Feuille d'exercices - Chapitre 13

Vrai ou Faux ?

1. $x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
2. $\frac{1}{x}\cos(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
3. $\frac{1}{x}\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
4. $\frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
5. Si $\exp\circ f$ admet une limite finie en $+\infty$ alors f admet une limite finie en $+\infty$.
6. Si $\ln\circ f$ admet une limite finie en $+\infty$ alors f admet une limite finie en $+\infty$.
7. Le produit d'une fonction qui tend vers 0 en a et d'une fonction bornée tend vers 0 en a.
8. Une fonction monotone admet une limite en tout point intérieur à son domaine de définition.
9. Si $f(x)-g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
10. Une fonction f strictement monotone réalise une bijection entre un intervalle I et $f(I)$.
11. La partie entière est une fonction impaire.
12. La composée de deux fonctions impaires est paire.
13. Si f est paire et g impaire alors $f\circ g$ est impaire.
14. Si f est continue alors $|f|$ est continue.
15. Si $|f|$ est continue alors f est continue.
16. La fonction $x\mapsto \cos(\pi x)$ est 1-périodique.
17. Si $f(x_0+h)-f(x_0-h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et si f est définie en x_0 alors f est continue en x_0.
18. Si f et g sont discontinues en x_0 alors $f+g$ l'est également.
19. Une fonction définie sur un segment est bornée sur ce segment.
20. Une fonction continue est bornée.
21. Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ni majorée ni minorée est surjective.
22. L'image réciproque d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
23. La fonction Arctan est uniformément continue.
24. Une fonction uniformément continue est bornée.
25. Une fonction bornée est uniformément continue.
26. Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f est continue sur $[\,n\,;n+1\,]$, alors f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
27. Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f est uniformément continue sur $[\,n\,;n+1\,]$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
28. Une fonction monotone sur un segment est bornée sur ce segment.
29. Soit I un intervalle borné et soit f continue sur I. Alors f est bornée sur I.
30. Soit I un intervalle borné et soit f continue sur $\mathbb{R}$. Alors f est bornée sur I.
31. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x)^2=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Alors f est constante.
32. Une fonction bornée qui atteint ses bornes sur un segment est continue.
33. Si f est croissante majorée sur $]\,a\,;b\,[$ alors f admet une limite finie en a et b.
34. La composée de deux fonctions croissantes est croissante.
35. La composée de deux fonctions décroissantes est décroissante.
36. Soient f et g continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x\in\mathbb{R}, f(x)>g(x)$. Alors $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) > \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x)$.
37. ✪✪ Soient f et g continues de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x\in[\,0\,;1\,]$, $f(x)>g(x)$. Alors $\sup\limits_{x\in[\,0\,;1\,]} f(x) > \sup\limits_{x\in[\,0\,;1\,]} g(x)$.
38. ✪✪ Si $f\left(a+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors f admet une limite à droite en a égale à L.

1 Limites

Exercice 1 : ✪ Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)}$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x+2|x|}{x}$

Correction :

1. Soit $x\,]-\pi/4\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;\pi/4\,[$ (ou $x\not\equiv 0[\pi/4]$) pour que le dénominateur soit non nul.

$$\frac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)} = \frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\frac{2x}{4x}\times\frac{4x}{\sin(4x)}$$

Or, $2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc

$$\frac{\ln(1+2x)}{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

De même :

$$\frac{\sin(4x)}{4x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

donc

$$\frac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

2. Soit $x>0$. Alors

$$\frac{x+2|x|}{x} = \frac{x+2x}{x} = 3 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 3$$

Soit $x<0$. Alors :

$$\frac{x+2|x|}{x} = \frac{x-2x}{x} = -1 \xrightarrow[x\to 0^-]{} -1$$

La fonction $x\mapsto \dfrac{x+2|x|}{x}$ admet des limites à gauche et à droite distinctes en 0 donc n'a pas de limite en 0. La limite recherchée n'existe pas.

Exercice 2 : ✪ Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ périodique. Que dire de f si elle admet une limite (finie ou infinie) en $+\infty$?

Correction : Supposons que $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ soit périodique (notons $T>0$ une période) et admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Nous allons montrer que f est constante (égale à ℓ). Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas constante : il existe alors $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)\neq\ell$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $B>0$ tel que, pour tout $x>B$, $|f(x)-\ell|\leq\varepsilon$. Considérons $n\in\mathbb{N}$ tel que $x_0+nT>B$. On a alors

$$|f(x_0)-\ell| = |f(x_0+nT)-\ell|\leq\varepsilon.$$

C'est absurde si on prend $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0)-\ell|}{2}>0$. Nous en déduisons que f est constante égale à ℓ.

Montrons qu'une fonction périodique ne peut pas admettre de limite infinie en $+\infty$. Supposons par l'absurde que f soit T-périodique (avec $T>0$) et tende vers $+\infty$ en $+\infty$ (raisonnement analogue si f tend vers $-\infty$). Soit $A=|f(0)|+1$. Il existe $B\geq 0$ tel que, pour tout $x\geq B$, $f(x)\geq B$. Soit n tel que $nT\geq A$. Alors $f(nT)\geq|f(0)|+1>|f(0)|\geq f(0)$ mais $f(nT)=f(0)$ ce qui est absurde.

Exercice 3 : ✪ Calculer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de $f:x\mapsto x-\sqrt{\lfloor x^2\rfloor}$.

Correction : Soit $x\geq 1$. Alors $x^2-1<\lfloor x^2\rfloor\leq x^2$ donc, en multipliant par -1 et par croissance de la racine carrée :

$$x-\sqrt{x^2}=0\leq f(x)\leq x-\sqrt{x^2-1}$$

Or, avec la méthode de l'expression conjuguée :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\times\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{x^2-\sqrt{x^2-1}^2}{x+\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \\
&\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

D'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 4 : ✪ Étudier l'existence, et calculer le cas échéant, les limites des fonctions suivantes au point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ indiqué :

1. $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.
2. $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.
3. $x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.
4. $x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.
5. $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ en 0.
6. $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ en $+\infty$.
7. $x \mapsto \sin\left(\sqrt{x}\right)$ en 0.
8. $x \mapsto \sin\left(\sqrt{x}\right)$ en $+\infty$.
9. $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ en $+\infty$

Correction :

1. Pour tout n, on pose
$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$
Alors (on note f la fonction à chaque fois) $f(u_n) = \sin(2n\pi) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ tandis que $f(v_n) = \sin(\pi/2) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: on a exhibé deux suites (u_n) et (v_n) de limite nulle telles que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ aient des limites distinctes : on en déduit que f n'a pas de limite en 0.
2. Pour tout n, on pose $u_n = n\pi$ et $v_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$. Alors $f(u_n) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f(v_n) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ ce qui permet de conclure de la même façon.
3. Pour tout $x \neq 0$, $-|x| \leq f(x) \leq |x|$ (attention de ne pas encadrer par x et $-x$ car cela dépend du signe de x) donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
4. f n'a pas de limite en 0 : il suffit de poser, pour tout n, $u_n = n\pi$ et donc $f(u_n) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et $v_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ si bien que $f(v_n) = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et on conclut comme précédemment.
5. Tend vers 0 par continuité (ou composition de limites).
6. Pas de limite : poser $u_n = \sqrt{n\pi}$ et $v_n = \sqrt{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$.
7. Tend vers 0.
8. Pas de limite : poser $u_n = (n\pi)^2$ et $v_n = \left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)^2$.
9. Pas de limite : poser $u_n = n$ et $v_n = n + \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5 : ✪ Notons $\sin^1 = \sin$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin^{n+1} = \sin\circ\sin^n$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^n(x)}{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction : Prouvons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cette limite vaut 1. Pour $n = 1$, cela découle du cours puisque

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat vrai au rang n et prouvons qu'il reste vrai au rang $n+1$. On a :

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin^{n+1}(x)}{x} &= \frac{\sin(\sin^n(x))}{x} \\
&= \frac{\sin(\sin^n(x))}{\sin^n(x)} \times \frac{\sin^n(x)}{x}
\end{aligned}
$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\frac{\sin^n(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Par une récurrence immédiate, $u = \sin^n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (attention, la notation puissance désigne la composition, pas la multiplication ! On ne peut donc pas dire que $\sin^n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0^n = 0$, on est obligé de faire une récurrence) et on a toujours

$$\frac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$$

si bien que

$$\frac{\sin(\sin^n(x))}{\sin^n(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 6 : ✪

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $f(x) + \dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ si et seulement si $f(\sin(x)) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f\left(\dfrac{1}{\lfloor 1/x \rfloor}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. A-t-on forcément $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$?

Correction :

1. Supposons que f ne tende pas vers 1 en 0. Dès lors :

   $$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - 0| \leq \eta \qquad \text{et} \qquad |f(x) - 1| > \varepsilon$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$f(x) + \frac{1}{f(x)} - 2 = \frac{(f(x) - 1)^2}{f(x)}$$

   Par conséquent :

   $$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - 0| \leq \eta \qquad \text{et} \qquad f(x) + \frac{1}{f(x)} - 2 > \frac{\varepsilon^2}{f(x)}$$

   Or, f est majorée au voisinage de 0 puisque f est positive, donc $f(x) \leq f(x) + 1/f(x) \leq 3$ au voisinage de 0. Finalement :

   $$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - 0| \leq \eta \qquad \text{et} \qquad f(x) + \frac{1}{f(x)} - 2 > \frac{\varepsilon^2}{3}$$

   ce qui est absurde puisque $f(x) + 1/f(x) - 2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
2. Si $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ alors, par composition de limites puisque $\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a : $f(\sin(x)) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Réciproquement, supposons que $f(\sin(x)) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. L'idée est qu'au voisinage de 0, sin admet une bijection réciproque : Arcsin. Plus précisément, par continuité de l'Arcsin,

   $$u = \text{Arcsin}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \text{Arcsin}(0) = 0$$

   et $f(\sin(u)) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$. Par composition de limites, $f(\sin(\text{Arcsin}(x))) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, et on conclut en disant qu'au voisinage de 0 (plus précisément, sur $[-1\,;1]$), $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$.
3. Non, pas forcément. Prenons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

   $$f(x) = \sin(\pi/x)$$

   Alors, pour tout $x > 0$,

   $$f\left(\frac{1}{\lfloor 1/x \rfloor}\right) = \sin(\pi \lfloor 1/x \rfloor) 0$$

   car est l'image du sinus en un multiple entier de π donc

$$f\left(\frac{1}{\lfloor 1/x\rfloor}\right)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

mais on montre comme dans l'exercice 4 que f n'a pas de limite en 0.

Exercice 7 : ✪

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admettant une limite en 0 telle que $f(x)\times f(2x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Montrer que $f(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
2. À l'aide de l'indicatrice de l'ensemble des inverses des entiers impairs, montrer que ce résultat est faux si on ne suppose pas que f admet une limite en 0.

Correction :

1. Notons L la limite de f en 0 (qui existe par hypothèse). Puisque $2x\xrightarrow[x\to 0]{} 0$, par composition, $f(2x)\xrightarrow[x\to 0]{} L$ donc $f(x)\times f(2x)\xrightarrow[x\to 0]{} L^2$. Par unicité de la limite, $L^2=0$ donc $L=0$.
2. Prenons donc f la fonction qui vaut 1 en x s'il existe $n\in\mathbb{Z}$ tel que $x=1/(2n+1)$, et 0 sinon. Alors f n'a pas de limite en 0 donc ne tend pas vers 0 (prendre $u_n=1/2n$ et $v_n=1/(2n+1)$). Cependant, pour tout x, soit x n'est pas de la forme $1/(2n+1)$, et alors $f(x)=0$, soit x est de la forme $1/(2n+1)$ donc $2x$ n'est pas de cette forme donc $f(2x)=0$. On en déduit que $f(x)\times f(2x)=0$ pour tout x donc $f(x)\times f(2x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$: on voit que le résultat de la question précédente n'est plus vrai.

Exercice 8 : ✪✪ Soient f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est périodique, que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et que $f+g$ est croissante. Montrer que g est constante.

Correction : L'idée est simple : si g n'est pas constante, il y a deux nombres qui ont une image différente, donc un qui a une image strictement plus petite que l'autre, et g est périodique donc il existe des nombres aussi grands qu'on veut prenant ces deux valeurs, et f tend vers 0 donc, pour x assez grand, $f(x)$ ne permet pas à la plus petite valeur de passer au-dessus de la plus grande valeur, ce qui est absurde puisque $f+g$ est croissante. Prouvons cela rigoureusement.

Raisonnons par l'absurde et supposons g non constante. Il existe donc x_1 et x_2 tels que $g(x_1)\neq g(x_2)$, et sans perte de généralité on peut supposer $g(x_1)<g(x_2)$. Notons $\varepsilon=\dfrac{g(x_2)-g(x_1)}{3}>0$. Puisque f tend vers 0 :

$$\exists A\geq 0,\forall x\geq A, |f(x)\leq\varepsilon$$

Soit $T>0$ une période de g. Dès lors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g(x_2+nT)=g(x_2)$ et idem pour x_1. De plus, les deux suites (x_1+nT) et (x_2+nT) tendent vers $+\infty$: on choisit n_2 tel que $x_2+n_2T\geq A$ et n_1 tel que $x_1+n_1T\geq x_2+n_2T\geq A$. On a alors les résultat suivants :

- $f+g$ est croissante donc $(f+g)(x_2+n_2T)\leq(f+g)(x_1+n_1T)$.
- g étant T périodique, $g(x_2+n_2T)=g(x_2)$ et $g(x_1+n_1T)=g(x_1)$, si bien que
$$(f+g)(x_1+n_1T)-(f+g)(x_2+n_2T)=(g(x_1)-g(x_2))+f(x_1+n_1T)-f(x_2+n_2T)\geq 0$$
- x_1+n_1T et x_2+n_2T sont supérieurs à A donc $|f(x_1+n_1T)|\leq\varepsilon$ et idem pour l'autre donc
$$(f+g)(x_1+n_1T)-(f+g)(x_2+n_2T)\leq(g(x_1)-g(x_2))+2\varepsilon=-\varepsilon<0$$
puisque $g(x_1)-g(x_2)=-3\varepsilon$, ce qui est donc absurde.

Exercice 9 : ✪✪ Soient a et b strictement positifs. Étudier les limites éventuelles en 0 des fonctions

$$f:x\mapsto\frac{x}{a}\times\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor\qquad g:x\mapsto\frac{b}{x}\times\left\lfloor\frac{x}{a}\right\rfloor$$

Correction : Soit $x>0$. Alors

$$\frac{b}{x}-1<\left\lfloor\frac{b}{x}\right\rfloor\leq\frac{b}{x}$$

En multipliant par $x/a>0$, il vient :

$$\frac{b}{a}-\frac{x}{a}<f(x)\leq\frac{b}{a}$$

D'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ (limite à droite car on a pris $x>0$). De même, on prend $x<0$, on n'oublie pas de changer le sens de l'inégalité en multipliant par $x/a<0$ et on trouve que la limite à gauche est nulle : f n'est pas définie en 0, admet une limite à gauche et une limite à droite nulles en 0 donc $f(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Pour g, ce n'est pas la même chanson : si on essaye de faire la même chose, alors pour tout $x>0$, on obtient l'encadrement

$$\frac{b}{a}-\frac{b}{x}<g(x)\leq \frac{b}{a}$$

Cet encadrement est juste, mais il ne permet pas de conclure puisque le membre de gauche tend vers $-\infty$ et le membre de droite vers b/a : on encadre par des quantités n'ayant pas la même limite et donc on ne peut pas appliquer le théorème d'encadrement. En fait, ici, l'encadrement de la partie entière ne va pas nous servir, ce qui se comprend assez bien : cet encadrement est utile lorsqu'on ne peut pas calculer explicitement la partie entière, mais ici, x/a est proche de 0, donc on peut calculer explicitement sa partie entière. On ne va donc pas encadrer g mais calculer g explicitement, ce qui nous permettra de calculer sa limite éventuelle. Si x tend vers 0^+, alors x/a aussi donc on a envie de dire que sa partie entière est nulle. Plus précisément, la partie entière de « truc » est nulle sur $[\,0\,;1\,[$: soit donc $x\in\,]\,0\,;a\,[$ (ouvert en 0 car x ne peut pas être nul) si bien que $x/a\in\,]\,0\,;1\,[$ donc $\lfloor x/a\rfloor=0$ et donc $g(x)=0\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. De même, soit $x\in[\,-a\,;0\,[$. Alors $x/a\in[\,-1\,;0\,[$ donc $\lfloor x/a\rfloor=-1$ si bien que

$$g(x)=-\frac{b}{x}\xrightarrow[x\to 0^-]{}+\infty$$

g admet des limites à gauche et à droites distinctes donc n'a pas de limite en 0.

Exercice 10 - Contre-exemple au lemme de Croft : ✪✪ On définit dans cet exercice une fonction $f:\mathbb{R}^{+*}\to\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{s'il existe } n\in\mathbb{N} \text{ tel que } x=\sqrt{2}+n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?
2. Écrire la propriété « $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ » avec des quantificateurs, ainsi que sa négation. En déduire que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
3. f admet-elle une limite en $+\infty$?
4. Soit $x>0$.
   (a) Montrer que la suite $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ admet au plus un terme non nul.
   (b) En déduire la limite de cette suite.

Remarque : Le lemme de Croft est le résultat suivant :

« si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et si pour tout $x>0, f(nx)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ »

Malgré son apparente simplicité, la démonstration (« Ah bon, il y a quelque-chose à montrer ? ») de ce lemme nécessite des outils assez sophistiqués, loin au-delà du programme des classes préparatoires. On a montré dans cet exercice que le résultat est faux si la fonction f n'est pas supposée continue, ce qui montre déjà que ce lemme n'est pas si simple que cela... Nous démontrerons ce résultat pour les fonctions uniformément continues dans l'exercice 83.

Correction :

1. f n'est pas continue car $f(\mathbb{R})=\{0;1\}$ qui n'est pas un intervalle (si f était continue, l'image d'un intervalle serait un intervalle d'après le TVI). De façon analogue, $f(0)=0$ et $f(\sqrt{2})=1$: si f est continue, d'après le TVI, il existe $x\in\left[\,0\,;\sqrt{2}\,\right]$ tel que $f(x)=1/2$ ce qui est absurde puisque f ne prend que les valeurs 0 et 1, donc f n'est pas continue. Vous avez l'embarras du choix !
2. La propriété « $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ » s'écrit :

   $$\forall\varepsilon>0,\exists A\geq 0,\forall x\geq A,|f(x)|\leq\varepsilon$$

   et sa négation :

   $$\exists\varepsilon>0,\forall A\geq 0,\exists x\geq A,|f(x)|>\varepsilon$$

   Posons $\varepsilon=1/2>0$. La suite $(\sqrt{2}+n)$ tend vers $+\infty$ donc, pour tout $A\geq 0$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\sqrt{2}+n\geq A$ donc il existe un élément $x\geq A$ tel que $f(x)=1>1/2=\varepsilon$: la fonction ne tend pas vers 0.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = n$ et $v_n = \sqrt{2}+n$. Les deux suites (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$, mais les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ ont des limites distinctes donc f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet, la suite $(f(v_n))$ est constante égale à 1 donc converge vers 1. Prouvons que la suite $(f(u_n))$ est constante égale à 0, donc converge vers 0. Soit $p \in \mathbb{N}$. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_p = p = \sqrt{2}+n$ alors $\sqrt{2} = p - n \in \mathbb{Z}$ ce qui est absurde (même pas besoin d'utiliser son irrationnalité ici : $\sqrt{2}$ n'est pas un entier !). Dès lors, aucun terme de la suite (u_p) n'est égal à un $\sqrt{2}+n$ donc $f(u_p) = 0$ pour tout p.
4. (a) Supposons que cette suite admette deux termes non nuls, c'est-à-dire qu'il existe $n_1 \neq n_2$ tels que $f(n_1 x)$ et $f(n_2 x)$ soient non nuls. On en déduit qu'il existe k_1 et k_2 tels que $n_1 x = \sqrt{2}+k_1$ et $n_2 x = \sqrt{2}+k_2$. Or, n_1 et n_2 sont non nuls (car 0 n'est pas de la forme $\sqrt{2}+n$) donc
$$x = \frac{\sqrt{2}+k_1}{n_1} = \frac{\sqrt{2}+k_2}{n_2}$$
On en déduit que $n_2(\sqrt{2}+k_1) = n_1(\sqrt{2}+k_2)$ si bien que $\sqrt{2}(n_2-n_1) = n_1k_2 - n_2k_1$ et puisque $n_2 \neq n_1$, $n_2 - n_1$ est non nul donc
$$\sqrt{2} = \frac{n_1k_2 - n_2k_1}{n_2-n_1} \in \mathbb{Q}$$
ce qui est absurde : la suite a bien au plus un terme non nul.
   (b) D'après la question précédente, soit la suite a tous ses termes nuls, donc est constante égale à 0, soit elle a un terme non nul, et donc est nulle à partir d'un certain rang, c'est-à-dire stationnaire égale à 0. Dans les deux cas, cette suite converge vers 0.

