Feuille d'exercices - Chapitre 25

Les séries sont supposées à valeurs réelles.

Vrai ou Faux :

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\sum q^n$ converge.
3. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
4. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum(u_n+v_n)$ converge.
5. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent alors $\sum(u_n+v_n)$ diverge.
6. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent et sont à termes positifs alors $\sum(u_n+v_n)$ diverge.
7. Si $\sum(u_n+v_n)$ converge alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
8. Si $\sum(u_n+v_n)$ converge et si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
9. Si $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ alors $\sum u_n$ diverge.
10. Si $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ alors $\sum u_n$ converge.
11. Si $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ alors $\sum u_n$ diverge.
12. Si $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.
13. Si $n^2u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.
14. Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente alors $\sum {u_n}^2$ converge.

1 Séries explicites

Exercice 1 : ✪ Donner la nature des séries suivantes :

1. $\sum \dfrac{n}{n^2+1}$
2. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n-2}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+3}}$
3. $\sum \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n-3}$
4. $\sum \dfrac{2022^{-n}}{n-2}$
5. $\sum e^{-\sqrt{n}}$
6. $\sum \dfrac{\ln(n)^2}{n^{5/4}}$
7. $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sqrt[n]{5}-1\right)$
8. $\sum \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^4}$
9. $\sum \dfrac{1}{\sin\left(n^2\right)+n}$
10. $\sum \dfrac{a^n}{1+b^n}, a>0, b>0$
11. $\sum \dfrac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}+e^{-2n}}$
12. $\sum \dfrac{e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2}-\left\lfloor n^{3/2}\right\rfloor+n}$
13. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{n-1}}$
14. $\sum \dfrac{n+\ln(n)+e^{-n}}{(n+\pi)^3}$
15. $\sum \sin(n!)\left(\sqrt{\cos\left(\dfrac{1}{n^{3/4}}\right)}-1\right)\sqrt{\ln(n)}$
16. $\sum \dfrac{\ln(n)\sqrt{n}+\ln(\ln(n))}{n^2}$
17. $\sum \dfrac{(-1)^n\cos(n!^n)\ln\left(n^{2022}\right)}{n\sqrt{n}}$
18. $\sum \dfrac{1}{n\cos^2(n)}$
19. $\sum \dfrac{\operatorname{Arctan}\left(\pi^{-n}\right)\times\operatorname{Arctan}\left(\pi^n\right)}{\ln(n)}$
20. $\sum \dfrac{1}{n^2-\ln(n)}$
21. $\sum \left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)^{n\sqrt{n}}-1$
22. $\sum \dfrac{n^{1789}\ln(n)^{2022}}{e^n}$
23. $\sum \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+(1/n)}$
24. $\sum \left(\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{n^2}$
25. $\sum 2\ln\left(n^3+1\right)-3\ln\left(n^2+1\right)$
26. $\sum \dfrac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$
27. $\sum \dfrac{n^2+\pi\sqrt{2}\times n^2\ln(n)-2022n}{n^4+3n^3+18n^2-1}$
28. $\sum n\times\ln\left(\dfrac{n^4+2n^3-2n-1}{n^4+2n^3}\right)$
29. ✪✪ $\sum \dfrac{(4/3)^n}{n^3}\sin^{2n}(\alpha), \alpha\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Correction :

1. Notons u_n le terme général de la série (on fera ça à chaque fois). $u_n \sim \dfrac{1}{n}$. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique, ou car c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1 \leq 1$). On a des séries à termes positifs équivalents donc les séries sont de même nature. Ainsi, $\sum u_n$ diverge.
2. Mettons au même dénominateur :
$$u_n = \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n-2}\times\sqrt{n+3}}$$
Le dénominateur est équivalent à n. Notons a_n le numérateur.
$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n}\times\left(1+\frac{3}{n}\right)^{1/2} - \sqrt{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{n}\left(1+\frac{3}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{3}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$
si bien que $a_n \sim \dfrac{5}{2\sqrt{n}}$ et donc $u_n \sim \dfrac{5}{2n^{3/2}}$. On a des séries à termes positifs équivalents donc les séries sont de même nature. La série $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann de paramètre $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$) donc la série $\sum u_n$ converge.
3. Puissance variable : on passe à l'exponentielle.
$$\begin{aligned} u_n &= e^{(n-3)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \\ &= e^{(n-3)\left(\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{\frac{1}{2}+\mathrm{o}(1)} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{1/2}\end{aligned}$$
En particulier, u_n ne tend pas vers 0 donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
4. On ne peut pas donner un équivalent plus simple que $2022^{-n}/n$ ce qui n'est pas une série de référence : il faut donc utiliser une autre « partie » du théorème de comparaison, soit négligeable soit inférieur ou égal. Or,
$$u_n \leq 2022^{-n} = \frac{1}{2022^n}$$
pour n assez grand. De plus, $\sum \dfrac{1}{2022^n}$ converge (série géométrique de raison $1/2022 < 1$). D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.
5. On ne peut pas donner un équivalent plus simple de u_n. On voit une exponentielle, on pense donc à la méthode qui a fait déjà ses preuves : comparer à $1/n^2$. Or,
$$n^2 u_n = n^2 e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
par croissances comparées. Dès lors, $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Or, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$). D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
6. On reconnaît une série de Bertrand, mais je rappelle que celles-ci sont HP : on ne peut pas dire que cette série converge car c'est une série de Bertrand avec $\alpha = 5/4 > 1$. Cependant, il faut connaître la méthode : on multiplie par $n^{\frac{\alpha+1}{2}} = n^{\frac{9}{8}}$.
$$n^{\frac{9}{8}} u_n = \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{1}{8}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
$u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{9/8}}\right)$. Or, $\sum \dfrac{1}{n^{9/8}}$ converge (série de Riemann de paramètre $\alpha = \dfrac{9}{8} > 1$). D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

7. Puissance variable (on n'oublie pas que la racine n-ième est la puissance $1/n$) : on passe à l'exponentielle.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(e^{\frac{\ln(5)}{n}}-1\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{\ln(5)}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \\ &\sim \frac{\ln(5)}{n^{3/2}} \end{aligned}$$

ce qui est le terme général d'une série convergente (série de Riemann de paramètre $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$). On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature : $\sum u_n$ converge.

8. Idem : puissance variable donc on passe à l'exponentielle.

$$\begin{aligned} u_n &= e^{n^4 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{n^4 \ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}+\mathrm{o}\left(n^2\right)} \end{aligned}$$

Attention, on ne peut pas affirmer que $u_n \sim e^{-n^2}$ car on n'a aucune idée de la limite du $\mathrm{o}\left(n^2\right)$: il peut très bien tendre vers $+\infty$. Si on veut donner un équivalent, il faut pousser le DL plus loin jusqu'à obtenir un $\mathrm{o}(1)$ mais cela ne va pas être nécessaire ici : on a une exponentielle donc on pense à comparer à $\dfrac{1}{n^2}$.

$$n^2 u_n = e^{2\ln(n)-n^2+\mathrm{o}\left(n^2\right)}$$

Or, $2\ln(n)-n^2+\mathrm{o}\left(n^2\right) \sim -n^2$ (là on a le droit, pourquoi ?) donc en particulier cette quantité tend vers $-\infty$, si bien que $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et on conclut comme précédemment : $\sum u_n$ converge.

9. Bien sûr, il ne viendrait à l'idée de personne de dire que $\sin\left(n^2\right) \sim n^2$ puisque n^2 ne tend pas vers 0. C'est beaucoup plus simple : le sinus étant borné, il est négligeable devant n donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ et on conclut comme précédemment que $\sum u_n$ diverge.

10. On veut donner un équivalent de u_n donc du dénominateur. Cela dépend de la valeur de b.
    - Si $b > 1$ alors $1+b^n \sim b^n$ (car $b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$). Dès lors, $u_n \sim \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$. Or, $\sum \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ est une série géométrique donc converge si et seulement si $\dfrac{a}{b} < 1$. On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature : $\sum u_n$ converge si et seulement si $a < b$.
    - Si $b = 1$ alors $u_n = \dfrac{a^n}{2}$. Or, la série $\sum a^n$ est géométrique de raison a donc converge si et seulement si $a < 1$. Ici, même pas besoin de théorème de comparaison : $\sum u_n$ converge si et seulement si $a < 1$.
    - Si $b < 1$ alors $b \in \,]\,0\,;1\,[\,$ (car $b > 0$) donc $u_n \sim a^n$ (car $b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$). De même (séries à termes positifs...) $\sum u_n$ converge si et seulement si $a < 1$.
    - D'après l'exercice 23 du chapitre 24, le numérateur est équivalent à $e/2n$. De plus, puisque pour tout réel x, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, alors $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$, si bien que $0 \leq n^{3/2} - \left\lfloor n^{3/2} \right\rfloor < 1$ et donc $n^{3/2} - \left\lfloor n^{3/2} \right\rfloor = \mathrm{o}(n)$: le dénominateur est équivalent à n donc $u_n \sim \dfrac{e}{2n^2}$ et de même que précédemment, $\sum u_n$ converge.

    En conclusion, $\sum u_n$ converge si et seulement si ($b > 1$ et $a < b$) ou ($b \leq 1$ et $a < 1$).

11. De façon immédiate, $u_n \sim \dfrac{e^n}{e^{2n}} = \dfrac{1}{e^n}$. Or, $\sum \dfrac{1}{e^n}$ est une série géométrique de raison $1/e < 1$ donc converge. On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature : $\sum u_n$ converge.

12. D'après l'exercice 23 du chapitre 24, le numérateur est équivalent à $e/2n$. De plus, puisque pour tout réel x, on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, alors $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$, si bien que $0 \leq n^{3/2} - \left\lfloor n^{3/2} \right\rfloor < 1$ et donc $n^{3/2} - \left\lfloor n^{3/2} \right\rfloor = \mathrm{o}(n)$: le dénominateur est équivalent à n donc $u_n \sim \dfrac{e}{2n^2}$ et de même que précédemment, $\sum u_n$ converge.

13. Attention, $|u_n| = \dfrac{1}{n^{n-1}}$ n'est pas le terme général d'une série de Riemann car l'exposant d'une série de Riemann doit être FIXE ! Cependant, puisque $n \to +\infty$ alors $n-1 \geq 2$ pour n assez grand, donc
$$|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$$
pour n assez grand. Or, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$). D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge. En d'autres termes, $\sum u_n$ converge absolument donc converge. On pouvait également utiliser le CSA puisque, pour tout n, $n^{n-1} = e^{(n-1)\ln(n)}$ qui est le terme général d'une suite croissante donc $1/n^{n-1}$ est le terme général d'une suite décroissante qui tend vers 0.
14. $u_n \sim \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$ et on conclut comme précédemment : $\sum u_n$ converge.
15. Ici, le terme général de la série n'est pas de signe constant et il n'est pas envisageable d'utiliser le CSA à cause du sinus : la série n'est pas forcément alternée, ni décroissante en valeur absolue. Une seule solution : prouver la CVA. Tout d'abord,
$$|u_n| \leq \left|\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)} - 1\right| \times \sqrt{\ln(n)}$$
Notons v_n le membre de droite. Or :
$$\begin{aligned}\left|\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)} - 1\right| &= \left|\left(1 - \frac{1}{2n^{3/2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)^{1/2} - 1\right| \\ &= \left|1 - \frac{1}{4n^{3/2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - 1\right| \\ &\sim \frac{1}{4n^{3/2}}\end{aligned}$$
si bien que $v_n \sim \ln(n)/4n^{3/2}$. De même que d'habitude, on prouver que $v_n = \mathrm{o}\left(1/n^{5/4}\right)$ donc $\sum v_n$ converge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ converge donc la série $\sum u_n$ converge absolument, et donc converge.
16. $u_n \sim \dfrac{\ln(n)\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{\ln(n)}{n^{3/2}}$. De la même façon que dans le 6, pas question de déranger Bertrand pour ça.
$$n^{5/4}u_n \sim \frac{\ln(n)}{n^{1/4}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
c'est-à-dire que $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{5/4}}\right)$ et on conclut comme précédemment (car $5/4 > 1$) : $\sum u_n$ converge.
17. Pas de signe constant : on étudie la convergence absolue (le cos rend impossible l'utilisation du CSA).
$$|u_n| \leq \frac{\ln\left(n^{2022}\right)}{n\sqrt{n}} = \frac{2022\ln(n)}{n^{3/2}}$$
et, comme dans l'exemple précédent, $|u_n| = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{5/4}}\right)$ si bien que $\sum |u_n|$ converge. La série $\sum u_n$ converge absolument donc converge.
18. Pas question de faire un DL du cos car ce qu'il y a dedans ne tend pas vers 0. Cependant, puisque $\cos^2(n) \leq 1$ alors
$$u_n \geq \frac{1}{n}$$
Or, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.
19. Au voisinage de 0, $\mathrm{Arctan}(x) \sim x$ tandis qu'au voisinage de $+\infty, \mathrm{Arctan}(x) \sim \dfrac{\pi}{2}$. Puisque $\pi > 1$ alors $\pi^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\pi^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc
$$u_n \sim \frac{\pi^{-n} \times \dfrac{\pi}{2}}{\ln(n)} = \frac{\pi}{2\ln(n)} \times \pi^{-n} \leq \frac{1}{\pi^n}$$
pour n assez grand. Or, $\sum \dfrac{1}{\pi^n}$ est une série géométrique de raison $1/\pi < 1$ donc converge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

20. $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ et on conclut comme précédemment : $\sum u_n$ converge.
21. Puissance variable : exponentielle.

$$\begin{aligned} u_n &= e^{n\sqrt{n}\left(\ln\left(n^2+1\right)-\ln\left(n^2\right)\right)}-1 \\ &= e^{n\sqrt{n}\left(\ln\left(n^2\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\ln\left(n^2\right)\right)}-1 \\ &= e^{n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}-1 \\ &= e^{\frac{1}{\sqrt{n}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}-1 \\ &= 1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1 \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Or, $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann de paramètre $\alpha = 1/2 \leq 1$). On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature : $\sum u_n$ diverge.
22. $n^2 u_n = \dfrac{n^{1791}\ln(n)^{2020}}{e^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées : $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et on conclut comme précédemment : $\sum u_n$ converge.
23. Attention, ce n'est pas une série de Riemann car la puissance est variable ! Encore une fois, on écrit u_n sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned} u_n &= e^{\left(1+\frac{1}{n}\right)\times -\ln(n)} \\ &= e^{-\ln(n)-\frac{\ln(n)}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\times e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \end{aligned}$$

Or, $-\dfrac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées donc, l'exponentielle étant continue, $e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ si bien que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série de Riemann de paramètre $\alpha = 1 \leq 1$). On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature : la série $\sum u_n$ diverge.
24. Puissance variable : notation exponentielle.

$$\begin{aligned} u_n &= e^{n^2\ln(n)-n^2\ln(n+1)} \\ &= e^{n^2\ln(n)-n^2\ln(n)-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e^{-n+\frac{1}{2}+\mathrm{o}(1)} \end{aligned}$$

et de même que d'habitude, $u_n \sim e^{-n+\frac{1}{2}} = e^{-n}\times e^{1/2}$ (attention, u_n n'est pas équivalent à e^{-n} !). On peut dire que $u_n = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$ ou que la série $\sum e^{-n}$ est géométrique de raison $1/e < 1$: dans tous les cas, les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs permettent de conclure que la série $\sum u_n$ converge.

25. Dans un ln, comme d'habitude, on factorise par le terme dominant.

$$\begin{aligned} u_n &= 2\ln\left(n^3\right) + 2\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) - 3\ln\left(n^2\right) - 3\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 6\ln(n) + \frac{2}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) - 6\ln(n) - \frac{3}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim -\frac{3}{n^2} \end{aligned}$$

On a des séries à termes négatifs équivalents donc de même nature : $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum u_n$ converge.

26. $u_n = e^{-\ln(n)\ln(\ln(n))} = \dfrac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}$ ($a^b = e^{b\ln(a)}$ avec $a = n$ et $b = \ln(\ln(n))$). Or, $\ln(\ln(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\ln(\ln(n)) \geq 2$ pour n assez grand, si bien que $u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$ pour n assez grand, ce qui permet de conclure : $\sum u_n$ converge.

27. $u_n \sim \dfrac{\pi\sqrt{2}n^2\ln(n)}{n^4} = \dfrac{\pi\sqrt{2}\ln(n)}{n^2}$ et on utilise la même méthode que précédemment : $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ et on en conclut que $\sum u_n$ converge.

28. On a :

$$u_n = n \times \ln\left(1 - \frac{2n+1}{n^4+2n^3}\right)$$

et

$$\frac{2n+1}{n^4+2n^3} \sim \frac{2}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

si bien que

$$u_n \sim n \times \frac{-(2n+1)}{n^4+2n^3} \sim n \times \frac{-2}{n^3} = \frac{-2}{n^2}$$

On a des séries à termes négatifs équivalents donc de même nature, la série $\sum 1/n^2$ converge donc la série $\sum u_n$ converge.

