# Feuille d'exercices - Chapitre 20

Si rien n'est précisé, les fractions rationnelles sont supposées à coefficients dans $\mathbb{C}$.

**Exercice 1 :** ✪ Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions suivantes :

1. $\dfrac{X^4+1}{X^4-1}$
2. $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
3. $\dfrac{X^2+1}{X^2(X-1)^2}$
4. $\dfrac{X^{16}+1}{X^4+1}$

**Correction :** En clair, on fait comme au chapitre 9, à ceci près qu'on n'a plus à s'embêter avec des limites.

1. Tout d'abord, la partie entière vaut 1 (ne pas l'oublier !). Puisque $X^4-1=(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$ (on est sur $\mathbb{C}$), alors il existe $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ uniques tels que :

$$\frac{X^4+1}{X^4-1}=\frac{X^4+1}{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)}=1+\frac{a}{X-1}+\frac{b}{X+1}+\frac{c}{X+i}+\frac{d}{X-i}$$

Ici, utilisons la formule explicite pour trouver les coefficients. Notons $P=X^4+1$ et $Q=X^4-1$. On sait (cf. cours) que si $\alpha$ est un pôle simple (ce qui est le cas ici), alors le coefficient de $1/(X-\alpha)$ est $P(\alpha)/Q'(\alpha)$. Puisque $Q'=4X^3$, alors on trouve immédiatement :

$$\begin{aligned} a &= \frac{P(1)}{Q'(1)} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \\ b &= \frac{P(-1)}{Q'(-1)} \\ &= \frac{2}{-4} \\ &= -\frac{1}{2} \\ c &= \frac{P(i)}{Q'(i)} \\ &= \frac{2}{-4i} \\ &= \frac{i}{2} \end{aligned}$$

puisque $1/i=-i$, et enfin

$$\begin{aligned} d &= \frac{P(-i)}{Q'(-i)} \\ &= \frac{2}{4i} \\ &= -\frac{i}{2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\frac{X^4+1}{X^4-1}=1+\frac{1}{2(X-1)}-\frac{1}{2(X+1)}+\frac{i}{2(X-i)}-\frac{i}{2(X+i)}$$

2. La partie entière ici est nulle. Là, revenons à la méthode du premier semestre (mais il n'est plus nécessaire de passer à la limite, il suffit d'évaluer) : il existe $a, b, c$ réels tels que

$$\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X-3}$$

En multipliant par $X-1$ et en évaluant en 1, on trouve $a=1$. En multipliant par $X-2$ et en évaluant en 2, on trouve $b=-5$. Enfin, en multipliant par $X-3$ et en évaluant en 3, on trouve $c=5$.

3. Là aussi, la partie entière est nulle. Les pôles sont doubles : il existe $a, b, c, d$ réels tels que

$$\frac{X^2+1}{X^2(X-1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2}$$

En multipliant par $X^2$ et en évaluant en 0, on trouve $b=1$. En multipliant par $(X-1)^2$ et en évaluant en 1, on trouve $d=2$. En multipliant par $X$ :

$$\frac{X^2+1}{X(X-1)^2} = a + \frac{b}{X} + \frac{cX}{X-1} + \frac{dX}{(X-1)^2}$$

En évaluant en $x$ et en faisant tendre $x$ vers $+\infty$, on trouve $a+c=0$. Enfin, en évaluant en $-1$, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{2}{4} &= -a+b-\frac{c}{2}+\frac{d}{4} \\ &= -a+1-\frac{c}{2}+\frac{2}{4} \end{aligned}$$

donc $a+\dfrac{c}{2}=1$. On trouve par conséquent $c=-2$ et $a=2$. En conclusion :

$$\frac{X^2+1}{X^2(X-1)^2} = \frac{2}{X} + \frac{1}{X^2} - \frac{2}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}$$

4. Commençons par la division euclidienne de $X^{16}+1$ par $X^4+1$. On trouve comme d'habitude :

$$X^{16}+1 = (X^{12}-X^8+X^4-1)(X^4+1)+2$$

De plus, $X^4-1 = (X-e^{i\pi/4})(X-e^{3i\pi/4})(X-e^{5i\pi/4})(X-e^{7i\pi/4})$ (cf. cours). Il existe donc $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ tels que :

$$\frac{X^{16}+1}{X^4+1} = X^{12}-X^8+X^4-1+\frac{a}{X-e^{i\pi/4}}+\frac{b}{X-e^{3i\pi/4}}+\frac{c}{X-e^{5i\pi/4}}+\frac{d}{X-e^{7i\pi/4}}$$

Là aussi, utilisons l'expression explicite des coefficients : si on pose $A=X^{16}+1$ et $B=X^4+1$, alors le coefficient de $1/(X-\alpha)$ vaut $A(\alpha)/B'(\alpha)$ avec $B'=4X^3$. On trouve de même que ci-dessus (à l'aide de la $2\pi$-périodicité) :

$$a=\frac{2e^{-3i\pi/4}}{3}, b=\frac{2e^{-9i\pi/4}}{3}=\frac{2e^{-i\pi/4}}{3}, c=\frac{2e^{-15i\pi/4}}{3}=\frac{2e^{i\pi/4}}{3}, d=\frac{2e^{-21i\pi/4}}{3}=\frac{2e^{-5i\pi/4}}{3}$$

et on conclut comme précédement.