Exercice 11 : ✪✪✪ Soit f définie sur $I = [\,1\,;+\infty\,[$ par
$$f(x) = \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. Donner la limite à gauche de f en p. f est-elle continue à gauche en p ?
2. Calculer les limites des suites $(f(u_n))$ dans les trois cas suivants :
   (a) $u_n = n$.
   (b) $u_n = n + \dfrac{1}{2}$.
   (c) $u_n = n + \dfrac{3}{\ln n}$.
3. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?
4. Soit $a \in [\,0\,;1\,]$. Donner une suite (u_n) tendant vers $+\infty$ telle que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Correction :

1. Soit $x \in [\,p-1\,;p\,[$. Alors $\lfloor x \rfloor = p-1$ si bien que
$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lfloor x \rfloor \ln(x) - x\ln\lfloor x \rfloor} \\ &= e^{(p-1)\ln(x) - x\ln(p-1)} \end{aligned}$$
Or, la fonction ln et la fonction exponentielle sont continues donc $f(x) \xrightarrow[x\to p^-]{} e^{(p-1)\ln(p) - p\ln(p-1)} = \dfrac{p^{p-1}}{(p-1)^p}$. De plus, $f(p) = 1$ donc f n'est pas continue à gauche en p.
2. (a) La suite $(f(u_n))$ est constante égale à 1 donc converge vers 1.
   (b) Soit $n \geq 1$. Alors $\lfloor u_n \rfloor = n$ si bien que
$$\begin{aligned} f(u_n) &= e^{n\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)} \\ &= e^{n\left(\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)} \\ &= e^{n\ln(n)+n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)} \\ &= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\times\ln(n)} \end{aligned}$$
On montre aisément que $n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ (prendre un taux d'accroissements) donc
$$n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\times\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
si bien que, par composition de limites, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(c) Puisque $\dfrac{3}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$, $\lfloor u_n \rfloor = n$ pour n assez grand, plus précisément (mais il n'est pas nécessaire de le préciser, ce qui précède suffit) dès que $\dfrac{3}{\ln(n)} < 1$ donc dès que $3 < \ln(n)$ donc dès que $n > e^3$, donc à partir du rang $n_0 = \lfloor e^3 \rfloor + 1$. Ainsi, pour n assez grand :

$$\begin{aligned} f(u_n) &= e^{n\ln\left(n+\frac{3}{\ln(n)}\right) - \left(n+\frac{3}{\ln(n)}\right)\ln(n)} \\ &= e^{n\ln(n)+n\left(1+\frac{3}{n\ln(n)}\right) - \left(n+\frac{3}{\ln(n)}\right)\ln(n)} \\ &= e^{n\left(1+\frac{3}{n\ln(n)}\right)-3} \end{aligned}$$

Idem, avec un taux d'accroissements, on montre que

$$n\ln\left(1+\frac{3}{\ln(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

si bien que, par continuité de l'exponentielle, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-3}$.

3. Non car on a trouvé dans la question précédente des suites (u_n) de limite $+\infty$ telles que les suites $(f(u_n))$ associées aient des limites distinctes.
4. Il faut bien comprendre que le -3 de la limite e^{-3} est le même 3 que dans $u_n = n + \dfrac{3}{\ln(n)}$: en mettant un 4 à la place, on aurait eu une limite égale à e^{-4} : on peut donc obtenir une suite qui converge vers n'importe quel réel de la forme e^{-A} donc tout réel de l'intervalle $]\,0\,;1\,]$. Plus précisément : si $a \in\,]\,0\,;1\,]$, posons (u_n) la suite de terme général

$$u_n = n + \frac{-\ln(a)}{\ln(n)}$$

Précisons que $\ln(a) \le 0$. On montre exactement comme à la question 2.(c) que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ln(a)} = a$. Enfin, si $a = 0$, la suite de terme général $u_n = n + 1/2$ convient (cf. question 2.(b)).

Exercice 12 : ✪✪✪

1. Montrer que $f : x \mapsto x^\alpha \sin\left(x^\beta\right)$ n'admet pas de limite finie en 0^+ si $\alpha \le 0$ et $\beta < 0$.
2. Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (α, β) (α et β sont deux réels quelconques, pas forcément négatifs comme dans la question précédente) tels que f soit prolongeable par continuité en 0^+.

Correction :

1. Soient donc $\alpha \le 0$ et $\beta > 0$. Pour tout $n \ge 1$, posons

$$u_n = (n\pi)^{1/\beta} \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{1/\beta}$$

Tout d'abord, pour tout $n \ge 1$,

$$\begin{aligned} f(u_n) &= (n\pi)^{\alpha/\beta}\sin(n\pi) \\ &= 0 \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{\alpha/\beta} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{\alpha/\beta} \end{aligned}$$

quantité qui tend vers $+\infty$ si $\alpha < 0$ (car alors $\alpha/\beta > 0$) et qui est constante égale à 1 donc qui tend vers 1 si $\alpha = 0$. Or, $\beta < 0$ donc les deux suites (u_n) et (v_n) tendent vers 0^+ : on a deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers 0^+ telles que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ aient des limites distinctes : f n'a pas de limite en 0^+.

2. Soient α et β deux réels. Soit $x > 0$. Différencions les cas.

- Supposons que $\alpha > 0$. Alors $-x^\alpha \leq f(x) \leq x^\alpha$ et puisque $\alpha > 0$, alors $x^\alpha \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.
- Supposons que $\alpha = 0$. Si $\beta < 0$, alors f n'a pas de limite en 0^+ d'après la question précédente. Si $\beta = 0$, alors f est constante égale à $\sin(1)$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \sin(1)$. Enfin, si $\beta > 0$, alors $x^\beta \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et le sinus est continu donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \sin(0) = 0$.
- Supposons enfin que $\alpha < 0$. Si $\beta < 0$, toujours d'après la question précédente, f n'a pas de limite en 0^+. Si $\beta = 0$, alors $f(x) = x^\alpha \sin(1) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ (car $\sin(1) > 0$). Supposons enfin que $\beta > 0$. On a une forme indéterminée, mais on pense à un taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^\alpha \times \frac{\sin(x^\beta)}{x^\beta} \times x^\beta \\ &= x^{\alpha+\beta} \times \frac{\sin(x^\beta)}{x^\beta} \end{aligned}$$

Or, $x^\beta \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et $\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$ donc, par composition de limites,

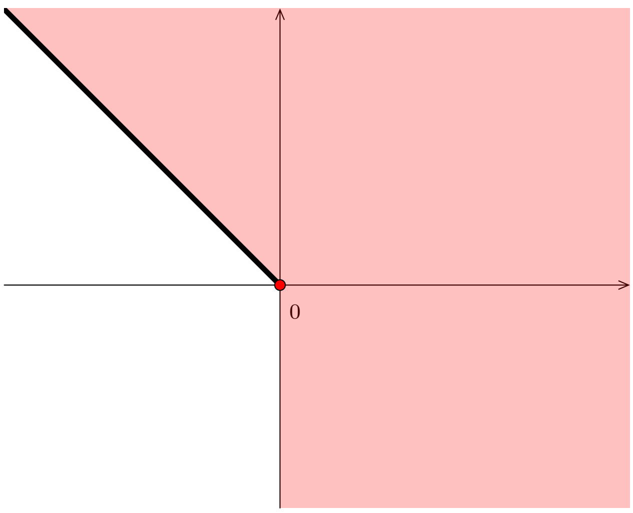
$$\frac{\sin(x^\beta)}{x^\beta} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$

Finalement, f a une limite finie en 0 si et seulement si $x \mapsto x^{\alpha+\beta}$ en a une, si et seulement si $\alpha + \beta \geq 0$, si et seulement si $\beta \geq -\alpha$.

En conclusion, f admet une limite finie en (α, β) si et seulement si :

- $\alpha > 0$: géométriquement, c'est toute la partie du plan d'abscisse strictement positive, i.e. la partie du plan à droite de l'axe des ordonnées (au sens strict : l'axe n'en fait pas partie).
- $\alpha = 0$ et $\beta \geq 0$: géométriquement, c'est la partie supérieure (au sens large : 0 en fait partie) de l'axe des ordonnées.
- $\alpha < 0$ et $\beta \geq -\alpha$: géométriquement, c'est la partie du plan au-dessus (au sens large, la droite en fait partie) de la droite d'équation $y = -x$.

C'est donc la partie du plan coloriée ci-dessous. La partie inférieure de l'axe des ordonnées n'est pas dans l'ensemble.



2 Continuité :

Exercice 13 : ✪ Dire si les fonctions suivantes sont continues ou prolongeables par continuité en 0 :

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}$.
3. $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $f : x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Correction :

1. Non prolongeable par continuité en 0 puisque la limite à droite vaut 1 et la limite à gauche -1, elles sont distinctes donc f n'admet pas de limite en 0.

2. f n'est pas définie en 0. Cependant, $\pi/2 - x \xrightarrow[x\to 0^+]{} \pi/2^-$ et $\tan(u) \xrightarrow[u\to \pi/2^-]{} +\infty$ donc, par composition de limites, $\tan(\pi/2 - x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ si bien que $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. De même en 0^- donc f tend vers 0 en 0 car admet une limite à gauche et à droite égale à 0 en 0 : on peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
3. f est définie en 0 : il faut regarder si la limite à gauche et à droite sont égales à $f(0) = 0$, ce qui est immédiat, donc f est continue en 0.
4. Idem, f est définie en 0 donc on se demande si la limite à gauche et à droite sont égales à $f(0) = -1$. Or, si $x > 0$, $f(x) = x\sin(1/x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (théorème d'encadrement) donc f a une limite à droite égale à 0 en 0 mais cette limite n'est pas égale à $f(0)$ donc f n'est pas continue à droite donc n'est pas continue en 0.

Exercice 14 : ✪ Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

1. $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$
2. $x \mapsto \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$
3. $x \mapsto \lfloor x \rfloor \times x$
4. $x \mapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}\left(x - \lfloor x \rfloor - \dfrac{1}{2}\right)$
5. ✪✪ $x \mapsto \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$
6. ✪✪ $x \mapsto S(x)$ (cf exercice 29 du chapitre 2)
7. ✪✪ $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor}$

Correction : On notera toujours f la fonction étudiée.

1. Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq \lfloor x \rfloor$ si bien que $x - \lfloor x \rfloor \geq 0$: f est définie sur $\mathbb{R}$. la La racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la partie entière est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$: il en découle que f est continue sur (au moins) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit $x \in [\,n\,;n+1\,[$. Alors $\lfloor x \rfloor = n$ si bien que
$$f(x) = n + \sqrt{x-n} \xrightarrow[x\to n^+]{} n + \sqrt{n-n} = n = f(n)$$
En d'autres termes, f est continue à droite en n. De même, soit $x \in [\,n-1\,;n\,[$. Alors $\lfloor x \rfloor = n-1$ si bien que
$$f(x) = n - 1 + \sqrt{x-(n-1)} \xrightarrow[x\to n^-]{} n - 1 + \sqrt{n-(n-1)} = n-1+1 = n = f(n)$$
f est continue à gauche en n donc continue en n : f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Idem, f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Par produit, f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et continue à droite sur $\mathbb{R}$ (rappelons qu'une composée de fonctions continues à droite n'est pas forcément continue à droite, mais ça marche avec la somme, le produit, le quotient). Soit $n \in \mathbb{Z}$: f est donc continue en n si et seulement si f est continue à gauche en n. Soit $x \in \,]\,n-1\,;n\,]$. Alors
$$f(x) = (n-1)x \xrightarrow[x\to n^-]{} (n-1)n = n^2 - n$$
Or, $f(n) = n^2$. Par conséquent, si $n \neq 0$, alors la limite à gauche de f n'est pas égale à $f(n)$ donc f n'est pas continue à gauche en n donc n'est pas continue en n, et si $n = 0$, alors la limite à gauche en n est égale à $f(n)$ donc f est continue à gauche en n donc est continue en n puisqu'elle est continue à droite. En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^*$.
4. Idem, f est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Tout d'abord, f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Soit $x \neq 0$. La partie entière étant continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, cherchons quand $1/x \in \mathbb{Z}$. C'est le cas lorsque x est l'inverse d'un entier. Introduisons donc l'ensemble
$$A = \left\{\frac{1}{n}\,|\,n \in \mathbb{Z}^*\right\}$$
des inverses des entiers (non nuls). Par exemple, A contient les réels $1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3$ etc. Supposons que $x \notin A$ (toujours avec x non nul). Alors la fonction inverse est continue en x et la partie entière est continue en $1/x$ (car $1/x \notin \mathbb{Z}$). Par composition, f est continue en x. Supposons à présent que $x \in A$: il existe donc $n \in \mathbb{Z}^*$ tel que $x = 1/n$. On veut utiliser que la partie entière n'est pas continue à gauche, mais la partie entière est décroissante donc « transforme la droite en gauche » : on se place donc à droite de $x = 1/n$. Soit $t \in \left]\dfrac{1}{n}\,;\dfrac{1}{n-1}\right]$ (si $n \neq 1$, et soit $t > 1$ si $n = 1$). Alors $1/t \in [\,n-1\,;n\,[$ (que n soit égal à 1 ou non) donc $f(t) = n - 1 \xrightarrow[t\to x^+]{} n - 1 \neq f(x) = n$: f n'est pas continue à droite donc n'est pas continue en $x = 1/n$: f est continue exactement sur $\mathbb{R}^*\backslash A$ (et, cf. cours, cela donne un exemple de composée de fonctions continues à droite qui n'est pas continue à droite) i.e. f est discontinue en chaque inverse d'entier.

6. Rappelons que S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$S(x) = x \times 10^{-\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \right\rfloor} = x \times e^{-\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \right\rfloor \times \ln(10)}$$

Soit donc $x > 0$. Notons $B = \{10^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des puissances de 10 (positives ou négatives), par exemple B contient $1, 10, 1/10, 100, 1/100$ etc. Si $x \notin B$ alors $\ln(x)/\ln(10) \notin \mathbb{Z}$: dès lors, la partie entière est continue en $\ln(x)/\ln(10)$ et le ln est continu en x donc, par composition, f est continue en x. Supposons à présent que $x \in B$: il existe donc $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 10^n$. Soit $t \in \left[10^{n-1}\,;10^n\right[= \left[10^{n-1}\,;x\right[$. Alors $\lfloor \ln(t)/\ln(10) \rfloor = n-1$ si bien que (rappelons que $x = 10^n$) :

$$f(t) = t \times 10^{-(n-1)} \xrightarrow[t \to x^-]{} 10^n \times 10^{-n+1} = 10 \neq f(x) = 1$$

f n'est pas continue à gauche donc n'est pas continue en x : f est continue sur $\mathbb{R}_+^* \backslash B$, i.e. f est discontinue en chaque puissance de 10.

7. De même qu'à la question 1, f est définie sur $\mathbb{R}^*$ (on exclut 0 à cause de la fonction inverse) et, de même qu'à la question 5, f est continue en tout $x \in \mathbb{R}^* \backslash A$ avec le même ensemble A, c'est-à-dire que f est continue en tout réel non nul qui n'est pas l'inverse d'un entier. On prouve de même que f est discontinue en tout point de A.

Exercice 15 : ✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(1) = f(-1) = 0$ et, pour tout $x \neq \pm 1$:

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n}+1}{x^{2n}-1}$$

Montrer que f est bien définie et étudier la continuité de f.

Correction : Soit $x \neq \pm 1$.

- Supposons que $|x| < 1$. Alors $|x|^2 < 1$ donc la suite géométrique de raison x^2 tend vers 0, c'est-à-dire que $x^{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. En d'autres termes, $f(x)$ est bien défini et vaut -1.
- Supposons que $|x| > 1$. Alors $|x|^{2n} = x^{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ (on peut enlever la valeur absolue car la puissance est paire donc ce terme est positif). On a une forme indéterminée, mais il suffit de factoriser par le terme prépondérant, à savoir x^{2n} :

$$\frac{x^{2n}+1}{x^{2n}-1} = \frac{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}{1-\dfrac{1}{x^{2n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

c'est-à-dire que $f(x)$ est bien défini et vaut 1.

En conclusion, $f(\pm 1) = 0$, f est constante égale à -1 sur $]-1\,;1[$ et constante égale à 1 sur $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$. f est donc continue sur $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ et discontinue en ± 1 (car admet une limite à gauche et une limite à droite distinctes, et en plus distinctes de la valeur de f en ces points).

Exercice 16 : ✪✪ Soit f une fonction continue en 0 et en 1 telle que pour tout $x, f(x^2) = f(x)$.

1. Montrer que f est paire.
2. Soit $x \in [0\,;1[$. Montrer que la suite $\left(f\left(x^{2^n}\right)\right)$ est constante et donner sa valeur. En déduire que $f(x) = f(0)$.
3. Soit $x \geq 1$. Même question avec la suite $\left(f\left(x^{1/2^n}\right)\right)$, et en déduire que $f(x) = f(1)$.
4. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^+$.
5. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction : On se référera souvent à la propriété de f, qu'on appliquera à des quantités plus générales que x. Disons le clairement, pour tout truc$\in \mathbb{R}$, $f\left(\text{truc}^2\right) = f(\text{truc})$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant cela à $-x$, on obtient

$$\begin{aligned} f(-x) &= f((-x)^2) \\ &= f(x^2) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est paire.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $u_n = f\left(x^{2^n}\right)$. En appliquant la propriété à truc $= x^{2^n}$, il vient :

$$\begin{aligned} u_n &= f\left(\left(x^{2^n}\right)^2\right) \\ &= f\left(x^{2^n \times 2}\right) \\ &= f\left(x^{2^{n+1}}\right) \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la suite est constante. D'une part, elle est constante égale à son premier terme $u_0 = f(x)$, et d'autre part, elle est égale à sa limite. Or,

$$x^{2^n} = e^{2^n \ln(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $2^n \ln(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ car $\ln(x) < 0$ (on pouvait aussi dire que la suite de terme général x^{2^n} est extraite de la suite géométrique x^n donc converge aussi vers 0). f étant continue en 0, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$. Par unicité de la limite, $f(0) = f(x)$.

3. Même chose, et on prouve de même que $f(x) = f(1)$.
4. La fonction f est donc constante égale à $f(0)$ sur $[\,0\,;1\,[$ et constante égale à 1 sur $[\,1\,;+\infty\,[$ donc la limite à droite en 1 est $f(1)$ et la limite à gauche est $f(0)$. f étant continue en 1, ces deux limites sont égales donc $f(0) = f(1)$: f est constante sur $\mathbb{R}_+$.
5. f est constante sur $\mathbb{R}$ puisque f est paire.

Exercice 17 : ✪✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x, f(x) = f(2x)$.