29. On ne peut pas donner un équivalent plus simple. On pourrait majorer le sinus par 1 mais on majorerait alors u_n par une quantité qui tend vers $+\infty$ donc par le terme général d'une série qui diverge grossièrement, ce qui ne permet pas de conclure. Il faut donc être plus malin que ça. On peut déjà se demander la limite de la suite (u_n). Regroupons les termes à la puissance n :

$$u_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{4}{3} \times \sin^2(\alpha)\right)^n$$

On se demande si le terme à la puissance n est supérieur ou inférieur à 1 (précisons que le sinus est positif car $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$) :

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \times \sin^2(\alpha) \leq 1 \quad &\iff \quad \sin^2(\alpha) \leq \frac{3}{4} \\ &\iff \quad 0 \leq \sin(\alpha) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \quad \alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

Supposons donc que $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$. Alors $u_n \leq \dfrac{1}{n^3}$ et on conclut comme précédemment que $\sum u_n$ converge. Supposons à présent que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Dès lors, $\dfrac{4}{3} \times \sin^2(\alpha) > 1$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées : la série $\sum u_n$ diverge grossièrement (car le terme général ne tend pas vers 0). En conclusion, la série converge si et seulement si $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$.

Exercice 2 : ✪ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$ on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$$

1. Étudier, suivant les valeurs de α, la convergence de la suite (u_n). En cas de convergence, donner sa limite.
2. Étudier la nature de la série de terme général u_n.
3. Soit $x \in \left]-1\,;1\right[$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n x^n$.

Correction :

1. Soit $n \geq 1$. Cela sent la somme de Riemann à trois kilomètres : on fait donc apparaître $1/n$ devant la somme : on factorise par n dans $(n+k)^\alpha$ ce qui donne

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+k/n)^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} \times \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+k/n)^\alpha}.$$

La somme $S_n = \dfrac{1}{n} \times \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+k/n)^\alpha}$ est la somme (et non la série, ce n'est pas du tout la même chose) de Riemann à pas constant associée à la fonction définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^\alpha}$. La fonction f étant continue sur $[\,0\,;1\,]$, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^\alpha} > 0$ (l'inégalité est stricte puisque la fonction est positive et non identiquement nulle). Or, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \times S_n$ et $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I > 0$. La limite éventuelle de (u_n) dépend donc du signe de $\alpha - 1$.

   - Si $\alpha > 1$ alors $\alpha - 1 > 0$ donc $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par opérations sur les limites, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   - Si $\alpha < 1$ alors $\alpha - 1 < 0$ donc $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} = n^{1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par opérations sur les limites, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
   - Enfin, si $\alpha = 1$ alors $u_n = S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} I = \ln(2)$ (pour $\alpha = 1$).

2. D'après la question précédente, si $\alpha \leq 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement. Supposons $\alpha > 1$. Puisque $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I > 0$ alors $S_n \sim I$ (rappelons qu'une suite de limite <u>non nulle</u> est équivalente à sa limite) et donc $u_n \sim I/n^{\alpha-1}$. On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature. Or, la série $\sum 1/n^{\alpha-1}$ est une série de Riemann donc converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ si et seulement si $\alpha > 2$. Finalement, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

3. Tout d'abord, puisque l'on ne connaît pas le signe de x, on étudie la convergence absolue (si x est négatif alors le signe alterne donc le terme général de la série n'est pas de signe constant). D'après ce qui précède,

$$|u_n x^n| \sim \frac{I \times |x|^n}{n^{\alpha-1}} = I \times n^{1-\alpha} \times |x|^n.$$

On ne peut pas donner un équivalent plus simple. On se dit que la série va converger car $|x|^n$ tend vers 0 « vite » : on réutilise donc la même méthode que pour l'exponentielle, on multiplie donc par n^2 ce qui donne

$$n^2 u_n |x|^n \sim I \times n^{3-\alpha} |x|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées car $x \in \left]-1\,;1\right[$ (les suites géométriques l'emportent sur les suites polynomiales). Par conséquent, $|u_n x^n| = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n x^n$ converge absolument et donc converge.

Exercice 3 - Séries Konpadnom : ✪ Donner selon les valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ la nature de la série

$$\sum \frac{1}{n^a (\ln(n))^b (\ln(\ln(n)))^c}$$

Correction : Notons u_n le terme général de la série. Effectuons le même raisonnement que pour les séries de Bertrand :

- Si $a < 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

- Si $a \in [\,0\,;1\,[$, alors

$$n^{\frac{1+a}{2}} \times u_n = \frac{n^{\frac{1-a}{2}}}{(\ln(n))^b(\ln(\ln(n)))^c} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Pour n assez grand, $u_n \geq 1/n^{\frac{1+a}{2}}$. Or, $\dfrac{1+a}{2} \leq 1$ donc la série $\sum 1/n^{\frac{1+a}{2}}$ diverge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

- Si $a > 1$, alors

$$n^{\frac{1+a}{2}} \times u_n = \frac{n^{\frac{1-a}{2}}}{(\ln(n))^b(\ln(\ln(n)))^c} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $u_n = \mathrm{o}\left(1/n^{\frac{1+a}{2}}\right)$ et $\dfrac{1+a}{2} > 1$ donc on conclut comme d'habitude que $\sum u_n$ converge.

- Supposons à présent que $a = 1$. Séparons les cas selon la valeur de b. Supposons $b < 1$. Alors :

$$n \times (\ln(n))^{\frac{b+1}{2}} \times u_n = \frac{\ln(n)^{\frac{1-b}{2}}}{\ln(\ln(n))^c} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

si bien que pour n assez grand,

$$u_n \geq \frac{1}{n(\ln(n))^{\frac{1+b}{2}}}$$

Or, $\dfrac{1+b}{2} < 1$ donc on a une série de Bertrand divergente (les séries de Bertrand sont HP mais ici, vu le thème de l'exo, il faut s'en servir) donc on conclut comme d'habitude que $\sum u_n$ diverge. Si $b > 1$, on montre de même que

$$n \times (\ln(n))^{\frac{b+1}{2}} \times u_n = \frac{\ln(n)^{\frac{1-b}{2}}}{\ln(\ln(n))^c} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

si bien que

$$u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n(\ln(n))^{\frac{1+b}{2}}}\right)$$

et puisque $\dfrac{b+1}{2} > 1$, la série de Bertrand associée converge donc $\sum u_n$ converge. Supposons enfin que $b = 1$. Si $c \leq 0$, alors, pour n assez grand,

$$u_n = \frac{\ln(n)^{-c}}{n\ln(n)} \geq \frac{1}{n\ln(n)}$$

et la série des $1/n\ln(n)$ diverge donc, par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge. Supposons donc $c > 0$. Introduisons la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))^c}$$

f est dérivable (sur $]\,e\,;+\infty\,[$) et pour tout $x > e$,

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2\ln(x)\ln(\ln(x))^c} - \frac{1/x}{x \times \ln(x)^2 \times \ln(\ln(x))^c} + \frac{1}{x\ln(x)} \times \frac{-c \times \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{\ln(x)}}{\ln(\ln(x))^{c+1}} < 0$$

donc f est décroissante. f est positive, continue, décroissante donc $\sum f(n)$ et la suite $\left(\displaystyle\int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t\right)_N$ sont de même nature. Effectuons encore le changement de variable $u = \ln(t), t = e^u$, $\mathrm{d}t\ = e^u\,\mathrm{d}u\ $:

$$\int_3^N \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)\ln(\ln(t))^c} = \int_{\ln(3)}^{\ln(N)} \frac{e^u\,\mathrm{d}u}{e^u u\ln(u)^c} = \int_{\ln(3)}^{\ln(N)} \frac{\mathrm{d}u}{u\ln(u)^c}$$

et d'après le cours sur les séries de Bertrand, on sait que cette intégrale converge si et seulement si $c > 1$. En conclusion, la série converge si et seulement si $a > 1$ ou ($a = 1$ et $b > 1$) ou ($a = b = 1$ et $c > 1$).

Exercice 4 : ✪ Soit $\alpha \in]0;1[$. Donner un équivalent, quand $n \to +\infty$, de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Correction : Tout d'abord, la série de terme général $1/k^\alpha$ diverge puisque $\alpha < 1$ (série de Riemann) et cette série est à termes positifs donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En comparant à une intégrale (le dessin est laissé à votre charge, la fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est décroissante), on obtient pour tout $k \geq 2$ l'encadrement suivant :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

Par somme, pour k allant de 2 à n :

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

et en ajoutant 1 (rappelons que $1/t^\alpha = t^{-\alpha}$ ce qui se primitive très facilement) :

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} + 1 \leq S_n \leq \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} + 1$$

et donc, par obtention d'un équivalent par encadrement :

$$S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

On redémontre au passage la divergence de la série de terme général $1/k^\alpha$.

Exercice 5 - Un nombre de Pisot : ✪✪

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair.
2. En déduire la nature de la série $\sum \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$.

Remarque : On dit que $x \in \mathbb{R}$ est un nombre de Pisot si $x > 1$ et s'il existe un polynôme P unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $P(x) = 0$ et tel que toutes les autres racines complexes de P aient un module strictement inférieur à 1. Par exemple, $2+\sqrt{3}$ est un nombre de Pisot car est l'unique racine, avec $2-\sqrt{3}$ qui est de module strictement inférieur à 1, du polynôme $X^2 - 4X + 1$. Le nombre d'or $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ est aussi un nombre de Pisot car annule $X^2 - X - 1$, et l'autre racine est $-1/\varphi$ de module strictement inférieur à 1. On peut montrer de la même façon que dans cet exercice (mais c'est un peu plus délicat à rédiger dans le cas général, il faut utiliser les relations coefficients racines) que si x est un nombre de Pisot réel, alors la série $\sum \sin(\pi x^n)$ converge.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $a_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$. Appliquons la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt{3})^k 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\sqrt{3}\right)^k 2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sqrt{3}^k + \left(-\sqrt{3}\right)^k\right) 2^{n-k}. \end{aligned}$$

   Or, si k est impair, alors $(-1)^k = -1$ donc $\left(-\sqrt{3}\right)^k = -\sqrt{3}^k$ si bien que $\sqrt{3}^k + \left(-\sqrt{3}\right)^k = 0$. Par conséquent, il ne reste que les termes pairs dans la somme, ce qui donne :

$$a_n = \sum_{k=0, k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} \left(\sqrt{3}^k + \sqrt{3}^k\right) 2^{n-k} = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} \left(\sqrt{3}^{2p} + \sqrt{3}^{2p}\right) 2^{n-2p},$$

   avec le changement d'indice $k = 2p$ (possible puisque l'on ne somme que sur les termes pairs). Ainsi, puisque $\sqrt{3} = 3^{1/2}$,

$$a_n = \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} \left(3^p + 3^p\right) 2^{n-2p} = 2 \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 3^p 2^{n-2p}.$$

   En d'autres termes, a_n est un entier multiplié par 2, donc est un entier pair. On peut donc noter $a_n = 2 \times p_n$ où p_n est un entier.

2. Notons à présent $u_n = \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$ pour tout $n \geq 1$. On ne peut pas utiliser l'équivalent $\sin(u) \sim u$ car il n'est valable qu'au voisinage de 0. Or, la quantité à l'intérieur du sinus tend vers $+\infty$ (suite géométrique de raison > 1). On ne peut pas non plus majorer le sinus en valeur absolue par 1 car ce serait majorer par le terme général d'une série divergente, ce qui ne permet pas de conclure. On est donc bloqué, mais on pense à utiliser la question précédente : $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2p_n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ et donc

$$u_n = \sin\left(2\pi p_n - \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right) = \sin\left(-\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right) = -\sin\left(\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)$$

en utilisant successivement la 2π-périodicité et l'imparité du sinus. Or, cette fois, la quantité dans le sinus tend vers 0 : en effet, $\sqrt{1} = 1 < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$ donc $2-\sqrt{3} \in \left]0\,;1\right[$ et donc $\left(2-\sqrt{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \sim -\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n$. Or, la série $\sum\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ converge (série géométrique de raison $2-\sqrt{3} \in \left]-1\,;1\right[$). On a des séries à termes négatifs équivalents donc de même nature : $\sum u_n$ converge. En particulier, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui n'est pas évident à première vue.

Exercice 6 : ✪✪ Soit $a > 0$. Donner la nature de la série $\sum a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

Correction : Notons u_n le terme général de cette série. On rappelle que

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = \ln(n)+\gamma+\mathrm{o}(1)$$

donc

$$\begin{aligned} u_n &= a^{\ln(n)+\gamma+\mathrm{o}(1)} \\ &= e^{(\ln(n)+\gamma+\mathrm{o}(1))\ln(a)} \\ &= e^{\ln(a)\times\ln(n)} \times e^{\ln(a)\times\gamma} \times e^{\mathrm{o}(1)} \\ &= n^{\ln(a)} \times e^{\ln(a)\times\gamma} \times e^{\mathrm{o}(1)} \end{aligned}$$

et donc $u_n \sim \dfrac{e^{\ln(a)\times\gamma}}{n^{-\ln(a)}}$. Or, la série $\sum e^{\ln(a)\times\gamma}/n^{-\ln(a)}$ est une série de Riemann, donc converge si et seulement si $-\ln(a) > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $a < e^{-1}$. On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature. En conclusion, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a < e^{-1}$.

Exercice 7 : ✪✪ Soient a et b deux réels, avec $b > 0$. En utilisant la concavité du sinus sur $[0\,;\pi/2]$, donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^a}\int_0^{\pi/n} \sin\left(x^b\right) dx$$

Correction : Rappelons (cf. chapitre 16) que, pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $2x/\pi \leq \sin(x) \leq x$. On veut utiliser l'encadrement de la question précédente, valable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Le problème est qu'on ne sait pas si $x^b \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$: par exemple, si b est très grand et si $x > 1$ alors x^b peut être strictement supérieur à $\dfrac{\pi}{2}$. Pour éviter cela, on va supposer $n \geq 4$ ce qui ne change rien à la nature de la série : seul compte ce qui se passe « au voisinage de $+\infty$ ». En effet, si $n \geq 4$ alors $\dfrac{\pi}{n} < 1$ donc $x^b \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{n}\right]$ et donc on peut utiliser l'encadrement de la question précédente :

$$\frac{2x^b}{\pi} \leq \sin\left(x^b\right) \leq x^b$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/n} \frac{2x^b}{\pi}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi/n} \sin\left(x^b\right)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi/n} x^b\,\mathrm{d}x$$

En divisant par n^a il vient finalement

$$\frac{2\pi^{b+1}}{\pi n^{a+b+1}} \leq u_n \leq \frac{\pi^{b+1}}{n^{a+b+1}}$$

Attention, on ne peut pas dire que u_n est équivalent à $\dfrac{\pi^{b+1}}{n^{a+b+1}}$ ou, pire, à $\dfrac{1}{n^{a+b+1}}$: en effet, le quotient ne tendra pas vers 1 ! Cependant, on se doute que tout va tourner autour de n^{a+b+1} : faisons donc deux cas.

- Premier cas : $a+b+1>1$. Alors la série $\sum \dfrac{\pi^{b+1}}{n^{a+b+1}}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = a+b+1>1$ donc converge. Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs (« plus petit qu'un truc convergent c'est convergent »), $\sum u_n$ converge.
- Premier cas : $a+b+1\leq 1$. Alors la série $\sum \dfrac{2\pi^{b+1}}{\pi n^{a+b+1}}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = a+b+1\leq 1$ donc diverge. Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs (« plus grand qu'un truc divergent c'est divergent »), $\sum u_n$ diverge.

En conclusion, $\sum u_n$ converge $\iff a+b+1>1 \iff a+b>0$.

Exercice 8 - Des petits trous : ✪✪ Pour tout $n\geq 1$, on définit u_n par

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si l'écriture décimale de } n \text{ ne contient pas le chiffre 5} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On notera comme dans le cours $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$.

1. Montrer que $S_9 \leq 8$.
2. Montrer que $S_{99} \leq 8 + 8\times \dfrac{9}{10}$.
3. Donner une majoration du même type pour S_{999}.
4. Donner la nature de la série $\sum u_n$.

Correction :

1. $S_9 = \displaystyle\sum_{k=1}^{9} u_k$. Or, tous les termes de cette somme sont inférieurs ou égaux à 1, et il y a 8 termes non nuls car $u_5=0$, ce qui permet de conclure.
2. Tout d'abord, $S_{99} = S_9 + \displaystyle\sum_{k=10}^{99} u_k$. D'après la question précédente, $S_9\leq 8$. Majorons la deuxième somme. Tous les termes sont inférieurs ou égaux à $1/10$. Comptons le nombre de termes non nuls. Il y a 8 dizaines (on enlève la dizaine formée des nombres de 50 à 59) et, dans chaque dizaine restante, il y a 9 termes non nuls (on enlève à chaque fois le terme contenant 5, par exemple 65 dans la dizaine des 60). Il y a donc 8×9 termes non nuls inférieurs à $1/10$, ce qui permet de conclure.
3. De même, $S_{999} = S_{99} + \displaystyle\sum_{k=100}^{999} u_k$. Dans la dernière somme, il y a 8 centaines (toutes sauf celle des 500), dans chaque centaine il y a 9 dizaines (toutes sauf la dizaine qui commence par 5) et dans chaque dizaine il y a 9 termes (tous sauf celui qui se termine par 5), ce qui fait $8\times 9\times 9$ termes, tous inférieurs ou égaux à $1/100$. Finalement, $S_{999}\leq 8+8\times\dfrac{9}{10} + 8\times\left(\dfrac{9}{10}\right)^2$.
4. On montre de même que, pour tout n, $S_{9\dots 9}$ (où il y a n fois le chiffre 9) est inférieure ou égale à
$$8+8\times\frac{9}{10}+\cdots+8\times\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = 8\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{9}{10}\right)^k.$$
Or, $9/10\in\,]\,0\,;1\,[$ donc la série $\sum(9/10)^k$ converge et sa somme vaut $1/(1-9/10)=10$. Dès lors,
$$8\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{9}{10}\right)^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 80.$$
Or, c'est une série à termes positifs donc la suite de ses sommes partielles est croissante. En particulier, $S_{9\dots 9}\leq 80$. Soit à présent $N\geq 1$. Il existe $n\geq 1$ tel que $N\leq 9\dots 9$ (où l'on compte n fois 9) donc (car $(S_N)_{N\geq 1}$ est croissante puisque la série est à termes positifs) $S_N\leq S_{9\dots 9}\leq 80$. Finalement, la série $\sum u_n$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée : la série converge. Remarquons que l'on ne demandait pas la somme (et heureusement !).

