Feuille d'exercices - Chapitre 12

Sauf indication contraire, les suites sont considérées réelles.

Vrai ou faux ?

1. Une suite convergente est croissante ou décroissante à partir d'un certain rang.
2. Une suite majorée est croissante.
3. Une suite croissante est majorée.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Si $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $({u_n}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
7. Si $({u_n}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
8. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors ${u_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
9. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors ${u_n}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
10. Une suite non majorée tend vers $+\infty$.
11. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
12. Si $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
13. Une suite (u_n) vérifiant « $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=\dfrac{1}{2}\times u_{n+1}+\dfrac{1}{4}\times u_n$ » tend vers 0.
14. La somme de deux suites convergentes est convergentes.
15. La somme de deux suites divergentes est divergente.
16. La somme d'une suite divergente et d'une suite convergente est divergente.
17. Si u admet deux suites extraites distinctes qui convergent vers la même limite avec u converge.
18. Si $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L'$ alors $L=L'$.
19. Une suite géométrique bornée converge.
20. La somme de deux suites minorées est minorée.
21. La différence de deux suites minorées est minorée.
22. Le produit de deux suites minorées est minoré.
23. Le quotient de deux suites convergentes est convergent.
24. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L\in\mathbb{R}$ et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
25. Si $u_n-v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
26. Si (u_n) est une suite croissante telle que $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors (u_n) converge.
27. Une suite décroissante minorée par 0 converge vers 0.
28. Si $u_n>0$ pour tout n et si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors $L>0$.
29. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
30. Si $\left({u_n}^2\right)$ est convergente alors $(|u_n|)$ est convergente.
31. $\left\lfloor -\dfrac{1}{n}\right\rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lfloor 0\rfloor = 0$.
32. Si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite, et si (u_n) est croissante, alors (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
33. La partie entière d'une suite réelle convergente est convergente.
34. Deux suites bornées dont la différence tend vers 0 convergent vers la même limite.
35. Une suite qui tend vers 1 est positive à partir d'un certain rang.
36. Une suite qui tend vers 0 tend vers 0^+ ou 0^-.
37. Une suite (u_n) croissante telle que (u_{2n}) converge est convergente.
38. $\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
39. $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
40. $e^{-n\times\frac{2i\pi}{5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
41. $e^{-n+i\times n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
42. $\dfrac{\ln\left(n^2+n\right)}{2\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
43. $n\sin\left(\dfrac{1}{n+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
44. $n\cos\left(\dfrac{1}{n+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
45. La suite $\left(\dfrac{1}{\cos(1/n)}\right)_{n\geq 1}$ est bornée.
46. La suite $\left(\dfrac{1}{\sin(1/n)}\right)_{n\geq 1}$ est bornée.
47. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{k\to+\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\right)=\lim_{k\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\right)$.
48. La suite de terme général $u_n = 2^{6n+2}-3\times\left(2\sqrt{2}\right)^{4n}$ est géométrique.
49. Si la suite $(\cos(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors la suite $(\sin(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1 Intervalles

Exercice 1 : ✪✪ Soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille d'intervalles.

1. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{j\in J} I_j$ est un intervalle (éventuellement vide).
2. Montrer que si $\displaystyle\bigcap_{j\in J} I_j$ est non vide, alors $\displaystyle\bigcup_{j\in J} I_j$ est un intervalle.

Correction :