**Exercice 2 :** ✪ Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F$ telle que $F^2=X$.

**Correction :** cf. cours : si une telle fraction rationnelle existe, alors $\deg(F^2)=2\deg(F)=1$ donc $\deg(F)=1/2$ ce qui est impossible (le degré d'une fraction rationnelle est soit un entier **relatif**, soit $-\infty$).

**Exercice 3 :** ✪ Quelle est la partie entière de $\dfrac{X^4-2X^3+X+1}{(X-1)(X-2)}$ ?

**Correction :** La partie entière n'est rien d'autre que le quotient de la division euclidienne : en posant la division euclidienne, on trouve qu'il vaut $X^2+X+1$.

**Exercice 4 :** ✪ Soient $F$ et $G$ deux fractions rationnelles qui coïncident en une infinité de points (pour les grincheux : telles que les fonctions rationnelles associées coïncident en une infinité de points). Montrer que $F=G$.

**Correction :** Notons $F$ et $G$ sous forme irréductible, c'est-à-dire $F=P/Q$ et $G=A/B$ avec $P$ et $Q$ (respectivement $A$ et $B$) premiers entre eux. Alors $P/Q=A/B$ en une infinité de points donc $BP=AQ$ en une infinité de points donc $BP=AQ$ (ce sont des polynômes). Puisque $P$ divise $AQ$ et $P$ et $Q$ sont premiers entre eux, alors $P$ divise $A$. Par symétrie des rôles, $A$ divise $P$ donc $A$ et $P$ sont associés : il existe $\lambda\in\mathbb{K}^*$ tel que $A=\lambda P$. Dès lors, $BP=\lambda PQ$. Si $P=0$ alors $A=0$ donc $F=G=0$. Sinon, on peut simplifier par $P$ ($\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre) donc $B=\lambda Q$. Finalement,

$$G = \frac{\lambda P}{\lambda Q} = \frac{P}{Q} = F$$

**Exercice 5 :** ✪ Soit $n \geq 1$. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles $\dfrac{X}{X^n - 1}$ et $\dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.

**Correction :** Là aussi, utilisons la formule donnant le coefficient d'un pole simple à l'aide de la dérivée du dénominateur. Tout d'abord : les deux parties entières sont nulles, et $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n})$. Pour la première, il existe donc $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\frac{X}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - e^{2ik\pi/n}}$$

avec, pour tout $k$ ($P(\alpha)/Q'(\alpha)$ avec $P = X$ et $Q = X^n - 1$ donc $Q' = nX^{n-1}$) :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{ne^{\frac{2i(n-1)k\pi}{n}}} \\ &= \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{ne^{2ik\pi - \frac{2ik\pi}{n}}} \\ &= \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{ne^{-\frac{2ik\pi}{n}}} \\ &= \frac{e^{\frac{4ik\pi}{n}}}{n} \end{aligned}$$

Pour la deuxième, il existe $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - e^{2ik\pi/n}}$$

De même, pour tout $k \in [\![ 0\,; n-1 ]\!]$ :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{e^{\frac{2i(n-1)k\pi}{n}}}{ne^{\frac{2i(n-1)k\pi}{n}}} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

**Exercice 6 :** ✪ Soit $A = \{R \in \mathbb{C}(X) \mid \deg(R) \leq 0\}$.

1. Montrer que $A$ est un anneau.
2. L'ensemble $\left\{ \dfrac{1}{P} \;\middle|\; P \in \mathbb{K}[X]^* \right\} \cup \{0\}$ est-il un sous-anneau de $A$ ?

**Correction :**

1. Puisque $\mathbb{C}(X)$ est un corps, c'est un anneau : il suffit donc de prouver que $A$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}(X)$.
   - $\deg(0) = -\infty \leq 0$ donc $0 \in A$ : $A$ est non vide.
   - Soient $R_1$ et $R_2$ dans $A$. Alors $\deg(R_1 + R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) \leq 0$ : $R_1 + R_2 \in A$, $A$ est stable par somme.
   - $\deg(-R_1) = \deg(R_1)$ : $A$ est stable par somme, c'est un sous-groupe de $\mathbb{C}(X)$.
   - $\deg(1) = 0$ : $1 \in A$.
   - $\deg(R_1 R_2) = \deg(R_1) + \deg(R_2) \leq 0$ : $R_1 R_2 \in A$, $A$ est stable par produit.

   En conclusion, $A$ est bien un sous-anneau de $\mathbb{C}$, et en particulier c'est un anneau.
2. Non car il n'est pas stable par somme. Par exemple, $1/X$ et $1/(X+1)$ appartiennent à cet ensemble mais par leur somme qui vaut $(2X+1)/(X(X+1))$.

**Exercice 7 :** ✪✪ Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{\left(X^3-1\right)^2}$$

On pourra comparer $F(X)$ et $F(jX)$.

