3}\times\ln(2) \\
&= -\frac{2}{3}\times\ln(2)
\end{aligned}$$
3. Méthode du « $+3-3$ » à la deuxième ligne :
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t}{2t+3} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{2t+3} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t+3}{2t+3} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{3}{2t+3} \\
&= \frac{1}{2}\times 1 - \frac{3}{2}\times\left[\frac{\ln|2t+3|}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\times 1 - \frac{3}{2}\times\frac{\ln(5)-\ln(3)}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\times(\ln(5)-\ln(3))
\end{aligned}$$
4. Le discriminant du dénominateur étant strictement négatif, on revient encore à l'exemple du cours. On met sous forme canonique etc. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9t^2+6t+5} &= \frac{1}{9\left(t^2+\dfrac{2t}{3}+\dfrac{5}{9}\right)} \\
&= \frac{1}{9\left(t^2+2\times t\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{9}\right)} \\
&= \frac{1}{9\left(\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{9}\right)} \\
&= \frac{1}{9\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2+4}
\end{aligned}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{9t^2+6t+5} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{9\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2+4} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\dfrac{9}{4}\left(t+\dfrac{1}{3}\right)^2}
\end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $u=\dfrac{3}{2}\left(t+\dfrac{1}{3}\right)$, $t=\dfrac{2}{3}\times u-\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{d}t = \dfrac{2\,\mathrm{d}u}{3}$ si bien que :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{9t^2+6t+5} &= \frac{1}{4}\int_{1/2}^2 \frac{2}{3}\times\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \frac{1}{6}[\mathrm{Arctan}(u)]_{1/2}^2 \\
&= \frac{1}{6}\times\left(\mathrm{Arctan}(2)-\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

5. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $t^2+t-2=(t-1)(t+2)$. On trouve comme d'habitude que pour tout $t\neq 1,-2$:

$$\frac{1}{t^2+t-2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{t-1}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{t+2}$$

On trouve comme d'habitude que cette intégrale vaut $\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{8}{5}\right)$.

6. Commençons par décomposer en éléments simples : pour tout $t\neq -1$,

$$\frac{2t+5}{(t+1)^2}=\frac{a}{t+1}+\frac{b}{(t+1)^2}$$

En multipliant par $(t+1)^2$ et en faisant tendre t vers -1, on trouve $b=3$ puis, en évaluant en 0, on trouve que $5=a+b$ donc $a=2$ si bien que

$$\frac{2t+5}{(t+1)^2}=\frac{2}{t+1}+\frac{3}{(t+1)^2}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{2t+5}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t &= 2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+1}+3\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2} \\
&= 2[\ln|t+1|]_0^1+3\left[\frac{-1}{t+1}\right]_0^1 \\
&= 2\ln(2)+\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

7. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t(t^2-4) = t(t-2)(t+2)$ donc il existe a, b, c tels que pour tout $t \neq 0, \pm 2$,

$$\frac{4}{t(t^2-4)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-2} + \frac{c}{t+2}$$

On trouve comme d'habitude que $a=-1$, $b=1/2$ et $c=1/2$. On trouve comme précédemment (ne pas oublier les valeurs absolues dans les ln) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{27}{20}\right)$.

8. Ici, attention avant de décomposer en éléments simples : il ne faut pas oublier le quotient. On trouve que la division euclidienne du numérateur par le dénominateur est : $(6t^2+t+5) = (2t+1)\times(3t-1)+6$ si bien que pour tout $t \neq -1/2$,

$$\frac{6t^2+t+5}{2t+1} = 3t-1+\frac{6}{2t+1}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{6t^2+t+5}{2t+1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (3t+1)\,\mathrm{d}t + 3\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{2t+1} \\ &= \left[\frac{3t^2}{2}+t\right]_0^1 + 3[\ln|2t+1|]_0^1 \\ &= \frac{5}{2}+3\ln(3)\end{aligned}$$

9. Idem, commençons par effectuer la division euclidienne, et on trouve : $t^3+2t = (t^2+t+1)\times(t-1)+2t+1$. Dès lors, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\frac{t^3+2t}{t^2+t+1} = t-1+\frac{2t+1}{t^2+t+1}$$

L'avantage est que la fraction est déjà sous la forme u'/u donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^3+2t}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (t-1)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1} \\ &= \left[\frac{t^2}{2}-t\right]_0^1 + [\ln|t^2+t+1|]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2}+\ln(3)\end{aligned}$$

Exercice 6 : ✪✪✪ Donner une primitive des fonctions suivantes là où elles sont définies :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2+x^4}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)(x+2)^2}$.

Correction :

1. Si on pose $Z = x^2$, l'équation $x^4+x^2+1=0$ devient $Z^2+Z+1=0$ dont les solutions sont j et j^2 si bien que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x^4+x^2+1 &= (Z-j)(Z-j^2) \\
&= \left(x^2-e^{2i\pi/3}\right)\times\left(x^2-e^{4i\pi/3}\right) \\
&= \left(x-e^{i\pi/3}\right)\times\left(x+e^{i\pi/3}\right)\times\left(x-e^{2i\pi/3}\right)\times\left(x+e^{2i\pi/3}\right) \\
&= \left(x-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(x-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \left(x-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(x-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\times\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) \\
&= (x^2-x+1)\times(x^2+x+1)
\end{aligned}$$

Dès lors, il existe (a,b,c,d) uniques tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{ax+b}{x^2-x+1}+\frac{cx+d}{x^2+x+1}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, en évaluant en $-x$:

$$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{-ax+b}{x^2+x+1}+\frac{-cx+d}{x^2-x+1}$$

Par unicité, on en déduit que $c=-a$ et $b=d$. En évaluant en 0, il vient : $1=b+d$ et puisque $b=d$, on trouve $b=d=1/2$. Enfin, en évaluant en 1, on obtient : $1/3=a+b+\dfrac{c+d}{3}$ donc

$$\frac{1}{3}=a+\frac{1}{2}-\frac{a}{3}+\frac{1}{6}$$

On trouve alors $2a/3=-1/3$ et donc $a=-1/2$ et $c=1/2$. En d'autres termes, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{-1}{2}\times\frac{x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\times\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Posons

$$g(x)=\frac{x-1}{x^2-x+1}\qquad\text{et}\qquad h(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Cherchons à présent une primitive de g et une primitive de h. Faisons comme en classe : faisons apparaître du u'/u.

$$g(x)=\frac{1}{2}\times\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2-x+1}$$

Posons $u(x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}$. Il suffit donc de trouver une primitive de u pour trouver une primitive de g. Mettons le dénominateur sous forme canonique :

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{x^2-2\times x\times\dfrac{1}{2}+1} \\
&= \frac{1}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}
\end{aligned}$$

Par conséquent, en faisant aussi le changement de variable $u=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)$, $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}u+\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{d}t=\dfrac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}u}{2}$:

$$\begin{aligned}
\int^x u(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{4}{3}\int^x \frac{dt}{1+\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{4}{3}\int^x \frac{dt}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2} \\
&= \frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\int^{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)} \frac{du}{1+u^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\times \mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

On trouve donc qu'une primitive de g est

$$x\mapsto \frac{1}{2}\times\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\times\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$$

Par un raisonnement analogue, une primitive de h est :

$$x\mapsto \frac{1}{2}\times\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\times\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

si bien qu'une primitive de f est :

$$x\mapsto -\frac{1}{4}\times\ln|x^2-x+1|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{1}{4}\times\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\times\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$$

2. Il existe a,b,c,d tels que pour tout $x\neq -2$,

$$f(x)=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{(x+2)^2}+\frac{cx+d}{1+x^2}$$

En multipliant par $(x+2)^2$ et en faisant tendre x vers -2, il vient : $b=-3/5$. En multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve : $0=a+c$ donc $c=-a$. En évaluant en -1, on trouve :

$$\begin{aligned}
0 &= a+b+\frac{-c+d}{2} \\
&= a-\frac{3}{5}+\frac{a+d}{2} \\
&= \frac{3a}{2}-\frac{3}{5}+\frac{d}{2}
\end{aligned}$$

Enfin, en évaluant en 0, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} &= \frac{a}{2}+\frac{b}{4}+d \\
&= \frac{a}{2}-\frac{3}{20}+d
\end{aligned}$$

On trouve après calculs que $a=8/25$, $c=-8/25$ et $d=6/25$ si bien que pour tout $x\neq -2$,

$$f(x)=\frac{8}{25}\times\frac{1}{x+2}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{-8x+6}{25(1+x^2)}$$

Trouver une primitive des deux premiers termes ne présente pas de difficulté. De plus,

$$\frac{-8x+6}{25(1+x^2)} = \frac{-4}{25}\times\frac{2x}{1+x^2}+\frac{6}{25}\times\frac{1}{1+x^2}$$

Finalement, une primitive de f est :

$$x\mapsto\frac{8}{25}\times\ln|x+2|+\frac{3}{5}\times\frac{1}{x+5}-\frac{4}{25}\times\ln|1+x^2|+\frac{6}{25}\times\mathrm{Arctan}(x)$$