1. Montrer que la fonction f qui vaut 1 sur $\mathbb{Q}$ et 0 sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ vérifie cette condition.
2. On suppose de plus que f est continue en 0. Montrer que f est constante (on pourra s'inspirer de l'exercice précédent).

Correction :

1. Le double d'un rationnel est un rationnel, et le double d'un irrationnel est un irrationnel (plus généralement, le produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel est un irrationnel). Dès lors, pour tout x, que x soit rationnel ou non, $f(x) = f(2x)$. La continuité de f en 0 de la question suivante est donc indispensable pour que f soit constante.
2. Si $x \in \mathbb{R}$, on montre de même que ci-dessus que la suite de terme général

$$u_n = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

est constante (on obtient cette suite en divisant plusieurs fois par 2, puisque $f(x) = f(2x)$ donc, en pensant à truc, $f(x) = f(x/2)$, et on avait obtenu la suite de l'exercice précédent en mettant plusieurs fois au carré : on applique plusieurs fois l'opération laissant f invariante) donc converge vers son premier terme, $f(x)$, et vers sa limite, $f(0)$ car f est continue en 0 donc $f(x) = f(0)$ par unicité de la limite : f est constante.

3 Bornes atteintes

Exercice 18 : ✪ Soient f et g deux fonctions continues sur $[\,0\,;1\,]$ telles que :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,], 0 < f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que : $\forall x \in [\,0\,;1\,], Cf(x) \leq g(x)$. Donner un contre-exemple si on ne suppose plus les fonctions définies sur un segment.

Correction : Notons $h = g/f$. Alors h est bien définie sur $[\,0\,;1\,]$ puisque f ne s'annule pas, continue car quotient de fonctions continues (celle au dénominateur ne s'annulant pas), et strictement positives car quotient de fonctions strictement positives. h étant une fonction continue sur un segment, elle est bornée et atteint ses bornes : notons $C = \min(h)$. Alors il existe x_0 tel que $C = h(x_0)$, et puisque h est à valeurs strictement positives, alors $C > 0$. Puisque $C = \min(h)$, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $h(x) = g(x)/f(x) \geq C$ et $f(x) > 0$ donc $g(x) \geq Cf(x)$. Ce n'est plus vrai si on ne suppose pas les fonctions définies sur un segment : il suffit de prendre g la fonction constante égale à $\pi/2$ et f l'Arctangente, sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 19 : ✪ Montrer qu'une fonction périodique continue sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Correction : Soit $T \neq 0$ une période de f. Alors f est continue sur le segment $[\,0\,;T\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes. Il existe $x_0 \in [\,0\,;T\,]$ tel que

$$f(x_0) = \max_{[\,0\,;T\,]} f$$

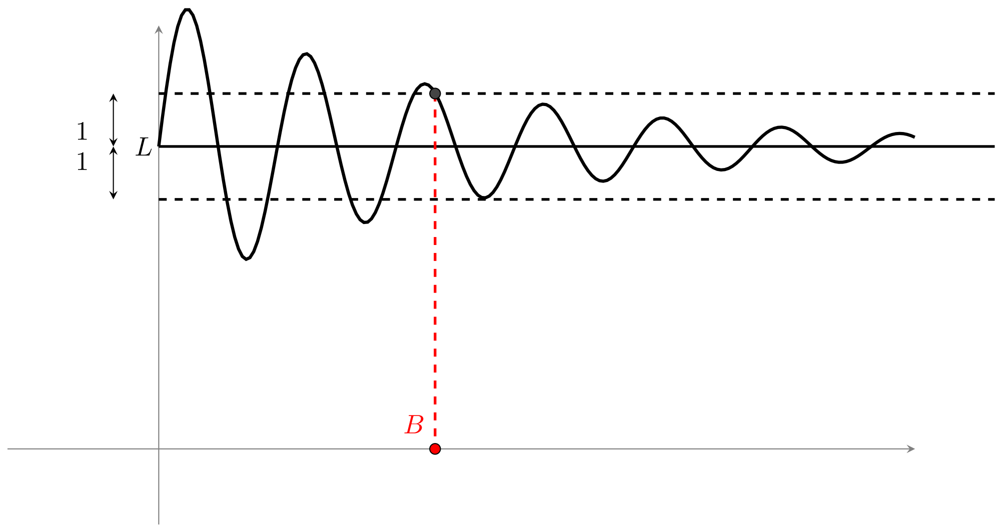
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe $y \in [\,0\,;T\,]$ (et même $[\,0\,;T\,[$) tel que $f(x) = f(y) \leq f(x_0)$. En d'autres termes, $f(x_0)$ est un majorant de f, donc f est majorée, et il est atteint (en x_0) donc f admet un maximum (atteint, par définition d'un maximum). De même, f est minorée et admet un minimum (qui est donc atteint).

Exercice 20 : ✪ Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est bornée et que g est continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Correction : La fonction f est bornée donc $f \circ g$ est bornée. Cependant, g n'est pas forcément bornée (par exemple, on peut avoir $g = \exp$ et $f = \sin$). Mais f étant bornée, elle admet une borne supérieure et une borne inférieure (pas forcément atteintes) notées respectivement M et m. En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [\,m\,;M\,]$. Or, g est continue sur le segment $[\,m\,;M\,]$ donc est bornée (et atteint ses bornes mais ce ne sera pas utile ici) : il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $y \in [\,m\,;M\,], A \leq g(y) \leq B$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A \leq g(f(x)) \leq B$ car $y = f(x) \in [\,m\,;M\,]$. Ainsi $g \circ f$ est bornée.

Exercice 21 : ✪ Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ admettant une limite finie en $+\infty$ est bornée. On pourra commencer par faire un dessin. Atteint-elle ses bornes ?

Correction : Ce résultat est l'analogue du résultat sur les suites, qui dit qu'une suite convergente est bornée. Commençons par faire un dessin.



Notons L la limite de f en $+\infty$. Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$, alors il existe B tel que, pour tout $x \geq B$, $L-1 \leq f(x) \leq L+1$. Or, f est continue sur le segment $[\,0\,;B\,]$ donc est bornée (et atteint ses bornes mais cela ne nous servira pas ici) : il existe m et M tels que, pour tout $x \in [\,0\,;B\,]$, $m \leq f(x) \leq M$. Notons $\alpha = \min(m, L-1)$ et $\beta = \max(M, L+1)$. Alors f est bornée par α et β sur $\mathbb{R}_+$ donc est bornée. Les bornes ne sont pas forcément atteintes : par exemple, l'Arctangente est continue sur $\mathbb{R}_+$, admet une limite finie en $+\infty$ mais n'atteint pas sa borne supérieure. Par contre, on peut montrer que f atteint sa borne inférieure ou sa borne inférieure (exo).

Exercice 22 : ✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue. Étudier la suite de terme général $u_n = \displaystyle\max_{0\leq k\leq n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Correction : Tout d'abord, la suite (u_n) est bien définie car, pour tout n, u_n est le maximum d'un nombre fini de termes. f est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes : il existe $x_0 \in [\,0\,;1\,]$ tel que

$$f(x_0) = \max_{[\,0\,;1\,]} f$$

Montrons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$. Si $n \geq 1$, notons $x_n = \lfloor nx_0 \rfloor / n$. Alors x_n est un rationnel de la forme k/n donc $f(x_n) \leq u_n$ (car u_n est le max des $f(k/n)$) et $u_n \leq f(x_0)$ puisque u_n est le maximum de termes tous inférieurs à $f(x_0)$. En d'autres termes,

$$f(x_n) \leq u_n \leq f(x_0)$$

Or, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$ (cf. cours sur les suites) et f est continue donc $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$. D'après le théorème d'encadrement $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0) = \max f$.

Exercice 23 - Version continue du théorème de Cesàro : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(t+1)-f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Montrer que $f(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Si $x \in \mathbb{R}$, on pourra s'intéresser à la somme

$$f(\{x\}) + \sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor -1} \left(f\left(k+1+\{x\}\right) - f(k+\{x\})\right)$$

où on rappelle que $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$ est la partie fractionnaire de x.

Correction : Erreur d'énoncé : il faut prouver que $f(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a une somme télescopique donc

$$f(\{x\}) + \sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor -1} \left(f\left(k+1+\{x\}\right) - f(k+\{x\})\right) = f(\{x\}) + f(\lfloor x\rfloor + \{x\}) - f(\{x\}) = f(x)$$

puisque $\lfloor x\rfloor + \{x\} = x$. Puisque $f(t+1)-f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, $f(k+\{x\}+1)-f(k+\{x\}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. D'après le (vrai) théorème de Cesàro,

$$\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor -1} \left(f\left(k+1+\{x\}\right) - f(k+\{x\})\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Par conséquent, si $x \geq 1$ (pour avoir $\lfloor x\rfloor > 0$) :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \frac{1}{x}\times\left(f(\{x\}) + \sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor -1} \left(f\left(k+1+\{x\}\right) - f(k+\{x\})\right)\right)\\ &= \frac{f(\{x\})}{x} + \frac{\lfloor x\rfloor}{x}\times\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor -1} \left(f\left(k+1+\{x\}\right) - f(k+\{x\})\right)\end{aligned}$$

D'après ce qui précède,

$$\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor -1} \left(f\left(k+1+\{x\}\right) - f(k+\{x\})\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

De plus, $\lfloor x\rfloor/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ (encadrer $\lfloor x\rfloor$ par $x-1$ et x). Enfin, f étant continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$, elle est bornée (et atteint ses bornes mais cela ne nous sera pas utile ici) sur ce segment : il existe m et M tels que, pour tout $u \in [\,0\,;1\,], m \leq f(u) \leq M$. Puisque $\{x\} \in [\,0\,;1\,]$ (et même $[\,0\,;1\,[$), $m \leq f(\{x\}) \leq M$ donc

$$\frac{m}{x} \leq \frac{f(\{x\})}{x} \leq \frac{M}{x}$$

Par conséquent, d'après le théorème d'encadrement, $f(\{x\})/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Le résultat découle alors, par somme et produit de limites, de l'expression de $f(x)/x$ donnée ci-dessus.

Exercice 24 : ✪ Soit f une fonction continue sur un segment (d'intérieur non vide) $[\,a\,;b\,]$. Montrer que

$$\sup_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x) = \sup_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x)$$

Correction : Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : d'où l'existence de $\sup\limits_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x)$. De plus, pour tout $x \in \,]\,a\,;b\,[$,

$$f(x) \leq \sup_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x)$$

Dès lors, f est majorée sur $]\,a\,;b\,[$. D'où l'existence de $\sup\limits_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x)$ et

$$\sup_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x) \leq \sup_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x)$$

Montrons l'inégalité inverse. Puisque $\sup\limits_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x)$ est atteint, soit $x_0 \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(x_0) = \sup\limits_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x)$. Il existe une suite (u_n) d'éléments de $]\,a\,;b\,[$ qui converge vers x_0 : en effet, si $x_0 \in \,]\,a\,;b\,[$, alors la suite constante égale à x_0 convient, si $x_0 = a$, alors la suite de terme général $x_0 + 1/n$ convient, et si $x_0 = b$, la suite de terme général $x_0 - 1/n$ convient. Pour tout n, $u_n \in \,]\,a\,;b\,[$ donc $f(u_n) \leq \sup\limits_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x)$. f étant continue,

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0) = \sup_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x)$$

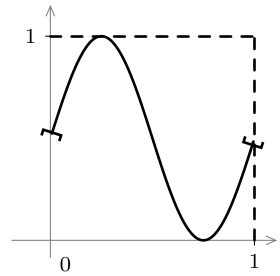
L'inégalité large passe à la limite donc $\displaystyle\sup_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x) \leq \sup_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x)$ ce qui permet de conclure.

Exercice 25 : ✪✪ Existe-t-il

- une bijection continue de $[\,0\,;1\,]$ dans lui-même ?
- une bijection continue de $[\,0\,;1\,]$ dans $]\,0\,;1\,[$?
- une surjection continue de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$?
- une bijection continue de $]\,0\,;1\,[$ dans lui-même ?
- une bijection continue de $]\,0\,;1\,[$ dans $\mathbb{R}$?
- une surjection continue de $]\,0\,;1\,[$ dans $[\,0\,;1\,]$?

Correction :

1. **Oui :** $\mathrm{Id}_{[\,0\,;1\,]}$ convient. La fonction carré (restreinte à $[\,0\,;1\,]$) convient également.
2. **Non :** Si une telle fonction f existe, alors $f([\,0\,;1\,]) =]\,0\,;1\,[$ car f est surjective. Or, f est continue et l'image d'un segment par une fonction continue est un segment : c'est absurde.
3. **Non :** Même chose, on ne peut pas avoir $f([\,0\,;1\,]) = \mathbb{R}$ si f est continue.
4. **Oui :** $\mathrm{Id}_{]\,0\,;1\,[}$ convient.
5. Oui : cf. exercice 27 du chapitre 3.
6. **Oui :** Soit $f : x \mapsto \dfrac{1+\sin(2\pi x)}{2}$: je vous laisse donner son tableau de variations. Nous pouvons déduire de celui-ci que f est à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$. De plus, $f(1/4) = 1$ et $f(3/4) = 0$. f est continue donc, d'après le TVI, tous les éléments de f sont atteints par f. Puisque f n'atteint aucun réel en dehors de $[\,0\,;1\,]$, f est bien une surjection de $]\,0\,;1\,[$ dans $[\,0\,;1\,]$.



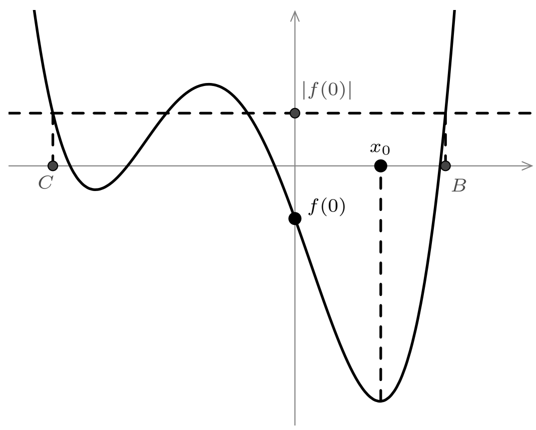
Exercice 26 : ✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs : « f est minorée et atteint sa borne inférieure ».
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure. On pourra (encore !) commencer par faire un dessin.

Correction :

1. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(x_0)$. En d'autres termes : f admet un minimum.
2. Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$, il existe $B \geq 0$ et $C \leq 0$ tels que pour tout $x \in [\,B\,;+\infty\,[$, $f(x) \geq |f(0)|$ et pour tout $x \in]\,-\infty\,;C\,]$, $f(x) \geq |f(0)|$. Or, f est continue sur le segment $[\,C\,;B\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes. Plus précisément, elle atteint sa borne inférieure : il existe $x_0 \in [\,C\,;B\,]$ tel que, pour tout $x \in [\,C\,;B\,]$, $f(x) \geq f(x_0)$. Finalement, si $x \in \mathbb{R}$, soit $x \in [\,C\,;B\,]$, et alors $f(x) \geq f(x_0)$, soit $x \notin [\,C\,;B\,]$, et alors

$$f(x) \geq |f(0)| \geq f(0) \geq f(x_0).$$



En effet, $0 \in [\,C\,;B\,]$ donc $f(0) \geq f(x_0)$. Finalement, f admet bien un minimum atteint en x_0 (voir ci-contre).

4 Continuité et densité

Exercice 27 : ✪ Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinue en tout point telle que $|f|$ soit continue.

Correction : La fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

convient. En effet, $|f|$ est la fonction constante égale à 1 donc est continue, mais $|f|$ est discontinue en tout point. Soit $a \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ étant denses dans $\mathbb{R}$, a est limite d'une suite de rationnels (x_n) et d'une suite d'irrationnels y_n. Dès lors, pour tout n, $f(x_n) = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ et $f(y_n) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Si f est continue en a alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$ donc, par unicité de la limite, $f(a) = -1$ mais on trouve de même avec $(f(y_n))$ que $f(a) = 1$ ce qui est absurde : f est bien discontinue en tout point.

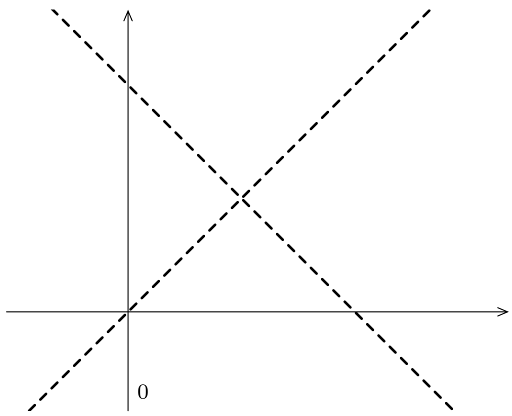
Exercice 28 : ✪ Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si B est dense dans A alors $f(B)$ est dense dans $f(A)$. Contre-exemple sans l'hypothèse de continuité ?

Correction : Soient $a < b$ deux éléments de $f(A)$ (si $f(A)$ est un singleton alors $f(B) = f(A)$ donc le résultat est immédiat). Soit $c \in \,]\,a\,;b\,[$. Notons x et y respectivement un antécédent de a et un antécédent de b par f. f est continue donc, d'après le TVI, il existe $z \in \,]\,x\,;y\,[$ tel que $f(z) = c$. B étant dense dans A, il existe (z_n) une suite d'éléments de B qui converge vers z. Or, f est continue donc $f(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(z) = c$, si bien que $f(z_n) \in \,]\,a\,;b\,[$ pour n assez grand. En particulier, un élément de $f(B)$ dans l'intervalle $]\,a\,;b\,[$: $f(B)$ est dense dans $f(A)$. Le résultat est faux sans l'hypothèse de continuité : par exemple, si $A = \mathbb{R}$, si f est l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{Q}$. Alors $f(A) = \{0;1\}$, B est dense dans A mais $f(B) = \{1\}$ n'est pas dense dans $f(A)$: il n'existe aucun élément de $f(B)$ dans l'intervalle $]\,-1/2\,;1/2\,[$, ou (ce qui revient au même), il n'existe pas de suite d'éléments de $f(B)$ qui converge vers 0.

Exercice 29 : ✪✪ Étudier la continuité de

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Correction : Prouvons que f est uniquement continue en $1/2$ (là où $x = 1 - x$), ce qui se voit bien sur un dessin (où on a un peu forcé le trait, hein) :



Soit $x \neq 1/2$. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ étant denses dans $\mathbb{R}$, x est limite d'une suite de rationnels (x_n) et limite d'une suite d'irrationnels (y_n). Si f est continue en x, alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et $f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Or, pour tout x, $f(x_n) = 1 - x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - x$ et $f(y_n) = y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ donc, par unicité de la limite, $f(x) = 1 - x$ et $f(x) = x$ donc $x = 1/2$ ce qui est absurde : f est discontinue en tout réel $x \neq 1/2$.

Montrons à présent que f est continue en $1/2$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta = \varepsilon$. Soit enfin $x \in [\,1/2 - \eta\,; 1/2 + \eta\,]$ i.e. tel que $|x - 1/2| \leq \eta$. Si x est irrationnel, alors $f(x) = x$ donc $|f(x) - f(1/2)| = |x - 1/2| \leq \eta = \varepsilon$. Si x est rationnel, alors $f(x) = 1 - x$ donc $|f(x) - f(1/2) = |1 - x - 1/2| = |1/2 - x| \leq \eta = \varepsilon$. Dans tous les cas, $|f(x) - f(1/2)| \leq \varepsilon$: f est continue en 0. Oui, une fonction continue en un seul point, ça existe !

Exercice 30 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que :

$$\forall (x,y) \in [\,0\,;1\,]^2, \qquad f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0$$

Que dire de f ?

