Polycopié d'exercices.

MP2I - Lycée Faidherbe

Premier semestre - Préliminaires - Chapitres 0 à 9.

« Vous qui entrez laissez toute espérance. »
Dante, La Divine Comédie.

Table des matières

« But I would walk 500 miles,
And I would walk 500 more. »

The Proclaimers, I'm gonna be (500 miles).

« Ne dites donc point qu'une chose est possible, quand il est impossible qu'elle soit autrement. »

Gaston Leroux, Le mystère de la chambre jaune.

« Tel un enseignement fondé sur une tradition minée par le doute, [...] elle lançait dans toutes les directions des regards de jeune gazelle effarouchée [...] La vue de Sitā dans un tel état troubla Hanumān, de même que l'ignorant des voies de la concentration mentale est jeté dans la perplexité par la connaissance des Veda. Il avait du mal à la reconnaître sans ses ornements, devenue pareille à une phrase incorrectement construite qui prête à contresens. »

Vālmīki, Le Rāmāyaṇa.

Chapitre 0

Prépa begins

0.1 Logique.

0.1.1 Logique propositionnelle.

Exercice 1 : ✪ Soit A une assertion. Montrer les équivalences (intuitives !) suivantes :

1. $\text{non}(\text{non}(A)) \iff A$.
2. $(A \text{ et } A) \iff A$.
3. $(A \text{ ou } A) \iff A$.

Correction : Tables de vérité : flemme.

Exercice 2 : ✪ Soient A, B, C trois assertions.

1. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)$ est-elle équivalente à $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$?

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$
F	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	V	V	V	V	V	V

Les deux assertions ne sont donc pas équivalentes.

2. $((A \Rightarrow B) \text{ ou } C)$ est-elle équivalente à $((A \Rightarrow C) \text{ ou } B)$?

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B)$ ou C	$A \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow C)$ ou B
F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V
V	V	V	V	V	V	V

Les deux assertions sont donc équivalentes.

3. $((A \Rightarrow B) \text{ et } C)$ est-elle équivalente à $(A \text{ et } C) \Rightarrow (B \text{ et } C)$?

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B)$ et C	A et C	B et C	$(A$ et $C) \Rightarrow (B$ et $C)$
F	F	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	F
V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	V	V	V	V	V	V

Les deux assertions ne sont donc pas équivalentes.

4. $A \Rightarrow B$ est-elle équivalente à (non(A)) ou B ?

A	B	C	$A \Rightarrow B$	non(A)	non(A) ou B
F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	F
V	V	F	V	F	V
V	V	V	V	F	V

Les deux assertions sont donc équivalentes, ce qu'on aurait pu démontrer à l'aide de l'exercice 1 : non($A \Rightarrow B$) $\iff$ A et non(B) $\iff$ non((non(A)) ou B) donc non(non($A \Rightarrow B$)) $\iff$ non(non($A \Rightarrow B$)) et on retrouve le même résultat. En clair : quand deux assertions ont même négation (ou des négations équivalentes), elles sont elles-mêmes équivalentes.

5. ((A ou B) $\Rightarrow C$) est-elle équivalence à (($A \Rightarrow B$) et ($B \Rightarrow C$)) ?

A	B	C	A ou B	$(A$ ou $B) \Rightarrow C$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow C)$
F	F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	F	V	F	F
V	V	V	V	V	V	V	V

Les deux assertions ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 3 - Le connecteur de Sheffer : ✪✪ On définit un nouveau connecteur logique, noté $\uparrow$ (parfois appelé connecteur de Sheffer, ou nand) en posant, lorsque p et q sont des assertions : $p \uparrow q \iff$ non(p et q).

1. Dire « en français » quand $p \uparrow q$ est vraie.
2. Construire sans démonstration la table de vérité de $\uparrow$. La suite de l'exercice se fera sans table de vérité, mais en utilisant les lois de Morgan et l'exercice 1.
3. Simplifier $p \uparrow p$ et $(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$.
4. En déduire une assertion équivalente à p et q ne contenant que p, q et $\uparrow$ (éventuellement plusieurs fois). Par conséquent, toute assertion contenant les connecteurs non, ou, et peut être réécrite en utilisant uniquement le connecteur $\uparrow$. On dit qu'il forme un système complet.

Correction :

1. $p \uparrow q$ est vraie lorsque p et q ne sont pas toutes les deux vraies.
2. On a

p	q	$p \uparrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	V
V	V	F

3. $p \uparrow p \iff \text{non}(p \text{ et } p) \iff \text{non}(p)$ (d'après l'exo 1) et

$$\begin{aligned}
(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q) &\iff \text{non}(p) \uparrow \text{non}(q) \\
&\iff \text{non}(\text{non}(p) \text{ et } \text{non}(q)) \\
&\iff \text{non}(\text{non}(p \text{ ou } q)) \\
&\iff p \text{ ou } q
\end{aligned}$$

4. D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
p \text{ et } q &\iff \text{non}(\text{non}(p \text{ et } q)) \\
&\iff \text{non}(p \uparrow q) \\
&\iff (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)
\end{aligned}$$

0.1.2 Quantificateurs, négation et contraposée.

Exercice 4 : ✪ Nier toutes les affirmations suivantes, et donner la contraposée des affirmations 1 à 5 :

1. Toute suite convergente est bornée.
2. Tous les colleurs de mauvaise humeur mettent en-dessous de la moyenne.
3. À chaque fois qu'un élève connaît son cours, cela rend le professeur content.
4. Si $r \in \mathbb{Q}$ alors $r^2 \in \mathbb{Q}$.
5. Si f est dérivable alors f est continue.
6. Tous les garçons de la classe ont une mère qui a au moins un frère.
7. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie.
8. $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow (\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0)$
9. $\forall (a, b) \in A^2, ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$
10. $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \exists N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), MN = I_n$.
11. $\exists x \in G, \forall y \in G, xy = yx$
12. $\forall x < y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y$.
13. $\forall (P, Q) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, PQ = QP$.
14. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$.
15. $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$.
16. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
17. $\forall (x, y) \in I^2, x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$.
18. $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in K, \exists \alpha \in A, \forall y \in B(x, \varepsilon), y \in O_\alpha$.
19. $(\exists x \in \mathbb{R}, e^x = 2)$ et $(\forall y \in \mathbb{R}, e^y = 2 \Rightarrow y = x)$

Correction :

1. Il existe une suite convergente qui n'est pas bornée. Contraposée : si une suite n'est pas bornée, alors elle diverge.
2. Il existe un colleur de mauvaise humeur qui met au-dessus de la moyenne. Contraposée : si un colleur met au-dessus de la moyenne, alors il est de bonne humeur.
3. Il existe un élève qui connaît son cours qui ne rend pas le professeur content. Contraposée : si le professeur est mécontent, c'est que l'élève ne connaissait pas son cours.
4. Il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $r^2 \notin \mathbb{Q}$. Contraposée : si $r^2 \notin \mathbb{Q}$, alors $r \notin \mathbb{Q}$.
5. Il existe f dérivable non continue. Contraposée : si f n'est pas continue, alors elle n'est pas dérivable.
6. Il existe un garçon de la classe qui a une mère qui n'a pas de frère.
7. $\exists n \in \mathbb{N}, P(n)$ vraie et $P(n+1)$ fausse.
8. $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ non tous nuls.
9. $\exists (a, b) \in A^2, ab = 0$ et $(a \neq 0 \text{ et } b \neq 0)$
10. $\exists M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \forall N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), MN \neq I_n$.
11. $\forall x \in G, \exists y \in G, xy \neq yx$

12. $\exists x < y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{Q}, z \leq x$ ou $y \leq z$.
13. $\exists (P,Q) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, PQ \neq QP$.
14. $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D_f, |x-a| \leq \eta$ et $|f(x) - L| > \varepsilon$.
15. $\exists A > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, u_n < A$.
16. $\exists n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$.
17. $\exists (x,y) \in I^2, x \neq y$ et $|f(x) - f(y)| \geq |x-y|$.
18. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in K, \forall \alpha \in A, \exists y \in B(x, \varepsilon), y \notin O_\alpha$.
19. $(\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 2)$ ou $(\exists y \in \mathbb{R}, e^y = 2$ et $y \neq x)$

Exercice 5 : ✪ Écrire les propositions suivantes, ainsi que leurs négations, avec des quantificateurs :

1. f est l'identité de $\mathbb{R}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ envoie les rationnels sur des rationnels.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.
4. Il y a une valeur que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend deux fois.
5. n est un nombre pair.
6. f est positive sur $\mathbb{R}^+$.
7. f est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
8. f s'annule sur $\mathbb{R}$.
9. f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
10. f est constante sur $\mathbb{R}$.
11. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
12. f est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et strictement négative sur $\mathbb{R}^{-*}$.
13. Il existe un réel ayant deux antécédents par f.
14. Il existe un réel n'ayant aucun antécédent par f.
15. f est à valeurs dans $[-1\,;1]$.
16. Tous les éléments de $[-1\,;1]$ sont atteints par f.
17. Tout réel admet un unique antécédent par f.
18. Tout réel admet une unique image par f.
19. Tout réel positif est le carré d'un réel.
20. Tout entier naturel est la somme de quatre carrés d'entiers naturels.

Correction :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x$.
2. $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) \in \mathbb{Q}$. Négation : $\exists x \in \mathbb{Q}, f(x) \notin \mathbb{Q}$.
3. $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = 0$. Négation : $\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, u_n \neq 0$.
4. $\exists n \neq p, u_n = u_p$. Négation : $\forall n \neq p, u_n \neq u_p$.
5. $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$ (ou $\mathbb{N}$ si on sait que n est positif). Négation : $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k+1$.
6. $\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$. Négation : $\exists x \geq 0, f(x) < 0$.
7. $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0)$. Négation : $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 0)$ et $(\exists y \in \mathbb{R}, f(x) > 0)$. En général, dans un exercice, nous utiliserons ces deux réels, d'où la nécessité de leur donner des noms différents.
8. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
9. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
10. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y)$ (mais on aurait aussi pu écrire l'autre écriture de l'exercice 11, moins pratique). Négation : $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) \neq f(y)$.
11. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Négation : $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y$ et $f(x) \geq f(y)$.
12. $(\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) > 0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) < 0)$. Négation : $(\exists x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq 0)$ ou $(\exists y \in \mathbb{R}_-^*, f(x) \geq 0)$.
13. $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y$ et $f(x) = f(y)$. Négation : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
14. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$. Négation : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.
15. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-1\,;1]$. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \notin [-1\,;1]$.
16. $\forall y \in [-1\,;1], \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$. Négation : $\exists y \in [-1\,;1], \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$.
17. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists! x \in \mathbb{R}, f(x) = y$. Négation : $(\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y)$ ou $(\exists y \in \mathbb{R}, \exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2))$.
18. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R}, f(x) = y$. Négation : $(\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \neq y)$ ou $(\exists x \in \mathbb{R}, \exists (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, y_1 \neq y_2$ et $f(x) = y_1 = y_2)$.
19. $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, y = x^2$. Négation : $\exists y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, y \neq x^2$.
20. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4, n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Négation : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall (a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4, n \neq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Exercice 6 - Critère de Miller-Rabin : ✪✪ Donner la contraposée de l'affirmation suivante : « Si $2^s \times t + 1$ est premier, alors pour tout $a \in [\![1\,;\, 2^s \times t]\!], a^t \equiv 1 [2^s \times t + 1]$ ou il existe $i \in [\![0\,;\, s-1]\!]$ tel que $a^{2^i t} \equiv -1 [2^s \times t + 1]$. »

Correction : S'il existe $a \in [\![1\,;\, 2^s \times t]\!], a^t \not\equiv 1 [2^s \times t + 1]$ et tel que pour tout $i \in [\![0\,;\, s-1]\!], a^{2^i t} \not\equiv -1 [2^s \times t + 1]$ alors $2^s \times t + 1$ n'est pas premier.

Exercice 7 - Un peu de théorie des ensembles : ✪✪ Nier les axiomes suivants :

- **Axiome d'extensionnalité :** $\forall E, \forall F, \forall x, (x \in E \iff x \in F) \Rightarrow E = F$
- **Axiome de la somme :** $\forall E, \exists F, \forall x, [x \in F \iff \exists a (a \in E$ et $x \in a)]$
- **Axiome de l'ensemble des parties :** $\forall E, \exists F, \forall G, G \in F \iff G \subset E$

- **Axiome de l'infini :** $\exists E, [0 \in E \text{ et } \forall x, (x \in E \Rightarrow x+1 \in E)]$

Correction : Il faut tout d'abord écrire chaque axiome sous une forme dont nous savons donner la négation : nous devons les exprimer avec uniquement des quantificateurs, des et, des ou, des non et des implications. La première chose à faire est donc de remplacer les équivalences que l'on veut nier par des doubles implications.

- Inutile de reformuler l'équivalence : la négation de $A \Rightarrow B$ est A et non(B) : nous n'allons pas nier cette équivalence, inutile de la reformuler ! La négation voulue est donc :
$$\exists E, \exists F, \exists x, (x \in E \iff x \in F) \text{ et } E \neq F$$
- Ici, on veut nier une équivalence. On la reformule donc en double implication, ce qui donne :
$$\forall E, \exists F, \forall x, [(x \in F) \Rightarrow (\exists a (a \in E \text{ et } x \in a))] \text{ et } [(\exists a (a \in E \text{ et } x \in a)) \Rightarrow (x \in F)]$$
La négation est donc : $\exists E, \forall F, \exists x, [(x \in F) \text{ et } (\forall a (a \notin E \text{ ou } x \notin a))] \text{ ou } [(\exists a (a \in E \text{ et } x \in a)) \text{ et } (x \notin F)]$.
- Idem, commençons par reformuler l'axiome :
$$\forall E, \exists F, \forall G, [(G \in F) \Rightarrow (G \subset E)] \text{ et } [(G \subset E) \Rightarrow (G \in F)]$$
La négation est donc : $\exists E, \forall F, \exists G, [(G \in F) \text{ et } (G \not\subset E)] \text{ ou } [(G \subset E) \text{ et } (G \notin F)]$.
- Ici, inutile de reformuler, la négation est : $\forall E, [(0 \notin E) \text{ ou } (\exists x, (x \in E \text{ et } x+1 \notin E))]$.

0.1.3 Premiers modes de raisonnement.

Exercice 8 : ✪ Déterminer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse (en le démontrant).

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, m \leq x^2 \leq M$.
2. $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq x^2 \leq M$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, m \leq \sin(x) \leq M$.
4. $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq \sin(x) \leq M$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y < x$.
6. $\exists x \in [0;1], \forall y \in [0;1], x \leq y$.
7. $1+1=2 \Rightarrow 1+1=3$.
8. $1+1=3 \Rightarrow 1+1=2$.
9. $1=0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, 3=2k$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x \geq 3$.
11. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2, x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.
12. $\exists x \in \mathbb{R}_+, x < \sqrt{x}$.
13. $\exists ! x \in \mathbb{R}, \cos(x) = 0$.
14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n+m$ soit impair.
15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \times m$ soit impair.
16. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$.
17. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y > 0$.
18. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x+y > 0$.
19. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y > 0$.
20. $\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2, \exists z \in \mathbb{N}, \sqrt{z} > x+y$.
21. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \ln(\ln(y)) > x$.
22. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y=0 \Rightarrow (x=y=0)$.
23. Il existe f et g croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f-g$ soit la fonction nulle (une fonction différence de deux fonctions croissantes est dite à variations bornées).

Correction :

1. Vrai : Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $m = M = x^2$ conviennent.
2. Faux : la fonction carré n'est pas majorée (la différence est qu'ici, m et M doivent être les mêmes pour tout x, ne doivent pas dépendre de x car ils sont définis avant). Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe de tels m et M. Alors $M \geq 0$ et, pour $x = M+1$, il vient $M^2 + 2M + 1 \leq M$ ce qui est absurde car $M^2 + 2M + 1 \geq 2M + 1 > M$.
3. Vrai : $m = M = \sin(x)$ conviennent.
4. Vrai : $m = -1$ et $M = 1$ conviennent.
5. Vrai : soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $y = x - 1$ convient.
6. Vrai : si $x = 0$ alors, pour tout $y \in [0;1]$, $x \leq y$.
7. Faux : $A \Rightarrow B$ est fausse si A est vraie et B fausse.
8. Vrai : $A \Rightarrow B$ est toujours vraie si A est fausse.
9. Vrai : idem.
10. Faux. La négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, x > 2$ et $x < 3$, et la négation est vraie car $x = 2.5$ convient.
11. Faux. La négation est : $\exists (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2, x < y$ et $1/x \leq 1/y$, et $x = -1$ et $y = 1$ conviennent.
12. Vrai : $x = 1/4$ convient.
13. Faux : $\pi/2$ et $3\pi/2$ conviennent donc il n'y a pas unicité.
14. Vrai : soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $n + n + 1 = 2n + 1$ est impair : $m = n + 1$ convient.
15. Faux. La négation est : $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$, $n \times m$ est pair, et on voit que la négation est vraie en prenant $n = 2$.
16. Faux. La négation est : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$ et la négation est vraie en prenant $x = y = 0$.
17. Vrai : soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x + (1 - x) = 1 > 0$: $y = x + 1$ convient.
18. Faux : la différence est que le y doit être le même pour tout x car il est défini avant. La négation est : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$ et celle-ci est vraie. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$. Alors, en posant $x = -y$, il vient $x + y \leq 0$.

19. Vrai : $x = y = 1$ conviennent.
20. Vrai. Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Soit $z = (x+y+1)^2 \in \mathbb{N}$. Alors $\sqrt{z} = x+y+1 > x+y$.
21. Vrai : soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $y = e^{e^x} + 1$. Alors $y > e^{e^x}$ et, par stricte croissance du ln, $\ln(y) > e^x$ et $\ln(\ln(y)) > x$.
22. Faux. La négation est : $\exists(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0$ et ($x \neq 0$ ou $y \neq 0$), qui est vraie car $1 - 1 = 0$ ($x = 1$ et $y = -1$ conviennent).
23. Vrai : $f = g = \exp$ conviennent.

Exercice 9 - Autour de la conjecture de Goldbach : ✪

- La conjecture de Goldbach est : « Tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est somme de deux nombres premiers ».
- La conjecture de Goldbach faible est : « Tout nombre impair supérieur ou égal à 7 est somme de trois nombres premiers ».

1. Montrer que la conjecture implique la conjecture faible.
2. En 2013, Harald Helfgott a démontré la conjecture de Goldbach faible (enfin, il a proposé une preuve qui est encore en cours de vérification, mais bon...). Que peut-on en déduire concernant la conjecture ?

Correction :

1. Supposons la conjecture de Goldbach vraie. Soit $n \geq 7$ impair. Alors $n = 3 + m$ où m est pair supérieur ou égal à 4. D'après la conjecture de Goldbach (qu'on a supposée vraie), il existe p, q premiers tels que $m = p + q$ donc $n = p + q + 3$: n est somme de trois nombres premiers, la conjecture faible est vraie.
2. Rien ! Le fait que $A \Rightarrow B$ et B soient vraies ne nous apporte aucune information sur A ! Si B avait été fausse, par contraposée, on aurait pu affirmer que A est fausse, mais ce n'est pas le cas (et heureusement pour la conjecture de Goldbach !).

Exercice 10 : ✪ Soit $r \in \mathbb{R}$. Prouver l'équivalence suivante, vue en cours :

$$\exists(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, r = \frac{p}{q} \iff \exists(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, r = \frac{p}{q}$$

Correction : Supposons qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $r = p/q$. Si $q > 0$ alors $q \in \mathbb{N}^*$ alors il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = p/q$. Si $q < 0$, alors $-q \in \mathbb{N}^*$ et $r = (-p)/(-q)$: en posant $p' = -p$ et $q' = -q$, il existe $(q', p') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = p'/q'$. La réciproque est immédiate puisque $\mathbb{N}^*$ est inclus dans $\mathbb{Z}^*$.

Exercice 11 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prouver l'équivalence suivante :

$$\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y) \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda$$

Correction : Supposons que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y)$. Soit $\lambda = f(0)$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x) = f(0)$ donc $f(x) = \lambda$: on a bien prouvé qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda$. Réciproquement, supposons qu'il existe λ tel que, pour tout x, $f(x) = \lambda$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $f(x) = \lambda$ et $f(y) = \lambda$ donc $f(x) = f(y)$.

Exercice 12 : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et soit $L \in \mathbb{R}$. Prouver les équivalences suivantes :

1. $(\forall\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon) \iff (\forall\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - L| \leq 2\varepsilon)$.
2. $(\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A) \iff (\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A)$.

Correction :

1. Le sens direct est évident puisque, pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq 2\varepsilon$. Réciproquement, supposons : $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - L| \leq 2\varepsilon$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varepsilon' = \varepsilon/2 > 0$. Alors, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - L| \leq 2\varepsilon' = \varepsilon$. D'où l'équivalence.
2. Le sens direct est immédiat puisque $\mathbb{R}_+$ est inclus dans $\mathbb{R}$. Réciproquement, supposons : $\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Si $A \geq 0$ alors, par hypothèse, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq A$. Supposons à présent $A < 0$. Par hypothèse (avec $0 \in \mathbb{R}_+$ à la place de A) il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0, u_n \geq 0 \geq A$. Dans tous les cas on a le résultat voulu.

0.2 Pour s'amuser.

Exercice 13 : ✪ Pierre le fermier sait prévoir à l'avance le temps qu'il fera en regardant son chat se passer la patte derrière les oreilles. S'il pleut, il reste chez lui. Cependant, s'il fait beau, parfois, comme tout ancien élève de prépa, il est atteint de flemmingite aiguë et ne sort pas non plus. Si Pierre le fermier ne sort pas, que puis-je en conclure ? Et s'il sort ?

Correction : On a donc l'implication « Il pleut » $\Rightarrow$ « Pierre le fermier ne sort pas » mais il est précisé également que la réciproque est fausse. S'il sort, par contraposée, cela signifie qu'il fait beau, mais s'il ne sort pas, on ne peut rien affirmer car il peut ne pas sortir s'il fait beau et il ne sort pas s'il pleut.

Exercice 14 : ✪ Il y a fort fort longtemps, dans un lycée fort fort lointain, il y avait deux classes de première année, notées S1A et S1B, et deux classes de deuxième année, notées S2A et S2B. La seule règle pour l'affectation des élèves est la suivante : les élèves ne faisant pas anglais LV1 vont en B (S1B puis S2B).

1. Que peut-on affirmer au sujet d'un élève de première année :

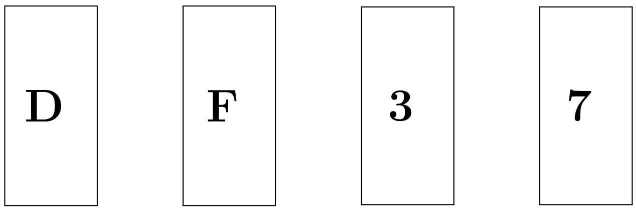
   (a) se trouvant en S1B ? (b) se trouvant en S1A ? (c) faisant anglais LV1 ? (d) faisant allemand LV1 ?

2. Dans chacun des cas ci-dessus, peut-on dire dans quelle classe se trouvera l'élève en seconde année ?

Correction :

1. (a) Si l'élève est en S1B : on ne peut rien affirmer, il peut faire anglais LV1 ou non (les élèves ne faisant pas anglais LV1 sont en B mais cela ne signifie pas qu'il n'y a que des élèves ne faisant pas anglais LV1).
   (b) Un élève en S1A fait anglais LV1 car, s'il ne faisait pas anglais LV1, il serait en S1B.
   (c) On ne peut rien affirmer concernant un élève faisant anglais LV1, il peut être dans chacune des classes de première année.
   (d) Un élève faisant allemand LV1 (comme toute personne civilisée) se trouve forcément en S1B.
2. Si un élève se trouve en S1B, il peut faire anglais LV1 ou non, on ne peut rien affirmer concernant sa classe de deuxième année. Si un élève se trouve en S1A, il fait forcément anglais LV1 mais on ne peut rien en déduire sur sa classe de deuxième année. Idem s'il fait anglais LV1. Cependant, s'il fait allemand LV1, alors il sera forcément en S2B.

Exercice 15 - Tâche de sélection de Wason : ✪ On dispose de quatre cartes, chacune comportant un chiffre sur un côté et une lettre sur l'autre. On place les quatre cartes sur la table :



On nous dit :

« Si une carte a un D sur l'un des côtés, alors elle a un 3 sur l'autre. »

Quelles sont les cartes qu'il faut retourner pour savoir si cette règle est vraie ?

Correction : En d'autres termes, on a l'implication « D sur un côté $\Rightarrow$ 3 sur l'autre ». Il faut évidemment retourner le D. Il n'est pas nécessaire de retourner le 3 car la réciproque n'est pas forcément vraie. On se fiche du F, mais il faut retourner le 7. En effet, la contraposée est « s'il y a un nombre différent de 3 sur un côté, alors la lettre de l'autre côté est différente de D » : s'il y a un nombre différent de 3 derrière le F, alors la règle est vraie, mais s'il y a un 3, alors la règle est fausse.

Exercice 16 : ✪✪ Une feuille de papier comporte les cent affirmations suivantes :
- Cette feuille contient exactement une phrase fausse.
- Cette feuille contient exactement deux phrases fausses.

  $\vdots$
- Cette feuille contient exactement cent phrases fausses.

Quelles sont les affirmations vraies écrites sur cette feuille ?

Correction : Soit n le nombre d'affirmations vraies sur cette feuille. Alors il y a $100 - n$ affirmations fausses. De plus, on ne peut pas avoir deux affirmations vraies car les affirmations sont incompatibles. Il y a donc 0 affirmation vraie ou une seule. S'il n'y a aucune affirmation vraie, alors 100 affirmations sont fausses donc la dernière est vraie ce qui est absurde car il n'y a aucune affirmation vraie. Ainsi, il y a une seule affirmation vraie, donc 99 fausse : la seule affirmation vraie est l'avant-dernière.

0.3 Notation d'ensembles.

Exercice 17 : ✪ Écrire en langage mathématique les ensembles suivants :

1. L'ensemble des entiers naturels divisibles par 7.
2. L'ensemble des fractions d'entiers (relatifs) dont le dénominateur est une puissance de 3.
3. L'ensemble des entiers qui sont somme de deux carrés d'entiers.
4. L'ensemble des inverses d'entiers naturels (non nuls).

5. L'ensemble des carrés parfaits.

Correction :

1. $\{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists k \in \mathbb{N}, n = 7k\}$.
2. $\left\{\dfrac{p}{3^k} \,|\, p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\right\}$.
3. $\{n \in \mathbb{N} \,|\, \exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, n = a^2 + b^2\}$.
4. $\left\{\dfrac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
5. $\{n^2 \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 18 : ✪ Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit

$$A = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \,\middle|\, (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$$

Écrire l'assertion « $x \in A$ » avec des quantificateurs. Les réels $0, 1/6$ et 1 appartiennent-ils à A ?

Correction : $x \in A \iff \exists (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, x = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}$. $0 \in A$ car $0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{6} \in A$ car $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$ mais $1 \notin A$: en effet, s'il existe $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $1 = \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}$ alors $1 < \dfrac{1}{m} \leq 1$ ce qui est absurde.

0.4 Divers.

Exercice 19 : ✪ A votre avis, quelle(s) phrase(s) ai-je envie de lire dans une copie ?

1. S'il fait beau, alors la fonction sinus est nulle.
2. La fonction $\sin x$ s'annule en π.
3. Si $x = \pi$ alors la fonction sinus est nulle.
4. Si $x = \pi$ alors $\sin x = 0$.
5. $\sin x = 0$.
6. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ s'annule en π.

Correction :

1. Sans commentaire.
2. Non : $\sin(x)$ n'est pas une fonction mais un nombre.
3. Non : où la fonction sinus est-elle nulle ? Quel est le rapport entre les deux parties de la phrase ? Il n'y a aucune différence avec la première phrase.
4. Oui : clair, net, précis.
5. Non : qui est x ? Sauf s'il a été défini auparavant.
6. Oui.

Exercice 20 - Un peu de calcul : ✪

1. Donner le signe des quantités suivantes :
   (a) $e^{-1} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} - 1$
   (b) $3 - 4\ln(2)$
   (c) $\dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}$
   (d) $\dfrac{\pi}{2} - \sqrt{2}$
   (e) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} - 2$
   (f) $e^2 - 10$
   (g) $\ln(3) - 1$
   (h) $\dfrac{\dfrac{120}{119} - \dfrac{1}{239}}{1 + \dfrac{120}{119 \times 239}} - 1$
2. Donner la valeur de $32 \times 28, 25^2, 26^2, 94^2$.
3. Donner en comptant sur ses doigts le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n > 100000$.

Correction :

1. (a) $e > 2$ donc $1/e < 1/2$ et $\pi > 2$ donc $2\pi > 4$ si bien que $\sqrt{2\pi} > 2$ donc $1/\sqrt{2\pi} < 1/2$ (on a utilisé la stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ et la stricte croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$) et donc $e^{-1} + 1/\sqrt{2\pi} - 1 < 0$.
   (b) $\ln(2) \approx 0.693 < 0.7$ donc $4\ln(2) < 2.8$ donc $3 - 4\ln(2) > 0$.
   (c) $\dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi^2 - 8}{16}$ et $\pi > 3$ donc (la fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$) $\pi^2 > 9 > 8$ si bien que $\dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2} > 0$.
   (d) $\pi > 3$ donc $\pi/2 > 1.5 > \sqrt{2} \approx 1.414$ donc $\dfrac{\pi}{2} - \sqrt{2} > 0$.

(e) $\dfrac{\pi}{2} > \sqrt{2}$ donc, en divisant par $\sqrt{2}$ et en multipliant par 2 strictement positifs, il vient : $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} > 2$ donc $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} - 2 > 0$.

(f) $e < 3$ donc $e^2 < 9$ et donc $e^2 - 10 < 0$.

(g) $3 > e$ donc $\ln(3) > \ln(e) = 1$ si bien que $\ln(3) - 1 > 0$.

(h) Ce n'est pas facile à l'oeil nu... Notons A cette quantité.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\dfrac{120 \times 239 - 119}{119 \times 239}}{\dfrac{119 \times 239 + 120}{119 \times 239}} - 1 \\ &= \frac{120 \times 239 - 119}{119 \times 239 + 120} - 1 \\ &= \frac{119 \times 239 + 239 - 119}{119 \times 239 + 120} - 1 \\ &= \frac{119 \times 239 + 120}{119 \times 239 + 120} - 1 \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ce calcul apparaît dans la formule de Machin (cf. exercice 35 du chapitre 5).

2. $32 \times 28 = (30+2)(30-2) = 30^2 - 2^2 = 896$, $25^2 = 625$, $26^2 = (25+1)^2 = 25^2 + 2 \times 25 + 1 = 676$ et $94^2 = (95-1)^2 = 95^2 - 2 \times 95 + 1 = 9025 - 190 + 1 = 8836$.
3. $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128, 2^8 = 256, 2^9 = 512, 2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048$, $2^{12} \approx 4000$, $2^{13} \approx 8000$, $2^{14} \approx 16000$, $2^{15} \approx 32000$, $2^{16} \approx 64000$ et $2^{17} \approx 128000$: le premier n qui convient est 17.

Exercice 21 : ✪ Donner une CNS sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la fraction

$$f(a,b) = \frac{\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b^2}{a-b}}{\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{ab}{a+b}}$$

soit bien définie. Cette condition étant supposée remplie, simplifier $f(a,b)$ au maximum.

Correction : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} f(a,b) \text{ est bien définie} &\iff \begin{cases} a-b \neq 0 \\ a+b \neq 0 \\ \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{ab}{a+b} \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a \neq \pm b \\ \dfrac{(a+b)^2 - 2ab}{2(a+b)} \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a \neq \pm b \\ (a+b)^2 - 2ab \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a \neq \pm b \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or : $a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0$. En particulier, si $a \neq \pm b$, alors $a^2 + b^2 \neq 0$. Finalement, $f(a,b)$ est bien définie si et seulement si $a \neq \pm b$, ce qu'on suppose dans la suite.

$$
\begin{aligned}
f(a,b) &= \frac{\dfrac{(a+b)(a-b)+2b^2}{2(a-b)}}{\dfrac{(a+b)^2-2ab}{2(a+b)}} \\
&= \frac{a^2+b^2}{2(a-b)} \times \frac{2(a+b)}{a^2+b^2} \\
&= \frac{a+b}{a-b}
\end{aligned}
$$

0.5 Bonus : l'alphabet grec et la conjugaison du verbe résoudre.

Présent :
Je résous
Tu résous
Il résout
Nous résolvons
Vous résolvez
Ils résolvent

Passé composé :
J'ai résolu
Tu as résolu
Il a résolu
Nous avons résolu
Vous avez résolu
Ils ont résolu

Impératif :
Résous
Résolvons
Résolvez

Minuscule	Majuscule	Français
α	A	alpha
β	B	bêta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε	E	epsilon
ζ	Z	zêta
η	H	êta
θ	Θ	thêta
ι	I	iota
κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
ν	N	nu
ξ	Ξ	xi
o	O	omicron
π	Π	pi
ρ	P	rhô
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	upsilon
ϕ, φ	Φ	phi
χ	X	chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	oméga

Futur :
Je résoudrai
Tu résoudras
Il résoudra
Nous résoudrons
Vous résoudrez
Ils résoudront

Conditionnel présent :
Je résoudrais
Tu résoudrais
Il résoudrait
Nous résoudrions
Vous résoudriez
Ils résoudraient

Subjonctif présent :
Que je résolve
Que tu résolves
Qu'il résolve
Que nous résolvions
Que vous résolviez
Qu'ils résolvent

Chapitre 1

Différents types de raisonnements

Exercice 1 : ✪ Pierre le fermier souhaite acheter un billet de loterie. Le buraliste, logicien à ses heures perdues, vous en présente cinq numérotés de 1 à 5 et lui déclare :

- Si 5 est perdant, alors 1 est gagnant.
- Si 4 est perdant, alors 2 est gagnant.
- Si 3 est perdant, alors 5 aussi.
- Si 1 est gagnant, alors 2 aussi.
- Si 3 est gagnant, alors 4 perdant.

Quel billet Pierre le fermier devrait-il prendre ?

Correction : non(5) $\Rightarrow$ 1, non(4) $\Rightarrow$ 2, non(3) $\Rightarrow$ non(5), 1 $\Rightarrow$ 2 et 3 $\Rightarrow$ non(4). Par transitivité de l'implication, non(3) $\Rightarrow$ 2 et 3 $\Rightarrow$ 2. En d'autres termes, que 3 soit gagnant ou perdant, 2 est gagnant : Pierre le fermier devrait prendre le billet 2 (s'il veut gagner évidemment).

Exercice 2 : ✪ Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Montrer : $(\forall \varepsilon > 0, A < B + \varepsilon) \Rightarrow A \leq B$. Réciproque ?

Correction : Supposons que $A > B$. Soit $\varepsilon = A - B > 0$. Alors $A = B + \varepsilon$ donc $A \leq B + \varepsilon$. En d'autres termes, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A \geq B + \varepsilon$: on a le résultat voulu par contraposée. La réciproque est immédiate : supposons $A \leq B$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $A \leq B < B + \varepsilon$.

Exercice 3 : ✪ Montrer que toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $f = g + h$ où h est constante et g est continue et vérifie $\displaystyle\int_0^{2021} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Correction : Par analyse-synthèse.

- Analyse : supposons que g et h conviennent. Si on intègre l'égalité $f = g + h$ entre 0 et 2021, il vient, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{2021} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2021} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2021} h(t)\,\mathrm{d}t$$

  Or, h est constante égale à $h(0)$ et l'intégrale de g est nulle donc $2021h(0) = \displaystyle\int_0^{2021} f(t)\,\mathrm{d}t$ si bien que

$$h(0) = \frac{1}{2021}\int_0^{2021} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  h étant constante, elle est constante égale à $h(0)$ et $g = f - h = f - h(0)$.

- Synthèse : soit h constante égale à $\displaystyle\frac{1}{2021}\int_0^{2021} f(t)\,\mathrm{d}t$ et soit

$$g : x \mapsto f(x) - h(x) = f(x) - h(0) = f(x) - \frac{1}{2021}\int_0^{2021} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  Alors h est constante par définition, $g + h = f$ et

$$\begin{aligned}
\int_0^{2021} g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2021} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{2021} h(0)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2021} f(t)\,\mathrm{d}t - 2021h(0) \\
&= \int_0^{2021} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{2021} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exercice 4 : ✪ Montrer que $\ln 5/\ln 2$ est irrationnel. En déduire que $\ln 10/\ln 2$ l'est également.

Correction : Supposons que $\ln(5)/\ln(2) \in \mathbb{Q}$: il existe donc $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ (car $\ln(5)$ et $\ln(2)$ sont strictement positifs) tel que $\ln(5)/\ln(2) = p/q$ si bien que $q\ln(5) = p\ln(2)$ et donc $5^q = 2^p$. Or, $p \geq 1$ donc $2^p = 5^q$ est pair ce qui est absurde : $\ln(5)/\ln(2)$ est irrationnel si bien que $\ln(10)/\ln(2) = (\ln(2)+\ln(5))/\ln(2) = 1+(\ln(5)/\ln(2))$ est irrationnel car somme d'un rationnel et d'un irrationnel.

Exercice 5 - Inégalité de Bernoulli : ✪ Montrer que pour tout $x \geq -1$ et tout $n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$.

Correction : Raisonnons par récurrence. Soit $x \geq -1$.

- Pour tout $n \geq 0$, notons H_n : « $(1+x)^n \geq nx.$ »
- $(1+x)^0 = 1$ et $1+0\times x = 1$ donc on a bien $(1+x)^0 \geq 1+0\times x$: H_0 est vraie.
- Soit $n \geq 0$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \times (1+x)$. Or, par hypothèse de récurrence, $(1+x)^n \geq 1+nx$. De plus, $1+x \geq 0$ (car $x \geq -1$) donc
$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)\times(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$
c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 : ✪ Montrer que pour tout $n \geq 0, n < 2^n$.

Correction : Raisonnons par récurrence.

- Pour tout $n \geq 0$, notons H_n : « $2^n > n$ ».
- $2^0 = 1 > 0$ donc H_0 est vraie. De plus (et on verra pourquoi on en a besoin plus bas), $2^1 = 2 > 1$ donc H_1 est également vraie.
- Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. $2^{n+1} = 2^n \times 2$ donc, par hypothèse de récurrence, $2^{n+1} > 2n$. Or, $n \geq 1$ donc $2n \geq n+1$ (ce qui est faux si $n=0$: c'est pour cela qu'il faut supposer $n \geq 1$ donc qu'il faut prouver que H_1 est vraie : si on ne l'a pas fait, on revient sur ses pas) si bien que $2^{n+1} > n+1$: H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 : ✪

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2}{u_{n-1}}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie puis exprimer u_n en fonction de n.
2. **Remake :** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\times {u_n}^2$. Exprimer u_n en fonction de n.

Correction :

1. On ne nous donne pas la réponse : calculons les premiers termes pour deviner une formule que l'on prouvera par récurrence. On trouve $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ et $u_3 = 8$. Cela justifie le raisonnement par récurrence suivant.
   - Pour tout $n \geq 1$, notons H_n : « $u_n = 2^n$. »
   - H_0, H_1, H_2 et H_3 sont vraies.
   - Soit $n \geq 3$. Supposons H_n et H_{n-1} vraies (récurrence double) et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par définition de la suite, $u_{n+1} = u_n^2/u_{n-1}$. Par hypothèse de récurrence, ${u_n}^2 \neq 0$ donc u_{n+1} est bien défini et
   $$u_{n+1} = \frac{(2^n)^2}{2^{n-1}} = 2^{2n-(n-1)} = 2^{n+1}$$
   donc H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

2. On ne nous donne pas la réponse : calculons les premiers termes pour deviner une formule que l'on prouvera par récurrence. On trouve $u_0 = -2$, $u_1 = 2^2/3^1$, $u_2 = 2^4/3^3$ et $u_3 = 2^8/3^7$. Cela justifie le raisonnement par récurrence suivant.
   - Pour tout $n \geq 1$ (attention, le résultat n'est pas vrai si $n = 0$), notons H_n : « $u_n = 2^{2^n}/3^{2^n-1}$. »
   - H_1, H_2 et H_3 sont vraies.
   - Soit $n \geq 3$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par définition de la suite, $u_{n+1} = u_n^2/3$. Par hypothèse de récurrence,

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2^{2^n}}{3^{2^n-1}}\right)^2 = \frac{1}{3} \times \frac{2^{2^n \times 2}}{3^{(2^n-1)\times 2}} = \frac{1}{3} \times \frac{2^{2^{n+1}}}{3^{2^{n+1}-2}} = \frac{2^{2^{n+1}}}{3^{2^{n+1}-1}}$$

   donc H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 8 : ✪ Où sont les erreurs de raisonnement dans ce qui suit ?

- On va montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que n points distincts quelconques du plan sont toujours alignés. C'est trivialement vrai pour $n = 2$. Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai au rang n et donnons nous $n+1$ points distincts $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ dans le plan. Par hypothèse de récurrence les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont sur une même droite, de même que les points $A_2, \dots, A_{n+1}$. Or les deux droites sont égales car elles contiennent A_2 et A_3 qui sont distincts. Il en résulte que $A_1, \dots, A_{n+1}$ sont alignés ce qui termine la récurrence.
- On va montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que n crayons de couleur sont toujours de même couleur. C'est trivialement vrai pour $n = 1$. Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat vrai au rang n et donnons nous $n+1$ crayons numérotés de 1 à $n+1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence aux n premiers crayons et aux n derniers, les n premiers crayons sont de la même couleur, et les n derniers également. Or, le crayon 2 est à la fois de la même couleur que les n premiers et que les n derniers, donc tous les n premiers crayons ainsi que les n derniers ont la même couleur que le crayon 2 donc tous les crayons ont la même couleur, ce qui clôt la récurrence.

Correction :

- L'erreur consiste à dire que les deux droites sont égales car contiennent A_2 et A_3 : on a supposé $n \geq 2$ donc la première droite ne contient pas A_3 si $n = 2$ (ce qui est possible). Ce raisonnement est correct si $n \geq 3$ mais pas pour $n = 2$.
- Idem, le raisonnement est faux pour $n = 1$ car alors les n premiers crayons ne contiennent pas le crayon 2 : les n premiers crayons et les n derniers n'ont aucun crayon en commun.

Exercice 9 : ✪ On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 \in \,]\,0\,;1\,[$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (i.e. il existe a et b appartenant à $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq u_n \leq b$).

Correction : On a $0 < u_0 < 1$, $u_1 = 1 + u_0$ donc $1 < u_1 < 2$, $u_2 = 1 + u_1/2$ donc $1 < u_2 < 3/2 < 2$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n < 2$.

- Pour tout $n \geq 0$, notons H_n : « $0 < u_n < 2$. »
- H_0, H_1 et H_2 sont vraies.
- Soit $n \geq 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $0 < u_n < 2$ donc $u_n/(n+1) < 2/(n+1) < 1$ car $n \geq 2$ et puisque $u_n > 0$, alors $u_{n+1} > 1 > 0$: H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

Exercice 10 : ✪ Soient r et s deux rationnels strictement positifs tels que $\sqrt{r}$ et $\sqrt{s}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{r} + \sqrt{s}$ est irrationnel.

Correction : Supposons que $\alpha = \sqrt{r} + \sqrt{s} \in \mathbb{Q}$. $\alpha - \sqrt{r} = \sqrt{s}$ si bien que $s = \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{r} + r$. Dès lors,

$$\sqrt{r} = \frac{s - r - \alpha^2}{2\alpha}$$

car $\alpha \neq 0$. Or, $\alpha^2 \in \mathbb{Q}$ (le carré d'un rationnel est un rationnel) donc $\sqrt{r}$ est somme et quotient de rationnels donc est un rationnel, absurde.

Exercice 11 : ✪ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 17 divise $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.

Correction : Raisonnons par récurrence.

- Pour tout $n \geq 0$, notons H_n : « 17 divise $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$. »
- $3 \times 5^{2\times 0+1} + 2^{3\times 0+1} = 17$ donc H_0 est vraie.
- Soit $n \geq 0$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned} 3 \times 5^{2(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} &= 3 \times 5^{2n+3} + 2^{3n+4} \\ &= 3 \times 5^{2n+1} \times 25 + 2^{3n+1} \times 8 \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $2^{3n+1}=17k-3\times 5^{2n+1}$ si bien que :

$$\begin{aligned}3\times 5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1} &= 3\times 5^{2n+1}\times 25+8\times\left(17k-3\times 5^{2n+1}\right)\\ &= 8\times 17k+3\times 5^{2n+1}\times(25-8)\\ &= 8\times 17k+3\times 5^{2n+1}\times 17\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 12 - $\mathbb{Q}$-liberté de $(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$: ✪✪ On admet que $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels (nous le montrerons dans le chapitre 6).

1. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{Q}^3$ tel que $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$. Montrer que $a=b=c=0$.
2. Montrer qu'un cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ et de rayon $R>0$ possède au plus un point à coordonnées rationnelles.
3. L'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$ passant par deux points à coordonnées rationnelles recouvre-t-il $\mathbb{R}^2$?

Correction :

1. $-b\sqrt{2}=a+c\sqrt{3}$ si bien que $2b^2=a^2+3c^2+2ac\sqrt{3}$. Si $ac\neq 0$, alors
$$\sqrt{3}=\frac{2b^2-a^2-3c^2}{2ac}$$
donc est rationnel car quotient de rationnels, ce qui est absurde. Ainsi, $ac=0$ donc $a=0$ ou $c=0$. Si $c\neq 0$, alors $a=0$ donc $b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$ donc $c\sqrt{3}=-b\sqrt{2}$. Or, $c\neq 0$ donc $b\neq 0$. Puisque $(b\sqrt{2}+c\sqrt{3})^2=0$, il vient :
$$\sqrt{6}=\frac{-2b^2-3c^2}{2bc}\in\mathbb{Q}$$
ce qui est absurde puisque $\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$. Dès lors, $c=0$. L'égalité de départ devient $a+b\sqrt{2}=0$. Si $b\neq 0$, alors $\sqrt{2}=-a/b\in\mathbb{Q}$ ce qui est absurde donc $b=0$ et enfin $a=0$. Nous dirons plus tard que $(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ est une famille libre sur $\mathbb{Q}$.
2. Soit donc C un cercle de centre $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ et de rayon $R>0$. Soient (x_1,y_1) et (x_2,y_2) à coordonnées rationnelles appartenant à C. Alors $(x_1-\sqrt{2})^2+(y_1-\sqrt{3})^2=(x_2-\sqrt{2})^2+(y_2-\sqrt{3})^2(=R^2)$. En développant et en mettant tout du même côté, il vient :
$$\left({x_1}^2-{x_2}^2+{y_1}^2-{y_2}^2\right)+(2x_2-2x_1)\sqrt{2}+(2y_2-2y_1)\sqrt{3}=0$$
D'après ce qui précède, $2x_2-2x_1=0$ donc $x_1=x_2$, et de même $y_1=y_2$. Il y a donc au plus un point à coordonnées rationnelles sur C.
3. Soit D une telle droite. Il existe alors (x_1,y_1) et (x_2,y_2) deux points distincts à coordonnées rationnelles appartenant à D. Si $x_1=x_2$, alors D a pour équation $x=x_2$ i.e. D est verticale d'abscisse un rationnel. Sinon, D est de la forme $y=ax+b$ avec
$$a=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\in\mathbb{Q}$$
et $b=y_1-ax_1\in\mathbb{Q}$. Supposons que $(\sqrt{2},\sqrt{3})\in D$. Alors D ne peut pas être verticale car $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$. Il existe donc a,b rationnels tels qu'une équation de D soit $y=ax+b$, si bien que $\sqrt{3}=a\sqrt{2}+b$ c'est-à-dire $a\sqrt{2}+b-\sqrt{3}=0$, ce qui est impossible d'après la question 1 (le coefficient devant $\sqrt{3}$ est non nul). En conclusion, $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ n'appartient à aucune de ces droites donc ces droites ne recouvrent pas le plan.

Exercice 13 : ✪✪ Déterminer les réels x pour lesquels l'assertion suivante est vraie : $\forall y\in[\,0\,;1\,],(x\geq y\Rightarrow x\geq 2y)$.

Correction : On rappelle que si A est fausse, alors $A\Rightarrow B$ est vraie. Par conséquent, tout élément $x<0$ convient car, pour tout $y\in[\,0\,;1\,]$, l'assertion $x\geq y$ est fausse donc l'implication est vraie.

Supposons $x=0$. Soit $y\in[\,0\,;1\,]$. Supposons $x\geq y$. Alors $y=0$ donc $2y=0$ si bien que $x\geq 2y$. Finalement, l'implication est vraie : x est solution.

Supposons que $x\in\,]\,0\,;1\,]$. Posons $y=x$. Alors $x\geq y$ mais $x<2y$: l'implication est fausse (il existe $y\in[\,0\,;1\,]$ tel que $x\geq y$ et $x<2y$) donc x n'est pas solution.

Supposons que $x\in[\,1\,;2\,[$. Posons $y=1$. Alors $x\geq y$ et $x<2y$: x n'est pas solution.

Supposons enfin que $x \geq 2$. Soit $y \in [0;1]$. Alors $x \geq y$ et $x \geq 2y$: l'implication est vraie, x est solution.

En conclusion, les réels x solutions sont les réels $x \leq 0$ et $x \geq 2$.

Exercice 14 : ✪✪ Soit A une partie de $\mathbb{R}$ contenant n réels distincts. En raisonnant par récurrence, montrer que l'ensemble $B = \{x + y \,|\, (x,y) \in A^2\}$ contient au moins $2n-1$ éléments distincts.

Correction : Raisonnons par récurrence.

- Pour tout $n \geq 1$, notons H_n : « Si A contient au moins n éléments, alors B contient au moins $2n-1$ éléments. »
- Si $n = 1$, alors A contient un seul élément, noté x, et $B = \{x + x\} = \{2x\}$ contient $1 = 2 \times 1 - 1$ éléments : H_1 est vraie.
- Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Supposons donc que A admette $n+1$ éléments distincts, notés $x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}$ (on les range par ordre croissant). Notons $\tilde{A} = \{x_1; \dots; x_n\}$ et $\tilde{B} = \{x + y \,|\, (x,y) \in \tilde{A}\}$. Alors A contient n éléments distincts donc, par hypothèse de récurrence, $\tilde{B}$ contient au moins $2n-1$ éléments distincts. De plus, $\tilde{A} \subset A$ donc $\tilde{B} \subset B$. De plus, $x_n + x_{n+1}$ et $2x_{n+1} = x_{n+1} + x_{n+1}$ appartiennent à B. Montrons qu'ils sont distincts et n'appartiennent pas à $\tilde{B}$.

  $2x_{n+1} \neq x_n + x_{n+1}$ car $x_{n+1} \neq x_n$: ils sont distincts. Soit $z \in \tilde{B}$: il existe $(x,y) \in \tilde{A}^2$ tel que $z = x + y$. Or, $x \leq x_n$ et $y \leq x_n$ donc $z \leq x_n + x_n < x_n + x_{n+1} < 2x_{n+1}$ car tous les éléments de $\tilde{A}$ sont inférieurs ou égaux à x_n qui est strictement inférieur à x_{n+1}. Par conséquent, il existe (au moins) deux éléments distincts dans B qui ne sont pas dans $\tilde{B}$ donc $\text{card}(B) \geq 2 + \text{card}(\tilde{B}) \geq 2 + 2n - 1 = 2(n+1) - 1$: H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 15 - Équation de Pell-Fermat : ✪✪

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple d'entiers naturels $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3 - 2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ (où a_n et b_n sont les mêmes qu'à la question précédente).
3. Montrer qu'il existe une infinité de couple d'entiers naturels $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.

Correction :

1. Existence : raisonnons par récurrence.
   - Pour tout $n \geq \mathbb{N}$, notons H_n : « il existe un couple d'entiers naturels (a_n, b_n) tel que $(3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. »
   - Si $n = 0$, $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ conviennent.
   - Soit $n \geq 0$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. $(3 + 2\sqrt{2})^{n+1} = (3 + 2\sqrt{2})^n \times (3 + 2\sqrt{2})$. Par hypothèse de récurrence, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que

   $$\begin{aligned} (3 + 2\sqrt{2})^{n+1} &= (a_n + b_n\sqrt{2}) \times (3 + 2\sqrt{2}) \\ &= (3a_n + 4b_n) + (2a_n + 3b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

     Ainsi, $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ conviennent : H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 0$. D'où l'existence.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(c_n, d_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(3 + 2\sqrt{2})^n = c_n + d_n\sqrt{2} = a_n + b_n\sqrt{2}$. Alors $a_n - c_n = (d_n - b_n)\sqrt{2}$. Si $d_n \neq b_n$ alors $\sqrt{2} = \dfrac{a_n - c_n}{d_n - b_n} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde, donc $b_n = d_n$, et finalement $a_n = c_n$. D'où l'unicité.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Raisonnons encore une fois par récurrence.
   - Pour tout $n \geq \mathbb{N}$, notons H_n : « $(3 - 2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$. »
   - D'une part, $a_0 - b_0\sqrt{2} = 1$ et d'autre part, $(3 - 2\sqrt{2})^0 = 1$: H_0 est vraie.
   - Soit $n \geq 0$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. $(3 - 2\sqrt{2})^{n+1} = (3 - 2\sqrt{2})^n \times (3 - 2\sqrt{2})$. Par hypothèse de récurrence :

   $$\begin{aligned} (3 - 2\sqrt{2})^{n+1} &= (a_n - b_n\sqrt{2}) \times (3 - 2\sqrt{2}) \\ &= (3a_n + 4b_n) - (2a_n + 3b_n)\sqrt{2} \\ &= a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{2} \end{aligned}$$

     H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
{a_n}^2 - 2{b_n}^2 &= (a_n - b_n\sqrt{2}) \times (a_n + b_n\sqrt{2}) \\
&= (3-2\sqrt{2})^n \times (3+2\sqrt{2})^n \\
&= \left((3-2\sqrt{2}) \times (3+2\sqrt{2})\right)^n \\
&= (9-8)^n \\
&= 1
\end{aligned}$$

Par conséquent, chaque couple (a_n, b_n) est solution de l'équation. Pour montrer qu'il y a une infinité de solutions, il suffit de montrer que ces solutions sont toutes distinctes. Or, une récurrence immédiate prouve que $a_n > 0$ et $b_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en utilisant la relation de récurrence vue plus haut). En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq 3a_n > a_n$ et $b_{n+1} > 3b_n \geq b_n$ si bien que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement croissantes donc ne prennent pas deux fois la même valeur, ce qui permet de conclure.

Exercice 16 : ✪✪ Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = {u_n}^2 + {u_{n+1}}^2.$$

Correction : On a $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 5$. Montrons que la suite est croissante.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $u_n \leq u_{n+1}$. »
- H_0, H_1, H_2, H_3 sont vraies.
- Soit $n \geq 2$. Supposons H_n et H_{n+1} vraies et prouvons que H_{n+2} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \geq u_n \geq u_{n-1}$ (d'où la nécessité de supposer H_n et H_{n+1} vraies). De plus, $u_{n-1} \geq 0$ (si $n = 2$, alors $u_{n-1} = u_1 \geq 0$ par définition, et si $n > 2$ alors $u_{n-1} \geq 0$ car est une somme de deux carrés) donc $u_{n+1} \geq u_{n-1} \geq 0$. Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, ${u_{n+1}}^2 \geq {u_{n-1}}^2$ donc

$$u_{n+2} = {u_{n+1}}^2 + {u_n}^2 \geq {u_{n-1}}^2 + {u_n}^2 = u_{n+1}$$

  c'est-à-dire que H_{n+2} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 0$: la suite est croissante.

Exercice 17 - Multiplication russe : ✪✪ Soient m et n deux entiers strictement positifs. Sur une première ligne (voir ci-contre un exemple avec $n = 11$ et $m = 17$), on écrit m et n. Sur la ligne suivante, on écrit le quotient (on oublie les décimales et le reste) de la division de n par 2 sous la valeur de n, on écrit $2m$ sous la valeur de m, et on recommence jusqu'à obtenir 1 sous la colonne de n.

$$\begin{array}{rrr}
 & 11 & 17 \\
+ & 5 & 34 \\
 & \cancel{2} & \cancel{68} \\
+ & 1 & 136 \\
\hline
 & & 187
\end{array}$$

En d'autres termes : à chaque ligne, dans la colonne de n, on divise par 2 (et on enlève les décimales) et dans la colonne de m, on multiplie par 2. Quand on a terminé, on barre les lignes dont le nombre situé en colonne des n (la première colonne dans notre exemple) est pair. Finalement, on somme les termes de la colonne de m (la seconde colonne dans notre exemple) non barrés, et on note $\varphi(n,m)$ l'entier obtenu. Montrer que pour tous n et m strictement positifs, $\varphi(n,m) = n \times m$.

Correction : Raisonnons par récurrence sur n.

- Pour tout $n \geq 1$, notons H_n : « $\forall m \geq 1, \varphi(n,m) = n \times m$. »
- Si $n = 1$, alors on ne fait rien car il y a déjà 1 dans la colonne de n. Par conséquent, il n'y a que m dans la colonne de droite, et on ne le barre pas car 1 est impair, si bien que $\varphi(1,m) = m = 1 \times m$: H_1 est vraie.

$$\begin{array}{rr}
1 & m \\
\hline
 & m
\end{array}$$

- Soit $n \geq 1$. Supposons $H_0, \dots, H_n$ vraies et prouvons que H_{n+1} est vraie. Effectuons le procédé avec $n+1$ et m :

$$\begin{array}{ccr}
 & n+1 & m \\
+ & k & 2m \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
+ & 1 & \times \\
\hline
 & & \varphi(n+1,m)
\end{array}$$

  où k est le quotient de la division de $n+1$ par 2. Séparons les cas selon la parité de $n+1$.

Si $n+1$ est pair, alors on barre la première ligne et $k=(n+1)/2$:

$$\begin{array}{ccc} & \cancel{n+1} & \cancel{m} \\ + & k & 2m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ + & 1 & \times \\ \hline & & \varphi(n+1,m) \end{array}$$

et les autres lignes sont les mêmes que lorsqu'on applique ce procédé à k et $2m$, si bien que $\varphi(n+1,m)=\varphi(k,2m)$. Par hypothèse de récurrence, $\varphi(k,2m)=k\times 2m$. Or, $n+1$ est pair donc $k=(n+1)/2$ si bien que $\varphi(n+1,m)=(n+1)\times m$.

Si $n+1$ est impair, alors on ne barre pas la première ligne, si bien que $\varphi(n+1,m)=m+\varphi(k,2m)$. Or, $n+1$ est impair donc $k=n/2$ donc, par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\varphi(n+1,m) &= m+\frac{n}{2}\times 2m \\ &= m+nm \\ &= (n+1)m\end{aligned}$$

c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie dans tous les cas.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n\geq 1$.

Exercice 18 : ✪✪ Montrer que tout entier $n\in\mathbb{N}^*$ s'écrit comme une somme de puissances de 2 distinctes.

Correction : Raisonnons par récurrence.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, notons H_n : « n est une somme de puissances de 2 distinctes. »
- $1=2^0$ donc H_1 est vraie.
- Soit $n\geq 1$. Supposons $H_1,\dots,H_n$ vraies et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit k tel que $2^k\leq n+1<2^{k+1}$ (note pour plus tard : $k=\lfloor\log_2(n+1)\rfloor=\lfloor\ln(n+1)/\ln(2)\rfloor$). Par hypothèse de récurrence, $n+1-2^k$ est somme de puissances de 2 distinctes c'est-à-dire qu'il existe $p\geq 1$ et $n_1,\dots,n_p$ distincts tels que $n+1-2^k=2^{n_1}+\cdots+2^{n_p}$ et donc
$$n+1=2^k+2^{n_1}+\cdots+2^{n_p}$$
Les entiers $n_1,\dots,n_p$ sont distincts par hypothèse de récurrence. De plus, si l'un des n_i est égal à k, alors $n+1\geq 2^k+2^k=2^{k+1}$ ce qui est absurde : les n_i sont distincts et distincts de k donc les puissances de l'écriture ci-dessus sont toutes distinctes, c'est-à-dire que H_{n+2} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n\geq 1$.

Exercice 19 - La suite de Fibonacci : ✪✪ La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lrcl} F_0=0 & F_1 &=& 1 \\ \forall n\in\mathbb{N} & F_{n+2} &=& F_n+F_{n+1}\end{array}\right.$$

On pose également $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Montrer que φ et ψ sont racines d'un trinôme du second degré à coefficients entiers que l'on déterminera.
2. Montrer que pour tout $n\geq 0, F_n=\dfrac{\varphi^n-\psi^n}{\sqrt{5}}$.

Correction :

1. φ et ψ sont racines du trinôme $(x-\varphi)(x-\psi)$. En développant, on trouve que φ et ψ sont solutions de l'équation $x^2-x-1=0$.
2. Raisonnons par récurrence (double).
   - Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons H_n : « $F_n=\dfrac{\varphi^n-\psi^n}{\sqrt{5}}$. »
   - $\dfrac{\varphi^0-\psi^0}{\sqrt{5}}=0=F_0$ donc H_0 est vraie. $\dfrac{\varphi^1-\psi^1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1=F_1$ donc H_1 est vraie.
   - Soit $n\geq 1$. Supposons H_n et H_{n-1} vraies et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par définition de la suite de Fibonacci, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$. Par hypothèse de récurrence,

$$
\begin{aligned}
F_{n+1} &= \frac{\varphi^n - \psi^n + \varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\varphi^{n-1}(\varphi+1) - \psi^{n-1}(\psi+1)}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

Or, d'après la question 1, $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ donc $\varphi + 1 = \varphi^2$ et on a également $\psi + 1 = \psi^2$ si bien que

$$F_{n+1} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

Exercice 20 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, f \circ f(n) < f(n+1)$.

1. Montrer que : $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, k \geq n \Rightarrow f(k) \geq n$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geq n$.
3. Montrer que f est strictement croissante.
4. Conclure.

Correction :

1. Raisonnons par récurrence sur n.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $\forall k \geq n, f(k) \geq n$. »
   - f est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(k) \geq 0$: H_0 est vraie.
   - Soit $n \geq 0$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit $k \geq n+1$. Par hypothèse, $f(k) > f(f(k-1))$. Or, $k \geq n+1$ donc $k-1 \geq n$ si bien que, par hypothèse de récurrence, $f(k-1) \geq n$. Toujours par hypothèse de récurrence (avec $f(k-1)$ à la place de k : on peut en effet appliquer le résultat pour tout entier supérieur ou égal à n), $f(f(k-1)) \geq n$. Finalement, $f(k) > n$ donc $f(k) \geq n+1$ (on travaille avec des entiers) c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 0$.
2. Il suffit d'appliquer ce qui précède avec $k = n \geq n$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède (la deuxième inégalité vient de ce qui précède avec $f(n)$ à la place de n, penser à « truc ») :

   $$f(n+1) > f(f(n)) \geq f(n)$$

   f est strictement croissante.
4. Supposons qu'il existe n tel que $f(n) > n$. Alors $f(n) \geq n+1$ et, par croissance de f, $f(f(n)) \geq f(n+1)$ ce qui est absurde. Par conséquent, $f(n) \leq n$ pour tout n. D'après la question 2, on en déduit que $f(n) = n$ pour tout n : f est l'identité de $\mathbb{N}$ (et on montre très facilement que, réciproquement, cette fonction convient effectivement, mais ce n'était pas demandé).

Exercice 21 : ✪✪✪ On appelle taille d'une formule propositionnelle le nombre de connecteurs logiques (i.e. et, ou, non) qu'elle contient. Par exemple, « $x \leq y$ » est de taille 0 et « $(x = 2)$ou$((a = 1)$ et $(a = 4)$ ou non $(y \leq 2))$ » est de taille 4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute formule de taille n ne contenant que les connecteurs logiques ci-dessus est équivalente à une formule contenant au plus $3 \times 2^n - 3$ connecteurs $\uparrow$ (cf. exercice 3 du chapitre 0) et aucun autre connecteur logique.

Correction : Par récurrence (forte).

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « une formule de taille n est équivalente à une formule contenant au plus $3 \times 4^n - 3$ connecteurs de Sheffer. »
- Si une formule est de taille 0, alors il n'y a aucune modification à faire, elle est équivalente à elle-même et elle ne contient $0 = 3 \times 2^0 - 3$ connecteurs de Sheffer : H_0 est vraie.
- Soit $n \geq 0$. Supposons $H_0, \dots, H_n$ vraies et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit donc A une formule propositionnelle de taille $n+1$. Examinons plusieurs cas de figure.

  Si A est du type non(B) alors, d'après l'exercice 3 du chapitre 0, A est équivalente à $B \uparrow B$. Or, par hypothèse de récurrence, B est équivalente à une formule propositionnelle contenant au plus $3 \times 2^n - 3$ connecteurs de Sheffer, donc A est équivalente à une formule contenant au plus $2 \times (3 \times 2^n - 3) + 1 \leq 3 \times 2^{n+1} - 6 + 1 \leq 3 \times 2^{n+1} - 3$ connecteurs de Sheffer.

Si A est du type (B ou C) alors, d'après l'exercice 3 du chapitre 0, A est équivalente à $(B \uparrow B) \uparrow (C \uparrow C)$. Or, taille de B + taille de $C = n$ (on enlève le ou) si bien qu'il existe $k \in \llbracket 0\,;\,n \rrbracket$ tel que la taille de B soit k et celle de C soit $n-k$. Par hypothèse de récurrence, B est équivalente à une formule contenant au plus $3 \times 2^k - 3$ connecteurs de Sheffer, et C est équivalente à une formule contenant au plus $3 \times 2^{n-k} - 3$. Finalement, A est équivalente à une formule contenant au plus

$$2 \times (3 \times 2^k - 3) + 2 \times (3 \times 2^{n-k} - 3) + 3 = 3 \times 2^{k+1} + 3 \times 2^{n-k+1} - 3$$

connecteurs de Sheffer. Si $k = 0$ ou $k = n$, alors cette quantité vaut $3 \times 2^n - 3 \leq 3 \times 2^{n+1} - 3$. Si $k \in \llbracket 1\,;\,n-1 \rrbracket$, alors 2^k et 2^{n-k} sont inférieurs ou égaux à 2^{n-1} et donc cette quantité est inférieure à $3 \times 2^n + 3 \times 2^n - 3 = 3 \times 2^{n+1} - 3$ ce qui donne le résultat voulu.

Attention, la taille de B n'est pas forcément 0 et celle de C n'est pas forcément n, on ne s'arrête pas au premier ou, cela dépend des parenthèses. Par exemple, si A est la formule « $((x \geq 2)$ et$(x < 3))$ ou $((x > 1)$ et $(x > 0)$ et $(x < 4))$ » alors B est $(x \geq 2)$ et$(x < 3)$ et C est $(x > 1)$ et $(x > 0)$ et $(x < 4)$. Il serait faux d'écrire que B est $(x \geq 2$ et que C est $(x < 3))$ ou $((x > 1)$ et $(x > 0)$ et $(x < 4)$ car il y aurait un problème de parenthésage.

Le cas où A s'écrit (B et C) se démontre de façon analogue.

Exercice 22 - Fonction 91 de MacCarthy : ✪✪✪ On définit sur $\mathbb{Z}$ la fonction f par :

$$f(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si } n > 100 \\ f(f(n+11)) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $f(101), f(100), f(99)$.
2. Montrer que pour tout $n \leq 101, f(n) = 91$.

Correction :

1. Tout d'abord, $101 > 100$ donc $f(101) = 101 - 10 = 91$. De plus, $100 \leq 100$ donc $f(100) = f(f(100+11)) = f(f(111))$. Or, $111 > 100$ donc $f(111) = 111 - 10 = 101$, si bien que $f(100) = f(101) = 91$. Enfin, de même :
$$f(99) = f(f(110)) = f(100) = 91$$
2. On a envie de faire une récurrence, mais le problème est qu'on ne veut pas prouver qu'un résultat est vrai pour tout $n \geq n_0$. Il suffit en fait de prouver le résultat suivant par récurrence.
   - Pour tout $n \geq 0$, notons H_n : « $f(101 - n) = 91$ ».
   - D'après ce qui précède, ~~H_0, H_1, H_2 sont vraies~~ H_0, H_1, H_2 et, par un calcul analogue, $H_3, \dots, H_{10}$ sont vraies (on se rendra compte ci-dessous qu'on en a besoin).
   - Soit $n \geq 10$. Supposons ~~H_n vraie~~ $H_0, \dots H_n$ vraies (idem, on va voir qu'il faut faire une récurrence forte) et montrons que H_{n+1} est vraie. Par définition de f, $f(101 - n - 1) = f(f(111 - n))$. On veut appliquer l'hypothèse de récurrence : or, d'une part, pour calculer $f(111 - n)$, ce n'est pas le rang précédent qu'il faut appliquer, donc il faut faire une récurrence forte, et d'autre part, pour avoir $111 - n \leq 101$, il faut avoir $n \geq 10$ (c'est donc ici qu'on se rend compte qu'il faut supposer $n \geq 10$). Or, $n \geq 10$ donc $111 - n \leq 101$: il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $111 - n = 101 - p$. Par hypothèse de récurrence (on fait une récurrence forte), H_p est vraie donc $f(101 - p) = 91$ donc $f(101 - n - 1) = f(91)$. Enfin, $91 = 101 - 10$ et H_{10} est vraie (on en a besoin ici aussi) donc $f(91) = f(101 - 10) = 91$ donc $f(101 - (n+1)) = 91$: H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

Exercice 23 : ✪✪✪ Pierre le fermier a deux enclos, un rouge et un bleu, et il aimerait répartir ses poules dans chacun des enclos. Pour cela, il attribue des numéros à ses poules et attribue à chaque entier strictement positif la couleur rouge ou la couleur bleue (il enverra ensuite chaque poule dans l'enclos de même couleur qu'elle). Il suit la règle suivante : si trois entiers (distincts ou non) ont la même couleur, leur somme a également cette couleur. On sait que la couleur rouge a été attribuée à la poule numéro 59 et qu'il y a au moins une poule dans l'enclos bleu. Donner la couleur de chaque entier strictement positif.

Correction : On tâtonne : on essaye d'écrire 59 comme somme de trois nombres ayant la même couleur, mais on ne connaît la couleur d'aucun entier. On veut donc regarder certains entiers, et on veut les écrire comme somme de trois entiers égaux donc qui auront forcément la même couleur. On commence par le plus simple : $3 = 1 + 1 + 1$ donc 3 et 1 sont de la même couleur. $5 = 3 + 1 + 1$ donc 5 est de la même couleur que 3 et 1. $7 = 5 + 1 + 1$ donc 7 est également de cette couleur. Plus généralement, en utilisant le fait que $2n + 3 = (2n + 1) + 1 + 1$, une récurrence immédiate prouve que tout entier impair (en particulier 59) est de cette couleur. D'après l'énoncé, il vient que tout entier impair est rouge.

Si la poule numéro 2 est aussi rouge, alors la poule 4 est rouge car $4 = 2 + 1 + 1$, et la poule 6 également car $6 = 4 + 1 + 1$ et de même, puisque $2n + 2 = 2n + 1 + 1$, une récurrence immédiate prouve que tout entier pair est rouge, si bien que toutes les poules sont rouges, ce qui est exclu. Ainsi, la poule numéro 2 est bleue.

Si la poule 4 est aussi rouge, alors $6 = 4 + 1 + 1$ est rouge mais $6 = 2 + 2 + 2$ est bleue, ce qui est absurde : 4 est bleu. Par une récurrence double immédiate, puisque $2n + 2 = (2n - 2) + 2 + 2$, tout entier pair est bleu. Finalement, les poules impaires sont rouges et les poules paires sont bleues.

Même si ce n'est pas demandé, vérifions que cette répartition vérifie la règle, car on vient de voir qu'il pouvait y avoir des conflits : si un entier n est somme de trois entiers bleus et de trois entiers rouges, que faire ? Or, la somme de trois entiers rouges est la somme de trois entiers impairs donc est impaire, et la somme de trois entiers bleus est paire : un entier ne peut pas être à la fois somme de trois entiers bleus et de trois entiers rouges, il n'y a pas de conflit possible, tout va bien.

Exercice 24 : ✪✪✪ Soit $n \geq 1$. On écrit sur une ligne les entiers entre 0 et n. On écrit sur une seconde ligne les sommes de deux entiers consécutifs de la première ligne. On fait de même pour construire la ligne suivante, et on continue jusqu'à n'obtenir qu'un seul entier. Quelle est la valeur de cet entier ?

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \dots & n-2 & & & n-1 & & & n \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & \dots & & 2n-3 & & & 2n-1 & & \\
& & 4 & & 8 & & 12 & & & \dots & & & 4n-4 & & & & \\
& & & \ddots & & & & & & & & \iddots & & & & & \\
& & & & & & & & ? & & & & & & & &
\end{array}$$

Correction : Écrivons plutôt les entiers sous la forme suivante :

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-2 & n-1 & n \\
1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \dots & 2n-3 & 2n-1 & \\
4 & 8 & 12 & 16 & 20 & \dots & 4n-4 & & \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

ce qui permet de leur attribuer « une abscisse et une ordonnée » :

$i\backslash j$	0	1	2	3	4	$\dots$	$n-2$	$n-1$	n
0	0	1	2	3	4	$\dots$	$n-2$	$n-1$	n
1	1	3	5	7	9	$\dots$	$2n-3$	$2n-1$	
2	4	8	12	16	20	$\dots$	$4n-4$		
$\vdots$									

Les divers entiers sont notés $x_{i,j}$, l'indice de la colonne étant j et l'indice de la ligne étant i : les lignes sont donc numérotées de 0 à n et, pour tout $i \in [\![0\,;\,n]\!]$, la ligne i a des termes numérotés de 0 à $n-i$ (la ligne numéro 2 par exemple a des colonnes numérotées de 0 à $n-2$). De plus, pour tout $j \in [\![0\,;\,n]\!]$, $x_{0,j} = j$ et, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ (les lignes sont numérotées de 0 à n) et pour tout $\in j[\![0\,;\,n-i-1]\!]$, $x_{i,j} = x_{i-1,j} + x_{i-1,j+1}$ (chaque terme est la somme du terme au-dessus et du terme au-dessus à droite).

On voit qu'à la première ligne (la ligne 0), on va de 1 en 1, à la deuxième ligne (la ligne 1), on va de 2 en 2, puis de 4 en 4 etc. Montrons ce résultat par récurrence (finie).

- Pour tout $i \in [\![0\,;\,n]\!]$, notons H_i : « il existe a_i tel que, pour tout $j \in [\![0\,;\,n-i]\!], x_{i,j} = a_i + j \times 2^i$ ». En d'autres termes, les termes de la ligne i forment une suite arithmétique (finie) de raison 2^i.
- H_0, H_1, H_2 sont vraies avec $a_0 = 0, a_1 = 1$ et $a_2 = 4$ (le premier terme de la suite arithmétique).
- Soit $i \in [\![2\,;\,n-1]\!]$. Supposons H_i vraie et prouvons que H_{i+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, il existe a_i tel que, pour tout $j \in [\![0\,;\,n-i]\!], x_{i,j} = a_i + j \times 2^i$. Dès lors, pour tout $j \in [\![0\,;\,n-i-1]\!]$,

$$\begin{array}{rcl}
x_{i+1,j} & = & x_{i,j} + x_{i,j+1} \\
& = & a_i + j \times 2^i + a_i + (j+1) \times 2^i \\
& = & (2a_i + 2^i) + j \times (2^i + 2^i) \\
& = & (2a_i + 2^i) + j \times 2^{j+1}
\end{array}$$

  si bien qu'en posant $a_{i+1} = 2a_i + 2^i$, on obtient que H_{i+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_i est vraie pour tout $i \in [\![0\,;\,n]\!]$.

En particulier, pour $i = n$, il existe a_n tel que $x_{n,0} = a_n + 0 \times 2^n = a_n$ et on cherche donc la valeur de a_n. On tâtonne : $a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$, $a_{n-1} = 2a_{n-2} + 2^{n-2}$ si bien que $a_n = 2^2 a_{n-2} + 2 \times 2^{n-1}$. De même, $a_{n-2} = 2a_{n-3} + 2^{n-3}$ donc $a_n = 2^3 a_{n-3} + 3 \times 2^{n-1}$. Par une récurrence (finie) immédiate, pour tout $j \in [\![0\,;\,n]\!]$, $a_n = 2^j a_{n-j} + j \times 2^{n-1}$ et c'est donc en particulier vrai pour $j = n$: $a_n = 2^n a_0 + n2^{n-1}$, et puisque $a_0 = 0$, on trouve finalement $a_n = n2^{n-1}$ (on constate avec les petites valeurs de n que c'est bien le bon résultat).

Chapitre 2

Fonctions

2.1 Divers.

Exercice 1 : ✪ Compléter par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

1. $x^2 = 9 \ldots x = 3$
2. $\ln x = -3 \ldots x = e^{-3}$
3. $x \geq x^2 \ldots x \geq 0$
4. $\sqrt{x}$ existe $\ldots x \geq 0$
5. $|x| \leq 3 \ldots 0 \leq x \leq 3$
6. $|x| \geq 5 \ldots 5 \leq x$
7. $x^2 \geq 4 \ldots x \geq 2$

Correction :

1. $x^2 = 9 \Leftarrow x = 3$
2. $\ln x = -3 \iff x = e^{-3}$
3. $x \geq x^2 \Rightarrow x \geq 0$
4. $\sqrt{x}$ existe $\iff x \geq 0$
5. $|x| \leq 3 \Leftarrow 0 \leq x \leq 3$
6. $|x| \geq 5 \Leftarrow 5 \leq x$
7. $x^2 \geq 4 \Leftarrow x \geq 2$

Exercice 2 : ✪ Vrai ou faux ? $\sqrt{208} + \sqrt{89} = \sqrt{569}$.

Correction : Ces deux nombres sont positifs donc ils sont égaux si et seulement s'ils ont le même carré. Puisqu'on a aucune idée du résultat, travaillons par équivalences.

$$\begin{aligned}
\sqrt{208} + \sqrt{89} = \sqrt{569} & \iff (\sqrt{208} + \sqrt{89})^2 = 569 \\
& \iff 208 + 89 + 2\sqrt{208} \times \sqrt{89} = 569 \\
& \iff \sqrt{208 \times 89} = 136 \\
& \iff \sqrt{16 \times 13 \times 89} = 136 \\
& \iff 4 \times \sqrt{13 \times 89} = 136 \\
& \iff \sqrt{13 \times 89} = 34 \\
& \iff 13 \times 89 = 34^2
\end{aligned}$$

car les deux nombres précédents sont positifs. Or, ce dernier résultat est faux car à gauche on a un nombre impair et à droite un nombre pair. Puisqu'on a raisonné par équivalences, le résultat initial est faux. Cependant, il faut aller jusqu'au troisième chiffre après la virgule pour le voir !

Exercice 3 : ✪ Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $y \leq x^2$. Montrer que

$$\sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}}$$

Correction : Ces deux nombres étant positifs, pour prouver qu'ils sont égaux, il suffit de prouver qu'ils ont le même carré. Notons B le terme de droite.

$$\begin{aligned} B^2 &= \frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2} + \frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2} + 2\times\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-y}}{2}}\times\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-y}}{2}} \\ &= x+\sqrt{x^2-(x^2-y)} \\ &= x+\sqrt{y} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 4 : ✪ Résoudre les équations suivantes :

1. $-\sqrt{x+2} = x$
2. $x^3-2x^2+1=0$
3. $\sqrt{x^2+1}-1=0$
4. $|x^2-8x+11| = 4$
5. $|3x-1| = \dfrac{3}{2}$
6. $\sqrt{x}+1 = 2x$
7. $e^x+e^{-x} = 2$
8. $\dfrac{x^3+2x^2-x+1}{x-1} = 2-x+x^2$
9. $(\ln x)^2 = -2-3\ln x$
10. $|x+1|+|2x+1| = 0$
11. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$
12. $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$
13. $\dfrac{\ln(x)}{\ln(y)} = \dfrac{\ln(y)}{\ln(x)}$
14. $\ln(x)-\log(x) = 1$.

Correction :

1. Si x est solution, alors $x\leq 0$ puisque $x=-\sqrt{x+2}$. On se donne donc $x\leq 0$ dans la suite. Dès lors :
$$-\sqrt{x+2} = x \iff x+2 = x^2$$
puisque les deux quantités x et $-\sqrt{x+2}$ sont de même signe. Ainsi, x est solution si et seulement si $x^2-x-2=0$. Les solutions de cette équation sont 2 et -1. Or, x est négatif donc la seule solution est $x=-1$.
2. 1 est solution évidente : il existe donc $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ (car on a une fonction polynomiale de degré 3 donc en divisant par $x-1$ on obtient un polynôme de degré 2) tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^3-2x^2+1 = (x-1)(ax^2+bx+c)$.En examinant le terme dominant, on trouve $a=1$ et à l'aide du terme constant, on trouve $c=-1$. Enfin, en développant on trouve $b=1$ si bien que l'équation devient $(x-1)(x^2-x-1)=0$. Les solutions sont donc 1 et $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
3. Soit $x\in\mathbb{R}$. $\sqrt{x^2+1}=1 \iff x^2+1=1$ (car ces deux quantités sont de même signe) $\iff x^2=0 \iff x=0$.
4. Soit $x\in\mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} |x^2-8x+11| = 4 &\iff x^2-8x+11 = \pm 4 \\ &\iff x^2-8x+7=0 \text{ ou } x^2-8x+15=0 \\ &\iff x=1 \text{ ou } x=7 \text{ ou } x=3 \text{ ou } x=5 \end{aligned}$$
5. Soit $x\in\mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} |3x-1| = \frac{3}{2} &\iff 3x-1 = \pm\frac{3}{2} \\ &\iff x=\frac{5}{6} \text{ ou } x=-\frac{1}{6} \end{aligned}$$
6. Tout d'abord, cette équation n'a de sens que lorsque $x\geq 0$. Soit donc $x\geq 0$. Soit $y=\sqrt{x}$.
$$\begin{aligned} 2x = \sqrt{x}+1 &\iff 2y^2-y-1=0 \\ &\iff y=1 \text{ ou } y=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$
Or, x et y sont positifs donc la seule solution est $y=1$ i.e. $x=1$.
7. Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit $y=e^x$.

$$\begin{aligned} e^x + e^{-x} = 2 &\iff y^2 - 2y + 1 = 0 \\ &\iff (y-1)^2 = 0 \\ &\iff y = 1 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

8. Cette équation n'a de sens que lorsque $x \neq 1$. Soit donc $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x - 1} = 2 - x + x^2 &\iff x^3 + 2x^2 - x + 1 = (x^2 - x + 2)(x - 1) \\ &\iff x^3 + 2x^2 - x + 1 = x^3 - 2x^2 + 3x - 2 \\ &\iff 4x^2 - 4x + 3 = 0 \end{aligned}$$

   Cette équation n'a pas de solution réelle (discriminant égal à $-32 < 0$).

9. Cette équation n'a de sens que lorsque x est strictement positif. Soit $y = \ln(x)$.

$$\begin{aligned} (\ln(x))^2 = -2 - 3\ln(x) &\iff y^2 + 3y + 2 = 0 \\ &\iff y = -2 \text{ ou } y = -1 \\ &\iff x = e^{-2} \text{ ou } y = e^{-1} \end{aligned}$$

10. Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls. Or, $|x+1| = 0 \iff x = -1$ et $|2x+1| = 0 \iff x = -12$. Ces deux quantités ne sont jamais nulles en même temps : cette équation n'a pas de solution.

11. Sous réserve d'existence, $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln(x)}$ et $\sqrt{x}^x = e^{x\ln(\sqrt{x})} =^{x \times \frac{1}{2}\ln(x)}$. Cette équation n'a donc de sens que lorsque $x > 0$. Soit donc $x > 0$.

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\iff e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x \times \frac{1}{2}\ln(x)} \\ &\iff \sqrt{x}\ln(x) = x \times \frac{1}{2} \times \ln(x) \\ &\iff \ln(x) = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = \frac{x}{2} \\ &\iff x = 1 \text{ ou } 4x = x^2 \end{aligned}$$

    car $\sqrt{x}$ et $x/2$ sont de même signe (positif). Finalement, puisque $x \neq 0$, les seules solutions sont 1 et 4.

12. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1} &\iff 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+1/2} + 3^{x-1/2} \\ &\iff 2^{2x-1} \times (2+1) = 3^{x-1/2} \times (3+1) \\ &\iff 2^{2x-1} \times 3 = 3^{x-1/2} \times 4 \\ &\iff 2^{2x-3} = 3^{x-3/2} \\ &\iff e^{(2x-3)\ln(2)} = e^{(x-3/2)\ln(3)} \\ &\iff (2x-3)\ln(2) = (x-3/2)\ln(3) \\ &\iff x\,(4\ln(2) + 2\ln(3)) = 6\ln(2) - 3\ln(3) \\ &\iff x \times \ln(144) = \ln(64/81) \\ &\iff x = \frac{\ln(64/81)}{\ln(144)} \end{aligned}$$

13. Cette équation n'a de sens que si x et y sont strictement positifs et différents de 1. Soient x et y strictement positifs différents de 1.

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x)}{\ln(y)} = \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \quad & \iff \quad \ln(x)^2 = \ln(y)^2 \\
& \iff \quad \ln(y) = \pm \ln(x) \\
& \iff \quad \ln(x) = \ln(y) \text{ ou } \ln(y) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \\
& \iff \quad x = y \text{ ou } y = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Finalement, x et y sont solutions si et seulement si $x = y$ ou $y = 1/x$, avec x et y strictement positifs différents de 1.

14. Cette équation n'a de sens que lorsque $x > 0$. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
\ln(x) - \log(x) = 1 \quad & \iff \quad \ln(x) - \frac{\ln(x)}{\ln(10)} = 1 \\
& \iff \quad \frac{\ln(10)\ln(x) - \ln(x)}{\ln(10)} = 1 \\
& \iff \quad \ln(x) \times (\ln(10) - 1) = \ln(10) \\
& \iff \quad \ln(x) = \frac{\ln(10)}{\ln(10) - 1} \\
& \iff \quad x = e^{\frac{\ln(10)}{\ln(10)-1}}
\end{aligned}$$

Exercice 5 : ✪ Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations (d'inconnue x) $\mathrm{ch}(x) = y, \mathrm{sh}(x) = y$ et $\mathrm{th}(x) = y$. Illustrer par un dessin.

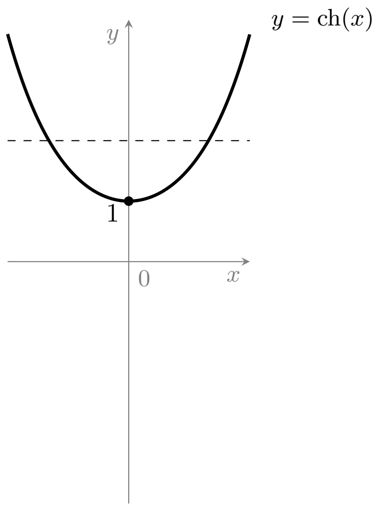
Correction : L'équation $\mathrm{ch}(x) = y$ n'a pas de solution si $y < 1$. On suppose donc $y \geq 1$. Posons $z = e^x$.

$$\begin{aligned}
e^x + e^{-x} = 2y \quad & \iff \quad z^2 - 2yz + 1 = 0 \\
& \iff \quad z = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} \\
& \iff \quad z = y \pm \sqrt{y^2 - 1}
\end{aligned}$$

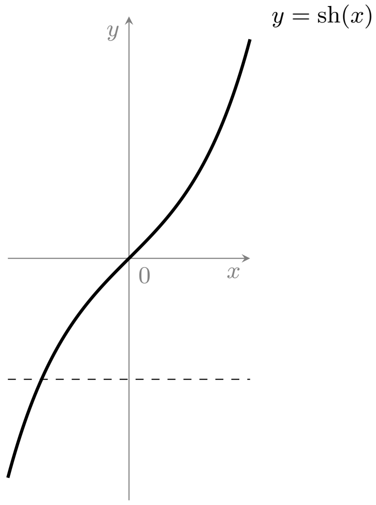
Or, la racine carré est strictement croissante donc $\sqrt{y^2 - 1} < \sqrt{y^2} = y$ puisque $y > 0$. Ainsi, ces deux solutions sont strictement positives donc :

$$e^x + e^{-x} = 2y \quad \iff \quad x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

On voit sur le dessin ci-dessous que si $y < 1$, l'équation n'a pas de solution, qu'elle en a une seule si $y \geq 1$ et qu'elle en a deux si $y > 1$ (cela découle de la parité de la fonction).



Pour l'équation $y = \mathrm{sh}(x)$, $x = \ln\left(y + \sqrt{x^2+1}\right)$ est l'unique solution (cf. chapitre 3). Là aussi, ça se voit sur le dessin suivant :



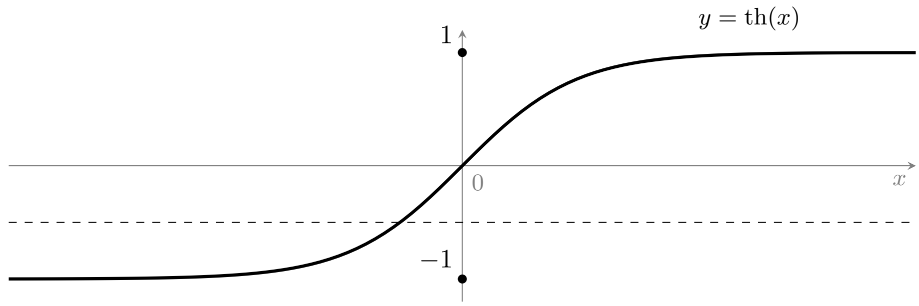
Enfin, pour l'équation $\mathrm{th}(x) = y$: cette équation n'a aucune solution si $|y| \geq 1$ donc on suppose que $|y| < 1$. Posons encore $z = e^x$.

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \quad & \iff \quad z^2 - 1 = y\left(z^2+1\right) \\
& \iff \quad z^2(1-y) = 1 + y \\
& \iff \quad z^2 = \frac{1+y}{1-y}
\end{aligned}$$

Or, $z > 0$ donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(x) = y \quad & \iff \quad z = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \\
& \iff \quad x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
\end{aligned}$$

Là aussi, on voit bien le résultat sur un dessin.



Exercice 6 : ✪ Soit a un réel strictement positif différent de 1. Résoudre l'inéquation : $\log_a(x) > \log_{a^2}(2-3x)$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, l'équation a un sens si et seulement si $x > 0$ et $2 - 3x > 0$ i.e. $x < 2/3$. Supposons donc $0 < x < 2/3$.

$$\log_{a^2}(2-3x) < \log_a(x) \quad \iff \quad \frac{\ln(2-3x)}{2\ln(a)} < \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Supposons que $a > 1$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
\log_{a^2}(2-3x) < \log_a(x) \quad & \iff \quad \ln(2-3x) < 2\ln(x) \\
& \iff \quad 2 - 3x < x^2
\end{aligned}$$

car le ln est strictement croissant. L'ensemble des solutions est : $]-\infty\,;x_1\,[\,\cup\,]\,x_2\,;+\infty\,[$ où $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$. Finalement, l'ensemble des solutions est l'ensemble $]\,x_2\,;2/3\,[$ car $x_1 < 0 < x_2 < 2/3$.

Supposons que $a < 1$. Dès lors :

$$\begin{aligned}\log_{a^2}(2-3x) < \log_a(x) &\iff \ln(2-3x) > 2\ln(x)\\ &\iff 2-3x > x^2\end{aligned}$$

Alors l'ensemble des solutions de cette équation est $]\,x_1\,;x_2\,[$ avec les mêmes x_1 et x_2 que ci-dessus. Finalement, l'ensemble des solutions est $]\,0\,;x_2\,[$ car $x_1 < 0 < x_2 < 2/3$.

Exercice 7 : ✪ Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Vérifier les égalités suivantes :

1. $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$.
2. $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$.

Correction : Il suffit de l'écrire.

Exercice 8 : ✪ Résoudre les inéquations suivantes (x est un réel, n un entier) :

1. $|4-2x| \leq 8$
2. $15x^2 - 22x + 8 \leq 0$
3. $\dfrac{x}{x+1} \leq \dfrac{x+1}{x-1}$
4. $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x(x-1)} \leq 1$
5. $\ln(3x+1) \leq \ln(2x-1)$
6. $\dfrac{\ln(n)}{\ln(3)} < \dfrac{\ln(7)}{\ln(2)}$
7. $\sqrt{x+5} \geq \sqrt{x^2-4}$.
8. $5 \times \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{3}} \geq 7$
9. $2x - 7 - \sqrt{4x-11} < 0$.
10. $x^6 + \dfrac{36}{x^2} > 13x^2$.

Correction :

1. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}|4-2x| \leq 8 &\iff -8 \leq 4-2x \leq 8\\ &\iff -12 \leq -2x \leq 4\\ &\iff 6 \geq x \geq -2\end{aligned}$$

2. Un trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses racines éventuelles. Ainsi : $15x^2 - 22x + 8 \leq 0 \iff x \in \left[\dfrac{2}{3}\,;\dfrac{4}{5}\right]$.
3. Attention, pas de produit en croix dans les inégalités ! Soit $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+1} \leq \frac{x+1}{x-1} &\iff \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \leq 0\\ &\iff \frac{x(x-1)-(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} \leq 0\\ &\iff \frac{x^2-x-x^2-2x-1}{(x+1)(x-1)} \leq 0\\ &\iff \frac{-3x-1}{(x+1)(x-1)} \leq 0\end{aligned}$$

Notons cette quantité $f(x)$.

x	$-\infty$	-1		$-1/3$		1	$+\infty$
$-3x-1$			$+$	0	$-$		
$x+1$	$-$	0	$+$				
$x-1$					$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\left]-1\,;-\dfrac{1}{3}\right] \cup \left]1\,;+\infty\right[$.

4. Soit $x \neq 0, 1, -1$.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x(x-1)} \leq 1 \quad &\iff \quad \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x(x-1)} - 1 \leq 0 \\
&\iff \quad \frac{x^2(x-1) + x + 1 - x(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \leq 0 \\
&\iff \quad \frac{x^3 - x^2 - x + 1 - x^3 + x}{x(x+1)(x-1)} \leq 0 \\
&\iff \quad \frac{1-x^2}{x(x^2-1)} \leq 0 \\
&\iff \quad -\frac{1}{x} \leq 0 \\
&\iff \quad x \geq 0
\end{aligned}$$

Puisque x est supposé différent de 0 et de 1, l'ensemble des solutions est $]\,0\,;1\,[\, \cup \,]\,1\,;+\infty\,[$.

5. Tout d'abord, cette équation n'a de sens que lorsque $3x+1>0$ i.e. $x > -1/3$ et $2x-1>0$ i.e. $x > 1/2$. Soit donc $x > 1/2$.

$$\ln(3x+1) \leq \ln(2x-1) \iff 3x+1 \leq 2x-1$$

car l'exponentielle est strictement croissante, ce qui est équivalent à $x \leq -2$. Finalement, puisque $x > -1/2$, cette équation n'a pas de solution.

6. Soit $n \geq 1$. $\ln(3) > 0$ donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(n)}{\ln(3)} < \frac{\ln(7)}{\ln(2)} \quad &\iff \quad \ln(n) < \frac{\ln(3) \times \ln(7)}{\ln(2)} \\
&\iff \quad n < e^{\frac{\ln(3)\times\ln(7)}{\ln(2)}} = 3^{\ln(7)/\ln(2)} = 7^{\ln(3)/\ln(2)} \approx 21.8
\end{aligned}$$

Par conséquent, n étant un entier, n est solution si et seulement si $n \leq 21$.

7. Cette équation n'a de sens que lorsque $x+5 \geq 0$ i.e. $x \geq -5$ et $x^2-4 \geq 0$ i.e. $x \in \,]-\infty\,;-2\,] \cup [\,0\,;+\infty\,[$. Soit donc $x \in [\,-5\,;-2\,[\, \cup [\,2\,;+\infty\,[$. Ces deux nombres sont positifs et la racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+5} \geq \sqrt{x^2-4} \quad &\iff \quad x+5 \geq \sqrt{x^2-4} \\
&\iff \quad x^2 - x - 9 \geq 0 \\
&\iff \quad x \in \left]-\infty\,;\frac{1-\sqrt{37}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{37}}{2}\,;+\infty\right[
\end{aligned}$$

Or, $\sqrt{37} \in \,]\,6\,;7\,[$ donc

$$-3 < \frac{1-\sqrt{37}}{2} < -\frac{5}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{7}{2} < \frac{1+\sqrt{37}}{2} < 4$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $\left[-5\,;\dfrac{1-\sqrt{37}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}\,;+\infty\right[$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
5 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \geq 7 \quad & \iff \quad 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \geq \frac{14}{15} \\
& \iff \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{15} \\
& \iff \quad -(n+1)\ln(3) \leq -\ln(15) \\
& \iff \quad n+1 \geq \frac{\ln(15)}{\ln(3)}
\end{aligned}$$

La troisième ligne découle du fait que la fonction ln est strictement croissante. Or, $\ln(15)/\ln(3) \approx 2.46$ et n est un entier donc n est solution si et seulement si $n \geq 3$.

9. Cette équation n'a de sens que lorsque $4x-11 \geq 0$ i.e. $x \geq 11/4$. Soit $x \geq 11/4$.

$$2x-7-\sqrt{4x-11} < 0 \iff 2x-7 < \sqrt{4x-11}$$

Pour passer au carré, il faut connaître le signe pour savoir si le sens de l'inégalité est préservé. Or : $2x-7 \leq 0 \iff x \leq 7/2$. Il y a donc deux cas.

Si $x \in \left[\frac{11}{4}\,;\frac{7}{2}\right[$, alors $2x-7<0$ et $\sqrt{4x-11} \geq 0$ donc l'inégalité est vérifiée.

Si $x \geq 7/2$ alors $2x-7$ et $\sqrt{4x-11}$ sont positifs et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
2x-7-\sqrt{4x-11} < 0 \quad & \iff \quad 2x-7 < \sqrt{4x-11} \\
& \iff \quad (2x-7)^2 < 4x-11 \\
& \iff \quad 4x^2-28x+49 < 4x-11 \\
& \iff \quad 4x^2-32x+60 < 0 \\
& \iff \quad x^2-8x+15 < 0 \\
& \iff \quad x \in [\,3\,;5\,]
\end{aligned}$$

Or, $x \geq 7/2$ donc x est solution si et seulement si $x \in \left[\frac{7}{2}\,;5\right]$ si bien que l'ensemble final des solutions est $\left[\frac{11}{4}\,;5\right]$.

10. Soit $x \neq 0$. $x^2 > 0$ donc :

$$\begin{aligned}
x^6+\frac{36}{x^2} > 13x^2 \quad & \iff \quad x^8-13x^4+36 > 0 \\
& \iff \quad y = x^4 \text{ est solution de } y^2-13y+36>0 \\
& \iff \quad x^4 \in \,]-\infty\,;4\,] \cup [\,9\,;+\infty\,[\\
& \iff \quad x^4 \in \,]\,0\,;4\,] \cup [\,9\,;+\infty\,[
\end{aligned}$$

car x^4 est strictement (car 0 est exclu) positif. Finalement, la racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
x^6+\frac{36}{x^2} > 13x^2 \quad & \iff \quad x^2 \in \,]\,0\,;2\,] \cup [\,3\,;+\infty\,[\\
& \iff \quad x \,]-\infty\,;-\sqrt{3}\,] \cup [\,-\sqrt{2}\,;0\,[\cup \,]\,0\,;\sqrt{2}\,] \cup [\,\sqrt{3}\,;+\infty\,[
\end{aligned}$$

On remarque que l'intervalle est symétrique par rapport à 0 ce qui est normal car il n'y a que des puissances paires.

Exercice 9 : ✪ Soit $a>0$. Déterminer une constante C telle que, pour tous x et y appartenant à $[\,a\,;+\infty\,[$,

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leq C|x-y|$$

Existe-t-il une constante C telle que l'inégalité précédente soit valable pour tous x et y appartenant à $\mathbb{R}_+$?

Correction : Soient x et y appartenant à $[\,a\,;+\infty\,[$. Supposons $x \neq y$. Alors

$$\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

En d'autres termes, $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \times |x-y|$, et cette inégalité est aussi vraie si $x=y$, si bien que $C = 1/2\sqrt{a}$ convient. Supposons qu'une telle constante C existe pour tous x et y dans $\mathbb{R}_+$. En particulier, pour tout $x>0$ (avec $y=0$),

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \leq C$$

ce qui est absurde puisque $1/\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

Exercice 10 : ✪✪ Donner les réels $a>0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x \geq x+1$.

Correction : Soit $a>0$. Alors, pour tout $x \leq -1$, $a^x > 0 \geq x+1$: cette inégalité est vérifiée pour tout $x \leq -1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} a \text{ est solution} \quad & \iff \quad \forall x > -1, a^x \geq x+1 \\ & \iff \quad \forall x > -1, e^{x\ln(a)} \geq x+1 \\ & \iff \quad \forall x > -1, x\ln(a) \geq \ln(x+1) \end{aligned}$$

puisque la fonction ln est strictement croissante. On sait (cf. cours, en utilisant la concavité du ln) que, pour tout $x > -1$, $x \geq \ln(1+x)$. Par conséquent, si $\ln(a) \geq 1$ i.e. si $a \geq e$, alors $x\ln(a) \geq x \geq \ln(x+1)$. Réciproquement, supposons que $a < e$, alors $\ln(a) < 1$. En particulier, si on pose $f : x \mapsto x\ln(a) - \ln(x+1)$, alors $f'(0) = \ln(a) - 1 < 0$: f étant $\mathscr{C}^\infty$, f' est continue donc f' est strictement négative au voisinage de 0 donc f est strictement décroissante au voisinage de 0. Il existe donc $x>0$ tel que $f(x) < f(0) = 0$ donc tel que $x\ln(a) < \ln(1+x)$ donc tel que $a^x < \ln(1+x)$. Finalement, a convient si et seulement si $a \geq e$.

Exercice 11 : ✪✪✪ Soient a et b deux réels. Montrer que l'équation $x^2 - ax + b = 0$ admet des racines réelles qui appartiennent toutes à l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

- $a^2 - 4b \geq 0$
- $b \geq 0$
- $1 - a + b \geq 0$
- $0 \leq a \leq 2$

Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (a,b) vérifiant ces quatre conditions.

Correction : Une condition nécessaire pour que les solutions soient réelles est que le discriminant soit positif i.e. $a^2 - 4b \geq 0$. Les deux racines (éventuellement égales) sont alors

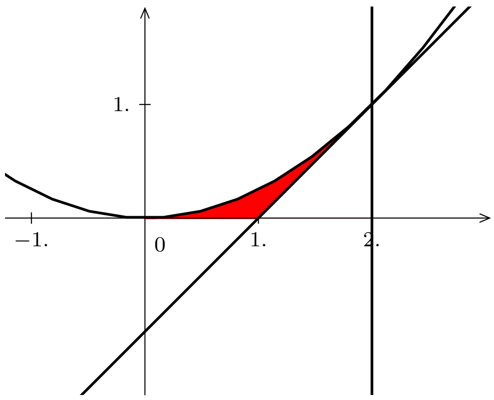
$$\frac{a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$$

Si $b<0$, alors $a^2 - 4b > a^2$ si bien que $\sqrt{a^2-4b} > \sqrt{a^2} = |a| \geq a$ et donc une des deux solutions est strictement négative. Une condition nécessaire est donc d'avoir $b \geq 0$. Un trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses racines éventuelles. Ainsi, si toutes les racines sont dans $[\,0\,;1\,]$, alors 1 n'est pas compris entre les racines donc $1-a+b \geq 0$. Enfin, si $a<0$ alors une des deux racines est strictement négative, et si $a>2$, alors l'autre racine est strictement supérieure à 1 (car $a/2 > 1$). Finalement, on a montré que si toutes les racines sont réelles et appartiennent à $[\,0\,;1\,]$, alors les quatre conditions de l'énoncé sont vérifiées.

Réciproquement, supposons ces quatre conditions vérifiées. Alors :

- les deux racines sont réelles (car le discriminant est strictement positif).
- $b \geq 0$ donc $\sqrt{a^2-4b} \leq a$ si bien que les deux racines sont positives.
- $a \leq 2$ si bien que $\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \leq 1$. Ainsi, si on note les deux racines x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$, alors $x_1 \leq 1$. Ainsi, il y a deux possibilités : soit $1 < x_2$, et alors $f(1) < 0$, soit $x_2 \leq 1$ et alors $f(1) \geq 0$.
- Or, $f(1) \geq 0$ si bien que $x_1 < x_2 \leq 1$.

D'où la réciproque, d'où l'équivalence. Ci-dessous les courbes d'équation $y = x^2/4$ (la condition $a^2 - 4b$ signifiant que le point de coordonnées (a,b) est en-dessous de la courbe), $y = x-1$ (la condition $1-a+b \geq 0$ signifiant que le point de coordonnées (a,b) est au-dessus de la courbe). Enfin, les conditions $b \geq 0$ et $0 \leq a \leq 2$ signifient que le point de coordonnées (a,b) a une ordonnée positive et une abscisse comprise entre 0 et 2. Finalement, les couples (a,b) vérifiant ces conditions forment la partie rouge ci-dessous :



2.2 Ordre.

Exercice 12 : ✪ Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A, a_n > n$. Montrer que A n'est pas majorée.

Correction : Supposons A majorée : il existe M tel que, pour tout $a \in A, a \leq M$. En particulier, pour $n = \lfloor M \rfloor + 1$, tout élément $a \in A$ vérifie $a \leq n$ ce qui est absurde : A est majorée.

Exercice 13 : ✪✪ Soient a et b deux réels. Préciser si les ensembles suivants sont majorés ou minorés et donner, lorsque c'est possible, leur plus petit et leur plus grand élément :

1. $]\,0\,;1\,[$
2. $\{a + bn \mid n \in \mathbb{N}\}$
3. $\{a + (-1)^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$
4. $\left\{ a + \dfrac{b}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$
5. $\left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$
6. $\left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} \;\middle|\; (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$
7. $\left\{ \dfrac{p}{n+p} \;\middle|\; (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$
8. $\left\{ \dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$
9. $\left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^p}{p} \;\middle|\; (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$

Correction :

1. $]\,0\,;1\,[$ est majoré (tout nombre supérieur ou égal à 1 est majorant) mais n'admet pas de plus grand élément car aucun majorant n'appartient à l'ensemble, ou alors car $]\,0\,;1\,[$ est ouvert. De même, il est minoré mais n'a pas de plus petit élément.
2. Cela va dépendre de b.
   - Si $b = 0$, alors cet ensemble est le singleton $\{a\}$: il est majoré et minoré, et a est son plus petit et son plus grand élément.
   - Si $b > 0$, alors $a + bn \geq a$ pour tout n donc a est un minorant et a appartient à cet ensemble : a est donc son plus petit élément. Cependant, $a + bn \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc cet ensemble n'est pas majoré.
   - Si $b < 0$, on montre de même que cet ensemble n'est pas minoré mais que a est son plus grand élément.

3. Cet ensemble ne contient que deux éléments $a + b$ et $a - b$. Il est fini donc admet un plus petit et un plus grand élément. Si $b \geq 0$, le plus grand élément est $a + b$ et le plus petit est $a - b$, et c'est le contraire si $b < 0$.
4. Là aussi, cela dépend du signe de b.
   - Si $b = 0$, alors cet ensemble est le singleton $\{a\}$: il est majoré et minoré, et a est son plus petit et son plus grand élément.
   - Si $b > 0$ alors, pour tout $n \geq 1$, $a \leq a + \dfrac{b}{n} \leq a + b$ donc cet ensemble est borné. De plus, $a + b$ est un majorant qui appartient à l'ensemble (c'est l'élément correspondant au cas $n = 1$) donc c'est le plus grand élément. Montrons que l'ensemble n'a pas de plus petit élément. Si cet ensemble admet un plus petit élément x, alors il existe $n \geq 1$ tel que $a + \dfrac{b}{n} = x$, mais alors $a + \dfrac{b}{n+1}$ est un élément de l'ensemble strictement inférieur à x donc x n'est pas un minorant : absurde.
   - Si $b < 0$, on montre de même que cet ensemble est borné, que $a + b$ est son plus petit élément mais qu'il n'admet pas de plus grand élément.

5. Calculons les premiers termes : $0, 3/2, -2/3, 5/4$ etc. Et, quand n tend vers l'infini, la suite « va se rapprocher de 1 et de -1 » (on formalisera tout cela avec la notion de valeur d'adhérence dans le chapitre 12). Tout d'abord, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq 1/n \leq 1$ et $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ si bien que $-1 \leq \dfrac{1}{n} + (-1)^n \leq 2$: cet ensemble est borné. De plus, si n est impair, alors

$$\frac{1}{n} + (-1)^n = \frac{1}{n} - 1 \leq 0 \leq \frac{3}{2}$$

et, si n est pair, alors $n \geq 2$ donc

$$\frac{1}{n} + (-1)^n = \frac{1}{n} + 1 \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

si bien que $3/2$ est un majorant, et puisqu'il appartient à l'ensemble, c'est son plus grand élément. Montrons qu'il n'y a pas de plus petit élément. S'il existe un plus petit élément x, alors il existe n tel que $x = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$ mais n et $n+2$ ont même parité donc

$$\frac{1}{n+2} + (-1)^{n+2} = \frac{1}{n+2} + (-1)^n < \frac{1}{n} + (-1)^n = x$$

ce qui est absurde car x est un minorant.

6. Si n et p sont supérieurs ou égaux à 1, alors $0 \leq \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} \leq 2$: cet ensemble est borné. De plus, 2 est un majorant qui appartient à l'ensemble (pour $n = p = 1$) donc c'est le plus grand élément. S'il admet un plus petit élément, il existe n et p tels que celui-ci soit égal à $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p}$ mais alors $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{p}$ est un élément de l'ensemble strictement inférieur : absurde. S'il existe un plus grand élément x, alors $x < 1$ mais $\dfrac{p}{1+p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 1$ donc il existe p tel que $x < \dfrac{p}{1+p}$ donc x n'est pas un majorant : absurde. On peut aussi montrer que si x s'écrit $\dfrac{p}{n+p}$ alors $\dfrac{p+1}{n+p+1} > x$. Cet ensemble est donc borné mais n'admet ni plus petit ni plus grand élément.

7. Si $n \geq 1$, alors $0 \leq \dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} < 1$ donc cet ensemble est borné. De plus, 0 est un minorant qui appartient à l'ensemble (pour $n = 1$) donc c'est son plus petit élément. S'il existe un plus grand élément x, alors $x < 1$ mais

$$\frac{n - \dfrac{1}{n}}{n + \dfrac{1}{n}} = \frac{1 - \dfrac{1}{n^2}}{1 + \dfrac{1}{n^2}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

donc il existe n tel que $\dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} > x$ ce qui est absurde. Cet ensemble n'a pas de plus grand élément.