3 Trigonométrie sans changement de variable

Exercice 7 - Linéarisation : ✪

1. Donner une primitive de la fonction $f : x \mapsto \sin(x)\sin(2x)\sin(3x)$.
2. **Remake :** Donner une primitive de $f : x \mapsto \sin(x)^2\cos(2x)$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule donnant $\sin(a)\sin(b)$ puis celle donnant $\sin(a)\cos(b)$ et $\sin(2a)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(\cos(-x) - \cos(3x))\sin(3x) \\ &= \frac{1}{2}\sin(3x)\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(3x)\cos(3x) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\sin(4x) + \sin(2x)) - \frac{\sin(6x)}{4} \\ &= \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{\sin(6x)}{4} \end{aligned}$$

Dès lors, une primitive de f est :

$$F : x \mapsto \frac{-\cos(4x)}{16} - \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{\cos(6x)}{24}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant le fait que $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2} \times \cos(2x) \\ &= \frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\cos^2(2x)}{2} \\ &= \frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\cos(4x)+1}{4} \\ &= \frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\cos(4x)}{4} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

On trouve finalement qu'une primitive de f est :

$$F : x \mapsto \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{\sin(4x)}{16} - \frac{x}{4}$$

Exercice 8 : ✪ Soient $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Calculer (en différenciant les cas) l'intégrale

$$I_{n,k} = \int_0^\pi \cos(nt)\cos(kt)\,\mathrm{d}t$$

Correction : En utilisant la formule donnant $\cos(a)\cos(b)$, et par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n,k} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+k)t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n-k)t)\,\mathrm{d}t$$

On a envie de primitiver en $t \mapsto \dfrac{\sin((n\pm k)t)}{n\pm k}$: encore faut-il que les dénominateurs soient non nuls. Cela justifie la disjonction de cas suivante :

- Premier cas : $n \neq k$ (et alors $n+k \neq 0$ car la seule façon d'obtenir $n+k=0$ avec n et k positifs est d'avoir $n=k=0$). Alors $n \pm k \neq 0$ donc :

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+k)t)}{n+k}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-k)t)}{n-k}\right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Deuxième cas : $n=k\neq 0$. Alors $n-k=0$ mais $n+k=0$, un seul des deux est nul. Dès lors,

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+k)t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+k)t)}{n+k}\right]_0^\pi + \frac{\pi}{2} \\ &= 0+\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- Troisième cas : $n=k=0$. Alors $n+k=n-k=0$, les deux intégrales valent $\pi/2$ donc $I_{n,k}=\pi$.

Exercice 9 - Primitives (presque) usuelles : ✪

1. Déterminer des primitives des fonctions :

(a) $f : x\mapsto \tan(x)$. (b) $f : x\mapsto \dfrac{1}{\tan(x)}$. (c) $f : x\mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$. (d) $f : x\mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)}$.

2. Montrer que $x\mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$ est une primitive de $x\mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$ sur $]\,0\,;\pi\,[$. En déduire une primitive de $x\mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Correction :

1. (a) Puisque $\tan = \dfrac{\sin}{\cos} = \dfrac{-\cos'}{\cos}$, une primitive de tan est $-\ln|\cos|$.
   (b) Puisque $\dfrac{1}{\tan} = \dfrac{\cos}{\sin} = \dfrac{\sin'}{\sin}$, une primitive de $\dfrac{1}{\tan}$ est $\ln|\sin|$.
   (c) C'est du cours : $1/\cos^2$ est la dérivée de tan donc tan est une primitive de $1/\cos^2$.
   (d) La dérivée de $1/\tan = \cos/\sin$ est

$$\frac{\cos'\times\sin-\sin'\times\cos}{\sin^2} = \frac{-\sin^2-\cos^2}{\sin^2} = \frac{-1}{\sin^2}$$

   Finalement, $-1/\tan$ est une primitive de $1/\sin^2$.

2. Soit $x\in\,]\,0\,;\pi\,[$. Alors $x/2\in\,]\,0\,;\pi/2\,[$ si bien que $\tan(x/2)$ est bien défini et à valeurs strictement positives : la fonction $f : x\mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$ est bien définie et dérivable en tant que composée de fonctions qui le sont, et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\times\tan'(x/2)\times\frac{1}{\tan(x/2)} \\ &= \frac{1+\tan^2(x/2)}{2\tan(x/2)} \\ &= \frac{1}{\sin(x)} \end{aligned}$$

en utilisant la formule de trigo reliant $\sin(\theta)$ à $\tan(\theta/2)$. Finalement, si $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $x+\dfrac{\pi}{2}\in\,]\,0\,;\pi\,[$ et

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sin(x+\pi/2)}$$

On en déduit qu'une primitive de $1/\cos$ est $x\mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x+\pi/2}{2}\right)\right) = \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

4 Autour du théorème fondamental de l'analyse

Exercice 10 : ✪ Pour tout réel x civilisé, on pose

$$f(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f.
3. Donner la valeur de $f(x)$.
4. **Remake :** Donner la valeur de $g(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Correction :

1. Pour l'instant, on ne sait définir que des intégrales de fonctions continues sur des segments. Dès lors, une intégrale n'existe que lorsque la fonction intégrée est continue sur le segment formé par les bornes. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ existe si et seulement si $t \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(t)}{t}$ est continue sur le segment $[\,1/x\,;x\,]$. Une condition nécessaire pour que f soit définie en x est évidemment que $x \neq 0$. Prouvons que c'est une condition suffisante. Si $x \neq 0$, x et $1/x$ sont de même signe donc à $\notin [\,1/x\,;x\,]$ donc $t \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(t)}{t}$ est continue sur $[\,1/x\,;x\,]$ donc f est bien définie en x. En conclusion, f est définir sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. D'après le théorème de dérivation des bornes variables, f est dérivable. On peut aussi le justifier depuis le début : soit G une primitive de $t \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(t)}{t}$ (une telle primitive existe car cette fonction est continue). Alors, pour tout x, $f(x) = G(x) - G(1/x)$ donc f est dérivable car somme et composée de fonctions dérivables (G est dérivable par définition d'une primitive). De plus, pour tout $x \neq 0$ (ne pas oublier de dériver les bornes),

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \frac{\text{Arctan}(x)}{x} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{\text{Arctan}(1/x)}{1/x} \\ &= \frac{\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x)}{x} \end{aligned}$$

   La valeur de $f'(x)$ dépend du signe de x : si $x > 0$, $f'(x) = \pi/2x$, tandis que si $x < 0$, alors $f'(x) = -\pi/2x$.
3. Par conséquent, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \times \ln(x)$ (on est sur $\mathbb{R}_+^*$) et puisque $f(1) = A = 0$, alors $A = 0$, si bien que $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De même, il existe B tel que pour tout $x < 0$, $f(x) = -\dfrac{\pi}{2}\ln|x| + B$ (ne pas oublier la valeur absolue) et $f(-1) = 0$ donc $B = 0$. En conclusion, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(x)$ si $x > 0$ et $f(x) = -\dfrac{\pi}{2}\ln(-x)$ si $x < 0$.
4. On trouve de même que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée nulle, donc est constante et $g(1) = 0$ donc g est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11 : ✪ Étudier les variations (sans les limites aux bornes) de $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ sur $]\,1\,;+\infty\,[$.

Correction : La fonction intégrée étant continue, F est bien dérivable et, pour tout $x > 1$ (on n'oublie pas de dériver les bornes !) :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2 \times \frac{1}{\ln(2x)} - 1 \times \frac{1}{\ln(x)} \\ &= \frac{2}{\ln(2) + \ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} \\ &= \frac{2\ln(x) - \ln(2) - \ln(x)}{(\ln(2) + \ln(x)) \times \ln(x)} \\ &= \frac{\ln(x) - \ln(2)}{(\ln(2) + \ln(x)) \times \ln(x)} \end{aligned}$$

On en déduit les variations de F :

x	1		$\ln(2)$		$+\infty$
$F'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
F	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 12 : ✪ Soit $T \in \mathbb{R}$. Montrer que la réciproque du résultat vu en classe est vraie, c'est-à-dire que si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante, alors f est T-périodique.

Correction : Notons g la fonction constante de l'énoncé. Alors g est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (ne pas oublier de dériver les bornes), $g'(x) = 1 \times f(x+T) - 1 \times f(x)$. Or, g est constante donc $g'(x) = 0$ si bien que $f(x+T) - f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: f est bien T-périodique.

Exercice 13 : ✪ Montrer que

$$f : x \mapsto \int_0^{\sin^2(x)} \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2(x)} \mathrm{Arccos}\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

est constante et donner sa valeur.

Correction : D'après le théorème des bornes variables, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) \quad = \quad 2\cos(x)\sin(x)\mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{\sin^2(x)}\right) - 2\sin(x)\cos(x)\mathrm{Arccos}\left(\sqrt{\cos^2(x)}\right)$$

On aimerait dire que $\sqrt{\sin^2(x)} = \sin(x)$ et idem pour le cos, mais on ne connaît pas leur signe : réduisons en fait l'intervalle d'étude pour que le cos et le sin soient positifs. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ donc $\sin^2(x+\pi) = \sin^2(x)$ et idem pour le cos. En en déduit que f est π-périodique : il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur π, disons $[-\pi/2\,;\pi/2]$, et puisque f est paire, il suffit de l'étudier sur $[0\,;\pi/2]$, intervalle sur lequel sin et cos sont positifs, si bien que (si $x \in [0\,;\pi/2]$),

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(2x)\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) - \sin(2x)\mathrm{Arccos}(\cos(x)) \\ &= \sin(2x) \times x - \sin(2x) \times x \end{aligned}$$

car, sur cet intervalle, $\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x$ et $\mathrm{Arccos}(\cos(x)) = x$ donc $f'(x) = 0$: f est constante. Prenons $x = \pi/4$ pour que les deux intégrales aient les mêmes bornes :

$$f(\pi/4) = \int_0^{1/2} \mathrm{Arcsin}(\sqrt{t}) + \mathrm{Arccos}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$$

Or, $\mathrm{Arcsin} + \mathrm{Arccos} = \pi/2$ donc on trouve que $f(\pi/4) = \pi/4$: f est constante égale à $\pi/4$.