Correction : Montrons que f est la fonction nulle. Montrons tout d'abord que f est nulle en tout nombre dyadique i.e. en tout nombre de la forme $k/2^n$ avec $0 \leq k \leq 2^n$ (puisqu'on travaille sur $[\,0\,;1\,]$). Puisque $f(0) = f(1) = 0$ alors (avec $x = 0$ et $y = 1$), on obtient $f(1/2) = 0$. De même, avec $x = 0$ et $y = 1/2$, on trouve que $f(1/4) = 0$ puis, avec $x = 1/2$ et $y = 1$, il vient : $f(3/4)=0$. On pourrait dire « par récurrence immédiate », mais je ne suis pas sûr que tout le monde la trouve immédiate, alors rédigeons-la...

- si $n\in\mathbb{N}$, notons H_n : « $\forall k\in[\![0\,;\,2^n]\!], f(k/2^n)=0$ ».
- D'après ce qui précède, H_0, H_1 et H_2 sont vraies.
- Soit $n\geq 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit donc $k\in[\![0\,;\,2^{n+1}]\!]$. Si k est pair, alors il existe k' tel que $k=2k'$ si bien que $k/2^{n+1}=k'/2^n$ donc, par hypothèse de récurrence,

$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right)=f\left(\frac{k'}{2^n}\right)=0$$

Si k est impair, il suffit de voir que $k-1$ et $k+1$ sont pairs donc, d'après ce qui précède,

$$f\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right)=f\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right)=0$$

Dès lors, puisque

$$\frac{\dfrac{k-1}{2^{n+1}}+\dfrac{k+1}{2^{n+1}}}{2}=\frac{k}{2^{n+1}}$$

on en déduit que $f(k/2^{n+1})=0$, ce qui clôt la récurrence.

f étant nulle sur l'ensemble des nombres dyadiques, qui est dense dans $[\,0\,;1\,]$, et continue, alors elle est nulle sur $[\,0\,;1\,]$.

Exercice 31 : ✪✪ On définie sur $\mathbb{R}$ la fonction f suivante :

$$f:x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\\ x & \text{si } x\in\mathbb{Q}\end{cases}$$

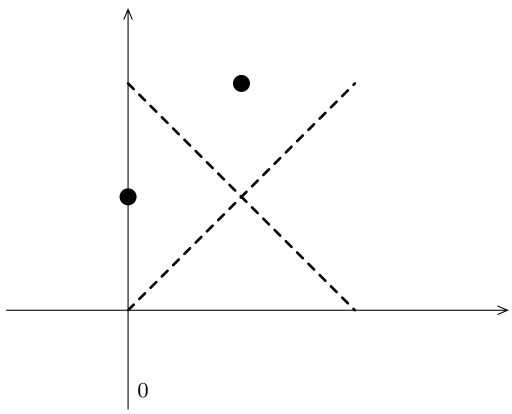
Montrer que f est continue 0 et discontinue en tout autre point.

Correction : analogue à l'exercice 29.

Exercice 32 : ✪✪ Construire une bijection de $[\,0\,;1\,]$ dans lui-même discontinue en tout point.

Correction : On pense à poser $f(x)=x$ si x est rationnel et $1-x$ sinon, mais le problème est que cette fonction est continue en $1/2$. Il suffit d'échanger $1/2$ avec un autre réel : définissons sur $[\,0\,;1\,]$ la fonction f par :

$$f:x\mapsto\begin{cases}x & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\\ 1-x & \text{si } x\in\mathbb{Q},\ x\neq 1/2 \text{ et } x\neq 0\\ 1/2 & \text{si } x=0\\ 1 & \text{si } x=1/2\end{cases}$$



Montrons que f est bijective et discontinue en tout point (il est donc hors de question d'appliquer le théorème de la bijection).

- Montrons que f est injective. Soient $x_1\neq x_2$ deux éléments de $[\,0\,;1\,]$. Si x_1 est rationnel et x_2 irrationnel, alors $f(x_2)=x_2$ est irrationnel, et $f(x_1)=1-x_1$ ou $1/2$ ou 0 donc est rationnel si bien que $f(x_1)\neq f(x_2)$. Si x_1 et x_2 sont irrationnels, alors $f(x_1)=x_1$ et $f(x_2)=x_2$ donc $f(x_1)\neq f(x_2)$. Supposons à présent que x_1 et x_2 soient rationnels.

S'ils sont tous les deux différents de 0 et de $1/2$ alors on obtient $f(x_1) \neq f(x_2)$ de la même façon. Supposons que $x_1 \neq 0, 1/2$ et $x_2 = 0$. Alors $f(x_1) = 1 - x_1$ et $f(x_2) = 1/2$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$ puisque $x_2 \neq 1/2$. On traite les autres cas de la même façon ($x_1 \neq 0, 1/2$ et $x_2 = 1/2$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1/2$) : dans tous les cas, $f(x_1) \neq f(x_2)$ donc f est injective.
- Soit $y \in [\,0\,;1\,]$. Si $y = 1$ alors $1/2$ est un antécédent. Si $y = 1/2$ alors 0 est un antécédent. Supposons donc que $y \neq 1$ et $1/2$. Si y est un irrationnel alors $f(y) = y$: y est un antécédent de y. Enfin, si y est un rationnel (différent de 1 et de $1/2$) alors $1 - y$ est rationnel différent de $1/2$ et de 0 donc $f(1-y) = 1 - (1-y) = y$: $1 - y$ est un antécédent de y. Dans tous les cas, y admet un antécédent, f est surjective.
- Si $x \neq 0$ et $x \neq 1/2$, on montre de même que dans l'exercice 29 que f est discontinue en x. $f(0) = 1/2$ et, si $n \geq 3$, $f(1/n) = 1 - 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq f(0)$ donc f n'est pas continue en 0. On montre de même que f n'est pas continue en $1/2$.

Exercice 33 - Fonction de Thomae : ✪✪✪ On définie sur $\mathbb{R}$ la fonction f suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ et si } \dfrac{p}{q} \text{ est l'écriture irréductible de } x \end{cases}$$

Montrer que f est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel. On pourra utiliser l'exercice 79 du chapitre 12.

Remarque : On peut montrer qu'il n'existe aucune fonction continue en tout point rationnel et discontinue en tout point irrationnel.

Correction : Soit $x \in \mathbb{Q}$, qu'on écrit sous forme irréductible $x = p/q$, et donc $f(x) = 1/q \neq 0$. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc x est limite d'une suite d'irrationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x_n) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \neq f(x)$$

c'est-à-dire que f n'est pas continue en x : f est donc discontinue en tout rationnel. Soit à présent $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et prouvons que f est continue en x. Utilisons la caractérisation séquentielle de la limite : montrons que pour toute suite (x_n) qui converge vers x, on a $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ ce qui permettra de conclure. Soit donc une suite (x_n) qui converge vers x. Deux cas de figure : soit la suite ne contient que des irrationnels à partir d'un certain rang, soit la suite contient une infinité de termes rationnels.
- Le cas où (x_n) est composée uniquement d'irrationnels à partir d'un certain rang est le plus simple : dans ce cas, $f(x_n) = 0$ à partir d'un certain rang, donc converge vers $0 = f(x)$.
- Supposons que la suite contienne une infinité de termes rationnels. Soit v_n la suite extraite formée des termes rationnels (qui converge donc vers x car suite extraite d'une suite qui converge vers x). En écrivant $v_n = p_n/q_n$ sous forme irréductible, on a donc $f(v_n) = 1/q_n$. Or, x étant irrationnel, d'après l'exercice 79 du chapitre 12, $|q_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (les dénominateurs d'une suite de rationnels qui converge vers un irrationnel tendent vers $+\infty$ en valeur absolue) si bien que $f(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = f(x)$. La suite $(f(v_n))$ converge donc vers $0 = f(x)$: pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(v_n)| \leq \varepsilon$ pour n assez grand, c'est-à-dire que les images des termes rationnels sont dans $[\,-\varepsilon\,;\varepsilon\,]$ pour n assez grand, et toutes les valeurs des irrationnels sont aussi dans cet intervalle (car ces valeurs sont nulles). L'intervalle $[\,-\varepsilon\,;\varepsilon\,]$ contient tous les termes de la suite $(f(x_n))$ pour n assez grand (toutes les valeurs pour les x_n irrationnels, et toutes les valeurs pour n assez grand pour les x_n rationnels) donc $(f(x_n))$ converge bien vers $f(x)$ ce qui permet de conclure.

5 Théorème des valeurs intermédiaires :

Exercice 34 : ✪ Une bonne fois pour toutes, montrer qu'une fonction qui est continue sur un intervalle et qui ne s'annule pas est de signe constant. C'est compris ?

Correction : cf. chapitre 1.

Exercice 35 : ✪ Reprendre l'exercice 34.

Exercice 36 : ✪

1. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui prend un nombre fini de valeurs ?
2. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue ?
3. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ continue ?

4. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$? On pourra s'intéresser à la fonction $x \mapsto f(x) + x$.

Correction :

1. Il était sous-entendu que la fonction était définie sur $\mathbb{R}$ (ou, tout du moins sur un intervalle). D'après le TVI, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle donc est soit un singleton, soit un ensemble infini. Si elle prend un nombre fini de valeurs, alors son image est un singleton, c'est-à-dire qu'elle est constante.
2. Si f n'est pas constante, alors elle prend au moins deux valeurs entières (puisqu'elle est à valeurs dans $\mathbb{Z}$) qu'on note n_1 et n_2. f étant continue, d'après le TVI, f prend toutes les valeurs entre n_1 et n_2 donc prend des valeurs non entières, ce qui est absurde. f est donc constante.
3. Montrons que f est constante. Si ce n'est pas le cas, f prend au moins deux valeurs rationnelles r_1 et r_2. f étant continue, d'après le TVI, f prend toutes les valeurs entre r_1 et r_2. Or, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tel que $y \in]\, r_1\,; r_2\,[$. Dès lors, y est atteint par f, ce qui est absurde puisque f est à valeurs rationnelles. On en déduit que f est constante.
4. La fonction $g : x \mapsto f(x) + x$ est continue car somme de fonctions qui le sont. Or, par hypothèse, g est à valeurs dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$: en effet, que x soit rationnel ou non, $g(x) = f(x) + x$ est irrationnel car somme d'un rationnel et d'un irrationnel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on en déduit comme dans la question précédente que g est constante.

Exercice 37 : ✪ Soit f continue sur le segment $[\,0\,; T\,]$ telle que $f(0) = f(T)$. Montrer qu'il existe x tel que $f(x) = f\left(x + \dfrac{T}{2}\right)$.

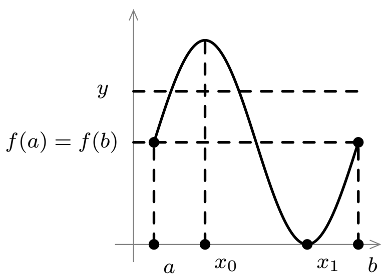
Correction : Soit g définie sur $[\,0\,; T/2\,]$ par :

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{T}{2}\right)$$

Alors g est continue car somme et composée de fonctions qui le sont. De plus, $g(0) = f(0) - f(T/2)$ et $g(T/2) = f(T/2) - f(T)$. Or, $f(T) = f(0)$ si bien que $g(T) = f(T/2) - f(0) = -g(0)$. Par conséquent, $g(T)$ et $g(0)$ sont opposés donc de signes opposés donc, d'après le TVI, g s'annule sur $[\,0\,; T/2\,]$ ce qui est le résultat voulu.

Exercice 38 : ✪ Soit f une fonction continue sur $[\,a\,; b\,]$ telle que $f(a) = f(b)$. Soient $m = \min_{[\,a\,;b\,]} f$ et $M = \max_{[\,a\,;b\,]} f$ (pourquoi existent-ils ?). On suppose que $m < M$. Soit $y \in]\, m\,; M\,[$. Montrer que y a au moins deux antécédents dans $[\,a\,; b\,]$.

Correction : Tout d'abord, m et M existent car f est une fonction continue sur un segment donc est bornée et atteint ses bornes. Faisons un dessin :



Puisque m et M sont atteints, soient x_0 et x_1 tels que $f(x_0) = M$ et $f(x_1) = m$. Sans perte de généralité, supposons $x_0 < x_1$ (essayez de refaire l'exo en supposant $x_1 > x_0$). f est continue, $f(x_0) = M > y > f(x_1) = m$: d'après le TVI, il existe $x_3 \in]\, x_0\,; x_1\,[$ tel que $f(x_3) = y$: cela fait un antécédent. Pour en avoir un deuxième, il faut séparer les cas.

Supposons que $y \geq f(a)$ (ce qui est le cas sur le dessin ci-dessus). Alors $f(a) \leq y < f(x_0) = M$ donc, d'après le TVI, il existe $x_4 \in [\,a\,; x_0\,[$ tel que $f(x_4) = y$ donc cela fait un deuxième antécédent.

Supposons que $y \leq f(a)$ (faites le dessin !). Alors $f(x_1) = m < y \leq f(b) = f(a)$ donc, de même, y admet un antécédent sur $]\, x_1\,; b\,]$. Dans tous les cas, y admet deux antécédents.

Exercice 39 - Un calcul barycentrique : ✪ Soit f une fonction continue sur $[\,a\,; b\,]$ et soient x, y deux réels positifs. Montrer qu'il existe $c \in [\,a\,; b\,]$ tel que $(x + y)f(c) = xf(a) + yf(b)$.

Correction : Tout d'abord, si $x = 0$, alors $c = b$ convient, et si $y = 0$, alors $c = a$ convient. Supposons donc x et y strictement positifs. f étant bornée sur le segment $[\,a\,; b\,]$, elle y est bornée et atteint ses bornes : il existe x_0 tel que

$f(x_0) = \max_{[\,a\,;b\,]} f$ et x_1 tel que $f(x_1) = \min_{[\,a\,;b\,]} f$. x étant positif, $xf(a) \leq xf(x_0)$ et, de même, $yf(b) \leq yf(x_0)$ si bien que $xf(a) + yf(b) \leq (x+y)f(x_0)$ et $x + y > 0$ donc :

$$\frac{x}{x+y} \times f(a) + \frac{y}{x+y} \times f(b) \leq f(x_0)$$

De même :

$$\frac{x}{x+y} \times f(a) + \frac{y}{x+y} \times f(b) \geq f(x_1)$$

f étant continue, d'après le TVI, il existe $c \in [\,x_0\,;x_1\,]$ tel que

$$f(c) = \frac{x}{x+y} \times f(a) + \frac{y}{x+y} \times f(b)$$

Exercice 40 : ✪ Vrai ou Faux ?

1. Une fonction $f : [\,a\,;b\,] \to [\,a\,;b\,]$ (avec $a \leq b$) continue admet un point fixe.
2. Une fonction $f : [\,0\,;2\,] \to [\,0\,;1\,]$ continue admet un point fixe.
3. Une fonction $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;2\,]$ continue admet un point fixe.
4. Une fonction $f :]\,0\,;1\,[\to]\,0\,;1\,[$ continue admet un point fixe.
5. Une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue admet un point fixe.
6. Une fonction $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ continue strictement croissante admet un unique point fixe.
7. Une fonction $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ continue strictement décroissante admet un unique point fixe.

Correction : Je vous laisse faire un dessin dans chaque situation.

1. **Vrai :** Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. Alors g est continue sur $[\,a\,;b\,]$ comme somme de fonctions qui le sont, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ car f est à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$. D'après le TVI, il existe $x \in [\,a\,;b\,]$ tel que $g(x) = 0$ donc tel que $f(x) = x$: f admet un point fixe.
2. **Vrai :** On définit sur $[\,0\,;2\,]$ la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. De même, g est continue, $g(0) \geq 0$ et $g(2) \leq 0$ car $f(2) \leq 1$ donc $f(2) - 2 \leq 0$. Ainsi, d'après le TVI, g s'annule donc f admet un point fixe.
3. **Faux :** La fonction constante égale à 2 n'a pas de point fixe sur $[\,0\,;1\,]$. On pouvait aussi prendre $f : x \mapsto x + 1$.
4. **Faux :** La fonction carré (définie sur $]\,0\,;1\,[$) n'a pas de point fixe.
5. **Faux :** La fonction $x \mapsto x + 1$ n'a pas de point fixe.
6. **Faux :** $\text{Id}_{[\,0\,;1\,]}$ est strictement croissante et tout point est point fixe, il y en a donc une infinité.
7. **Vrai :** L'existence de ce point fixe a déjà été prouvée. De plus, $g : x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante car somme de fonctions qui le sont, donc le point où g s'annule (dont on a déjà prouvé l'existence) est unique : f admet un unique point fixe.

Exercice 41 : ✪ Soit f une fonction continue décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Correction : Oui, le point fixe sera unique, même si f n'est pas strictement décroissante ! Je vous laisse vous en convaincre à l'aide d'un dessin : tracez une fonction constante (décroissante mais pas du tout strictement), et vous verrez qu'elle admet bien un unique point fixe. Prouvons ce résultat. La fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ est la somme de deux fonctions décroissantes (f et $x \longmapsto -x$) dont l'une strictement ($x \longmapsto -x$) donc est strictement décroissante. De plus, g est continue car somme de fonctions qui le sont. Il ne reste plus qu'à calculer les limites en $\pm\infty$. La fonction f étant décroissante, elle tend soit vers $+\infty$, soit vers une limite finie (selon qu'elle est majorée ou non) en $-\infty$. Or, $-x \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$. Dans tous les cas, ce n'est pas une forme indéterminée : $g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$. De même, $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$. D'après le théorème de la bijection, il existe un unique x tel que $g(x) = 0$ donc tel que $f(x) = x$. Autrement dit f admet un unique point fixe.

Exercice 42 : ✪ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \circ f$ admette un point fixe. Montrer que f admet un point fixe. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de continuité.

Correction : Par hypothèse, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(f(a)) = a$. Si $f(a) = a$ alors f admet un point fixe. Supposons que $f(a) \neq a$. Sans perte de généralité, on peut supposer $f(a) > a$. Alors $g(a) > 0$, où l'on a noté comme d'habitude $g : x \mapsto f(x) - x$. De plus, $f(f(a)) = a < f(a)$ donc $g(f(a)) = f(f(a)) - f(a) < 0$. Si on note $b = f(a)$, on obtient que $g(b) < 0$. Puisque g est continue, d'après le TVI, g s'annule sur $[\,a\,;b\,]$ donc f admet un point fixe. Le résultat est faux sans l'hypothèse de continuité. En effet, si on note f l'indicatrice de $\{0\}$ (i.e. la fonction qui vaut 1 en 0 et 0 sinon), alors f n'a pas de point fixe (car $f(x) = 0$ si $x \neq 0$, donc $f(x) \neq x$, et $f(0) = 1 \neq 0$) mais $f \circ f(1) = f(0) = 1$ donc 1 est un point fixe : $f \circ f$ admet un point fixe mais pas f.

Exercice 43 : ✪ Soient n réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_n}$$

Montrer que f s'annule exactement $n - 1$ fois sur son ensemble de définition.