8. Cet ensemble est borné car minoré par -1 et majoré par 2. Plus précisément, pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n} \leq 1$ et pour tout $p \geq 1$, $\dfrac{(-1)^p}{p} \leq \dfrac{1}{2}$. En effet, si $p = 1$, alors $\dfrac{(-1)^p}{p} = -1$ et si $p \geq 2$ alors

$$\frac{(-1)^p}{p} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$$

Il en découle que $3/2$ est un majorant et qu'il appartient à l'ensemble (pour $n = 1$ et $p = 2$). Cependant, il n'y a pas de plus petit élément car s'il en existe un (pour n et p) alors l'élément pour $n+1$ et p lui est strictement inférieur comme ci-dessus : absurde.

Exercice 14 - Preuve de Cauchy de l'inégalité arithmético-géométrique : ✪✪ Soit H_n une propriété dépendant de $n \geq 2$. On suppose que :

- H_2 est vraie.
- $\forall n > 2$, H_n vraie $\Rightarrow H_{n-1}$ vraie.
- $\forall n \geq 2$, H_n vraie $\Rightarrow H_{2n}$ vraie.

1. Montrer que H_n est vraie pour tout $n \geq 2$.
2. Appliquer à la proposition

$$H_n : « \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n , \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^n \geq x_1 \dots x_n »$$

Pour montrer la première implication, on pourra prendre $x_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$.

Correction :

1. Supposons qu'il existe $n_0 \geq 2$ tel que H_{n_0} soit fausse. Puisque H_2 est vraie, alors $n_0 > 2$. On rappelle que : $\forall n \geq 2$, H_n vraie $\Rightarrow H_{2n}$ vraie. Or, H_2 est vraie donc H_4 est vraie ; H_4 est vraie donc H_8 est vraie. Par une récurrence immédiate, H_{2^n} est vraie pour tout n. Puisque $2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe n_1 tel que $n_0 < 2^{n_1}$. Or, $H_{2^{n_1}}$ est vraie donc $H_{2^{n_1}-1}$ est vraie. Par une récurrence (finie) immédiate, $H_{2^{n_1}-n}$ est vraie pour tout $n \in [\![0\,;\, 2^{n_1}-2]\!]$. En d'autres termes, $H_2, \dots, H_{2^{n_1}}$ sont toutes vraies, ce qui est absurde puisque $2 < n_0 < 2^{n_1}$ et que H_{n_0} est fausse.
2. • Soit $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Alors :

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 - x_1x_2 &= \frac{{x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2 - 4x_1x_2}{4} \\ &= \frac{{x_1}^2 - 2x_1x_2 + {x_2}^2}{4} \\ &= \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

En d'autres termes, H_2 est vraie.

• Soit $n \geq 3$. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n-1} est vraie. Soit $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n-1}$. Suivons l'indication de l'énoncé et posons

$$x_n = \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$$

Par hypothèse, H_n est vraie donc

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n \geq x_1 \dots x_n$$

Or :

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n &= \frac{(n-1)x_1 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \\ &= \frac{n}{n-1} \times (x_1 + \cdots + x_{n-1}) \end{aligned}$$

et donc l'inégalité ci-dessus devient :

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^n \geq x_1 \cdots x_{n-1} \times \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$$

On veut simplifier par x_n : on suppose que x_i ne sont pas tous nuls donc $x_n > 0$ et on peut simplifier ce qui donne

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geq x_1 \cdots x_{n-1}$$

Cette inégalité est toujours vraie dans le cas où $x_1 = \cdots = x_{n-1} = 0$: H_{n-1} est vraie.

• Soit $n \geq 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{2n} est vraie. Soit $(x_1, \dots, x_{2n}) \in (\mathbb{R}_+)^{2n}$. Posons

$$y_1 = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}$$

Puisque H_2 est vraie :

$$\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2 \geq y_1y_2$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2n}}{2n}\right)^2 \geq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \times \frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}$$

Par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2n}}{2n}\right)^{2n} \geq \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n \times \left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)^n$$

Or, H_n est vraie donc

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n \geq x_1\cdots x_n \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)^n \geq x_{n+1}\cdots x_{2n}$$

En effet, l'inégalité dans H_n est vraie pour toutes valeurs de $x_1,\dots,x_n$ donc l'est aussi pour $x_{n+1},\dots,x_{2n}$ (penser à $\text{truc}_1,\dots,\text{truc}_n$). Par produit (rappelons qu'on peut multiplier les inégalité positives),

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n \times \left(\frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}\right)^n \geq x_1\cdots x_n x_{n+1}\cdots x_{2n}$$

ce qui permet de conclure : H_{2n} est vraie.

D'après la question 1, H_n est vraie pour tout $n\geq 2$.

2.3 Convexité.

Exercice 15 : ✪ En utilisant la concavité du ln, montrer que pour tout $x\in[\,0\,;1\,]$, $\ln(1+x)\geq x/2$.

Correction : La fonction $x\mapsto \ln(1+x)$ est concave donc est au-dessus de ses cordes. Or, la corde joignant les points d'abscisses 0 et 1 est la droite d'équation $y=\ln(2)x$, si bien que $\ln(1+x)\geq \ln(2)x$ pour tout $x\in[\,0\,;1\,]$. Il suffit de voir que $\ln(2)\approx 0.693>1/2$ pour conclure.

Exercice 16 : ✪ Soit la fonction $f : x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$. Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on explicitera.

Correction : f est $\mathscr{C}^\infty$ donc dérivable deux fois. On cherche donc quand f'' s'annule en changeant de signe. Il suffit donc de donner le tableau de signes de f''. Soit $x\in\mathbb{R}$. Pour dériver plus simplement, on écrit $f(x)=(1+e^x)^{-1/2}$. Dès lors,

$$f'(x)=-\frac{e^x}{2}\,(1+e^x)^{-3/2}$$

et

$$f''(x)=-\frac{e^x}{2}(1+e^x)^{-3/2}+\frac{3e^{2x}}{4}(1+e^x)^{-5/2}=\frac{e^x}{2(1+e^x)^{3/2}}\left[-1+\frac{3e^x}{2(1+e^x)}\right]$$

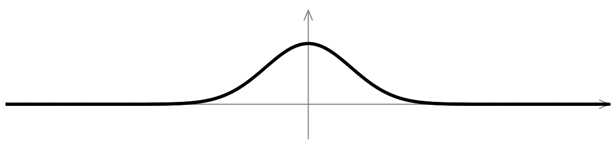
Ainsi

$$\begin{aligned} f''(x)\geq 0 \quad &\iff \quad \frac{3e^x}{2(1+e^x)}\geq 1 \\ &\iff \quad 3e^x\geq 2+2e^x \\ &\iff \quad e^x\geq 2 \\ &\iff \quad x\geq \ln(2) \end{aligned}$$

car la fonction ln est strictement croissante. Finalement, f'' est positive sur $[\,\ln(2)\,;+\infty\,[$ et négative sur $]\,-\infty\,;\ln(2)\,]$ donc s'annule en changeant de signe en $\ln(2)$. f admet donc un point d'inflexion en $\alpha=\ln(2)$.

Exercice 17 : ✪ Tracer le graphe de $x\mapsto e^{-x^2}$. On fera apparaître les éventuels points d'inflexion.

Correction : La fonction f est dérivable deux fois et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=\left(4x^2-2\right)e^{-x^2}$. Ainsi f'' s'annule en changeant de signe en $-1/\sqrt{2}$ et en $1/\sqrt{2}$: elle admet donc deux points d'inflexion, un en $-1/\sqrt{2}$ et en $1/\sqrt{2}$. On trouve facilement la monotonie en dérivant et les limites sont immédiates. Ci-dessous le graphe de f.



2.4 Valeur absolue :

Exercice 18 : ✪ Résoudre les (in)équations suivantes :

1. $|x^2+3x-4| \leq 1$.

2. $|x^2+3x-4| = |x^2+2x-1|$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}|x^2+3x-4| \leq 1 &\iff -1 \leq x^2+3x-4 \leq 1\\ &\iff x^2+3x-3 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad x^2+3x-5 \leq 0\end{aligned}$$

Rappelons qu'un trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses racines éventuelles. Par conséquent :

$$x^2+3x-3 \geq 0 \iff x \in \left]-\infty\,;x_1\right] \cup \left[x_2\,;+\infty\right[\qquad \text{et} \qquad x^2+3x-5 \leq 0 \iff x \in [x_3\,;x_4]$$

avec $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}$, $x_3 = \dfrac{-3-\sqrt{29}}{2}$ et $x_4 = \dfrac{-3+\sqrt{29}}{2}$. Ainsi :

$$|x^2+3x-4| \leq 1 \iff x \in \left(\left]-\infty\,;x_1\right] \cup \left[x_2\,;+\infty\right[\right) \cap [x_3\,;x_4]$$

Or, $21 < 29$ donc $x_3 \leq x_1$ et $x_2 \leq x_4$ donc l'ensemble des solutions est $[x_3\,;x_1] \cup [x_2\,;x_4]$.

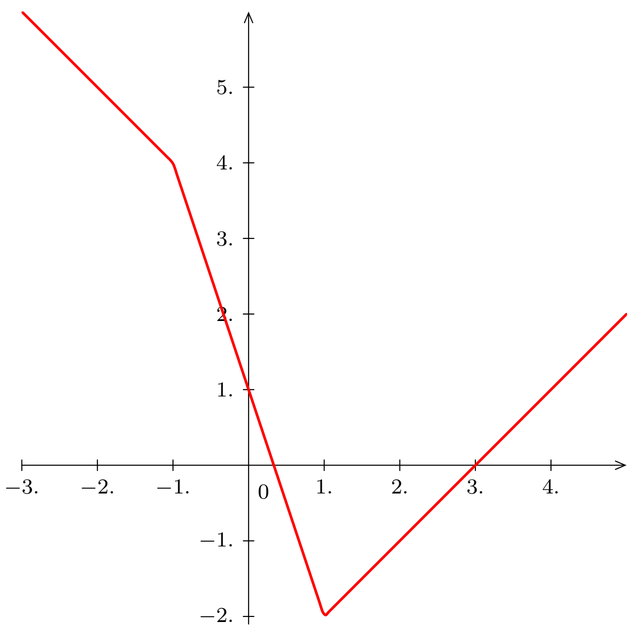
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}|x^2+3x-4| = |x^2+2x-1| &\iff x^2+3x-4 = x^2+2x-1 \qquad \text{ou} \qquad x^2+3x-4 = -x^2-2x+1\\ &\iff x = 3 \qquad \text{ou} \qquad 2x^2+5x-5 = 0\\ &\iff x = 3 \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{-5\pm\sqrt{65}}{4}\end{aligned}$$

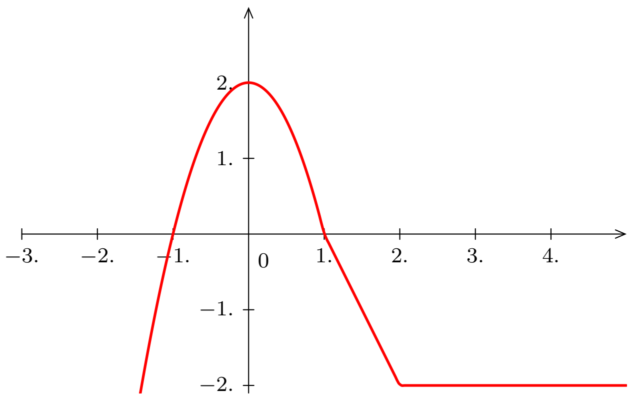
Exercice 19 : ✪ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2|x-1| - |x+1|$. Donner la valeur de $f(x)$ selon la valeur de x sans utiliser la valeur absolue. Tracer le graphe de f. Même question avec $g : x \mapsto x|x-1| + |2-x| - x^2$.

Correction :

- Si $x \geq 1$, $x-1 \geq 0$ et $x+1 \geq 0$ donc $f(x) = 2(x-1)-(x+1) = x-4$.
- Si $x \in [-1\,;1]$, $x-1 \leq 0$ et $x+1 \geq 0$ donc $f(x) = 2(1-x)-(x+1) = -3x+1$.
- Si $x \leq -1$ alors $x-1 \leq 0$ et $x+1 \leq 0$ donc $f(x) = 2(1-x)-(-1-x) = -x+3$.



- Si $x \geq 2$, $x-1 \geq 0$ et $2-x \leq 0$ donc $f(x) = x(x-1)+(x-2)-x^2 = -2$.
- Si $x \in [1\,;2]$, $x-1 \geq 0$ et $2-x \geq 0$ donc $f(x) = x(x-1)+2-x-x^2 = 2-2x$.
- Si $x \leq 1$ alors $x-1 \leq 0$ et $2-x \geq 0$ donc $f(x) = x(1-x)+(2-x)-x^2 = -2x^2+2$.



Exercice 20 - Une inégalité de Kolmogorov : ✪✪ Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ bornée par un réel M_0 (c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M_0$).

1. Soit $M_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $h > 0$,
$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2}$$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, $|f'(x)| \leq \dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$. En déduire un majorant de $|f'|$ qui ne dépend pas de h.
2. (a) On suppose de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$,
$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2}$$
Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, $|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq h^2 M_2$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, $|f'(x)| \leq \dfrac{hM_2}{2} + \dfrac{M_0}{h}$. En déduire un majorant de $|f'|$ qui ne dépend pas de h.
3. Lequel des deux majorants est le meilleur ?

Correction :

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. D'après l'inégalité triangulaire,
$$h|f'(x)| - |f(x+h) - f(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2}$$
donc, toujours d'après l'inégalité triangulaire et puisque $|f|$ est majorée par M_0 :
$$h|f'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2} + |f(x+h) - f(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2} + |f(x+h)| + |f(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2} + 2M_0$$
On en déduit le résultat voulu en divisant par $h > 0$. Ce majorant étant vrai pour tout $h > 0$, on peut faire varier h pour voir quel majorant est le meilleur i.e. le plus petit. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction φ par
$$\varphi(h) = \frac{hM_2}{2} + \frac{2M_0}{h}$$
Ci-dessous son tableau de variations :

x	0		$2\sqrt{M_0/M2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$2\sqrt{M_0 M_2}$	↗	

On en déduit que $|f'|$ est majorée par $2\sqrt{M_0 M_2}$.

2. (a) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. D'après l'inégalité triangulaire :

$$|f(x+h)-f(x-h)-2hf'(x)| = |f(x+h)-f(x)-hf'(x)-(f(x-h)-f(x)+hf'(x))| \leq |f(x+h)-f(x)-hf'(x)|+|f(x-h)-f($$

   (b) On trouve cette majoration de la même façon qu'à la question 1. Ensuite, on étudie de même une fonction auxiliaire et on trouve que $|f'|$ est majorée par $\sqrt{2M_0M_2}$.

3. Ce dernier majorant est plus petit donc meilleur.

2.5 Partie entière :

Exercice 21 : ✪ Soit $(a, x, T) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$. Montrer qu'il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + kT \in [\, a\,; a+T\,[$. Exprimer k à l'aide de la fonction partie entière.

Correction : Tout dépend du signe de T.

Supposons $T > 0$. Notons $E = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, x + kT < a + T\}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors : $k \in E \iff k < \dfrac{a+T-x}{T}$. Il en découle que E est non vide car il existe des entiers k vérifiant cette condition (car $\mathbb{Z}$ n'est pas minoré) et majoré. E est une partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ donc admet un plus grand élément k_0. Montrons que k_0 convient.

$x + k_0T < a + T$ car $k_0 \in E$. De plus, $k_0 + 1 \notin E$ car k_0 est le plus grand élément de E si bien que $x + (k_0+1)T \geq a + T$ et donc $x + k_0T \geq a$. En conclusion, $x + k_0T \in [\, a\,; a+T\,[$. Montrons à présent l'unicité. Si k_1 est un entier qui convient, alors $x + k_1T < a + T$ donc $k_1 \in E$, d'où $k_1 \leq k_0$ puisque k_0 est le plus grand élément de E. De plus, $x + k_1T \geq a$ donc $x + (k_1+1)T \geq a + T > x + k_0T$. On en déduit que $(k_1+1)T > k_0T$ et T est positif donc $k_1 + 1 > k_0$. Puisqu'on a des entiers, $k_1 + 1 \geq k_0 + 1$ donc $k_1 \geq k_0$. Ainsi, $k_1 = k_0$, d'où l'unicité.

Supposons $T < 0$. Précisons qu'on a alors $a + T < a$ donc on s'intéresse à l'intervalle $]\, a+T\,; a\,]$. On définit alors $E = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, x + kT > a + T\}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Le reste du raisonnement est analogue (en changeant le sens des inégalités lorsqu'on divise par T).

Donnons à présent la valeur de k. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Supposons $T > 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
k \text{ convient} \quad & \iff \quad a \leq x + kT < a + T \\
& \iff \quad \frac{a-x}{T} \leq k < \frac{a+T-x}{T} = \frac{a-x}{T} + 1 \\
& \iff \quad \frac{x-a}{T} - 1 < -k \leq \frac{x-a}{T} \\
& \iff \quad -k = \left\lfloor \frac{x-a}{T} \right\rfloor \\
& \iff \quad k = -\left\lfloor \frac{x-a}{T} \right\rfloor
\end{aligned}$$

ce qui prouve à nouveau l'existence et l'unicité de k. Le cas $T < 0$ donne le même résultat (en partant de $a+T < x+kT \leq a$ et en changeant le sens des inégalités en divisant par T).

Exercice 22 : ✪ Si $x \in \mathbb{R}$, la partie entière par excès de x est notée $\lceil x \rceil$ et est l'unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k - 1 < x \leq k$. Si $T < 0$:

1. Montrer l'existence et l'unicité de $\lceil x \rceil$. Donner $\lceil \pi \rceil$ et $\lceil -\pi \rceil$.
2. Exprimer selon les cas $\lceil x \rceil$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.
3. Exprimer $\lceil -x \rceil$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.

Correction :

1. Introduisons $E = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, x \leq k\}$. Alors E est une partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ donc admet un plus petit élément k_0. $k_0 \in E$ donc $x \leq k_0$ et $k_0 - 1 < k_0$ donc $k_0 - 1 \notin E$ puisque k_0 est le plus petit élément de E si bien que $k_0 - 1 < x$: k_0 convient. Soit k_1 un entier qui convient. Puisque $x \leq k_1$, alors $k_1 \in E$ donc $k_1 \geq k_0$ car k_0 est le plus petit élément de E. De plus, $k_1 - 1 < x \leq k_0$ i.e. $k_1 - 1 < k_0$ donc $k_1 \leq k_0$. Finalement, $k_1 = k_0$, d'où l'unicité. Par construction, $\lceil x \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à x donc $\lceil \pi \rceil = 4$ car $3 < \pi \leq 4$ et $\lceil -\pi \rceil = -3$ car $-4 < -\pi \leq -3$. Comme pour la partie entière : lorsqu'on a un encadrement du type « truc entier $- 1 < x \leq$ truc entier », alors on peut en déduire directement que truc entier $= \lceil x \rceil$.

2. $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$. Il faut examiner deux cas.

   Supposons que x ne soit pas entier. Alors $\lfloor x\rfloor < x < \lfloor x\rfloor + 1$ donc $\lfloor x\rfloor < x \leq \lfloor x\rfloor + 1$ si bien que $\lceil x\rceil = \lfloor x\rfloor + 1$ (on le voit avec l'exemple de π ci-dessus).

   Supposons que x soit entier. Alors $x - 1 < x \leq x$ donc $\lceil x\rceil = x = \lfloor x\rfloor$.
3. $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$ donc $-\lfloor x\rfloor - 1 < -x \leq -\lfloor x\rfloor$ si bien que $\lceil -x\rceil = -\lfloor x\rfloor$ ($\neq \lfloor -x\rfloor$!).

Exercice 23 : ✪ Montrer que pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq \lfloor x+y\rfloor \leq \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1$. Montrer que $\lfloor x+y\rfloor$ peut prendre chacune de ces deux valeurs.

Correction : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.D'une part, $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$ et $\lfloor y\rfloor \leq y < \lfloor y\rfloor + 1$ donc, par somme, $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq x + y < \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 2$ et d'autre part, $\lfloor x+y\rfloor \leq x + y < \lfloor x+y\rfloor + 1$ donc $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor < \lfloor x+y\rfloor + 1$ donc (on travaille avec des entiers), $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq \lfloor x+y\rfloor$. D'autre part, $\lfloor x+y\rfloor < \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 2$ donc $\lfloor x+y\rfloor \leq \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1$. Enfin, si $x = y = 1$, alors $\lfloor x+y\rfloor = 2 = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$, mais si $x = y = 1/2$, alors $\lfloor x+y\rfloor = 1 = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1$.

Exercice 24 : ✪ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor \leq 1$. Montrer que cet encadrement est optimal.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part, $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$ donc $2\lfloor x\rfloor \leq 2x < 2\lfloor x\rfloor + 2$, et d'autre part $\lfloor 2x\rfloor \leq 2x < \lfloor 2x\rfloor + 1$ si bien que $2\lfloor x\rfloor < \lfloor 2x\rfloor + 1$ donc (ce sont des entiers) $2\lfloor x\rfloor \leq \lfloor 2x\rfloor$n d'où la première inégalité. De plus, $\lfloor 2x\rfloor < 2\lfloor x\rfloor + 2$ donc $\lfloor 2x\rfloor \leq 2\lfloor x\rfloor + 1$, d'où la seconde. Il peut y avoir égalité pour les deux valeurs. Par exemple, si $x = y = 0$ alors $\lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor = 0$, tandis que pour $x = 1/2$, $\lfloor 2x\rfloor - 2\lfloor x\rfloor = 1$.

Exercice 25 : ✪ Montrer que la fonction $x \mapsto \lfloor x\rfloor + \left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$ admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$. En quel(s) réel(s) est-il atteint ? Est-elle majorée ?

Correction : Notons cette fonction f. Soit $x > 0$. Si $x > 1$, alors $1/x \in \left]0\,;1\right[$ donc sa partie entière est nulle si bien que $f(x) = \lfloor x\rfloor \geq 1$. De même, si $x < 1$, $f(x) = \lfloor 1/x\rfloor \geq 1$. En d'autres termes, 1 est un minorant de f. Pour prouver que 1 est un minimum, il suffit de prouver qu'il est atteint. Or, $f(3/2) = \lfloor 3/2\rfloor = 1$ donc 1 est le minimum de f. Cherchons en quels points il est atteint.

Puisque $f(x)$ est la somme de deux entiers positifs, $f(x) = 1$ si et seulement si l'un des deux entiers vaut 1 et l'autre 0.

$$\begin{aligned}
f(x) = 1 \quad &\iff \quad \left(\lfloor x\rfloor = 1 \text{ et } \left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 0\right) \text{ ou } \left(\lfloor x\rfloor = 0 \text{ et } \left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor = 1\right) \\
&\iff \quad \left(1 \leq x < 2 \text{ et } 0 \leq \frac{1}{x} < 1\right) \text{ ou } \left(0 \leq x < 1 \text{ et } 1 \leq \frac{1}{x} < 2\right) \\
&\iff \quad 1 < x < 2 \text{ et } \frac{1}{2} < x < 1
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $f(x) = 1$ si et seulement si $x \in \left]\dfrac{1}{2}\,;1\right[\cup \left]1\,;2\right[$. Enfin, f n'est pas majorée car, pour tout x, $f(x) \geq \lfloor x\rfloor$ et la partie entière n'est pas majorée (car, pour tout n, $\lfloor n\rfloor = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ou tout simplement car la partie entière tend vers $+\infty$ en $+\infty$).

Exercice 26 : ✪✪ Résoudre l'équation (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) $\lfloor 2x+1\rfloor = \lfloor x+4\rfloor$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $2x < \lfloor 2x+1\rfloor \leq 2x + 1$ et $x + 3 < \lfloor x+4\rfloor \leq x + 4$. Raisonnons par analyse-synthèse.

- Analyse : si x est solution, alors $\lfloor 2x+1\rfloor = \lfloor x+4\rfloor$ donc, d'après ce qui précède, $2x < x+4$ donc $x < 4$, et $x+3 < 2x+1$ donc $x > 2$. En d'autres termes, les solutions éventuelles appartiennent à $\left]2\,;4\right[$.
- Synthèse : soit $x \in \left]2\,;4\right[$. Calculons $\lfloor x+4\rfloor$ et $\lfloor 2x+1\rfloor$ et regardons quand ces deux quantités sont égales.

  Tout d'abord, la valeur de $\lfloor x+4\rfloor$ change à chaque entier. Plus précisément, si $x \in \left]2\,;3\right[$ alors $\lfloor x+4\rfloor = 6$ et si $x \in \left[3\,;4\right[$, alors $\lfloor x+4\rfloor = 7$. Regardons à présent $\lfloor 2x+1\rfloor$. Une partie entière change quand on franchit un nouvel entier. Par conséquent, $\lfloor 2x+1\rfloor$ change à chaque demi-entier. Plus précisément : si $2 < x < 5/2$ alors $5 < 2x + 1 < 6$ donc $\lfloor 2x+1\rfloor = 5$: x n'est pas solution. Si $5/2 \leq x < 3$, alors $6 \leq 2x + 1 < 7$ donc $\lfloor 2x+1\rfloor = 6$: x est solution. Si $3 \leq x < 7/2$ alors $7 \leq 2x + 1 < 8$ donc $\lfloor 2x+1\rfloor = 7$: x est solution, et enfin si $7/2 \leq x < 4$, alors $8 \leq 2x + 1 < 9$ donc $\lfloor 2x+1\rfloor = 8$: x n'est pas solution.

En conclusion, l'ensemble des solutions est $\left[5/2\,;7/2\right[$.

Exercice 27 : ✪✪ Donner le domaine de définition de

$$f : x \mapsto 2x \times \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2x}} \right\rfloor - \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor}$$

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ est définie en } x \quad & \iff \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{2x} \neq 0 \\ \lfloor 1/\sqrt{x} \rfloor \neq 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} x > 0 \\ \lfloor 1/\sqrt{x} \rfloor \geq 1 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} x > 0 \\ 1/\sqrt{x} \geq 1 \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, f est définie sur $]\,0\,;1\,]$.

Exercice 28 - Développement en fraction égyptienne : ✪✪ Soit $r = a/b$ un rationnel appartenant à $]\,0\,;1\,[$.

1. Montrer qu'il existe un unique $k \geq 2$ que l'on explicitera tel que :

$$\frac{1}{k} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{k-1}$$

2. Montrer qu'il existe $n \geq 1$ et $d_1, \dots, d_n$ entiers naturels distincts tels que :

$$r = \frac{1}{d_1} + \cdots + \frac{1}{d_n}$$

   On pourra raisonner par récurrence sur a. Donner une telle écriture dans le cas où $r = 11/12$.

Correction :

1. Soit $k \geq 2$. Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{k-1} \quad & \iff \quad k - 1 < \frac{b}{a} \leq k \\
& \iff \quad -k \leq -\frac{b}{a} < -k + 1 \\
& \iff \quad -k = \left\lfloor -\frac{b}{a} \right\rfloor \\
& \iff \quad k = -\left\lfloor -\frac{b}{a} \right\rfloor
\end{aligned}$$

   On a bien $k \geq 2$ car $1/k \leq a/b < 1$.

2. Suivons l'indication de l'énoncé et raisonnons par récurrence (forte) sur a.
   - Pour tout $a \geq 1$, notons H_a : « Pour tout b tel que $a/b \in \,]\,0\,;1\,[$, il existe $n \geq 1$ et $d_1, \dots, d_n$ entiers naturels distincts tels que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{d_1} + \cdots + \dfrac{1}{d_n}$. »
   - H_1 est trivialement vraie : toute fraction du type $\dfrac{1}{b}$ avec $b \geq 2$ s'écrit sous la forme $\dfrac{1}{b}$.
   - Soit $a \geq 1$. Supposons $H_1, \dots, H_a$ vraie et prouvons que H_{a+1} est vraie. Soit donc $b \geq 1$ tel que $\dfrac{a+1}{b} \in \,]\,0\,;1\,[$. Soit k l'unique entier supérieur ou égal à 2 tel que

$$\frac{1}{k} \leq \frac{a+1}{b} < \frac{1}{k-1}$$

Si on a égalité à gauche alors c'est terminé. Sinon,

$$\frac{a+1}{b} - \frac{1}{k} = \frac{(a+1)k-b}{bk} > 0$$

Dès lors, $(a+1)b-k>0$ donc $(a+1)b-k \geq 1$ car c'est un entier. Montrons que $(a+1)k-b < a+1$ ce qui permettra d'appliquer l'hypothèse de récurrence. Par propriété de la partie entière ($x-1<\lfloor x \rfloor$),

$$k = -\left\lfloor -\frac{b}{a+1} \right\rfloor < -\left(-\frac{b}{a+1} - 1\right) = \frac{b}{a+1} + 1$$

donc $(a+1)k-b < a+1$ et donc $(a+1)k - b \leq a$: par hypothèse de récurrence, il existe $n \geq 1$ et $d_1, \dots, d_n$ entiers distincts tels que

$$\frac{a+1}{b} - \frac{1}{k} = \frac{(a+1)k-b}{bk} = \frac{1}{d_1} + \cdots + \frac{1}{d_n}$$

et donc

$$\frac{a+1}{b} = \frac{1}{k} + \frac{1}{d_1} + \cdots + \frac{1}{d_n}$$

Les d_i sont distincts, il suffit donc de prouver qu'ils sont distincts de k. Si l'un des d_i est égal à k alors $\dfrac{a+1}{b} \geq \dfrac{2}{k}$ et donc, par choix de k, $\dfrac{1}{k-1} > \dfrac{2}{k}$ d'où $k > 2(k-1)$ c'est-à-dire $k<2$ ce qui est exclu. Ainsi, H_{a+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_a est vraie pour tout $a \geq 1$: tout rationnel de la forme $a/b \in \left]\,0\,;1\,\right[$ s'écrit sous cette forme, mais il n'y a pas unicité. Par exemple,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

Cependant, la démonstration nous fournit un algorithme (glouton) pour donner une telle écriture explicite : on prend l'entier k tel que $\dfrac{1}{k} \leq \dfrac{a}{b} < \dfrac{1}{k-1}$, on le soustrait, et on recommence. Par exemple, avec $r = 11/12$, on a

$$\frac{1}{2} \leq r < 1$$

De plus, $r - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{12}$ et $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{5}{12} < \dfrac{1}{2}$ donc on s'intéresse à présent à $\dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$ et là il n'y a rien à faire, donc on a finalement

$$\frac{11}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

Exercice 29 - The significand function : ✪✪✪ Si $x>0$, on pose $S(x) = x \times 10^k$ (avec $k \in \mathbb{Z}$ bien choisi) l'unique produit de x et d'une puissance de 10 appartenant à l'intervalle $[\,1\,;10\,[$. Par exemple :

- $S(2021) = 2,021 \quad (k=-3)$
- $S(\pi) = \pi \quad (k=0)$
- $S(0,0000017) = 1,7 \quad (k=6)$

1. Montrer effectivement l'existence et l'unicité de k.
2. Exprimer $S(x)$ en fonction de x uniquement.

Correction :

1. Posons $E = \left\{ k \in \mathbb{Z} \,|\, 10^k x < 10 \right\}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors : $k \in E \iff k < \dfrac{\ln(10) - \ln(x)}{\ln(10)}$. On en déduit que E est une partie non vide (car il existe des entiers k vérifiant cette condition) majorée de $\mathbb{Z}$ donc admet un plus grand élément k_0. Puisque $k_0 \in E$, alors $10^{k_0}x < 10$. De plus, $k_0 + 1 > k_0$ qui est le plus grand élément de E donc $k_0 + 1 \notin E$ si bien que $10^{k_0+1}x \geq 10$ et donc $10^{k_0}x \geq 1$: k_0 convient.

   Soit k_1 un entier qui convient. Alors $10^{k_1}x < 10$ si bien que $k_1 \in E$ donc $k_1 \leq k_0$ car k_0 est le plus grand élément de E. De plus, $10^{k_1} \geq 1$ donc $10^{k_1+1} \geq 10 > 10^{k_0}x$. Par stricte croissance du ln, $(k_1+1)\ln(10) + \ln(x) > k_0 \ln(10) + \ln(x)$ et $\ln(10) > 0$ donc $k_1 + 1 > k_0$ si bien que $k_1 \geq k_0$ donc $k_0 = k_1$, d'où l'unicité.

2. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} 1 \leq 10^k x < 10 &\iff 0 \leq k\ln(10) + \ln(x) < \ln(10) \\ &\iff -\frac{\ln(x)}{\ln(10)} \leq k < -\frac{\ln(x)}{\ln(10)} + 1 \\ &\iff \frac{\ln(x)}{\ln(10)} - 1 < -k \leq \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \\ &\iff -k = \left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \right\rfloor \\ &\iff k = -\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \right\rfloor \end{aligned}$$

Cela redémontre au passage l'existence et l'unicité de k !

Exercice 30 : ✪✪✪ Donner une CNS sur le réel $a > 1$ pour qu'on ait :

$$\forall x \geq 1, \qquad \lfloor \log_a(x) \rfloor = \lfloor \log_a(\lfloor x \rfloor) \rfloor$$

Correction : Soit $x \geq 1$. La fonction partie entière et la fonction $\log_a$ sont croissantes (car $a > 1$ sinon ce n'est plus le cas) donc $\lfloor \log_a(x) \rfloor \geq \lfloor \log_a(\lfloor x \rfloor) \rfloor$. Il n'y a pas égalité si et seulement s'il existe un entier k tel que $\log_a(x) \geq k > \log_a(\lfloor x \rfloor)$. Comme tout est croissant, quand x augmente, $\log_a(x)$ et $\log_a(\lfloor x \rfloor)$ augmentent. Montrons que a est solution si et seulement si, lorsque $\log_a(x)$ atteint les valeurs entières, la quantité $\log_a(\lfloor x \rfloor)$ les atteint en même temps i.e. : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \geq 1 \log_a(x) = k \Rightarrow \log_a(\lfloor x \rfloor) = k$. Montrons en fait que a n'est pas solution si et seulement si : $\exists k \in \mathbb{N}, \exists x \geq 1 \log_a(x) = k$ et $\log_a(\lfloor x \rfloor) < k$.

Supposons que a ne soit pas solution. Il existe donc x et k tel que $\log_a(\lfloor x \rfloor) < k \leq \log_a(x)$. En particulier, $x \geq a^k > \lfloor x \rfloor$. En posant $y = a^k$, alors $\log_a(y) = k$ et $\lfloor y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor$ donc $\log_a(\lfloor y \rfloor) \leq \log_a(\lfloor x \rfloor) < k$. Ainsi, il existe y et k tels que $\log_a(y) = k$ et $\log_a(\lfloor y \rfloor) < k$. Réciproquement, s'il existe x et k tels que $\log_a(x) = k$ et $\log_a(\lfloor x \rfloor) < k$ alors a ne convient pas car $\lfloor \log_a(x) \rfloor = k \neq \lfloor \log_a(\lfloor x \rfloor) \rfloor < k$. D'où l'équivalence.

Ainsi, a convient si et seulement si : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \geq 1 \log_a(x) = k \Rightarrow \log_a(\lfloor x \rfloor) = k$. Ou encore : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \geq 1, x = a^k \Rightarrow \lfloor x \rfloor = a^k$. En particulier, a convient si et seulement si a^k est un entier pour tout k. Montrons donc que a convient si et seulement si a est un entier.

Supposons que a convient. En particulier, pour $k = 1$, : $\forall x, x = a \Rightarrow \lfloor x \rfloor = a$. En d'autres termes, $a = \lfloor a \rfloor$ donc a est un entier. Réciproquement, si a est un entier alors, pour tout k, a^k est un entier donc est égal à sa partie entière, c'est-à-dire : $\forall x, x = a^k \Rightarrow \lfloor x \rfloor = a^k$, c'est-à-dire que a convient.

En conclusion, les réels a qui conviennent sont exactement les entiers (supérieurs strictement à 1).

2.6 Généralité sur les fonctions.

Vrai ou Faux ?

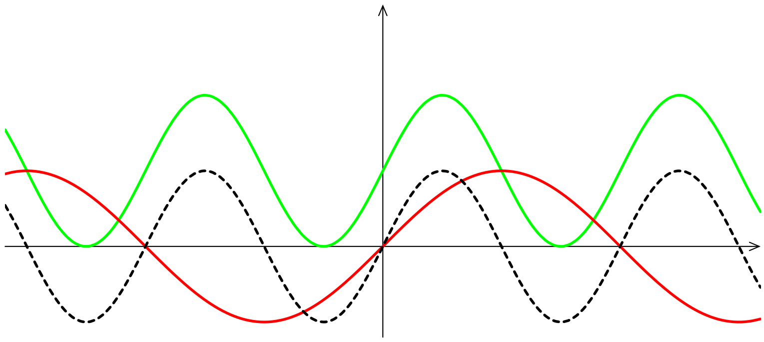
1. La partie entière est une fonction impaire.
2. La composée de deux fonctions impaires est paire.
3. Si f est paire et g impaire alors $f \circ g$ est impaire.
4. Si f est continue alors $|f|$ est continue.
5. Si $|f|$ est continue alors f est continue.
6. La fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$ est 1-périodique.
7. Si f et g sont discontinues en x_0 alors $f + g$ l'est également.
8. Une fonction monotone sur un segment est bornée sur ce segment.
9. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x)^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors f est constante.
10. La composée de deux fonctions croissantes est croissante.
11. La composée de deux fonctions décroissantes est décroissante.

Exercice 31 : ✪ Donner, sans calcul, l'allure des graphes des fonctions suivantes :

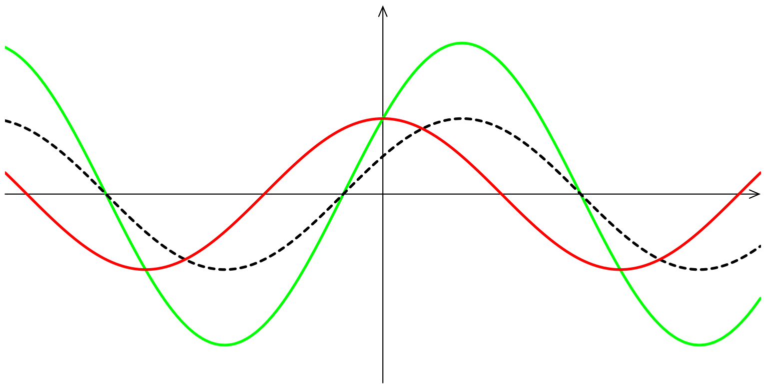
1. $x \mapsto 1 + \sin(2x)$.
2. $2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.
3. $x \mapsto -\ln(1+x)$.
4. $x \mapsto 1 - \sqrt{1-x}$.

Correction :

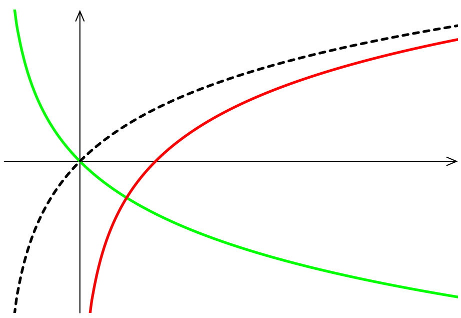
1. On obtient le graphe de cette fonction à partir de celui du sinus en « contractant » le graphe d'un facteur 2 (la fonction « va deux fois plus vite ») et en effectuant une translation de vecteur $1.\overrightarrow{j}$ (donc de 1 vers le haut). Ci-dessous le graphe du sinus (en rouge), le graphe de $x \mapsto \sin(2x)$ (en pointillés) et le graphe final (en vert).



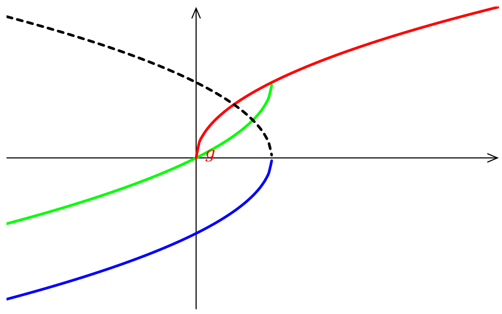
2. On obtient le graphe de $x \mapsto \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ à partir du graphe du cosinus en effectuant une translation de $\dfrac{\pi}{3}.\overrightarrow{i}$ (donc de $\dfrac{\pi}{3}$ vers la droite) : si on a un doute (va-t-on vers la droite ou vers la gauche ?), on se rend compte que cette fonction vaut en $\dfrac{\pi}{3}$ ce que vaut le cos en 0. Ensuite, pour le graphe de la fonction de l'énoncé, il suffit de multiplier « l'amplitude » par 2. Ci-dessous le graphe du cosinus (en rouge), le graphe de $x \mapsto \cos(x - \pi/3)$ (en pointillés) et le graphe final (en vert).



3. Le graphe de $x \mapsto \ln(1+x)$ se déduit de celui du ln par une translation de $-1.\overrightarrow{i}$ (donc de 1 vers la gauche) : si on a un doute, elle vaut en 0 ce que vaut le ln en 1. Ensuite, pour la fonction de l'énoncé, on effectue une symétrie d'axe l'axe des abscisses. Ci-dessous le graphe du ln (en rouge), le graphe de $x \mapsto \ln(1+x)$ (en pointillés) et le graphe final (en vert).



4. Pour $x \mapsto \sqrt{1-x}$, c'est le graphe de la racine carrée mais « vers la gauche » (car il y a un $-$: on remonte le temps !) et décalé de 1 vers la droite (elle vaut en 1 ce que vaut la racine carrée en 0). Ensuite, on effectue une symétrie d'axe l'axe des abscisses et on remonte de 1 (vers le haut donc). Ci-dessous le graphe de la racine carrée (en rouge), le graphe de $x \mapsto \sqrt{1-x}$ (en pointillés), le graphe de $x \mapsto -\sqrt{1-x}$ (en bleu) et le graphe final (en vert).



Exercice 32 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. Prouver que $x \mapsto f(\omega x)$ est périodique, et préciser une période.

Correction : Notons cette fonction g. Soit $x \in \mathbb{R}$, soit T une période de f. Alors $x + \dfrac{T}{\omega} \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} g\left(x + \frac{T}{\omega}\right) &= f(\omega x + T) \\ &= f(\omega x) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que g est T/ω périodique. C'est intuitif (cf. cours) : la fonction g va « ω fois plus vite » donc il faut diviser par ω pour parcourir une période. Par exemple, $x \mapsto \cos(2\pi x)$ est 1-périodique.

Exercice 33 : ✪ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{e^{\alpha x}}{(1 + e^{\alpha x})^2}$ est paire.

Correction : f est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-x \in \mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{e^{-\alpha x}}{(1 + e^{-\alpha x})^2} \\ &= \frac{e^{-\alpha x}}{(e^{-\alpha x}(e^{\alpha x} + 1))^2} \\ &= \frac{e^{-\alpha x}}{e^{-2\alpha x}(e^{\alpha x} + 1)^2} \\ &= \frac{e^{\alpha x}}{(e^{\alpha x} + 1)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est paire. Cela ne se voit pas toujours au premier coup d'oeil !

Exercice 34 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $f \circ f$ est croissante et que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Correction : Soient $x < y$ deux réels. Supposons que $f(x) \leq f(y)$. $f \circ f$ étant croissante, $\frac{\circ}{f}(f(x)) \leq f \circ f(f(y))$ c'est-à-dire que $f \circ f \circ f(x) \leq f \circ f \circ f(y)$ ce qui est absurde puisque $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Finalement, $f(x) < f(y)$: f est strictement décroissante.

Exercice 35 - Fonctions antipériodiques : ✪ Soit $T > 0$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite antipériodique de période T si pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x + T) = -f(x)$.

1. Donner un exemple de fonction antipériodique.
2. Montrer qu'une fonction antipériodique est périodique.
3. Soit f une fonction paire antipériodique de période T. Donner la valeur de $f(T/2)$.

Correction :

1. La fonction cos et la fonction sin sont antipériodiques de période π car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.

2. Soit f antipériodique de période T et soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(x+2T) &= f(x+T+T) \\ &= -f(x+T) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est $2T$périodique.

3. Avec l'exemple du cos qui est antipériodique de période π et puisque $\cos(\pi/2) = 0$, on se dit que $f(T/2) = 0$. f étant antipériodique de période T,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{T}{2}\right) &= f\left(-\frac{T}{2}+T\right) \\ &= -f\left(-\frac{T}{2}\right) \end{aligned}$$

mais f est paire donc $f(T/2) = f(-T/2)$ si bien que $f(T/2) = 0$.

Exercice 36 : ✪ Montrer qu'une fonction périodique monotone est constante.

Correction : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique (avec $T \neq 0$) monotone et supposons que f n'est pas constante. Il existe alors $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Supposons sans perte de généralité que $x < y$. Supposons que f soit croissante (raisonnement analogue dans l'autre cas). Alors $f(x) < f(y)$ (l'inégalité est stricte puisque $f(x) \neq f(y)$). Si $T > 0$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x + kT > y$. Or, par une récurrence immédiate, $f(x + nT) = f(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si bien que $f(x + kT) = f(x) < f(y)$ ce qui est absurde puisque $y < x + kT$ et f est croissante. De même, si $T < 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y + kT < x$ et on conclut de la même façon.

Exercice 37 : ✪ Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos\left(x^2\right) e^{-x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2+\sin(x))x$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^x}{x^{\ln(x)}}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2|x|}{x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-\cos(x)}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sin(x)}{(x+1)^2}$.
11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}$.
12. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\ln(x)^2}$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $f(x) = \cos(x^2)e^{-x}$ (on notera toujours $f(x)$ la quantité de l'énoncé). $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$. Or, $\pm e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \leq f(x) \leq 3x$ donc, d'après le théorème de minoration, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
3. $y = \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et, par croissances comparées, $\dfrac{\ln(y)}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ donc, par composition de limites, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
4. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= e^{x \times \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \times \frac{1}{x^2}} \\ &= e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \times \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

Or, $u = 1/x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$. Par composition de limites,

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

De plus, $1/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc la quantité dans l'exponentielle tend vers 0 si bien que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^0 = 1$.

5. Sous réserve d'existence,

$$f(x) = e^{x\ln(\ln(x)) - \ln(x)^2}$$

Soit donc $x > 1$ (et donc $\ln(x) > 0$: tout est bien défini).

$$f(x) = e^{x\left(\ln(\ln(x)) - \frac{\ln(x)^2}{x}\right)}$$

Par croissances comparées, $\ln(x)^2/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(\ln(x)) - \frac{\ln(x)^2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ si bien que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

6. Supposons $x < 0$ (ce qui est licite puisqu'on cherche la limite en $-\infty$). Alors $f(x) = -1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$.

7. Soit $x > 0$ (ce qui est licite puisqu'on cherche la limite en $+\infty$).

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 \times \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 - \dfrac{\cos(x)}{x}\right)} \\ &= \frac{x \times \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}{1 - \dfrac{\cos(x)}{x}} \end{aligned}$$

Or, $1 + \dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\cos(x)}{x} \leq \dfrac{1}{x}$ si bien que, d'après le théorème d'encadrement, $\cos(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Finalement, $f(x) \xrightarrow[x\to+/infty]{} +\infty$.

8. Si $x > 1$ (ce qui est licite puisqu'on cherche la limite en $+\infty$), $0 \leq 1/x < 1$ donc $\lfloor 1/x \rfloor = 0$ donc $f(x) = 0 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

9. Soit $x > 0$ (pour ne pas changer le sens de l'inégalité).

$$\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} < f(x) \leq \frac{x}{x} = 1$$

D'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

10. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2\left(1 + \dfrac{\sin(x)}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1 + \dfrac{\sin(x)}{x^2}}{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2} \end{aligned}$$

On montre de même que ci-dessus que $\sin(x)/x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ si bien que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

11. Idem, en factorisant en haut par x^2 et en bas par x^3, on obtient : $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

12. Attention, ce n'est pas une croissance comparée !!!! Soit $x > 1$ (pour que $\ln(x)$ soit non nul).

$$f(x) = e^{2\ln(x) - \ln(x)^2}$$

Or, $y = 2\ln(x) - \ln(x)^2 = \ln(x)^2\left(\dfrac{2}{\ln(x)} - 1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ et $e^y \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0$. Par composition de limites, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 38 : ✪ Soit f continue en 0. Montrer que $x \mapsto xf(x)$ est dérivable en 0.

Correction : Notons g cette fonction. Soit $x \neq 0$.

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = f(x) \xrightarrow[x\to0]{} f(0)$$

car f est continue en 0. Le taux d'accroissement admet une limite finie en 0 : g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Exercice 39 : ✪ Dériver les fonctions suivantes sans préciser où elles sont dérivables [1] :

1. Non, franchement, vous y avez cru ?

1. $f : x \mapsto 1/\ln(\ln(x))$
2. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$.
3. $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{1-x^2}$
4. $f : x \mapsto 2x\sqrt{x} - x^2 e^{\cos x}$
5. $f : x \mapsto x^x$
6. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$
7. $f : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x^2+1}}}$

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est définie en x si et seulement si $x > 0$, $\ln(x) > 0$ et $\ln(\ln(x)) \neq 0$ (i.e $\ln(x) \neq 1$). En d'autres termes, f est définie en x si et seulement si $x > 1$ et $x \neq e$. Ainsi $D_f = \left]1\,;e\right[\cup \left]e\,;+\infty\right[$. La fonction f est dérivable sur D_f car ln est dérivable sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ puis sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ et enfin car la fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Soit $x \in D_f$. Tout d'abord, posons $g : x \longmapsto \ln(\ln(x))$ (dérivable sur D_f). On a $g'(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{\ln(x)}$. Enfin, $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ donc $f'(x) = -g'(x) \times \dfrac{1}{g(x)^2} = \dfrac{-1}{x} \times \dfrac{1}{\ln(x)} \times \dfrac{1}{(\ln(\ln(x)))^2}$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}_+$. f est AU MOINS dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car quotient de fonctions qui le sont. Soit $x > 0$.
$$f'(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} + x \times \frac{-1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}$$
En 0, étudions le taux d'accroissement. Soit $x > 0$.
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$
f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, f est définie en x si et seulement si $1 - x^2 \geq 0$. Ainsi $D_f = [-1\,;1]$. La fonction racine étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable (au moins : voir ci-dessous) sur $]-1\,;1[$ par composition puisque, pour tout $x \in\,]-1\,;1[$, $1-x^2 > 0$. Pour tout $x \in\,]-1\,;1[$.
$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + (x-1) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}.$$
Intéressons-nous à la dérivabilité en ± 1. En effet, rappelons qu'une composée de fonctions non dérivables peut être dérivable. Une seule façon de prouver qu'une fonction n'est pas dérivable : le taux d'accroissement. Soit $x \in\,]-1\,;1[$. D'une part, $f(1) = 0$ donc
$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{f(x)}{x-1} = \sqrt{1-x^2} \xrightarrow[x\to 1]{} 0$$
Il en découle que f est dérivable en 1 avec $f'(1) = 0$. Enfin, $f(-1) = 0$ si bien que
$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{f(x)}{x+1} = \frac{(x-1)\sqrt{(1+x)(1-x)}}{x+1} = \frac{(x-1)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} \xrightarrow[x\to(-1)^+]{} -\infty$$
car le numérateur tend vers $-2\sqrt{2}$ et le dénominateur vers 0^+. Ainsi, f n'est pas dérivable en -1 car son taux d'accroissement n'admet pas de limite finie (mais son graphe admet une tangente verticale en -1).
4. f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable AU MOINS sur $\mathbb{R}_+^*$ car produit et composée de fonctions qui le sont. Soit $x > 0$. En utilisant le fait que $x\sqrt{x} = x^{3/2}$,
$$f'(x) = 3x^{1/2} - 2xe^{\cos(x)} + x^2\sin(x)e^{\cos(x)}$$
De plus,
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2\sqrt{x} - xe^{\cos(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
si bien que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.
5. Tout d'abord, la puissance est variable donc écrivons f sous forme exponentielle. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = e^{x\ln(x)}$ défini si et seulement si $x > 0$. Ainsi $D_f = \mathbb{R}_+^*$. De plus f est dérivable sur D_f car composée d'un produit de fonctions qui le sont par une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (la fonction exponentielle). Supposons à présent que $x > 0$. Alors $f'(x) = \left(\ln(x) + x \times \dfrac{1}{x}\right)e^{x\ln(x)} = (\ln(x)+1)e^{x\ln(x)}$.
6. f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable (au moins) sur $\mathbb{R}^*$. Soit $x > 0$. Alors $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ donc
$$f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$
Si $x < 0$, alors $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ et on trouve

$$f'(x) = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Enfin, si $x \neq 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{1+|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

si bien que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

7. Toutes les quantités dans les racines carrées sont strictement positives : f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - Posons $g : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
   - Posons à présent $h : x \longmapsto \sqrt{2+\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{2+g(x)}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$h'(x) = g'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{2+g(x)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{x^2+1}}}$$
   - Enfin, $f : x \longmapsto \sqrt{1+h(x)}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f'(x) = h'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{1+h(x)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{x^2+1}}} \times \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x^2+1}}}}.$$

Exercice 40 : ✪

1. Donner les dérivées successives de la fonction ln.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Donner les dérivées successives de $x \mapsto (x-a)^n$.

Correction :

1. Si $n \geq 1$ (attention, ce n'est pas vrai si $n = 0$), pour tout $x > 0$, $\ln^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ (récurrence immédiate).
2. Notons cette fonction f. Si $k \in [\![0\,;n]\!]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par récurrence (finie) immédiate :

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= n(n-1)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k} \end{aligned}$$

et puisque $f^{(n)}$ est constante, si $k > n$, $f^{(k)}(x) = 0$.

Exercice 41 : ✪ Tracer le graphe de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$. Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$, dont on déterminera l'équation, et qu'on fera apparaître sur le graphe de f.

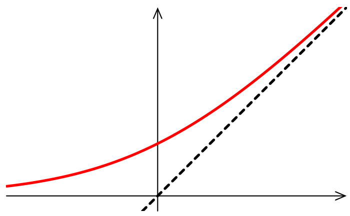
Correction : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions qui le sont (elle est bien définie sur $\mathbb{R}$ car, pour tout x, $e^x + 1 > 0$). Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0$$

si bien que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. Cherchons à présent l'asymptote en $+\infty$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(e^x\left(e^{-x}+1\right)\right) \\ &= x + \ln(1+e^{-x}) \end{aligned}$$

si bien que $f(x) - x = \ln(1+e^{-x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$: la droite d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$.



Exercice 42 : ✪ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$.

Correction : Soit g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$. Alors g est dérivable et, pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 + x \\ &= \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{1+x} \\ &= \frac{x^2}{1+x} \end{aligned}$$

et donc f' est positive et f est croissante. Or, $f(0) = 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}_+$ ce qui permet de conclure. On pourrait également (cf. second semestre) utiliser la formule de Taylor reste intégral.

Exercice 43 : ✪ Montrer que la fonction $1/\text{ch}$ a un unique point fixe.

Correction : La fonction ch ne s'annule pas donc $g : x \mapsto \dfrac{1}{\text{ch}(x)} - x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable comme somme et quotient de fonctions qui le sont (celle au dénominateur ne s'annulant pas). Soit $x \in \mathbb{R}$. $g(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} - x$ donc

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-2\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} - 1 \\ &= \frac{-2\left(e^x - e^{-x}\right) - \left(e^x + e^{-x}\right)^2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \\ &= \frac{-2e^x + 2e^{-x} - e^{2x} - e^{-2x} - 2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \\ &= \frac{-(e^{2x} + 2e^x + 1) - (e^{-2x} - 2e^{-x} + 1)}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{-(e^x + 1)^2 - (e^{-x} - 1)^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Dès lors, g est strictement décroissante, et puisque $\text{ch}(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty$, on en déduit que $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$. g étant continue, d'après le théorème de la bijection, g s'annule une unique fois ce qui permet de conclure.

Exercice 44 : ✪ Pour tout réel m, on note Γ_m le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{x+m}{x^2+1}$. Lorsque m parcourt $\mathbb{R}$:

1. Montrer que les tangentes à Γ_m au point d'abscisse 0 sont toutes parallèles.
2. Montrer que les tangentes à Γ_m au point d'abscisse 1 sont toutes concourantes.

Correction :

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Notons f_m cette fonction. Alors f_m est dérivable en tant que quotient de fonctions qui le sont, celle au dénominateur ne s'annulant pas (ou car c'est une fraction rationnelle donc dérivable sur son domaine de définition). Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} {f_m}'(x) &= \frac{x^2 + 1 - 2x(x+m)}{\left(x^2+1\right)^2} \\ &= \frac{-x^2 - 2mx + 1}{\left(x^2+1\right)^2} \end{aligned}$$

   si bien que ${f_m}'(0) = 1$: les tangentes au point d'abscisse 0 ont toutes le même coefficient directeur donc sont parallèles.

2. D'après la question précédente, ${f_m}'(1) = -m/2$ et puisque $f_m(1) = \dfrac{m+1}{2}$, la tangente au point d'abscisse 1 est la droite d'équation

$$y = -\frac{m}{2} \times x + \frac{m+1}{2}$$

Si on prend deux réels distincts m_1 et m_2, ces deux droites ont des coefficients directeurs distincts donc sont sécantes. Cherchons le point d'intersection. Si (x, y) sont les coordonnées de ce point, on a :

$$y = -\frac{m_1}{2} \times x + \frac{m_1+1}{2} = -\frac{m_2}{2} \times x + \frac{m_2+1}{2}$$

En particulier,

$$-\frac{m_1}{2} \times x + \frac{m_1+1}{2} = -\frac{m_2}{2} \times x + \frac{m_2+1}{2}$$

et donc $x = 1$ puisque $m_2 - m_1 \neq 0$, ce qui donne $y = 1/2$. Finalement, toutes ces droites passent par le point $(1, 1/2)$ donc sont concourantes.

Exercice 45 : ✪ Etudier les fonctions suivantes (domaines de définition, tableaux de variations et limites). On s'intéressera aux éventuels prolongements par continuité, et on se demandera si les fonctions ainsi prolongées sont dérivables.

1. $f : x \mapsto e^{-e^{-x}}$.
2. $f : x \mapsto x^{1/x-1}$
3. $f : x \mapsto e^{(x-1)/x^2}$
4. $f : x \mapsto x^x$
5. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$
6. $f : x \mapsto \left(x^2-1\right) \times \ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$.
7. $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$.
8. $f : x \mapsto e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$.
9. ✪✪✪ $f : x \mapsto (x-a)^{ax}$ où $a \in \mathbb{R}^*$

Correction :

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions qui le sont. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $g(x) = -e^{-x}$. g est aussi dérivable et $g'(x) = e^{-x}$. Or, $f(x) = e^{g(x)}$ si bien que $f'(x) = g'(x)e^{g(x)} > 0$: f est strictement croissante (on pouvait aussi dire que l'exponentielle est strictement croissante donc préserve les variations donc f et g ont les mêmes variations donc f est strictement croissante). De plus, $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ si bien que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. Le tableau de variations est laissé à votre charge.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Sous réserve d'existence, $f(x) = e^{\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(x)}$. On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. f est dérivable sur D_f car produit et composée de fonctions qui le sont. Soit $x > 0$. Posons $g(x) = \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\ln(x)$. g est aussi dérivable et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-\ln(x)}{x^2} + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{-\ln(x) + 1 - x}{x^2} \end{aligned}$$

Le signe de g' ne saute pas aux yeux : posons $h(x) = -\ln(x) + 1 - x$ si bien que $g'(x) = h(x)/x^2$ et donc g' et h sont de même signe. h est dérivable et

$$h'(x) = -\frac{1}{x} - 1 < 0$$

Ainsi, h est strictement décroissante. Or, $h(1) = 0$. On en déduit que h est nulle en 1, strictement positive sur $]\,0\,;1\,[$ et strictement négative sur $]\,1\,;+\infty\,[$ donc g' également. On en déduit que g est strictement croissante sur $]\,0\,;1\,]$ et strictement décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$ (flemme de faire des tableaux de variations) donc f également car f et g ont les mêmes variations puisque l'exponentielle est strictement croissante. Enfin, $f(1) = e^0 = 1$, $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et idem en 0. On en déduit que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Voyons si f ainsi prolongée est dérivable en 0.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = e^{\left(\frac{1}{x}-2\right)\ln(x)} \xrightarrow[x\to0]{} 0$$

f ainsi prolongée est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car quotient et composée de fonctions qui le sont. Soit $x \neq 0$. Soit $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$. Alors

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} \\ &= \frac{2x - x^2}{x^4} \\ &= \frac{2-x}{x^3} \end{aligned}$$

Ci-dessous le tableau de signes de g' :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$2-x$				$+$	0	$-$	
x^3		$-$	0	$+$			
$g'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On en déduit (flemme de faire le tableau de variations) que g est décroissante, croissante puis décroissante et f a les mêmes variations que g puisque $f = \exp \circ g$ et que exp est strictement croissante. Un calcul immédiat de limites (ou de valeurs pour $f(2)$) donne : $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$, $f(2) = e^{1/4}$ et $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ et $f(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$. On a donc : $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$: on peut prolonger f par continuité en posant $f(0) = 0$. Étudions la dérivabilité en 0.

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= e^{\frac{x-1}{x^2}} x \\ &= e^{\frac{x-1}{x^2} - \ln(x)} \\ &= e^{\frac{x-1-x^2\ln(x)}{x^2}} \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées, $x^2 \ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$: on trouve alors facilement que le taux d'accroissement tend vers 0. f ainsi prolongée est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

4. On a déjà vu (cf. exercice 39) que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = (\ln(x) + 1)e^{x \ln(x)}$$

Il en découle que $f'(x) < 0$ si $x \in \left]0\,;e^{-1}\right[$, $f'(e^{-1}) = 0$ et que $f'(x) > 0$ si $x > e^{-1}$. On en déduit que f est strictement décroissante puis strictement croissante (vous, faites un tableau de variations) avec $f(e^{-1}) = e^{-e^{-1}}$, $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $x \ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ par croissances comparées donc $f(x) = e^{x\ln(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$. On prolonge donc f par continuité en posant $f(0) = 1$. Étudions la dérivabilité de f en 0. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x} \\ &= \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x\ln(x)} \times \ln(x) \end{aligned}$$

Or, $u = x\ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ (croissances comparées) et $\dfrac{e^u - 1}{u} \xrightarrow[u \to 0]{} 0$ donc, par composition de limites :

$$\frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x \ln(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

Il en découle que le taux d'accroissement tend vers $-\infty$: f ainsi prolongée n'est pas dérivable en 0 mais son graphe admet une tangente verticale.

5. f est définie et dérivable sur $]\,0\,;1\,[\cup]\,1\,;\infty\,[$ car quotient de fonctions dérivables, celle au dénominateur ne s'annulant pas. Soit $x \in D_f$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\ln(x)} + x \times \frac{-1}{x(\ln(x))^2} \\ &= \frac{\ln(x)-1}{(\ln(x))^2} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ 0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Dès lors, f est prolongeable par continuité en 0 (mais pas en 1) en posant $f(0)=0$ et, si $x \in\,]\,0\,;1\,[$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

f ainsi prolongée est dérivable en 0 avec $f'(0)=0$ (tangente horizontale).

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. f est définie en x si et seulement si $x \neq 1$ et $(x+1)/(1-x) > 0$: un tableau de signes rapide nous dit que $(x+1)(1-x) > 0$ sur $]-1\,;1\,[$, et donc $D_f = \,]-1\,;1\,[$. Soit $x \in\,]-1\,;1\,[$. Tout d'abord (pour simplifier les calculs),

$$f(x) = (x^2-1) \times (\ln(x+1) - \ln(1-x))$$

si bien que (f est $\mathscr{C}^\infty$ car produit, composée et quotient de fonctions qui le sont) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \times (\ln(x+1) - \ln(1-x)) + \left(x^2-1\right) \times \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x}\right) \\ &= 2x \times (\ln(x+1) - \ln(1-x)) + \left(x^2-1\right) \times \frac{1-x+x+1}{1-x^2} \\ &= 2x \times (\ln(x+1) - \ln(1-x)) - 2 \end{aligned}$$

Dérivons encore une fois :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \times (\ln(x+1) - \ln(1-x)) + 2x \times \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x}\right) \\ &= 2 \times (\ln(x+1) - \ln(1-x)) + \frac{2x}{1-x^2} \end{aligned}$$

et une troisième fois :

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= 2 \times \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x}\right) + \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{4}{1-x^2} + \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

et donc f'' est strictement croissante. Or, $f''(0)=0$ si bien que f'' est strictement négative sur $]-1\,;0\,[$ et strictement positive sur $]\,0\,;1\,[$, et donc f' est strictement décroissante sur $]-1\,;0\,]$ et strictement croissante sur $[\,0\,;1\,[$. Puisque $f'(0) = -2 < 0$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$, f' étant continue et strictement croissante sur $]\,0\,;1\,[$, f' s'annule une unique fois en un réel noté α sur cet intervalle. De même, f' s'annule une unique fois en un réel noté β sur $]-1\,;0\,]$. En en déduit que f' s'annule en β et en α, que f' est strictement positive sur $]-1\,;\beta\,[$ et sur $]\,\alpha\,;1\,[$ et strictement négative sur $]\,\beta\,;\alpha\,[$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1		β		α		1
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$
$f(x)$	$\Vert\, 0$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$0\, \Vert$

Les limites en ± 1 sont obtenues par croissances comparées : on peut donc prolonger par continuité en ± 1 en posant $f(\pm 1) = 0$. Si $x \in \left] -1\,;1 \right[$,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = (x+1) \ln \left(\frac{x+1}{1-x} \right) \xrightarrow[x \to 1]{} -\infty$$

f ainsi prolongée n'est pas dérivable en 1 et idem en -1 (mais le graphe admet une tangente verticale). Remarque : on peut montrer que f est impaire ce qui réduit de moitié le travail mais cela ne saute pas aux yeux...

7. f est définie sur $\left] -\infty\,; -1 \right] \cup \left[1\,;+\infty \right[$ et dérivable au moins sur $\left] -\infty\,; -1 \right[\cup \left] 1\,;+\infty \right[$car somme et composée de fonctions qui le sont. Soit $x \in \left] -\infty\,; -1 \right[\cup \left] 1\,;+\infty \right[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

Si $x > 1$, $f'(x) > 0$. Si $x < -1$, la racine carrée étant strictement croissante,

$$\sqrt{x^2-1} + x < \sqrt{x^2} + x = -x + x = 0$$

donc $f'(x) < 0$. Il en découle que f est strictement décroissante sur $\left] -\infty\,; -1 \right]$ (oui, fermé en -1 puisque f est continue en -1) et croissante sur $\left[1\,;+\infty \right[$. Étudions la dérivabilité en ± 1. Soit $x > 1$.

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \frac{x + \sqrt{x^2-1} - 1}{x-1} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{x-1} \\ &= 1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \\ &\xrightarrow[x \to 1]{} +\infty \end{aligned}$$

f n'est pas dérivable en 1 (mais admet une tangente verticale) et idem en -1. Ci-dessous le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$		$\Vert$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1		1	$\nearrow$	$+\infty$

Attention, pas de valeur interdite pour f ! Justifions la limite en $-\infty$. Soit $x < -1$. Avec la méthode de l'expression conjuguée :

$$f(x) = \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{x^2 + x^2 - 1}$$

De plus, $\sqrt{x^2} = -x$ puisque $x < 0$, si bien que :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x-\sqrt{x^2}\times\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{2x^2-1}\\
&= \frac{x\left(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right)}{x^2\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)}\\
&= \frac{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)}
\end{aligned}
$$

ce qui permet de conclure.

8. f est définie sur $]-\infty\,;-2\,]\cup\,]\,0\,;+\infty\,[$ (ouvert en 0 à cause du $1/x$) et dérivable au moins sur $]-\infty\,;-2\,[\,\cup\,]\,0\,;+\infty\,[$. Soit $x\in\,]-\infty\,;-2\,]\cup\,]\,0\,;+\infty\,[$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{1/x}\times\left(-\frac{1}{x^2}\times\sqrt{x(x+2)}+\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}\right)\\
&= e^{1/x}\times\left(-\frac{1}{x^2}\times\sqrt{x(x+2)}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\right)\\
&= e^{1/x}\times\frac{-x(x+2)+(x+1)x^2}{\sqrt{x(x+2)}}\\
&= e^{1/x}\times\frac{x^3-2x}{\sqrt{x(x+2)}}\\
&= e^{1/x}\times\frac{x(x^2-2)}{\sqrt{x(x+2)}}
\end{aligned}
$$

x	$-\infty$		-2		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$		$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0		$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites en $\pm\infty$ ne posent aucune difficulté, ainsi que la valeur en -2. Il y a une valeur interdite en -2 pour f' car on montre de même qu'à la question 7 que f' n'est pas dérivable en -2. Il ne reste que la limite en 0. Si $x>0$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{1/x}\times\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}\\
&= e^{1/x}\times x\sqrt{1+\frac{2}{x}}
\end{aligned}
$$

Or, $\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\xrightarrow[x\to0^+]{}+\infty$. De plus, $y=1/x\xrightarrow[x\to0^+]{}+\infty$ et

$$
e^{1/x}\times x=\frac{e^y}{y}\xrightarrow[y\to+\infty]{}+\infty
$$

par croissances comparées. Par composition de limites, $e^{1/x}\times x\xrightarrow[x\to0^+]{}+\infty$ ce qui permet de conclure.

Exercice 46 : ✪✪ Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(x-3)f(x+3)$.

1. Si $f(x)\neq0$, montrer que $f(x+9)\neq0$ et montrer que $f(x)=1/f(x+9)$.
2. Si $f(x)=0$, montrer que $f(x+9)=0$.

3. En déduire que f est périodique.

Correction :

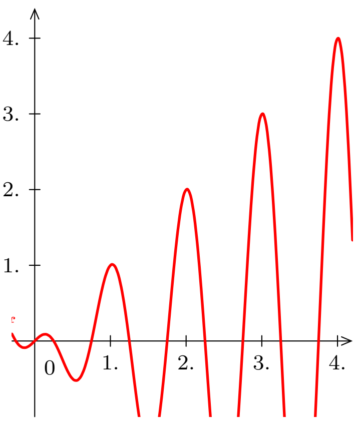
1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et supposons $f(x) \neq 0$. Puisque $f(x) = f(x-3)f(x+3)$, alors $f(x+3) \neq 0$. En appliquant ceci à $x+3$ à la place de x (penser à « truc »), on en déduit que $f(x+6) \neq 0$, et ensuite $f(x+9) \neq 0$. De plus, $f(x+6) = f(x+3)f(x+9)$ et comme tout est non nul, on en déduit que
$$f(x+3) = \frac{f(x+6)}{f(x+9)}$$
Or, $f(x+3) = f(x)f(x+6)$ ce qui permet de conclure en simplifiant par $f(x+6)$ (non nul).
2. De même que précédemment, on montrer que si $f(x+9) \neq 0$ alors, successivement, $f(x+6) \neq 0$, $f(x+3) \neq 0$ et $f(x) \neq 0$. D'où le résultat par contraposée.
3. Supposons que $f(x) \neq 0$. Alors $f(x+9) \neq 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{f(x+9)}$. De même, en appliquant ce résultat à $x+9$ à la place de x, il vient : $f(x+18) \neq 0$ et $f(x+9) = \dfrac{1}{f(x+18)}$ si bien que $f(x) = f(x+18)$. Si $f(x) = 0$ alors $f(x+9) = 0$ et on a encore $f(x+18) = 0$. Dans tous les cas, $f(x) = f(x+18)$: f est 18-périodique.

Exercice 47 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

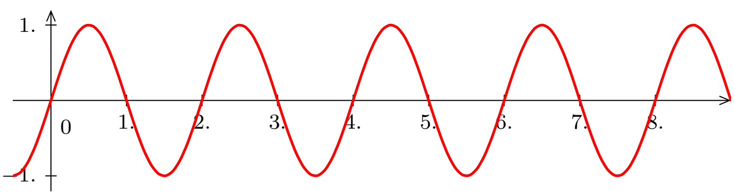
1. On suppose que f est croissante et que $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
2. On suppose que f est décroissante et que $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
3. Donner un contre-exemple pour chacune des questions précédentes si on enlève l'hypothèse de monotonie.

Correction :

1. Soit $x \geq 0$. Puisque $\lfloor x \rfloor > x-1$, d'après le théorème de minoration, $\lfloor x \rfloor \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, $n = \lfloor x \rfloor \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par composition de limites, $f(\lfloor x \rfloor) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Enfin, f est croissante donc $f(x) \geq f(\lfloor x \rfloor)$ et on conclut à l'aide du théorème de minoration.
2. Idem en encadrant $f(x)$ par $f(\lfloor x \rfloor)$ et $f(\lfloor x \rfloor + 1)$ et en appliquant le théorème d'encadrement.
3. Posons $f : x \mapsto \cos(2\pi x) \times x$. Alors $f(n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ mais f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet, $f\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = -n - \dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. Cela se voit également sur le dessin ci-dessous :



Pour le deuxième, il suffit de prendre $f : x \mapsto \sin(\pi x)$. Pour tout n, $f(n) = 0$ donc $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais f n'a pas de limite en 0, il suffit d'évaluer f en $2n + \dfrac{1}{2}$ en lesquels f vaut 1. Nous reverrons dans le chapitre sur les suites et sur la continuité comment prouver qu'une fonction n'a pas de limite.



Exercice 48 : ✪✪ Soit $a > 0$. Donner le nombre de points fixes de $x \mapsto a^x$ selon la valeur de a.

Correction : Notons cette fonction f et posons $g : x \mapsto f(x) - x$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $g(x) = e^{x\ln(a)} - x$ donc g est dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$) et $g'(x) = \ln(a)e^{x\ln(a)} - 1$. Si $a = 1$ alors f est constante égale à 1 donc 1 est son seul point fixe. Si $a \in \,]\,0\,;1\,[$, alors $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante. Or (toujours en utilisant le fait que $\ln(a) < 0$), $g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ (ce ne sont même pas des formes indéterminées). g étant continue et strictement décroissante, d'après le corollaire du TVI, g s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$ donc f admet un unique point fixe. On suppose dans la suite que $a > 1$ donc que $\ln(a) > 0$.

$g(x) = \ln(a)e^{x\ln(a)} - 1$ donc g est strictement croissante. Cherchons où elle s'annule.

$$\begin{aligned}
g'(x) = 0 \quad &\iff \quad \ln(a)e^{x\ln(a)} = 1 \\
&\iff \quad e^{x\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} \\
&\iff \quad x\ln(a) = -\ln(\ln(a)) \\
&\iff \quad x = \frac{-\ln(\ln(a)}{\ln(a)}
\end{aligned}$$

Posons donc $\alpha = -\ln(\ln(a))/\ln(a)$. Ci-dessous le tableau de variations de g (la limite en $-\infty$ est triviale, celle en $+\infty$ est obtenue par croissances comparées).

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Or :

$$\begin{aligned}
g(\alpha) &= e^{\alpha\times\ln(a)} - \alpha \\
&= e^{-\ln(\ln(a))} + \frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)} \\
&= \frac{1}{\ln(a)} + \frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)} \\
&= \frac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)}
\end{aligned}$$

Enfin (on utilise le fait que l'exponentielle est strictement croissante) :

$$\begin{aligned}
g(\alpha) > 0 \quad &\iff \quad 1 + \ln(\ln(a)) > 0 \\
&\iff \quad \ln(\ln(a)) > -1 \\
&\iff \quad \ln(a) > e^{-1} \\
&\iff \quad a > e^{e^{-1}}
\end{aligned}$$

Il y a donc trois cas :

1. Si $a > e^{e^{-1}}$, $g(\alpha) > 0$ donc g est à valeurs strictement positives : g ne s'annule pas, f n'a pas de point fixe (pas de TVI ici !).
2. Si $a = e^{e^{-1}}$, g s'annule une seule fois (en α) donc f admet un unique point fixe.
3. Si $a \in \left]\,1\,;e^{e^{-1}}\,\right[$, $g(\alpha) < 0$. Or, g est continue et strictement monotone sur $]-\infty\,;\alpha\,]$ et sur $[\,\alpha\,;+\infty\,[$ donc, d'après le théorème de la bijection, g s'annule une unique fois sur chacun de ces intervalles. Finalement, g s'annule deux fois, f a deux points fixes.

Exercice 49 : ✪✪✪

1. Donner le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \ln(x)/x$.
2. Qui est le plus grand entre e^π et π^e ?
3. En utilisant la première question, déterminer les couples (a,b) d'entiers non nuls tels que $a < b$ et $a^b = b^a$.
4. Montrer que l'ensemble $\{\sqrt[n]{n} \,|\, n \geq 1\}$ admet un maximum que l'on explicitera.

Correction :

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car est un quotient de fonctions dérivables, celle au dénominateur ne s'annulant pas. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a
$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$
Par conséquent, $f'(x) > 0 \iff \ln(x) < 1 \iff x < e$ (car l'exponentielle est strictement croissante). De même, $f(x) = 0 \iff x = e$ et $f(x) < 0 \iff x > e$, d'où le tableau de variations suivant (la limite en $+\infty$ est obtenue par croissances comparées) :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

2. Le moins que l'on puisse dire est qu'on n'a aucune idée du résultat. Raisonnons par équivalences : si le résultat final est faux, alors le premier est faux, et si le résultat final est juste, alors le premier est juste. Essayons de faire apparaître la fonction f (cela justifie la troisième ligne qui, sans cette motivation, pourrait paraître parachutée).
$$\begin{aligned} e^\pi > \pi^e &\iff e^{\pi\ln(e)} > e^{e\ln(\pi)} && \text{(car } \ln(e)=1) \\ &\iff \pi\ln(e) > e\ln(\pi) && \text{(car ln strictement croissante)} \\ &\iff \frac{\ln(e)}{e} > \frac{\ln(\pi)}{\pi} && \text{(car } e \text{ et } \pi \text{ sont strictement positifs)} \\ &\iff f(e) > f(\pi) \end{aligned}$$
Or, la dernière affirmation est vraie d'après la question 1 donc la première l'est aussi car on a travaillé par équivalences : $e^\pi > \pi^e$. Si on avait débuté par $e^\pi < \pi^e$, on aurait fini par $f(e) < f(\pi)$ qui est une affirmation fausse, donc l'affirmation $e^\pi < \pi^e$ est fausse : ainsi, $e^\pi \geq \pi^e$ et on exclurait de même le cas $e^\pi = \pi^e$. Peu importe la supposition initiale, on arrive au bon résultat !
3. Soient a et b deux entiers naturels non nuls distincts.
$$\begin{aligned} a^b = b^a &\iff e^{b\ln(a)} = e^{a\ln(b)} \\ &\iff b\ln(a) = a\ln(b) \\ &\iff f(a) = f(b) \end{aligned}$$
Ainsi, a et b conviennent si et seulement s'ils ont la même image par f. Or, f est strictement croissante donc injective (i.e. ne prend pas deux fois les mêmes valeurs) sur $]\,0\,;e\,]$. En particulier, si a et b sont inférieurs ou égaux à 2 alors $f(a) \neq f(b)$. De même, f est strictement décroissante donc ne prend pas deux fois les mêmes valeurs sur $[\,e\,;+\infty\,[$. En particulier, si a et b sont supérieurs ou égaux à 3 alors $f(a) \neq f(b)$. Par conséquent, une condition NÉCESSAIRE pour que $a^b = b^a$ est que l'un appartienne à $]\,0\,;e\,]$ et l'autre à $[\,e\,;+\infty\,[$, c'est-à-dire que l'un soit inférieur ou égal à 2 et l'autre supérieur ou égal à 3. L'avantage est qu'il n'y a pas beaucoup d'entiers inférieurs ou égaux à 2. Tout d'abord, a ne peut pas être égal à 1 puisque $f(1) = 0$ et d'après le tableau de variations de f, 1 est le seul réel $x > 0$ tel que $f(x) > 0$ (pas besin du TVI !!!!!!!! pourquoi ?). De plus, $f(2) = \dfrac{\ln(2)}{2}$. Regardons de l'autre côté :
$$f(3) = \frac{\ln(3)}{3} \qquad \text{et} \qquad f(4) = \frac{\ln(4)}{4} = \frac{2\ln(2)}{4} = \frac{\ln(2)}{2}$$
En d'autres termes, $f(4) = f(2)$ si bien que $a = 2$ et $b = 4$ conviennent. De plus, f étant strictement décroissante sur $[\,e\,;+\infty\,[$, f ne prend pas deux fois la même valeur sur cet intervalle donc $f(b) \neq f(2)$ si $b \geq 3$, $b \neq 4$. Ainsi, il n'y a pas d'autre solution : $a = 2$ et $b = 4$ sont les seules solutions. Vérifions le (mais ce n'est pas nécessaire, on n'a pas travaillé par analyse synthèse) : $2^4 = 4^2 = 16$.

4. Si $n \geq 1$, notons $u_n = \sqrt[n]{n}$. Alors

$$\begin{aligned} u_n &= n^{1/n} \\ &= e^{\frac{1}{n} \times \ln(n)} \\ &= e^{f(n)} \end{aligned}$$

où f est encore la fonction de la question 1. L'exponentielle étant strictement croissante, elle préserve les variations : si n et p sont deux entiers, $u_n < u_p \iff f(n) < f(p)$ et idem dans l'autre sens. Par conséquent, l'ensemble $\{\sqrt[n]{n} \,|\, n \geq 1\}$ admet un maximum si et seulement si l'ensemble $\{f(n) \,|\, n \geq 1\}$ admet un maximum, et il est alors atteint en la même valeur de n. D'après le tableau de variations de f, ce maximum est atteint en 2 ou en 3. En effet, pour tout $n \geq 1$, $f(n) \leq \max(f(2), f(3)$ puisque, si $n \leq 2$, $f(n) \leq f(2)$ et si $n \geq 3$, $f(n) \leq f(3)$. Or, $f(2) = f(4) < f(3)$ donc ce maximum est $f(3)$. En conclusion, $\{\sqrt[n]{n} \,|\, n \geq 1\}$ admet un maximum égal à $\sqrt[3]{3}$.

Exercice 50 : ✪✪✪ Donner le nombre de solutions de l'équation $\sin(x) = \ln(x)$.

Correction : Tout d'abord, cette équation n'a de sens que sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisqu'un sinus est compris entre -1 et 1, il n'y a aucune solution sur $\left]0\,;e^{-1}\right[$ puisque $\ln(x) < -1$ sur cet intervalle, et il n'y en a pas non plus sur $]e\,;+\infty[$ puisque $\ln(x) > 1$ sur cet intervalle.

On se place donc sur $\left[e^{-1}\,;e\right]$. Soit $f : x \mapsto \ln(x) - \sin(x)$ définie sur cet intervalle. f est $\mathscr{C}^\infty$. Soit $x \in \left[e^{-1}\,;e\right]$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \cos(x)$$

Sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;e\right]$, $\cos(x) \leq 0$ donc $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante. Or, $f(\pi/2) = \ln(\pi/2) - 1 < 0$ puisque $\pi/2 < e$ donc $\ln(\pi/2) < 1$. De plus, $f(e) = \ln(e) - \sin(e) = 1 - \sin(e) > 0$. f est strictement croissante et continue donc s'annule exactement une fois sur cet intervalle. De plus, f ne s'annule pas sur $\left[e^{-1}\,;1\right]$ car $\ln(x) \leq 0$ et $\sin(x) > 0$.

Plaçons-nous enfin sur $[1\,;\pi/2]$. Sur cet intervalle, le ln et le sinus sont croissants donc $f(x) \leq \ln(\pi/2) - \sin(1)$. Or, $\ln(\pi/2) \leq \ln(2) < 0.7$ et $\sin(1) \geq \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 > 0.7$ si bien que $f(x) < 0$: f est strictement négative donc ne s'annule pas sur cet intervalle.

En conclusion, f s'annule une seule fois (sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;e\right]$) donc cette équation a une seule solution.

Exercice 51 - Tiré de projecteuler.net : ✪✪✪ 4150 possède une propriété remarquable : il est égal à la somme des puissances cinquièmes de ses chiffres, c'est-à-dire que

$$4150 = 4^5 + 1^5 + 5^5 + 0^5$$

En utilisant le fait que $9^5 = 59049$ et $\ln(10) \approx 2.3$, montrer qu'un nombre vérifiant cette propriété est inférieur ou égal à 10^6.

Remarque : Avec un algorithme (puisqu'il est hors de question d'effectuer à la main un million de calculs), on peut montrer finalement que les seuls nombres vérifiant cette propriété sont 4150, 4151, 54748, 92727, 93084 et 194979 (on ne compte pas 1 car $1 = 1^5$ n'est pas vraiment une somme).

Remake : Donner la valeur maximale que peut prendre un entier égal à la somme des factorielles de ses chiffres. On peut montrer (idem, un algorithme fait ça très bien) que les seuls nombres vérifiant cette propriété sont 145 et 40585.

Correction : Soit n un entier vérifiant cette condition et soit k son nombre de chiffres, c'est-à-dire que $10^{k-1} \leq n < 10^k$ (un nombre a trois chiffres lorsqu'il est compris entre 10^2 au sens large et 10^3 au sens strict). Les chiffres de n étant inférieurs ou égaux à 9, $n \leq 9^5 \times k$. En particulier, $10^{k-1} \leq 9^5 \times k$. L'idée est que ce n'est possible que pour de petites valeurs de k par croissances comparées. Montrons cela précisément.

Soit φ définie sur $[1\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = 10^{x-1} - 9^5 \times x$ et cherchons quand φ est négative. φ est définie par $\varphi(x) = e^{(x-1)\ln(10)} - 9^5 \times x$ donc φ est dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$) et, pour tout $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \ln(10)e^{(x-1)\ln(10)} - 9^5 \\ &= \ln(10) \times 10^{x-1} - 9^5 \end{aligned}$$

Puisque $\ln(10) > 0$, φ' est croissante. En particulier, s'il existe x_0 tel que $\varphi'(x_0) > 0$, alors φ' est positive à partir de x_0. D'après les données de l'énoncé, $\varphi'(6) = \ln(10) \times 10^5 - 9^5 \approx 2.3 \times 10^5 - 59049 > 0$. Il en découle que φ est croissante sur

$[\,6\,;+\infty\,[$. Or, $\varphi(6) = 10^5 - 9^5 \times 6 < 0$ mais $\varphi(7) = 10^6 - 9^5 \times 7 > 0$: φ est positive sur $[\,7\,;+\infty\,[$ (car φ est croissante). Finalement, $\varphi(k) \leq 0$ donc $k \leq 6$: n a au plus 6 chiffres donc $n < 10^6$. On a même prouvé un résultat plus fort que celui demandé.

Chapitre 3

Ensembles et applications

Sauf indication contraire, E, F, G et H désignent des ensembles non vides.

3.1 Ensembles.

Exercice 1 : ✪ Vrai ou faux ?

1. $0 \in \mathbb{R}$.
2. $\{0\} \in \mathbb{R}$.
3. $0 \subset \mathbb{R}$.
4. $\{0\} \subset \mathbb{R}$.
5. $0 \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
6. $\{0\} \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
7. $0 \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
8. $\{0\} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Correction :

1. Vrai.
2. Faux : $\{0\}$ est un ensemble, pas un réel.
3. Faux : 0 est un réel, pas un ensemble, et on ne parle d'inclusion que pour des ensembles.
4. Vrai : $0 \in \mathbb{R}$ donc $\{0\} \subset \mathbb{R}$.
5. Faux : 0 n'est pas une partie de $\mathbb{R}$ donc n'appartient pas à l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$.
6. Vrai : $\{0\} \subset \mathbb{R}$ i.e. $\{0\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ donc appartient à l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$.
7. Faux : 0 n'est pas un ensemble donc n'est inclus dans rien.
8. Faux : $0 \notin \mathscr{P}(\mathbb{R})$ donc $\{0\}$ n'est pas inclus dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : ✪ Vrai ou Faux ?

1. $\{2\} \in \{3; 2; \{\{4\}\}; \varnothing\}$.
2. $\{2\} \subset \{3; 2; \{\{4\}\}; \varnothing\}$.
3. $\{1\} = \{\{1\}\}$.
4. $\{1\} \subset \{\{1\}\}$.
5. $3 \in \varnothing$.
6. $\varnothing \in \{\varnothing\}$.
7. $\varnothing \subset \mathscr{P}(\{1\})$.
8. $\varnothing \in \{1\}$.

Correction :

1. Faux : les éléments appartenant à cet ensemble sont les éléments entre accolades, et $\{2\}$ ne s'y trouve pas.
2. Vrai : 2 **appartient** à cet ensemble donc $\{2\}$ est **inclus** dans cet ensemble.
3. Faux : 1 appartient à l'ensemble de gauche (c'est le singleton 1 i.e. l'ensemble à un élément donc le seul élément est 1) mais pas à l'ensemble de droite car celui-ci a un seul élément : $\{1\}$, et non pas 1.
4. Faux : $1 \notin \{\{1\}\}$ donc $\{1\}$ n'est pas inclus dans $\{\{1\}\}$.
5. Faux : l'ensemble vide n'a aucun élément.
6. Vrai : $\{\varnothing\}$ est l'ensemble à un élément donc le seul élément est $\varnothing$.
7. Vrai : l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble.
8. Faux : le seul élément de $\{1\}$ est 1.

Exercice 3 - B.A.-BA : ✪

1. Montrer que si $A \subset E$ alors $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(E)$.
2. Montrer que si $A \subset E$ et $B \subset F$ alors $A \times B \subset E \times F$.

Correction :

1. Soit $X \in \mathscr{P}(A)$. Alors $X \subset A$. Or, $A \subset E$ donc $X \subset E$ si bien que $X \in \mathscr{P}(E)$, d'où le résultat.
2. Soit $(a,b) \in A \times B$. Alors $a \in A$ et $b \in B$. Or, $A \subset E$ et $B \subset F$ si bien que $a \in E$ et $b \in F$ et donc $(a,b) \in E \times F$.

Exercice 4 : ✪ Deux ensembles disjoints sont-ils nécessairement distincts ?

Correction : Non car si les deux ensembles sont vides, ils sont égaux alors qu'ils sont disjoints. Cependant, si l'un des deux est vide, alors le résultat est vrai.

Exercice 5 : ✪ Calculer l'ensemble $(\{1;2;3\} \times \{1;2\}) \setminus (\{1;2\} \times \{1;2;3\})$.

Correction : Le premier produit est égal à $\{(1,1);(1,2);(2,1);(2,2);(3,1);(3,2)\}$ et le second est égal à $\{(1,1);(1,2);(1,3);(2,1)$ si bien que l'ensemble cherché est $\{(3,1);(3,3)\}$.

Exercice 6 : ✪ Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrer que : $(A = B) \iff (A \cap B = A \cup B)$.

Correction : Supposons que $A = B$. Alors $A \cap B = A \cup A = A = B$. Réciproquement, supposons que $A \neq B$. Soit il existe $x \in A \backslash B$ soit il existe $x \in B \backslash A$. Dans les deux cas, $x \in A \cup B$ mais $x \notin A \cap B$ donc $A \cup B \neq A \cap B$. D'où la réciproque (par contraposée).

Exercice 7 : ✪ Expliciter l'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)))$.

Correction : $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))) = \{\varnothing;\{\varnothing\}\}$ et $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing))) = \{\varnothing;\{\varnothing\};\{\{\varnothing\}\};\{\varnothing;\{\varnothing\}\}\}$.

Exercice 8 : ✪ Soient A et B des parties d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes :

1. $(A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$
2. $A \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$
3. $A \backslash (A \backslash B)$.

Correction :

1. Notons D cet ensemble. Par distributivité de l'intersection sur l'union (ici, on « factorise ») :
$$D = \left[(A \cup \overline{A}) \cap B\right] \cup \left[(A \cup \overline{A}) \cap \overline{B}\right]$$
Or, $A \cup \overline{A} = E$ et $E \cap B = B$ et $E \cap \overline{B} = \overline{B}$ si bien que $D = B \cup \overline{B} = E$.
2. Toujours par distributivité de l'intersection sur l'union, si on note encore D cet ensemble :
$$D = A \cup \left(\overline{A} \cap (B \cup (\overline{B} \cap C))\right)$$
Cette fois-ci, en distribuant l'union sur l'intersection : $B \cup (\overline{B} \cap C) = (B \cup \overline{B}) \cap (B \cup C) = E \cap (B \cup C) = B \cup C$ si bien que
$$D = A \cup (\overline{A} \cap (B \cup C))$$
Toujours en distribuant, on trouve de même que $D = A \cup B \cup C$.
3. $$\begin{aligned} A \backslash (A \backslash B) &= A \cap \overline{(A \cap \overline{B})} \\ &= A \cap (\overline{A} \cup B) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

Exercice 9 : ✪ Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k$. Montrer que pour tout $n \geq 0, B_n \subset B_{n+1}$ et que $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \bigcup_{k=0}^{n+1} A_k \\ &= \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1} \\ &= B_n \cup A_{n+1} \end{aligned}$$

et donc $B_n \subset A_{n+1}$ (rappelons que $A \subset A \cup B$). Procédons ensuite par double inclusion. Notons U_A l'union de A_n et U_B l'union des B_n. Soit $x \in U_B$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B_{n_0}$. Par définition de B_{n_0}, il existe $k \in [\![0\,;\, n_0]\!]$ tel que $x \in A_k$ si bien que $x \in U_A$. En d'autres termes, $U_B \subset U_A$.

Réciproquement, soit $x \in U_A$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in A_{n_0}$. Or, $A_{n_0} \subset B_{n_0}$ donc $x \in B_{n_0}$ si bien que $x \in U_B$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

Exercice 10 : ✪ Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

$$(A \cup B \cup C) \cap \left(A \cup B \cup \overline{C}\right) \cap \left(A \cup \overline{B} \cup C\right) = A \cup (B \cap C)$$

Correction : Notons D la partie de gauche. Toujours par distributivité (de l'union sur l'intersection) :

$$\begin{aligned} D &= \left(A \cup \left((B \cup C) \cap (B \cup \overline{C})\right)\right) \cap (A \cup \overline{B} \cup C) \\ &= \left(A \cup \left(B \cup (C \cap \overline{C})\right)\right) \cap (A \cup \overline{B} \cup C) \\ &= (A \cup (B \cup \varnothing)) \cap (A \cup \overline{B} \cup C) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B} \cup C) \\ &= A \cup (B \cap (\overline{B} \cup C)) \\ &= A \cup ((B \cap \overline{B}) \cup (B \cap C)) \\ &= A \cup (\varnothing \cup (B \cap C)) \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 11 : ✪✪ Comparer (on commencera par faire un dessin) :

1. $(E \times G) \cap (F \times G)$ et $(E \cap F) \times G$.
2. $(E \times G) \cup (F \times G)$ et $(E \cup F) \times G$.

Correction :

1. Un dessin (laissé à votre charge) laisse supposer que $(E \times G) \cap (F \times G) = (E \cap F) \times G$ (sur le dessin, ce sont tous les deux les intersections des deux rectangles $E \times G$ et $F \times G$). Prouvons ce résultat par double inclusion. Soit $(a, b) \in (E \times G) \cap (F \times G)$. Alors $(a, b) \in E \times G$ donc $a \in E$ et $b \in G$, et $(a, b) \in F \times G$ donc $a \in F$ si bien que $a \in E \cap F$ et donc $(a, b) \in (E \cap F) \times G$. En d'autres termes, $(E \times G) \cap (F \times G) \subset (E \cap F) \times G$. Réciproquement, soit $(a, b) \in (E \cap F) \times G$. Alors $a \in E \cap F$ et $b \in G$. Par conséquent, $a \in E$ donc $(a, b) \in E \times G$ et idem $(a, b) \in F \times G$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.
2. Ici, un dessin rapide laisse aussi supposer que ces deux ensembles sont égaux. Soit $(a, b) \in (E \times G) \cup (F \times G)$. Soit $(a, b) \in E \times G$, soit $(a, b) \in F \times G$. Dans le premier cas, $a \in E$ et $b \in G$, et dans le deuxième cas, $a \in F$ et $b \in G$. Dans tous les cas, $a \in E \cup F$ et $b \in G$ si bien que $a \in (E \cup F) \times G$, d'où l'inclusion. Réciproquement, soit $(a, b) \in (E \cup F) \cap G$. Alors $a \in E \cup F$ et $b \in G$ et on montre comme précédemment que $(a, b) \in E \times G$ ou $F \times G$ ce qui permet de conclure.

Exercice 12 : ✪✪ Soit $E = \{0; 1; \{0\}; \{0; 1\}\}$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\{0\} \in E$.
2. $\{0\} \in \mathscr{P}(E)$.
3. $\{\{1\}\} \subset E$.
4. $\{0; 1\} \subset E$.
5. $\{\{0\}; 0\} \subset \mathscr{P}(E)$.
6. $\{\{0\}; \varnothing\} \in \mathscr{P}(E)$.
7. $\{\{1; \{0; 1\}\}; \{0\}; E\} \subset \mathscr{P}(E)$.
8. $\{\{\{0; 1\}\}\} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$.

Correction :

1. Vrai.

2. Vrai : $0 \in E$ donc $\{0\} \subset E$ donc $\{0\} \in \mathscr{P}(E)$.
3. Faux : $\{1\}$ n'appartient pas à E donc $\{\{1\}\} \not\subset E$ (un ensemble est inclus dans E lorsque tous ses éléments appartiennent à E).
4. Vrai car 0 et 1 appartiennent à E.
5. Faux : un ensemble est inclus dans $\mathscr{P}(E)$ lorsque tous ses éléments appartiennent à $\mathscr{P}(E)$. Or, 0 n'appartient pas à $\mathscr{P}(E)$ car ce n'est pas une partie de E puisque ce n'est même pas un ensemble !
6. Faux : un ensemble appartient à $\mathscr{P}(E)$ lorsqu'il est inclus dans E donc lorsque tous ses éléments appartiennent à E, ce qui n'est pas le cas de l'ensemble vide (il n'appartient pas à E).
7. Vrai : Encore une fois, un ensemble est inclus dans $\mathscr{P}(E)$ lorsque tous ses éléments appartiennent à $\mathscr{P}(E)$ donc sont inclus dans E. Or, on a successivement : $E \subset E$, $\{0\} \subset E$ car $0 \in E$ et $\{1; \{0;1\}\} \subset E$ car 1 et $\{0;1\}$ appartiennent à E.
8. Vrai : Un ensemble appartient à $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$ lorsqu'il est inclus dans $\mathscr{P}(E)$, donc lorsque ses éléments appartiennent à $\mathscr{P}(E)$. Or, $\{\{0;1\}\} \in \mathscr{P}(E)$ car cet ensemble est inclus dans E : en effet, son seul élément est $\{0;1\}$ qui appartient à E.

Exercice 13 : ✪✪ On rappelle que si A et B sont deux parties de E, on définit la différence symétrique de A et B par

$$A\Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

1. Soient A_1, A_2, B_1, B_2 des parties de E. A-t-on : $(A_1 \subset A_2)$ et $(B_1 \subset B_2) \Rightarrow (A_1 \Delta B_1) \subset (A_2 \Delta B_2)$?
2. Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrer que $A\Delta B = \varnothing \iff A = B$.
3. Soit $n \geq 2$. Si $A_1, \dots, A_n$ sont n parties de E, montrer que $A_1 \Delta \cdots \Delta A_n$ est l'ensemble des $x \in E$ qui appartiennent à un nombre impair de A_i.
4. Existe-t-il un élément neutre pour la différence symétrique, c'est-à-dire une partie B de E telle que, pour tout $A \in \mathscr{P}(E), A\Delta B = A$?
5. Montrer que la différence symétrique est régulière, c'est-à-dire que :

$$\forall (A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3, A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow B = C$$

   On pourra utiliser les questions 2 et 4 et on rappelle que la différence symétrique est associative.

Correction :

1. Non. Par exemple, si $A_2 = B_2$ alors $A_2 \Delta B_2 = \varnothing$ et il suffit donc de prendre $A_1 \neq B_1$ inclus dans A_2 et B_2 respectivement. Par exemple, si $A_2 = B_2 = \mathbb{R}$ mais $A_1 = R_+$ et $B_1 = R_-$ alors $A_1 \Delta B_1 = \mathbb{R}^*$ mais $A_2 \Delta B_2 = \varnothing$.
2. $A\Delta B = \varnothing A \cup B = A \cap B \iff A = B$ d'après l'exercice 6.
3. Raisonnons par récurrence sur n.
   (a) Si $n \geq 2$, notons H_n : « si $A_1, \dots, A_n$ sont n parties de E, $A_1 \Delta \cdots \Delta A_n$ est l'ensemble des $x \in E$ qui appartiennent à un nombre impair de A_i ».
   (b) Soient A_1 et A_2 deux parties de E. Alors $A_1 \Delta A_2$ est l'ensemble des x appartenant à exactement un des ensembles A_1 ou A_2 donc à un nombre impair d'entre eux : H_2 est vraie.
   (c) Soit $n \geq 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soient donc $A_1, \dots, A_{n+1}$ des parties de E. Soit $x \in E$. On pose $B = A_2 \Delta \cdots \Delta A_{n+1}$. Par définition de la différence symétrique :

$$x \in A_1 \Delta B \iff (x \in A_1 \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A_1 \text{ et } x \in B).$$

   Or, par hypothèse de récurrence, $x \in B$ si et seulement si x appartient à un nombre impair de A_i avec $i \in [\![2 \,; n+1]\!]$ donc

$$x \in A_1 \Delta B \iff \begin{cases} x \in A_1 \text{ et } x \text{ appartient à un nombre pair de } A_i \text{ parmi } A_2, \dots, A_{n+1} \\ \\ \text{ou} \\ \\ x \notin A_1 \text{ et } x \text{ appartient à un nombre impair de } A_i \text{ parmi } A_2, \dots, A_{n+1}. \end{cases}$$

   ce qui permet de conclure : H_{n+1} est vraie.
   (d) D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 2$.
4. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors $A\Delta\varnothing = A$ car $A \cup \varnothing = A$ et $A \cap \varnothing = \varnothing$: l'ensemble vide est un élément neutre.

5. Soient donc A, B, C trois parties de E. Supposons que $A\Delta B = A\Delta C$. Par conséquent :

$$A\Delta(A\Delta B) = A\Delta(A\Delta C)$$

Par associativité de la différence symétrique, $(A\Delta A)\Delta B = (A\Delta A)\Delta C$ si bien que $\varnothing\Delta B = \varnothing\Delta C$ ce qui permet de conclure à l'aide de la question précédente.

Exercice 14 : ✪✪ Expliciter les ensembles suivants :

1. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}\,;\frac{1}{n}\right[$.
2. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}\,;\frac{2n+1}{n}\right[$.
3. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\left[-n\,;-\frac{1}{n}\right[\cup \left]\frac{1}{n}\,;n\right]\right)$.
4. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}\,;2021-\frac{1}{n}\right]$.
5. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}\,;2021+\frac{1}{n}\right]$.
6. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}\,;2021-\frac{1}{n}\right]$.
7. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}\,;2021+\frac{1}{n}\right]$.
8. $\displaystyle\bigcup_{x\in[\,0\,;2\,]} [\,x\,;x+1\,]$.
9. $\displaystyle\bigcap_{x\in[\,0\,;2\,]} [\,x\,;x+1\,]$.
10. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{x\in\mathbb{R}\,|\,nx\in\mathbb{Z}\}$.

Correction : On devine les résultats en faisant un dessin comme en classe. Si on hésite entre intervalles ouverts ou fermés, on se demande si le réel en question appartient à l'ensemble ou non.

1. Notons I_1 cette intersection. Montrons que $I_1 = \{0\}$. D'une part, $0 \in \left]-\frac{1}{n}\,;\frac{1}{n}\right[$ pour tout n donc $0\in I_1$. Réciproquement, soit $x\in I_1$. Si $x>0$ alors il existe $n\geq 1$ tel que $1/n\leq x$ car $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ si bien que $x\notin \left]-\frac{1}{n}\,;\frac{1}{n}\right[$ et donc $x\notin I_1$ ce qui est absurde. De même, si $x<0$, $x\notin I_1$. Alors $x=0$. On vient de prouver que le seul élément éventuel de I_1 est 0. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.
2. Intuitivement, puisque $-1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{2n+1}{n} = 2+\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$, on se dit que l'intersection va être l'intervalle des réels compris entre 0 et 2. Ouvert ou fermé ? Fermé puisque 0 et 2 appartiennent à tous les intervalles donc à l'intersection qu'on note I_2. Prouvons donc que $I_2 = [\,0\,;2\,]$. D'une part, soit $x\in I_2$. Si $x<0$ alors il existe n tel que $x\leq -1/n$ puisque $-1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si bien que $x\notin \left]-\frac{1}{n}\,;\frac{2n+1}{n}\right[$ et donc $x\notin I_2$ ce qui est absurde. De même c'est absurde si $x>2$. On en déduit que $x\in[\,0\,;2\,]$ et donc $I_2\subset[\,0\,;2\,]$. Réciproquement, soit $x\in[\,0\,;2\,]$. Soit $n\geq 1$. Alors
$$-\frac{1}{n} < 0 \leq x \leq 2 < \frac{2n+1}{n}$$
et donc $x\in\left]-\frac{1}{n}\,;\frac{2n+1}{n}\right[$. n étant quelconque, $x\in I_2$. D'où l'inclusion réciproque. D'où l'égalité.
3. Notons cette union U_3 et prouvons que $U_3=\mathbb{R}^*$. L'inclusion $U_3\subset\mathbb{R}^*$ est immédiate : si $x\in U_3$ alors il existe $n\geq 1$ tel que
$$x\in\left[-n\,;-\frac{1}{n}\right[\cup\left]\frac{1}{n}\,;n\right]$$
et donc $x\neq 0$. Réciproquement, soit $x\in\mathbb{R}^*$. Si $x\geq 1$ alors il existe n_0 tel que $n_0\geq x$ car $n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ et puisque $x\geq 1$, on a forcément $1/n_0<x$ si bien que $x\in\left]-\frac{1}{n_0}\,;n_0\right]$ et donc $x\in U_3$. Si $x\in\,]\,0\,;1\,]$, il existe n_0 tel que $1/n_0<x$ et on a forcément $n_0\geq x$ car $x\leq 1$ et on conclut de la même façon. De même si $x<0$ en séparant les cas $x\leq -1$ et $x\in\,]-1\,;0\,[$. On pouvait aussi dire, si $x>0$, qu'il existe n_0 tel que $x\leq n_0$ et qu'il existe n_1 tel que $1/n_1<x$ mais attention, n_0 et n_1 n'ont aucune raison d'être égaux ! Il faut penser à poser $n_2=\max(n_0,n_1)$. Dès lors,
$$\frac{1}{n_2}\leq\frac{1}{n_1}<x\leq n_0\leq n_2$$
si bien que $x\in\left]\frac{1}{n_2}\,;n_2\right]$ et donc $x\in U_3$. De même si $x<0$. Ce genre de raisonnement sera classique dans le chapitre 12.
4. Notons U_4 cette union et prouvons que $U_4=\,]\,1\,;2021\,[$ (0 et 2021 ne seront pas atteints). D'une part, soit $x\in U_4$. Il existe donc $n\geq 1$ tel que $x\in\left[\frac{1}{n}\,;2021-\frac{1}{n}\right]$ et donc $0<x<2021$: $U_4\subset\,]\,0\,;2021\,[$. Réciproquement, soit $x\in\,]\,0\,;2021\,[$. Si $x<1$, on montre de même qu'il existe n_0 tel que $1/n_0\leq x\leq n_0$, et si $x\geq 1$, puisque

$2021 - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2021$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $x \leq 2021 - \dfrac{1}{n_0}$ et on a automatiquement $1/n_0 \leq x$ ce qui permet de conclure comme ci-dessus. On pouvait également introduire un n_2 comme ci-dessus.

5. Notons cette union U_5 et prouvons que $U_5 =]\,0\,;2022\,]$. L'inclusion U_5 est immédiate et se prouve comme ci-dessus. Réciproquement, soit $x \in]\,0\,;2022\,]$. Si $x \geq 1$ alors $x \in [\,1\,;2022\,]$ i.e. appertient à l'intervalle pour $n = 1$ donc appartient à U_5. Si $x \in]\,0\,;1\,[$, alors il existe n_0 tel que $1/n_0 \leq x$ et $x < 1$ donc $x \leq 2021 + 1/n_0$ donc $x \in \left[\dfrac{1}{n_0}\,;2021 + \dfrac{1}{n_0}\right]$ si bien que $x \in U_5$: d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.
6. Notons I_6 cette intersection et prouvons que $I_6 = [\,1\,;2020\,]$. Soit $x \in I_6$. Alors $x \in \left[\dfrac{1}{n}\,;2021 - \dfrac{1}{n}\right]$ pour tout $n \geq 1$. Pour $n = 1$, il en découle que $1 \leq x \leq 2020$ donc $x \in [\,1\,;2020\,]$, d'où l'inclusion $I_6 \subset [\,1\,;2020\,]$. Réciproquement, supposons que $x \in [\,1\,;2020\,]$. Soit $n \geq 1$. Alors
$$\frac{1}{n} \leq 1 \leq x \leq 2020 \leq 2021 - \frac{1}{n}$$
c'est-à-dire que $x \in \left[\dfrac{1}{n}\,;2021 - \dfrac{1}{n}\right]$. n étant quelconque, $x \in I_6$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.
7. Notons I_7 cette intersection et prouvons que $I_7 = [\,1\,;2021\,]$. Soit $x \in I_7$. Alors, pour tout $n \geq 1$, $x \in \left[\dfrac{1}{n}\,;2021 + \dfrac{1}{n}\right]$ donc, pour $n = 1$, $n \in [\,1\,;2022\,]$ donc $x \geq 1$. De plus, si $x > 2021$ alors il existe n_0 tel que $2021 + \dfrac{1}{n_0} < x$ car $2021 + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2021$ et donc $x \notin \left[\dfrac{1}{n_0}\,;2021 + \dfrac{1}{n_0}\right]$ et donc $x \notin I_7$ ce qui est absurde. Donc $x \leq 2021$: $I_7 \subset [\,1\,;2021\,]$. L'inclusion réciproque est immédiate et se démontre comme ci-dessus.
8. Notons U_8 cette union et prouvons que $U_8 = [\,0\,;3\,]$. Soit $y \in U_8$. Il existe $x \in [\,0\,;2\,]$ tel que $y \in [\,x\,;x+1\,]$ (attention à ne pas tout appeler x !). Or, $0 \leq x \leq 2$ donc $x + 1 \leq 3$ si bien que $0 \leq x \leq y \leq x + 1 \leq 3$. En d'autres termes, $x \in [\,0\,;3\,]$ d'où l'inclusion $U_8 \subset [\,0\,;3\,]$. Réciproquement, soit $y \in [\,0\,;3\,]$. Si $y > 2$ alors $y \in [\,2\,;3\,]$ i.e. $y \in [\,x\,;x+1\,]$ avec $x = 2$, tandis que si $y \leq 2$ alors $y \in [\,x\,;x+1\,]$ avec $x = y \in [\,0\,;2\,]$. Dans tous les cas, il existe $x \in [\,0\,;2\,]$ tel que $y \in [\,x\,;x+1\,]$ donc $y \in U_8$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.
9. Notons I_9 cette intersection et prouvons que cette intersection est vide. Supposons qu'il existe $x \in I_9$. Alors $x \in [\,y\,;y+1\,]$ pour tout $y \in [\,0\,;2\,]$ (la variable de l'intersection est muette : il faut juste faire attention à ne pas tout appeler x). En particulier, pour $y = 0$, $x \in [\,0\,;1\,]$ donc $x \leq 1$ et, pour $y = 2$, $x \in [\,2\,;3\,]$ donc $x \geq 2$ ce qui est absurde : il n'y a aucun élément dans I_9 donc I_9 est l'ensemble vide.
10. Notons U_{10} cette union et prouvons que $U_{10} = \mathbb{Q}$. Soit $x \in U_{10}$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nx \in \mathbb{Z}$ si bien que $x = nx/n \in \mathbb{Q}$ car c'est un quotient d'entiers. En d'autres termes, $U_{10} \subset \mathbb{Q}$. Réciproquement, soit $x \in \mathbb{Q}$: il existe donc $(p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = p/n$ si bien que $nx = p \in \mathbb{Z}$: il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nx \in \mathbb{Z}$ donc $x \in U_{10}$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

Exercice 15 : ✪✪ Soit I un ensemble d'indices non vide. Pour tout $i \in I$, soient O_i et U_i deux parties de E, d'intersection vide. Parmi les trois affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $\left(\displaystyle\bigcap_{i\in I} O_i\right) \cap \left(\displaystyle\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \varnothing$
2. $\left(\displaystyle\bigcup_{i\in I} O_i\right) \cap \left(\displaystyle\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \varnothing$
3. $\left(\displaystyle\bigcap_{i\in I} O_i\right) \cap \left(\displaystyle\bigcap_{i\in I} U_i\right) = \varnothing$

Correction : Notons U_0 l'union des O_i, U_U l'union des U_i, I_O et $I_U \dots$ les ensembles auxquels on pense !

