Feuille d'exercices - Chapitre 16.

1 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

On se donne dans cette partie un entier $n \geq 2$.

Exercice 1 : ✪ Donner les tables d'addition et de multiplication des ensembles $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Correction : Pour l'addition :

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$

$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$

$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$

Pour le produit :

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$

Exercice 2 : ✪✪ Soit $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On dit que $\overline{x}$ est inversible s'il existe $\overline{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{1}$. Montrer que $\overline{x}$ est inversible si et seulement si $x \wedge n = 1$.

Correction : Supposons que $x \wedge n = 1$. D'après le théorème de Bézout, il existe u et v tels que $xu + nv = 1$. Si on réduit modulo n, cela fait $xu \equiv 1[n]$ c'est-à-dire que, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\overline{x} \times \overline{u} = \overline{1}$: $\overline{x}$ est inversible.

Réciproquement, supposons $\overline{x}$ inversible. Il existe alors $\overline{y} \in Z/n\mathbb{Z}$ tel que $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{1}$ ce qui signifie que $xy \equiv 1[n]$ donc qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $xy - kn = 1$: d'après le théorème de Bézout, cela signifie que $x \wedge n = 1$.

Exercice 3 : ✪✪ Soit $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On dit que $\overline{x}$ est un diviseur de 0 si $\overline{x} \neq \overline{0}$ et s'il existe $\overline{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ non nul tel que $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{0}$. Montrer que $\overline{x}$ est un diviseur de 0 si et seulement si $x \not\equiv 0[n]$ et $x \wedge n \neq 1$.

Correction : Supposons que $\overline{x}$ soit un diviseur de 0. Dès lors, $\overline{x} \neq \overline{0}$ donc $x \not\equiv 0[n]$. De plus, il existe $\overline{y} \neq \overline{0}$ tel que $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{0}$ donc $xy \equiv 0[n]$ c'est-à-dire que n divise xy. Si $x \wedge n = 1$ alors, d'après le théorème de Gauß, n divise y si bien que $\overline{y} = \overline{0}$ ce qui est absurde, donc $x \wedge n \neq 1$.

Réciproquement, supposons que $x \not\equiv 0[n]$ et $x \wedge n \neq 1$. Tout d'abord, n ne divise pas x donc $\overline{x} \neq \overline{0}$. Notons $d = x \wedge n \neq 1$ et posons $y = n/d$. Alors $y \in [\![1 \,;\, n-1]\!]$ donc $\overline{y} \neq \overline{0}$ mais d divise x donc il existe k tel que $x = kd$ si bien que $xy = kn$ et donc $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{0}$: $\overline{x}$ est bien un diviseur de 0.

Exercice 4 : ✪✪✪ Soit $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On dit que $\overline{x}$ est nilpotent s'il existe $k \geq 1$ tel que $\overline{x}^k = \overline{0}$. Donner une CNS sur n pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ admette des éléments nilpotents non nuls.

Correction : En termes de congruences, on cherche une CNS sur n pour qu'il existe x non divisible par n dont une puissance soit divisible par n. Montrons que ce n'est possible que lorsque n admet un facteur carré, c'est-à-dire s'il existe p premier tel que $v_p(n) \geq 2$, c'est-à-dire si n admet un facteur premier à une puissance différente de 1 dans sa décomposition en produit de facteurs premiers.

Supposons que ce soit le cas, c'est-à-dire que la décomposition de n en produit de facteurs premiers soit $n = {p_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times {p_r}^{\alpha_r}$ avec l'un au moins des α_i qui soit supérieur ou égal à 2. Soit $x = p_1 \times \cdots \times p_r$. Alors x n'est pas divisible par n mais, si on pose $k = \max(v_{p_1}(n), \ldots, v_{p_r}(n))$, alors x^k est divisible par n donc $\overline{x}^k = \overline{0}$ mais $\overline{x} \neq 0$: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ admet des éléments nilpotents non nuls.

Réciproquement, supposons que la décomposition en produit de facteurs premiers de n soit $n = p_1 \times \cdots \times p_r$ avec les p_i premiers distincts. Soit $\overline{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ un élément nilpotent. Il existe $k \geq 1$ tel que $\overline{x}^k = \overline{0}$ donc tel que x^k soit divisible par n. En particulier, p_i divise x pour tout i et les p_i sont premiers entre eux deux à deux donc leur produit divise x i.e. n divise x c'est-à-dire que $\overline{x} = \overline{0}$: le seul élément nilpotent de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $\overline{0}$.

2 Relations d'ordre

Exercice 5 : ✪ Soit E un ensemble non vide muni d'une relation R antisymétrique et transitive. Soit $x \in E$ et soit $y \in E$ tel que xRy. Alors yRx par antisymétrie donc xRx par transitivité. Ainsi, une relation antisymétrique et transitive est forcément réflexive, et donc la réflexivité ne sert à rien puisqu'elle est automatique. Où est la faute de raisonnement ?

Correction : Il n'existe pas forcément d'élément $y \in E$ tel que xRy : x peut n'être en relation avec personne.

Exercice 6 : ✪

1. Montrer que, dans un ensemble fini E non vide muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$, il n'y a pas de suite infinie strictement monotone, c'est-à-dire de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $(\forall n \in \mathbb{N}, (x_n \preccurlyeq x_{n+1}$ et $x_n \neq x_{n+1}))$ ou $(\forall n \in \mathbb{N}, (x_{n+1} \preccurlyeq x_n$ et $x_n \neq x_{n+1}))$. En déduire qu'un ensemble ordonné fini admet un élément minimal.
2. Que répondre à quelqu'un qui vous dit : « on trouve toujours plus bête que soi » ? Est-ce à dire qu'il existe un humain plus bête que tous les autres ?

Correction :

1. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'une telle suite existe. Sans perte de généralité, plaçons-nous dans le second cas, i.e. supposons qu'il existe une suite (x_n) telle que, pour tout n, $x_{n+1} \preccurlyeq x_n$ et $x_n \neq x_{n+1}$ (i.e. qu'il existe une suite strictement décroissante). Soit $n = \text{card}(E)$ (E est un ensemble fini). Montrons que $x_0, \dots, x_n$ sont distincts ce qui sera absurde puisque E n'a que n éléments (et donc ne peut pas contenir $n+1$ éléments distincts). Supposons qu'il existe $i \neq j$ dans $[\![0 ; n]\!]$ tels que $x_i = x_j$. Sans perte de généralité, supposons que $i < j$. Alors $x_{j-1} \preccurlyeq x_i$. En effet, $x_{j-1} \preccurlyeq x_{j-2} \dots, x_{i+1} \preccurlyeq x_i$ donc, par transitivité, $x_{j-1} \preccurlyeq x_i$. Or, $x_i = x_j$ si bien que $x_{j-1} \preccurlyeq x_j$ et puisque $x_j \preccurlyeq x_{j-1}$ donc $x_j = x_{j-1}$ par antisymétrie ce qui contredit la stricte décroissance de la suite.

   S'il n'existe pas d'élément minimal, tout élément admet un autre élément qui lui est strictement inférieur (i.e. inférieur non égal) donc on peut construire une suite infinie strictement décroissante : on prend $x_0 \in E$ quelconque, puis on prend $x_1 \preccurlyeq x_0$ avec $x_1 \neq x_0$ et ainsi de suite, ce qui est absurde.
2. Il faut lui répondre : « non, l'humanité est un ensemble fini donc il y a au moins un élément minimal, c'est-à-dire une personne n'admettant personne de plus bête qu'elle ». Mais « être plus bête » n'étant pas un ordre total, il n'y a pas forcément de plus petit élément, il peut y avoir plusieurs éléments minimaux incomparables (il existe plusieurs types de bêtise).

Exercice 7 : ✪ On se place dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ muni de l'inclusion. L'ensemble $\left\{ \left[\dfrac{1}{n} ; n \right] \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ admet-il un plus grand élément ? une borne supérieure ? un plus petit élément ? une borne inférieure ?

Correction : L'ensemble $\{1\}$ (correspondant au cas $n = 1$) est le plus petit élément (donc la borne inférieure) car il est inclus dans tous les autres. Cependant, il n'y a pas de plus grand élément car la suite des ensembles $[1/n ; n]$ est strictement croissante (au sens de l'inclusion évidemment). Cependant, $\mathbb{R}_+^*$ est la borne supérieure. En effet, il contient tous les $[1/n ; n]$ donc est un majorant de l'ensemble. Si on prend A un majorant, alors il contient tous les ensembles $[1/n ; n]$. Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que $1/n \leq x$ (car $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$) et n_1 tel que $x \leq n_1$ (car $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$). Soit $n = \max(n_0, n_1)$. Alors $1/n \leq x \leq n$ donc $x \in [1/n ; n]$. En particulier, puisque $[1/n ; n] \subset A$, $x \in A$ donc $\mathbb{R}_+^* \subset A$: $\mathbb{R}_+^*$ est donc le plus petit de tous les majorants (au sens de l'inclusion) donc est bien la borne supérieure.

Exercice 8 - Ordre de Charkovskii : ✪✪ On définit sur $\mathbb{N}^*$ la relation d'ordre total $\lhd$ suivante :

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 3 & \lhd & 5 & \lhd & 7 & \lhd & 9 & \lhd & 11 & \lhd \cdots \lhd & 2k+1 & \lhd & \cdots \\
\lhd & 2\times 3 & \lhd & 2\times 5 & \lhd & 2\times 7 & \lhd & 2\times 9 & \lhd & 2\times 11 & \lhd \cdots \lhd & 2\times(2k+1) & \lhd & \cdots \\
\lhd & 4\times 3 & \lhd & 4\times 5 & \lhd & 4\times 7 & \lhd & 4\times 9 & \lhd & 4\times 11 & \lhd \cdots \lhd & 4\times(2k+1) & \lhd & \cdots \\
\lhd & 8\times 3 & \lhd & 8\times 5 & \lhd & 8\times 7 & \lhd & 8\times 9 & \lhd & 8\times 11 & \lhd \cdots \lhd & 8\times(2k+1) & \lhd & \cdots \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & \\
\lhd & 2^n\times 3 & \lhd & 2^n\times 5 & \lhd & 2^n\times 7 & \lhd & 2^n\times 9 & \lhd & 2^n\times 11 & \lhd \cdots \lhd & 2^n\times(2k+1) & \lhd & \cdots \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & \cdots & \lhd & 2^p & \lhd & \cdots & \lhd & 16 & \lhd & 8 & \lhd\ 4\ \lhd & 2 & \lhd & 1
\end{array}
$$

1. Donner une définition de cette relation sans « petits points » [1]
2. Prouver que c'est un ordre total.

1. Bon... en s'arrangeant tout de même pour qu'elle soit réflexive et antisymétrique car on pourrait très bien définir une relation d'ordre strict ayant ce diagramme.