Correction : Tout d'abord, D_f est l'union disjointe des $n + 1$ intervalles ci-dessous :

$$D_f = \mathbb{R} \backslash \{a_1; \dots; a_n\} = \left]-\infty\,; a_1\right[\cup \left]a_1\,; a_2\right[\cup \cdots \cup \left]a_{n-1}\,; a_n\right[\cup \left]a_n\,; +\infty\right[.$$

La fonction f est dérivable (c'est une fonction rationnelle) sur D_f. Pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{(x - a_k)^2} < 0$. Attention, cela ne signifie pas que f soit strictement décroissante sur D_f ! En effet, D_f n'est pas un intervalle ! Cela signifie que f est strictement décroissante sur tout intervalle composant D_f. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		a_1		a_2		$\cdots$		a_{n-1}		a_n		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$\cdots$		$\cdots$		$-$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\Vert$				$\Vert$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Calculons à présent les limites aux bornes des divers intervalles. Tout d'abord, $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$ (nous laissons le lecteur compléter le tableau de variations ci-dessus au fur et à mesure). Il découle du tableau de variations que f ne s'annule pas sur $\left]-\infty\,; a_1\right[$ ni sur $\left]a_n\,; +\infty\right[$: inutile d'appliquer le TVI ici ! Il donne un résultat d'existence ! Ici, il est immédiat qu'une fonction strictement décroissante sur $\left]-\infty\,; a_1\right[$ qui tend vers 0 en $-\infty$ est strictement négative, et donc ne s'annule pas (au passage, il n'est donc pas nécessaire de calculer la limite à gauche en a_1), et idem sur $\left]a_n\,; +\infty\right[$. Soit $i \in [\![1\,; n-1]\!]$. Pour tout $x \in D_f$,

$$f(x) = \frac{1}{x - a_i} + \sum_{k \neq i} \frac{1}{x - a_k}.$$

Or, $x - a_i \xrightarrow[x \to {a_i}^+]{} 0^+$ donc $\dfrac{1}{x - a_i} \xrightarrow[x \to {a_i}^+]{} +\infty$, et $\displaystyle\sum_{k \neq i} \frac{1}{x - a_k} \xrightarrow[x \to {a_i}^+]{} \sum_{k \neq i} \frac{1}{a_i - a_k}$ qui est un réel : il n'y a donc pas de forme indéterminée, et $f(x) \xrightarrow[x \to {a_i}^+]{} +\infty$. De même, $f(x) \xrightarrow[x \to {a_{i+1}}^-]{} -\infty$. Comme f est continue strictement monotone sur $\left]a_i\,; a_{i+1}\right[$, d'après le théorème de la bijection (le TVI simple ne suffit pas ici : on veut un nombre exact et le TVI prouve qu'il existe au moins une solution), f s'annule exactement une fois sur cet intervalle. Finalement, f ne s'annule pas sur les deux intervalles extrémaux, et s'annule exactement une fois sur chacun des $n - 1$ autres intervalles : f s'annule donc exactement $n - 1$ fois sur D_f.

Exercice 44 : ✪ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $|f(x)| \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pm\infty$. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de continuité.

Correction L'idée est simple : puisque $|f|$ tend vers $+\infty$, si f ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$, alors f prend des grandes valeurs en valeur absolue mais son signe change indéfiniment donc f s'annule pour des valeurs de x très grandes ce qui contredit le fait que $|f|$ tende vers $+\infty$. Prouvons cela rigoureusement.

Supposons que f ne tende ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$ en $+\infty$. Dès lors :

$$\exists A_1 > 0, \forall B \geq 0, \exists x \geq B, f(x) < A_1$$

et puisque f ne tend pas non plus vers $-\infty$:

$$\exists A_2 < 0, \forall B \geq 0, \exists x \geq B, f(x) > A_2$$

Soit $M = \max(|A_1|, |A_2|) = \max(A_1, -A_2)$. Puisque $|f(x)| \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, il existe B tel que pour tout $x \geq B$, $|f(x)| \geq M$. Or, par hypothèse, il existe $x_1 \geq B$ tel que $f(x_1) < A_1$. Or, $x_1 \geq B$ donc $|f(x)| \geq M$. Si $f(x) \geq 0$ alors $f(x_1) \geq M \geq A_1$ ce qui est exclu, donc $f(x_1) < 0$. De même, par hypothèse, il existe $x_2 \geq B$ tel que $f(x_2) > A_2$. Si $f(x_2) < 0$, alors $|f(x_2)| = -f(x_2) \geq M \geq |A_2| = -A_2$ donc $f(x_2) \leq A_2$ ce qui est exclu, donc $f(x_2) > 0$. f étant continue, d'après le TVI, f s'annule sur $[\, x_1\,; x_2\,]$ donc il existe $x_3 \geq B$ tel que $f(x_3) = 0$ ce qui contredit le fait que $|f(x)| \geq M > 0$ pour tout $x \geq B$.

Exercice 45 : ✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue et soit $(x_1, \dots, x_n) \in [\,0\,;1\,]^n$. Montrer qu'il existe $c \in [\,0\,;1\,]$ tel que

$$f(c) = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

Correction : Analogue à l'exercice 39.

Exercice 46 : ✪ Soit $T > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(\mathbb{R}) = f\left(\left[\,a\,;a + \frac{T}{2}\,\right]\right)$$

Correction : Par exemple, les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques et on a $\cos(\mathbb{R}) = \cos([\,0\,;\pi\,])$ et $\sin(\mathbb{R}) = \sin\left(\left[\,-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\,\right]\right)$. Prouvons donc cela dans le cas général. On prouve de même que dans l'exercice 19 que f est bornée et atteint ses bornes, et qu'il existe $(x_0, x_1) \in [\,0\,;T\,]^2$ tel que $f(x_0) = \max(f)$ et $f(x_1) = \min(f)$ (le max et le min étant pris sur $\mathbb{R}$). Sans perte de généralité, supposons que $x_0 \le x_1$.

Si $x_1 - x_0 \le T/2$, posons $a = x_0$, si bien que $a \le x_0 \le x_1 \le a + T/2$. Sinon, $0 \le (x_0 + T) - x_1 \le T/2$. En effet, x_0 et x_1 appartiennent à $[\,0\,;T\,]$ donc $x_0 + T \ge T \ge x_1$, d'où l'inégalité de gauche. De plus, $x_1 \ge x_0 + T/2$ donc $x_1 + T/2 \ge x_0 + T$ ce qui donne la deuxième inégalité en mettant x_1 à droite. En posant $a = x_1$, alors $a \le x_1 \le x_0 + T \le a + T/2$ (l'idée de ce qui précède est simple : soit $x_1 - x_0 \le T/2$, soit on rajoute T à x_0 et alors x_1 et $x_0 + T$ sont eux aussi distants de moins de T, faites un dessin).

Dans tous les cas, il existe a tel que $\max(f)$ et $\min(f)$ soient atteints sur $[\,a\,;a + T/2\,]$ (le min est atteint en x_1 et le max en x_0 ou $x_0 + T$ puisque f est T-périodique). f étant continue, d'après le TVI, toutes les valeurs entre le max et le min sont atteintes sur $[\,a\,;a + T/2\,]$ donc toutes les valeurs de $f(\mathbb{R})$ sont atteintes sur cet intervalle, d'où le résultat.

Exercice 47 : ✪ Soit f définie et continue sur un intervalle $]\,a\,;b\,[$ non vide (avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$) telle que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x)$$

les limites étant prises dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que f n'est pas injective.

Correction : Supposons dans un premier temps que les limites soient réelles, et notons-les L. Si f est constante égale à L sur $]\,a\,;b\,[$ alors f n'est pas injective. Sinon, il existe $c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f(c) \neq L$. Sans perte de généralité, supposons que $f(c) > L$, et soit $m \in\,]\,L\,;f(c)\,[$. f étant continue, d'après le TVI, il existe $x_1 \in\,]\,a\,;c\,[$ tel que $f(x_1) = m$, et il existe $x_2 \in\,]\,c\,;b\,[$ tel que $f(x_2) = m$, donc f n'est pas injective puisque $x_1 < c < x_2$ et en particulier $x_1 \neq x_2$.

Supposons que ces deux limites (égales) soient égales à $+\infty$. Soit $c \in\,]\,a\,;b\,[$ et soit $m > f(c)$. Puisque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, f étant continue, d'après le TVI, il existe $x_1 \in\,]\,a\,;c\,[$ tel que $f(x_1) = m$, et idem entre b et c et on conclut de la même façon. De même si $L = -\infty$.

Exercice 48 : ✪ Soient $(a_1, \dots, a_n)$ dans $[\,0\,;1\,]$. Montrer qu'il existe $x \in [\,0\,;1\,]$ tel que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x - a_k| = \frac{1}{2}$$

Correction : Soit g définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $g : x \mapsto \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x - a_k| - \frac{1}{2}$. Montrons que g s'annule. Tout d'abord, les a_k sont positifs donc

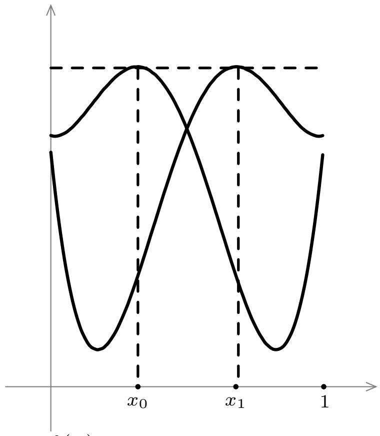
$$g(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |-a_k| - \frac{1}{2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{2}$$

Précisons que le 1/2 se trouve en dehors de la somme. De plus, les a_k sont inérieurs ou égaux à 1 donc, pour tout $k, 1 - a_k \ge 0$, si bien que :

$$g(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |1 - a_k| - \frac{1}{2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (1 - a_k) - \frac{1}{2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{2}$$

Finalement, $g(1) = -g(0)$. Ainsi, $g(1)$ et $g(0)$ sont de signe contraire. La fonction g étant continue, d'après le TVI, g s'annule.

Exercice 49 : ✪ Soient f et g continues sur $[0;1]$ telles que $\sup f = \sup g$. Montrer que les graphes de f et g se croisent.



Correction : Les fonctions f et g sont continues sur le segment $[0;1]$ donc sont bornées et atteignent leurs bornes, plus précisément leur borne supérieure. Il existe $(x_0, x_1) \in [0;1]^2$ tels que $f(x_0) = \sup f$ (c'est en fait un maximum puisqu'il est atteint) et $g(x_1) = \sup g$. Attention, même si les bornes sup sont égales, elles ne sont pas forcément atteintes au même endroit : on n'a pas forcément $x_0 = x_1$. On veut montrer qu'il existe $x \in]0;1[$ tel que $f(x) = g(x)$ donc tel que $f(x) - g(x) = 0$. En d'autres termes, on veut montrer que $f - g$ s'annule. Or, $(f-g)(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = \sup f - g(x_0)$, et puisque $\sup(f) = \sup(g)$, il vient $(f-g)(x_0) = \sup(g) - g(x_0) \geq 0$. De même, $(f-g)(x_1) \leq 0$. Enfin, $f - g$ est continue en tant que différence de fonctions qui le sont. D'après le TVI, il existe x tel que $(f-g)(x) = 0$ ce qui est le résultat voulu.

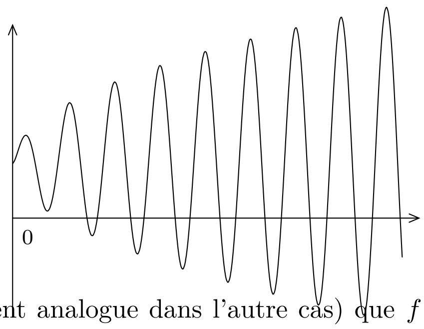
Exercice 50 : ✪ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue. On suppose qu'il existe $L < 1$ tel que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$. Montrer que f admet un point fixe.

Correction : Ici, pour une fois, définir $g : x \longmapsto f(x) - x$ ne servirait à rien. On cherche une autre façon de montrer qu'un réel x est un point fixe. Vu l'exercice, on pense au quotient. Or, **si x est non nul**, x est un point fixe si et seulement si $f(x)/x = 1$. On définit donc (sur $\mathbb{R}_+^*$) la fonction $g : x \longmapsto f(x)/x$. Deux cas se présentent :

- Premier cas : il existe $x_0 > 0$ tel que $g(x_0) \geq 1$. Dans ce cas, puisque $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L < 1$, g étant continue en tant que quotient de fonctions qui le sont (celle au dénominateur ne s'annulant pas), d'après le TVI, il existe $x \in [x_0;+\infty[$ tel que $g(x) = 1$ donc tel que $f(x) = x$: f admet un point fixe.
- Deuxième cas : pour tout $x > 0$, $g(x) < 1$, c'est-à-dire $0 \leq f(x) < x$ car x est positif (donc on ne change pas le sens de l'inégalité en multipliant par x) et car f est à valeurs positives. Or, $x \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$ (on s'intéresse à la limite à droite en 0 car cette inégalité est valable pour tout $x > 0$: attention, elle n'est a priori pas valable en 0 !). D'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$. Or, f est continue en 0 donc continue à droite : $f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} f(0)$. Par unicité de la limite, $f(0) = 0$: 0 est un point fixe.

Dans tous les cas, f admet un point fixe.

Exercice 51 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue surjective. Montrer que f s'annule une infinité de fois.



Correction : Raisonnons par l'absurde et supposons que f s'annule un nombre fini de fois (f s'annule au moins une fois car f est surjective donc 0 est atteint). Soit A le dernier zéro de f (c'est-à-dire le dernier x tel que $f(x) = 0$, et un tel A existe car un ensemble fini admet un maximum). En particulier, pour tout $x > A$, $f(x) \neq 0$. Comme f est continue, puisqu'elle ne s'annule pas sur $]A;+\infty[$, alors elle est de signe constant. En effet, si ce n'est pas le cas, alors il existe $x_0 > A$ et $x_1 > A$ tel que $f(x_0) < 0$ et $f(x_1) > 0$ donc, d'après le TVI (f est continue), f s'annule sur $]x_0;x_1[$ et en particulier sur $]A;+\infty[$, ce qui est exclu. Ainsi f est de signe constant sur $]A;+\infty[$. On suppose (raisonnement analogue dans l'autre cas) que f est strictement positive sur cet intervalle. Or, f est continue sur le segment $[0;A]$ donc est bornée (et atteint ses bornes). Plus précisément, f est minorée sur ce segment : il existe m tel que, pour tout $x \in [0;A]$, $f(x) \geq m$. Soit $B = \min(m, 0)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geq B$. En particulier, $B - 1$ n'est pas atteint, ce qui est absurde car f est surjective.

Exercice 52 : ✪✪ Un candidat à l'X (peu entraîné...) court le 1000m en 5 minutes. Montrer qu'il existe un intervalle de 2 minutes 30 pendant lequel il a avancé d'exactement 500 mètres.

Correction : Soit φ la fonction qui va de $[0;300]$ dans $\mathbb{R}$ et qui, au temps écoulé t (en secondes, et il y a 300 secondes en 5 minutes), associe la distance entre le candidat et la ligne de départ au temps t. Ainsi, si $t \in [0;300]$, $\varphi(t)$ est la distance entre le candidat et la ligne de départ au bout de t secondes. On a en particulier $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(300) = 1000$. On souhaite donc montrer qu'il existe $t \in [0;150]$ tel que $\varphi(t+150) - \varphi(t) = 500$. On définit donc sur $[0;150]$ la fonction $g : t \longmapsto \varphi(t+150) - \varphi(t)$. Or, φ est continue (on suppose que le candidat ne se téléporte pas) donc g est continue. On a $g(0) = \varphi(150)$ et $g(150) = 1000 - \varphi(150)$. On veut montrer qu'il existe $t \in [0;150]$ tel que $g(t) = 500$. Le problème est que l'on ne connaît pas la valeur de $\varphi(150)$. Il suffit de faire deux cas : si $\varphi(150) \geq 500$, alors $g(0) \geq 500$ et $\varphi(150) \leq 500$, et c'est le contraire si $\varphi(150) \leq 500$. Dans les deux cas, on peut appliquer le TVI : il existe $t \in [0;150]$ tel que $g(t) = 500$.

Exercice 53 - Cordes universelles (Théorème de Lévy, 1934) : ✪✪ Soit f continue sur $[0;1]$ avec $f(0) = f(1)$.

1. Soit $n \geq 1$ et on pose $\alpha = 1/n$. On définit sur $[0;1-\alpha]$ la fonction g par

$$g(x) = f\left(x+\alpha\right) - f(x)$$

(a) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.

(b) En déduire qu'il existe $x \in [\,0\,;1-\alpha\,]$ tel que $f(x) = f(x+\alpha)$. On dit que α est une corde universelle.

2. Soit maintenant $\alpha \in \,]\,0\,;1\,[\,$ tel que $1/\alpha \notin \mathbb{N}$. En considérant la fonction

$$f_\alpha : x \mapsto x - \frac{\sin^2(\pi x/\alpha)}{\sin^2(\pi/\alpha)}$$

montrer que la propriété précédente est fausse. Où a-t-on utilisé le fait que $1/\alpha \notin \mathbb{N}$?

Correction :

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k}{n}+\alpha\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = f(1) - f(0)$ par télescopage. Or, $f(1) = f(0)$ donc cette somme est nulle.

(b) Par conséquent, soit tous les termes de cette somme sont nuls, soit elle contient un terme strictement positif et un terme strictement négatif, c'est-à-dire qu'il existe $(k_1, k_2) \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]^2$ tels que $g(k_1/n) < 0$ et $g(k_2/n) > 0$, et g est continue car f l'est donc, d'après le TVI, il existe x tel que $g(x) = 0$. Dans tous les cas, g s'annule : il existe x tel que $f(x) = f(x+\alpha)$.

2. Pour montrer qu'une propriété est fausse, il faut montrer que les hypothèses sont vérifiées mais pas la conclusion (la négation de $A \Rightarrow B$ est A et (non(B))). Il faut donc prouver que f est continue, que $f(0) = f(1)$ mais qu'il n'existe pas de $x \in [\,0\,;1-\alpha\,]$ tel que $f(x) = f(x+\alpha)$. f est continue en tant que somme de fonctions qui le sont. De plus, $f(0) = f(1) = 0$. Enfin, si $x \in [\,0\,;1-\alpha\,]$,

$$f(x+\alpha) = x+\alpha - \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{\alpha} + \pi\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)} = x+\alpha - \frac{\left(-\sin\left(\dfrac{\pi x}{\alpha}\right)\right)^2}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)} = f(x) + \alpha$$

et, en particulier, $f(x+\alpha) \neq f(x)$. Le résultat de la question 1 n'est donc plus valable quand α n'est pas l'inverse d'un entier (on a utilisé ce résultat en définissant la fonction f : si α est l'inverse d'un entier, le sinus au dénominateur est nul et donc la fonction n'est pas définie).

Exercice 54 : ✪✪ Soit

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en 0 mais vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall m \in [\,f(a)\,;f(b)\,]\,, \exists c \in [\,a\,;b\,]\,, f(c) = m$$

Correction : Montrons tout d'abord que f n'est pas continue en 0 par la caractérisation séquentielle de la continuité : soit (u_n) la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$$

Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ mais $f(u_n) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq f(0)$ donc f n'est pas continue en 0. Soient à présent a et b deux réels et $m \in [\,f(a)\,;f(b)\,]$.

Si a et b sont strictement positifs, f est continue sur $[\,a\,;b\,]$ donc on peut appliquer le (vrai) TVI : il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(c) = m$. Idem si a et b sont strictement négatifs.

Supposons donc $a \leq 0 \leq b$. Si $a = b = 0$ alors $m = f(0)$ et $c = 0$ convient. Supposons $a < 0 < b$. Cherchons b' appartenant à $]\,a\,;0\,[$ tel que $f(b) = f(b')$ (faites un dessin). On cherche donc $b' \in \,]\,a\,;0\,[$ tel que $\sin(1/b') = \sin(1/b)$ donc tel que $1/b' \equiv 1/b[2\pi]$, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $1/b' = 1/b + 2k\pi$.. On cherche donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a < \frac{1}{\dfrac{1}{b} + 2k\pi} < 0$$

Or,

$$\frac{1}{\frac{1}{b}+2k\pi} \xrightarrow[k\to-\infty]{} 0^-$$

donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que

$$a<\frac{1}{\frac{1}{b}+2k\pi}<0$$

et posons

$$b'=\frac{1}{\frac{1}{b}+2k\pi}$$

Alors on a bien $a<b'<0$ et

$$\begin{aligned} f(b') &= \sin(1/b') \\ &= \sin(1/b+2k\pi) \\ &= \sin(1/b) \\ &= f(b) \end{aligned}$$

Par conséquent, $m\in[\,f(a)\,;f(b')\,]$ mais f est continue sur $[\,a\,;b'\,]$ (puisque $a<b'<0$) donc, d'après le TVI, il existe $c\in[\,a\,;b'\,]$ tel que $f(c)=m$.