1. Vrai. Supposons qu'il existe x dans cette intersection. Alors $x \in U_U$ donc il existe i_0 tel que $x \in U_{i_0}$. Or, $x \in I_O$ donc $x \in O_i$ pour tout i et en particulier $x \in O_{i_0}$ si bien que $x \in O_{i_0} \cap U_{i_0}$ ce qui est absurde puisque cette intersection est vide. Il n'y a donc aucun élément dans cette intersection, elle est donc vide.
2. Faux : cette intersection n'est pas forcément vide. Par exemple, notons $O_1 = [\,0\,;1\,]$, $O_2 =]\,1\,;2\,]$, $U_1 =]\,1\,;2\,]$ et $U_2 = [\,0\,;1\,]$ si bien que $O_1 \cap U_1 = O_2 \cap U_2 = \varnothing$ mais $O_1 \cup O_2 = U_1 \cap U_2 = [\,0\,;2\,]$ donc cette intersection n'est pas vide.
3. Vrai. Supposons qu'il existe x dans cette intersection. Soit $i \in I$. Alors $x \in O_i$ et $x \in U_i$ donc $x \in O_i \cap U_i$ ce qui est absurde car cette intersection est vide.

Exercice 16 : ✪✪ Étudier les inclusions entre les ensembles suivants :

1. $\mathscr{P}(E \cup F)$ et $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F)$.
2. $\mathscr{P}(E \cap F)$ et $\mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$.
3. $\mathscr{P}(E \times F)$ et $\mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F)$.

Correction :

1. Montrons que $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F) \subset \mathscr{P}(E \cup F)$ mais qu'en général il n'y a pas égalité. Soit $A \in \mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F)$. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$, et alors $A \subset E$, soit $A \in \mathscr{P}(F)$, et alors $A \subset F$. Dans tous les cas, $A \subset E \cup F$ donc $A \in \mathscr{P}(E \cup F)$. Montrons que l'inclusion réciproque est fausse en général. Si $E = \mathbb{R}_-$ et $F = \mathbb{R}_+$ alors $E \cup F = \mathbb{R}$ et $A = [\,-1\,;1\,] \in \mathscr{P}(E \cup F)$ mais $A \notin \mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F)$ car A n'est ni une partie de E ni une partie de F.

2. Montrons qu'il y a égalité entre ces ensembles. L'inclusion $\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F) \subset \mathscr{P}(E\cap F)$ se démontre de façon analogie à la question précédente (en adaptant bien sur le raisonnement pour une intersection). Réciproquement, soit $A \in \mathscr{P}(E\cap F)$. Alors $A \subset E \cap F$ si bien que $A \subset E$ et $A \subset F$ donc $A \in \mathscr{P}(E)$ et $A \in \mathscr{P}(F)$, d'où : $A \in \mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.
3. Ces deux ensembles ne sont pas égaux et aucun n'est inclus dans l'autre en général tout simplement car leurs éléments ne sont pas de la même nature : les éléments de $\mathscr{P}(E \times F)$ sont des parties de $E \times F$, ce sont donc des ensembles de couples (par exemple si $E = [\![1\,;\,2]\!]$ et $F = [\![1\,;\,3]\!]$, un élément de $\mathscr{P}(E \times F)$ est par exemple $\{(1,2);(1,3);(2,1)\}$) tandis que les éléments de $\mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F)$ sont des couples dont la première coordonnée est une partie de E et la deuxième une partie de F : avec le même exemple que ci-dessus, un élément de $\mathscr{P}(E\times F)$ est par exemple $(\{1\},\{1;2\})$.

Exercice 17 : ✪✪ Soit $n \geq 2$ et soient $A_1, \dots, A_n$ des parties de E. Montrer que :

$$A_1 \cup \dots \cup A_n = (A_1\backslash A_2) \cup (A_2\backslash A_3) \cup \dots \cup (A_{n-1}\backslash A_n) \cup (A_n\backslash A_1) \cup (A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Correction : Notons B le membre de droite. Alors $B \subset A_1 \cup \cdots A_n$. En effet, si $x \in B$, alors $x \in A_1\backslash A_2$ et donc $x \in A_1$, ou $x \in A_2\backslash A_3$ et donc $x \in A_2$, ou... ou $x \in A_n\backslash A_1$ et donc $x \in A_n$, ou $x \in A_1 \cap \cdots A_n$ et donc (entre autres) $x \in A_1$. Dans tous les cas, x appartient à l'un des A_i donc appartient à leur union, d'où cette inclusion. Réciproquement, soit $x \in A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Soit il existe k tel que $x \in A_k$ et $x \notin A_{k+1}$ (avec la convention $k+1 = 1$ si $k = n$, c'est-à-dire qu'on travaille de façon cyclique), soit, pour tout k, $x \in A_k \Rightarrow x \in A_{k+1}$. Dans le premier cas, $x \in A_k\backslash A_{k+1}$, et dans le second cas, puisque $x \in A_i$, par récurrence en partant de A_i, x appartient à tous les A_k donc à leur intersection. Dans tous les cas, $x \in B$, d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

Exercice 18 - Une équation dans $\mathscr{P}(E)$: ✪✪ Soient A et B dans $\mathscr{P}(E)$. Discuter et résoudre l'équation suivante d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$:

$$(A \cap X) \cup \left(B \cap \overline{X}\right) = \emptyset.$$

Correction : Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. Alors X est solution si et seulement si $A \cap X = B \cap \overline{X} = \varnothing$. En effet, une union est vide si et seulement si tous les ensembles sont vides. Or : $A \cap X = \varnothing \iff X \subset \overline{A}$ et : $B \cap \overline{X} = \varnothing \iff B \subset X$. En particulier, si X est solution (condition nécessaire), $B \subset X \subset \overline{A}$ et donc $B \subset \overline{A}$. Par conséquent, si B n'est pas inclus dans $\overline{A}$, il n'y a aucune solution. Supposons donc que $B \subset \overline{A}$. Les solutions sont donc toutes les parties X de E vérifiant $B \subset X \subset \overline{A}$.

Exercice 19 : ✪✪✪ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de E. On définit leur limite inférieure et leur limite supérieure [1] par :

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} E_k \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} E_k$$

1. Montrer que $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
2. Expliciter ces deux ensembles lorsque $E = \mathbb{R}$ et lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [\,n\,;+\infty\,[$.
3. Expliciter ces deux ensembles lorsque $E = \mathbb{R}$ et lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [\,(-1)^n \times n\,;+\infty\,[$.

Correction :

1. Soit $x \in \liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il existe donc n_0 tel que, pour tout $k \geq n_0$, $x \in A_k$. Montrons que $x \in \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \geq \max(n, n_0)$. Alors $x \in A_k$ donc
$$x \in \bigcup_{k\geq n} A_k$$
et ceci étant vrai pour tout n, x appartient bien à $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
2. De même que dans l'exercice 14, on prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\bigcap_{k\geq n} [\,k\,;+\infty\,[= \varnothing$$
si bien que $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \varnothing = \varnothing$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On montre de même que dans l'exercice 14 que :
$$\bigcup_{k\geq n} [\,k\,;+\infty\,[= [\,n\,;+\infty\,[$$
si bien que $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [\,n\,;+\infty\,[= \varnothing$ (idem, cela se montre comme dans l'exo 14).

1. Nous verrons une interprétation de ces ensembles au second semestre.

3. Cette fois-ci ce n'est plus aussi simple. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$I_k = \bigcap_{k \geq n} \left[(-1)^k \times k\,; +\infty \right[$$

et montrons que cette intersection est vide. Supposons qu'il existe $x \in I_k$. Alors, pour tout $k \geq n$, $2k \geq n$ donc $x \in \left[(-1)^{2k} \times 2k\,; +\infty \right[$ donc $x \geq 2k$, ce qui est impossible car il existe $k \geq n$ tel que $2k > x$. Cette intersection est donc vide, et on en déduit encore que la lim inf est vide. Cependant, posons

$$U_k = \bigcap_{k \geq n} \left[(-1)^k \times k\,; +\infty \right[$$

Montrons que $U_k = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $k \geq n$ tel que $-2k - 1 \leq x$ (ce qui est possible puisque $-2k-1 \xrightarrow[k \to +\infty]{} -\infty$). Alors $x \in \left[(-1)^{2k+1} \times (2k+1)\,; +\infty \right[$ si bien que $x \in U_k$. Finalement,

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

Exercice 20 - Paradoxe de Russel : ✪✪✪ Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathscr{P}(E)$.
2. Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de surjection $f : E \to \mathscr{P}(E)$ (on pourra s'intéresser aux antécédents de la partie $X = \{x \in E \,|\, x \notin f(x)\}$).
3. En déduire qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles.

Remarque : En d'autres termes, la collection formée par tous les ensembles n'est pas un ensemble ! Ce paradoxe montre l'insuffisance de la définition d'un ensemble comme collection d'objets, cf. chapitre 0.

Correction :

1. La fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathscr{P}(E) \\ & & \\ e & \mapsto & \{e\} \end{array} \right.$$

est évidemment injective car si $e_1 \neq e_2$ sont deux éléments de E, les ensembles $\{e_1\}$ et $\{e_2\}$ sont distincts.

2. Raisonnons par l'absurde et supposons donc qu'une telle surjection existe. L'ensemble X de l'énoncé est une partie de E donc admet un antécédent x. Et la question qui tue est : x appartient-il à X ? Si $x \in X$ alors, par définition de X, $x \notin f(x) = X$ ce qui est absurde, et si $x \notin X$, alors $x \notin f(x)$ donc $x \in X$. Dans tous les cas c'est absurde : une telle surjection n'existe pas.
3. S'il existe un ensemble E contenant tous les ensembles, alors il contient $\mathscr{P}(E)$ donc il existe une surjection de E dans $\mathscr{P}(E)$. En effet, si un ensemble non vide A est inclus dans un ensemble B, il existe une surjection de B dans A. Soit $a \in A$ un élément quelconque (mais fixé). Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} B & \to & A \\ & & \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \in A \\ & \\ a & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Alors f est surjective car, pour tout $x \in A$, $f(x) = x$ donc x est un antécédent de x. Or, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathscr{P}(E)$: c'est donc absurde.

3.2 Applications.

Exercice 21 : ✪ Reformuler chacun des énoncés suivants par une phrase du type : « L'application de ... vers ... qui à ... associe ... est (ou n'est pas) injective (ou surjective, ou bijective) ».

1. Dans cette classe, il y a plusieurs élèves nés le même mois.
2. Dans cette classe, aucun élève n'est né en janvier.
3. Chaque élève est assis sur une chaise différente (enfin j'espère...).
4. Tous les élèves ont un prénom différent.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}^+$ tel que $y^{2021} = x$.

6. ✪✪ On peut avoir $a+b=c+d$ sans avoir $a=c$ et $b=d$.
7. ✪✪ Si (a,b,c,d) sont quatre rationnels tels que $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ alors $a=c$ et $b=d$.

Correction :

1. L'application qui va de l'ensemble des élèves dans l'ensemble des mois, qui à un élève associe son mois de naissance, n'est pas injective.
2. Cette même application n'est pas surjective (janvier n'est pas atteint).
3. L'application qui va de l'ensemble des élèves dans l'ensemble des chaises, qui à un élève associe la chaise sur laquelle il est assis, est injective.
4. L'application qui va de l'ensemble des élèves dans l'ensemble des prénoms qui à un élève associe son prénom est injective.
5. L'application qui va de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à y associe y^{2021} est bijective.
6. L'application qui va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (a,b) associe $a+b$ n'est pas injective.
7. L'application qui va de $\mathbb{Q}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à (a,b) associe $a+b\sqrt{2}$ est injective.

Exercice 22 : ✪ Soit f définie sur $\mathbb{N}^2$ par $f(p,q)=p+q$. Donner $f(\mathbb{N}\times\{0\}), f(2\mathbb{N}\times 2\mathbb{N}), f^{-1}(\{4\}), f^{-1}(2\mathbb{N})$.

Correction : f est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors $f((n,0))=n$ si bien que $n\in f(\mathbb{N}\times\{0\})$. Ainsi, $f(\mathbb{N}\times\{0\})=\mathbb{N}$.
- Montrons que $f(2\mathbb{N}\times 2\mathbb{N})=2\mathbb{N}$. D'une part, soit $y\in f(2\mathbb{N}\times 2\mathbb{N})$. Alors il existe $(p,q)\in 2\mathbb{N}\times 2\mathbb{N}$ tel que $y=f(p,q)=p+q$. p et q étant pairs, $y=p+q$ est pair donc $y\in 2\mathbb{N}$. En d'autres termes, $f(2\mathbb{N}\times 2\mathbb{N})\subset 2\mathbb{N}$. Réciproquement, soit $y\in 2\mathbb{N}$. Alors $y=f(y,0)$ et $(y,0)\in 2\mathbb{N}\times 2\mathbb{N}$ donc $y\in f(2\mathbb{N}\times 2\mathbb{N})$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.
- $f^{-1}(\{4\})=\{(4,0);(3,1);(2,2);(1,3);(0,4)\}$.
- Rappelons que $(p,q)\in f^{-1}(2\mathbb{N}) \iff f(p,q)\in 2\mathbb{N}$. Montrons que $f^{-1}(2\mathbb{N})=F$ où $F=\{(p,q)\,|\,p \text{ et } q \text{ de même parité}\}$ est l'ensemble des couples d'entiers naturels de même parité. Soit $(p,q)\in f^{-1}(2\mathbb{N})$. Alors $f(p,q)=p+q\in 2\mathbb{N}$ donc $p+q$ est pair si bien que p et q sont de même parité (la somme de deux entiers de parité différente est impaire). Ainsi, $f^{-1}(2\mathbb{N})\subset F$. L'inclusion réciproque est immédiate : si $(p,q)\in F$ alors $f(p,q)=p+q\in 2\mathbb{N}$.

Exercice 23 : ✪ Notons f la fonction partie entière. Expliciter $f([\,0\,;1\,])$, $f([\,0\,;1\,[)$, $f(]\,0\,;1\,])$, $f(]\,0\,;1\,[)$, $f^{-1}([\,0\,;1\,])$, $f^{-1}([\,0\,;1\,[)$, $f^{-1}(]\,0\,;1\,])$, $f^{-1}(]\,0\,;1\,[)$ et enfin $f\left(f^{-1}\left([\,0\,;1\,]\right)\right)$ et $f^{-1}\left(f\left([\,0\,;1\,]\right)\right)$.

- Les résultats suivants sont immédiats : $f([\,0\,;1\,])=\{0;1\}$, $f([\,0\,;1\,[)=\{0\}$, $f(]\,0\,;1\,])=\{0;1\}$, $f(]\,0\,;1\,[)=\{0\}$.
- Rappelons que $x\in f^{-1}([\,0\,;1\,]) \iff f(x)=\lfloor x\rfloor\in[\,0\,;1\,]$, et puisque la partie entière ne prend que des valeurs entières, $x\in f^{-1}([\,0\,;1\,]) \iff f(x)=\lfloor x\rfloor\in\{0;1\}$si bien que $f^{-1}([\,0\,;1\,])=[\,0\,;2\,[$. De même on trouve $f^{-1}(]\,0\,;1\,])=[\,1\,;2\,[$ car $x\in f^{-1}(]\,0\,;1\,]) \iff f(x)=\lfloor x\rfloor=1$. De plus, $f^{-1}([\,0\,;1\,[)=[\,0\,;1\,[$ et $f^{-1}(]\,0\,;1\,[)=\varnothing$.

Exercice 24 : ✪ Soit f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $f(n)=\dfrac{n}{3}$ si n est divisible par 3, $f(n)=\dfrac{n+2}{3}$ si $n-1$ est divisible par 3 et $f(n)=\dfrac{n-2}{3}$ sinon. f est-elle surjective ? injective ?

Correction : Pour se faire une idée, on calcule les premières valeurs. On trouve alors que $f(3)=f(1)=1$ donc f n'est pas injective, et on f a l'air surjective. Soit $n\in\mathbb{N}$. $3n$ est divisible par 3 donc $f(3n)=3n/3=n$ donc $3n$ est un antécédent de n par f, f est surjective.

Exercice 25 : ✪ Notons E l'ensemble des suites réelles convergentes. Soit

$$f:\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ & & \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n \end{array}\right.$$

f est-elle injective ? surjective ?

Correction : Soit $L\in\mathbb{R}$. Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante égale à L. Alors $f(u)=L$: f est surjective. Or, si on note u la suite nulle et v la suite de terme général $1/2^n$, alors $f(u)=f(v)=0$: f n'est pas injective.

Exercice 26 : ✪ Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x+y$.
2. $f:\mathbb{Q}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x+y\sqrt{2}$.
3. $f:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}^2$ définie par $f(x,y)=(x+y,x-y)$.
4. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=(x+y,x-y)$.
5. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z)=(y,z,x)$.
6. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z)=(0,x,y)$.
7. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z)=(0,xy)$.
8. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x)=(x^2,x^3)$.

9. $f : \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ définie par $f(n) = [\![0\,;\, n]\!]$.
10. $\varphi : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = f(0)$.
11. Dans cette question, g désigne la fonction carré.
    (a) $\varphi : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f \times g$.
    (b) $\varphi : \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f \times g$.
    (c) $\varphi : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f \times g$.
    (d) $\varphi : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f \circ g$.
    (e) $\varphi : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = g \circ f$.

Correction :

1. f n'est pas injective car $f(0,0) = f(1,-1) = 0$. Cependant, elle est surjective. Soit en effet $y \in \mathbb{R}$. Alors $y = f(y,0)$: $(y,0)$ est un antécédent de y par f, f est surjective.
2. f est injective. Soient en effet (a,b) et (c,d) appartenant à $\mathbb{Q}^2$ tels que $f(a,b) = f(c,d)$. Alors $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ et on a vu dans le chapitre 1 (raisonnement par l'absurde) que cela implique que $a = c$ et $b = d$. Cependant, f n'est pas surjective. Montrons que $\sqrt{3}$ n'est pas atteint. On peut utiliser l'exercice 12 du chapitre 1 mais on va le redémontrer. Supposons qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $a + b\sqrt{2} = 3$. En élevant au carré, il vient $a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2 = 3$. Si $ab \neq 0$ alors
$$\sqrt{2} = \frac{1-a^2}{2ab} \in \mathbb{Q}$$
ce qui est absurde donc $ab = 0$. Dès lors, $a = 0$ ou $b = 0$. Si $a \neq 0$ alors $b = 0$ donc $a = \sqrt{3}$ ce qui est absurde puisque $\sqrt{3}$ est irrationnel. Donc $a = 0$, si bien que $b\sqrt{2} = \sqrt{3}$. En élevant au carré, on obtient $2b^2 = 3$ donc 3 est pair : absurde. $\sqrt{3}$ n'est pas atteint, f n'est pas surjective.
3. Montrons que f est injective non surjective. Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. Alors $x + y$ et $x - y$ sont de même parité. Ainsi, f n'atteint aucun élément de $\mathbb{Z}^2$ dont les deux coordonnées sont de parité différente, par exemple $(1,0)$: f n'est pas surjective. Montrons que f est injective. Soient (x_1,y_1) et (x_2,y_2) deux éléments de $\mathbb{Z}^2$ tels que $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$. Alors $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ et $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$ si bien que $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$ et $x_1 - x_2 = y_1 - y_2$. Par conséquent, $x_1 - x_2 = -(x_1 - x_2)$ donc $x_1 - x_2 = 0$ et idem pour $y_1 - y_2$. Par conséquent, $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$: f est injective.
4. Montrons directement que f est bijective. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que (a,b) admet un unique antécédent. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
$$f(x,y) = (a,b) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & a \\ x-y & = & b \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{a+b}{2} \\ y & = & \dfrac{b-a}{2} \end{array}\right.$$
Tout élément de $\mathbb{R}^2$ a un unique antécédent par f : f est bijective.
5. f est bijective : soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors : $f(x,y,z) = (a,b,c) \iff (x,y,z) = (c,a,b)$. De même que ci-dessus, f est bijective.
6. f n'est pas surjective car $(1,1,1)$ n'est pas atteint (aucun élément dont la première coordonnée est non nulle n'est atteint). De plus, f n'est pas injective car $f(1,1,1) = f(1,1,1) = (0,1,1)$.
7. f n'est ni surjective, car $(1,0)$, n'est pas atteint, ni injective, car $f(0,0) = f(0,1) = (0,0)$.
8. f n'est pas surjective car $(-1,0)$ n'est pas atteint, et n'est pas injective car $f(1,0) = f(-1,0)$.
9. f est injective : en effet, soient $n \neq p$ deux entiers. Alors $[\![0\,;\, n]\!] \neq [\![0\,;\, p]\!]$ donc $f(n) \neq f(p)$. Cependant, f n'est pas surjective car (par exemple !) $\{1\}$ n'est pas atteint ($\mathbb{N}$ non plus, ni $\{1;2;3\}$: on a l'embarras du choix !).
10. φ est surjective : soit en effet $y \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction constante égale à y. Alors $f(0) = y$ si bien que $\varphi(f) = y$: f est un antécédent de y, φ est surjective. Elle n'est cependant pas injective : $\varphi(\cos) = \varphi(\exp) = 1$.
11. (a) φ n'est pas surjective car, pour toute fonction f, $\varphi(f)$ est nulle en 0 donc aucune fonction non nulle en 0 n'est atteinte (par exemple la fonction constante égale à 1). φ n'est pas non plus injective : soient f_1 et f_2 respectivement la fonction nulle et la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$ et valant 1 en 0 (i.e. l'indicatrice de $\{0\}$). Alors $\varphi(f_1) = \varphi(f_2) = f_1$.
    (b) φ n'est pas surjective pour la même raison. Par contre, cette fois, elle est injective. Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues telles que $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$. Alors, pour tout $x \neq 0$, $x^2 \times f_1(x) = x^2 \times f_2(x)$ donc $f_1(x) = f_2(x)$. f_1 et f_2 sont continues et égales sur $\mathbb{R}^*$ donc sont égales. En effet, si $x \neq 0$, $f_1(x) = f_2(x)$ et f_1 et f_2 sont continues donc $f_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f_1(0)$ et $f_1(x) = f_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f_2(0)$ et donc $f_1(0) = f_2(0)$ par unicité de la limite. $f_1 = f_2$ donc φ est injective.
    (c) Erreur de copier-coller : c'est le même que le a.

(d) Soient f_1 et f_2 deux fonctions. $\varphi(f_1) = \varphi(f_2) \iff \forall x \in \mathbb{R}, f_1\left(x^2\right) = f_2\left(x^2\right)$. En d'autres termes, f_1 et f_2 ont la même image si et seulement si elles coïncident sur les carrés c'est-à-dire les réels positifs. Soient donc f_1 la fonction nulle et f_2 la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$ et qui vaut 1 sur $\mathbb{R}_-^*$ (i.e. l'indicatrice de $\mathbb{R}_-^*$). Alors $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ et f_1 et f_2 coïncident sur $\mathbb{R}^2$ donc $f_1\left(x^2\right) = f_2\left(x^2\right)$ c'est-à-dire que $\varphi(f_1) \neq \varphi(f_2)$: φ n'est pas surjective. De plus, φ n'est pas surjective puisque, pour toute fonction f, $\varphi(f)$ est une fonction paire : aucune fonction non paire n'est atteinte (attention de ne pas dire qu'une fonction impaire n'est pas atteinte : une fonction peut être paire et impaire, la fonction nulle). Par conséquent, la fonction exp n'a aucun antécédent, φ n'est pas surjective.

(e) φ n'est pas surjective car, si on note f_1 la fonction constante égale à 1 et f_2 la fonction constante égale à -1, alors $\varphi(f_1) = \varphi(f_2) = f_1$. De plus, pour toute fonction f, $\varphi(f) = f^2$ est à valeurs positives donc la fonction constante égale à -1 n'est pas atteinte : φ n'est pas surjective.

Exercice 27 : ✪

1. Déterminer toutes les injections $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$.
2. **Remake :** Déterminer les surjections $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geq n$.

Correction :

1. Analyse : soit f une fonction qui convient. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$. En d'autres termes, l'identité de $\mathbb{N}$ est la seule solution éventuelle.
   - Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $f(n) = n$ ».
   - $f(0) \leq 0$ et $f(0) \in \mathbb{N}$ donc $f(0) = 0$: H_0 est vraie.
   - Soit $n \geq 0$. Supposons $H_0, \dots, H_n$ vraies et prouvons que H_{n+1} est vraie. On sait que $f(n+1) \leq n+1$. Or, âr hypothèse de récurrence, $f(0) = 0, \dots, f(n) = n$. f étant injective, $f(n+1) \neq f(0), \dots, f(n)$ donc $f(n+1) \neq 0, \dots, n$: on a forcément $f(n+1) = n+1$, H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.

   Synthèse : l'identité de $\mathbb{N}$ est évidemment injective et vérifie bien la condition $f(n) \leq n$ pour tout n. C'est donc la seule solution.
2. Analyse : soit f une fonction qui convient. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$.
   - Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $f(n) = n$ ».
   - $f(n) \geq 1$ pour tout $n \geq 1$ donc, si $f(0) \neq 0$, alors 0 n'a aucun antécédent ce qui est absurde puisque f est surjective. $f(0) = 0$, H_0 est vraie.
   - Soit $n \geq 0$. Supposons $H_0, \dots, H_n$ vraies et prouvons que H_{n+1} est vraie. Pour tout $p \geq n+2$, $f(p) \geq n+2$ et, par hypothèse de récurrence, pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, $f(k) = k \leq n$. Dès lors, si $f(n+1) \neq n+1$, alors $n+1$ n'a aucun antécédent par f ce qui est absurde. CPQC (y compris la synthèse).

   CPQC (y compris la synthèse).

Exercice 28 : ✪ Soit $f : E \to F$. Que dire des assertions suivantes ?

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x)$.
2. $\forall x \in E, \exists y \in F, y = f(x)$.
3. $\exists x \in E, \forall y \in F, y = f(x)$.
4. $\exists x \in E, \exists y \in F, y = f(x)$.
5. $\forall y \in F, \forall x \in E, y = f(x)$.
6. $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
7. $\exists y \in F, \forall x \in E, y = f(x)$.
8. $\exists y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

Correction :

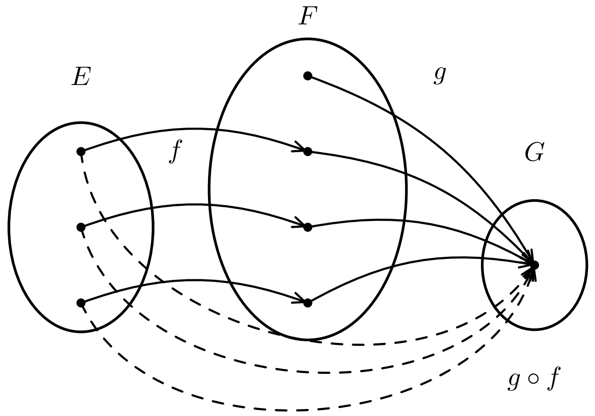
1. Cela signifie que tout élément de F est une image de tout élément de E ce qui est impossible si F n'est pas un singleton car un élément de E ne peut avoir qu'une seule image.
2. Vrai pour toute fonction $f : E \to F$: cela signifie que tout élément de E a une image dans F.
3. Cela signifie qu'il y a un élément de E dont les images prennent toutes les valeurs de F ce qui est impossible (sauf si F est un singleton) comme ci-dessus.
4. Vrai pour toute fonction f : cela signifie qu'il existe un élément de E qui a une image.
5. Idem que la 1, ces deux assertions sont équivalentes (on peut intervertir des quantificateurs identiques).
6. Signifie que f est surjective.
7. Signifie que f est constante.
8. Signifie qu'il existe un élément de F qui a un antécédent : vrai pour toute fonction $f : E \to F$ (pas forcément surjective !).

Exercice 29 : ✪ Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On démontrera les affirmations vraies et on donnera un contre-exemple pour les affirmations fausses.

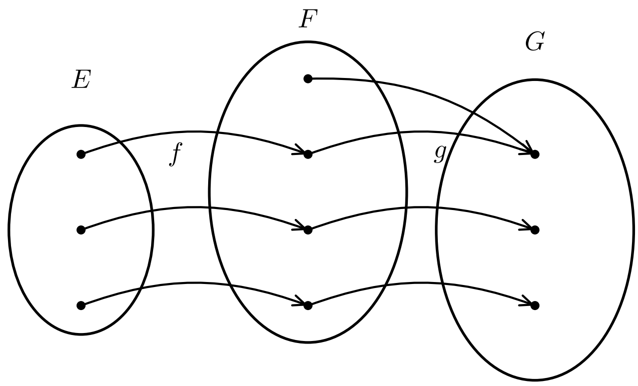
- f et g surjectives implique $g \circ f$ surjective.
- f surjective implique $g \circ f$ surjective.
- g surjective implique $g \circ f$ surjective.
- $g \circ f$ surjective implique g et f surjectives.
- $g \circ f$ surjective implique g surjective.
- $g \circ f$ surjective implique f surjective.
- $g \circ f$ injective implique f injective.
- $g \circ f$ injective implique g injective ou f non injective.
- Si f et g vont de E dans E et si $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

Correction :

- Vrai : une composée de surjections est une surjection (cf. cours).
- Faux : si f est l'identité de $\mathbb{R}$ et si g est la fonction nulle (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) alors f est surjective mais $g \circ f$ ne l'est pas (on aurait pu donner un exemple patatoïdal).
- Faux : si g est l'identité de $\mathbb{R}$ et f la fonction nulle, alors g est surjective mais $g \circ f$ ne l'est pas.
- Faux : donnons un exemple patatoïdal. On pourrait également donner des fonctions « concrètes » (grrrrr).



  $g \circ f$ est surjective mais f ne l'est pas.
- Vrai : soit $z \in G$ (on suppose que $f : E \to F$ et $g : F \to G$). $g \circ f$ étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $z = g(f(x))$ c'est-à-dire que $f(x)$ est un antécédent de z par g qui est donc surjective.
- Faux : on a déjà vu dans le 4e exemple que ce n'était pas le cas.
- Vrai : soient x_1 et x_2 deux éléments de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$. En composant par g (pas forcément injectif : c'est vrai pour toute fonction !), $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ et $g \circ f$ est injective donc $x_1 = x_2$.
- La négation est : $g \circ f$ injective et g non injective et f injective. Le contre-exemple ci-dessous prouve donc que la propriété est fausse.



- Faux : cf. exercice 37 pour un contre-exemple.

Exercice 30 : ✪ Soit $f : E \to E$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f^n est injective.
3. $\exists n \in \mathbb{N}^*$, f^n est injective.

Recommencer avec « surjective » au lieu de « injective ». On pourra utiliser l'exercice précédent.

Correction : $1 \Rightarrow 2$ d'après le cours : si f est injective, alors pour tout $n \geq 1$, f^n est injective car composée de fonctions injective. $2 \Rightarrow 3$ de façon évidente : si f^n est injective pour tout n alors c'est en particulier vrai pour $n = 1$ (ou $n = 2021$) : il existe donc n tel que f^n soit injective. Enfin, supposons qu'il existe n tel que f^n soit injective, c'est-à-dire telle que $f^{n-1} \circ f$ soit injective. D'après l'exercice précédent (point 7), f est injective. Ainsi, $3 \Rightarrow 1$: d'où l'équivalence.

$1 \Rightarrow 2$ et $2 \Rightarrow 3$ de la même façon. De plus, s'il existe $n \geq 1$ tel que f^n soit surjective alors, en remarquant que $f^n = f \circ f^{n-1}$ et en utilisant le point 3 de l'exercice précédent, on en déduit que f est surjective ce qui permet de conclure.

Exercice 31 : ✪

1. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ des applications. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g, h le sont aussi. On pourra utiliser l'exercice 29.
2. **Remake :** Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$. Montrer que si $f \circ g \circ f$ est bijective, alors f et g le sont.

Correction :

1. $h \circ g$ est bijective donc injective : d'après l'exercice 29, il en découle que g est injective. De même, $g \circ f$ est bijective donc surjective. Toujours d'après l'exercice 29, g est surjective : g est bijective. Dès lors, g admet une bijection réciproque g^{-1} donc $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est bijective car composée de bijections. De même, $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est bijective.
2. De même, $f \circ (g \circ f)$ est surjective donc f est surjective, et $(f \circ g) \circ f$ est injective donc f est injective donc bijective donc admet une bijection réciproque. Dès lors, $g = f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1}$ est bijective car composée de bijections.

Exercice 32 - Régularité à droite et à gauche : ✪✪ On répond ici à la question : quand peut-on « simplifier » dans une composition ?

1. (a) Soit $f : F \to G$ une application injective. Montrer que :

$$\forall (g, h) \in (\mathscr{F}(E, F))^2, f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

   (b) Réciproquement, montrer que si $f : F \to G$ satisfait la propriété ci-dessus, alors f est injective.
2. (a) Soit $f : E \to F$ une application surjective. Montrer que :

$$\forall (g, h) \in (\mathscr{F}(F, G))^2, g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

   (b) Étudier aussi la réciproque.

Correction :

1. (a) Soient g et h deux fonctions de E dans F. Supposons que $f \circ g = f \circ h$. Soit $x \in E$. Alors $f(g(x)) = f(h(x))$ donc, f étant injective, $g(x) = h(x)$ c'est-à-dire que $g = h$.
   (b) Supposons que f vérifie la propriété ci-dessus. Soient x_1 et x_2 deux éléments de F tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Soient g et h les fonctions constantes égales respectivement à x_1 et à x_2. Pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(x_1) \\ &= f(x_2) \\ &= f(h(x)) \end{aligned}$$

   Il en découle que $f \circ g = f \circ h$ et donc $g = h$ par hypothèse faite sur f. Or, deux fonctions constantes sont égales si et seulement si elles sont constantes égales à la même valeur : $x_1 = x_2$, f est injective.
2. (a) Soient g et h deux fonctions de F dans G. Supposons que $g \circ f = h \circ f$. Soit $y \in F$. f étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or, $h(f(x)) = g(f(x))$ donc $h(y) = g(y)$, et y étant quelconque, on en déduit que $h = g$.
   (b) Supposons f non surjective. Soit $y \in F \backslash f(E)$. Soient deux fonctions g et h égales sur $f(E)$ mais prenant des valeurs différentes en y. Plus précisément, soient a et b deux éléments distincts de G (si G est un singleton, alors toutes les fonctions de F dans G sont constantes donc égales et la réciproque n'est donc pas forcément vraie mais elle a un intérêt limité). On suppose que g est constante égale à a et que h est égale à a sauf en y où elle vaut b. Alors, pour tout $x \in E$, $f(x) \neq y$ donc $g(f(x)) = h(f(x)) = a$ mais $g \neq h$. D'où la réciproque (par contraposée).

Exercice 33 : ✪✪ Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrer que

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E) \\ X & \mapsto & (X \cup A, X \cup B) \end{array} \right.$$

n'est pas surjective.

Correction : Si A ou B est non vide, alors $A \subset X \cup A$ donc $X \cup A$ est non vide, et de même $X \cup B$ est non vide, et ce pour toute partie X de E. En particulier, $(\varnothing, \varnothing)$ n'est pas atteint. Supposons à présent $A = B = \varnothing$. Alors, pour tout $X \in \mathscr{P}(E), f(X) = (X, X)$: les deux coordonnées sont identiques, et $(\varnothing, E)$ n'est pas atteint. Dans tous les cas, f n'est pas surjective.

Exercice 34 : ✪✪

1. Si une application est injective sur deux parties de son ensemble de définition, l'est-elle sur leur union ?
2. Soit $f : E \to F$ et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E, croissante pour l'inclusion, et d'union E tout entier. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{|A_n}$ est injective, alors f l'est.

Correction :

1. En général, non : la fonction carré est injective (car strictement monotone) sur $\mathbb{R}_+$, sur $\mathbb{R}_-$ mais pas sur leur union qui vaut $\mathbb{R}$.
2. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Supposons $x_1 \neq x_2$. Par hypothèse :

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Ainsi, il existe $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x_1 \in A_{n_1}$ et $x_2 \in A_{n_2}$. Sans perte de généralité, on peut supposer $n_1 \leq n_2$. Dès lors, $A_{n_1} \subset A_{n_2}$ car la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion. En particulier, $x_1 \in A_{n_2}$ c'est-à-dire que x_1 et x_2 appartiennent tous les deux à A_{n_2}. Or, f est injective sur A_{n_2} donc $f(x_1) \neq f(x_2)$: f est injective.

Exercice 35 : ✪✪ Soient $f : E \to F$, $(A_1, A_1) \in \mathscr{P}(E)^2$ et $(B_1, B_2) \in \mathscr{P}(F)^2$.

1. Montrer que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
2. Montrer que : $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$. Réciproque ?
3. (a) Montrer que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
   (b) Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall (A_1, A_2) \in \mathscr{P}(E)^2, f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
4. Montrer que f est bijective si et seulement si : $\forall A_1 \in \mathscr{P}(E), \overline{f(A_1)} = f\left(\overline{A_1}\right)$.
5. Montrer que $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
6. Montrer que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
7. Montrer que : $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. Réciproque ?
8. Montrer que $\overline{f^{-1}(B_1)} = f^{-1}\left(\overline{B_1}\right)$.
9. Montrer que $f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$.

Correction :

1. Soit $y \in f(A_1 \cup A_2)$. Il existe $x \in A_1 \cup A_2$ tel que $y = f(x)$. $x \in A_1 \cup A_2$ donc $x \in A_1$ ou $x \in A_2$. Si $x \in A_1$ alors $y \in f(A_1)$ et si $x \in A_2$ alors $y \in f(A_2)$. Dans tous les cas, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$ donc $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$. Réciproquement, soit $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Alors $y \in f(A_1)$ ou $y \in f(A_2)$. Si $y \in f(A_1)$, alors il existe $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$. Or, $x \in A_1 \cup A_2$ donc $y \in f(A_1 \cup A_2)$ et idem si $y \in f(A_2)$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.
2. Supposons que $A_1 \subset A_2$ et prouvons que $f(A_1) \subset f(A_2)$. Soit $y \in f(A_1)$. Il existe $x \in A_1$ tel que $y = f(x)$. Or, $A_1 \subset A_2$ donc $x \in A_2$ si bien que $y \in f(A_2)$: $f(A_1) \subset f(A_2)$. La réciproque est fausse en général : par exemple, si f est la fonction carré, alors $f(\mathbb{R}_+) \subset f(\mathbb{R}_-)$ mais on n'a pas $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_-$.
3. (a) Soit $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Il existe donc $x \in A_1 \cap A_2$ tel que $y = f(x)$. Or, $x \in A_1 \cap A_2$ donc $x \in A_1$ et donc $y \in f(A_1)$ et $x \in A_2$ donc $y \in f(A_2)$ si bien que $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$: d'où l'inclusion.
   (b) Supposons f injective et prouvons que : $\forall (A_1, A_2) \in \mathscr{P}(E)^2, f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$. Soient A_1 et A_2 deux parties de E. L'inclusion $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ a été prouvée à la question précédente. Réciproquement, soit $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$: $y \in f(A_1)$ donc il existe $x_1 \in A_1$ tel que $y = f(x_1)$, et $y \in f(A_2)$ donc il existe $x_2 \in A_2$ tel que $y = f(x_2)$. Or, f est injective donc $x_1 = x_2$. Or, $x_1 \in A_1$ et est égal à un élément de A_2 donc $x_1 \in A_1 \cap A_2$ si bien que $y = f(x_1) \in f(A_1 \cap A_2)$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

   Prouvons la réciproque : si f n'est pas injective, il existe A_1 et A_2 deux parties de E telles que $f(A_1) \cap f(A_2) \neq f(A_1 \cap A_2)$. Supposons donc f non injective : il existe $x_1 \neq x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Notons $y = f(x_1) = f(x_2)$. Soient $A_1 = \{x_1\}$ et $A_2 = \{x_2\}$. Alors $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ donc $f(A_1 \cap A_2) = \varnothing$ mais $f(A_1) = f(A_2) = \{y\}$ donc $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$. D'où l'implication réciproque, d'où l'équivalence.
4. Supposons f bijective. Soit $A_1 \in \mathscr{P}(E)$. Si $A_1 = E$ alors $f(A_1) = f(E) = F$ car f est surjective si bien que $\overline{f(A_1)} = \varnothing$ et $\overline{A_1} = \varnothing$ donc $f\left(\overline{A_1}\right) = \varnothing$ donc on a bien l'égalité voulue. Supposons ensuite $A_1 \neq E$. Alors $f(A_1) \neq F$: en effet, si $f(A_1) = F$, si on prend $x_1 \notin A_1$, $f(x_2) \in f(A_1)$ donc il existe $x_2 \in A_1$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$ ce qui contredit l'injectivité de f. Ainsi, $f(A_1) \notin F$: soit $y \in \overline{f(A_1)}$. f étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or, $x \notin A_1$ sinon $y = f(x) \in f(A_1)$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Dès lors, $x \in \overline{A_1}$ donc $t \in f\left(\overline{A_1}\right)$. D'où l'inclusion $\overline{f(A_1)} \subset f\left(\overline{A_1}\right)$. Réciproquement, soit $y \in f\left(\overline{A_1}\right)$: il existe $x_2 \in \overline{A_1}$ tel que $y = f(x_2)$. Supposons que $y \in f(A_1)$: il existe alors $x_1 \in A_1$ tel que $y = f(x_1)$ et par injectivité de f, $x_1 = x_2$ ce qui est absurde car $x_1 \in A_1$ et $x_2 \notin A_1$.

Ainsi, $y \notin f(A_1)$ donc $y \in \overline{f(A_1)}$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

Réciproquement, supposons que : $\forall A_1 \in \mathscr{P}(E), \overline{f(A_1)} = f\left(\overline{A_1}\right)$, et prouvons que f est bijective. En prenant $A_1 = E$, $\overline{A_1} = \varnothing$ donc $f\left(\overline{A_1}\right) = \varnothing$ si bien que $\overline{f(A_1)} = \overline{f(E)} = \varnothing$ si bien que $f(E) = F$: F est surjective. Soient $x_1 \neq x_2$ deux éléments de E et posons $A_1 = \{x_1\}$. $x_2 \in \overline{A_1}$ donc $f(x_2) \in f\left(\overline{A_1}\right) = \overline{f(A_1)}$. En d'autres termes, $f(x_2) \in F \backslash \{f(x_1)\}$ et en particulier $f(x_1) \neq f(x_2)$: f est injective donc bijective. D'où la réciproque.

5. Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ donc $f(x) \in B_1 \cup B_2$. Si $f(x) \in B_1$ alors $x \in f^{-1}(B_1)$, et si $f(x) \in B_2$ alors $x \in f^{-1}(B_2)$. Dans tous les cas, $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$, d'où l'inclusion $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Si $x \in f^{-1}(B_1)$, $f(x) \in B_1$ et si $x \in f^{-1}(B_2)$, $f(x) \in B_2$. Dans tous les cas, $f(x) \in B_1 \cup B_2$ donc $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.
6. Soit $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ donc $f(x) \in B_1 \cap B_2$. Alors $f(x) \in B_1$ donc $x \in f^{-1}(B_1)$, et $f(x) \in B_2$ donc $x \in f^{-1}(B_2)$ si bien que $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$, d'où l'inclusion $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$. Alors $x \in f^{-1}(B_1)$, donc $f(x) \in B_1$ et $x \in f^{-1}(B_2)$ donc $f(x) \in B_2$. Dès lors, $f(x) \in B_1 \cap B_2$ donc $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.
7. Supposons que $B_1 \subset B_2$ et prouvons que $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. Soit $x \in f^{-1}(B_1)$. Alors $f(x) \in B_1 \subset B_2$ donc $f(x) \in B_2$ si bien que $x \in f^{-1}(B_2)$: d'où l'inclusion voulue. La réciproque est encore fausse : notons f la fonction carré et $B_2 = \mathbb{R}_+$ et $B_1 = [\,-1\,;+\infty\,[$. Alors $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2) = \mathbb{R}$ donc $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ mais B_1 n'est pas inclus dans B_2.
8. Soit $x \in \overline{f^{-1}(B_1)}$ c'est-à-dire que $f(x) \notin B_1$ et donc $f(x) \in \overline{B_1}$ c'est-à-dire que $x \in f^{-1}(\overline{B_1})$. D'où l'inclusion $\overline{f^{-1}(B_1)} \subset f^{-1}(\overline{B_1})$. Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(\overline{B_1})$. Alors $f(x) \in \overline{B_1}$ donc $f(x) \notin B_1$ donc $x \notin f^{-1}(B_1)$: $x \in \overline{f^{-1}(B_1)}$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité. En conclusion : tout marche avec l'image réciproque (intersection, union, complémentaire), ce qui n'est pas le cas avec l'image directe.
9. Soit $y \in f\left(A \cap f^{-1}(B)\right)$. Il existe donc $x \in A \cap f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. $x \in A$ donc $y \in f(A)$, et $x \in f^{-1}(B)$ donc $y \in B$, donc $y \in f(A) \cap B$: d'où l'inclusion $f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) \subset f(A) \cap B$. Réciproquement, soit $y \in f(A) \cap B$. $y \in f(A)$ donc il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or, $y \in B$ donc $f(x) \in B$ si bien que $x \in f^{-1}(B)$: $x \in A \cap f^{-1}(B)$ si bien que $y \in f\left(A \cap f^{-1}(B)\right)$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

Exercice 36 : ✪✪

1. Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.
2. **Remake :** Soit $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$. Montrer que si p est injective ou surjective alors $p = \mathrm{Id}_E$.

Correction :

1. Supposons f injective et montrons que f est surjective. Soit $y \in E$. Alors $f(y) = f(f(f(y)))$. f étant injective, $y = f(f(y))$ donc $f(y)$ est un antécédent de y par f : f est surjective. Réciproquement, supposons f surjective et prouvons que f est injective. Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ et supposons que $f(x_1) = f(x_2)$. f étant surjective, il existe t_1 et t_2 dans E tels que $x_1 = f(t_1)$ et $x_2 = f(t_2)$ donc $f(f(t_2)) = f(f(t_1))$. En composant par f, $f \circ f \circ f(t_1) = f \circ f \circ f(t_2)$ donc, par hypothèse sur f, $f(t_1) = f(t_2)$ c'est-à-dire que $x_1 = x_2$: f est injective.
2. Supposons p injective. Soit $x \in E$. Alors $p(p(x)) = p(x)$ et puisque p est injective, $p(x) = x$. Supposons cette fois p surjective. Soit $y \in E$: p étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ si bien que $p(y) = p(p(x))$. Or, $p(p(x)) = p(x) = y$ si bien que $p(y) = y$. Dans les deux cas, on a bien $p = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 37 : ✪✪ Les fonctions suivantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ sont-elles injectives ? surjectives ?

$$f : n \mapsto n+1 \qquad g : \left\{ \begin{array}{l} 0 \mapsto 2021 \\ \\ n \mapsto n-1 \text{ sinon} \end{array} \right. \qquad f \circ g \qquad g \circ f$$

- Soient n_1 et n_2 deux entiers distincts. Alors $n_1 + 1 \neq n_2 + 1$ i.e. $f(n_1) \neq f(n_2)$: f est injective. La fonction f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent : supposons en effet qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 0$. Alors $n + 1 = 0$ donc $n = -1$, absurde car $n \in \mathbb{N}$.
- La fonction g n'est pas injective car $g(0) = g(2022) = 2021$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $p+1 \neq 0$ (il faut le vérifier avant de calculer $g(p+1)$ car l'image d'un élément par g n'est pas la même selon qu'il est nul ou non) donc $g(p+1) = (p+1) - 1 = p$, c'est-à-dire que $p+1$ est un antécédent de p : g est surjective.
- Explicitons $f \circ g$, nous verrons ensuite si elle est injective ou surjective. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \circ g(n) = f(g(n))$. Or, si $n = 0$, $g(n) = 2021$ donc $f \circ g(n) = 2022$, tandis que si $n \neq 0$, $g(n) = n - 1$ donc $f \circ g(n) = (n-1) + 1 = n$. De cela on déduit que $f \circ g$ n'est pas injective (car 0 et 2022 ont la même image) ni surjective (car, pour tout n, nul ou non, $f \circ g(n) \geq 1$ donc 0 n'a pas d'antécédent).

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g \circ f(n) = g(f(n)) = g(n+1)$. Or, $n+1 \neq 0$ donc $g(n+1) = (n+1) - 1 = n$, si bien que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ donc est bijective. On remarque qu'on peut avoir $g \circ f = \mathrm{Id}$ sans que ni f ni g ne soit bijective : il faut bien les deux égalités dans le théorème pour conclure !

Exercice 38 : ✪✪ Soient f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On suppose que f est surjective, que g est injective, et que $f \geq g$. Montrer que $f = g$.

Correction : f étant surjective, il existe n_0 tel que $f(n_0) = 0$. Or, $g(n_0) \leq f(n_0) = 0$ et g est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $g(n_0) = 0$. De même, il existe n_1 tel que $f(n_1) = 1$ (et donc on a forcément $n_1 \neq n_0$) et $g(n_1) \leq 1$. Or, g est injective donc $g(n_1) \neq g(n_0) = 0$ si bien que $g(n_1) = 1 = f(n_1)$. On généralise facilement : par surjectivité de f, il existe une suite $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout p, $f(n_p) = p$. Les n_p sont alors forcément deux à deux distincts, et on montre par récurrence de même que dans l'exercice 27 que, pour tout p, $g(n_p) = p = f(n_p)$. Ainsi, f et g coïncident sur $E = \{n_p|, | \, p \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des termes de la suite. Il ne reste plus qu'à montrer que $E = \mathbb{N}$ c'est-à-dire qu'on a bien tous les entiers. On a évidemment $E \subset \mathbb{N}$. S'il existe $n \in \mathbb{N}\backslash E$ alors, en notant $p = g(n)$, il vient : $g(n) = g(n_p)$ ce qui est absurde car g est injective. Dès lors, $E = \mathbb{N}$ et f et g coïncident sur $E = \mathbb{N}$ donc $f = g$.

Exercice 39 : ✪✪

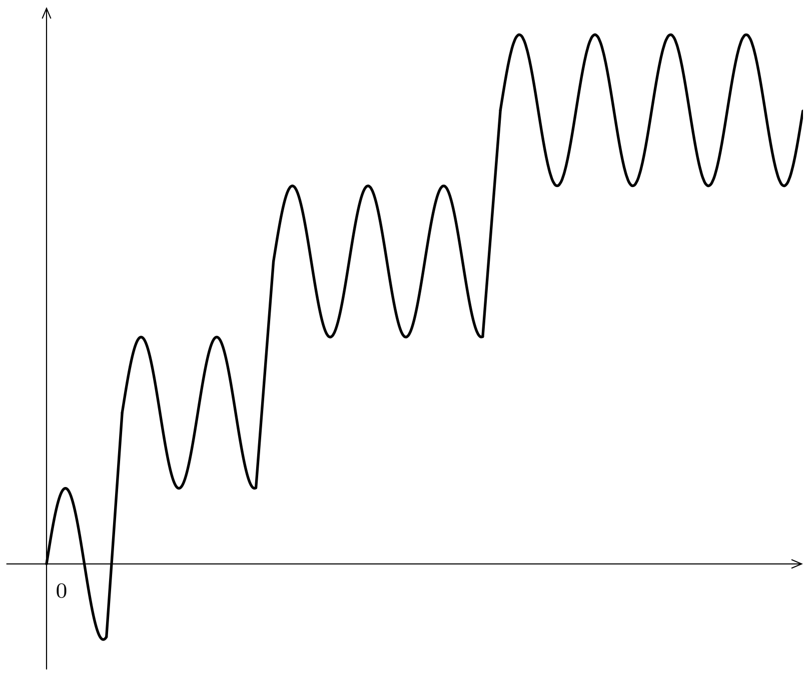
1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Construire une surjection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n admette exactement p antécédents.
2. Construire une surjection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n admette une infinité d'antécédents.

1. La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant $f(0) = \cdots = f(p-1) = 0$, $f(p) = \cdots = f(2p-1) = 1$, $\cdots$, $f(np) = \cdots = f((n+1)p-1) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, c'est la fonction qui prend p fois la valeur 0, puis p fois la valeur 1, puis p fois la valeur 2 etc.
2. La fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 2$, $f(5) = 0$, $f(6) = 1$, $f(7) = 2$, $f(8) = 0$, $f(9) = 0$ etc. Elle vaut 0 puis 1, puis $0, 1, 2$, puis $0, 1, 2, 3$, puis $0, 1, 2, 3, 4$ etc. Elle prendra bien une infinité de fois chaque valeur (et donc est surjective).

Exercice 40 : ✪✪ Une application $f : E \to F$ est dite presque injective s'il existe $C \in \mathbb{N}$ tel que tout $x \in F$ admet au plus C antécédents.

1. Montrer qu'une application injective est presque injective. Montrer que la fonction carré est presque injective mais n'est pas injective.
2. Donner un exemple graphique de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui ne soit pas presque injective mais telle que tout réel admette un nombre fini d'antécédents.

1. Une application injective est presque injective car il suffit de prendre $C = 1$. La fonction carré est presque injective car tout élément de $\mathbb{R}$ admet au plus 2 antécédents mais n'est pas injective car 4 admet deux antécédents : 2 et -2.
2. La négation de « f est presque injective » est : pour tout $C \in \mathbb{N}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ admettant strictement plus de C antécédents. Une fonction n'est donc pas presque injective s'il existe un réel x_1 admettant au moins deux antécédents, un réel x_2 admettant au moins 3 antécédents, un réel x_3 admettant au moins 4 antécédents etc. Soit f la fonction dont le graphe est donné ci-dessous :



Alors f convient car, pour tout n, il existe x_n admettant strictement plus de n antécédents, mais tout réel admet un nombre fini d'antécédents.

Exercice 41 : ✪✪ Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_a par $f_a(x) = x + a$ si $x \geq 0$, $f_a(x) = x - a$ sinon. Montrer que f_a est injective non surjective si $a > 0$, et surjective non injective si $a < 0$. Que dire si $a = 0$?

Correction :

Tout d'abord, $f_a = \mathrm{Id}_\mathbb{R}$ si $a = 0$ donc f_a est bijective. Supposons à présent $a \neq 0$. Donnons-nous une idée en traçant le graphe de f_a. On se rend compte que cela dépend du signe de a : ci-dessous, à gauche, le cas $a > 0$, et à droite, le cas $a < 0$.

On devine (nous allons évidemment le prouver rigoureusement) que f_a est injective non surjective si $a > 0$, et surjective non injective si $a < 0$. Supposons dans un premier temps $a > 0$. Montrons que f_a est injective non surjective.

- Soient $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Supposons $x_1 \neq x_2$. Trois cas se présentent : soient x_1 et x_2 sont strictement négatifs, soit x_1 et x_2 sont positifs ou nuls, soit l'un est strictement négatif et l'autre positif ou nul.
  — Si x_1 et x_2 sont strictement négatifs, alors $f_a(x_1) = x_1 - a \neq x_2 - a = f_a(x_2)$.
  — De même, $f_a(x_1) \neq f_a(x_2)$ si x_1 et x_2 sont positifs ou nuls.
  — Supposons enfin $x_1 < 0 \leq x_2$ (raisonnement analogue dans le cas $x_2 < 0 \leq x_1$). Alors $f_a(x_1) = x_1 - a < 0$ car $a > 0$ et $f_a(x_2) = x_2 + a \geq 0$: en particulier, $f_a(x_1) \neq f_a(x_2)$.

  Dans tous les cas, $f_a(x_1) \neq f_a(x_2)$. Ainsi f est injective.
- Montrons par l'absurde que 0 n'a pas d'antécédent par f_a. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_a(x) = 0$. Si $x \geq 0$ alors $f_a(x) = a > 0$ ce qui est absurde car $f_a(x) = 0$. Si $x < 0$ alors $f_a(x) = -a < 0$ ce qui est aussi absurde. Dans tous les cas, c'est absurde : 0 n'a pas d'antécédent donc f_a n'est pas surjective.

Supposons à présent $a < 0$ et montrons que f_a est surjective non injective.

- Comme $a < 0$, on a $f_a(a) = a - a = 0$. Comme $-a > 0$, on a $f_a(-a) = -a + a = 0$. Ainsi 0 a deux antécédents donc f_a n'est pas injective.
- Soit $y \in \mathbb{R}$.
  — Supposons $y \geq 0$. Alors $y - a \geq 0$ (rappelons que $a < 0$) donc $f(y - a) = (y - a) + a = y$.
  — Supposons $y < 0$. Alors $y + a < 0$ donc $f(y + a) = (y + a) - a = y$.

  Dans tous les cas, y a un antécédent. Ainsi f est surjective.

Exercice 42 : ✪✪

1. Montrer que la fonction $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de $\mathscr{P}(E)$ dans $\{0;1\}^E$. En déduire (à l'aide de l'exercice 20) qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\{0;1\}^E$.
2. Soient A et B deux parties de E. Montrer les propriétés suivantes :
   - $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
   - $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
   - $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
   - $\mathbb{1}_{A\Delta B} \equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B [2]$.
3. Redémontrer à l'aide des résultats précédents la distributivité de l'intersection sur l'union, la distributivité de l'union sur l'intersection, et l'associativité de la différence symétrique.

1. Rappelons que, si $A \in \mathscr{P}(E)$ et si $x \in E$, alors : $x \in A \iff \mathbb{1}_A(x) = 1$. Soient A et B deux parties distinctes de E. Il existe donc $x \in B$ tel que $x \notin A$ ou il existe $x \in A$ tel que $x \in B$. Dans le premier car, $\mathbb{1}_B(x) = 1$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$, et dans le second cas, $\mathbb{1}_B(x) = 0$ et $\mathbb{1}_A(x) = 1$. Dans tous les cas, $\mathbb{1}_A \neq \mathbb{1}_B$ car ces deux fonctions diffèrent en au moins un point, c'est-à-dire que $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est injective. Soit à présent $f \in \{0;1\}^E$ et soit $A = f^{-1}(\{1\})$ c'est-à-dire que A est l'ensemble des éléments de E dont l'image par f vaut 1. Alors : $f(x) = 1 \iff x \in A$, c'est-à-dire que $f = \mathbb{1}_A$: $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est surjective donc bijective. Notons φ cette bijection. S'il existe une bijection $\psi : E \to \{0;1\}^E$ alors $\varphi^{-1} \circ \psi$ est une bijection (car composée de bijections) de E dans $\mathscr{P}(E)$ ce qui contredit l'exercice 20.
2. Soit $x \in E$.
   - Travaillons par équivalences. Rappelons qu'une fonction indicatrice ne prend que les valeurs 1 ou 0.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{1}_A(x)\times\mathbb{1}_B(x)=1 \quad &\iff \quad \mathbb{1}_A(x)=1 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{1}_B(x)=1\\
&\iff \quad x\in A \qquad \text{et} \qquad x\in B\\
&\iff \quad x\in A\cap B
\end{aligned}
$$

ce qui donne le résultat voulu.

- Si $x\in A$ alors $\mathbb{1}_A=1$ donc $1-\mathbb{1}_A=0$, et si $x\in\overline{A}$ alors $\mathbb{1}_A(x)=0$ donc $1-\mathbb{1}_A(x)=1$. Ainsi, $1-\mathbb{1}_A$ est égale à 1 sur $\overline{A}$ et à 0 ailleurs donc est bien égale à $\mathbb{1}_{\overline{A}}$.
- Supposons que $x\in A\cup B$. Trois cas sont possibles : $x\in A\backslash B$, $x\in B\backslash A$ et $x\in A\cap B$. Dans tous les cas, $\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)-\mathbb{1}_A(x)\times\mathbb{1}_B(x)=1$. Si $x\notin A\cup B$, alors $x\notin A$ et $x\notin B$ et donc en particulier $x\notin A\cap B$ si bien que $\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)-\mathbb{1}_A(x)\times\mathbb{1}_B(x)=0$ ce qui permet de conclure.
- Supposons que $x\in A\Delta B$. Alors $x\in A\backslash B$ ou (exclusif) $x\in B\backslash A$. Dans tous les cas, $\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)=1=\mathbb{1}_{A\Delta B}(x)$. Supposons à présent que $x\notin A\Delta B$. Soit $x\notin A\cup B$ et alors $\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)=0$, soit $x\in A\cap B$ et alors $\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)=2$. Dans tous les cas, on a $\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)\equiv\mathbb{1}_{A\Delta B}[2]$.

3. Soient (A,B,C) trois parties de E. D'après ce qui précède :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} \quad &\equiv \quad \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_{B\Delta C}[2]\\
&\equiv \quad \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C[2]
\end{aligned}
$$

et idem pour $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}$. Ainsi, $\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}\equiv\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}[2]$. Or, une indicatrice ne prend que des valeurs entre 0 et 1, et deux nombres compris entre 0 et 1 sont congrus modulo 2 si et seulement s'ils sont égaux, donc $\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}=\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}$. La fonction indicatrice caractérise l'ensemble (ou juste car $A\mapsto\mathbb{1}_A$ est injective d'après la question 1) donc $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$: la différence symétrique est bien associative.

Toujours d'après ce qui précède :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\cap(B\cup C)} \quad &= \quad \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_{B\cup C}\\
&= \quad \mathbb{1}_A\times(\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-\mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_C)\\
&= \quad \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_C-\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_C
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathbb{1}_{(A\cap B)\cup(A\cap C)} \quad &= \quad \mathbb{1}_{A\cap B}+\mathbb{1}_{A\cap C}-\mathbb{1}_{A\cap B}\times\mathbb{1}_{A\cap C}\\
&= \quad \mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_C-\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B\times\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_C
\end{aligned}
$$

Or, $\mathbb{1}_A$ ne prend que les valeurs 0 et 1 donc $\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_A=\mathbb{1}_A$ si bien que

$$\mathbb{1}_{(A\cap B)\cup(A\cap C)}=\mathbb{1}_{A\cap(B\cup C)}$$

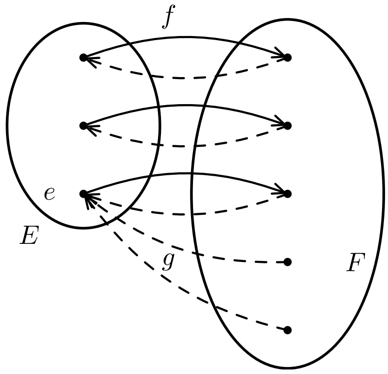
et on conclut comme ci-dessus.

Exercice 43 : ✪✪ Soit f de E dans F. Montrer les équivalences suivantes :

- f est injective si et seulement s'il existe g de F dans E telle que $g\circ f=\mathrm{Id}_E$.
- f est surjective si et seulement s'il existe g de F dans E telle que $f\circ g=\mathrm{Id}_F$.

- Supposons qu'il existe $g:F\to E$ telle que $g\circ f=\mathrm{Id}_E$. Alors $g\circ f$ est injective donc f est injective (cf. exercice 29).
- Réciproquement, supposons f injective. On veut prendre $g=f^{-1}$ mais le problème est que f^{-1} n'est définie que sur $f(E)$. Il suffit d'attribuer une valeur quelconque aux éléments de F non atteints. Soit $e\in F$. Soit

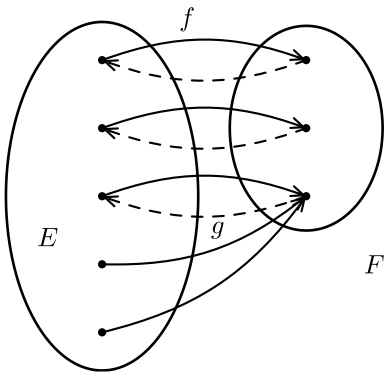
$$
g:\left\{\begin{array}{ccc} F & \to & E\\ y & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} f^{-1}(y) & \text{si } y\in f(E)\\ e & \text{sinon}\end{array}\right.\end{array}\right.
$$



Prouvons que g convient. Soit $x \in E$. Alors $f(x) \in f(E)$ donc $g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ si bien que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

- Supposons qu'il existe $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Alors $f \circ g$ est surjective donc f est surjective (cf. exercice 29).
- Réciproquement, supposons g surjective. Là aussi, on veut prendre $g = f^{-1}$ mais f n'est pas forcément injective. Il suffit en fait de prendre **un** antécédent de chaque élément. Soit

$$g : \begin{cases} F & \to & E \\ y & \mapsto & \textbf{un} \text{ antécédent de } y \text{ par } f \end{cases}$$



Prouvons que g convient. Soit $y \in F$. Alors $g(y)$ est un antécédent de y par f si bien que $f(g(y)) = y$: $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Exercice 44 : ✪✪ Soit f de E dans F. Montrer les équivalences suivantes :

- f est injective si et seulement si : $\forall A \in \mathscr{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.
- f est surjective si et seulement si : $\forall B \in \mathscr{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

Correction :

- Supposons f injective. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Par définition (rappelons que $x \in f^{-1}(\text{truc})$ si et seulement si $f(x) \in$ truc), $f(x) \in f(A)$: il existe donc $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$ et f est injective donc $x = a$ c'est-à-dire que $x \in A$. En d'autres termes, $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Réciproquement, soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}(f(A))$. D'où l'inclusion réciproque (celle-ci ne nécessitant pas l'injectivité de f, elle est toujours vraie), d'où l'égalité.
- Réciproquement, supposons que $f^{-1}(f(A)) = A$ pour toute partie A de E et prouvons que f est injective. Soient donc x_1 et x_2 deux éléments de E, et supposons que $f(x_1) = f(x_2)$. Soit $A = \{x_1\}$. Alors $f(A) = \{f(x_1)\}$ (rappelons que $f(A)$ est un ensemble, plus précisément une partie de F, on n'a pas $f(A) = f(x_1)$). Par hypothèse, $f(x_2) = f(x_1) \in f(A)$ donc $x_2 \in f^{-1}(f(A)) = A$ donc $x_2 \in \{x_1\}$: puisque x_1 est le seul élément de $\{x_1\}$, $x_2 = x_1$, c'est-à-dire que f est injective.

  Remarque : dans le cas général, lorsque f n'est pas forcément injective, tout ce qu'on peut affirmer est que $A \subset f^{-1}(f(A))$. L'inclusion réciproque est fausse en général : on peut s'en convaincre avec un exemple patatoïdal (s'inspirer des dessins ci-dessus) ou avec un exemple réel : si f est la fonction carré, alors $f^{-1}(f(\mathbb{R}_+)) = \mathbb{R}$.

- Supposons f surjective. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$: il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Or, le fait que $x \in f^{-1}(B)$ signifie exactement que $f(x) \in B$ si bien que $y \in B$: $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Remarquons qu'on n'a pas utilisé la surjectivité de f : cette inclusion est donc toujours vraie. Réciproquement, soit $y \in B$. f étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or, $f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$ si bien que $y = f(x) \in f^{-1}(f(B))$: d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.
- Réciproquement, supposons que $f(f^{-1}(B)) = B$ pour toute partie B de F et prouvons que f est surjective. Soit

$B = F$. Alors $f(f^{-1}(B)) = B$. Soit donc $y \in F$. Alors $y \in f(f^{-1}(F))$ c'est-à-dire qu'il existe $x \in f^{-1}(F)$ tel que $y = f(x)$. En particulier, y admet un antécédent : f est surjective.

Remarque : dans le cas général, lorsque f n'est pas forcément surjective, tout ce qu'on peut affirmer est que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. L'inclusion réciproque est fausse en général : on peut s'en convaincre avec un exemple patatoïdal (s'inspirer des dessins ci-dessus) ou avec un exemple réel : si f est la fonction carré, alors $f(f^{-1}(\mathbb{R})) = \mathbb{R}_+$.

Exercice 45 - Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$: ✪✪ Montrer que la fonction $n \mapsto (-1)^n \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. Illustrer par un dessin.

Correction : On a $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = -2$, $f(4) = 2$, $f(5) = -3$, $f(6) = 3$ etc. On « voit » que tout entier relatif va être atteint une et une seule fois, donc qu'on a bien une bijection. Cela se voit encore mieux sur le dessin suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 2 \arrow[d] & 3 \arrow[d] & 4 \arrow[d] & \cdots \\
\mathbb{Z} & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \cdots
\end{tikzcd}$$

Prouvons le rigoureusement. Tout d'abord, f est bien à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Ensuite, $f(n) = 0 \iff \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor = 0$. Si $n \geq 1$ alors $(n+1)/2 \geq 1$ donc $f(n) \neq 0$. Ainsi, 0 admet exactement un antécédent : 0. Supposons à présent que n_1 et n_2 sont deux entiers distincts non nuls. Si n_1 et n_2 sont de parités contraires, alors $f(n_1) \neq f(n_2)$ car $f(n_1)$ et $f(n_2)$ sont de signes contraires (et non nuls donc ne peuvent pas être égaux). Supposons n_1 et n_2 de même parité. Sans perte de généralité, supposons $n_1 < n_2$ (ils sont distincts : l'un est strictement supérieur à l'autre). Il existe donc $k \geq 1$ tel que $n_2 = n_1 + 2k$ et donc

$$\begin{aligned}
f(n_2) &= (-1)^{n_2} \times \left\lfloor \frac{n_2+1}{2} \right\rfloor \\
&= (-1)^{n_1+2k} \times \left\lfloor \frac{n_1+1+2k}{2} \right\rfloor \\
&= (-1)^{n_1} \times \left\lfloor \frac{n_1+1}{2} + k \right\rfloor \\
&= (-1)^{n_1} \times \left(\left\lfloor \frac{n_1+1}{2} \right\rfloor + k \right) \\
&= f(n_1) + (-1)^{n_1} \times k
\end{aligned}$$

et puisque $k \geq 1$, $f(n_2) \neq f(n_1)$: f est injective. Soit à présent $y \in \mathbb{N}$. Supposons $y \geq 0$. Alors (on a l'idée en regardant les premiers termes ci-dessus : calculer les premiers termes peut toujours être utile, même si on peut le trouver à l'aide des inégalités donnant la partie entière, exo)

$$\begin{aligned}
f(2y) &= (-1)^{2y} \times \left\lfloor \frac{2y+1}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor y + \frac{1}{2} \right\rfloor \\
&= y
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $2y$ est un antécédent de y. Supposons à présent $y < 0$. On montre de même que $2y - 1$ est un antécédent de y. Dans tous les cas, y admet un antécédent : f est surjective donc bijective.

Exercice 46 : ✪✪✪ Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}, f(x) = x^3$ sinon, et $g(x) = x^3$ si $x \in \mathbb{Q}, g(x) = x$ sinon. f et g sont-elles injectives ? surjectives ?

Correction On prouve que $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel de la même façon qu'on prouve que $\sqrt{2}$ est irrationnel : on montre d'abord que, si $n \in \mathbb{N}$, alors n^3 et n ont la même parité, et ensuite on fait un raisonnement par l'absurde (cf. chapitre 0, deuxième démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$).

- $f(2) = f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 2$ donc f n'est pas injective. On voit qu'il est faux de dire : « $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x^3$ sont injectives donc f est injective » ! Idem (cf. exercice 34), il est faux de dire que f est injective sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ donc est injective !
- Montrons que f est surjective. Soit $y \in \mathbb{R}$. Si y est rationnel, alors $f(y) = y$. Si y est irrationnel, alors $\sqrt[3]{y}$ est aussi irrationnel (on le montre par contraposée comme dans le chapitre 1 où on l'a montré pour la racine carrée) donc $f\left(\sqrt[3]{y}\right) = y$. Dans tous les cas, y admet un antécédent : f est surjective.
- Montrons que g est injective. Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et supposons $x_1 \neq x_2$. Trois cas sont possibles : soit les deux sont rationnels, soit les deux sont irrationnels, soit l'un est rationnel et l'autre irrationnel.
  — Si x_1 et x_2 sont rationnels alors $g(x_1) = x_1^3$ et $g(x_2) = {x_2}^3$. Or, deux réels distincts ont des cubes distincts : en d'autres termes, $g(x_1) \neq g(x_2)$.
  — Si x_1 et x_2 sont irrationnels alors $g(x_1) = x_1$, $g(x_2) = x_2$. Dès lors, $g(x_1) \neq g(x_2)$.
  — Supposons sans perte de généralité que $x_1 \in \mathbb{Q}$ et $x_2 \notin \mathbb{Q}$. Alors $g(x_1) = {x_1}^3 \in \mathbb{Q}$ (le cube d'un rationnel est rationnel) et $g(x_2) = x_2 \notin \mathbb{Q}$. En particulier, $g(x_1) \neq g(x_2)$ (un rationnel ne peut pas être égal à un irrationnel).
  Dans tous les cas, $g(x_1) \neq g(x_2)$. Ainsi g est injective.
- Montrons par l'absurde que 2 n'a aucun antécédent par g. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 2$.
  — Si $x \in \mathbb{Q}$ alors $g(x) = x^2$ donc $x^3 = 2$ si bien que $x = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$: c'est absurde.
  — Si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $g(x) = x$ donc $x = 2 \in \mathbb{Q}$: c'est aussi absurde.
  Dans tous les cas on obtient une absurdité : 2 n'a aucun antécédent par g et donc g n'est pas surjective.

Exercice 47 : ✪✪✪ Soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$. Définissons :

$$h : \left\{\begin{array}{lcl} E & \to & F \times G \\ \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}\right.$$

1. Montrer que si f ou g est injective, alors h l'est aussi. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si h est surjective, alors f et g le sont. La réciproque est-elle vraie ?

Correction :

1. Supposons donc f injective. Soient x_1 et x_2 deux éléments de E distincts. Alors $f(x_1) \neq f(x_2)$ donc $h(x_1) \neq h(x_2)$ car ces deux éléments n'ont pas la même première coordonnée : h est injective. De même si g est injective. La réciproque est fausse : h peut être injective sans que f ou g le soit : f peut prendre deux fois la même valeur et g et g aussi mais cela n'arrive pas forcément en même temps. Donnons un exemple : supposons que $E = F = G = \mathbb{R}$ et que f est la fonction carré et $g : x \mapsto (x-1)^2$. Ni f ni g n'est injective mais prouvons que h l'est. Soient x_1 et x_2 deux réels et supposons que $h(x_1) = h(x_2)$. Alors $f(x_1) = f(x_2)$ donc $x_1 = \pm x_2$: si $x_1 = x_2$ alors h est injective. Supposons que $x_1 = -x_2$. On a également $g(x_1) = g(x_2)$ donc $(x_1 - 1)^2 = (-x_1 - 1)^2$ donc
$${x_1}^2 - 2x_1 + 1 = {x_1}^2 + 2x_1 + 1$$
si bien que $x_1 = -x_1$ et donc $x_1 = 0 = x_2$. Dans tous les cas, $x_1 = x_2$: h est injective.
2. Par contraposée : supposons f ou g non surjective. Si f n'est pas surjective, il existe $y \in F$ n'ayant aucun antécédent par f et donc aucun couple de la forme $(y, \dots)$ n'a d'antécédent par h : si $z \in G$, (y, z) n'a aucun antécédent par h, h n'est pas surjective, et idem si g n'est pas surjective, d'où le résultat par contraposée. Montrons que la réciproque est fausse : si $E = F = G = \mathbb{R}$ et si $f = g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, f et g sont surjective mais h ne l'est pas car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = (x, x)$ et donc (par exemple), $(1, 0)$ n'est pas atteint.

Exercice 48 : ✪✪✪ Montrer que

$$f : \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \\ (x, y) \mapsto (x + y, xy) \end{array}\right.$$

n'est ni injective, ni surjective, et donner $f(\mathbb{R}^2)$.

Correction : f n'est pas injective car $f(1, 0) = f(0, 1)$ (plus généralement, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = f(y, x)$). Cherchons l'image de f. Soit $(s, p) \in \mathbb{R}^2$.

$$(s, p) \in f(\mathbb{R}^2) \iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = s \qquad \text{et} \qquad xy = p$$

Or, comme on l'a vu en classe, les éventuels x et y qui conviennent sont les solutions de l'équation $x^2 - sx + p = 0$. En particulier, il existe des solutions si et seulement si $\Delta = s^2 - 4p \geq 0$. Dès lors :

$$f(\mathbb{R}^2) = \{(s, p) \in \mathbb{R}^2 \,|\, s^2 - 4p \geq 0\}$$

En particulier, $(0,1) \notin f(\mathbb{R}^2)$: f n'est pas surjective.

Exercice 49 : ✪✪✪ Soient A et B deux parties de E. Définissons

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \rightarrow & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ & & \\ X & \mapsto & (A \cap X, B \cap X) \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Trouver une CNS pour que φ soit surjective.
3. Lorsque φ est bijective, expliciter φ^{-1}.

Correction :

1. Supposons que $A \cup B \neq E$. Dès lors, il existe $x \in E \backslash (A \cup B)$ et donc $f(\varnothing) = f(\{x\}) = (\varnothing, \varnothing)$: f n'est pas injective. Supposons à présent que $A \cup B = E$. Soient X_1 et X_2 deux parties distinctes de E. Il existe donc $x \in X_1$ tel que $x \notin X_2$ ou il existe $x \in X_2$ tel que $x \notin X_1$. Supposons qu'il existe $x \in X_1$ tel que $x \notin X_2$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). Puisque $x \in E = A \cup B$, $x \in A$ ou $x \in B$. Sans perte de généralité, supposons que $x \in A$. Alors $x \in A \cap X_1$ mais $x \notin A \cap X_2$ si bien que $\varphi(X_1) = (A \cap X_1, B \cap X_1)$ et $\varphi(X_2) = (A \cap X_2, B \cap X_2)$ n'ont pas la même première coordonnées donc sont distincts : φ est injective.
2. Montrons que φ est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$. Supposons que $A \cap B \neq \varnothing$. Il existe donc $x \in A \cap B$. Si $X \in \mathscr{P}(E)$, de deux choses l'une : ou $x \in X$ et alors $x \in A \cap X$ et $x \in B \cap X$, ou alors $x \notin X$ et alors $x \notin A \cap X$ et $x \notin B \cap X$. En d'autres termes, soit x appartient aux deux ensembles $A \cap X$ et $B \cap X$, soit x n'appartient à aucun des deux. En particulier, $(\varnothing, \{x\})$ n'a aucun antécédent par φ : φ n'est pas surjective. Supposons à présent $A \cap B = \varnothing$. Soit $(X_1, X_2) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$. Posons $X = X_1 \cup X_2$ et prouvons que $\varphi(X) = (X_1, X_2)$: n a, par distributivité de l'intersection sur l'union, $A \cap X = (A \cap X_1) \cup (A \cap X_2)$. Or, $X_1 \subset A$ donc $A \cap X_1 = X_1$ et $X_1 \subset B$ et $A \cap B = \varnothing$ donc $B \cap X_1 = \varnothing$ si bien que $A \cap X = X_1$. De même, $B \cap X = X_2$: $\varphi(X) = (X_1, X_2)$, X est un antécédent de (X_1, X_2) par φ, φ est surjective.
3. Supposons donc φ bijective. On a vu que, si $(X_1, X_2) \in \mathscr{P}(A) \times P(B)$, $X = X_1 \cup X_2$ est un antécédent de (X_1, X_2). φ étant injective, c'est le seul, c'est-à-dire qu'on a :

$$\varphi^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) & \rightarrow & \mathscr{P}(E) \\ & & \\ (X_1, X_2) & \mapsto & X_1 \cup X_2 \end{array} \right.$$

Exercice 50 : ✪✪✪ Soit φ une application de F dans G. On définit l'application Γ suivante :

$$\Gamma : \left\{ \begin{array}{ccc} F^E & \rightarrow & G^E \\ & & \\ f & \mapsto & \varphi \circ f \end{array} \right.$$

Montrer que Γ est injective (respectivement surjective) si et seulement si φ est injective (respectivement surjective).

Correction : Il faut bien faire attention que Γ est une application de F^E dans G^E.

- Supposons φ est injective. Soient f_1 et f_2 deux fonctions de E dans F telles que $\Gamma(f_1) = \Gamma(f_2)$. Cela signifie que pour tout $x \in E, \varphi(f_1(x)) = \varphi(f_2(x))$ et comme φ est injective, $f_1(x) = f_2(x)$ et donc $f_1 = f_2$: Γ est injective.
- Supposons φ non injective : il existe $x_1 \neq x_2$ appartenant à F tels que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Notons $y = \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Posons f_1 et f_2 les fonctions (distinctes) de E dans F constantes respectivement égales à x_1 et x_2. Alors $\Gamma(f_1) = \Gamma(f_2)$ est la fonction constante égale à y donc Γ n'est pas injective. En conclusion, Γ est injective si et seulement si φ l'est.
- Supposons φ surjective. Soit $g \in G^E$, donnons une fonction $f \in F^E$ telle que $g = \varphi \circ f = \Gamma(f)$, c'est-à-dire que pour tout $x \in E, g(x) = \varphi(f(x))$. Soit $x \in E$. φ étant surjective, $g(x)$ a un antécédent par φ donc il existe $y \in F$ tel que $g(x) = \varphi(y)$. On pose $f(x) = y$: on définit ainsi une fonction f de E dans F et, par définition de f, pour tout $x \in E, \varphi(f(x)) = g(x)$ et donc $\varphi \circ f = \Gamma(f) = g$ donc Γ est surjective.
- Si φ n'est pas surjective, il existe un élément $z \in G$ non atteint par φ. Alors la fonction constante égale à z n'est pas atteinte par Γ donc Γ n'est pas surjective. D'où l'équivalence.

Exercice 51 : ✪✪✪

1. À l'aide du théorème de Cantor-Bernstein, montrer qu'il existe une bijection de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $]\,0\,;1\,[$.
2. En déduire qu'il existe une bijection de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$ mais pas de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser l'exercice 20).

Correction :

1. D'après le théorème de Cantor-Bernstein, il suffit de prouver qu'il existe une injection de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $]\,0\,;1\,[$ et une injection de $]\,0\,;1\,[$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Soit f la fonction qui va de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $]\,0\,;1\,[$ qui à une partie A de $\mathbb{N}$ associe le réel $y = 0, y_0y_1 \dots y_n \dots$ dont les décimales (comptées à partir du rang 0 !) sont définies de la façon suivante : pour tout $i \in \mathbb{N}, y_i = 1$ si $i \in A$ et $y_i = 0$ sinon. Par exemple, $f(\mathbb{N}) = 0,11111\dots$, $f(\{0;1;4;6\}) = 0,110010100000\dots$, $f(2\mathbb{N}) = 0,1010101010101\dots$ En clair : on met des 1 aux emplacements des entiers appartenant à A (en démarrant au rang 0). Cette fonction est évidemment injective puisque si deux parties ont la même image, alors les deux images ont les mêmes décimales, i.e. les 1 sont aux mêmes endroits donc les deux parties ont les mêmes éléments donc sont égales.

   Réciproquement, soit f la fonction de $]\,0\,;1\,[$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ qui à un réel $y = 0, y_0y_1y_2 \dots y_n \dots$ (on garde la numérotation à partir du rang 0 pour garder la cohérence avec ce qui précède) associe la partie de $\mathbb{N}$ constituée des entiers $y_0, 1y_1$ (numérotation en base 10 : l'entier y_1 avec un 1 devant), $2y_2$, $3y_3$, $4y_4$, ..., $10y_10$ (le chiffre y_{10} avec 10 devant) et ainsi de suite. Par exemple, $\sqrt{2}/2 = 0,707106781186\dots$ donc

   $$f(\sqrt{2}/2) = \{7;10;27;31;40;56;67;78;81;91;108;116;\dots\}$$

   Cette fonction est injective car si deux réels y_1 et y_2 ont la même image, alors en prenant les chiffres des unités, on a les décimales, et en prenant les chiffres devant, on a leur position : y_1 et y_2 ont les mêmes décimales au même endroit donc $y_1 = y_2$, f est injective ce qui permet de conclure.
2. $]\,0\,;1\,[$ et $\mathbb{R}$ sont en bijection (cf. exercice 27 du chapitre 5) donc $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ sont en bijection. S'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ alors, d'après ce qui précède, il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ ce qui contredit l'exercice 20.

3.3 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 52 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est périodique alors f n'est pas injective.
2. Montrer que si f est majorée ou minorée alors f n'est pas surjective.

Correction :

1. Soit $T \neq 0$ une période. Alors $f(0) = f(T)$: f n'est pas injective.
2. Supposons que f soit majorée. Soit M un majorant. Alors $M + 1$ n'est pas atteint : f n'est pas surjective. De même, si f est minorée par un réel m, alors $m - 1$ n'est pas atteint donc f n'est pas surjective.

Exercice 53 : ✪ Donner une bijection de $[\,0\,;1\,]$ dans lui-même non strictement monotone.

Correction : La fonction f définie par $f(x) = x + 1/2$ si $x \in [\,0\,;1/2\,]$ et $f(x) = 1/2 - x$ si $x \in\,]\,1/2\,;1\,]$ sinon.

Exercice 54 : ✪ Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ monotone. Montrer que f est strictement monotone si et seulement si f est une bijection de D sur $f(D)$.

Correction : Si f est strictement monotone, elle est injective donc est une bijection sur son image. Réciproquement, supposons que f ne soit pas strictement monotone. Or, f est monotone donc il existe $c < d$ tels que $f(c) = f(d)$: f n'est pas injective.

Exercice 55 : ✪ Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{x^3+1}$ est une bijection de $[\,-1\,;+\infty\,[$ dans sur un ensemble que l'on précisera, et expliciter la bijection réciproque.

Correction : Soit $x \geq -1$. Tout d'abord, f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Soit donc $y \in \mathbb{R}_+$ et cherchons les antécédents éventuels de f.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^3+1} = y \quad &\iff \quad x^3 + 1 = y^2 \qquad (\text{car } \sqrt{x^3+1} \text{ et } y \text{ sont positifs}) \\
&\iff \quad x^3 = y^2 - 1 \\
&\iff \quad x = \sqrt[3]{y^2-1}
\end{aligned}$$

Rappelons que la fonction cube est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc sa bijection réciproque, la racine cubique, est définie sur $\mathbb{R}$ et pas uniquement sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $\sqrt[3]{y^2-1}$ est l'unique antécédent de y par f. De cela on déduit deux choses : y admet un unique antécédent, et donc f est une bijection de $[\,-1\,;+\infty\,[$ dans $\mathbb{R}_+$, et l'unique antécédent de $y \in \mathbb{R}_+$ est $\sqrt[3]{y^2-1}$ donc la bijection réciproque de f est :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & [-1\,;+\infty[\\ & & \\ y & \mapsto & \sqrt[3]{y^2-1} \end{array} \right.$$

Exercice 56 : ✪ Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ est une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dans un ensemble que l'on précisera, et expliciter sa bijection réciproque.

Correction : Soit $x \neq 1$ et soit $y \in \mathbb{R}$. Cherchons les antécédents éventuels de y.

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-1} = y & \iff x+2 = y(x-1) \\ & \iff x(1-y) = -y-2 \end{aligned}$$

Il y a deux cas : supposons $y = 1$. Alors y n'a aucun antécédent puisque, pour tout $x \neq 1$, $x+2 \neq x-1$ donc $\dfrac{x+2}{x-1} \neq 1$. Supposons à présent $y \neq 1$. Alors :

$$\frac{x+2}{x-1} = y \iff x = \frac{y+2}{y-1}$$

On en déduit que y admet un unique antécédent : $\dfrac{y+2}{y-1}$. On en déduit que f est une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dans lui-même, et que sa bijection réciproque est :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{1\} & \to & \backslash\{1\} \\ & & \\ y & \mapsto & \dfrac{y+2}{y-1} \end{array} \right.$$

On remarque que $f^{-1} = f$: f est une involution.

Exercice 57 : ✪ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$. Montrer que f n'est pas injective mais induit une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un ensemble que l'on précisera, et donner le tableau de variations de f^{-1}.

Correction : La fonction f n'est pas injective car est paire (on a par exemple $f(1) = f(-1)$). f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	-1

x	-1		1
f^{-1}	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

La fonction f est continue, strictement décroissante, $f(0) = 1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$. D'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]-1\,;1]$ (-1 n'est pas atteint alors que 1 l'est) et f^{-1} est de même monotonie que f. On en déduit son tableau de variations (voir ci-dessus).

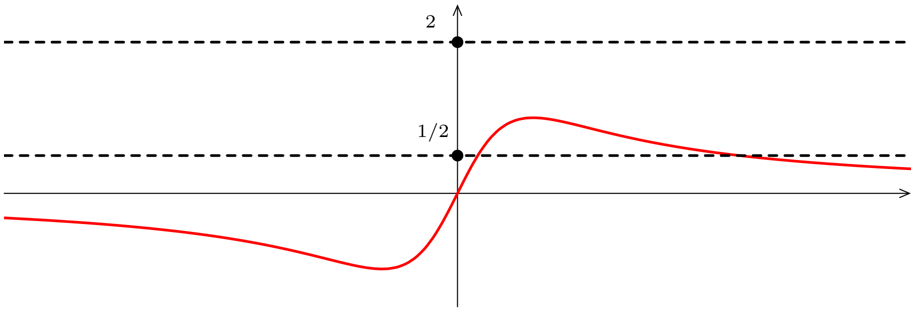
Exercice 58 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. f est-elle injective ? surjective ?

Correction : Donnons le tableau de variations de f. f est dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



D'après le tableau de variations, 2 n'a aucun antécédent (pas besoin de TVI ici) : f n'est pas surjective. Elle n'est pas non plus injective car prend plusieurs fois certaines valeurs. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. D'après le TVI ($f$ est continue, mais il est inutile de parler de monotonie, on a au moins deux antécédents, il est inutile de prouver qu'il y en a exactement deux), il existe $x_1 \in \left]0\,;1\right[$ et $x_2 \in \left]1\,;+\infty\right[$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = 1/2$. Puisque $x_1 < 1 < x_2$, $x_1 \neq x_2$: f n'est pas injective.

Exercice 59 : ✪ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = (e^x - 1)/x$.

1. Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f ainsi prolongée est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble que l'on précisera et donner le tableau de variations de f^{-1}.

Correction :

1. f est continue sur $\mathbb{R}^*$ car quotient de fonctions continues, celle au dénominateur ne s'annulant pas. De plus, l'exponentielle est dérivable en 0 donc

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \exp'(0) = 1$$

   On prolonge f par continuité en posant $f(0) = 1$: f ainsi prolongée est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \neq 0$ (f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais pas forcément dérivable en 0). f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car quotient de fonctions dérivables, celle au dénominateur ne s'annulant pas.

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x + 1}{x^2}$$

   Posons $g(x) = xe^x - e^x + 1$. Alors g est dérivable (sur $\mathbb{R}^*$) car somme et produit de fonctions dérivables et $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$. On en déduit le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
g		$\searrow$	$0 \Vert 0$	$\nearrow$	

   On en déduit que g et donc f' est strictement positive (sur $\mathbb{R}^*$). D'où le tableau suivant (pas de valeur interdite en 0 pour f car on l'a prolongée par continuité) :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	
f	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. D'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ (0 n'est jamais atteint) et f^{-1} est strictement croissante, d'où son tableau de variations ci-dessous :

x	0		$+\infty$
f^{-1}	$\| \; -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 60 : ✪

1. Montrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I que l'on précisera. On note g son application réciproque, définie donc sur I.
2. Montrer que $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$.
3. Montrer que g est dérivable sur I et expliciter g' :
   (a) en appliquant le théorème de dérivation de l'application réciproque.
   (b) en explicitant g.
4. Soient $a < b$ deux réels. Donner une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]\,a\,;b\,[$ et une bijection de $]\,a\,;b\,[$ dans $\mathbb{R}$. Que répondre à quelqu'un disant : « A est inclus strictement dans E donc a strictement moins d'éléments que E donc il n'y a pas de bijection de A dans E » ?

Correction :

1. On sait (cf. cours) que la fonction th est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que $\text{th}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $\text{th}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$. D'après le théorème de la bijection, th est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1\,;1\,[$.
2. Simple calcul.
3. (a) Puisque th est à valeurs dans $]-1\,;1\,[$, $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$ ne s'annule jamais. Dès lors, $g = \text{th}^{-1}$ est dérivable sur $]-1\,;1\,[$ et, pour tout $x \in\,]-1\,;1\,[$,

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{1}{\text{th}'\left(\text{th}^{-1}(x)\right)} \\ &= \frac{1}{1-\text{th}\left(\text{th}^{-1}(x)\right)} \\ &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

   (b) Explicitons g. Rappelons que $g = \text{th}^{-1}$ c'est-à-dire que, pour tout $y \in\,]-1\,;1\,[$, $g(y)$ est l'unique antécédent de y par th. Soit donc $y \in\,]-1\,;1\,[$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{th}(x) = y \quad &\iff \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \\ &\iff \quad e^x - e^{-x} = y\left(e^x + e^{-x}\right) \\ &\iff \quad e^{2x} - 1 = y\left(e^{2x}+1\right) \\ &\iff \quad e^{2x}(1-y) = 1+y \\ &\iff \quad e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \qquad (y \neq 1) \\ &\iff \quad x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \end{aligned}$$

Il en découle que $g(y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\ln(1+y) - \ln(1-y)\right)$ et un calcul simple redonne $g'(y) = \dfrac{1}{1-y^2}$.

4.

Exercice 61 : ✪✪ Montrer par l'absurde qu'une involution strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est égale à l'identité.

Correction : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ involutive strictement croissante. Supposons que f ne soit pas égale à l'identité : il existe donc $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq x$. Dès lors, $f(x) < x$ ou $f(x) > x$. Si $f(x) > x$ alors, en composant par f strictement croissante, il vient $f(f(x)) > f(x)$ et comme f est involutive, $x > f(x)$ ce qui est absurde. On exclut le cas $x > f(x)$ de la même façon.

Exercice 62 : ✪✪ Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ est une bijection de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans un ensemble que l'on explicitera, étudier la dérivabilité de f^{-1} est expliciter sa dérivée.

Correction : La fonction f est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ car quotient de fonctions dérivables, celle au dénominateur ne s'annulant pas. Pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{-\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$. On en déduit que $f' \geq 0$ avec égalité en 0 : f est donc strictement croissante (f' positive et s'annule en un nombre fini de points), continue, avec $f(0) = 1$ et $f(x) \xrightarrow[x \to \pi/2]{} +\infty$. D'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $J = [\,1\,;+\infty\,[$. De plus, f^{-1} est dérivable sauf en l'image (par f) des points en lesquels f' s'annule. Or, f' s'annule uniquement en 0 donc f^{-1} est dérivable sauf en $f(0) = 1$, c'est-à-dire que f^{-1} est dérivable sur $]\,1\,;+\infty\,[$. Soit $y \in\,]\,1\,;+\infty\,[$.

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)} = \frac{\cos^2\left(f^{-1}(y)\right)}{\sin\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Or, par définition de f^{-1}, $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ c'est-à-dire que $1/\cos\left(f^{-1}(y)\right) = y$, si bien que $\cos\left(f^{-1}(y)\right) = 1/y$. Il en découle que $\sin^2\left(f^{-1}(y)\right) = 1 - \dfrac{1}{y^2}$. Or, $f^{-1}(y) \in [\,0\,;\pi/2\,[$ donc son sinus est positif, ce qui implique que $\sin\left(f^{-1}(y)\right) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{y^2}} = \dfrac{\sqrt{y^2-1}}{y}$. Finalement, $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$.

Exercices 63 - Fonctions (presque) (exactement) (doublement) surjectives [2] : ✪✪

Soit $f : E \to F$. On dit que f est :

- presque surjective (de E dans F) si tout élément de F (sauf peut-être un) admet un antécédent par f dans E.
- doublement surjective (de E dans F) si tout élément de F admet au moins deux antécédents par f dans E.
- exactement doublement surjective (de E dans F) si tout élément de F admet exactement deux antécédents par f dans E.
- presque doublement surjective (de E dans F) si tout élément de F (sauf peut-être un) admet au moins deux antécédents par f dans E.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

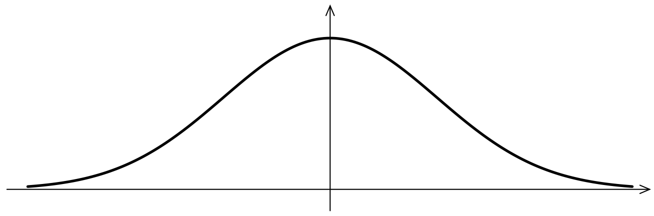
1. Écrire avec des quantificateurs la proposition « f est doublement surjective de E dans F ».
2. Montrer que la fonction carré est presque doublement surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer qu'une application $f : \mathbb{R} \to\,]\,0\,;1\,[$ continue presque surjective est surjective (évidemment de $\mathbb{R}$ dans $]\,0\,;1\,[$).
4. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to [\,0\,;1\,]$ continue, presque surjective mais non surjective.
5. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est-elle presque doublement surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? presque surjective ?

Correction :

1. $\forall y \in F, \exists (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2) = y$.
2. Si $y > 0$ alors y a deux antécédents par la fonction carré : $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$ qui sont bien distincts. Ainsi, tout élément de $\mathbb{R}_+$ sauf 0 (qui en admet un seul mais on n'est même pas obligé de le préciser), admet au moins deux antécédents.
3. Supposons que f soit continue presque surjective de $\mathbb{R}$ dans $]\,0\,;1\,[$ et non surjective. Ainsi, tous les éléments de $]\,0\,;1\,[$ admettent un antécédent, sauf un qu'on note y. Puisque $y \in\,]\,0\,;1\,[$, on a $0 < y < 1$ et donc il existe $y_1 \in\,]\,0\,;y\,[$ et $y_2 \in\,]\,y\,;1\,[$. Par hypothèse, y_1 et y_2 admettent un antécédent par f, qu'on note respectivement x_1 et x_2. On a donc $f(x_1) < y < f(x_2)$. La fonction f étant continue, d'après le TVI, il existe $x \in\,]\,x_1\,;x_2\,[$ tel que $f(x) = y$ c'est-à-dire que y admet un antécédent par f : c'est absurde.
4. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$ convient. En effet, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions dérivables. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. On en déduit le tableau de variations et le graphe de f.

2. Rayer les mentions inutiles...

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Montrons donc que f est presque surjective non surjective de $\mathbb{R}$ dans $[\,0\,;1\,]$. Elle n'est évidemment par surjective car 0 n'a aucun antécédent par f (inutile de justifier davantage, une exponentielle n'est jamais nulle). Soit $y \in \,]\,0\,;1\,]$. Puisque $f(0) = 1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et f étant continue, d'après le TVI, y admet un antécédent par f sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $\mathbb{R}$. Tout élément de $[\,0\,;1\,]$ sauf un admet donc un antécédent par f.

5. La fonction f atteint un minimum (si $a > 0$) ou un maximum (si $a < 0$) en $-b/2a$. En d'autres termes, f est minorée ou majorée : il existe donc une infinité de réels n'ayant aucun antécédent par f. La fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ n'est pas presque surjective, et donc pas presque doublement surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 64 - Début de Centrale - Supélec 2001 : ✪✪

1. Démontrer que la fonction u définie sur $]\,0\,;1\,]$ par $u(t) = \dfrac{1+\ln(t)}{t}$ est une bijection strictement croissante de $]\,0\,;1\,]$ dans $]\,-\infty\,;1\,]$. Montrer que sa fonction réciproque est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,-\infty\,;1\,[$.
2. En déduire l'existence d'une fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel θ, $r(\theta) \in \,]\,0\,;1\,]$ et $r(\theta)e^{-r(\theta)\cos(\theta)} = \dfrac{1}{e}$.
3. Estimer de manière simple $r(0)$ et $r\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
4. Montrer que r est une fonction continue, 2π-périodique et paire. Montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;2\pi\,[$ et que :

$$\forall \theta \in \,]\,0\,;2\pi\,[\,, r'(\theta) = \frac{r(\theta)^2\sin(\theta)}{r(\theta)\cos(\theta) - 1}$$

Exercice 65 : ✪✪

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. Calculer f' et f''. Étudier les variations de f et représenter son graphe. Préciser la concavité et les points d'inflexion éventuels.
2. Soit φ la réciproque de la restriction de f à l'intervalle $]\,0\,;e\,]$. Justifier l'existence de φ et donner son tableau de variations.
3. Soit $\theta = \varphi \circ f$. Montrer que θ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Que vaut $\theta(x)$ lorsque $0 < x \leq e$?
4. Montrer que, pour tout $x > e$, $\theta(x)$ est l'unique $z > 0$ différent de x tel que $z^x = x^z$. Donner une construction géométrique de $\theta(x)$ à partir de x sur le graphe de la question 1.
5. Montrer que θ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;e\,[\, \cup \,]\,e\,;+\infty\,[$. Montrer que pour tout $x \neq e$:

$$\theta'(x) = \frac{\theta(x)^2(1-\ln(x))}{x^2(1-\ln(\theta(x)))}$$

6. Dresser le tableau de variations de θ. Préciser notamment les limites en 0 et $+\infty$.

Exercice 66 : ✪✪✪ Soit α un réel strictement positif. Montrer que pour tout réel x strictement positif, il existe un unique réel strictement positif noté $f(x)$ tel que $f(x)e^{f(x)} = x^\alpha$. Étudier ensuite la dérivabilité de f, et exprimer f' en fonction de f le cas échéant.

Correction : Erreur d'énoncé, il fallait lire à chaque fois « strictement positif ». Soit

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & & \\ y & \mapsto & ye^y \end{array} \right.$$

g est dérivable car produit de fonctions dérivables. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. $g'(y) = e^y + ye^y > 0$ (et en particulier, $g'(y) = e^y + g(y)$) : g est strictement croissante. Alors g est une bijection d'après le théorème de la bijection (continue, strictement croissante, $g(y) \xrightarrow[y\to0]{} 0$ et $g(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$). Il en découle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, x^α a un unique antécédent par g qu'on appelle $f(x)$. En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = g^{-1}(x^\alpha)$. g étant dérivable et sa dérivée ne s'annulant pas, g^{-1} est dérivable et $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x > 0$. $f(x) = g^{-1}(x^\alpha)$ donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \times \left(g^{-1}\right)'(x^\alpha) \\
&= \alpha x^{\alpha-1} \times \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(x^\alpha\right)\right)} \\
&= \alpha x^{\alpha-1} \times \frac{1}{g'\left(f(x)\right)} \\
&= \alpha x^{\alpha-1} \times \frac{1}{e^{f(x)} + g(f(x))} \\
&= \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^{f(x)} + x^\alpha}
\end{aligned}$$

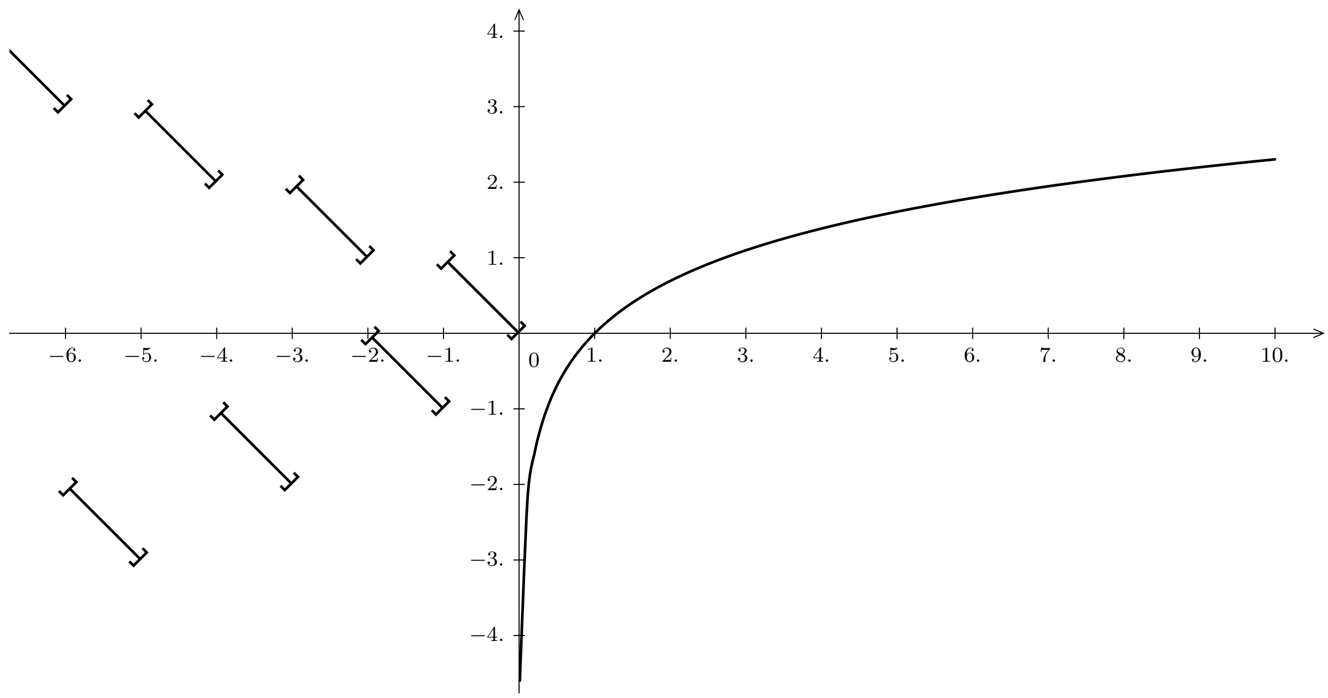
Cette expression suffit, mais on peut même écrire que $e^{f(x)} = x^\alpha / f(x)$ et donc

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\dfrac{x^\alpha}{f(x)} + x^\alpha} \\
&= \frac{\alpha x^{\alpha-1} f(x)}{x^\alpha\left(1 + f(x)\right)}
\end{aligned}$$

Exercice 67 : ✪✪✪ Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que tout réel admette exactement deux antécédents. On cherchera une fonction non continue... [3]

Correction : Il faut donc penser à une fonction non continue. Un exemple est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

- f va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- f est confondue avec ln sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Sur chaque intervalle de la forme $]\,k-1\,;k\,]$ avec $k \in \mathbb{Z}, k \leq -1$, f est affine.
- Si k est pair, $f(k) = -\dfrac{k}{2}$ et tend vers $-\dfrac{k}{2} + 1$ en $k-1$ (sans l'atteindre). Si k est impair, $f(k) = \dfrac{k+1}{2}$ et tend vers $\dfrac{k+1}{2} + 1$ en $k-1$. Ci-dessous le graphe de f :



3. On peut montrer (on le fera peut-être en devoir plus tard dans l'année) que ce n'est pas possible si f est continue.

3.4 Exercices plus théoriques.

Exercice 68 : ✪✪ Soit E un ensemble dont tous les éléments sont des ensembles. On dit que E est transitif si : $\forall x \in E, x \subset E$.

1. Quels sont les ensembles transitifs parmi $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing; \{\varnothing\}\}$ et $\{\{\varnothing\}\}$?
2. Montrer que si E est transitif alors $\mathscr{P}(E)$ est transitif.
3. Montrer que si E est transitif, alors $E \cup \{E\}$ l'est aussi.

Correction :

1. L'ensemble vide est transitif. En effet, il n'y a aucun élément $x \in E$ donc l'assertion « $\forall x \in E$ » est fausse donc l'assertion « $\forall x \in E, x \subset E$ » est vraie. L'ensemble $\{\varnothing\}$ est transitif car son seul élément est le vide qui est également inclus dans $\{\varnothing\}$. L'ensemble $E = \{\varnothing; \{\varnothing\}\}$ est transitif car ses deux seuls éléments sont $\varnothing$ et $\{\varnothing\}$, tous deux inclus dans E. Cependant, $E = \{\{\varnothing\}\}$ n'est pas transitif car son seul élément est $\{\varnothing\}$ qui n'est pas inclus dans E car son seul élément, $\varnothing$, n'appartient pas à E.
2. Supposons E transitif. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors A est une partie de E. Soit $x \in A$. Alors $x \in E$ donc $x \subset E$ car E est transitif. Ainsi, $x \in \mathscr{P}(E)$ donc $\{x\} \subset \mathscr{P}(E)$ (un ensemble est inclus dans $\mathscr{P}(E)$ quand tous ses éléments appartiennent à $\mathscr{P}(E)$) si bien que
$$\bigcup_{x \in A} \{x\} = A \subset \mathscr{P}(E)$$
(une union d'ensembles inclus dans $\mathscr{P}(E)$ est incluse dans $\mathscr{P}(E)$) c'est-à-dire que $\mathscr{P}(E)$ est transitif.
3. Supposons E transitif. Soit $x \in E \cup \{E\}$. Alors $x \in E$ ou $x \in \{E\}$. Si $x \in E$ alors $x \subset E$ car E est transitif donc $x \subset E \cup \{E\}$. Si $x \in \{E\}$ alors $x = E \subset E \cup \{E\}$. Dans tous les cas, $x \subset E \cup \{E\}$: $E \cup \{E\}$ est transitif.

Exercice 69 - L'axiome de fondation : ✪✪✪ L'axiome de fondation est un axiome de la théorie des ensembles qui s'énonce comme suit : pour tout ensemble E, il existe $X \in E$ tel que $X \cap E = \emptyset$.

1. Soit E un ensemble. Montrer que $E \notin E$ (on pourra s'intéresser à l'ensemble $\{E\}$).
2. Généraliser. Plus précisément, montrer que si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles, on ne peut pas avoir $E_1 \in E_2, \dots, E_{n-1} \in E_n$ et $E_n \in E_1$.