Exercice 9 : ✪✪ Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que la série de terme général $\left(n^4+n^2\right)^{1/4} - P(n)^{1/3}$ converge.

Correction : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout n, on note $u_n = (n^4+n^2)^{1/4} - P(n)^{1/3}$. Tout d'abord, $(n^4+n^2)^{1/4} \sim n$ (l'équivalent passe à la puissance fixe) donc, si P est le polynôme nul, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement. On suppose P non nul dans la suite. Si P est de degré d de coefficient dominant a_d, alors $P(n)^{1/3} \sim {a_d}^{1/3} n^{d_3}$ donc

$$u_n = n + \mathrm{o}\,(n) - {a_d}^{1/3} n^{d/3} + \mathrm{o}\left(n^{d/3}\right)$$

Nécessairement, $d=3$ et $a_d = 1$: en effet, si $d \neq 3$, alors u_n est équivalent à n ou à ${a_d}^{1/3} n^{d/3}$ selon que $d > 3$ ou $d < 3$ donc la série diverge grossièrement, et si $d=3$ et ${a_d}^{1/3} \neq 1$, alors $u_n \sim (1 - {a_d}^{1/3}) \times n$ et la série diverge encore grossièrement. Ainsi, une condition nécessaire pour que la série $\sum u_n$ converge est que P soit unitaire de degré 3, c'est-à-dire qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = X^3 + aX^2 + bX + c$. Rappelons que

$$(1+u)^{1/3} = 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + \mathrm{O}\left(u^3\right)$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
u_n &= n\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/3} - n\left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3}\right)^{1/3} \\
&= n\left(1 + \frac{1}{3n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= n\left(1 + \frac{1}{3n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n\left(1 + \frac{a}{3n} + \frac{b}{3n^2} - \frac{a^2}{9n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3n} - \frac{a}{3} + \frac{a^2 - 3b}{9n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{a}{3} + \frac{a^2 - 3b + 3}{9n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Si $a \neq 0$, alors $u_n \sim -a/3$ donc la série diverge grossièrement, donc une condition nécessaire pour que la série converge est que a soit nul. Supposons donc $a = 0$. Alors :

$$u_n = \frac{-3b+3}{9n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Si $b \neq 1$, alors $u_n \sim K/n$ avec $K \neq 0$: on a des séries à termes de signe constant équivalents donc de même nature. Or, la série $\sum 1/n$ diverge donc la série $\sum u_n$ diverge. Dès lors, une condition nécessaire pour que la série converge est d'avoir $b = 1$. Montrons que c'est suffisant : si $a = 0$ et $b = 1$, alors $u_n = \mathrm{O}\left(1/n^2\right)$. Or, la série $\sum 1/n^2$ converge donc la série $\sum u_n$ converge (rappelons que quand on utilise le théorème de comparaison avec un o ou un O, seul compte le fait que la quantité dans le o ou O soit positive, la suite (u_n) n'a pas besoin d'être positive). En conclusion, la série converge si et seulement si P est de la forme $P = X^3 - X + c$ avec c quelconque.

Exercice 10 : ✪✪ Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que

$$\sum_{k=N+1}^{2N} \sigma(k) \geq \sum_{k=1}^{N} k$$

2. En déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{\sigma(k)}{k^2}$ diverge.

Correction :

1. La fonction σ étant injective, les N entiers $\sigma(N+1), \dots, \sigma(2N)$ sont distincts : si on les range par ordre croissante, cela donne N entiers $1 \leq x_1 < \cdots < x_N$ et, par récurrence (finie) immédiate, $x_k \geq k$ pour tout $k \in [\![1\,;\,N]\!]$ ce qui permet de conclure.
2. Notons comme d'habitude, pour tout $N \geq 1$, S_N la somme partielle d'ordre N de cette série. Pour tout $n \geq 1$, d'après la question précédente,

$$S_{2N} - S_N = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=N+1}^{2N} \sigma(k) \geq \frac{1}{4N^2} \sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{4N^2} \times \frac{N(N+1)}{2} \geq \frac{1}{8}$$

Or, si la série converge et si on note S sa somme, alors $S_{2N} - S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} S - S = 0$ ce qui est absurde.

Exercice 11 : ✪✪ À l'aide d'une transformation d'Abel, prouver que si $\alpha > 0$, alors la série $\sum \dfrac{\sin(n)}{n^\alpha}$ converge.

Correction : Posons, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k)}{k^\alpha} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^n \sin(k)$$

On pose
La méthode pour effectuer une transformation d'Abel est de voir que, pour tout $k \geq 1$, $\sin(k) = T_k - T_{k-1}$: on a alors

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k)}{k^\alpha} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{T_k - T_{k-1}}{k^\alpha} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{T_k}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^n \frac{T_{k-1}}{k^\alpha} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{T_k}{k^\alpha} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{T_j}{(j+1)^\alpha} \\
&= \frac{T_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} T_k \times \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) - \frac{T_0}{1^\alpha}
\end{aligned}$$

Or, $T_0 = 0$:

$$S_n = \frac{T_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} T_k \times \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$$

Montrons que la suite (T_n) est bornée. T_n est la partie imaginaire de

$$U_n = \sum_{k=0}^n e^{ik}$$

Or, U_N est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\times 1} \neq 1$ d'où

$$\begin{aligned}
U_N &= \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^{i\times 1}} \\
&= \frac{e^{i(n+1)/2} \times \left(e^{-i(n+1)/2} - e^{i(n+1)/2}\right)}{e^{i\times 1/2} \times \left(e^{-i\times 1/2} - e^{i\times 1/2}\right)} \\
&= \frac{e^{i\times n/2} \times -2i\sin\left((n+1)/2\right)}{-2i\sin(1/2)} \\
&= \frac{e^{i\times n/2} \times \sin\left((n+1)/2\right)}{\sin(1/2)}
\end{aligned}$$

Et puisque $T_n = \mathrm{Im}(U_n)$,

$$T_N = \frac{\sin(n/2) \times \sin\left((n+1)/2\right)}{\sin(1/2)}$$

Il suffit de voir que le numérateur est majoré par 1 en valeur absolue pour conclure que (T_n) est bornée, disons par M. Par conséquent,

$$\frac{T_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

De plus, pour tout k,

$$\left|T_k \times \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\right| \leq M \times \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$$

On peut retirer la valeur absolue puisque cette quantité est positive. Or, la suite de terme général $1/k^\alpha$ converge (vers 0) donc sa série télescopique associée converge. On majore par le terme général d'une série convergente donc la série

$$\sum T_k \times \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$$

converge absolument et donc converge, si bien que la suite de ses sommes partielles admet une limite finie. Finalement, la suite (S_n) admet une limite finie donc la série converge.

Exercice 12 - Ne rien oublier en route : ✪✪✪ Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la série

$$\sum \frac{1}{n^{a+1/2}} - \frac{1}{n^{3a}+1}$$

Correction : Notons u_n le terme général de cette série. Mettons au même dénominateur :

$$u_n = \frac{n^{3a}+1-n^{a+\frac{1}{2}}}{n^{a+\frac{1}{2}} \times (n^{3a}+1)}$$

Puisque l'équivalent passe au quotient et au produit, il faut donner un équivalent de $n^{3a}+1-n^{a+\frac{1}{2}}$, de $n^{a+\frac{1}{2}}$ (bon, là il n'y a rien à faire) et de $n^{3a}+1$. Commençons par $n^{3a}+1$: pour en donner un équivalent, faisons une disjonction de cas selon le signe de a.

- Premier cas : $a > 0$. Alors $n^{3a}+1 \sim n^{3a}$. Donnons à présent un équivalent de $n^{3a}+1-n^{a+\frac{1}{2}}$: le 1 est négligeable devant chacune des puissances de n car chacune tend vers $+\infty$, mais on ne sait pas laquelle des deux puissances gagne : c'est la plus grande des deux. Cherchons laquelle est la plus grande : $3a > a + \dfrac{1}{2} \iff a > \dfrac{1}{4}$. Faisons encore une disjonction de cas.
  — Supposons $a > \dfrac{1}{4}$. Alors $3a > a + \dfrac{1}{2}$ donc $n^{3a}+1-n^{a+\frac{1}{2}} \sim n^{3a}$ et donc
  $$u_n \sim \frac{n^{3a}}{n^{a+\frac{1}{2}} \times n^{3a}} = \frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}$$
  On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}$ est une série de Riemann donc converge si et seulement si $a + \dfrac{1}{2} > 1$ si et seulement si $a > \dfrac{1}{2}$. Par conséquent, $\sum u_n$ converge si $a > \dfrac{1}{2}$ et diverge si $a \in \left]\dfrac{1}{4}\,; \dfrac{1}{2}\right]$.
  — Supposons $a = \dfrac{1}{4}$. Alors $3a = a + \dfrac{1}{2}$ donc le numérateur est égal à 1, si bien que
  $$u_n = \frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}} \times (n^{3a}+1)} \sim \frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}} \times n^{3a}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$
  car on rappelle que $a = \dfrac{1}{4}$. Or, $\dfrac{3}{2} > 1$ donc on conclut comme d'habitude que $\sum u_n$ converge.
  — Supposons $a \in \left]0\,; \dfrac{1}{4}\right[$. Alors $3a < a + \dfrac{1}{2}$ donc le numérateur est équivalent à $-n^{a+\frac{1}{2}}$, d'où
  $$u_n \sim \frac{-n^{a+\frac{1}{2}}}{n^{a+\frac{1}{2}} \times n^{3a}} = \frac{-1}{n^{3a}}$$
  Or, $3a < \dfrac{3}{4} \leq 1$ donc, par comparaison de séries à termes négatifs, $\sum u_n$ diverge.
- Supposons $a = 0$. Alors $u_n = \dfrac{2-\sqrt{n}}{\sqrt{n} \times 2} \sim -\dfrac{1}{2}$. Par conséquent, u_n ne tend pas vers 0 donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Supposons $a < 0$. Alors $n^{3a}+1 \sim 1$ donc le dénominateur est équivalent à $n^{a+\frac{1}{2}} \times 1 = n^{a+\frac{1}{2}}$. Donnons un équivalent du numérateur $n^{3a}+1-n^{a+\frac{1}{2}}$. On sait que $a < 0$ donc $a < \frac{1}{4}$ donc n^{3a} est négligeable devant $n^{a+\frac{1}{2}}$. Cependant, on ne sait pas qui gagne entre 1 et $n^{a+\frac{1}{2}}$: là aussi, il faut distinguer les cas.
  — Si $a > -\dfrac{1}{2}$ alors 1 est négligeable devant $n^{a+\frac{1}{2}}$ donc le numérateur est équivalent à $-n^{a+\frac{1}{2}}$ si bien que
  $$u_n \sim \frac{-n^{a+\frac{1}{2}}}{n^{a+\frac{1}{2}}} = -1$$
  Dès lors, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

— Si $a = -\dfrac{1}{2}$ alors $n^{a+\frac{1}{2}} = 1$ et donc le numérateur de u_n est égal à $n^{3a} = n^{-3/2}$ et donc

$$u_n \sim \frac{n^{-3/2}}{n^{a+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

et on conclut comme d'habitude que $\sum u_n$ converge (car $3/2 > 1$).

— Supposons enfin que $a < -\dfrac{1}{2}$. Alors $a + \dfrac{1}{2} < 0$ donc le numérateur est équivalent à 1. Finalement,

$$u_n \sim \frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}} = n^{-a-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et là aussi la série diverge grossièrement.

En conclusion, $\sum u_n$ converge si et seulement si $a > \dfrac{1}{2}, a = \dfrac{1}{4}$ ou $a = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 13 : ✪✪✪ Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

Correction : L'idée est d'osciller entre 0 et 1 en faisant des pas de plus en plus petits : on pose $u_0 = 0$ si bien que $S_0 = 0$, puis $u_1 = 1$ si bien que $S_1 = 1$, puis $u_2 = u_3 = -1/2$ si bien que $S_0 = 0$, puis $u_4 = u_5 = u_6 = 1/3$ si bien que $S_6 = 1$ etc. On pourrait donner le terme général de la même façon que dans l'exercice 16 du chapitre précédent, mais ce n'est pas nécessaire : les sommes partielles vont alterner entre 0 et 1 donc ne vont pas admettre de limite mais vont être bornées, donc la série va converger, alors que le terme général tend vers 0.

Exercice 14 - Une identité de Lehmer (1936) : ✪✪✪ On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0 & F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} & F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

On rappelle enfin que si on pose

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

alors pour tout $n \geq 0$

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

1. Montrer que la série $\sum \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2n+1}}\right)$ converge.
2. Calculer $\varphi \times \psi$.
3. Montrer que ${F_{2n+1}}^2 = F_{2n}F_{2n+2} + 1$.
4. En déduire que

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

5. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Correction :

1. Puisque $\varphi > 1$ et $|\psi| < 1$, alors $\varphi^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\psi^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si bien que $F_n \sim \varphi^n/\sqrt{5}$ et donc

$$\frac{1}{F_{2n+1}} \sim \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Dès lors

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) \sim \frac{1}{F_{2n+1}} \sim \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2n+1}}$$

Or, $1/\varphi^2 < 1$ donc la série géométrique $\sum 1/\varphi^{2n}$ converge. On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature : la série converge.

2. $\varphi \times \psi = -1$.
3. D'après la question précédente, $\psi^{2n} \times \varphi^{2n} = (-1)^{2n} = 1$ et $\psi^{2n+1} \times \varphi^{2n+1} = (-1)^{2n+2} = -1$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
F_{2n}F_{2n+2}+1 &= \left(\frac{\varphi^{2n}-\psi^{2n}}{\sqrt{5}}\right) \times \left(\frac{\varphi^{2n+2}-\psi^{2n+2}}{\sqrt{5}}\right) + 1 \\
&= \frac{\varphi^{4n+2} - \varphi^{2n}\psi^{2n+2} - \varphi^{2n+2}\psi^{2n} + \psi^{4n+2}}{5} + 1 \\
&= \frac{\varphi^{4n+2} - \psi^2 - \varphi^2 + \psi^{4n+2}}{5} + 1 \\
&= \frac{\varphi^{4n+2} - \psi^2 - \varphi^2 + \psi^{4n+2} + 5}{5}
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\varphi^2 + \psi^2 &= \frac{1+5+2\sqrt{5}+1+5-2\sqrt{5}}{4} \\
&= 3
\end{aligned}$$

si bien que

$$F_{2n}F_{2n+2}+1 = \frac{\varphi^{4n+2}+2+\psi^{4n+2}}{5}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
{F_{2n+1}}^2 &= \left(\frac{\varphi^{2n+1}-\psi^{2n+1}}{\sqrt{5}}\right)^2 \\
&= \frac{\varphi^{4n+2} - 2\varphi^{2n+1}\psi^{2n+1} + \psi^{4n+2}}{5} \\
&= \frac{\varphi^{4n+2}+2+\psi^{4n+2}}{5}
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

4. Souvenirs du chapitre 5... Le membre de gauche appartient à $]-\pi/2\,;\pi/2\,[$ et le membre de droite également. En effet, la suite (F_n) est croissante et positive donc la suite $(1/F_n)$ est décroissante et positive, si bien que

$$0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) < \frac{\pi}{2}$$

Par conséquent, pour montrer que les deux quantités de l'énoncé sont égales, il suffit de prouver qu'elles ont la même tangente. D'une part :

$$\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)\right) = \frac{1}{F_{2n+1}}$$

et d'autre part, si on note B le membre de droite de l'énoncé (on se souvient de la formule de trigo $\tan(a+b)$) :

$$\begin{aligned}
\tan(B) &= \frac{\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2n}}\right)\right)-\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2n+2}}\right)\right)}{1+\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2n}}\right)\right)\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2n+2}}\right)\right)}\\
&= \frac{\dfrac{1}{F_{2n}}-\dfrac{1}{F_{2n+2}}}{1+\dfrac{1}{F_{2n}}\times\dfrac{1}{F_{2n+2}}}\\
&= \frac{\dfrac{F_{2n+2}-F_{2n}}{F_{2n}F_{2n+2}}}{\dfrac{F_{2n}F_{2n+2}+1}{F_{2n}F_{2n+2}}}\\
&= \frac{F_{2n+2}-F_{2n}}{F_{2n}F_{2n+2}+1}
\end{aligned}$$

Par définition de la suite de Fibonacci, le numérateur est égal à F_{2n+1} et, d'après la question précédente, le dénominateur est égal à ${F_{2n+1}}^2$ si bien que $\tan(B)=1/F_{2n+1}$ ce qui permet de conclure.