1. Si I est vide alors I est un intervalle (par convention, l'ensemble vide est un intervalle). Sinon, soient $a\leq b$ deux éléments de $I=\displaystyle\bigcap_{j\in J} I_j$ et soit $c\in[\,a\,;b\,]$. Soit $j\in J$. Puisque a et b appartiennent à l'intersection, alors a et b appartiennent à I_j qui est un intervalle donc $[\,a\,;b\,]\subset I_j$ si bien que $c\in I_j$. j étant quelconque, c appartient à I (l'intersection) donc $[\,a\,;b\,]\subset I$: I est un intervalle.
2. Supposons que I (l'intersection) soit non vide et soient $a\leq b$ deux éléments de U (l'union). Soit $c\in[\,a\,;b\,]$. Puisque a et b appartiennent à U, il existe j_1 et j_2 (qui n'ont aucune raison d'être égaux) tels que $a\in I_{j_1}$ et $b\in I_{j_2}$. Or, I est non vide : soit donc $d\in I$. En particulier, $d\in I_{j_1}$ et $d\in I_{j_2}$. Séparons les cas selon la valeur de d.
   - Premier cas : $d\leq a$. Alors $d\leq a\leq c\leq b$ donc $c\in[\,d\,;b\,]$. Or, d et b appartiennent à I_{j_2} qui est un intervalle donc $[\,d\,;b\,]\subset I_{j_2}$ donc $c\in I_{j_2}$ c'est-à-dire que $c\in U$.
   - Deuxième cas : $d\geq b$. Idem.
   - Troisième cas : $a<d<b$. Il faut alors séparer les cas selon que $c\leq d<b$ (et alors $c\in[\,a\,;d\,]$) ou $d<c\leq b$ (et alors $c\in[\,d\,;b\,]$). Dans tous les cas on conclut que $c\in U$.

   Finalement, $[\,a\,;b\,]\subset U$: U est un intervalle.

2 Borne supérieure, borne inférieure :

Exercice 2 : ✪ Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $\sup A>0$. Montrer que A contient un élément strictement positif.
2. On suppose que $\sup A\geq 0$. Existe-t-il un élément de A positif ?

Correction :

1. Soit $\varepsilon=\sup(A)/2>0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $a\in A$ tel que $\sup(A)-\varepsilon<a\leq\sup(A)$. Or, $\sup(A)-\varepsilon=\sup(A)/2>0$ donc $a>0$: A contient un élément strictement positif.
2. Pas forcément, il suffit de prendre $A=\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 3 - Un minimax : ✪ Existence et calcul de $\displaystyle\inf_{t\in\mathbb{R}}\left(\sup_{x\in[\,0\,;1\,]}\left(x^2+tx\right)\right)$.

Correction : Soit $t\in\mathbb{R}$. Supposons dans un premier temps $t\geq 0$. Soit $x\in[\,0\,;1\,]$. Alors $x^2+tx\leq 1+t$. En d'autres termes, $1+t$ est un majorant de $\{x^2+tx\,|\,x\in[\,0\,;1\,]\}$. Cet ensemble est donc majoré, et puisqu'il est non vide, il admet une borne supérieure. Or, $1+t$ est un majorant de cet ensemble et il est atteint pour $x=1$: c'est donc sont plus grand élément, et en particulier sa borne supérieure (plus grand élément implique borne supérieure, réciproque fausse). Dès lors, si $t\geq 0$,

$$\sup_{x\in[\,0\,;1\,]}\left(x^2+tx\right)=1+t$$

Supposons à présent $t<0$. Soit $x\in[\,0\,;1\,]$. Alors $x^2+tx\leq x^2\leq 1$ c'est-à-dire que 1 est un majorant de l'ensemble $\{x^2+tx\,|\,x\in[\,0\,;1\,]\}$. Puisqu'il est non vide, il admet une borne supérieure. La fonction $x\mapsto x^2+tx$ est un trinôme du second degré donc est décroissante sur $]-\infty\,;-t/2\,]$ (le sommet de la parabole est en $-b/2a$) et croissante sur $[\,-t/2\,;+\infty\,[$. Séparons les cas selon la valeur de t.

- Si $t\leq -2$, alors $-t/2\geq 1$ c'est-à-dire que $x\mapsto x^2+tx$ est décroissante sur $[\,0\,;1\,]$: son maximum est donc atteint en $x=0$ c'est-à-dire que le maximum et donc la borne supérieure de l'ensemble $\{x^2+tx\,|\,x\in[\,0\,;1\,]\}$ vaut 0.
- Si $t\in\,]-2\,;0\,[$: alors $-t/2\in\,]\,0\,;1\,[$, on a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$-t/2$		1
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$1+t$

Le maximum, donc la borne supérieure, vaut 0 ou $1+t$, cela dépend qui est le plus grand. Or, $1+t \geq 0 \iff t \geq -1$. Finalement, si $t \geq -1$, la borne supérieure vaut $1+t$, et si $t < -1$, elle vaut 0.