**Correction :** Tout d'abord, $X^3-1=(X-1)(X-j)(X-j^2)$ donc il existe $a,b,c,d,e,f$ uniques tels que

$$F = \frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-j}+\frac{c}{X-j^2}+\frac{d}{(X-1)^2}+\frac{e}{(X-j)^2}+\frac{f}{(X-j^2)^2}$$

Rappelons que $F=F(X)$. Calculons $F(jX)$ : d'une part,

$$\begin{aligned} F(jX) &= \frac{1}{((jX)^3-1)^3} \\ &= \frac{1}{(X^3-1)^2} \\ &= F(X) \end{aligned}$$

D'autre part (on rappelle que $j^3=1$ donc $jX-1=j(X-j^2)$) :

$$\begin{aligned} F(jX) &= \frac{a}{jX-1}+\frac{b}{jX-j}+\frac{c}{jX-j^2}+\frac{d}{(jX-1)^2}+\frac{e}{(jX-j)^2}+\frac{f}{(jX-j^2)^2} \\ &= \frac{a}{j}\times\frac{1}{X-j^2}+\frac{b}{j}\times\frac{1}{X-1}+\frac{c}{j}\times\frac{1}{X-j}+\frac{d}{j^2}\times\frac{1}{(X-j^2)^2}+\frac{e}{j^2}\times\frac{1}{(X-1)^2}+\frac{f}{j^2}\times\frac{1}{(X-j)^2} \end{aligned}$$

Or, $F(jX)=F(X)$ donc

$$F(jX) = \frac{a}{X-1}+\frac{b}{X-j}+\frac{c}{X-j^2}+\frac{d}{(X-1)^2}+\frac{e}{(X-j)^2}+\frac{f}{(X-j^2)^2}$$

Par unicité des coefficients (rappelons que $1/j=j^2$ et $1/j^2=j$) :

$$a=b/j=bj^2, b=c/j=cj^2, c=a/j=aj^2, d=e/j^2=ej, e=f/j^2=fj, f=d/j^2=dj$$

Les équations $c=aj^2$ et $f=dj$ sont redondantes puisqu'elles découlent des autres : en effet, $a=bj^2$ et $b=cj^2$ donc $a=cj^4=cj$ donc $c=aj^2$, et idem pour l'autre. Ainsi, on obtient quatre équations :

$$a=cj, b=cj^2, d=fj^2, e=fj,$$

Par conséquent :

$$F = \frac{cj}{X-1}+\frac{cj^2}{X-j}+\frac{c}{X-j^2}+\frac{fj^2}{(X-1)^2}+\frac{fj}{(X-j)^2}+\frac{f}{(X-j^2)^2}$$

Mea culpa : calculer $F(j^2X)$ ne sert à rien car donne exactement les mêmes équations. Mais maintenant, il n'y a plus que deux inconnues, on peut les trouver à la main. En évaluant en 0, on trouve (en se souvenant que $1/j=j^2$ et $1/j^2=j$) :

$$1=-cj-cj-cj+fj^2+fj^2+fj^2$$

c'est-à-dire que $3fj^2-3cj=1$. Enfin, en évaluant en $-1$ (rappelons que $1+j+j^2=0$ donc $-1-j=j^2$ etc.) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{-cj}{2}+c+cj^2+\frac{fj^2}{4}+f+fj \\ &= \frac{-cj}{2}+c(1+j^2)+\frac{fj^2}{4}+f(1+j) \\ &= \frac{-cj}{2}-cj+\frac{fj^2}{4}-fj^2 \\ &= \frac{-3cj}{2}-\frac{3fj^2}{4} \end{aligned}$$

si bien que $1=-6cj-3fj^2$. En sommant avec l'équation trouvée précédemment, il vient $-9cj=2$ donc $c=\dfrac{-2}{9j}=\dfrac{-2j^2}{9}$ et donc

$$
\begin{aligned}
3fj^2 &= 1+3cj \\
&= 1-\frac{6}{9} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

et on trouve $f = 1/9j^2 = j/9$ ce qui permet de conclure.

**Exercice 8 :** ✪ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Donner une CNS pour que $P'$ divise $P$.

**Correction :** Si $P$ est constant (non nul) alors $P' = 0$ donc ne divise que lui-même donc ne divise pas $P$. Supposons à présent $P$ non constant i.e. de degré $n \geq 1$. Alors $P'$ est de degré $n-1$ donc $P'$ divise $P$ si et seulement s'il existe $Q$ de degré 1 tel que $P = P' \times Q$ c'est-à-dire

$$\frac{P'}{P} = \frac{1}{Q}$$

En d'autres termes, $P'$ divise $P$ si et seulement si la décomposition en éléments simples de $P'/P$ ne comporte qu'un seul terme. Notons $P = a_n(X-x_1)^{\alpha_1} \times \cdots \times (X-x_k)^{\alpha_k}$ sous forme scindée (avec les $x_i$ deux à deux distincts) si bien que (cf. cours) la décomposition de $P'/P$ en éléments simples est :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{X-x_i}$$

Par unicité, $P'$ divise $P$ si et seulement si $k=1$ si et seulement si $P$ admet une seule racine (multiple) si et seulement si $P$ est de la forme $a_n(X-x_1)^n$.

**Exercice 9 :** ✪✪ On se place dans cet exercice sur $\mathbb{R}[X]$. On suppose que $P$ est scindé à racines simples. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Enfin, on pose $Q_\alpha = P + \alpha P'$.

1. Donner les variations de $Q_\alpha/P$ (pour les grincheux : de la fonction rationnelle associée).
2. En déduire que $Q_\alpha$ est scindé à racines simples.