5. Soit $N\geq 1$. D'après la question précédente et par télescopage :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right)\\
&= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_2}\right)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2N+2}}\right)\\
&= \operatorname{Arctan}(1)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2N+2}}\right)\\
&= 1-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2N+2}}\right)
\end{aligned}$$

Or, $F_{2N+2}\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty$ si bien que $1/F_{2N+2}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$ et l'Arctangente étant continue,

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2N+2}}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\operatorname{Arctan}(0)=0$$

En d'autres termes, la somme partielle de la série tend vers $\pi/4$ ce qui est le résultat voulu.

Exercice 15 - Série des inverses des nombres premiers : ✪✪✪ On note $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Le but de cet exercices est de prouver que la série $\sum 1/p_n$ diverge. On raisonne par l'absurde en supposant qu'elle converge.

1. Montrer qu'il existe $k\geq 1$ tel que

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{p_n}<\frac{1}{2}$$

Dans la suite, un entier naturel n est dit grand s'il admet un diviseur premier supérieur ou égal à p_{k+1}, et il est dit petit dans le cas contraire, c'est-à-dire si tous ses diviseurs premiers sont inférieurs ou égaux à p_k (en particulier, un nombre premier petit est un nombre premier parmi $p_1,\dots,p_k$). Si $N\geq 2$, on note enfin N_g le nombre de grands entiers appartenant à $[\![2\,;\,N]\!]$, et N_p le nombre d'entiers petits appartenant à $[\![2\,;\,N]\!]$. On se donne dans la suite un entier $N\geq 2$.

2. Exprimer N en fonction de N_g et N_s.
3. Si $i\in\mathbb{N}^*$, donner le nombre de multiples de p_i inférieurs ou égaux à N. En déduire les deux inégalités suivantes :

$$N_g\leq\sum_{i=k+1}^{+\infty}\left\lfloor\frac{N}{p_i}\right\rfloor<\frac{N}{2}$$

4. Soit $n\leq N$ un entier petit. Montrer qu'il existe a_n un entier produit de petits nombres premiers distincts et $b_n\in\mathbb{N}$ tels que $n=a_n\times {b_n}^2$. En déduire que $N_p\leq 2^k\times\sqrt{N}$.

5. Conclure.

Remarque : On vient de redémontrer au passage l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Le résultat de cet exercice découle en fait immédiatement du théorème des nombres premiers, qui stipule que $p_n \sim n\ln(n)$, et on sait que la série de terme général $1/n\ln(n)$ diverge (c'est une série de Bertrand)... sauf que ce résultat est incroyablement plus difficile à obtenir !

Correction :

1. Le reste d'une série convergente tend vers 0 donc est strictement inférieur à 1/2 pour k assez grand.
2. Puisque $[\![2\,;N]\!]$ est l'union disjointe de l'ensemble des grands entiers et de l'ensemble des petits entiers, on a $N-1 = N_g + N_p$.
3. Il y a $\lfloor N/pi \rfloor$ multiples de p_i (non nuls) inférieurs ou égaux à N (voir par exemple le chapitre 2.5).

   Prouvons à présent les deux inégalités de l'énoncé (erreur d'énoncé : l'indice de sommation est i et non pas n). Précisons tout d'abord que la somme est en fait finie puisque la suite des nombres premiers tend vers $+\infty$ donc finit par dépasser (strictement) N et alors la partie entière est nulle.

   Si on note E_g l'ensemble des grands entiers de $[\![2\,;N]\!]$ (dont le cardinal est N_g), E_g est l'union (non disjointe) des E_i, ensemble des multiples de p_i inférieurs ou égaux à N, et on vient de montrer que son cardinal est égal à $\lfloor N/p_i \rfloor$. La première inégalité vient donc du fait que le cardinal d'une union est inférieur à la somme des cardinaux. De plus, par définition de la partie entière, pour tout i, $\lfloor N/p_i \rfloor \leq N/p_i$ donc

$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor \leq \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{N}{p_i} = N \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{N}{2}$$

   par choix de k (cf. question 1).
4. Notons $n = {p_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times {p_s}^{\alpha_s}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers (en particulier, les p_i sont des entiers premiers petits distincts). L'idée est de regrouper les $+1$ lorsque les décompositions p-adiques sont impaires : pour tout i, notons $\alpha_i = 2q_i + r_i$ avec $r_i = 0$ ou 1 selon la parité de α_i, si bien que

$$n = {p_1}^{r_1} \times \cdots \times {p_s}^{r_s} \times {p_1}^{2q_1} \times \cdots \times {p_s}^{2q_s}$$

   Il suffit de poser

$$a_n = {p_1}^{r_1} \times \cdots \times {p_s}^{r_s} \qquad \text{et} \qquad b_n = {p_1}^{q_1} \times \cdots \times {p_s}^{q_s}$$

   Quitte à rajouter des nombres premiers avec une puissance nulle (donc des termes égaux à 1), tout élément n petit s'écrit donc sous la forme (rappelons que $p_1, \dots, p_k$ sont les nombres premiers petits) :

$$n = {p_1}^{r_1} \times \cdots \times {p_k}^{r_k} \times {b_n}^2$$

   avec les r_i égaux à 0 ou 1. Un tel entier n est entièrement déterminé par les choix des r_i (2 choix à chaque fois, 0 ou 1, et donc il y a 2^k possibilités par principe multiplicatif) et le choix de b_n : or, ${b_n}^2 \leq n \leq N$ donc $b_n \leq \sqrt{N}$: il y a donc au plus $\sqrt{N}$ possibilités. Par principe multiplicatif, il y a au plus $2^k \times \sqrt{N}$ choix possibles pour un entier petit, d'où le résultat.
5. Pour tout N, il découle des questions précédentes que

$$N = N_g + N_p - 1 < \frac{N}{2} + 2^k \times \sqrt{N} + 1$$

   Or, lorsque $N \to +\infty$, $N/2 + 2^k\sqrt{N} + 1 \sim N/2$ (rappelons que k est fixe) ce qui est absurde pour une quantité supérieure ou égale à N : la série des $1/p_n$ diverge.

2 Calculs de sommes

Les séries dont on peut calculer la somme sont assez rares. Il y a deux façons de faire : en général, il faut calculer la somme partielle explicitement à l'aide d'un télescopage, et passer à la limite, mais on peut également utiliser des sommes infinies de référence pour calculer la somme infinie demandée.

Exercice 16 : ✪ Prouver la convergence de la série de terme général $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ et calculer sa somme.

Correction : Une décomposition en éléments simples donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Soit $N \geq 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} 1\end{aligned}$$

La suite des sommes partielles tend vers 1 : d'une part, on en déduit que la série converge (car la suite des sommes partielles admet une limite finie), et d'autre part, que la somme de la série vaut 1 (la somme de la série est, quand elle existe, la limite des sommes partielles).

Exercice 17 : ✪ Même chose avec la série $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Correction : Soit $N \geq 2$.

$$\begin{aligned}S_N &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \\ &= \ln\left(\prod_{n=2}^{N} \frac{n^2-1}{n^2}\right) \\ &= \ln\left(\prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n} \times \prod_{n=2}^{N} \frac{n+1}{n}\right)\end{aligned}$$

Ces deux produits sont télescopiques et on trouve finalement

$$S_N = \ln\left(\frac{1}{N} \times \frac{N+1}{2}\right)$$

Par continuité de la fonction ln,$S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln(2)$: la suite des sommes partielles admet une limite finie, donc la série converge (ce qu'on aurait pu montrer directement en utilisant le théorème de comparaison pour les séries négatives, exo) et donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)$. Remarquons que le signe est cohérent.

Exercice 18 : ✪ En utilisant la valeur de e comme somme de série, calculer

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!} \qquad S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n!}}{n!} \qquad \text{et} \qquad S_4 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$$

Correction : On rappelle que $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. En particulier, les séries $\sum \frac{1}{n!}, \sum \frac{1}{(n-1)!}$ etc. convergent : on peut casser toutes les sommes sans se poser de questions.

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= 2e
\end{aligned}$$

De même pour S_2 :

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} - 2e \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} - 2e \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - 2e \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} - 2e \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} - 2e \\
&= e + e - 2e \\
&= 0
\end{aligned}$$

Enfin, pour S_3, la priorité est de se débarrasser du (-1) : or, on remarque que ce n'est pas $(-1)^n$ (et donc on n'utilisera pas la somme $e^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$) mais $(-1)^{n!}$: il suffit de voir que $n!$ est pair pour $n \geq 2$ donc

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{-1}{0!} - \frac{1}{1!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= -2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \\
&= -2 + e - 2 \\
&= e - 4
\end{aligned}$$

Enfin, pour S_4 :

$$\begin{aligned}
S_4 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(p+1)^2}{p!} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^2+2p+1}{p!} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^2}{p!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2p}{p!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{p}{(p-1)!} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(p-1)!} + e \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{k!} + e \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{k!} + e \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + e + 2e + e \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + e + 2e + e \\
&= 5e
\end{aligned}$$

Exercice 19 : ✪✪ En utilisant la valeur de $\zeta(2)$ calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Correction : Puisque la première somme est celle des termes impairs, on sépare les termes dans $\zeta(2)$ selon leur parité :

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Effectuons le changement d'indice $n = 2p$ dans la première somme, et $n = 2p+1$ dans la seconde, ce qui donne (et on rappelle que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$) :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\\
&= \frac{\pi^2}{24}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}
\end{aligned}$$

Il en découle que $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$ (remarquons que le signe est cohérent). Calculons à présent la deuxième somme (on remarque que cette somme est bien définie car la série $\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument donc converge). Puisqu'il y a un $(-1)^n$, on pense à recommencer c'est-à-dire à séparer selon la parité de n. Si on note cette somme S,

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}+\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\\
&= \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\\
&= \frac{\pi^2}{24}-\frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$ (signe cohérent d'après le CSA : le reste est du signe du premier terme négligé).

Exercice 20 - La série des survivants : ✪✪ Dans la suite de terme général $1/n$ dont les termes sont écrits ci-dessous :

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$$

on supprime le premier terme, on garde le suivant, on supprime les deux suivants, on garde celui suit, puis on supprime les trois suivants et on garde celui qui suit etc. On note $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite ainsi obtenue. Prouver la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Correction : Cherchons une expression explicite des termes restants. On garde donc le terme $1/2$, puis le terme $1/5$, puis le terme $1/9$, puis le terme $1/14$ etc. Notons n_k le k-ième terme restant : avant n_k, il y a $k-1$ termes restants, puis k « processus d'élimination » c'est-à-dire qu'on a retiré

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
n_k &= \frac{k(k+1)}{2}+k\\
&= \frac{k^2+3k}{2}
\end{aligned}$$

et donc il ne reste que les termes de la forme $\frac{2}{k^2+3k}$, pour $k\geq 1$. Il ne coûte pas très cher de vérifier avec les premières valeurs que la formule est bonne. La série $\sum u_n$ est donc la série $\sum 1/n_k$ c'est-à-dire la série $\sum\frac{2}{k(k+3)}$. On trouve à l'aide d'une décomposition en éléments simples que pour tout k,

$$\frac{2}{k(k+3)} = \frac{2}{3k} - \frac{2}{3(k+3)}$$

Soit $N \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} u_k &= -\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k+3} \\
&= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{2}{3}\sum_{k=4}^{N+3}\frac{1}{k} \\
&= \left(\sum_{k=4}^{N}\frac{1}{k}\right)\times\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}\right) \\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{22}{9}
\end{aligned}$$

On en déduit que la série converge et que sa somme vaut $22/9$.

Exercice 21 : ✪✪

1. Déterminer a et b pour que la série $\sum \ln(n) + a\ln(n+1)\ + b\ln(n+2)$ converge.
2. Calculer alors sa somme.

Correction :

1. Essayons d'en donner un équivalent. Comme d'habitude dans un ln : on factorise le terme dominant, ce qui donne

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln(n) + a\ln(n) + a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ln(n) + b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \\
&= (1+a+b)\ln(n) + a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)
\end{aligned}$$

Si $a+b+1 \neq 0$ alors $u_n \sim (a+b+1)\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ selon le signe de $a+b+1$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement. Par conséquent, pour que la série converge, il faut que $a+b+1$ soit nul, ce qu'on suppose dans la suite. La condition $a+b+1$ est donc NÉCESSAIRE pour que la série converge, mais on ne sait pas encore si elle est suffisante. Bien sûr, personne n'aurait osé écrire $u_n \sim (a+b+1)\ln(n)$ sans avoir supposé que $a+b+1 \neq 0$ car il est formellement interdit de dire « équivalent à 0 ».

Reprenons le calcul précédent et faisons un DL de $\ln(1+u)$ à l'ordre 1 (les deux quantités dans les ln tendent bien vers 0) :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{a}{n} + \frac{2b}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{a+2b}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Si $a+2b \neq 0$ alors $u_n \sim \dfrac{a+2b}{n}$. Or, $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique, ou car c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1 \leq 1$). On a des séries à termes de signe constant (on ne connaît pas le signe de $a+2b$) équivalents donc les séries sont de même nature : $\sum u_n$ diverge. Par conséquent, pour que la série converge, il faut que $a+2b=0$, ce qu'on suppose dans la suite. Là aussi, c'est une condition NÉCESSAIRE.

Si on en reste au calcul précédent, on a $u_n = \mathrm{o}\left(1/n\right)$ ce qui ne permet pas de conclure car la série harmonique diverge : il faut faire un DL à un ordre plus grand : poussons le DL de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 ce qui donne (rappelons que $a+2b=0$)

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{a}{n} - \frac{a}{2n^2} + \frac{2b}{n} - \frac{2b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{-a-4b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Or, rappelons qu'on a supposé que $a+b+1=0$ et $a+2b=0$: il en découle que $b=1$ et $a=-2$, si bien que

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2-4}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{-2}{n^2} \end{aligned}$$

On a des séries à termes négatifs équivalents donc de même nature. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$) donc la série $\sum u_n$ converge. En conclusion, pour que la série converge, on a vu qu'il était nécessaire que $a+b+1=0$ et $a+2b=0$, mais on vient de voir que c'est également suffisant. Finalement, la série converge si et seulement si $a+b+1=0$ et $a+2b=0$ si et seulement si $a=-2$ et $b=1$.

2. Calculons alors la somme : pour cela, calculons la somme partielle et passons à la limite. Soit $N \geq 1$ (la série est définie à partir du rang 1 car il y a un $\ln(n)$ qui n'est pas défini à partir de $n=0$). Posons $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$. Dès lors,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \ln(n) - 2\sum_{n=1}^N \ln(n+1) + \sum_{n=1}^N \ln(n+2) \\ &= \sum_{n=1}^N \ln(n) - 2\sum_{p=2}^{N+1} \ln(p) + \sum_{k=3}^{N+2} \ln(k) \\ &= \sum_{n=1}^N \ln(n) - 2\sum_{n=2}^{N+1} \ln(n) + \sum_{n=3}^{N+2} \ln(n) \\ &= \left(\sum_{n=3}^N \ln(n)\right) \times (1-2+1) + \ln(1) + \ln(2) - 2\ln(2) - 2\ln(N+1) + \ln(N+1) + \ln(N+2) \\ &= -\ln(2) + \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{N+1}{N+2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$ et le ln est une fonction continue donc

$$\ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(1) = 0$$

si bien que $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln(2)$. Finalement, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln(2)$. Il y avait une autre méthode :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \ln(n) - \sum_{n=1}^N \ln(n+1) - \sum_{n=1}^N \ln(n+1) + \sum_{n=1}^N \ln(n+2) \\ &= \sum_{n=1}^N (\ln(n) - \ln(n+1)) + \sum_{n=1}^N (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \\ &= \ln(1) - \ln(N+1) + \ln(N+2) - \ln(2) \\ &= -\ln(2) + \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) \end{aligned}$$

et on conclut de la même façon.

Exercice 22 : ✪✪ Montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$$

Correction : Cherchons pour quelles valeurs de n le numérateur est non nul. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le numérateur est non nul si et seulement s'il existe k tel que $\sqrt{n} < k \leq \sqrt{n+1}$ donc tel que $n < k^2 \leq n+1$ si et seulement s'il existe k tel que $n+1 = k^2$ (car il n'est pas possible d'avoir $n < k^2 < n+1$). En d'autres termes, le numérateur est non nul si et seulement si $n+1$ est un carré parfait, et alors le terme vaut $1/n$ puisque les deux parties entières sont distantes de 1. La série de l'énoncé est donc la série des $1/n$ avec $n+1$ carré parfait, donc la série des $1/(k^2-1)$ (pour $k \geq 2$). La série est donc convergence et on trouve comme d'habitude (décomposition en éléments simples et changement d'indice) que la somme vaut $3/4$.

Exercice 23 : ✪✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $c(n)$ le nombre de chiffres de n en écriture décimale. Montrer la convergence de la série $\sum \dfrac{c(n)}{n(n+1)}$ et calculer sa somme.