Correction :

1. Notons $F = \{E\}$. D'après l'axiome de fondation, il existe $X \in F$ tel que $X \cap F = \varnothing$. Or, F contient un seul élément : E. Ainsi, X est forcément égal à E donc $E \cap F = \varnothing$: aucun élément de F n'appartient à E, et comme E est le seul élément de F, $E \notin F$.
2. Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles, et notons $F = \{E_1; \dots; E_n\}$. D'après l'axiome de fondation, il existe $X \in F$ tel que $X \cap F = \varnothing$. Il existe donc $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que $X = E_i$ et donc tel que $E_i \cap F = \varnothing$. Aucun élément de F n'appartient donc à E_i. Or, $E_{i-1} \in F$ (avec la convention $E_{i-1} = E_n$ si $i = 1$: on travaille de façon cyclique modulo n) donc $E_{i-1} \notin E_i$ ce qui est le résultat voulu.

Chapitre 4

Sommes et produits

4.1 Sommes.

Exercice 1 : ✪ En écrivant cette somme comme une somme télescopique, montrer que $\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$.

Correction : Soit $n\geq 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(2k+1) &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2-k^2\\ &= (n+1)^2-0^2\\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

Exercice 2 : ✪ Calculer (on dit aussi : clore) les sommes suivantes :

- $S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$
- $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}$
- $S_n=\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)$
- $S=\sum_{k=-217}^{2020}\dfrac{3^{k+1}}{2^{k-12}}$
- $S=2+6+10+\cdots+98$
- $S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$
- $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{2}{k+1}+\dfrac{1}{k+2}\right)$

Correction :

- Par linéarité de la somme :

$$\begin{aligned}S_n &= 2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\\ &= 2\times\frac{n(n+1)}{2}-n\\ &= n^2\end{aligned}$$

- Rappelons que, pour tout k, $(-1)^{n-k}=(-1)^{n+k}$ si bien que

$$\begin{aligned}S_n &= (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\\ &= (-1)^n\times\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}\\ &= \frac{(-1)^n-1}{2}\end{aligned}$$

- $S_n=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)^2}{2}-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{n(n+1)}{6}\big(3n+3-2n-1\big).$
  $=\dfrac{n(n+1)(n+1)}{6}$

- Commençons par faire le changement d'indice $j = k + 217$, $k = j - 217$ pour se ramener à une somme qui commence en 0.
$$S = \sum_{j=0}^{2437} \frac{3^{j-216}}{2^{j-229}} = \frac{2^{229}}{3^{216}} \sum_{j=0}^{2437} \left(\frac{3}{2}\right)^j = \frac{2^{229}}{3^{216}} \times \frac{1-(3/2)^{2438}}{1-(3/2)}$$

- On a $S = \sum_{k=0}^{24}(2+4k)$. Par linéarité de la somme, $S = \sum_{k=0}^{24} 2 + 4\sum_{k=0}^{24} k$, et donc (oui, sans calculatrice) :
$$S = 2 \times 25 + 4 \times \frac{24 \times 25}{2} = 50 + 2 \times 24 \times 25 = 50 + 24 \times 50 = 25 \times 50 = 1250.$$

- $S_n = \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big) = \ln(n+1)$ par télescopage et car $\ln(1) = 0$.
- Séparons en trois sommes, en utilisant la linéarité, et faisons les changements d'indice $j = k+1$, $k = j-1$ dans la deuxième somme, et $j = k+2$, $k = j-2$ dans la troisième.
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{j}.$$

  Ensuite, mettons les termes de 3 à n (présents dans les trois sommes, en facteur de $1, -2$ et 1) en facteur, sans oublier les termes restants :
$$S_n = \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) \times (1-2+1) + \underbrace{1}_{k=1} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{k=2} - 2\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{k=2} + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{k=n+1}\right) + \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{k=n+1} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{k=n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}.$$

Exercice 3 : ✪ Pour tout $n \geq 1$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

1. Soit $n \geq 1$. Exprimer S_{2n} en fonction de S_n et T_n.
2. On admet que les suites (S_{2n}) et (S_n) convergent vers une même limite L. Montrer que la suite (T_n) converge vers une limite L' que l'on exprimera en fonction de L.

Remarque : On montrera plusieurs fois dans l'année que $L = \pi^2/6$.

Correction :

1. Soit $n \geq 1$. Séparons S_{2n} selon termes pairs/termes impairs et faisons, dans la somme des termes pairs, le changement d'indice $k = 2j$, et dans la somme des termes impairs, le changement d'indice $k = 2j-1$:
$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j)^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j-1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2} \\ &= \frac{S_n}{4} + T_n \end{aligned}$$

2. Soit $n \geq 1$. D'après la question précédente,
$$T_n = S_{2n} - \frac{S_n}{4} \xrightarrow[n \to +\infty]{} L - \frac{L}{4} = \frac{3L}{4}$$

   (T_n) converge donc vers une limite L' égale à $3L/4$.

Exercice 4 : ✪ À l'aide de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^5-k^5\right)$, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4$. Généraliser.

Notons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^5-k^5\right)$. Par télescopage, $S_n=(n+1)^5-1$. De plus, en développant (à l'aide du triangle de Pascal) :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}(k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1k^5) \\ &= 5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\sum_{k=1}^{n}k^3+10\sum_{k=1}^{n}k^2+5\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1 && \text{(linéarité)} \\ &= 5\sum_{k=1}^{n}k^4+10\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}+10\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+5\times\frac{n(n+1)}{2}+n \end{aligned}$$

et cette somme étant égale à $(n+1)^5$, on peut en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4$. On généralise de proche en proche : si on connaît $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k,\dots,\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}$, on trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^p$ en calculant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p+1}-k^{p+1}$, d'une part par télescopage, d'autre part en développant.

Exercice 5 : ✪ Soit n un entier non nul. On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{4}{5}\right)^k$. Montrer que

$$S_n=\frac{4\times5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$$

Correction : Par récurrence sur n.

- Si $n\geq 1$, notons H_n : « $S_n=\dfrac{4\times5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$ ».
- D'une part, $S_1=4/5$ et, d'autre part, $\dfrac{4\times5^{1+1}-(5+1)4^{1+1}}{5^1}=\dfrac{100-96}{5}=\dfrac{4}{5}$ donc H_1 est vraie.
- Soit $n\geq1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. $S_{n+1}=S_n+(n+1)\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}$. Par H.R. :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{4\times5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}+(n+1)\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \\ &= \frac{4\times5^{n+2}-5(5+n)4^{n+1}+(n+1)\times4^{n+1}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4\times5^{n+2}-(25+5n-n-1)4^{n+1}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4\times5^{n+2}-(24+4n)4^{n+1}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4\times5^{n+2}-(6+n)4^{n+2}}{5^{n+1}} \\ &= \frac{4\times5^{n+2}-(5+n+1)4^{n+2}}{5^{n+1}} \end{aligned}$$

  c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n\geq1$.

Exercice 6 : ✪ Montrer par récurrence les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\qquad\text{et}\qquad\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Correction : Pour la première somme (notons-la S_n).

- Si $n\geq1$, notons H_n : « $S_n=n(n+1)(2n+1)/6$ ».

- D'une part, $S_1 = 1^2 = 1$ et, d'autre part, $\dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = 1$ donc H_1 est vraie.
- Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$. Par H.R.,
$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6}.$$
Or, $n(2n+1)+6(n+1) = 2n^2+7n+6$ et $(n+2)(2(n+1)+1) = 2n^2+7n+6$, si bien que $S_{n+1} = (n+1)(n+2)(2(n+1)+1)/6$ donc H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Pour la deuxième somme (notons-la T_n).
- Pour tout $n \geq 1$, notons H_n : « $T_n = n^2(n+1)^2/4$. »
- D'une part, $T_1 = 1^3 = 1$ et, d'autre part, $\dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ donc H_1 est vraie.
- Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. $T_{n+1} = T_n + (n+1)^3$. Par H.R.,
$$T_{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2\left[n^2+4(n+1)\right]}{4}.$$
Or, $n^2+4(n+1) = n^2+4n+4 = (n+2)^2$ si bien que $T_{n+1} = (n+1)^2(n+2)^2/4$ donc H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 7 - Un avant-goût des séries géométriques : ✪✪ En dérivant l'expression de la somme d'une suite géométrique, calculer, pour tout x réel et tout $n \geq 1$, la quantité $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k$.

Correction : Tout d'abord, si $x = 1$, alors $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Supposons $x \neq 1$ dans la suite. Suivons l'indication de l'énoncé et posons $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$. Alors f est dérivable (c'est une fonction polynôme) et :
$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$$
c'est-à-dire que $S_n(x) = xf'(x)$. Or, $f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ donc
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+1-x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n+nx^{n+1}+1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$
Et finalement, $S_n(x) = \dfrac{-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}+x}{(1-x)^2}$.

Exercice 8 : ✪✪ Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. En calculant de deux façons la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k-1} x^k$, retrouver le résultat de l'exercice précédent.

Correction : Supposons encore $x \neq 1$, sinon le résultat est immédiat. Tout d'abord, x^k étant indépendant de l'indice j, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx^k$. Si on intervertit les sommes :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} x^k \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-j-1} x^{i+j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} x^{j+1}\sum_{i=0}^{n-j-1} x^i \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} x^{j+1}\frac{1-x^{n-j}}{1-x} \\
&= \frac{1}{1-x}\sum_{j=0}^{n-1}(x^{j+1}-x^{n+1}) \\
&= \frac{1}{1-x}\left(x\sum_{j=0}^{n-1}x^j - \sum_{j=0}^{n-1}x^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{1-x}\left(x\times\frac{1-x^n}{1-x} - nx^{n+1}\right) \\
&= \frac{x-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{x-x^{n+1}-nx^{n+1}(1-x)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

Exercice 9 - Interversions en vrac : ✪✪ Compléter les interversions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=?}^{?}\sum_{i=?}^{?} a_{ij} = \sum_{?} a_{ij}$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=?}^{?}\sum_{i=?}^{?} a_{ij} = \sum_{?} a_{ij}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=?}^{?}\sum_{i=?}^{?} a_{ij} = \sum_{?} a_{ij}$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=?}^{?}\sum_{i=?}^{?} a_{ij} = \sum_{?} a_{ij}$

Correction :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leq j\leq i\leq n} a_{i,j}$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$

Exercice 10 : ✪✪ En calculant de deux manières la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} k$, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Correction : Soit $n\geq 1$. Notons $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$. Puisque le but est de trouver la valeur de T_n, nous ne supposerons donc pas sa valeur connue. Tout d'abord,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{i-1} k\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i-1)}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i$$

si bien que $S_n = \dfrac{n^2(n+1)}{2} - \dfrac{T_n}{2} + \dfrac{n(n+1)}{4}$. De plus, en intervertissant les deux sommes dans S_n, il vient $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k k$. Or, l'indice de sommation de la deuxième somme est i donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n k^2 = T_n$. Par conséquent, $T_n = \dfrac{n^2(n+1)}{2} - \dfrac{T_n}{2} + \dfrac{n(n+1)}{4}$, et je vous laisse vérifier que l'on retrouve bien $T_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 11 - Quelques sommes multiples : ✪✪ Calculer les sommes suivantes, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $a_n = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2} \min(i,j)$
2. $b_n = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2} \max(i,j)$
3. $c_n = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij$
4. $d_n = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} i+j$
5. $e_n = \displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq j\leq n\\ |i-j|=1}} ij$
6. $f_n = \displaystyle\sum_{\substack{0\leq i,j\leq n\\ i+j=n}} ij$
7. $g_n = \displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} 2^{i-j}$
8. $h_n = \displaystyle\sum_{1\leq j\leq i\leq n} \frac{j}{i+1}$
9. $i_n = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n i2^{j+k}$

Correction :

1. Fait en classe.
2.

$$\begin{aligned}
b_n &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i,j)\\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i i + \sum_{j=i}^n j\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \left(i^2 + \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^{i-1} j\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \left(i^2 + \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i-1)}{2}\right)\\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i^2}{2} + \frac{i}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n i + \frac{n^2(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n^2(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j (i+j)\\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j i + \sum_{i=1}^j j\right)\\
&= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j(j+1)}{2} + j^2\right)\\
&= \frac{3}{2}\sum_{j=1}^n j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n j\\
&= \frac{j(j+1)(2j+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{4}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
d_n &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} ij \\
&= \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=1}^{j} i \\
&= \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{j(j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^3 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{8} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}
\end{aligned}$$

5. C'est une fausse récurrence double car $i \leq j$ et $|i-j| = 1$ si et seulement si $j = i+1$. La somme va donc jusque $i = n-1$ car aucun j ne convient pour $i = n$.

$$\begin{aligned}
e_n &= \sum_{i=1}^{n-1} i \times (i+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (i^2 + i) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= \frac{(n-1) \times n \times (2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

6. C'est en fait une fausse somme double.

$$\begin{aligned}
f_n &= \sum_{i=0}^{n} i \times (n-i) \\
&= n\sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n} i^2 \\
&= \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

7.

$$
\begin{aligned}
g_n &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} 2^{i-j} \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{2^j}\sum_{i=1}^{j-1} 2^i\right) \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{2^j}\times 2\times\frac{1-2^{j-1}}{1-2}\right) \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{2^j}\times 2\times\left(2^{j-1}-1\right)\right) \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left(1-\frac{1}{2^{j-1}}\right) \\
&= n-1-2\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{2^j} \\
&= n-1-2\times\frac{1}{2^2}\times\frac{1-(1/2)^{n-1}}{1-(1/2)} \\
&= n-1-(1-(1/2)^{n-1}) \\
&= n-2+\frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}
$$

8.

$$
\begin{aligned}
h_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{j}{1+i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+i}\sum_{j=1}^{i} j \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+i}\frac{i(i+1)}{2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{4}
\end{aligned}
$$

9.

$$
\begin{aligned}
i_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j \sum_{j=1}^{n} 2^k \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j \times 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j \times 2 \times (2^n-1) \\
&= 2\times(2^n-1)\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} 2^j \\
&= 2\times(2^n-1)\sum_{i=1}^{n} i \times 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} \\
&= 2\times(2^n-1)\sum_{i=1}^{n} i \times 2 \times (2^n-1) \\
&= 2^2\times(2^n-1)^2\sum_{i=1}^{n} i \\
&= 2^2\times(2^n-1)^2 \times \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Exercice 12 : ✪✪ Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx \rfloor$$

   est $\dfrac{1}{n}$-périodique.

2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il est inutile de vérifier ici que $x + 1/n \in D_f$ puisque f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
f\left(x+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{1}{n}+\frac{k}{n}\right\rfloor-\left\lfloor n\left(x+\frac{1}{n}\right)\right\rfloor\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k+1}{n}\right\rfloor-\lfloor nx+1\rfloor\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor-\lfloor nx\rfloor-1\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor+\left\lfloor x+\frac{n}{n}\right\rfloor-\lfloor nx\rfloor-1\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor+\lfloor x+1\rfloor-\lfloor nx\rfloor-1\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor+\lfloor x\rfloor+1-\lfloor nx\rfloor-1\\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor+\underbrace{\lfloor x\rfloor}_{j=0}-\lfloor nx\rfloor\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{j}{n}\right\rfloor+-\lfloor nx\rfloor\\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que f est $1/n$-périodique.

2. Il faut montrer que f est nulle. f étant $1/n$-périodique, il suffit de prouver que f est nulle sur $\left[\frac{1}{n}\,;0\right[$ (cf. chapitre 2.2). Soit donc $x\in\left[\frac{1}{n}\,;0\right[$. Un moyen simple de montrer qu'une somme est nulle est de montrer que tous les termes sont nuls (attention, c'est suffisant mais pas nécessaire, penser à $1-1$). Soit donc $k\in[\![0\,;n-1]\!]$. Par hypothèse, $0\leq x<\frac{1}{n}$ donc $\frac{k}{n}\leq x<\frac{k+1}{n}$. Or, $k\in[\![0\,;n-1]\!]$ donc, d'une part, $x+\frac{k}{n}\geq 0$, et d'autre part, $k+1\leq n$ si bien que $x+\frac{k}{n}<1$ donc $\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=0$: la somme est nulle car tous ses termes sont nuls. Finalement, $0\leq x<\frac{1}{n}$ donc $0\leq nx<1$ et donc $\lfloor nx\rfloor=0$: $f(x)=0$ ce qui permet de conclure.

Exercice 13 : ✪✪ Montrer que pour tout $n\geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leq\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

Correction : Notons S_n cette somme. Montrons le résultat par récurrence.

- Pour tout $n\geq 1$, notons H_n : « $S_n\leq\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$ ».
- D'une part, $S_1=\sqrt{1}=1$ et d'autre part, $\frac{4\times 1+3}{6}\times\sqrt{1}=\frac{7}{6}>1$ donc H_1 est vraie.
- Soit $n\geq 1$. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. $S_{n+1}=S_n+\sqrt{n+1}$ et par hypothèse de récurrence, on a $S_{n+1}\leq\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$. Rappelons que l'on veut montrer que

$$S_{n+1}\leq\frac{4n+7}{6}\sqrt{n+1}.$$

Il suffit donc de montrer que $\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\leq\frac{4n+7}{6}\sqrt{n+1}$. Travaillons par équivalences (l'équivalence de la troisième ligne vient du fait que la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$).

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{4n+3}{6}\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq \dfrac{4n+7}{6}\sqrt{n+1} & \Leftrightarrow & \dfrac{4n+3}{6}\sqrt{n} \leq \dfrac{4n+7}{6}\sqrt{n+1}-\sqrt{n+1} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{4n+3}{6}\sqrt{n} \leq \dfrac{4n+1}{6}\sqrt{n+1} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{(4n+3)^2 \times n}{36} \leq \dfrac{(4n+1)^2 \times (n+1)}{36} \\ & \Leftrightarrow & (16n^2+24n+9) \times n \leq (16n^2+8n+1)\times(n+1) \\ & \Leftrightarrow & 16n^3+24n^2+9n \leq 16n^3+24n^2+9n+1 \\ & \Leftrightarrow & 0 \leq 1 \end{array}$$

ce qui est bien le cas. Puisque l'on a travaillé par équivalences, la dernière inégalité étant vraie, c'est aussi le cas de la première, ce qui implique en particulier que H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 14 - Lemme de Gronwall discret : ✪✪ Soient trois suites $(t_n),(\theta_n),(\varepsilon_n)$. On suppose que (θ_n) est une suite à termes positifs et qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout n on ait la majoration :

$$\theta_{n+1} \leq (1+A(t_{n+1}-t_n))\,\theta_n + |\varepsilon_n|$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, 1+x \leq e^x$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$\theta_n \leq e^{A(t_n-t_0)}\theta_0 + \sum_{k=0}^{n-1} e^{A(t_n-t_{k+1})}|\varepsilon_k|$$

Correction :

1. cf. chapitre 2.4 : il suffit d'utiliser la convexité de l'exponentielle.
2. Par récurrence.
   - Pour tout $n \geq 0$, notons H_n : « $\theta_n \leq e^{A(t_n-t_0)}\theta_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{A(t_n-t_{k+1})}|\varepsilon_k|$ ».
   - Si $n=0$, le membre de droite vaut θ_0+0 (une somme indexée par l'ensemble vide est nulle par convention, et ici elle est bien vide car va de 0 à -1).
   - Soit $n \geq 0$. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. $S_{n+1} = S_n + \sqrt{n+1}$ et par hypothèse de récurrence, on a $S_{n+1} \leq \dfrac{4n+3}{6}\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$. Par hypothèse (pas par hypothèse de récurrence) :

   $$\theta_{n+1} \leq (1+A(t_{n+1}-t_n))\theta_n + |\varepsilon_n|$$

   Or, par hypothèse de récurrence :

   $$\theta_n \leq e^{A(t_n-t_0)}\theta_0 + \sum_{k=0}^{n-1} e^{A(t_n-t_{k+1})}|\varepsilon_k|$$

   On ne peut pas multiplier par $1+A(t_{n+1}-t_n)$ car on ne connaît pas le signe de cette quantité. Mais d'après la question précédente, $1+A(t_{n+1}-t_n) \leq e^{A(t_{n+1}-t_n)}$. La suite (t_n) étant à termes positifs, $(1+A(t_{n+1}-t_n))\theta_n \leq e^{A(t_{n+1}-t_n)}\theta_n$ si bien que $\theta_{n+1} \leq e^{A(t_{n+1}-t_n)}\theta_n + |\varepsilon_n|$. Or, l'exponentielle est positive donc on peut multiplier l'inégalité de l'hypothèse de récurrence par $e^{A(t_{n+1}-t_n)}$ (et ajouter ensuite $|\varepsilon_n|$) ce qui donne :

   $$\begin{array}{rcl} \theta_{n+1} & \leq & e^{A(t_{n+1}-t_n)} \times \left(e^{A(t_n-t_0)}\theta_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{A(t_n-t_{k+1})}|\varepsilon_k| \right) + |\varepsilon_n| \\ & \leq & e^{A(t_{n+1}-t_n)+A(t_n-t_0)}\theta_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{A(t_{n+1}-t_n)+A(t_n-t_{k+1})}|\varepsilon_k| + |\varepsilon_n| \\ & \leq & e^{A(t_{n+1}-t_0)}\theta_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{A(t_{n+1}-t_{k+1})}|\varepsilon_k| + \underbrace{e^{A(t_{n+1}-t_{n+1})}|\varepsilon_n|}_{k=n} \\ & \leq & e^{A(t_{n+1}-t_0)}\theta_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{A(t_{n+1}-t_{k+1})}|\varepsilon_k| \end{array}$$

   c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 15 - Fonctions symétriques élémentaires : ✪✪ Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, on pose

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

Expliciter $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{n-1}$ et σ_n.

Correction : La définition de σ_k est simple : on prend tous les k-uplets d'entiers distincts entre 1 et n, on prend les x d'indices correspondants, et on les sommes. Pour σ_1, c'est facile, on prend tous les indices :

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Pour σ_n, puisqu'il faut prendre n indices distincts, il n'y a qu'une seule façon : les prendre tous, et on ne peut faire cela qu'une fois donc σ_n ne contient qu'un terme :

$$\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n$$

Pour σ_2, il faut prendre toutes les paires possibles :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sum_{i<j} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j \end{aligned}$$

Enfin, pour σ_{n-1}, il faut tous les prendre sauf un :

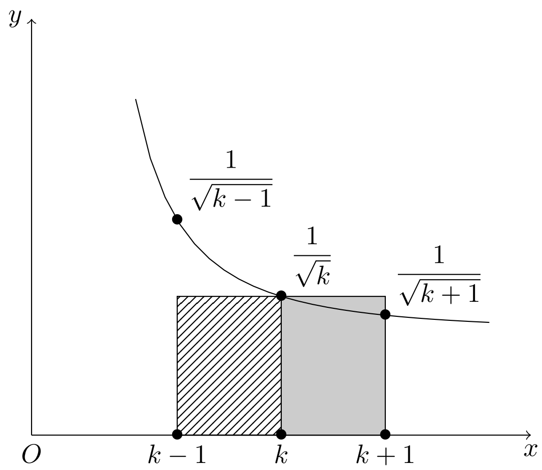
$$\sigma_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j \neq i} x_j \right)$$

Exercice 16 - Une méthode à connaître : ✪✪

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a l'inégalité

$$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

   On pourra pour cela s'inspirer du dessin suivant :



2. En déduire la valeur de $\left\lfloor \sum_{k=1}^{9999} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor$.

Correction :

1. Soit $k \geq 2$. Soit $t \in [\,k\,;k+1\,]$. La fonction $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ étant décroissante,

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Par croissance de l'intégrale (on intègre sur $[\,k\,;k+1\,]$ car c'est sur cet intervalle que cette inégalité est vraie) :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \leq \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

On obtient l'autre inégalité de façon analogue en se plaçant sur $[\,k-1\,;k\,]$.

2. Sommons les inégalités de la question précédente pour k allant de 2 (car elles ne sont valables que pour $k \geq 2$) à 9999 :

$$\sum_{k=2}^{9999} 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \leq \sum_{k=2}^{9999} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=2}^{9999} 2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

On ajoute le terme $1/\sqrt{1}$, et les sommes extrêmes sont télescopiques :

$$1+2\left(\sqrt{10000}-\sqrt{2}\right) \leq \sum_{k=1}^{9999} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1+2\left(\sqrt{9999}-1\right)$$

Finalement :

$$1+2\left(100-\sqrt{2}\right) \leq \sum_{k=1}^{9999} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1+2\left(\sqrt{9999}-1\right)$$

c'est-à-dire que

$$201-2\sqrt{2} \leq \sum_{k=1}^{9999} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{9999}-1$$

Or, le membre de gauche est environ égal à (avec la calculatrice) $198,17$ et celle de droite à environ $198,98$. La partie entière cherchée vaut donc 198.

Exercice 17 - Autour de la suite harmonique : ✪✪ Si $n \geq 1$, on définit le n-ième nombre harmonique $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Il n'en existe pas de forme close.

1. Soit $n \geq 2$. Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{j-i}$ en fonction de n et de H_n.
2. Soit $n \geq 1$. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$ en fonction de n et de H_n.

Correction :

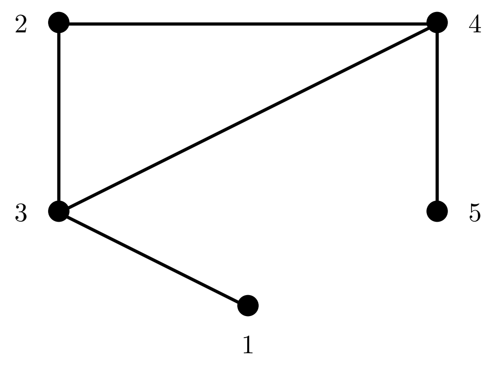
1. Notons $S = \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{j-i}$.

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j-i}\\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{n-k}{k}\\
&= n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}1\\
&= nH_{n-1}-(n-1)\\
&= n\left(H_n-\frac{1}{n}\right)-n+1\\
&= nH_n-n
\end{aligned}
$$

2. Notons $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}H_k$. Alors :

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{i}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{n-i+1}{i}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n+1}{i}-1\right)\\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}1\\
&= (n+1)H_n-n
\end{aligned}
$$

Exercice 18 - Introduction à la théorie des graphes : ✪✪ Un graphe (simple, fini, sans boucle) est un couple (S,A), où S est un ensemble fini et où A est une partie de $\mathscr{P}_2(S)$, où $\mathscr{P}_2(S)$ est l'ensemble des parties de S à 2 éléments. Les éléments de S sont représentés par des points et les arêtes par des segments reliant les deux points qui les composent. Ci-dessous on a représenté le graphe (S,A) avec $S=[\![1\,;\,5]\!]$ et $A=\{\{1;3\};\{2;3\};\{2;4\};\{3;4\};\{4;5\}\}$:



On se donne donc un graphe. Si $s \in S$, on appelle degré de s, qu'on note $d(s)$, le nombre d'arêtes issues de s. Par exemple, sur le graphe de gauche ci-dessus, $d(4) = 3$ et $d(5) = 1$. Enfin, si a est une arête, on pose $f(a, s) = 1$ si a est issue de s et 0 sinon. En calculant $\displaystyle\sum_{(a,s)\in A\times S} f(a, s)$ de deux façons différentes, prouver que :

$$\sum_{s\in S} d(s) = 2 \times \operatorname{card}(A)$$

Correction : Notons $B = \displaystyle\sum_{(a,s)\in A\times S} f(a, s)$. D'une part :

$$B = \sum_{s\in S}\sum_{a\in A} f(a, s)$$

Soit $s \in S$. Si $a \in A$, $f(a, s) = 1$ si $s \in a$ et 0 sinon, si bien que $\displaystyle\sum_{a\in A} f(a, s)$ est le nombre d'arêtes issues de s i.e. $\displaystyle\sum_{a\in A} f(a, s) = d(s)$. Il en découle que $B = \displaystyle\sum_{s\in S} d(s)$. D'autre part, en intervertissant les sommes :

$$B = \sum_{a\in A}\sum_{s\in S} f(a, s)$$

Soit $a \in A$. Il n'y a que deux sommets sur cette arête donc il n'existe que deux sommets s tels que $f(a, s) = 1$, les autres étant nuls. En d'autres termes, $\displaystyle\sum_{s\in S} f(a, s) = 2$ si bien que $B = \displaystyle\sum_{a\in A} 2 = 2\operatorname{card}(A)$ ce qui permet de conclure.

Exercice 19 : ✪✪✪ Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels. Montrer l'égalité suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^n b_k\right) = n\sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)$$

Correction : Notons P le membre de gauche. D'après le cours :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i b_j \\ &= \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{i\neq j} a_i b_j \end{aligned}$$

On aurait pu se contenter de donner directement la deuxième expression. Il suffit donc de prouver que

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{i\neq j} a_i b_j = n\sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i) = (n-1)\sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{i\neq j} a_i b_j$$

Notons S le membre de gauche. On a :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{1\le i<j\le n}(a_jb_j - a_ib_j - a_jb_i + a_ib_i)\\
&= \sum_{1\le i<j\le n} a_jb_j - \sum_{1\le i<j\le n} a_ib_j - \sum_{1\le i<j\le n} a_jb_i + \sum_{1\le i<j\le n} a_ib_i\\
&= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_jb_j - \sum_{i\ne j} a_ib_j + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_ib_i\\
&= \sum_{j=2}^{n}(j-1)a_jb_j - 2\sum_{i<j} a_ib_j + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)a_jb_j && \text{(indice muet)}\\
&= \sum_{j=1}^{n}(j-1)a_jb_j - 2\sum_{i<j} a_ib_j + \sum_{j=1}^{n}(n-j)a_jb_j && \text{(les termes ajoutés sont nuls)}\\
&= \sum_{j=1}^{n}(n-1)a_jb_j - 2\sum_{i<j} a_ib_j
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 20 : ✪✪✪ Soient $p\ge 1$ et $(n_1,\dots,n_p)\in(\mathbb{N}^*)^p$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit l'ensemble

$$F_n = \{(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{N}^p \,|\, x_1n_1+\cdots+x_pn_p = n\}$$

Soit $N\in\mathbb{N}$ et soit $x\in\mathbb{R}$. Expliciter le produit

$$\left(\sum_{k=0}^{N} x^{n_1\times k}\right)\times\cdots\times\left(\sum_{k=0}^{N} x^{n_p\times k}\right)$$

Plus précisément, on l'écrira sous la forme d'une somme $\displaystyle\sum_{k=?}^{?} c_kx^k$ où l'on exprimera les coefficients c_k en fonction des ensembles $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : Soit d'abord, les puissances vont de 0 à $A = N\times n_1+\cdots+N\times n_p$ si bien que, si on note ce produit π, alors $\pi = \displaystyle\sum_{k=0}^{A} c_kx^k$ avec des c_k à déterminer. Puisque les coefficients valent tous 1, quand on regroupe les x^k, le coefficient est le nombre de fois que x^k apparaît (méthode classique : quand on somme des coefficients égaux à 1, le résultat final est le nombre de 1 qu'on somme). Or, on ne peut obtenir x^k qu'en multipliant un terme de la forme $x^{n_1k_1}$, un terme de la forme $x^{n_2k_2}$, ..., et enfin un terme de la forme $x^{n_pk_p}$ tels que $n_1k_1+\cdots+n_pk_p = k$. En d'autres termes, le coefficient devant x^k est le nombre de façons d'avoir cette égalité : c'est donc le nombre d'éléments, c'est-à-dire le cardinal, de F_k. Finalement, $\pi = \displaystyle\sum_{k=0}^{A}\mathrm{card}(F_k)x^k$.

4.2 Produits.

Exercice 21 : ✪ La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} z_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} z_{ij}$$

On la démontrera si elle est vraie, on donnera un contre-exemple explicite (un argument du type : « ben c'est pas la même chose » est insuffisant !) si elle est fausse. Plus généralement, parmi les propriétés suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\lambda+a_k) = \lambda+\sum_{k=1}^{n}a_k$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k = \lambda\sum_{k=1}^{n}a_k$.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k = \sum_{k=1}^{n}a_k\times\sum_{k=1}^{n}b_k$.

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^p = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p$.

6. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$.

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k = k\sum_{k=1}^{n} a_k$.

8. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\lambda + a_k) = \lambda^n + \prod_{k=1}^{n} a_k$.

9. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k + \prod_{k=1}^{n} b_k$.

10. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda\prod_{k=1}^{n} a_k$.

11. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k b_k = \prod_{k=1}^{n} a_k \times \prod_{k=1}^{n} b_k$.

12. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} {a_k}^p = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^p$.

13. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} a_{i,j} = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} a_{i,j}$.

14. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k a_k = n!\prod_{k=1}^{n} a_k$.

Correction : La première proposition est fausse : prenons $n = m = 2$ et $z_{11} = z_{12} = z_{21} = z_{22} = 1$. Le membre de gauche est égal à $(z_{11} + z_{12}) \times (z_{21} + z_{22}) = 4$ tandis que le membre de droite est égal à $z_{11} \times z_{21} + z_{21} \times z_{22} = 2$. Cette proposition est donc fausse. Passons aux autres.

1. Faux : si $\lambda \neq 0$ et $n \geq 2$,
$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda + a_k) = n\lambda + \sum_{k=1}^{n} a_k \neq \lambda + \sum_{k=1}^{n} a_k$$
2. Vrai par linéarité de la somme.
3. Idem.
4. Faux : cf. cours. Il suffit de prendre $n \geq 1$ et les a_k et b_k égaux à 1.
5. Faux : les identités remarquables, ce n'est pas fait pour les chiens. Il suffit de prendre $n \geq 1$, les a_k égaux à 1 et $p \geq 2$.
6. Vrai : c'est le principe de Fubini (qui dit juste qu'on a le droit d'intervertir les sommes).
7. Faux : cela n'a aucun sens car k n'existe pas en dehors de la somme dont il est l'indice de sommation.
8. Faux : on ne peut rien faire avec une somme dans un produit. Il suffit de prendre $n \geq 2$, $\lambda = 1$ et les a_k égaux à 1.
9. Faux : le produit n'est pas linéaire. Idem, on prend $n \geq 2$ et les a_k et b_k égaux à 1.
10. Faux : le produit n'est pas linéaire, le λ sort à la puissance n : il suffit de prendre $\lambda = 2$ et les a_k égaux à 1 (et $n \geq 2$).
11. Vrai : c'est du cours.
12. Idem.
13. Idem.
14. Vrai : cela découle de la propriété 11 en se souvenant que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = n!$.

Exercice 22 - Les nombres de Fermat : ✪ Pour tout n on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ le n-ième nombre de Fermat.

1. Donner F_0, F_1, F_2, F_3.
2. Montrer que pour tout n, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1} - 2$.

Correction :

1. $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$ et $F_3 = 257$.
2. Raisonnons par récurrence.
   - Si $n \geq 0$, notons H_n : « $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1} - 2.$ »
   - Tout d'abord, $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$ et $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$ donc, d'une part, $\displaystyle\prod_{k=0}^{0} F_k = F_0 = 3$ et, d'autre part, $F_1 - 2 = 5 - 2 = 3$ donc H_0 est vraie.
   - Soit $n \geq 0$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n+1} F_k = \prod_{k=0}^{n} F_k \times F_{n+1}$ donc, par hypothèse de récurrence, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n+1} F_k = (F_{n+1} - 2) \times F_{n+1}$. Or, par définition, $F_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1$ si bien que

$$\prod_{k=0}^{n+1} F_k = \left(2^{2^{n+1}}-1\right)\times\left(2^{2^{n+1}}+1\right) = \left(2^{2^{n+1}}\right)^2 - 1^2 = 2^{2^{n+1}\times 2} - 1 = 2^{2^{n+2}} + 1 - 2 = F_{n+2} - 2$$

En d'autres termes, H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sont premiers, F_5 jusque F_{32} sont composés, et d'autres encore (par exemple F_{73}) mais on ne sait pas s'il existe d'autres nombres premiers parmi les F_n (Fermat conjecturait qu'ils étaient tous premiers mais Euler a montré que F_5 était composé). Ils interviennent de plus dans la construction des polygones réguliers à la règle et au compas.

Exercice 23 : ✪ Prouver que, pour tout $n \geq 1$, $n!^{n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k! \times \prod_{k=1}^{n} k^k$.

Correction : Raisonnons par récurrence.

- Si $n \geq 1$, notons H_n : « $n!^{n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k! \times \prod_{k=1}^{n} k^k$. »
- Tout d'abord, $1!^{1+1} = 1^2 = 1$ et

$$\prod_{k=1}^{1} k! \times \prod_{k=1}^{1} k^k = 1! \times 1^1 = 1$$

donc H_1 est vraie.

- Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned}
(n+1)!^{n+2} &= n!^{n+2} \times (n+1)^{n+2} \\
&= n!^{n+1} \times n! \times (n+1) \times (n+1)^{n+1} \\
&= \prod_{k=1}^{n} k! \times \prod_{k=1}^{n} k^k \times (n+1)! \times (n+1)^{n+1} \quad \text{(HR)} \\
&= \prod_{k=1}^{n+1} k! \times \prod_{k=1}^{n+1} k^k
\end{aligned}$$

En d'autres termes, H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 24 : ✪✪ Écrire les quantités suivantes à l'aide de puissances et de factorielles (n, p, q, N, k, b sont des entiers naturels, avec $p \leq n$ et $k \leq b+1$) :

- $A = n \times (n-1) \times \cdots \times p$
- $B = 10 \times 9 \times \cdots \times 4$.
- $I = \dfrac{-1}{q+1} \times \dfrac{-1}{q+2} \times \cdots \times \dfrac{-1}{q+p} \times \dfrac{2^{p+q+1}}{p+q+1}$
- $P = \dfrac{b}{N} \times \dfrac{b-1}{N} \times \cdots \times \dfrac{b-(k-2)}{N} \times \dfrac{b-(k-1)}{N}$.
- $W = \dfrac{2n}{2n+1} \times \dfrac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{2}{3}$.
- $\alpha_p = \dfrac{1}{(-p) \times (-p+1) \times \cdots \times (-1) \times 1 \times 2 \times \cdots (-p+n)}$

Correction :

- $A = \dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times p \times (p-1) \times \cdots \times 1}{(p-1) \times \cdots \times 1} = \dfrac{n!}{(p-1)!}$.
- $B = 10!/3!$.
- $I = \dfrac{(-1)^p \times 1 \times \cdots \times q \times 2^{p+q+1}}{1 \times \cdots \times q \times (q+1) \times (q+2) \times (q+p) \times (q+p+1)} = \dfrac{(-1)^p \times q! \times 2^{q+p+1}}{(q+p+1)!}$.
- $P = \dfrac{b \times \cdots \times (b-k+2) \times (b-k+1) \times (b-k) \times \cdots \times 1}{N^k \times (b-k) \times \cdots \times 1} = \dfrac{b!}{N^k (b-k)!}$.
- De même :

$$\begin{aligned}
W &= \frac{(2n)^2 \times (2n-2)^2 \times \cdots \times 4^2 \times 2^2}{(2n+1) \times 2n \times (2n-1) \times (2n-2) \times \cdots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} \\
&= \frac{2^2 \times n^2 \times 2^2 \times (n-1)^2 \times \cdots \times 2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 1^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

- Enfin (rappelons que $1/(-1)^p = (-1)^p$) :

$$\begin{aligned}\alpha_p &= \frac{(-1)^p}{p\times(p-1)\times\cdots\times 1\times 2\times\cdots\times(n-p)}\\ &= \frac{(-1)^p}{p!\times(n-p)!}\\ &= \frac{(-1)^p}{n!}\times\binom{n}{p}\end{aligned}$$

Exercice 25 : ✪✪ Simplifier les produits suivants :

- $P_n = \displaystyle\prod_{k=42}^{n} \frac{k+4}{k+3}$
- $P_n = \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p} 2^{p!\times k}\right)$
- $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{k}{k+1}\right)$
- $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} 4^{k^2+1}$
- $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{k+1}\right)$
- $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$

Correction :

1. On prend $n \geq 42$. C'est un produit télescopique donc $P_n = (n+4)/45$.
2. En se souvenant que, quand on multiplie des termes, on ajoute les puissances correspondantes, il vient $P_n = 4^{S_n}$ avec

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(k^2+1\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n.$$

3. Soit $p \in [\![1\,;\, n]\!]$. Tout d'abord, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} 2^{p!\times k} = \sum_{k=0}^{p} \left(2^{p!}\right)^k$. On reconnaît une somme géométrique de raison $2^{p!}$. Or, $p! \geq 1$ (une factorielle n'est jamais nulle) donc $2^{p!} \geq 2$ et en particulier $2^{p!} \neq 1$, si bien que

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1-\left(2^{p!}\right)^{p+1}}{1-2^{p!}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1-2^{p!\times(p+1)}}{1-2^{p!}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1-2^{(p+1)!}}{1-2^{p!}}$$

On reconnaît un produit télescopique : on a finalement $P_n = \dfrac{1-2^{(n+1)!}}{1-2^{1!}} = \dfrac{1-2^{(n+1)!}}{1-2} = 2^{(n+1)!}-1$.

4. $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$ car c'est un produit télescopique.
5. $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2\times\cdots\times(n+1)} = \frac{1}{(n+1)!}$. La factorielle commence en 1 et pas en 2, mais cela ne change pas la valeur d'un produit de multiplier ou de diviser par 1.
6. On montre comme dans l'exemple du cours que $P_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

Exercice 26 : ✪✪ On admet (c'est l'exercice 25 du chapitre 15) que, pour tous réels positifs $x_1, \dots, x_n$:

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \prod_{k=1}^{n} (1+x_k)^{1/n}$$

Prouver que pour tous $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ réels positifs on a

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k+b_k)\right)^{1/n}$$

Correction : Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels positifs. L'idée est de poser $x_k = b_k/a_k$ (ou le contraire) et de multiplier par les a_k ensuite. Encore faut-il qu'ils soient tous non nuls ! Il faut donc examiner deux cas : s'il existe un a_k nul, le résultat est trivial. En effet, le membre de gauche est alors égal à $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n}$. Or, les a_k étant positifs, pour tout k, $b_k \leq a_k + b_k$. Par produit (on peut multiplier des inégalités positives) :

$$\prod_{k=1}^{n} b_k \leq \prod_{k=1}^{n} (a_k+b_k)$$

et la croissance de la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ donne l'inégalité voulue. Supposons à présent que tous les a_k soient non nuls et posons, pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, $x_k = b_k/a_k$. D'après l'inégalité admise :

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n} \leq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n}$$

Or :

$$\left(\prod_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n} = \left(\frac{\prod\limits_{k=1}^n b_k}{\prod\limits_{k=1}^n a_k}\right)^{1/n}$$

et

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n} &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k + b_k}{a_k}\right)^{1/n} \\
&= \left(\frac{\prod\limits_{k=1}^n (a_k + b_k)}{\prod\limits_{k=1}^n a_k}\right)^{1/n}
\end{aligned}$$

Il suffit de multiplier par $\left(\prod\limits_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}$ (positif) pour conclure.

Exercice 27 : ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\prod_{1 \leq i,j \leq n} ij$. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$.

Correction : Notons p_n ce produit.

$$\begin{aligned}
p_n &= \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n ij \\
&= \prod_{j=1}^n j^n \prod_{i=1}^n i \\
&= \prod_{j=1}^n (j^n n!) \\
&= n!^n \times \prod_{j=1}^n j^n \\
&= n!^n \times \left(\prod_{j=1}^n j\right)^n \\
&= n!^n \times n!^n \\
&= n!^{2n}
\end{aligned}$$

De même que pour une somme (visualiser un tableau : d'abord les termes diagonaux puis les autres) :

$$
\begin{aligned}
p_n &= \prod_{i=1}^{n}(i\times i)\times\prod_{1\leq i\neq j\leq n} ij\\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} i^2\right)\times\prod_{1\leq i\neq j\leq n} ij\\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^2\times\prod_{1\leq i\neq j\leq n} ij\\
&= n!^2\times\prod_{1\leq i\neq j\leq n} ij
\end{aligned}
$$

Ensuite, chaque produit ij apparaît deux fois : on trouve par exemple 1×2 $(i<j)$ et 2×1 $(i>j)$ si bien que

$$\prod_{1\leq i\neq j\leq n} ij = \left(\prod_{1\leq i<j\leq n} ij\right)^2$$

si bien que

$$p_n = n!^{2n} = n!^2\times\left(\prod_{1\leq i<j\leq n} ij\right)^2$$

Finalement :

$$\left(\prod_{1\leq i<j\leq n} ij\right)^2 = n!^{2n-2}$$

et donc

$$\prod_{1\leq i<j\leq n} ij = n!^{n-1}$$

Exercice 28 : ✪✪ Montrer que pour tout $n\geq 1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}((2k)!)\geq((n+1)!)^n$.

Correction : Notons P_n ce produit. Montrons le résultat par récurrence.
- Si $n\geq 1$, notons H_n : « $P_n\geq((n+1)!)^n$ ».
- D'une part, $P_1=2!=2$ et d'autre part, $((1+1)!)^1=2!=2$ donc H_1 est vraie.
- Soit $n\geq 1$. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. $P_{n+1}=P_n\times(2n+2)!$ et par hypothèse de récurrence, $P_{n+1}\geq((n+1)!)^n\times(2n+2)!$. Or,

$$(2n+2)!=(n+1)!\times(n+2)(n+3)\cdots(2n+2).$$

Les termes $n+2,n+3,\dots,2n+2$ sont supérieurs ou égaux à $n+2$ (et ils sont au nombre de $n+1$). On peut multiplier les inégalités de termes positifs donc $(n+2)\times\cdots\times(2n+2)\geq(n+2)^{n+1}$, d'où :

$$((n+1)!)^n\times(2n+2)!\geq((n+1)!)^n\times(n+1)!\times(n+2)^{n+1}=((n+1)!\times(n+2))^{n+1}=((n+2)!)^{n+1}$$

ce qui implique en particulier que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n\geq 1$.

Exercice 29 : ✪✪✪ Exprimer la somme suivante avec uniquement des factorielles :

$$S_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

Correction : Séparons selon la parité de k et remplaçons $(-1)^k$ par ± 1 selon les cas. On fait ensuite les changements d'indices $k = 2j$ et $k = 2j+1$:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ pair}}} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) + \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ pair}}} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \sum_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ impair}}} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{2j+1}{2j}\right) - \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(\frac{2j+2}{2j+1}\right) \\
&= \ln\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{2j+1}{2j}\right) - \ln\left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{2j+2}{2j+1}\right) \quad = \ln\left(\prod_{j=1}^{n} \frac{2j+1}{2j} \times \prod_{j=0}^{n-1} \frac{2j+1}{2j+2}\right)
\end{aligned}$$

Ce produit est un peu opaque... Écrivons le avec des petits points pour y voir plus clair :

$$S_n = \ln\left(\frac{3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n+1)\times 1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n\times 2\times 4\times\cdots\times 2n}\right)$$

On montre de même que dans l'exercice 3 que le numérateur (une fois multiplié par $(2\times 4\times\cdots\times 2n)^2$) vaut $(2n+1)!^2/(2n+1)$ (car le terme $2n+1$ est le seul à n'apparaître qu'une fois), c'est-à-dire qu'il vaut $(2n+1)!\times(2n)!$, tandis que le dénominateur (une fois multiplié par $(2\times 4\times\cdots\times 2n)^2$) vaut $\left(2^{2n}\times(n!)^2\right)^2$. En conclusion, $S_n = \ln\left(\dfrac{(2n+1)!\times(2n)!}{2^{4n}\times(n!)^4}\right)$ (et on ne peut pas simplifier !).

4.3 Coefficients binomiaux et binôme de Newton.

Exercice 30 : ✪ Soit $m = \dbinom{n}{2}$. Montrer que $\dbinom{m}{2} = 3\dbinom{n+1}{4}$.

Correction : On a $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Dès lors,

$$\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2} = \frac{\dfrac{n(n-1)}{2}\times\left(\dfrac{n(n-1)}{2}-1\right)}{2} = \frac{n(n-1)\times(n^2-n-2)}{8}.$$

Il suffit ensuite de voir que

$$3\binom{n+1}{4} = 3\times\frac{(n+1)!}{4!(n-3)!} = 3\times\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} = \frac{n(n-1)(n^2-n-2)}{8}$$

(la dernière égalité vient du fait que $(n+1)(n-2) = n^2-n-2$) pour conclure.

Exercice 31 - Les nombres de Catalan, stage one : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit le n-ième nombre de Catalan par :

$$C_n = \frac{\dbinom{2n}{n}}{n+1}$$

Si $n \in \mathbb{N}$, écrire C_n comme une différence de coefficients binomiaux. En déduire que les nombres de Catalan sont des entiers naturels.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \\
&= \frac{(2n)! \times (n+1) - (2n)! \times n}{(n+1)! \times n!} \\
&= \frac{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}{n+1} \\
&= \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \\
&= C_n
\end{aligned}$$

Les nombres de Catalan sont des différences de coefficients binomiaux donc sont des entiers relatifs, et ce sont des entiers naturels car, par définition, un nombre de Catalan est positif.

Exercice 32 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. En écrivant ce quotient comme un produit de coefficients binomiaux, montrer que

$$\frac{(3n)!}{(n!)^3} \in \mathbb{N}$$

Correction : Il suffit de voir que

$$\begin{aligned}
\frac{(3n)!}{(n!)^3} &= \frac{(3n)!}{(n!) \times (2n)!} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
&= \binom{3n}{n} \times \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure puisque les coefficients binomiaux sont des entiers.

Exercice 33 : ✪ Quel est le coefficient de $x^7y^3z^2$ dans $(x+2y+3z)^{12}$?

Correction :

$$\begin{aligned}
(x+2y+3z)^{12} &= ((x+2y)+3z)^{12} \\
&= \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (x+2y)^k \times (3z)^{12-k} \\
&= \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i (2y)^{k-i} \times (3z)^{12-k} \\
&= \sum_{k=0}^{12} \sum_{i=0}^{k} \binom{12}{k} \binom{k}{i} x^i (2y)^{k-i} \times (3z)^{12-k}
\end{aligned}$$

Pour avoir $x^7y^3z^2$, il faut prendre $k=10$ et $i=7$: le coefficient en question est donc $\binom{12}{10}\binom{10}{7}2^3 3^2$.

Exercice 34 : ✪ Soient n et p deux entiers naturels. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k+1}{p+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{p+k}{p+1}$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p}$.

Correction : Le changement de variable $i = k+1$ (et le fait que l'indice soit muet) dans la première somme donne immédiatement la première égalité. Dès lors :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k+1}{p+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \binom{p+k}{p+1} = 0$$

Ainsi :

$$\binom{p+1}{p+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{p+k+1}{p+1} - \sum_{k=1}^{n} \binom{p+k}{p+1} - \binom{p+n+1}{p+1} = 0$$

c'est-à-dire

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1} \right) = \binom{p+n+1}{p+1}$$

Enfin, d'après la formule du triangle de Pascal :

$$1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{p+k}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$$

Le terme pour $k=0$ étant égal à 1, on peut rentrer celui-ci dans la somme et finalement :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$$

Exercice 35 : ✪ Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{1-k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{p} k^p$$

Correction : On veut appliquer la formule du binôme de Newton pour S_n. Commençons par mettre S_n sous la bonne forme :

$$S_n = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{2n-k} = \frac{1}{2^{2n-1}} \left(\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{2n-k} - \underbrace{2^{2n}}_{k=0} \right)$$

Finalement, $S_n = \dfrac{1}{2^{2n-1}} \times \left((-1+2)^{2n} - 2^{2n} \right) = \dfrac{1}{2^{2n-1}} \times \left(1 - 2^{2n} \right)$.

Pour T_n :

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n}{p} k^p && \text{(interversion des sommes)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{p=0}^{n} \left(\binom{n}{p} k^p \right) - k^n \right) && \text{(on ajoute le terme pour } p=n\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \left((k+1)^n - k^n \right) && \text{(binôme de Newton)} \\
&= (m+1)^n - 0^n && \text{(somme télescopique)} \\
&= (m+1)^n
\end{aligned}$$

Exercice 36 : ✪ Montrer qu'il existe deux suites d'entiers relatifs (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \geq 0$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

Correction : On pourrait montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(\sqrt{2}-1)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ mais ce raisonnement (bien que correct et répondant à la question) ne donne pas leur valeur exacte (non demandée il est vrai). Nous préférons la méthode suivante surtout car elle permet s'entraîner à la manipulation des sommes. Soit donc $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k (-1)^{n-k}$$

Séparons la somme en termes pairs/impairs et faisons comme d'habitude, les changements d'indice $k = 2j$ et $k = 2j+1$ ce qui donne, en se souvenant que $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ (admirons là aussi l'utilité de la notation « généralisée ») :

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)^n &= \sum_{0\le 2j\le n}\binom{n}{2j}\sqrt{2}^{2j}(-1)^{n-2j} + \sum_{0\le 2j+1\le n}\binom{n}{2j+1}\sqrt{2}^{2j+1}(-1)^{n-2j-1}\\ &= \sum_{0\le 2j\le n}\binom{n}{2j}2^j(-1)^{n-2j} + \sqrt{2}\sum_{0\le 2j+1\le n}\binom{n}{2j+1}2^j(-1)^{n-2j-1}\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de poser $a_n = \displaystyle\sum_{0\le 2j\le n}\binom{n}{2j}2^j(-1)^{n-2j}$ et $b_n = \displaystyle\sum_{0\le 2j+1\le n}\binom{n}{2j+1}2^j(-1)^{n-2j-1}$ qui sont bien des entiers relatifs car somme et produit d'entiers relatifs.

Exercice 37 - Identité de Vandermonde : ✪✪ Soit $(n,p,q)\in\mathbb{N}^3$. On admet que si deux fonctions polynomiales sont égales, alors elles ont les mêmes coefficients. En utilisant le fait que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(1+x)^{n+p} = (1+x)^n\times(1+x)^p$, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}\times\binom{p}{q-k}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Correction : Soit donc $x\in\mathbb{R}$. D'après le binôme de Newton, d'une part :

$$(1+x)^{n+p} = \sum_{k=0}^{n+p}\binom{n}{k}x^k$$

c'est-à-dire que le coefficient devant x^q est $\displaystyle\binom{n+p}{q}$. Or, on a également :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+p} &= (1+x)^n\times(1+x)^p\\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\times\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}x^j\end{aligned}$$

D'après le cours, le coefficient devant x^q est alors (c'est une fausse somme double $j = q-i$) :

$$\sum_{i+j=q}\binom{n}{i}\times\binom{p}{j} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\times\binom{p}{q-i}$$

Par unicité des coefficients d'une fonction polynôme, ces deux coefficients sont égaux donc (l'indice est muet : on peut remplacer i par k) :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\binom{p}{q-k} = \binom{n+p}{q}$$

En prenant $p = q = n$, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

La symétrie des coefficients binomiaux entraîne :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercice 38 : ✪✪ Soit $k\ge 1$. Montrer que le produit de k entiers relatifs consécutifs est toujours divisible par $k!$.

Correction : Puisque les entiers sont consécutifs, trois cas sont possibles : soit le plus petit est strictement positif, et alors ils sont tous strictement positifs, soit le plus grand est strictement négatif, et alors ils sont tous strictement négatifs, soit le plus petit et le plus grand sont des signes contraires. Dans le dernier cas, 0 est l'un des entiers en question donc le produit est nul donc divisible par k. Supposons à présent que le plus petit soit strictement positif. Notons n l'entier juste avant le plus petit de ces entiers, si bien que les entiers sont $n+1,\dots,n+k$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}(n+1)\times\cdots\times(n+k) &= \frac{(n+k)!}{n!}\\ &= k!\times\frac{(n+k)!}{n!\times k!}\\ &= k!\times\binom{n+k}{k}\end{aligned}$$

qui appartient bien à $\mathbb{Z}$ et même à $\mathbb{N}$ car produit d'entiers naturels. Supposons à présent que le plus grand soit strictement négatif. Notons n l'entier juste après le plus grand de ces entiers (on a donc $n \leq 0$), si bien que ces entiers sont $n-k, \dots, n-1$. Dès lors :

$$\begin{aligned}(n-k) \times \cdots \times (n-1) &= (-1)^k \times (-n+1) \times \cdots \times (-n+k) \\ &= (-1)^k \times \frac{(-n+k)!}{(-n)!} \\ &= (-1)^k \times k! \times \frac{(-n+k)!}{(-n)! \times k!} \\ &= (-1)^k \times k! \times \binom{k-n}{k}\end{aligned}$$

et là encore on a un entier relatif.

Exercice 39 : ✪✪ Soit $n \geq 4$. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

1. Montrer que $u_n = 2 + \dfrac{2}{n} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$
2. En déduire que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$.

Correction :

1. Il suffit de voir que

$$u_n = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

ce qui donne le résultat voulu puisque $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$ et $\dbinom{n}{1} = \dbinom{n}{n-1} = n$.

2. D'après la question précédente, il suffit donc de prouver que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Or, d'après l'exercice 43 (j'aurais dû le préciser dans l'énoncé), pour tout $k \in [\![2\,; n-2]\!]$, $\dbinom{n}{k} \geq \dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ et par somme :

$$0 \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{2}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$$

ce qui permet de conclure d'après le théorème d'encadrement.

Exercice 40 : ✪✪ On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto (1+e^x)^n$. En dérivant deux fois f, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

Correction : La fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et (en utilisant la formule de dérivation d'une composée) $f' : x \longmapsto ne^x(1+e^x)^{n-1}$. La fonction f' sur $\mathbb{R}$ est également dérivable et

$$f'' : x \longmapsto ne^x(1+e^x)^{n-1} + ne^x \times (n-1)(1+e^x)^{n-2} \times e^x.$$

Or, d'aprš la formule du binôme de Newton, on a également $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^x)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kx}$, si bien que $f'' : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 e^{kx}$. Les deux expressions de f'' sont évidemment égales, si bien que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 e^{kx} = ne^x(1+e^x)^{n-1} + ne^x \times (n-1)(1+e^x)^{n-2} \times e^x.$$

En particulier, pour $x = 0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 = n \times 2^{n-1} + n \times (n-1) \times 2^{n-2}$.

Exercice 41 : ✪✪ Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$\binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$$

Remarque : On montrera au second semestre (true story) que

$$\binom{2n}{n} \times \frac{\sqrt{n}}{4^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Correction : Raisonnons par récurrence.

- Si $n \geq 1$, notons H_n : « $\displaystyle\binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$ ».
- D'une part, $\displaystyle\binom{2}{1} = 2$, et d'autre part, $\displaystyle\frac{4^1}{\sqrt[3]{1}} = 4 > 2$ donc H_1 est vraie.
- Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\binom{2(n+1)}{n+1} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \\
&= \frac{(2n)! \times (2n+1)(2n+2)}{n!^2 \times (n+1)^2} \\
&= \binom{2n}{n} \times \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\
&= \binom{2n}{n} \times \frac{2(2n+1)}{n+1}
\end{aligned}$$

  Par hypothèse de récurrence (rappelons qu'on peut multiplier les inégalités positives) :

$$\binom{2(n+1)}{n+1} < \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}} \times \frac{2(2n+1)}{n+1}$$

  Il suffit donc de prouver que $\displaystyle\frac{4^n}{\sqrt[3]{n}} \times \frac{2(2n+1)}{n+1} \leq \frac{4^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}$. Raisonnons par équivalences (tous les termes sont positifs donc on peut tranquillement multiplier dans les inégalités) :

$$\begin{aligned}
\frac{4^n}{\sqrt[3]{n}} \times \frac{2(2n+1)}{n+1} \leq \frac{4^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}} &\iff 2(2n+1)\sqrt[3]{n+1} \leq 4\sqrt[3]{n}(n+1) \\
&\iff 2^3(2n+1)^3(n+1) \leq 4^3 n(n+1)^3 \qquad \text{(fonction cube strictement croissante)} \\
&\iff 8(2n+1)^3 \leq 64n(n+1)^2 \\
&\iff (2n+1)^3 \leq 8n(n+1)^2 \\
&\iff 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \leq 8n(n^2 + 2n + 1) \qquad \text{(triangle de Pascal)} \\
&\iff 8n^3 + 12n^2 + 6n + 1 \leq 8n^3 + 16n^2 + 8n \\
&\iff 1 \leq 4n^2 + 2n
\end{aligned}$$

  ce qui est vrai puisque $n \geq 1$. On travaillé par équivalences donc la première assertion est vraie, ce qui permet de conclure : H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 42 : ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe a_n et $b_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$. Trouver une relation analogue pour $(2-\sqrt{3})^n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2} \in \mathbb{N}^*$$

3. Montrer que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair.

4. **Remake :** ✪✪✪ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p_n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{p_n} + \sqrt{p_n+1}$.

Correction :

1. On pourrait montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ mais ce raisonnement (bien que correct et répondant à la question) ne donne pas leur valeur exacte (non demandée il est vrai). Nous préférons la méthode suivante surtout car elle permet s'entraîner à la manipulation des sommes. Soit donc $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$(2+\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{3}^k 2^{n-k}$$

Séparons la somme en termes pairs/impairs et faisons comme d'habitude, les changements d'indice $k=2j$ et $k=2j+1$ ce qui donne, en se souvenant que $\sqrt{3} = 3^{1/2}$ (admirons là aussi l'utilité de la notation « généralisée ») :

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^n &= \sum_{0\leq 2j\leq n} \binom{n}{2j} \sqrt{3}^{2j} 2^{n-2j} + \sum_{0\leq 2j+1\leq n} \binom{n}{2j+1} \sqrt{3}^{2j+1} 2^{n-2j-1} \\ &= \sum_{0\leq 2j\leq n} \binom{n}{2j} 3^j 2^{n-2j} + \sqrt{3} \sum_{0\leq 2j+1\leq n} \binom{n}{2j+1} 3^j 2^{n-2j-1}\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de poser $a_n = \displaystyle\sum_{0\leq 2j\leq n} \binom{n}{2j} 3^j 2^{n-2j}$ et $b_n = \displaystyle\sum_{0\leq 2j+1\leq n} \binom{n}{2j+1} 3^j 2^{n-2j-1}$ qui sont bien des entiers naturels non nuls car somme et produit d'entiers naturels non nuls. En développant, on trouve que $(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$ (les mêmes a_n et b_n !).

2. Soit donc $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$\frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2} = a_n$$

ce qui permet de conclure.

3. D'après la question précédente, $(2+\sqrt{3})^n = 2a_n - (2-\sqrt{3})^n < 2a_n$. De plus, $2-\sqrt{3} \in \left]\,0\,;1\,\right[$ donc $(2+\sqrt{3})^n > 2a_n - 1$ et donc (strict implique large) $2a_n - 1 \leq (2+\sqrt{3})^n < 2a_n$ c'est-à-dire que $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor = 2a_n - 1$ qui est bien un entier impair.

4. Regardons pour de petites valeurs de n pour nous donner une idée. Pour $n=0$, $(1+\sqrt{2})^0 = 1 = \sqrt{0} + \sqrt{1}$. Pour $n=1$, $(1+\sqrt{2})^1 = \sqrt{1} + \sqrt{2}$ et pour $n=2$, $(1+\sqrt{2})^2 = 1+2+2\sqrt{2} = \sqrt{8} + \sqrt{9}$. Enfin, à l'aide du triangle de Pascal, on trouve après calculs que $(1+\sqrt{2})^3 = \sqrt{49} + \sqrt{50}$. L'idée est, comme précédemment, de regrouper les puissances de 2 entre elles et les entiers entre eux. Développons $(1+\sqrt{2})^n$ et séparons les termes pairs et impairs :

$$(1+\sqrt{2})^n = \sum_{0\leq 2j\leq n} \binom{n}{2j} 2^j + \sqrt{2} \sum_{0\leq 2j+1\leq n} \binom{n}{2j+1} 2^j$$

et

$$(1-\sqrt{2})^n = \sum_{0\leq 2j\leq n} \binom{n}{2j} 2^j - \sqrt{2} \sum_{0\leq 2j+1\leq n} \binom{n}{2j+1} 2^j$$

Notons comme ci-dessus

$$a_n = \sum_{0\leq 2j\leq n} \binom{n}{2j} 2^j \qquad \text{et} \qquad b_n = \sum_{0\leq 2j+1\leq n} \binom{n}{2j+1} 2^j$$

si bien que $(1\pm\sqrt{2})^n = a_n \pm \sqrt{2} b_n$. Plutôt que de faire la somme comme ci-dessus, faisons le produit pour faire apparaître une identité remarquable : d'une part,

$$(1+\sqrt{2})^n \times (1-\sqrt{2})^n = (-1)^n$$

et d'autre part,

$$(1+\sqrt{2})^n \times (1-\sqrt{2})^n = {a_n}^2 - 2{b_n}^2$$

Par conséquent, soit (quand n est pair) ${a_n}^2 = 2{b_n}^2 + 1$ soit (quand n est impair), $2{b_n}^2 = {a_n}^2 + 1$. Dans tous les cas, parmi ${a_n}^2$ et $2{b_n}^2$, il y a un nombre entier et son successeur (lui-même +1). Notons p_n le plus petit des deux (l'autre sera donc $p_n + 1$). Dans tous les cas, a_n et $\sqrt{2}b_n$ sont donc égaux à $\sqrt{p_n}$ et $\sqrt{p_n+1}$ (qui est qui dépend de la parité de n) mais dans tous les cas on a le résultat voulu.

Exercice 43 - Monotonie des coefficients binomiaux : ✪✪✪ Soient $n \geq 1$ et $m \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$.

1. Simplifier le quotient de $\dbinom{n}{m+1}$ par $\dbinom{n}{m}$.
2. En déduire que $\dbinom{n}{0} \leq \dbinom{n}{1} \leq \cdots \leq \dbinom{n}{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$. Que se passe-t-il après $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Correction :

1. En se souvenant que $(p+1)!/p! = p+1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, on obtient :
$$\frac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}} = \frac{n!}{(m+1)! \times (n-m-1)!} \times \frac{m!(n-m)!}{n!} = \frac{n-m}{m+1}.$$
2. Supposons $m \leq \lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1$. Alors $m+1 \leq (n+1)/2$ donc $2m+2 \leq n+1$. En particulier, $m+1 \leq n-m$ c'est-à-dire que (les termes sont positifs : on ne change pas le sens des inégalités en divisant) :
$$\frac{\binom{n}{m+1}}{\binom{n}{m}} = \frac{n-m}{m+1} \geq 1.$$
Là encore, puisque $\dbinom{n}{m} > 0$, on obtient finalement que $\dbinom{n}{m} \leq \dbinom{n}{m+1}$. Ceci étant vrai pour $m = 0$, $m = 1, \dots,$ $m = \lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1$, on a la suite d'inégalités voulues en remplaçant successivement m par toutes ces valeurs. À partir de $m = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$, les inégalités changent de sens : les coefficients binomiaux décroissent. Oui, on pouvait prévoir ce résultat : d'une part, par la propriété de symétrie des coefficients binomiaux, c'est-à-dire le fait que, pour tout $p \in [\![0 \,;\, p]\!]$, $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$, les coefficients binomiaux sont symétriques par rapport au « milleu » (comme dirait Albert Cohen), donc « si la première moitié est croissante, la seconde est automatiquement décroissante ». D'autre part, quand on regarde le triangle de Pascal, on voit que les coefficients binomiaux croissent « environ jusqu'à la moitié » (bonjour la rigueur !) puis décroissent, et on vient de montrer rigoureusement ce résultat.

Exercice 44 : ✪✪✪ Soit $n \geq 1$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$
2. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}$
3. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Correction :

1.
$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\
&= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\
&= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \\
&= n \times 2^{n-1}
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1) \times (n-1)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!} \\
&= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \\
&= n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} \\
&= n(n-1) \times 2^{n-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n+1-(k+1))!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} \\
&= \frac{2^{n+1}-1}{n+1}
\end{aligned}
$$

Exercice 45 - Produit d'une ligne du triangle de Pascal : ✪✪✪ Soit $n \geq 0$. On note $a_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Montrer que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Correction :

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}} \\
&= \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}} \\
&= \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n} n! \times \prod_{k=0}^{n+1} k! \times \prod_{k=0}^{n+1}(n+1-k)!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n+1}(n+1)! \times \prod_{k=0}^{n} k! \times \prod_{k=0}^{n}(n-k)!} \\
&= \frac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n} n! \times \prod_{k=0}^{n+1} k! \times \prod_{j=0}^{n+1} j!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n+1}(n+1)! \times \prod_{k=0}^{n} k! \times \prod_{j=0}^{n} j!} \\
&= \frac{n!^{n+1} \times (n+1)! \times (n+1)!}{(n+1)!^{n+2}} \\
&= \frac{n!^{n+1}}{(n+1)!^{n}} \\
&= \frac{n!^{n} \times n!}{n!^{n} \times (n+1)^{n}} \\
&= \frac{n!}{(n+1)^{n}}
\end{aligned}
$$

Zut, j'ai fait la fraction inverse... Flemme de corriger.

Exercice 46 - Formule d'inversion de Pascal : ✪✪✪

1. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}$ pour tous $0 \leq j \leq k \leq n$.
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} b_k$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j} a_j$$

Correction :

1. Il suffit de calculer les deux termes à l'aide de factorielles.
2. Montrons le par récurrence.
   - Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $b_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j} a_j$ ».
   - $\displaystyle\sum_{j=0}^{0}(-1)^{0-j}\binom{0}{j} a_j = 1 \times 1 \times a_0$ mais, par hypothèse, $a_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k} b_k = 1 \times b_0 = b_0$: H_0 est donc vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H_0, \ldots, H_n$ vraies (on fait donc une récurrence forte) et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse (pas par hypothèse de récurrence),

$$b_{n+1} = a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} a_j \\
&= a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n+1}{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} a_j \\
&= a_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n+1}{j} \binom{n+1-j}{n+1-k} (-1)^{k-j} a_j && \text{(Q1)} \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n+1}{j} \binom{n+1-j}{n+1-k} (-1)^{k-j} a_j \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} a_j \sum_{k=j}^{n} \binom{n+1-j}{n+1-k} (-1)^{k-j} \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} a_j \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1-j}{n+1-j-i} (-1)^{i} && (i = k-j, k = i+j) \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} a_j \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n+1-j}{i} (-1)^{i} && \text{(Symétrie des coeffs binomiaux)} \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} a_j \left[(1-1)^{n+1-j} - (-1)^{n+1-j} \right] \\
&= a_{n+1} - \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} a_j \times (-1)^{n-j} \\
&= \underbrace{a_{n+1}}_{j=n+1} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} a_j \times (-1)^{n+1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a_j \times (-1)^{n+1-j}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.

Chapitre 5

Fonctions circulaires/Trigonométrie

5.1 Fonctions circulaires.

Exercice 1 : ✪ Vrai ou faux ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \sin x = ax^2 + bx + c$.
2. ✪✪ $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}, \sin x = ax^2 + bx + c$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \cos 2x = a\cos^2 x + b\cos x + c$.
4. $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}, \cos 2x = a\cos^2 x + b\cos x + c$.

Correction :

1. Vrai : a, b, c étant définis après x, ils peuvent dépendre de x, donc $a = b = 0$ et $c = \sin(x)$ conviennent.
2. Faux. Supposons par l'absurde qu'il existe (a,b,c) tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = ax^2 + bx + c$. Si $a \neq 0$, alors la fonction sin tend vers $\pm\infty$ (selon le signe de a) en $+\infty$ ce qui est absurde car sin est bornée. Donc $a = 0$. De même, $b = 0$ donc $\sin(x) = c$ ce qui est absurde car le sinus n'est pas une fonction constante.
3. Vrai : de même que pour la 1, $a = b = 0$ et $c = \cos(2x)$ conviennent.
4. Vrai : $a = 2$, $b = 0$ et $c = -1$ conviennent puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

Exercice 2 : ✪ Donner les valeurs de $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right), \cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right), \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right), \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right), \sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right), \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Correction : $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

On constate que $\cos(7\pi/12) < 0$ ce qui est cohérent puisque $7\pi/12 \in [\,\pi/2\,;\pi\,]$, intervalle sur lequel le cosinus est négatif. On pourrait trouver exactement de la même façon que $\sin(7\pi/12) = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$ (exo, cette valeur servira dans l'exercice 32) mais nous allons donner sa valeur à l'aide de celle du cosinus.

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= 1-\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)\\
&= 1-\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2\\
&= 1-\frac{2+6+2\sqrt{12}}{16}\\
&= 1-\frac{8+4\sqrt{3}}{16}\\
&= 1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}\\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

Or, $\sin(7\pi/12)$ est positif car $7\pi/12\in[\,\pi/2\,;\pi\,]$, intervalle sur lequel le sinus est positif. On en déduit que

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Si on avait eu un sinus négatif, il aurait fallu prendre $-\sqrt{\ldots}$. On a une expression différente mais c'est en fait la même ! On trouve aisément que les deux nombres ont le même carré, donc ils sont égaux car sont tous les deux positifs (encore heureux j'ai envie de dire). On trouve $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$ de la même façon en remarquant que $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ (exo). Enfin, $\cos(\pi/4)=2\cos^2(\pi/8)-1=1-2\sin^2(\pi/8)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}\\
&= \frac{2+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

et puisque $\cos(\pi/8)>0$ pour les mêmes raisons que ci-dessus, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

On trouve de même

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 3 : ✪ Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}, 4\cos(x)+\cos(2x)+3\geq 0$. Préciser les cas d'égalité.

Correction : Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
4\cos(x)+\cos(2x)+3 &= 4\cos(x)+2\cos^2(x)-1+3\\
&= 2\cos^2(x)+4\cos(x)+2\\
&= 2\left(\cos^2(x)+2\cos(x)+1\right)\\
&= 2(\cos(x)+1)^2
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu. De plus :

$$\begin{aligned}
4\cos(x)+\cos(2x)+3=0 &\iff \cos(x)=-1\\
&\iff x\equiv\pi[2\pi]
\end{aligned}$$

Exercice 4 : ✪ Dériver trois fois la fonction tangente sur son domaine de définition.

Correction : La tangente est $\mathscr{C}^\infty$. Soit $x\in D_{\tan}$. $\tan'(x)=1+\tan^2(x)$, ensuite

$$\begin{aligned}\tan''(x) &= 2\tan'(x)\tan(x)\\ &= 2(1+\tan^2(x))\tan(x)\\ &= 2\tan(x)+2\tan^3(x)\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\tan^{(3)}(x) &= 2\tan'(x)+6\tan'(x)\tan^2(x)\\ &= 2(1+\tan^2(x))+6(1+\tan^2(x))\tan^2(x)\\ &= 2+8\tan^2(x)+6\tan^4(x)\end{aligned}$$

Exercice 5 : ✪ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

1. $\cos x < \dfrac{1}{2}$
2. $\tan(x) \geq 1$
3. $\cos(3x) + \dfrac{1}{2} = 0$
4. $\left(\cos^2 x + \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\sin^2 x + \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$
5. $\sin(x+y) = \sin(x) + \sin(y)$.

Correction :

1. $\cos(x) < 1/2 \iff x \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]2k\pi + \frac{\pi}{3}\,; 2k\pi + \frac{5\pi}{3}\right[$ (faire un dessin).
2. $\tan(x) \geq 1 \iff x \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi + \frac{\pi}{4}\,; k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(3x) + \frac{1}{2} = 0 &\iff \cos(3x) = -\frac{1}{2}\\ &\iff 3x \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] \qquad \text{ou} \qquad 3x \equiv \frac{-2\pi}{3}[2\pi]\\ &\iff x \equiv \frac{2\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \qquad \text{ou} \qquad x \equiv \frac{-2\pi}{9}\left[\frac{2\pi}{3}\right]\end{aligned}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. x est solution si et seulement si $y = \cos(x)$ est solution de $y^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)y - \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 0$ ou $z = \sin(x)$ est solution de $z^2 + \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$. Dans le premier cas, on a

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\\ &= \frac{3-2\sqrt{3}+1}{4} + \sqrt{3}\\ &= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{4}\\ &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

si bien que les solutions (pour y) sont

$$y_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On trouve de même que les solutions pour z sont

$$z_1 = -1 \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution} \quad & \iff \quad \cos(x) = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(x) = -1 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
& \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & \equiv & \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \\ & \text{ou} & \\ x & \equiv & -\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x & \equiv & \dfrac{5\pi}{6}[2\pi] \\ & \text{ou} & \\ x & \equiv & -\dfrac{5\pi}{6}[2\pi] \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x & \equiv & \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \\ & \text{ou} & \\ x & \equiv & \dfrac{3\pi}{4}[2\pi] \end{array} \right.
\end{aligned}$$

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. À l'aide des formules $\sin(a) + \sin(b)$ et $\sin(2a)$:

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) = \sin(x) + \sin(y) \quad & \iff \quad 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
& \iff \quad \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
& \iff \quad \frac{x+y}{2} \equiv 0[\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{x+y}{2} \equiv \frac{x-y}{2}[2\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{x+y}{2} \equiv -\frac{x-y}{2}[2\pi] \\
& \iff \quad x \equiv -y[2\pi] \quad \text{ou} \quad y \equiv 0[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv 0[2\pi]
\end{aligned}$$

Ces conditions sont évidemment suffisantes, mais on vient de prouver qu'elles sont nécessaires.

Exercice 6 : ✪ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Discuter et résoudre l'équation (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) : $a\cos(x) + b\sin(x) = c$.

Correction : Comme dans le cours, divisons par $\sqrt{a^2+b^2}$, à la condition que a et b soient non tous nuls. Si $a = b = 0$, cette équation a des solutions si et seulement si $c = 0$ (et alors tout réel est solution). Supposons donc a et b non tous nuls. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2+b^2} \times \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \times \sin(x)\right)$$

Puisque $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
a\cos(x) + b\cos(x) = c \quad & \iff \quad \sqrt{a^2+b^2} \times (\cos(\alpha)\cos(x) + \sin(\alpha)\sin(x)) = c \\
& \iff \quad \sqrt{a^2+b^2} \times \cos(x - \alpha) = c \\
& \iff \quad \cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

Si $|c| > \sqrt{a^2+b^2}$, alors $|c|/\sqrt{a^2+b^2} > 1$ donc cette équation n'a pas de solution. Supposons donc $|c| \leq \sqrt{a^2+b^2}$ si bien que $c/\sqrt{a^2+b^2} \in [\,-1\,;1\,]$: il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $c/\sqrt{a^2+b^2} = \cos(\theta)$. Finalement :

$$\begin{aligned}
a\cos(x) + b\cos(x) = c \quad & \iff \quad \cos(x-\alpha) = \cos(\theta) \\
& \iff \quad x - \alpha \equiv \theta[2\pi] \quad \text{ou} \quad x - \alpha \equiv -\theta[2\pi] \\
& \iff \quad x \equiv \alpha + \theta[2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \alpha - \theta[2\pi]
\end{aligned}$$

Exercice 7 : ✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x)$.

1. Tracer la courbe représentative de f.

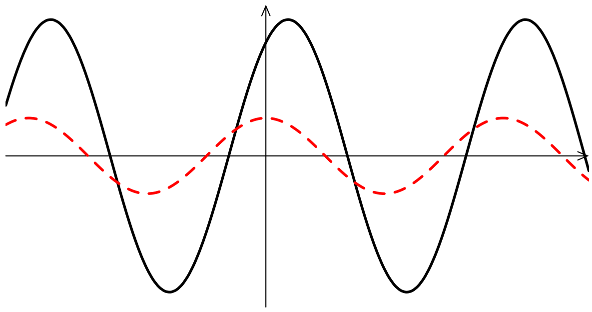
2. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 1$.
3. Expliciter $f(\mathbb{R})$.
4. Étudier le signe de f sur $[\,0\,;2\pi\,]$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) < 0$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme d'habitude :

$$f(x) = \sqrt{13} \times \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \sin(x) + \frac{3}{\sqrt{13}} \cos(x) \right)$$

Il existe α tel que $\sin(\alpha) = 2/\sqrt{13}$ et $\cos(\alpha) = 3/\sqrt{13}$ (puisque $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ sont positifs, $\alpha = \text{Arccos}(3/\sqrt{13})$ convient). Dès lors, $f(x) = \sqrt{13}\cos(x-\alpha)$. On en déduit que le graphe de f s'obtient à partir du cosinus par translation de vecteur $\alpha\overrightarrow{i}$ (vers la droite, donc) puis par dilatation verticale de facteur $\sqrt{13} \approx 3, \dots$ Ci-dessous le graphe du cosinus (en pointillés) et le graphe de f (en traits pleins).



2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = 1 \quad &\iff \quad \sqrt{13}\cos(x-\alpha) = 1 \\ &\iff \quad \cos(x-\alpha) = \frac{1}{\sqrt{13}} \\ &\iff \quad x - \alpha \equiv \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) [2\pi] \qquad \text{ou} \qquad x - \alpha \equiv -\text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) [2\pi] \\ &\iff \quad x \equiv \alpha + \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) [2\pi] \qquad \text{ou} \qquad x \equiv \alpha - \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right) [2\pi] \end{aligned}$$

3. $f(\mathbb{R}) = \left[-\sqrt{13}\,;\sqrt{13}\,\right]$.
4. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\iff \quad x - \alpha \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\ &\iff \quad x \equiv \alpha + \frac{\pi}{2} [\pi] \end{aligned}$$

De même :

$$f(x) < 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - \alpha \in \left] \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,; \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \right[$$

et

$$f(x) > 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x - \alpha \in \left] \frac{\pi}{2} + (2k-1)\pi\,; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[$$

En particulier, sur $[\,0\,;2\pi\,]$, $f(x) = 0$ en $\alpha + \pi/2$ et en $\alpha + 3\pi/2$, $f(x) \leq 0$ sur $\left[\alpha + \frac{\pi}{2}\,;\alpha + \frac{3\pi}{2}\right]$ et $f(x) \geq 0$ sur $\left[0\,;\alpha + \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\alpha + \frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$.

Exercice 8 : ✪ Étudier (domaine de définition, etc.) la fonction cotangente définie (quand c'est possible) par :

$$\text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Montrer que la restriction de cotan à $]\,0\,;\pi\,[$ est une bijection de $]\,0\,;\pi\,[$ dans $\mathbb{R}$, et étudier la dérivabilité de sa réciproque, notée Arccotan.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. cotan est définie en x si et seulement si $\sin(x) \neq 0$ si et seulement si $x \not\equiv 0[\pi]$. Dès lors, son domaine de définition est :

$$D_{\text{cotan}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \,]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$$

Soit $x \in D_{\text{cotan}}$.

- $-x \in D_{\text{cotan}}$ et

$$\begin{aligned} \text{cotan}(-x) &= \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} \\ &= \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} \\ &= -\text{cotan}(x) \end{aligned}$$

  La fonction cotangente est impaire.
- $x+\pi \in D_{\text{cotan}}$ et

$$\begin{aligned} \text{cotan}(x+\pi) &= \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} \\ &= \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} \\ &= \text{cotan}(x) \end{aligned}$$

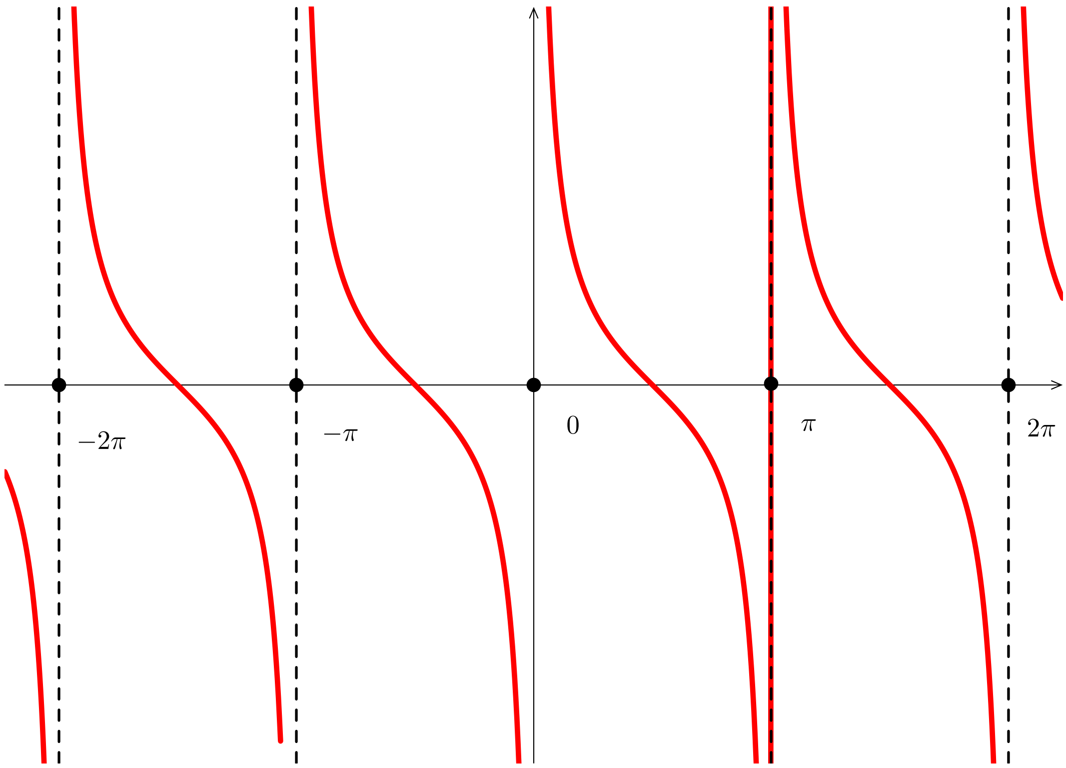
  La fonction cotangente est π-périodique.
- La fonction cotan est dérivable sur son domaine de définition car quotient de fonctions dérivables, celle au dénominateur ne s'annulant pas. De plus :

$$\begin{aligned} \text{cotan}'(x) &= \frac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\ &= -1-\text{cotan}^2(x) \\ &= \frac{-1}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

  Comme pour la dérivée de la tangente, il y a deux expressions possibles, mais dans tous les cas, $\text{cotan}'(x) < 0$: la fonction cotangente est strictement décroissante SUR TOUT INTERVALLE COMPOSANT SON DOMAINE DE DÉFINITION ! En particulier, elle est strictement décroissante sur $]\,0\,;\pi\,[$. De plus, $\cos(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$ et $\sin(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^+$ si bien que $\text{cotan}(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et, de même, $\text{cotan}(x) \xrightarrow[x\to \pi^-]{} -\infty$. Enfin, si $k \in \mathbb{Z}$, par périodicité :

$$\text{cotan}(x) \xrightarrow[x\to (k\pi)^+]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \text{cotan}(x) \xrightarrow[x\to (k\pi)^-]{} -\infty$$

  Le graphe ci-dessous en découle :



Enfin, la restriction de cotan à $]\,0\,;\pi\,[$ est continue, strictement décroissante, tend vers $+\infty$ en 0 et vers $-\infty$ en π. D'après le théorème de la bijection, c'est une bijection de $]\,0\,;\pi\,[$ dans $\mathbb{R}$. De plus, si on note sa bijection réciproque Arccotan, alors Arccotan est dérivable sur $\mathbb{R}$ car cotan$'$ ne s'annule jamais. Enfin, si $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\text{Arccotan}'(x) &= \frac{1}{\text{cotan}'(\text{Arccotan}(y))} \\
&= \frac{1}{-1-\text{cotan}^2(\text{Arccotan}(y))} \\
&= \frac{-1}{1+y^2}
\end{aligned}$$

Exercice 9 : ✪ Dériver les fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (\cos x)^{\sin x}$
2. $f : x \mapsto \sqrt{1+\sin^2(2021x)}$
3. $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan(x)}}\right)$

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Sous réserve d'existence, $f(x) = e^{\sin(x)\ln(\cos(x))}$. f est donc définie en x si et seulement si $\cos(x) > 0$. Ainsi :

$$D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} 2k\pi - \frac{\pi}{2} 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

Soit donc $x \in D_f$. f est dérivable car composée de fonctions dérivables et

$$f'(x) = \left[\cos(x)\ln(\cos(x)) + \sin(x) \times \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\right] \times e^{\sin(x)\ln(\cos(x))}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $1+\sin^2(2021x) > 0$: f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions dérivables, et

$$f'(x) = \frac{2\times 2021\cos(2021x)\times\sin(2021x)}{2\sqrt{1+\sin^2(2021x)}}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. f est définie en x si et seulement si $\tan(x) > -1$. De même que dans l'exercice 5 :

$$D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\, k\pi - \frac{\pi}{4}\,; k\pi + \frac{\pi}{2}\,\right[$$

Soit donc $x \in D_f$. Comme d'habitude, faisons plusieurs étapes.

- Posons $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan(x)}} = (1+\tan(x))^{-1/2}$. Alors
$$g'(x) = -\frac{1}{2} \times (1+\tan^2(x)) \times (1+\tan(x))^{-3/2}$$
- Enfin, $f(x) = \cos(g(x))$ donc $f'(x) = g'(x) \times -\sin(g(x))$ c'est-à-dire :
$$f'(x) = \frac{1}{2} \times (1+\tan^2(x)) \times (1+\tan(x))^{-3/2} \times \sin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan(x)}}\right)$$

Exercice 10 : ✪ Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x)$ et $g(x) = -\sin(x)$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$ puis montrer qu'en le point d'abscisse $\pi/2$, les courbes des fonctions f et g sont tangentes.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}
f(x) = g(x) \quad &\iff \quad \cos(2x) = \sin(-x) \\
&\iff \quad \cos(2x) = \cos\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\iff \quad 2x \equiv -x - \frac{\pi}{2}[2\pi] \qquad \text{ou} \qquad 2x \equiv x + \frac{\pi}{2}[2\pi] \\
&\iff \quad 3x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \qquad \text{ou} \qquad x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\
&\iff \quad x \equiv -\frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right] \qquad \text{ou} \qquad x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]
\end{aligned}$$
Remarquons ensuite que les courbes de f et g se coupent en $\pi/2$. Pour répondre à la question, il suffit donc de prouver que les nombres dérivés (les coefficients directeurs des tangentes) sont les mêmes, ce qui est trivial : $f'(\pi/2) = g'(\pi/2) = 0$.

Exercice 11 : ✪ Soient $n \geq 2$ et $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Montrer que $|\sin(nx)| < n|\sin(x)|$.

Correction : Soit $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Raisonnons par récurrence sur n.

1. Si $n \geq 2$, notons H_n : « $|\sin(nx)| < n|\sin(x)|$ ».
2. $|\sin(2x)| = 2|\sin(x)| \times |\cos(x)|$. Or, $x \notin \pi\mathbb{Z}$ donc $\cos(x) \neq \pm 1$ si bien que $|\cos(x)| < 1$ et en multipliant par $2|\sin(x)|$ strictement positif (donc l'inégalité stricte est préservée), on a la véracité de H_2.
3. Soit $n \geq 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie.
$$\sin((n+1)x) = \sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)$$
D'après l'inégalité triangulaire :
$$|\sin((n+1)x)| \leq |\sin(nx)| \times |\cos(x)| + |\sin(x)| \times |\cos(nx)|$$
Par hypothèse de récurrence, $|\sin(nx)| < n|\sin(x)|$ et $|\cos(x)| < 1$ donc $|\sin(nx)| \times |\cos(x)| < n|\sin(x)|$. De plus, $|\cos(nx)| \leq 1$ (attention, ici, l'inégalité n'est pas forcément stricte : par exemple si $x = \pi/n$) donc $|\sin(x)| \times |\cos(nx)| \leq |\sin(x)$. Par somme (rappelons que la somme d'une inégalité large et d'une inégalité stricte est stricte) on a
$$|\sin((n+1)x)| < n|\sin(x)| + \sin(x) = (n+1)|\sin(x)|$$
c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
4. D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.

Exercice 12 : ✪ Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que $\cos^{-1}(A)$ (l'image réciproque de A, cf. chapitre 3) est un domaine 2π-périodique, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \cos^{-1}(A) \Rightarrow x \pm 2\pi \in \cos^{-1}(A)$.

Correction : Soit $x \in \cos^{-1}(A)$. Alors $\cos(x) \in A$ et puisque le cosinus est 2π-périodique, $\cos(x+2\pi) = \cos(x) \in A$ c'est-à-dire que $x + 2\pi \in \cos^{-1}(A)$.

Exercice 13 : ✪✪ Donner la valeur de $\alpha = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)}$.

Correction : On a successivement :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)} \\
&= \frac{2\times\left(\frac{1}{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)} \\
&= \frac{2\times\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)} \\
&= \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{18}\right)}{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{2}} \\
&= \frac{4\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Exercice 14 : ✪✪ Résoudre l'équation $2^{4\cos^2(x)+1} + 16\times 2^{4\sin^2(x)-3} = 20$.

Correction : Soit $x\in\mathbb{R}$. Puisque $16 = 2^4$:

$$\begin{aligned}
2^{4\cos^2(x)+1} + 16\times 2^{4\sin^2(x)-3} = 20 &\iff 2^{4\cos^2(x)+1} + 2^{4\sin^2(x)+1} = 20 \\
&\iff 2^{4\cos^2(x)} + 2^{4\sin^2(x)} = 10 \\
&\iff 2^{4\cos^2(x)} + 2^{4-4\cos^2(x)} = 10 \\
&\iff 2^{4\cos^2(x)} + 16\times 2^{-4\cos^2(x)} = 10 \\
&\iff y^2 - 10y + 16 = 0
\end{aligned}$$

où $y = 2^{4\cos^2(x)}$. On a $\Delta = 36$ si bien que les solutions sont $y_1 = 2$ et $y_1 = 8$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
2^{4\cos^2(x)+1} + 16\times 2^{4\sin^2(x)-3} = 20 &\iff 2^{4\cos^2(x)} = 2 \quad \text{ou} \quad 2^{4\cos^2(x)} = 2^3 \\
&\iff 4\cos^2(x) = 1 \quad \text{ou} \quad 4\cos^2(x) = 3 \\
&\iff \cos(x) = \pm\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos(x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\iff x \equiv \pm\frac{\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x\equiv\pm\frac{2\pi}{3}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x\equiv\pm\frac{\pi}{6}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x\equiv\pm\frac{5\pi}{6}[2\pi]
\end{aligned}$$

Exercice 15 : ✪✪✪ Soit $b\in\mathbb{R}$. Montrer que l'équation (d'inconnue x) $\cos(x)\cos(3x) = b$ admet des solutions si et seulement si $b\in\left[-\frac{9}{16}\,;1\right]$.

Correction : Soit $x\in\mathbb{R}$. On sait que

$$\begin{aligned}
\cos(x)\cos(3x) &= \frac{1}{2}\left[\cos(2x)+\cos(4x)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos(2x) + 2\cos^2(2x) - 1\right) \\
&= \cos^2(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et donc $\cos(x)\cos(3x) = b$ si et seulement si $y = \cos(2x)$ est solution de $2y^2 + y - (2b+1) = 0$ (on a multiplié par 2 pour éliminer les fractions). $\Delta = 1+8(2b+1) = 16b+9$. Supposons que $b < -9/16$. Alors $\Delta < 0$: l'équation en y ci-dessus n'a pas de solution réelle donc l'équation initiale n'a pas de solution. De plus, un cosinus et donc un produit de cosinus étant inférieur à 1, la condition $b \leq 1$ est nécessaire car, si $b > 1$, il n'est pas possible que $\cos(x)\cos(3x) = b$. La condition $b \in \left[-\dfrac{9}{16}\,;1\right]$ est donc nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Le fait que Δ soit positif ne permet pas de conclure : l'équation en y admet en effet des solutions, mais rien ne dit qu'elles appartiennent à $[-1\,;1]$: par exemple, si elles valent 2 et -3, alors elles ne peuvent pas être égales à $\cos(2x)$ donc l'équation initiale en x n'aurait pas de solution. Il faut donc prouver qu'au moins une solution de l'équation en y appartient à $[-1\,;1]$. Les solutions de l'équation en y sont

$$y_1 = \frac{-1-\sqrt{16b+9}}{4} \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{-1+\sqrt{16b+9}}{4}$$

Or, $\sqrt{16b+9} \geq 0$ et puisque $b \leq 1$ et puisque la racine carrée est croissante, $\sqrt{16b+9} \leq \sqrt{16+9} = 5$. Dès lors :

$$-1 \leq -\frac{1}{4} \leq y_2 \leq \frac{-1+5}{4} = 1$$

il existe donc u tel que $\cos(u) = y_2$ et donc, en posant $x = u/2$, il existe donc x tel que $\cos(2x) = y_2$: $\cos(2x)$ est solution de l'équation en y donc x est solution de l'équation originelle. Celle-ci admet donc des solutions, ce qui permet de conclure.

Exercice 16 - Formule de Viète : ✪✪✪

1. Soit $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$.
   (a) En utilisant la formule $\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y)$, simplifier, pour $n \geq 1$, le produit suivant :
   $$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$
   (b) Montrer que $\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$.
   (c) En appliquant la question précédente à $u_n = x/2^n$, donner la limite de $P_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par
   $$u_n = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$$
   où il y a n radicaux. Montrer que pour tout $n \geq 1, u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.
3. En utilisant la première question, montrer la formule de Viète (1593) :
   $$\prod_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}$$

Correction :

1. (a) En utilisant la formule trigo rappelée par l'énoncé, si $y \not\equiv 0[\pi]$, $\sin(y) \neq 0$ si bien que $\cos(y) = \dfrac{\sin(2y)}{2\sin(y)}$. Si x n'est pas un multiple de π, alors tous les $x/2^k$ ne sont pas non plus des multiples de π donc :
   $$\begin{aligned} P_n(x) &= \prod_{k=1} \frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} \\ &= \frac{1}{2^n}\prod_{k=1} \frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)} \end{aligned}$$
   On reconnaît un produit télescopique, si bien que
   $$P_n(x) = \frac{\sin(x)}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$
   (b) La fonction sinus étant dérivable,
   $$\frac{\sin(u)}{u} = \frac{\sin(u)-\sin(0)}{u-0} \xrightarrow[u\to 0]{} \sin'(0) = 1$$

(c) $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, par composition de limites,

$$\frac{\sin(x/2^n)}{x/2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Or,

$$P_n(x) = \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{x/2^n}{\sin(x/2^n)}$$

donc, d'après ce qui précède :

$$P_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{1} = \frac{\sin(x)}{x}$$

2. Raisonnons par récurrence.
   - Si $n \geq 1$, notons H_n : « $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$. »
   - D'une part, $u_1 = \sqrt{2}/2$ et d'autre part, $\cos\left(\frac{\pi}{2^{1+1}}\right) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ donc H_1 est vraie.
   - Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Or, par définition de la suite, il y a $n+1$ racines dans u_{n+1} donc, en mettant au carré, on « supprime » la première et il en reste n si bien que :

$$\begin{aligned} {u_{n+1}}^2 &= \frac{1}{4} \times (2 + 2u_n) \\ &= \frac{u_n + 1}{2} \\ &= \frac{\cos(x/2^{n+1}) + 1}{2} \qquad \text{(HR)} \\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2^{n+2}}\right) \end{aligned}$$

   à l'aide de la formule de trigo $\frac{\cos(a)+1}{2} = \cos^2(a/2)$ (c'est la formule donnant $\cos(2x)$ avec $x = a/2$). Attention, pour dire que deux nombres ayant le même carré sont égaux, ils faut dire qu'ils ont le même signe. Or, $u_{n+1} > 0$ et $\pi/2^{n+2} \in [\,0\,;\pi/2\,]$, intervalle sur lequel le cosinus est positif, ce qui permet de conclure. H_{n+1} est vraie, donc H_n est vraie pour tout $n \geq 1$ d'après le principe de récurrence.

3. D'après ce qui précède :

$$\prod_{k=1}^{n} u_k = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$$

c'est-à-dire que $\prod_{k=1}^{n} u_k = P_n(\pi/2)$ où P_n est le produit de la question 1 (avec $x = \pi/2$ donc). D'après la question 1.c :

$$\prod_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

Exercice 17 - Variante de la formule de Viète : ✪✪

1. Soit $y \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. Exprimer $\sin(3y)/\sin(y)$ en fonction de $\cos(2y)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. En déduire une expression simplifiée, pour $n \geq 1$, de

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 + 2\cos(2x/3^k)}{3}$$

3. En s'inspirant de l'exercice précédent, donner la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Correction :

1. On a :

$$\begin{aligned}
\sin(3y) &= \sin(2y+y) \\
&= \sin(y)\cos(2y) + \sin(2y)\cos(y) \\
&= \sin(y)\cos(2y) + 2\sin(y)\cos^2(y) \\
&= \sin(y)\cos(2y) + \sin(y)\times(\cos(2y)+1)
\end{aligned}$$

si bien que $\sin(3y)/\sin(y) = 2\cos(2y)+1$.

2. Oubli : on suppose que $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ (même si on peut toujours le faire pour $x \in \pi\mathbb{Z}$ mais c'est un peu plus compliqué). D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
u_n &= \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\dfrac{x}{3^{k-1}}\right)}{3\sin\left(\dfrac{x}{3^k}\right)} \\
&= \frac{1}{3^n}\frac{\sin(x)}{\sin(x/3^n)}
\end{aligned}$$

en sortant les constantes et par télescopage.

3. Toujours en utilisant la limite $\sin(u)/u$ quand u tend vers 0, on trouve que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Exercice 18 : ✪✪✪

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ est périodique.
2. Soit $f : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $f(x) = f'(x) = 0$? En déduire que f n'est pas périodique.
3. Donner une somme de fonctions périodiques qui n'est pas périodique.

Correction :

1. La fonction sin étant 2π-périodique, la fonction $g : x \mapsto \sin(x/5)$ est 10π-périodique. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
g(x+10\pi) &= \sin\left(\frac{x+10\pi}{5}\right) \\
&= \sin\left(\frac{x}{5}+2\pi\right) \\
&= \sin\left(\frac{x}{5}\right) \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

De même, $h : x \mapsto \cos(x/3)$ est 6π-périodique. On aimerait qu'ils aient une même période, la somme serait alors périodique. Il suffit de voir que tous les multiples de 10π sont des périodes de g et que tous les multiples de 6π sont des périodes de h. Par conséquent, 30π est à la fois une période de g et une période de h donc est une période de f : f est bien périodique car admet une période non nulle.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(x) = f'(x) = 0 &\iff \sin(x^2) = 0 \qquad \text{et} \qquad -2x\cos(x^2) = 0 \\
&\iff x^2 \equiv 0[\pi] \qquad \text{et} \qquad \left(x = 0 \qquad \text{ou} \qquad x^2 \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\right)
\end{aligned}$$

Or, les conditions $x^2 \equiv 0[\pi]$ et $x^2 \equiv \pi/2[\pi]$ sont incompatibles. Il en découle que :

$$\begin{aligned}
f(x) = f'(x) = 0 &\iff x^2 \equiv 0[\pi] \qquad \text{et} \qquad x = 0 \\
&\iff x = 0
\end{aligned}$$

0 est donc le seul réel solution de cette équation. Supposons donc f périodique et soit T une période non nulle. f étant dérivable, f' est aussi T-périodique (cf. chapitre 2.4). Puisque $f(0) = 0$ alors $f(T) = 0$, et puisque $f'(0) = 0$, alors $f'(T) = 0$, ce qui est absurde car aucun réel non nul ne vérifie $f(x) = f'(x) = 0$: f n'est pas périodique (ce qui se voit bien graphiquement : le graphe de f ne se répète pas, il se contracte de plus en plus au fur et à mesure).

3. L'argument clef dans la première question est que les deux fonctions admettaient une période commune. Cela n'est pas forcément le cas si on somme des fonctions qui ont des périodes quelconques. Cherchons f_1 et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques dont la somme ne l'est pas. On suppose que f_1 est T_1-périodique et que f_2 est T_2-périodique. On sait que si f_1 et f_2 ont une période commune alors $f_1 + f_2$ est périodique. On cherche une période commune sous la forme $T = k_1T_1 = k_2T_2$ avec k_1 et k_2 dans $\mathbb{Z}$ non nuls. On a alors
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q}^*$$
Il peut y avoir d'autres périodes que les multiples de T_1 et de T_2 mais on voit que si le rapport des périodes est rationnel, alors la somme des fonctions est périodique. Dès lors, si on veut trouver deux fonctions périodiques donc la somme ne l'est pas, pour que ça ait des chances de marcher, il faut chercher parmi des fonctions dont le rapport des périodes est un irrationnel. Soient donc $f_1 : x \mapsto \cos(x)$ et $f_2 : x \mapsto \cos(x\sqrt{2})$. Alors f_1 est 2π périodique et f_2 est $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}$ périodique (exo). Montrons que $f_1 + f_2$ n'est pas périodique. Montrons plus précisément que pour tout $x \neq 0, f(x) \neq f(0) = 2$. Soit $x \neq 0$. Supposons que $f(x) = 2$. Alors $\cos(x) = \cos(x\sqrt{2}) = 1$ donc
$$x \equiv 0[2\pi] \qquad \text{et} \qquad x\sqrt{2} \equiv 0[2\pi]$$
c'est-à-dire :
$$\exists (k_1, k_2) \in (\mathbb{Z}^*)^2, \qquad x = 2k_1\pi \qquad \text{et} \qquad x\sqrt{2} = 2k_2\pi$$
Ainsi, $\sqrt{2} = \dfrac{k_2}{k_1} \in \mathbb{Q}$: absurde. f n'est donc pas périodique : en effet, s'il existe $T \neq 0$ tel que f soit T-périodique, alors en particulier $f(T) = f(0) = 2$ ce qui est absurde.

Exercice 19 : ✪✪✪

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Combien de fois la fonction sinus s'annule-t-elle sur $]\,a\,;b\,]$?
2. Redémontrer que la fonction $f : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ n'est pas périodique.

Correction :

1. La fonction sinus s'annulant uniquement sur $\pi\mathbb{Z}$, il suffit de donner le nombre de multiples de π sur cet intervalle. Supposons dans un premier temps $b > 0$. L'intervalle (ouvert en 0) $]\,0\,;b\,]$ contient $\lfloor b/\pi \rfloor$ multiples de π (cf. chapitre 2.5, paragraphe sur la partie entière : à savoir faire !). Par symétrie de $\pi\mathbb{Z}$ par rapport à 0, si $b \leq 0$, l'intervalle $[\,b\,;0\,[$ contient autant de multiples de π que $]\,0\,;-b\,]$, à savoir $\left\lfloor \dfrac{-b}{\pi} \right\rfloor$ multiples de π. Distinguons à présent plusieurs cas selon le signe de a et de b.
   - Premier cas : $0 \leq a < b$. Le nombre de zéros du sinus sur $]\,a\,;b\,]$ (ouvert en a) est égal au nombre de multiples de π dans cet intervalle, et donc c'est le nombre de multiples de π dans $]\,0\,;b\,]$ moins le nombre de multiples dans $]\,0\,;a\,]$, c'est-à-dire que le sinus s'annule $\left\lfloor \dfrac{b}{\pi} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{a}{\pi} \right\rfloor$ fois sur $]\,a\,;b\,]$.
   - Deuxième cas : $a < 0 \leq b$. Le nombre de zéros du sinus sur $]\,a\,;b\,]$ est égal au nombre de multiples de π dans cet intervalle, et donc c'est le nombre de multiples de π dans $]\,0\,;b\,]$ plus le nombre de multiples dans $[\,a\,;0\,[$ plus 1 : 0. Le sinus s'annule donc $\left\lfloor \dfrac{b}{\pi} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{-a}{\pi} \right\rfloor + 1$ fois sur $[\,a\,;b\,]$. Quant à $]\,a\,;b\,]$: cela dépend de si a est un multiple de π ou non. Finalement : si a est un multiple de π, le sinus s'annule $\left\lfloor \dfrac{b}{\pi} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{-a}{\pi} \right\rfloor$ fois sur $[\,a\,;b\,]$, et elle s'annule $\left\lfloor \dfrac{b}{\pi} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{-a}{\pi} \right\rfloor + 1$ fois sur $]\,a\,;b\,]$ si ce n'est pas le cas.
   - Troisième cas : $a < b < 0$. Le nombre de zéros du sinus sur $[\,a\,;b\,[$ (ouvert en b) est égal au nombre de multiples de π dans cet intervalle, et donc c'est le nombre de multiples de π dans $]\,-b\,;-a\,]$, c'est-à-dire $\left\lfloor \dfrac{-a}{\pi} \right\rfloor - \left\lfloor \dfrac{-b}{\pi} \right\rfloor$ fois sur $[\,a\,;b\,[$. Quant à $]\,a\,;b\,]$: cela dépend de si a et b sont des multiples de π ou non, il faut selon les cas ajouter ou retirer 1 : laissé en exo.
2. Supposons cette fonction T-périodique avec $T > 0$ (si $T < 0$, alors $-T$ est une période : dans tous les cas, une fonction périodique admet donc une période strictement positive). Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le nombre de zéros de f sur $]\,kT\,;(k+1)T\,]$ est le même par périodicité. Soit donc $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
$$\begin{aligned} x \in \,]\,kT\,;(k+1)T\,] \qquad \text{et} \qquad f(x) = 0 \quad &\iff \quad kT < x \leq (k+1)T \qquad \text{et} \qquad f(x) = 0 \\ &\iff \quad (kT)^2 < x^2 < ((k+1)T)^2 \qquad \text{et} \qquad \sin\left(x^2\right) = 0 \end{aligned}$$

par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que le nombre de zéros de f sur $]\, kT\,; (k+1)T\,]$ est le nombre de zéros de la fonction sinus sur $\left]\,(kT)^2\,; ((k+1)T)^2\,\right]$ qui, d'après ce qui précède, vaut :

$$n_k = \left\lfloor \frac{(k+1)T)^2}{\pi} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(kT)^2}{\pi} \right\rfloor$$

Or :

$$\left\lfloor \frac{((k+1)T)^2}{\pi} \right\rfloor > \frac{((k+1)T)^2}{\pi} - 1 \qquad \text{et} \qquad \left\lfloor \frac{(kT)^2}{\pi} \right\rfloor \leq \frac{(kT)^2}{\pi}$$

si bien que

$$n_k > \frac{((k+1)T)^2}{\pi} - 1 - \frac{(kT)^2}{\pi} = \frac{2kT + T^2}{\pi} - 1 \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$$

ce qui est absurde car ce nombre ne dépend pas de k d'après ce qui précède : f n'est pas périodique.

5.2 Fonctions circulaires réciproques.

Exercice 20 : ✪ Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout x réel

$$\text{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left(n \times \text{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Correction : Précisons déjà que la fonction Arctan est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par récurrence.

- Si $n \geq 1$, notons H_n le résultat à prouver.
- D'une part, $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, d'autre part :

$$\begin{aligned}
\frac{(1-1)!}{(1+x^2)^{1/2}} \sin\left(1 \times \text{Arctan}(x) + \frac{1\pi}{2}\right) &= \frac{0!}{\sqrt{1+x^2}} \times \sin\left(\text{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \times \cos(\text{Arctan}(x)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que H_1 est vraie.

- Soit $n \geq 1$. Supposons H_1 vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence :

$$\text{Arctan}^{(n)}(x) = (n-1)! \times (1+x^2)^{-n/2} \sin\left(n \times \text{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Dérivons donc encore une fois :

$$\begin{aligned}
\text{Arctan}^{(n+1)}(x) &= (n-1)! \times -\frac{n}{2} \times 2x(1+x^2)^{-n/2-1} \sin\left(n \times \text{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right) \\
&\quad + (n-1)!(1+x^2)^{-n/2} \times \frac{n}{1+x^2} \cos\left(n \times \text{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \frac{-n! \times x}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}+1}} \sin\left(n \times \text{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{n!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}+1}} \cos\left(n \times \text{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \frac{n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \left[-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sin\left(n \times \text{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cos\left(n \times \text{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \left[-\sin(\text{Arctan}(x)) \sin\left(n \times \text{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right) + \cos(\text{Arctan}(x)) \cos\left(n \times \text{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \times \cos\left((n+1)\text{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \frac{n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \times \sin\left((n+1)\text{Arctan}(x) + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence (on a utilisé le fait que $\cos(u) = \sin(u + \pi/2)$.