Exercice 14 : ✪ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Donner

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Correction : Soit F une primitive de f (possible car f est continue). En particulier, F est dérivable et, en reconnaissant le taux d'accroissement de F en 0,

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} F'(0) = f(0)$$

Exercice 15 : ✪

1. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.
2. **Remake :** Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x, $\displaystyle\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est une fonction impaire.

Correction :

1. Soit F une primitive de f (possible car f est continue). Par hypothèse, $F(x) - F(0) = 0$ pour tout x donc F est constante donc $f = F'$ est nulle.
2. De même, si on note F une primitive de f alors, pour tout x, $F(x) = F(-x)$ et, en dérivant cette égalité (sans oublier de dériver ce qu'il y a à l'intérieur, comme une composée), il vient : $F'(x) = -F'(-x)$ i.e. $f(x) = -f(-x)$, f est bien impaire.

5 Fonctions complexes

Exercice 16 : ✪ Soit $\lambda = a+ib \in \mathbb{C}$ avec $b \neq 0$. Donner une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t-\lambda}$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$ ($t-\lambda$ n'est jamais nul puisque $\lambda \notin \mathbb{R}$). Alors (on fait le changement $u=(t-a)/b$, $t = bu+a$, $\mathrm{d}t = b\,\mathrm{d}u$ à la quatrième ligne) :

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-\lambda} &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)+ib}\\
&= \int^x \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} - ib\frac{1}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int^x \frac{2(t-a)}{(t-a)^2+b^2} - \frac{i}{b}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\dfrac{t-a}{b}\right)^2}\\
&= \frac{1}{2}\int^x \frac{2(t-a)}{(t-a)^2+b^2} - \frac{i}{b}\int^{\frac{x-a}{b}} \frac{b\,\mathrm{d}u}{1+u^2}\\
&= \frac{1}{2}\ln|(x-a)^2+b^2| - i\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right)\\
&= \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2) - i\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 17 : ✪ Déterminer une primitive de $x \mapsto e^{7x}\cos(4x)$ et $x \mapsto e^{6x}\sin(2x)$.

Correction : Notons $f : x \mapsto e^{(7+4i)x}$. Une primitive de f est

$$x \mapsto \frac{e^{(7+4i)x}}{7+4i}$$

Or, pour tout x,

$$\frac{e^{(7+4i)x}}{7+4i} = \frac{e^{7x}\times(\cos(4x)+i\sin(4x))}{7^2+4^2}\times(7-4i)$$

donc, en prenant la partie réelle, une primitive de $x \mapsto e^{7x}\cos(4x)$ est

$$x \mapsto \frac{e^{7x}\times(7\cos(4x)+4\sin(4x))}{65}$$

On trouve de même (avec une partie imaginaire) qu'une primitive de $x \mapsto e^{6x}\sin(2x)$ est :

$$x \mapsto \frac{e^{6x}\times(3\sin(2x)-\cos(2x))}{20}$$

Exercice 18 : ✪ Donner une primitive de $\mathrm{sh}\times\sin$:

1. À l'aide de l'exponentielle complexe.
2. À l'aide d'une IPP.

Correction : Soit $f : x \mapsto \mathrm{sh}(x)\times\sin(x) = \dfrac{1}{2}\times e^x\sin(x) - \dfrac{1}{2}\times e^{-x}\sin(x)$.

1. Tout d'abord, une primitive de $x \mapsto e^x e^{ix} = e^{(1+i)x}$ est

$$x \mapsto \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} = \frac{e^x\times(\cos(x)+i\sin(x))}{1^2+1^2}\times(1-i)$$

Dès lors, en prenant la partie imaginaire, une primitive de $x \mapsto e^x\sin(x)$ est

$$x \mapsto \frac{e^x(\sin(x)-\cos(x))}{2}$$

De même, une primitive de $x \mapsto e^{-x}\sin(x)$ est

$$x \mapsto \frac{e^{-x}(-\sin(x)-\cos(x))}{2}$$

Finalement, une primitive de sh $\times$ sin est :

$$x \mapsto \frac{e^x(\sin(x)-\cos(x))}{4} + \frac{e^{-x}(\sin(x)+\cos(x))}{4}$$

2. On a (en dérivant sh puis ch) :

$$\begin{aligned}
\int^x \mathrm{sh}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t &= [-\mathrm{sh}(t)\times\cos(t)]^x + \int^x \mathrm{ch}(t)\times\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{sh}(x)\times\cos(x) + [\mathrm{ch}(t)\sin(t)]^x - \int^x \mathrm{sh}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\mathrm{sh}(x)\times\cos(x) + \mathrm{ch}(x)\sin(x) - \int^x \mathrm{sh}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

donc une primitive de sh $\times$ sin est

$$x \mapsto \frac{-\mathrm{sh}(x)\times\cos(x)+\mathrm{ch}(x)\times\sin(x)}{2}$$

On vérifie évidemment qu'on obtient la même chose qu'avec la méthode de l'exponentielle complexe.

Exercice 19 : ✪✪ Calculer une primitive de $x \mapsto x^2e^x\sin(x)$.

Correction : Notons $f : x \mapsto x^2e^x\sin(x)$. Alors $f = \mathrm{Im}(g)$ où $g : x \mapsto x^2e^{(1+i)x}$. Dès lors, il suffit de primitiver g à l'aide de deux IPP. Rappelons qu'on peut supprimer les constantes puisqu'on cherche une primitive « générique », cf. cours.

$$\begin{aligned}
\int^x g(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2e^{(1+i)t}}{1+i}\right]^x - \frac{2}{1+i}\int^x te^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^2e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i}\times\left(\left[\frac{te^{(1+i)t}}{1+i}\right]^x - \frac{1}{1+i}\int^x e^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{x^2e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i}\times\left(\frac{xe^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{1}{1+i}\times\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\right) \\
&= \frac{x^2e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2xe^{(1+i)x}}{(1+i)^2} + \frac{2e^{(1+i)x}}{(1+i)^3}
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+i} &= \frac{1}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} \\
&= \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

si bien que :

$$\begin{aligned}
\int^x g(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{x^2e^{(1+i)x-i\pi/4}}{\sqrt{2}} - \frac{2xe^{(1+i)x-i\pi/2}}{2} + \frac{2e^{(1+i)x-3i\pi/4}}{\sqrt{2}^3} \\
&= \frac{x^2e^{x+i(x-\pi/4)}}{\sqrt{2}} - 2xe^{x+i(x-\pi/2)} + \frac{e^{x+i(x-3\pi/4)}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Finalement, en prenant la partie imaginaire, une primitive de f est :

$$x \mapsto \frac{x^2e^x\sin(x-\pi/4)}{\sqrt{2}} - 2xe^x\sin(x-\pi/2) + \frac{e^x\sin(x-3\pi/4)}{\sqrt{2}}$$

6 Calculs en vrac

6.1 Intégrations par parties

Exercice 20 : ✪ Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \text{Arctan}(x)$
2. $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$
3. $x \mapsto \text{Arccos}(x)$
4. $x \mapsto \sin \circ \ln$
5. $x \mapsto x^n \ln(x)$ où $n \in \mathbb{N}$.
6. $x \mapsto \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$
7. $x \mapsto x\tan^2(x)$
8. $x \mapsto \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$
9. $x \mapsto x \times (\text{Arctan}(x))^2$
10. $f : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}$

Correction :

1.
$$\begin{aligned}
\int^x \text{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t &= [t \times \text{Arctan}(t)]^x - \int^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= x\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= x\text{Arctan}(x) - \frac{\ln|1+t^2|}{2} \\
&= x\text{Arctan}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\int^x \text{Arcsin}(t)\,\mathrm{d}t &= [t \times \text{Arcsin}(t)]^x - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= x\text{Arcsin}(x) + \int^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= x\text{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
\int^x \text{Arccos}(t)\,\mathrm{d}t &= [t \times \text{Arccos}(t)]^x + \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= x\text{Arccos}(x) - \int^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= x\text{Arccos}(x) - \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}
\int^x \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t &= [t \times \sin(\ln(t))]^x - \int^x t \times \frac{1}{t} \times \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t \\
&= x\sin(\ln(x)) - \int^x \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t \\
&= x\sin(\ln(x)) - \left([t \times \cos(\ln(t))]^x - \int^x t \times \frac{1}{t} \times -\sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t\right) \\
&= x\sin(\ln(x)) - \left(x\cos(\ln(x)) + \int^x t\sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t\right) \\
&= x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) - \int^x t\sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

si bien qu'une primitive de $\sin \circ \ln$ est : $x \mapsto \dfrac{x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x))}{2}$.