Correction : Rappelons (cf. chapitre 2) que pour tout n, $c_n = \left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1$ si bien que, si on note u_n le terme général, $u_n \sim \ln(n)/n^2$ donc est négligeable devant $1/n^{3/2}$ donc la série converge. Calculons à présent la somme. Puisque la suite des sommes partielles converge, toutes ses suites extraites convergent vers la même limite, donc il suffit de donner la limite de la suite (S_{10^N}) (cela simplifie les calculs). En décomposant en éléments simples avec des changements d'indice, cela donne :

$$\begin{aligned}
S_{10^N} &= \sum_{n=1}^{10^N} c(n) \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{10^N} \frac{c(n)}{n} - \sum_{n=1}^{10^N} \frac{c(n)}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{10^N} \frac{c(n)}{n} - \sum_{n=2}^{10^N+1} \frac{c(n-1)}{n} \\
&= \sum_{n=2}^{10^N} \frac{c(n)-c(n-1)}{n} + \frac{c(1)}{1} - \frac{c(10^N)}{10^N+1} \\
&= \sum_{n=2}^{10^N} \frac{c(n)-c(n-1)}{n} + 1 - \frac{N+1}{10^N+1}
\end{aligned}$$

Comme dans l'exercice ci-dessus, le numérateur ci-dessus est non nul si et seulement si n est une puissance de 10 (car n et $n-1$ ont le même nombre de chiffres sauf si n gagne un chiffre supplémentaire i.e. lorsque n est une puissance de 10), et alors il vaut 1. Dès lors,

$$S_{10^N} = \sum_{n=2, n \text{ puissance de } 10}^{10^N} \frac{1}{n} + 1 - \frac{N+1}{10^N+1}$$

On peut donc faire le changement d'indice $n = 10^p$:

$$\begin{aligned}
S_{10^N} &= \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{10^p} + 1 - \frac{N+1}{10^N+1} \\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{1-1/10} - 1 + 1 - 0 = \frac{10}{9}
\end{aligned}$$

Exercice 24 : ✪✪✪

1. On rappelle que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

   Montrer l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$. Commenter le signe.

2. **Remake :** Prouver l'existence et donner la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\right)$$

Correction :

1. Notons u_n le terme général. On a $u_n = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)} \sim \dfrac{6}{2n^3} = \dfrac{3}{n^3}$ et on conclut que la série diverge par théorème de comparaison des séries à termes positifs (on pouvait aussi dire que $u_n \leq 1/n^2$). À l'aide d'une décomposition en éléments simples, on trouve que pour tout $n \geq 1$,
$$u_n = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}$$
Le calcul de la somme est difficile car ici on ne va pas s'en tirer avec un simple télescopage. Soit $N \geq 1$.
$$\begin{aligned} S_N = \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2} &= \sum_{n=1}^N \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} \\ &= 6\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + 6\sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} - 24\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} \\ &= 6\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + 6\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} - 24\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} \\ &= 12\sum_{n=2}^N \frac{1}{n} + 6 + \frac{6}{N+1} - 24\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1}. \end{aligned}$$
On cherche à utiliser l'indication de l'énoncé sur $\displaystyle\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$: il manque le terme pour $n=1$, que l'on rajoute et que l'on enlève pour compenser, ce qui donne :
$$S_N = 12\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 12 + 6 + \frac{6}{N+1} - 24\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} = 12\ln(N) + 12\gamma - 6 - 24\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} + \mathrm{o}\left(1\right),$$
car $1/N = \mathrm{o}\left(1\right)$. La somme contient tous les nombres impairs de 3 à $2N+1$, on va rajouter tous les nombres pairs de 2 à $2N$ (c'est-à-dire tous les nombres de la forme $2n$ avec n allant de 1 à N) ce qui donnera tous les nombres de 2 à $2N+1$:
$$\begin{aligned} S_N &= 12\ln(N) + 12\gamma - 6 - 24\left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n}\right) + \mathrm{o}\left(1\right) \\ &= 12\ln(N) + 12\gamma - 6 - 24\left(\sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}\right) + \mathrm{o}\left(1\right) \\ &= 12\ln(N) + 12\gamma - 6 - 24\sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n} + 12\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(1\right). \end{aligned}$$
On utilise à nouveau le développement asymptotique rappelé dans l'énoncé pour la dernière somme, quant à la précédente, cela donne :
$$\sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n} - 1 = \ln(2N+1) + \gamma - 1 + \mathrm{o}\left(1\right).$$
Donc
$$\begin{aligned} S_N &= 12\ln(N) + 12\gamma - 6 - 24(\ln(2N+1) + \gamma - 1) + 12(\ln(N) + \gamma) + \mathrm{o}\left(1\right) \\ &= 12\ln(N) + 12\gamma - 6 - 24\ln(2) - 24\ln(N) - 24\ln\left(1 + \frac{1}{2N}\right) \\ &\qquad - 24\gamma + 24 + 12\ln(N) + 12\gamma + \mathrm{o}\left(1\right). \end{aligned}$$
(on a factorisé par $2N$ dans $\ln(1+2N)$) donc $S_N = 18 - 24\ln(2) + \mathrm{o}\left(1\right)$ donc $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 18 - 24\ln(2)$ donc, finalement,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2} = 18 - 24\ln(2).$$
Remarquons que le signe est cohérent : en effet, $\ln(2) \approx 0.693 < 0.7$ donc $18 - 24\ln(2) = 6(3 - 4\ln(2)) > 0$ car $4\ln(2) < 4 \times 0.7 = 2.8$.

2. Erreur d'énoncé : on demande de prouver l'existence et de calculer la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)$$

Notons encore une fois u_n le terme général. Pour prouver la convergence de la série, on pourrait mettre u_n au même dénominateur et donner un équivalent (c'est long...) ou remarquer que

$$\frac{1}{4n+1}=\frac{1}{4n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et c'est pareil pour $1/(4n+2), 1/(4n+3)$ et $1/(4n+4)$ si bien que

$$u_n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et on conclut comme d'habitude que la série converge. Calculons sa somme. Soit $N\geq 1$.

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)-4\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{4n+2}\end{aligned}$$

La première somme contient tous les inverses des entiers (quelle que soit leur congruence modulo 4) entre 1 et $4N+4$, et on reconnaît dans la deuxième (après simplification) la somme des inverses des nombres impairs, si bien que :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{4N+4}\frac{1}{n}-2\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n+1}\\ &= \sum_{n=1}^{4N+4}\frac{1}{n}-2\left(\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{4N+4}\frac{1}{n}-2\left(\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)\\ &= \ln(4N+4)+\gamma-2\left(\ln(2N+1)+\gamma-\frac{1}{2}(\ln(N)+\gamma)\right)+\mathrm{o}(1)\\ &= \ln(N)+\ln\left(4+\frac{4}{N}\right)+\gamma-2\ln(N)-2\ln\left(2+\frac{1}{N}\right)-2\gamma+\ln(N)+\gamma+\mathrm{o}(1)\\ &= \ln\left(4+\frac{4}{N}\right)-2\ln\left(2+\frac{1}{N}\right)+\mathrm{o}(1)\\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(4)-2\ln(2)=0\end{aligned}$$

Finalement, cette somme est nulle.

3 Séries alternées

Exercice 25 : ✪✪ Donner la nature des séries suivantes :

1. $\sum\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$
2. $\sum\sin\left(\pi\times\dfrac{n^3+1}{n^2+1}\right)$.
3. $\sum\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin(x)}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$
4. $\sum(-1)^n\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e\right)$
5. $\sum(-1)^n e^{1/n}$
6. $\sum(-1)^n\sqrt{n}\times\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
7. $\sum\ln(n)\times\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$
8. $\sum\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$
9. $\sum\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$

10. $\sum \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$ 11. ✪✪✪ $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ 12. $\sum \left(\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$

Correction : Notons à chaque fois le terme général u_n. La méthode est souvent la même (cf. cours) : on applique le CSA pour les premiers termes et on fait un développement asymptotique jusqu'à obtenir de la convergence absolue.

1.
$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\right) \\ &= \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= (-1)^n\times sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\sim \frac{(-1)^n\pi}{2n} \end{aligned}$$

mais cela ne permet pas de conclure puisque le critère d'équivalence ne permet de conclure que lorsque le terme général est de signe constant : il faut faire un DL à un ordre plus grand. Il suffit en fait d'un O bien placé : le terme suivant étant un $\mathrm{O}\left(1/n^4\right)$, il vient :

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\right) \\ &= \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\ &= \sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= (-1)^n\times sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n\pi}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

La série de terme général $(-1)^n\pi/2n$ converge d'après le critère des séries alternées (alternée, décroît en valeur absolue vers 0) et la deuxième (celle dont le terme général est un $\mathrm{O}\left(1/n^3\right)$) converge puisque $\sum 1/n^3$ converge (encore une fois, pour le critère des o ou O, seule le terme général à l'intérieur a besoin d'être positif). Par somme, $\sum u_n$ converge.

2. Effectuons la division euclidienne de n^3+1 par n^2+1, ce qui donne :

$$n^3+1=(n^2+1)\times n-n+1$$

si bien que

$$\begin{aligned} u_n &= \sin\left(n\pi+\frac{-n+1}{n^2+1}\right) \\ &= (-1)^n\sin\left(\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\times\frac{1}{1+\dfrac{1}{n^2}}\right) \\ &= (-1)^n\sin\left(\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\times\left(1+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= (-1)^n\sin\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et on conclut comme précédemment que la série converge.

3. Soit $n \geq 1$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x\ln(x)}$ est du signe du sinus donc est du signe de $(-1)^n$ entre $n\pi$ et $(n+1)\pi$: la série $\sum u_n$ est bien alternée. De plus, $|u_n|$ est l'intégrale obtenue en ajoutant la valeur absolue sur le sinus. Par conséquent, à l'aide du changement de variable $u = x - \pi, x = u + \pi$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ dans la première intégrale :

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}| - |u_n| &= \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(u+\pi)|}{(u+\pi)\ln(u+\pi)}\,\mathrm{d}u - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|-\sin(u)|}{(u+\pi)\ln(u+\pi)}\,\mathrm{d}u - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(u)| \times \left(\frac{1}{(u+\pi)\ln(u+\pi)} - \frac{1}{u\ln(u)}\right)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Or, pour tout $u \in [\, n\pi\,; (n+1)\pi\,]$, $u \leq u + \pi$ et $\ln(u) \leq \ln(u+\pi)$ si bien que la fonction intégrée est négative : par positivité de l'intégrale, $|u_{n+1}| - |u_n| \leq 0$: le terme général de la série décroît en valeur absolue. Il suffit donc de prouver que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il suffit de voir que

$$|u_n| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{(n+1)\pi\ln((n+1)\pi)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{(n+1)\pi\ln((n+1)\pi)}$$

donc, d'après le théorème d'encadrement, $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: d'après le CSA, $\sum u_n$ converge.

4. L'équivalent obtenu à l'exercice 23 du chapitre 24, à savoir

$$u_n \sim (-1)^{n+1} \times \frac{e}{2n}$$

ne suffit pas pour les mêmes raisons que précédemment. Il faut donc donner un développement asymptotique avec une plus grande précision.

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} \\
&= e^{1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\
&= e \times e^{-\frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\
&= e \times \left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Il en découle que

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}e}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et on conclut comme précédemment.

5. Le terme général ne tend pas vers 0 (vers 1 en valeur absolue) donc la série diverge grossièrement.

6.
$$\begin{aligned}
u_n &= (-1)^n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)
\end{aligned}$$

et on conclut comme d'habitude.

7.
$$\begin{aligned} u_n &= \ln(n) \times \left(\frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Or, la fonction $x \mapsto \ln(x)/x$ décroît sur $[\, e\,; +\infty\,[$ vers 0 donc la série de terme général $(-1)^n \ln(n)/n$ décroît (à partir du rang 3 mais les premiers termes n'influent pas sur la nature d'une série) vers 0 si bien que la série de terme général $(-1)^n \ln(n)/n$ converge. De plus, comme d'habitude, on prouve que

$$\mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui permet de conclure.

8.
$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{1/2} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \sqrt{n} \\ &= \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

et on conclut comme d'habitude.

9.
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{(-1)^n}{n} \times \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et on conclut comme d'habitude.

10.
$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Or, d'après le CSA, la série $\sum (-1)^n/\sqrt{n}$ converge, et la série harmonique diverge : la série $\sum u_n$ diverge car somme d'une série convergente et d'une série divergente.

11. Écrivons u_n sous forme exponentielle et utilisons la formule de Stirling sous la forme suivante (indispensable pour appliquer le ln) :

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}(1 + \mathrm{o}(1))$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n e^{-\frac{1}{n}\left(\sqrt{2\pi} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + \ln(1+\mathrm{o}(1))\right)} \\ &= (-1)^n e^{-\ln(n) + \mathrm{o}(1)} \\ &\sim \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

si bien que la suite (u_n) est alternée et tend vers 0 (la méthode habituelle ne donnerait rien ici à cause du $\mathrm{o}(1)$ dans l'équivalent de $n!$: il donnera un $\mathrm{o}(1/n)$, et on ne peu rien faire pour l'améliorer). Il faut à présent prouver qu'elle est décroissante en valeur absolue. Or,

$$\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \iff (n!)^{\frac{n+1}{n}} \leq (n+1)! \iff (n!)^{n+1} \leq (n+1)!^n$$

Or, puisque $1 \times 2 \times \cdots \times n = n! \leq (n+1)^n$:

$$\begin{aligned}(n+1)!^n &= n!^n \times (n+1)^n \\ &\geq n!^n \times n! \\ &\geq n!^{n+1}\end{aligned}$$

ce qui permet d'appliquer le CSA : la série converge.

12. À l'aide du DL $(1+u)^{1/2} = 1 + u/2 - u^2/8 + \mathrm{O}\left(u^3\right)$, on prouve comme ci-dessus que

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le premier terme est le terme général d'une série convergente d'après le CSA, et le dernier également, et le second est le terme général d'une série divergente. Convergente + divergente = divergente donc la série diverge.

Exercice 26 : ✪✪ Soit $\alpha > 0$. Donner la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Correction : Tout d'abord, $\alpha > 0$ donc

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Rappelons que le théorème de comparaison avec des équivalences ne s'applique pas lorsque les séries ne sont pas de signe constant. Une seule solution : poursuivre le DL jusqu'à obtenir une puissance strictement supérieure à 1 pour appliquer le théorème de comparaison avec des o ou des O. Tout d'abord :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

Si $\alpha > 1/2$ alors $2\alpha > 1$ donc la série $\sum 1/n^{2\alpha}$ converge (série de Riemann de paramètre $2\alpha > 1$). D'après les théorèmes de comparaison (on a juste besoin que la série dont le terme général soit dans le O soit positive, ce qui est le cas ici), le O est le terme général d'une série convergente, et d'après le CSA, la série de terme général $(-1)^n/n^\alpha$ (on a bien une série alternée dont le terme général décroît vers 0). Par somme, la série $\sum u_n$ converge.

Supposons à présent que $\alpha \in]\,0\,;1/2\,]$. Poursuivons le DL jusqu'à avoir une puissance strictement supérieure à 1 : notons p le plus petit entier tel que $p\alpha > 1$ si bien que

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^3 + \cdots + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \frac{(-1)^n}{3n^{3\alpha}} + \cdots + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\end{aligned}$$

Les termes d'ordre pair sont du type $-1/2kn^{2k\alpha}$ donc sont des termes généraux de séries divergentes (car les puissances sont inférieures à 1). Attention, une somme de termes généraux de séries divergentes peut converger, mais ce n'est pas possible ici car les termes sont tous de même signe. Par conséquent, les termes pairs donnent une série divergente, et les termes d'ordre impair des séries convergentes d'après le CSA : puisque la somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente, la série diverge. En conclusion, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.

Exercice 27 : ✪✪✪

1. Montrer que la suite de terme général

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln(k)}{k}\right) - \frac{\ln(n)^2}{2}$$

converge.

2. Montrer que la série $\sum (-1)^n \times \dfrac{\ln(n)}{n}$ converge et calculer sa somme.

Correction :

1. Comparons à une intégrale avec la fonction $f : x \mapsto \ln(t)/t$. Pour savoir quel type de dessin faire, il faut connaître la monotonie de f. Or, on trouve facilement que f est décroissante sur $[\,e\,;+\infty[$. On se donne donc $n \geq 3$. Soit $t \in [\,n\,;n+1\,]$. La fonction f étant décroissante sur cet intervalle (car $n \geq 3$), alors $f(t) \geq f(n+1)$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \geq \int_n^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

Soit donc $n \geq 3$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{[\ln(n+1)]^2}{2} + \frac{[\ln(n)]^2}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \left(\frac{[\ln(n+1)]^2}{2} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Or, en reconnaissant dans l'intégrale ci-dessus une fonction du type $f \times f'$ (avec $f = \ln$), une primitive en est $f^2/2$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{[\ln(t)]^2}{2}\right]_n^{n+1} \\ &= \frac{[\ln(n+1)]^2}{2} - \frac{[\ln(n)]^2}{2} \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, il vient donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ c'est-à-dire que la suite (u_n) est décroissante. Pour montrer qu'elle converge, il suffit donc de prouver qu'elle est minorée. De même que précédemment, on montre que pour tout $k \in [\![\, 3\,;\, n \,]\!]$,

$$\frac{\ln(k)}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

et par somme

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \geq \sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2}$$

La fonction ln étant croissante,

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \geq \frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2}$$

En ajoutant les termes d'ordre 1 (nul) et d'ordre 2, il vient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \geq \frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2} + \frac{\ln(2)}{2}$$

En d'autres termes,

$$u_n \geq -\frac{\ln(3)^2}{2} + \frac{\ln(2)}{2}$$

La suite (u_n) est décroissante minorée donc converge. Notons L la limite de cette suite.