Correction :

1. Tout nombre $n \geq 2$ peut s'écrire sous la forme $n = 2^{v_2(n)} \times k$ avec k impair. Soient n_1 et n_2 deux entiers naturels non nuls.
   - Si n_2 est une puissance de 2 (y compris si $n_2 = 1 = 2^0$) et n_1 n'en est pas une, alors $n_1 \lhd n_2$.
   - Si n_1 et n_2 ne sont pas des puissances de 2 et $v_2(n_1) \leq v_2(n_2)$ (au sens de l'ordre usuel sur $\mathbb{N}$), alors $n_1 \lhd n_2$, et si $v_2(n_1) = v_2(n_2)$ et $n_1 \leq n_2$ (au sens de l'ordre usuel), alors $n_1 \lhd n_2$.
   - Enfin, si n_1 et n_2 sont des puissances de 2, $n_1 \lhd n_2$ si $n_2 \leq n_1$ (au sens de l'ordre usuel) i.e. $\lhd$ est l'inverse de l'ordre usuel sur les puissances de 2.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans tous les cas, que n soit une puissance de 2 ou non, d'après la question précédente, $n \lhd n$ donc $\lhd$ est réflexive.

   Soient n_1 et n_2 deux entiers naturels non nuls tels que $n_1 \lhd n_2$ et $n_2 \lhd n_1$. Si n_1 est une puissance de 2, alors n_2 en est une puisque $n_1 \lhd n_2$. Donc soit les deux sont des puissances de 2, soit aucun des deux n'est une puissance de 2. Si les deux sont des puissances de 2, alors $n_2 \leq n_1$ et $n_1 \leq n_2$ (au sens de l'ordre usuel) donc $n_1 = n_2$. Supposons que n_1 et n_2 ne soient pas des puissances de 2. Il n'est pas possible d'avoir $v_2(n_1) < v_2(n_2)$ et $v_2(n_2) < v_2(n_1)$ donc on a forcément $v_2(n_1) = v_2(n_2)$ et alors $n_1 \leq n_2$ et $n_2 \leq n_1$ donc on a égalité : la relation est antisymétrique.

   Soient n_1, n_2, n_3 trois entiers naturels non nuls tels que $n_1 \lhd n_2$ et $n_2 \lhd n_3$. Il faut évaluer plusieurs cas :
   - Si tous sont des puissances de 2, alors $\lhd$ est l'inverse de l'ordre usuel : $n_3 \leq n_2$ et $n_2 \leq n_1$ donc $n_3 \leq n_1$ si bien que $n_1 \lhd n_3$.
   - Il est impossible que n_1 soit une puissance de 2 et pas n_2 (car sinon $n_2 \lhd n_1$), tout comme il est impossible que n_2 soit une puissance de 2 et pas n_3. Ainsi, si n_1 est une puissance de 2, alors n_2 et n_3 le sont aussi, et on a déjà traité ce cas. Supposons dans la suite que n_1 ne soit pas une puissance de 2.
   - Si n_2 est une puissance de 2, n_3 en est forcément une donc $n_1 \lhd n_3$. On suppose dans la suite que n_2 n'est pas une puissance de 2.
   - Si n_3 est une puissance de 2 alors $n_1 \lhd n_3$. On suppose dans la suite que n_3 n'en est pas une : n_1, n_2 et n_3 ne sont pas des puissances de 2. Par conséquent, $v_2(n_1) \leq v_2(n_2)$ et $v_2(n_2) \leq v_3(n_2)$.
   - Si l'une des inégalités est stricte, alors $v_2(n_1) \leq v_2(n_3)$ donc $n_1 \lhd n_3$.
   - Supposons enfin que $v_2(n_1) = v_2(n_2)$ et $v_2(n_2) = v_2(n_3)$ donc $v_2(n_1) = v_2(n_3)$, mais puisque $n_1 \lhd n_2$ alors $n_1 \leq n_2$ et de même $n_2 \leq n_3$ donc $n_1 < n_3$ donc $n_1 \lhd n_3$.

   Dans tous les cas, $n_1 \lhd n_3$: $\lhd$ est transitive. C'est donc une relation d'ordre : prouvons que c'est un ordre total. Soient donc n_1 et n_2 deux entiers naturels non nuls.
   - Si n_1 n'est pas une puissance de 2 et n_2 en est une, $n_2 \lhd n_1$. Idem si n_2 n'est pas une puissance de 2 mais si n_1 en est une.
   - Si n_1 et n_2 sont des puissances de 2, alors l'ordre est l'inverse de l'ordre usuel donc, dans tous les cas, l'un des deux est inférieur à l'autre (au sens de $\lhd$).
   - Supposons que ni n_1 ni n_2 ne soient des puissances de 2. Si $v_2(n_1) < v_2(n_2)$ alors $n_1 \lhd n_2$. Si $v_2(n_2) < v_2(n_1)$, c'est le contraire. Enfin, si $v_2(n_1) = v_2(n_2)$, on a soit $n_1 \leq n_2$, soit $n_2 \leq n_1$, donc dans tous les cas, l'un est inférieur à l'autre (au sens de $\lhd$).

   Dans tous les cas, $n_1 \lhd n_2$ ou le contraire : l'ordre est total.

Exercice 9 : ✪✪ On définit sur $\mathbb{N}$ une relation $\preccurlyeq$ par : $x \preccurlyeq y \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, y = x^n$.

1. Montrer que c'est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?
2. Donner les éléments minimaux de cet ordre. Plus précisément, caractériser les éléments minimaux supérieurs ou égaux à 2 par leur décomposition en facteurs premiers.

Correction :

1. Montrons que c'est une relation d'ordre.
   - Soit $x \in \mathbb{N}$. Alors $x = x^1$ donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = x^n$ si bien que $x \preccurlyeq x$: $\preccurlyeq$ est réflexive.
   - Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x^n$ et il existe k tel que $x = y^k$. Par conséquent, $x = (x^n)^k$ donc $x = x^{nk}$. En particulier, soit $x = 0$, et dans ce cas $y = 0 = x$, soit $nk = 1$, et alors $n = k = 1$ car ce sont des entiers positifs, si bien que $y = x$. Dans tous les cas, $x = y$: $\preccurlyeq$ est antisymétrique.
   - Soit $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tel que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$: il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x^n$ et il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $z = y^k$ si bien que $z = x^{nk}$ et $nk \in \mathbb{N}^*$: $x \preccurlyeq z$, et donc $\preccurlyeq$ est transitive.

   En conclusion, $\preccurlyeq$ est bien une relation d'ordre, non totale car 2 et 3 sont incomparables : il n'existe pas d'entier n tel que $2^n = 3$ ni tel que $3^n = 2$.

2. On cherche les éléments y de $\mathbb{N}$ tels qu'il n'existe pas de $x \neq y$ tel que $x \preccurlyeq y$ i.e. tels que y soit une puissance de x. Montrons que les éléments minimaux sont exactement 0, 1 et les entiers dont les puissances dans la décomposition en produit de facteurs premiers n'ont aucun diviseur commun distinct de 1.

Tout d'abord, 0 est un élément minimal. En effet, supposons que $x \preccurlyeq 0$: il existe n tel que $0 = x^n$ donc $x = 0$. 0 est bien un élément minimal. De plus, si $x \preccurlyeq$ alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 = x^n$ mais $n \geq 1$ donc $x = 1$: 1 est aussi un élément minimal.

Soit $y \geq 2$ donc les puissances dans la décomposition en produit de facteurs premiers n'ont aucun diviseur commun distinct de 1 (par exemple, les puissances ne sont pas toutes paires, comme dans $3^2 \times 5^4$). Soit $x \preccurlyeq y$: il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = y$ donc, pour tout p facteur premier de y, $v_p(y) = nv_p(x)$ donc n divise $v_p(y)$. Par conséquent, $n = 1$ car c'est le seul diviseur commun des $v_p(y)$ donc $x = y$: y est bien un élément minimal.

Enfin, soit y un entier qui n'est pas de cette forme et prouvons que ce n'est pas un élément minimal. Par hypothèse, les puissances des facteurs premiers de y ont un diviseur commun $n \geq 2$. Notons $y = {p_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times {p_k}^{\alpha_k}$ avec les α_i divisibles par n, et posons $x = {p_1}^{\alpha_1/n} \times \cdots \times {p_k}^{\alpha_k/n}$. On a bien $y = x^n$ donc $x \preccurlyeq y$ avec $x \neq y$: y n'est pas un élément minimal.

En conclusion, les éléments minimaux de $\mathbb{N}$ sont 0, 1 et les nombres entiers dont les valuations p-adiques sont premières entre elles i.e. les puissances dans la décomposition en produit de facteurs premiers n'ont aucun diviseur commun distinct de 1 (par exemple $2^5 \times 3^2 \times 5^4$ est un élément minimal car $5, 2, 4$ sont premiers entre eux dans leur ensemble).

Exercice 10 : ✪✪ Soit E un ensemble non vide. Soit $*$ une loi de composition interne commutative et associative sur E, c'est-à-dire :

- $\forall (x,y) \in E^2, x * y = y * x$.
- $\forall (x,y,z) \in E^3, x * (y * z) = (x * y) * z$.

On suppose de plus que tout élément de E est idempotent, i.e. : $\forall x \in E, x * x = x$. On définit sur E la relation $\preccurlyeq$ par :

$$x \preccurlyeq y \iff x * y = x$$

1. Reconnaître $\preccurlyeq$ lorsque $*$ est l'intersection sur $\mathscr{P}(X)$.
2. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.
3. Montrer que, pour tout $(x,y) \in E^2$, $x * y = \inf(x,y)$ (au sens de la relation d'ordre $\preccurlyeq$).

Correction :

1. Si $*$ est l'intersection, alors $\preccurlyeq$ est définie par :
$$\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E)^2, A \preccurlyeq B \iff A \cap B = A$$
et on sait que $A \cap B = A$ si et seulement si $A \subset B$: $\preccurlyeq$ est donc l'inclusion, qui est bien une relation d'ordre (cf. cours).
2. Montrons que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.
   - Soit $x \in E$. Puisque $x * x = x$ (x est idempotent), $x \preccurlyeq x$: $\preccurlyeq$ est réflexive.
   - Soient x et y dans E tels que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$. Ainsi, $x * y = x$ et $y * x = y$. Or, la loi est commutative donc $x * y = y * x$ si bien que $x = y$: $\preccurlyeq$ est antisymétrique.
   - Soit $(x,y,z) \in E^3$ tel que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$. Dès lors, $x * y = x$ et $y * z = z$. Ainsi, $x * z = (x * y) * z$. La loi étant associative, $x * z = x * (y * z) = x * y = x$ c'est-à-dire que $x \preccurlyeq z$: $\preccurlyeq$ est transitive, c'est une relation d'ordre.