**Correction :** On suppose donc sans le dire que $P$ n'est pas constant. Soit $n = \deg(P) \geq 1$. Notons $P = a_n(X-x_1)\cdots(X-x_n)$ où $x_1 < \cdots < x_n$ (en particulier, les $x_k$ sont réels). Supposons enfin $\alpha \neq 0$ sinon le fait que $Q_\alpha$ soit à racines simples est immédiat.

1. Précisons que le domaine de définition de $Q_\alpha/P$ (une dernière fois : de la fonction rationnelle associée) est :

$$\mathbb{R}\backslash\{x_1;\dots;x_n\} = \left]-\infty\,;x_1\right[ \cup \left]x_1\,;x_2\right[ \cup \cdots \cup \left]x_{n-1}\,;x_n\right[ \cup \left]x_n\,;+\infty\right[$$

On a :

$$
\begin{aligned}
\frac{Q_\alpha}{P} &= 1+\alpha\times\frac{P'}{P} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-x_k}
\end{aligned}
$$

en utilisant la décomposition en éléments simples de $P'/P$. $Q_\alpha$ est dérivable et, pour tout $t \neq x_1,\dots,x_n$ :

$$\left(\frac{Q_\alpha}{P}\right)'(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{-\alpha}{(t-x_k)^2}$$

Supposons $\alpha > 0$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). On obtient le tableau de variations suivant de la même façon que dans l'exercice 43 du chapitre 13 :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $\cdots$ | | $x_{n-1}$ | | $x_n$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(Q_\alpha/P)'(x)$ | | $-$ | | $-$ | | $\cdots$ | | $\cdots$ | | $-$ | | $-$ | |
| $Q_\alpha/P$ | | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | $\Vert$ | | | | $\Vert$ | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | |

Les limites en $\pm\infty$ valant 1 (ne pas l'oublier !), les limites à gauche en les $x_i$ valant $-\infty$ et les limites à droite $+\infty$ (idem que dans l'exercice 43 du chapitre 13).

2. En appliquant $n$ fois le théorème de la bijection (sur chaque intervalle $]\,x_i\,;x_{i+1}\,[$ pour $i \in [\![ 1\,;\,n-1 ]\!]$ et sur $]-\infty\,;x_1\,[$), on trouve que $Q_\alpha/P$ s'annule exactement $n$ fois sur $\mathbb{R}$. Or, $Q_\alpha$ est la somme d'un polynôme de degré $n$ et d'un polynôme de degré $n-1$ donc est de degré $n$ : $Q_\alpha$ a un nombre de racines distinctes égal à son degré, il est scindé à racines simples.

**Exercice 10 : ✪✪** On se place dans cet exercice sur $\mathbb{R}(X)$. Soit $n \geq 1$. Posons $G = \dfrac{X^n}{(X+1)^n}$.

1. Donner la décomposition en éléments simples de $G(X-1)$. En déduire celle de $G$.
2. Donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^{2n}}{(X^2+1)^n}$.

**Correction :**

1. Suivons l'indication de l'énoncé :

$$\begin{aligned} G(X-1) &= \frac{(X-1)^n}{X^n} \\ &= \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k X^{n-k}}{X^n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}(-1)^k}{X^k} \end{aligned}$$

C'est une décomposition en éléments simples : par unicité, c'est la bonne. Dès lors, la décomposition en éléments simples de $G$ est :

$$G = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}(-1)^k}{(X+1)^k}$$

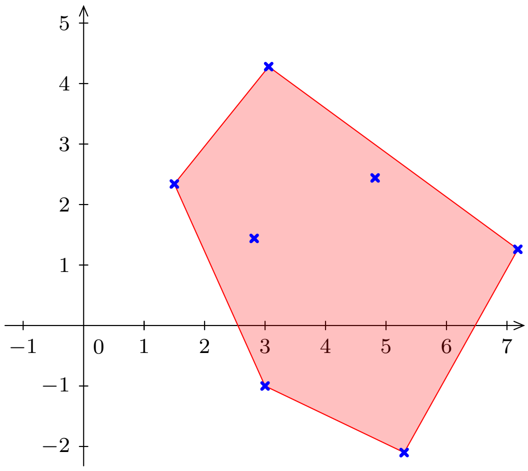
2. Notons $H$ cette fraction rationnelle. Alors $H = G(X^2)$. D'après ce qui précède :

$$G = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}(-1)^k}{(X^2+1)^k}$$

Puisqu'on est sur $\mathbb{R}$ et pas sur $\mathbb{C}$, on a une décomposition en éléments simples : c'est la bonne par unicité.

**Exercice 11 - Théorème de Gauß-Lucas : ✪✪** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ à racines simples. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de $P'$. Montrer que $\alpha$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients positifs (donc réels) de somme 1 des racines de $P$. On pourra utiliser le fait que $\overline{0} = 0$...