2. La série converge d'après le CSA (la série est alternée et le terme général décroît, à partir du rang 3, vers 0). Calculons donc sa somme. Calculons S_{2n} (cela facilitera les calculs quand on fera un changement d'indice, et puisque la série converge, toutes les suites extraites de (S_n) convergent vers la somme de la série donc on peut choisir la suite extraite qui rend les calculs plus faciles). En séparant les termes pairs et termes impairs, il vient

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} \\ &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \end{aligned}$$

puisque $(-1)^k = 1$ si k est pair et $(-1)^k = -1$ si k est impair. Or,

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

Par conséquent,

$$S_{2n} = 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

Et en faisant le changement d'indice $j = 2k$ dans la première somme,

$$S_{2n} = 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(2j)}{2j} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

En cassant le premier ln et en simplifiant par 2, il vient

$$S_{2n} = \ln(2) \sum_{j=1} n \frac{1}{j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

On a la somme des $\ln(k)/k$ et on veut faire apparaître u_n : on ajoute donc le terme manquant, et on n'oublie pas de compenser, et on fait la même chose pour u_{2n} :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \ln(2) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(j)}{j} - \frac{\ln(n)^2}{2} + \frac{\ln(n)^2}{2} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + \frac{\ln(2n)^2}{2} - \frac{\ln(2n)^2}{2} \\ &= \ln(2) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + u_n + \frac{\ln(n)^2}{2} - u_{2n} - \frac{\ln(2n)^2}{2} \end{aligned}$$

En écrivant que $\ln(2n) = \ln(2) + \ln(n)$ et en développant à l'aide d'une identité remarquable, il vient

$$S_{2n} = \ln(2) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + u_n + \frac{\ln(n)^2}{2} - u_{2n} - \frac{\ln(2)^2 + 2\ln(2)\ln(n) + \ln(n)^2}{2}$$

Après simplification :

$$S_{2n} = \ln(2) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + v_n - v_{2n} - \frac{\ln(2)^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$$

En mettant $\ln(2)$ en facteur dans la somme et le $\ln(n)$, on obtient

$$S_{2n} = \ln(2) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln(n) \right) + u_n - u_{2n} - \frac{\ln(2)^2}{2}$$

Or,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$$

et si on note L la limite de la suite (u_n), on a également $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ ce qui fait que

$$S_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)\gamma + L - L - \frac{\ln(2)^2}{2}$$

Finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{\ln(2)^2}{2}$$

4 Séries « abstraites »

Exercice 28 : ✪ Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, et on suppose que $u_n \sim v_n$. Les deux séries sont donc de même nature.

1. Prouver que si les deux séries convergent, alors les restes sont équivalents.
2. ✪✪ Prouver que si les deux séries divergent, alors les sommes partielles sont équivalentes.

Correction : Par hypothèse, $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $v_n(1-\varepsilon) \leq u_n \leq v_n(1+\varepsilon)$.

1. Soit $N \geq n_0$. Appelons B_N le reste d'ordre N (donc la somme de $N+1$ à $+\infty$) de u_n et A_n le reste de v_n. Or, pour tout $n \geq N$, $n \geq n_0$ donc $v_n(1-\varepsilon) \leq u_n \leq v_n(1+\varepsilon)$. Par somme (on peut sommer jusque $+\infty$ car les séries convergent)
$$A_N(1-\varepsilon) \leq B_N \leq A_N(1+\varepsilon)$$
c'est-à-dire (tout est strictement positif) que $1-\varepsilon \leq B_N/A_N \leq 1+\varepsilon$ i.e. $A_N/B_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$: les restes sont bien équivalents.
2. Soit $N \geq n_0$. Si on note S_N la somme partielle des u_n et T_N celle des v_n :
$$S_N = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$
donc
$$\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + (1-\varepsilon)\sum_{n=n_0}^{N} v_n \leq S_N \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + (1+\varepsilon)\sum_{n=n_0}^{N} v_n$$
c'est-à-dire
$$S_{n_0-1} + (1-\varepsilon)(T_N - T_{n_0-1}) \leq S_N \leq S_{n_0-1} + (1+\varepsilon)(T_N - T_{n_0-1})$$
et donc
$$(1-\varepsilon)T_N + S_{n_0-1} - (1-\varepsilon)T_{n_0-1} \leq S_N \leq (1+\varepsilon)T_N + S_{n_0-1} - (1+\varepsilon)T_{n_0-1}$$
Or, la série $\sum v_n$ diverge et est à termes positifs donc $T_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$: il en découle qu'il existe n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$,
$$\frac{S_{n_0-1} - (1+\varepsilon)T_{n_0-1}}{T_N} \leq \varepsilon$$
De même, il existe n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$,
$$-\varepsilon \frac{S_{n_0-1} - (1-\varepsilon)T_{n_0-1}}{T_N}$$
Soit $N \geq \max(n_0, n_1, n_2)$. On déduit de ce qui précède que
$$(1-\varepsilon)T_N - \varepsilon T_N \leq S_N \leq (1+\varepsilon)T_N + \varepsilon T_N$$
et donc $1-2\varepsilon \leq S_N/T_N \leq 1+2\varepsilon$. D'où le résultat voulu.

Exercice 29 - Une inégalité bien pratique : ✪✪

1. Soient x et y deux réels. Montrer que $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes positifs. Donner la nature de $\sum \sqrt{a_n}/n$.
3. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge. La réciproque est-elle vraie ?
4. On pose
$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum {u_n}^2 \text{ converge} \right\}$$

(a) Montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ est stable par somme et par produit. En donner un élément dont aucun terme n'est nul.

(b) $\ell^2(\mathbb{N})$ contient-il des suites constantes non nulles ?

(c) Si $(u_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$, la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

(d) Montrer que si la série $\sum u_n$ converge absolument, la suite (u_n) appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$.

5. ✪✪✪ Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{e^{-\sqrt{\ln(n)}}}{\sqrt{n}}$ diverge.

Correction :

1. Rappelons que pour montrer une inégalité du type $A \geq |\alpha|$, il suffit de montrer que $A \geq \alpha$ et $A \geq -\alpha$. Méthode pour comparer deux quantités : on fait la différence et on donne le signe.

$$\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) - xy = \frac{\left(x^2-2xy+y^2\right)}{2} = \frac{(x-y)^2}{2} \geq 0$$

donc $\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \geq xy$. De même,

$$\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) + xy = \frac{\left(x^2+2xy+y^2\right)}{2} = \frac{(x+y)^2}{2} \geq 0$$

donc $\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \geq -xy$. Par conséquent, on a le résultat voulu.

2. D'après la question précédente avec $x = \sqrt{a_n}$ et $y = 1/n$, il vient

$$\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$$

Or, les deux séries $\sum a_n$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ convergent donc, par somme et multiplication par un scalaire, $\sum \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{n^2}\right)$ converge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge.

3. De même avec $x = \sqrt{u_n}$ et $y = \sqrt{u_{n+1}}$, on obtient $\sqrt{u_n u_{n+1}} \leq \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$ et on conclut de la même façon. La réciproque est fausse comme on le voit avec la suite (u_n) définie par $u_n = 1$ si n est pair et 0 si n est impair. En effet, $u_n u_{n+1} = 0$ pour tout n (car il y a toujours un terme impair parmi deux entiers consécutifs) donc la série $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge mais pas la série $\sum u_n$ car celle-ci diverge grossièrement.

4. (a) Soient (u_n) et (v_n) dans $\ell^2(\mathbb{N})$. On veut montrer que $(u_n)+(v_n) = (u_n+v_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$ donc que la série $\sum (u_n+v_n)^2$ converge. Or, pour tout $n, (u_n+v_n)^2 = {u_n}^2 + 2u_nv_n + {v_n}^2$. Par hypothèse, les deux séries $\sum {u_n}^2$ et $\sum {v_n}^2$ convergent. De plus, d'après la question 1,

$$|u_nv_n| \leq \frac{1}{2}\left({u_n}^2 + {v_n}^2\right)$$

Par somme et multiplication par un scalaire, la série de terme général $\dfrac{1}{2}\left({u_n}^2+{v_n}^2\right)$ converge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum |u_nv_n|$ converge : la série $\sum u_nv_n$ converge donc absolument donc converge. Il en découle que $(u_n+v_n)^2$ est somme de termes généraux de séries convergentes donc est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $(u_n+v_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$: $\ell^2(\mathbb{N})$ est stable par somme.

Montrons qu'il est stable par produit, c'est-à-dire que $(u_n) \times (v_n) = (u_n \times v_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$ c'est-à-dire que $\sum (u_nv_n)^2$ converge. Or, la série $\sum {v_n}^2$ converge donc ${v_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc ${v_n}^2 \leq 1$ pour n assez grand. Par conséquent, pour n assez grand, $(u_nv_n)^2 = {u_n}^2{v_n}^2 \leq {u_n}^2$ et on peut conclure d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs. Enfin, la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ (on ne met pas $1/n$ car les suites commencent a priori au rang 0) appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$ et n'a aucun terme nul.

(b) Non car si (u_n) est une suite constante non nulle alors $({u_n}^2)$ ne tend pas vers 0 et donc la série $\sum {u_n}^2$ diverge grossièrement.

(c) Pas forcément : par exemple avec $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. La suite (u_n) appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$ mais la série $\sum u_n$ diverge.

(d) Puisque $\sum |u_n|$ converge alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En particulier, $|u_n| \leq 1$ pour n assez grand donc $0 \leq {u_n}^2 \leq |u_n|$ (rappelons que $x^2 \leq x$ pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$) ce qui permet de conclure à l'aide du théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

5. Si on applique la question 1 avec $x = e^{-\sqrt{\ln(n)}}$ et $y = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ alors on majore u_n par le terme général d'une série divergente (il y a du $1/n$) ce qui ne permet pas de conclure. On ne peut pas non plus multiplier par n^2 et conclure par croissances comparées car on se retrouverait avec du $n^2e^{-\sqrt{\ln(n)}}$ et on ne peut pas conclure car on n'est pas dans le champ d'application des croissances comparées : rappelons que les croissances comparées s'appliquent quand ce qu'il y a dans l'exponentielle et en dehors sont de même nature, éventuellement à une puissance différente mais de même nature, ce qui n'est pas le cas ici car on a du ln dans l'exponentielle. On va essayer d'être malin : on fait disparaître le $-$ dans l'exponentielle en la mettant au dénominateur, ce qui donne

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n} \times e^{\sqrt{\ln(n)}}}$$

C'est la racine carrée dans l'exponentielle qui nous gêne : on va s'en débarrasser en la mettant au carré avec la question 1. On veut appliquer la question 1 à $\sqrt{\ln(n)}$: il manque le x, on prend donc $x = 1$ et $y = \sqrt{\ln(n)}$ ce qui donne

$$\sqrt{\ln(n)} \leq \frac{1 + \ln(n)}{2}$$

et donc, l'exponentielle étant une fonction croissante,

$$e^{\sqrt{\ln(n)}} \leq e^{\frac{1+\ln(n)}{2}} = e^{1/2} \times e^{\frac{1}{2} \times \ln(n)} = e^{1/2} \times \sqrt{n}$$

Par conséquent, $\sqrt{n}e^{\sqrt{\ln(n)}} \leq e^{1/2} \times n$ et donc $u_n \geq \dfrac{1}{e^{1/2}n}$. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc la série $\sum u_n$ converge (comparaison de séries à termes positifs).

Exercice 30 - Produits infinis : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle à valeurs dans $[\,0\,;1\,[$. On lui associe la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \qquad q_n = \prod_{k=1}^{n} (1 - u_k) = (1 - u_1) \cdots (1 - u_n)$$

1. Montrer que la suite (q_n) est convergente et que sa limite L vérifie $0 \leq L \leq 1$. Dans la suite, si la limite de la suite (q_n) est non nulle, on dit que la suite (q_n) est bien convergente. On note alors $L = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1 - u_k)$ et on dit que L est un produit infini bien convergent.
2. (a) Expliciter la suite (q_n) et donner sa limite lorsque (u_n) est définie par $u_n = n/(n + 1)$.
   (b) Même question si pour tout $n \geq 1, u_n = 1/(n + 1)$, puis dans le cas où $u_n = 1/(n + 1)^2$.
3. On revient au cas général et on se donne une suite (u_n) quelconque d'éléments de $[\,0\,;1\,[$.
   (a) On suppose que la suite (q_n) est bien convergente. Donner la limite de la suite de terme général q_{n+1}/q_n. En déduire que la suite (u_n) converge vers 0. La réciproque est-elle vraie ?
   (b) Montrer que la suite (q_n) associée est bien convergente si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente. On pourra s'intéresser à la suite de terme général $\ln(q_n)$.

Correction :

1. Comme on n'a aucune indication sur la suite (q_n), on regarde sa monotonie. Puisque (q_n) est à valeurs strictement positives (car $u_n \in [\,0\,;1\,[$ pour tout n) et est définie à partir d'un produit, on évalue le quotient. Soit $n \geq 1$.

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = 1 - u_{n+1} \leq 1$$

Or, la suite (q_n) est à valeurs strictement positives donc la suite (q_n) est décroissante (j'insiste, ce critère n'est valable que pour les suites à valeurs strictement positives). Or, elle est minorée par 0 donc converge.

2. (a) Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} q_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{k+1}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

et donc $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(b) Soit $n \geq 1$.

$$q_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

car c'est un produit télescopique, et donc $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour la deuxième suite : mettons au même dénominateur, et reconnaissons une identité remarquable :

$$\begin{aligned} q_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{(k+1-1)(k+1+1)}{(k+1)^2}\right) \end{aligned}$$

En se souvenant que $(k+1)^2 = (k+1)\times(k+1)$, et en coupant ce produit en deux :

$$q_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1} \times \prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k+1}$$

c'est-à-dire que q_n est le produit de deux produits télescopiques :

$$q_n = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2}{2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

En particulier, $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$

3. (a) Puisque $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \neq 0$ alors $\dfrac{q_{n+1}}{q_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{L}{L} = 1$. Or, $\dfrac{q_{n+1}}{q_n} = 1 - u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la suite (u_n) converge vers 0. La réciproque est fausse comme on l'a vu avec $u_n = \dfrac{1}{n+1}$: la suite (u_n) converge vers 0 mais la suite (q_n) associée converge vers 0 donc n'est pas bien convergente.

(b) Suivons l'indication de l'énoncé et intéressons nous à la suite de terme général $\ln(q_n)$. On a

$$\ln(q_n) = \sum_{k=1}^{n}\ln(1-u_k)$$

Supposons que la suite (q_n) soit bien convergente, et notons $L > 0$ sa limite. La fonction ln étant continue, il vient : $\ln(q_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(L)$: la somme ci-dessus admet donc une limite finie quand $n \to +\infty$, c'est-à-dire que la série $\sum \ln(1-u_k)$ converge. Or, d'après la question précédente, $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ si bien que $\ln(1-u_k) \sim -u_k$. On a des séries à termes négatifs équivalents donc de même nature : la série $\sum -u_k$ converge donc la série $\sum u_k$ converge. Réciproquement, supposons que cette série converge, alors $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(1-u_k) \sim -u_k$. De même, la série $\sum \ln(1-u_k)$ converge donc ses sommes partielles convergent, donc la suite $(\ln(q_n))$ admet une limite finie S, et donc $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^S > 0$: la suite (q_n) est bien convergente. D'où l'équivalence.

Exercice 31 - Contre-exemple au théorème de Brouwer en dimension infinie : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite. On suppose que la série $\sum {u_n}^2$ est convergente et que sa somme, notée S_u, est inférieure ou égale à 1. On définit également la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par $v_0 = \sqrt{1-S_u}$ et $v_n = u_{n-1}$ si $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum {v_n}^2$ converge et que sa somme vaut 1.
2. Montrer qu'il existe n tel que $v_n \neq u_n$.

Correction :

1. Il suffit de voir que, si on note (S_n) la suite des sommes partielles de ${v_n}^2$ et (T_n) celle de ${u_n}^2$, pour tout $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N} {v_n}^2 \\ &= {v_0}^2 + \sum_{n=1}^{N} {u_{n-1}}^2 \\ &= 1 - S_u + \sum_{p=0}^{N-1} {u_p}^2 \\ &= 1 - S_u + T_{N-1} \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $T_{N-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} S_u$ si bien que $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$: la série converge et sa somme vaut 1.

2. Raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout n, $u_n = v_n$. Alors, pour tout $n \geq 1$, $u_n = u_{n-1}$ c'est-à-dire que la suite (u_n) est constante. Si elle n'est pas constante égale à 0, alors la série $\sum {u_n}^2$ diverge grossièrement, ce qui est absurde. On en déduit que la suite (u_n) est la suite nulle, mais alors $S_u = 0$ donc $v_0 = 1 \neq 0 = u_0$, ce qui est absurde puisqu'on a supposé que $v_0 = u_0$. Il existe donc n tel que $u_n \neq v_n$.

Exercice 32 : ✪✪ Soit $\alpha < 0$ et soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha f(x)$. Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer qu'il existe A tel que f soit décroissante sur $[\,A\,;+\infty\,[$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. En majorant f'/f sur un intervalle bien choisi, montrer que $\sum f(n)$ converge.

Correction :

1. Deux quantités équivalentes au voisinage de $+\infty$ ont même signe pour x assez grand. Or, $\alpha < 0$ et f est à valeurs strictement positives donc αf est strictement positives. Dès lors, f' est strictement négative pour x assez grand donc f est décroissante au voisinage de $+\infty$, ce qui est le résultat voulu. Ensuite, on raisonne comme au chapitre 14 : f étant décroissante minorée, elle converge vers une limite $L \geq 0$. Supposons par l'absurde que $L > 0$. Alors $f'(x) \sim \alpha L$ en $+\infty$ donc il existe B tel que, pour tout $x \geq B$, $f'(x) \leq \alpha L/2$ (rappelons que $\alpha L < 0$). D'après l'IAF, pour tout $x \geq B$, $f(x) - f(B) \leq \alpha L(x - B)/2$ donc
$$f(x) \leq f(B) + \frac{\alpha L}{2}(x - B)$$
et puisque $\alpha L < 0$, on déduit du théorème de minoration que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ ce qui est absurde puisque f est strictement positive. On en déduit que $L = 0$.
2. Il existe A tel que, pour tout $x \geq A$, $f'(x)/f(x) \leq \alpha/2$ (rappelons encore que $\alpha < 0$). Dès lors, pour tout $x \geq A$, d'après l'IAF appliquée à $\ln(f)$ entre x et A :
$$\ln(f(x)) - \ln(f(A)) \leq \frac{\alpha}{2}(x - A)$$
donc
$$f(x) \leq f(A) \times e^{\alpha(x-A)/2}$$
et donc, en particulier, $f(n) \leq f(A)e^{\alpha(n-A)}$ donc $f(n) = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$ et on conclut comme d'habitude.

Exercice 33 : ✪✪ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En séparant les cas $p = 1, p \geq 3$ et $p = 2$, donner la nature de la série $\sum u_n$ où
$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(n+p)!}$$

Correction : Supposons dans un premier temps que $p = 1$. Dès lors, pour tout n,
$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+1)!} \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

Or, la série $\sum 1/(n+1)$ diverge donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Supposons à présent que $p \geq 3$. Il en découle (en majorant très peu subtilement tous les termes du numérateur par $n!$) que

$$u_n \leq \frac{n \times n!}{(n+3)!} \leq \frac{(n+1) \times n!}{(n+3)!} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

Or,

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} \sim \frac{1}{n^2}$$

et on conclut comme d'habitude que $\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$ est le terme général d'une série convergente donc, par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

Supposons enfin que $p = 2$: la majoration ci-dessus ne suffit plus puisqu'on majore alors par $1/(n+2)$ qui est le terme général d'une série divergente, ce qui ne permet pas de conclure. L'astuce est de voir qu'il y a un écart de 3 entre $n-1$ et $n+2$ donc il suffit de mettre le terme en $n!$ à part :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1! + \cdots + (n-1)!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+2)!} \\
&\leq \frac{(n-1) \times (n-1)!}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\leq \frac{n(n-1)!}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\leq \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\leq +\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\leq \frac{2}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

et on conclut comme précédemment que $\sum u_n$ converge.

Exercice 34 : ✪✪ Soient $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs tels que

$${u_n}^{1/n} = 1 - \frac{1}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Donner la nature de $\sum u_n$ selon la valeur de α.

Correction :

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)} \\
&= e^{n\left(-\frac{1}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)} \\
&= e^{-n^{1-\alpha} + \mathrm{o}\left(n^{1-\alpha}\right)}
\end{aligned}$$

Si $\alpha = 1$, alors $u_n = e^{-1+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} \neq 0$: la série diverge grossièrement.

Si $\alpha > 1$, alors $-n^{1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$: la série diverge grossièrement.

Supposons $\alpha \in \left]0\,;1\right[$. Attention, on ne peut pas affirmer que $u_n \sim e^{-n^{1-\alpha}}$ car on ne connaît pas le comportement du o() (négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$ peut tendre vers tout et n'importe quoi). Cependant, on fait comme d'habitude et on force la convergence en comparant à $1/n^2$ i.e. en multipliant par n^2 :

$$n^2 u_n = e^{-n^{1-\alpha} + \mathrm{o}\left(n^{1-\alpha}\right) + 2\ln(n)}$$

La quantité dans l'exponentielle est équivalente à $-n^{1-\alpha}$ donc tend vers $-\infty$ si bien que $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$ et on conclut comme d'habitude que la série converge. En conclusion, la série converge si et seulement si $\alpha \in \left]0\,;1\right[$.

Exercice 35 - Règle de Duhamel et applications : ✪✪ Soient (u_n) une suite strictement positive, K et λ deux réels quelconques tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{K}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. (a) On pose $v_n = n^\lambda u_n, w_n = \ln(v_n)$ et enfin $t_n = w_{n+1} - w_n$. Montrer que la série $\sum t_n$ converge.

   (b) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^\lambda}$. Où a-t-on déjà vu une méthode similaire ? En voici trois applications.
2. Soient (a, b) non entiers. On définit la suite (u_n) par $u_0 = \alpha > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{n-a}{n-b} \times u_n$$

   On suppose que a, b et α sont tels que la suite (u_n) est bien définie et strictement positive. Donner la nature de $\sum u_n$.
3. Donner la nature de la série $\sum u_n$, où

$$\forall n \geq 1, \qquad u_n = \sqrt{(n-1)!} \times \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

4. Pour tous $x > 0$ et $n \geq 0$ on note $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n)$. Soient $a, b, c > 0$. On pose

$$u_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \times \frac{1}{n!}$$

   La série $\sum u_n$ est appelée *série hypergéométrique de Gauß*. Étudier sa convergence.

Correction :

1. Soit $n \geq 1$. Puisque $t_n = w_{n+1} - w_n$ alors

$$t_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^\lambda}{n^\lambda} \times \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lambda \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right).$$

   On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + \dfrac{K}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $x_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(1 + x_n) = x_n - \frac{x_n^2}{2} + \mathrm{o}\left(x_n^2\right)$$

   (DL de $\ln(1+u)$). On a $n x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\lambda$ donc $x_n^2 \sim \dfrac{\lambda^2}{n^2}$ donc $x_n^2 = \dfrac{\lambda^2}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\frac{\lambda}{n} + \frac{K}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\lambda^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   On aussi $\lambda \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \lambda \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \lambda\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ donc, en sommant les deux DL,

$$t_n = \lambda \frac{1}{n} - \lambda \frac{1}{2n^2} - \frac{\lambda}{n} + \frac{K}{n^2} - \frac{\lambda^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-\lambda + 2K - \lambda^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

   donc $t_n \sim \dfrac{-\lambda + 2K - \lambda^2}{2n^2}$ et on conclut comme précédemment que la série $\sum t_n$ converge car on a des séries à termes de signe constant équivalents donc les séries sont de même nature (bon, si on veut couper les cheveux en quatre dans le sens de la longueur, il faudrait faire deux cas car le raisonnement précédent n'est pas valable si $-\lambda + 2K - \lambda^2$ est nul : si cette quantité est nulle alors t_n est négligeable devant $1/n^2$ donc $|t_n|$ également et on conclut que la série $\sum t_n$ converge absolument donc converge)
2. D'après la question précédente, la série télescopique $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge donc la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite L. En d'autres termes, $\ln(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et la fonction exponentielle est continue donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^L > 0$.

   Posons $A = e^L$.Dès lors, $n^\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$ donc $u_n \sim \dfrac{A}{n^\lambda}$.

3. On veut appliquer la question précédente : on veut donc donner un développement asymptotique de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à la précision $\dfrac{1}{n^2}$ ce qui permettra de donner un équivalent de u_n et donc la nature de la série $\sum u_n$. Soit $n \geq 1$.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-a}{n-b} = \frac{1-\dfrac{a}{n}}{1-\dfrac{b}{n}} = \left(1-\frac{a}{n}\right) \times \left(1+\frac{b}{n}+\frac{b^2}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
(DL de $\dfrac{1}{1-u}$). On a donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\lambda}{n} + \dfrac{K}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ avec $\lambda = a-b$ (n'oublions pas qu'il y a un $-$ devant le terme λ/n), et $K = b^2 - ab$. Ainsi, d'après la question 1, il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^{a-b}}$. On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum \dfrac{1}{n^{a-b}}$ converge. Or, celle-ci est une série de Riemann donc converge si et seulement si $a-b > 1$. Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a - b > 1$.
4. Idem, mettons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ sous la bonne forme. On a
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{n!} \times \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{\sqrt{(n-1)!} \times \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)} = \sqrt{n} \times \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \sqrt{n} \times \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n^{3/2}} + \frac{1}{120n^{5/2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{6n} + \frac{1}{120n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$
et donc, toujours d'après la question 1, il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^{1/6}}$ et puisque $1/6 \leq 1$, le même raisonnement que d'habitude nous permet d'affirmer que $\sum u_n$ diverge.
5. Là aussi, il suffit de donner un DL de u_{n+1}/u_n :
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(a)_{n+1}}{(a)_n} \times \frac{(b)_{n+1}}{(b)_n} \times \frac{(c)_n}{(c)_{n+1}} \times \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{(a+n+1)(b+n+1)}{(c+n+1)(n+1)} \\ &= \left(n^2 + n(a+b+2) + (a+1)(b+1)\right) \times \frac{1}{n^2 + n(c+2) + (c+1)} \\ &= \left(n^2 + n(a+b+2) + (a+1)(b+1)\right) \times \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1 + \dfrac{(c+2)}{n} + \dfrac{(c+1)}{n^2}} \\ &= \left(1 + \frac{(a+b+2)}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \times \left(1 - \frac{(c+2)}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{c+2-(a+b+2)}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{c-(a+b)}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$
et on conclut comme précédemment que la série converge si et seulement si $c > a + b + 1$.

Exercice 36 : ✪✪ Soit $\sum u_n$ une série convergente. On suppose que (u_n) est décroissante. Montrer que $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (on pourra s'intéresser à $S_{2n} - S_n$ où, comme d'habitude, on a noté (S_n) la suite des sommes partielles de la série). Contre-exemple si (u_n) n'est pas décroissante ?

Correction : Soit $n \geq 1$. $S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$. Par décroissance de la suite (u_n),
$$nu_{2n} \leq S_{2n} - S_n$$

Or, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque la série $\sum u_n$ converge, et la suite (u_n) est décroissante donc $u_n \geq 0$ pour tout n. Dès lors, d'après le théorème d'encadrement, $nu_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $2nu_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. La suite (u_n) étant décroissante, $2nu_{u_{2n+1}} \leq 2nu_{2n}$ donc, toujours par encadrement, $2nu_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(2n+1)u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: les suites extraites d'ordre pair et d'ordre impair tendent toutes les deux vers 0 ce qui permet de conclure. Si la suite (u_n) n'est pas supposée décroissante, le résultat n'est plus valide : il suffit de prendre $u_n = 1/n$ si n est un carré parfait (supérieur ou égal à 1) et 0 sinon, la série converge (et sa somme vaut $\pi^2/6$) mais la suite (nu_n) ne converge pas vers 0 (sa suite extraite $(nu_n)_{n \text{ carré parfait}}$ est constante égale à 1).

Exercice 37 - Il n'y a pas de frontière entre la convergence et la divergence : ✪✪ Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On note comme d'habitude (S_n) la suite des sommes partielles et, en cas de convergence, (R_n) la suite des restes.

1. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum \dfrac{u_n}{\sqrt{S_n}}$ diverge. En déduire qu'il existe une série à termes positifs divergente telle que $v_n = \mathrm{o}\,(u_n)$.
2. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum \dfrac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}}}$ converge. On pourra justifier que, pour tout $n \geq 1$,
$$\frac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}}} \leq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$
En déduire qu'il existe une série à termes positifs convergente telle que $u_n = \mathrm{o}\,(v_n)$.

Correction :

1. Notons (T_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n\sqrt{S_n}$ (précisons que la suite (S_n) est strictement croissante puisque $\sum u_n$ est à termes strictement positifs). Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{\sqrt{S_k}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{\sqrt{S_n}} = \frac{S_n}{\sqrt{S_n}} = \sqrt{S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
puisque $\sum u_n$ est une série divergente à termes positifs donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par conséquent, la série diverge. Si on pose $v_n = u_n/\sqrt{S_n}$, d'après ce qui précède, $\sum v_n$ diverge. Or, $\sqrt{S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si bien que $v_n = \mathrm{o}\,(u_n)$ ce qui est le résultat voulu.
2. Précisons que la suite $(\sqrt{R_n})$ est décroissante. La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ étant décroissante, on prouve comme d'habitude (comparaison à une intégrale entre R_n et R_{n-1}, il y avait une erreur d'énoncé) que
$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{R_{n-1}}} = \frac{R_{n-1}-R_n}{\sqrt{R_{n-1}}} \leq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$
Rappelons que
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \qquad \text{et} \qquad R_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$$
si bien que $R_{n-1} - R_n = u_n$ ce qui donne la majoration voulue. Or, le membre de droite se calcule explicitement (en primitivant $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ en $t \mapsto 2\sqrt{t}$) si bien que
$$\frac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}}} \leq 2\sqrt{R_{n-1}} - 2\sqrt{R_n}$$
La série $\sum 2\sqrt{R_{n-1}} - 2\sqrt{R_n}$ est la série télescopique associée à la suite de terme général $2\sqrt{R_n}$ qui converge vers 0, donc cette série converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on a le résultat voulu.

   Deuxième erreur d'énoncé : il faut lire « convergente » au lieu de « divergente ». Si on pose $v_n = u_n/\sqrt{R_{n-1}}$, d'après ce qui précède, $\sum v_n$ converge. Or, le reste d'une série convergente tend vers 0 donc $\sqrt{R_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si bien que $u_n = \mathrm{o}\,(v_n)$ ce qui est le résultat voulu.

Exercice 38 : ✪✪

1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de positivité.

2. **Remake :** Soit $\sum u_n$ une série qui converge absolument. Montrer que $\sum {u_n}^2$ converge. Donner un contre-exemple si on suppose simplement la convergence et pas la convergence absolue.
3. **Remake :** Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Montrer que la série $\sum u_1 \cdots u_n$ converge.

Correction :

1. Les séries convergent donc les termes généraux tendent vers 0. Dès lors, pour n assez grand, $0 \leq v_n \leq 1$ donc $0 \leq u_n v_n \leq u_n$: par comparaison pour les séries à termes positifs, on a le résultat voulu. C'est faux sans l'hypothèse de positivité en prenant par exemple $u_n = v_n = (-1)^n/\sqrt{n}$: les deux séries convergent d'après le CSA mais la série $\sum u_n v_n$ est la série harmonique qui diverge.
2. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, pour n assez grand, $0 \leq u_n \leq 1$ donc $0 \leq {u_n}^2 \leq u_n$ et on conclut de même. C'est faux sans l'hypothèse de positivité en prenant par exemple $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$.
3. Idem, pour n assez grand, $0 \leq u_n \leq 1$. Plus précisément, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq 1$. Dès lors, pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq u_1 \cdots u_n \leq u_1 \cdots u_{n_0 - 1} \times u_n$$

les termes manquants étant majorés par 1. Or, le membre de droite est égal à u_n multiplié par une constante donc est le terme général d'une série convergente, et on conclut comme d'habitude.

Exercice 39 - Critère de condensation de Cauchy : ✪✪✪ Soit (u_n) une suite qui décroît vers 0.

1. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.
2. En déduire une nouvelle preuve de la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$.
3. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \min\left(u_n, \dfrac{1}{n}\right)$ diverge également.

Correction :

1. Notons (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Supposons que la série $\sum u_n$ converge. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) étant décroissante,

$$\begin{aligned} S_{2^n} - S_{2^{n-1}} &= \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} u_k \\ &\geq \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} u_{2^n} \\ &\geq 2^{n-1} u_{2^n} \end{aligned}$$

Or, la suite (S_{2^n}) est extraite de (S_n) donc converge vers la même limite, à savoir la somme de la série $\sum u_n$, donc la série télescopique associée converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum 2^{n-1} u_{2^n}$ converge donc, en multipliant par 2, la série $\sum 2^n u_{2^n}$ converge.

Réciproquement, supposons que la série $\sum u_n$ diverge. Toujours par décroissance de la suite,

$$\begin{aligned} S_{2^n} - S_{2^{n-1}} &= \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} u_k \\ &\leq \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} u_{2^{n-1}} \\ &\leq 2^{n-1} u_{2^{n-1}} \end{aligned}$$

et on conclut de la même façon (suite divergente donc série télescopique divergente et ensuite théorème de comparaison pour les séries à termes positifs).