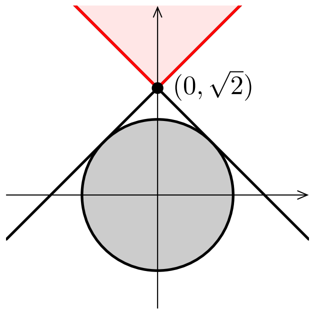
3. Soit $(x,y) \in E^2$. Il s'agit donc de prouver que $x * y$ est inférieur à x et à y et que tout minorant de x et de y est inférieur à $x * y$ (il est évident ici qu'on ne parle qu'au sens de la relation d'ordre $\preccurlyeq$). Tout d'abord, la loi étant commutative et associative :
$$\begin{aligned} (x*y)*x &= (y*x)*x \\ &= y*(x*x) \\ &= y*x \\ &= x*y \end{aligned}$$
c'est-à-dire que $x * y \preccurlyeq x$. On prouve de même (c'est même plus simple) que $x * y \preccurlyeq y$ donc $x * y$ est un minorant de x et de y. Soit à présent m un minorant de x et de y. Alors $m \preccurlyeq x$ donc $m * x = m$, et $m \preccurlyeq y$ donc $m * y = m$. Dès lors (on utilise encore l'associativité de la loi) :
$$\begin{aligned} m*(x*y) &= (m*x)*y \\ &= m*y \\ &= m \end{aligned}$$

si bien que $m \preccurlyeq x * y$: on a bien le résultat voulu.

Exercice 11 : ✪ On définit sur $\mathbb{R}^2$ une relation $\preccurlyeq$ par :

$$(x_1, y_1) \preccurlyeq (x_2, y_2) \iff |x_1 - x_2| \leq y_2 - y_1$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Est-elle totale ?
2. ✪✪✪ Montrer que la borne supérieure du disque unité fermé est $(0, \sqrt{2})$.



Correction :

1. Montrons que c'est une relation d'ordre.
   - Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors, d'une part, $|x - x| = 0$ et, d'autre part, $y - y = 0$ donc on a bien $|x - x| \leq y - y$: $(x, y) \preccurlyeq (x, y)$, $\preccurlyeq$ est réflexive.
   - Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments de $\mathbb{R}^2$ tels que $(x_1, y_1) \preccurlyeq (x_2, y_2)$ et $(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$. Dès lors, $|x_1 - x_2| \leq y_2 - y_1$ donc $y_2 - y_1 \geq 0$. Par symétrie des rôles, $y_1 - y_2 \geq 0$ donc $y_1 = y_2$. Par conséquent, $x_1 = x_2$ puisque $|x_1 - x_2| \leq y_2 - y_1 = 0$. On en déduit que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$: $\preccurlyeq$ est antisymétrique.
   - Soit $((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^3$ tel que $(x_1, y_1) \preccurlyeq (x_2, y_2)$ et $(x_2, y_2) \preccurlyeq (x_3, y_3)$. En d'autres termes :

   $$|x_1 - x_2| \leq y_2 - y_1 \qquad \text{et} \qquad |x_2 - x_3| \leq y_3 - y_2$$

   Par somme :

   $$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| \leq y_2 - y_1 + y_3 - y_2 = y_3 - y_1$$

   Or, d'après l'inégalité triangulaire,

   $$|x_1 - x_3| = |x_1 - x_2 + x_2 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$$

   si bien que $|x_1 - x_3| \leq y_3 - y_1$: on a bien $(x_1, y_2) \preccurlyeq (x_3, y_3)$, $\preccurlyeq$ est transitive, c'est bien une relation d'ordre.

   Cependant, elle est pas totale car $(1, 0)$ et $(2, 0)$ sont incomparables : en effet, on n'a pas $|2-1| \leq 0-0$, ni $|1-2| \leq 0-0$.

2. Inspirons-nous du dessin ci-contre. Essayons de trouver géométriquement tous les majorants du disque unité, qu'on notera D. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons une CNS pour que (x, y) soit un majorant de D. Soit $(a, b) \in D$. Alors :

   $$\begin{aligned} (a, b) \preccurlyeq (x, y) & \iff |a - x| \leq y - b \\ & \iff a - x \leq y - b \qquad \text{et} \qquad x - a \leq y - b \\ & \iff y \geq -x + b + a \qquad \text{et} \qquad y \geq x + b - a \end{aligned}$$

   En termes géométriques : (x, y) est supérieur à (a, b) lorsque le point correspondant est au-dessus des deux droites d'équation $y = -x + (b + a)$ et $y = x + b - a$ i.e. des deux droites de pentes ± 1 d'ordonnée à l'origine $b + a$ ou $b - a$, i.e. dans l'intersection des deux domaines au-dessus des deux droites. (x, y) est donc un majorant de D lorsque ceci est vrai pour tout $(a, b) \in D$. Montrons donc que l'ensemble des majorants de D est la partie rouge ci-dessus, l'intersection des deux parties du plan au-dessus des deux droites d'équation $y = \pm x + \sqrt{2}$.

   D'une part, soit (x, y) un majorant de D. D'après ce qui précède, $y \geq \pm x + b - a$ pour tout $(a, b) \in D$. C'est vrai en particulier pour $a = \sqrt{2}/2$ et $b = \sqrt{2}/2$ (car $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ est bien un élément du disque) donc $y \geq -x + a + b = -x + \sqrt{2}$: le point est au-dessus de la droite d'équation $y = -x + \sqrt{2}$ (la droite qui descend sur le dessin ci-dessus). De même avec $a = -\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$ (cela correspond au cas où les droites sont les « plus hautes » i.e. tangentes au cercle unité), $y \geq x + b - a = x + \sqrt{2}$: on a bien les deux inégalités voulues.

   D'autre part, soit (y, x) un élément de $\mathbb{R}^2$ tel que $y \geq \pm x + \sqrt{2}$, et montrons que c'est un majorant de D. Soit $(a, b) \in D$, montrons que $y \geq x + b - a$ et $y \geq -x + b + a$. Il suffit de prouver que $\sqrt{2} \geq b \pm a$. Or :

   $$(b + a)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq 1 + 2ab$$

   puisque $a^2 + b^2 \leq 1$ car $(a, b) \in D$. De plus, $2ab \leq a^2 + b^2$ (inégalité remarquable) donc $(a + b)^2 \leq 1 + 1 = 2$ ce qui donne le résultat voulu. L'inégalité $b - a \leq \sqrt{2}$ se démontre de la même façon.

En conclusion, l'ensemble des majorants de D est l'ensemble rouge ci-dessus, l'intersection des deux parties du plan au-dessus des droites d'équation $y = \pm x + \sqrt{2}$, c'est-à-dire que (x, y) est un majorant si et seulement si $y \geq \pm x + \sqrt{2}$: $(0, \sqrt{2})$ est donc un majorant de D. Montrons finalement que c'est le plus petit. Soit (x, y) un majorant de D. Alors $y \geq \pm\sqrt{2}$ donc $y - \sqrt{2} \geq \pm x$ donc $|x - 0| \leq y - \sqrt{2}$: $(0, \sqrt{2}) \preccurlyeq (x, y)$, ce qui permet de conclure.

Exercice 12 : ✪✪ Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre totale $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{C}$ qui soit compatible avec la structure de corps, c'est à dire qui vérifie :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^2, \begin{cases} \quad x \preccurlyeq y & \Rightarrow \quad x + z \preccurlyeq y + z \\ \\ (x \preccurlyeq y \text{ et } 0 \preccurlyeq z) & \Rightarrow \quad x \times z \preccurlyeq y \times z \end{cases}$$

Correction : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il en existe une. Si $1 \preccurlyeq 0$, en ajoutant -1, il vient $0 \preccurlyeq -1$. En multipliant par -1, ce qui ne change pas le sens de l'inégalité puisque $0 \preccurlyeq -1$, on obtient que $0 \preccurlyeq 1$ donc $0 = 1$ par antisymétrie ce qui est absurde. On en déduit que $0 \preccurlyeq 1$: en effet, l'ordre est total donc, si ce n'est pas l'un, c'est l'autre.

Si $0 \preccurlyeq -1$, en ajoutant 1 des deux côtés, on trouve $1 \preccurlyeq 0$ ce qui est absurde. Ainsi, $-1 \preccurlyeq 0$ (idem, l'ordre est total).

Supposons que $0 \preccurlyeq i$. En multipliant par i, $0 \preccurlyeq -1$ ce qui est absurde. On en déduit que $i \preccurlyeq 0$. En ajoutant $-i$, il vient $0 \preccurlyeq -i$ et en multipliant par $-i$, $0 \preccurlyeq (-i)^2 = -1$. On ne peut pas avoir $0 \preccurlyeq i$ et $i \preccurlyeq 0$: un tel ordre n'existe pas.

Exercice 13 : ✪✪ Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. On dit que c'est un bon ordre si toute partie non vide de E admet un plus petit élément.

1. Donner un exemple de bon ordre et un exemple de « mauvais ordre » total.
2. Montrer qu'un bon ordre est un ordre total.
3. Montrer que si $\preccurlyeq$ est un bon ordre, alors une suite décroissante d'éléments de E est stationnaire.
4. Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble totalement ordonné. On suppose qu'il existe une bijection f croissante de $\mathbb{N}$ dans E (c'est-à-dire telle que : $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \leq m \Rightarrow f(n) \preccurlyeq f(m)$). Montrer que $\preccurlyeq$ est un bon ordre sur E.
5. Montrer qu'il n'existe pas de bijection croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ muni de l'ordre usuel.

Correction :

1. L'ordre usuel sur $\mathbb{N}$ est un bon ordre, mais pas l'ordre usuel sur $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) : par exemple, $\mathbb{Z}$ est non vide mais n'a pas de plus petit élément.
2. Soient a et b deux éléments de E (muni d'un bon ordre $\preccurlyeq$). Alors $\{a; b\}$ est non vide donc admet un plus petit élément : si c'est a, alors $a \preccurlyeq b$, si c'est b, alors $b \preccurlyeq a$. L'ordre est bien total.
3. Soit $E = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des termes de la suite. E étant non vide et l'ordre étant bon, E admet un plus petit élément u_{n_0}. Soit $n \geq n_0$. La suite étant décroissante, $u_n \leq u_{n_0}$. Or, u_{n_0} est le plus petit élément de E donc $u_n \geq u_{n_0}$ donc $u_n = u_{n_0}$: la suite est constante à partir du rang n_0, la suite est stationnaire.
4. Soit B une partie non vide de E, montrons qu'elle admet un plus petit élément. Notons $A = f^{-1}(B)$ l'ensemble des antécédents des éléments de B : A est donc une partie de $\mathbb{N}$, non vide, donc admet un plus petit élément noté n_0. En d'autres termes, pour tout $n \in A$, $n_0 \leq n$ (au sens de l'ordre usuel). Soit $a = f(n_0) \in B$ et soit $x \in B$. Puisque $x \in B$, alors, si on note n son antécédent par f (f est bijective), $n \in A$ donc $n_0 \leq n$ si bien que, par hypothèse sur f, $a = f(n_0) \leq f(n) = x$: a est le plus petit élément de B, l'ordre est un bon ordre.
5. D'après la question précédente, il suffit de prouver que l'ordre usuel n'est pas bon sur $\mathbb{Q}$, ce qui est immédiat ($\mathbb{Q}$ n'admet pas de plus petit élément par exemple).