En conclusion, dans tous les cas (que x soit positif ou négatif) :

- Si $t \geq -1$, la borne supérieure vaut $1+t$.
- Si $t < -1$, la borne supérieure vaut 0.

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{x \in [\,0\,;1\,]} \left(x^2 + tx\right) \geq 0$$

donc l'ensemble $\left\{\sup_{x\in[\,0\,;1\,]} \left(x^2+tx\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ est minoré par 0 et non vide, d'où l'existence de la borne inférieure. De plus, 0 est atteint (pour tous les réels inférieurs ou égaux à -1) donc est le plus petit élément donc la borne inférieure. En conclusion, le minimax recherché vaut 0.

Exercice 4 : ✪ Dans cet exercice, on se donne A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. On définit de même $A-B$, AB et , si $\lambda \in \mathbb{R}$, λA et $A+\lambda$. Établir les relations suivantes (on montrera bien sûr que les sup et inf existent) :

- $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
- $\sup(-A) = -\inf(A)$ et $\inf(-A) = -\sup(A)$.
- $\sup(A+\lambda) = \sup(A) + \lambda$.
- Si $\lambda > 0$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$. Que dire lorsque $\lambda < 0$ ou $\lambda = 0$?
- $\sup(A-B) = \sup(A) - \inf(B)$.
- Si A et B sont incluses dans $\mathbb{R}_+$, alors $\sup(AB) = \sup A \times \sup B$. Le résultat est-il encore valable sans l'hypothèse $A, B \subset \mathbb{R}_+$?
- Si A est incluse dans $\mathbb{R}_+$, $\sup \sqrt{A} = \sqrt{\sup A}$ ($\sqrt{A}$ est défini de façon analogue aux autre ensembles).

On suppose enfin que A et B sont non disjoints. Montrer que $A \cap B$ est majoré et que $\sup(A\cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$ et donner un exemple où cette inégalité est stricte. Que dire de $\sup(A\cup B)$ en fonction de $\sup(A)$ et de $\sup(B)$?

Correction :