**Interprétation géométrique :** Les racines de $P'$ sont dans l'enveloppe convexe des racines de $P$, où l'enveloppe convexe d'une famille de points est le plus petit convexe qui les contient. De façon imagée, c'est le polygone que formera un élastique qui contiendra tous les points (cf. cours de l'année prochaine). Par exemple, sur le dessin ci-dessous, si les racines de $P$ sont les croix, alors les racines de $P'$ sont dans la zone coloriée :




**Correction :** Notons $P = a_n(X - z_1) \dots (X - z_n)$ où les $z_k$ sont des complexes distincts. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de $P'$ ($z \neq z_1, \dots, z_n$ puisque $P$ est à racines simples donc $P$ et $P'$ n'ont aucune racine commune). Dès lors, en utilisant la décomposition en éléments simples de $P'/P$ :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = 0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}$$

Suivons l'indication de l'énoncé et conjuguons cette égalité, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \overline{0} = 0 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{z - z_k}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{|z - z_k|^2} \end{aligned}$$

Isolons $z$ :

$$z \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z - z_k|^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z - z_k|^2}$$

Pour tout $k \in [\![ 1\,; n ]\!]$, notons $\alpha_k = 1/|z - z_k|^2 \in \mathbb{R}_+$ et

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z - z_k|^2} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$$

Alors $z \times S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k$ si bien que :

$$z = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k z_k}{S}$$

$z$ est combinaison linéaire des $z_k$, les racines de $P$, avec des coefficients positifs, les $\alpha_k/S$, de somme 1, puisque

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{S} &= \frac{1}{S} \times \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \\ &= \frac{1}{S} \times S \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Exercice 12 :** ✪✪ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. On suppose que $P$ admet $n$ racines simples notées $z_1, \dots, z_n$.

1. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(z_k)}$. On séparera les cas $n = 1$ et $n \geq 2$.

2. Montrer que si les $z_k$ sont tous non nuls, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k P'(z_k)} = \frac{-1}{P(0)}$.

**Correction :**

1. Si $n = 1$ alors $P'$ est constant égal au coefficient dominant $a_1$ de $P$ donc cette somme vaut $1/a_1$. Supposons dorénavant que $n = 2$. Cela ressemble au résultat du cours, disant que les coefficients de $1/(X-\alpha)$ lorsque $\alpha$ est racine simple de $Q$, dans la décomposition en éléments simples de $P/Q$, est $P(\alpha)/Q'(\alpha)$. En suivant cette idée, $1/P'(z_k)$ est le coefficient de $1/(X - z_k)$ dans la décomposition en éléments simples de $1/P$. En d'autres termes :

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(z_k) \times (X - z_k)}$$

En évaluant en 0 et en multipliant par $-1$, on a le résultat voulu à la deuxième question. Revenons à la première. En évaluant en $x \in \mathbb{R}$, éventuellement différent des $z_k$, et en multipliant par $x$ :

$$\frac{x}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{P'(z_k) \times (x - z_k)}$$

Si on fait tendre $x$ vers $+\infty$, le membre de droite tend vers la somme voulue, et le terme de gauche vers 0 puisque $P$ est de degré $n \geq 2$. Par unicité de la limite, la somme est nulle.

2. Fait dans la question précédente.

**Exercice 13 :** ✪✪ Soit $n \geq 1$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n$ et soit $R = X(X-1)\dots(X-n)$. Donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{R'(k)}$ et en déduire que parmi $|P(0)|, \dots, |P(n)|$, l'un au moins est supérieur ou égal à $\dfrac{n!}{2^n}$.

**Correction :** Comme précédemment, les racines de $R$ étant simples, cela évoque la décomposition en éléments simples de $P/R$, qui est donc :

$$\frac{P}{R} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{R'(k)(X-k)}$$

Comme dans l'exercice précédent, en évaluant en $x$ puis en faisant tendre $x$ vers $+\infty$, le membre de droite tend vers vers somme voulue, tandis que le membre de gauche tend vers 1 : en effet, $P$ est unitaire de degré $n$ et $R$ unitaire de degré $n+1$ donc, quand on multiplie par $x$, on a le quotient de deux fonctions polynômes unitaires de degré $n+1$ donc de la forme $x^{n+1} + \cdots$ donc le rapport tend bien vers 1. En conclusion, par unicité de la limite :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{R'(k)} = 1$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $|P(0)|, \dots, |P(n)|$ soient tous inférieurs stricts à $n!/2^n$. D'après ce qui précède et l'inégalité triangulaire,

$$1 \leq \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{P(k)}{R'(k)} \right| < \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{|R'(k)|}$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{|R'(k)|} > \frac{2^n}{n!}$$

Or :

$$R' = \sum_{k=0}^{n} \prod_{i \neq k} (X - i)$$

si bien que, pour tout $k \in [\![ 0 \,;\, n ]\!]$ (il ne reste que le terme d'indice $k$ car les autres sont nuls en $k$ car contiennent $(X-k)$) :

$$\begin{aligned} R'(k) &= \prod_{i\neq k}(k-i) \\ &= k(k-1)\cdots(k-(k-1))\times(k-(k+1))\cdots(k-n) \\ &= k!\times(-1)(-2)\cdots(k-n) \\ &= (-1)^{n-k}k!(n-k)! \\ &= \frac{(-1)^n n!}{\dbinom{n}{k}} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{|R'(k)|} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \frac{2^n}{n!}$$

ce qui est absurde.

**Exercice 14 :** ✪✪✪ Soit $n\geq 1$. Décomposer en éléments simples $1/T_n$, où $T_n$ est le $n$-ième polynôme de Tchebychev.