Exercice 14 : ✪✪✪ Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. On dit que c'est un ordre bien fondé s'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante.

1. Montrer qu'un bon ordre (voir l'exercice précédent) est un ordre bien fondé.
2. Montrer que l'ordre produit et l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^2$ sont bien fondés. En déduire qu'un ordre bien fondé n'est pas forcément un bon ordre.
3. Montrer qu'un ordre est un bon ordre si et seulement si c'est un ordre bien fondé et total.

1. Découle de la question 3 de l'exercice précédent.

2. Montrons que l'ordre produit est bien fondé. Soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{N}^2$. Un élément $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ est strictement inférieur (au sens de l'ordre produit) à (x_0, y_0) si et seulement si $x \leq x_0$ et $y \leq y_0$, et si $x_0 \neq x$ ou $y_0 \neq y$. Il y a donc $(x_0 + 1)$ choix possibles pour x (les entiers de 0 à x_0) et $(y_0 + 1)$ choix possibles pour y, ce qui fait $(x_0 + 1) \times (y_0 + 1) - 1$ choix pour (x, y) (on enlève 1 car on enlève le couple (x, y)). En particulier, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de $\mathbb{N}^2$ inférieurs à (x_0, y_0) donc il n'est pas possible que la suite $((x_n, y_n))$ soit strictement décroissante.

   Pour l'ordre lexicographique à présent. Soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{N}^2$. Un élément $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ est strictement inférieur (au sens de l'ordre lexicographique) à (x_0, y_0) si et seulement si $x < x_0$ ou $x = x_0$ et $y \leq y_0$. Le problème est qu'il y a un nombre infini de termes strictement inférieurs à (x_0, y_0) (par exemple tous les $(x_0 - 1, y)$ avec $y \in \mathbb{N}$). L'idée est qu'il n'y a qu'un nombre fini de termes avec le même x_0, ensuite on prend un x strictement inférieur avec un y donné, puis il n'y a qu'un nombre fini de termes avec le même x, puis on prend un autre x strictement inférieur etc. Il y a au plus $y_0 - 1$ termes strictement inférieurs à (x_0, y_0) de la forme (x_0, y) (i.e. avec le même x_0). Il existe forcément un terme (x_{n_1}, y_{n_1}) avec $x_{n_1} < x_{n_0}$. De même, il existe un terme (x_{n_2}, y_{n_2}) avec $x_{n_2} < x_{n_1}$ et ainsi de suite : pour tout élément de la suite (x_n, y_n), il existe un couple (x_k, y_k) avec $x_k < x_n$: on peut donc extraire une suite (x_{n_p}, y_{n_p}) avec (x_{n_p}) strictement décroissante ce qui est absurde car c'est une suite d'entiers.

   Finalement, l'ordre produit sur $\mathbb{N}^2$ n'étant pas total, ce n'est pas un bon ordre alors qu'il est bien fondé : un ordre bien fondé n'est pas forcément un bon ordre.

3. On sait déjà qu'un bon ordre est bien fondé et total. Réciproquement, supposons qu'un ordre $\preccurlyeq$ soit bien fondé et total, et prouvons que c'est un bon ordre. Soit A une partie non vide de E, et supposons que A n'admette pas de plus petit élément. Soit $x_0 \in A$. Puisque A n'admet pas de plus petit élément, il existe $x_1 \in A$ différent de x_0 tel que x_0 ne soit pas inférieur à x_0 donc, puisque l'ordre est total, on a forcément $x_1 \preccurlyeq x_0$. De même, il existe $x_2 \preccurlyeq x_1$ avec $x_2 \neq x_1$, et on itère le procédé : on construit une suite infinie strictement décroissante, ce qui est absurde puisque l'ordre est bien fondé.

Exercice 15 : ✪✪✪ On note E l'ensemble des couples (A, f) constitués d'une partie non vide A de $\mathbb{R}$ et d'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$. On définit sur E une relation $\preccurlyeq$ par :

$$(A, f) \preccurlyeq (B, g) \iff A \subset B \qquad \text{et} \qquad g \text{ est un prolongement de } f : \forall x \in A, g(x) = f(x)$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?
2. L'ensemble des couples $\left([\,\varepsilon\,; +\infty\,[\,, \ln_{|[\,\varepsilon\,;+\infty\,[}\right)_{\varepsilon>0}$ admet-il un plus grand élément ? une borne supérieure ?

Correction :

1.
   - Soit $(A, f) \in E$. Alors $A \subset A$ et f est un prolongement de f donc $(A, f) \preccurlyeq (A, f)$, $\preccurlyeq$ est réflexive.
   - Soient (A, f) et (B, g) dans E tels que $(A, f) \preccurlyeq (B, g)$ et $(B, g) \preccurlyeq (A, f)$. Alors, $A \subset B$ et $B \subset A$ donc $A = B$, et g prolonge f (i.e. $\forall x \in A, f(x) = g(x)$) donc $f = g$ (car g est définie sur $B = A$). Finalement, $(A, f) = (B, g)$: $\preccurlyeq$ est antisymétrique.
   - Soient (A, f), (B, g), (C, h) dans E tels que $(A, f) \preccurlyeq (B, g)$ et $(B, g) \preccurlyeq (C, h)$. Alors, $A \subset B$ et $B \subset C$ donc $A \subset C$, et g prolonge f et h prolonge f, c'est-à-dire que pour tout $x \in A$, $g(x) = f(x)$ et pour tout $x \in B$, $h(x) = g(x)$ mais $B \subset A$ donc pour tout $x \in A$, $h(x) = g(x) = f(x)$ si bien que h prolonge f. Finalement, $(A, f) \preccurlyeq (C, h)$: $\preccurlyeq$ est transitive.

   C'est bien une relation d'ordre mais elle n'est pas totale car l'inclusion n'est pas un ordre total : $(\mathbb{R}_+, \exp)$ et $(\mathbb{R}_-, \sin)$ sont incomparables car $\mathbb{R}_+$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_-$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_+$.

2. Il n'y a aucun plus grand élément : en effet, si $\left([\,\varepsilon\,; +\infty\,[\,, \ln_{|[\,\varepsilon\,;+\infty\,[}\right)$ est un tel couple, alors $\left([\,\varepsilon/2\,; +\infty\,[\,, \ln_{|[\,\varepsilon/2\,;+\infty\,[}\right)$ lui est strictement supérieur. Cependant, $(\mathbb{R}_+^*, \ln)$ est la borne supérieure. En effet, c'est évidemment un majorant (car $\mathbb{R}_+^*$ contient tous les $[\,\varepsilon\,; +\infty\,[$ et ln prolonge toutes les restrictions). De plus, si (A, f) est un majorant (c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\left([\,\varepsilon\,; +\infty\,[\,, \ln_{|[\,\varepsilon\,;+\infty\,[}\right) \preccurlyeq (A, f)$), alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq x$ donc $x \in [\,\varepsilon\,; +\infty\,[$, mais $[\,\varepsilon\,; +\infty\,[\,\subset A$ donc $x \in A$, et f prolonge $\ln_{|[\,\varepsilon\,;+\infty\,[}$ donc $f(x) = \ln(x)$. Finalement, $\mathbb{R}_+^* \subset A$ et f prolonge la fonction ln donc $(\mathbb{R}_+^*, \ln) \preccurlyeq (A, f)$, $(\mathbb{R}_+^*, \ln)$ est le plus petit des majorants, c'est la borne supérieure.

Exercice 16 : ✪✪ Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On suppose que toute partie non vide de E admet un maximum et un minimum. Montrer que E est un ensemble fini.

Correction : Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble soit infini. Montrons qu'alors on peut construire une suite strictement monotone, ce qui sera absurde puisque l'ensemble des termes de la suite n'aura pas de maximum (si la suite est strictement croissante) ou pas de minimum (si elle est strictement décroissante).

Tout d'abord, l'ordre est total : en effet, si a et b sont dans E, l'ensemble $\{a; b\}$ est non vide donc admet un minimum et un maximum. Si a est le minimum, alors $a \preccurlyeq b$, et si b est le maximum, alors $b \preccurlyeq a$: l'ordre est bien total (c'est même un bon ordre, cf. exercice 13).

E admet un minimum par hypothèse, qu'on note x_0. $E\backslash\{x_0\}$ est non vide (car E est infini) donc admet un minimum noté x_1, et $x_0 \leq x_1$ puisque x_0 est le minimum de E, et $x_0 \neq x_1$. $E\backslash\{x_0; x_1\}$ est non vide (car E est infini) donc admet un minimum x_2. On a $x_1 \leq x_2$ car x_1 est le minimum de $E\backslash\{x_0\}$ et $x_1 \neq x_2$ car $x_2 \neq E\backslash\{x_0; x_1\}$. Itérons le processus : soit $n \geq 2$, supposons $x_0, \dots, x_n$ construits. E est infini donc $E\backslash\{x_0; \dots; x_n\}$ est non vide donc admet un minimum x_{n+1}, distinct de $x_0, \dots, x_n$ et supérieur à x_n (car x_n était lui-même le minimum de $E\backslash\{x_0; \dots; x_{n-1}\}$). On a donc construit une suite strictement croissante d'éléments de E, ce qui est absurde puisque $A = \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ n'admet pas de maximum. En effet, s'il admet un maximum x_{n_0}, alors x_{n_0+1} est strictement plus grand que x_{n_0} qui est le maximum, ce qui est absurde : E est un ensemble fini.

Exercice 17 : ✪✪ Dans cet exercice, pas si difficile mais assez abstrait (grrr), on montre que les relations d'ordre totales sont les meilleures relations d'ordre au sens d'un ordre sur l'ensemble des relations d'ordre.

Soit E un ensemble non vide. On note $O(E)$ l'ensemble des relations d'ordre sur E. Pour R_1 et R_2 appartenant à $O(E)$, on dit que R_2 est plus fine que R_1 si on a :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad xR_1y \Rightarrow xR_2y$$

Autrement dit, si deux éléments sont comparables par R_1, ils le sont aussi par R_2 (et dans le même sens). On écrit alors $R_1 \preccurlyeq R_2$.