Enfin, si $b=0$, i.e. si $a<0=b$, on trouve de même un réel $b'\in\,]\,a\,;0\,[$ tel que $f(b')=0=f(b)$ (prendre b' de la forme $1/k\pi$ avec $a<1/k\pi<0$) et on conclut de la même façon, et de même si $a=0<b$. Dans tous les cas, on a le résultat voulu.

Exercice 55 : ✪✪✪ Soit $f:[\,0\,;1\,]\to[\,0\,;1\,]$ continue vérifiant $f\circ f=f$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment (non vide).

Correction : Montrons tout d'abord que l'ensemble des points fixes de f (qu'on note S dans la suite) est un intervalle (non vide). Tout d'abord (cf. cours), f admet au moins un point fixe donc S est non vide. Soient donc $x\le y$ deux points fixes de f et montrons que $[\,x\,;y\,]\in S$. Soit $z\in[\,x\,;y\,]$ et prouvons que z est un point fixe de f i.e. que $f(z)=z$. Le problème est que f n'est pas forcément monotone : on ne peut pas appliquer f aux inégalités $x\le z\le y$.

Utilisons le fait que x et y soient des points fixes : on a donc $f(x)\le z\le f(y)$. Or, f est continue donc, d'après le TVI, il existe $c\in[\,x\,;y\,]$ tel que $f(c)=z$. Or, $f\circ f=f$ donc $f(f(c))=f(c)$ c'est-à-dire que $f(z)=z$: z est un point fixe, $[\,x\,;y\,]\subset S$ donc S est un intervalle.

Or, S est borné donc est de la forme $(a;b)$, où on a noté $a=\inf(S)$ et $b=\sup(S)$, les parenthèses disant juste qu'on ne sait pas si l'intervalle est ouvert ou fermé. Il suffit, pour conclure, de prouver que a et b appartiennent à S. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, a est la limite d'une suite d'éléments de S qu'on note (a_n). Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(a_n)=a_n$ car a_n est un point fixe. D'une part, $f(a_n)=a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}a$, et d'autre part, $a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}a$ et f est continue donc $f(a_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(a)$. Par unicité, de la limite, $f(a)=a$ donc a est un point fixe donc $a\in S$, et on prouve de même que $b\in S$ donc $S=[\,a\,;b\,]$: S est un segment (non vide).

Exercice 56 : ✪✪✪ Soit f continue sur $[\,0\,;1\,]$ et soit

$$S=\{x\in[\,0\,;1\,]\ |\ \exists y>x, f(y)>f(x)\}$$

On suppose qu'il existe $(a,b)\in[\,0\,;1\,]^2$ tels que $]\,a\,;b\,[\subset S$ et $a\notin S, b\notin S$.

1. Montrer que pour tout $x\ge b, f(x)\le f(b)$.
2. Montrer que $f(a)\ge f(b)$.
3. On suppose que $f(a)>f(b)$. Montrer que l'ensemble $A=\left\{x\in\,]\,a\,;b\,[\ \middle|\ f(x)=\frac{f(a)+f(b)}{2}\right\}$ admet une borne supérieure c.
4. Montrer que $c\notin S$. Que peut-on en déduire ?

Correction : En clair, S est l'ensemble des éléments de $[0;1]$ qui admettent un élément strictement supérieur avec une image strictement supérieure.

1. Soit $x \geq b$. Si $f(x) > f(b)$ alors, d'une part, $x > b$ (car x ne peut pas être égal à b) et d'autre part, $b \in S$ ce qui est exclu. On en déduit le résultat.
2. Il est sous-entendu que $a < b$. Si $f(a) < f(b)$ alors $a \in S$ ce qui est exclu.
3. Posons
$$m = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
Alors $f(b) < m < f(a)$: f étant continue, il existe $x \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f(x) = m$. En d'autres termes, A est non vide, et il est majoré par b donc admet une borne supérieure c.
4. Par caractérisation de la borne supérieure, c est limite d'une suite d'éléments de A qu'on note (c_n). Pour tout n, $f(c_n) = m \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$ et f est continue donc $f(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$. Par unicité de la limite, $f(c) = m$ donc $c \in A$ (c'est donc un maximum). Supposons que $c \in S$: il existe donc $y > c$ tel que $f(y) > f(c) = m$. Si $y \geq b$ alors $f(y) > f(b)$ ce qui contredit la question 2. Alors $y < b$: d'après le TVI, il existe $x \in \,]\,y\,;b\,[$ tel que $f(x) = m$ ce qui contredit la définition de c. On en déduit que $c \notin S$ ce qui contredit le fait que $]\,a\,;b\,[\subset S$. L'hypothèse absurde est que $f(a) > f(b)$: on en déduit finalement que $f(a) = f(b)$. D'où le nom de S : « S comme sourire » (faites un dessin).

6 Fonctions monotones :

Exercice 57 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

1. On suppose la restriction de f à $\mathbb{Q}$ croissante. Montrer que f est croissante.
2. Même question en remplaçant croissante par strictement croissante.

Correction :

1. Soient $x \leq y$ deux réels. Si $x = y$ alors $f(x) = f(y)$ et en particulier $f(x) \leq f(y)$. Supposons à présent $x < y$. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui converge vers y. Dès lors, pour n assez grand, $x_n \leq \dfrac{x+y}{2} \leq y_n$ et en particulier $x_n \leq y_n$. f étant croissante sur $\mathbb{Q}$, $f(x_n) \leq f(y_n)$. f étant continue, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et idem pour y. L'inégalité large passe à la limite donc $f(x) \leq f(y)$: f est croissante.
2. Soient $x < y$ deux réels. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui converge vers y. C'est un peu plus compliqué que dans le cas précédent puisque c'est l'inégalité LARGE qui passe à la limite. L'idée est de garder un peu de marge en donnant un majorant M pour x_n (à partir d'un certain rang), un minorant m pour y_n, avec $M < m$. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe $M < m$ deux rationnels dans $]\,x\,;y\,[$. Puisque $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, alors $x_n < M$ à partir d'un rang n_0 et $m < y_n$ à partir d'un rang n_1. Donc, si $n \geq \max(n_0, n_2)$, $x_n < M < m < y_n$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{Q}$ donc $f(x_n) < f(M) < f(m) < f(y_n)$. f étant continue, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et idem pour y, et l'inégalité large passe à la limite donc $f(x) \leq f(M) < f(m) \leq f(y)$ mais on a quand même $f(x) < f(y)$: f est strictement croissante.

Exercice 58 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère les propriétés suivantes :

1. f est monotone.
2. f est strictement monotone.
3. f est continue.
4. f est injective.
5. $f(\mathbb{R})$ est un intervalle.

Étudier toutes les implications entre ces propriétés. Prouver celles qui sont vraies et donner un contre-exemple à celles qui sont fausses.

Correction :
- L'implication $1 \Rightarrow 2$ est fausse : prendre la fonction nulle.
- L'implication $1 \Rightarrow 3$ est fausse : prendre la partie entière.
- L'implication $1 \Rightarrow 4$ est fausse : prendre la fonction nulle.
- L'implication $1 \Rightarrow 2$ est fausse : prendre la partie entière (et on a alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ qui n'est pas un intervalle).
- L'implication $2 \Rightarrow 1$ est vraie : une fonction strictement monotone est monotone.

- L'implication $2 \Rightarrow 3$ est fausse : prendre la fonction qui vaut x sur $\mathbb{R}_-$ et $x+1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est strictement croissante mais discontinue en 0.
- L'implication $2 \Rightarrow 4$ est vraie : c'est du cours.
- L'implication $1 \Rightarrow 2$ est fausse : prendre le même contre exemple que ci-dessus, l'image est $\mathbb{R}_- \cup \left]1\,;+\infty\right[$.
- L'implication $3 \Rightarrow 1$ est fausse : prendre la fonction carré.
- L'implication $3 \Rightarrow 2$ est fausse : idem.
- L'implication $3 \Rightarrow 4$ est fausse : idem.
- L'implication $3 \Rightarrow 5$ est vraie : c'est le TVI.
- L'implication $4 \Rightarrow 1$ est fausse : il y a un contre-exemple dans le cours.
- L'implication $4 \Rightarrow 2$ est fausse : idem.
- L'implication $4 \Rightarrow 3$ est fausse : idem.
- L'implication $4 \Rightarrow 5$ est fausse : prendre le même contre-exemple que pour $3 \Rightarrow 2$.
- L'implication $5 \Rightarrow 1$ est fausse : prendre la fonction carré, on a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.
- L'implication $5 \Rightarrow 2$ est fausse : idem.
- L'implication $5 \Rightarrow 3$ est fausse : prendre f égale à x sur $\mathbb{R}_-$ et égale à -1 sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_-$ mais f est discontinue en 0.
- L'implication $5 \Rightarrow 4$ est fausse : prendre f la fonction carré.

Exercice 59 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective croissante. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Correction : Soit $A \geq 0$. f étant bijective, elle est surjective donc il existe B tel que $f(B) = A$. f étant croissante, pour tout $x \geq B$, $f(x) \geq f(B) = A$, ce qui est le résultat voulu.

Exercice 60 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'application

$$x \mapsto \lim_{t \to x^+} f(t)$$

est bien définie et croissante.

Correction : L'application (que l'on notera g) est bien définie car f est croissante donc admet en tout point intérieur à son domaine de définition (donc en tout réel puisque f est définie sur $\mathbb{R}$) une limite à droite finie. Soient $x < y$ deux réels. Alors (on justifie de même l'existence de la limite à gauche)

$$g(x) = \lim_{t \to x^+} f(t) \leq \lim_{t \to y^-} f(t) \leq \lim_{t \to y^+} f(t) = g(y)$$

ce qui prouve la croissance de g. La dernière égalité découle du cours. La première inégalité vient du fait que, si $z \in \left]x\,;y\right[$, pour tout $t \in \left]x\,;z\right[$, $f(t) \leq f(z)$ et l'inégalité large passe à la limite donc

$$\lim_{t \to x^+} f(t) \leq f(z)$$

et on prouve de la même façon que

$$f(z) \leq \lim_{t \to y^-} f(t)$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 61 : ✪✪ Existe-t-il

- une bijection continue de $\left]0\,;1\right]$ dans $\mathbb{R}$?
- une bijection continue de $\left]0\,;1\right[$ dans $\left[0\,;1\right]$?

Correction : Montrons dans les deux cas qu'une telle bijection continue n'existe pas en raisonnant par l'absurde.

- On suppose donc qu'il existe une bijection continue f de $\left]0\,;1\right]$ dans $\mathbb{R}$. f étant injective et continue, elle est strictement monotone. Sans perte de généralité, on peut la supposer strictement croissante. Notons $M = f(1)$. f étant strictement croissante, $f(x) \leq f(1) = M$ pour tout $x \in \left]0\,;1\right]$ mais alors $M+1$ n'est pas atteint par f, f n'est pas surjective, ce qui est absurde.
- On suppose qu'il existe une bijection continue f de $\left]0\,;1\right[$ dans $\left[0\,;1\right]$. De même, sans perte de généralité, on peut la supposer strictement croissante. 1 est atteint (car f surjective), il existe $x_0 \in \left]0\,;1\right[$ tel que $f(x_0) = 1$. f étant strictement croissante, pour tout $x \in \left]x_0\,;1\right[$, $f(x_0) = 1 < f(x)$ ce qui est absurde car f est à valeurs dans $\left[0\,;1\right]$.

Exercice 62 : ✪✪ Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue (on pourra s'intéresser aux limites à droite et à gauche de f et g en x).

Correction : Soit donc $x > 0$, et prouvons que f est continue en x. f étant croissante, f admet une limite à gauche et une limite à droite finies en x (car x est un point intérieur) et $f_g(x) \leq f(x) \leq f_d(x)$, avec égalité si et seulement s'il y a égalité.

Or, g est décroissante donc admet également des limites à gauche et à droite finies en x, et on a $g_g(x) \geq g(x) \geq g_d(x)$ car g est décroissante. Or, lorsque $t \to x^+$, $f(t) \to f_d(x)$ et $t \to x$ si bien que

$$g(t) \xrightarrow[t \to x^+]{} \frac{f_d(x)}{x}$$

Par unicité de la limite, $g_d(x) = f_d(x)/x$ et idem à gauche. Par conséquent,

$$\frac{f_g(x)}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{f_d(x)}{x}$$

et $x > 0$ donc on peut multiplier par x sans changer le sens de l'inégalité, si bien que $f_g(x) \geq f(x) \geq f_d(x)$. On a les inégalités dans l'autre sens (voir ci-dessus) donc on a égalité : $f_g(x) = f(x) = f_d(x)$ donc f est continue en x donc sur $\mathbb{R}_+^*$ car x est quelconque.

Exercice 63 : ✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ croissante, surjective de $[\,a\,;b\,]$ dans $[\,f(a)\,;f(b)\,]$. Montrer que f est continue.

Correction : Montrons que si f n'est pas continue, alors il y a un trou dans $[\,f(a)\,;f(b)\,]$ ce qui est absurde car elle est surjective. Supposons que f soit discontinue en un réel $c \in [\,a\,;b\,]$. Supposons dans un premier temps que $c \in \,]\,a\,;b\,[$. Puisque f est discontinue en c, alors soit f est discontinue à droite, soit à gauche (soit les deux évidemment). Sans perte de généralité, supposons f discontinue à droite. Dès lors, f étant croissante, elle admet une limite à droite (finie) en c, notée $f_d(c)$, et puisque f n'est pas continue à droite, $f(c) < f_d(c)$. f étant croissante, pour tout $x \leq c$, $f(a) \leq f(x) \leq f(c)$ et pour tout $x \geq c$, $f_d(c) \leq f(x) \leq f(b)$ (en effet, pour tout $t \in \,]\,c\,;x\,]$, $f(t) \leq f(x)$ et l'inégalité large passe à la limite donc, en faisant tendre t vers c^+, on a l'inégalité voulue). Dans tous les cas, aucun réel de l'intervalle ouvert $]\,f(c)\,;f_d(c)\,[$ n'est atteint, ce qui est absurde car f est surjective dans $[\,f(a)\,;f(b)\,]$. On exclut les cas où f est discontinue en a et en b de la même façon (à l'aide, respectivement, de la limite à droite et de la limite à gauche).

Exercice 64 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \leq g$.

Correction : On définit g de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, g est affine sur $[\,n\,;n+1\,]$ et égale à $f(n+1)$ en n et égale à $f(n+2)$ en $n+1$. Par exemple, $g(0) = f(1)$, $g(1) = f(2)$, $g(2) = f(3)$ etc. et g est affine entre ces valeurs. g est continue sur les intervalles ouverts (on exclut les points de recollement, cf. cours) $]\,n\,;n+1\,[$ (car affine) et admet $f(n+1)$ comme limite à droite et à gauche en n donc est aussi continue en les entiers : g est bien continue sur $\mathbb{R}_+$. À présent, si $x \in \mathbb{R}_+$, si on note $n = \lfloor x \rfloor$, alors $f(x) \leq f(n+1)$ car f est croissante donc $f(x) \leq g(n)$. Or, sur $[\,n\,;n+1\,]$, g est affine et $g(n) = f(n+1) \leq f(n+2) = g(n+1)$ donc g est croissante si bien que $f(x) \leq g(n) \leq g(x)$ ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 65 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est fini ou dénombrable, c'est-à-dire qu'il existe une injection de l'ensemble des points de discontinuité de f dans $\mathbb{Q}$. Par conséquent, une fonction croissante ne peut pas être « trop » discontinue...

Correction : Notons D l'ensemble des points de discontinuité de f. Soit $x \in D$. Alors $f_g(x) < f_d(x)$ où on a noté $f_g(x)$ la limite à gauche et $f_d(x)$ la limite à droite de f en x (qui existent bien puisque f est croissante). Dès lors, l'intervalle $]\,f_g(x)\,;f_d(x)\,[$ est ouvert non vide donc contient un rationnel par densité de $\mathbb{Q}$. Définissons l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} D & \to & \mathbb{Q} \\ & & \\ x & \mapsto & \text{un rationnel appartenant à l'intervalle }]\,f_g(x)\,;f_d(x)\,[\end{array} \right.$$

D'après ce qui précède, cette application est bien définie (et $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc on pourrait s'arranger pour que le choix du rationnel soit non ambigu comme ci-dessus mais là on commence vraiment à couper les cheveux en quatre). Il suffit de prouver qu'elle est injective pour conclure. Soient $x_1 \neq x_2$ deux points de discontinuité de f distincts. Sans perte de généralité, on peut supposer $x_1 < x_2$. Alors $f_d(x_1) \leq f_g(x_2)$, la limite à droite en x_1 est inférieure ou égale à la limite à gauche en x_2. En effet, soit $m \in \,]\,x_1\,;x_2\,[$. Pour tout $t \in \,]\,x_1\,;m\,]$, f étant croissante, $f(t) \leq f(m)$ et l'inégalité large passe à la limite donc, quant $t \to {x_1}^+$, on obtient que $f_d(x_1) \leq f(m)$ et on trouve de même que $f(m) \leq f_g(x_2)$, d'où le fait que $f_d(x_1) \leq f_g(x_2)$. Or, $\varphi(x_1) < f_d(x_1)$ et $f_g(x_2) < \varphi(x_2)$ si bien que $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$: en particulier, $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$, φ est injective.

Exercice 66 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. On définie sur $\mathbb{R}_+$ la fonction F par $F(x) = \displaystyle\max_{t \in [\,0\,;x\,]} f(t)$.

1. Montrer que F est bien définie, croissante, continue et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq F(x)$.
2. Soit g une fonction croissante telle que $f \leq g$ (i.e. $f(x) \leq g(x)$ pour tout x). Montrer que $F(x) \leq g(x)$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. f étant continue sur le segment $[\,0\,;x\,]$, elle est bornée et atteint ses bornes donc admet un maximum sur le segment $[\,0\,;x\,]$: F est bien définie. Soient $x \leq y$ deux réels positifs. Puisque $[\,0\,;x\,] \subset [\,0\,;y\,]$, alors le maximum sur $[\,0\,;x\,]$ est inférieur à $[\,0\,;y\,]$ donc $F(x) \leq F(y)$: F est croissante. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Tout d'abord, $f(x) \leq \max_{[\,0\,;x\,]} f(t) = F(x)$. Prouvons enfin que f est continue en x. Il y a deux cas de figure : soit le maximum sur $[\,0\,;x\,]$ est atteint en x, et alors $f(x) = \max_{t\in[\,0\,;x\,]} = F(x)$, soit il ne l'est pas et alors $f(x) < \max_{t\in[\,0\,;x\,]} = F(x)$. Soit $\varepsilon > 0$.
   - Dans le second cas, $f(x) < F(x)$ donc, sur un voisinage de x, $f(y) < F(x)$ donc F est constante donc continue.
   - Plaçons nous dans le premier cas : $f(x) = F(x)$. f étant continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $|x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. En particulier, pour tout $y \in [\,x-\eta\,;x+\eta\,]$, $f(y) \leq f(x) + \varepsilon = F(x) + \varepsilon$. En d'autres termes, $F(x)+\varepsilon$ majore f sur $[\,x-\eta\,;x+\eta\,]$ si bien que $F(y) \leq F(x)+\varepsilon$ sur $[\,x-\eta\,;x+\eta\,]$. On en déduit de même que $F(y) \geq F(x) - \varepsilon$ sur cet intervalle. En d'autres termes, $|F(y) - F(x)| \leq \varepsilon$ sur $[\,x-\eta\,;x+\eta\,]$: F est continue en x donc sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe $t \in [\,0\,;x\,]$ tel que $F(x) = f(t)$ (encore une fois, les bornes sont atteintes). Il suffit de voir que $f(t) \leq g(t) \leq g(x)$ car g est croissante.