5.
$$\begin{aligned}
\int^x t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \times \ln(x)\right]^x - \int^x \frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int^x t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

6. En dérivant $x \mapsto xe^x$ et en primitivant $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$:

$$\begin{aligned}\int^x \frac{te^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-e^t}{t+1}\right]^x + \int^x \frac{(t+1)e^t}{t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{e^x}{x+1} + \int^x e^t\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{e^x}{x+1} + e^x\end{aligned}$$

7. Puisque $\tan^2(x) = (1+\tan^2(x)) - 1 = \tan'(x) - 1$, une primitive de $\tan^2$ est $x \mapsto \tan(x) - x$. Dès lors :

$$\begin{aligned}\int^x t\tan^2(t)\,\mathrm{d}t &= [t \times (\tan(t) - t)]^x - \int^x \tan(t) - t\,\mathrm{d}t \\ &= x(\tan(x) - x) + \ln|\cos(x)| + \frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

car une primitive de tan est $x \mapsto -\ln|\cos(x)|$.

8.

$$\begin{aligned}\int^x \ln(1+\sqrt{t})\,\mathrm{d}t &= \left[t \times \ln(1+\sqrt{t})\right]^x - \int^x t \times \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\int^x \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\int^x \frac{\sqrt{t}+1-1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $u = \sqrt{t}$, $t = u^2$, $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}\int^x \ln(1+\sqrt{t})\,\mathrm{d}t &= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int^{\sqrt{x}} \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u} \\ &= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \int^{\sqrt{x}} \frac{u+1-1\,\mathrm{d}u}{1+u} \\ &= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \int^{\sqrt{x}} \frac{1\,\mathrm{d}u}{1+u} \\ &= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\int^x t(\mathrm{Arctan}(t))^2\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2} \times \mathrm{Arctan}(t)^2\right]^x - \int^x \frac{t^2}{2} \times 2\mathrm{Arctan}(t) \times \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2\mathrm{Arctan}(x)^2}{2} - \int^x \mathrm{Arctan}(t) \times \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2\mathrm{Arctan}(x)^2}{2} - \int^x \mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t + \int^x \mathrm{Arctan}(t) \times \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2\mathrm{Arctan}(x)^2}{2} - x\mathrm{Arctan}(x) + \frac{\ln(1+x^2)}{2} + \frac{\mathrm{Arctan}(x)^2}{2}\end{aligned}$$

10.

11.

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-\ln(t)}{2(t^2+1)}\right]^x + \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{t^2+1} \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-\ln(x)}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2+1)}\end{aligned}$$

Décomposons la fraction intégrée en éléments simples : il existe (a,b,c) tel que pour tout $t \neq 0$,

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1}$$

En multipliant par t et en faisant tendre t vers 0, on trouve que $a=1$. En multipliant par t et en faisant tendre t vers $+\infty$, on trouve que $a+b=0$ donc $b=-1$, et enfin en évaluant en 1 on trouve

$$\frac{1}{2} = a + \frac{b+c}{2}$$

si bien que $c=0$. Finalement,

$$\begin{aligned}\int^x \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{-\ln(x)}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int^x \left(\frac{1}{t} + \frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{-\ln(x)}{2(x^2+1)} + \frac{\ln(x)}{2} + \frac{\ln(x^2+1)}{4}\end{aligned}$$

Exercice 21 : ✪ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x\,.$
2. $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x\,.$
3. $\displaystyle\int_1^e (x-e)\ln(x)\,\mathrm{d}x\,.$
4. $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$
5. $\displaystyle\int_0^2 (2-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$
6. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x\,.$
7. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,\mathrm{d}x\,.$
8. $\displaystyle\int_0^{1/2} (\mathrm{Arcsin}(t))^2\,\mathrm{d}t\,.$
9. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

Correction :

1.

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x \\ &= e - [e^x]_0^1 \\ &= e-(e-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\ln(2) - \frac{3}{4}\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
\int_1^e (x-e)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{(x-e)^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{(x-e)^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{2}\int_1^e x-2e+\frac{e^2}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-2ex+e^2\ln(x)\right]_1^e\\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-2e^2+e^2-\frac{1}{2}+2e\right)\\
&= \frac{e^2}{4}-e+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3e^{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2\times xe^{x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \left[x^2\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\times\frac{e^{x^2}}{2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{e}{2}-\int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{e}{2}-\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1\\
&= \frac{e}{2}-\left[\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\right]\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned}
\int_0^2 (2-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x &= [(2-x)\times -e^{-x}]_0^2 - \int_0^2 (-1)\times(-e^{-x})\,\mathrm{d}x\\
&= 2-\int_0^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= 2-[-e^{-x}]_0^2\\
&= 2+e^{-2}-1\\
&= 1+e^{-2}
\end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x &= \left[x^2\times e^x\right]_{-1}^1 - 2\int_{-1}^1 xe^x\,\mathrm{d}x\\
&= e-e^{-1}-2\left([xe^x]_{-1}^1-\int_{-1}^1 e^x\,\mathrm{d}x\right)\\
&= e-e^{-1}-2\left(e+e^{-1}-[e^x]_{-1}^1\right)\\
&= e-e^{-1}-2(e+e^{-1}-e+e^{-1})\\
&= e-3e^{-1}
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
\int_{1/2}^{1} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,\mathrm{d}x &= \int_{1/2}^{1} \frac{1}{x} \times \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{x} \times -e^{1/x}\right]_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} \frac{-1}{x^2} \times -e^{1/x}\,\mathrm{d}x \\
&= -e + 2e^{1/2} + \int_{1/2}^{1} -\frac{1}{x^2} \times e^{1/x}\,\mathrm{d}x \\
&= -e + 2e^{1/2} + [e^{1/x}]_{1/2}^{1} \\
&= -e + 2e^{1/2} + e - e^{1/2} \\
&= 3e^{1/2}
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} (\mathrm{Arcsin}(t))^2\,\mathrm{d}t &= [t\mathrm{Arcsin}(t)^2]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} t \times 2\mathrm{Arcsin}(t) \times \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} + 2\int_0^{1/2} \mathrm{Arcsin}(t) \times \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{12} + 2\left([\mathrm{Arcsin}(t) \times \sqrt{1-t^2}]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \times -\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{\pi}{12} + 2\left(\frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \int_0^{1/2} \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{\pi}{12} + 2\left(\frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + 1
\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/3} x \times \tan'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [x\tan(x)]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \tan(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{3} \times \sqrt{3} - [-\ln|\cos(x)|]_0^{\pi/3} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln(1/2) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln(2)
\end{aligned}$$

Exercice 22 : ✪ Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire $J = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction : Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} x \times \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cos(2x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \left[x\times\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\times\sin(2x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_0^\pi\\ &= 0\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\times\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi\\ &= \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}I+J &= \int_0^\pi x(\cos^2(x)+\sin^2(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi\\ &= \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

et donc $J=\pi^2/2-I=\pi^2/4$ (mais bon, on aurait pu calculer J directement en se souvenant que $\sin^2(x)=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$).

6.2 Changements de variables

Exercice 23 - Comment changer un sinus en cosinus : ✪ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$$

Correction : Dans la première intégrale, posons $u=\dfrac{\pi}{2}-t$, $t=\dfrac{\pi}{2}-u,\ \mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$ si bien que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\pi/2}^0\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-\mathrm{d}u)\\ &= \int_0^{\pi/2}\cos^n(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Exercice 24 : ✪ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+2\sqrt{t}}$.
3. $\displaystyle\int_1^2 e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+e^t}}$.
5. $\displaystyle\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}}\frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_8^{27}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^3}}$.
7. $\displaystyle\int_1^4\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int_4^3\frac{t}{\sqrt{t-2}}\,\mathrm{d}t$.
9. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)}$.
10. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{1+\tan(x)^3+\tan(x)^5}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Correction : Notons à chaque fois l'intégrale I.

1. Posons $u=e^x$, $x=\ln(u),\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}u/u$ si bien que

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e \frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^e \frac{u+1-1}{1+u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^e \left(1-\frac{1}{1+u}\right)\,\mathrm{d}u \\ &= (e-1)-[\ln(1+u)]_1^e \\ &= e-1-(\ln(1+e)-\ln(2)) \\ &= e-1+\ln(2)-\ln(1+e) \end{aligned}$$

2. Posons $u=\sqrt{t}$, $t=u^2$, $\mathrm{d}t=2u\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{2u}{u^2+u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \frac{2}{u+1}\,\mathrm{d}u \\ &= [2\ln(1+u)]_0^1 \\ &= 2\ln(2) \end{aligned}$$

3. Posons $u=\sqrt{t}$, $t=u^2$, $\mathrm{d}t=2u\,\mathrm{d}u$, puis faisons une IPP.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\sqrt{2}} e^u\times 2u\,\mathrm{d}u \\ &= 2\left([ue^u]_1^{\sqrt{2}}-\int_1^{\sqrt{2}} e^u\,\mathrm{d}u\right) \\ &= 2\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}-e-(e^{\sqrt{2}}-e)\right) \\ &= 2(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

4. Posons $u=\sqrt{1+e^t}$, $t=\ln\left(u^2-1\right)$, $\mathrm{d}t=\dfrac{2u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u$, puis décomposons en éléments simples.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{u}\times\frac{2u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} \\ &= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{u+1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{u-1}\right)\,\mathrm{d}u \\ &= [\ln|u+1|-\ln|u-1|]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \\ &= \ln(\sqrt{1+e}+1)-\ln(\sqrt{1+e}-1)-\ln(\sqrt{2}+1)+\ln(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