- Soit $x \in A+B$. Il existe alors $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a+b$ si bien que $x \leq \sup(A) + \sup(B)$ (la borne supérieure est un majorant). On en déduit que $A+B$ est majoré par $\sup(A)+\sup(B)$. Prouvons qu'il y a égalité avec la caractérisation séquentielle de la borne supérieure : il suffit de trouver une suite de $A+B$ qui converge vers $\sup(A)+\sup(B)$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite (a_n) de A qui converge vers $\sup(A)$, et une suite (b_n) de B qui converge vers $\sup(B)$. Par conséquent, $a_n + b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup(A)+\sup(B)$: on a une suite de $A+B$ qui converge vers $\sup(A)+\sup(B)$, d'où le résultat par caractérisation séquentielle de la borne supérieure.
- Soit $x \in -A$. Il existe $a \in A$ tel que $x = -a$. Or, $a \geq \inf(A)$ donc $x \leq -\sup(A)$: $-\sup(A)$ est un majorant de $-A$. $-A$ est une partie non vide majorée donc admet une borne supérieure. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite (a_n) de A qui converge vers $\inf(A)$ donc $x_n = -a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\inf(A)$: on en déduit que $-\inf(A)$ est la borne supérieure de $-A$ par caractérisation séquentielle de la borne supérieure. De même pour l'autre égalité.
- On pourrait le faire de la même façon, mais utilisons la caractérisation de la borne supérieure avec le ε. On prouve comme ci-dessus que $\sup(A)+\lambda$ est un majorant de $A+\lambda$ donc cet ensemble admet une borne supérieure. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < a \leq \sup(A)$ donc $\sup(A) + \lambda - \varepsilon < a + \lambda \leq \sup(A) + \lambda$, d'où le résultat par caractérisation de la borne supérieure.
- Soit $x \in A - B$: il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a - b$. Or, $a \leq \sup(A)$ et $b \geq \inf(B)$ donc $x \leq \sup(A) - \inf(B)$, et on prouve de même que précédemment par caractérisation séquentielle de la borne supérieure l'égalité voulue.
- Soit $x \in AB$: il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = ab$. De plus, $a \leq \sup A$ et $b \leq \sup B$. Puisque A et B sont incluses dans $\mathbb{R}_+$, tout est positif et on peut multiplier les inégalités positives donc $x \leq \sup(A)\times\sup(B)$, d'où l'existence de la borne supérieure, et on prouve l'égalité comme précédemment. Si les parties ne sont pas incluses dans $\mathbb{R}_+$, le résultat n'est plus valide : par exemple, si $A = B = [\,-1\,;0\,]$ alors $\sup(AB) = 1 \neq \sup(A)\times\sup(B)$.
- Soit $x \in \sqrt{A}$: il existe $a \in A$ tel que $x = \sqrt{a}$. Or, $a \leq \sup(A)$ et la racine carrée est croissante donc $x \leq \sqrt{\sup A}$: $\sqrt{A}$ est majoré par $\sqrt{\sup A}$, d'où l'existence de la borne supérieure. De plus, par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$, et $\sqrt{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\sup A}$ par continuité de la racine carrée, ce qui permet de conclure.
- $A\cap B$ est inclus dans A qui est majoré donc tout élément de $A\cap B$ est majoré par $\sup(A)$. On en déduit que $A\cap B$ est majoré par $\sup(A)$ si bien que $\sup(A\cap B) \leq \sup(A)$. Par symétrie des rôles, $\sup(A\cap B) \leq \sup(B)$ d'où l'inégalité voulue. Prenons $A = [\,0\,;1\,] \cup \{2\}$ et $B = [\,0\,;2\,[$ donc $A \cap B = [\,0\,;1\,]$: on a bien une inégalité stricte.

Exercice 5 : ✪✪ Soient A et B deux parties non vides de R telle que, pour tout $(a,b) \in A\times B$, $a \leq b$. Montrer que $\sup A \leq \inf B$ (on montrera évidemment qu'ils existent). Montrer que si $A \cup B$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors $\sup(A) = \inf B$.

Correction : Soit $b \in B$. Alors, pour tout $a \in A$, $a \leq b$ c'est-à-dire que b est un majorant de A. A étant non vide et majorée, elle admet une borne supérieure. De même, soit $a \in A$. Alors, pour tout $b \in B$, $a \leq b$ donc a est un minorant de B. De même, B admet une borne inférieure.

On a donc montré que tout élément de A minore B et tout élément de B majore A. Par définition de la borne supérieure, $\sup(A) \leq b$ pour tout $b \in B$ (car b est un majorant). Dès lors, $\sup(A)$ est un minorant de B donc, par définition de la borne inférieure, $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Supposons donc que $A \cup B$ est dense dans $\mathbb{R}$. Supposons que $\sup(A) < \inf(B)$. $A \cup B$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe $c \in A \cup B$ tel que $\sup(A) < c < \inf(B)$. Or, $c \in A \cup B$ donc $c \in A$ ou $c \in B$. Si $c \in A$ alors $c \leq \sup(A)$ car $\sup(A)$ est un majorant de A, ce qui est absurde. Donc $c \in B$, mais alors $c \geq \inf(B)$ car $\inf(B)$ minore B, ce qui est aussi absurde : on en déduit que $\sup(A) = \inf(B)$.