Exercice 21 : ✪ Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes :

$$f(x) = \tan(2\text{Arctan}(x)), \qquad g(x) = \cos(4\text{Arctan}(x)) \qquad \text{et} \qquad h(x) = \sin(3\text{Arctan}(x))$$

Correction : On sait que (soit avec la formule donnant $\tan(t)$ en fonction de $\tan(t/2)$, soit en utilisant $\tan(a+b)$ avec $a = b = x$)

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

si bien que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2\tan(\text{Arctan}(x))}{1 - \tan^2(\text{Arctan}(x))} \\ &= \frac{2x}{1 - x^2} \end{aligned}$$

On sait également que $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ si bien que

$$\begin{aligned} \cos(4a) &= \cos(2(2a)) \\ &= 2\cos^2(2a) - 1 \\ &= 2\left(2\cos^2(a) - 1\right)^2 - 1 \\ &= 8\cos^4(a) - 8\cos^2(a) + 1 \end{aligned}$$

et puisque $\cos(\text{Arctan}(x)) = 1/\sqrt{1 + x^2}$, il vient :

$$\cos(4\text{Arctan}(x)) = \frac{8}{(1 + x^2)^2} - \frac{8}{1 + x^2} + 1$$

Enfin, $\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$ et $\sin(\text{Arctan}(x)) = x/\sqrt{1 + x^2}$ si bien que :

$$\sin(3\text{Arctan}(x)) = \frac{3x}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{4x^3}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$$

Exercice 22 : ✪ Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Simplifier l'expression $\text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$.

Correction : Notons cette quantité $f(x)$. Première méthode :

$$\sin(f(x)) = \sin(\text{Arcsin}(x))\cos(\text{Arcsin}(\sqrt{1 - x^2})) + \sin(\text{Arcsin}(\sqrt{1 - x^2}))\cos(\text{Arcsin}(x))$$

Or, $\sin(Arcsin(u)) = u$ donc

$$\sin(f(x)) = x\cos(\text{Arcsin}(\sqrt{1 - x^2})) + \sqrt{1 - x^2}\cos(\text{Arcsin}(x))$$

Or, $\cos^2(\text{Arcsin}(u)) = 1 - \sin^2(\text{Arcsin}(u)) = 1 - u^2$ et $\text{Arcsin}(u) \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(\text{Arcsin}(u)) \geq 0$ si bien que $\cos(\text{Arcsin}(u)) = \sqrt{1 - u^2}$. Finalement :

$$\begin{aligned} \sin(f(x)) &= x \times \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}^2} + \sqrt{1 - x^2} \times \sqrt{1 - x^2} \\ &= x \times \sqrt{x^2} + (1 - x^2) \end{aligned}$$

Or, $x \geq 0$ donc $\sqrt{x^2} = x$ si bien que $\sin(f(x)) = 1$. Enfin, la fonction Arcsin est à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $f(x) \in [\,-\pi\,;\pi\,]$ (on pourrait même être plus précis et dire que x et $\sqrt{1 - x^2}$ sont dans $[\,0\,;1\,]$ donc les deux Arcsin sont positifs si bien que $f(x) \in [\,0\,;\pi\,]$) et $\sin(f(x)) = 1$ donc $f(x) = \frac{\pi}{2}$ car c'est la seule solution de l'équation $\sin(u) = 1$ sur cet intervalle.

Deuxième méthode : f est continue sur $[\,0\,;1\,]$ car composée de fonctions continues et dérivable sur $]\,0\,;1\,[$ car composée de fonctions dérivables (il faut enlever 1 et 0 car Arcsin n'est pas dérivable en 1). Soit $x \in \,]\,0\,;1\,[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{x} && \text{(car } x>0\text{)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

f est dérivable sur $]\,0\,;1\,[$ de dérivée nulle et est continue sur $[\,0\,;1\,]$ donc est constante sur $[\,0\,;1\,]$ et il suffit de voir que $f(0) = \text{Arcsin}(1) + \text{Arcsin}(0) = \pi/2 + 0$ pour aboutir au même résultat.

Exercice 23 : ✪

1. Montrer que : $\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geq x - \dfrac{x^2}{\pi}$.
2. Montrer sans nouvelle étude de fonction que le résultat est en fait valable sur $[\,0\,;\pi\,]$.

Correction :

1. Soit f définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin(x) - x + \dfrac{x^2}{\pi}$. f est dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$) car somme de fonctions qui le sont. Soit $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
$$f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{2x}{\pi}$$
Or, le cos est concave sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ (car dérivable deux fois de dérivée seconde $-\cos$ négative) donc est au-dessus de ses cordes, et la droite d'équation $y = 1 - \dfrac{2x}{\pi}$ est la corde joignant les points d'abscisse 0 et $\dfrac{\pi}{2}$. En d'autres termes, $f'(x) \geq 0$ si bien que f est croissante. Or, $f(0) = 0$ et f croissante donc f est positive sur cet intervalle.
2. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$. Alors $f(x) = f(\pi - x)$ (découle d'un calcul simple) et $\pi - x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $f(\pi - x) \geq 0$ ce qui permet de conclure.

Exercice 24 : ✪ Montrer les égalité suivantes :

1. $\text{Arcsin}\left(\dfrac{5}{13}\right) + \text{Arcsin}\left(\dfrac{3}{5}\right) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{56}{65}\right)$.
2. $\text{Arcsin}\left(\dfrac{5}{13}\right) + \text{Arcsin}\left(\dfrac{4}{5}\right) + \text{Arcsin}\left(\dfrac{16}{65}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
3. $\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
4. $\text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3) = \pi$.

Correction :

1. Notons A la quantité de gauche. Calculons $\sin(A)$.

$$\begin{aligned} \sin(A) &= \sin(\text{Arcsin}(5/13))\cos(\text{Arcsin}(3/5)) + \sin(\text{Arcsin}(3/5))\cos(\text{Arcsin}(5/13)) \\ &= \frac{5}{13} \times \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} + \frac{3}{5} \times \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} \\ &= \frac{5}{13} \times \sqrt{\frac{16}{25}} + \frac{3}{5} \times \sqrt{\frac{144}{169}} \\ &= \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} \\ &= \frac{56}{65} \end{aligned}$$

Or, $3/5$ et $5/13$ sont inférieurs ou égaux à $\sqrt{2}/2 \approx 0,707$ donc, la fonction Arcsin étant croissante, Arcsin$(5/13)$ et Arcsin$(3/5)$ sont compris entre 0 et $\pi/4$ donc $A \in [0\,;\pi 2]$. Or, par définition de l'Arcsinus, Arcsin$(56/65)$ est le seul nombre appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut $56/65$, d'où le résultat.

2. Notons $A = \text{Arcsin}\left(\frac{5}{13}\right) + \text{Arcsin}\left(\frac{16}{65}\right)$ et posons $B = \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right)$. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\text{Arcsin}\left(\frac{16}{65}\right)\right) &= \sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{65^2-16^2}{65^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(65-16)\times(65+16)}{65^2}} \\
&= \sqrt{\frac{49\times 81}{65^2}} \\
&= \frac{7\times 9}{65} \\
&= \frac{63}{65}
\end{aligned}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
\sin(A) &= \sin(\text{Arcsin}(5/13))\cos(\text{Arcsin}(16/65)) + \sin(\text{Arcsin}(16/65))\cos(\text{Arcsin}(5/13)) \\
&= \frac{5}{13}\times\frac{63}{65} + \frac{16}{65}\times\frac{12}{13} \\
&= \frac{315+172}{65\times 13} \\
&= \frac{507}{5\times 13\times 13} \\
&= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

puisque $507 = 3\times 13\times 13$. De même on trouve que

$$\begin{aligned}
\sin(B) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right)\right) \\
&= \cos\left(\text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right)\right) \\
&= \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} \\
&= \sqrt{1-\frac{16}{25}} \\
&= \sqrt{9}25 \\
&= \frac{3}{5} \\
&= \sin(A)
\end{aligned}$$

On prouve de même que ci-dessus que $A \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et que $B \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $A = B$ ce qui permet de conclure.

3. Notons $A = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ et posons $B = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$. D'une part :

$$\begin{aligned}
\tan(A) &= \frac{\tan(\mathrm{Arctan}(1/2)) + \tan(\mathrm{Arctan}(1/5))}{1 - \tan(1/2)\tan(1/5)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5}}{1 - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{5}} \\
&= \frac{\dfrac{7}{10}}{\dfrac{9}{10}} \\
&= \frac{7}{9}
\end{aligned}$$

et on trouve de même que $\tan(B) = 7/9$. Or, La fonction Arctan est croissante et $\mathrm{Arctan}(0) = 0$ et $\mathrm{Arctan}(1) = \pi/4$ donc A et B sont compris entre 0 et $\pi/2$ donc sont égaux.

4. Notons $A = \mathrm{Arctan}(1) + \mathrm{Arctan}(2)$ et $B = \pi - \mathrm{Arctan}(3)$. On trouve de même que $\tan(A) = -3$. La tangente étant π-périodique et impaire,

$$\begin{aligned}
\tan(B) &= \tan(-\mathrm{Arctan}(3)) \\
&= -\tan(\mathrm{Arctan}(3)) \\
&= -3
\end{aligned}$$

si bien que $\tan(A) = \tan(B)$. Or, A et B appartiennent à $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ donc sont égales (deux nombres ayant même tangente diffèrent d'un multiple de π donc s'ils sont distants de moins de $\pi/2$ alors ils sont égaux).

Exercice 25 : ✪

1. Montrer que :

$$\forall x > 0, \qquad \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

En déduire la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

2. **Remake :** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}(x)$$

En déduire la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$.

Correction :

1. Première méthode : soit $x > 0$. Notons $A(x)$ le membre de droite. Alors

$$
\begin{aligned}
\tan(A(x)) &= \frac{\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right)-\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\right)}{1+\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right)\times\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\right)}\\
&= \frac{\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-1}{x}}{1+\dfrac{x}{x+1}\times\dfrac{x-1}{x}}\\
&= \frac{x^2-(x+1)(x-1)}{x(x+1)}\times\frac{x(x+1)}{x(x+1)+x(x-1)}\\
&= \frac{1}{x(x+1)}\times\frac{x(x+1)}{2x^2}\\
&= \frac{1}{2x^2}\\
&= \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Or, $\operatorname{Arctan}(1/2x^2)\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Pour l'autre terme, séparons les cas. Si $x\geq 1$ alors les deux nombres $x/(x+1)$ et $(x-1)/x$ appartiennent à $[\,0\,;1\,]$ donc les deux nombres $\operatorname{Arctan}(x/(x+1))$ et $\operatorname{Arctan}((x-1)/x)$ appartiennent à $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$ si bien que $A(x)\in\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right]\subset\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Si $0<x<1$ alors

$$
A(x)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x}{x}\right)
$$

qui est donc positif car somme de termes positifs, et on a également (on manipule des termes positifs) :

$$
\begin{aligned}
A(x) &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x}{x}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{x}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x}{x}\right)
\end{aligned}
$$

Or, $1-x<1+x$ et la fonction Arctan est strictement croissante donc

$$
\operatorname{Arctan}\left(\frac{x+1}{x}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x}{x}\right)<0
$$

si bien que $A(x)<\pi/2$. Tout ça pour dire que, dans tous les cas, $A(x)\in\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ ce qui permet de conclure.

Deuxième méthode : par une étude de fonction. Un calcul (simple ?) prouve que

$$
g : x\mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)
$$

a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}_-^*$ donc est constante. On trouve sa valeur, non pas avec 0 (valeur interdite) ni avec 1 (qui ne nous apporterait rien : on ne connaît pas $\operatorname{Arctan}(1/2)$) mais avec la limite en $+\infty$. On trouve (par continuité de l'Arctangente) :

$$
g(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\operatorname{Arctan}(0)-\operatorname{Arctan}(1)+\operatorname{Arctan}(1)=0
$$

et puisque g est constante, alors g est nulle. Dès lors, si $n\geq 1$:

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)\\
&= \operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{n+1}\right)-\operatorname{Arctan}(0)
\end{aligned}
$$

par télescopage, si bien que (par continuité de l'Arctangente), $S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\operatorname{Arctan}(1)=\pi/4$.

2. Idem, et on trouve que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi/2$.

Exercice 26 : ✪ Étudier la fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(1-x^3\right)$.

Correction : Tout d'abord, la fonction Arcsin est définie sur $[-1\,;1]$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \text{ est définie en } x \quad &\iff \quad -1 \leq 1-x^3 \leq 1 \\ &\iff \quad -2 \leq -x^3 \leq 0 \\ &\iff \quad 0 \leq x^3 \leq 2 \\ &\iff \quad 0 \leq x \leq \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

par stricte croissance de la fonction racine cubique. On a donc : $D_f = \left[0\,;\sqrt[3]{2}\right]$. La fonction Arcsin étant dérivable sur $]-1\,;1[$, f est dérivable (au moins!!) sur $\left]0\,;\sqrt[3]{2}\right[$. Soit donc x dans cet intervalle : f est dérivable car composée de fonctions qui le sont, et

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{\sqrt{1-\left(x^3\right)^2}} < 0$$

f' est strictement négative sur $\left]0\,;\sqrt[3]{2}\right[$ et est continue sur $\left[0\,;\sqrt[3]{2}\right]$ donc est strictement décroissante sur $\left[0\,;\sqrt[3]{2}\right]$ (on aurait aussi pu simplement dire que f est strictement décroissante car composée d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante) avec

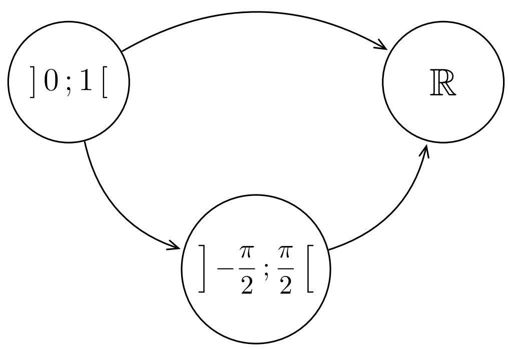
$$\begin{aligned} f(0) \quad &= \quad \text{Arcsin}(1) \\ &= \quad \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

et $f(\sqrt[3]{2}) = \text{Arcsin}(-1) = -\pi/2$. Le graphe est laissé à votre charge (on peut remarquer que f s'annule en 1).

Exercice 27 : ✪ Soient $a < b$ deux réels quelconques. Donner une bijection continue :

1. de $]0\,;1[$ dans $\mathbb{R}$.
2. de $]a\,;b[$ dans $\mathbb{R}$
3. de $\mathbb{R}$ dans $]0\,;1[$.
4. de $\mathbb{R}$ dans $]a\,;b[$.

On pourra s'inspirer du diagramme suivant :

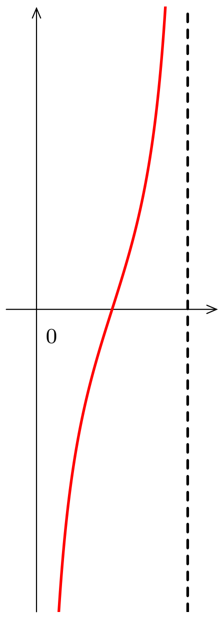


Correction : L'idée générale (inspirée par le dessin) est de composer des bijections. On rappelle qu'une composée de bijections est une bijection.

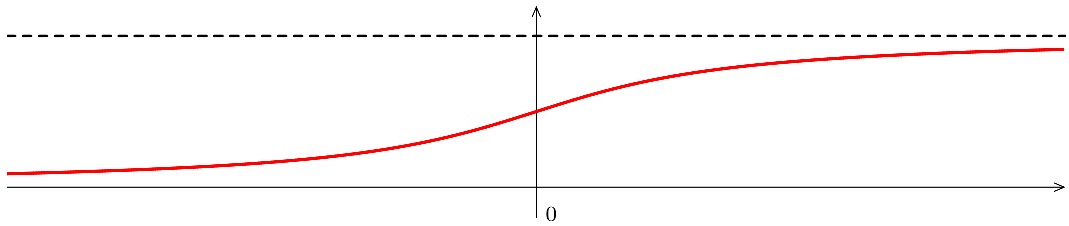
1. La fonction tan (ou plutôt sa restriction à $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$) est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. Il suffit de trouver une bijection de $]0\,;1[$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$: la composée des deux sera une bijection de $]0\,;1[$ dans $\mathbb{R}$. Prenons une fonction la plus simple possible : une fonction affine. On cherche une fonction du type $x \mapsto cx+d$ (et pas $ax+b$ car les notations a et b seront utilisées dans les questions suivantes) bijective de $]0\,;1[$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$: il suffit de prendre $d = -\frac{\pi}{2}$ et $c = \pi$. On montre en effet (soit par un calcul direct, tout élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent, soit par le théorème de la bijection) que $g : x \mapsto \pi x - \frac{\pi}{2}$ est une bijection de $]0\,;1[$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Par composition

$$x \mapsto \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$$

est une bijection de $]0\,;1[$ dans $\mathbb{R}$, dont le graphe est donné ci-dessous.



2. De même, il suffit de trouver une bijection de $]\,a\,;b\,[$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Là aussi, on cherche une fonction simple : on cherche donc une fonction affine. On cherche c et d tels que la limite en a soit $-\pi/2$ et la limite en b soit $\pi/2$. Ces limites valant $ac+d$ et $bc+d$, on cherche c et d tels que $ac+d=-\pi/2$ et $bc+d=\pi/2$: on trouve $c=\pi/(b-a)$ et $d=\dfrac{-\pi(a+b)}{2(b-a)}$ conviennent. Finalement,
$$x\mapsto \tan\left(\frac{\pi}{b-a}\times\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)$$
est une bijection de $]\,a\,;b\,[$ dans $\mathbb{R}$.
3. Il suffit d'inverser les flèches : la fonction Arctan étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, il suffit de trouver une bijection g de $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $]\,0\,;1\,[$: la composée $g\circ\text{Arctan}$ conviendra. On trouve que $g:x\mapsto\dfrac{1}{\pi}\times x+\dfrac{1}{2}$ convient, si bien que
$$x\mapsto\frac{1}{\pi}\times\text{Arctan}(x)+\frac{1}{2}$$
est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]\,0\,;1\,[$, dont on donne le graphe ci-dessous.



4. Le principe est exactement le même, si ce n'est qu'on cherche à présent une bijection $g:\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[\to\,]\,a\,;b\,[$. On trouve aisément que $g:x\mapsto\dfrac{b-a}{\pi}\times x+\dfrac{a+b}{2}$ convient si bien que
$$x\mapsto\frac{b-a}{\pi}\times\text{Arctan}(x)+\frac{a+b}{2}$$
est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]\,a\,;b\,[$. Le graphe est laissé à votre charge.

Exercice 28 - Tchebychev, stage one : ✪ Soit $n\in\mathbb{N}$. On définit sur $[\,-1\,;1\,]$ la fonction $f_n=x\mapsto\cos(n\text{Arccos}(x))$.

1. Montrer que f_n est une fonction polynomiale.
2. Expliciter (sans fonctions cos ni Arccos) les fonctions f_1,f_2 et f_3.
3. Résoudre l'équation $f_n(x)=0$.
4. Montrer que, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, $f_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta)$.

Correction :

1. Raisonnons par récurrence sur n.
   - Si $n \geq 0$, notons H_n : « f_n est une fonction polynomiale ».
   - f_0 est la fonction constante égale à 1 et f_1 la fonction constante égale à x (sur $[-1;1]$), toutes deux polynomiales. En d'autres termes, H_0 et H_1 sont vraies (on verra plus loin pourquoi il fallait faire une récurrence double).
   - Soit $n \geq 1$. Supposons H_n et H_{n-1} vraies et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit $x \in [-1;1]$. Notons $A(x) = \text{Arccos}(x)$ pour plus de commodité.
   $$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \cos((n+1)A(x)) \\ &= \cos(nA(x)+A(x)) \\ &= \cos(nA(x))\cos(A(x)) - \sin(nA(x))\sin(A(x)) \\ &= f_n(x)\times x - \sin(nA(x))\sin(A(x)) \end{aligned}$$
   Utilisons à présent la formule donnant $\sin(a)\sin(b)$:
   $$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= f_n(x)\times x - \frac{1}{2}\left[\cos(nA(x)-A(x)) - \cos(nA(x)+A(x))\right] \\ &= f_n(x)\times x - \frac{1}{2}\left[\cos((n-1)A(x)) - \cos((n+1)A(x))\right] \\ &= f_n(x)\times x - \frac{f_{n-1}(x)}{2} + \frac{f_{n+1}(x)}{2} \end{aligned}$$
   et en regroupant les $f_{n+1}(x)$ et en multipliant par 2, il vient :
   $$f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x)$$
   C'est là qu'on se rend compte qu'il faut faire une récurrence double (si on ne l'a pas vu au début, on revient sur ses pas comme on l'a déjà vu). Par hypothèse de récurrence, f_n et f_{n-1} sont des fonctions polynomiales donc, en multipliant $f_n(x)$ par $2x$ et en faisant la différence, $f_{n+1}(x)$ est une fonction polynomiale : H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.
2. D'après la question précédente, f_1 est la fonction $x \mapsto x$. De plus, en utilisant la formule de récurrence trouvée dans l'hérédité de la question précédente, on trouve que f_2 est la fonction $x \mapsto 2x^2-1$ (on prend $n=1$: $f_2(x) = 2xf_1(x) - f_0(x)$) et $f_3 : x \mapsto 4x^3 - 3x$ (idem avec $n=2$).
3. Soit $x \in [-1;1]$.
   $$\begin{aligned} f_n(x) = 0 &\iff \cos(n\text{Arccos}(x)) = 0 \\ &\iff n\text{Arccos}(x) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\iff \text{Arccos}(x) \equiv \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right] \\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z}, \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z}, \text{Arccos}(x) = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$
   Or, $\text{Arccos}(x) \in [0;\pi]$. Soit donc $k \in \mathbb{Z}$. Cherchons pour quelles valeurs de k ce réel appartient à $[0;\pi]$.
   $$\begin{aligned} 0 \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \pi &\iff 0 \leq 2k+1 \leq 2n \\ &\iff 0 \leq k \leq n - \frac{1}{2} \\ &\iff 0 \leq k \leq n-1 \end{aligned}$$
   puisque k est un entier. Il en découle que :
   $$\begin{aligned} f_n(x) = 0 &\iff \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!], \text{Arccos}(x) = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \\ &\iff \exists k \in [\![0\,;\,n-1]\!], x = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

On peut même montrer que ces réels sont tous distincts car les $\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont tous distincts et appartiennent à $[\,0\,;\pi\,]$, intervalle sur lequel la fonction cos est strictement décroissante, donc injective.

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par récurrence sur n en utilisant la relation de récurrence trouvée à la question 1 :
   - Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $f_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ ».
   - H_0 est vraie car $f_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\times\theta)$ et $f_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = \cos(1\times\theta)$ donc H_1 est vraie.
   - Soit $n \geq 1$. Supposons H_n et H_{n-1} vraies et montrons que H_{n+1} est vraie. D'après la formule de récurrence donnée à la question 1 et par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta) f_n(\cos(\theta)) - f_{n-1}(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \end{aligned}$$

Or, un calcul analogue à la question 1 ($\cos(a+b)$ puis $\sin(a)\sin(b)$) donne :

$$\cos((n+1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta)$$

si bien que $f_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$ ce qui clôt la récurrence.

Exercice 29 : ✪ Montrer que :

$$\forall x > 0, \qquad \mathrm{Arctan}(x) > \frac{x}{1+x^2}$$

Correction : Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \mathrm{Arctan}(x) - \dfrac{x}{1+x^2}$. f est dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$) car somme de fonctions qui le sont. Soit $x > 0$. En dérivant le second terme comme un produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} - x \times \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est strictement croissante. Or, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (attention, f n'est pas définie en 0) et f est strictement croissante donc est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui permet de conclure.

Exercice 30 : ✪ Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad x - \frac{x^3}{3} \leq \mathrm{Arctan}(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

Correction : Idem, faire deux études de fonctions (sur $\mathbb{R}_+$ cette fois, on peut donc calculer la valeur en 0 facilement).

Exercice 31 : ✪ Montrer que

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{2021 - \dfrac{1}{2021}}{2}\right) + 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2021}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Correction : Définissons sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{x - 1/x}{2}\right) + 2\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et montrons que f est constante égale à $\pi/2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car combinaison linéaire de composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ par Arctan (dérivable sur $\mathbb{R}$). Soit $x > 0$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1/x}{2}\right)^2} + 2 \times \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} \\
&= \frac{x^2+1}{2} \times \frac{4}{4+(x-1/x)^2} - \frac{2}{x^2+1} \\
&= \frac{x^2+1}{2} \times \frac{4}{4+x^2-2+\dfrac{1}{x^2}} - \frac{2}{x^2+1} \\
&= \frac{x^2+1}{2x^2} \times \frac{4}{x^2+2+\dfrac{1}{x^2}} - \frac{2}{x^2+1} \\
&= \frac{x^2+1}{2x^2} \times \frac{4}{\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2}} - \frac{2}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{2x^2} \times \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{2}{x^2+1} \\
&= \frac{2}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1} = 0
\end{aligned}
$$

ce qui permet de conclure : f est bien constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $f(1) = \mathrm{Arctan}(0) + 2\mathrm{Arctan}(1) = \pi/2$. Par conséquent f est constante égale à $\pi/2$ donc, en particulier, $f(2021) = \pi/2$.

Exercice 32 : ✪✪ Discuter et résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(x\sqrt{3}) = \dfrac{7\pi}{12}$.
2. $\mathrm{Arccos}(x) = \mathrm{Arcsin}(2x)$.
3. $\mathrm{Arcsin}(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{4}{5}\right) + \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{5}{13}\right)$.
4. $\sin(2\mathrm{Arccos}(2\mathrm{Arctan}(x))) = 0$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ (ici pas de problème de définition : Arctan est définie sur $\mathbb{R}$). La fonction tangente n'est pas injective : on ne peut pas forcément travailler par équivalences (ou alors en prenant des précautions, mais il est faux d'écrire en général : $a = b \iff \tan(a) = \tan(b)$). Raisonnons par analyse synthèse.
   - Analyse : Supposons que x est solution. Alors $\tan(\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(x\sqrt{3})) = \tan(7\pi/12)$. Or :

$$
\begin{aligned}
\tan(\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(x\sqrt{3})) &= \frac{\tan(\mathrm{Arctan}(x)) + \tan(\mathrm{Arctan}(x\sqrt{3}))}{1-\tan(\mathrm{Arctan}(x)) \times \tan(\mathrm{Arctan}(x\sqrt{3}))} \\
&= \frac{x+x\sqrt{3}}{1-x \times x\sqrt{3}} \\
&= \frac{x(1+\sqrt{3})}{1-x^2\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

   et donc

$$
\frac{x(1+\sqrt{3})}{1-x^2\sqrt{3}} = \tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)
$$

   Or, d'après l'exercice 2

$$
\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}
$$

   On a donné une autre expression du sinus mais on trouve cette valeur de la même façon que le cosinus et cette expression est plus pratique pour ce qu'on cherche à faire. Il en découle que

$$
\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}
$$

Par conséquent :

$$\frac{x(1+\sqrt{3})}{1-x^2\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

donc $x(1-\sqrt{3}) = 1 - x^2\sqrt{3}$ donc $x^2\sqrt{3} + x(1-\sqrt{3}) - 1 = 0$. Il en découle (avec un calcul de discriminant) que $x = -1/\sqrt{3}$ ou $x = 1$.

- Synthèse : 1 est solution et $-1/\sqrt{3}$ ne l'est pas car l'Arctangente est négative sur $\mathbb{R}_-$. En conclusion, 1 est la seule solution.

2. Le domaine de définition de Arccos et de Arcsin étant $[-1\,;1]$, cette équation n'a de sens que lorsque $x \in [-1/2\,;1/2]$. Soit donc x dans cet intervalle. Si $x \leq 0$ alors $\mathrm{Arcsin}(2x) \leq 0$ mais $\mathrm{Arccos}(x) > 0$ (la fonction Arccos est à valeurs positives et s'annule uniquement en 1). Il en découle que x n'est pas solution. On peut donc supposer $x \in \left]0\,;1/2\right]$. $\mathrm{Arccos}(x) \in \left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ (rappelons que l'Arccos est décroissante) et $2x \in [0\,;1]$ donc $\mathrm{Arcsin}(2x) \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel la fonction cos est injective : on peut donc travailler par équivalences.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arccos}(x) = \mathrm{Arcsin}(2x) &\iff \cos(\mathrm{Arccos}(x)) = \cos(\mathrm{Arcsin}(2x)) \\
&\iff x = \sqrt{1-4x^2} \\
&\iff x^2 = 1 - 4x^2 \\
&\iff x = 1/\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Les deux dernières équivalences viennent du fait que $x \geq 0$.

3. Soit $x \in [-1\,;1]$. Alors $\mathrm{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel la fonction sin est injective (et donc on peut travailler par équivalences).

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arcsin}(x) = \mathrm{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \mathrm{Arcsin}\left(\frac{5}{13}\right) &\iff \sin(\mathrm{Arcsin}(x)) = \sin\left(\mathrm{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \mathrm{Arcsin}\left(\frac{5}{13}\right)\right) \\
&\iff x = \frac{63}{65}
\end{aligned}$$

4. Cherchons quand cette équation a un sens. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Arctan}(x) \in [-1\,;1] &\iff -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Arctan}(x) \leq \frac{1}{2} \\
&\iff \tan(-1/2) = \tan(1/2) \leq x \leq \tan(1/2)
\end{aligned}$$

car la tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Soit donc $x \in [-\tan(1/2)\,;\tan(1/2)]$. Arccos est à valeurs dans $[0\,;\pi]$ donc $2\mathrm{Arccos}(\dots) \in [0\,;2\pi]$, et sur cet intervalle, la fonction sin s'annule uniquement en $0, \pi$ et 2π. Ainsi :

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution} &\iff 2\mathrm{Arccos}(2\mathrm{Arctan}(x)) = 0, \pi \text{ ou } 2\pi \\
&\iff \mathrm{Arccos}(2\mathrm{Arctan}(x)) = 0, \frac{\pi}{2} \text{ ou } \pi \\
&\iff 2\mathrm{Arctan}(x) = 1, 0 \text{ ou } -1 \\
&\iff \mathrm{Arctan}(x) = 1/2, 0 \text{ ou } -1/2 \\
&\iff x = \tan(1/2), \tan(0) = 0 \text{ ou } x = \tan(-1/2) = -1/2
\end{aligned}$$

Exercice 33 : ✪✪ Simplifier et tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$.
2. $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}(\sin(x))$.
3. $f : x \mapsto \mathrm{Arccos}(\cos(x))$.
4. $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.
5. $f : x \mapsto \mathrm{Arccos}\left(4x^3 - 3x\right)$.
6. $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}}\right)$.

Correction :

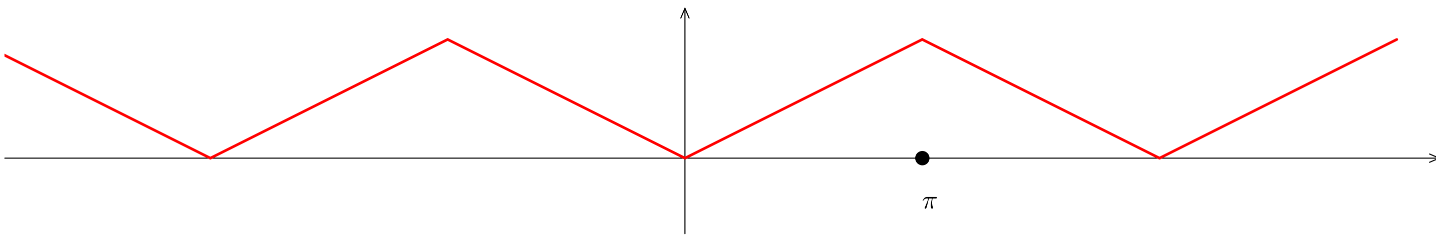
1. Tout d'abord, f est définie sur $\mathbb{R}\backslash D$ où $D = \{(2k+1)\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$ sauf les multiples impairs de π ($\pi, -\pi, 3\pi, -3\pi$ etc.) en lesquels le cosinus vaut -1, valeur interdite. En dehors de ces valeurs, le dénominateur est non nul et la quantité dans la racine carrée positive (ou nulle) donc tout va bien. f est 2π périodique : il suffit donc de l'étudier sur $]-\pi\,;\pi\,[$ (ouvert et non semi-ouvert car π et $-\pi$ n'appartiennent pas au domaine de définition). f est également paire donc il suffit d'étudier f sur $[\,0\,;\pi\,[$. Soit donc $x \in [\,0\,;\pi\,[$. Utilisons les formules $\cos(2x)+1 = 2\cos^2(x)$ et $1-\cos(2x) = 2\sin^2(x)$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{2\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)}}\right) \\ &= \text{Arctan}\left(\sqrt{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \end{aligned}$$

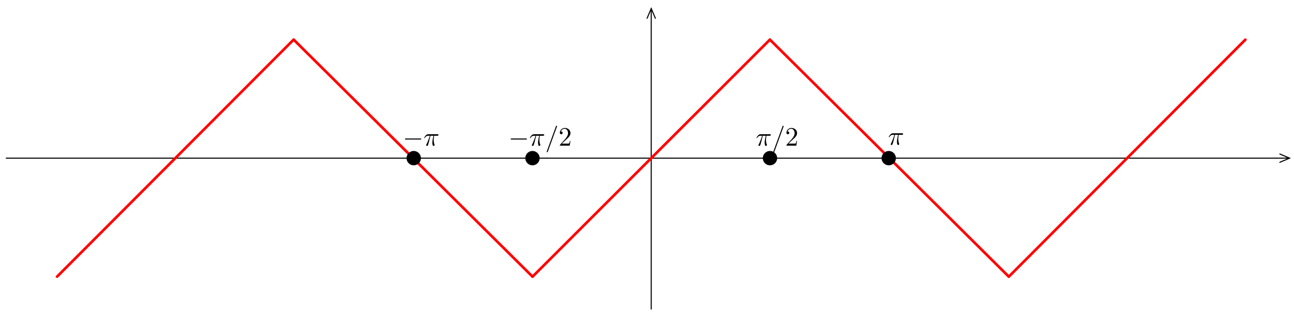
Or, $x/2 \in [\,0\,;\pi/2\,[$, intervalle sur lequel la tangente est positive donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

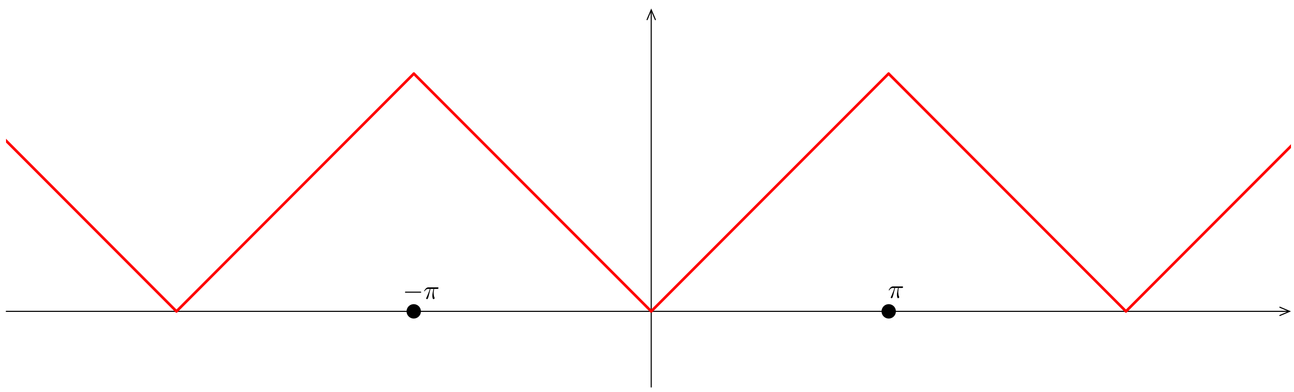
puisque $x/2 \in [\,0\,;\pi/2\,[$. On en déduit le graphe de f sur $[\,0\,;\pi\,[$ puis sur $]-\pi\,;0\,]$ par parité puis sur D_f par périodicité. Remarquons que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier en posant, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f((2k+1)\pi) = \pi/2$.



2. f est 2π-périodique donc il suffit de l'étudier sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$ (et même sur un intervalle semi-ouvert). f est impaire donc il suffit de l'étudier sur $[\,0\,;\pi\,]$. Si $x \in [\,0\,;\pi/2\,]$ alors $f(x) = x$. Si $x \in\,]\,\pi/2\,;\pi\,]$, alors $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ donc $f(x) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - x))$ et puisque $\pi - x \in [\,0\,;\pi/2\,]$, alors $f(x) = \pi - x$. On en déduit la courbe de f sur $[\,0\,;\pi\,]$ puis, par imparité, sur $[\,-\pi\,;0\,]$ et, enfin, par périodicité, sa courbe sur $\mathbb{R}$ (et f est continue car composée de fonctions continues).



3. f est 2π-périodique donc il suffit de l'étudier sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$ (et même sur un intervalle semi-ouvert). f est paire donc il suffit de l'étudier sur $[\,0\,;\pi\,]$. Si $x \in [\,0\,;\pi\,]$ alors $f(x) = x$. Si $x \in\,]\,\pi/2\,;\pi\,]$, alors $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ donc $f(x) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - x))$ et puisque $\pi - x \in [\,0\,;\pi/2\,]$, alors $f(x) = \pi - x$. On en déduit la courbe de f sur $[\,0\,;\pi\,]$ puis, par parité, sur $[\,-\pi\,;0\,]$ et, enfin, par périodicité, sa courbe sur $\mathbb{R}$ (et f est continue car composée de fonctions continues).



4. Cette expression fait penser à la formule donnant $\sin(t)$ en fonction de $\tan(t/2)$. Tout d'abord, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$$

En effet, $2x \leq 1+x^2$ puisque $1+x^2-2x = (x-1)^2 \geq 0$ et $-1-x^2 \leq 2x$ puisque $2x+1+x^2 = (x+1)^2 \geq 0$. D'où l'encadrement (en divisant par $1+x^2 > 0$). Ensuite, f est impaire : il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$. Soit donc $x \in \mathbb{R}_+$ et posons $t = 2\text{Arctan}(x)$ si bien que $x = \tan(t/2)$. Il en découle que

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Arcsin}\left(\frac{2\tan(t/2)}{1+\tan^2(t/2)}\right) \\ &= \text{Arcsin}(\sin(t)) \end{aligned}$$

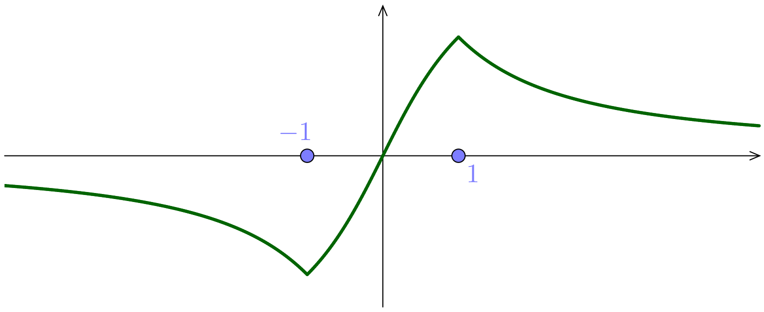
Or, $t \in [\,0\,;\pi\,[$ (car $x \geq 0$). Il y a donc plusieurs cas :

- Supposons que $t \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Alors $\text{Arcsin}(\sin(t)) = t$.
- Si $t \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, alors $\sin(t) = \sin(\pi - t)$ donc $\text{Arcsin}(\sin(t)) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - t))$ et $\pi - t \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\text{Arcsin}(\sin(\pi - t)) = \pi - t$ si bien que $f(x) = \pi - t$.

Traduisons ces conditions et ces conclusions en fonction de x en se souvenant que $x = \tan(t/2)$ et $t = 2\text{Arctan}(x)$:

- $t \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\right] \iff x \in [\,0\,;1\,]$. Alors $f(x) = 2\text{Arctan}(x)$ (donc va de 0 jusqu'à $\pi/2$ en ordonnée).
- $t \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[\iff x > 1$ et dans ce cas $f(x) = \pi - 2\text{Arctan}(x)$.

On en déduit la courbe de f sur $\mathbb{R}_+$ (à tout hasard, f est continue car composée de fonctions continues) donc sur $\mathbb{R}$ par imparité (attention, f n'est pas affine sur $[\,-1\,;1\,]$).



5. Commençons par donner le domaine de définition de f. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors f est définie en x si et seulement si $4x^3 - 3x \in [\,-1\,;1\,]$. Posons $g(x) = 4x^3 - 3x$. Alors g est dérivable et $g'(x) = 12x^2 - 3 = 3\left(4x^2 - 1\right)$. On en déduit le tableau de signes de g' et le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		$-1/2$		$1/2$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

On trouve aisément $g(1) = 1$ et $g(-1) = -1$. Il découle alors du tableau de variations que : $g(x) \in [\,-1\,;1\,] \iff x \in [\,-1\,;1\,]$. Ainsi, $D_f = [\,-1\,;1\,]$. On peut remarquer que la fonction Arccos est strictement croissante donc f a les mêmes variations que g sur $[\,-1\,;1\,]$. Cela pourrait suffire à tracer son graphe, mais on va chercher à donner une expression explicite de f.

Soit donc $x \in [\,-1\,;1\,]$. L'expression de $g(x)$ fait penser à la formule donnant $\cos(3t)$: on pose donc $t = \text{Arccos}(x)$ si bien que $x = \cos(t)$ et donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Arccos}\left(4\cos^3(t) - 3\cos(t)\right) \\ &= \text{Arccos}(\cos(3t)) \end{aligned}$$

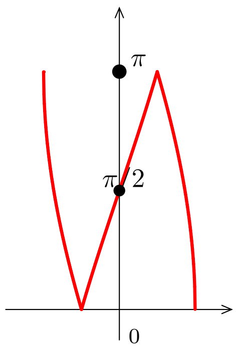
On sait que $\text{Arccos}(\cos(u)) = u$ si $u \in [\,0\,;\pi\,]$. Or, $t \in [\,0\,;\pi\,]$ donc $3t \in [\,0\,;3\pi\,]$ donc, comme précédemment, séparons les cas :

- Supposons que $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$. Alors $3t \in [\,0\,;\pi\,]$ donc $f(x) = \text{Arccos}(\cos(3t)) = 3t$.
- Si $t \in \left]\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right]$. Alors $3t \in [\,\pi\,;2\pi\,]$ donc $2\pi - 3t \in [\,0\,;\pi\,]$. Or, la fonction cos étant 2π-périodique et paire, $\cos(2\pi - 3t) = \cos(-3t) = \cos(3t)$ si bien que $f(x) = \text{Arccos}(\cos(2\pi - 3t))$ et puisque $2\pi - 3t \in [\,0\,;\pi\,]$, on en déduit que $f(x) = 2\pi - 3t$.
- Enfin, si $t \in \left]\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$, alors $3t \in [\,2\pi\,;3\pi\,]$. On trouve de même que $f(x) = 3t - 2\pi$.

Traduisons ces conditions et ces conclusions en fonction de x en se souvenant que $x = \cos(t)$ et $t = \text{Arccos}(x)$ (rappelons que la fonction Arccos est strictement décroissante)

- $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right] \iff x \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$. Dans ce cas, $f(x) = 3\text{Arccos}(x)$ (donc va de π jusqu'à 0 en ordonnée).
- $t \in \left[\frac{\pi}{3}\,;\frac{2\pi}{3}\right] \iff x \in [\,-1/2\,;1/2\,]$. Dans ce cas, $f(x) = 2\pi - 3\text{Arccos}(x)$ (donc va de $-\pi$ jusqu'à π en ordonnée). Attention, contrairement à ce que le graphe pourrait laisser croire, f n'est pas affine sur cet intervalle ! C'est juste qu'elle est « très raide ».
- Enfin : $t \in \left[\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right] \iff x \in [\,-1\,;-1/2\,]$. Dans ce cas, $f(x) = 3\text{Arccos}(x) - 2\pi$ (donc va de π jusqu'à 0 en ordonnée).

Ci-dessous la courbe de f :



6. Tout d'abord, f est définie sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(\pi/2 - x) \leq 1$ donc

$$0 \leq \frac{1 + \cos(\pi/2 - x)}{2} \leq 1$$

et la racine carrée appartient donc à $[\,-1\,;1\,]$ (en fait, $[\,0\,;1\,]$), le domaine de définition de l'Arccos. La fonction f est 2πpériodique : il suffit donc de l'étudier sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$ (l'utilité de cet intervalle sera évidente ensuite). Soit donc $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$. Alors, en utilisant la formule $1 + \cos(2u) = \cos^2(u)$:

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}\right)$$

Or, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$ donc $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, intervalle sur lequel le cosinus est positif (c'est pour cela qu'on a pris cet intervalle et pas $[\,0\,;2\pi\,]$). Par conséquent :

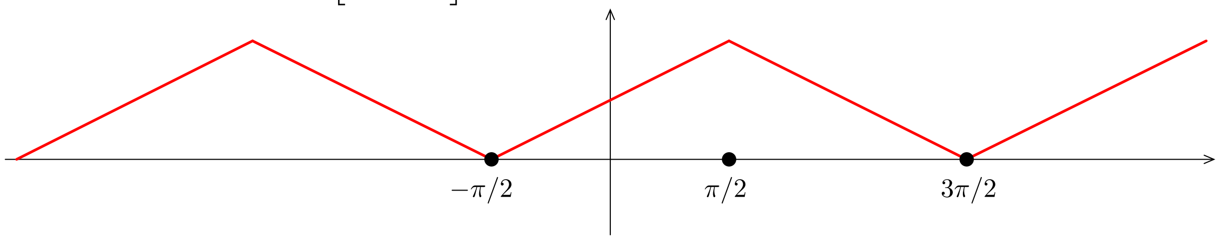
$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) \\ &= \text{Arcsin}\left(\cos\left((\frac{\pi}{2} - \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right) \\ &= \text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

Là encore, séparons les cas selon la valeur de x (on cherche à utiliser le sait que $\text{Arcsin}(\sin(u)) = u$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$).

- Supposons que $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Alors $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$.
- Supposons que $x \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$. Alors $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ donc $\pi - \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ si bien que

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Arcsin}\left(\sin\left(\pi - \left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) \\ &= \pi - \left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

En en déduit le graphe de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$ puis sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.



Exercice 34 : ✪✪ Montrer de deux façons différentes que :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,], \qquad \text{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \times \text{Arcsin}(2x-1)$$

Correction : Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Notons $f(x)$ le membre de gauche et $g(x)$ le membre de droite.

Première méthode : D'une part, $\sin(f(x)) = \sqrt{x}$, et d'autre part (avec la formule $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$) :

$$\begin{aligned} \sin^2(g(x)) &= \frac{1-\cos(2g(x))}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times\cos\left(\frac{\pi}{2} + \text{Arcsin}(2x-1)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\sin\left(\text{Arcsin}(2x-1)\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times(2x-1) \\ &= x \end{aligned}$$

si bien que $\sin^2(f(x)) = \sin^2(g(x))$. Or, sur $[\,0\,;1\,]$, $\text{Arcsin}(u) \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ si bien que $f(x) \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin(f(x)) \geq 0$. De plus, Arcsin est à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $1/2 \times$ Arcsin est à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$ si bien que $g(x) \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$: on a aussi $\sin(g(x)) \geq 0$ donc $\sin(f(x)) = \sin(g(x))$ car ils ont le même signe et sont tous les deux positifs. Or deux nombres dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ ayant même sinus sont égaux : $f(x) = g(x)$.

Deuxième méthode : avec une étude de fonction. f et g sont continues car somme et composée de fonctions continues. De plus, elles sont dérivables (au moins) sur $]\,0\,;1\,[$ car, alors, la quantité dans la racine carrée n'est pas nulle et la quantité dans l'Arcsin ne vaut ni 1 ni -1. Soit donc $x \in\,]\,0\,;1\,[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}\times 2\times \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4x-1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $f'(x) = g'(x)$. En d'autres termes, $f'-g'$ est nulle sur $]\,0\,;1\,[$. Puisque $f-g$ est continue sur $[\,0\,;1\,]$ (fermé : voir les théorèmes reliant monotonie et signe de la dérivée dans le chapitre 2.4), alors $f-g$ est constante sur $[\,0\,;1\,]$. Or, $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$ car $\text{Arcsin}(-1) = -\pi/2$. Il en découle que $f(0) - g(0) = 0$: $f - g$ est constante égale à 0 donc $f = g$.

Exercice 35 - Formule de Machin : ✪✪ On rappelle le résultat suivant, vu en classe : soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $xy \neq 1$. Alors :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$$

où

- $k = 0$ si $xy < 1$.
- $k = 1$ si $xy > 1$ et $x, y > 0$.
- $k = -1$ si $xy > 1$ et $x, y < 0$.

1. Calculer $4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ (on rappelle (toujours revenir aux fondamentaux...) que $4 = 2+2$ et que $2 = 1+1$).
2. Démontrer la formule de Machin : $\dfrac{\pi}{4} = 4\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{239}\right)$.

Remarque : C'est avec cette formule que John Machin, un mathématicien anglais, fut le premier à calculer les 100 premières décimales de π en 1706.

Correction :

1. Commençons par calculer $2\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$. On applique donc le résultat ci-dessus avec $x = y = 1/5$: on est donc dans le premier cas (celui où $xy < 1$) si bien que

$$\begin{aligned} 2\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) &= \text{Arctan}\left(\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}}\right) + 0\times\pi \\ &= \text{Arctan}\left(\frac{2}{5}\times\frac{25}{24}\right) \\ &= \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right) \end{aligned}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) &= 2\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + 2\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \\ &= \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right) \\ &= \text{Arctan}\left(\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}\times\frac{5}{12}}\right) + 0\times\pi \quad (x = y = 5/12 \text{ donc } xy < 1) \\ &= \text{Arctan}\left(\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}}\right) \\ &= \text{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right) \end{aligned}$$

2. Notons A la quantité de droite. Par imparité de l'Arctangente et d'après ce qui précède :

$$A = \text{Arctan}\left(\frac{120}{119}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{-1}{239}\right)$$

On est dans le premier cas avec $x = 120/119$ et $y = -1/239$ (il est immédiat que $xy < 1$ puisque $xy < 0$). Dès lors

$$A = \text{Arctan}\left(\frac{\dfrac{120}{119} - \dfrac{1}{239}}{1 + \dfrac{120}{119} \times \dfrac{1}{239}}\right)$$

et le même calcul que dans l'exercice 20 du chapitre 0 donne $A = \text{Arctan}(1) = \pi/4$.

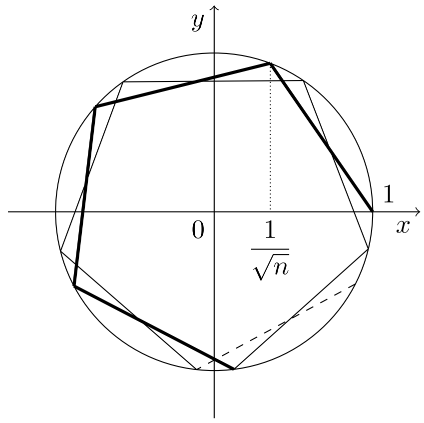
Exercice 36 - un peu d'irrationnalité : ✪✪ Le but de l'exercice est de montrer que si n est impair supérieur ou égal à 3, alors le nombre suivant est irrationnel :

$$A_n = \frac{1}{\pi}\text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

1. Montrer que $A(1), A(2), A(4)$ sont rationnels.
2. On suppose donc dans la suite que n est impair et supérieur ou égal à 3. On pose

$$\varphi_n = \pi A(n) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

   (a) Soit $k \geq 1$. Exprimer $\cos((k+1)\varphi_n)$ en fonction de $\cos(k\varphi_n)$ et $\cos((k-1)\varphi_n)$.
   (b) Montrer que pour tout $k \geq 1$, il existe un entier α_k non divisible par n tel que $\cos(k\varphi_n) = \dfrac{\alpha_k}{\sqrt{n}^k}$ (il faut utiliser le théorème de Gauß, cf. chapitre 6 : si a divise bc et si a et b n'ont aucun diviseur commun, alors a divise c).
3. Conclure.
4. Interprétation géométrique : montrer que l'arc polygonal construit entre les points du cercle d'abscisses 1 et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (voir figure), et dont toutes les cordes ont même longueur, ne se referme jamais sur lui-même.



Correction :

1. On a successivement

$$\begin{aligned} A(1) &= \frac{1}{\pi}\text{Arccos}(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} A(2) &= \frac{1}{\pi}\text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} A(2) &= \frac{1}{\pi}\text{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

2. (a) On a :

$$\begin{aligned} \cos((k+1)\varphi_n) &= \cos(k\varphi_n+\varphi_n) \\ &= \cos(k\varphi_n)\cos(\varphi_n)-\sin(k\varphi_n)\sin(\varphi_n) \\ &= \frac{\cos(k\varphi_n)}{\sqrt{n}}-\sin(k\varphi_n)\sin(\varphi_n) \end{aligned}$$

car $\cos(\text{Arccos}(1/\sqrt{n}))=1/\sqrt{n}$. Pour le terme de droite, utilisons la formule donnant la valeur de $\sin(a)\sin(b)$:

$$\begin{aligned} \cos((k+1)\varphi_n) &= \frac{\cos(k\varphi_n)}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\left[\cos((k-1)\varphi_n)-\cos((k+1)\varphi_n)\right] \\ &= \frac{\cos(k\varphi_n)}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\cos((k-1)\varphi_n)+\frac{1}{2}\cos((k+1)\varphi_n) \end{aligned}$$

si bien que

$$\frac{1}{2}\cos((k+1)\varphi_n)=\frac{\cos(k\varphi_n)}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\cos((k-1)\varphi_n)$$

et donc, finalement :

$$\cos((k+1)\varphi_n)=\frac{2\cos(k\varphi_n)}{\sqrt{n}}-\cos((k-1)\varphi_n)$$

(b) Raisonnons par récurrence (double, ce qui est intuitif vu la question précédente) sur k.

- Si $k\geq 1$, notons H_k : « il existe $\alpha_k\in\mathbb{Z}$ non divisible par n tel que $\cos(k\varphi_n)=\dfrac{\alpha_k}{\sqrt{n}^k}$ ».
- $\cos(\varphi_n)=1/\sqrt{n}$ donc $\alpha_1=1$ convient (il est bien non divisible par n car $n\geq 3$). De plus :

$$\begin{aligned} \cos(2\varphi_n) &= 2\cos^2(\varphi_n)-1 \\ &= \frac{2}{n}-1 \\ &= \frac{2-n}{\sqrt{n}^2} \end{aligned}$$

  Posons $\alpha_2=2-n$. Si n divise α_2 alors n divise 2 ce qui est absurde car $n\geq 3$. En d'autres termes, H_1 et H_2 sont vraies.
- Soit $k\geq 2$. Supposons H_{k-1} et H_k vraies et prouvons que H_{k+1} est vraie. D'après la question précédente :

$$\cos((k+1)\varphi_n)=\frac{2\cos(k\varphi_n)}{\sqrt{n}}-\cos((k-1)\varphi_n)$$

  Par hypothèse de récurrence, il existe α_k et α_{k-1} non divisibles par n tels que

$$\begin{aligned} \cos((k+1)\varphi_n) &= \frac{2}{\sqrt{n}}\times\frac{\alpha_k}{\sqrt{n}^k}-\frac{\alpha_{k-1}}{\sqrt{n}^{k-1}} \\ &= \frac{2\alpha_k-n\alpha_{k-1}}{\sqrt{n}^{k+1}} \end{aligned}$$

  Posons $\alpha_{k+1}=2\alpha_k-n\alpha_{k-1}$. Si n divise α_{k+1} alors n divise $2\alpha_k$ mais, d'après le théorème de Gauß, n et 2 n'ont aucun facteur commun (donc sont premiers entre eux) car n est impair, on en déduit que n divise α_k ce qui est absurde par hypothèse de récurrence. On en déduit que n ne divise pas α_{k+1} : H_{k+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_k est vraie pour tout $k\geq 1$.

3. Supposons que $A(n)$ soit rationnel. Il existe alors p et q entiers naturels (car la fonction Arccos est positive) non nuls (car $\text{Arccos}(1/\sqrt{n}) > 0$ puisque $n \geq 3$ et seul $\text{Arccos}(1) = 0$) tels que $A_n = p/q$. Dès lors, $\cos(q\pi A_n) = \cos(q\varphi_n)$ donc, d'après la question précédente, il existe $\alpha_q \in \mathbb{Z}$ non divisible par n tel que $\cos(q\pi A_n) = \alpha_q/\sqrt{n}^q$. Or, $q\pi A_n = p\pi$ donc $\cos(q\pi A_n) = (-1)^p$ c'est-à-dire que $\alpha_q = \sqrt{n}^q = n \times \sqrt{n}^{q-2}$: α_q est divisible par n, ce qui est absurde d'après ce qui précède.
4. Supposons qu'il se referme sur lui-même. L'angle formé par les deux points d'abscisses 1 et $1/\sqrt{n}$ a un cosinus égal à $1/\sqrt{n}$ (dans le petit triangle rectangle en pointillés, le côté adjacent vaut $1/\sqrt{n}$ et l'hypoténuse est un rayon du cercle donc vaut 1). Puisqu'il est compris entre 0 et π, il vaut $\text{Arccos}(1/\sqrt{n})$. Les cordes ont toutes la même longueur donc les angles sont tous égaux. On ajoute donc cet angle à chaque fois, c'est-à-dire qu'à la p-ième étape, on est au point du cercle correspondant à l'angle $p\text{Arccos}(1/\sqrt{n})$. Supposons donc que l'arc se referme sur lui-même. Il existe donc $p \neq q$ tels que les angles $p\text{Arccos}(1/\sqrt{n})$ et $q\text{Arccos}(1/\sqrt{n})$ correspondent au même point du cercle donc diffèrent d'un multiple de 2π. En d'autres termes : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$p\text{Arccos}(1/\sqrt{n}) - q\text{Arccos}(1/\sqrt{n}) = 2k\pi$$

si bien que

$$\frac{1}{\pi}\text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2k}{p-q} \in \mathbb{Q}$$

ce qui est absurde.

Exercice 37 : ✪✪✪ Soit $x \not\equiv \pi/2[\pi]$. Exprimer $\text{Arctan}(\tan(x))$ en fonction de x et de la fonction partie entière.

Correction : Rappelons que $\text{Arctan}(u)$ est l'unique réel α appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\alpha) = u$. Ainsi, on cherche l'unique α dans cet intervalle tel que $\tan(\alpha) = \tan(x)$ (cf. dessin dans le cours). L'idée est donc d'ajouter ou de retirer π suffisamment de fois pour tomber dans le bon intervalle. Il existe donc k tel que $\alpha = x + k\pi$, et le k est tel que $x + k\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et donc :

$$\frac{-x}{\pi} - \frac{1}{2} < k < \frac{-x}{\pi} + \frac{1}{2}$$

si bien que

$$k < \frac{-x}{\pi} + \frac{1}{2} < k+1$$

Or, une inégalité stricte est aussi large. L'entier k vérifie donc

$$k \leq \frac{-x}{\pi} + \frac{1}{2} < k+1$$

c'est-à-dire que $k = \left\lfloor \frac{-x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor$. Finalement :

$$\text{Arctan}(\tan(x)) = x + \left\lfloor \frac{-x}{\pi} + \frac{1}{2} \right\rfloor \times \pi$$

Exercice 38 - « Eh bien, j'ai coupé trois parts » : ✪✪✪ Soient 7 réels $x_1 < x_2 < \cdots < x_7$. Montrer qu'il existe $i \in [\![1\,;6]\!]$ tel que

$$0 < \frac{x_{i+1} - x_i}{1 + x_i x_{i+1}} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Correction : Cette expression rappelle la formule donnant $\tan(a-b)$. On aimerait écrire $x_i = \tan(\text{ truc })$ avec un truc bien choisi. On pose donc, pour tout $i \in [\![1\,;7]\!]$, $a_i = \text{Arctan}(x_i)$ si bien que $x_i = \tan(a_i)$. Par conséquent, pour tout $i \in [\![1\,;6]\!]$,

$$\begin{aligned} \frac{x_{i+1} - x_i}{1 + x_i x_{i+1}} &= \frac{\tan(a_{i+1}) - \tan(a_i)}{1 + \tan(a_{i+1})\tan(a_i)} \\ &= \tan(a_{i+1} - a_i) \end{aligned}$$

On cherche donc à prouver qu'il existe $i \in [\![1\,;6]\!]$ tel que $0 < \tan(a_{i+1} - a_i) < 1/\sqrt{3}$. Or, la fonction Arctan étant strictement croissante :

$$0 < \tan(a_{i+1} - a_i) < 1/\sqrt{3} \iff \text{Arctan}(0) = 0 < a_{i+1} - a_i < \text{Arctan}(1/\sqrt{3}) = \pi/6$$

Ainsi, il suffit de prouver qu'il existe $i \in [\![1\,;6]\!]$ tel que $0 < a_{i+1} - a_i < \pi/6$. L'inégalité de gauche est toujours vérifiée puisque $x_i < x_{i+1}$ pour tout i donc, par stricte croissance de l'Arctangente, $a_i < a_{i+1}$. On cherche donc à prouver qu'il existe i tel que $a_{i+1} - a_i < \pi/6$. Or, les a_i appartiennent à $]-\pi/2\,;\pi/2[$:

Les $a_{i+1} - a_i$ (pour $i \in [\![1\,;\,6]\!]$) définissent 6 intervalles. S'ils sont tous de longueur supérieure ou égale à $\pi/6$, alors les 6 intervalles (les 6 morceaux de gâteau) mis bout à bout font un intervalle (un gâteau) de longueur au moins égale à π ce qui n'est pas possible car $a_7 - a_1 < \pi$ (les réels appartiennent à $]-\pi/2\,;\pi/2\,[$). Il en découle que l'un au moins des intervalles (l'une au moins des parts de gâteau) est de longueur strictement inférieure à $\pi/6$, ce qui est le résultat voulu.

Exercice 39 : ✪✪✪ Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner une expression plus simple de

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \text{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

Correction : Tout d'abord, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \qquad \text{et} \qquad -1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

En effet, $2x \leq 1+x^2$ puisque $1+x^2-2x = (x-1)^2 \geq 0$ et $-1-x^2 \leq 2x$ puisque $2x+1+x^2 = (x+1)^2 \geq 0$. D'où le premier encadrement (en divisant par $1+x^2 > 0$). $1-x^2 \leq 1+x^2$ puisque $x^2 \geq 0$, et $-1-x^2 \leq 1+x^2$ (et l'inégalité est même stricte dans ce cas) : d'où le deuxième encadrement. On pense alors aux formules de trigo faisant intervenir $\tan(t/2)$: posons $t = 2\text{Arctan}(x) \in \,]-\pi\,;\pi\,[$ si bien que $x = \tan(t/2)$. On trouve alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{Arcsin}\left(\frac{2\tan(t/2)}{1+\tan^2(t/2)}\right) + \text{Arccos}\left(\frac{1-\tan^2(t/2)}{1+\tan^2(t/2)}\right) \\ &= \text{Arcsin}(\sin(t)) + \text{Arccos}(\cos(t)) \end{aligned}$$

On se ramène donc à un problème du même type que dans l'exercice 37 : exprimer $\text{Arcsin}(\sin(t))$ et $\text{Arccos}(\cos(t))$. La situation est ici plus simple $t \in \,]-\pi\,;\pi\,[$, ce n'est pas un réel quelconque. Rappelons que $\text{Arcsin}(\sin(u)) = u$ lorsque $u \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, et que $\text{Arccos}(\cos(u)) = u$ lorsque $u \in [\,0\,;\pi\,]$. Il faut donc séparer les cas :

- Supposons que $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Alors $\text{Arcsin}(\sin(t)) = t$ et $\text{Arccos}(\cos(t)) = t$ si bien que $f(x) = 2t$.
- Si $t \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, alors $\text{Arccos}(\cos(t)) = t$. Pour le sinus, il suffit de voir que $\sin(t) = \sin(\pi - t)$ donc $\text{Arcsin}(\sin(t)) = \text{Arcsin}(\sin(\pi - t))$ et $\pi - t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\text{Arcsin}(\sin(\pi - t)) = \pi - t$ si bien que $f(x) = \pi - t + t = \pi$.
- Si $t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right[$, $\text{Arcsin}(\sin(t)) = t$ et $\cos(f) = \cos(-t)$ donc $\text{Arccos}(\cos(t)) = \text{Arccos}(\cos(-t))$ et $-t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\text{Arccos}(\cos(t)) = -t$ si bien que $f(x) = t - t = 0$.
- Supposons enfin que $t \in \left]-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right[$. Alors $\text{Arccos}(\cos(t)) = \text{Arccos}(\cos(-t))$ et $-t \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[$ donc $\text{Arccos}(\cos(t)) = -t$. Enfin, $\sin(t) = \sin(\pi - t) = \sin(-\pi - t)$ par 2π-périodicité, et $-\pi - t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ si bien que $\text{Arcsin}(\sin(t)) = -\pi - t$. Finalement, $f(x) = -\pi - t - t = -\pi - 2t$.

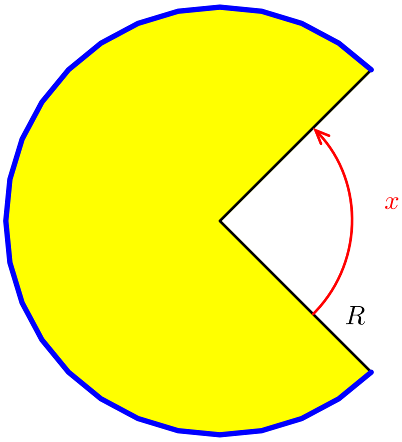
Traduisons toutes ces conditions et ces conclusions en fonction de x en se souvenant que $x = \tan(t/2)$ et $t = 2\text{Arctan}(x)$:

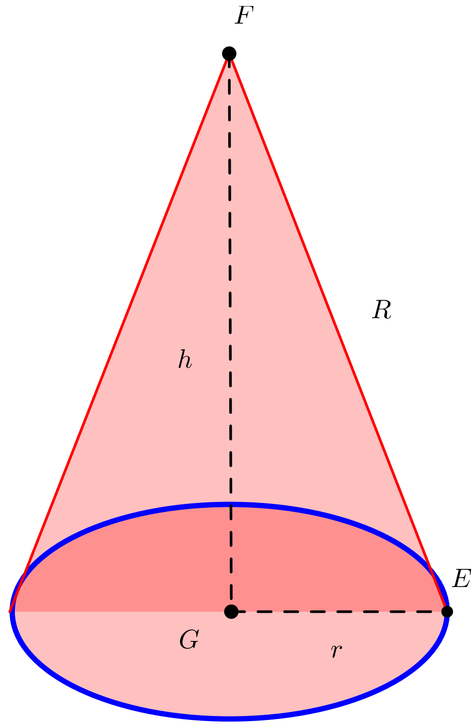
- $t \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \iff x \in [\,0\,;1\,]$. Alors $f(x) = 4\text{Arctan}(x)$.
- $t \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right[\iff x > 1$ et dans ce cas $f(x) = \pi$.
- $t \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right[\iff x \in [\,-1\,;0\,[$ et dans ce cas $f(x) = 0$.
- Enfin : $t \in \left]-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right[\iff x < -1$. Alors $f(x) = -\pi - 4\text{Arctan}(x)$.

5.3 Exercices plus géométriques.

Exercice 40 - Pacman et cornet de frites : ✪ On découpe, dans un cercle de rayon $R > 0$, un secteur angulaire d'angle $x \in [\,0\,;2\pi\,]$, avec lequel on confectionne un cône. Pour quelle valeur de x le cône a-t-il un volume maximal ?

Correction : Il fallait lire : « pour quelle valeur de x le cône a-t-il un volume maximal ? ». Faisons un dessin du cercle et du cône :





Rappelons que le volume d'un cône est $\frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times h$. On connaît R et x. Cherchons donc r et h. On sait que le périmètre de la base du cône (en bleu) vaut $R \times (2\pi - x)$ (c'est aussi la partie bleue du dessin de gauche : rappelons que la longueur d'un arc de cercle est égal à l'angle multiplié par le rayon). Or, ce périmètre vaut $2\pi r$ donc $r = \frac{R(2\pi - x)}{2\pi} = R\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)$.

D'après le théorème de Pythagore (FGE est rectangle en G) :

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{R^2 - r^2} \\ &= \sqrt{R^2 - R^2\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)^2} \\ &= R\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)^2} \end{aligned}$$

Le volume du cône vaut donc :

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times R^2\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)^2 \times R\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)^2} \end{aligned}$$

Cette quantité est tout de même assez difficile à avaler... On se demande la valeur maximale. Il suffit de poser $y = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^2 \in [\,0\,;1\,]$. Le volume est donc égal à

$$\frac{1}{3} \times \pi \times R^3 y\sqrt{1-y}$$

c'est-à-dire à une constante positive multipliée par $y\sqrt{1-y}$. Il suffit de trouver pour quelle valeur de y cette quantité est maximale, on s'arrangera ensuite pour trouver la valeur de x. La fonction g définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $g(y) = y\sqrt{1-y}$ est continue sur $[\,0\,;1\,]$, et dérivable sur $]\,0\,;1\,]$ (au moins : elle est en fait aussi dérivable en 0, comme un rapide taux d'accroissement le prouve, mais on n'en a pas besoin). Si $y \in\,]\,0\,;1\,]$, alors

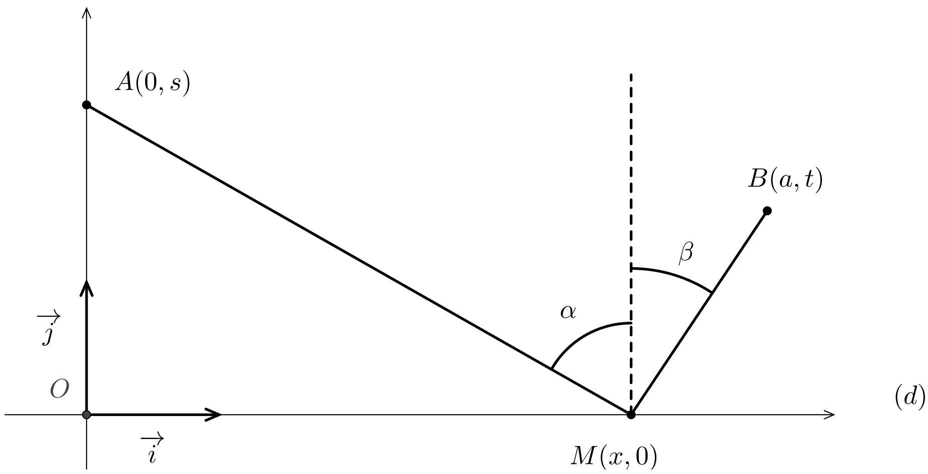
$$\begin{aligned} g'(y) &= \sqrt{1-y} + y \times \frac{-1}{2\sqrt{1-y}} \\ &= \frac{2(1-y) - y}{2\sqrt{1-y}} \\ &= \frac{2 - 3y}{2\sqrt{1-y}} \end{aligned}$$

Un rapide tableau de variations montre que (sur $[0;1]$), g est maximale en $2/3$. Il en découle que V est maximal lorsque (la première équivalence vient du fait que $1 - x/2\pi$ est positif) :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{2}{3} \quad & \iff \quad 1 - \frac{x}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ & \iff \quad x = 2\pi \times \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \end{aligned}$$

Même si vous êtes grands et que vous travaillez en radians, à titre indicatif, le volume est maximal lorsque la gueule du Pacman s'ouvre d'environ 65 degrés.

Exercice 41 - Réflexion d'un rayon lumineux : ✪ Un rayon issu du point A se réfléchit sur un miroir plan et atteint le point B. Le principe de Fermat indique que le chemin suivi par le rayon lumineux est celui qui minimise le temps total de parcours. On suppose que le milieu est homogène, c'est-à-dire que la vitesse de la lumière ne dépend pas de la position. Le temps de parcours est alors proportionnel à la longueur du chemin parcouru et il faut donc trouver le point M sur la droite (d) tel que la somme $AM + BM$ (voir ci-dessous) soit minimale.



On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ comme sur la figure. Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(0,s)$ et (a,t) avec s, a, t strictement positifs. Le point M a pour coordonnées $(x,0)$ avec $x \in [0;a]$. On désigne par α et β les angles géométriques (donc positifs) entre $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{j}$ d'une part, entre $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{j}$ d'autre part (voir la figure).

1. Exprimer $AM + MB$ en fonction de x, s, a et t.
2. Montrer que cette quantité atteint un minimum en un réel x_0 que l'on explicitera, et que pour cette valeur x_0, on a $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$. Que peut-on en déduire ?

Correction :

1. On a (d'après le théorème de Pythagore) $AM = \sqrt{s^2 + x^2}$ et $BM = \sqrt{t^2 + (a-x)^2}$.
2. Notons $f : x \mapsto \sqrt{s^2 + x^2} + \sqrt{t^2 + (a-x)^2}$ définie sur $[0;a]$. Puisque s et t sont strictement positifs, les quantités dans les racines carrées sont strictement positives donc f est dérivable. Soit $x \in [0;a]$.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{s^2 + x^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{t^2 + (a-x)^2}}$$

Cherchons le signe de $f'(x)$ (la troisième et la huitième équivalences viennent du fait qu'on manipule des nombres positifs et du fait que la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$).

$$
\begin{aligned}
f'(x) \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{s^2+x^2}} \geq \frac{a-x}{\sqrt{t^2+(a-x)^2}} \\
&\Longleftrightarrow \quad x\sqrt{t^2+(a-x)^2} \geq (a-x)\sqrt{s^2+x^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2 \times \left(t^2+(a-x)^2\right) \geq (a-x)^2 \times \left(s^2+x^2\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2 \times \left(t^2+a^2-2ax+x^2\right) \geq \left(a^2-2ax+x^2\right) \times \left(s^2+x^2\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2t^2+x^2a^2-2ax^3+x^4 \geq s^2a^2-2axs^2+s^2x^2+a^2x^2-2ax^3+x^4 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2t^2 \geq s^2a^2-2axs^2+s^2x^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2t^2 \geq s^2(a-x)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad xt \geq s(a-x) \\
&\Longleftrightarrow \quad x(t+s) \geq as \\
&\Longleftrightarrow \quad x \geq \frac{as}{t+s}
\end{aligned}
$$

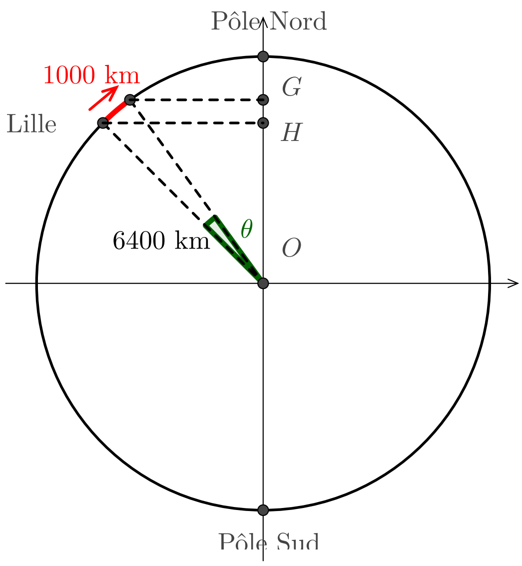
Il en découle que f est décroissante puis croissante et atteint un minimum en $x_0 = \dfrac{as}{t+s}$. De plus, en x_0, il découle des calculs précédents que

$$\sin(\alpha) = \frac{x_0}{\sqrt{s^2+{x_0}^2}} = \frac{a-x_0}{\sqrt{t^2+(a-x_0)^2}} = \sin(\beta)$$

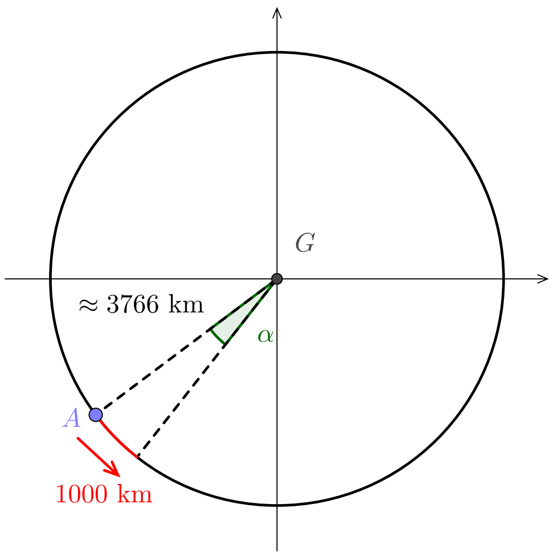
On sait que le chemin suivi minimise le temps de parcours donc la distance (voir l'énoncé) donc, quand il y a réflexion d'un angle lumineux, les angles α et β ont même sinus donc sont égaux car ils appartiennent tous les deux à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. D'où la formule bien connue : l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Gardez ça en tête quand vous jouerez au billard !

Exercice 42 : ✪✪ On fait l'approximation que Lille se trouve à une latitude de 45° et que la Terre est une sphère parfaite de 6400 km de rayon. Lors d'un voyage de classe, nous allons 1000 km au Nord, puis 1000 km à l'Est. Pour le retour, un élève dont on taira le nom propose de faire 1000 km au Sud et 1000 km à l'Ouest, pour voir du pays. Qu'en pensez-vous ?

Correction : Rappelons que la longueur d'un arc de cercle est égale à l'angle de l'arc (en radians) multiplié par le rayon. Commençons par une vue en coupe (verticale) de la Terre :



L'angle θ correspondant au voyage vers le Nord vérifie donc $6400\theta = 1000$ si bien que $\theta = 1000/6400 = 5/32$ radians (pour info, même si maintenant vous êtes grands et que vous parlez en radians, cela fait environ 9 degrés, si bien qu'en partant de Lille qui se trouve, selon notre approximation, à 45 degrés de latitude Nord, on se retrouve à environ 54 degrés de latitude Nord). Faisons à présent une coupe horizontale de la Terre (c'est-à-dire qu'on regarde la Terre vue du dessus).



Notons A le point 1000 km au Nord de Lille. L'angle GAO vaut donc $\frac{\pi}{4} - \frac{5}{32}$ si bien que

$$AG = 6400 \times \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5}{32}\right) \approx 3766 \text{ km}$$

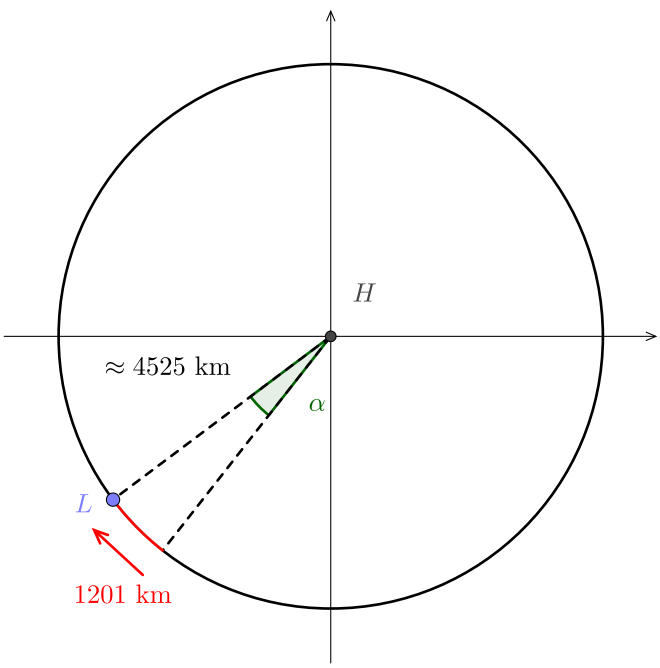
L'angle α correspondant au voyage vers l'Est vérifie donc $1000 \approx 3766\alpha$ si bien que

$$\alpha \approx \frac{1000}{3766} \approx 0.26 \text{ rad} \approx 15 \text{ deg}$$

Quand on va 1000 km vers le sud, alors on revient à la même latitude (i.e. $\pi/4$). De même, si on note L le point Lille, alors

$$HL = 6400 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 4525 \text{ km}$$

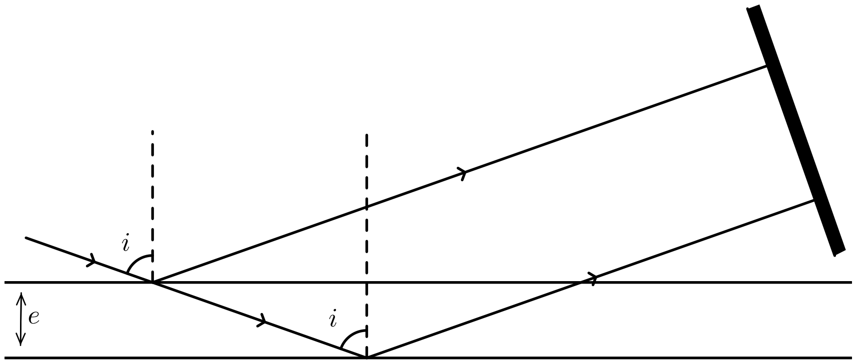
Le rayon est plus grand : le même angle donne une plus grande distance !



On a un angle α pour retourner à Lille, mais ici le rayon est plus grand : la distance à parcourir est donc $\alpha \times 4525 \approx 1201$ km : en ne faisant que 1000 km vers l'ouest, il reste 200 à parcourir pour rentrer à Lille !

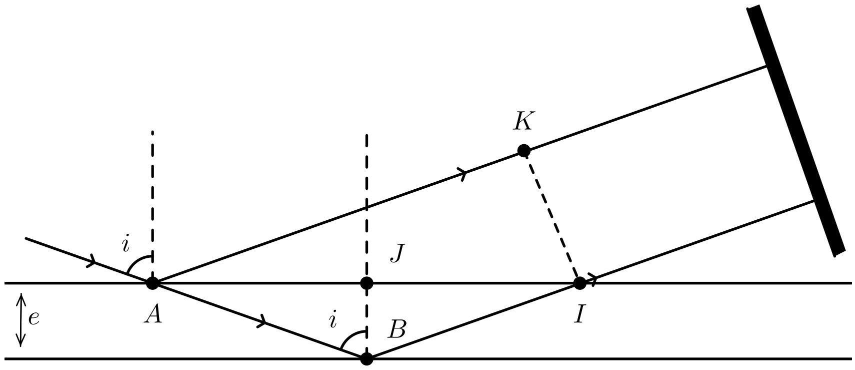
Exercice 43 - Différence de marche pour l'interféromètre de Michelson : ✪✪ Un rayon lumineux arrive sur un miroir (d'épaisseur négligeable) avec un angle d'incidence i et une partie de ce rayon est réfléchie, l'autre partie traverse le miroir [1] et rencontre un deuxième miroir, parallèle au premier et distant de celui-ci d'une distance e. Le rayon lumineux est entièrement réfléchi sur ce deuxième miroir (voir figure ci-dessous). Les deux rayons arrivent sur un écran perpendiculaire à ces rayons.

1. Bon, un rayon lumineux ne passe pas au travers d'un miroir !.. C'est un schéma équivalent au schéma réel : vous verrez ça l'an prochain !



On appelle différence de marche la différence δ entre les distances parcourues par ces deux rayons. Montrer que $\delta = 2e\cos(i)$.

Correction : Complétons la figure ci-dessus. Notons K le projeté orthogonal de I sur le premier rayon (c'est-à-dire que AKI est rectangle en K).

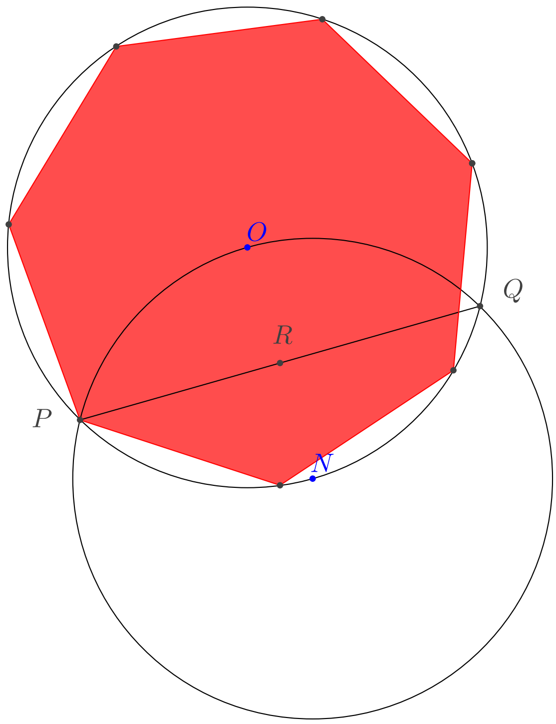


La distance cherchée est donc égale à $\delta = AB + BI - AK$. Par égalité de l'angle d'incidence et de réfraction (cf. exercice 41), $\widehat{JBI} = i$ et donc $AB = BI$ si bien que $\delta = 2AB - AK$. Or, AJB est rectangle en J et $JB = e$ si bien que $AB = e/\cos(i)$ et $AJ = AB \times \sin(i)$. On en déduit que $JI = AB \times \sin(i)$ donc $AI = 2AB\sin(i)$. La somme des angles d'un triangle vaut π et BJI est rectangle en J donc $\widehat{BIJ} = \pi/2 - i$ si bien que $\widehat{AIK} = i$. On en déduit que

$$\begin{aligned} AK &= AI\sin(i) \\ &= 2AB\sin^2(i) \\ &= 2 \times \frac{2e\left(1 - \cos^2(i)\right)}{\cos(i)} \\ &= \frac{2e}{\cos(i)} - 2e\cos(i) \end{aligned}$$

Finalement, puisque $\delta = 2AB - AK$, on trouve bien que $\delta = 2e\cos(i)$.

Exercice 44 - Construction de l'heptagone régulier ? ✪✪✪



La figure ci-contre a été réalisée de la façon suivante : N est un point du cercle de centre O ; on a tracé le cercle de même rayon et de centre N qui coupe le premier cercle en P et Q ; R est le milieu de $[PQ]$. On a reporté 7 fois la distance PR sur le premier cercle pour obtenir un heptagone régulier. Cette construction est-elle exacte ? On pourra montrer que si elle l'est, alors

$$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

et prouver ensuite que les nombres

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right), \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

sont rationnels et en déduire une contradiction.

Remarque : On peut en fait montrer que l'heptagone régulier ne peut pas être construit à l'aide d'une règle et d'un compas (cas particulier du théorème de Gauß - Wantzel, 1837) mais ça c'est une autre histoire !

Correction : Posons M le point à gauche de N et L le milieu de $[PM]$ (je vous laisse actualiser le dessin). Supposons donc cette construction exacte, c'est-à-dire que la figure colorée soit un heptagone régulier. Tous ses angles intérieurs (comme $\widehat{POM}$) sont donc égaux à $2\pi/7$. Le triangle POM étant isocèle en O, la bissectrice issue de O est aussi la médiane et la hauteur issues de O et la médiatrice de $[PN]$. En particulier, (OL) est perpendiculaire à (PN). Tout ça pour dire que OPL est rectangle en L, et que $\widehat{POL} = \pi/7$. Notons $\rho > 0$ (R est déjà pris) le rayon des deux cercles. $\sin\left(\widehat{POL}\right) = PL/OP$ c'est-à-dire que

$$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{PL}{\rho}$$

Or, $PL = PM/2 = PR/2$. Il suffit donc de calculer PR pour calculer $\sin(\pi/7)$. Les quatre segments $[OQ]$, $[NQ]$, $[NP]$ et $[OP]$ sont de longueur ρ : le quadrilatère $OPNQ$ a ses quatre côtés de même longueur : c'est donc un losange, et donc ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. Il en découle que R est à la fois le milieu de $[PQ]$ et de $[ON]$ et que ces deux segments sont perpendiculaires. Tout ça pour dire que ORP est rectangle en R et que $OR = ON/2 = \rho/2$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} PR^2 &= OP^2 - OR^2 \\ &= \frac{3\rho^2}{4} \end{aligned}$$

si bien que $PR = \sqrt{3}\rho/2$ et, d'après ce qui précède, on trouve bien $\sin(\pi/7) = \sqrt{3}/4$. À l'aide des formules $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ et $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, il vient successivement :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \frac{5}{8} \qquad \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = -\frac{7}{32} \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{463}{512}$$

Or,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \end{aligned}$$

Or, $\cos^2(\pi/7) = 1 - \sin^2(\pi/7) = 13/16$ et puisque $\cos(\pi/7) > 0$ donc $\cos(\pi/7) = \sqrt{134} \notin \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car, d'après ce qui précède, $\cos(\pi/7) = 463/512 \in \mathbb{Q}$.

Chapitre 6

Arithmétique

Vrai ou Faux ?

1. Si $n \equiv 1[35]$, alors n est impair.
2. Si a et b divisent d, alors ab aussi.
3. Si d divise ab, alors d divise a ou b.
4. L'intervalle d'entiers $[\![1 ; 1000]\!]$ contient 140 multiples de 7.
5. Si p et q sont premiers et vérifient $p - q = 11$ alors $p = 13$ et $q = 2$.
6. Si d divise n^2 alors d divise n.
7. Si $a^2 \equiv 1[n]$ alors $a \equiv \pm 1[n]$.
8. Si $4a \equiv 4b[13]$ alors $a \equiv b[13]$.
9. Si $4a \equiv 4b[6]$ alors $a \equiv b[6]$.
10. 0 divise tout entier n.
11. 1326543987321 est divisible par 11.
12. Si $n \equiv 3[4]$, alors n n'est pas somme de deux carrés.
13. S'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 2$ alors $a \wedge b = 2$.
14. Soit $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$. Si k ne divise pas n alors $k \wedge n = 1$.
15. $1789 \wedge 1515 = 1$.
16. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $a \wedge b \wedge c = 1$. Alors $a \wedge b = 1$.
17. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \wedge b = a$. Alors b divise a.
18. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \vee b = a$. Alors b divise a.
19. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $a \wedge b = 1$ et c divise ab. Alors c divise a ou c divise b.
20. Le système $a \wedge b = 14$ et $a \vee b = 114$ n'admet pas de solution.
21. Si n est impair, alors n et $n + 2$ sont premiers entre eux.
22. Le PPCM de deux entiers naturels premiers entre eux est leur produit.
23. 111 est premier.
24. Si $n \equiv 0[2]$ alors $n + 1 \equiv 1[3]$.
25. Il y a une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 4.
26. Deux entiers m et n ont même valuation 2-adique si et seulement s'il existe x et y impairs tels que $mx = ny$.
27. L'équation $3x \equiv 2[25]$ admet une infinité de solutions.
28. L'équation $3x \equiv 2[24]$ admet une infinité de solutions.
29. $x \equiv 1[72]$ si et seulement si $x \equiv 1[8]$ et $x \equiv 1[9]$.

6.1 Écriture en base b

Exercice 1 : ✪ Écrire 17 dans les bases $2, 3, \ldots, 9$.

Correction :

- $17 = \overline{10001}^2$
- $17 = \overline{121}^3$
- $17 = \overline{101}^4$
- $17 = \overline{31}^5$
- $17 = \overline{25}^6$
- $17 = \overline{23}^7$
- $17 = \overline{21}^8$
- $17 = \overline{18}^9$

Exercice 2 : ✪ Existe-t-il une base b dans laquelle $\overline{34}^b + \overline{14}^b = \overline{104}^b$?

Correction : On cherche $b \geq 5$ (sinon on ne peut pas écrire 4 dans cette base) tel que $(3b+4)+(1\times b+4) = 1\times b^2+0\times b+4$ c'est-à-dire tel que $b^2 - 4b - 4 = 0$. Or, il n'y a pas de solution entière à cette équation : aucun b ne convient.

Exercice 3 : ✪ Écrire 10043 en base 2.

Correction : Les premières puissances de 2 sont $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192$ et le suivant dépasse le nombre. Rappelons que, pour les puissances de 2, la situation est très simple : on soustrait la plus grande puissance de 2 inférieure, et on recommence. On a successivement : $10043-8192 = 1851$, $1851-1024 = 827$, $827-512 = 315$, $315 - 256 = 59$, $59 - 32 = 27$, $27 - 16 = 11$, $11 - 8 = 3$, $3 - 2 = 1$ ce qui donne enfin :

$$\begin{aligned} 10043 &= 8192 + 1024 + 512 + 256 + 32 + 16 + 8 + 2 + 1 \\ &= 2^{13} + 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 \\ &= \overline{10011100111011}^2 \end{aligned}$$

Exercice 4 : ✪ Démontrer la règle pour mettre au carré un nombre se terminant par 5 vue en début d'année.

Correction : Soit n un entier naturel se terminant par 5, qu'on écrit donc sous la forme $n = x5$ avec x le nombre avant le chiffre 5 (x n'est pas forcément un entier entre 0 et 9, on peut avoir $x \geq 10$, par exemple $x = 11$ si $n = 115$), c'est-à-dire que $n = 10x + 5$. On a alors

$$\begin{aligned} n^2 &= 100x^2 + 2\times 10x\times 5 + 25 \\ &= 100x(x+1) + 25 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les deux derniers chiffres de n^2 sont 25 et que les chiffres précédents sont $x(x + 1)$ puisqu'on le multiplie par 100 donc « on le décale de deux chiffres vers la gauche », ce qui est le résultat voulu.

Exercice 5 : ✪ Soit $abcdef$ l'écriture en base 10 d'un entier divisible par 13. Montrer que l'entier dont l'écriture est $bcdefa$ est encore divisible par 13.

Correction : Notons n cet entier. Alors

$$n = a\times 10^5 + b\times 10^4 + c\times 10^3 + d\times 10^2 + e\times 10 + f$$

Posons m l'entier dont l'écriture en base 10 est $bcdefa$. On a alors $m = \left(n - a\times 10^5\right)\times 10 + a$ (on enlève $a\times 10^5$, on décale tout vers la gauche en multipliant par 10 et on ajoute a) donc $m = 10n - a\times\left(10^6 - 1\right)$. Il suffit de voir que :

$$10 \equiv -3[13], 10^2 \equiv 9[13], 10^3 \equiv 90 \equiv -1[13] \qquad \text{et} \qquad 10^6 \equiv 1[13]$$

si bien que $10^6 - 1 \equiv 0[13]$ et puisque $n \equiv 0[13]$ alors $m \equiv 0[13]$ ce qui est le résultat voulu.

Exercice 6 : ✪ Pour quelle valeur de $a \in \llbracket 0\,;9\rrbracket$ le nombre d'écriture décimale $123a4$ est-il divisible par 12 ?

Correction : Notons $n = 123a4$. $12 = 3\times 4$ qui sont premiers entre eux donc n est divisible par 12 si et seulement s'il est divisible par 3 et 4. Or, n est divisible par 3 si et seulement si $1 + 2 + 3 + a + 4 = 10 + a$ (un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est) est divisible par 3, et $a \in \llbracket 0\,;9\rrbracket$ donc n est divisible par 3 si et seulement si $a = 2$, $a = 5$ ou $a = 8$. On sait également que n est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres l'est donc n est divisible par 4 si et seulement si $a4$ l'est. Or, 24 et 84 sont divisibles par 4 mais 54 ne l'est pas. En conclusion, n est divisible par 12 si et seulement si $a = 2$ ou $a = 8$.

Exercice 7 : ✪ Soit x un nombre à (au plus) deux chiffres. Montrer que le nombre à (au plus) six chiffres obtenu en juxtaposant trois fois x est divisible par 37.

Correction : Notons $x = ab$ avec a et b compris entre 0 et 9, si bien qu'on essaye de prouver que $n = ababab$ est divisible par 37. Or,

$$\begin{aligned} n &= ab\times 10^4 + ab\times 10^2 + ab \\ &= ab\times\left(10^4 + 10^2 + 1\right) \end{aligned}$$

Or, $3 \times 37 = 111$ donc $10^2 \equiv -11[37]$ si bien que $10^4 \equiv 121 \equiv 10[37]$ et donc

$$10^4 + 10^2 + 1 \equiv 10 - 11 + 1 \equiv 0[37]$$

Finalement, $n \equiv 0[37]$ donc n est bien divisible par 37.

6.2 Division euclidienne

Exercice 8 : ✪ Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $b \neq 0$. Expliciter la division euclidienne de $-a$ par b en fonction de la division euclidienne de a par b.

Correction : D'après le théorème de division euclidienne, il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0\,;\,|b|-1]\!]$ uniques tels que $a = bq + r$. Dès lors, $-a = (-b) \times q + (-r)$. Deux cas peuvent se produire :

- $r = 0$, c'est-à-dire que b divise a. Dans ce cas, $-a = (-b) \times q + 0$ et, par unicité de l'écriture dans le théorème de division euclidienne, c'est la bonne. Le quotient est donc égal à $-q$ et le reste à $0 = r$.
- $r \neq 0$ donc $r \in [\![1\,;\,|b|-1]\!]$. $-r < 0$ donc le reste n'est pas $-r$. Cependant :

$$-a = (-q) \times b - |b| + (|b| - r)$$

Si $b > 0$, alors $|b| = b$ donc $-a = (-q-1)b + (b-r)$: $b - r \in [\![1\,;\,b-1]\!]$ donc, par unicité, le quotient vaut $-q-1$ et le reste $b-r$. Si $b < 0$, alors $|b| = -b$ si bien que $-a = (-q+1) \times b + (-b-r)$ et $1 \leq r \leq |b| - 1$ donc $|b| - r = -b - r \in [\![1\,;\,|b|-1]\!]$: le quotient vaut $-q+1$ et le reste $-b-r$.

Exercice 9 : ✪ Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 < b \leq a$. Soit r le reste de la division euclidienne de a par b. Montrer que $a > 2r$.

Correction : Si q est le quotient, alors $a = bq + r$. Or, $r < b < a$ donc $q \geq 1$ (car si $q \leq 0$ alors $a \leq r$) donc $a \geq b + r > 2r$ puisque $b > r$ (rappelons que $r \in [\![0\,;\,b-1]\!]$).

6.3 Divisibilité

Exercice 10 : ✪ Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n+1$ divise n^2+1.

Correction : $n^2 + 1 = n(n+1) - n + 1 = n(n+1) - (n-1)$. Par conséquent, $n+1$ divise n^2+1 si et seulement si $n+1$ divise $n-1$. Or, $n-1 = (n+1) - 2$ donc $n+1$ divise $n-1$ si et seulement si $n+1$ divise 2 donc si et seulement si $n+1 = 1$ ou $n+1 = 2$. Les seules solutions sont donc $n = 0$ et $n = 1$.

Exercice 11 : ✪ Soient m, n, k trois entiers strictement supérieurs à 1 tels que $m = nk$. Montrer que $(n!)^k \vee (k!)^n$ divise $m!$. On pourra utiliser l'exercice 38 du chapitre 4.

Correction : $m = nk$ donc $m! = 1 \times 2 \times \cdots \times nk$ est un produit de nk termes. On peut donc le voir comme k produit de n termes :

$$m! = \underbrace{\underbrace{(1 \times 2 \times \cdots \times n)}_{n \text{ termes}} \times \underbrace{((n+1) \times \cdots \times (2n))}_{n \text{ termes}} \times \cdots \times \underbrace{(((k-1)n+1) \times \cdots \times kn)}_{n \text{ termes}}}_{k \text{ produits}}$$

Or, d'après l'exercice 38 du chapitre 4, un produit de n termes consécutifs est divisible par $n!$ donc chacun des produits de n termes consécutifs ci-dessus est divisible par $n!$ donc s'écrit $a_i \times n!$ si bien que leur produit, à savoir $m!$, est divisible par $(n!)^k$. Par symétrie des rôles (n est k jouent le même rôle), $m!$ est divisible par $(k!)^n$. $m!$ est donc divisible par $(n!)^k$ et par $(k!)^n$ donc par leur PPCM (cf. cours : un multiple commun à deux entiers est divisible par leur PPCM).

Exercice 12 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. En déduire, à l'aide de la formule du chef, que $n+1$ divise $\displaystyle\binom{2n}{n}$.

Exercice : $2n+1 = (n+1) + n$. Par conséquent, un diviseur commun à $2n+1$ et à $n+1$ divise $(2n+1) - (n+1) = n$. Or, deux entiers consécutifs sont premiers entre eux donc n et $n+1$ sont premiers entre eux si bien que $d = 1$: $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux. La formule du chef donne :

$$(n+1)\binom{2n+1}{n+1} = (2n+1)\binom{2n}{n}$$

En particulier, $n+1$ divise $(2n+1)\binom{2n}{n}$. Puisque $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux, le théorème de Gauß permet de conclure.

Exercice 13 : ✪ Soit $n \geq 2$. Montrer que si n est à la fois un carré parfait et un cube parfait, alors n est la puissance 6-ième d'un entier.

Correction : On suppose qu'il existe $a \geq 2$ et $b \geq 2$ tels que $n = a^2 = b^3$. Soit $n = {p_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times {p_k}^{\alpha_k}$ la décomposition en produit de facteurs premiers de n. On sait que

$$ {p_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times {p_k}^{\alpha_k} = a^2 $$

Par unicité, cette écriture est l'écriture en facteurs premiers de a^2. Or, toutes les puissances dans la décomposition en produit de facteurs premiers de a^2 sont paires (ce sont celles de a multipliées par 2) donc les α_i sont tous pairs i.e. divisibles par 2. De même en écrivant $n = b^3$, les α_i sont divisibles par 3. Or, 2 et 3 sont premiers entre eux donc les α_i sont divisibles par 6. Posons

$$ m = {p_1}^{\alpha_1/6} \times \cdots \times {p_k}^{\alpha_k/6} $$

Alors m est un entier et $m^6 = n$ ce qui permet de conclure.

Exercice 14 : ✪ Soient a, b, c trois entiers relatifs non nuls tels que $a \wedge b = 1$. Montrer que $a \wedge bc = a \wedge c$.

Correction : Soit d un diviseur commun à a et bc. Alors d est premier avec b (car d divise a et a et b sont premiers entre eux) donc, d'après le théorème de Gauß, d divise c. Réciproquement, un diviseur de a et de c divise bc. Il en découle que a et bc ont les mêmes diviseurs communs que a et c donc en particulier ont le même PGCD.

Exercice 15 : ✪✪ Soient a et b deux entiers naturels.

1. Montrer que si a^2 divise b^2 alors a divise b.
2. Montrer que si a et b sont premiers entre eux et si ab est un carré, alors a et b sont des carrés. Le résultat est-il encore vrai si a et b ne sont pas supposés premiers entre eux ?
3. Généraliser au cas d'une puissance k-ième avec $k \geq 2$. En déduire que le produit de trois entiers consécutifs non nuls n'est jamais une puissance k-ième.

Correction :

1. Supposons que a^2 divise b^2. Alors tout nombre premier dans la décomposition de a^2 en facteur premier apparaît dans celle de b^2 avec une puissance plus petite. En d'autres termes, pour tout p premier, $v_p(a^2) \leq v_p(b^2)$. Or, pour tout p premier, $v_p(a^2) = 2v_p(a)$ et $v_p(b^2) = 2v_p(b)$ donc $v_p(a) \leq v_p(b)$ ce qui permet de conclure. L'idée est qu'il n'y a pas de « génération spontanée des nombres premiers » : les facteurs premiers de a^2 sont les mêmes que ceux de a avec une puissance double, et idem entre b^2 et b, donc si les facteurs premiers de a^2 apparaissent chez b^2 avec une puissance plus petite, c'est que c'était déjà le cas entre a et b.
2. Un entier est un carré si et seulement si toutes les puissances dans sa décomposition en produit de facteurs premiers sont paires. Soit p un nombre premier apparaissant dans la décomposition en produit de facteurs premiers de ab, c'est-à-dire tel que $v_p(ab) \geq 1$. Alors $v_p(ab) \geq 2$ puisqu'il est pair. Puisque $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$, on en déduit d'une part que $v_p(a)$ ou $v_p(b)$ est non nul, c'est-à-dire que p apparaît dans la décomposition en produit de facteurs premiers de a ou b (toujours la même idée de « non génération spontanée des nombres premiers » : un facteur premier de ab vient de a ou de b) et puisque a et b sont premiers entre eux, il apparaît dans seulement l'une des deux décompositions (deux entiers premiers sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont aucun facteur premier commun). Sans perte de généralité, supposons que p apparaisse dans la décomposition en produit de facteurs premiers de a : alors $v_p(b) = 0$ (p n'apparaît pas dans celle de b) donc $v_p(ab) = v_p(a)$ si bien que $v_p(a)$ est pair. On en déduit que les puissances des nombres premiers dans la décomposition en produit de facteurs premiers de a sont paires : a est un carré, et idem pour b. Si a et b ne sont pas premiers entre eux, ce n'est plus forcément vrai : par exemple, $16 = 2 \times 8$.
3. De même, si ab est une puissance k-ième et si a et b sont premiers entre eux, alors a et b sont des puissances k-ièmes. Soient $a < b < c$ trois entiers consécutifs, et supposons que abc soit une puissance k-ième. Des entiers consécutifs sont premiers entre eux donc a et b sont premiers entre eux, ainsi que b et c. Il en découle que ac et b sont premiers entre eux : ac et b sont donc des puissances k-ièmes, c'est-à-dire qu'il existe n et m tels que $b = n^k$ et $ac = m^k$. Or, $b^2 = \left(n^2\right)^k$ et $ac = (b-1)(b+1) = b^2 - 1$ donc $m^k = \left(n^2\right)^k + 1$ ce qui est impossible car deux puissances k-ièmes distinctes (avec $k \geq 2$) sont distantes d'au moins 2 : en effet, d'après le binôme de Newton,

$$ (n+1)^k = n^k + kn^{k-1} \geq n^k + 2 $$

Deux puissances k-ièmes ne peuvent pas être distantes de 1 : c'est absurde, le produit de trois entiers consécutifs n'est jamais une puissance k-ième.

Exercice 16 - Théorème de Lamé (1844) : ✪✪ On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 & F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} & F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

On se donne dans cet exercice deux entiers a et b vérifiant $1 < b < a$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si l'algorithme d'Euclide donnant $a \wedge b$ s'arrête au bout de n étapes, alors $a \geq dF_{n+2}$ et $b \geq dF_{n+1}$, où on a noté $d = a \wedge b$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $F_{n+1} \geq \varphi^{n-1}$ où $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3. En déduire que le nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide donnant $a \wedge b$ est inférieur ou égal à $\dfrac{\ln(b)}{\ln(\varphi)} + 1$.
4. On donne $\dfrac{\ln(10)}{\ln(\varphi)} \approx 4.78$. Montrer que $n \leq 5N$ où N est le nombre de chiffres de b en base 10.

Correction :

1. Raisonnons par récurrence.
   - Si $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n : « Si a et b sont deux entiers vérifiant $1 < b < a$ et si l'algorithme donnant $a \wedge b$ s'arrête en n étapes, alors $a \geq dF_{n+2}$ et $b \geq dF_{n+1}$, où $d = a \wedge b$ ».
   - Si l'algorithme s'arrête en une étape, c'est que b divise a donc $d = b$. Or, $F_2 = 1$ donc on a bien $b \geq dF_{1+1}$ et puisque a est un multiple de b strictement supérieur à b, $a \geq 2b = d \times F_3$ (puisque $d = b$). En d'autres termes, H_1 est vraie.
   - Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Supposons donc que l'algorithme d'Euclide donnant $d = a \wedge b$ s'arrête en $n+1$ étapes. Rappelons qu'après la première étape, on remplace a par b et b par r si bien que $d = a \wedge b = b \wedge r$ et on obtient $r \wedge b$ au bout de n étapes. Par hypothèse de récurrence, $r \geq dF_{n+1}$ et $b \geq dF_{n+2}$. Or, $a > b > r$ donc $q \geq 1$ (si $q = 0$ alors $a = r$ ce qui est impossible) si bien que $a = bq + r \geq b + r \geq d(F_{n+2} + F_{n+1}) = dF_{n+3}$ c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.
2. Idem, raisonnons par récurrence (double : il faut y penser en regardant la relation de récurrence de la suite de Fibonacci).
   - Si $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n : « $F_{n+1} \geq \varphi^{n-1}$ ».
   - $F_2 = 1$ et $\varphi^0 = 1$ donc H_1 est vraie. De plus, $F_3 = 2$ et $\varphi^1 \leq 2$. En effet, la racine carrée est croissante donc $2 = \sqrt{4} \leq \sqrt{5} \leq 3 = \sqrt{9}$ (les inégalités sont même strictes car la racine est strictement croissante mais c'est inutile ici) donc

   $$\varphi \leq \frac{1+3}{2} = 2 = F_3$$

   si bien que H_2 est vraie.
   - Soit $n \geq 1$. Supposons H_n et H_{n+1} vraie et prouvons que H_{n+2} est vraie. Par définition de la suite de Fibonacci et par hypothèse de récurrence,

   $$F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} \geq \varphi^n + \varphi^{n-1} = \varphi^{n-1} \times (\varphi + 1)$$

   Or, $\varphi^2 = \varphi + 1$ (simple calcul) donc $F_{n+3} \geq \varphi^{n+1}$: H_{n+2} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.
3. Notons n le nombre d'étapes recherché. D'après la question 1, on sait que $F_{n+1} \leq b/d$ donc $F_{n+1} \leq b$. D'après la question précédente, $F_{n+1} \geq \varphi^{n-1}$ donc $\varphi^{n-1} \leq b$. La fonction ln étant croissante, $(n-1)\ln(\varphi) \leq \ln(b)$ et $\varphi > 1$ donc $\ln(\varphi) > 0$ si bien que $n - 1 \leq \dfrac{\ln(b)}{\ln(\varphi)}$ ce qui permet de conclure.
4. D'après la question précédente :

   $$n \leq \frac{\ln(b)}{\ln(10)} \times \frac{\ln(10)}{\ln(\varphi)} + 1 \leq 5\frac{\ln(b)}{\ln(10)} + 1$$

   Or, on sait que le nombre de chiffres de b en écriture décimale est $\lfloor \ln(b)/\ln(10) \rfloor + 1$ et on sait que, pour tout $x, x < \lfloor x \rfloor + 1$ si bien que :

   $$n < 5\left(\left\lfloor \frac{\ln(b)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1\right) + 1$$

   Or, on manipule des entiers donc

$$n \leq 5\left(\left\lfloor \frac{\ln(b)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1\right)$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 17 : ✪✪ Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers n divisibles par tous les entiers d vérifiant $1 < d \leq \sqrt{n}$ puis donner tous ces entiers.

Correction : Procédons par analyse synthèse.