7 Utilisation de la borne supérieure

Exercice 67 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. On suppose que :
$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [\,x\,;x+\varepsilon\,], f(x) \leq f(y)$$
Montrer que f est croissante.
2. Même question si on suppose cette fois que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall y \in [\,x\,;x+\varepsilon\,], f(x) \leq f(y)$$

Correction :

1. Soient $x \leq y$ deux réels. L'idée est simple : on va faire des pas de ε pour aller de x jusqu'à y. Par une récurrence, prouvons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [\,x\,;x+n\varepsilon\,]$, $f(x) \leq f(t)$. Il n'y a rien à prouver pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que le résultat soit vrai au rang n. Soit $t \in [\,x\,;x+(n+1)\varepsilon\,]$. Si $t \leq x+n\varepsilon$, par HR, $f(x) \leq f(t)$. Sinon, soit $z = t - \varepsilon$. Alors $z \leq x + n\varepsilon$ donc, par HR, $f(x) \leq f(z)$. Or, $t \in [\,z\,;z+\varepsilon\,]$ donc $f(z) \leq f(t)$ si bien que $f(x) \leq f(t)$, ce qui clôt la récurrence. Finalement, puisque $x + n\varepsilon \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe n tel que $y \in [\,x\,;x+n\varepsilon\,]$ si bien que $f(x) \leq f(y)$: f est croissante.
2. Soient $x \leq y$. La différence avec la question précédente est que le ε dépend de x : on ne peut pas refaire comme avant, faire des pas de ε jusqu'à dépasser y car le ε peut devenir de plus en plus petit et rien ne dit qu'on va finir par dépasser y. Introduisons l'ensemble
$$A = \{t \in [\,x\,;y\,] \mid f(x) \leq f(t)\}$$
$x \in A$ donc A est non vide. De plus, A est par définition majoré par y donc A admet une borne supérieure α. Prouvons que $\alpha \in A$ donc que c'est en fait un maximum. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers α. Or, pour tout n, $x_n \in A$ donc $f(x_n) \geq f(x)$. De plus, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$ et f est continue donc $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\alpha)$. Enfin, l'inégalité large passe à la limite donc $f(\alpha) \geq f(x)$ donc $\alpha \in A$. Supposons que $\alpha \neq y$ donc $\alpha < y$ puisque $\alpha \leq y$. Par hypothèse sur f, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [\,\alpha\,;\alpha+\varepsilon\,]$, $f(t) \geq f(\alpha) \geq f(x)$: il existe donc t tel que $\alpha < t < y$ tel que $f(t) \geq f(x)$ ce qui est absurde par définition de α, si bien que $\alpha = y$ donc $f(y) \geq f(x)$: f est croissante.

Exercice 68 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Correction : Un dessin rapide (même avec une fonction non continue) permet de s'en convaincre. La méthode habituelle (i.e. poser $g : x \mapsto f(x) - x$) ne marche pas ici puisque f n'est pas continue. Utilisons une borne supérieure comme le titre de la section le laisse présager. Introduisons
$$A = \{x \in [\,0\,;1\,] \mid f(x) \geq x\}$$

Alors A est non vide (car contient 0 puisque $f(0) \geq 0$) et majoré (par 1 puisque tous ses éléments appartiennent à $[\,0\,;1\,]$ par définition) donc admet une borne supérieure α. Prouvons que α est un point fixe de f.

Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, α est limite d'une suite (x_n) d'éléments de A. Or, pour tout n, $x_n \in A$ donc $f(x_n) \geq x_n$. Attention, f n'est pas continue donc $(f(x_n))$ ne converge pas forcément vers α. Deux cas de figure se présentent : soit il existe n_0 tel que $x_{n_0} = \alpha$, soit $x_n < \alpha$ pour tout n (puisque $x_n \leq \alpha$ pour tout n car $\alpha = \sup(A)$). Dans le premier cas, l'inégalité $f(x_{n_0}) \geq x_{n_0}$ se traduit par $f(\alpha) \geq \alpha$, et dans le deuxième cas, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha^-$ si bien que

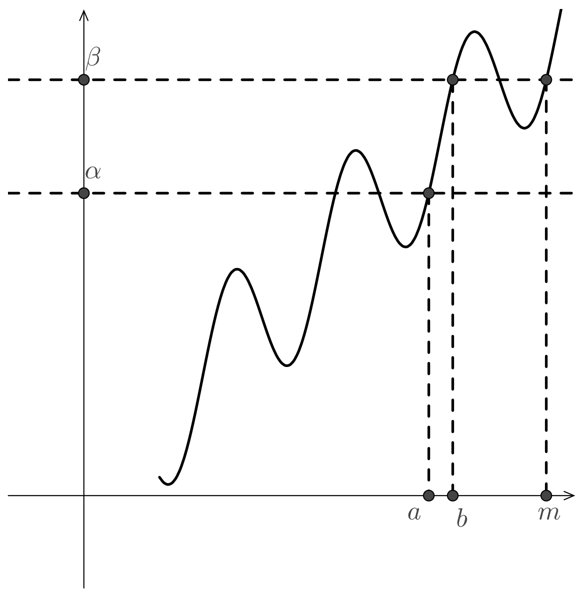
$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_g(\alpha)$$

la limite à gauche de f en α (qui existe car f est croissante donc admet une limite à droite et une limite à gauche finies en tout point intérieur, et α est un point intérieur car on a supposé que les x_n étaient tous strictement inférieurs à α). L'inégalité large passe à la limite donc $f_g(\alpha) \geq \alpha$, et f est croissante donc $f(\alpha) \geq f_g(\alpha)$. Dans tous les cas, on a $f(\alpha) \geq \alpha$.

Prouvons l'autre inégalité. Si $\alpha = 1$, alors on vient de prouver que $f(1) \geq 1$ donc $f(1) = 1$ puisque f est à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$ donc 1 est un point fixe. Sinon, alors α est un point intérieur donc f admet une limite à droite $f_d(\alpha)$ en α. Notons, pour n assez grand (pour que $y_n \leq 1$), $y_n = \alpha + 1/n$, si bien que $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha^+$ et que $y_n > \alpha$ pour tout n. On en déduit que, pour tout n, $y_n \notin A$ donc $f(y_n) < y_n$. Là aussi, l'inégalité large passe à la limite donc $f_d(\alpha) \leq \alpha$ (car $f(y_n)$ tend vers $f_d(\alpha)$ quand $n \to +\infty$) et puisque f est croissante, $f(\alpha) \leq f_d(\alpha) \leq \alpha$ donc $f(\alpha) \leq \alpha$: on en déduit finalement que $f(\alpha) = \alpha$, α est un point fixe de f, et donc f admet un point fixe.

Exercice 69 : ✪✪✪ Soit I un intervalle d'intérieur non vide, soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit J un segment inclus dans $f(I)$. Montrer qu'il existe un segment K inclus dans I tel que $f(K) = J$.

Correction : Erreur d'énoncé : il fallait supposer J inclus dans $f(I)$ (ou f surjective). Faisons un dessin.



Notons $J = [\,\alpha\,;\beta\,]$. Puisque $\beta \in f(I)$, il existe m tel que $f(m) = \beta$. Si $\alpha = \beta$ alors $J = \{\beta\}$ donc $K = \{m\} = [\,m\,;m\,]$ convient. Supposons donc $\alpha < \beta$. α est aussi atteint, disons par un réel ℓ, mais le problème est qu'entre ℓ et m, la fonction n'a aucune raison de rester entre α et β (par exemple, sur le dessin, entre a et m, la fonction sort de $J = [\,\alpha\,;\beta\,]$). Supposons sans perte de généralité que $\ell \leq m$. Introduisons l'ensemble

$$A = \{x \leq m \,|\, f(x) = \alpha\}$$

A est non vide car contient ℓ et est majoré par m par définition donc admet une borne supérieure notée a. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite d'éléments de A, notée (a_n), qui converge vers a. Or, pour tout n, $a_n \in A$ donc $f(a_n) = \alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$ et $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et f continue donc $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$. Par unicité de la limite, $f(a) = \alpha$ donc $a \in A$: c'est en fait un maximum, et par définition, α n'a aucun antécédent entre a et m (ce sera utile dans la suite). Introduisons à présent l'ensemble

$$B = \{x \in [\,a\,;m\,] \mid f(x) = \beta\}$$

B est non vide car contient m et est minoré par a donc admet une borne inférieure b. De même que ci-dessus, b est en fait un minimum et vérifie $f(b) = m$. Montrons que $K = [\,a\,;b\,]$ convient i.e. que $f(K) = J$ c'est-à-dire, avec nos notations, que $f([\,a\,;b\,]) = [\,\alpha\,;\beta\,]$. Attention, f n'a aucune raison d'être monotone ! Tout d'abord, pour tout $y \in J$, $f(a) \leq y \leq f(b)$ et f est continue donc, d'après le TVI, il existe $x \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(x) = y$. En d'autres termes, $J \subset f(K)$. Prouvons que

$f(K) \subset J$. Si ce n'est pas le cas, il existe $x \in K$ tel que $f(x) \notin J$ donc $f(x) < \alpha$ ou $f(x) > \beta$. Supposons sans perte de généralité que $f(x) < \alpha$. f est continue sur $[x\,;b]$ avec $f(x) < \alpha < \beta = f(b)$: d'après le TVI, il existe $c \in]x\,;b[$ tel que $f(c) = \alpha$. Or, $a < x < c < b \leq m$ donc il existe un élément $c > a$, $c \leq m$ tel que $f(c) = \alpha$ ce qui est absurde par définition de a, ce qui permet de conclure.

8 Fonctions uniformément continues et lipschitziennes

Exercice 70 : ✪ Soient f et g deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle I.

1. Montrer que $f+g$ est lipschitzienne.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λf est lipschitzienne.
3. Montrer que si f et g sont bornées alors $f \times g$ est lipschitzienne. Contre-exemple sans l'hypothèse de bornitude ?

Correction : On suppose dans tout l'exercice que f est k_1-lipschitzienne et g k_2-lipschitzienne.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|(f+g)(x)-(f+g)(y)| = |f(x)-f(y)+g(x)-g(y)| \leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \leq k_1|x-y|+k_2|x-y| = (k_1+k_2)|x-y|$$

   c'est-à-dire que $f+g$ est (k_1+k_2)-lipschitzienne.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| \times |f(x) - f(y)| \leq |\lambda| \times k_1 \times |x-y|$$

   c'est-à-dire que λf est $(|\lambda| \times k_1)$-lipschitzienne.
3. Supposons que f soit bornée par M_1 et g par M_2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
|(f\times g)(x) - (f\times g)(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\
&= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\
&= |f(x)\times(g(x)-g(y)) + (f(x)-f(y))\times g(y)| \\
&\leq |f(x)|\times|g(x)-g(y)| + |f(x)-f(y)|\times|g(y)| \\
&\leq M_1 \times k_2|x-y| + k_1|x-y|\times M_2 \\
&\leq (M_1k_2 + M_2k_1)\times|x-y|
\end{aligned}$$

   c'est-à-dire que $f\times g$ est $(M_1k_2+M_2k_1)$-lipschitzienne. C'est faux sans l'hypothèse de bornitude : la fonction $x \mapsto x$ est lipschitzienne, mais la fonction carré ne l'est pas, un produit de fonctions lipschitziennes n'est pas forcément lipschitzienne.

Exercice 71 : ✪ Soit f une fonction lipschitzienne définie sur un intervalle I. On note

$$E = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}\}$$

1. Montrer que E admet une borne inférieure qu'on notera $\mathrm{Lip}(f)$.
2. Montrer que cette borne inférieure est un minimum, autrement dit que f est $\mathrm{Lip}(f)$-lipschitzienne.
3. Montrer que $E = [\mathrm{Lip}(f)\,;+\infty[$.
4. Donner une CNS pour que $\mathrm{Lip}(f) = 0$.

Correction :

1. f étant lipschitzienne, elle est k-lipschitzienne pour au moins un réel positif k donc E est non vide. Puisque E est minoré par 0 (c'est une partie de $\mathbb{R}_+$), il admet une borne inférieure.
2. Par caractérisation de la borne inférieure, il existe une suite (k_n) d'éléments de E qui converge vers $\mathrm{Lip}(f)$. Soit $(x,y) \in I^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_n \in E$ donc f est k_n-lipschitzienne si bien que

$$|f(x) - f(y)| \leq k_n|x-y|$$

   Or, $k_n|x-y| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Lip}(f)\times|x-y|$ et l'inégalité large passe à la limite donc $|f(x)-f(y)| \leq \mathrm{Lip}(f)\times|x-y|$, ce qui est le résultat voulu.

3. Soit $k \geq \text{Lip}(f)$. Soit $(x,y) \in I^2$. D'après ce qui précède, et puisque $k \geq \text{Lip}(f)$:
$$|f(x) - f(y)| \leq \text{Lip}(f) \times |x-y| \leq k|x-y|$$
c'est-à-dire que f est k-lipschitzienne donc $k \in E$. En d'autres termes, $[\,\text{Lip}(f)\,;+\infty\,[\, \subset E$. L'inclusion réciproque est immédiate puisque $\text{Lip}(f) = \inf(E)$ donc tout élément de E est supérieur ou égal à $\text{Lip}(f)$.
4. Montrons que $\text{Lip}(f) = 0$ si et seulement si f est constante. Si f n'est pas constante, il existe x et y tels que $f(x) \neq f(y)$ et donc
$$0 < |f(x) - f(y)| \leq \text{Lip}(f) \times |x-y| \leq k|x-y|$$
On en déduit que $\text{Lip}(f) \neq 0$. Réciproquement, supposons f constante. Alors, pour tous x et y, $|f(x) - g(y)| = 0 \leq 0 \times |x-y|$ c'est-à-dire que $0 \in E$. Or, $\text{Lip}(f) = \inf(E)$ donc $\text{Lip}(f) \leq 0$, et $\text{Lip}(f) \in E$ donc $\text{Lip}(f) \geq 0$, d'où l'égalité, d'où l'équivalence.

Exercice 72 : ✪ Soient f et g deux fonctions uniformément continues sur un intervalle I.

1. Étudier l'uniforme continuité sur I de $f+g$, de $f \times g$ et de $1/f$ lorsque f ne s'annule pas.
2. On suppose que $f(I) \subset I$. La fonction $g \circ f$ est-elle uniformément continue sur I ?
3. On suppose que f est strictement monotone sur I. La fonction f^{-1} est-elle uniformément continue sur $J = f(I)$?

Correction :

1. En prenant $f = g = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, uniformément continues (car lipschitziennes), $f \times g$ est la fonction carré donc n'est pas UC (cf. cours) : un produit de fonctions UC ne l'est pas forcément. De même, si $f = \text{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$, alors $1/f$ est la fonction inverse donc n'est pas UC. Prouvons cependant que, dans le cas général, $f+g$ est UC. Soit $\varepsilon > 0$. f et g étant UC :
$$\exists \eta_1 > 0, \forall (x,y) \in I^2, |x-y| \leq \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \exists \eta_2 > 0, \forall (x,y) \in I^2, |x-y| \leq \eta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$$
Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, et soit $(x,y) \in I^2$ tel que $|x-y| \leq \eta$. Une rapide inégalité triangulaire prouve que
$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq 2\varepsilon$$
si bien que $f+g$ est UC (si on veut absolument un ε à la fin, il suffit de partir de $\varepsilon/2$ au départ, mais on sait que si on arrive à 2ε, le résultat est encore valide).
2. Soit $\varepsilon > 0$. g étant uniformément continue sur I, il existe η_1 tel que, pour tous a et b dans I tels que $|a-b| \leq \eta_1$, on a $|g(a) - g(b)| \leq \varepsilon$. Or, f est uniformément continue donc :
$$\forall \varepsilon > 0, \dots$$
C'est en particulier vrai pour η_1 à la place de ε (penser à « truc ») : il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous x et y appartenant à I tels que $|x-y| \leq \eta$, $|f(x) - f(y)| \leq \eta_1$ et donc
$$|g(f(x)) - g(f(y))| \leq \varepsilon$$
ce qui est le résultat voulu : $g \circ f$ est uniformément continue.
3. Non : la racine carrée est UC sur $\mathbb{R}_+$ mais sa réciproque, la fonction carré (ou plutôt sa restriction à $\mathbb{R}_+$) ne l'est pas sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 73 : ✪ Soient f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est uniformément continue et bornée et si g est continue alors $g \circ f$ est uniformément continue.

Correction : Notons $m = \inf(f)$ et $M = \sup(f)$ qui existent car f est bornée. En d'autres termes, f est à valeurs dans $[\,m\,;M\,]$ (ce qui ne veut pas dire que $f(\mathbb{R}) = [\,m\,;M\,]$, m et M n'ont aucune raison d'être atteints). D'après le théorème de Heine, g est continue sur le segment $[\,m\,;M\,]$ donc g est uniformément continue sur ce segment.

Soit $\varepsilon > 0$. g étant uniformément continue sur $[\,m\,;M\,]$, il existe η_1 tel que, pour tous a et b dans $[\,m\,;M\,]$ tels que $|a-b| \leq \eta_1$, on a $|g(a) - g(b)| \leq \varepsilon$. Or, f est uniformément continue donc :
$$\forall \varepsilon > 0, \dots$$

C'est en particulier vrai pour η_1 à la place de ε (penser à « truc ») : il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous x et y tels que $|x-y| \leq \eta$, $|f(x)-f(y)| \leq \eta_1$ et donc

$$|g(f(x)) - g(f(y))| \leq \varepsilon$$

ce qui est le résultat voulu : $g \circ f$ est uniformément continue.

Exercice 74 : ✪✪ Soit f continue sur un segment (d'intérieur non vide) $[\,a\,;b\,]$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [\,a\,;b\,]^2, |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon + \alpha(x-y)^2$$

Correction : f est continue sur le segment $[\,a\,;b\,]$ donc, d'après le théorème de Heine, f est UC. Soit $\varepsilon > 0$. f étant uniformément continue :

$$\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in [\,a\,;b\,]^2, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit donc $(x,y) \in [\,a\,;b\,]^2$. Si $|x-y| \leq \eta$

$$|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

donc on a l'inégalité voulue pour tout α : il suffit donc de trouver α qui convient lorsque $|x-y| > \eta$, il conviendra automatiquement lorsque $|x-y| \leq \eta$. Supposons donc $|x-y| \geq \eta$. alors $(x-y)^2 > \eta^2$ (fonction carré strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$) donc

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{(x-y)^2} \leq \frac{|f(x)-f(y)|}{\eta^2}$$

De plus, f est continue sur un segment donc est bornée et atteint ses bornes : notons $M = \sup|f|$ (c'est même un maximum) si bien que, par inégalité triangulaire,

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{(x-y)^2} \leq \frac{2M}{\eta^2}$$

Posons

$$\alpha = \frac{2M}{\eta^2}$$

Par conséquent,

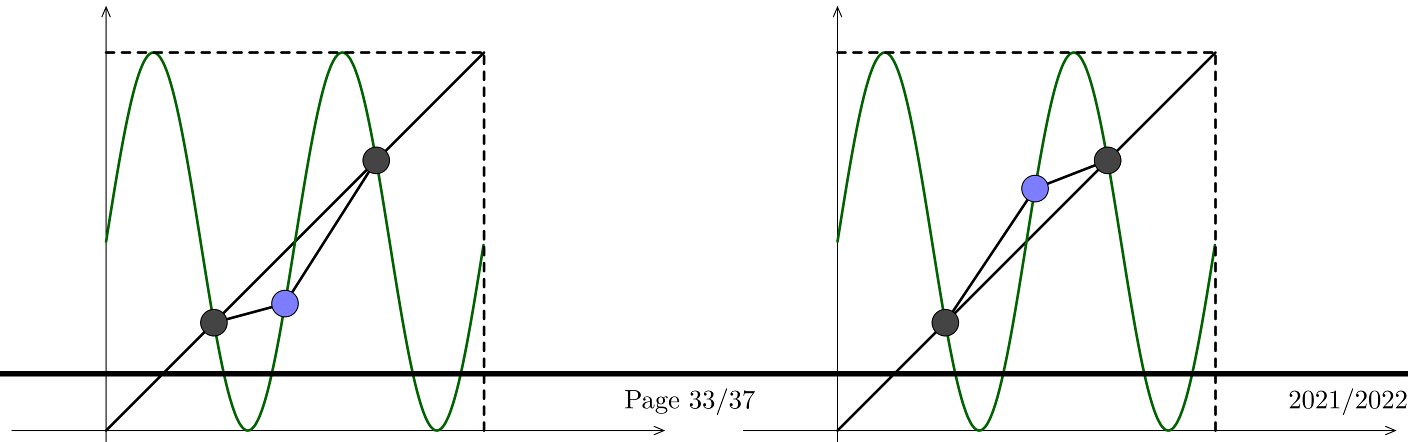
$$|f(x)-f(y)| \leq \alpha(x-y)^2 \leq \varepsilon + \alpha(x-y)^2$$

lorsque $|x-y| > \eta$, et on a déjà vu que cette valeur de α convenait aussi lorsque $|x-y| \leq \eta$. En fait, l'idée de la démonstration est de prouver que lorsque $|x-y| \leq \eta$, $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$, et sinon, $|f(x)-f(y)| \leq \alpha(x-y)^2$ donc, dans tous les cas, $|f(x)-f(y)|$ est inférieur à la somme des deux.