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $O(E)$.
2. Y a-t-il un plus petit élément pour $\preccurlyeq$ dans $O(E)$? Il n'est pas dur d'imaginer ce qui est la pire relation d'ordre possible...
3. Montrer qu'une relation d'ordre totale est un élément maximal de $O(E)$.
4. Soit $R \in O(E)$ non totale et soient a et b deux éléments de E non comparables par R. On définit la relation binaire S par :
$$xSy \iff [xRy \text{ ou } (xRa \text{ et } bRy)]$$
Que dire de S ? En déduire que les éléments maximaux de $O(E)$ pour $\preccurlyeq$ sont exactement les relations d'ordre totales.

Correction :

1. Montrons que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $O(E)$.
   - Soit $R \in O(E)$. Soit $(x,y) \in E^2$ tel que xRy. Alors xRy. En d'autres termes, on a : $\forall (x,y) \in E^2, xRy \Rightarrow xRy$, c'est-à-dire que $R \preccurlyeq R$, R est réflexive.
   - Soient R_1 et R_2 dans $O(E)$ telles que $R_1 \preccurlyeq R_2$ et $R_2 \preccurlyeq R_1$. Soit $(x,y) \in E^2$. Si xR_1y alors xR_2y puisque $R_1 \preccurlyeq R_2$, et si xR_2y alors xR_1y puisque $R_2 \preccurlyeq R_1$. En d'autres termes : $xR_1y \iff xR_2y$, c'est-à-dire que R_1 et R_2 comparent les mêmes éléments, et dans le même sens. R_1 et R_2 sont donc la même relation d'ordre, $R_1 = R_2$, c'est-à-dire que $\preccurlyeq$ est antisymétrique.
   - Soient R_1, R_2 et R_3 dans $O(E)$ telles que $R_1 \preccurlyeq R_2$ et $R_2 \preccurlyeq R_3$. Soit $(x,y) \in E^2$ tel que xR_1y. Alors xR_2y puisque $R_1 \preccurlyeq R_2$ et donc xR_3y puisque $R_2 \preccurlyeq R_3$. En d'autres termes, $R_1 \preccurlyeq R_3$: $\preccurlyeq$ est transitive.

   C'est donc bien une relation d'ordre.
2. Montrons que l'égalité est la « pire relation d'ordre possible » : elle ne compare des éléments égaux, donc n'est pas très utile ! Montrons donc que c'est le plus petit élément de $(O(E), \preccurlyeq)$. Soit $R \in O(E)$, montrons que $= \preccurlyeq R$ (on a évidemment noté $=$ la relation égalité). Soit $(x,y) \in E^2$. Si $x = y$ alors x et y sont égaux donc $y = x$ si bien que xRy par réflexivité. Il en découle que R est plus fine que $=$ c'est-à-dire : $= \preccurlyeq R$, $=$ est bien le plus petit élément de $O(E)$.
3. Soit R_1 une relation d'ordre totale, et soit $R_2 \in O(E)$ telle que $R_1 \preccurlyeq R_2$: prouvons que $R_1 = R_2$. Soit $(x,y) \in E^2$. La relation étant totale, soit xR_1y, soit yR_1x. Supposons sans perte de généralité que xR_1y. Puisque $R_1 \preccurlyeq R_2$, alors xR_2y. En d'autres termes, pour tous x et y, x et y sont dans le même ordre pour R_1 et pour R_2 donc $R_1 = R_2$: R_1 est bien un élément maximal.
4. Montrons que S est une relation d'ordre sur E.
   - Soit $x \in E$. Alors xRx car R est une relation d'ordre donc réflexive donc xSx (rappelons que si xRy alors xSy) : S est réflexive.
   - Soit $(x,y) \in E^2$ tel que xSy et ySx. Il y a plusieurs cas de figure :
     — Si xRy et yRx alors, par antisymétrie de R, $x = y$.
     — Si (xRa et bRy) et (yRa et bRx) : bRy et yRa donc, par transitivité de R, bRa ce qui est exclu car a et b sont incomparables, c'est-à-dire que ce cas de figure ne peut pas se produire.
     — Si xRy et $(yRaetbRx)$: bRx et xRy donc bRy par transitivité, et puisque yRa, alors bRa ce qui est toujours impossible.

   En résumé, seul le premier cas peut se produire, donc $x = y$: S est antisymétrique.

- Soient x, y, z trois éléments de E tels que xSy et ySz. Là aussi, plusieurs cas :
  — Si xRy et yRz alors, par transitivité de R, xRz donc xSz.
  — Si (xRa et bRy) et (yRa et bRz) : bRy et yRa donc, par transitivité de R, bRa ce qui est exclu car a et b sont incomparables, c'est-à-dire que ce cas de figure ne peut pas se produire.
  — Si xRy et $(yRaetbRz)$: puisque xRy et yRa, par transitivité de R, xRa et puisque bRz, on a bien xSz.

  Dans tous les cas, xSz : S est transitive, S est bien une relation d'ordre, et $R \preccurlyeq S$ (en effet, si xRy, alors xSy). De plus, on a aRa et bRb car R est réflexive. En d'autres termes, aSb (définition de S avec $x = a$ et $y = b$) : S est plus fine que R et compare a et b qui sont incomparables par R, S est strictement plus fine que R, R n'est pas un élément maximal. En conclusion, si R est totale, alors R est un élément maximal, et si R n'est pas totale, alors R n'est pas un élément maximal : les éléments maximaux sont exactement les relations d'ordre totales.

Exercice 18 - Lemme de Spilrajn-Marczewski : ✪✪✪

1. Soit $(E, \leq_E)$ un ensemble ordonné fini de cardinal $n \geq 1$. Montrer qu'il existe une bijection croissante (i.e. vérifiant : $\forall (x, y) \in E^2, x \leq_E y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$) de E dans $[\![1\,;\, n]\!]$.
2. En déduire qu'on peut munir E d'un ordre total $\preccurlyeq$ prolongeant $\leq_E$, c'est-à-dire tel que : $\forall (x, y) \in E^2, x \leq_E y \Rightarrow x \preccurlyeq y$. L'ordre $\preccurlyeq$ est appelé une extension linéaire de $\leq_E$.
3. Exhiber un ordre total sur $[\![1\,;\, 10]\!]$ (différent de l'ordre $\leq$ usuel sur $\mathbb{Z}$) qui prolonge la relation de divisibilité, et représenter cet ordre sous la forme d'un diagramme linéaire.

Correction :

1. Le problème est que l'ordre n'est pas forcément total, on ne peut pas écrire $x_1 \leq \cdots \leq x_n$. Raisonnons par récurrence sur n.
   - Si $n \geq 1$, notons H_n : « si E est un ensemble fini de cardinal n, il existe une bijection croissante de E dans $[\![1\,;\, n]\!]$. »
   - H_1 est évidemment vraie : si $E = \{x\}$ est un singleton, la fonction f qui envoie x sur 1 est une bijection croissante.
   - Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. On suppose donc que E est un ensemble fini de cardinal $n+1$. Le problème est que E n'a pas forcément de minimum ou de maximum. Cependant, puisque c'est un ensemble fini, alors il admet un élément maximal (on le montre comme dans exercice 6) : notons-le a. Dès lors, $E \backslash \{a\}$ est de cardinal n : par hypothèse de récurrence, il existe une bijection croissante $g : E \backslash \{a\} \to [\![1\,;\, n]\!]$. Montrons que la fonction définie sur E par $f(a) = n+1$ (on envoie a, un élément maximal, sur $n+1$), et $f(x) = g(x)$ si $x \neq a$.

     f est injective : en effet, soient $x \neq y$ deux éléments de E. Si x et y sont distincts de a, alors $f(x) = g(x)$ et $f(y) = g(y)$ mais g est injective donc $f(x) \neq f(y)$. Si l'un des deux vaut a, alors son image est égale à $n + 1$ et l'autre appartient à $[\![1\,;\, n]\!]$ donc on a quand même $f(x) \neq f(xy)$: f est injective.

     f est surjective : en effet, $n + 1$ est atteint par a, et tout élément de $[\![1\,;\, n]\!]$ est atteint par un élément de $E \backslash \{a\}$ car g est surjective.

     Montrons enfin que f est croissante : soient $x \leq_E y$. Supposons que x et y soient distincts de a. Puisque g est croissante sur $E \backslash \{a\}$, $g(x) \leq g(y)$, et puisque $g(x) = f(x)$ et $g(y) = f(y)$, cela donne le résultat voulu. Si $y = a$ alors $f(y) = n + 1$ donc on a forcément $f(x) \leq f(y)$. Enfin, si $x = a$ alors $y = a$ car a est un élément maximal donc on a bien $f(x) = f(y)$ (puisque $x = y$) : f est bien une bijection croissante, ce qui clôt la récurrence.

2. Notons $\preccurlyeq$ la relation : $x \preccurlyeq y \iff f(x) \leq f(y)$ (l'ordre $\leq$ étant l'ordre usuel sur $[\![1\,;\, n]\!]$). Si $x \leq_E y$ alors (f est croissante) $f(x) \leq f(y)$ donc $x \preccurlyeq y$: $\preccurlyeq$ prolonge $\leq_E$. Il suffit pour conclure de montrer que c'est une relation d'ordre total sur E.
   - Soit $x \in E$. Alors $f(x) \leq f(x)$ donc $x \preccurlyeq x$: $\preccurlyeq$ est réflexive.
   - Soient x et y dans E tels que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$: par définition, il en découle que $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$ donc $f(x) = f(y)$: f étant injective, $x = y$, $\preccurlyeq$ est antisymétrique.
   - Soient x, y, z dans E tels que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$: il en découle que $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(z)$ donc, par transitivité de l'ordre usuel, $f(x) \leq f(z)$ donc $x \preccurlyeq z$: $\preccurlyeq$ est transitive.

   $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Enfin, si x et y sont dans E, l'ordre usuel étant total, soit $f(x) \leq f(y)$, et alors $x \preccurlyeq y$, soit $f(y) \leq f(x)$, et alors $y \preccurlyeq x$: $\preccurlyeq$ est total.

3. Il suffit de construite la bijection strictement croissante, ensuite on prendre le même ordre que les images. Suivons la marche à suivre de l'hérédité : on envoie un élément maximal sur $n + 1$ (ici, 10), et on itère le procédé. 7 est un élément maximal donc on met 7 « à la fin ». 8 est un élément maximal de ce qui reste (i.e. en enlevant 7) donc on met 8 avant 7. 6 est ensuite un élément maximal de ce qui reste etc. On en déduit un ordre total sur $[\![1\,;\, 10]\!]$ qui prolonge la divisibilité mais différent de l'ordre usuel :

$$1 \to 5 \to 3 \to 2 \to 4 \to 10 \to 9 \to 6 \to 8 \to 7$$

Exercice 19 - Ensembles inductifs : ✪✪✪ On dit qu'un ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$ est inductif si toute partie non vide F de E totalement ordonnée admet un majorant (dans E).