- Soit n un entier supérieur ou égal à 2 qui convient. L'idée est que, quand on fait le produit des trois nombres inférieurs à $\sqrt{n}$, on obtient un ordre de grandeur de $n^{3/2}$ qui dépasse n ce qui n'est pas possible quand n assez grand. Notons $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Alors n est divisible par $k, k-1$ et $k-2$. Le problème est qu'ils ne sont pas forcément premiers entre eux deux à deux car k et $k-2$ peuvent avoir 2 comme diviseur commun. Cependant, c'est le seul (à part 1 évidemment). Deux cas se présentent : soit k et $k-2$ sont premiers entre eux (ce qui est le cas si k est impair), et alors $k, k-1$ et $k-2$ sont premiers entre eux deux à deux (rappelons que deux entiers consécutifs sont premiers entre eux) et divisent n si bien que $k(k-1)(k-2)$ divise n, soit k et $k-2$ sont pairs donc leur PGCD vaut 2 et donc $k/2$ et $(k-2)/2$ sont premiers entre eux (quand on divise deux nombres par leur PGCD, ils sont premiers entre eux). De même, $k(k-1)(k-2)/4$ divise n.

  Dans tous les cas, $k(k-1)(k-2)/4 \leq n$ donc $k(k-1)(k-2) \leq 4n$. Or, $k > \sqrt{n} - 1$ si bien (on peut multiplier les inégalités positives) que

  $$(\sqrt{n} - 1)(\sqrt{n} - 2)(\sqrt{n} - 3) < 4n$$

  En développant, il vient : $\sqrt{n}^3 - 6n + 11\sqrt{n} - 6 < 4n$ et donc $f(\sqrt{n}) < 0$ où $f : x \mapsto x^3 - 10x^2 + 11x - 6$. f est dérivable et, pour tout $x \geq 0$ (on s'intéresse uniquement aux nombres positifs) $f'(x) = 3x^2 - 20x + 11$ qui est positive à partir de $x = \dfrac{20 + \sqrt{278}}{6} \approx 6.06$ Il en découle que, à partir de 7, f est croissante. Or, $f(9) = 729 - 810 + 99 - 6 = 12 > 0$ donc f est positive sur $[\,9\,;+\infty\,[$ (car f est croissante sur $[\,9\,;+\infty\,[$). Il en découle que $\sqrt{n} < 9$ donc $n < 80$.
- Synthèse : il suffit d'examiner tous les entiers entre 2 et 80. $n = 2$ et $n = 3$ conviennent car il n'existe aucun d vérifiant $1 < d \leq n$. Si $4 \leq n < 9$, alors $2 \leq \sqrt{n} < 3$ donc n convient si et seulement si n est divisible par 2 : seuls 4, 6 et 8 conviennent. Si $9 \leq n < 16$, alors $3 \leq \sqrt{n} < 4$ donc n convient si et seulement si n est divisible par 2 et 3 donc par 6 (2 et 3 sont premiers entre eux) : seul 12 convient. Si $16 \leq n < 25$ alors n convient si et seulement si n est divisible par $2, 3$ et 4 donc par 12 : seul 24 convient. Si $25 \leq n < 36$ alors n convient si et seulement si n est divisible par $2, 3, 4$ et 5 donc par 60 : aucun entier ne convient, et même aucun autre entier inférieur strict à 60 ne convient car les contraintes s'accumulent : un nombre supérieur ou égal à 16 (pas forcément strictement inférieur à 25) doit être divisible par $2, 3, 4$ et 5 donc par 60. Si $n \geq 60$ alors $7 \leq \sqrt{n}$ donc n doit en plus être divisible par 7, si bien que n doit être divisible (entre autres) par $3, 4, 5, 7$ qui sont premiers entre eux deux à deux donc doit être divisible par 420 ce qui n'est pas possible si $n \leq 80$.

  On a fait le tour : les seuls entiers solutions sont $2, 3, 4, 6, 8, 12$ et 24. En particulier, il y en a un nombre fini.

Exercice 18 : ✪✪ Si $n \geq 1$, on note $D_+(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n.

1. Soient a et b deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Montrer que la fonction « produit »

   $$\begin{cases} D_+(a) \times D_+(b) & \to & D_+(ab) \\ (x, y) & \mapsto & x \times y \end{cases}$$

   est bijective.
2. Si $n \geq 1$, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n. Montrer que la fonction σ est semi-multiplicative, c'est-à-dire que pour tous a et b premiers entre eux, $\sigma(ab) = \sigma(a) \times \sigma(b)$.

Correction :

1. Erreur : il fallait supposer a et b premiers entre eux (sinon cette application n'est pas injective, exo), ce qu'on fait dorénavant. Notons cette application f. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments de $D_+(a) \times D_+(b)$ tels que $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$. Alors $x_1y_1 = x_2y_2$: en particulier, x_1 divise x_2y_2. Or, x_1 est un diviseur de a qui est premier avec b donc x_1 est premier avec tous les diviseurs de b si bien que x_1 et y_2 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauß, x_1 divise x_2. Par symétrie des rôles, x_2 divise x_1 si bien que $x_1 = x_2$ (ils sont positifs). Toujours par symétrie des rôles, $y_1 = y_2$ si bien que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$: f est injective.

Soit à présent $d \in D_+(ab)$. Alors tout facteur premier de d et un facteur premier de a ou de b : en effet, pour tout p premier, $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$ donc $v_p(ab) \neq 0$ si et seulement si $v_p(a)$ ou $v_p(b)$ est non nulle. De plus, a et b sont premiers entre eux donc on peut être plus précis : a et b n'ayant aucun facteur premier commun, tout facteur premier de ab apparaît uniquement dans a ou dans b et avec la même puissance. Si on note d_1 le produit des facteurs premiers de ab qui proviennent de a et d_2 le produit des facteurs premiers de ab qui proviennent de b, on a $d_1 \times d_2 = d$ et d_1 est un diviseur de a et d_2 est un diviseur de b, si bien que $f(d_1, d_2) = d$: (d_1, d_2) est un antécédent de d par f, f est bijective. En d'autres termes, un diviseur de ab s'écrit de façon unique comme produit d'un diviseur de a et d'un diviseur de b.

2. Soient a et b premiers entre eux. Par définition,

$$\sigma(a) = \sum_{x \in D_+(a)} x \qquad \text{et} \qquad \sigma(b) = \sum_{y \in D_+(b)} y$$

si bien que (le produit de deux sommes simples donne une somme double, cf. chapitre 4) :

$$\sigma(a) \times \sigma(b) = \sum_{(x,y) \in D_+(a) \times D_+(b)} xy$$

et, d'après la question précédente, la somme de droite est égale à $\sigma(ab)$ ce qui permet de conclure.

Exercice 19 : ✪✪ Soit $\theta = 2\pi/7$. En exprimant $\cos(3\theta)$ et $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, montrer que $\cos(\theta)$ est irrationnel.

Correction : On sait que $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$. De plus :

$$\begin{aligned}
\cos(4\theta) &= 2\cos^2(2\theta) - 1 \\
&= 2\left(2\cos^2(\theta) - 1\right)^2 - 1 \\
&= 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1
\end{aligned}$$

Supposons que $\cos(\theta)$ soit rationnel : il existe donc p et q appartenant à $\mathbb{N}^*$ ($\cos(\theta) \geq 0$ car $0 \leq \theta \leq \pi/2$) premiers entre eux tels que $\cos(\theta) = p/q$. D'après ce qui précède,

$$\cos(3\theta) = \frac{4p^3}{q^3} - \frac{3p}{q} \qquad \text{et} \qquad \cos(4\theta) = \frac{8p^4}{q^4} - \frac{8p^2}{q^2} + 1$$

Or, d'une part, $\cos(7\theta) = \cos(2\pi) = 1$ et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\cos(7\theta) &= \cos(3\theta + 4\theta) \\
&= \cos(3\theta)\cos(4\theta) - \sin(3\theta)\sin(4\theta) \\
&= \cos(3\theta)\cos(4\theta) - \frac{1}{2}\left[\cos(\theta) - \cos(7\theta)\right] \\
&= \cos(3\theta)\cos(4\theta) - \frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Donc, en remplaçant et en multipliant par 2 :

$$1 = \frac{4p^3 - 3pq^2}{q^3} \times \frac{8p^4 - 8p^2q^2 + q^4}{q^4} - \frac{p}{q}$$

En multipliant par q^7 il vient :

$$q^7 = \left(4p^3 - 3pq^2\right) \times \left(8p^4 - 8p^2q^2 + q^4\right) - pq^6$$

Le membre de droite est divisible par p donc celui de gauche aussi. Or, p et q sont premiers entre eux donc p et q^7 aussi. Puisque p divise q^7, alors $p = 1$. À présent, on met du même côté tous les termes divisibles par q :

$$q^7 + 3pq^2 \times \left(8p^4 - 8p^2q^2 + q^4\right) + 4p^3 \times 8p^2q^2 - 4p^3q^4 + pq^6 = 32p^7$$

Le membre de gauche est divisible par q donc celui de droite aussi. Or, q est premier avec p donc avec p^7 donc q divise 32 : $q = 1, 2, 4, 8, 16$ ou 32. Il en découle que $\cos(\theta) = 1, 1/2, 1/4, 1/8$ ou $1/32$. Or, $\theta = 2\pi/7 \in \left]0\,;\frac{\pi}{3}\right[$, intervalle sur lequel le cosinus est strictement décroissant. Il en découle que $1 > \cos(\theta) > 1/2$ ce qui est absurde : $\cos(\theta)$ est bien irrationnel.

Exercice 20 : ✪✪ Soit p un nombre premier et soit $k \in [\![1\,;\,p-1]\!]$. Montrer que p divise $\binom{p-1}{k} - (-1)^k$.

Correction : Il suffit de prouver que

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k[p]$$

Or

$$\binom{p-1}{k} = \frac{(p-1)!}{k!(p-1-k)!}$$

et

$$\begin{aligned}(p-1)! &= (p-1-k)! \times (p-k) \times (p-k+1) \times \cdots \times (p-1) \\ &\equiv (p-1-k)! \times (-k) \times (-k+1) \times \cdots \times (-1)[p] \\ &\equiv (p-1-k)! \times (-1)^k \times k \times (k-1) \times \cdots \times 1[p] \\ &\equiv (p-1-k)! \times (-1)^k \times k![p]\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure (remarque : le fait que p soit premier ne joue aucun rôle).

6.4 Congruences

Exercice 21 : ✪ Quel est le chiffre des unités de 1789^{1789} ? de 1515^{1515} ? de 2021^{2021} ? de 2022^{2022} ? de $2017^{2021^{2023}}$?

Correction : On cherche donc la congruence modulo 10. Deux cas sont triviaux :

$$1515^{1515} \equiv 5^{1515} \equiv 5[10] \qquad \text{et} \qquad 2021^{2021} \equiv 1^{2021} \equiv 1[10]$$

c'est-à-dire que les chiffres des unités de ces deux nombres sont respectivement 5 et 1. Pour 1789, ce n'est pas très compliqué :

$$1789^{1789} \equiv 9^{1789}[10]$$

Or, $9^1 \equiv 9[10]$, $9^2 \equiv 1[10]$, $9^3 \equiv 9[10]$ et, par une récurrence immédiate, $9^n \equiv 1[10]$ si n est pair et $9^n \equiv 9[10]$ si n est impair (l'hypothèse de récurrence serait H_p : « $9^{2p} \equiv 1[10]$ et $9^{2p+1} \equiv 9[10]$ »). 1789 est impair donc $9^{1789} \equiv 9[10]$ c'est-à-dire que le chiffre des unités de 1789^{1789} est 9. Pour les deux restants, il faut travailler un peu plus et faire comme dans le cours. Tout d'abord,

$$2022^{2022} \equiv 2^{2022}[10]$$

Or :

$$2^1 \equiv 2[10], 2^2 \equiv 4[10], 2^3 \equiv 8[10], 2^4 \equiv 6[10], 2^5 \equiv 2[10], 2^6 \equiv 4[10], 2^7 \equiv 8[10]$$

Par une récurrence immédiate (H_p serait du même genre que ci-dessus, de 2^{4p} à 2^{4p+3}), pour tout $n \geq 1$, $2^n \equiv 2[10]$ si $n \equiv 1[4]$, $2^n \equiv 4[10]$ si $n \equiv 2[4]$, $2^n \equiv 8[10]$ si $n \equiv 3[4]$ et enfin $2^n \equiv 6[10]$ si $n \equiv 0[4]$. On cherche donc la congruence de 2022 modulo 4. On sait qu'un nombre est congru à ses deux derniers chiffres modulo 4 donc $2022 \equiv 22 \equiv 2[4]$ si bien que $2^{2022} \equiv 4[10]$. Finalement, le chiffre des unités de 2022^{2022} est 4. Enfin,

$$2017^{2021^{2023}} \equiv 7^{2021^{2023}}[10]$$

Comme dans le cours, il suffit de connaître la congruence de 2021^{2023} modulo 4. Or,

$$2021^{2023} \equiv 21^{2023} \equiv 1^{2023} \equiv 1[4]$$

et donc (cf. cours) $7^{2021^{2023}} \equiv 7[10]$ c'est-à-dire que le chiffre des unités de $2017^{2021^{2023}}$ est 7.

Exercice 22 : ✪ Donner les deux derniers chiffres de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{2021} k!$.

Correction : Les deux derniers chiffres de S sont égaux le reste de la division euclidienne de S par 100 et donc le nombre entre 0 et 99 congru à S modulo 100. Or, un entier est divisible par 100 si et seulement s'il est divisible par 25 et par 4 puisqu'ils sont premiers entre eux. Dès lors, $k!$ est divisible par 100 dès qu'apparaissent deux fois 2 et 5 entre 1 et k. Par conséquent, si $k \geq 10$, alors $k!$ est divisible par 100 puisque

$$k! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times \cdots \times k$$

Par conséquent :

$$S \equiv \sum_{k=0}^{9} k![100]$$

Or, $0! \equiv 1! \equiv 1[100]$, $2! \equiv 2[100]$, $3! \equiv 6[100]$, $4! \equiv 24[100]$, $5! \equiv 20[100]$, $6! \equiv 20[100]$ (on part de la congruence précédente et on multiplie par le nombre correspondant : pour passer de 5! à 6!, on multiplie 20 par 6 ce qui donne 20, modulo 100), $7! \equiv 40[100]$, $8! \equiv 20[100]$ et enfin $9! \equiv 80[100]$ si bien que

$$\begin{aligned} S &\equiv 1+1+2+6+24+20+20+40+20+80[100] \\ &\equiv 214[100] \\ &\equiv 14[100] \end{aligned}$$

En conclusion, les deux derniers chiffres de S sont 14.

Exercice 23 : ✪ Montrer que $3333^{4444} + 4444^{3333}$ est divisible par 5.

Correction : Notons $n = 3333^{4444} + 4444^{3333}$. Alors $n \equiv 3^{4444} + (-1)^{3333} \equiv 3^{4444} - 1[5]$. Or, $3^2 \equiv -1[5]$ donc $3^4 \equiv 1[5]$ et, par une récurrence immédiate, $3^{4k} \equiv 1[5]$ et puisque 4444 est divisible par 4, $3^{4444} \equiv 1[5]$ donc $n \equiv 0[5]$ ce qui est le résultat voulu.

Exercice 24 : ✪ Montrer que 7 divise $3^{105} + 4^{105}$.

Correction : Il suffit de voir que

$$3^{105} + 4^{105} \equiv (-4)^{105} + 4^{105} \equiv -4^{105} + 4^{105} \equiv 0[7]$$

Exercice 25 : ✪ Montrer que pour tout n impair, $n(n^2-1)$ est divisible par 24.

Correction : Soit donc n impair. Alors n^2 est impair donc n^2-1 est pair. Mieux : $n^2-1 = (n-1)(n+1)$ est le produit de deux entiers pairs consécutifs donc l'un est divisible par 4 et l'autre simplement par 2 donc le produit est divisible par 3. Enfin, $n(n-1)(n+1)$ est le produit de trois entiers consécutifs donc l'un est divisible par 3, donc $n(n^2-1)$ est divisible par 3 et par 8 donc par $3 \times 8 = 24$ puisque 3 et 8 sont premiers entre eux.

Exercice 26 : ✪ Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que : $3 \mid a^2+b^2 \iff 3 \mid a$ et $3 \mid b$.

Correction : Si $a \equiv 0[3]$ alors $a^2 \equiv 0[3]$, tandis que si $a \equiv 1[3]$ ou $a \equiv 2[3]$ alors $a^2 \equiv 1[3]$, et idem pour b. Par conséquent, $a^2+b^2 \equiv 0[3]$ si et seulement si a et b sont congrus à 0 modulo 3. En effet, si ce n'est pas le cas, alors $a^2+b^2 \equiv 1[3]$ ou $2[3]$.

Exercice 27 : ✪ Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$. Montrer que : $6 \mid a+b+c \iff 6 \mid a^3+b^3+c^3$.

Correction : Même chose : a et a^3 sont de même parité, ainsi que b et b^3, et c et c^3. Par conséquent, $a+b+c$ et $a^3+b^3+c^3$ ont la même parité : l'un est divisible par 2 si et seulement si l'autre l'est. De plus, en distinguant les trois cas, a et a^3 ont même congruence modulo 3, et idem pour les autres, donc $a+b+c$ et $a^3+b^2+c^3$ ont même congruence modulo 3 donc l'un est divisible par 3 si et seulement si l'autre l'est. Or, $6 = 2 \times 3$ et 2 et 3 sont premiers entre eux donc un nombre est divisible par 6 si et seulement s'il est divisible par 2 et 3 ce qui permet de conclure.

Exercice 28 : ✪ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 4[7]$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{Z}$. On cherche à « inverser » 3. On sait que $5 \times 3 \equiv 1[7]$. Dès lors, $3x \equiv 4[7] \iff x \equiv 5 \times 4 \equiv 6[7]$. On aurait aussi pu raisonner par disjonction de cas : si $x \equiv 0[7]$ alors x ne convient pas, etc. jusqu'à : si $x \equiv 6 \equiv -1[7]$ alors $3x \equiv -3 \equiv 4[7]$ et on aboutit au même résultat.

Exercice 29 : ✪ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
2. $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$ est divisible par 5.
3. $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$ est divisible par 17.
4. $2^{4^n} + 5$ est divisible par 21.
5. $n^{2021}(n^{2022} - 1)$ est divisible par 8.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $3^{n+3} - 4^{4n+2} = 27 \times 3^n - 16 \times 4^{4n} \equiv 5 \times 3^n - 5 \times 4^{4n}[11]$. Or, $4^2 \equiv 5[11]$ donc $4^3 \equiv -2[11]$ et $4^4 \equiv 3[11]$ si bien que
$$3^{n+3} - 4^{4n+2} \equiv 5 \times 3^n - 5 \times 3^n \equiv 0[11]$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. $2^{2n+1} + 3^{2n+1} \equiv 2^{2n+1} + (-2)^{2n+1} \equiv 2^{2n+1} - 2^{2n+1} \equiv 0[5]$ (on a utilisé le fait que $2n+1$ est impair).
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $2^{6n+3} + 3^{4n+2} = 8 \times 2^{6n} + 9 \times 3^{4n} \equiv 8 \times 2^{6n} - 8 \times 3^{4n}[17]$. Or, $2^6 = 64 \equiv 13[17]$ et $3^4 = 81 \equiv 13[17]$ donc
$$2^{6n+3} + 3^{4n+2} \equiv 8 \times 13^n - 8 \times 13^n \equiv 0[17]$$
4. $2^4 = 16 \equiv -5[21]$, $16^2 \equiv 25 \equiv 9[16]$, $16^3 \equiv -45 \equiv -1[21]$ donc $16^4 \equiv 16[21]$. Ainsi, par une récurrence immédiate, $2^{4^n} \equiv 16 \equiv -5[21]$ (en utilisant le fait que $2^{4^{n+1}} = \left(2^{4^n}\right)^4$) ce qui permet de conclure. On aurait aussi pu travailler modulo 3 et modulo 7 car un nombre est divisible par 21 si et seulement s'il est divisible par 3 et 7 puisqu'ils sont premiers entre eux.
5. Si n est pair alors n est divisible par 2 donc n^{2021} est divisible par 2^{2021}. En particulier, $n^{2021} \times \left(n^{2022} - 1\right)$ est divisible par $2^3 = 8$. Supposons à présent n impair. Alors $n \pm equiv 1, 3, 5$ ou 7 modulo 8, et dans tous les cas, $n^2 \equiv 1[8]$ si bien que $n^{2022} \equiv 1[8]$ donc 8 divise $n^{2022} - 1$ ce qui permet de conclure.

Exercice 30 : ✪ Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n^7 \equiv n[42]$.

Correction : Il s'agit de prouver que 42 divise $n^7 - n$. Or, $42 = 2 \times 3 \times 7$ et 2, 3 et 7 sont premiers entre eux deux à deux donc il suffit de prouver que 2, 3 et 7 divisent $n^7 - n$. Or, n et n^7 sont de même parité donc $n^7 - n$ est pair donc divisible par 2. 7 est premier donc divise $n^7 - n$ d'après le théorème de Fermat. Enfin, 3 est premier donc $n^3 \equiv n[3]$ (toujours d'après le théorème de Fermat). En mettant au carré, $n^6 \equiv n^2[7]$ et en multipliant par n, on obtient $n^7 \equiv n^3 \equiv n[3]$ ce qui permet de conclure.

Exercice 31 : ✪ Soit $n \geq 1$, soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que si $a \equiv b[n]$, alors $a^n \equiv b^n[n^2]$.

Correction : Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$. D'après la formule du binôme de Newton :
$$\begin{aligned}
a^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k b^{n-k} \\
&= b^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} n^k b^{n-k} \\
&= b^n + n \times \binom{n}{1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} n^k b^{n-k} \\
&= b^n + n^2 + n^2 \times \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} n^{k-2} b^{n-k}}_{\in \mathbb{Z}}
\end{aligned}$$
ce qui permet de conclure.

Exercice 32 : ✪

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que si 7 divise $a^3 + b^3 + c^3$ alors 7 divise abc.
2. **Remake :** Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que $x^2 + y^2$ est divisible par 7 si et seulement si x et y le sont.

Correction :

1. En distinguant les cas (selon que $a \equiv 0[7], \ldots, a \equiv 6[7]$), on trouve qu'un cube est congru à $0, 1$ ou -1 modulo 7. Par conséquent, si $a^3 + b^3 + c^3$ est congru à 0 modulo 7, alors les trois cubes sont congrus à 0 modulo 7 ou l'un est congru à 0, un autre à 1 et l'autre à -1 modulo 7. Mais si l'un des cubes est divisible par 7, c'est que le nombre originel l'est aussi : si a^3 est divisible par 7, alors a l'est (et idem dans les autres cas). En particulier, 7 divise abc.
2. Idem que dans l'exercice 26.

Exercice 33 : ✪ Montrer qu'il n'existe aucun $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{21n-3}{4}$ et $\dfrac{15n-2}{4}$ soient entiers.

Correction : Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors n convient si et seulement si 4 divise $21n-3$ et $15n-2$ donc si et seulement si $21n \equiv 3[4]$ et $15n \equiv 2[4]$. Or, la première condition implique que n est impair et la seconde que n est pair, ce qui n'est pas possible en même temps. Il n'y a donc aucun entier n qui convient.

Exercice 34 : ✪ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n^7}{7}+\frac{n^5}{5}+\frac{23n}{35} \in \mathbb{N}$$

Correction : Oubli. Il fallait lire : « $\in \mathbb{N}$ ». Notons

$$\begin{aligned} A &= \frac{n^7}{7}+\frac{n^5}{5}+\frac{23n}{35} \\ &= \frac{5n^7+7n^5+23n}{35} \end{aligned}$$

5 et 7 sont premiers donc, d'après le théorème de Fermat, $n^7 \equiv n[7]$ et $n^5 \equiv n[5]$ si bien que (on n'oublie pas de multiplier aussi dans la congruence, cf. chapitre de trigo) $5n^7 \equiv 5n[35]$ et $7n^5 \equiv 7n[35]$ donc :

$$\begin{aligned} 5n^7+7n^5+23n &\equiv 5n+7n+23n[35] \\ &\equiv 35n[35] \\ &\equiv 0[35] \end{aligned}$$

On en déduit que $5n^7+7n^5+23n$ est divisible par 35 donc $A \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathbb{N}$ car A est positif.

Exercice 35 : ✪ Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que 7 divise n^n-3.

Correction : 7 étant premier, d'après le théorème de Fermat, 7 divise n^n-n. Or, $n^n-3 = n^n-n+n-3$. Par conséquent, 7 divise n^n-3 si et seulement si 7 divise $n-3$ si et seulement si $n \equiv 3[7]$.

Exercice 36 : ✪ Montrer que, parmi les 101 dalmatiens, on peut en choisir 11 tels que le nombre **total** de leurs taches est un multiple de 11.

Correction : On commence par regarder quelques cas simples : si tous les chiens ont le même nombre de taches, alors 11 chiens quelconques conviennent. Mieux : si 11 chiens ont le même nombre de taches, il suffit de prendre ces 11 chiens. On se dit alors que seule compte la congruence modulo 11. On range alors les chiens dans un tableau selon la congruence modulo 11 de leur taches :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Médor 56	Médor 45	Médor 21	Médor 12		Médor 6	Médor 1	Médor 59	Médor 100	Médor 74	Médor 15
Médor 13		Médor 7	Médor 53			Médor 96	Médor 62			Médor 75
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$

Si une colonne contient 11 chiens, disons la colonne r avec $r \in [\![0\,;10]\!]$, alors en prenant 11 chiens dans cette colonne, on a un nombre de taches congru à $11r$ donc congru à 0 modulo 11 : c'est bon. Supposons maintenant que ce ne soit pas le cas donc que toutes les colonnes contiennent au plus 10 chiens : cela fait donc 110 chiens au maximum, on sent qu'on n'est pas loin. Il suffit de voir que si toutes les colonnes sont non vides, en prenant un chien dans chaque colonne, on a une somme des taches congrue à $1+2+\cdots+10=55$ modulo 11, et comme 55 est divisible par 11, on a une somme des taches divisibles par 11. Supposons à présent qu'une des colonnes soit vide : on a au plus 10 colonnes non vides contenant chacune au plus 10 chiens, donc cela fait au plus 100 chiens ce qui est impossible puisqu'on en a 101. On est donc forcément dans un des deux cas précédents, ce qui permet de conclure.

Exercice 37 : ✪ Pierre le fermier multiplie son jour de naissance par 13 et son mois de naissance par 14. Il somme les deux nombres obtenus et obtient 230. Quel est son anniversaire ?

Correction : Notons j son jour de naissance (compris entre 1 et 31) et m son mois de naissance (compris entre 1 et 12). Il en découle que $13j+14m=230$. En prenant la congruence modulo 13, en utilisant le fait que $14 \equiv 1[13]$ et $230 \equiv 9[13]$, il vient $m \equiv 9[13]$ et puisque $m \in [\![1\,;\,12]\!]$, on trouve $m = 9$ si bien que $13j = 230 - 14 \times 9$. On trouve finalement que $13j = 104$ et donc $j = 8$. En conclusion, Pierre le fermier est né le 8 septembre.

Exercice 38 - Nombres de Fermat, le retour : ✪✪ Si $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$ le n-ième nombre de Fermat.

1. Donner selon la valeur de n les deux derniers chiffres de F_n (on pourra utiliser le fait que $2^{22} = 4194304$ et que $2^{16} = 65536$).
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit p un facteur premier de F_n.
   (a) Montrer que l'ensemble $E = \{k \in \mathbb{N}^* \mid 2^k \equiv 1[p]\}$ admet un plus petit élément noté d.
   (b) Montrer que tout élément de E est divisible par d et en déduire que $d = 2^{n+1}$.
   (c) Montrer que $p \equiv 1\left[2^{n+1}\right]$. Pourquoi était-il naturel pour Euler d'essayer 641 lorsqu'il cherchait les diviseurs de F_5 ?

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche la congruence de F_n modulo 100. Comme d'habitude, donnons les premières valeurs des congruences de 2^n (et pas 2^{2^n} !) modulo 100 et essayons de trouver une périodicité.

   - $2^0 \equiv 1[100]$.
   - $2^1 \equiv 2[100]$.
   - $2^2 \equiv 4[100]$.
   - $2^3 \equiv 8[100]$.
   - $2^4 \equiv 16[100]$.
   - $2^5 \equiv 32[100]$.
   - $2^6 \equiv 64[100]$.
   - $2^7 \equiv 28[100]$.
   - $2^8 \equiv 56[100]$.
   - $2^9 \equiv 12[100]$.
   - $2^{10} \equiv 24[100]$.
   - $2^{11} \equiv 48[100]$.
   - $2^{12} \equiv 96[100]$.
   - $2^{13} \equiv 92[100]$.
   - $2^{14} \equiv 84[100]$.
   - $2^{15} \equiv 68[100]$.
   - $2^{16} \equiv 36[100]$.
   - $2^{17} \equiv 72[100]$.
   - $2^{18} \equiv 44[100]$.
   - $2^{19} \equiv 88[100]$.
   - $2^{20} \equiv 76[100]$.
   - $2^{21} \equiv 52[100]$.
   - $2^{22} \equiv 4[100]$.
   - $2^{23} \equiv 8[100]$.
   - $2^{24} \equiv 16[100]$.

   On remarque un cycle de longueur 20 à partir de 2^2 (les deux premiers termes n'apparaissent plus : la suite des congruences n'est pas périodique mais périodique à partir d'un certain rang). Seule va donc importer la congruence de 2^n modulo 20. Or :

   - $2^0 \equiv 1[20]$.
   - $2^1 \equiv 2[20]$.
   - $2^2 \equiv 4[20]$.
   - $2^3 \equiv 8[20]$.
   - $2^4 \equiv 16[20]$.
   - $2^5 \equiv 12[20]$.
   - $2^6 \equiv 4[20]$.
   - $2^7 \equiv 8[20]$.
   - $2^8 \equiv 16[20]$.
   - $2^9 \equiv 12[20]$.
   - $2^{10} \equiv 4[20]$.

   On voit qu'il semble y avoir un cycle de longueur 4 : par une récurrence immédiate, pour tout $k \geq 1$, $2^{4k} \equiv 16[20]$, et alors $2^{2^{4k}} \equiv 36[100]$ si bien que les deux derniers chiffres de F_{4k} sont 37, $2^{4k+1} \equiv 12[20]$, si bien que les deux derniers chiffres de F_{4k+1} sont 97, $2^{4k+2} \equiv 4[20]$ si bien que les deux derniers chiffres de F_{4k+2} sont 17, et enfin $2^{4k+3} \equiv 8[20]$ si bien que les deux derniers chiffres de F_{4k+3} sont 57.

2. (a) L'ensemble des congruences modulo p étant fini (de 0 à $p-1$), il existe $k_1 < k_2$ tels que $2^{k_1} \equiv 2^{k_2}[p]$. Or, 2 et p sont premiers entre eux car F_n est impair donc tous ses facteurs premiers sont impairs. Il en découle qu'on peut simplifier par 2^{k_1} si bien que $2^{k_2 - k_1} \equiv 1[p]$: $k_2 - k_2 \in E$, E est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément.

   (b) Soit $k \in E$. Effectuons la division euclidienne de k par d (d est non nul car les éléments de E appartiennent à $\mathbb{N}^*$ par définition) : il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0\,;\,d-1]\!]$ tel que $k = dq + r$. Or, $k \in E$ donc $2^k \equiv 1[p]$ et donc

   $$2^{qd+r} \equiv 1[p]$$

   Or, $2^{qd+r} = \left(2^d\right)^q \times 2^r \equiv 1^q \times 2^r \equiv 2^r[p]$ c'est-à-dire que $2^r \equiv 1[p]$. Si $r \neq 0$, alors $r \in \mathbb{N}^*$ donc $r \in E$ ce qui est absurde car $r < d$ qui est le plus petit élément de E. Finalement, $r = 0$: le reste est nul, c'est-à-dire que d divise k.

   Puisque p divise F_n, on en déduit que $F_n \equiv 0[p]$ donc $2^{2^n} \equiv -1[p]$. En mettant au carré, il vient $2^{2^{n+1}} \equiv 1[p]$: $2^{n+1} \in E$. Puisque d divise 2^{n+1}, alors d est de la forme 2^k avec $k \leq n+1$ (ce sont les seuls diviseurs de 2^{n+1}). Si $k \neq n+1$ alors $k \leq n$ donc $2^{2^n} = \left(2^k\right)^{2^{n-k}} \equiv 1^{2^{n-k}} \equiv 1[p]$ ce qui contredit la relation $2^{2^n} \equiv -1[p]$: on en déduit que $d = 2^{n+1}$.

   (c) D'après le théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1[p]$ donc $p - 1 \in E$ si bien que $p-1$ est divisible par $d = 2^{n+1}$ donc $p - 1 \equiv 0\left[2^{n+1}\right]$ ce qui permet de conclure. Par conséquent, les diviseurs éventuels de F_n sont à chercher parmi $2^{n+1} + 1, 2 \times 2^{n+1} + 1, 3 \times 2^{n+1} + 1$ etc. Lorsqu'il cherchait les diviseurs de F_5, il a donc cherché les diviseurs premiers éventuels de F_5 parmi les nombres congrus à 1 modulo $2^6 = 64$ donc parmi les nombres de la forme $k \times 64 + 1$: le nombre 641 arrive donc assez rapidement parmi les candidats. C'est tout de même plus rapide que d'essayer tous les nombres entiers à partir de 3 ! Là, au dixième essai, on trouve un diviseur !

Exercice 39 : ✪✪ Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer qu'il existe k tel que $a^k \equiv 1[b]$ si et seulement si a et b sont premiers entre eux. En déduire qu'il existe un multiple de 2021 qui ne s'écrit qu'avec des 1.

Correction : Supposons qu'il existe k tel que $a^k \equiv 1[b]$: il existe alors u tel que $a^k = 1 + ub$ donc $a^{k-1}a - ub = 1$. D'après le théorème de Bézout, a et b sont premiers entre eux. Réciproquement, supposons que a et b soient premiers entre eux. Il y a un nombre fini de congruences modulo b donc il existe $k_1 < k_2$ tels que $a^{k_1} \equiv a^{k_2}[b]$. Puisque a est premier avec b, on peut simplifier par a^{k_1} ce qui donne le résultat voulu : $a^{k_2-k_1} \equiv 1[b]$.

Le nombre s'écrivant avec n chiffres 1 est égal à $10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1$ (par exemple $1111 = 1000 + 100 + 10 + 1$). Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\text{Il existe un multiple de 2021 qui ne s'écrit qu'avec des 1} &\iff \exists (k,n) \in \mathbb{N}^2, 2021k = 10^{n-1} + \cdots + 1 \\
&\iff \exists (k,n) \in \mathbb{N}^2, 2021k = \frac{1-10^n}{1-10} \\
&\iff \exists (k,n) \in \mathbb{N}^2, 2021 \times 9 \times k = 1 - 10^n \\
&\iff \exists (k,n) \in \mathbb{N}^2, 10^n = 1 - 2021 \times 9 \times k \\
&\iff \exists (k,n) \in \mathbb{N}^2, 10^n \equiv 1[2021 \times 9]
\end{aligned}$$

ce qui est le cas puisque 10 est premier avec 2021×9 car 2021×9 est premier avec 2 et 5. On peut donc sortir cet exercices toutes les années impaires ne se terminant pas par 5.

Exercice 40 : ✪✪ On pouse $u_0 = 9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3{u_n}^4 + 4{u_n}^3$. Montrer que l'écriture décimale de u_{11} comporte plus de 2021 fois le chiffre 9.

Correction : On a $u_1 = 22599$ et $u_2 = 7825349904565599999$ (bon, là, une calculatrice peut être utile) : u_0 se termine par 9, u_1 par 99 et u_2 par 9999. Montrons par récurrence que, pour tout n, u_n se termine par 2^n fois le chiffre 9, ce qui se traduit par : $u_n \equiv -1 \left[10^{2^n}\right]$.

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $u_n \equiv -1 \left[10^{2^n}\right]$ ».
- H_0, H_1 et H_2 sont vraies.
- Soit $n \geq 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = k \times 10^{2^n} - 1$. Par conséquent (à l'aide du triangle de Pascal) :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 4 \times \left(k \times 10^{2^n} - 1\right)^3 + 3 \times \left(k \times 10^{2^n} - 1\right)^4 \\
&= 4k^3 \times \left(10^{2^n}\right)^3 - 12k^2\left(10^{2^n}\right)^2 + 12k \times 10^{2^n} - 4 \\
&\quad +3 \times k^4 \times \left(10^{2^n}\right)^4 - 12k^3 \times \left(10^{2^n}\right)^3 + 18k^2\left(10^{2^n}\right)^2 - 12k \times 10^{2^n} + 3
\end{aligned}$$

  Les termes en 10^{2^n} se simplifient, et toutes les puissances supérieures sont divisibles par $10^{2^{n+1}} = \left(10^{2^n}\right)^2$, et enfin $-4 + 3 = -1$: il en découle que u_{n+1} s'écrit sous la forme $k' \times 10^{2^{n+1}} - 1$ ce qui clôt la récurrence.

En particulier, u_{11} se termine par $2^{11} = 2048$ fois le chiffre 9, ce qui fait qu'on peut encore poser cet exercice quelques années...

Exercice 41 : ✪✪ On se donne 2021 entiers dont la somme est nulle. Montrer que la somme de leurs puissances 37-ièmes est divisible par 399.

Correction : Notons ces entiers $n_1, \ldots, n_{2021}$. Posons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{2021} {n_k}^{2021}$. Puisque $399 = 3 \times 7 \times 19$ et que $3, 7, 19$ sont premiers entre eux deux à deux, il suffit de prouver que S est divisible par 3, 7 et 19. Or, 3 est premier donc, d'après le théorème de Fermat, pour tout k, ${a_k}^3 \equiv a_k[3]$. En mettant au cube, il vient : ${a_k}^9 \equiv {a_k}^3 \equiv a_k[3]$. En mettant encore au cube, ${a_k}^{27} \equiv {a_k}^3 \equiv a_k[3]$. Par produit :

$${a_k}^{37} \equiv {a_k}^{27} \times {a_k}^9 \times a_k \equiv a_k \times a_k \times a_k \equiv {a_k}^3 \equiv a_k[3]$$

Pour 7 et 19, c'est la même chose : ${a_k}^7 \equiv a_k[7]$. En mettant à la puissance 5 : ${a_k}^{35} \equiv {a_k}^5[7]$. En multipliant par ${a_k}^2$:

$${a_k}^{37} \equiv {a_k}^7 \equiv a_k[7]$$

Enfin, ${a_k}^{19} \equiv a_k[19]$. En multipliant par ${a_k}^{18}$,

$${a_k}^{37} \equiv {a_k}^{19} \equiv a_k[19]$$

Il en découle que 3, 7 et 19 divisent ${a_k}^{37} - a_k$ donc ${a_k}^{37} - a_k$ est divisible par 399 si bien que ${a_k}^{37} \equiv a_k[399]$. Par somme :

$$S \equiv \sum_{k=1}^{2021} a_k[399]$$

ce qui permet de conclure puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{2021} a_k = 0$.

Exercice 42 - Cas particulier du théorème de Catalan-Mihailescu : ✪✪✪ Donner tous les couples d'entiers $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2^n - 3^m = 1$.

Correction : Si $n = 0$ alors $2^n = 1$ et aucune valeur de m ne convient. Si $n = 1$ alors $2^n = 2 = 1+3^0$ donc le couple $(1,0)$ est solution. Si $n = 2$ alors $2^n = 4 = 1+3^1$ donc le couple $(2,1)$ est solution. Montrons qu'il n'y en a pas d'autre. Supposons qu'il existe un couple solution avec $n \geq 3$. Si on prend la congruence modulo 4, il vient ($n \geq 3$ donc 2^n est divisible par 4) : $-(-1)^m \equiv 1[4]$ donc $(-1)^m \equiv -1[4]$ si bien que m est impair : il existe k tel que $m = 2k+1$ donc $2^n - 3^{2k+1} = 2^n - 9^k \times 3 = 1$. En raisonnant modulo 8 (car $n \geq 3$), il vient : $0 - 1^k \times 3 \equiv 1[8]$ donc $-3 \equiv 1[8]$ ce qui est absurde. Les seules solutions sont donc les couples $(1,0)$ et $(2,1)$.

Exercice 43 : ✪✪✪ Donner la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 4444^{4444}.

Correction : Énorme classique... Notons $A = 4444^{4444}$, B la somme des chiffres de A, C la somme des chiffres de B et enfin D la somme des chiffres de C, c'est-à-dire qu'on demande la valeur de D. On sait qu'un nombre est congru à la somme de ses chiffres modulo 9. Ainsi, $D \equiv C \equiv B \equiv A[9]$. La somme des chiffres de 4444 vaut 16 donc $D \equiv 16^{4444} \equiv 7^{4444}[9]$. Comme en classe, cherchons un cycle :

$$7^2 \equiv 4[9], 7^3 \equiv 1[9], 7^4 \equiv 7[9], 7^5 \equiv 4[9], 7^6 \equiv 1[9]$$

Par une récurrence immédiate, $7^n \equiv 4[9]$ si $n \equiv 2[3]$, $7^n \equiv 1[9]$ si $n \equiv 0[3]$ et $7^n \equiv 7[9]$ si $n \equiv 1[3]$ (l'hypothèse de récurrence serait H_p : « $7^{3p+2} \equiv 4[9]$, $7^{3p+1} \equiv 7[9]$ et $7^{3p} \equiv 1[9]$ »). Or, $4444 \equiv 16 \equiv 1[3]$ (un nombre est congru à la somme de ses chiffres modulo 3) si bien que $7^{4444} \equiv 7[9]$. Finalement, $D \equiv 7[9]$. Mais on demande la valeur exacte de D : il suffit de voir que la somme des chiffres d'un nombre est beaucoup plus petite que ce nombre. $A \leq 10000^{4444} = 10^{4\times 4444} \leq 10^{20000}$ (et on est large !) donc A a au plus 20000 chiffres, compris entre 0 et 9 si bien que $B \leq 9 \times 20000 = 180000$. Dès lors, B a au plus 6 chiffres égaux au plus à 9 donc $C \leq 6 \times 9 = 54$. Enfin, le nombre inférieur à 54 ayant la plus grande somme des chiffres est 49 dont la somme des chiffres est 13 donc $D \leq 13$. Le seul nombre congru à 7 modulo 9 inférieur à 13 est 7 donc $D = 7$.

6.5 Équations diophantiennes

Exercice 44 : ✪ Donner les solutions entières de l'équation $29x - 11y = 1$.

Correction : Tout d'abord, cette équation admet des solutions car $29 \wedge 11 = 1$. Donnons une solution particulière à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

$$\begin{array}{r|l} 29 & 11 \\ \cline{2-2} -\ 11 & 2 \\ \hline 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 7 \\ \cline{2-2} -\ \ 7 & 1 \\ \hline 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \cline{2-2} -\ 4 & 1 \\ \hline 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \cline{2-2} -\ 3 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \\ &= 4 - (7-4) \\ &= 2 \times 4 - 7 \\ &= 2 \times (11 - 7) - 7 \\ &= 2 \times 11 - 3 \times 7 \\ &= 2 \times 11 - 3 \times (29 - 2 \times 11) \\ &= 8 \times 11 - 3 \times 29 \end{aligned}$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}(x,y) \text{ est solution de l'équation} &\iff 29x-11y=1\\ &\iff 29x-11y=-3\times 29+8\times 11\\ &\iff 29(x+3)=11(8+y)\end{aligned}$$

Supposons que (x,y) soit solution. Alors 11 divise $29(x+3)$ et 11 et 29 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauß, 11 divise $x+3$ c'est-à-dire qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=11k-3$ si bien que $11(8+y)=29\times 11k$ donc $y=29k-8$. Réciproquement, tout couple de la forme $(11k-3,29k-8)$ est solution. En conclusion : $S=\{(11k-3,29k-8)\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice 45 : ✪ Donner les couples d'entiers naturels (x,y) solutions de $x\wedge y+x\vee y=y+4$.

Correction : Par analyse synthèse.

Analyse : Soit (x,y) un couple solution. Notons $d=x\wedge y$. Alors d divise $x\wedge y$, $x\vee y$, y donc d divise 4. Il en découle que $d=1$, $d=2$ ou $d=4$. Rappelons (cf. cours) que $x\vee y=xy/d$.

- Supposons que $d=1$. Alors l'équation devient : $xy=y+3$. Puisque y divise xy, alors y divise 3 donc $y=1$ ou $y=3$. Si $y=1$, alors $xy=4$ donc $x=4$. Le couple $(4,1)$ est alors l'unique solution. Si $y=3$ alors l'équation devient $xy=6$ donc $x=2$: le couple $(2,3)$ est alors l'unique solution.
- Supposons que $d=2$. Alors l'équation devient : $2+\dfrac{xy}{2}=y+4$ c'est-à-dire : $4+xy=2y+8$ i.e. $xy=2y+4$. y divise xy et $2y$ alors $y=4$. Si $y=1$ alors l'équation devient $x=2$ ce qui n'est pas possible car $x\wedge y=2$. Si $y=2$ alors l'équation devient $2x=8$ donc $x=4$: le couple $(4,2)$ est l'unique solution. Enfin, si $y=4$ alors l'équation devient $4x=12$ donc $x=3$, ce qui n'est pas possible car $x\wedge y=2$.
- Supposons que $d=4$. L'équation devient alors $4+\dfrac{xy}{4}=y+4$ i.e. $xy=4y$: si $y=0$ alors $d=x\wedge y=x$ donc $x=4$: le couple $(4,0)$ est l'unique solution. Si $y\neq 0$ alors $x=4$ et tout y divisible par 4 (puisque $d=x\wedge y=4$) est alors solution : les solutions sont tous les couples de la forme $(4,4k)$ pour $k\in\mathbb{N}^*$ (et même $k\in\mathbb{N}$ puisque $(k,0)$ est l'unique solution si $y=0$).

Synthèse : On vérifie aisément que tous les couples trouvés ci-dessus conviennent : $(4,1)$, $(2,3)$, $(4,2)$ et tous les couples de la forme $(4,4k)$ pour $k\in\mathbb{N}$. Ce sont donc les uniques solutions de l'équation (qui admet donc une infinité de solutions).

Exercice 46 : ✪ En réduisant modulo un entier bien choisi, montrer que les équations suivantes n'ont pas de solution $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$:

- $x^2-4y^2=1791$
- $x^2+6y^2=1112$
- $x^2+y^2=1791$

Correction : À chaque fois, le raisonnement est le même : on suppose l'existence d'une solution et on en déduit une absurdité.

- Supposons qu'il existe une solution (x,y). En réduisant modulo 4 (rappelons qu'un nombre est congru à ses deux derniers chiffres modulo 4), $x^2\equiv 91\equiv 3[4]$ et ce n'est pas possible. En effet, si $x\equiv 0[4]$ ou $x\equiv 2[4]$, alors $x^2\equiv 0[4]$, et si $x\equiv 1[4]$ ou $x\equiv 3[4]$, alors $x^2\equiv 1[4]$. Il n'existe donc pas de solution.
- Supposons qu'il existe une solution (x,y). Réduisons modulo 3 (rappelons qu'un nombre est congru à la somme de ses chiffres modulo 3). Alors $x^2\equiv 5\equiv 2[3]$ ce qui n'est pas possible car (comme ci-dessus en examinant trois cas) un carré est congru à 0 ou à 1 modulo 3.
- Supposons qu'il existe une solution (x,y). En raisonnant modulo 2, il vient : $x^2+y^2\equiv 1[2]$. On en déduit que x^2 et y^2 (et donc x et y puisque x et x^2 sont de même parité, ainsi que y et y^2) sont de parités différentes : pas très utile. Raisonnons modulo 3 : on trouve que $x^2+y^2\equiv 18\equiv 0[3]$, ce qui n'est possible que si x et y sont divisibles par 3 (cf. exercice 26 mais de toute façon on le prouve très simplement en examinant les congruences de x et de y). Pas très utile non plus... Si on raisonne enfin modulo 4, alors $x^2+y^2\equiv 3[4]$ ce qui n'est pas possible pour la même raison que ci-dessus : un carré étant congru à 0 ou 1 modulo 4, une somme de deux carrés est congrue à 0, 1 ou 2 modulo 4 et donc ne peut pas être congrue à 3 modulo 4. Cette équation n'a donc pas de solution.

Exercice 47 : ✪ En raisonnant modulo 8, montrer que l'équation diophantienne $x^2-2y^2=3$ n'a pas de solution entière.

Correction : Supposons qu'il existe une solution (x,y). Suivons l'indication de l'énoncé et raisonnons modulo 8. Alors $x^2-2y^2\equiv 3[8]$. Or, un carré modulo 8 (en séparant les cas selon que $x\equiv 0[8],\dots,x\equiv 7[8]$) est congru à $0,1$ ou 4. Il en découle que la relation $x^2-2y^2\equiv 3[8]$ est impossible (par exemple, si $x^2\equiv 4[8]$ et $y^2\equiv 1[8]$ alors $x^2-2y^2\equiv 2[8]$, et idem dans tous les autres cas) : l'équation n'a pas de solution.

Exercice 48 : ✪✪ Résoudre l'équation $5x-3y+8z=1$ dans $\mathbb{Z}^3$.

Correction : Commençons par résoudre l'équation d'inconnues x et u : $5x+u=1$. Cette équation admet des solutions car $5\wedge 1=1$. Ici, $(1,-4)$ est solution évidente, inutile d'appliquer l'algorithme d'Euclide pour trouver une solution particulière. Soit $(x,u)\in\mathbb{Z}^2$. Alors :

$$\begin{aligned}(x,u)\text{ est solution} &\iff 5x+u=1\\ &\iff 5x+u=5\times 1-4\\ &\iff 5(x-1)=-u-4\end{aligned}$$

Si (x,u) est solution, alors 5 divise $-4-u$ donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $u=-4-5k$ et alors $5(x-1)=5k$ donc $x=k+1$. Réciproquement, tout couple de la forme $(k+1,-4-5k)$ est solution donc les solutions de cette équation sont exactement les couples de la forme $(k+1,-5k-4)$ où $k\in\mathbb{Z}$.

Revenons à présent à l'équation de l'énoncé. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}(x,y,z)\text{ est solution} &\iff 5x+(-3y+8z)=1\\ &\iff (x,-3y+8z)\text{ est solution de l'équation } 5x+u=1\\ &\iff \exists k\in\mathbb{Z}, x=k+1 \qquad\text{et}\qquad -3y+8z=-5k-4\end{aligned}$$

Soit $k\in\mathbb{Z}$. Résolvons l'équation (d'inconnues y et z dans $\mathbb{Z}$) $-3y+8z=-5k-4$. Cette équation admet des solutions car $3\wedge 8=1$ et donc $-5k-4$ est un multiple du PGCD de 3 et 8 (cf. cours). Le couple $(-3,-1)$ est solution évidente de l'équation $-3y+8z=1$ (mais on le trouverait facilement en faisant comme d'habitude) donc le couple $(15k+12,5k+4)$ est solution particulière de l'équation $-3y+8z=-5k-4$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}(y,z)\text{ est solution} &\iff -3y+8z=-5k-4\\ &\iff -3y+8z=-3(15k+12)+8(5k+4)\\ &\iff 3(-y+15k+12)=-8(z-5k-4)\end{aligned}$$

Supposons que (y,z) soit solution. Alors 3 divise $-8(z-5k-4)$ et 3 est premier avec -8 donc, d'après le théorème de Gauß, 3 divise $z-5k-4$ donc il existe $m\in\mathbb{Z}$ tel que $z-5k-4=3m$ si bien que $z=3m+5k+4$ et donc $3(-y+15k+12)=-8\times 3m$: on trouve alors $y=15k+12+8m$, et la réciproque est immédiate, tout couple de cette forme est bien solution. Finalement, les couples solutions de l'équation $-3y+8z=-5k-4$ sont exactement les couples $(15k+12+8m,3m+5k+4)$. En conclusion, les triplets (x,y,z) solutions de l'équation $5x-3y+8z=1$ sont les triplets $(k+1,15k+12+8m,3m+5k+4)$ où $(k,m)\in\mathbb{Z}^2$.

Exercice 49 - Triplets pythagoriciens : ✪✪ Soit $(x,y,z)\in(\mathbb{N}^*)^3$ tel que $x^2+y^2=z^2$ et on suppose que $x\wedge y=1$. On pourra dans tout l'exercice utiliser l'exercice 15.

1. (a) Montrer que $y\wedge z=1$.
   (b) Montrer que x ou y est pair. Quitte à les permuter, on suppose que y est pair.
   (c) Montrer que $y+z$ et $z-y$ sont premiers entre eux et qu'il existe a et b impairs premiers entre eux tels que $y+z=a^2$ et $z-y=b^2$.
   (d) En déduire la forme du triplet (x,y,z).
2. Donner finalement tous les triplets $(x,y,z)\in(\mathbb{N}^*)^3$ solution de l'équation $x^2+y^2=z^2$.

Remarque : Le grand théorème de Fermat affirme que l'équation $x^n+y^n=z^n$ n'a aucune solution non triviale (i.e. avec x,y et z non nuls) dès que $n\geq 3$. Il a été démontré par Andrew Wiles en 1994.

Correction :

1. (a) Soit d un diviseur (positif) commun à y et z. Alors d^2 divise y^2 et z^2 donc d^2 divise x^2 si bien que d divise x d'après l'exercice 15. Il en découle que d est un diviseur commun à x et y donc $d=1$ puisque x et y sont premiers entre eux. Il en découle que y et z sont premiers entre eux.
   (b) Si x et y sont impairs alors x^2 et y^2 sont impairs donc z^2 est pair. Il en découle que z est pair (z et z^2 sont de même parité) donc z^2 est divisible par 4 (s'il existe k tel que $z=2k$ alors $z^2=4k^2$). En d'autres termes, $z^2\equiv 0[4]$. Or, x et y sont impairs donc congrus à 1 ou 3 modulo 4 : dans les deux cas, x^2 et y^2 sont congrus à 1 modulo 4 donc $z^2=x^2+y^2\equiv 2[4]$ ce qui est absurde. On en déduit que x ou y est pair.
   (c) Soit d un diviseur (positif) commun à $y+z$ et $z-y$. Alors d^2 divise $(y+z)(z-y)=z^2-y^2=x^2$ donc d divise x. Or, y est pair et $x\wedge y=1$ donc x est impair si bien que d est impair. De plus, d divise $z+y$ et $z-y$ donc divise $z+y-(z-y)=2y$. d étant impair, d et 2 sont premiers entre eux donc d divise y d'après le théorème de

Gauß. En d'autres termes, d est un diviseur commun à x et à y donc $d = 1$ puisqu'ils sont premiers entre eux. On en déduit que $y+z$ et $z-y$ sont premiers entre eux.

Or, $(z+y)\times(z-y) = x^2$. En d'autres termes, $z+y$ et $z-y$ sont premiers entre eux et leur produit est un carré : d'après l'exercice 15, $z+y$ et $z-y$ sont eux-mêmes des carrés : il existe a et b tels que $z+y = a^2$ et $z-y = b^2$ (a et b sont premiers entre eux puisque leurs carrés le sont). Enfin, y est pair et $z \wedge y = 1$ d'après la question 1.(a) donc z est impair donc $y+z$ et $y-z$ sont impairs si bien que a^2 et b^2 sont impairs. Or, a et a^2 sont de même parité donc a est impair, et on trouve de même que b est impair.

(d) Il en découle que $y = \dfrac{a^2-b^2}{2}$ et $z = \dfrac{a^2+b^2}{2}$ et enfin $x = a^2b^2$. Finalement, il existe a et b impairs premiers entre eux tels que $a > b$ (car $y \in \mathbb{N}^*$) et tels que $x = a^2b^2, y = \dfrac{a^2-b^2}{2}$ et $z = \dfrac{a^2+b^2}{2}$. Si c'est x qui est pair, alors (x,y,z) est de la forme $\left(\dfrac{a^2-b^2}{2}, a^2b^2, \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$.

2. C'était le début de la phase d'analyse : toute solution avec x et y premiers entre eux était de la forme précédente. Supposons maintenant que (x,y,z) soit une solution (avec x et y pas forcément premiers entre eux) et notons $d = x\wedge y$. Alors $x' = x/d$ et $y' = y/d$ sont premiers entre eux. Enfin, (x,y,z) étant solution :

$$x'^2d^2 + y'^2d^2 = z^2$$

c'est-à-dire que d^2 divise z^2 donc d divise z (toujours d'après l'exercice 15) et donc, en posant $z = dz'$, on obtient que (x',y',z') est solution de l'équation avec x' et y' premiers entre eux donc est de la forme ci-dessus. Il en découle que (x,y,z) est de la forme

$$d\left(\frac{a^2-b^2}{2}, a^2b^2, \frac{a^2+b^2}{2}\right) \qquad \text{ou} \qquad d\left(a^2b^2, \frac{a^2-b^2}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$$

avec a et b impairs premiers entre eux tels que $a > b$. Synthèse : soient a et b impairs premiers entre eux tels que $a > b$ et $d \geq 1$. On prouve aisément que

$$d\left(\frac{a^2-b^2}{2}, a^2b^2, \frac{a^2+b^2}{2}\right) \qquad \text{ou} \qquad d\left(a^2b^2, \frac{a^2-b^2}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$$

est solution de l'équation. Les triplets pythagoriciens sont donc tous les triplets de cette forme.

Exercice 50 : ✪✪ Montrer, en raisonnant modulo 3, que l'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$ n'a pas de solution entière.

Correction : Supposons qu'il existe une solution (x,y,z). En raisonnant modulo 3, il vient : $x^2+y^2 \equiv 0[3]$ et on a déjà vu plusieurs fois que ceci n'est possible que si x et y sont divisibles par 3. Dès lors, x et y sont divisibles par 3 si bien que x^2 et y^2 sont divisibles par 9 (s'il existe k tel que $x = 3k$ alors $x^2 = 9k^2$). Dès lors, $3z^2$ est divisible par 9 donc z^2 est divisible par 3 (car s'il existe k tel que $3z^2 = 9k$ alors $z^2 = 3k$) ce qui n'est possible que si z est divisible par 3. Il suffit de « rendre (x,y,z) premiers entre eux » pour aboutir à une contradiction. Plus précisément, notons d le PGCD de x, y et z. Dès lors, $(x/d, y/d, z/d)$ sont premiers entre eux **dans leur ensemble** (cf. cours) et le triplet $(x/d, y/d, z/d)$ est encore solution de l'équation (il suffit de l'écrire), ce qui n'est pas possible car le raisonnement précédent prouve alors que $x/d, y/d$ et z/d sont divisibles par 3 alors qu'ils sont premiers entre eux dans leur ensemble : absurde. L'équation n'a donc pas de solution.

Exercice 51 : ✪✪✪ Le but de l'exercice est de montrer que l'équation diophantienne $y^2 = x^3 + 7$ n'a pas de solution.

1. Montrer que cette équation n'a pas de solution si x est pair.
2. On suppose par l'absurde que cette équation admet une solution (x,y) avec x impair qu'on écrit sous la forme $x = 2k+1$.
   (a) Montrer que tout facteur premier de y^2+1 est congru à 1 modulo 4.
   (b) En remarquant que $y^2 + 1 = x^3 + 8 = (x+2)\times(x^2-2x+4)$, aboutir à une absurdité.

Correction :

1. Supposons qu'il existe une solution (x,y) avec x pair. x est divisible par 2 donc x^3 est divisible par 8 donc $y^2 \equiv 7[8]$. Or, on a déjà vu plusieurs fois qu'un carré est congru à 0, 1 ou 4 modulo 8 (différencier les cas selon la congruence de y modulo 8) : c'est donc absurde. Il n'y a pas de couple (x,y) solution avec x pair.
2. (a) Supposons qu'il existe p un facteur premier de y^2+1 congru à 3 modulo 4 (y^2+1 est impair donc n'est pas divisible par 2 : ses seuls facteurs premiers sont donc congrus à 1 ou 3 modulo 4). Puisque y^2+1 et y^2 sont consécutifs, ils sont premiers entre eux donc p est premier avec y^2 donc avec p. Il en découle que $y^{p-1} \equiv 1[p]$ d'après le théorème de Fermat. Or, p est congru à 3 modulo 4 donc il existe k tel que $p = 4k+3$ si bien que $y^{4k+2} \equiv 1[p]$. Or, p divise y^2+1 donc $y^2 \equiv -1[p]$ et $y^4 \equiv 1[p]$ si bien que $y^{4k+2} \equiv -1[p]$ ce qui est absurde.

(b) Soit p un facteur premier de x^2-2x+4. Alors p divise $x^3+8=y^2+1$ donc est congru à 1 modulo 4. Or :

$$\begin{aligned} x^2-2x+4 &= (2k+1)^2-2(2k+1)+4 \\ &= 4k^2+4k+1-4k-2+4 \\ &= 4k^2+3 \\ &\equiv 3[4] \end{aligned}$$

ce qui est absurde car tous les facteurs premiers de x^2-2x+4 sont congrus à 1 modulo 4 et un produit d'entiers congrus à 1 modulo 4 est congru à 1 modulo 4.

6.6 PPCM et PGCD

Exercice 52 : ✪ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\dfrac{31n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Correction : Oups, erreur de ma part... L'exercice aurait dû être $21n+4$ au lieu de $31n+4$ ce qui le rend trivial (exo), alors que l'exercice avec $31n$ est plus difficile et mérite peut-être une deuxième étoile... M'enfin, allons-y, résolvons-le. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit d un diviseur commun (positif) à $31n+4$ et $14n+3$. Alors d divise $14\times(31n+4)-31\times(14n+3)=-37$ donc $d=1$ ou $d=37$.

Si $d=37$ alors $14n \equiv -3[37]$. On cherche à « inverser » 14, c'est-à-dire à trouver u tel que $14u\equiv 1[37]$ donc on cherche (u,v) tel que $14u+37v=1$. On trouve de même que d'habitude que 8 et -3 sont solutions de $14u+37v=1$ (on cherche uniquement une solution particulière) c'est-à-dire que $14\times 8-3\times 37=1$. En particulier, $14\times 8\equiv 1[37]$. En multipliant la première congruence ci-dessus par 8, il vient : $n\equiv -24\equiv 13[37]$.

On trouve de même que $12\times 34-11\times 17=1$ donc $12\times 34\equiv 1[37]$. De plus, toujours si $d=37$, alors $34n\equiv -4[37]$ donc, en multipliant par 12, $n\equiv -48\equiv -11\equiv 26[37]$ ce qui contredit le point précédent. Il en découle que $d=1$ donc que $31n+4$ et $14n+3$ sont premiers entre eux : la fraction est irréductible.

Exercice 53 : ✪ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner le PGCD de $n!+1$ et de $(n+1)!+1$.

Correction : Soit d un diviseur positif de $n!+1$ et de $(n+1)!+1$. Alors d divise leur différence $(n+1)!-n! = n!\times(n+1-1)=n!\times n$. Or, deux entiers consécutifs sont premiers entre eux donc $n!+1$ est premier avec $n!$ donc d est premier avec $n!$. D'après le théorème de Gauß, d divise n donc d divise $n!$ mais d et $n!$ sont premiers entre eux si bien que le seul diviseur commun de d et $n!$ est 1 donc $d=1$: le PGCD recherché vaut donc 1.

Exercice 54 : ✪ Déterminer les entiers $n\in\mathbb{N}$ tels que $n+3$ divise $2n^2-n-6$.

Correction : Soit $n\in\mathbb{N}$. Puisque $2n^2-n-6=(2n-7)(n+3)+15$, alors $n+3$ divise $2n^2-n-6$ si et seulement si $n+3$ divise 15 si et seulement si $n+3=1,3,5$ ou 15 si et seulement si $n=-2$ (exclu car $n\geq 0$), $n=0$, $n=2$ ou $n=13$. Les seules solution sont donc $0,2$ et 13.

Exercice 55 : ✪ Déterminer tous les entiers $n\in\mathbb{N}^*$ tels que $28\vee n=140$.

Correction : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On sait que le PGCD de deux entiers a et b est le produit des facteurs premiers de a et de b à la puissance la plus grande des deux. Or, $28=2^2\times 7$ et $140=2^2\times 5\times 7$. Par conséquent, n convient si et seulement si n s'écrit sous la forme $n=2^a\times 5^b\times 7^c$ avec $a\leq 2$, $b=1$ et $c\leq 1$ (il n'y a pas d'autre facteur premier, la puissance de 2 et de 7 est inférieure à celle de 140 et celle de 5 est forcément égale à celle de 140 car 5 n'apparaît pas dans la décomposition de 28). Les entiers qui conviennent sont donc $2^05^17^0=5$, $2^15^17^0=10$, $2^25^17^0=20$, $2^05^17^1=35$, $2^15^17^1=70$ et $2^25^17^1=140$.

Exercice 56 : ✪

1. Déterminer tous les entiers naturels non nuls n tels que les divisions euclidiennes de 4373 et 826 par n donnent pour restes 8 et 9.
2. **Remake :** Déterminer tous les entiers naturels non nuls n tels que les divisions euclidiennes de 6381 et 3954 par n donnent pour restes 9 et 6.

Correction :

1. Erreur d'énoncé : il fallait bien sûr lire n et non pas m. Soit $n\geq 1$. Tout d'abord, les restes de la division euclidienne de 4373 et de 826 par n étant strictement inférieur à n, on en déduit que 8 et 9 sont strictement inférieurs à n donc

$9 < n$ c'est-à-dire que $n \geq 10$. n convient si et seulement si $4373 \equiv 8[n]$ et $826 \equiv 9[n]$ si et seulement si n divise 4365 et 815 si et seulement si n divise $4365 \wedge 815$ (un entier divise deux nombres si et seulement s'il divise leur PGCD, cf. cours). Or, on trouve avec l'algorithme d'Euclide que ce PGCD vaut 5, et puisque n est forcément supérieur ou égal à 10, il n'y a pas de solution.

2. De même, un entier n convient si et seulement s'il est supérieur ou égal à 10 et divise le PGCD de $6381 - 9 = 6372$ et $3954 - 6 = 3948$. L'algorithme d'Euclide nous dit que ce PGCD vaut 12 donc $n = 12$ car c'est le seul diviseur de 12 supérieur ou égal à 10.

Exercice 57 : ✪

1. Donner $9100 \wedge 1848$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner $n^3 + 2n \wedge n^4 + 3n^2 + 1$.

1. Appliquons l'algorithme d'Euclide.

$$\begin{array}{r|l} 9100 & 1848 \\ \cline{2-2} -\ \ 7392 & \ 4 \\ \hline 1708 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1848 & 1708 \\ \cline{2-2} -\ \ 1708 & \ 1 \\ \hline 140 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1708 & 140 \\ \cline{2-2} -\ \ 1680 & 12 \\ \hline 28 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 140 & 28 \\ \cline{2-2} -\ \ 140 & 5 \\ \hline 0 & \end{array}$$

c'est-à-dire que $9100 \wedge 1848 = 28$.

2. Idem. Ce n'est pas forcément facile en général car le résultat dépend de n, mais ici il est immédiat que le reste de la division est bien le reste à chaque fois, c'est-à-dire qu'il est inférieur strict au diviseur (sauf dans le cas $n = 0$, mais alors on cherche le PGCD de 0 et 1 qui vaut encore 1).

$$\begin{array}{r|l} n^4 + 3n^2 + 1 & n^3 + 2n \\ \cline{2-2} -\quad (n^4 + 2n^2) & \quad n \\ \hline n^2 + 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} n^3 + 2n & n^2 + 1 \\ \cline{2-2} -\ (n^3 + n) & \quad n \\ \hline n & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} n^2 + 1 & n \\ \cline{2-2} -\qquad n & n \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} n & 1 \\ \cline{2-2} -\ n & n \\ \hline 0 & \end{array}$$

c'est-à-dire que le PGCD recherché vaut 1.

Exercice 58 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(2n + 4) \wedge (3n + 3) \in \{1; 2; 3; 6\}$.

Correction : Soit d un diviseur (positif) de $2n + 4$ et de $3n + 3$. Alors d divise $3(2n + 4) - 2(3n + 3) = 6$ ce qui permet de conclure.

Exercice 59 : ✪ Déterminer les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $a \wedge b = 42$ et $a \vee b = 1680$.

Correction : $42 = 2 \times 3 \times 7$ et $1680 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7$. Or, le PGCD de deux entiers est égal au produit de leurs facteurs premiers communs, à la puissance la plus petite des deux, et leur PPCM est égal au produit des facteurs premiers apparaissant au moins une fois, à la puissance la plus grande des deux. Par conséquent, parmi a et b, l'un des deux contient 2 et l'autre 2^4 (dans leur décomposition en produit de facteurs premiers), les deux contiennent 3 et 7, et l'un des deux contient 5 et pas l'autre. Par conséquent, on doit avoir 3×7 dans les deux, et il faut distribuer 2 et 2^4, et mettre 5 dans l'un des deux : les seules possibilités sont donc d'avoir $2 \times 3 \times 7$ et $2^4 \times 3 \times 5 \times 7$ ou $2 \times 3 \times 5 \times 7$ et $2^4 \times 3 \times 7$, c'est-à-dire que les seules solutions sont 42 et 1680 ou 336 et 210. Les seuls couples solutions sont donc $(42, 1680), (1680, 42), (210, 336)$ et $(336, 210)$.

Exercice 60 : ✪ Soit $(a, m, n) \in (\mathbb{N}^*)^3$ avec $a \geq 2$. Montrer que $(a^n - 1) \wedge (a^m - 1) = a^{n \wedge m} - 1$. On pourra remarquer que si q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par m, alors $a^n - 1 = a^r \times (a^{qm} - 1) + a^r - 1$.

Correction : Puisque $r < m$ et $a \geq 2$, alors $a^r - 1 < a^m - 1$ ($a^r = er \ln(a) < e^{m \ln(a)}$ puisque $\ln(a) > 0$). De l'écriture

$$a^n - 1 = a^r \times (a^{qm} - 1) + a^r - 1$$

on déduit que le reste dans la division euclidienne de $a^n - 1$ par $a^m - 1$ vaut $a^r - 1$. On itère ensuite le procédé : si on note $(r_1, \dots, r_k, 0)$ les restes successifs dans l'algorithme d'Euclide donnant $n \wedge m$ (et donc $r_k = n \wedge m$), les restes successifs dans l'algorithme d'Euclide donnant $(a^n - 1) \wedge (a^m - 1)$ sont $\left(a^{r_0} - 1, \dots, a^{r_k} - 1, a^0 - 1 = 0\right)$ si bien que $(a^n - 1) \wedge (a^m - 1)$, le dernier reste non nul, est égal à $a^{r_k} - 1 = a^{n \wedge m} - 1$.

Exercice 61 : ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe a_n et b_n appartenant à $\mathbb{N}$ tels que $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Correction : On pourrait donner a_n et b_n explicitement en raisonnant comme dans l'exercice 42 du chapitre 4, mais ici on va plutôt prouver leur existence par récurrence, ce qui permettra plus facilement de traiter la deuxième partie de l'exercice.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n : « il existe a_n et b_n entiers naturels premiers entre eux tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ ».
- Si on pose $a_1 = b_1 = 1$ alors, d'une part, on a bien $(1+\sqrt{2})^1 = a_1 + b_1\sqrt{2}$, et d'autre part, a_1 et b_1 sont premiers entre eux : H_1 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, il existe a_n et b_n entiers naturels premiers entre eux tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Dès lors :

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{n+1} &= (1+\sqrt{2})^n \times (1+\sqrt{2}) \\ &= (a_n + b_n\sqrt{2}) \times (1+\sqrt{2}) \\ &= (a_n + 2b_n) + \sqrt{2}(b_n + a_n)\end{aligned}$$

  c'est-à-dire qu'en posant $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$, on a bien $(1+\sqrt{2})^{n+1} = a_{n+1} + \sqrt{2}b_{n+1}$. Prouvons à présent que a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux. Soit d un diviseur (positif) commun à a_{n+1} et b_{n+1}. Alors d divise $a_{n+1} - b_{n+1} = b_n$ si bien que d divise $b_{n+1} - b_n = a_n$ donc d est un diviseur commun à a_n et b_n donc $d = 1$ car, par hypothèse de récurrence, a_n et b_n sont premiers entre eux. En d'autres termes, H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 62 : ✪✪ Soient M et m deux entiers naturels non nuls. Donner une CNS sur M et m pour qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $ab = M$ et $a \vee b = m$.

Correction : Analyse : Supposons que M et m conviennent, c'est-à-dire qu'il existe un couple (a,b) tel que $ab = M$ et $a \vee b = m$. On sait que $ab = (a \vee b) \times (a \wedge b)$ donc $M = m \times (a \wedge b)$, c'est-à-dire que m divise M. De plus, $a \wedge b$ divise $a \vee b$ donc M/m divise m.

Synthèse : Montrons que ces conditions suffisent. Supposons donc que m divise M et que M/m divise m. Posons alors $a = M/m$ et $b = m$. Alors $ab = M$ et a divise b par hypothèse donc $a \vee b = b = m$.

En conclusion, il existe a et b tels que $ab = M$ et $a \vee b = m$ si et seulement si m divise M et M/m divise m. Par exemple, il n'existe pas d'entiers a et b tels que $ab = 24$ et $a \vee b = 6$ puisque $24/6 = 4$ ne divise pas 6, mais il existe a et b tels que $ab = 24$ et $a \vee b = 12$ puisque 12 divise 24 et $24/12 = 2$ divise 12 : $a = 2$ et $b = 12$ conviennent.

Exercice 63 : ✪✪ Soient a et b supérieurs ou égaux à 2.

1. On suppose que a et b sont premiers entre eux. Déterminer le PGCD de $a+b$ et de ab.
2. Dans le cas général, quel est le PGCD de $a+b$ et de $a \vee b$?

Correction :

1. Soit d un diviseur (positif) commun à $a+b$ et à ab. Si $d \neq 1$ alors d admet un facteur premier p, qui divise donc $a+b$ et ab. Puisqu'il divise ab, alors il apparaît dans sa décomposition en produit de facteurs premiers, donc apparaît dans celle de a ou celle de b (pas de génération spontanée des facteurs premiers) donc divise a ou b. Sans perte de généralité, supposons que p divise a. Mais alors p divise $a+b-a = b$ ce qui est absurde puisque a et b sont premiers entre eux. Il en découle que $d = 1$ c'est-à-dire que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.
2. Notons $D = (a+b) \wedge (a \vee b)$ et $d = a \wedge b$ si bien que $a' = a/d$ et $b' = b/d$ sont premiers entre eux (cf. cours). D'après ce qui précède, $a' + b'$ et $a'b'$ sont premiers entre eux, c'est-à-dire que

$$\frac{a+b}{d} \qquad \text{et} \qquad \frac{ab}{d^2} = \frac{a \vee b}{d}$$

   sont premiers entre eux. Or, d divise D donc D/d divise $\dfrac{a+b}{d}$ et $\dfrac{a \vee b}{d}$ donc $D/d = 1$ si bien que $D = d$. En conclusion, le PGCD de $a+b$ et de $a \vee b$ est $a \wedge b$.

Exercice 64 - Suite de Fibonacci : ✪✪ On note encore $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+1} \times F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n$. En déduire que deux termes successifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.
2. Montrer que pour tout $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$.
3. En déduire que pour tout $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, F_{n+m} \wedge F_m = F_n \wedge F_m$ puis que $F_n \wedge F_m = F_{n\wedge m}$.

Correction :

1. cf. DM nº 1 pour la première égalité. Soit $n \geq 1$ et soit d un diviseur positif commun à F_n et F_{n-1}. Alors d divise $F_{n+1} \times F_{n-1}$ et ${F_n}^2$ donc divise leur différence donc divise $(-1)^n$ si bien que $d = 1$: F_n et F_{n-1} sont premiers entre eux.
2. Raisonnons par récurrence sur n.
   - Si $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n : « $\forall m \in \mathbb{N}^*, F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$ ».
   - Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $F_1 = 1$ et $F_2 = 1$ donc $F_{1+1}F_m + F_1F_{m-1} = F_m + F_{m-1} = F_{m+1}$: H_1 est vraie. De plus, $F_3 = 2$ donc, d'après la définition de la suite de Fibonacci :
   $$\begin{aligned} F_{2+m} &= F_{m+1} + F_m \\ &= F_m + F_{m-1} + F_m \\ &= 2F_m + F_{m-1} \\ &= F_3F_m + F_2F_{m-1} \end{aligned}$$
   c'est-à-dire que H_2 est vraie.
   - Soit $n \geq 2$. Supposons H_n et H_{n-1} vraies et prouvons que H_{n+1} est vraie (récurrence double). Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la suite de Fibonacci :
   $$F_{n+1+m} = F_{n+m} + F_{n-1+m}$$
   Par hypothèse de récurrence (aux rangs n et $n-1$) :
   $$\begin{aligned} F_{n+1+m} &= F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1} + F_nF_m + F_{n-1}F_{m-1} \\ &= (F_{n+1} + F_n)F_m + (F_n + F_{n-1})F_{m-1} \\ &= F_{n+2}F_m + F_{n+1}F_{m-1} \end{aligned}$$
   c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soient n et m deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Soit d un diviseur commun à F_{n+m} et à F_m. D'après la question précédente, d divise F_nF_{m-1}. De plus, F_m et F_{m-1} sont premiers entre eux d'après la question 1 donc d et F_{m-1} sont premiers entre eux : d'après le théorème de Gauß, d divise F_n. Réciproquement, si d est un diviseur commun à F_n et F_m, alors d divise F_{n+m}. Il en découle que F_n et F_m, et F_{n+m} et F_m ont les mêmes diviseurs communs donc le même PGCD : $F_{n+m} \wedge F_m = F_n \wedge F_m$. En d'autres termes : on peut retirer un des deux entiers à l'autre et on garde le même PGCD. Par conséquent, si on note $n = q_1m + r_1$ la division euclidienne de m par n, il vient, en retirant m plusieurs fois (q_1 fois exactement), $F_n \wedge F_m = F_{r_1} \wedge F_m$. Ensuite on recommence : on peut retirer un entier à un autre sans changer le PGCD, donc $F_n \wedge F_m = F_{r_1} \wedge F_{m-r_1}$, et ainsi de suite, on retire plusieurs fois r à m jusqu'à avoir $F_n \wedge F_m = F_{r_1} \wedge F_{r_2}$ où r_2 est le reste de la division euclidienne de m par r_1, puis on itère le procédé : à chaque étape, on remplace le plus grand par le reste de sa division euclidienne par le plus petit. Si on note $(r_1, \dots, r_k, 0)$ les restes successifs dans l'algorithme d'Euclide donnant $n \wedge m$, on trouve que $F_n \wedge F_m = F_{r_k} \wedge F_0$, mais $F_0 = 1$ si bien que $F_{r_k} \wedge F_0 = F_{r_k}$. Mais r_k est le dernier reste non nul donc est égal à $n \wedge m$ ce qui permet de conclure.

Exercice 65 : ✪✪✪ On dit qu'une partie non vide E de $\mathbb{N}^*$ est sympathique si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \frac{x+y}{x \wedge y} \in E$$

1. Montrer que toute partie sympathique contient 2 et que $\{2\}$ est une partie sympathique.
2. Déterminer toutes les parties sympathiques qui contiennent 1.
3. Soit E une partie sympathique non réduite à $\{2\}$ et ne contenant pas 1.
   (a) Montrer que le plus petit élément de $E \backslash \{2\}$ est impair.
   (b) Montrer que $E = \mathbb{N} \backslash \{0; 1\}$.

Correction :

1. Soit E une partie sympathique. Alors E est non vide. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{x+x}{x \wedge x} &= \frac{2x}{x} \\ &= 2 \in E \end{aligned}$$

$\{2\}$ est évidemment sympathique car, pour tous x et y appartenant à $\{2\}$, $x = y = 2$ donc $\dfrac{x+y}{x \wedge y} = \dfrac{4}{2} = 2 \in \{2\}$.

2. **Analyse :** Supposons que E soit une partie sympathique qui contient 1. On sait que $2 \in E$ d'après la question précédente. Alors

$$\frac{1+2}{1 \wedge 2} = 3 \in E$$

De même :

$$\frac{1+3}{1 \wedge 3} = 4 \in E$$

si bien que

$$\frac{1+4}{1 \wedge 4} = 5 \in E$$

Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \in E$: $E = \mathbb{N}^*$.

Synthèse : Montrons que $\mathbb{N}^*$ est sympathique. Soit $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Alors $x \wedge y$ divise x et y donc $x + y$ si bien que $\dfrac{x+y}{x \wedge y}$ est un entier, et il est strictement positif car quotient de réels strictement positifs. En d'autres termes, $\dfrac{x+y}{x \wedge y} \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{N}^*$ est sympathique.

En conclusion, la seule partie sympathique qui contient 1 est $\mathbb{N}^*$ tout entier.

3. (a) Tout d'abord, ce plus petit élément existe car une partie non vide de $\mathbb{N}$ et donc de $\mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément. Notons-le n_0. Supposons n_0 pair alors $n_0 \wedge 2 = 2$ et E est sympathique (donc contient 2) si bien que

$$\frac{n_0+2}{n_0 \wedge 2} = \frac{n_0+2}{2} \in E$$

Il en découle que $\dfrac{n_0+2}{2} = \dfrac{n_0}{2} + 1 = 2$ ou $\dfrac{n_0}{2} + 1 \geq n_0$ (car n_0 est le plus petit élément de $E \backslash \{2\}$). Dans le premier cas, $n_0 = 2$ ce qui est exclu. Dans le second cas, $n_0 \leq 2$ ce qui est aussi exclu. Dans tous les cas, c'est absurde : n_0 est impair.

(b) Puisque n_0 est impair, alors $n_0 \wedge 2 = 1$ si bien que

$$\frac{n_0+2}{n_0 \wedge 2} = n_0 + 2 \in E$$

De même, $n_0 + 2$ est impair donc $(n_0 + 2) \wedge 2 = 1$ donc, de même, $n_0 + 4 \in E$. Par une récurrence immédiate, $n_0 + 2k \in E$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En d'autres termes, tous les entiers impairs à partir de n_0 sont dans E.

Un diviseur commun à n_0 et à $n_0 + 2$ (qui sont tous les deux dans E) divise 2 donc vaut 1 ou 2. Or, ces deux nombres sont impairs donc un diviseur commun à ces deux nombres est forcément égal à 1. En d'autres termes, $n_0 \wedge (n_0 + 2) = 1$ et, plus généralement, deux nombres **impairs** consécutifs (donc distants de 2) sont premiers entre eux. Il en découle que

$$\frac{n_0 + n_0 + 2}{n_0 \wedge (n_0 + 2)} = 2n_0 + 2 \in E$$

De même, n_0 et $n_0 + 4$ sont premiers entre eux ce qui implique que $2n_0 + 4 \in E$. De même, $n_0 + 2$ et $n_0 + 4$ sont premiers entre eux donc $2n_0 + 6 \in E$. Plus généralement (pas besoin de récurrence !), soit $k \geq 2$. Si k est pair alors $n_0 + k - 2$ et $n_0 + k + 2$ appartiennent à E d'après ce qui précède et sont premiers entre eux (ils sont impairs distants de 4) donc leur somme $2n_0 + 2k \in E$, et si k est impair alors en écrivant $2n_0 + 2k = n_0 + k - 1 + n_0 + k + 1$, on obtient le même résultat. Il en découle que tous les entiers pairs à partir de $2n_0 + 2$ sont dans E donc tous les entiers à partir de $2n_0 + 1$ sont dans E (puisqu'on sait que tous les nombres impairs à partir de n_0 sont dans E).

Finalement, $n_0 + 2$ et $2n_0 + 4 = 2(n_0 + 2)$ appartiennent à E et leur PGCD vaut $n_0 + 2$ donc

$$\frac{n_0+2+2n_0+4}{(n_0+2)\wedge(2n_0+4)} = \frac{3n_0+6}{n_0+2} = 3 \in E$$

et puisque $2 < n_0 \leq 3$ (n_0 est le plus petit élément de E strictement supérieur à 2), il en découle que $n_0 = 3$. D'après ce qui précède, tous les nombres impairs à partir de 3 appartiennent à E et tous les nombres pairs à partir de $2n_0+2 = 8$ appartiennent à E. Pour conclure, il suffit donc de prouver que 4 et 6 sont dans E. Il suffit de voir que 3 et 9 appartiennent à E donc

$$\frac{3+9}{3\wedge 9} = \frac{12}{3} = 4 \in E$$

puis que 2 et 10 appartiennent à E donc

$$\frac{2+10}{2\wedge 10} = \frac{12}{2} = 6 \in E$$

ce qui permet de conclure.

6.7 Valuation p-adique

Exercice 66 : ✪ Déterminer le nombre et la somme des diviseurs positifs de 5544.

Correction : La décomposition de 5544 en produit de facteurs premiers est $5544 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11$. Il en découle que 5544 a $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ diviseurs positifs qui sont :

- $2^0 \times 3^0 \times 7^0 \times 11^0 = 1$.
- $2^1 \times 3^0 \times 7^0 \times 11^0 = 2$.
- $2^2 \times 3^0 \times 7^0 \times 11^0 = 4$.
- $2^3 \times 3^0 \times 7^0 \times 11^0 = 8$.
- $2^0 \times 3^1 \times 7^0 \times 11^0 = 3$.
- $2^1 \times 3^1 \times 7^0 \times 11^0 = 6$.
- $2^2 \times 3^1 \times 7^0 \times 11^0 = 12$.
- $2^3 \times 3^1 \times 7^0 \times 11^0 = 24$.
- $2^0 \times 3^2 \times 7^0 \times 11^0 = 9$.
- $2^1 \times 3^2 \times 7^0 \times 11^0 = 18$.
- $2^2 \times 3^2 \times 7^0 \times 11^0 = 36$.
- $2^3 \times 3^2 \times 7^0 \times 11^0 = 72$.
- $2^0 \times 3^0 \times 7^1 \times 11^0 = 7$.
- $2^1 \times 3^0 \times 7^1 \times 11^0 = 14$.
- $2^2 \times 3^0 \times 7^1 \times 11^0 = 28$.
- $2^3 \times 3^0 \times 7^1 \times 11^0 = 56$.
- $2^0 \times 3^1 \times 7^1 \times 11^0 = 21$.
- $2^1 \times 3^1 \times 7^1 \times 11^0 = 42$.
- $2^2 \times 3^1 \times 7^1 \times 11^0 = 84$.
- $2^3 \times 3^1 \times 7^1 \times 11^0 = 168$.
- $2^0 \times 3^2 \times 7^1 \times 11^0 = 63$.
- $2^1 \times 3^2 \times 7^1 \times 11^0 = 126$.
- $2^2 \times 3^2 \times 7^1 \times 11^0 = 252$.
- $2^3 \times 3^2 \times 7^1 \times 11^0 = 504$.
- $2^0 \times 3^0 \times 7^0 \times 11^1 = 11$.
- $2^1 \times 3^0 \times 7^0 \times 11^1 = 22$.
- $2^2 \times 3^0 \times 7^0 \times 11^1 = 44$.
- $2^3 \times 3^0 \times 7^0 \times 11^1 = 88$.
- $2^0 \times 3^1 \times 7^0 \times 11^1 = 33$.
- $2^1 \times 3^1 \times 7^0 \times 11^1 = 66$.
- $2^2 \times 3^1 \times 7^0 \times 11^1 = 132$.
- $2^3 \times 3^1 \times 7^0 \times 11^1 = 264$.
- $2^0 \times 3^2 \times 7^0 \times 11^1 = 99$.
- $2^1 \times 3^2 \times 7^0 \times 11^1 = 198$.
- $2^2 \times 3^2 \times 7^0 \times 11^1 = 396$.
- $2^3 \times 3^2 \times 7^0 \times 11^1 = 792$.
- $2^0 \times 3^0 \times 7^1 \times 11^1 = 77$.
- $2^1 \times 3^0 \times 7^1 \times 11^1 = 154$.
- $2^2 \times 3^0 \times 7^1 \times 11^1 = 308$.
- $2^3 \times 3^0 \times 7^1 \times 11^1 = 616$.
- $2^0 \times 3^1 \times 7^1 \times 11^1 = 231$.
- $2^1 \times 3^1 \times 7^1 \times 11^1 = 462$.
- $2^2 \times 3^1 \times 7^1 \times 11^1 = 924$.
- $2^3 \times 3^1 \times 7^1 \times 11^1 = 1848$.
- $2^0 \times 3^2 \times 7^1 \times 11^1 = 693$.
- $2^1 \times 3^2 \times 7^1 \times 11^1 = 1386$.
- $2^2 \times 3^2 \times 7^1 \times 11^1 = 2772$.
- $2^3 \times 3^2 \times 7^1 \times 11^1 = 5544$.

La somme de tous ces diviseurs vaut 18720 (bon OK là une calculatrice peut être utile).

Exercice 67 : ✪

1. Donner le nombre de diviseurs de 36000000000.
2. Quel est le plus petit entier admettant exactement 15 diviseurs ?

Correction :

1. La décomposition en produit de facteurs premiers de $36000000000 = 36 \times 10^9$ est $2^{11} \times 3^2 \times 5^9$. Il en découle que ce nombre admet $12 \times 3 \times 10 = 360$ diviseurs (tous les nombres de la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$ avec $a \in [\![0\,;\,11]\!]$, $b \in [\![0\,;\,3]\!]$ et $c \in [\![0\,;\,10]\!]$.
2. Le nombre de diviseurs (positifs) d'un entier est le produit de ses valuations p-adiques augmentées de 1. Puisque $15 = 3 \times 5$, la seule façon pour un nombre premier d'avoir 15 diviseurs est de s'écrire sous la forme ${p_1}^4 \times {p_2}^2$ avec p_1 et p_2 premiers distincts, ou de s'écrire sous la forme ${p_1}^{14}$ avec p_1 un nombre premier. Dans le premier cas, le plus petit entier possible est obtenu en prenant $p_1 = 2$ et $p_2 = 4$ (les plus petits nombres premiers) ce qui donne $3^2 \times 2^4 = 144$, et dans le deuxième cas le plus petit entier possible est $2^{14} > 144$ donc 144 est le plus petit entier admettant exactement 15 diviseurs (positifs).

Exercice 68 : ✪ Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Quel est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que b divise an ?

Correction : b divise an si et seulement si $v_p(an) = v_p(a) + v_p(n) \geq v_p(b)$ pour tout p premier. En d'autres termes, n convient si et seulement si $v_p(n) \geq v_p(b) - v_p(a)$ pour tout p premier. Il suffit de prendre

$$n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max(0, v_p(b) - v_p(a))}$$

car on veut un entier naturel donc avec uniquement des valuations p-adiques positives. Il convient car tout entier qui convient a une valuation p-adique plus grande, pour tout p, donc est supérieur ou égal.

Exercice 69 : ✪ En utilisant la formule de Legendre, montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{(2n)!(2m)!}{n!m!(n+m)!}$ est un entier.

Correction : Rappelons que la formule de Legendre (HP) est : pour tout p premier,

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Soit p un nombre premier, et soient m et n des entiers naturels. Notons A le nombre de l'énoncé. Pour prouver que A est entier, il suffit de prouver que $n!m!(n+m)!$ divise $(2n)!(2m)!$. Pour cela, il suffit de prouver que, pour tout p premier, $v_p(n!m!(n+m)!) \leq v_p((2n)!(2m)!)$. Or,

$$v_p(n!m!(n+m)!) = v_p(n!) + v_p(m!) + v_p((n+m)!) \qquad \text{et} \qquad v_p((2n)!(2m)!) = v_p((2n)!) + v_p((2m)!)$$

D'après la formule de Legendre :

$$v_p(n!m!(n+m)!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+n}{p^k} \right\rfloor \right) \qquad \text{et} \qquad v_p((2n)!(2m)!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2m}{p^k} \right\rfloor \right)$$

Il suffit donc de prouver que, pour tout $k \geq 1$:

$$\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+n}{p^k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2m}{p^k} \right\rfloor$$

Il suffit donc de prouver que, pour tous x et y positifs, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$, ce qui se fait de façon immédiate en distinguant les cas, selon si la partie décimale (qui est la même chose que la partie fractionnaire puisqu'on a des réels positifs) de x et de y est supérieure ou égale à 0.5 ou non. Plus précisément, notons $x = \lfloor x \rfloor + r_x$ avec $r_x \in [\,0\,;1\,[$ ($r_x = \{x\}$, la valeur de la partie fractionnaire de x, cf. chapitre 2) et $y = \lfloor y \rfloor + r_y$. Supposons (raisonnement analogue dans tous les autres cas) que $r_x < 1/2 \leq r_y$. Alors $2x = 2\lfloor x \rfloor + 2r_x$ et $2r_x \in [\,0\,;1\,[$ donc $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$ et $2y = 2\lfloor y \rfloor + 2r_y$ avec $2r_y \in [\,1\,;2\,[$ donc $\lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor y \rfloor + 1$ si bien que

$$\lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + 1$$

Or, $x + y = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + (r_x + r_y)$. Soit $r_x + r_y < 1$ (par exemple si $r_x = 0.1$ et $r_y = 0.8$) et alors $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, soit $r_x + r_y \in [\,1\,;2\,[$ (par exemple si $r_x = 0.3$ et $r_y = 0.8$) et alors $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. Dans tous les cas, on a l"inégalité voulue :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 70 : ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v_2\left(5^{2^n} - 1\right) = n + 2$.

Correction : Erreur d'énoncé : il fallait lire $n+2$ et pas 2^{n+2}. Raisonnons par récurrence.

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $v_2\left(5^{2^n} - 1\right) = n + 2$ ».
- $5^{2^0} - 1 = 5^1 - 1 = 4$ donc $v_2\left(5^{2^n} - 1\right) = 2 = 0 + 2$ donc H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, il existe m impair tel que $5^{2^n} - 1 = 2^{n+2} \times m$ donc $5^{2^n} = 2^{n+2} \times m + 1$. En mettant au carré :

$$\left(5^{2^n}\right)^2 = \left(2^{n+2} \times m + 1\right)^2$$

donc

$$5^{2^n \times 2} = \left(2^{n+2} \times m\right)^2 + 2 \times 2^{n+2} \times m + 1$$

si bien que

$$5^{2^{n+1}}-1 = 2^{n+3}\times\left(m+2^{n+1}m^2\right)$$

Or, m est impair donc $m+2^{n+1}m^2$ est impair : on en déduit que H_{n+1} est vraie, ce qui clôt la récurrence.

6.8 Nombres premiers

Exercice 71 : ✪ Les nombres $1, 11, 111, 1111$ et 111111 sont-ils premiers ?

Correction : 1 n'est pas premier d'après le cours, 11 est premier, 111 n'est pas premier car est divisible par 3 (la somme de ses chiffres vaut 3), 1111 n'est pas premier car est divisible par 11 (la somme alternée de ses chiffres vaut 0 divisible par 11) et enfin 111111 n'est pas premier car est divisible à la fois par 3 (la somme de ses chiffres vaut 6) et par 11 (la somme alternée de ses chiffres vaut 0).

Exercice 72 : ✪ En s'inspirant de la démonstration de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers, montrer que pour tout $n\geq 1$, le n-ième nombre premier est inférieur strict à 2^{2^n}.

Correction : Raisonnons par récurrence.

- Si $n\geq 1$, notons p_n le n-ième nombre premier et H_n : « $p_n < 2^{2^n}$ ».
- $p_1 = 2$ et $2^{2^1} = 2^2 = 4 > 2$ donc H_1 est vraie.
- Soit $n\geq 1$. Supposons $H_1,\dots,H_n$ vraies (récurrence forte) et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence (rappelons qu'on peut multiplier les inégalités positives) :

$$\begin{aligned}
p_1\times\cdots\times p_n+1 &< 2^{2^1+\cdots+2^n}+1\\
&< 2^{2\times\frac{2^n-1}{2-1}}+1\\
&< 2^{2^{n+1}-2}+1\\
&< 2^{2^{n+1}-2}+2^{2^{n+1}-2}\\
&< 2\times 2^{2^{n+1}-2}\\
&< 2^{2^{n+1}-1}\\
&< 2^{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Or, ce nombre (qu'on note A_n) admet un diviseur premier, et de même que dans la démonstration de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers, un diviseur premier de A_n ne peut pas être égal à $p_1,\dots,p_n$ (car sinon il divise 1) donc est supérieur ou égal à p_{n+1}. En d'autres termes, tous les facteurs premiers de A_n sont supérieurs ou égaux à p_{n+1}, et en particulier $p_{n+1}\leq A_n < 2^{2^n}$, ce qui clôt la récurrence.

Remarque : cette borne est ridiculement large. On peut montrer (mais c'est difficile !) que le n-ième nombre premier est équivalent à $n\ln(n)$, c'est-à-dire que

$$\frac{p_n}{n\ln(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Exercice 73 - Un cas élémentaire du théorème de Dirichlet : ✪

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
2. **Remake :** Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 5 modulo 6.

Remarque : Le théorème de Dirichlet affirme que pour tous a et b appartenant à $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux (pourquoi doivent-ils être premiers entre eux ?), il existe une infinité de nombres premiers congrus à a modulo b.

Correction :

1. Comme dans le cours, raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers congrus à 3 modulo 4, et notons-les $p_1,\dots,p_n$. Posons alors $A = 4p_1\times\cdots\times p_n - 1$. Alors $A\equiv -1\equiv 3[4]$ donc A admet au moins un facteur premier congru à 3 modulo 4. En effet, un nombre premier est congru à $1, 2$ ou 3 modulo 4 (pas à 0 car alors il serait divisible par 4 donc premier). Le seul nombre premier congru à 2 modulo 4 est 2 qui ne divise pas A car A est impair. Si A n'admet que des diviseurs premiers congrus à 1 modulo 4 alors, par produit, A est lui-même congru à 1 modulo 4 ce qui est absurde. Il en découle que l'un des p_i divise A donc l'un des p_i divise 1

ce qui est absurde (c'est pour cela qu'il ne fallait pas poser $A = 4p_1 \dots p_n + 3$ car alors A aurait été divisible par 3 et cela n'aurait pas été absurde).

2. Idem en raisonnant par l'absurde, en supposant qu'il n'y en a qu'un nombre fini notés $p_1, \dots p_n$ et en posant $A = 6p_1 \dots p_n - 1$. Un nombre premier étant congru à 1, 2 (mais 2 est le seul nombre premier vérifiant cette propriété et il ne divise pas A), 3 (idem, 3 est le seul nombre premier vérifiant cette propriété mais il ne divise pas A) ou 5 modulo 6 (4 est exclu car un nombre congru à 4 modulo 6 est pair et n'est pas égal à 2 donc n'est pas premier), on montre de même qu'il est divisible par un nombre premier congru à 5 modulo 6 ce qui n'est pas possible.

Exercice 74 - Produit des nombres premiers inférieurs ou égaux à n : ✪✪

1. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$.
2. Soit p un nombre premier vérifiant $m+1 < p \leq 2m+1$. Montrer que p divise $\binom{2m+1}{m}$. En déduire que
$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq 4^m$$
où le produit ne porte que sur les nombres premiers.
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\prod_{p\leq n} p \leq 4^n$.

Remarque : On peut en fait montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\prod_{p\leq n} p \leq c^n$ où $c = 2.76278\dots$ (résultat montré par Rosser et Schoenfeld en 1962).

Correction :

1. Raisonnons par récurrence.
   - Si $m \in \mathbb{N}$, notons H_m : « $\binom{2m+1}{m} \leq 4^m$ ».
   - $\binom{2\times 0+1}{0} = 1 \leq 1 = 4^0$ donc H_0 est vraie.
   - Soit $m \in \mathbb{N}$. Supposons que H_m est vraie et prouvons que H_{m+1} est vraie.
$$\begin{aligned}
\binom{2m+3}{m+1} &= \frac{(2m+3)!}{(m+1)!(m+2)!} \\
&= \frac{(2m+1)! \times (2m+2)(2m+3)}{m!(m+1)! \times (m+1)(m+2)} \\
&= \binom{2m+1}{m+1} \times \frac{(2m+2)(2m+3)}{(m+1)(m+2)} \\
&= \binom{2m+1}{m+1} \times \frac{2(2m+3)}{(m+2)} \\
&\leq 4^m \times \frac{4m+6}{m+2} && \text{(HR)} \\
&\leq 4^m \times \frac{4m+8}{m+2} \\
&\leq 4^m \times 4
\end{aligned}$$
     c'est-à-dire que H_{m+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_m est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.
2. On a :
$$\begin{aligned}
\binom{2m+1}{m} &= \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} \\
&= = \frac{(m+2) \times \cdots \times (2m+1)}{m!}
\end{aligned}$$

et donc $(m+2)\times\cdots\times(2m+1) = m!\times\binom{2m+1}{m}$. Or, le produit de gauche contient p donc p divise $m!\times\binom{2m+1}{m}$. Or, $p > m+1 > m$ donc p est premier avec $1,\dots,m$ donc avec $m!$. D'après le théorème de Gauß, p divise $\binom{2m+1}{m}$. Ce coefficient binomial est donc divisible par tous les nombres premiers p vérifiant $m+1 < p \leq 2m+1$: ce sont des nombres premiers distincts donc ils sont premiers deux à deux donc leur produit divise aussi $\binom{2m+1}{m}$ et en particulier :

$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m}$$

ce qui permet de conclure d'après la question précédente.

3. Raisonnons par récurrence.
4. Raisonnons par récurrence.
   - Si $n \geq 2$, notons H_n : « $\displaystyle\prod_{p\leq n} p \leq 4^n$ ».
   - $\displaystyle\prod_{p\leq 2} p = 2 \leq 4^2$ donc H_2 est vraie. De même, $\displaystyle\prod_{p\leq 3} p = 6 \leq 4^3$ donc H_3 est vraie.
   - Soit $n \geq 3$. Supposons que $H_2,\dots,H_n$ sont vraies (récurrence forte : on verra pourquoi plus loin) et prouvons que H_{n+1} est vraie. Si $n+1$ est pair alors $n+1$ n'est pas premier (car $n+1 \neq 2$) donc

   $$\prod_{p\leq n+1} p = \prod_{p\leq n} p \leq 4^n$$

   par hypothèse de récurrence, si bien que $\displaystyle\prod_{p\leq n+1} p \leq 4^{n+1}$. Supposons donc $n+1$ impair : il existe m tel que $n+1 = 2m+1$. Ainsi,

   $$\prod_{p\leq n+1} p = \prod_{p\leq m} p \times \prod_{m+1<p\leq 2m+1} p$$

   D'après la question précédente, le second produit est inférieur ou égal à 4^m et, par hypothèse de récurrence (c'est là qu'on voit qu'il faut faire une récurrence forte : on applique le résultat à $m = n/2$ et pas à n), le premier produit est inférieur ou égal à 4^m donc, par produit (tout est positif),

   $$\prod_{p\leq n+1} p \leq 4^m \times 4^m = 4^{2m} \leq 4^{2m+1} = 4^{n+1}$$

   Dans tous les cas, H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 2$.

Exercice 75 - Nombres premiers jumeaux : ✪✪

1. Soit $p \geq 5$ (pas forcément premier). Montrer que parmi $p, p+2$ et $p+4$, il y a au moins un multiple de 3.

   Il en découle que $p, p+2$ et $p+4$ ne peuvent pas être tous les trois premiers. Cependant, il n'y a aucune raison pour que p et $p+2$ ne soient pas premiers tous les deux : deux nombres premiers p et q tels que $|p-q| = 2$ sont dits jumeaux. C'est le cas par exemple de 3 et 5, de 5 et 7, de 11 et 13, de 17 et 19 etc.

2. Soient p et q deux nombres premiers. Montrer qu'ils sont jumeaux si et seulement si $pq+1$ est un carré.
3. Montrer que si p et q sont premiers jumeaux et supérieurs ou égaux à 5, alors $p+q$ est divisible par 12.

Remarque : L'existence d'une infinité de nombres premiers jumeaux est un célèbre problème ouvert. Pour l'instant, on sait seulement qu'il existe une infinité de couples de nombres premiers (p,q) tels que $|p-q| \leq 600$. Les recherches s'activent pour faire descendre la borne, mais il semble que les techniques employées ne puissent faire descendre la borne sous 12.

Correction :

1. Si p est divisible par 3, c'est bon. Sinon, $p \equiv \pm 1[3]$. Si $p \equiv 1[3]$ alors $p+2$ est divisible par 3, et si $p \equiv -1[3]$ alors $p+4$ est divisible par 3.
2. Supposons que p et q soient jumeaux. Sans perte de généralité, on peut supposer $p \leq q$ si bien que $q = p+2$ donc

$$\begin{aligned} pq+1 &= p(p+2)+1 \\ &= p^2+2p+1 \\ &= (p+1)^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $pq+1$ est un carré. Réciproquement, supposons qu'il existe k tel que $pq+1=k^2$. Alors

$$\begin{aligned} pq &= k^2-1 \\ &= (k-1)(k+1) \end{aligned}$$

Il en découle que $k-1=p$ et $k+1=q$. En effet, pq est (par unicité) l'écriture de $(k-1)(k+1)$ en produit de facteurs premiers, si bien que l'un des deux (parmi $k-1$ et $k+1$) vaut p et l'autre vaut q (sinon il y aurait un autre nombre premier ou une multiplicité différente dans la décomposition) et puisque $p\leq q$, la seule possibilité est d'avoir $p=k-1$ et $q=k+1$. En particulier, $q=p+2$: p et q sont jumeaux.

3. Supposons que p et q soient premiers jumeaux. On suppose encore que $q=p+2$. Dès lors, $p+q=2p+2$: c'est donc un nombre pair. S'il n'est pas divisible par 4, alors $p+q\equiv 2[4]$ donc $2p\equiv 0[4]$ si bien que p est pair, ce qui est absurde car p est premier différent de 2. Ainsi, $p+q$ est divisible par 4.

   Si $2p$ est divisible par 3, d'après le théorème de Gauß (2 et 3 sont premiers entre eux), 3 divise p ce qui est absurde puisque p est premier supérieur ou égal à 5. Ainsi, $2p$ n'est pas divisible par 3 donc $2p\equiv 1[3]$ ou $2p\equiv 2[3]$. Si $2p\equiv 2[3]$, 2 étant premier avec 3, on peut simplifier par 2 donc $p\equiv 1[3]$ si bien que $q=p+2$ est divisible par 3 ce qui est absurde car q est premier. Finalement, $2p\equiv 1[3]$ donc $p+q=2p+2$ est divisible par 3, et puisque 3 et 4 sont premiers entre eux, il est divisible par 12.

Exercice 76 - Fonction de Möbius : ✪✪✪ On définit $\mu:\mathbb{N}^*\to\{0;1;-1\}$ comme suit : $\mu(1)=1;\mu(n)=0$ si n contient un facteur carré ; $\mu(p_1\dots p_r)=(-1)^r$ si les p_i sont des nombres premiers distincts.

1. Montrer que si n_1,n_2 sont deux éléments premiers entre eux de $\mathbb{N}^*$ alors $\mu(n_1)\mu(n_2)=\mu(n_1n_2)$. Montrer que ce n'est plus vrai si les deux entiers ne sont pas supposés premiers entre eux.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*, n\neq 1$ on a $\displaystyle\sum_{d|n}\mu(d)=0$ où la somme est prise sur les diviseurs de n.
3. Soit f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ (note pour plus tard : on peut remplacer $\mathbb{R}$ par n'importe quel groupe abélien). On pose $g(n)=\displaystyle\sum_{d|n}f(d)$. Démontrer la formule d'inversion de Möbius :

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d).$$

Correction :

1. Soient n_1 et n_2 deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Il y a deux cas :
   - Supposons que n_1n_2 admette un facteur carré d^2 avec $d\geq 2$. Alors d admet un facteur premier p si bien que p^2 divise n_1n_2 : p^2 apparaît dans la décomposition de n_1n_2 en produit de facteurs premiers. Or, n_1 et n_2 sont premiers entre eux donc ne peuvent pas contenir p tous les deux : il en découle que p^2 apparaît dans celle de n_1 ou dans celle de n_2. En particulier, n_1 ou n_2 a un facteur carré donc $\mu(n_1)=0$ ou $\mu(n_2)=0$ si bien que $\mu(n_1)\mu(n_2)=0$ et $\mu(n_1n_2)=0$ car n_1n_2 admet un facteur carré.
   - Supposons que n_1n_2 n'ait aucun facteur carré. Alors n_1 et n_2 n'ont aucun facteur carré. Notons s le nombre de facteurs premiers de n_1 et s celui de n_2, si bien que $n_1=p_1\cdots p_r$ et $n_2=q_1\cdots q_s$ où les p_i et q_j sont premiers distincts deux à deux (les puissances sont égales à 1 car n_1 et n_2 sont sans facteur carré). Il en découle que $\mu(n_1)=(-1)^r$ et $\mu(n_2)=(-1)^s$ et $n_1n_2=p_1\cdots p_rq_1\cdots q_s$: les p_i et q_j étant distincts puisque n_1 et n_2 sont premiers entre eux donc n'ont aucun facteur carré commun n_1n_2 est le produit de $r+s$ facteurs premiers distincts si bien que $\mu(n_1n_2)=(-1)^{r+s}=(-1)^r\times(-1)^s=\mu(n_1)\mu(n_2)$.
2. Oups, mea culpa : cette question aurait plus sa place dans le chapitre dénombrement. Vous pouvez la zapper d'ici là. Soit $n\geq 2$. Notons $n={p_1}^{\alpha_1}\times\cdots\times{p_r}^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers. Les diviseurs de n sont donc les entiers de la forme $d={p_1}^{\beta_1}\times\cdots\times{p_r}^{\beta_r}$ avec, pour tout i, $\beta_i\leq\alpha_i$. Puisque les entiers ayant un facteur carré ont une image par μ nulle, seuls les diviseurs de la forme ${p_1}^{\beta_1}\times\cdots\times{p_r}^{\beta_r}$, avec $\beta_i=0$ ou 1, apportent une contribution à la somme. Regroupons les diviseurs de n selon le nombre de β_i égaux à 1 :

$$\begin{aligned} \sum_{d|n}\mu(d) &= \sum_{k=0}^{r}\sum_{\substack{d|n\\ \mathrm{card}(\{i\,|\,\beta_i=1\})=k}}\mu(d) \\ &= \sum_{k=0}^{r}\sum_{\substack{d|n\\ \mathrm{card}(\{i\,|\,\beta_i=1\})=k}}(-1)^k \end{aligned}$$

La deuxième somme est la somme d'un terme constant (on somme sur toutes les façons possibles d'avoir k fois une puissance égale à 1). Or, il y a $\dbinom{k}{r}$ façons de choisir les k emplacements β_i en lesquels la puissance vaut 1, si bien que

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\mu(d) &= \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^k \\ &= (1-1)^r \\ &= 0\end{aligned}$$

3. Notons S_n la somme de droite. Lorsque d parcourt les diviseurs de n, n/d parcourt lui aussi les diviseurs de n donc, en faisant le changement « d'indice » $\delta = n/d$ puis en remplaçant par d car l'indice est muet, ça donne :

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{\delta|n}\mu(\delta)\,g\left(\frac{n}{\delta}\right) \\ &= \sum_{d|n}\mu(d)\,g\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d|n}\mu(d)\sum_{k|\frac{n}{d}}f(k)\end{aligned}$$

Soit d un diviseur de n. Alors k divise n/d si et seulement s'il existe m tel que $km = n/d$ donc tel que $md = n/k$. Il en découle que k divise n/d si et seulement si d divise n/k, d'où l'interversion suivante :

$$S_n = \sum_{k|n}f(k)\sum_{d|\frac{n}{k}}\mu(d)$$

Or, si $k \neq n$, alors $n/k \neq 1$ donc la somme de droite est nulle d'après la question précédente. En d'autres termes, il ne reste que le terme pour $k = n$ qui vaut $f(n)$ ce qui est le résultat voulu.