Exercice 75 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ une fonction 1-lipschitzienne. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment (non vide).

Correction : Puisque f est continue, alors f admet un point fixe (cf. cours) donc l'ensemble des points fixes de f (qu'on note S dans la suite) est non vide. Il suffit de prouver que c'est un intervalle, on prouvera ensuite de même que dans l'exercice 55 que c'est un segment.

Soient donc $x \leq y$ appartenant à S (donc deux points fixes de f), prouvons que $[\,x\,;y\,] \subset S$. Soit donc $z \in S$. L'idée est très simple : si z n'est pas un point fixe, alors il existe une pente strictement supérieure à 1 ce qui est absurde car f est 1-lipschitzienne.



Supposons donc que $f(z) \neq z$. Alors z n'est pas un point fixe donc $z \neq x$ car x est un point fixe, et de même, $z \neq y$. Supposons que $f(z) > z$, et montrons que la pente entre x et z est strictement supérieure à 1. Alors $f(z) > x = f(x)$ donc

$$\frac{|f(z)-f(x)|}{z-x} = \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{f(z)-x}{z-x} > \frac{z-x}{z-x}$$

ce qui est absurde puisque f est 1-lipschitzienne. De même, si $f(z) < z$, alors la pente entre z et y est strictement supérieure à 1 ce qui est aussi absurde. On en déduit que z est un point fixe, donc $z \in S$ donc S est un intervalle, et on prouve de même que dans l'exercice 55 que S est un segment.

Exercice 76 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Étudier si les conditions suivantes sont suffisantes pour dire que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$:

1. Pour toute suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
3. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $(f(\sqrt{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
4. f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
5. ✪✪✪ f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $(f(\sqrt{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Correction :

1. Oui : c'est la caractérisation séquentielle de la limite (la croissance de la suite n'est même pas nécessaire).
2. Non : prendre $f : x \mapsto \sin(\pi x)$. On a alors, pour tout n, $f(n) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais f n'a pas de limite en 0 : il suffit aussi d'évaluer f en $u_n = 2n + 1/2$, cela donne une suite qui tend vers $+\infty$ mais $f(u_n) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On a deux suites qui tendent vers $+\infty$ mais leurs images ont des limites différentes, ce qui permet de conclure.
3. Non : prendre $f : x \mapsto \sin(\pi x^2)$.
4. Non : prendre $f : x \mapsto \sin(\pi x)$ qui est π-lipschitzienne. Rappelons qu'une fonction **dérivable** » est k-lipschitzienne si sa dérivée est bornée par k.
5. Oui. L'idée est que si f ne tend pas vers 0, elle devra monter et descendre régulièrement, mais puisque $f(\sqrt{n})$ tend vers 0, les images en les racines carrées tendent vers 0 donc f devra remonter entre deux racines carrées, mais puisque les racines carrées sont très proches les unes des autres (l'écart tend vers 0), la seule solution pour que f remonte est que f ait une pente de plus en plus raide, ce qui n'est pas possible avec f lipschitzienne.

   Montrons cela rigoureusement. Supposons donc que f soit k-lipschitzienne avec $k > 0$ et que $f(\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Supposons que f ne tende pas vers 0 en $+\infty$:

   $$\exists \varepsilon > 0, \forall A \geq 0, \exists x \geq A, |f(x)| > \varepsilon$$

   Prenons donc cette valeur de ε dans la suite. Puisque $f(\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$:

   $$\exists n_0, \forall n \geq n_0, |f(\sqrt{n})| \leq \varepsilon/2$$

   Soit $n \geq n_0$. En prenant $A = n$: il existe $x \geq n$ tel que $|f(x)| > \varepsilon$. On cherche N tel que $\sqrt{N} \leq x < \sqrt{N+1}$: on prend donc $N = \lfloor x^2 \rfloor \geq \lfloor n^2 \rfloor = n^2 \geq n_0$ si bien que $|f(\sqrt{N})| \leq \varepsilon/2$. On en déduit (inégalité triangulaire et f est k-lipschtzienne) que :

   $$\varepsilon/2 \leq |f(x) - f(\sqrt{N})| \leq k|x - \sqrt{N}| \leq k|\sqrt{N+1} - \sqrt{N}|$$

   On en déduit que

   $$k \geq \frac{\varepsilon}{2(\sqrt{N+1} - \sqrt{N})}$$

   Or, $N \geq n$ donc

   $$\frac{1}{\sqrt{N+1}-\sqrt{N}} = \sqrt{N+1} + \sqrt{N} \geq \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

   On a donc montré le résultat suivant :

   $$\forall n \geq n_0, k \geq \frac{\varepsilon}{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$

   ce qui est absurde puisque k est fixe et la quantité de droite tend vers $+\infty$.

Exercice 77 - Les fonctions UC sont sous-affines : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq ax + b$.

Correction : f étant UC, pour $\varepsilon = 1$:

$$\exists \eta > 0, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$$

En clair : quand on fait des déplacements horizontaux de η, on fait des déplacements horizontaux de au plus 1. Dès lors, sur $[\,0\,;1\,]$, on est au plus en $|f(0)| + 1$, et sur $[\,0\,;2\,]$, au plus en $|f(0)| + 2$ et ainsi de suite : on progresse de 1 à chaque fois, ce qui « donne bien une fonction affine ». Prouvons cela rigoureusement.

Prouvons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(n\eta)| \leq n + |f(0)|$. Le résultat est immédiat si $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai au rang n.

$$|(n+1)\eta - n\eta| = \eta$$

donc $|f((n+1)\eta) - |f(n\eta)| \leq 1$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$|f((n+1)\eta)| - |f(n\eta)| \leq |f((n+1)\eta) - |f(n\eta)| \leq 1$$

si bien que $|f((n+1)\eta)| \leq |f(n\eta)| + 1$ donc, par hypothèse de récurrence, $|f((n+1)\eta)| \leq n + |f(0)| + 1 = (n+1) + |f(0)|$ ce qui clôt la récurrence. Soit à présent $x \in \mathbb{R}_+$. Le truc est d'encadre x par deux multiples de η. Plus précisément, on cherche n tel que $n\eta \leq x < (n+1)\eta$ i.e. tel que $n \leq x/\eta < n+1$, donc on prend $n = \lfloor x/\eta \rfloor$. Tout d'abord, $|x - n\eta| \leq \eta$ donc $|f(x) - |f(n\eta)| \leq 1$. Toujours en appliquant l'inégalité triangulaire,

$$|f(x)| - |f(n\eta)| \leq |f(x) - f(n\eta)| \leq 1$$

si bien que $|f(x)| \leq |f(n\eta)| + 1 \leq n + |f(0)| + 1$ d'après ce qui précède. Or, $n \leq x/\eta$ donc on trouve finalement :

$$\forall x \geq 0, |f(x)| \leq \frac{x}{\eta} + |f(0)| + 1$$

ce qui est le résultat voulu. Cela prouve d'une autre façon que la fonction carré et la fonction exponentielle ne sont pas UC ! Cependant, la réciproque est fausse, par exemple $f : x \mapsto \sin(x^2)$ est dominée par une fonction affine mais n'est pas UC.

Exercice 78 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie L_1 en $+\infty$ et une limite finie L_2 en $-\infty$. Montrer que f est bornée et uniformément continue. Une fonction bornée et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-elle forcément uniformément continue ?

Correction : On montre que f est bornée de même que dans l'exercice 21 : pour x assez grand (disons plus grand qu'un réel A), $L_1 - 1 \leq f(x) \leq L_1 + 1$, et pour x assez petit, disons inférieur à un réel C, $L_2 - 1 \leq f(x) \leq L_2 + 1$, et entre les deux, sur $[\,C\,;A\,]$, on applique le théorème des bornes atteintes, je vous laisse le rédiger. Montrons que f est UC. L'idée est assez simple : pour x assez grand, on est proche de L_1 donc on ne peut pas faire des bonds de plus de ε de hauteur, et idem pour x assez petit, et entre les deux, on est sur un segment donc on peut appliquer le théorème de Heine. Prouvons cela rigoureusement.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $B_1 \geq 0 \geq B_2$ tels que :

$$\forall x \geq B_1, |x - L_1| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall x \leq B_2, |f(x) - L_2| \leq \varepsilon$$

Or, f est continue sur le segment $[\,B_2\,;B_1\,]$ donc, d'après le théorème de Heine, f est UC sur $[\,B_2\,;B_1\,]$: il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous x et y dans $[\,B_2\,;B_2\,]$, si $|x - y| \leq \eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Soient donc x et y deux réels quelconques tels que $|x - y| \leq \varepsilon$. On a cinq cas de figure :

- Si x et y appartiennent à $[\,B_2\,;B_1\,]$ alors on a $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ d'après ce qui précède.
- Si $x \leq B_1 \leq y$ alors

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(B_1) + f(B_1) - f(y)| \leq |f(x) - f(B_1)| + |f(B_1) - f(y)|$$

  Or, x et B_1 appartiennent à $[\,B_2\,;B_1\,]$ et $|x - B_1| \leq \eta$ donc $|f(x) - f(B_1)| \leq \varepsilon$. De plus, $f(B_1)$ et $f(y)$ appartiennent à $[\,L_1 - \varepsilon\,;L_1 + \varepsilon\,]$ donc $|f(B_1) - f(y)| \leq 2\varepsilon$ si bien que $|f(x) - f(y)| \leq 3\varepsilon$.
- Idem si $x \leq B_2 \leq y$.
- Enfin, si x et y appartiennent à $[\,B_1\,;+\infty\,[$ ou $]\,-\infty\,;B_2\,]$, on montre comme ci-dessus que $|f(x) - f(y)| \leq 2\varepsilon$.

Par conséquent, dans tous les cas, $|f(x) - f(y)| \leq 3\varepsilon$: f est bien uniformément continue. Cependant, une fonction continue bornée n'est pas forcément UC : cf. cours, $x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas UC.

Exercice 79 : ✪✪ Soit $f :]\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Correction : Notons u_n la quantité de l'énoncé. Soit $\varepsilon > 0$. f étant uniformément continue :

$$\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \,]\,0\,;1\,]^2\,, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Puisque $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $1/n \leq \varepsilon$. Soit donc $n \geq n_0$. L'idée est que k/n et $(k+1)/n$ sont distants de moins de η et l'un est multiplié par 1 et l'autre par -1 donc on a une quantité de la forme $f(x)-f(y)$ avec $|x-y| \leq \eta$ donc cette quantité sera comprise entre $-\varepsilon$ et ε, ce qui, en sommant, donne un terme inférieur à $n\varepsilon$, on divise par n, ce qui donne le résultat voulu.

Prouvons cela rigoureusement. On va regrouper les termes deux par deux. Séparons donc les cas selon la parité de n. Si n est pair, il existe p tel que $n = 2p$ si bien que

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{2k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{n}\right)$$

Or, $1/n \leq \eta$ si bien que chaque terme de la somme est compris entre $-\varepsilon$ et ε. Par somme,

$$\frac{-p\varepsilon}{n} = \frac{-\varepsilon}{2} \leq u_n \leq \frac{p\varepsilon}{n} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Supposons n impair : il existe donc p tel que $n = 2p+1$. Dès lors :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\left(f\left(\frac{2k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{n}\right)\right) - \frac{f(1)}{n}$$

Le dernier terme vient du fait que n est impair. De même,

$$\frac{-p\varepsilon}{n} - \frac{f(1)}{n} = \frac{-(n-1)\varepsilon}{2n} - \frac{f(1)}{n} \leq u_n \frac{p\varepsilon}{n} - \frac{f(1)}{n} = \frac{(n-1)\varepsilon}{2n} - \frac{f(1)}{n}$$

Or, $f(1)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: il existe n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, $|f(1)/n| \leq \varepsilon/2$.Pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$,

$$|u_n| \leq \frac{(n-1)\varepsilon}{2n} + \frac{|f(1)|}{n} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

Dans tous les cas, que n soit pair ou impair, lorsque $n \geq \max(n_0, n_1)$, $|u_n| \leq \varepsilon$, ce qui est le résultat voulu.

Exercice 80 : ✪✪ Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : A \to \mathbb{R}$. On suppose que f n'est pas bornée. Montrer que f n'est pas uniformément continue.

Correction : Notons $\alpha = \inf(A)$ et $\beta = \sup(A)$, qui existent car A est bornée non vide. Supposons f uniformément continue. Alors, avec $\varepsilon = 1$:

$$\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in A^2, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq 1$$

Soit N tel que $\alpha + (N-1)\eta \leq \beta < A + N\eta$ (on fait des sauts horizontaux de longueur η jusqu'à dépasser β). Soit $x_0 \in A$. Pour tout $k \in [\![\,0\,;\,N\,]\!]$, on montre par récurrence comme dans l'exercice 77 que pour tout $x \in A$ tel que $|x - x_0| \leq k\eta$, alors $|f(x)| \leq |f(x_0)| + k$. Or, pour tout $x \in A$, $|x - x_0| \leq |\beta - \alpha| = N\eta$ si bien que $|f(x)| \leq N + |f(x_0)|$ donc f est bornée, d'où le résultat par contraposée.

Exercice 81 : ✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
2. ✪✪✪ Même question en remplaçant « lipschitzienne » par « uniformément continue ».
3. Donner un contre-exemple si on suppose simplement la continuité.

Correction :

1. Soit $k \geq 0$ tel que f soit k-lipschitzienne. Soit $A \geq 0$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $f(n) \geq A$. Soit $x \geq n_0$ et soit $n = \lfloor x \rfloor \geq n_0$. Alors $f(n) \geq A$ et $|f(x) - f(n)| \leq k|x-n| \leq k$. Or,

$$f(n) - f(x) \leq |f(n) - f(x)| \leq k$$

si bien que $f(x) \geq f(n) - k \geq A - k$: on en déduit bien que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

2. Soit $A \geq 0$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $f(n) \geq A$. De plus, f est UC donc :

$$\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq 1$$

L'idée est qu'entre n et $n+1$, on ne peut faire un nombre fini et fixe de pas de longueur η ce qui ne peut pas trop faire descendre f. Plus précisément, soit $k = \lfloor 1/\eta \rfloor + 1$ si bien que $k-1 \leq 1/\eta < k$ donc $1 < k\eta$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On prouve de même que dans l'exercice 77 que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $y \in [\,x\,;x+n\eta\,]$, $|f(y)-f(x)| \leq n$. Soit donc $x \geq n_0$ et soit $n = \lfloor x \rfloor \geq n_0$. Alors $f(n) \geq A$ et $|x-n| \leq 1 \leq k\eta$ si bien que $|f(x)-f(n)| \leq k$ donc $f(x) \geq f(n) - k \geq A - k$, ce qui permet de conclure (k est un entier fixe).

3. Il suffit de poser $f : x \mapsto x \times \sin\left(2\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ mais f ne tend par vers $+\infty$ en $+\infty$ car, par exemple, pour tout n,

$$f\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)\sin(n\pi) = 0$$

f fait des pics de plus en plus raides : ses valeurs entières tendent vers $+\infty$ mais entre chaque entier, elle repasse par 0.

Exercice 82 - Recollement : ✪✪ Soient $a < c$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \,]\,a\,;c\,[$ (b est donc un réel). Soit $f : \,]\,a\,;c\,[\to \mathbb{R}$. On suppose que f est uniformément continue sur $]\,a\,;b\,]$ et sur $[\,b\,;c\,[$. Montrer que f est uniformément continue sur $]\,a\,;c\,[$.

Correction : Soit $\varepsilon > 0$. f étant UC sur $]\,a\,;b\,]$ et sur $[\,b\,;c\,[$:

$$\exists \eta_1 > 0, \forall (x,y) \in \,]\,a\,;b\,]^2, |x-y| | | e\eta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \exists \eta_2 > 0, \forall (x,y) \in [\,b\,;c\,[^2, |x-y| | | e\eta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Posons $m = \min(\eta_1, \eta_2)$. Prendre $|x-y| \leq m$ ne suffirait pas à obtenir $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$, il y aurait un problème dans le cas où $x \leq b \leq y$ (essayez !). Il faut « un sas de sécurité » autour de b. Sur le segment $[\,b-m\,;b+m\,]$, f est continue (en effet, f est UC donc continue sur $]\,a\,;b\,]$ et $[\,b\,;c\,[$ donc continue en tout point donc continue sur $]\,a\,;c\,[$, la continuité classique passe à l'union par définition) donc est uniformément continue d'après le théorème de Heine :

$$\exists \eta_3 > 0, \forall (x,y) \in [\,b-m\,;b+m\,]^2, |x-y| | | e\eta_3 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit à présent $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \min(m, \eta_3) > 0$ et soit $(x,y) \in \,]\,a\,;c\,[^2$ avec $|x-y| \leq \eta$. Si x et y sont inférieurs à b, alors $|x-y| \leq \eta_1$ donc $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. De même si x et y sont supérieurs à b. Dans le cas où $x \leq b \leq y$ (idem si $y \leq b \leq x$), puisque $|x-y| \leq \eta \leq m$, on a $b - m \leq x \leq b \leq y \leq b + m$ et $|x-y| \leq \eta \leq \eta_3$ donc on a encore $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Dans tous les cas, on a $|f(x)-f(y)| | | e\varepsilon$: f est UC sur $[\,a\,;c\,]$.

Exercice 83 - Lemme de Croft pour les fonctions UC : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. On suppose que, pour tout $x > 0$, la suite $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Remarque : On peut montrer que ce résultat est toujours vrai si f est simplement continue, mais cela fait appel à un résultat hors programme appelé théorème de Baire. Cependant, si f n'est pas continue, ce résultat n'est plus valable : cf. exercice 10.

Correction : Soit $\varepsilon > 0$. f étant uniformément continue,

$$\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

L'idée est simple : on prend $x = \eta$, tous ses multiples (donc l'écart entre deux multiples égal à η) finiront par être plus petits que ε puisque $f(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et les autres réels seront à distance inférieure de η donc, par uniforme continuité, seront distants d'un $f(nx)$ de moins de ε donc seront inférieurs à 2ε.

Montrons cela rigoureusement. En prenant $x = \eta$ dans l'hypothèse faite sur f, $f(n\eta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f(n\eta)| \leq \varepsilon$$

Soit $x \geq A = n_0\eta$ et soit $n = \lfloor x/\eta \rfloor$ si bien que $n\eta \leq x < (n+1)\eta$. On en déduit que $n \geq n_0$ donc $|f(n\eta)| \leq \varepsilon$ et $|x - n\eta| \leq \eta$ donc $|f(x) - f(n\eta)| \leq \varepsilon$ donc, toujours avec l'inégalité triangulaire,

$$|f(x)| - |f(n\eta)| \leq |f(x) - f(n\eta)| \leq \varepsilon$$

si bien que $|f(x)| \leq |f(n\eta)| + \varepsilon \leq 2\varepsilon$, ce qui permet de conclure.