1. Montrer qu'un ensemble fini est inductif.
2. $(\mathbb{Z}, \leq)$ est-il inductif ?
3. Soit E un ensemble non vide. Montrer que $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est inductif.
4. On se replace dans le cadre de l'exercice 15. Montrer que $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble inductif.
5. On se replace dans le cadre de l'exercice 17. Montrer que $(O(E), \preccurlyeq)$ est un ensemble inductif.

Correction :

1. Soit F une partie de E totalement ordonnée (avec E un ensemble fini de cardinal n). Par récurrence sur le cardinal de F.
   - Si $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, notons H_k : « si F est de cardinal k alors F admet un majorant ».
   - Si $\text{card}(F) = 1$ alors F est un singleton : si x est l'unique élément de F alors $x \preccurlyeq x$: x est un majorant de F, H_1 est vraie.
   - Soit $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. Supposons H_k vraie, supposons H_{k+1} vraie. Soit donc F de cardinal $k+1$. Soit $a \in F$. Si a est un majorant de F (i.e. si $a \geq b$ pour tout $b \in F$) alors F est majorée. Sinon, il existe $b \in F \backslash \{a\}$ tel que a ne soit pas supérieur à b donc tel que $a \preccurlyeq b$ (car l'ensemble est totalement ordonné). Or, $F \backslash \{a\}$ est de cardinal k donc, par HR, admet un majorant M. Par conséquent, pour tout $x \in F$, soit $x \neq a$ et alors $x \preccurlyeq M$, soit $x = a$ et alors $x \preccurlyeq b$ et $b \preccurlyeq M$ donc, par transitivité, $x \leq M$: M est un majorant de F. Dans tous les cas, F admet un majorant donc H_{k+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_k est vraie pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$.

   E est donc inductif.
2. $(\mathbb{Z}, +)$ n'est pas inductif car $\mathbb{Z}$ est une partie totalement ordonnée de $\mathbb{Z}$ mais n'a pas de majorant.
3. Soit F une partie de $\mathscr{P}(E)$ totalement ordonnée, c'est-à-dire que F est un ensemble de parties de E, totalement ordonnée pour l'inclusion. Notons
$$U = \bigcup_{X \in F} X$$
l'union de tous les éléments de F. Alors U est un majorant de F puisque tous les éléments de F sont inclus dans U : $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est inductif.
4. Soit donc F une partie de $\mathscr{P}(E)$ totalement ordonnée : F est donc un ensemble de couples (A, f_A) avec $f : A \to \mathbb{R}$. Posons
$$U = \bigcup_{A \,|\, (A, f_A) \in F} A$$
l'union des ensembles A tels que $(A, f_A) \in F$. Alors $A \subset U$ pour tout $A \in F$. On définit de plus $f : U \to \mathbb{R}$ par : pour tout A tel que $x \in A$, $f(x) = f_A(x)$. Montrons que f est bien définie, c'est-à-dire que si $x \in A$ et $x \in B$, alors $f_A(x) = f_B(x)$, i.e. l'image de x ne dépend pas de l'ensemble choisi. F étant totalement ordonné, soit $(A, f_A) \preccurlyeq (B, f_B)$, et alors $f_B(x) = f_A(x)$ puisque f_B prolonge f_A, soit le contraire, et donc on a toujours $f_A(x) = f_B(x)$: l'image de x ne dépend pas de A, $f(x)$ est bien définie et f prolonge f_A, (U, f) est bien un majorant de F, E est inductif.
5. Soit F une partie de E totalement ordonnée. Notons S la relation définie par :
$$xSy \iff \exists R \in F, xRy$$
Alors S est une relation d'ordre :
   - la réflexivité est évidente.
   - Soient x et y tels que xSy. Alors il existe R_1 et R_2 dans F telles que xR_1y et yR_2x. Or, F est totalement ordonnée donc $R_1 \preccurlyeq R_2$ ou le contraire. Sans perte de généralité, supposons $R_1 \preccurlyeq R_2$ si bien que xR_2y et R_2 est antisymétrique donc $x = y$: S est antisymétrique.
   - La démonstration de la transitivité est analogue.

   S est donc une relation d'ordre qui prolonge tout élément de F donc un majorant de F : E est inductif.

Remarque : Le lemme de Zorn (équivalent à l'axiome du choix) stipule que tout ensemble inductif admet un élément maximal. Par exemple, dans l'exercice 17, $O(E)$ est inductif donc (d'après le lemme de Zorn donc d'après l'axiome du choix) admet un élément maximal : en d'autres termes, d'après le lemme de Zorn (donc d'après l'axiome du choix), tout ensemble peut être muni d'un ordre total.

3 Relations d'équivalence

Exercice 20 : ✪ On définit sur $E = (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites ne s'annulant pas, la relation $\sim$ définie par :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Montrer que deux suites équivalentes **convergentes** ont la même limite. Réciproque ?

Correction :

1. Montrons que c'est une relation d'équivalence.
   - Soit $(u_n) \in E$. Alors, pour tout n, $u_n \neq 0$ donc $u_n/u_n = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: $(u_n) \sim (u_n)$, $\sim$ est réflexive.
   - Soient (u_n) et (v_n) dans E telles que $(u_n) \sim (v_n)$. Alors $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ si bien que $v_n/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/1 = 1$: $(v_n) \sim (u_n)$, $\sim$ est symétrique.
   - Soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) dans E telles que $(u_n) \sim (v_n)$ et $(v_n) \sim (w_n)$. Dès lors, $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $v_n/w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ si bien que
   $$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
   i.e. $(u_n) \sim (w_n)$: $\sim$ est transitive.

   C'est donc bien une relation d'équivalence.
2. Soient donc (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes convergentes. Notons L la limite de (u_n). Alors $v_n/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc
   $$v_n = \frac{v_n}{u_n} \times u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times L = L$$
   donc (v_n) a la même limite que (u_n). Cependant, la réciproque est fausse : la suite (u_n) de terme général $1/n$ et la suite (v_n) de terme général $1/n^2$ ont la même limite, 0, mais ne sont pas équivalentes car le quotient ne tend pas vers 1.

Exercice 21 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathbb{C}$ la relation R par : $z_1 R z_2 \iff {z_1}^n = {z_2}^n$. Montrer que c'est une relation d'équivalence et déterminer le cardinal des classes d'équivalence.

Correction : Montrons que c'est une relation d'équivalence.
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $z^n = z^n$ donc zRz : R est transitive.
- Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $z_1 R z_2$. Alors ${z_1}^n = {z_2}^n$ donc ${z_2}^n = {z_1}^n$ si bien que $z_2 R z_1$: R est symétrique.
- Soit $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que $z_1 R z_2$ et $z_2 R z_3$. En d'autres termes, ${z_1}^n = {z_2}^n$ et ${z_2}^n = {z_3}^n$ donc ${z_1}^n = {z_3}^n$ c'est-à-dire que $z_1 R z_3$: R est transitive.

En d'autres termes, R est bien une relation d'équivalences. Soit $z \in \mathbb{C}$, soit $\alpha = z^n$. On cherche le nombre de complexes y tels que $y^n = \alpha$, c'est-à-dire le nombre de racines n-ièmes de $\alpha = z^n$. D'après le chapitre 7, si $\alpha = 0$, α n'admet qu'une seule racine n-ième : lui-même, et si $\alpha \neq 0$, α admet n racines n-ièmes. En conclusion, si $z = 0$, alors z est tout seul dans sa classe d'équivalence, sinon la classe d'équivalence de z contient n éléments.

Exercice 22 - Germes de fonctions : ✪ On définit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une relation $\sim$ par :

$$f \sim g \iff \exists \varepsilon > 0, \forall x \in [-\varepsilon\,;\varepsilon]\,, f(x) = g(x)$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence.

Correction : Montrons que c'est une relation d'équivalence.
- Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Alors, si on pose $\varepsilon = 1 > 0$, pour tout $x \in [-\varepsilon\,;\varepsilon]$, $f(x) = f(x)$: $f \sim f$, $\sim$ est réflexive.
- Soient f et g dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telles que $f \sim g$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [-\varepsilon\,;\varepsilon]$, $f(x) = g(x)$ donc $g(x) = f(x)$, si bien que $g \sim f$: $\sim$ est symétrique.
- Soient f, g et h dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telles que $f \sim g$ et $g \sim h$. Dès lors, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in [-\varepsilon_1\,;\varepsilon_1]\,, f(x) = g(x)$ et il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in [-\varepsilon_2\,;\varepsilon_2]$, $g(h) = h(x)$. Posons $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$. Pour tout $x \in [-\varepsilon\,;\varepsilon]\,, f(x) = g(x)$ et $g(x) = h(x)$ donc $f(x) = h(x)$: $f \sim g$, $\sim$ est transitive. C'est donc bien une relation d'équivalence.

Exercice 23 : ✪ On définit sur $\mathbb{Z}$ une relation R par : $xRy \iff x+y$ est pair. Montrer que c'est une relation d'équivalence et donner les classes d'équivalence.

Correction : Montrons que c'est une relation d'équivalence.
- Soit $x \in \mathbb{Z}$. Alors $x+x=2x$ est pair donc xRx : R est réflexive.
- Soient x et y dans $\mathbb{Z}$ tels que xRy. Alors $x+y$ est pair donc $y+x$ est pair, c'est-à-dire que yRx : R est symétrique.
- Soient x, y, z tels que xRy et yRz : alors $x+y$ et $y+z$ sont pairs. Dès lors, x et y ont la même parité, et y et z ont la même parité, si bien que x et z ont la même parité donc $x+z$ est pair : xRz, R est transitive.

C'est donc bien une relation d'équivalence. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Soit $y \in \mathbb{Z}$. Alors xRy si et seulement si $x+y$ est pair, si et seulement si x et y ont la même parité. En d'autres termes, la classe d'équivalence de x est l'ensemble des entiers de même parité que x. En conclusion, il y a deux classes d'équivalence : l'ensemble des nombres pairs, et l'ensemble des nombres impairs.

Exercice 24 : ✪ On définit sur $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ une relation $\approx$ par : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \approx (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = v_n$. Montrer que c'est une relation d'équivalence

Correction : En d'autres termes, deux suites sont en relation si et seulement si elles sont égales à partir d'un certain rang. Prouvons que c'est une relation d'équivalence.
- Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Alors $n_0 = 0$ convient : pour tout $n \geq 0$, $u_n = u_n$: $(u_n) \approx (u_n)$, $\approx$ est réflexive.
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $(u_n) \approx (v_n)$. Il existe alors n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = v_n$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $v_n = u_n$ donc $(v_n) \approx (u_n)$: $\approx$ est symétrique.
- Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $(u_n) \approx (v_n)$ et $(v_n) \approx (w_n)$. Il existe donc n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = v_n$ et il existe n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, $v_n = w_n$. Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Pour tout $n \geq n_2$, $u_n = v_n$ et $v_n = w_n$ donc $u_n = w_n$ si bien que $(u_n) \approx (w_n)$: $\approx$ est transitive, c'est une relation d'équivalence.