Exercice 6 : ✪✪ Soient a et b deux réels. Donner, lorsque c'est possible, les bornes inférieure et supérieure, les plus petit et plus grand éléments des ensembles suivants :

1. $]\,0\,;1\,[$
2. $\{a + bn \mid n \in \mathbb{N}\}$
3. $\{a + (-1)^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$
4. $\left\{ a + \dfrac{b}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$
5. $\left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$
6. $\left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} \;\middle|\; (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$
7. $\left\{ \dfrac{p}{n+p} \;\middle|\; (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$
8. $\left\{ \dfrac{n - \dfrac{1}{n}}{n + \dfrac{1}{n}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$
9. $\left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^p}{p} \;\middle|\; (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$

Correction : Nous utiliserons certains résultats vus dans l'exercice 13 du chapitre 2.

1. D'après le cours, $]\,0\,;1\,[$ admet une borne inférieure égale à 0 et une borne supérieure égale à 1.
2. Cela dépend de b.
   - Si $b = 0$, alors l'ensemble (qu'on notera E à chaque fois) E est le singleton $\{a\}$ donc admet un plus grand élément et un plus petit élément égaux à a donc une borne supérieure et une borne inférieure égales à a (un plus grand élément est une borne supérieure, réciproque fausse, et idem pour le plus petit élément et la borne inférieure).
   - Si $b > 0$, l'ensemble n'est pas majoré donc n'a pas de borne supérieure, et a est le plus petit élément donc la borne inférieure.
   - Si $b < 0$, l'ensemble n'est pas minoré donc n'a pas de borne inférieure, et a est le plus grand élément donc la borne supérieure.
3. $E = \{a - b; a + b\}$. Si $b \geq 0$, alors le plus grand élément est $a + b$ donc également sa borne supérieure, et $a - b$ est le plus petit élément donc la borne inférieure, et c'est le contraire si $b < 0$.
4. Cela dépend de b.
   - Si $b = 0$, alors l'ensemble (qu'on notera E à chaque fois) E est le singleton $\{a\}$ donc admet un plus grand élément et un plus petit élément égaux à a donc une borne supérieure et une borne inférieure égales à a.
   - Si $b > 0$, $a + b$ est le plus grand élément donc la borne supérieure, et a est un minorant. De plus, $a + \dfrac{b}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ donc, par caractérisation de la borne inférieure, $\inf(E) = a$.
   - Si $b < 0$, on montre de même que $a + b$ est le plus petit élément donc la borne inférieure, et on montre de même que $a = \sup(E)$.
5. $3/2$ est le plus grand élément donc la borne supérieure. -1 est un minorant et est limite de la suite de terme général $\dfrac{1}{2n+1} + (-1)^{2n+1}$ donc, par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $-1 = \inf(E)$.
6. 2 est le plus grand élément donc la borne supérieure. De plus, $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et 0 est un minorant donc $0 = \inf(E)$.
7. 1 est un majorant et 0 un minorant. De plus,
$$\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1+n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
   ce qui permet de conclure.
8. 0 est le plus petit élément donc la borne inférieure. De plus, 1 est un majorant et
$$\frac{n - \dfrac{1}{n}}{n + \dfrac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$
   ce qui permet de conclure.

9. $3/2$ est le plus grand élément donc la borne supérieure. De plus, pour tous n et p, $\dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^p}{p} \geq 0 + (-1) = -1$. De plus, pour $p = 1$,
$$\frac{1}{n} - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$$
ce qui permet de conclure.

Exercice 7 - Diamètre d'une partie bornée : ✪✪ Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\sup_{(x,y) \in A^2} |x - y| = \sup(A) - \inf(A).$$

Correction : A étant bornée, elle est majorée et minorée et puisqu'elle est non vide, elle admet bien une borne supérieure et une borne inférieure. Soit $(x, y) \in A^2$. Sans perte de généralité, on peut supposer $y \leq x$. Alors $|x - y| = x - y$ et puisque $x \leq \sup(A)$ et $y \geq \inf(A)$, alors $|x - y| \leq \sup(A) - \inf(A)$. En d'autres termes, $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de $\{|x - y| \mid (x, y) \in A^2\}$: cet ensemble admet donc une borne supérieure. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$, et il existe également une suite (y_n) d'éléments de A qui converge vers $\inf(A)$. Dès lors, $x_n - y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup(A) - \inf(A)$ et, la valeur absolue étant continue,
$$|x_n - y_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} |\sup(A) - \inf(A)| = \sup(A) - \inf(A)$$
puisque $\sup(A) - \inf(A)$. En d'autres termes, $\sup(A) - \inf(A)$ est un majorant de $\{|x - y| \mid (x, y) \in A^2\}$ et il existe une suite d'éléments de $\{|x - y| \mid (x, y) \in A^2\}$ qui converge vers $\sup(A) - \inf(A)$. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on a le résultat voulu.