5. Posons $u=\sqrt{1+x^3}$, $x=(u^2-1)^{1/3}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2u\,\mathrm{d}u}{3(u^2-1)^{2/3}}$ si bien que

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{u}{(u^2-1)^{1/3}} \times \frac{2u\,\mathrm{d}u}{3(u^2-1)^{2/3}} \\
&= \frac{2}{3}\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{u^2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{3}\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{u^2-1+1}{u^2-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{3}\int_{\sqrt{3}}^{2} 1+\frac{1}{u^2-1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{3}\times(2-\sqrt{3}) + \frac{2}{3}\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{u+1} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{u-1}\right)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{3}\times(2-\sqrt{3}) + \frac{1}{3}[\ln|u+1| - \ln|u-1|]_{\sqrt{3}}^{2} \\
&= \frac{2}{3}\times(2-\sqrt{3}) + \frac{1}{3}[\ln(3) - \ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}+1)]
\end{aligned}$$

6. Posons $u = x^{1/3}$, $x = u^3$, $\mathrm{d}x = 3u^2\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{2}^{3} \frac{3u^2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= 3\int_{2}^{3} \frac{u^2+1-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 3 + 3[\mathrm{Arctan}(u)]_2^3 \\
&= 3 + 3(\mathrm{Arctan}(3) - \mathrm{Arctan}(2))
\end{aligned}$$

7. Posons $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$, $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$ puis décomposons en éléments simples (sans oublier le quotient) :

$$\begin{aligned}
I &= \int_{1}^{2} \frac{1-u}{1+u} \times 2u\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_{1}^{2} \frac{u-u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_{1}^{2}\left(-u+2-\frac{2}{1+u}\right)\,\mathrm{d}u \\
&= 2\left[-\frac{u^2}{2} + 2u - 2\ln|1+u|\right]_1^2 \\
&= 2\left(-2+4-2\ln(3)+\frac{1}{2}-2+2\ln(2)\right) \\
&= 1 + 4\ln\left(\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

8. Posons $u = \sqrt{t-2}$, $t = u^2+2$, $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{2}}^{1} \frac{u^2+2}{u} \times 2u \,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_{\sqrt{2}}^{1} u^2+2 \,\mathrm{d}u \\ &= 2\left[\frac{u^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^{1} + 4(1-\sqrt{2}) \\ &= 2\left(\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + 4(1-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

9. Posons $u = e^t$, $t = \ln(u)$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u\,/u$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\ln(2)} \frac{2}{e^t + e^{-t}} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^2 \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \int_1^2 \frac{2}{u^2+1} \,\mathrm{d}u \\ &= [\mathrm{Arctan}(u)]_1^2 \\ &= \mathrm{Arctan}(2) - \mathrm{Arctan}(1) \\ &= \mathrm{Arctan}(2) - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

10. Posons $u = \tan(x)$ (inutile d'avoir recours aux règles de Bioche ici, celui-ci saute tout de même aux yeux), $x = \mathrm{Arctan}(u)$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Il faut également se souvenir que

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = 1 + u^2$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1+u^3+u^5) \times (1+u^2) \times \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \int_0^1 (1+u^3+u^5) \,\mathrm{d}u \\ &= \left[u + \frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6}\right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{17}{12} \end{aligned}$$

Exercice 25 : ✪✪ Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$
2. $x \mapsto \dfrac{2e^{3x}}{1+e^{2x}}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{x + x\ln(x)}$

Correction :

1. Notons

$$f(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t}}$$

une primitive générique de la fonction de l'énoncé. Posons $u = \sqrt{t}$, $t = u^2$, $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int^{\sqrt{x}} \frac{2u\,\mathrm{d}u}{u^2+u} \\ &= \int^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}u}{u+1} \\ &= \ln(1+\sqrt{x}) \end{aligned}$$

2. Notons

$$f(x) = \int^x \frac{2e^{3t}}{1+e^{2t}}\,\mathrm{d}t$$

une primitive générique de la fonction de l'énoncé. Posons $u = e^t$, $t = \ln(u)$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/u$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int^{e^x} \frac{2u^3}{1+u^2} \times \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= 2\int^{e^x} \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int^{e^x} \frac{u^2+1-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int^{e^x} \mathrm{d}u - 2\int^{e^x} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 2e^x - 2\mathrm{Arctan}(e^x) \end{aligned}$$

3. Notons

$$f(x) = \int^x \frac{1}{t+t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

une primitive générique de la fonction de l'énoncé. Posons $u = \ln(t)$, $t = e^u$, $\mathrm{d}t = e^u\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int^{\ln(x)} \frac{e^u\,\mathrm{d}u}{e^u + e^u \times u} \\ &= \int^{\ln(x)} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\ &= \ln(1+\ln(x)) \end{aligned}$$

Exercice 26 : ✪✪ On pose

$$I = \int_0^{\pi/12} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\pi/12} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$$

Calculer $I - J$ et $I + J$. En déduire I et J.

Correction : Tout d'abord :

$$\begin{aligned} I - J &= \int_0^{\pi/12} \frac{\cos^2(t) - \sin^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/12} \frac{\cos(2t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

De plus,

$$I-J=\int_0^{\pi/6}\frac{\mathrm{d}t}{\cos(2t)}$$

En utilisant les règles de Bioche, on pense à poser $u=\tan(t)$, $t=\mathrm{Arctan}(u)$, $\mathrm{d}t=\dfrac{1}{1+u^2}$:

$$\begin{array}{rcl}
I-J & = & \displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{\cos(2\mathrm{Arctan}(u))}\times\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\\
& = & \displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{2\cos^2(\mathrm{Arctan}(u))-1}\times\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\\
& = & \displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{\dfrac{2}{1+u^2}-1}\times\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\\
& = & \displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}u}{2-1-u^2}\\
& = & \displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}\\
& = & \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{3}}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)\mathrm{d}u\\
& = & \displaystyle\frac{1}{2}[\ln|u+1|-\ln|u-1|]_0^{1/\sqrt{3}}\\
& = & \displaystyle\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)
\end{array}$$

Finalement, si on note cette quantité α, alors $I=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\alpha}{2}$ et $J=\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\alpha}{2}$.

Exercice 27 : ✪✪✪ Soient $a<b$ deux réels. Calculer $\displaystyle\int_a^b\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x$ et interpréter géométriquement.

Correction : Notons I_1 cette intégrale. Mettons le terme dans la racine carrée sous forme canonique. Soit $x\in[\,a\,;b\,]$.

$$\begin{array}{rcl}
(x-a)(b-x) & = & -x^2+x(b+a)-ab\\
& = & -\left(x^2-2\times x\times\left(\dfrac{b+a}{2}\right)+ab\right)\\
& = & -\left[\left(x-\dfrac{b+a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b+a}{2}\right)^2+ab\right]\\
& = & -\left[\left(x-\dfrac{b+a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2\right]\\
& = & \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\dfrac{b+a}{2}\right)^2
\end{array}$$

Par conséquent, en factorisant la le premier terme (et $b-a>0$ donc on peut simplifier la racine carrée) :

$$\begin{array}{rcl}
I_1 & = & \displaystyle\int_a^b\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}\times\sqrt{1-\left(\frac{2}{b-a}\right)^2\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x\\
& = & \displaystyle\frac{b-a}{2}\int_a^b\sqrt{1-\left(\frac{2}{b-a}\times\left(x-\frac{b+a}{2}\right)\right)^2}\,\mathrm{d}x
\end{array}$$

Posons

$$\cos(u) = \left(\frac{2}{b-a}\times\left(x-\frac{b+a}{2}\right)\right)$$

si bien que $-\sin(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{2}{b-a}\,\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = \dfrac{-(b-a)\sin(u)}{2}\,\mathrm{d}u$. Pour les bornes : lorsque $x=a$, $\cos(u)=-1$ donc $u=\pi$ convient, et pour $x=b$, $\cos(u)=1$ donc $u=0$ convient (on ne peut pas forcément passer à l'Arccos, et on n'en a même pas besoin : il suffit de trouver des bornes qui conviennent). Dès lors :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\int_\pi^0 \sqrt{1-\cos^2(u)}\times -\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\int_0^\pi \sqrt{\sin^2(u)}\sin(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Or, sur $[\,0\,;\pi\,]$, le sinus est positif donc $\sqrt{\sin^2(u)}=\sin(u)$ si bien que

$$I_1 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\int_0^\pi \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$$

En écrivant $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$, on trouve finalement que

$$I_1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Avec l'interprétation de l'intégrale comme aire sous la courbe, on vient de calculer l'aire sous la courbe d'équation

$$y = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2}$$

c'est-à-dire la courbe (au-dessus de l'axe des abscisses pour avoir une ordonnée positive) d'équation

$$y^2 + -\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

On reconnaît l'équation du cercle de centre $M\left(\dfrac{b+a}{2},0\right)$ de rayon $R=\dfrac{b-a}{2}$. Dès lors, on vient de calculer l'aire du demi-disque (celui au-dessus de l'axe des ordonnées) associé : on trouve bien une aire égale à $\dfrac{1}{2}\pi R^2$ (car on ne prend qu'un demi-disque).

Exercice 28 - Utilisation des règles de Bioche : ✪✪✪ Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)+\tan(x)}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{\tan(x)}{3+\sin(x)}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)+\sin(2x)}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{\cos(3x)}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\cos(2x)}$.