Exercice 25 - Conjugaison : On note $S_\mathbb{R}$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ une relation $\sim$ par :

$$f \sim g \iff \exists \varphi \in S_\mathbb{R}, f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence.

- Soit $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$. Alors, si on pose $\varphi = \mathrm{Id}_\mathbb{R}$ qui est bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a $f = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ c'est-à-dire que $f \sim f$: $\sim$ est réflexive.
- Soient f et g dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ telles que $f \sim g$. Alors il existe $\varphi \in S_\mathbb{R}$ telle que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ g$. En composant à gauche par φ et à droite par φ^{-1}, on obtient ($\varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi$ car φ est bijective) : $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Or, $\varphi = (\varphi^{-1})^{-1}$, si bien qu'en posant $\psi = \varphi^{-1}$, on a bien $\psi \in S_R$ et $g = \psi^{-1} \circ f \circ \psi$ donc $g \sim f$: $\sim$ est symétrique.
- Soient f, g et h dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ telles que $f \sim g$ et $g \sim h$. Dès lors, il existe $\varphi \in S_R$ et $\psi \in S_R$ telles que $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ et $h = \psi^{-1} \circ g \circ \psi$ si bien que
$$h = \psi^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \psi$$
Or (cf. chapitre 3), $\psi^{-1} \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ \psi)^{-1}$ (voir l'anecdote du trésor) si bien que
$$h = (\varphi \circ \psi)^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \psi$$
Or, ψ et φ sont des bijections donc, par composition, $\varphi \circ \psi$ est aussi une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc appartient à S_R. Finalement, $f \sim h$, h est transitive.

Exercice 26 - Normes équivalentes : ✪ Soit E un ensemble non vide. On définit sur $\mathbb{R}^E$ une relation $\sim$ par :

$$f \sim g \iff \exists (\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \forall x \in E, \alpha g(x) \leq f(x) \leq \beta g(x)$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence.

Correction :
- Soit $f \in \mathbb{R}^E$. Alors, si on pose $\alpha = \beta = 1$ qui sont bien strictement positifs, on a bien : $\forall x \in E, \alpha f(x) \leq f(x) \leq \beta f(x)$, c'est-à-dire que $f \sim g$: $\sim$ est réflexive.
- Soient f et g dans $\mathbb{R}^E$ telles que $f \sim g$. Alors il existe α et β strictement positifs tels que, pour tout $x \in E$, $\alpha g(x) \leq f(x) \leq \beta g(x)$. Il en découle ($\alpha$ et β étant strictement positifs) que $g(x) \leq \dfrac{1}{\alpha} \times f(x)$ et $\dfrac{1}{\beta} \times f(x) \leq g(x)$, c'est-à-dire que :
$$\forall x \in E, \frac{1}{\beta(x)} \times f(x) \leq g(x) \leq \frac{1}{\alpha} \times f(x)$$

$1/\alpha$ et $1/\beta$ étant strictement positifs, on en déduit que $g \sim f$: $\sim$ est symétrique.

- Soient f, g et h dans $\mathbb{R}^E$ telles que $f \sim g$ et $g \sim h$. Dès lors, il existe $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ strictement positifs tels que :

$$\forall x \in E, \alpha_1 g(x) \leq f(x) \leq \beta_1 g(x) \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 h(x) \leq g(x) \leq \beta_2 h(x)$$

Soit $x \in E$. $\alpha_2 h(x) \leq g(x)$ donc $\alpha_1\alpha_2 h(x) \leq \alpha_1 g(x) \leq f(x)$, et $g(x) \leq \beta_2 h(x)$ donc $f(x) \leq \beta_1 g(x) \leq \beta_1\beta_2 h(x)$ donc

$$\alpha_1\alpha_2 h(x) \leq f(x) \leq \beta_1\beta_2 h(x)$$

$\alpha_1\alpha_2$ et $\beta_1\beta_2$ étant strictement positifs, cela signifie que $f \sim h$: $\sim$ est transitive, c'est une relation d'équivalence.

Exercice 27 : ✪✪

1. Que dire d'une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\exists \varepsilon > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leq \varepsilon \Rightarrow x \sim y$?
2. Même question avec une relation d'équivalence vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \varepsilon \Rightarrow x \sim y$.

Correction :

1. Montrons que tous les réels sont équivalents. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sans perte de généralité, supposons $x \leq y$. Par hypothèse, $x \sim x + \varepsilon$, $x + \varepsilon \sim x + 2\varepsilon$ et pour tout n, $x + n\varepsilon \sim x + (n+1)\varepsilon$ (même pas besoin de récurrence : on applique la propriété de l'énoncé avec $x + n\varepsilon$ à la place de x et $x + (n+1)\varepsilon$ à la place de y). Par transitivité, tous les $x + n\varepsilon$ sont équivalents à x. Soit n tel que $x + n\varepsilon \leq y < x + (n+1)\varepsilon$ (de façon explicite, $n = \lfloor (y-x)/\varepsilon \rfloor$ mais ce n'est pas indispensable). Alors $x + n\varepsilon \sim y$ et par transitivité, $x \sim y$. Ainsi, tous les réels sont équivalents, il n'y a qu'une classe d'équivalence : $\mathbb{R}$ tout entier.
2. On prouve que le résultat est encore valable avec une borne supérieure comme dans l'exercice 67 du chapitre 13 : soient x et y deux réels, avec $x \leq y$. Notons $A = \{t \in [\,x\,;y\,] \mid xRt\}$. Alors A est non vide car contient x (par réflexivité de R) et est majoré par y donc admet une borne supérieure α. Par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $|t - \alpha| \leq \varepsilon \Rightarrow tR\alpha$. Par caractérisation de la borne supérieure (pas par caractérisation séquentielle !), il existe $t \in A$ tel que $|t - \alpha \leq \varepsilon$ si bien que $tR\alpha$. Or, $t \in A$ donc xRt donc, par transitivité, $xR\alpha$. Si $\alpha = y$ alors xRy, sinon il existe $t \in \,]\,\alpha\,; y\,]$ tel que $|t - \alpha| \leq \varepsilon$ si bien que αRt et, par transitivité, xRt ce qui contredit la définition de α : on en déduit que $\alpha = y$ donc xRy ce qui permet de conclure.

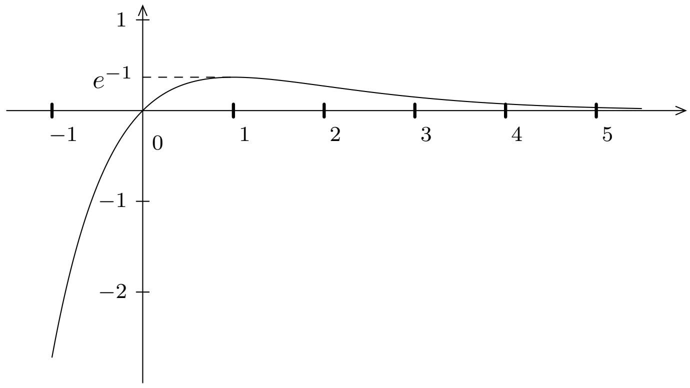
Exercice 28 : ✪✪

1. On définit sur $\mathbb{R}$ une relation R par : $xRy \iff xe^y = ye^x$. Montrer que c'est une relation d'équivalence et donner le cardinal des classes d'équivalences.
2. **Remake :** On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ une relation $\sim$ par : $x \sim y \iff \dfrac{\ln(x)}{y} = \dfrac{\ln(y)}{x}$. Montrer que c'est une relation d'équivalence et donner le cardinal des classes d'équivalences.

Correction :

1. Tout d'abord : $xRy \iff f(x) = f(y)$ où $f : t \mapsto xe^{-x}$, et le fait que R soit une relation d'équivalence est immédiat. On peut généraliser à toute fonction $f : E \to F$, on appelle alors R la relation d'équivalence associée à f (cf. cours). Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche le cardinal de $\mathrm{cl}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) = f(x)\}$. Par définition, $\mathrm{cl}(x)$ est l'ensemble des réels y dont l'image vaut $f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des antécédents de $f(x)$ par f. On cherche donc le nombre d'antécédents de $f(x)$ (cf. cours pour un dessin, avec l'exemple du cosinus) : donnons le tableau de variations de f.

	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	1	
g	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0



- Si $x \leq 0$ alors $f(x) \leq 0$. Notons $y = f(x) \leq 0$. $f(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} -\infty$ et $f(0) = 0$, f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$: d'après le théorème de la bijection, $y = f(x)$ a un unique antécédent (x) sur $\mathbb{R}_-$, et puisque f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, $y = f(x)$ n'a aucun antécédent sur $\mathbb{R}_+^*$ (pas besoin de TVI ici !!). Dès lors, $f(x)$ a un unique antécédent (égal à x) : si $x \leq 0, \mathrm{cl}(x)$ est de cardinal 1.
- Si $x = 1, f(x) = e^{-1}$ et on sait que e^{-1} est atteint une seule fois sur $\mathbb{R}$. Si $x = 1, \mathrm{cl}(x)$ est de cardinal 1.
- Si $x \in \left]0\,;1\right[\cup \left]1\,;+\infty\right[$ alors $f(x) \in \left]0\,;e^{-1}\right[$. De même que ci-dessus, $y = f(x)$ est atteint deux fois sur $\mathbb{R}$ donc il existe deux réels t (l'un d'entre eux étant égal à x) tels que $f(t) = f(x)$: $\mathrm{cl}(x)$ est de cardinal 2.

2. Il suffit d'écrire que xRy si et seulement si $x\ln(x) = y\ln(y)$. Le fait que ce soit une relation d'équivalence est alors immédiat. On étudie alors la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = t\ln(t)$. On prouve alors que si $x = 1/e$, $\mathrm{cl}(x)$ est de cardinal 1, si $x \in \left]0\,;1/e\right[\cup \left]1/e\,;1\right[$, $\mathrm{cl}(x)$ est de cardinal 2, et si $x \geq 1$, $\mathrm{cl}(x)$ est de cardinal 1.

Exercice 29 : ✪✪✪ On définit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une relation R par :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} R (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists (p,q) \geq n, (u_p \leq v_n) \text{ et } (v_q \leq u_n)$$

1. R est-elle une relation d'ordre ? une relation d'équivalence ?
2. Notons c une suite constante. Déterminer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en relation avec c.

Correction : Deux suites sont en relation si, pour tout n, un terme de v finit par être plus petit que u_n et un terme de u finit par passer sous v_n, c'est-à-dire qu'on ne peut pas avoir un terme d'une suite strictement supérieur à tous les termes de l'autre suite.