Exercice 77 - Fonction de Yéléhada : ✪✪

1. Soit $n \geq 2$ et soit $k \in [\![2\,;\,n-1]\!]$. Montrer que

$$\left\lfloor \frac{n}{k} - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \right\rfloor = 1$$

si $k \mid n$ et vaut 0 sinon.

2. Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$t(n) = 2 + (n-2) \times \left\lfloor \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{k} - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \right\rfloor} \right\rfloor$$

Montrer que $\{t(n)\,|\,n \geq 2\} = \mathbb{P}$.

Correction :

1. Supposons que k divise n. Soit $d = n/k$. Alors

$$d - 1 \leq \frac{n-1}{k} = d - \frac{1}{k} < d$$

donc $\left\lfloor \dfrac{n-1}{k} \right\rfloor = d = \dfrac{n}{k} - 1$ si bien que

$$\left\lfloor \frac{n}{k} - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \right\rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$$

Supposons à présent que k ne divise pas n. Alors il existe $r \in [\![1\,;\,k-1]\!]$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = kq + r$ et donc $n - 1 = kq + (r-1)$ avec $0 \leq r - 1 < k$. Ainsi,

$$q \leq \frac{n-1}{k} = q + \frac{r-1}{k} < q+1$$

donc $\left\lfloor \dfrac{n-1}{k} \right\rfloor = q$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{k} - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{kq+r}{k} - q \right\rfloor \\ &= \left\lfloor q + \frac{r}{k} - q \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{r}{k} \right\rfloor \end{aligned}$$

et on conclut en utilisant le fait que $0 \leq r/k < 1$ puisque $0 \leq r < k$.

2. Erreur d'énoncé : il fallait multiplier la partie entière par $n-2$. Soit $n \geq 2$. D'après la question précédente, les termes de la somme au dénominateur valent 1 si k divise n et 0 sinon. CLASSIQUE : si on somme des termes qui valent 1 ou 0, la valeur de la somme est le nombre de termes valant 1. En d'autres termes,

$$\sum_{k=2}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{k} - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \right\rfloor$$

est le nombre de diviseurs de n appartenant à $[\![2\,;\, n-1]\!]$. Il y a donc deux cas :

- Si n est premier, n n'a aucun diviseur dans $[\![2\,;\, n-1]\!]$ donc cette somme est nulle, si bien que

$$\begin{aligned} t(n) &= 2 + (n-2) \times \left\lfloor \frac{1}{1+0} \right\rfloor \\ &= n \end{aligned}$$

- Si n n'est pas premier, n a au moins un diviseur dans $[\![2\,;\, n-1]\!]$ donc cette somme est strictement positive, si bien que la quantité dans la partie entière est strictement inférieure à 1 (et positive) donc a une partie entière nulle : $t(n) = 2$.

En conclusion, $t(n) = n$ si n est premier, donc tous les nombres premiers sont atteints, et $t(n) = 2$ si n n'est pas premier, donc aucun nombre composé n'est atteint : l'image de t est exactement l'ensemble des nombres premiers. On peut même être plus précis : si on enlève le nombre 2 dans la suite $(t(n))_{n\geq 2}$, on obtient la suite des nombres premiers dans l'ordre croissant.

Exercice 78 - Théorème de Wilson : ✪✪✪

1. Soit $p \geq 2$ un nombre premier.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [\![1\,;\, p-1]\!]$, il existe un unique élément de $[\![1\,;\, p-1]\!]$ que l'on notera $f(x)$ tel que $x \times f(x) \equiv 1[p]$. Expliciter $f(f(x))$.
   (b) Soit $x \in [\![1\,;\, p-1]\!]$. Donner le cardinal de $\{x; f(x)\}$.
   (c) Soit $(x,y) \in [\![1\,;\, p-1]\!]^2$. Montrer que les ensembles $\{x; f(x)\}$ et $\{y; f(y)\}$ sont soit disjoints soit égaux.
   (d) Montrer finalement que $(p-1)! \equiv 1[p]$.
2. Soit $n \geq 5$ composé. Montrer que $(n-1)! \equiv 0[n]$.
3. Nous avons donc montré le théorème de Wilson : un entier $p \geq 5$ est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1[p]$. Ce critère de primalité présente-t-il un intérêt pratique ?
4. Si $n \geq 2$, on note $f(n)$ le plus petit nombre strictement positif congru à $2 + 2n!$ modulo $n+1$. Montrer que $\{f(n) \,|\, n \geq 2\} = \mathbb{P}$.

Correction :

1. (a) Prouvons séparément l'existence et l'unicité. $x \in [\![1\,;\, p-1]\!]$ donc est premier avec p : d'après le théorème de Bézout, il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ux + vp = 1$. Effectuons la division euclidienne de u par p : il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0\,;\, p-1]\!]$ tel que $u = pq + r$, si bien que $rx + p(q+v) = 1$. En prenant la congruence modulo p, il vient : $rx \equiv 1[p]$. Si $r = 0$ alors $0 \equiv 1[p]$ ce qui est absurde, donc $r \in [\![1\,;\, p-1]\!]$, d'où l'existence.

   Supposons qu'il existe $r' \in [\![1\,;\, p-1]\!]$ tel que $x \times r' \equiv 1[p]$. Alors $x(r-r') \equiv 0[p]$ c'est-à-dire que p divise $x \times (r-r')$. Or, p est premier avec p donc, d'après le théorème de Gauß, p divise $r-r'$. Or, $|r-r'| < p$ car r et r' appartiennent à $[\![1\,;\, p-1]\!]$ donc $r-r'=0$ c'est-à-dire que $r=r'$: d'où l'unicité.

Enfin, $f(x) \times f(f(x)) \equiv 1[p]$ (remplacer x par « truc » puis par $f(x)$) donc, par unicité, $f(x)=x$.

(b) Question moins triviale qu'elle n'en a l'air : on a envie de dire 2, mais encore faut-il que x et $f(x)$ soient distincts ! Plus précisément, si $x=f(x)$, alors le cardinal de cet ensemble vaut 1, et sinon, il vaut 2. Cherchons pour quelle(s) valeur(s) de x on a $x=f(x)$. Or, $f(x)$ est l'unique entier de $[\![1\,;\, p-1]\!]$ tel que $xf(x) \equiv 1[p]$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} x=f(x) & \iff x\times x \equiv 1[p] \\ & \iff x^2-1 \equiv 0[p] \\ & \iff p|x^2-1 \\ & \iff p|(x-1)(x+1) \\ & \iff p|x-1 \qquad \text{ou} \qquad p|x+1 \end{aligned}$$

Or, $x \in [\![1\,;\, p-1]\!]$ donc $x-1 \in [\![0\,;\, p-2]\!]$ et le seul entier divisible par p dans cet intervalle (d'entiers) est 0. De même, $x+1 \in [\![2\,;\, p]\!]$ et le seul entier divisible par p dans cet intervalle est p. Finalement :

$$\begin{aligned} x=f(x) & \iff x-1=0 \qquad \text{ou} \qquad x+1=p \\ & \iff x=1 \qquad \text{ou} \qquad x=p-1 \end{aligned}$$

Finalement, si $x=1$ ou $x=p-1$, alors $x=f(x)$ donc $\{x;f(x)\}$ est de cardinal 1, et sinon il est de cardinal 2.

(c) Si $x=y$, les deux ensembles sont évidemment égaux. Si $x=f(y)$ alors $f(x)=f(f(y))=y$ donc là aussi les ensembles sont égaux. Supposons que $x\neq y$ et $x \neq f(y)$. Si $f(x)=y$ alors $f(f(x))=f(y)$ donc $x=f(y)$ ce qui est exclu. De même on exclut le cas $f(x)=f(y)$: si c'est le cas, alors $f(f(x))=f(f(y))$ donc $x=y$ ce qui est aussi exclu. Les deux ensembles sont alors disjoints.

(d) Quand on fait le produit $(p-1)! = 1\times 2 \times \cdots \times (p-1)$, on regroupe chaque entier x avec $f(x)$ lorsqu'ils sont distincts, ce qui donne 1 (modulo p) et il reste 1 et $(p-1)$ qui sont les entiers pour lesquels $x=f(x)$. En d'autres termes, on regroupe les entiers différents de 1 et $p-1$ par paire et cela fait des produits égaux à 1, et il reste 1 et $p-1$. Encore en d'autres termes :

$$(p-1)! \equiv 1\times 1 \times \cdots \times 1 \times (1\times(p-1)) \equiv p-1 \equiv -1[p]$$

2. n est composé donc il existe a et b appartenant à $[\![2\,;\, n-1]\!]$ (pas forcément premiers) tels que $n=ab$. Si $a\neq b$, alors a et b apparaissent tous les deux dans le produit $1\times 2\times\cdots\times(n-1)=(n-1)!$ c'est-à-dire que n divise $(n-1)!$: on a le résultat voulu.

   Supposons à présent que $a=b$. Alors $a=b=\sqrt{n}$. $n\geq 5$ donc $a=\sqrt{n}>2$ si bien que $2a<n$: il en découle que a et $2a$ apparaissent dans le produit $1\times 2\times\cdots\times(n-1)=(n-1)!$ donc $a\times 2a=2n$ divise $(n-1)!$ si bien que $(n-1)!\equiv 0[n]$. Dans tous les cas on a le résultat voulu.

3. Non, ce théorème n'a aucune utilité pratique car, pour calculer $(n-1)!$, il faut faire le produit de tous les entiers de 1 à $n-1$ ce qui n'est pas beaucoup plus efficace que le crible d'Erathostène.

4. Erreur d'énoncé : il fallait prendre $n\geq 2$ et pas $n\geq 3$. Soit $n\geq 2$. Donnons la congruence de $2+2n!$ modulo $n+1$: il suffira de prendre le plus petit entier strictement positif ayant la même congruence, ce sera $f(n)$.

   Si $n+1$ est premier, alors $n!\equiv -1[n+1]$ d'après le théorème de Wilson donc $2+2n!\equiv 0[n+1]$. Ainsi, $f(n)\equiv 0[n+1]$. Or, un nombre est congru à 0 modulo $n+1$ si et seulement s'il est divisible par $n+1$, et $n+1$ est le plus petit nombre strictement positif divisible par $n+1$: il en découle que $f(n)=n+1$. Finalement, tous les nombres premiers supérieurs ou égaux à 3 (car tous les nombres premiers de la forme $n+1$ avec $n\geq 2$) sont atteints par f.

   Supposons à présent que $n+1$ soit composé. Si $n\geq 4$ alors $n+1\geq 5$ donc $n!\equiv 0[n+1]$ si bien que $2+2n!\equiv 2[n+1]$ et le plus petit nombre strictement positif congru à 2 modulo $n+1$ est 2 lui-même. Il ne reste plus que le cas $n=3$: alors $2+2n!=14\equiv 2[n+1]$ donc on a encore $f(n)=2$.

   En conclusion, les nombres atteints par f sont exactement 2 et les nombres premiers supérieurs ou égaux à 3 ce qui permet de conclure.

Chapitre 7

Nombres complexes

On considère $\mathbb{C}$ en bijection avec le plan complexe par la bijection habituelle.

Vrai ou Faux ?

1. La partie réelle de $\dfrac{1}{2+i}$ est $\dfrac{1}{2}$.
2. La partie réelle de $(3+2i)^2$ est 5.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z \notin \mathbb{R}$ alors $z^2 \notin \mathbb{R}$.
4. Soient z_1 et z_2 deux complexes. Alors $|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$.
5. Soient z_1 et z_2 deux complexes. Alors $|z_1 - z_2| \leq \max(|z_1| - |z_2|, |z_2| - |z_1|)$.
6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Le module de e^z est $e^{|z|}$.
7. Soit $z \in \mathbb{C}$. Le conjugué de e^z est $e^{\overline{z}}$.
8. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Le produit scalaire des vecteurs d'affixes z_1 et z_2 est $\mathrm{Re}\,(z_1 \times \overline{z_2})$.
9. Soit $\theta \notin 2i\pi\mathbb{Z}$. La fonction $z \mapsto e^{i\theta}z + 1$ est une écriture complexe de la rotation d'angle θ de centre d'affixe 1.
10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$. La fonction $z \mapsto \lambda z + 1$ est une écriture complexe d'une homothétie.
11. j est une racine 2021-ième de l'unité.
12. $\mathbb{U}_6 \subset \mathbb{U}_{666}$.
13. Si d ne divise pas n, alors $\mathbb{U}_d \cap \mathbb{U}_n = \{1\}$.
14. Les ensembles $\mathbb{U}_n$ et $\{\omega \,|\, \omega^n = -1\}$ sont en bijection.
15. $\{\overline{\omega} \,|\, \omega \in \mathbb{U}_n\} = \mathbb{U}_n$.
16. Si $n > 1$, $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$.
17. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $\mathrm{Re}\,(1/z) = -\mathrm{Re}(z)$.
18. Soient z_1 et z_2 de parties réelles positives. Alors $z_1 + z_2$ est de partie réelle positive.
19. Soient z_1 et z_2 de parties réelles positives. Alors $z_1 z_2$ est de partie réelle positive.
20. Un argument de $e^{i\pi/6} + e^{i9\pi/6}$ est $10\pi/6$.
21. Soit $z \in \mathbb{C}$. La partie réelle de iz est la partie imaginaire de z.
22. $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2, \forall z \in \mathbb{C}, \overline{z} = az + b$.

7.1 Calculs dans $\mathbb{C}$

Exercice 1 : ✪ Montrer que l'application $z \mapsto \dfrac{z-1}{z-2}$ est une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ sur un ensemble que l'on précisera, et trouver la bijection réciproque.

Correction : Raisonnons comme dans l'exercice 56 du chapitre 3 puisqu'on demande la bijection réciproque. Attention, le théorème de la bijection n'est valable que sur un intervalle de $\mathbb{R}$! Soit $z \neq 2$ et soit $y \in \mathbb{C}$. Cherchons les antécédents éventuels de y.

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z-2} = y \quad & \iff \quad z - 1 = y(z-2) \\ & \iff \quad z(1-y) = -2y + 1 \end{aligned}$$

Il y a deux cas : supposons $y = 1$. Alors y n'a aucun antécédent puisque, pour tout $z \neq 2$, $z - 1 \neq z - 2$ donc $\dfrac{z-1}{z-2} \neq 1$. Supposons à présent $y \neq 1$. Alors :

$$\frac{z-1}{z-2} = y \iff z = \frac{1-2y}{y-1}$$

On en déduit que y admet un unique antécédent : $\dfrac{1-2y}{y-1}$. On en déduit que f est une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ dans $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, et que sa bijection réciproque est :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{C}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{2\} \\ & & \\ y & \mapsto & \dfrac{1-2y}{y-1} \end{cases}$$

Exercice 2 : ✪ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. Montrer que $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) \geq \dfrac{1}{2}$.

Correction : Notons $z = a + ib$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{(1-a)-ib} \\ &= \frac{1-a+ib}{(1-a)^2+b^2} \end{aligned}$$

si bien que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1-a}{(1-a)^2+b^2}$$

Or, $a^2 + b^2 = |z|^2 \leq 1$ donc (rappelons que, pour minorer un quotient, on MAJORE son dénominateur) :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) &= \frac{1-a}{1-2a+a^2+b^2} \\ &\geq \frac{1-a}{1-2a+1} \\ &\geq \frac{1-a}{2(1-a)} \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 3 : ✪

1. Soit S l'ensemble des entiers qui sont somme de deux carrés parfaits, c'est-à-dire $S = \{x^2 + y^2 \,|\, (x,y) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que S est stable par produit.
2. On pose $S' = \{x^2 + y^2 + z^2 \,|\, (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3\}$. Montrer que $15 \notin S'$ et en déduire que S' n'est pas stable par produit.

Correction :

1. Soit $(n_1, n_2) \in S^2$. Par hypothèse, il existe $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $n_1 = {x_1}^2 + {y_1}^2$ et $n_2 = {x_2}^2 + {y_2}^2$. Notons $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 iy_2$. Alors $n_1 = |z_1|^2$ et $n_2 = |z_2|^2$ si bien que

$$\begin{aligned} n_1 \times_2 &= |z_1 \times z_2|^2 \\ &= |(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)|^2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 \end{aligned}$$

Or, $x_1x_2 - y_1y_2$ et $x_1y_2 + x_2y_1$ appartiennent à $\mathbb{Z}$ donc $n_1n_2 \in S$: S est stable par produit.

2. Supposons que $15 \in S'$. Alors il existe $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $15 = x^2 + y^2 + y^2$. Quitte à changer x en $-x$ et idem pour x, y, z, on peut supposer x, y, z positifs. Alors $x^2 = 15 - y^2 - z^2 \leq 15$ donc $x = 0, 1, 2$ ou 3.

   Supposons que $x = 0$. Alors $15 = y^2 + z^2$. De même, $y = 0, 1, 2$ ou 3, et alors $z^2 = 15, 14, 11$ ou 6 ce qui est impossible car ce ne sont pas des carrés parfaits. On exclut de même les cas $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$: c'est absurde, $15 \notin S'$.

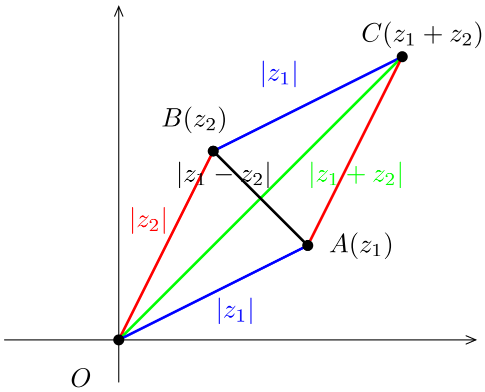
Enfin, $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 \in S'$ et $5 = 0^2 + 1^2 + 2^2 \in S'$ mais $15 = 3 \times 5 \notin S'$: S' n'est pas stable par produit.

Exercice 4 - Identité du parallélogramme : ✪ Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$. Expliquer le nom de cet exercice.

Correction : On a :

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \times \overline{(z_1 + z_2)} + (z_1 - z_2) \times \overline{(z_1 - z_2)} \\
&= (z_1 + z_2) \times (\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2) \times (\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\
&= z_1 \times \overline{z_1} + z_1 \times \overline{z_2} + z_2 \times \overline{z_1} + z_2 \times \overline{z_2} + z_1 \times \overline{z_1} - z_1 \times \overline{z_2} - z_2 \times \overline{z_1} + z_2 \times \overline{z_2} \\
&= 2z_1 \times \overline{z_1} + 2z_2 \times \overline{z_2} \\
&= 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)
\end{aligned}$$

Si on trace les complexes d'affixes $A(z_1)$, $B(z_2)$ et $C(z_1+z_2)$, alors $|z_1+z_2| = OC$ et $|z_1-z_2| = AB$ (rappelons que $z_1 - z_2$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BA}$ donc $|z_1 - z_2|$ est la longueur AB) on vient de prouver que la somme des carrés des longueurs deux diagonales du parallélogramme $OACB$ est égale à la somme des carrés des quatre côtés.



Exercice 5 - Inégalité de Cauchy-Schwarz, stage one : ✪

1. Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux complexes. Expliciter la partie réelle de $z_1 \times \overline{z_2}$.
2. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4, \qquad |x_1x_2 + y_2y_2| \leq \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2} \times \sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

Correction :

1. $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$ donc $\mathrm{Re}\,(z_1 \times \overline{z_2}) = x_1x_2 + y_1y_2$.
2. Soit $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$. Notons $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$. D'après la question précédente, $\mathrm{Re}\,(z_1 \times \overline{z_2}) = x_1x_2 + y_1y_2$. Or,

$$|\mathrm{Re}\,(z_1 \times \overline{z_2})| \leq |z_1 \times \overline{z_2}| = |z_1| \times |\overline{z_2}| = |z_1| \times |z_2|$$

On a utilisé les propriétés suivantes du cours : $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ et $|\overline{z}| = |z|$. Le résultat en découle.

Exercice 6 : ✪ Soient $n > 1$ et $z_1, \dots, z_n$ des complexes non nuls de même module. Montrer que

$$\frac{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)\cdots(z_{n-1} + z_n)(z_n + z_1)}{z_1 z_2 \cdots z_n} \in \mathbb{R}$$

Correction : Notons M le module commun (strictement positif puisque les z_i sont non nuls) de $z_1, \dots, z_n$. Notons Z le complexe de l'énoncé. Il suffit donc de prouver que $\overline{Z} = Z$. Rappelons que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{z} = |z|^2/z$. Dès lors (la conjugaison passe au produit, à la somme, et au quotient) :

$$\begin{aligned}
\overline{Z} &= \frac{(\overline{z_1} + \overline{z_2})(\overline{z_2} + \overline{z_3}) \cdots (\overline{z_{n-1}} + \overline{z_n})(\overline{z_n} + \overline{z_1})}{\overline{z_1}\,\overline{z_2} \cdots \overline{z_n}} \\
&= \frac{\left(\dfrac{M^2}{z_1} + \dfrac{M^2}{z_2}\right)\left(\dfrac{M^2}{z_2} + \dfrac{M^2}{z_3}\right) \cdots \left(\dfrac{M^2}{z_{n-1}} + \dfrac{M^2}{z_n}\right)\left(\dfrac{M^2}{z_n} + \dfrac{M^2}{z_1}\right)}{\dfrac{M^2}{z_1} \times \dfrac{M^2}{z_2} \times \cdots \times \dfrac{M^2}{z_n}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\frac{M^2z_2+M^2z_1}{z_1z_2}\right)\left(\frac{M^2z_3+M^2z_2}{z_2z_3}\right)\cdots\left(\frac{M^2z_n+M^2z_{n-1}}{z_nz_{n-1}}\right)\left(\frac{M^2z_1+M^2z_n}{z_nz_1}\right)}{\frac{M^2}{z_1}\times\frac{M^2}{z_2}\times\cdots\times\frac{M^2}{z_n}}$$

$$= \frac{\frac{M^2(z_1+z_2)\times M^2(z_2+z_3)\times\cdots\times M^2(z_{n-1}+z_n)\times M^2(z_1+z_n)}{{z_1}^2{z_2}^2\cdots{z_n}^2}}{\frac{M^2}{z_1}\times\frac{M^2}{z_2}\times\cdots\times\frac{M^2}{z_n}}$$

$$= \frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\cdots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1z_2\cdots z_n}$$

$$= Z$$

Exercice 7 : ✪ Soient $(a,b,c)\in\mathbb{U}^3$. Montrer que $|ab+bc+ac|=|a+b+c|$.

Correction : Tout d'abord :

$$\begin{aligned}|a+b+c|^2 &= (a+b+c)\times\overline{(a+b+c)}\\ &= (a+b+c)\times\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right)\\ &= a\overline{a}+a\overline{b}+a\overline{c}+b\overline{a}+b\overline{b}+b\overline{c}+c\overline{a}+c\overline{b}+c\overline{c}\\ &= 3+a\overline{b}+a\overline{c}+b\overline{a}+b\overline{c}+c\overline{a}+c\overline{b}\end{aligned}$$

puisque a,b,c sont de module 1 donc $a\overline{a}=b\overline{b}=c\overline{c}=1$. D'autre part :

$$\begin{aligned}|ab+bc+ac|^2 &= (ab+bc+ac)\times\overline{(ab+bc+ac)}\\ &= (ab+bc+ac)\times\left(\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ac}\right)\\ &= ab\overline{ab}+ab\overline{bc}+ab\overline{ac}+bc\overline{ab}+bc\overline{bc}+bc\overline{ac}+ac\overline{ab}+ac\overline{bc}+ac\overline{ac}\end{aligned}$$

Or, a et b sont de module 1 donc ab est de module 1 si bien que $ab\overline{ab}=|ab|^2=1$. De même pour $bc\overline{bc}$ et $ac\overline{ac}$. De plus, $ab\overline{bc}=a\times b\overline{b}\times\overline{c}=a\overline{c}$ puisque $b\overline{b}=1$. De même pour les autres. On trouve finalement :

$$|ab+bc+ac|^2=3+a\overline{b}+a\overline{c}+b\overline{a}+b\overline{c}+c\overline{a}+c\overline{b}$$

c'est-à-dire que $|ab+bc+ac|^2=|a+b+c|^2$ et un module étant positif, deux modules sont égaux si et seulement s'ils ont le même carré ce qui permet de conclure.

Exercice 8 : ✪ Soit $u\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$ et soit $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que : $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}\in\mathbb{R}\iff|u|=1$.

Correction : Raisonnons par équivalences.

$$\begin{aligned}\frac{z-u\overline{z}}{1-u}\in\mathbb{R} &\iff \overline{\left(\frac{z-u\overline{z}}{1-u}\right)}=\frac{z-u\overline{z}}{1-u}\\ &\iff \frac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}}=\frac{z-u\overline{z}}{1-u}\\ &\iff (\overline{z}-\overline{u}z)\times(1-u)=(1-\overline{u})\times(z-u\overline{z})\\ &\iff \overline{z}-\overline{u}z-u\overline{z}+u\overline{u}z=z-u\overline{z}-\overline{u}z+u\overline{u}\overline{z}\\ &\iff \overline{z}-z+|u|^2z-|u|^2\overline{z}=0\\ &\iff (\overline{z}-z)\times\left(1-|u|^2\right)=0\\ &\iff z=\overline{z}\qquad\text{ou}\qquad|u|^2=1\\ &\iff z\in\mathbb{R}\qquad\text{ou}\qquad|u|=1\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure puisque $z \notin \mathbb{R}$ par hypothèse.

Exercice 9 : ✪ Soient a et b appartenant à $\mathbb{U}$ distincts. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{z + ab\overline{z} - (a+b)}{a-b} \in i\mathbb{R}$.

Correction : Soit $z \in \mathbb{C}$. Notons Z le complexe dont on essaye de prouver qu'il est imaginaire pur. Il suffit de prouver que $\overline{Z} = -Z$. La démonstration est analogue à l'exercice précédent, en se souvenant que $\overline{a} = 1/a$ et $\overline{b} = 1/b$ puisque a et b sont de module 1.

Exercice 10 : ✪ Soit f l'application de $\mathbb{C} - \{2\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{z+2i}{z-2}$.

1. Montrer que f est injective. Quelle est son image ?
2. Exprimer f^{-1}.
3. Donner les ensembles suivants : $f^{-1}(\mathbb{R}), f^{-1}(i\mathbb{R}), f^{-1}(\mathbb{U})$ puis $f(\mathbb{R} - \{2\}), f(i\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{U})$

Correction :

1. Faisons les deux premières questions en une en raisonnant comme dans l'exercice 56 du chapitre 3 : quand on demande la bijection réciproque, on résout l'équation (d'inconnue z) $f(z) = y$: l'unique solution éventuelle sera $f^{-1}(y)$. Soient donc $z \in \mathbb{C}\backslash\{2\}$ et $y \in \mathbb{C}$ et résolvons l'équation $f(z) = y$.

$$\begin{aligned} \frac{z+2i}{z-2} = y \quad & \iff \quad z + 2i = y(z-2) \\ & \iff \quad z(1-y) = -2y - 2i \end{aligned}$$

   Il y a deux cas : supposons $y = 1$. Alors y n'a aucun antécédent puisque, pour tout $z \neq 2i$, $z + 2i \neq z - 2$ donc $\dfrac{z+2i}{z-2} \neq 1$. Supposons à présent $y \neq 1$. Alors :

$$\frac{z+2i}{z-2} = y \iff x = \frac{2y+2i}{y-1}$$

   On en déduit que y admet un unique antécédent : $\dfrac{2y+2i}{y-1}$. On en déduit que f est une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ dans $\mathbb{C}\backslash\{1\}$, et que sa bijection réciproque est :

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{2\} \\ y & \mapsto & \dfrac{2y+2i}{y-1} \end{array} \right.$$

2.
3. Rappelons que : $z \in f^{-1}(B) \iff f(z) \in B$. Par conséquent, on cherche les complexes z (différents de 1) dont l'image est réelle. Soit donc $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ qu'on note $z = x + iy$. On a :

$$\begin{aligned} f(z) & = \frac{z+2i}{z-2} \\ & = \frac{x+iy+2i}{(x-2)+yi} \\ & = \frac{(x+i(y+2))(x-2-yi)}{(x-2)^2+y^2} \\ & = \frac{(x(x-2) - (y+2)\times(-y)) + i((y+2)(x-2) - xy)}{(x-2)^2+y^2} \end{aligned}$$

   On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f(z)) & = \frac{(y+2)(x-2) - xy}{(x-2)^2+y^2} \\ & = \frac{xy + 2x - 2y - 4 - xy}{(x-2)^2+y^2} \\ & = \frac{2x - 2y - 4}{(x-2)^2+y^2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
z \in f^{-1}(\mathbb{R}) &\iff f(z) \in \mathbb{R} \\
&\iff \operatorname{Im}(f(z)) = 0 \\
&\iff 2x - 2y - 4 = 0 \\
&= y = x - 2
\end{aligned}$$

En d'autres termes, $f^{-1}(\mathbb{R})$ est la droite d'équation $y = x - 2$. De plus :

$$\begin{aligned}
z \in f^{-1}(i\mathbb{R}) &\iff f(z) \in i\mathbb{R} \\
&\iff \operatorname{Re}(f(z)) = 0 \\
&\iff x(x-2) + y(y+2) = 0 \\
&\iff x^2 - 2x + y^2 + 2y = 0 \\
&\iff (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 = 0 \\
&\iff (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2
\end{aligned}$$

En d'autres termes, $f^{-1}(i\mathbb{R})$ est le cercle de centre $(1, -1)$ et de rayon $\sqrt{2}$ (rappelons que le cercle de centre $\Omega_0(x_0, y_0)$ de rayon R a pour équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$). Enfin :

$$\begin{aligned}
z \in f^{-1}(\mathbb{U}) &\iff f(z) \in \mathbb{U} \\
&\iff |f(z)| = 1 \\
&\iff |z + 2i| = |z - 2| \\
&\iff |z + 2i|^2 = |z - 2|^2 && \text{(car un module est positif)} \\
&\iff x^2 + (y+2)^2 = (x-2)^2 + y^2 \\
&\iff x^2 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 \\
&\iff y = -x
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $f^{-1}(\mathbb{U})$ est la droite d'équation $y = -x$. Cela se voit bien géométriquement : la condition $|z+2i| = |z-2|$ signifie que z est à égale distance de $-2i$ et de 2 donc l'ensemble recherché est la médiatrice de ces deux points. Je vous laisse faire le dessin et vous convaincre que cette médiatrice est bien la droite d'équation $y = -x$.

Notons $A = f(z)$ (y est déjà pris par la partie imaginaire de z). Alors $f(z) \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ si et seulement si $f^{-1}(A) \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$. On fait donc comme précédemment en notant $A = x_A + iy_A$. On a :

$$\begin{aligned}
f^{-1}(A) &= \frac{2A + 2i}{A - 1} \\
&= \frac{2x_A + 2iy_A + 2i}{(x_A - 1) + iy_A} \\
&= \frac{(2x_A + i(2y_A + 2))((x_A - 1) - iy_A)}{(x_A - 1)^2 + {y_A}^2} \\
&= \frac{(2x_A(x_A - 1) + 2(y_A + 1) \times y_A) + i(2(y_A + 1)(x_A - 1) - 2x_A y_A)}{(x_A - 1)^2 + {y_A}^2}
\end{aligned}$$

Dès lors :

$$
\begin{aligned}
A \in f(\mathbb{R}\backslash\{2\}) & \iff f^{-1}(A) \in \mathbb{R} \\
& \iff \operatorname{Im}\left(f^{-1}(A)\right) = 0 \\
& \iff 2(y_A + 1)(x_A - 1) - 2x_A y_A = 0 \\
& \iff 2x_A y_A - 2y_A + 2x_A - 2 - 2x_A y_A = 0 \\
& \iff y_A = x_A - 2
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que $f(\mathbb{R}\backslash\{2\})$ est (encore) la droite d'équation $y = x - 2$. De même :

$$
\begin{aligned}
A \in f(i\mathbb{R}) & \iff f^{-1}(A) \in i\mathbb{R} \\
& \iff \operatorname{Re}\left(f^{-1}(A)\right) = 0 \\
& \iff 2x_A(x_A - 1) + 2(y_A + 1) \times y_A = \text{ř} \\
& \iff 2{x_A}^2 - 2x_A + 2{y_A}^2 + 2y_A = 0 \\
& \iff {x_A}^2 - x_A + {y_A}^2 + y_A = 0 \\
& \iff {x_A}^2 - 2x_A \times \frac{1}{2} + {y_A}^2 + 2 \times y_A \times \frac{1}{2} = 0 \\
& \iff \left(x_A - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(x_A + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \\
& \iff \left(x_A - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x_A + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

et on trouve le cercle de centre $(1/2, -1/2)$ et de rayon $1/\sqrt{2}$. Enfin :

$$
\begin{aligned}
A \in f(\mathbb{U}) & \iff f^{-1}(A) \in \mathbb{U} \\
& \iff |f^{-1}(A)| = 1 \\
& \iff |2A + 2i| = |A - 1| \\
& \iff |2A + 2i|^2 = |A - 1|^2 \qquad \text{(car un module est positif)} \\
& \iff 4{x_A}^2 + 4(y_A + 1)^2 = (x_A - 1)^2 + {y_A}^2 \\
& \iff 4{x_A}^2 + 4{y_A}^2 + 8y_A + 4 = {x_A}^2 - 2x_A + 1 + {y_A}^2 \\
& \iff 3{x_A}^2 + 2x_A + 3{y_A}^2 + 8y_A + 3 = 0 \\
& \iff {x_A}^2 + 2 \times x_A \times \frac{1}{3} + {y_A}^2 + 2 \times y_A \times \frac{4}{3} + 1 = 0 \\
& \iff \left(x_A + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \left(y_A + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} + 1 = 0 \\
& \iff \left(x_A + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y_A + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}
\end{aligned}
$$

Finalement, $f(\mathbb{U})$ est le cercle de centre $(-1/3, -4/3)$ et de rayon $\sqrt{8}/3 = 2\sqrt{2}/3$.

Exercice 11 : ✪✪ Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer $\operatorname{Re}(z^2)$ en fonction de $|z|$ et $\operatorname{Re}(z)$.

Correction : Notons $z = x + iy$ si bien que $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(z^2\right) &= x^2 - y^2 \\
&= \mathrm{Re}(z)^2 - \left(y^2 + x^2 - x^2\right) \\
&= \mathrm{Re}(z)^2 - \left(|z|^2 - \mathrm{Re}(z)^2\right) \\
&= 4\mathrm{Re}(z)^2 - |z|^2
\end{aligned}$$

Exercice 12 : ✪✪ Résoudre dans $\mathbb{U}$ le système $\left\{\begin{array}{lcl} a+b+c &=& 1 \\ abc &=& 1 \end{array}\right.$ (on pourra s'intéresser à la fonction $f : z \mapsto (z-a)(z-b)(z-c)$).

Correction : Un raisonnement par équivalences ne paraît pas simple. Raisonnons donc par analyse synthèse. Analyse : soit $(a,b,c) \in \mathbb{U}^3$ un triplet solution et soit $z \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(z) &= z^3 - (a+b+c)z^2 + z(ab+ac+bc) - abc \\
&= z^3 - z^2 + z\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) - 1 && \text{(car } abc = 1\text{)} \\
&= z^3 - z^2 + z\left(\overline{c} + \overline{b} + \overline{a}\right) - 1 && \text{(car } a,b,c \text{ appartiennent à } \mathbb{U}\text{)} \\
&= z^3 - z^2 + z\left(\overline{a+b+c}\right) - 1 \\
&= z^3 - z^2 + z \times \overline{1} - 1 \\
&= z^3 - z^2 + z - 1
\end{aligned}$$

Or, $z^3 - z^2 + z - 1 = (z-1)(z^2+1)$ (1 est racine évidente, et ensuite on trouve cette expression en factorisant par $z-1$). De plus, a,b,c sont les racines de f. Or, les racines de f sont $1, i$ et $-i$. Il en découle que a,b,c sont $1, i, -i$ (dans n'importe quel ordre). Réciproquement (synthèse), il est immédiat que $1, i$ et $-i$ sont solution du système : les seules solutions sont donc $1, i, -i$ (dans n'importe quel ordre).

Exercice 13 : ✪✪ Le but de l'exercice est de déterminer toutes les applications $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\forall (z_1, z_2, \lambda) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{lcl} \varphi(z_1 + z_2) &=& \varphi(z_1) + \varphi(z_2) \\ \varphi(z_1 \times z_2) &=& \varphi(z_1) \times \varphi(z_2) \\ \varphi(\lambda z_1) &=& \lambda \varphi(z_1) \end{array}\right.$$

1. Montrer qu'une solution du problème est entièrement déterminée par ses images en 1 et en i.
2. En déduire toutes les solutions du problème.

Correction :

1. Soit φ une solution du problème. Montrons que toute image est entièrement déterminée par $\varphi(1)$ et $\varphi(i)$, c'est-à-dire qu'on peut exprimer toute image en fonction de ces deux images. Il suffit de voir que, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, en utilisant la propriété 1 et la propriété 3, et puisque x et y sont des réels :

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \varphi(x) + \varphi(iy) \\
&= x\varphi(1) + y\varphi(i)
\end{aligned}$$

2. On sait que $\varphi(1) = \varphi\left(1^2\right) = \varphi(1)^2$ donc $\varphi(1) = 1$ ou $\varphi(1) = 0$ (les solutions de $x^2 = x$).
   - Supposons que $\varphi(1) = 0$. Alors $\varphi\left((-1)^2\right) = \varphi(1) = 0$ donc $\varphi\left((-1)^2\right) = \varphi(-1)^2 = 0$ si bien que $\varphi(-1) = 0$. En utilisant le fait que $-1 = i^2$, on trouve de même que $\varphi(i) = 0$ donc, d'après la question précédente, $\varphi(z) = 0$ pour tout z : φ est la fonction nulle.
   - Supposons que $\varphi(1) = 1$. Alors $\varphi(-1) = (-1)\varphi(1) = -1$. Dès lors, $\varphi(i^2) = \varphi(-1) = -1$ donc $\varphi(i^2) = \varphi(i)^2 = -1$ donc $\varphi(i) = \pm i$. Si $\varphi(i) = i$ alors, d'après la question précédente, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}, \varphi(z) = x + iy = z$ donc φ est l'identité de $\mathbb{C}$. Si $\varphi(i) = -i$ alors $\varphi(z) = x - iy$ donc φ est la conjugaison.

Finalement, les seules solutions ÉVENTUELLES (on est dans la partie analyse d'un raisonnement par analyse-synthèse) sont la fonction nulle, l'identité et la conjugaison. Réciproquement, il est immédiat que ces trois fonctions sont bien solutions.

Exercice 14 : ✪✪ Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2} \times |z|$.

Correction : $|z| = |\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |i\mathrm{Im}(z)|$ d'après l'inégalité triangulaire, ce qui donne la première inégalité puisque $|i| = 1$. Pour la seconde, raisonnons par équivalences. La première équivalence vient du fait que les nombres sont positifs et que la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (et du fait que $|x|^2 = x^2$).

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \leq \sqrt{2} \times |z| & \iff \mathrm{Re}(z)^2 + 2 \times |Re(z)| \times |\mathrm{Im}(z)| + \mathrm{Im}(z)^2 \leq 2\left(\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2\right) \\ & \iff 2 \times |\mathrm{Re}(z)| \times |\mathrm{Im}(z)| \leq \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \\ & \iff \pm 2\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) \leq \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \end{aligned}$$

Or, ces deux inégalités (une avec $+$ et une avec $-$) sont vraies car $\mathrm{Re}(z)^2 - 2\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z)^2 = (\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z))^2 \geq 0$ et idem pour l'autres. On en déduit l'inégalité voulue (on a travaillé par équivalences : la dernière propriété étant vraie, la première l'est aussi).

Exercice 15 : ✪✪ Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Montrer que l'argument principal de z est égal à $2\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$.

Correction : Rappelons que l'argument principal d'un complexe z (non nul) est l'unique argument de z appartenant à $]-\pi\,;\pi]$. Tout d'abord, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ donc son argument principal appartient à $]-\pi\,;\pi[$. De plus,

$$\theta = 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right) \in]-\pi\,;\pi[$$

car une Arctangente appartient à $]-\pi/2\,;\pi/2[$: il suffit donc de prouver que θ est un argument de z c'est-à-dire que

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{y^2+y^2}}$$

Tout d'abord (rappelons que $\cos(\mathrm{Arctan}(u)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$) :

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \cos\left(2\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)\right) \\ &= 2\cos^2\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)\right) - 1 \\ &= \frac{2}{1 + \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)^2}} - 1 \\ &= \frac{2}{1 + \dfrac{y^2}{x^2+y^2+x^2+2x\sqrt{x^2+y^2}}} - 1 \\ &= \frac{4x^2+2y^2+4x\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2+2y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}} - 1 \\ &= \frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2+2y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x\left(2x+2\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(2\sqrt{x^2+y^2}+2x\right)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

Il en découle que $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Pour conclure, il suffit de prouver que $\sin(\theta)$ et y ont le même signe. Or, θ est du même signe que y (car Arctan est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$) et $\sin(\theta)$ est du même signe que θ sur $]-\pi\,;\pi\,[$ donc du signe de y ce qui permet de conclure.

Exercice 16 : ✪✪✪ Soit f définie de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = z - \dfrac{1}{z}$.

1. Soit $u \in \mathbb{C}$. Donner selon u le nombre d'antécédents de u par f.
2. Donner l'image de $\mathbb{U}$ par f et son interprétation géométrique.
3. Montrer que f est une bijection entre $D^*(0,1)$ (disque ouvert de rayon 1 privé de son centre) et son image.

Correction :

1. On cherche le nombre de solutions de l'équation (d'inconnue $z \neq 0$) $f(z) = u$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned} f(z) = u \quad &\iff \quad z - \frac{1}{z} = u \\ &\iff \quad z^2 - uz - 1 = 0 \end{aligned}$$

   Sur $\mathbb{C}$, il n'y a que deux cas : soit $\Delta \neq 0$, et alors il y a deux solutions, soit $\Delta = 0$ et alors il n'y en a qu'une. Or, $\Delta = u^2 + 4$. Il y a deux cas : si $u = \pm 2i$, alors $\Delta = 0$ donc cette équation a une unique solution, i.e. u a un unique antécédent par f. Si $u \neq \pm 2i$, alors $\Delta \neq 0$ donc cette équation a deux solutions.
2. Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors $1/z = \overline{z}$ si bien que

$$\begin{aligned} f(z) &= z - \overline{z} \\ &= 2i\mathrm{Im}(z) \end{aligned}$$

   Or, $z \in \mathbb{U}$ donc $\mathrm{Im}(z) \in [-1\,;1]$ si bien que $f(z)$ appartient au segment sur l'axe des ordonnées $[-2i\,;2i]$. On a prouvé l'inclusion $f(\mathbb{U}) \subset [-2i\,;2i]$. Réciproquement, soit $iy \in [-2i\,;2i]$ avec $y \in [-2\,;2]$. Il en découle que $y/2 \in [-1\,;1]$ donc il existe $z \in \mathbb{U}$ tel que $\mathrm{Im}(z) = y/2$ et donc, finalement, $f(z) = iy$. On en déduit l'inclusion réciproque : $f(\mathbb{U})$ est donc le segment de l'axe des ordonnées $[-2i\,;2i]$.
3. Une fonction étant toujours surjective sur son image, il suffit de prouver que f est injective sur $D^*(0,1)$. Soient z_1 et z_2 deux éléments de $D^*(0,1)$. Supposons que $f(z_1) = f(z_2)$. Posons $u = f(z_1) = f(z_2)$. On sait (cf. question 1) que u admet un ou deux antécédents. Dans le cas où u admet deux antécédents, ses antécédents sont solutions de l'équation $z^2 - uz - 1 = 0$ donc le produit de ces deux antécédents vaut -1 (on sait que le produit des solutions de $az^2+bz+c=0$ vaut c/a) donc ces deux antécédents ne peuvent pas être tous les deux de module strictement inférieur à 1. Il en découle que $z_1 = z_2$: f est injective sur $D^*(0,1)$ ce qui permet de conclure.

Exercice 17 - Le demi-plan de Poincaré : ✪✪✪ On définit le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$, on définit la fonction f par $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{H}$.
2. Soit $z \in \mathbb{H}$. Montrer que $\mathrm{Im}(f(z)) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$.
3. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{H}$ dans lui-même.

Correction :

1. Si $c = 0, f$ est définie sur $\mathbb{C}$ donc sur $\mathbb{H}$. Si $c \neq 0$, f est définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-d/c\}$. Or, $-d/c$ est un réel donc est de partie imaginaire nulle : ce n'est pas un élément de $\mathbb{H}$: f est bien définie sur $\mathbb{H}$.
2. On note $z = x + iy$. Donnons la partie imaginaire de $f(z)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{ac|z|^2 + adz + bc\overline{z} + bd}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{ac|z|^2 + (ad+bc)x + bd + iy(ad-bc)}{|cz+d|^2} \end{aligned}$$

En d'autres termes, la partie imaginaire de $f(z)$ est égale à $\dfrac{y(ad-bc)}{|cz+d|^2}$ et puisque $ad-bc=1$ on a le résultat voulu : $\operatorname{Im}(f(z)) = \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$.

3. Montrons que f est une bijection de $\mathbb{H}$ dans lui-même. Il faut montrer que
   - f va bien de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$.
   - f est injective sur $\mathbb{H}$.
   - tous les éléments de $\mathbb{H}$ sont atteints.
   - les éléments de $\mathbb{H}$ admettent comme antécédent un élément de $\mathbb{H}$ (ils pourraient être atteints par un élément n'étant pas dans $\mathbb{H}$!).

   Allons-y !
   - D'après la question précédente, si $z \in \mathbb{H}, \operatorname{Im}(z) > 0$ ce qui implique que $\operatorname{Im}(f(z)) > 0$: $f(z) \in \mathbb{H}$. On en déduit que f est à valeurs dans $\mathbb{H}$.
   - Soit $u \in \mathbb{H}$. Procédons par équivalences :

$$
\begin{aligned}
u \in f(\mathbb{H}) & \iff \exists z \in \mathbb{H} \quad f(z) = u \\
& \iff \exists z \in \mathbb{H} \quad \frac{az+b}{cz+d} = u \\
& \iff \exists z \in \mathbb{H} \quad az+b = u(cz+d) \\
& \iff \exists z \in \mathbb{H} \quad z(a-uc) = du-b \\
& \iff \exists z \in \mathbb{H} \quad z = \frac{du-b}{a-uc}
\end{aligned}
$$

     En effet, si c est nul, alors a ne peut pas être nul car $ad-bc=1$, et si c est non nul, alors u ne peut pas être égal à a/c car u a une partie imaginaire strictement positive. Il en découle que $a-uc \neq 0$. En particulier, f est injective.
   - De plus, la dernière condition est toujours vérifiée donc f est surjective.
   - Enfin, f^{-1} est la fonction définie sur $\mathbb{H}$ par

$$f^{-1}(u) = \frac{du-b}{a-uc}$$

     Il est immédiat que cette fonction vérifie la même condition que f. Par conséquent, d'après la question précédente, par symétrie des rôles, $f^{-1}(u) \in \mathbb{H}$: $f(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.

   En conclusion, f est une bijection de $\mathbb{H}$ dans lui-même.

7.2 Inégalité triangulaire

Exercice 18 : ✪ Soient $z_1, \dots, z_n$ des complexes de module 1. On pose $z = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n z_k\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}\right)$. Montrer que z est un réel, et que $0 \leq z \leq n^2$.

Correction : Rappelons que si $|z|=1$, alors $1/z = \overline{z}$. Dès lors :

$$
\begin{aligned}
z & = \left(\sum_{k=1}^n z_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^n \overline{z_k}\right) \\
& = \left(\sum_{k=1}^n z_k\right) \times \overline{\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)} \\
& = \left|\sum_{k=1}^n z_k\right|^2
\end{aligned}
$$

ce qui prouve que z est un réel positif. Pour l'autre inégalité, d'après l'inégalité triangulaire et les z_k étant de module 1,

$$\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k| = n$$

ce qui permet de conclure puisque la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 19 : ✪ Soient z_1 et z_2 deux complexes. Montrer que

- $1 \leq |z_1 + z_2| + |1 + z_1| + |z_2|$
- $|z_1 + z_2|^2 \leq \left(1 + |z_1|^2\right)\left(1 + |z_2|^2\right)$

Correction : Pour la première :

$$\begin{aligned} 1 &= |1| \\ &= |1 + z_1 - (z_1 + z_2) + z_2| \\ &\leq |1 + z_1| + |z_1 + z_2| + |z_2| \end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire. Pour la deuxième, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ d'après l'inégalité triangulaire, et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$ si bien que $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$. Il suffit donc de prouver que $(|z_1| + |z_2|)^2 \leq (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$ c'est-à-dire que

$$|z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 1 + |z_1|^2|z_2|^2$$

En d'autres termes, il suffit de prouver que

$$1 + |z_1|^2|z_2|^2 - 2|z_1||z_2| = (|z_1||z_2| - 1)^2 \geq 0$$

ce qui est immédiat.

Exercice 20 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{U}$. Montrer que $\left|\dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leq \dfrac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}$.

Correction : D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |z|^k$$

Or, le membre de gauche est égal au membre de gauche de l'énoncé, et le membre de droite, au membre de droite de l'énoncé.

Exercice 21 : ✪ Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Simplifier les quantités $(a + b) + (a - b)$ et $(a + b) - (a - b)$. En déduire que $|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$. Cas d'égalité ?

Correction : $(a + b) + (a - b) = 2a$ et $(a + b) - (a - b) = 2b$. Il en découle que

$$a = \frac{(a + b) + (a - b)}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{(a + b) - (a - b)}{2}$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$|a| \leq \frac{|a + b| + |a - b|}{2} \qquad \text{et} \qquad |b| \leq \frac{|a + b| + |a - b|}{2}$$

ce qui permet de conclure. Il y a égalité si et seulement si les deux inégalités ci-dessus sont des égalités (quand on somme des inégalités, on a une égalité à la fin si et seulement si toutes les inégalités sommées sont des égalités). Or, d'après le cours, il y a égalité dans l'égalité triangulaire si et seulement si les complexes sont positivement colinéaires. Dès lors, il y a égalité si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $a + b = \lambda_1(a - b)$ et $a + b = \lambda_2 \times (-(a - b))$. Or, $a - b$ et $-(a - b)$ sont de signes opposés donc ceci se produit si et seulement si $a + b = 0$ si et seulement si $a = b = 0$ (car alors $a - b$ est aussi nul).

Exercice 22 - Introduction à l'ensemble de Mandelbrot : ✪✪✪ Soit $c \in \mathbb{C}$. On définit la suite (z_n) par

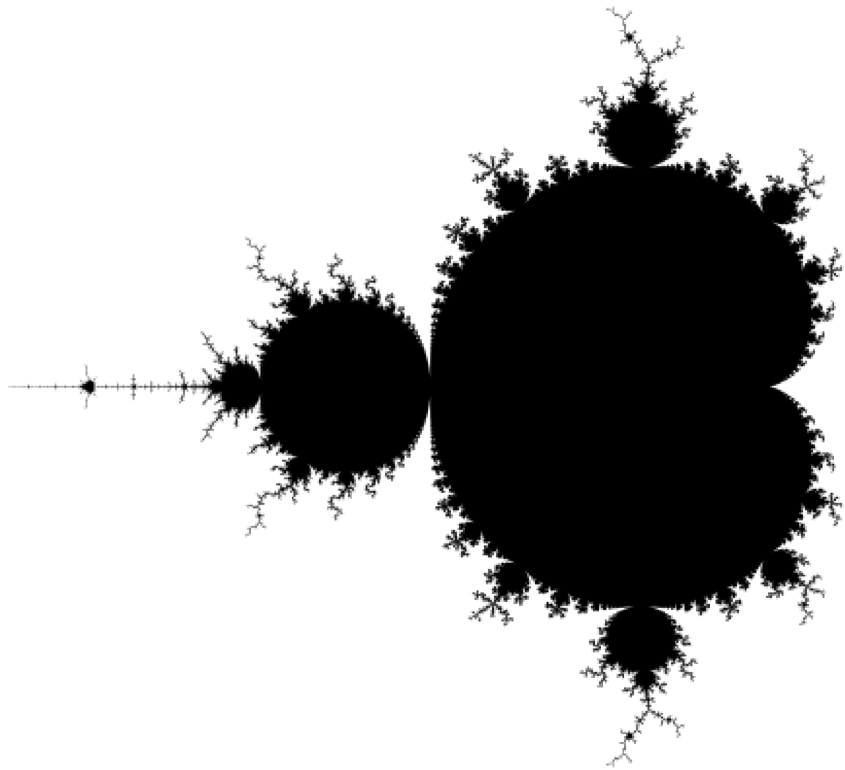
$$z_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = {z_n}^2 + c$$

La suite (z_n) dépend évidemment de c, mais on ne l'écrit pas pour ne pas alourdir les notations.

1. On suppose que $|c| > 2$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1, |z_n| \geq \dfrac{|c|^n}{2^{n-1}}$.
   (b) En déduire que $|z_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
2. On suppose à présent que $|c| \leq 2$ et qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|z_{n_0}| > 2$. On pose alors $\alpha = |z_{n_0}|$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq n_0, |z_n| \geq \alpha$ puis que $|z_{n+1}| \geq |z_n| \times \left(\alpha - \dfrac{|c|}{\alpha}\right)$.

(b) En déduire que $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. On pourra minorer $(|z_n|)$ par une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1.

Remarque : L'ensemble de Mandelbrot peut être défini par : $M = \{c \in \mathbb{C} \mid |z_n| \nrightarrow +\infty\}$, c'est-à-dire l'ensemble des c tels que la suite (z_n) associée ne tend pas vers $+\infty$ en module. L'ensemble M est un ensemble d'une grande complexité (« A little messy ? The Mandelbrot set of complex numbers is a little messy, this is chaos ! »), qui a beaucoup de propriétés intéressantes, dont l'allure est donnée ci-dessous :



On vient de montrer que M était inclus dans le disque de centre O de rayon 2. Plus précisément, en abscisses, il va de -2 à $1/4$ et, en ordonnées, de (environ) -1 à 1.

La deuxième partie de cet exercice nous fournit un algorithme très pratique pour tracer l'allure de cet ensemble : on prend un complexe c, on calcule les premiers termes de la suite (z_n) associée, disons les cinquante premiers (elle converge ou diverge très vite en général), et si un des termes est de module strictement supérieur à 2, alors c n'appartient pas à M, et on ne fait rien, sinon on colorie le pixel correspondant en noir.

Correction :

1. (a)
- Si $n \geq 1$, notons H_n : « $|z_n| \geq \dfrac{|c|^n}{2^{n-1}}$ ».
- On a d'une part $z_1 = c$ donc $|z_1| = |c|$ et d'autre part $\dfrac{|c|^1}{2^{1-1}} = |c|$: H_1 est vraie.
- Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. D'après l'inégalité triangulaire,

$$|z_{n+1}| = \left|{z_n}^2 + c\right| \geq |z_n|^2 - |c|$$

Or, par hypothèse de récurrence, $|z_n| \geq \dfrac{|c|^n}{2^{n-1}} \geq 0$. Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, il vient

$$\begin{aligned} |z_{n+1}| &\geq \left(\frac{|c|^n}{2^{n-1}}\right)^2 - |c| \\ &\geq \frac{|c|^{2n}}{2^{2n-2}} - |c| \\ &\geq \frac{|c|^{n+1}}{2^n} \times \left(\frac{|c|^{n-1}}{2^{n-2}} - \frac{|c|2^n}{|c|^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

Or, $|c| > 2$ donc $|c|/2 > 1$ si bien que :

$$\frac{|c|^{n-1}}{2^{n-2}} = |c| \times \left(\frac{|c|}{2}\right)^{n-2} > |c|$$

et

$$\frac{|c|2^n}{|c|^{n+1}} = \left(\frac{2}{|c|}\right)^n \leq 1$$

si bien que

$$\left(\frac{|c|^{n-1}}{2^{n-2}} - \frac{|c|2^n}{|c|^{n+1}}\right) > |c| - 1 > 2 - 1 = 1$$

ce qui permet de conclure : H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \geq 1$,

$$|z_n| \geq |c| \times \left(\frac{|c|}{2}\right)^{n-1}$$

Or, la suite de droite est une suite géométrique de raison $|c|/2 > 1$ et diverge donc vers $+\infty$. D'après le théorème de minoration, on a le résultat voulu.

2. (a) Faisons encore une fois un raisonnement par récurrence.
   - Si $n \geq n_0$, soit l'hypothèse de récurrence H_n : « $|z_n| \geq \alpha$ ».
   - Par définition de $\alpha, |z_{n_0}| = \alpha$, donc H_{n_0} est vraie.
   - Soit n quelconque supérieur ou égal à n_0 tel que H_n soit vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $|z_n| \geq \alpha > 0$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |c| = |z_n| \times \left(|z_n| - \frac{|c|}{|z_n|}\right)$$

   Par hypothèse de récurrence, $|z_n| \geq \alpha$. De plus, la fonction $f : x \mapsto x - \dfrac{|c|}{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (on peut calculer la dérivée ou voir que c'est la différence d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante). Dès lors, $|z_{n+1}| \geq |z_n| \times f(\alpha)$. Or, $\alpha > 2$ et $|c|/\alpha < 1$ donc $f(\alpha) > 1$ donc $|z_{n+1}| > |z_n| \geq \alpha$. En d'autres termes, H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq n_0$.

   La deuxième partie de la question est immédiate (on a déjà effectué le raisonnement, mais c'était à l'intérieur d'un raisonnement par récurrence, donc il faut le refaire). Soit $n \geq n_0$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$|z_{n+1}| \geq |z_n|^2 - |c| = |z_n| \times \left(|z_n| - \frac{|c|}{|z_n|}\right) = |z_n| \times f(|z_n|)$$

   Or, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après ce qui précède, et, d'après ce qui précède, $|z_n| \geq \alpha$. Dès lors, $|z_{n+1}| \geq |z_n| \times f(\alpha)$: c'est le résultat voulu.

   (b) On montre par récurrence à l'aide de la question précédente que, pour tout $n \geq n_0$, $|z_n| \geq |z_{n_0}| \times \left(\alpha - \dfrac{|c|}{\alpha}\right)^{n-n_0}$, ce qui permet de conclure à l'aide du théorème de minoration puisqu'on a minoré $|z_n|$ par le terme général d'une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1.

7.3 Résolution d'équations

Exercice 23 : ✪✪ Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 + (2-4i)z^2 - (2+4i)z + 16 + 8i = 0$ sachant que cette équation admet une racine imaginaire pure.
2. $z^3 - (3+2i)z^2 + (3+11i)z - 2(1+7i) = 0$ sachant que cette équation admet une racine réelle.
3. $z^3 - (2+3i)z^2 - (3-5i)z + (6+2i) = 0$.
4. $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z+1)^2 = 0$.
5. $\overline{z} = z^n$ $(n \geq 2)$.

Correction :

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons pour plus de commodité $f(z)$ le membre de gauche. On cherche une racine imaginaire pure, et donc on va chercher quand $i\alpha$ est solution de l'équation. On rappelle que $i^3 = -i$ et que $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned} f(i\alpha) = 0 \quad & \iff \quad -i\alpha^3 - (2+4i)\alpha^2 - i(2+4i)\alpha + 16 + 8i = 0 \\ & \iff \quad \left\{ \begin{array}{l} -\alpha^3 - 4\alpha^2 - 2\alpha + 8 = 0 \\ \\ -2\alpha^2 + 4\alpha + 16 = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

En effet, la première ligne est la partie imaginaire et la seconde la partie réelle. Les solutions de la seconde équation sont 4 et -2. Or, 4 est solution de la première équation et -2 ne l'est pas, c'est-à-dire que $4i$ est solution de l'équation

$f(z)=0$. Il existe alors $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ tels que pour tout complexe z, $f(z)=(z-4i)(az^2+bz+c)$. En identifiant les termes de plus haut degré, on trouve que $a=1$ et en identifiant les termes constants, on trouve $c=-2+4i$. En développant, le terme devant z^2 vaut d'un côté $2-4i$ et de l'autre $-4i+b$. Il en découle que $b=2$. Résolvons à présent l'équation $z^2+2z-2+4i=0$. Tout d'abord, $\Delta=2^2-4(-2+4i)=12-16i$. De plus,

$$\begin{aligned}|\Delta| &= \sqrt{12^2+16^2}\\ &= \sqrt{144+256}\\ &= \sqrt{400}\\ &= 20\end{aligned}$$

(et oui, il faut savoir calculer 16^2, soit en posant la multiplication, soit en calculant $(15+1)^2$ à l'aide d'une identité remarquable). Soit $\delta=a+ib$. Alors $\delta^2=\Delta$ si et seulement si

$$\begin{cases} a^2-b^2=12\\ 2ab=-16\\ a^2+b^2=20\end{cases}$$

c'est-à-dire que $a^2=16$ et $b^2=4$. Or, $ab<0$ donc a et b sont de signes différents. Ainsi, $\delta=4-2i$ convient. Il en découle que les solutions de $z^2+2z-2+4i=0$ sont

$$z_1=\frac{-2-(4-2i)}{2}=-3+i \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{-2+4-2i}{2}=1-i$$

Finalement, $S=\{4i;-3+i;1-i\}$.

2. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Notons pour plus de commodité $f(z)$ le membre de gauche. On cherche une racine réelle, et donc on va chercher quand α est solution de l'équation.

$$\begin{aligned} f(\alpha)=0 &\iff \alpha^3-(3+2i)\alpha^2+(3+11i)\alpha-2(1+7i)=0\\ &\iff \begin{cases}\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-2=0\\ -2\alpha^2+11\alpha-14=0\end{cases}\end{aligned}$$

En effet, la première ligne est la partie imaginaire et la seconde la partie réelle. Les solutions de la seconde équation sont 2 et 7/2. Or, 2 est solution de la première équation et 7/2 ne l'est pas. Il existe alors $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ tels que pour tout complexe z, $f(z)=(z-2)(az^2+bz+c)$. En identifiant les termes de plus haut degré, on trouve que $a=1$ et en identifiant les termes constants, on trouve $c=1+7i$. En développant, le terme devant z^2 vaut d'un côté $-3-2i$ et de l'autre $-2+b$. Il en découle que $b=-1-2i$. Résolvons à présent l'équation $z^2-(1+2i)z+1+7i=0$. On trouve de même que les solutions sont $-1+3i$ et $2-i$ si bien que $S=\{2;-1+3i;2-i\}$.

3. 2 est racine évidente. On factorise ensuite par 2 et on trouve que les autres racines sont $-1+i$ et $1+2i$ si bien que les racines sont $2, -1+i$ et $1+2i$.

4. Il faut reconnaître une identité remarquable. Plus précisément, si $z\in\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(z^2-4z+5)^2+(z+1)^2 &= (z^2-4z+5)^2-i^2(z+1)^2\\ &= (z^2-4z+5)^2-(i(z+1))^2\\ &= (z^2-4z+5+i(z+1))\times(z^2-4z+5-(i(z+1)))\\ &= (z^2+(-4+i)z+5+i)\times(z^2-(4+i)z+5-i)\end{aligned}$$

si bien que

$$(z^2-4z+5)^2+(z+1)^2=0 \iff z^2+(-4+i)z+5+i=0 \qquad \text{ou} \qquad z^2-(4+i)z+5-i=0$$

On trouve de même que les solutions sont $1\pm i$ et $3\pm 2i$.

5. Celle-ci est d'un type différent. On a envie de mettre z sous forme exponentielle : il faut pour cela que z soit non nul. $z=0$ est solution de l'équation : supposons z non nul dans la suite. On note donc $z=|z|e^{i\theta}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\overline{z} = z^n & \iff |z|e^{i\theta} = |z|^n e^{in\theta} \\
& \iff |z| = |z|^n \qquad \text{et} \qquad \theta \equiv n\theta[2\pi] \\
& \iff |z|^{n-1} = 1 \qquad \text{et} \qquad (n-1)\theta \equiv 0[2\pi] \\
& \iff |z| = 1 \text{ (car } |z| \neq 0) \qquad \text{et} \qquad \theta \equiv 0 \left[\frac{2\pi}{n-1}\right]
\end{aligned}$$

Exercice 24 : ✪ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$.

Correction : Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
z \text{ est solution} & \iff z^4 \text{ est solution de l'équation } Z^2 + Z + 1 = 0 \\
& \iff z^4 = j \qquad \text{ou} \qquad z^4 = j^2 \\
& \iff z^4 = e^{2i\pi/3} \qquad \text{ou} \qquad z^4 = e^{-2i\pi/3} \\
& \iff \exists k \in [\![0 \,;\, 3]\!], z = e^{\pm 2ik\pi/12}
\end{aligned}$$

Exercice 25 : ✪ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Montrer que $f : z \mapsto az^2 + bz + c$ est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Plus précisément, si $y \in \mathbb{C}$, donner le nombre d'antécédents de y par f.

Correction : Soit donc $y \in \mathbb{C}$ et soit $z \in \mathbb{C}$. $f(z) = y$ si et seulement si z est solution de l'équation $az^2 + bz + (c - y) = 0$. Or, cette équation a une solution si $\Delta = 0$ et deux si $\Delta \neq 0$. Dans tous les cas, l'équation a au moins une solution donc y a au moins un antécédent : f est surjective. Plus précisément, puisque $\Delta = b^2 - 4a(c - y) = b^2 - 4ac + 4ay$:

- si $y = \dfrac{-b^2}{4a} + c$, alors $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution, y a un unique antécédent.
- sinon, l'équation a deux solutions, y a deux antécédents.

Exercice 26 : ✪✪ Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. Trouver deux **réels** p et q tels que $z^2 + pz + q = 0$.

Correction : Analyse : si p et q conviennent, alors z et $\overline{z}$ (car p et q sont réels) sont solutions de l'équation $Z^2 + pZ + q = 0$ si bien que $Z^2 + pZ + q = (Z - z)(Z - \overline{z}) = Z^2 - 2\text{Re}(z)Z + |z|^2$. Finalement, $p = -2\text{Re}(z)$ et $q = |z|^2$ conviennent. Synthèse : ils conviennent. En effet :

$$\begin{aligned}
z^2 - 2\text{Re}(z)z + |z|^2 & = z\,(z - 2\text{Re}(z)) + |z|^2 \\
& = z \times (-\text{Re}(z) + i\text{Im}(z)) + |z|^2 \\
& = z \times (-\overline{z}) + |z|^2 \\
& = -|z|^2 + |z|^2 \\
& = 0
\end{aligned}$$

Exercice 27 : ✪✪ Résoudre le système suivant, où x et y sont deux réels positifs :

$$\left\{\begin{aligned}
x\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 2 \\
y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 3
\end{aligned}\right.$$

On pourra calculer la quantité très difficile qu'est $2 + 3i \dots$

Correction : Soient x et y deux réels positifs. Posons $z = x + iy$. En utilisant le fait que deux complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$\begin{aligned}
x \text{ et } y \text{ sont solutions} \quad & \iff \quad x\left(1+\frac{1}{x^2+y^2}\right)+iy\left(1-\frac{1}{x^2+y^2}\right)=2+3i \\
& \iff \quad x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}=2+3i \\
& \iff \quad z+\frac{\overline{z}}{|z|^2}=2+3i \\
& \iff \quad z+\frac{1}{z}=2+3i \\
& \iff \quad z^2-(2+3i)z+1=0
\end{aligned}$$

On trouve de même que dans l'exercice 23 que les solutions sont

$$\frac{2-\sqrt{3}+i(3-2\sqrt{3})}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{2+\sqrt{3}+i(3+2\sqrt{3})}{2}$$

Cependant, y est positif donc la première solution est à exclure, on ne garde que la seconde. En conclusion, le seul couple solution est $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 28 : ✪✪ Soit $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que l'équation

$$z^4+2\lambda^2z^2(1+\cos(\theta))\cos(\theta)+\lambda^4(1+\cos(\theta))^2=0$$

admet exactement quatre racines notées z_1, z_2, z_3, z_4 que l'on explicitera.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} {z_k}^n$.

Correction :

1. On reconnaît une équation avec un carré : par conséquent z est solution de l'équation ci-dessus (qu'on note (E)) si et seulement si z^2 est solution de l'équation (E') suivante :

$$Z^2+2\lambda^2Z(1+\cos(\theta))\cos(\theta)+\lambda^4(1+\cos(\theta))^2=0$$

On a

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4\lambda^4(1+\cos(\theta))^2\cos^2(\theta)-4\lambda^4(1+\cos(\theta))^2 \\
&= 4\lambda^4(1+\cos(\theta))^2\left(\cos^2(\theta)-1\right) \\
&= -4\lambda^4(1+\cos(\theta))^2\sin^2(\theta)
\end{aligned}$$

Une racine carrée de Δ est $\delta = 2i\lambda^2(1+\cos(\theta))\sin(\theta)$. Les deux racines sont donc

$$\begin{aligned}
Z_{1,2} &= \frac{-2\lambda^2(1+\cos(\theta))\cos(\theta)\pm 2i\lambda^2(1+\cos(\theta))\sin(\theta)}{2} \\
&= -\lambda^2(1+\cos(\theta))\times(\cos\theta \pm i\sin(\theta)) \\
&= -\lambda^2\times 2\cos^2(\theta/2)\times e^{\pm i\theta} \\
&= i^2\lambda^2\times 2\cos^2(\theta/2)\times e^{i\theta}
\end{aligned}$$

Par conséquent, les racines de l'équation (E) sont les racines carrées (au sens complexe) des nombres ci-dessus, à savoir (rappelons qu'un complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées, donc si on a une racine carrée, il suffit de la multiplier par -1 pour avoir l'autre) :

$$\pm i\sqrt{2}\lambda\cos(\theta/2)e^{i\theta/2} \qquad \text{et} \qquad \pm\, i\sqrt{2}\lambda\cos(\theta/2)e^{-i\theta/2}$$

2. Notons

$$z_1 = i\sqrt{2}\lambda\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}, \qquad z_2 = -z_1, \qquad z_3 = i\sqrt{2}\lambda\cos(\theta/2)e^{-i\theta/2} \qquad \text{et} \qquad z_4 = -z_3$$

On cherche donc la valeur de $S = {z_1}^n + (-z_1)^n + {z_3}^n + (-z_3)^n$. Si n est impair, alors $S = 0$. Supposons donc n pair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ si bien que

$$\begin{aligned} S &= 2{z_1}^{2k} + 2{z_3}^{2k} \\ &= 2 \times \left(i\sqrt{2}\lambda\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}\right)^{2k} + 2 \times \left(i\sqrt{2}\lambda\cos(\theta/2)e^{-i\theta/2}\right)^{2k} \\ &= 2^{k+1} \times (-1)^k \times \lambda^{2k} \times \left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}\right) \\ &= 2^{k+2} \times (-1)^k \times \lambda^{2k} \times \cos(k\theta) \end{aligned}$$

Exercice 29 : ✪✪✪ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Donner une CNS sur a, b et c pour que les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ soient toutes imaginaires pures.

Correction : Par analyse synthèse. Analyse : supposons que toutes les solutions soient imaginaires pures. Notons les solutions z_1 et z_2 (avec éventuellement $z_1 = z_2$ si $\Delta = 0$). On sait que $z_1 \times z_2 = c/a$ donc $c/a \in \mathbb{R}$ et $z_1 + z_2 = -b/a$ donc $-b/a \in i\mathbb{R}$ donc $b/a \in i\mathbb{R}$. De plus, si on note δ une racine carrée de Δ (i.e. un complexe tel que $\delta^2 = \Delta$), alors z_1 et z_2 sont égales à

$$\frac{-b \pm \delta}{2a} = -\frac{b}{2a} + \pm\frac{\delta}{2a}$$

Or, $-b/a$ est un imaginaire pur donc $-b/2a$ également. Il en découle que $\delta/2a$ est aussi un imaginaire pur donc il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\delta = 2ia\gamma$ si bien que $\Delta = a^2 \times (-4\gamma^2)$. Finalement, $\Delta/a^2 = -4\gamma^2$ est un réel négatif. Résumons : $c/a \in \mathbb{R}$, $b/a \in i\mathbb{R}$ et $\Delta/a^2 \in \mathbb{R}_-$. Montrons que ces conditions sont suffisantes.

Synthèse : supposons que $c/a \in \mathbb{R}$, que $b/a \in i\mathbb{R}$ et que $\Delta/a^2 \in \mathbb{R}_-$. Il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $c = a \times \alpha$ et $b = ia\beta$. Dès lors, $\Delta = -a^2\beta^2 - 4a^2\alpha = a^2\left(-b^2 - 4a^2\right)$. Or, $\Delta/a^2 = -b^2 - 4a^2 \in \mathbb{R}_-$ (attention, a et b sont complexes !) donc $4a^2 + b^2 \geq 0$ si bien que $\delta = a \times i\sqrt{4a^2 + b^2}$ vérifie $\delta^2 = \Delta^2$. Les racines sont

$$\frac{-b \pm \delta}{2a} = -\frac{i\beta}{2} \pm \frac{i\sqrt{4a^2 + b^2}}{2} \in i\mathbb{R}$$

En conclusion, les deux solutions (éventuellement égales) de l'équation sont imaginaires pures si et seulement si $c/a \in \mathbb{R}$, $b/a \in i\mathbb{R}$ et $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}_-$.

7.4 Calcul de sommes

Exercice 30 : ✪ Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2, x \not\equiv \pi/2[\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(a + kb)$
2. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2(a)\cos(ka)$
3. $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$
4. $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(ka)$
5. $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^3(kx)$.

Correction :

1. $I_n = \mathrm{Im}(S_n)$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{i(ka+b)}$.

$$S_n = e^{ib} \times \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ia}\right)^k$$

Si $a \equiv 0[2\pi]$ alors $e^{ia} = 1$ et donc $S_n = e^{ib} \times (n+1)$ donc $I_n = (n+1)\sin(b)$. Si $a \not\equiv 0[2\pi]$ alors $e^{ia} \neq 1$ et donc on peut utiliser la formule classique pour une somme géométrique.

$$\begin{aligned}
S_n &= e^{ib} \times \frac{1-e^{i(n+1)a}}{1-e^{ia}} \\
&= e^{ib} \times \frac{e^{i(n+1)a/2}\left(e^{-i(n+1)a/2}-e^{i(n+1)a/2}\right)}{e^{ia/2}\left(e^{-ia/2}-e^{ia/2}\right)} \\
&= e^{i\left(b+\frac{na}{2}\right)} \times \frac{-2i\sin(a(n+1)/2)}{-2i\sin(a/2)} \\
&= e^{i\left(b+\frac{na}{2}\right)} \times \frac{\sin(a(n+1)/2)}{\sin(a/2)}
\end{aligned}$$

et finalement $I_n = \dfrac{\sin\left(b+\frac{na}{2}\right) \times \sin(a(n+1)/2)}{\sin(a/2)}$.

2. $S_n = \cos^2(a)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(ka)$. Posons $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(ka)$. Alors $T_n = \mathrm{Re}(A_n)$ avec $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(e^{ia}\right)^k$. Là aussi, deux cas : si $a \equiv 0[2\pi]$ alors $e^{ia}=1$ donc $A_n = n$ donc $T_n = n$ et finalement $S_n = n\cos^2(a)$. Supposons à présent que $a \not\equiv 0[2\pi]$. Alors $e^{ia} \neq 1$ et (attention, la somme commence en 1) :

$$\begin{aligned}
A_n &= e^{ia} \times \frac{1-e^{ina}}{1-e^{ia}} \\
&= e^{ia} \times \frac{e^{ina/2} \times \left(e^{-ina/2}-e^{ina/2}\right)}{e^{ia/2} \times \left(e^{-ia/2}-e^{ia/2}\right)} \\
&= e^{\frac{i(n+1)a}{2}} \times \frac{-2i\sin(na/2)}{-2i\sin(a/2)} \\
&= e^{\frac{i(n+1)a}{2}} \times \frac{\sin(na/2)}{\sin(a/2)}
\end{aligned}$$

et finalement $S_n = \cos^2(a) \times \cos\left(\dfrac{(n+1)a}{2}\right) \times \dfrac{\sin(na/2)}{\sin(a/2)}$.

3. Tout d'abord, $T_n = \mathrm{Re}(A_n)$ où $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)$. Cherchons quand la raison vaut 1.

$$\frac{e^{ix}}{\cos(x)} = 1 \iff e^{ix} = \cos(x) \iff \sin(x) = 0 \iff x \equiv 0[\pi]$$

Si c'est le cas, alors $A_n = (n+1)$ donc $T_n = (n+1)$. Supposons que $x \not\equiv 0[\pi]$. Alors la raison est différente de 1 et on a :

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1-\left(\dfrac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{e^{ix}}{\cos(x)}} \\
&= \frac{\dfrac{\cos^{n+1}(x)-e^{i(n+1)x}}{\cos^{n+1}(x)}}{\dfrac{\cos(x)-e^{ix}}{\cos(x)}} \\
&= \frac{\cos^{n+1}(x)-e^{i(n+1)x}}{\cos^n(x)} \times \frac{1}{\cos(x)-e^{ix}} \\
&= \frac{\cos^{n+1}(x)-e^{i(n+1)x}}{\cos^n(x)} \times \frac{1}{-i\sin(x)} \\
&= \frac{\cos^{n+1}(x)-\cos((n+1)x)-i\sin((n+1)x)}{\cos^n(x)} \times \frac{i}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle, on trouve finalement :

$$A_n = \frac{\sin((n+1)x)}{\cos^n(x) \times \sin(x)}$$

4. On linéarise, c'est-à-dire que

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1-\cos(2ka)}{2} = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \cos(2ka)$$

Notons $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(2ka)$. Alors $A_n = \mathrm{Re}(B_n)$ où $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(e^{2ia}\right)^k$. Si $a \equiv 0[\pi]$ alors $e^{2ia} = 1$ si bien que $B_n = (n+1)$. On trouve alors $A_n = (n+1)$ et on trouve que $U_n = 0$. Supposons que $a \not\equiv 0[\pi]$. Alors $e^{2ia} \neq 1$ et on fait comme d'habitude :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1-e^{2i(n+1)a}}{1-e^{2ia}} \\ &= \frac{e^{i(n+1)a} \times \left(e^{-i(n+1)a} - e^{i(n+1)a}\right)}{e^{ia} \times (e^{-ia} - e^{ia})} \\ &= e^{ina} \times \frac{-2i\sin((n+1)a)}{-2i\sin(a)} \\ &= e^{ina} \times \frac{\sin((n+1)a)}{\sin(a)} \end{aligned}$$

On trouve donc $A_n = \cos(na) \times \dfrac{\sin((n+1)a)}{\sin(a)}$ et donc

$$U_n = \frac{n+1}{2} - \frac{\cos(na)\sin((n+1)a)}{2\sin(a)}$$

5. Idem, on commence par linéariser en utilisant la formule $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$:

$$V_n = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \cos(3kx) + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

Utilisons la question 2 et la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(ka)$:

- Si $x \equiv 0[2\pi]$ alors $3x \equiv 0[6\pi]$ donc $3x \equiv 0[2\pi]$ (un multiple de 6π est aussi un multiple de 2π) et donc $V_n = n$.
- Si $3x \equiv 0[2\pi]$ i.e. si $x \equiv 0[2\pi/3]$ mais $x \not\equiv 0[2\pi]$ alors

$$V_n = \frac{n}{4} + \frac{3}{4} \times \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \times \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$$

- Supposons enfin que $x \not\equiv 0[2\pi/3]$. Alors :

$$V_n = \frac{1}{4} \times \cos\left(\frac{3(n+1)x}{2}\right) \times \frac{\sin(3nx/2)}{\sin(3x/2)} + \frac{3}{4} \times \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \times \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$$

Exercice 31 : ✪ Soient $x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$
2. $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{2021} \binom{2021}{k} j^k$
3. ✪✪ $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(z + e^{2ik\pi/n}\right)^n$.

Correction :

1. $S_n = \mathrm{Re}(T_n)$ où

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{ix}\right)^k \\
&= \left(e^{ix}+1\right)^n \\
&= \left(e^{ix/2}\left(e^{ix/2}+e^{-ix/2}\right)\right)^n \\
&= \left(e^{ix/2} \times 2\cos(x/2)\right)^n \\
&= 2^n \cos^n(x/2) \times e^{inx/2}
\end{aligned}$$

et on trouve finalement que $S_n = 2^n \cos^n(x/2)\cos(nx/2)$.

2. D'après la formule du binôme de Newton et en se souvenant que $1+j=-j^2$ et que $j^{4022}=j^2$ puisque $4022 \equiv 2[3]$:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{2021} j^k - 1 \\
&= (j+1)^{2021} - 1 \\
&= (-j^2)^{2021} - 1 \\
&= -j^{4022} - 1 \\
&= -j^2 - 1 \\
&= j
\end{aligned}$$

3. D'après le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left(e^{2ik\pi/n}\right)^p z^{n-p} \\
&= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^{n-p} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{2ip\pi/n}\right)^k
\end{aligned}$$

Cherchons quand la raison vaut 1. Soit $p \in [\![0\,;\,n]\!]$.

$$\begin{aligned}
e^{2ip\pi/n} = 1 &\iff \frac{2p\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \\
&\iff p \equiv 0[n] \\
&\iff p = 0 \qquad \text{ou} \qquad p = n
\end{aligned}$$

Pour $p=0$ ou $p=n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(e^{2ip\pi/n}\right)^k = n$ et donc

$$S_n = \underbrace{z^n \times n}_{p=0} + \underbrace{1 \times n}_{p=n} + \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} z^{n-p} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{2ip\pi/n}\right)^k$$

Or, si $p \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, $e^{2ip\pi/n} \neq 1$ si bien que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(e^{2ip\pi/n}\right)^k &= e^{2ip\pi/n}\times\frac{1-\left(e^{2ip\pi/n}\right)^n}{1-e^{2ip\pi/n}}\\
&= e^{2ip\pi/n}\times\frac{1-e^{2ip\pi}}{1-e^{2ip\pi/n}}\\
&= e^{2ip\pi/n}\times\frac{1-1}{1-e^{2ip\pi/n}}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve que $S_n = n\left(z^n+1\right)$.

Exercice 32 : ✪ Soit $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$, et soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\alpha\pi}\right| \leq \frac{1}{|\sin(\alpha\pi)|}$$

Correction : Tout d'abord, l'inégalité triangulaire donne la majoration n qui est insuffisante, il faut être plus fin. Calculons la somme de gauche avant de majorer. Tout d'abord, α n'est pas un entier donc $e^{2i\alpha\pi}\neq 1$.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\alpha\pi}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2i\alpha\pi}\right)^k\right|\\
&= \left|\frac{1-e^{2i(n+1)\alpha\pi}}{1-e^{2i\alpha\pi}}\right|\\
&= \left|\frac{e^{i(n+1)\alpha\pi}\left(e^{-i(n+1)\alpha\pi}-e^{i(n+1)\alpha\pi}\right)}{e^{i\alpha\pi}\left(e^{-\alpha\pi}-e^{i\alpha\pi}\right)}\right|\\
&= \left|\frac{e^{in\alpha\pi}\times -2i\sin((n+1)\alpha\pi)}{-2i\sin(\alpha\pi)}\right|\\
&\leq \frac{1}{|\sin(\alpha\pi)|}
\end{aligned}$$

puisqu'une exponentielle d'un imaginaire pur est de module 1 et un sinus est majoré par 1 en valeur absolue.

Exercice 33 : ✪ En utilisant le fait que $1/\sin(1)\approx 1.18$, montrer que, pour tout $n\geq 3$:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos^2(k)\geq\frac{n}{4}$$

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\cos(k)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Correction : Notons S_n la somme de l'énoncé. Alors

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2k)+1}{2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k)+\frac{n}{2}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos(2k) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \left(e^{2i}\right)^k\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{2i} \times \frac{1-e^{2in}}{1-e^{2i}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{2i} \times \frac{e^{in}\left(e^{-in}-e^{in}\right)}{e^{i}\left(e^{-i}-e^{i}\right)}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i} \times e^{in} \times \frac{-2i\sin(n)}{-2i\sin(1)}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(n+1)} \times \frac{\sin(n)}{\sin(1)}\right) \\
&= \cos(n+1) \times \frac{\sin(n)}{\sin(1)} \\
&\geq \frac{-1}{\sin(1)} \approx -1.18 \\
&\geq -1.5 \\
&\geq \frac{-n}{2}
\end{aligned}$$

puisque $n \geq 3$. La première inégalité en découle. Or, un cosinus étant inférieur à 1 en valeur absolue, pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, $|\cos(k)| \geq \cos^2(k)$ si bien que

$$\sum_{k=1}^{n} |\cos(k)| \geq \sum_{k=1}^{n} \cos^2(k) \geq \frac{n}{4}$$

ce qui permet de conclure à l'aide du théorème de minoration.

Exercice 34 : ✪ Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $x \in \,]-1\,;1\,[$.

1. Soit $n \in \mathbb{R}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \sin(\omega k)$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \sin(\omega k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x\sin(\omega)}{1-2x\cos(\omega)+x^2}$.

Correction :

1. $S_n = \mathrm{Im}(T_n)$ où $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(xe^{i\omega}\right)^k$. $\left|xe^{i\omega}\right| = |x| \neq 1$ donc :

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1-x^{n+1}e^{i(n+1)\omega}}{1-xe^{i\omega}} \\
&= \frac{1-x^{n+1}\cos((n+1)\omega) - ix^{n+1}\sin((n+1)\omega)}{1-x\cos(\omega)-ix\sin(\omega)} \\
&= \frac{\left(1-x^{n+1}\cos((n+1)\omega) - ix^{n+1}\sin((n+1)\omega)\right) \times (1-x\cos(\omega)+ix\sin(\omega))}{(1-x\cos(\omega))^2 + x^2\sin^2(\omega)}
\end{aligned}$$

En prenant la partie imaginaire, il vient finalement :

$$S_n = \frac{x\sin(\omega) - x^{n+2}\cos((n+1)\omega)\sin(\omega) - x^{n+1}\sin((n+1)\omega) \times (1-x\cos(\omega))}{(1-x\cos(\omega))^2 + x^2\sin^2(\omega)}$$

2. Puisque $x \in \,]-1\,;1\,[$, alors $x^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et idem pour x^{n+2} donc

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x\sin(\omega)}{1-2x\cos(\omega)+x^2\cos^2(\omega)+x^2\sin^2(\omega)} = \frac{x\sin(\omega)}{1-2x\cos(\omega)+x^2}$$

Exercice 35 : ✪✪ Calculer la somme

$$S=\sum_{k=0}^{8}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{19}\right)$$

Correction : $S=\mathrm{Re}(T)$ où

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{k=0}^{8} e^{\frac{(2k+1)i\pi}{19}}\\
&= e^{i\pi/19}\times\sum_{k=0}^{8}\left(e^{2i\pi/19}\right)^k\\
&= e^{i\pi/19}\times\frac{1-\left(e^{2i\pi/19}\right)^9}{1-e^{2i\pi/19}}\\
&= e^{i\pi/19}\times\frac{1-e^{18i\pi/19}}{1-e^{2i\pi/19}}\\
&= e^{i\pi/19}\times\frac{1-e^{i\pi-\frac{i\pi}{19}}}{1-e^{2i\pi/19}}\\
&= e^{i\pi/19}\times\frac{1+e^{-i\pi/19}}{1-e^{2i\pi/19}}\\
&= e^{i\pi/19}\times\frac{e^{-i\pi/38}\left(e^{i\pi/38}+e^{-i\pi/38}\right)}{e^{i\pi/19}\left(e^{-i\pi/19}-e^{i\pi/19}\right)}\\
&= \frac{e^{-i\pi/38}\times 2\cos(\pi/38)}{-2i\sin(\pi/19)}\\
&= \frac{e^{-i\pi/38}\times i\cos(\pi/38)}{\sin(\pi/19)}\\
&= \frac{(\cos(\pi/38)-i\sin(\pi/38))\times i\cos(\pi/38)}{\sin(\pi/19)}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\sin(\pi/38)\cos(\pi/38)}{\sin(\pi/19)}\\
&= \frac{\sin(\pi/19)}{2\sin(\pi/19)}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 36 : ✪ Soit $n\in\mathbb{N}$. À l'aide du complexe $(1+i)^{2n}$, donner la valeur de $S=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}$.

Correction : D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(1+i)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}i^k \\
&= \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{2n}\binom{2n}{k}i^k + \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{2n}\binom{2n}{k}i^k \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}i^{2j} + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{2n}{2j+1}i^{2j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{2j}(-1)^j + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{2n}{2j+1}(-1)^j \times i
\end{aligned}$$

En particulier, $S = \mathrm{Re}((1+i)^{2n})$. Or, $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ donc $(1+i)^{2n} = 2^n e^{in\pi/2}$ et donc, finalement, $S = 2^n\cos(n\pi/2)$.

Exercice 37 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$A = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor}\binom{n}{3k}, \qquad B = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor}\binom{n}{3k+1} \qquad \text{et} \qquad C = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor}\binom{n}{3k+2}$$

1. Calculer $A+B+C, A+jB+j^2C$ et $A+j^2B+jC$.
2. En déduire la valeur de A.

Correction :

1. En effectuant les changements d'indice $p = 3k$ (dans A), $p = 3k+1$ (dans B) et $p = 3k+2$ (dans C) on trouve successivement :

$$\begin{aligned}
A+B+C &= \sum_{\substack{p=0\\p\equiv 0[3]}}^{n}\binom{n}{p} + \sum_{\substack{p=0\\p\equiv 1[3]}}^{n}\binom{n}{p} + \sum_{\substack{p=0\\p\equiv 2[3]}}^{n}\binom{n}{p} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} \\
&= 2^n
\end{aligned}$$

De même pour les autres, en se souvenant que $j^p = 1$ lorsque $p \equiv 0[3]$, $j^p = j$ lorsque $p \equiv 1[3]$ et $j^p = j^2$ lorsque $p \equiv 2[3]$:

$$\begin{aligned}
A+jB+j^2C &= \sum_{\substack{p=0\\p\equiv 0[3]}}^{n}\binom{n}{p} + \sum_{\substack{p=0\\p\equiv 1[3]}}^{n}\binom{n}{p}j + \sum_{\substack{p=0\\p\equiv 2[3]}}^{n}\binom{n}{p}j^2 \\
&= \sum_{\substack{p=0\\p\equiv 0[3]}}^{n}\binom{n}{p}j^p + \sum_{\substack{p=0\\p\equiv 1[3]}}^{n}\binom{n}{p}j^p + \sum_{\substack{p=0\\p\equiv 2[3]}}^{n}\binom{n}{p}j^p \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}j^p \\
&= (1+j)^n \\
&= (-j^2)^n
\end{aligned}$$

et enfin

$$
\begin{aligned}
A+j^2B+jC &= \sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 0[3]}}^{n}\binom{n}{p}+\sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 1[3]}}^{n}\binom{n}{p}j^2+\sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 2[3]}}^{n}\binom{n}{p}j\\
&= \sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 0[3]}}^{n}\binom{n}{p}j^{2p}+\sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 1[3]}}^{n}\binom{n}{p}j^{2p}+\sum_{\substack{p=0\\ p\equiv 2[3]}}^{n}\binom{n}{p}j^{2p}\\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}j^{2p}\\
&= (1+j^2)^n\\
&= (-j)^n
\end{aligned}
$$

En effet, si $p\equiv 1[3]$, $2p\equiv 2[3]$ donc $j^{2p}=j^2$ et idem pour les deux autres sommes. De plus,

$$
\begin{aligned}
A+B+C+A+jB+j^2C+A+j^2B+jC &= 3A+(1+j+j^2)B+(1+j^2+j)C\\
&= 3A
\end{aligned}
$$

Il en découle que

$$
\begin{aligned}
3A &= 2^n+(-1)^n\left(j^2+j\right)\\
&= 2^n+(-1)^n\times(-1)\\
&= 2^n+(-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

et finalement on trouve que $A=\dfrac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}$.

7.5 Exponentielle complexe, écriture exponentielle d'un complexe

Exercice 38 : ✪ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2ix}=i$.

Correction : Personne, bien sûr, n'aurait osé prendre le logarithme d'un complexe... Écrivons i sous forme exponentielle, et utilisons ensuite la CNS d'égalité entre deux exponentielles complexes.

$$
\begin{aligned}
e^{2ix}=i &\iff e^{2ix}=e^{i\pi/2}\\
&\iff 2x\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\\
&\iff x\equiv\frac{\pi}{4}[\pi]
\end{aligned}
$$

Exercice 39 : ✪ Donner un argument de $z=a\left(\dfrac{1-i\tan(\alpha)}{1+i\tan(\alpha)}\right)$ en fonction de a,α réels, $a\neq 0,\alpha\not\equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

Correction : On a :

$$
\begin{aligned}
z &= a\left(\frac{1-\dfrac{i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1+\dfrac{i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}\right)\\
&= a\left(\frac{\cos(\alpha)-i\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)}\right)\\
&= a\frac{e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}}\\
&= ae^{-2i\alpha}
\end{aligned}
$$

Encore une fois, si $z = Ae^{i\varphi}$ avec $A > 0$, alors $A = |z|$ et α est un argument de z. Dès lors, si $a > 0$, alors -2α est un argument de z. Si $a < 0$, alors

$$\begin{aligned} z &= (-a) \times (-1) \times e^{-2i\alpha} \\ &= (-a) \times e^{i(-2\alpha+\pi)} \end{aligned}$$

si bien que $\pi - 2\alpha$ est un argument de z.

Exercice 40 : ✪ Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $z^2 \in \mathbb{R}^-$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Correction : Si $z = 0$, alors ces deux propriétés sont vraies. Si $z \neq 0$, notons r le module de z et θ un argument de z.

$$\begin{aligned} z^2 \in \mathbb{R}_- &\iff r^2 e^{2i\theta} \in \mathbb{R}_- \\ &\iff 2\theta \equiv \pi[2\pi] \\ &\iff \theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\iff z \in i\mathbb{R} \\ &\iff \mathrm{Re}(z) = 0 \end{aligned}$$

Exercice 41 : ✪ Calculer

1. $(1-i)^{2021}$
2. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{2021}$
3. $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$
4. $(1+i)^n - (1-i)^n$
5. $\dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$.

Correction :

1. $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ donc $(1-i)^{2021} = \sqrt{2}^{2021} e^{-2021i\pi/4}$. Donnons un argument qui appartient à $[\,0\,;2\pi\,[$ c'est-à-dire qu'on veut écrire $-2021\pi/4 = 2k\pi + \theta$ i.e. $-2021\pi = -8k\pi + 8\theta$. Effectuons la division euclidienne de -2021 par 8 : on a $-2021 = -253 \times 8 + 3$ si bien que $-2021\pi = -253 \times 8\pi + 3\pi$ et donc
$$\frac{-2021\pi}{4} = -253 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}$$
Finalement, $(1-i)^{2021} = \sqrt{2}^{2021} e^{3i\pi/4}$.
2. On a (cf. exercice 51)
$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{5i\pi/12}$$
si bien que
$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{2021} = \frac{1}{\sqrt{2}^{2021}} e^{5\times 2021 i\pi/12}$$
Idem, faisons la division euclidienne de 11005 par 24 : $11051 = 460 \times 24 + 11$ et donc
$$\frac{11021\pi}{12} = 460 \times 2\pi + \frac{11\pi}{12}$$
et on trouve finalement que
$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{2021} = \frac{1}{\sqrt{2}^{2021}} e^{11i\pi/12}$$
3. $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Dès lors :
$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3} &= \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^4}{\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^3} + \frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^4}{\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^3} \\ &= \sqrt{2} \times e^{7i\pi/4} + \sqrt{2}e^{-7i\pi/4} \\ &= 2\sqrt{2}\cos(7\pi/4) \end{aligned}$$

4. De même :

$$\begin{aligned}(1+i)^n-(1-i)^n &= \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^n-\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^n\\ &= \sqrt{2}^n e^{in\pi/4}-\sqrt{2}^n e^{-in\pi/4}\\ &= \sqrt{2}^n\left(e^{in\pi/4}-e^{-in\pi/4}\right)\\ &= \sqrt{2}^n\times 2i\sin(n\pi/4)\end{aligned}$$

5. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i} &= \frac{(1+\sqrt{2}+i)^2}{(1+\sqrt{2})^2+1^2}\\ &= \frac{(1+\sqrt{2})^2+2i(1+\sqrt{2})-1}{1+2\sqrt{2}+2+1}\\ &= \frac{1+2\sqrt{2}+2+2i(1+\sqrt{2})-1}{4+2\sqrt{2}}\\ &= \frac{2+2\sqrt{2}+i(2+2\sqrt{2})}{\sqrt{2}(2\sqrt{2}+2)}\\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\\ &= e^{i\pi/4}\end{aligned}$$

Exercice 42 : ✪ Déterminer les entiers n tels que $(\sqrt{6}+i\sqrt{2})^n$ soit réel.

Correction : Soit $n\in\mathbb{N}$. Écrivons $\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)^n$ sous forme exponentielle. Or,

$$\begin{aligned}|\sqrt{6}+i\sqrt{2}| &= \sqrt{6+2}\\ &= 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}\sqrt{6}+i\sqrt{2} &= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\times\frac{1}{2}\right)\\ &= 2\sqrt{2}\times e^{i\pi/6}\end{aligned}$$

Il en découle que $\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)^n=2^{3n/2}\times e^{in\pi/6}$. Finalement :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{6}+i\sqrt{2}\right)^n\in\mathbb{R} &\iff \frac{n\pi}{6}\equiv 0[\pi]\\ &\iff n\equiv 0[6]\end{aligned}$$

En conclusion, les réels qui conviennent sont exactement les multiples de 6.

Exercice 43 : ✪

1. Linéariser $\sin^3(x)\cos^2(x)$.
2. Linéariser $\sin^4(x)$. En déduire la valeur de

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

Correction :

1. La méthode est toujours la même : on utilise la formule d'Euler, on développe à l'aide du triangle de Pascal, et on utilise encore la formule d'Euler. Soit donc $x\in\mathbb{R}$. Rappelons que $i^2=-1$ et $i^3=-i$.

$$\begin{aligned}
\sin^3(x)\cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \times \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right)\times\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)}{-8i\times 4} \\
&= \frac{e^{5ix}+2e^{3ix}+e^{ix}-3e^{3ix}-6e^{ix}-3e^{-ix}+3e^{ix}+6e^{-ix}+3e^{-3ix}-e^{-ix}-2e^{-3ix}-e^{5ix}}{-32i} \\
&= -\left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{32i}\right)-\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{32i}\right)-\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{16i}\right) \\
&= -\frac{\sin(5x)}{16}-\frac{\sin(3x}{16}-\frac{\sin(x)}{8}
\end{aligned}$$

2. Idem :

$$\begin{aligned}
\sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\
&= \frac{e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16} \\
&= \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{16}-\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{4}+\frac{3}{8} \\
&= \frac{\cos(4x)}{8}-\frac{\cos(2x)}{2}+\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

- $\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\cos(\pi/2)}{8}-\frac{\cos(\pi/4)}{2}+\frac{3}{8}=-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{8}$.
- $\sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\cos(3\pi/2)}{8}-\frac{\cos(3\pi/4)}{2}+\frac{3}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{8}$.
- $\sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\frac{\cos(5\pi/2)}{8}-\frac{\cos(5\pi/4)}{2}+\frac{3}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{8}$.
- $\sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\frac{\cos(7\pi/2)}{8}-\frac{\cos(7\pi/4)}{2}+\frac{3}{8}=-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{8}$.

En conclusion :

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\frac{3}{2}$$

Exercice 44 : ✪ Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Résoudre l'équation $z^2-2e^{i\theta}z+1=0$.

Correction : Erreur d'énoncé, il manquait un z : résolvons donc l'équation $z^2-2e^{i\theta}z+1=0$. On a :

$$\begin{aligned}
\Delta &= 4e^{2i\theta}-4 \\
&= 4e^{i\theta}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right) \\
&= 4e^{i\theta}\times 2i\sin(\theta) \\
&= 8e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\sin(\theta)
\end{aligned}$$

On cherche un complexe δ tel que $\delta^2=\Delta$. Deux cas sont possibles :

- Premier cas : $\sin(\theta)\geq 0$. Alors $\delta=2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\sin(\theta)}$ convient. Les solutions de l'équation sont alors

$$\frac{2e^{i\theta}\pm\delta}{2}$$

- Deuxième cas : $\sin(\theta)<0$. Il suffit de voir que $\sin(\theta)=-\sin(-\theta)$ et que $\sin(-\theta)>0$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\Delta &= -8e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}\sin(-\theta)\\ &= 8e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}+\pi\right)}\sin(-\theta)\\ &= 8e^{i\left(\theta+\frac{3\pi}{2}\right)}\sin(-\theta)\end{aligned}$$

Finalement, $\delta = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)}\sqrt{\sin(-\theta)}$ convient, et on conclut comme précédemment.

Exercice 45 : ✪ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner le module et un argument de $1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)$.

Correction : Remarquons que $z = 1+e^{i\theta}$. Dès lors :

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}\right)\\ &= 2e^{i\theta/2}\cos(\theta/2)\end{aligned}$$

si bien que $|z| = 2|\cos(\theta/2)|$. Un complexe a des arguments si et seulement s'il est non nul. Or :

$$\begin{aligned} z=0 &\iff \cos(\theta/2)=0\\ &\iff \theta/2 \equiv \pi/2[\pi]\\ &\iff \theta\equiv\pi[2\pi]\end{aligned}$$

Supposons donc que ce ne sont pas le cas. Rappelons que si on a $z = Ae^{i\varphi}$ avec $A>0$ alors $A=|z|$ et φ est un argument de z. Il faut donc séparer les cas selon le signe de $\cos(\theta/2)$. Si $\cos(\theta/2)>0$, $\theta/2$ est un argument de z, et si $\cos(\theta/2)<0$, il suffit de voir que :

$$\begin{aligned} z &= -2e^{i\theta/2} - \cos(\theta/2)\\ &= (-2\cos(\theta/2))\times e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}\end{aligned}$$

et puisque $-2\cos(\theta/2)>0$, alors un argument de z est $\theta/2+\pi$.

Exercice 46 : ✪ Si $\theta\in\mathbb{R}$, on note $f(\theta)$ et $g(\theta)$, respectivement, l'argument principal de $1+e^{i\theta}$ et celui de $1-e^{i\theta}$ (lorsqu'ils existent). Tracer les graphes de f et g en commençant par préciser les éventuels éléments de symétrie.

Correction : Rappelons que l'argument principal d'un complexe non nul est son unique argument dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi\,]$. Commençons par donner le domaine de définition de f et de g, c'est-à-dire lorsque $1\pm e^{i\theta}$ sont non nuls. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Tout d'abord :

$$\begin{aligned} f \text{ est définie en } \theta &\iff 1+e^{i\theta}\neq 0\\ &\iff e^{i\theta}\neq -1\\ &\iff \theta\not\equiv 0[\pi]\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $D_f = \mathbb{R}\backslash(\pi+2\pi\mathbb{Z})$. On trouve de même que $D_g=\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Tout d'abord, f et g sont 2π-périodiques.

Commençons par f : par périodicité, il suffit de l'étudier sur $]-\pi\,;\pi\,[$ (ouvert car f n'est pas définie en $\pm\pi$). Soit $\theta\in\,]-\pi\,;\pi\,[$.

$$1+e^{i\theta} = 1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)$$

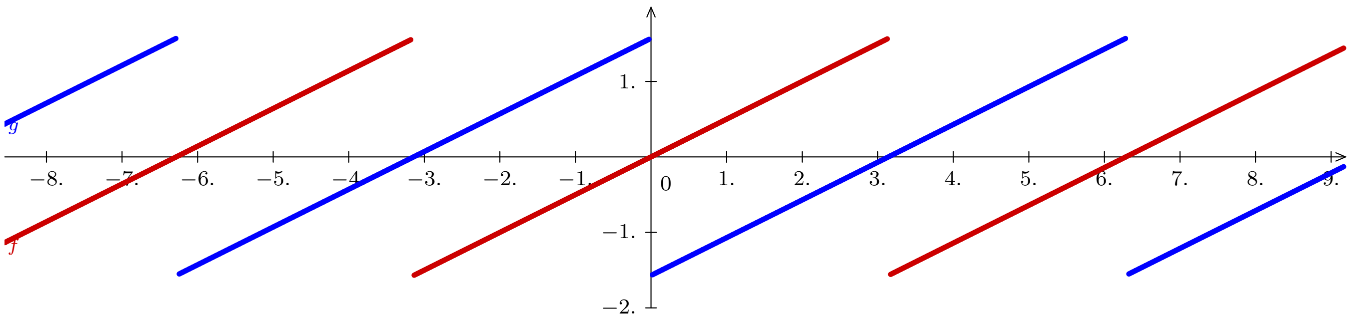
Il en découle (par parité du cosinus et imparité du sinus) que $1+e^{-i\theta} = \overline{1+e^{i\theta}}$ si bien que l'argument principal de $1+e^{-i\theta}$ est l'opposé de l'argument principal de $1+e^{i\theta}$. En d'autres termes, f est impaire : il suffit donc de l'étudier sur $[\,0\,;\pi\,[$. On suppose donc que $\theta\in[\,0\,;\pi\,[$. On a donc :

$$\begin{aligned} 1+e^{i\theta} &= e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right)\\ &= e^{i\theta/2}\times 2\cos(\theta/2)\end{aligned}$$

Or, $2\cos(\theta/2)>0$ donc on a bien la forme voulue ($Ae^{i\varphi}$ avec $A>0$) : on en déduit que $\theta/2$ est un argument de $1+e^{i\theta}$, et puisqu'il appartient à $]-\pi\,;\pi\,]$, c'est son argument principal. En conclusion, $f(\theta)=\theta/2$ sur $[\,0\,;\pi\,[$, est 2π-périodique et impaire. On montre de même que g est impaire et que pour tout $\theta \in \left]0\,;\pi\right]$ (g n'est pas définie en 0 mais elle est définie en π),

$$\begin{aligned} 1-e^{i\theta} &= e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}\right) \\ &= e^{i\theta/2}\times -2i\sin(\theta/2) \\ &= e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)}\sin(\theta/2) \end{aligned}$$

et puisque $\sin(\theta/2)>0$, un argument de $1-e^{i\theta}$ est $\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{3\pi}{2}$. Cependant, ce n'est pas l'argument principal : il faut retirer 2π, c'est-à-dire que l'argument principal est $\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{2}$. Par imparité et 2π-périodicité, on en déduit le graphe de g. Ci-dessous le graphe de f (en rouge) et celui de g (en bleu) :



Exercice 47 : ✪ Résoudre l'équation $\mathrm{Re}\left(z^3\right)=\mathrm{Im}\left(z^3\right)$ et représenter graphiquement l'ensemble des solutions.

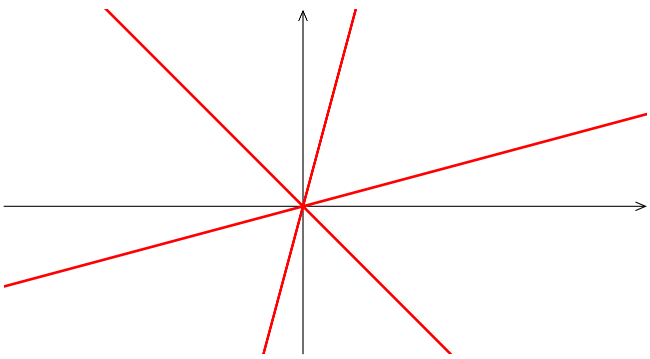
Correction : $z=0$ est solution évidente. Soit $z\in\mathbb{C}^*$ qu'on écrit sous forme exponentielle $z=|z|e^{i\theta}$ avec θ un argument de z (on y pense puisque mettre un complexe au cube est plus simple quand il est sous forme exponentielle, et cela n'est possible que lorsqu'il est non nul). Dès lors, $z^3=|z|^3e^{3i\theta}$ si bien que $\mathrm{Re}\left(z^3\right)=|z|^3\cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}\left(z^3\right)=|z|^3\sin(3\theta)$. Puisque $|z|\neq 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(z^3\right)=\mathrm{Im}\left(z^3\right) &\iff \cos(3\theta)=\sin(3\theta) \\ &\iff 3\theta\equiv\pi/4[2\pi] \qquad \text{ou} \qquad 3\theta\equiv 5\pi/4[2\pi] \\ &\iff \theta\equiv\pi/12[2\pi/3] \qquad \text{ou} \qquad \theta\equiv 5\pi/12[2\pi/3] \end{aligned}$$

c'est-à-dire si l'unique argument de z dans $[0\,;2\pi[$ vaut :

$$\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}=\frac{9\pi}{12},\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}=\frac{17\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}=\frac{13\pi}{12} \qquad \text{ou} \qquad \frac{5\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}=\frac{21\pi}{12}$$

Ci-dessous l'ensemble des solutions (je vous laisse trouver qui est qui parmi les angles) :

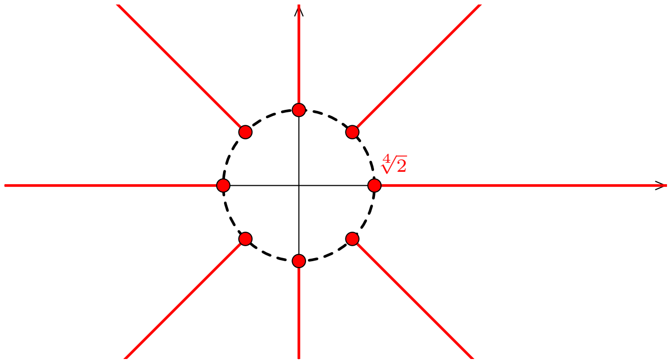


Exercice 48 : ✪ Donner l'ensemble des complexes z vérifiant $z^4\in\mathbb{R}$ et $|z|^4\geq 2$ et le représenter géométriquement dans le plan complexe.

Correction : Tout d'abord : $|z|^4\geq 2 \iff |z|\sqrt[4]{2}$. 0 n'est donc pas solution. Soit donc $z\neq 0$ qu'on note $|z|e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0\,;2\pi[$. Dès lors, $z^4=|z|^4e^{4i\theta}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} z^4\in\mathbb{R} &\iff 4\theta\equiv 0[\pi] \\ &\iff \theta\equiv 0[\pi/4] \end{aligned}$$

En conclusion, les solutions sont les complexes de la forme $re^{i\theta}$ avec $r \geq \sqrt[4]{2}$ et $\theta \equiv 0[\pi/4]$ qu'on représente ci-dessous.