Correction : Nous allons utiliser les règles de Bioche, qui sont HP. Vous pouvez donc regarder le changement de variable dans le corrigé et essayer de le faire, il y aurait sans doute une indication à l'écrit.

1. On a :

$$\begin{aligned} f(-x)\mathrm{d}(-x) &= \frac{-\,\mathrm{d}x}{\sin(-x)+\tan(-x)} \\ &= \frac{-\,\mathrm{d}x}{-\sin(x)-\tan(x)} \\ &= f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Posons donc $u=\cos(t)$ donc $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$ i.e. $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u\,/\sin(t)$. La méthode est souvent la même : on garde x le plus possible jusqu'à pouvoir tout remplacer.

$$\begin{aligned}
\int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int^{\cos(x)} \frac{1}{\sin(t)+\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}} \times \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sin(t)} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sin^2(t)+\dfrac{\sin^2(t)}{\cos(t)}} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-\,\mathrm{d}u}{1-\cos^2(t)+\dfrac{1-\cos^2(t)}{\cos(t)}} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-\,\mathrm{d}u}{1-u^2+\dfrac{1-u^2}{u}} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-\,\mathrm{d}u}{(1-u^2)\left(1+\dfrac{1}{u}\right)} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-u\,\mathrm{d}u}{(1-u^2)(u+1)} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-u\,\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)^2}
\end{aligned}$$

En décomposant en éléments simples, on trouve que pour tout $u \neq \pm 1$:

$$\frac{-u}{(1-u)(1+u)^2} = -\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-u}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+u}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{(1+u)^2}$$

Finalement (on n'oublie pas de faire sortir un -1 quand on intègre $1/(1-u)$) :

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\ln|1-\cos(x)|+\frac{1}{4}\ln|1+\cos(x)|+\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\cos(x)}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
f(\pi-x)\mathrm{d}(\pi-x) &= \frac{\tan(-x)\times -\,\mathrm{d}x}{3+\sin(x)} \\
&= f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Posons donc $u=\sin(t)$, $\mathrm{d}u=\cos(t)\,\mathrm{d}t$ i.e. $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u\,/\cos(t)$.

$$\begin{aligned}
\int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int^{\sin(x)} \frac{\tan(t)}{3+\sin(t)}\times\frac{\mathrm{d}u}{\cos(t)} \\
&= \int^{\sin(x)} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)\times(3+\sin(t))}\,\mathrm{d}u \\
&= \int^{\sin(x)} \frac{\sin(t)}{(1-\sin^2(t))\times(3+\sin(t))}\,\mathrm{d}u \\
&= \int^{\sin(x)} \frac{u}{(1-u^2)\times(3+u)}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

En décomposant en éléments simples, on trouve que pour tout $u\neq \pm 1, -3$:

$$\frac{u}{(1+u)(1-u)(3+u)} = \frac{-1}{4}\times\frac{1}{1+u}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{1-u}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{3+u}$$

Et finalement (on n'oublie pas le $-$ qui sort en primitivant $1/(1-u)$) :

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\ln|1+\sin(x)| - \frac{1}{8}\ln|1-\sin(x)| + \frac{3}{8}\ln|3+\sin(x)|$$

3. Posons $u = \cos(t)$, $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u\,/\sin(t)$:

$$\begin{aligned}\int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int^{\cos(x)} \frac{1}{\sin(t)+2\sin(t)\cos(t)} \times \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sin(t)}\\ &= \int^{\cos(x)} \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sin^2(t)+2\sin^2(t)\cos(t)}\\ &= \int^{\cos(x)} \frac{-\,\mathrm{d}u}{1-\cos^2(t)+2(1-u^2)u}\\ &= \int^{\cos(x)} \frac{-\,\mathrm{d}u}{(1-u^2)\times(1+2u)}\end{aligned}$$

En décomposant en éléments simples, on trouve que pour tout $u \neq \pm 1, -1/2$:

$$\frac{-1}{(1+u)(1-u)(1+2u)} = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{1+u} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-u} - \frac{4}{3} \times \frac{1}{3+u}$$

Et finalement (on n'oublie pas le $-$ qui sort en primitivant $1/(1-u)$) :

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln|1+\cos(x)| - \frac{1}{6}\ln|1-\cos(x)| - \frac{4}{3}\ln|2+\cos(x)|$$

4. Posons $u = \cos(t)$, $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u\,/\sin(t)$:

$$\begin{aligned}\int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int^{\cos(x)} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{4\cos^3(t)-3\cos(t)} \times \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sin(t)}\\ &= \int^{\cos(x)} \frac{2\,\mathrm{d}u}{4\cos^2(t)-3}\\ &= \int^{\cos(x)} \frac{2\,\mathrm{d}u}{4u^2-3}\end{aligned}$$

En décomposant en éléments simples, on trouve que pour tout $u \neq \pm\sqrt{3}/2$:

$$\frac{2}{4(u-\sqrt{3}/2)(u+\sqrt{3}/2)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{u-\sqrt{3}/2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{u+\sqrt{3}/2}$$

Et finalement :

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|\cos(x)-\sqrt{3}/2| - \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|\cos(x)+\sqrt{3}/2|$$

5. Posons $u = \sin(t)$, $\mathrm{d}u = \cos(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u\,/\cos(t)$:

$$\begin{aligned}\int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int^{\sin(x)} \frac{\cos(t)}{1-2\sin^2(t)} \times \frac{\mathrm{d}u}{\cos(t)}\\ &= \int^{\sin(x)} \frac{\mathrm{d}u}{1-2u^2}\end{aligned}$$

En décomposant en éléments simples, on trouve que pour tout $u \neq \pm\sqrt{2}/2$:

$$\frac{1}{2(\sqrt{2}/2-u)(\sqrt{2}/2+u)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}/2-u} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}/2+u}$$

Et finalement :

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}/2-\sin(x)| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\sin(x)+\sqrt{2}/2|$$

7 Applications classiques

Exercice 29 - Intégrale de Poisson (stage one) : ✪✪ Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$. On pose

$$I(x) = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $I(x)$ est bien définie.
2. Montrer que $I(-x) = I(x)$.
3. En calculant $I(x) + I(-x)$, prouver que $I(x) = \dfrac{I\left(x^2\right)}{2}$.
4. On admet que $I(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Prouver que si $|x| < 1$, alors $I(x) = 0$.
5. Exprimer $I\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en fonction de $I(x)$. En déduire la valeur de $I(x)$ si $|x| > 1$.

Remarque : Nous redonnerons la valeur de $I(x)$ avec des sommes de Riemann (et nous en profiterons pour démontrer que $I(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$) dans le chapitre 22.

Correction :

1. Il faut prouver que $f : t \mapsto \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)$ est continue sur $[\,0\,;\pi\,]$. Il suffit de prouver que, pour tout $t \in [\,0\,;\pi\,]$, $1 - 2x\cos(t) + x^2 > 0$. En effet, si c'est le cas, f est continue car composée de fonctions continues. Or, le discriminant de $1 - 2x\cos(t) + x^2$ (trinôme en x) vaut $4\cos^2(t) - 4 = 4(\cos^2(t) - 1)$. Si $t \in\,]\,0\,;\pi\,[$, $\Delta < 0$ donc $1 - 2x\cos(t) + x^2 > 0$ car du signe de son coefficient dominant, et si $t = 0$ ou $t = \pi$ alors $1 - 2x\cos(t) + x^2 = 1 \pm 2x + x^2 = (x \pm 1)^2 > 0$ car $x \neq \pm 1$. Dans tous les cas on a le résultat voulu. On pouvait aussi encadrer $\cos(x)$ par ± 1 mais il fallait faire deux cas selon le signe de x.
2. Tout d'abord,

$$I(-x) = \int_0^\pi \ln(1 + 2x\cos(t) + x^2)\,\mathrm{d}t$$

Faisons le changement de variable $u = \pi - t$, $t = \pi - u$, $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned} I(-x) &= \int_\pi^0 \ln(1 + 2x\cos(\pi - u) + x^2)(-\,\mathrm{d}u\,) \\ &= \int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos(u) + x^2)\,\mathrm{d}u \\ &= I(x) \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} I(-x) + I(x) &= \int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2) + \ln(1 + 2x\cos(t) + x^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \ln((1 + x^2 - 2x\cos(t)) \times (1 + x^2 + 2x\cos(t)))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \ln((1 + x^2)^2 - 4x^2\cos^2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \ln(1 + 2x^2 + x^4 - 4x^2\cos^2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \ln(1 + 2x^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + x^4 - 4x^2\cos^2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \ln(1 + 2x^2(\sin^2(t) - \cos^2(t)) + x^4)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \ln(1 - 2x^2\cos(2t) + x^4)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Posons $u = 2t$, $t = u/2$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u\,/2$:

$$\begin{aligned} I(-x)+I(x) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(1-2x^2\cos(u)+x^4)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(1-2x^2\cos(u)+x^4)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi} \ln(1-2x^2\cos(u)+x^4)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

La première intégrale est égale à $I(x^2)$. En posant $v = u-\pi$, $u = v+\pi$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}v$ dans la deuxième :

$$\begin{aligned} I(-x)+I(x) &= \frac{1}{2}\times I(x^2) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(1-2x^2\cos(v+\pi)+x^4)\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\times I(x^2) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(1+2x^2\cos(v)+x^4)\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\times I(x^2) + \frac{1}{2}\times I(-x^2) \\ &= I(x^2) \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $I(x) = I(-x)$ donc $I(x)+I(-x) = 2I(x)$ ce qui permet de conclure.