**Correction :** On montre comme en DM que

$$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)$$

Pour tout $k\in[\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$, posons $x_k=\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ si bien que

$$\frac{1}{T_n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{P'(x_k)(X-x_k)}$$

Or, pour tout $\theta\in\mathbb{R}, T_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta)$. En dérivant, il vient : $-\sin(\theta)\times {T_n}'(\cos(\theta)) = -n\sin(n\theta)$. Ainsi :

$$\forall k\in[\![\,0\,;\,n-1\,]\!], \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\times {T_n}'(x_k) = -n\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)$$

D'une part, $(2k+1)\pi/2n\not\equiv 0[\pi]$ donc on peut diviser par le sinus de gauche, et d'autre part,

$$\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = \sin(k\pi+\pi/2) = (-1)^k$$

Finalement :

$$\frac{1}{T_n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n(-1)^{k+1}}{\sin\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\left(X-\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)}$$

**Exercice 15 :** ✪✪✪ Montrer que l'ensemble des réels $x$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{x-k}\geq 1$ est une réunion finie d'intervalles. Calculer la somme de leurs longueurs.

**Correction :** De même que dans l'exercice 9 et dans l'exercice 43 du chapitre 13 : l'équation

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{k}{x-k} = 1$$

admet une unique solution $x_1$ sur $]\,1\,;2\,[$, une unique solution $x_2$ sur $]\,2\,;3\,[$, ..., une unique solution $x_{99}$ sur $]\,99\,;100\,[$ et une unique solution $x_{100}$ sur $]\,100\,;+\infty\,[$. L'ensemble des solutions est donc

$$]\,1\,;x_1\,]\cup]\,2\,;x_2\,]\cup\cdots\cup]\,99\,;x_{99}\,]\cup]\,100\,;x_{100}\,]$$

On cherche donc la valeur de $S=\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(x_k-k)$. Les $x_k$ sont les solutions de l'équation

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{k}{x-k} - 1 = \sum_{k=1}^{100} \frac{2k-x}{x-k} = 0$$

En mettant au même dénominateur, on trouve que les $x_k$ sont solutions de l'équation

$$\frac{P(x)}{(x-1)\cdots(x-100)} = 0$$

où $P$ est le polynôme

$$P = \sum_{k=1}^{100}(2k-X)\prod_{i\neq 100}(X-i)$$

donc les $x_k$ sont les racines du polynôme $P$. On cherche la somme des racines : c'est (cf. relations coefficients racines) « moins le terme de degré $n-1$ sur le terme de degré $n$ ». $P$ est la somme de 100 polynômes de degré 100 de coefficient dominant $-1$ donc est de degré 100 de coefficient dominant $-100$. Cherchons à présent le coefficient de degré 99. Il suffit de sommer tous les coefficients d'ordre 99 des polynômes de la somme. Or, le coefficient d'ordre 99 de

$$P_k = (2k-X)\prod_{i\neq 100}(X-i)$$

vaut (ici, on prend le problème à l'envers : le coefficient d'ordre $n-1$ vaut moins la somme des racines multipliée par le coefficient dominant) :

$$\begin{aligned}
(-1)\times -\left(2k+\sum_{i\neq k} i\right) &= k+\sum_{i=1}^{100} i \\
&= k+\frac{100\times 101}{2} \\
&= k+5050
\end{aligned}$$

Finalement, le coefficient d'ordre 99 de $P$ vaut

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{100}(k+5050) &= \sum_{k=1}^{100} k+\sum_{k=1}^{100} 5050 \\
&= \frac{100\times 101}{2}+5050\times 100 \\
&= 5050+5050\times 100 \\
&= 5050\times 101
\end{aligned}$$

Finalement, la somme des racines de $P$, c'est-à-dire la somme des $x_k$, vaut $-5050\times 101/(-100) = 5050\times 101/100$. En conclusion, la somme des longueurs cherchée vaut :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{100} x_k - \sum_{k=1}^{100} k \\
&= \frac{5050\times 101}{100} - 5050 \\
&= \frac{5050\times 101 - 5050\times 100}{100} \\
&= \frac{5050}{100} \\
&= \frac{505}{10} \\
&= \frac{101}{2}
\end{aligned}$$

**Exercice 16 : ✪✪✪** On se donne dans cet exercice deux entiers naturels $n<m$. On note $\omega = e^{i\pi/2m}$.

1. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-z}$ est bien définie puis que
$$\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-z} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \operatorname{sgn}(y) \times i\pi$$
où $\operatorname{sgn}(a)$ est le signe du réel $a$, c'est-à-dire 1 si $a$ est strictement positif, et $-1$ si $a$ est strictement négatif (on justifiera donc pourquoi $y$ est non nulle)

2. Montrer que la décomposition en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) de $\dfrac{X^{2n}}{1+X^{2m}}$ est :
$$\frac{X^{2n}}{1+X^{2m}} = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{\alpha_k}{X - \omega^{2k+1}}$$
où, pour tout $k \in [\![ 0\,;\, 2m-1 ]\!]$, $\alpha_k = \dfrac{-\omega^{(2k+1)(2n+1)}}{2m}$.

3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=m}^{2m-1} \alpha_k = -\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k$.

4. Donner le signe de $\operatorname{Im}\left(\omega^{2k+1}\right)$ selon la valeur de $k \in [\![ 0\,;\, 2m-1 ]\!]$.

5. Montrer que
$$\int_{-x}^{x} \frac{t^{2n}}{1+t^{2m}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{m \sin\left(\dfrac{2n+1}{2m}\pi\right)}$$
On pourra poser $\beta = \omega^{2n+1}$ pour simplifier les calculs.