Exercice 8 - Distance à une partie : ✪✪✪ Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $d(x, A) = \inf\limits_{x \in A} |x - a|$: c'est la distance de x à la partie A.

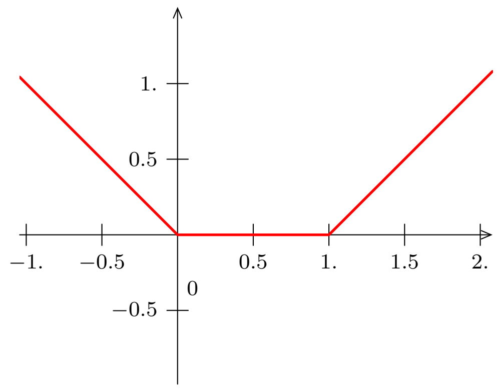
1. Montrer que cette distance est bien définie.
2. On suppose dans cette question que $A = \,]\,0\,;1\,[$. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto d(x, A)$.
3. Même question lorsque $A = \,]-\infty\,;-1\,] \cup [\,1\,;+\infty\,[$.
4. Donner un exemple de partie A et de réel x tel que :
   - $d(x, A)$ ne soit pas atteinte.
   - $d(x, A)$ soit atteinte en exactement un point de A.
   - $d(x, A)$ soit atteinte en exactement deux points de A.

   Est-il possible que $d(x, A)$ soit atteinte en plus de deux points de A ?
5. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$.
6. On suppose que A est telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in A$ tel que $d(x, A) = |x - y|$. Montrer que A est un intervalle fermé (mais pas forcément borné).

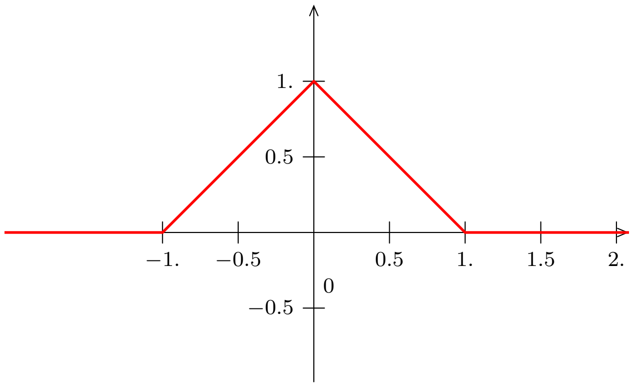
Remarque Un théorème de Motzkin montre qu'une partie fermée A de $\mathbb{R}^n$ telle que la distance de x à A soit atteinte en un unique point pour tout x est convexe. Il s'agit ici du cas $n = 1$.

Correction : Erreur d'énoncé, $d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} |x - a|$.

1. L'ensemble $\{|x - a| \mid a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée par 0 donc admet une borne inférieure.
2. Soit $x \leq 0$. Alors, pour tout $a \in A$, $a \geq x$ donc $|x - a| = a - x$ donc $\{|x - a| \mid a \in A\} = \{a - x \mid a \in \,]\,0\,;1\,[\} = \,]-x\,;1 - x\,[$ si bien que sa borne inférieure est $-x$. Si $x \geq 1$, alors $|x - a| = x - a$ pour tout $a \in A$ donc $\{|x - a| \mid a \in A\} = \{x - a \mid a \in \,]\,0\,;1\,[\} = \,]\,x - 1\,;x\,[$ donc sa borne inférieure est $x - 1$. Enfin, si $x \in \,]\,0\,;1\,[$, alors $x \in A$ donc $0 \in \{|x - a| \mid a \in A\}$ (en prenant $a = x$) si bien que la borne inférieure recherchée vaut 0. En conclusion, $d(x, A) = -x$ si $x \leq 0$, $d(x, A) = x - 1$ si $x \geq 1$, et $d(x, A) = 0$ si $x \in \,]\,0\,;1\,[$. Ci-dessous son graphe :