4. $I(x) = \dfrac{I(x^2)}{2}$. En appliquant ce résultat à x^2 (penser à : « truc »), on trouve que $I(x^2) = \dfrac{I(x^4)}{2}$ donc $I(x) = \dfrac{I(x^4)}{4}$. Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I(x) = \dfrac{I(x^{2^n})}{2^n}$. Or, si $|x|<1$ alors $x^{2^n} = e^{2^n\ln(|x|)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $\ln|x| < 1$ et I tend vers 0 en 0 donc $I(x^{2^n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus, $2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $I(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, mais $I(x)$ est indépendant de n donc $I(x) = 0$.
5. Soit donc $x \neq \pm 1$, $x \neq 0$. Attention, x peut être négatif, donc il ne faut pas écrire $\ln(x)$ (et idem pour la question précédente).

$$\begin{aligned} I\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_0^{\pi} \ln\left(1 - \frac{2\cos(t)}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \ln\left(\frac{x^2-2x\cos(t)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \ln\left(1-2x\cos(t)+x^2\right) - 2\ln|x|\,\mathrm{d}t \\ &= I(x) - 2\pi\ln|x| \end{aligned}$$

Finalement, si $|x|>1$, alors $|1/x|<1$ donc $I(1/x) = 0$ si bien que $I(x) = 2\pi\ln|x|$.

Exercice 30 : ✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n e^x}{n!}\,\mathrm{d}x$$

1. Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. On admet que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$$

Remarque : On montrera dans le chapitre sur les suites (plus précisément dans le paragraphe des suites adjacentes) que la limite de cette somme était irrationnelle (sans donner sa valeur). Ainsi, e est irrationnel. On peut même montrer que $e^r \notin \mathbb{Q}$ pour tout rationnel non nul r.

Correction :

1. Faisons une IPP :

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n!}\left(-\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\times e^x\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1}e^x\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1}e^x\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^{n+1}e^x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}
\end{aligned}$$

2. Soit $k \geq 1$. D'après la question précédente (penser à « truc » : remplacer n par truc puis par $k-1$, d'où la nécessité de prendre $k \geq 1$) :

$$\frac{1}{k!} = I_{k-1} - I_k$$

Dès lors, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n}(I_{k-1} - I_k)\\
&= 1 + I_0 - I_n\\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 + I_0
\end{aligned}$$

puisque $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, $I_0 = e - 1$ ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 31 : ✪ Dans cet exercice, on fait semblant de ne pas connaître la fonction ln. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction L par :

$$L : x \mapsto \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Montrer que pour tous x et y strictement positifs, $L(xy) = L(x) + L(y)$.

Correction : Soient x et y strictement positifs. On a alors

$$L(xy) = \int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Posons $u = t/x$, $t = ux$, $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$ (et $v = 1/u$, $u = 1/v$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}v/v^2$ à la quatrième ligne). Alors

$$\begin{aligned}
L(xy) &= \int_{1/x}^{y} \frac{x\,\mathrm{d}u}{xu}\\
&= \int_{1/x}^{y}\frac{\mathrm{d}u}{u}\\
&= \int_1^y \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_{1/x}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{u}\\
&= L(y) + \int_x^1 v \times \frac{-\mathrm{d}v}{v^2}\\
&= L(y) + \int_1^x \frac{\mathrm{d}v}{v}\\
&= L(y) + L(x)
\end{aligned}$$

Exercice 32 : ✪✪ On définit les deux intégrales

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2\sin t\cos t}} \qquad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2\sin t\cos t}}$$

Calculer $I+J$ puis montrer que $I=J$. En déduire la valeur de ces intégrales.

Correction : D'une part :

$$\begin{aligned} I+J &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)+2\sin(t)\cos(t)}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sqrt{(\sin(t)+\cos(t))^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La troisième ligne vient du fait que le sinus et le cosinus sont positifs sur $[0\,;\pi/2]$, donc leur somme l'est également. D'autre part, faisons le changement de variable $u = \pi/2 - t$, $t = \pi/2 - u$, $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$ dans I :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin(\pi/2-u)}{\sqrt{1+2\sin(\pi/2-u)\cos(\pi/2-u)}}(-\,\mathrm{d}u) \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(u)}{\sqrt{1+2\cos(u)\sin(u)}}\,\mathrm{d}u \\ &= J \end{aligned}$$

On en déduit donc que $I = J = \pi/4$.

Exercice 33 : ✪✪ Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in [a\,;b]\,, f(a+b-x) = f(x)$.

1. Montrer que

$$\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$.

Correction :

1. Notons I l'intégrale de gauche. Posons $u = a+b-x$, $x = a+b-u$, $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned} I &= \int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)(-\,\mathrm{d}u) \\ &= \int_a^b (a+b-u)f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= (a+b)\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u - \int_a^b u f(u)\,\mathrm{d}u \\ I &= (a+b)\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u - I \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2. On cherche à appliquer le résultat précédent. On définit sur $[0\,;\pi]$ la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$$

Soit $x \in [0\,;\pi]$.

$$\begin{aligned} f(\pi-x) &= \frac{\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)} \\ &= \frac{\sin(x)}{1+(-\cos(x))^2} \\ &= \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

f vérifie les conditions de la question précédente (elle est évidemment continue). Ainsi,

$$I = \frac{\pi}{2}\times\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

À l'aide des règles de Bioche, on pense à poser $u=\cos(x)$, $\mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$ et donc $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u\,/\sin(x)$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2}\times\int_1^{-1}\frac{\sin(x)}{1+u^2}\frac{-\,\mathrm{d}u}{\sin(x)} \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \frac{\pi}{2}\times[\mathrm{Arctan}(u)]_{-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{2}\times\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

Exercice 34 : ✪✪ Soient $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. On pose $I(p,q)=\displaystyle\int_{-1}^1 (t-1)^p(t+1)^q\,\mathrm{d}t$

1. Donner la valeur de $I(p,q)$.
2. **Remake :** Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. À l'aide de l'intégrale $I_{p,q}=\displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^q\binom{q}{k}\frac{(-1)^k}{p+k+1}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

Correction :

1. L'idée est de trouver une relation de récurrence à l'aide d'une IPP et d'en déduire la formule générale. Soit donc $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ avec $p\geq 1$.

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \left[(t-1)^p\times\frac{(t+1)^{q+1}}{q+1}\right]_{-1}^1 - \frac{p}{q+1}\int_{-1}^1(t-1)^{p-1}(t+1)^{q+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-p}{q+1}\times I(p-1,q+1) \end{aligned}$$

En d'autres termes :

$$I(\mathrm{truc},\mathrm{machin})=\frac{-\mathrm{truc}}{\mathrm{machin}+1}\times I(\mathrm{truc}-1,\mathrm{machin}+1)$$

On peut donc itérer cette relation jusqu'à tomber sur une intégrale qu'on sait calculer :

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \frac{-p}{q+1}\times\frac{-(p-1)}{q+2}I(p-2,q+2) \\ &= \frac{-p}{q+1}\times\frac{-(p-1)}{q+2}\times\cdots\times\frac{-1}{q+p}\times I(0,q+p) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} I(0,q+p) &= \int_{-1}^{1} (t+1)^{q+p}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{(t+1)^{q+p+1}}{q+p+1}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{2^{q+p+1}}{q+p+1} \end{aligned}$$

si bien que :

$$I(p,q) = \frac{-p}{q+1} \times \frac{-(p-1)}{q+2} \times \cdots \times \frac{-1}{q+p} \times \times \frac{2^{q+p+1}}{q+p+1}$$

Un calcul classique permet d'affirmer que

$$I(p,q) = \frac{(-1)^p \times p! \times q! \times 2^{q+p+1}}{(q+p+1)!}$$

2. On trouve de la même façon que

$$I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

De plus, en appliquant le binôme de Newton et la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \int_0^1 t^p \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-t)^k \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k \int_0^1 t^{p+k}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (-1)^k \times \frac{1}{p+k+1} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 35 - Moments d'ordre pair de la loi semi-circulaire : ✪✪✪ On rappelle (cf. exercice 31 du chapitre 4) que les nombres de Catalan sont définis pour tout $n \geq 0$ par $C_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$m_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} x^n \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que si n est impair, $m_n = 0$.
2. Donner la valeur de m_0. Dans la suite, on suppose que n est pair supérieur ou égal à 2 et on note $n = 2k$.
3. Montrer que $m_{2k} = \dfrac{2^{2k+1}}{\pi} \displaystyle\int_{-1}^{1} u^{2k}\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u$.
4. Montrer que $m_{2k} = \dfrac{2^{2k+2}}{\pi} (W_{2k} - W_{2k+2})$ où $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des intégrales de Wallis (cf. cours).
5. En déduire, à l'aide de l'expression des intégrales de Wallis vue en classe, que $m_{2k} = C_k$.