**Correction :**

1. Rappelons que $z$ est un complexe non réel, donc la valeur interdite de $t \mapsto \dfrac{1}{t-z}$ n'est pas réelle : cette fonction est donc continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-z}$ est bien définie en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Notons cette intégrale $I_A$. On a alors
$$\begin{aligned} I_A &= \int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t-x-iy} \\ &= \int_{-A}^{A} \frac{t-x+iy}{(t-x)^2+y^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-A}^{A} \frac{t-x}{(t-x)^2+y^2}\,\mathrm{d}t + iy \int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{(t-x)^2+y^2} \end{aligned}$$
La première intégrale est (à un facteur 2 près) l'intégrale d'une fonction de la forme $u'/u$ et, dans la seconde, on pense à de l'Arctan : on met donc le $y^2$ en facteur pour faire apparaître une quantité de la forme $1/(1+u^2)$.
$$I_A = \frac{1}{2}\int_{-A}^{A} \frac{2(t-x)}{(t-x)^2+y^2}\,\mathrm{d}t + \frac{iy}{y^2}\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\dfrac{t-x}{y}\right)^2}$$
Par conséquent :
$$I_A = \frac{1}{2}\left[\ln\left((t-x)^2+y^2\right)\right]_{-A}^{A} + \frac{i}{y}\left[y \times \operatorname{Arctan}\left(\frac{t-x}{y}\right)\right]_{-A}^{A}$$
Ainsi :
$$I_A = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(A-x)^2+y^2}{(-A-x)^2+y^2}\right) + i\operatorname{Arctan}\left(\frac{A-x}{y}\right) - i\operatorname{Arctan}\left(\frac{-A-x}{y}\right)$$
La quantité dans le ln tend vers 1 quand $A$ tend vers $+\infty$ donc le ln tend vers 0 (continuité du ln). Intéressons-nous à présent aux Arctan. Cherchons la limite des quantités à l'intérieur. Il faut pour cela connaître le signe de $y$. Supposons $y > 0$. Alors,

$$\frac{A-x}{y} \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \frac{-A-x}{y} \xrightarrow[A\to+\infty]{} -\infty$$

Dès lors :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{A-x}{y}\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Arctan}\left(\frac{-A-x}{y}\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} -\frac{\pi}{2}$$

ce qui implique que $I_A \xrightarrow[A\to+\infty]{} i\pi$. Supposons à présent $y<0$. Alors :

$$\frac{A-x}{y} \xrightarrow[A\to+\infty]{} -\infty \qquad \text{et} \qquad \frac{-A-x}{y} \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$$

Dès lors :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{A-x}{y}\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Arctan}\left(\frac{-A-x}{y}\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

ce qui implique que $I_A \xrightarrow[A\to+\infty]{} -i\pi$. Dans tous les cas :

$$I_A \xrightarrow[A\to+\infty]{} \operatorname{sgn}(y)\times i\pi$$

En effet, $y$ est non nul car $z\notin\mathbb{R}$.

2. Erreur d'énoncé : c'est $2n+1$ dans l'exposant et pas $2m+1$. Cherchons tout d'abord les pôles de cette fraction rationnelle. Soit $z\in\mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned}
z^{2m}+1=0 &\iff z^{2m}=-1 \\
&\iff z \text{ est une racine } 2m\text{-ième de } -1=e^{i\pi} \\
&\iff \exists k\in[\![\,0\,;\,2m-1\,]\!], z=e^{i\left(\frac{\pi}{2m}+\dfrac{2k\pi}{2m}\right)} \\
&\iff \exists k\in[\![\,0\,;\,2m-1\,]\!], z=e^{\dfrac{(2k+1)\pi}{2m}} \\
&\iff \exists k\in[\![\,0\,;\,2m-1\,]\!], z=\omega^{2k+1}
\end{aligned}$$

On a $2m$ racines distinctes et $Q=1+X^{2m}$ est de degré $2m$ donc elles sont simples : si on note $P=X^{2n}$, alors

$$\frac{X^{2n}}{1+X^{2m}}=\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{\alpha_k}{X-\omega^{2k+1}}$$

où, pour tout $k\in[\![\,0\,;\,2m-1\,]\!]$ :

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{P\left(\omega^{2k+1}\right)}{Q'\left(\omega^{2k+1}\right)} \\
&= \frac{\left(\omega^{2k+1}\right)^{2n}}{2m\left(\omega^{2k+1}\right)^{2m-1}} \\
&= \frac{\left(\omega^{2k+1}\right)^{2n}}{2m\left(\omega^{2m-1}\right)^{2k+1}} \\
&= \frac{\left(\omega^{2k+1}\right)^{2n}}{2m\left(-\dfrac{1}{\omega}\right)^{2k+1}} \\
&= -\frac{\left(\omega^{2k+1}\right)^{2n}\omega^{2k+1}}{2m}
\end{aligned}$$

La troisième ligne vient du fait que $(z^a)^b=(z^b)^a$, la quatrième vient du fait que $\omega^{2m}=-1$ donc $\omega^{2m-1}=-1/\omega$ et la dernière vient du fait que $(-1)^{2k+1}=-1$, ce qui permet de conclure.