Exercice 49 : ✪ En utilisant les valeurs de $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ calculées lors d'un TD fort fort lointain, donner une expression simple de

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$$

Correction : Rappelons (cf. exercice 2 du chapitre 5) que $\cos(\pi/8) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin(\pi/8) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8 &= (2\cos(\pi/8)+2i\sin(\pi/8))^8 \\
&= \left(2e^{i\pi/8}\right)^8 \\
&= 2^8 \times e^{i\pi} \\
&= -2^8
\end{aligned}$$

Exercice 50 : ✪ Donner $\cos(6x)$ et $\sin(6x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait (formule de Moivre) que

$$\begin{aligned}
\cos(6x)+i\sin(6x) &= e^{i6x} \\
&= \left(e^{ix}\right)^6 \\
&= (\cos(x)+i\sin(6x))^6 \\
&= \cos^6(x)+6i\cos^5(x)\sin(x)-15\cos^4(x)\sin^2(x)-20i\cos^3(x)\sin^2(x) \\
&\quad +15\cos^2(x)\sin^4(x)+6i\cos(x)\sin^5(x)-\sin^6(x)
\end{aligned}$$

Finalement, en prenant la partie réelle et la partie imaginaire :

$$\cos(6x) = \cos^6(x)-15\cos^4(x)\sin^2(x)+15\cos^2(x)\sin^4(x)-\sin^6(x)$$

et

$$\sin(6x) = 6\cos^5(x)\sin(x)-20\cos^3(x)\sin^2(x)+6\cos(x)\sin^5(x)$$

Exercice 51 : ✪ Donner les racines cubiques de $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Correction : De même qu'en classe, $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $\sqrt{3}-i = 2e^{-i\pi/6}$ si bien que

$$\begin{aligned}
\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} &= \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \times e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{5i\pi/12}
\end{aligned}$$

si bien que les racines cubiques de ce complexes sont les complexes de la forme $\dfrac{1}{2^{1/6}} \times e^{i\left(\frac{5\pi}{36} + \dfrac{2k\pi}{3}\right)}$ pour $k \in [\![0\,;2]\!]$.

Exercice 52 : ✪ Retrouver les formules suivantes à l'aide de l'exponentielle complexe :

- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
- $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

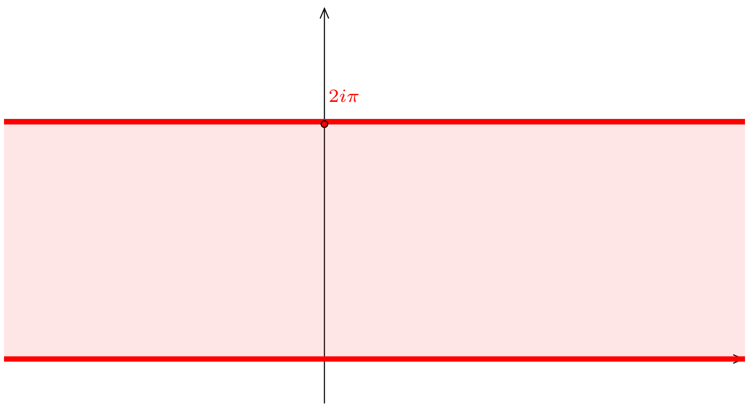
Correction :

$$\begin{aligned}
\cos(a) + \cos(b) &= \mathrm{Re}\left(e^{ia}\right) + \mathrm{Re}\left(e^{ib}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ia} + e^{ib}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ia}\left(1 + e^{i(b-a)}\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ia} \times e^{i(b-a)/2} \times \left(e^{-i(b-a)/2} + e^{i(b-a)/2}\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(a+b)/2} \times 2\cos\left(\dfrac{b-a}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne la première égalité. Les autres se démontrent de façon analogue.

Exercice 53 : ✪ Donner une partie A de $\mathbb{C}$ telle que $\exp : A \to \mathbb{C}^*$ soit une bijection.

Correction : On sait que $e^z = e^{z'}$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Il suffit donc de prendre un « rectangle » semi-ouvert de hauteur 2π. Prenons par exemple $A = \mathbb{R} \times [\,0\,;2\pi\,[$ qu'on représente ci-dessous, c'est-à-dire l'ensemble des complexes $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in [\,0\,;2\pi\,[$.



Prouvons que A convient i.e. que exp est une bijection de A dans $\mathbb{C}^*$.

- Soient z_1 et z_2 deux complexes tels que $e^{z_1} = e^{z_2}$. Par conséquent, $z_1 - z_2 = 2i\pi\mathbb{Z}$ donc $x_1 = x_2$ et $y_2 - y_1$ est un multiple de 2π ce qui implique que $y_1 = y_2$ puisque $|y_1 - y_2| < 2\pi$. On en déduit que $z_1 = z_2$ donc que exp est injective sur A.
- Soit $re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in [\,0\,;2\pi\,[$. Alors $z = \ln(r) + i\theta$ convient i.e. $z \in A$ est un antécédent de $re^{i\theta}$ par exp : exp est surjective (restreinte à A).

Exercice 54 : ✪ Résoudre l'équation (d'inconnue $z \in \mathbb{C}$) : $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Correction : $3\sqrt{3} - 3i = 3\left(\sqrt{3} - i\right) = 6e^{-i\pi/6} = e^{\ln(6) - i\pi/6}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned}
e^z = 3\sqrt{3} - 3i &\iff e^z = e^{\ln(6) - i\pi/6} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln(6) - i\frac{\pi}{6} + 2ik\pi
\end{aligned}$$

Exercice 55 : ✪ Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| \leq e^{|z|}$ et étudier les cas d'égalité.

Correction : Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Par définition, $e^z = e^x \times e^{iy}$ donc $|e^z| = e^x$ (car $|e^{iy}| = 1$) et, la fonction exponentielle étant croissante,

$$|e^z| = e^x \leq e^{|x|} \leq e^{|z|}$$

puisque $|x| = |\text{Re}(z)| \leq |z|$ d'après le cours. La fonction exponentielle étant strictement croissante, Il y a égalité si et seulement si $x = |x|$ et $|x| = |z|$ si et seulement si x est positif et $\text{Re}(z) = |z|$ si et seulement si z est un réel positif.

Exercice 56 : ✪✪

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|e^{ix} - 1\right| \leq |x|$.
2. Est-ce encore vrai pour tout $x \in \mathbb{C}$?

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \left|e^{ix} - 1\right| &= \left|e^{ix/2}\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right)\right| \\ &= |2i\sin(x/2)| \\ &= 2|\sin(x/2)| \\ &\leq 2 \times |x/2| \end{aligned}$$

puisque (cf. chapitre 5) $|\sin(u)| \leq |u|$ sur $\mathbb{R}$. C'est le résultat voulu.

2. Ce résultat n'est pas vrai sur $\mathbb{C}$. Par exemple, si $x = 1/i$ alors

$$|e^{ix} - 1| = |e - 1| = e - 1 \approx 1.71 > |1/i| = 1$$

Exercice 57 : ✪✪

1. Soit $\varphi > \pi$. Montrer que

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]\,0\,;\pi\,[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \dfrac{\varphi - \theta}{\sin(\theta)} \times e^{\frac{\varphi-\theta}{\sin(\theta)} \times \cos(\theta)} \end{array} \right.$$

est une surjection de $]\,0\,;\pi\,[$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

2. En déduire que $z \mapsto ze^z$ est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Correction :

1. f est continue de $]\,0\,; pi\,[$ dans $\mathbb{R}_+^*$ car composée, produit, quotient de fonctions continues (celles au dénominateur ne s'annulant pas). On trouve facilement que la limite en 0 est $+\infty$. Pour la limite en π, il suffit de se souvenir que $\cos(\theta) \xrightarrow[\theta \to \pi]{} -1$ et on montre par croissances comparées que $f(\theta) \xrightarrow[\theta \to \pi]{} 0$. Le TVI (pas son corollaire ! on n'a aucune idée de la monotonie de f) permet de conclure.
2. Notons $g : z \mapsto ze^z$. Tout d'abord, $g(0) = 0$ i.e. 0 est un antécédent de 0 (c'est même le seul, pourquoi ?). Il suffit donc de prouver que g est une surjection de $\mathbb{C}^*$ dans lui-même. Soit $a = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$. On cherche à prouver qu'il existe $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ tel que $g(z) = a$. Pour appliquer la question précédente, supposons sans perte de généralité que $\varphi > \pi$ (a bien admet un argument strictement supérieur à π). Soit donc $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned} g(z) = a &\iff re^{i\theta}e^{re^{i\theta}} = \rho e^{i\varphi} \\ &\iff re^{i\theta}e^{r\cos(\theta) + ri\sin(\theta)} = \rho e^{i\varphi} \\ &\iff re^{r\cos(\theta)} = \rho \qquad \text{et} \qquad \theta + r\sin(\theta) \equiv \varphi[2\pi] \end{aligned}$$

D'après la question précédente, il existe $\theta \in \,]\,0\,;\pi\,[$ tel que

$$\frac{\varphi - \theta}{\sin(\theta)} \times e^{\frac{\varphi-\theta}{\sin(\theta)} \times \cos(\theta)} = \rho$$

Posons, pour cette valeur de θ, $r = \dfrac{\varphi - \theta}{\sin(\theta)}$. On déduit que r et θ vérifient les deux conditions ci-dessus si bien que $z = re^{i\theta}$ est un antécédent de a : g est bien surjective.

Exercice 58 : ✪✪ Soit $[\,0\,;2\pi\,]$. Donner le module et un argument de $1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}$.

Correction : Posons $z=1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}$. Si $\theta=0$ ou $\theta=2\pi$ alors $z=3$. Supposons dans la suite que $\theta\in\,]\,0\,;2\pi\,[$. Alors $e^{i\theta}\neq 1$ si bien que

$$\begin{aligned} z &= \frac{1-e^{3i\theta}}{1-e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{3i\theta/2}\left(e^{-3i\theta/2}-e^{3i\theta/2}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}\right)} \\ &= e^{i\theta}\times\frac{-2i\sin(3\theta)}{-2i\sin(\theta/2)} \\ &= e^{i\theta}\times\frac{\sin(3\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \end{aligned}$$

Il en découle (une exponentielle d'un imaginaire pur est de module 1) que $|z|=\left|\dfrac{\sin(3\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right|$. Avant de chercher un argument, cherchons quand $z=0$.

$$\begin{aligned} z=0 &\iff \sin(3\theta/2)=0 \\ &\iff 3\theta/2\equiv 0[\pi] \\ &\iff \theta\equiv 0[2\pi/3] \\ &\iff \theta=\frac{2\pi}{3} \qquad \text{ou} \qquad \theta=\frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

puisque $\theta\in\,]\,0\,;2\pi\,[$. Si c'est le cas, alors z n'a pas d'argument. Supposons ensuite que ce ne soit pas le cas, i.e. que $\theta\in\,]\,0\,;2\pi/3\,[\,\cup\,]\,2\pi/3\,;4\pi/3\,[\,\cup\,]\,4\pi/3\,;2\pi\,[$. On veut écrire z sous la forme $Ae^{i\varphi}$ avec $A>0$. On cherche donc le signe de $\sin(3\theta/2)/\sin(\theta/2)$. Tout d'abord, $\theta/2\in\,]\,0\,;\pi\,[$ donc $\sin(\theta/2)>0$. De plus, $3\theta/2\in\,]\,0\,;3\pi\,[$. Il faut donc séparer les cas.

- Premier cas : $3\theta/2\in\,]\,0\,;\pi\,[$, ce qui est équivalent à $\theta\in\,]\,0\,;2\pi/3\,[$. Alors $\sin(3\theta/2)>0$ donc $\sin(3\theta/2)/\sin(\theta/2)>0$: z est sous la forme $Ae^{i\varphi}$ avec $\varphi>0$: θ est un argument de z.
- Deuxième cas : $3\theta\in\,]\,2\pi\,;3\pi\,[$ ce qui est équivalent à $\theta\in\,]\,4\pi/3\,;2\pi\,[$: idem.
- Troisième cas : $3\theta\in\,]\,\pi\,;2\pi\,[$ ce qui est équivalent à $\theta\in\,]\,2\pi/3\,;4\pi/3\,[$. Alors $\sin(3\theta/2)<0$ si bien que

$$\begin{aligned} z &= \left(-\frac{\sin(3\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right)\times(-1)\times e^{i\theta} \\ &= \underbrace{\left(-\frac{\sin(3\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right)}_{>0}\times e^{i(\theta+\pi)} \end{aligned}$$

  si bien que $\theta+\pi$ est un argument de z.

Exercice 59 : ✪✪ Soit $x\not\equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi]$. Mettre la fraction suivante sous une forme plus simple

$$S=\frac{1-\cos(2x)+\cos(4x)-\cos(6x)}{\sin(2x)-\sin(4x)+\sin(6x)}$$

Correction : Notons N le numérateur et D le dénominateur. Tout d'abord,

$$
\begin{aligned}
N &= \operatorname{Re}\left(1-e^{2ix}+e^{4ix}-e^{6ix}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1-\left(-e^{2ix}\right)^4}{1-\left(-e^{2ix}\right)}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{1-e^{8ix}}{1+e^{2ix}}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{4ix}\left(e^{-4ix}-e^{4ix}\right)}{e^{ix}\left(e-ix+e^{ix}\right)}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{3ix}\times -2i\sin(4x)}{2\cos(x)}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{(\cos(3x)+i\sin(3x))\times -i\sin(4x)}{\cos(x)}\right) \\
&= \frac{\sin(3x)\sin(4x)}{\cos(x)}
\end{aligned}
$$

De même :

$$
\begin{aligned}
D &= \operatorname{Im}\left(e^{2ix}-e^{4ix}+e^{6ix}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{2ix}\times\frac{1-\left(-e^{2ix}\right)^3}{1-\left(-e^{2ix}\right)}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{2ix}\times\frac{1+e^{6ix}}{1+e^{2ix}}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{2ix}\times\frac{e^{3ix}\left(e^{-3ix}+e^{3ix}\right)}{e^{ix}\left(e-ix+e^{ix}\right)}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{4ix}\times 2\cos(3x)}{2\cos(x)}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{(\cos(4x)+i\sin(4x))\times\cos(3x)}{\cos(x)}\right) \\
&= \frac{\sin(4x)\cos(3x)}{\cos(x)}
\end{aligned}
$$

Finalement, $S=\tan(3x)$.

Exercice 60 : ✪✪✪ Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation : $z+\overline{z}=z^5$. On pourra commencer par montrer que si z est solution, $\overline{z}$ et $-z$ le sont également.

Correction : Il paraît plus simple de chercher les solutions sous forme exponentielle. Pour cela, remarquons que 0 est solution de l'équation. Soit à présent $z\in\mathbb{C}^*$. Suivons l'indication de l'énoncé et supposons que z soit solution. Alors $z+\overline{z}=z^5$ donc

$$\overline{z+\overline{z}}=\overline{z^5}$$

donc $\overline{z}+\overline{\overline{z}}=\overline{z}^5$ c'est-à-dire que $\overline{z}$ est solution de l'équation. On prouve de même que $-z$ est solution de l'équation. Il suffit donc de chercher les solutions « dans le quart supérieur droit » i.e. les complexes d'argument appartenant à $[\,0\,;\pi/2\,]$. Écrivons donc $z=|z|e^{i\theta}$ avec $\theta\in[\,0\,;\pi/2\,]$. Dès lors :

$$
\begin{aligned}
z+\overline{z}=z^5 &\iff |z|e^{i\theta}+|z|e^{-i\theta}=|z|^5e^{5i\theta} \\
&\iff e^{i\theta}+e^{-i\theta}=|z|^4e^{5i\theta} \\
&\iff 2\cos(\theta)=|z|^4e^{5i\theta}
\end{aligned}
$$

Il ne paraît pas facile de raisonner par équivalences pour la suite : travaillons donc par analyse synthèse. Supposons donc que $z = |z|e^{i\theta}$ soit solution. Alors $|z|^4 e^{5i\theta} = 2\cos(\theta) \in \mathbb{R}_+$ (car $\theta \in [\,0\,;\pi/2\,]$) donc $5\theta \equiv 0[2\pi]$ i.e. $\theta \equiv 0[2\pi/5]$ et puisque $\theta \in [\,0\,;\pi/2\,]$ alors $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi/5$. Si $\theta = 0$ alors $|z|^4 = 2$ donc $|z| = \sqrt[4]{2}$. Si $\theta = 2\pi/5$ alors $|z| = \sqrt[4]{2\cos(2\pi/5)}$ c'est-à-dire que les seules solutions éventuelles sont $\sqrt[4]{2}$ et $\sqrt[4]{2\cos(2\pi/5)}e^{2i\pi/5}$. La synthèse est immédiate (i.e. ces deux complexes sont solutions de $2\cos(\theta) = |z|^4 e^{5i\theta}$).

En conclusion (en prenant cette fois toutes les solutions), les solutions sont 0, $\pm\sqrt[4]{2}$, $\pm\sqrt[4]{2\cos(2\pi/5)}e^{2i\pi/5}$, et enfin $\pm\sqrt[4]{2\cos(2\pi/5)}e^{-2i\pi/5}$ (on prend les solutions, les opposés, les conjugués et les opposés des conjugués, faire un dessin en plaçant ces complexes dans le plan pour être sûr de ne rien oublier).

7.6 Racines de l'unité

Exercice 61 : ✪ Donner un complexe de module 1 qui ne soit pas une racine de l'unité.

Correction : Soit $z \in \mathbb{C}$. Tout d'abord,

$$z \text{ est une racine de l'unité } \iff \exists n \geq 1, \exists k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!], z = e^{2ik\pi/n}$$

Il suffit alors de prendre $z = e^{i\pi\sqrt{2}}$. $|z| = 1$. Si z est une racine de l'unité, alors il existe n tel que

$$z^n = e^{in\pi\sqrt{2}} = 1$$

c'est-à-dire $n\pi\sqrt{2} \equiv 0[2\pi]$ c'est-à-dire $\sqrt{2} \equiv 0[2/n]$ i.e. il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\sqrt{2} = 2k/n$ ce qui est absurde car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 62 : ✪ Calculer la valeur des expressions suivantes :

1. $i^{18} + i^{42} + i^{127} + i^{1789} + i^{2021}$.
2. $1 + i + i^2 + \cdots + i^n$, où $n \geq 1$.
3. $i \times i^2 \times i^3 \times \cdots \times i^{1000}$.

Correction :

1. Puisque $i^4 = 1$, seule compte la congruence modulo 4. $18 \equiv 2[4]$ donc $i^{18} = i^2 = -1$. De même, $i^{42} = -1$. Puisque $127 \equiv 27 \equiv 3[4]$, $i^{127} = -i$. De plus, $1789 \equiv 89 \equiv 1[4]$ donc $i^{1789} = i$ et enfin $2021 \equiv 21 \equiv 1[4]$ donc $i^{2021} = i$. Finalement, $i^{18} + i^{42} + i^{127} + i^{1789} + i^{2021} = i - 2$.
2. On a une suite géométrique de raison $i \neq 1$ donc
$$1 + i + i^2 + \cdots + i^n = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$$
3. On a :
$$\begin{aligned} i \times i^2 \times i^3 \times \cdots \times i^{1000} &= i^{1+2+\cdots+1000} \\ &= i^{\frac{1000 \times 1001}{2}} \\ &= i^{500 \times 1001} \end{aligned}$$
Or, $500 \equiv 0[4]$ donc $500 \times 1001 \equiv 0[4]$ si bien que cette quantité vaut 1.

Exercice 63 : ✪ Soit $\alpha \neq 1$ une racine cinquième de l'unité. Montrer (avec le moins de calculs possibles) que

$$(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^3 + \alpha + 1)(\alpha^4 + \alpha + 1) = \alpha(\alpha + 1)$$

Correction : Notons A la quantité de gauche. $\alpha^5 = 1$ et on sait (cf. cours) que $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ donc

$$
\begin{aligned}
A &= \left(-\alpha^3-\alpha^4\right)\left(-\alpha^2-\alpha^4\right)\left(-\alpha^3-\alpha^2\right)\\
&= \left(-\alpha^3-\alpha^4\right)\left(\alpha^5+\alpha^4+\alpha 7+\alpha^6\right)\\
&= \left(-\alpha^3-\alpha^4\right)\left(1+\alpha^4+\alpha^2+\alpha\right)\\
&= \left(-\alpha^3-\alpha^4\right)\times\left(-\alpha^3\right)\\
&= \alpha^6+\alpha^7\\
&= \alpha+\alpha^2\\
&= \alpha(\alpha+1)
\end{aligned}
$$

Exercice 64 : ✪ Simplifier les expressions suivantes, où a, b, c sont trois réels quelconques :

1. $(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)$
2. $(a+b)(a+bj)(a+bj^2)$
3. $(aj^2+bj)(bj^2+aj)$

Correction :

1. Développons, en se souvenant que $j^3=1$ et $1+j+j^2=0$:

$$
\begin{aligned}
(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj) &= a^2+abj^2+acj+abj+b^2j^3+bcj^2+acj^2+bcj^4+c^2j^3\\
&= a^2+ab(j^2+j)+ac(j+j^2)+bc(j^2+j)+b^2+c^2\\
&= a^2+b^2+c^2-ac-bc-ab
\end{aligned}
$$

2. En développant, idem, il vient :

$$
\begin{aligned}
(a+b)(a+bj)(a+bj^2) &= (a^2+abj+ab+b^2j)(a+bj^2)\\
&= (a^2-abj^2+b^2j)(a+bj^2)\\
&= a^3+a^2bj^2-a^2bj^2-ab^2j^4+ab^2j+b^3j^3\\
&= a^3-ab^2j+ab^2j+b^3\\
&= a^3+b^3
\end{aligned}
$$

3. Enfin :

$$
\begin{aligned}
(aj^2+bj)(bj^2+aj) &= abj^4+a^2j^3+b^2j^3+abj^2\\
&= abj+a^2+b^2+abj^2\\
&= a^2+b^2-ab
\end{aligned}
$$

Exercice 65 : ✪ Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}\backslash\{-2i\}$:

$$
\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2+\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)+1=0
$$

Correction : Soit $z \neq -2i$. z est solution si et seulement si $\dfrac{z-2i}{z+2i}$ est solution de l'équation $Z^3+Z^2+Z+1=0$. Or, 1 n'est pas solution de cette équation, et si $Z \neq 1$, alors

$$
Z^3+Z^2+Z+1=\frac{1-Z^4}{1-Z}
$$

Par conséquent, les solutions de l'équation $Z^3+Z^2+Z+1=0$ sont les racines quatrièmes de l'unité différentes de 1 à savoir les $e^{2ik\pi/4}$ pour $k \in [\![1\,;\,3]\!]$, c'est-à-dire $-1, i$ et $-i$. Finalement, z est solution de l'équation initiale si et seulement si

$$
\frac{z-2i}{z+2i}=-1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{z-2i}{z+2i}=i \qquad \text{ou} \qquad \frac{z-2i}{z+2i}=-i
$$

Finalement, les solutions sont $z=0, 2$ et -2.

Exercice 66 : ✪ Soit $n \geq 1$, soit $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2$.

Correction : Erreur d'énoncé : pas de k dans ω. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \left|e^{2ik\pi/n} - 1\right|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left|e^{ik\pi/n}\left(e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}\right)\right|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left|2i\sin(k\pi/n)\right|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2\sin(k\pi/n)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \cos(2k\pi/n) \\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k\pi/n) \end{aligned}$$

Faisons ensuite comme dans l'exercice 30 :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2k\pi/n) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2i\pi/n}\right)^k\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\left(e^{2i\pi/n}\right)^n}{1-e^{2i\pi/n}}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et on trouve donc que $S_n = n$.

Exercice 67 : ✪ Soit $n \neq 0, 1$. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice : Notons P ce produit.

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} \\ &= e^{\sum_{k=0}^{n-1} 2ik\pi/n} \\ &= e^{\frac{2i\pi}{n} \times \dfrac{n(n-1)}{2}} \\ &= e^{i(n-1)\pi} \\ &= (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

Exercice 68 - Introduction aux groupes de Prüfer : ✪ Soit $p \geq 2$. On pose

$$G_p = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists n \geq 1, z^{p^n} = 1\}$$

Montrer que G_p est inclus dans $\mathbb{U}$, stable par multiplication, par division, par conjugaison, et infini.

Correction : Par définition, un élément $z \in \mathbb{C}$ appartient à G_p s'il existe $n \geq 1$ tel que $z^{p^n} = 1$.
- Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors z est une racine de l'unité (plus précisément, il existe n tel que z soit une racine p^n-ième de l'unité) donc est de module 1 : G_p est inclus dans $\mathbb{U}$.

- Soient z_1 et z_2 deux éléments de G_p. Il existe n_1 et n_2 supérieurs ou égaux à 1 tels que ${z_1}^{p^{n_1}} = 1$ et ${z_2}^{p^{n_2}} = 1$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
(z_1z_2)^{p^{n_1+n_2}} &= z_1^{p^{n_1+n_2}} \times z_2^{p^{n_1+n_2}} \\
&= z_1^{p^{n_1}\times p^{n_2}} \times z_2^{p^{n_2}\times p^{n_1}} \\
&= \left(z_1^{p^{n_1}}\right)^{p^{n_2}} \times \left(z_2^{p^{n_2}}\right)^{p^{n_1}} \\
&= 1^{p^{n_2}} \times 1^{p^{n_1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

  Il existe un entier n tel que $(z_1z_2)^{p^n} = 1$: $z_1z_2 \in G_p$, G_p est stable par produit.
- On montre de même que $(z_1/z_2)^{p^{n_1+n_2}} = 1$ ce qui permet de conclure.
- $\overline{{z_1}^{p^{n_1}}} = \overline{z_1}^{p^{n_1}} = 1$ donc $\overline{z_1} \in G_p$ qui est donc stable par conjugaison.
- G_p est l'ensemble de toutes les racines p^n-ièmes de l'unité, pour tout $n \geq 1$. En particulier, G_p contient $\mathbb{U}_{p^n}$ donc a au moins p^n éléments, et ce pour tout n : il est donc infini.

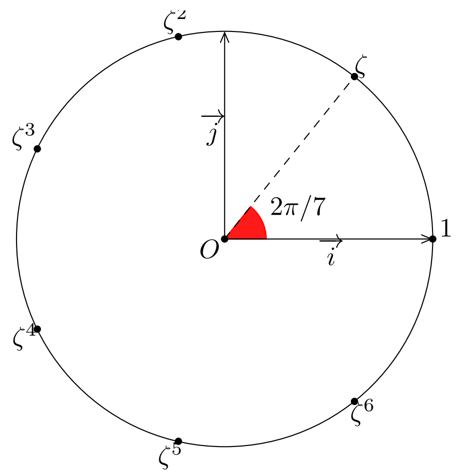
Exercice 69 : ✪ Soit $n \geq 2$. Notons $A_0, \dots, A_{n-1}$ les images dans le plan complexe des racines n-ièmes de l'unité. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|\sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k}\right\| = n$.

Correction : Soit M un point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}$. Notons $z = x + iy$. Alors l'affixe de la somme de l'énoncé vaut :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2ik\pi/n} - z\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} - \sum_{k=0}^{n-1} z \\
&= 0 - nz
\end{aligned}$$

Dès lors : M convient $\iff |nz| = n \iff |z| = 1$. L'ensemble cherché est donc $\mathbb{U}$.

Exercice 70 : ✪✪ On pose



- $\zeta = e^{2i\pi/7}$
- $A = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$
- $B = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$

Calculer $A + B$ et AB. En déduire A et B.

Correction : Rappelons que, puisque ζ est une racine 7-ième de l'unité différente de 1, alors

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^6 = 0$$

et évidemment $\zeta^7 = 1$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
A + B &= \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^6 \\
&= -1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A + B &= \zeta^4 + \zeta^6 + \zeta^7 + \zeta^5 + \zeta^7 + \zeta^8 + \zeta^7 + \zeta^9 + \zeta^{10} \\
&= \zeta^4 + \zeta^6 + 1 + \zeta^5 + 1 + \zeta + 1 + \zeta^2 + \zeta^3 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Dès lors (cf. cours) A et B sont solutions de l'équation $z^2+z+2=0$ qui sont $\dfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$. Simplement, attention : qui est A et qui est B ? On voit que pour dire qui est qui, il faut connaître le signe de la partie imaginaire. D'après le dessin (nous allons évidemment le prouver), il semble qu'on ait $\mathrm{Im}(A)>0$. Prouvons le rigoureusement : $\mathrm{Im}(A)=\sin(2\pi/7)+\sin(4\pi/7)+\sin(8\pi/7)$. Or, $\sin(8\pi/7)=-\sin(\pi/7)$ ($\sin(\pi+u)=-\sin(u)$) si bien que

$$\mathrm{Im}(A)=\sin(2\pi/7)+\sin(4\pi/7)-\sin(\pi/7)$$

Or, le sinus est strictement croissant sur $[\,0\,;\pi/2\,]$ et $\pi/7$ et $2\pi/7$ appartiennent à cet intervalle, si bien que $\sin(2\pi/7)-\sin(\pi/7)>0$. Enfin, $4\pi/7\in[\,0\,;\pi\,]$ donc $\sin(4\pi/7)\geq 0$. Finalement, $\mathrm{Im}(A)>0$ donc

$$A=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\qquad\text{et}\qquad B=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$$

Exercice 71 : ✪✪ Soit $n\geq 1$. Résoudre l'équation $(1+z)^{2n}=(1-z)^{2n}$. Donner le produit des solutions non nulles.

Correction : Faisons comme en classe. Soit $z\in\mathbb{C}$. $z=1$ n'est pas solution : on peut donc supposer $n\neq 1$ dans la suite.

$$\begin{aligned}
(1+z)^{2n}=(1-z)^{2n} &\iff \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n}=1\\
&\iff \frac{1+z}{1-z}\text{ est une racine }2n\text{-ième de l'unité}\\
&\iff \exists k\in[\![\,0\,;\,2n-1\,]\!], \frac{1+z}{1-z}=e^{2ik\pi/2n}\\
&\iff \exists k\in[\![\,0\,;\,2n-1\,]\!] z+1=(1-z)e^{ik\pi/n}\\
&\iff \exists k\in[\![\,0\,;\,2n-1\,]\!], z\left(1+e^{ik\pi/n}\right)=e^{ik\pi/n}-1
\end{aligned}$$

Cherchons quand $1+e^{ik\pi/n}=0$.

$$\begin{aligned}
1+e^{ik\pi/n}=0 &\iff e^{ik\pi/n}=-1\\
&\iff \frac{k\pi}{n}\equiv\pi[2\pi]\\
&\iff k\equiv n[2n]
\end{aligned}$$

Or, le seul nombre congru à n modulo $2n$ dans $[\![\,0\,;\,2n-1\,]\!]$ est n. Si $k=n$, alors le membre de gauche ci-dessus vaut 0 et le membre de droite -2, c'est-à-dire que l'égalité n'est pas vérifiée. On peut donc supposer $k\neq n$ dans la suite.

$$\begin{aligned}
(1+z)^{2n}=(1-z)^{2n} &\iff \exists k\in[\![\,0\,;\,2n-1\,]\!], k\neq n, z=\frac{e^{ik\pi/n}-1}{e^{ik\pi/n}+1}\\
&\iff \exists k\in[\![\,0\,;\,2n-1\,]\!], k\neq n, z=\frac{e^{ik\pi/2n}\left(e^{ik\pi/2n}-e^{-ik\pi/2n}\right)}{e^{ik\pi/2n}\left(e^{ik\pi/2n}+e^{-ik\pi/2n}\right)}\\
&\iff \exists k\in[\![\,0\,;\,2n-1\,]\!], k\neq n, z=\frac{2i\sin(k\pi/2n)}{2\cos(k\pi/2n)}
\end{aligned}$$

Calculons à présent le produit des solutions non nulles. Cherchons donc quand c'est le cas.

$$\begin{aligned}
\sin(k\pi/2n)=0 &\iff k\pi/2n\equiv 0[\pi]\\
&\iff k\equiv 0[2n]
\end{aligned}$$

ce qui n'arrive que pour $k=0$ sur $[\![\,0\,;\,2n-1\,]\!]$ (privé de n). Dès lors, le produit recherché vaut :

$$\begin{aligned}
P_n &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{i\sin(k\pi/2n)}{\cos(k\pi/2n)} \times \prod_{k=n+1}^{2n-1} \frac{i\sin(k\pi/2n)}{\cos(k\pi/2n)} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{i\sin(k\pi/2n)}{\cos(k\pi/2n)} \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{i\sin\left(\frac{(j+n)\pi}{2n}\right)}{\cos\left(\frac{(j+n)\pi}{2n}\right)} \quad (j=k-n) \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{i\sin(k\pi/2n)}{\cos(k\pi/2n)} \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{i\sin\left(\frac{j\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{j\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{i\sin(k\pi/2n)}{\cos(k\pi/2n)} \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{i\cos\left(\frac{j\pi}{2n}\right)}{-\sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{i\sin(k\pi/2n)}{\cos(k\pi/2n)} \times \frac{i\cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{-\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)} \\
&= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{i^2}{-1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Exercice 72 : ✪✪ En résolvant l'équation

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

de deux façons différentes, donner les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Correction : Soit $z \neq 0$. Tout d'abord, l'équation $Z^2 + Z - 1 = 0$ a pour solutions $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z+\frac{1}{z}\right) - 1 = 0 \quad &\iff \quad z + \frac{1}{z} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\
&\iff \quad z^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) z + 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad z^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) z + 1 = 0
\end{aligned}$$

La première équation a pour discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 \\
&= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - 16}{4} \\
&= \frac{-5+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Les solutions de la première équation sont donc

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{4} \pm \frac{1}{2} \times i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \pm i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

On trouve de même que les solutions de la deuxième équation sont :

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \pm i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

Résolvons à présent cette équation d'une autre manière.

$$\begin{aligned}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1 &= z^2+2+\frac{1}{z^2}+z+\frac{1}{z}-1\\ &= \frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2}\end{aligned}$$

Une fraction étant nulle si et seulement si son numérateur est nul, z est solution de l'équation si et seulement si $z^4+z^3+z^2+z+1=0$. On reconnaît une somme géométrique : $z=1$ n'étant pas solution, on peut supposer $z \neq 1$.

$$z^4+z^3+z^2+z+1=\frac{1-z^5}{1-z}$$

Finalement, z est solution si et seulement si $z^5=1$ si et seulement si z est une racine cinquième de l'unité (différente de 1). Dès lors, les solutions sont donc $e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{6i\pi/5}, e^{8i\pi/5}$. Ces quatre complexes étant dans les quatre « cadrans » du plan, pour savoir qui est qui, il suffit de connaître le signe de la partie réelle et de la partie imaginaire. On sait que $\cos(2\pi/5)$ et $\sin(2\pi/5)$ sont positifs puisque $2\pi/5 \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Parmi les solutions de l'équation, la seule à avoir une partie réelle et une partie imaginaire positives est

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

et donc ce complexe est égal à $e^{2i\pi/5}=\cos(2\pi/5)+i\sin(2\pi/5)$. Par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

De plus, $4\pi/5 \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ donc $\cos(4\pi/5) \leq 0 \leq \sin(4\pi/5)$. Or, une seule solution de l'équation a une partie réelle négative et une partie imaginaire positive, et on trouve de même que :

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{-1-\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

On trouve de même que

$$\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=\frac{-1-\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

et puisque $6\pi/5=\pi+\pi/5$, $\cos(\pi/5)=-\cos(6\pi/5)$ et idem pour le sinus, si bien que

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Exercice 73 - Racines primitives de l'unité : ✪ Soit $n \geq 1$. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. On dit que ω est une racine primitive n-ième de l'unité si n est le plus petit entier p supérieur ou égal à 1 tel que $\omega^p=1$. Montrer que ω est une racine primitive n-ième de l'unité si et seulement s'il existe $k \in [\![0\,; n-1]\!]$ premier avec n tel que $\omega = e^{2ik\pi/n}$.

Correction : Il existe $k \in [\![0\,; n-1]\!]$ tel que $\omega=e^{2ik\pi/n}$. Supposons que k soit premier avec n. Soit $p \geq 1$ tel que $\omega^p=1$. Alors $e^{2ikp\pi/n}=1$ si bien que

$$\frac{2kp\pi}{n} \equiv 0[2\pi]$$

donc $kp \equiv 0[n]$ i.e. n divise kp. Or, k et n sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauß, n divise p : n est donc inférieur à p c'est-à-dire que n est le plus petit entier p qui convient. Finalement, ω est une racine primitive n-ième de l'unité.

Réciproquement, supposons que k ne soit pas premier avec n et posons $d=k\wedge n>1$. Alors il existe k_1 et k_2 tels que $k=k_1d$ et $n=k_2d$ (en particulier $1 \leq k_2 < n$) si bien que

$$\omega = e^{2ik_1d/k_2d}=e^{2ik_1\pi/k_2}$$

et finalement $\omega^{k_2} = 1$ avec $k_2 < n$: ω n'est pas une racine primitive n-ième de l'unité.

Exercice 74 - Éléments générateurs de $\mathbb{U}_n$: ✪✪ Soit $n \geq 1$. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$.

1. Montrer que $\{\omega^p \,|\, p \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{U}_n$ si et seulement s'il existe $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ premier avec n tel que $\omega = e^{2ik\pi/n}$.
2. En déduire que $\{\omega^p \,|\, p \in [\![0\,;\, n-1]\!]\} = \mathbb{U}_n$ si et seulement s'il existe $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ premier avec n tel que $\omega = e^{2ik\pi/n}$.

Remarque : En d'autres termes, les éléments générateurs de $\mathbb{U}_n$ sont exactement les racines primitives n-ièmes de l'unité.

Correction :

1. $\omega \in \mathbb{U}_n$ donc il existe $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ tel que $\omega = e^{2ik\pi/n}$ et notons $d = k \wedge n$. Supposons que $d = 1$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ku + vn = 1$ et donc
$$\begin{aligned} \omega^u &= e^{2iku\pi/n} \\ &= e^{\frac{2i\pi(1-vn)}{n}} \\ &= e^{\frac{2i\pi}{n} - 2i\pi} \\ &= e^{2i\pi/n} \in \mathbb{U}_n \end{aligned}$$
et donc, pour tout $p \in \mathbb{Z}, \omega^{up} = e^{2ip\pi/n} \in \mathbb{U}_n$, c'est-à-dire que $\{\omega^p \,|\, p \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{U}_n$. L'inclusion réciproque est triviale, on a donc l'égalité. Réciproquement, supposons qu'on ait cette égalité. Alors il existe p tel que $\omega^p = e^{2ik\pi/n}$. Ainsi, $e^{2ikp\pi/n} = e^{2i\pi/n}$ donc
$$\frac{2kp\pi}{n} \equiv \frac{2\pi}{n} [2\pi]$$
c'est-à-dire que $kp \equiv 1[n]$ i.e. il existe u tel que $kp = 1 + un$ i.e. $kp - un = 1$: d'après le théorème de Bézout, k et n sont premiers entre eux.
2. Supposons que k soit premier avec n. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. D'après la question précédente, il existe $p \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ tel que $\omega^p = z$. Effectuons la division euclidienne de p par n : il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ tel que $p = qn + r$. Dès lors,
$$\begin{aligned} z &= \omega^p \\ &= (\omega^n)^q \times \omega^r \\ &= 1 \times \omega^r \\ &= \omega^r \end{aligned}$$
Il en découle que $\mathbb{U}_n \subset \{\omega^r \,|\, r \in [\![0\,;\, n-1]\!]\}$, et l'inclusion réciproque est immédiate. Réciproquement, si $\{\omega^p \,|\, p \in [\![0\,;\, n-1]\!]\} = \mathbb{U}_n$ alors $\{\omega^p \,|\, p \in [\![0\,;\, n-1]\!]\} \subset \{\omega^p \,|\, p \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{U}_n$ donc $\{\omega^p \,|\, p \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{U}_n$ donc k est premier avec n d'après la question précédente.

Exercice 75 : ✪✪ Soient n_1 et n_2 deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer que $\mathbb{U}_{n_1} \cap \mathbb{U}_{n_2} = \mathbb{U}_{n_1 \wedge n_2}$. Illustrer par un dessin.

Correction : Montrons le résultat par double inclusion. Soit $d = n_1 \wedge n_2$ et soit $\omega \in \mathbb{U}_d$. Alors $\omega^d = 1$ et d divise n_1 et n_2 si bien que $\omega^{n_1} = \omega^{n_2} = 1$: en effet, il existe k_1 et k_2 tels que $n_1 = k_1 d$ et $n_2 = k_2 d$ donc $\omega^{n_1} = \left(\omega^d\right)^{k_1} = 1$ et idem pour n_2. En d'autres termes, $\omega \in \mathbb{U}_{n_1} \cap \mathbb{U}_{n_2}$ donc $\mathbb{U}_d \subset \mathbb{U}_{n_1} \cap \mathbb{U}_{n_2}$.

Réciproquement, soit $\omega \in \mathbb{U}_{n_1} \cap \mathbb{U}_{n_2}$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $un_1 + vn_2 = d$. Or, $\omega^{n_1} = \omega^{n_2} = 1$ donc
$$\begin{aligned} \omega^d &= \omega^{un_1 + vn_2} \\ &= (\omega^{n_1})^u \times (\omega^{n_2})^v \\ &= 1 \end{aligned}$$
donc $\omega \in \mathbb{U}_d$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité. Pour le dessin, voir celui du cours avec $\mathbb{U}_4 \cap \mathbb{U}_6$.

Exercice 76 : ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{U}_n \to \mathbb{U}_n$ définie par $\varphi(z) = z^2$.

1. Vérifier que φ définit bien une application.

2. Montrer que φ est injective si et seulement si n est impair.
3. Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\psi : z \mapsto z^p$ est une bijection de $\mathbb{U}_n$ dans lui-même si et seulement si $p \wedge n = 1$.

Correction :

1. Il faut prouver que φ est bien à valeurs dans $\mathbb{U}_n$ donc que, pour tout $z \in \mathbb{U}_n$, $\varphi(z) \in \mathbb{U}_n$. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Alors $z^n = 1$ donc

$$\begin{aligned} \varphi(z)^n &= z^{2n} \\ &= (z^n)^2 \\ &= 1^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

donc $\varphi(z) \in \mathbb{U}_n$: φ définit bien une application.

2. Supposons n pair : alors -1 est une racine n-ième de l'unité donc $-1 \in \mathbb{U}_n$ et $\varphi(1) = \varphi(-1) = 1$: φ n'est pas injective. Réciproquement, supposons n impair et prouvons que φ est injective. Soient z_1 et z_2 deux éléments de $\mathbb{U}_n$ et supposons que $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ i.e. ${z_1}^2 = {z_1}^2$. Alors $z_1 = \pm z_2$. Si $z_1 = -z_2$ alors ($\mathbb{U}_n$ est stable par quotient car il est stable par inverse et par produit, cf. cours) donc $z_1/z_2 = -1 \in \mathbb{U}_n$ ce qui est absurde puisque n est impair donc $-1 \notin \mathbb{U}_n$. On en déduit que $z_1 = z_2$: φ est injective.

3. Supposons que p et n ne soient pas premiers entre eux, et notons $d = p \wedge n$. Alors $d > 1$ donc il existe $k_1 \in [\![1\,;\, n-1]\!]$ tel que $n = k_1 \times d$. Posons $z = e^{2ik_1\pi/n}$. Alors $z \neq 1$. De plus, $\varphi(z) = e^{2ik_1p\pi/n}$. Or, d divise p donc il existe k_2 tel que $p = k_2 d$ si bien que

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= e^{2ik_1k_2d\pi/n} \\ &= e^{2ik_1k_2d\pi/k_1d} \\ &= e^{2ik_2\pi} \\ &= 1 \\ &= \varphi(1) \end{aligned}$$

En d'autres termes, φ n'est pas injective donc n'est pas bijective. Réciproquement, supposons que p et n soient premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $pu + vn = 1$.

- Montrons que φ est injective. Soient z_1 et z_2 deux éléments de $\mathbb{U}_n$. Supposons que $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$. Alors $\varphi(z_1)^u = \varphi(z_2)^u$ (l'entier u de la relation de Bézout ci-dessus). De plus, il existe $(k_1, k_2) \in [\![0\,;\, n-1]\!]^2$ tel que $z_1 = e^{2ik_1\pi/n}$ et $z_2 = e^{2ik_2\pi/n}$ si bien que

$$\begin{aligned} \varphi(z_1)^u &= e^{\frac{2ik_1pu\pi}{n}} \\ &= e^{\frac{2ik_1(1-vn)\pi}{n}} \\ &= e^{\frac{2ik_1\pi}{n} - 2ik_1v\pi} \\ &= e^{\frac{2ik_1\pi}{n}} \\ &= z_1 \end{aligned}$$

  Par symétrie des rôles, $\varphi(z_2)^u = z_2$ si bien que $z_1 = z_2$: φ est injective.
- Nous montrerons dans le chapitre 17 qu'une application injective entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective, et donc une application injective d'un ensemble FINI dans lui-même est bijective. Mais nous ne l'avons pas encore montré, montrons donc la surjectivité à la main. Soit $z \in \mathbb{U}_n$. Il existe donc $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ tel que $z = e^{2ik\pi/n}$. On montre comme ci-dessus que $\varphi(z^u) = z$ (oui, le u est dans φ) donc que z^u est un antécédent de z : φ est donc surjective donc bijective.

Exercice 77 - Somme de Gauß ✪✪ On se donne dans tout l'exercice un entier $n \in \mathbb{N}$ **impair**. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$ et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$$

1. Écrire $|S_n|^2$ comme une somme double, puis montrer que $|S_n|^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}$.

2. (a) Soit $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$. Montrer que la fonction

$$\varphi_k : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & \\ p & \longmapsto & \omega^{2pk+p^2} \end{cases}$$

est n-périodique.

(b) En déduire que, pour tout $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2} = \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{2pk+p^2}$.

3. Soit $p \in [\![0\,;\, n-1]\!]$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2pk}$.

4. En déduire que $|S_n| = \sqrt{n}$.

Correction :

1. Précisons que, lorsqu'on manie des complexes, on évite i et j comme indices de sommation. Réflexe pour ne pas écrire de bêtise (cf. chapitre 4) : prendre deux indices différents quand on fait des produits de sommes.

$$\begin{aligned} |S_n|^2 &= S_n \times \overline{S_n} \\ &= \sum_{q=0}^{n-1} \omega^{q^2} \times \overline{\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}} \\ &= \sum_{q=0}^{n-1} \omega^{q^2} \times \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\omega}^{k^2} \\ &= \sum_{q=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} \omega^{q^2} \times \overline{\omega}^{k^2} \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned} \overline{\omega}^{k^2} &= \left(e^{-2i\pi/n}\right)^{k^2} \\ &= e^{-2ik^2\pi/n} \\ &= \left(e^{2i\pi/n}\right)^{k^2} \\ &= \omega^{-k^2} \end{aligned}$$

si bien que

$$|S_n|^2 = \sum_{q=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{q^2-k^2}$$

En intervertissant les sommes (ici, aucune difficulté, les indices ne dépendent pas les uns des autres) :

$$|S_n|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} \omega^{q^2-k^2}$$

Faisons dans la deuxième somme le changement d'indice $p = q - k$, $q = p + k$ ce qui donne :

$$|S_n|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=-k}^{n-1-k} \omega^{(p+k)^2-k^2}$$

ce qui permet de conclure.

2. (a) Soit $p \in \mathbb{Z}$. Rappelons que $\omega^n = 1$ donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(p+n) &= \omega^{2(p+n)k+(p+n)^2} \\
&= \omega^{2pk+p^2} \times \omega^{2nk+2np+n^2} \\
&= \varphi_k(p) \times (\omega^n)^{2k+2p+n} \\
&= \varphi_k(p) \times 1
\end{aligned}$$

φ_k est donc bien n-périodique.

(b) Soit $k \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!]$. En clair, on veut changer les termes d'indice $-k, \dots, -1$ en les termes d'indices $n-k, \dots, n-1$ et c'est là qu'on va utiliser la périodicité de φ.

$$\begin{aligned}
\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2} &= \sum_{p=-k}^{-1} \omega^{2pk+p^2} + \sum_{p=0}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2} \\
&= \sum_{p=-k}^{-1} \varphi_k(p) + \sum_{p=0}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2} \\
&= \sum_{p=-k}^{-1} \varphi_k(p+n) + \sum_{p=0}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2} \\
&= \sum_{q=n-k}^{n-1} \varphi_k(q) + \sum_{p=0}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2} \\
&= \sum_{q=n-k}^{n-1} \omega^{2qk+q^2} + \sum_{p=0}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}
\end{aligned}$$

et on a le résultat voulu car l'indice est muet.

3. Notons T_p cette somme. On a

$$T_p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^{2p}\right)^k$$

c'est-à-dire que T_p est une somme géométrique. Cherchons quand $\omega^{2p} = 1$. $\omega^{2p} = e^{4ip\pi/n}$ donc

$$\omega^{2p} = 1 \iff \frac{4p\pi}{n} \equiv 0[2\pi] \iff 2p \equiv 0[n] \iff n|2p$$

Or, n est premier avec 2 donc, d'après le théorème de Gauß, si n divise $2p$ alors n divise p et la réciproque est immédiate. Par conséquent, $\omega^{2p} = 1$ si et seulement si n divise p ce qui n'est le cas que si $p = 0$ puisque $p \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!]$. Si $p = 0$ alors $T_p = n$. Si $p \neq 0$:

$$\begin{aligned}
T_p &= \frac{1 - \left(\omega^{2p}\right)^n}{1 - \omega^{2p}} \\
&= \frac{1 - (\omega^n)^{2p}}{1 - \omega^{2p}} \\
&= \frac{1-1}{1 - \omega^{2p}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

4. D'après la question 2.b :

$$\begin{aligned}
|S_n|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n-1} \omega^{2pk+p^2} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2pk+p^2} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{p^2} \times \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2pk} \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{p^2} \times T_p \\
&= \omega^{0^2} \times T_0 + \sum_{p=1}^{n-1} \omega^{p^2} \times T_p \\
&= n+0 \\
&= n
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

7.7 Interprétation géométrique des nombres complexes

Exercice 78 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $k \in [\![0\,; n]\!]$. Calculer le module de $5^k \times (3+4i)^{n-k}$. En déduire qu'il existe un cercle contenant plus de n points à coordonnées entières.

Correction : Puisque $|4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, alors $\left|5^k \times (3+4i)^{n-k}\right| = 5^k \times 5^{n-k} = 5^n$. Par conséquent, les points d'affixe $5^k \times (3+4i)^{n-k}$ appartiennent tous au cercle de centre O de rayon 5^n, et ils sont tous évidemment à coordonnées entières (en utilisant le binôme de Newton). Ce cercle contient donc $n+1$ points à coordonnées entières.

Exercice 79 : ✪

1. Montrer que la composée de deux symétries centrales de $\mathbb{C}$ est une translation.
2. Montrer que la composée de deux rotations de $\mathbb{C}$ est soit une rotation, soit une translation.

Correction :

1. Soient $s_1 : z \mapsto e^{i\pi}(z-z_1)+z_1 = -z+2z_1$ et $s_2 : z \mapsto e^{i\pi}(z-z_2)+z_2 = -z+2z_2$ deux symétries centrales (i.e. deux rotations d'angle π). Alors
$$s_1 \circ s_2 : z \mapsto s_1(s_2(z)) = r_1(-z+2z_2) = z-2z_2+2z_1$$
donc est une translation.
2. Soient $r_1 : z \mapsto e^{i\theta_1}(z-z_1)+z_1$ et $r_2 : z \mapsto e^{i\theta_2}(z-z_2)+z_2$ deux rotations. Alors, pour tout z :
$$\begin{aligned}
r_1 \circ r_2(z) &= r_1(r_2(z)) \\
&= r_1\left(e^{i\theta_2}(z-z_2)+z_2\right) \\
&= e^{i\theta_1} \times \left(e^{i\theta_2}(z-z_2)+z_2-z_1\right)+z_1 \\
&= e^{i\theta_1+\theta_2} \times z + \cdots
\end{aligned}$$
la constante n'ayant aucune importance. Si $\theta_1+\theta_2 \equiv 0[2\pi]$ alors $r_1 \circ r_2$ est une translation, et sinon c'est une rotation (d'angle $\theta_1+\theta_2$).

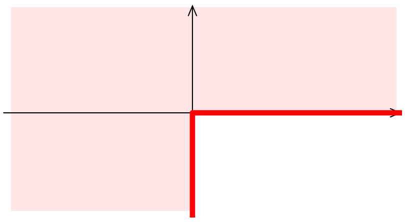
Exercice 80 : ✪ Décrire géométriquement les ensembles suivants.

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \geq 0, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, $B = \{z^3 \,|\, z \in A\}$ et $C = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^3 \in A\}$.
2. $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| = |z-i|\}$.

3. $E = \{z \in \mathbb{C} \,|, 1 \leq |z-3| < 3\}$.

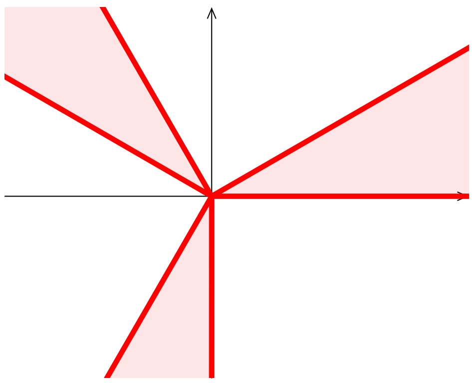
Correction :

1. A est le quart de plan formé par les complexes ayant une partie imaginaire et une partie réelle positives (le quart de plan en haut à droite). B est l'ensemble des complexes obtenus en mettant au cube un élément de A. Un élément (non nul) de A étant de la forme $re^{i\theta}$ avec $\theta \in [\,0\,;\pi/2\,]$, son cube est de la forme $r^3e^{3i\theta}$ donc de la forme $\rho e^{i\varphi}$ avec $\varphi \in [\,0\,;3\pi/2\,]$, et réciproquement, tout complexe de la forme $\rho e^{i\varphi}$ avec $\rho > 0$ et $\varphi \in [\,0\,;3\pi/2\,]$ est le cube de $\sqrt[3]{\rho}e^{i\varphi/3} \in A$ puisque $\varphi/3 \in [\,0\,;\pi/2\,]$. En d'autres termes, B est constitué des trois quarts du plan, i.e. la zone colorée ci-dessous :

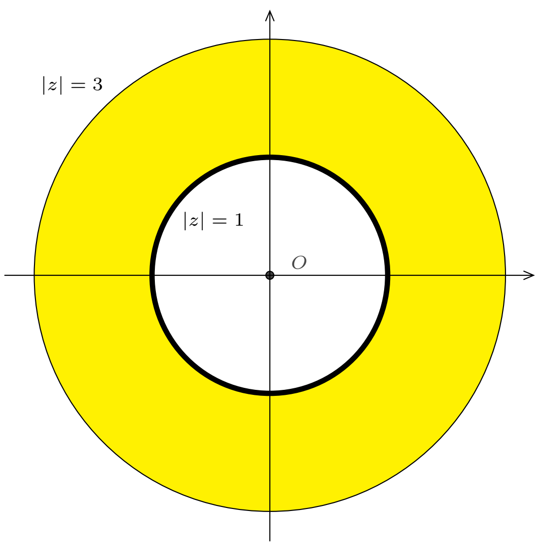


Enfin, soit $z \in \mathbb{C}^*$ (il est évident que $z = 0 \in C$) que l'on note $z = |z|e^{i\theta}$ avec $\theta \in [\,0\,;2\pi\,]$. Dès lors, $z^3 = |z|^3e^{3i\theta}$ avec $3\theta \in [\,0\,;6\pi\,[$. Or, $z^3 \in A$ si et seulement si $0 \leq 3\theta \leq \pi/2$ ou (on travaille modulo 2π entre 0 et 6π) $2\pi \leq 3\theta \leq 2\pi + \pi/2$ ou $4\pi \leq 3\theta \leq 4\pi + \pi/2$. Finalement :

$$z \in C \iff \theta \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{6}\,\right] \cup \left[\,\frac{2\pi}{3}\,;\frac{5\pi}{6}\,\right] \cup \left[\,\frac{4\pi}{3}\,;\frac{9\pi}{6}\,\right]$$



2. C'est la médiatrice du segment formé par 1 et i donc la première bissectrice. On pourrait montrer de façon analogue à l'exercice 10 que $z = x + iy$ appartient à cet ensemble si et seulement si $y = x$.
3. E est l'ensemble des complexes ayant un module supérieur ou égal à 1 et strictement inférieur à 3. C'est la couronne ci-dessous : la frontière inférieure (le trait noir en gras) est incluse dans E mais pas la frontière supérieure.



Exercice 81 : ✪ Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1. les points d'affixe j, z et jz soient alignés.

2. les points d'affixe i, z, iz soient alignés.
3. les points d'affixe $1, z, 1+z^2$ soient alignés.
4. les points d'affixe i, z et iz forment un triangle isocèle rectangle en i.
5. les points d'affixe z, z^2 et z^3 forment un triangle équilatéral (non réduit à un point). Illustrer par un dessin.

Correction : Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

1. Notons A le point d'affixe $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, B le point d'affixe $z = x+iy$ et C le point d'affixe $jz = \left(-\dfrac{x}{2} - \dfrac{y\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\dfrac{x\sqrt{3}}{2} - \dfrac{y}{2}\right)$. Alors :

$$\begin{aligned}
A, B, C \text{ sont alignés} &\iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\
&\iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x + 1/2 \\ y - \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -x/2 - y\sqrt{3}/2 + 1/2 \\ x\sqrt{3}/2 - y/2 - \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\
&\iff \left(x + \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0 \\
&\iff \frac{x^2\sqrt{3}}{2} - \frac{xy}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{x\sqrt{3}}{4} - \frac{y}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{4} - \frac{3y}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \\
&\iff \frac{x^2\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{3y}{2} + \frac{y^2\sqrt{3}}{2} = 0 \\
&\iff x^2 - x + y^2 - y\sqrt{3} + 1 = 0 \\
&\iff x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{2} + y^2 - 2 \times y \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'ensemble cherché est le cercle de centre $(1/2, \sqrt{3}/2)$ de rayon 1.

2. On trouve de même (les calculs sont même plus simples) que l'ensemble cherché est le cercle de centre $(1/2, 1/2)$ de rayon $\sqrt{2}/2$.
3. On trouve de même que l'ensemble cherché est la réunion de la droite d'équation $y = 0$ et du cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1.
4. Tout d'abord, le triangle est isocèle en i si et seulement si

$$\begin{aligned}
|z - i| &= |iz - i| \\
&= |i| \times |z - 1| \\
&= |z - 1|
\end{aligned}$$

si et seulement si z appartient à la droite d'équation $y = x$, la médiatrice du segment formé par 1 et i. Cherchons à présent quand le triangle est rectangle en i. Notons A le point d'affixe i, B le point d'affixe $z = x + iy$ et C le point d'affixe $iz = -y + ix$.

$$
\begin{aligned}
ABC \text{ est rectangle en } A &\iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux} \\
&\iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -y \\ x-1 \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux} \\
&\iff -yx + (y-1)(x-1) = 0 \\
&\iff -yx + xy - y - x + 1 = 0 \\
&\iff y = -x + 1
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que l'ensemble cherché est la droite d'équation $y = -x+1$. Finalement, l'ensemble des points pour lesquels le triangle est rectangle isocèle en i est l'intersection de ces deux droites, i.e. le point $(1/2, 1/2)$.

5. Supposons $z \neq 0$ et $z \neq 1$ pour que les trois complexes ne soient pas confondus. Dès lors, $|z|$ et $|z-1|$ sont non nuls.

$$
\begin{aligned}
\text{Le triangle est équilatéral} &\iff |z^2 - z| = |z^3 - z^2| = |z^3 - z| \\
&\iff |z| \times |z-1| = |z^2| \times |z-1| \qquad \text{et} \qquad |z| \times |z-1| = |z| \times |z^2 - 1| \\
&\iff |z| = |z^2| \qquad \text{et} \qquad |z-1| = |z^2 - 1| \\
&\iff |z| = 1 \qquad \text{et} \qquad |z-1| = |(z-1)(z+1)| \\
&\iff |z| = 1 \qquad \text{et} \qquad 1 = |z+1|
\end{aligned}
$$

Il en découle que l'ensemble cherché est l'intersection des cercles de centres 0 et 1 de rayon 1. Or, en écrivant $z = x+iy$, on trouve que les solutions sont $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ donc j et j^2. Le triangle formé par z, z^2 et z^3 est alors le triangle équilatéral formé par $1, j, j^2$: cf. cours pour un dessin.

Exercice 82 : ✪ Trouver les complexes z non nuls tels que $z, 1/z$ et $1+z$ aient même module.

Correction : Tout d'abord, $|1/z| = 1/|z|$ si bien que z et $1/z$ ont même module si et seulement si $|z|^2 = 1$ si et seulement si $|z| = 1$ (un module est positif). Par conséquent, on suppose dans la suite que $z = x+iy$ est de module 1.

$$
\begin{aligned}
|z| = |z+1| &\iff |z|^2 = |z+1|^2 \\
&\iff x^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \\
&\iff 0 = 2x + 1 \\
&\iff x = -1/2
\end{aligned}
$$

et alors (puisque $|z| = 1$), $y^2 = 1 - x^2 = 3/4$ si bien que $y = \pm\sqrt{3}/2$. Finalement, les seules solutions sont $-\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c'est-à-dire j et j^2.

Exercice 83 : ✪ Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que : z est réel $\iff \left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$. En donner une interprétation géométrique.

Correction : Notons $z = x+iy$. Si $z \neq -i$ alors z n'est pas réel. On suppose donc $z \neq -i$ dans la suite.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = 1 &\iff |z-i| = |z+i| \\
&\iff |z-i|^2 = |z+i|^2 \\
&\iff x^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2 \\
&\iff -2y = 2y \\
&\iff y = 0 \\
&\iff z \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Géométriquement, cela se voit très bien : l'axe des abscisses (donc des nombres réels) est la médiatrice du segment formé par i et $-i$ donc l'ensemble des points équidistances à i et $-i$ i.e. les points tels que $|z-i| = |z+i|$, et c'est précisément ce qu'on a prouvé par le calcul.

Exercice 84 : Soient A, B, C trois points du plan d'affixes a, b, c.

1. Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$. Les complexes a, b, c jouent-ils le même rôle ?
2. En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0$.

Correction :

1. On a :

$$\begin{aligned}
ABC \text{ est équilatéral direct} &\iff C \text{ est l'image de } B \text{ par la rotation de centre } A \text{ et d'angle } \pi/3 \\
&\iff c = e^{i\pi/3}(b-a) + a \\
&\iff c = e^{i\pi/3} \times b + a\left(1 - e^{i\pi/3}\right) \\
&\iff c = e^{i\pi/3} \times b + a\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\
&\iff a \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) - e^{i\pi/3} \times b + c = 0 \\
&\iff a \times j + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \times b + c = 0 \\
&\iff aj + bj^2 + c = 0 \\
&\iff j^2(aj + bj^2 + c) = 0 \\
&\iff a + bj + cj^2 = 0
\end{aligned}$$

   Non, car si on échange b et c, l'égalité n'est plus valable. Les points B et C ne jouent pas le même rôle car, si on les échange, on transforme le triangle en un triangle équilatéral indirect.

2. ABC est équilatéral si et seulement s'il est équilatéral direct ou indirect, si et seulement si ABC est équilatéral direct ou ACB est équilatéral direct. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
ABC \text{ est équilatéral} &\iff a + bj + cj^2 = 0 \quad \text{ou} \quad a + cj + bj^2 = 0 \\
&\iff \left(a + bj + cj^2\right) \times \left(a + cj + bj^2\right) = 0 \\
&\iff a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab = 0
\end{aligned}$$

   après un calcul similaire à celui de l'exercice 64.

Exercice 85 : ✪

1. Montrer qu'un triangle équilatéral non réduit à un point ne peut pas avoir ses trois sommets à coordonnées entières.
2. **Remake :** Soit $ABCD$ un carré. On suppose que C et D sont à coordonnées entières. Montrer que A et B sont aussi à coordonnées entières.

Correction :

1. Soit ABC un triangle équilatéral direct et notons a, b, c les affixes de A, B, C. Supposons que a et b soient des entiers et prouvons que c n'en est pas un. Puisque ABC est équilatéral direct, c est l'image de b par la rotation d'angle $\pi/3$ de centre a c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}
c &= e^{i\pi/3} \times (b-a) + a \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \times (b-a) + a
\end{aligned}$$

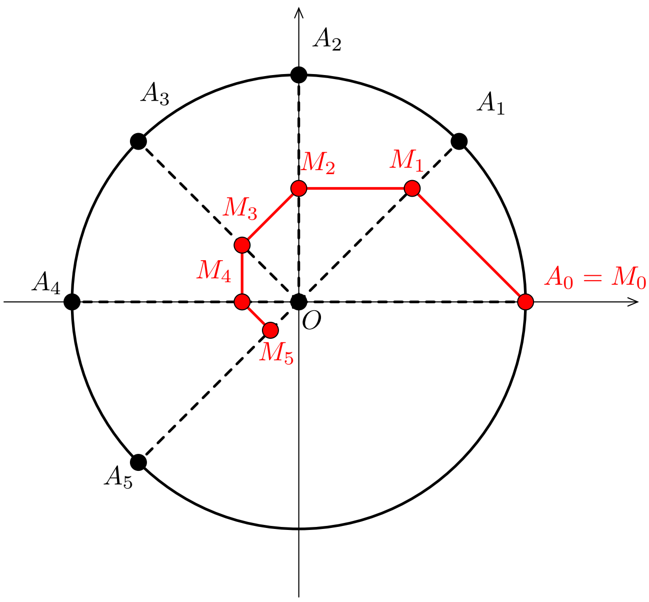
   Or, $b \neq a$ car le triangle n'est pas réduit à un point, et donc $b - a$ a au moins une coordonnée non nulle. a et b ont des coordonnées entières donc c a au moins une coordonnée irrationnelle donc n'est pas à coordonnées entières.

2. Notons a, b, c, d les affixes de A, B, C, D. Alors A est l'image de C par la rotation de centre D d'angle $-\pi/2$ (faire un dessin) et B est l'image de D par la rotation d'angle $\pi/2$ de centre c. Par conséquent :

$$\begin{aligned} a &= e^{-i\pi/2} \times (c-d) + d \\ &= -i(c-d) + d \end{aligned}$$

et donc a est aussi à coordonnées entières, et de même pour b.

Exercice 86 : ✪



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n le point d'affixe $e^{in\pi/4}$. On définit alors une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : $M_0 = A_0$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{n+1} est le projeté orthogonal de M_n sur la droite (OA_{n+1}). Déterminer l'affixe z_n du point M_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction : Par définition, pour tout n, M_{n+1} est obtenu à partir de M_n par une rotation de centre O d'angle $\pi/4$ et par une homothétie de rapport $1/\sqrt{2}$. En effet, OM_nM_{n+1} est un triangle rectangle en M_{n+1} et $OM_{n+1} = OM_n \times \cos(\pi/4) = OM_n/\sqrt{2}$. Par conséquent,

$$z_{n+1} = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \times z_n$$

On a une suite géométrique, et puisque $z_0 = 1$, alors pour tout n, $z_n = \dfrac{e^{in\pi/4}}{\sqrt{2}^n}$.

Exercice 87 : ✪ Montrer par le calcul et aussi par un raisonnement géométrique qu'une similitude directe est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et donner sa bijection réciproque.

Correction : Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et soit $f : z \mapsto az + b$. Montrons par le calcul que f est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Soit $y \in \mathbb{C}$ et soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $f(z) = y \iff z = \dfrac{y-b}{a}$. Par conséquent, y a un unique antécédent : f est bijective et sa bijection réciproque est la fonction $f^{-1} : y \mapsto \dfrac{y-b}{a}$. Montrons ce résultat par un raisonnement géométrique. D'après le cours, f est la composée d'une rotation et d'une homothétie (toutes les deux de centre un certain $z_0 \in \mathbb{C}$). Ces deux opérations sont réversibles/inversibles/bijectives : il suffit d'effectuer ces opérations dans l'ordre inverse pour inverser f (pour inverser une composer, il faut également inverser l'ordre, cf. chapitre 3, mais ici l'ordre n'a aucune importance donc on fait les opérations dans l'ordre qu'on veut). Par conséquent, f est bijective car composée de bijections, et la bijection réciproque est la composée des deux opérations inverses : la rotation, d'angle opposé, et l'homothétie, de rapport inverse.

Exercice 88 : ✪✪ Déterminer l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $|(1+i)z - 2i| = 2$. Retrouver ce résultat à l'aide de la similitude directe $f : z \mapsto (1+i)z - 2i$.

Correction : Soit $z \in \mathbb{C}$. Notons $z = x + iy$. Un module étant positif :

$$\begin{aligned}
|(1+i)z-2i|=2 &\iff |(1+i)z-2i|^2=4 \\
&\iff |(1+i)\times(x+iy)-2i|^2=4 \\
&\iff |(x-y)+i(x+y-2)|^2=4 \\
&\iff (x-y)^2+(x+y-2)^2=4 \\
&\iff x^2-2xy+y^2+x^2+y^2+4+2xy-4x-4y=4 \\
&\iff 2x^2-4x+2y^2-4y=0 \\
&\iff 2(x-2x)+2(y^2-2y)=0 \\
&\iff 2\left((x-1)^2-1\right)+2\left((y-1)^2-1\right)=0 \\
&\iff 2(x-1)^2+2(y-1)^2=4 \\
&\iff (x-1)^2+(y-1)^2=2
\end{aligned}$$

En d'autres termes, l'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega(1,1)$ (i.e. $1+i$) et de rayon $\sqrt{2}$. Retrouvons ce résultat à l'aide de la similitude directe $f: z\mapsto (1+i)z-2i$. Cherchons ses éléments caractéristiques. Commençons par le centre. Soit $z_0\in\mathbb{C}$.

$$z_0=(1+i)z_0-2i \iff z_0=2$$

On pose donc $z_0=2$. Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
f(z) &= (1+i)z-2i \\
z_0 &= (1+i)z_0-2i
\end{aligned}$$

En faisant la différence, $f(z)-z_0=(1+i)(z-z_0)$ donc $f(z)=z_0+(1+i)(z-z_0)$, et puisque $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, f est la composée de l'homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et de la rotation d'angle $\pi/4$ et de centre $z_0=2$. On cherche les complexes vérifiant $|f(z)|=2$ donc les complexes dont l'image appartient au cercle C de centre O de rayon 2. En d'autres termes, on cherche $f^{-1}(C)$. Or, d'après l'exercice précédent (mais on peut aussi l'affirmer directement), f^{-1} est la similitude directe obtenue en faisant les opérations « inverses » (dans un ordre quelconque puisque l'ordre n'intervient pas) i.e. f^{-1} est la composée de l'homothétie de rayon $1/\sqrt{2}$ et d'angle $-\pi/4$ de centre 2. En d'autres termes, $f^{-1}(C)$ est le cercle de centre $2/\sqrt{2}=\sqrt{2}$ de centre $f^{-1}(0)$. Or, $f^{-1}(z)=\dfrac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}}(z-2)+2$ donc

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{1-i}{2}\times(-2)+2 \\
&= -1+i+2 \\
&= 1+i
\end{aligned}$$

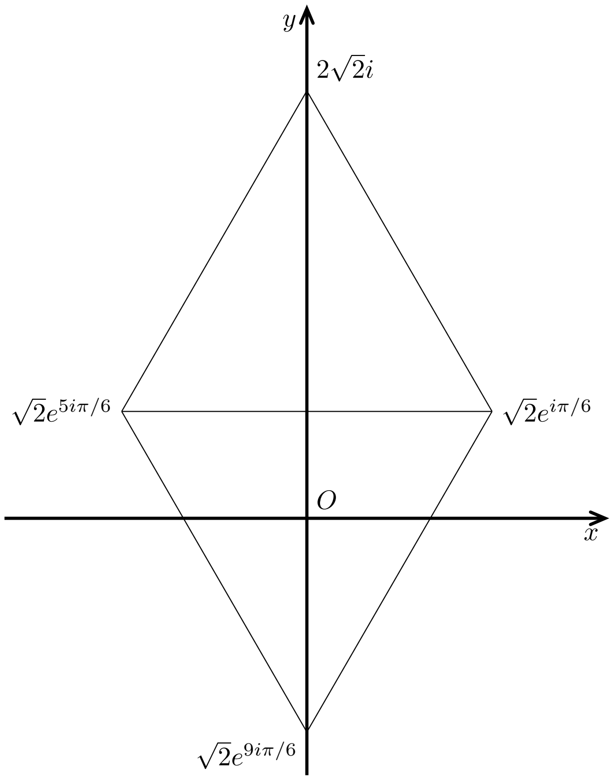
et on retrouve bien le même résultat.

Exercice 89 : ✪✪✪ Trouver les complexes z tels que z et ses racines cubiques forment un parallélogramme.

Correction : Supposons $z\neq 0$ sinon z et ses racines cubiques sont confondus et donc forment un parallélogramme (réduit à un point). Analyse : supposons que z et ses racines cubiques forment un parallélogramme. Notons a la racine cubique formant une diagonale avec z (« en face de z »). Les autres racines cubiques de z sont $a\times j$ et $a\times j^2$ (cf. cours : les racines cubiques de z s'obtiennent à partir de l'une d'elle par rotations successives d'angle $2\pi/3$). Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu donc $\dfrac{z+a}{2}=\dfrac{aj+aj^2}{2}$. Puisque $j+j^2=-1$, alors $\dfrac{z+a}{2}=\dfrac{-a}{2}$ donc $a=-\dfrac{z}{2}$ i.e. $-\dfrac{z}{2}$ est une racine cubique de z c'est-à-dire que $-\dfrac{z^3}{8}=z$ et puisque z est non nul, $z^2=-8$ i.e. $z=\pm 2\sqrt{2}i=2\sqrt{2}e^{i\pi/2}$ ou $2\sqrt{2}e^{3i\pi/2}$. Synthèse : si $z=2\sqrt{2}i$, les racines cubiques de z sont $\sqrt{2}e^{i\pi/6}, \sqrt{2}e^{5i\pi/6}$ et $\sqrt{2}e^{9i\pi/6}$ et un calcul simple donne :

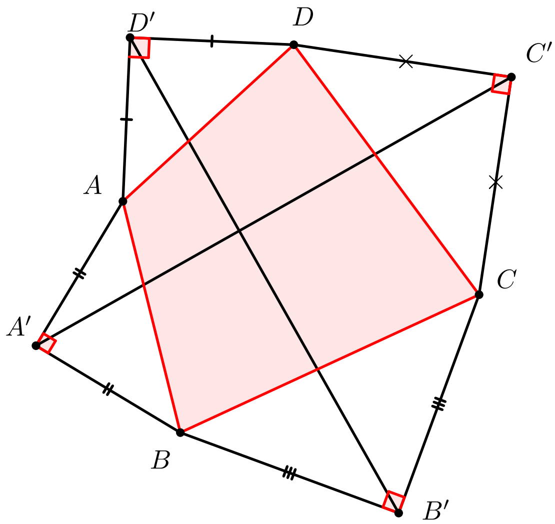
$$\frac{2\sqrt{2}i+\sqrt{2}e^{9i\pi/6}}{2}=\frac{\sqrt{2}e^{i\pi/6}+\sqrt{2}e^{5i\pi/6}}{2}$$

c'est-à-dire que les diagonales se coupent en leur milieu : on a bien un parallélogramme. On peut même montrer (exo) que les diagonales sont perpendiculaires et donc on a un losange.



Idem dans l'autre cas. Les seules solutions sont donc $\pm 2\sqrt{2}i$.

Exercice 90 : ✪✪✪ Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On construit les triangles isocèles $A'BA, B'CB, C'DC, D'AD$ rectangles en A', B', C', D' de sens direct. Montrer que les segments $[A'C']$ et $[B'D']$ sont perpendiculaires et de même longueur.



Correction : Puisque $A'BA$ est isocèle rectangle en A, on en déduit que $AA' = AB/\sqrt{2}$ et que $\widehat{A'AB} = \pi/4$. En d'autres termes, A' est l'image de A par la similitude directe de centre B, d'angle $\pi/4$ et de rapport $1/\sqrt{2}$. Si on note a l'affixe de A, b l'affixe de B etc. cela donne :

$$a' = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \times (a-b) + b$$

De même pour les autres :

- $b' = \dfrac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \times (b-c) + c$
- $c' = \dfrac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \times (c-d) + d$
- $d' = \dfrac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \times (d-a) + a$

Dès lors :

$$
\begin{aligned}
c' - a' &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \times (c - d - a + b) + d - b \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \times (c - d - a + b) + d - b \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \times (c - a) + (d - b) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
d' - b' &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \times (d - a - b + c) + a - c \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \times (d - a - b + c) + a - c \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \times (d - b) + (c - a) \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)
\end{aligned}
$$

En particulier, $d' - b' = i \times (c' - a')$. Puisque $|i| = 1$ alors $|d' - b'| = |c' - a'|$: les segments $[A'C']$ et $[B'D']$ sont de même longueur. De plus, $i = e^{i\pi/2}$ donc $\overrightarrow{B'D'}$ est obtenu à partir de $\overrightarrow{A'C'}$ à l'aide d'une rotation d'angle $\pi/2$: les deux segments sont perpendiculaires.

Chapitre 8

Systèmes linéaires et pivot de Gauß

Exercice 1 : ✪ Cet exercice doit être fait de tête.

1. Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y &=& -1 \\ x-y &=& 5 \end{array}\right.$$

2. L'un des deux systèmes suivants n'a pas de solution. Dire lequel, et résoudre l'autre.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x &+& 3y &-& z &+& t &=& 2 \\ 2x &+& 3y &+& z && &=& 4 \\ 2x &+& 3y &+& 2z && &=& 3 \\ 2x &+& 3y && && &=& 5 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x &+& 3y &-& z &+& t &=& 2 \\ 2x &+& 3y &+& z && &=& 4 \\ 2x &+& 3y &+& 2z && &=& 3 \\ 2x &+& 3y && && &=& 4 \end{array}\right.$$

3. Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x &+& y &+& z &=& -1 \\ x &+& y &-& z &=& 2 \\ x &-& y &-& z &=& 3 \end{array}\right.$$

Correction :

1. On trouve $x=2$ et $y=-3$.
2. Le deuxième système n'a pas de solution : les deuxième et quatrième lignes impliquent que $z=0$ mais les troisième et quatrième lignes impliquent que $z=-1/2$ ce qui est donc impossible. Résolvons le premier système. Les deuxième et quatrième lignes donnent $z=-1$ (ce qui est cohérent avec la troisième ligne). La première ligne devient alors

$$2x+3y+t=1$$

ce qui donne, avec la quatrième ligne, $t=-4$. Toutes les lignes donnent ensuite $2x+3y=5$ si bien que $x=\dfrac{5-3y}{2}$: il y a une infinité de solutions, tous les quadruplets de la forme $\left(\dfrac{5-3y}{2}, y, -1, -4\right)$ pour $y \in \mathbb{R}$.

3. Les première et deuxième lignes (en faisant L_1-L_2) permettent d'affirmer que $2z=-3$ donc que $z=-3/2$. En faisant L_2+L_3 on obtient $2x-2z=5$ donc $2x=5+2z=2$ si bien que $x=1$ et on trouve enfin que $y=-1-x-z=-1/2$.

Exercice 2 : ✪ Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} && y &+& z &=& -4 \\ 2x &-& y &+& 2z &=& -2 \\ -3x &+& y &-& z &=& -2 \end{array}\right.$ 2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x &+& y &+& z &=& 3 \\ 2x &-& y &+& 4z &=& 2 \\ 4x &+& y &+& 6z &=& 8 \end{array}\right.$ 3. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x &-& y &-& z &=& 1 \\ 2x &+& y &+& 3z &=& 3 \\ 6x &-& 3y &-& z &=& 5 \end{array}\right.$

Correction :

1.

$$\begin{cases} & & y & + & z & = & -4 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & -2 \\ -3x & + & y & - & z & = & -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x & - & y & + & 2z & = & -2 & \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ & & y & + & z & = & -4 \\ -3x & + & y & - & z & = & -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & - & y/2 & + & z & = & -1 & \quad L_1 \leftarrow L_1/2 \\ & & y & + & z & = & -4 \\ -3x & + & y & - & z & = & -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & - & y/2 & + & z & = & -1 \\ & & y & + & z & = & -4 \\ & - & y/2 & + & 2z & = & -5 & \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & - & y/2 & + & z & = & -1 \\ & & y & + & z & = & -4 \\ & & & + & 5z/2 & = & -7 & \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2/2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & - & y/2 & + & z & = & -1 \\ & & y & + & z & = & -4 \\ & & & & z & = & -14/5 & \quad L_3 \leftarrow 2L_3/5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & - & y/2 & & & = & 9/5 & \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ & & y & & & = & -6/5 & \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ & & & & z & = & -14/5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & & & = & 6/5 & \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2/2 \\ & y & & = & -6/5 \\ & & z & = & -14/5 \end{cases}$$

Il y a donc une unique solution : $(6/5, -6/5, -14/5)$.

2.

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & 6z & = & 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & - & 3y & + & 2z & = & -4 & \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & - & 3y & + & 2z & = & -4 & \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & + & y & + & z & = & 3 \\ & - & 3y & + & 2z & = & -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & + & y & = & 3 - z \\ & & y & = & \dfrac{4+2z}{3} & \quad L_2 \leftarrow L_2/-3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & & = & \dfrac{5-5z}{3} & \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & y & = & \dfrac{4+2z}{3} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{ \left(\dfrac{5-5z}{3}, \dfrac{4+2z}{3}, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\}$. En particulier, il y a une infinité de solutions.

3.
$$\begin{cases} x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 3 \\ 6x & - & 3y & - & z & = & 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & - & y & - & z & = & 1 & \\ & & 3y & + & 5z & = & 1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & 3y & + & 5z & = & -1 & L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1 \\ \end{cases}$$

et ce système n'a pas de solution car les deux dernières lignes sont incompatibles.

Exercice 3 : ✪ Une entreprise fait un bénéfice brut (avant impôts) de 50000 euros. Elle décide de verser 10% de son bénéfice net (après impôts) à une oeuvre caritative. Elle paye deux impôts : un impôt local égal à 5% du bénéfice (moins la donation, défiscalisée) et un impôt sur les sociétés égal à 40% (moins la donation et moins l'impôt local).

1. Calculer les montants de la donation et des deux impôts (on donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près, les valeurs exactes sont très moches...).
2. Quels seraient les impôts si l'entreprise ne faisait pas de donation ? En déduire le coût net de la donation.

Correction :

1. Notons d le montant de la donation, i_1 l'impôt local, et i_2 l'impôt sur les sociétés. On a alors le système suivant, qu'on résout :

$$\begin{cases} d & = & (50000 - i_1 - i_2) \times \dfrac{10}{100} \\ i_1 & = & (50000 - d) \times \dfrac{5}{100} \\ i_2 & = & (50000 - d - i_1) \times \dfrac{40}{100} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10d & + & i_1 & + & i_2 & = & 50000 & L_1 \leftarrow L_1 \times 10 \\ d & + & 20i_1 & & & = & 50000 & L_2 \leftarrow L_2 \times 20 \\ 2d & + & 2i_1 & + & 5i_2 & = & 100000 & L_3 \leftarrow L_3 \times 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d & + & 20i_1 & & & = & 50000 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 10d & + & i_1 & + & i_2 & = & 50000 & \\ 2d & + & 2i_1 & + & 5i_2 & = & 100000 & \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d & + & 20i_1 & & & = & 50000 & \\ & - & 199i_1 & + & i_2 & = & -450000 & L_2 \leftarrow L_2 - 10L_1 \\ & - & 38i_1 & + & 5i_2 & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d & + & 20i_1 & & & = & 50000 & \\ & - & 199i_1 & + & i_2 & = & -450000 & \\ & & 957i_1 & & & = & 2250000 & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{cases}$$

On trouve alors (oui, c'est moche) :

$$i_1 = \frac{2250000}{957} \approx 2351, i_2 = \frac{5700000}{319} \approx 17868 \qquad \text{et} \qquad d = \frac{950000}{319} \approx 2978$$

Finalement, après avoir payé les impôts et la donation, il reste environ 26803 euros.

2. Sans donation, on a le système suivant :

$$\begin{cases} i_1 & = & 50000 \times \dfrac{5}{100} \\ i_2 & = & (50000 - i_1) \times \dfrac{40}{100} \end{cases}$$

ce qui donne $i_1 = 2500$ et $i_2 = 21000$ si bien qu'après avoir payé les impôts, il reste 26500 euros. Le coût net de la dotation est donc d'environ 303 euros.

Exercice 4 : ✪✪

- 9 boisseaux de chanvre, 7 de froment, 3 de haricots, 2 de fèves, 5 de millet coûtent 140 pièces de monnaie.
- 7 boisseaux de chanvre, 6 de froment, 4 de haricots, 5 de fèves, 3 de millet coûtent 128 pièces de monnaie.
- 3 boisseaux de chanvre, 5 de froment, 7 de haricots, 6 de fèves, 4 de millet coûtent 116 pièces de monnaie.
- 2 boisseaux de chanvre, 5 de froment, 3 de haricots, 9 de fèves, 4 de millet coûtent 112 pièces de monnaie.
- 1 boisseau de chanvre, 3 de froment, 2 de haricots, 8 de fèves, 5 de millet coûtent 95 pièces de monnaie.

Combien coûte un boisseau de chaque denrée ? (Concours d'entrée à l'école mandarinale supérieure T'ai-hsueh de Xi'an, époque Han, 123 avant notre ère)

Correction : Flemme de faire le système (assez long, j'avoue). On trouve qu'un boisseau de chanvre coûte 7 pièces de monnaie, qu'un boisseau de froment coûte 4 pièces de monnaie, qu'un boisseau de haricots coûte 3 pièces de monnaie, qu'un boisseau de fèves coûte 5 pièces de monnaie, et qu'un boisseau de millet coûte 6 pièces de monnaie.

Exercice 5 : ✪✪ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes linéaires à paramètres suivants (d'inconnues x, y et z) :

1. $\begin{cases} z & = & \lambda x \\ y & = & \lambda y \\ x & = & \lambda z \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x & & - & z & = & \lambda x \\ 2x & + \ 4y & + & 2z & = & \lambda y \\ -x & & + & 3z & = & \lambda z \end{cases}$

Correction :

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$(S) \iff \begin{cases} -\lambda x & & + & z & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & & = & 0 \\ x & & - & \lambda z & = & 0 \end{cases}$$

- Premier cas : $\lambda = 0$. On obtient que $(0,0,0)$ est l'unique solution.
- Deuxième cas : $\lambda \neq 0$. On effectue l'opération $L_3 \leftarrow \lambda L_3 + L_1$:

$$(S) \iff \begin{cases} -\lambda x & & + & z & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & & = & 0 \\ & & & (1-\lambda^2)z & = & 0 \end{cases}$$

— Si $\lambda = 1$, alors

$$(S) \iff -x + z = 0 \iff x = z.$$

L'ensemble des solutions est $\{(x,y,x) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

— Si $\lambda = -1$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} x & & + & z & = & 0 \\ & 2y & & & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z & = & -x \\ y & = & 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{(x,0,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

— Si $\lambda \notin \{-1;1\}$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} -\lambda x & & + & z & = & 0 \\ & y & & & = & 0 \\ & & & z & = & 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

Ainsi $(0,0,0)$ est l'unique solution.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$(S) \iff \begin{cases} (3-\lambda)x & & - & z & = & 0 \\ 2x & + \ (4-\lambda)y & + & 2z & = & 0 \\ -x & & + & (3-\lambda)z & = & 0 \end{cases}$$

Puisque $3-\lambda$ peut être nul, inversons les lignes 1 et 3 (mais sinon il faut faire deux cas) :

$$(S) \iff \begin{cases} -x & & + & (3-\lambda)z & = & 0 \\ 2x & + \ (4-\lambda)y & + & 2z & = & 0 \\ (3-\lambda)x & & - & z & = & 0 \end{cases}$$

Faisons les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + (3-\lambda)L_1$:

$$(S) \iff \begin{cases} -x & & + & (3-\lambda)z & = & 0 \\ & (4-\lambda)y & + & 2(4-\lambda)z & = & 0 \\ & & & ((3-\lambda)^2-1)z & = & 0 \end{cases}$$

On a $(3-\lambda)^2 - 1 = (3-\lambda-1)(3-\lambda+1) = (2-\lambda)(4-\lambda)$.

- Premier cas : $\lambda = 4$. On a alors

$$(S) \iff -x - z = 0 \iff z = -x$$

  L'ensemble des solutions est alors $\{(x,y,-x) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.
- Deuxième cas : $\lambda = 2$. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} -x & & + & z & = & 0 \\ & 2y & + & 4z & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & & = & z \\ & y & = & -2z \end{cases}$$

  L'ensemble des solutions est alors $\{(z,-2z,z) \,|\, z \in \mathbb{R}\}$.
- Troisième cas : $\lambda \notin \{2;4\}$. On a alors

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} -x & & + & (3-\lambda)z & = & 0 \\ & (4-\lambda)y & + & 2(4-\lambda)z & = & 0 \\ & & & z & = & 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -x & & & = & 0 \\ & (4-\lambda)y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ &\iff x = y = z = 0. \end{aligned}$$

  Ainsi $(0,0,0)$ est l'unique solution.

Exercice 6 : ✪✪ Soit $m \in \mathbb{R}$. Décrire l'intersection éventuelle des plans de $\mathbb{R}^3$ d'équations $x - y + (1+m)z = 2-m$, $2x - my + 3z = 2 - m$ et $(1-m)x + y + 2z = 0$.

Correction :
On annule le coefficient devant x dans toutes les lignes sauf la première :

$$(S) \iff \begin{cases} x & - & y & + & (1+m)z & = & 2-m & \\ & & (2-m)y & + & (1-2m)z & = & m-2 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & (2-m)y & + & (m^2+1)z & = & (m-1)(2-m) & L_3 \leftarrow L_3 - (1-m)L_1 \end{cases}$$

On s'assure que le coefficient devant y est non nul. Il faut faire deux cas.

- **Cas où** $m = 2$ **:** On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ & & & - & 3z & = & 0 \\ & & & & 5z & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & - & y & + & 0 & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{cases}$$

  Ainsi l'ensemble des solutions est $\{x(1,1,0) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.
- **Cas où** $m \neq 2$ **:** Désormais le coefficient devant y est non nul et on annule le coefficient devant y dans la dernière ligne :

$$(S) \iff \begin{cases} x & - & y & + & (1+m)z & = & 2-m & \\ & & (2-m)y & + & (1-2m)z & = & m-2 & \\ & & & & m(m+2)z & = & m(2-m) & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

  Pour obtenir z, on aimerait maintenant diviser par $m(m+2)$... et cela n'est possible que si $m \notin \{-2;0\}$. Il va falloir différencier plusieurs cas :

  — **Cas où** $m = 0$ **:** On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x & - & y & + & z & = & 2 \\ & & 2y & + & z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

  La dernière ligne est toujours vérifiée : on peut l'omettre. On décide par exemple que y soit l'inconnue auxiliaire. On a alors

$$(S) \iff \begin{cases} x & = & 2-y-z \\ z & = & -2-2y \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & 4+3y \\ z & = & -2-2y \end{cases}$$

  L'ensemble des solutions est $\{(4,0,-2) + y(3,1,-2) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$.

— **Cas où** $m = -2$ **:** La dernière ligne de (S) devient alors $0 = -8$. Cette condition est bien entendue fausse : le système n'admet pas de solutions.

— **Cas où** $m \notin \{-2;0;2\}$ **:** On a alors $z = \dfrac{2-m}{m+2}$ et donc

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & 2-m-(1+m)\dfrac{2-m}{m+2} \\ (2-m)y & = & m-2-(1-2m)\dfrac{2-m}{m+2} \\ z & = & \dfrac{2-m}{m+2} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & \dfrac{2-m}{m+2} \\ (2-m)y & = & \dfrac{(2-m)(m-3)}{m+2} \\ z & = & \dfrac{2-m}{m+2} \end{array}\right.$$

Puisque $m \neq 2$, on obtient alors $y = \dfrac{m-3}{m+2}$ et donc $x = y + \dfrac{2-m}{m+2} = \dfrac{-1}{m+2}$. Le système admet une unique solution : $\left(\dfrac{-1}{m+2}, \dfrac{m-3}{m+2}, \dfrac{2-m}{m+2}\right)$.

Si $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, alors $ax+by+cz=d$ est l'équation d'un plan de l'espace (on en reparlera un peu dans le cours sur les espaces vectoriels). Par conséquent $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est une solution de (S) si et seulement si (x,y,z) se trouve sur l'intersection des plans d'équations $x-y+(1+m)z = 2-m$, $2x-my+3z = 2-m$ et $(1-m)x+y+2z=0$. On a démontré que :

- Si $m \in \{0;2\}$, alors l'intersection des trois plans est une droite.
- Si $m=-2$, alors l'intersection des plans est vide.
- Si $m \notin \{-2;0;2\}$, alors l'intersection des plans est un point.

Exercice 7 : ✪✪ Soient $n,p \geq 1$, (S_0) un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients rationnels. On suppose que (S_0) admet une solution non nulle dans $\mathbb{C}^p$. Montrer qu'il admet une solution non nulle dans $\mathbb{Z}^p$.

Correction : On sait que la solution nulle est toujours solution d'un système homogène. Puisqu'il y a une solution non nulle, on est dans le cas du paragraphe II.3, c'est-à-dire qu'on se retrouve avec des inconnues auxiliaires (et les d_i nuls car le système est homogène). Attention, comme on le dit en cours, cela ne veut pas forcément dire que $p > n$! Il suffit de choisir les x_i auxiliaires égales à 1 donc le membre de droite sera rationnel (car les coefficients du système sont rationnels), et ensuite on calcule les x_i inconnues principales en faisant des soustractions de rationnels, des multiplications et des divisions par des rationnels (car les coefficients sont rationnels). Dès lors, il existe une solution non nulle dans $\mathbb{Q}^p$, et en multipliant par le PPCM des dénominateurs, on a encore une solution (puisque le système est homogène, tout multiple d'une solution est encore solution) ce qui donne une solution non nulle dans $\mathbb{Z}^p$.

Exercice 8 : ✪✪✪

1. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Donner le nombre de solutions éventuelles ($x_1, \dots, x_n$ appartenant à $\mathbb{C}$) du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+x_2 & = & a_1 \\ x_2+x_3 & = & a_2 \\ & \vdots & \\ x_{n-1}+x_n & = & a_{n-1} \\ x_n+x_1 & = & a_n \end{array}\right.$$

2. On se donne n points du plan $A_1, \dots, A_n$. Existe-t-il un polygone à n côtés tel que les A_i soient les milieux des n côtés de ce polygone ?

Correction :

1. Mettons-le sous une forme plus adaptée et appliquons la méthode du pivot de Gauß :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & & & = & a_1\\
 & & x_2 & + & x_3 & & & = & a_2\\
 & & & & \vdots & & & & \vdots\\
 & & & & x_{n-1} & + & x_n & = & a_{n-1}\\
x_1 & & & & & + & x_n & = & a_n
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & & & = & a_1\\
 & & x_2 & + & x_3 & & & = & a_2\\
 & & & & \vdots & & & & \vdots\\
 & & & & x_{n-1} & + & x_n & = & a_{n-1}\\
 & - & x_2 & & & + & x_n & = & a_n - a_1
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & & & = & a_1\\
 & & x_2 & + & x_3 & & & = & a_2\\
 & & & & \vdots & & & & \vdots\\
 & & & & x_{n-1} & + & x_n & = & a_{n-1}\\
 & & & x_3 & & + & x_n & = & a_n - a_1 + a_2
\end{array}\right.$$

En continuant, on remarque que le système initial est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & & & = & a_1\\
 & & x_2 & + & x_3 & & & = & a_2\\
 & & & & \vdots & & & & \vdots\\
 & & & & x_{n-1} & + & x_n & = & a_{n-1}\\
 & & & & (-1)^{n-1}x_n & + & x_n & = & a_n - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}
\end{array}\right.$$

Il faut donc séparer les cas selon la parité de n.

- Si n est pair alors la dernière ligne devient : $0 = a_n - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}$. Si cette dernière condition n'est pas remplie, il n'y a pas de solution, le système est incompatible. Si cette condition est remplie, on peut supprimer la dernière ligne qui est toujours vraie, et on arrive à un système à $n-1$ équations et n inconnues. On met le x_n à droite en position d'inconnue auxiliaire, ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & = & a_1\\
 & & x_2 & + & x_3 & = & a_2\\
 & & & & \vdots & & \vdots\\
 & & & & x_{n-1} & = & a_{n-1} - x_n
\end{array}\right.$$

  En remontant, on peut exprimer toutes les inconnues en fonction de x_n, et donc il y a une infinité de solutions (on se contente de donner le nombre de solutions éventuelles, ce qui est suffisant pour la deuxième question).
- Si n est impair, alors la dernière ligne devient : $2x_n = a_n - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}$. On trouve donc x_n et, en remontant, on trouve la valeur de $x_{n-1}, \dots, x_1$. Il y a donc une unique solution.

2. Notons $a_1, \dots, a_n$ les affixes de $A_1, \dots, A_n$. On se demande s'il existe des points $M_1, \dots, M_n$ d'affixes respectives $x_1, \dots, x_n$ dont les A_i soient les milieux des côtés de ce polygone. Cela revient à se demander si le système suivant admet des solutions :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & & & = & 2a_1\\
 & & x_2 & + & x_3 & & & = & 2a_2\\
 & & & & \vdots & & & & \vdots\\
 & & & & x_{n-1} & + & x_n & = & 2a_{n-1}\\
x_1 & & & & & + & x_n & = & 2a_n
\end{array}\right.$$

   D'après la question précédente, il y a existence et unicité des affixes x_i donc des points M_i si n est impair. Si n est pair, il y a soit une infinité de solutions, soit aucune, cela dépend des affixes a_i donc des points A_i considérés.

Exercice 9 : ✪✪✪

1. Trouver a, b, c, d entiers relatifs non tous nuls tels que $20^a \times 24^b \times 25^c \times 27^d = 1$.
2. Soient $k \geq 1$ et $n_1, \dots, n_k$ des entiers supérieurs ou égaux à 2. On dit qu'ils sont multiplicativement dépendants s'il existe $(a_1, \dots, a_k) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^k$ tel que

$$\prod_{i=1}^k {n_i}^{a_i} = 1$$

Montrer qu'une condition suffisante pour cela est que l'entier $m = n_1 \times \cdots \times n_k$ ait au plus $k-1$ facteurs premiers.

3. Cette condition est-elle nécessaire ?

Correction :

1. En écrivant $20, 24, 25, 27$ en produit de facteurs premiers, on cherche a, b, c, d tels que :

$$2^{2a} \times 5^a \times 3^b \times 2^{3b} \times 5^{2c} \times 3^{3d} = 2^{2a+3b} \times 3^{b+3d} \times 5^{a+2c} = 1$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ b + 3d = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases}$$

En exprimant a, b, c en fonction de d, inconnue auxiliaire, on trouve que les solutions sont les quadruplets du type $(9d/2, -3d, -9d/4, d)$ avec $d \in \mathbb{Z}$. En prenant $d = 4$, on trouve que $a = 18, b = -12, c = -9$ et $d = 4$ conviennent.

2. Supposons donc que m ait au plus $k-1$ facteurs premiers, que l'on note $p_1, \dots, p_r$ avec $r \leq k-1$. Il en découle que les facteurs premiers des n_i sont parmi les p_i (pas de génération spontanée des nombres premiers : les facteurs premiers d'un produit sont exactement les facteurs premiers des termes du produit). Notons, pour i allant de 1 à k :

$$n_j = {p_1}^{\alpha_{1,j}} \times \cdots \times {p_r}^{\alpha_{r,j}}$$

avec les $\alpha_{i,j}$ dans $\mathbb{N}$ (possiblement nuls si le nombre premier en question n'apparaît pas dans la décomposition en produit de facteurs premiers), le premier indice étant celui du nombre premier p_i et le second celui de l'entier n_j correspondant. Dès lors, les n_i sont multiplicativement dépendants s'il existe $a_1, \dots, a_r$ dans $\mathbb{Z}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\prod_{i=1}^k {n_i}^{a_i} = 1$ i.e.

$${p_1}^{\alpha_{1,1}a_1} \times \cdots \times {p_r}^{\alpha_{r,1}a_1} \times \cdots \times {p_1}^{\alpha_{1,k}a_k} \times \cdots \times {p_r}^{\alpha_{r,k}a_k} = 1$$

c'est-à-dire :

$${p_1}^{\alpha_{1,1}a_1 + \cdots + \alpha_{1,k}a_k} \times \cdots \times {p_r}^{\alpha_{r,1}a_1 + \cdots + \alpha_{k,r}a_k} = 1$$

Par conséquent, une condition suffisante est qu'il existe $(a_1, \dots, a_k)$ entiers non tous nuls solutions du système homogène :

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha_{1,1}a_1 + \alpha_{1,2}a_2 + \cdots + \alpha_{1,k}a_k = 0 \\ \alpha_{2,1}a_1 + \alpha_{2,2}a_2 + \cdots + \alpha_{2,k}a_k = 0 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \alpha_{r,1}a_1 + \alpha_{r,2}a_2 + \cdots + \alpha_{r,k}a_k = 0 \end{cases}$$

Or, un système est toujours compatible (la solution nulle est toujours solution) et il y a strictement moins d'équations que d'inconnues donc il y a au moins une solution non nulle. Or, de même que dans l'exercice 7, il y a une solution rationnelle non nulle (en prenant les inconnues auxiliaires égales à 1 et en remontant en divisant, en multipliant par des entiers et en additionnant ou en soustrayant des entiers) si bien qu'en multipliant à la fin par le PPCM des dénominateurs, on a une solution dans $\mathbb{Z}^k$ non nulle, ce qui est le résultat voulu.

3. Non, ce n'est pas une condition nécessaire : par exemple, si tous les n_i sont égaux avec k facteurs premiers (par exemple, si on prend $k = 2$, alors en prenant $n_1 = n_2 = 6 = 2 \times 3$), il suffit de prendre $a_1 = 1, a_2 = -1$ et $a_3 = \cdots = a_k = 0$: les entiers sont multiplicativement dépendants mais m a k facteurs premiers.

Chapitre 9

Décomposition en éléments simples

Exercice 1 : ✪ Effectuer la division euclidienne de $A : x \mapsto x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $B : x \mapsto 2x^2 + x - 1$.

Correction :

$$
\begin{array}{cccccccccc|ccccc}
 & x^4 & + & x^3 & + & x^2 & + & x & + & 1 & 2x^2 & + & x & - & 1\\
\cline{11-15}
- & (x^4 & + & x^3/2 & - & x^2/2) & & & & & x^2/2 & + & x/4 & + & 5/8\\
\cline{2-10}
 & & & x^3/2 & + & 3x^2/2 & + & x & + & 1 & & & & & \\
 & - & (& x^3/2 & + & x^2/4 & - & x/4) & & & & & & & \\
\cline{3-10}
 & & & & & 5x^2/4 & + & 5x/4 & + & 1 & & & & & \\
 & & & & - & (5x^2/4 & + & 5x/8 & - & 5/8) & & & & & \\
\cline{5-10}
 & & & & & & & 5x/8 & + & 13/8 & & & & &
\end{array}
$$

En conclusion, $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (2x^2 + x - 1) \times \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} + \frac{5}{8}\right) + \frac{5x}{8} + \frac{13}{8}$.

Exercice 2 : ✪ Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{2x^4}{(x+1)(x-1)^3}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{4x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^3 x(x-1)}$.

Correction :

1. Le quotient de la division euclidienne du numérateur par le dénominateur vaut 2. Dès lors, il existe a, b, c, d uniques tels que pour tout $x \neq \pm 1$:

$$\frac{2x^4}{(x+1)(x-1)^3} = 2 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3}$$

En multipliant par $x+1$ et en faisant tendre a vers -1 on trouve que $a = 2/(-2)^3 = -1/4$. En multipliant par $(x-1)^3$ et en faisant tendre x vers 1 on trouve que $d = 1$. Dès lors :

$$f(0) = 0 = 2 + a - b + c - d \qquad \text{et} \qquad f(2) = \frac{32}{3} = 2 + \frac{a}{3} + b + c + d$$

si bien que

$$-b + c = \frac{-3}{4} \qquad \text{et} \qquad b + c = \frac{93}{12}$$

On trouve finalement que $b = 17/4$ et $c = 7/2$.

2. Le quotient de la division euclidienne est nul et le discriminant de x^2+2x+2 étant strictement négatif, il existe a, b, c uniques tels que pour tout $x \neq -1$:

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2}$$

En multipliant par $x+1$ et en faisant tendre x vers -1, on trouve que $a = 1$. En évaluant en $x = 0$, on trouve que

$$f(0) = \frac{1}{2} = a + \frac{c}{2}$$

donc $c = -1$. En évaluant en 2, on trouve que $b = -1$.

3. Le quotient de la division euclidienne est nul et x^2+1 a un discriminant strictement négatif donc il existe a, b, c, d réels uniques tels que pour tout $x \neq \pm 1$:

$$\frac{4x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

En multipliant par $x-1$ et en faisant tendre x vers 1, on trouve que $a = 1$. En multipliant par $x+1$ et en faisant tendre x vers -1, on trouve que $b = -1$. En évaluant en 0, on trouve que :

$$f(0) = 0 = -a + b + d$$

donc $d = 2$. On pourrait évaluer en un autre réel (2 par exemple) mais on va plutôt s'intéresser à la limite. La limite en $+\infty$ vaut 0, mais si on multiplie par x et qu'on fait tendre x vers $+\infty$, alors le membre de gauche tend vers 0 et le membre de droite tend vers $a+b+c$ donc, par unicité de la limite, $a+b+c = 0$ donc $c = 0$.

4. Le quotient de la division euclidienne vaut 0 donc il existe a, b, c, d, e réels uniques tels que pour tout $x \neq 0, \pm 1$:

$$\frac{1}{(x+1)^3 x(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{d}{x} + \frac{e}{x-1}$$

En multipliant par x et en faisant tendre x vers 0, on trouve que $d = -1$. En multipliant par $x-1$ et en faisant tendre x vers 1, on trouve que $e = 1/8$. En multipliant par $(x+1)^3$ et en faisant tendre x vers -1, on trouve que $c = 1/2$. En multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve que

$$0 = a + d + e$$

Dès lors, $a = 7/8$. Finalement, en évaluant en -2, on trouve que :

$$-\frac{1}{6} = -a + b - c - \frac{d}{2} - \frac{e}{3}$$

si bien que $-1/6 = -7/8 + b - 1/2 + 1/2 - 1/24$. On trouve finalement que $b = 3/4$.

Exercice 3 : ✪ Calculer les limites des suites dont le terme général est donné ci-dessous :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k^3+3k^2+2k}$.
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k}$.

Correction :

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{x^3+3x^2+2x} = \dfrac{x+3}{x(x^2+3x+2)} = \dfrac{x+3}{x(x+1)(x+2)}$. Le quotient de la division euclidienne vaut 0 donc il existe a, b, c uniques tels que pour tout $x \neq 0, -1, -2$:

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

On trouve de même que précédemment que $a = 3/2$, $b = -2$ et $c = 1/2$. Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2k}+\frac{-2}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}\right)\\
&= \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\\
&= \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}\\
&= \left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)\times\left(\frac{3}{2}-2+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)-2\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\\
&= \frac{3}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\right)-2\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

2. Soit $n\geq 1$. Tout d'abord, si $k\geq 1$, $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ donc :

$$u_n=2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

Or, montre comme d'habitude que pour tout $x\neq 0,-1$:

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
u_n &= 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= 2\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 2
\end{aligned}$$

Exercice 4 : ✪✪✪ Soit $n\geq 1$. Soit f la fonction définie sur $[\,1\,;+\infty\,[$ par

$$f(x)=\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)\cdots(t+n)}$$

Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ (on exprimera cette limite sous forme d'une combinaison linéaires de logarithmes que l'on ne cherchera pas à calculer).

Correction : Il existe $\alpha_0,\dots,\alpha_n$ tels que pour tout $t\neq 0,-1,\dots,-n$,

$$\frac{1}{t(t+1)\cdots(t+n)}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha_i}{t+i}$$

Soit $i\in[\![\,0\,;p\,]\!]$. Multiplions cette égalité par $t+i$, ce qui donne :

$$\frac{1}{t(t+1)\cdots(t+i-1)(t+i+1)\cdots(t+p)}=\alpha_i+\sum_{j\neq i}\frac{\alpha_j(t+i)}{t+j}$$

et faisons tendre t vers $-i$: le membre de droite tend vers α_i (car la somme restante tend vers 0) et le membre de gauche vers

$$\frac{1}{(-i)(-i+1)\cdots(-i+i-1)(-i+i+1)\cdots(-i+p)}=\frac{1}{(-i)(-(i-1))\cdots(-1)(1)(2)\cdots(p-i)}$$

Par unicité de la limite, $\alpha_i = \dfrac{1}{(-i)(-(i-1))\cdots(-1)(1)(2)\cdots(p-i)}$. Commençons par remonter tous les -1 ce qui donne successivement

$$\alpha_i = \frac{(-1)^i}{i(i-1)\cdots\times 1\times 1\times 2\times\cdots\times(p-i)} = \frac{(-1)^i}{i!\times(p-i)!}$$

Dès lors,

$$\alpha_i = \frac{(-1)^i\times\binom{p}{i}}{p!}$$

Soit donc $X\geq 1$. D'après ce qui précède,

$$f(X) = \int_1^X \sum_{i=0}^p \frac{\alpha_i}{t+i}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^p \alpha_i \int_1^X \frac{\mathrm{d}t}{t+i} = \sum_{i=0}^p \alpha_i [\ln(t+i)]_1^X$$

et donc

$$f(x) = \sum_{i=0}^p \alpha_i \ln(X+i) - \sum_{i=0}^p \alpha_i \ln(1+i)$$

On veut passer à la limite quand $X\to+\infty$: la deuxième somme est constante et ne nous gêne pas, c'est la première qui nous gêne car tous les ln tendent vers $+\infty$. Comme d'habitude quand on a un ln : on factorise par le terme dominant (ici, X) ce qui donne

$$f(x) = \sum_{i=0}^p \alpha_i \ln(X) + \sum_{i=0}^p \alpha_i \ln\left(1+\frac{i}{X}\right) - \sum_{i=0}^p \alpha_i \ln(1+i) = \ln(X)\sum_{i=0}^p \alpha_i + \sum_{i=0}^p \alpha_i \ln\left(1+\frac{i}{X}\right) - \sum_{i=0}^p \alpha_i \ln(1+i)$$

Or, la première somme est nulle d'après le binôme de Newton donc

$$I_X = \sum_{i=0}^p \alpha_i \ln\left(1+\frac{i}{X}\right) - \sum_{i=0}^p \alpha_i \ln(1+i)$$

Or, la fonction ln étant continue,

$$\sum_{i=0}^p \alpha_i \ln\left(1+\frac{i}{X}\right) \xrightarrow[X\to+\infty]{} \sum_{i=0}^p \alpha_i \ln(1) = 0$$

si bien que

$$f(X) \xrightarrow[X\to+\infty]{} -\sum_{i=0}^p \alpha_i \ln(1+i) = \sum_{i=0}^p \frac{(-1)^{i+1}}{p!}\binom{p}{i}\ln(1+i)$$