2. Puisque $n \mapsto 1/n\ln(n)$ décroît vers 0, d'après la question précédente, cette série est de même nature que la série de terme général

$$2^n \times \frac{1}{2^n \ln(2^n)} = \frac{1}{n \ln(2)}$$

qui est une série divergente (série harmonique).

3. Posons $v_n = \min(u_n, 1/n)$. On veut utiliser le critère de Cauchy : prouvons que (v_n) décroît vers 0. Or, $v_{n+1} = \min(u_{n+1}, 1/(n+1))$. Si $v_{n+1} = u_{n+1}$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ (puisque (u_n) est décroissante) et $u_{n+1} \leq 1/(n+1) \leq 1/n$. Dans tous les cas, $v_{n+1} \leq v_n$, et le raisonnement est le même si $v_{n+1} = 1/(n+1)$: la suite (v_n) est bien décroissante, et puisque $0 \leq v_n \leq 1/n$, alors elle tend vers 0. On peut donc utiliser le critère de Cauchy : la série $\sum v_n$ et la série $\sum 2^n v_{2^n}$ sont de même nature. Or, pour tout n,

$$2^n v_{2^n} = 2^n \min\left(u_{2^n}, \frac{1}{2^n}\right) = \min\left(2^n u_{2^n}, 1\right)$$

Supposons par l'absurde que $\sum v_n$ converge. Alors $\sum 2^n v_{2^n}$ converge donc, en particulier, $2^n v_{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il en découle que le minimum ci-dessus est égal à $2^n u_{2^n}$ pour n assez grand donc $2^n v_{2^n} = 2^n u_{2^n}$ pour n assez grand, et par conséquent $\sum 2^n u_{2^n}$ converge donc (critère de Cauchy) $\sum u_n$ converge, ce qui est absurde.

Exercice 40 - Théorème de réarrangement de Riemann : ✪✪✪ Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = x$$

En d'autres termes, lorsqu'on a une série qui converge mais ne converge pas absolument, on peut réarranger les termes pour que sa somme ait une valeur arbitraire !

2. **Remake :** Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective telle que

$$\sum_{n=0}^{N} u_{\varphi(n)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

Correction :

1. • Prouvons que la série contient une infinité de termes positifs et négatifs. Si elle ne contient qu'un nombre fini de termes positifs, alors elle est négative à partir d'un certain rang donc $|u_n| = -u_n$ à partir d'un certain rang donc la CVA de la série implique la convergence de la série $\sum u_n$ donc la convergence de la série $\sum u_n$ ce qui est exclu : la série contient donc une infinité de termes positifs, et on montre de même qu'elle contient une infinité de termes négatifs.
   • Notons (y_n) la suite extraite de (x_n) ne contenant que les termes positifs. Montrons que la série des y_n diverge. Reprenons les notations de la démonstration du cours, celle où on prouve que la convergence absolue implique la convergence, c'est-à-dire qu'on pose $v_n = \max(u_n, 0)$ et $w_n = \max(-u_n, 0)$. Il y a convergence absolue donc la série $\sum |u_n|$ converge. Or, $|u_n| = v_n + w_n$: par conséquent, soit les deux séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent, soit elles divergent toutes les deux. Si elles convergent toutes les deux, alors la série $\sum u_n$ converge, ce qui est exclu (puisque, pour tout n, $u_n = v_n - w_n$). Par conséquent, elles divergent toutes les deux. Or, les y_n (i.e. les termes positifs de la suite (u_n)) sont exactement les termes non nuls de (v_n) (avec des termes nuls intercalés, correspondant aux valeurs négatives de (u_n)). Il en découle que la série $\sum y_n$ diverge donc que ses sommes partielles tendent vers $+\infty$ (puisque cette série est à termes positifs). De même on montre que, si on note (z_n) la suite extraite des valeurs négatives de (u_n), la série $\sum z_n$ diverge et ses sommes partielles tendent vers $-\infty$. Par conséquent, si on ne somme que des y_n ou que des z_n, on tend respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. Précisons tout de même que les suites (y_n) et (z_n) étant extraites de (u_n), elles convergent vers la même limite, c'est-à-dire 0 (puisque la série $\sum u_n$ converge absolument).
   • L'idée de la preuve est alors très simple : on part de 0 et à chaque étape, si on est en dessous de α, on ajoute un terme positif i.e. un y_n, et ainsi de suite jusqu'à dépasser α, ce qui finit par se produire d'après ce qui précède, et une fois α dépassé, on ajoute des termes négatifs, i.e. des z_n, jusqu'à passer en dessous de α, ce qui finit par se produire également d'après ce qui précède, et ceci indéfiniment. On va donc osciller autour de α, mais en faisant des oscillations de plus en plus petites puisque les deux suites (y_n) et (z_n) tendent vers 0, donc la série nouvellement ordonnée va bien tendre vers α. Prouvons cela rigoureusement de la même façon qu'on construisait des suites extraites dans le chapitre 12.
   • Notons (n_k) la suite des indices pour lesquels $u_n \geq 0$ (i.e. u_{n_0} est le premier terme positif, u_{n_1} est le second etc.) et (p_k) la suite des indices pour lesquels $u_n < 0$. Notons (T_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_{\varphi(n)}$, avec la fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :
     ⋆ $\varphi(0) = n_0 = \min\{k \,|\, x_k \geq 0\}$ si $\alpha \geq 0$ et $p_0 = \min\{k \,|\, x_k \leq 0\}$ sinon, c'est-à-dire que $u_{\varphi(0)}$ est le premier terme positif de la suite si α est positif (i.e. si on part d'en-dessous de α), et est le premier terme négatif sinon.

   * Si $T_0 \leq \alpha$, on pose $\varphi(1) = \min\{k \neq \varphi(0) \,|\, u_k \geq 0\}$ i.e. on prend le premier terme positif qui ne soit pas celui qu'on ait déjà, et si $T_0 > 0$, on pose $\varphi(1) = \min\{k \neq \varphi(0) \,|\, u_k < 0\}$.
   * De façon générale, supposons $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ construits. Si $T_n \leq \alpha$, on pose $\varphi(n+1) = \min\{k \neq \varphi(0), \dots, \varphi(n) \,|\, x_k \geq 0\}$, et sinon, on prend $\varphi(n+1) = \min\{k \neq \varphi(0), \dots, \varphi(n) \,|\, x_k < 0\}$.
- Prouvons que φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Elle est injective par construction puisqu'à chaque étape, on prend un élément distinct des précédents. Supposons que φ ne soit pas surjective : il existe N tel que $\varphi(n)$ ne soit jamais égal à N. Supposons sans perte de généralité que $u_N \geq 0$: puisqu'on prend les termes dans l'ordre croissant, tous les termes positifs que prend la suite réarrangée sont d'indice inférieur à N donc on n'en prend qu'un nombre fini, si bien qu'à partir d'un certain rang, la suite $(u_{\varphi(n)})$ ne prend que des valeurs négatives, c'est-à-dire est égale à (z_n), ce qui n'est pas possible car cela implique que les sommes partielles tendent vers $-\infty$, comme on l'a déjà vu, donc finissent par tomber sous α et alors on ajouterait d'autres termes positifs. La fonction φ est donc bien bijective.
- Prouvons enfin que la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge et soit de somme α. La suite $(u_{\varphi(n)})$ étant extraite de (u_n), elle converge également vers 0 : fixons $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_{\varphi(n)}| \leq \varepsilon$. De plus, il y a une infinité d'indices n tel que $u_{\varphi(n)} \geq 0$ et une infinité d'indices n tels que $u_{\varphi(n)} < 0$: il existe donc un indice $N \geq n_0$ tel que $u_{\varphi(N)} < 0$ et $u_{\varphi(N+1)} \geq 0$ (on prend un indice supérieur à n_0 qui a une image négative, ce qui est possible puisqu'il y en a une infinité, et on prend ensuite le minimum des indices ultérieurs qui a une image positive, il y a alors un changement de signe et on a le résultat voulu).
- Soit $n \geq N+1$. Prouvons que $|T_n - \alpha| \leq \varepsilon$ par récurrence sur $n \geq N+1$.
   * On passe de T_N à T_{N+1} en ajoutant $u_{\varphi(N+1)}$ inférieur à ε (en valeur absolue) et positif, si bien que $0 \leq u_{\varphi(N+1)} \leq \alpha$. Or, puisque ce terme est positif, c'est que la somme partielle T_N est inférieure à α, donc $T_{N+1} = T_N + u_{\varphi(N+1)} \leq \alpha + \varepsilon$. Supposons que $T_{N+1} < \alpha - \varepsilon$. Puisque $T_{N+1} = T_N + u_{\varphi(N+1)}$ avec $u_{\varphi(N+1)} > 0$, alors $T_N < \alpha - \varepsilon$ également mais $T_{N-1} \geq \alpha$ puisque $u_{\varphi(N)}$ est négatif, et donc $u_{\varphi(N)} > \varepsilon$ ce qui est absurde : on en déduit que $|T_{N+1} - \alpha| \leq \varepsilon$.
   * L'hérédité est ensuite immédiate : soit $n \geq N+1$, supposons que $|T_n - \alpha| \leq \varepsilon$. Supposons sans perte de généralité que $T_n \leq \alpha$. Alors $u_{\varphi(n+1)} \geq 0$ mais on sait que $|u_{\varphi(n+1)}| \leq \varepsilon$ donc $T_{n+1} \leq \alpha + \varepsilon$, mais, par hypothèse de récurrence, $\alpha - \varepsilon \leq T_n$ et $u_{\varphi(n+1)} \geq 0$ donc $T_{n+1} \geq \alpha - \varepsilon$ ce qui clôt la récurrence.

  En conclusion, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, $|T_n - \alpha| \leq \varepsilon$: c'est le résultat voulu. PS : j'ai fait tout l'exo avec α à la place de x, flemme de changer.

2. Idem en adaptant un peu la preuve : à chaque étape, on compare non pas à α mais à n, i.e. on ajoute des termes positifs jusqu'à dépasser 0, puis on ajoute un terme négatif, puis on ajoute des termes positifs jusqu'à dépasser 1, puis un terme négatif, puis on ajoute des termes positifs jusqu'à dépasser 2, puis un terme négatif. On montre alors que la somme partielle obtenue diverge bien vers $+\infty$.

5 Formule de Stirling

Exercice 41 : ✪ A l'aide de la formule de Stirling, donner un équivalent des suites suivantes :

1. $u_n = \dbinom{2n}{n}$
2. $u_n = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3}$
3. $u_n = \ln(n!)$
4. $u_n = (n!)^{1/n}$
5. $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}$
6. ✪✪ $u_n = \dbinom{n^2}{n}$

Correction : Rappelons que l'équivalence passe au produit, au quotient, à la puissance fixe, mais pas à la puissance variable.

1.
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(2n)!}{n!^2} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\right)^2} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{2\pi n^{2n+1}e^{-2n}} \\ &\sim \frac{2^{2n+1/2}}{\sqrt{2\pi}n^{1/2}} \\ &\sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \\ &\sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}} \end{aligned}$$

   En particulier (mais ce n'était pas demandé)

$$\binom{2n}{n} \times \frac{\sqrt{n}}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

2.
$$\begin{aligned} u_n &\sim \frac{2^{2n+1}\left(\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}\right)^4}{2n \times \left(\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}\right)^3} \\ &\sim \frac{2^{2n+1}(\sqrt{2\pi})^4 n^{4n+2}e^{-4n}}{2n \times (\sqrt{2\pi})^3 2^{6n+3/2}n^{6n+3/2}e^{-6n}} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi}n^{2n+1/2}e^{2n}}{n \times 2^{4n+3/2}} \\ &\sim \frac{\sqrt{\pi}n^{2n-1/2}e^{2n}}{2^{4n+1}} \end{aligned}$$

3. Fait en classe : $u_n \sin n \ln(n)$.
4. Comme dans le 11 de l'exercice 25, on trouve que $u_n \sim n$.
5. En ajoutant les termes pairs au numérateur pour boucher les trous, on trouve comme d'habitude que

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!^2} \\ &= \frac{2n+1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{n!^2} \end{aligned}$$

   et comme dans le 1, on trouve donc que

$$u_n \sim \frac{2n}{4^n} \times \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}} = 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

6. Celui-ci est plus difficile.

$$u_n = \frac{(n^2)!}{n!(n^2-n)!}$$

   Puisqu'on a un quotient et un produit, il suffit de donner un équivalent de chaque terme. Commençons par $(n^2)!$:

$$\begin{aligned} (n^2)! &\sim \sqrt{2\pi}(n^2)^{n^2+1/2}e^{-n^2} \\ &\sim \sqrt{2\pi}n^{2n^2+1}e^{-n^2} \end{aligned}$$

   Par ailleurs :

$$(n^2-n)! \quad \sim \quad \sqrt{2\pi}(n^2-n)^{n^2-n+1/2}e^{-n^2+n}$$

Le terme le plus délicat est $(n^2-n)^{n^2-n+1/2}$: essayons d'en donner un équivalent simple. Sortons le terme dominant, ce qui donne

$$\begin{aligned}(n^2-n)^{n^2-n+1/2} &= (n^2)^{n^2-n+1/2}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2-n+1/2}\\ &= n^{2n^2-2n+1}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2-n+1/2}\end{aligned}$$

Attention, la puissance est variable : le terme entre parenthèses n'est pas équivalent à 1 ! Une seule solution : la notation exponentielle. Rappelons que pour donner l'équivalent d'une exponentielle, on s'arrête quand on a un $\mathrm{o}(1)$ (cf. cours du chapitre 24).

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2-n+1/2} &= e^{(n^2-n+1/2)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\\ &= e^{(n^2-n+1/2)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\\ &= e^{-n-1/2+1+\mathrm{o}(1)}\\ &= e^{-n+1/2}\times e^{\mathrm{o}(1)}\\ &\sim e^{-n+1/2}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}(n^2-n)! &\sim \sqrt{2\pi}n^{2n^2-2n+1}e^{-n+1/2}e^{-n^2+n}\\ &\sim \sqrt{2\pi}n^{2n^2-2n+1}e^{-n^2+1/2}\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned}u_n &\sim \frac{\sqrt{2\pi}n^{2n^2+1}e^{-n^2}}{\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}n^{2n^2-2n+1}e^{-n^2+1/2}}\\ &\sim \frac{e^{n-1/2}n^{n-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

Exercice 42 : ✪ Donner la nature de la série $\displaystyle\sum\frac{n^{n+\gamma}}{n!a^n}$ en fonction de $\gamma\in\mathbb{R}$ et de $a\in\mathbb{R}_+^*$.

Correction : D'après la formule de Stirling, si on note u_n le terme général de la série :

$$\begin{aligned}u_n &\sim \frac{n^{n+\gamma}}{\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}a^n}\\ &\sim \frac{n^{\gamma-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\times\left(\frac{e}{a}\right)^n\end{aligned}$$

Si $a<e$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge grossièrement. Si $a>e$, on montre comme d'habitude que $n^2u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n=\mathrm{o}\left(1/n^2\right)$ et on conclut comme d'habitude que la série converge. Supposons enfin que $a=e$ si bien que

$$u_n\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}n^{1/2-\gamma}}$$

On conclut comme d'habitude (séries à termes positifs équivalents donc de même nature) que $\sum u_n$ converge si et seulement si $1/2-\gamma>1$ si et seulement si $\gamma<-1/2$. En conclusion, la série converge si et seulement si $a>e$ ou ($a=e$ et $\gamma<-1/2$).

Exercice 43 : ✪✪✪ Existence puis calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Correction : Tout d'abord, si on note u_n le terme général, alors

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et on montre que la série converge de même que d'habitude. Dès lors, si on note (S_N) la suite des sommes partielles, il suffit de calculer la limite de (S_{2N}). On prouve (cf. exercice 29 du chapitre 4) que

$$S_{2N} = \ln\left(\frac{(2N+1)! \times (2N)!}{2^{4n} \times (n!)^4}\right)$$

Il suffit donc de donner un équivalent de la quantité dans le ln, quantité qu'on note u_N. Utilisons pour cela la formule de Stirling :

$$\begin{aligned}
u_N &= \frac{(2n+1) \times (2n)!^2}{2^{4n} \times (n!)^4} \\
&\sim \frac{2n \times \left(\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}\right)^2}{2^{4n} \times \left(\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}\right)^4} \\
&\sim \frac{2n \times \sqrt{2\pi}^2 \times 2^{4n+1}n^{4n+1}e^{-4n}}{2^{4n} \times \sqrt{2\pi}^4 n^{4n+2}e^{-4n}} \\
&\sim \frac{4}{2\pi} \\
&\sim \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

et le ln est continu donc $S_{2N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(2/\pi)$ c'est-à-dire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

La somme est négative ce qui est cohérent avec le CSA : la somme est du signe du premier terme.

6 Comparaison série-intégrale

Exercice 44 : ✪ Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^a}$$

Correction : Comme dans l'exercice 28 du chapitre 22, on trouve que

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2k^{3/2}}{3}$$

si bien que

$$u_n \sim \frac{2}{3n^{a-3/2}}$$

On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature. Or, la série $\sum 1/n^{a-3/2}$ est une série de Riemann donc converge si et seulement si $a - 3/2 > 1$ si et seulement si $a > 5/2$. En conclusion, la série converge si et seulement si $a > 5/2$.