1. Montrons que c'est une relation d'équivalence mais pas une relation d'ordre.
   - Soit (u_n) une suite. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $p = q = n$. Alors $(u_p \leq u_n)$ et $(u_q \leq u_n)$ donc $(u_n)R(u_n)$: (u_n) est réflexive.
   - Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $(u_n) \leq (v_n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe donc p et q supérieurs à n tels que $(u_p \leq v_n)$ et $(v_q \leq u_n)$ donc il existe q et p supérieurs à n tels que $(v_q \leq u_n)$ et $(u_p \leq v_n)$, c'est-à-dire que $(v_n)R(u_n)$: R est symétrique.
   - Cependant, si (u_n) est la suite de terme général $(-1)^n$ et si (v_n) est la suite de terme général $(-1)^{n+1}$ alors, pour tout n, en posant $p = n+1$, on a $u_p = (-1)^n \leq v_n = (-1)^{n+1}$, et si on pose $q = n+1$, on a $v_q = (-1)^{n+2} = (-1)^n \leq u_n = (-1)^n$. Il en découle que $(u_n)R(v_n)$ donc, par symétrie, $(v_n)R(u_n)$ mais les deux suites ne sont pas égales : R n'est pas antisymétrique, ce n'est pas une relation d'ordre.
   - Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que $(u_n)R(v_n)$ et $(v_n)R(w_n)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe p et q supérieurs à n tels que $u_p \leq v_n$ et $v_q \leq u_n$. Or, $(v_n)R(w_n)$ donc :

   $$\forall \text{truc} \in \mathbb{N}, \exists r, s \geq \text{truc}, (v_r \leq w_{\text{truc}}) \text{ et } (w_s \leq v_{\text{truc}})$$

   En prenant truc $= q$: il existe $s \geq q \geq n$ tel que $w_s \leq v_q \leq u_n$. Or (toujours car $(v_n)R(w_n)$), il existe $k \geq n$ tel que $v_k \leq w_n$ et puisque $(u_n)R(v_n)$, il existe $r \geq k \geq n$ tel que $u_r \leq v_k \leq w_n$ si bien que $(u_n)R(w_n)$, d'où la transitivité, c'est bien une relation d'équivalence.

2. Soit donc (u_n) une suite constante égale à $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit (v_n) une suite.

$$(v_n)R(u_n) \iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists q \geq n, (\lambda \leq v_n) \text{ et } (v_q \leq \lambda)$$

En d'autres termes, (v_n) est en relation avec (u_n) si et seulement si tous les termes de (v_n) sont supérieurs à λ et si, pour tout n, il existe $q \geq n$ tel que $v_q \leq \lambda$. Encore en d'autres termes : (v_n) est en relation avec (u_n) si et seulement si tous les termes de la suite (v_n) sont supérieurs à λ et s'il existe une infinité de termes inférieurs donc égaux (car ils sont supérieurs) à λ. En conclusion : les suites équivalentes à (u_n), suite constante égale à λ sont les suites supérieures à (u_n) admettant une infinité de termes égaux à λ.

4 Ensembles quotients

Exercice 30 - Construction de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$: ✪✪

1. Montrer que la relation $\sim$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par : « $(a,b)\sim(c,d) \iff a+d=b+c$ » est une relation d'équivalence.
2. Montrer que la fonction
$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2/\sim & \to & \mathbb{Z} \\ & & \\ \overline{(a,b)} & \mapsto & a-b \end{array}\right.$$
est bien définie et bijective. Ceci peut constituer une construction de $\mathbb{Z}$: les éléments de $\mathbb{Z}$ sont vus comme les différences de couples d'entiers.

Correction :

1. Montrons que c'est une relation d'équivalence.
   - Soit $(a,b)\in\mathbb{N}^2$. Alors $a+b=b+a$ donc $(a,b)\sim(a,b)$, $\sim$ est réflexive.
   - Soient (a,b) et (c,d) tels que $(a,b)\sim(c,d)$. Alors $a+d=b+c$ donc $b+c=a+d$ si bien que $(c,d)\sim(a,b)$: $\sim$ est symétrique.
   - Soient (a,b), (c,d), (e,f) dans $\mathbb{N}^2$ tels que $(a,b)\sim(c,d)$ et $(c,d)\sim(e,f)$. Alors $a+d=b+c$ donc $a-b=c-d$ et $c+f=d+e$ donc $c-d=e-f$ donc $a-b=e-f$ donc $a+f=e+b$ c'est-à-dire que $(a,b)\sim(e,f)$: $\sim$ est transitive.

   $\sim$ est donc une relation d'équivalence.
2. Montrons que cette fonction est bien définie, c'est-à-dire que si $(a,b)\sim(c,d)$, l'image est la même, l'image est la même peu importe le représentant de la classe d'équivalence choisi. Or, si $(a,b)\sim(c,d)$, alors $a+d=c+b$ donc $a-b=c-d$ donc la différence est la même, peu importe le représentant choisi dans la classe d'équivalence, la différence est la même, donc $f\left(\overline{(a,b)}\right)=f\left(\overline{(c,d)}\right)$: f est bien définie. Montrons qu'elle est bijective.

   Soit $n\in\mathbb{Z}$. Alors $n=f\left(\overline{(n,0)}\right)$ donc f est surjective. Soient $\overline{(a,b)}$ et $\overline{(a,b)}$ deux classes d'équivalence distinctes, c'est-à-dire que $a+d\neq c+b$ i.e. $a-b\neq c-d$. Alors $f\left(\overline{(a,b)}\right)=a-b\neq c-d=f\left(\overline{(c,d)}\right)$: f est injective donc bijective.

Exercice 31 - Construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$: ✪✪✪
On note $\widetilde{\mathscr{P}}(\mathbb{Q})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{Q}$ non vides et majorées. Soit la relation $\equiv$ définie sur $\widetilde{\mathscr{P}}(\mathbb{Q})$ par :

$$X\equiv Y \iff (\forall x\in X,\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*,\exists y\in Y, x-\varepsilon\leq y) \text{ et } (\forall y\in Y,\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*,\exists x\in X, y-\varepsilon\leq x)$$

1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Soit $(X,Y)\in\widetilde{\mathscr{P}}(\mathbb{Q})^2$. Montrer que : $X\equiv Y\iff \sup_{\mathbb{R}}(X)=\sup_{\mathbb{R}}(Y)$.
3. En déduire une bijection entre $\widetilde{\mathscr{P}}(\mathbb{Q})/\equiv$ et $\mathbb{R}$. Ceci peut constituer une construction de $\mathbb{R}$: les éléments de $\mathbb{R}$ sont vus comme les bornes supérieures des sous-ensembles non vides majorés de $\mathbb{Q}$.

Correction :

1.
   - Soit X une partie non vide majorée de X. Soit $x\in X$ et soit $\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*$. Alors $x-\varepsilon\leq x$ donc il existe $y\in X, x-\varepsilon\leq y$ (en prenant $x=y$). Idem pour l'autre (en prenant $y=x$). Ainsi :
   $$(\forall x\in X,\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*,\exists y\in Y, x-\varepsilon\leq y) \text{ et } (\forall y\in Y,\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*,\exists x\in X, y-\varepsilon\leq x)$$
   c'est-à-dire que $X\equiv X$: $\equiv$ est réflexive.
   - Soient X et Y deux parties non vides majorées de $\mathbb{Q}$ telles que $X\equiv Y$. Alors :
   $$(\forall x\in X,\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*,\exists y\in Y, x-\varepsilon\leq y) \text{ et } (\forall y\in Y,\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*,\exists x\in X, y-\varepsilon\leq x)$$
   Ainsi :
   $$(\forall y\in Y,\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*,\exists x\in X, y-\varepsilon\leq x) \text{ et } (\forall x\in X,\forall\varepsilon\in\mathbb{Q}_+^*,\exists y\in Y, x-\varepsilon\leq y)$$
   c'est-à-dire que $Y\equiv X$: $\equiv$ est symétrique.

- Soient X, Y, Z trois parties non vides majorées de $\mathbb{Q}$ telles que $X \equiv Y$ et $Y \equiv Z$. Alors :

$$(\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists y \in Y, x - \varepsilon \leq y) \text{ et } (\forall y \in Y, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists x \in X, y - \varepsilon \leq x)$$

  et

$$(\forall y \in Y, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists z \in Z, y - \varepsilon \leq z) \text{ et } (\forall z \in Z, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists y \in Y, z - \varepsilon \leq y)$$

  Soient donc $x \in X$ et $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Il existe $y \in Y$ tel que $x - \varepsilon/2 \leq y$ (le résultat étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il est vrai pour $\varepsilon/2$). De plus, il existe $z \in Z$ tel que $y - \varepsilon/2 \leq z$ si bien que $x - \varepsilon \leq z$. On montre de même que, pour tout $z \in \mathbb{Z}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in X$ tel que $z - \varepsilon \leq x$ si bien que $X \equiv Z$: $\equiv$ est transitive, c'est une relation d'équivalence.

2. Soit $(X, Y) \in \widetilde{\mathscr{P}}(\mathbb{Q})^2$. Supposons que $X \equiv Y$. Les sup en question existent bien car on a des parties non vides majorées. Notons s_x et s_y respectivement la borne supérieure de x et la borne supérieure de y. Soit $\varepsilon > 0$. Tout d'abord, puisque $X \equiv Y$, alors pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in Y$ tel que $x - \varepsilon \leq y$. ε étant quelconque strictement positif, on en déduit que $x \leq y$ donc y est un majorant de x donc $\sup(X) \leq y$. Ceci étant vrai pour tout y, il vient : $\sup(X) \leq \sup(Y)$, et par symétrie des rôles on en déduit que $\sup(Y) \leq \sup(X)$, d'où l'égalité.

   Réciproquement, supposons que $\sup(X) = \sup(Y)$. Soit $x \in X$ et soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe $y \in Y$ tel que $\sup(Y) - \varepsilon < y \leq \sup(Y)$. Or, $\sup(Y) = \sup(X)$ donc $x \leq \sup(X)$. Finalement, $x - \varepsilon \leq \sup(X) - \varepsilon < y$. On a donc montré :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists y \in Y, x - \varepsilon \leq y$$

   L'autre assertion se démontre par symétrie des rôles, c'est-à-dire que $X \equiv Y$. D'où l'équivalence.

3. Soit f la fonction qui à $\mathrm{cl}(X)$ associe $\sup(X)$. La question précédente prouve que f est bien définie (deux parties équivalentes ont même borne supérieure, l'image ne dépend pas du représentant choisi). De plus, toujours d'après la question précédente, f est injective : à deux classes d'équivalence différentes correspondent deux bornes supérieures différentes. Enfin, soit $x \in \mathbb{R}$. Par caractérisation séquentielle de la densité, il existe une suite (x_n) dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers x, et on peut même s'arranger pour prendre $x_n \leq x$ pour tout n (prendre $x_n = \lfloor 10^x \rfloor / 10^n$). En prenant $E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, on a bien $\sup(E) = x$ donc $f(\overline{E}) = x$: f est surjective.