3. En utilisant encore une fois le fait que $\omega^{2m} = -1$, et en faisant un changement d'indice :

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{2m-1} \alpha_k &= -\frac{1}{2m}\sum_{k=m}^{2m-1} \omega^{(2n+1)(2k+1)} \\ &= -\frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{m-1} \omega^{(2n+1)(2j+2m+1)} \\ &= -\frac{1}{2m}\sum_{k=0}^{m-1} \omega^{(2n+1)(2k+1)} \times \omega^{2m(2n+1)} \\ &= -\frac{1}{2m}\sum k = 0^{m-1}\omega^{(2n+1)(2k+1)} \times (-1)^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2m}\sum_{k=0}^{m-1} \omega^{(2n+1)(2k+1)}\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

4. Tout d'abord, $\mathrm{Im}\left(\omega^{2k+1}\right) = \sin\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2m}\right)$. Cherchons à quel intervalle appartient la quantité à l'intérieur du sinus. Puisque $0 \leq k \leq 2m-1$ alors (notez l'absence subtile d'équivalences) en multipliant par 2, en ajoutant 1, en multipliant par $\pi$ et en divisant par $2m$, il vient :

$$\frac{\pi}{2m} \leq \frac{(2k+1)\pi}{2m} \leq 2\pi - \frac{\pi}{2m}$$

donc

$$\frac{(2k+1)\pi}{2m} \in \left]\,0\,;2\pi\,\right[$$

Or, sur $[\,0\,;2\pi\,]$, le sinus est strictement positif sur $]\,0\,;\pi\,[$ et strictement négatif sur $]\,\pi\,;2\pi\,[$ (la quantité ne peut pas être égale à $\pi$ car on ne peut pas avoir $2m = 2k+1$ car l'un est pair et l'autre impair). Cherchons pour quelles valeurs de $k$ la quantité dans le sinus est inférieure strictement à $\pi$.

$$\frac{(2k-1)\pi}{2m} < \pi \iff (2k-1) < 2m \iff k < \frac{2m-1}{2} = m - \frac{1}{2}$$

Or, $k$ est à valeurs entières, donc cela équivaut à $k \leq m-1$. Le résultat en découle : $\mathrm{Im}\left(\omega^{2k+1}\right) > 0$ si $k \in [\![\, 0\,;\, m-1\,]\!]$ et $< 0$ si $k \in [\![\, m\,;\, 2m-1\,]\!]$.

5. Soit $A \geq 0$. D'après la question 2, et par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} \frac{x^{2n}}{1+x^{2m}}\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{2m-1} \alpha_k \int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}x}{x-\omega^{2k+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}x}{x-\omega^{2k+1}} + \sum_{k=m}^{2m-1} \alpha_k \int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}x}{x-\omega^{2k+1}}\end{aligned}$$

Or, d'après la question 1, quand $A \to +\infty$, les intégrales de la première somme tendent vers $i\pi$ (car les $\omega^{2k+1}$ ont une partie imaginaire strictement positive d'après la question précédente), et celles de la seconde vers $-i\pi$. Par conséquent,

$$\int_{-A}^{A} \frac{x^{2n}}{1+x^{2m}}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[A\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{m-1} i\pi\alpha_k - \sum_{k=m}^{2m-1} i\pi\alpha_k$$

Donc, d'après la question 3,

$$\int_{-A}^{A} \frac{x^{2n}}{1+x^{2m}}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[A\to+\infty]{} \sum_{k=0}^{m-1} i\pi\alpha_k + \sum_{k=0}^{m-1} i\pi\alpha_k = 2i\pi\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k = 2i\pi\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k$$

Il suffit à présent de calculer cette somme pour conclure. Suivons l'indication de l'énoncé et posons $\beta = \omega^{2n+1}$ ce qui donne

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k &= -\frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{m-1} \beta^{2k+1} \\
&= -\frac{\beta}{2m} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\beta^2\right)^k \\
&= -\frac{\beta}{2m} \times \frac{1-\beta^{2m}}{1-\beta^2} \\
&= -\frac{e^{\frac{(2n+1)i\pi}{2m}}}{2m} \times \frac{1-e^{(2n+1)i\pi}}{1-e^{\frac{(2n+1)i\pi}{m}}} && \left(\text{car } \beta = e^{\frac{(2n+1)i\pi}{2m}}\right) \\
&= -\frac{e^{\frac{(2n+1)i\pi}{2m}}}{2m} \times \frac{2}{1-e^{\frac{(2n+1)i\pi}{m}}} && (\text{car } e^{i\pi} = -1 \text{ et } 2n+1 \text{ est impair}) \\
&= -\frac{e^{\frac{(2n+1)i\pi}{2m}}}{m} \times \frac{1}{e^{\frac{(2n+1)i\pi}{2m}}\left(e^{-\frac{(2n+1)i\pi}{2m}} - e^{\frac{(2n+1)i\pi}{2m}}\right)} && (\text{angle-moitié}) \\
&= -\frac{1}{m} \times \frac{1}{-2i\sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2m}\right)} && (\text{formules d'Euler})
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien :

$$\int_{-A}^{A} \frac{x^{2n}}{1+x^{2m}}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\pi}{m\sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{2m}\right)}$$