Correction :

1. Soit n impair. Soit f la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par $f(x) = x^n\sqrt{1-x^2}$. f est impaire. Puisqu'on l'intègre sur un intervalle symétrique par rapport à 0,

$$m_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

2. Posons $x=2\sin(t)$, $\mathrm{d}x\ =2\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{1-\sin^2(t)}\times 2\cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(t)}\times\cos(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, si $t\in[-\pi/2\,;\pi/2]$, $\cos(t)\geq 0$ donc $\sqrt{\cos^2(t)}=\cos(t)$, ce qui implique que

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2t)}{4}+\frac{t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \end{aligned}$$

Finalement, $m_0=1$.

3. Il suffit de poser $u=x/2, x=2u$, $\mathrm{d}x\ =2\,\mathrm{d}u$:

$$m_{2k}=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}2^{2k}u^{2k}\sqrt{4-4u^2}\times 2\,\mathrm{d}u\ =\frac{2^{2k+1}}{\pi}\int_{-1}^{1}u^{2k}\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u$$

4. Faisons le changement de variable : $u=\sin(t)$ et $\mathrm{d}u\ =\cos(t)\,\mathrm{d}t$ soit

$$m_{2k}=\frac{2^{2k+1}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2k}(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, sur $[-\pi/2\,;\pi/2]$, $\sqrt{1-\sin^2(t)}=\sqrt{\cos^2(t)}=\cos(t)$ (le cos est positif). Dès lors

$$m_{2k}=\frac{2^{2k+1}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2k}(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t\ =\frac{2^{2k+1}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^{2k}(t)(1-\sin^2(t))\,\mathrm{d}t$$

Or, la fonction intégrée est paire, d'où

$$m_{2k}=\frac{2^{2k+2}}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^{2k}(t)-\sin^{2k+2}(t)\,\mathrm{d}t\ =\frac{2^{2k+2}}{\pi}(W_{2k}-W_{2k+2})$$

5. D'après la question précédente, la relation de récurrence et l'expression des intégrales de Wallis vues en classe :

$$\begin{aligned} m_{2k} &= \frac{2^{2k+2}}{\pi}(W_{2k}-W_{2k+2}) \\ &= \frac{2^{2k+2}}{\pi}\left(W_{2k}-\frac{2k+1}{2k+2}W_{2k}\right) \\ &= \frac{2^{2k+2}}{\pi}\times\frac{W_{2k}}{2k+2} \\ &= \frac{2^{2k+1}}{\pi(k+1)}\times W_{2k} \\ &= \frac{2^{2k+1}}{\pi(k+1)}\times\frac{\pi(2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2} \\ &= \frac{1}{k+1}\times\frac{(2k)!}{(k!)^2} \end{aligned}$$

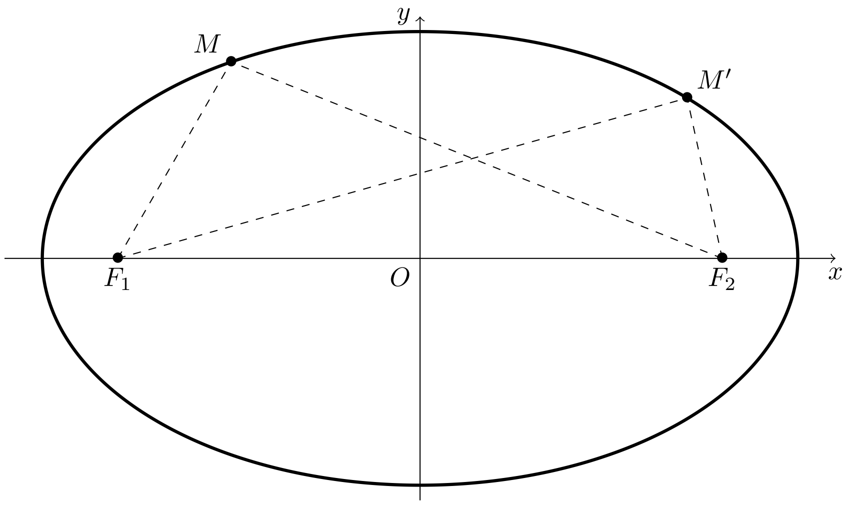
Finalement :

$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad m_{2k}=\frac{1}{k+1}\times\binom{2k}{k}=C_k$$

Exercice 36 - L'aire d'une ellipse : ✪✪✪ Soient a et b non nuls. L'ellipse (centrée en 0) de paramètres a et b est l'ensemble des points (x, y) du plan tels que :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le but de l'exercice est de donner l'aire de cette ellipse. Comme il n'y a que leur carré qui intervient, on peut supposer que a et b sont tous les deux strictement positifs. Un cercle est bien sûr une ellipse particulière avec $a = b = R$ le rayon du cercle. Une ellipse générale est dessinée ci-dessous (ici $a = 5$ et $b = 3$) :



1. Donner les coordonnées des points d'intersection de l'ellipse avec les axes.
2. Écrire l'aire de l'ellipse comme la différence de deux intégrales que l'on précisera. Montrer que l'aire est égale à

$$4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$$

3. En déduire que l'aire d'une ellipse de paramètres a et b vaut πab.

Remarque : On peut montrer que le périmètre d'une ellipse de paramètres a et b vaut

$$P = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégrale est ce qu'on appelle une intégrale elliptique, et on ne sait pas en donner une valeur exacte (sauf dans le cas où $a = b$...). Il existe cependant des méthodes assez efficaces pour en donner une valeur approchée.

Remarque : On suppose que $a \geq b$ et on pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (si $b \geq a$, l'ellipse est « verticale » et il suffit de tourner la tête). Les points $F_1(-c, 0)$ et $F_2(0, c)$ sont appelés les foyers de l'ellipse. On peut montrer comme sur la figure ci-dessus que tous les rayons lumineux partant de F_1 se réfléchissent et arrivent en F_2. C'est bien sûr la même chose avec les ondes sonores, et puisque les stations de métro parisiennes sont de forme elliptique, c'est la raison pour laquelle, quand on se place à un endroit précis (un des foyers), on entend très bien ce qui est dit de l'autre côté de la voie. Une dernière pour la route : d'après la première loi de Kepler, les planètes du système solaire ont une trajectoire elliptique dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Correction :

1. Soit $M(x, y)$ un point de l'ellipse. M appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $y = 0$ si et seulement si $x^2/a^2 = 1$ (car M est un point de l'ellipse). Par conséquent, les points de l'ellipse appartenant à l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(\pm a, 0)$. On prouve de même que les points de coordonnées $(0, \pm b)$ sont les points d'intersection de l'ellipse avec l'axe des ordonnées.
2. L'aire de l'ellipse est l'aire de la partie au-dessus de l'axe des abscisses plus l'aire de la partie sous cet axe. Soit $M(x, y)$ un point du plan. M appartient à l'ellipse si et seulement si $y^2 = b^2 \times \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$ si et seulement si (rappelons que b est positif) :

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

En d'autres termes, l'ellipse est la réunion des graphes des fonctions $x \mapsto \pm b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, la partie au-dessus de l'axe des abscisses étant le graphe de la fonction $x \mapsto b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$, et la partie sous cet axe est le graphe de la fonction $x \mapsto -b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$. De plus, ces deux fonctions sont définies sur $[-a\,;a]$. Par conséquent, l'aire de la partie au-dessus de l'axe des abscisses est égale à

$$\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$$

Attention, une aire (géométrique) est toujours positive, et l'intégrale d'une fonction négative est égale à **moins** l'aire (géométrique) entre la courbe et l'axe des abscisses. Tout ça pour dire que l'aire (géométrique) de l'ellipse située sous l'axe des abscisses est égale à

$$-\int_{-a}^{a} -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$$

Dès lors, l'aire de l'ellipse est égale à

$$2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$$

Or, la fonction intégrée est paire donc l'intégrale ci-dessus (sans le 2) est égale à

$$2\int_{0}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$$

ce qui permet de conclure.

3. Il ne nous reste plus qu'à calculer cette intégrale. Comme à chaque fois qu'on a une quantité de la forme $1-\text{truc}^2$, on pose truc $=$ cos ou sin. Posons $x/a = \cos(u),\ \mathrm{d}x = -a\sin(u)\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}
I &= 4b\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{1-\cos^2(u)} \times -a\sin(u)\,\mathrm{d}u \\
&= 4ab\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\sin^2(u)} \times \sin(u)\,\mathrm{d}u \\
&= 4ab\int_{0}^{\pi/2} \sin(u) \times \sin(u)\,\mathrm{d}u \\
&= 4ab\int_{0}^{\pi/2} \sin^2(u)\,\mathrm{d}u \\
&= 4ab\int_{0}^{\pi/2} \frac{1-\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u \\
&= 4ab\left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\pi/2} \\
&= 4ab \times \frac{\pi}{4} \\
&= \pi ab
\end{aligned}$$

Exercice 37 - Formule de sommation d'Euler : ✪✪✪ Si $u \in \mathbb{R}$, on note $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$ la partie fractionnaire du réel u. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;n]$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) + \int_1^n \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Correction : Notons

$$I = \int_1^n \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t$$

On a :

$$
\begin{array}{rcl}
I & = & \displaystyle\int_1^n \left(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(t - k - \frac{1}{2}\right) \times f(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\
& = & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} (f(k+1) + f(k)) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\
& = & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} f(j) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \\
& = & \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} f(j) - \frac{1}{2} \times f(1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{1}{2} \times f(n) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(j) - \frac{1}{2} \times (f(1) + f(n)) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t
\end{array}
$$

ce qui est bien le résultat voulu.