3. Si $x \leq -1$ alors $x \in A$ donc $0 \in \{|x-a| \,|\, a \in A\}$: 0 est le plus petit élément donc la borne inférieure donc la distance est nulle. De même si $x \geq 1$. Supposons que $x \in [\,0\,;1\,[$. Soit $a \in A$. Si $a \geq 1$ alors $|x-a| = a-x \geq 1-x$ avec égalité en 1. Dès lors, $\inf\{|x-a| \,|\, a \geq 1\} = 1-x$. De même, si $a \leq -1$, $|x-a| = x+1$ donc $\inf\{|x-a| \,|\, a \leq -1\} = x+1 \geq x-1$. On en déduit que $d(x,A) = x-1$, et si $x \in \,]-1\,;0\,[$, $d(x,A) = x+1$. Ci-dessous le graphe de la distance :



4.
   - Si $A = \,]\,0\,;1\,[$ et $x = 0$, alors $d(x,A) = 0$ mais n'est pas atteinte, il n'existe pas d'élément $a \in A$ tel que $|x-a| = 0$.
   - Si $A = \,]\,0\,;1\,[$ et $x = 1/2$, alors $d(x,A) = 0$ atteinte uniquement en $1/2$: si $a \neq 1/2$, $|x-a| \neq 0$.
   - Si $A = \,]-\infty\,;-1\,] \cup [\,1\,;+\infty\,[$ et $x = 0$, alors $d(x,A) = 1$ atteint exactement en ± 1.

   Supposons que $d(x,A)$ soient atteinte en au moins trois points distincts a_1, a_2, a_3. Alors $|x-a_1| = |x-a_2| = |x-a_3| = d(x,A)$. Si a_1, a_2, a_3 sont supérieurs à x, alors $a_1 - x = a_2 - x = a_3 - x$ donc $a_1 = a_2 = a_3$, ce qui est absurde. Si $a_1 \leq x \leq a_2, a_3$ alors $x - a_1 = a_2 - x = a_3 - x$ donc $a_2 = a_3$ et on exclut tous les autres cas de la même manière. Dans tous les cas, c'est absurde.
5. Soit $a \in A$. D'après l'inégalité triangulaire, $|x-y| = |x-a+a-y| \geq |x-a| - |y-a|$. On en déduit que $|x-a| \leq |x-y| + |y-a|$. Or, $d(x,A) \leq |x-a|$ donc $d(x,A) \leq |x-y| + |y-a|$. En prenant la borne inférieure du membre de droite quand $a \in A$, on obtient l'inégalité $d(x,A) \leq |x-y| + d(x,A)$. On peut aussi dire que $d(x,A) - |x-y| \leq |y-a|$ donc $d(x,A) - |x-y|$ est un minorant de tous les $|y-a|$ donc est inférieur à la borne inférieure $d(y,A)$ ce qui donne le même résultat. On en déduit que $d(x,A) - d(y,A) \leq |x-y|$. Par symétrie des rôles, $d(y,A) - d(x,A) \leq |x-y|$ d'où l'inégalité voulue.
6. Montrons que A est un intervalle. Utilisons pour cela la caractérisation des intervalles : soient a et b deux éléments de A tels que $a \leq b$, et prouvons que $[\,a\,;b\,] \subset A$. Soit $x \in [\,a\,;b\,]$. Si $x \notin A$, introduisons $A_d = \{a \in A \,|\, a \geq x\}$ et $A_g = \{a \in A \,|\, a \leq x\}$. A_d est non vide (il contient b) et minoré par x donc admet une borne inférieure d. De même, A_g admet une borne supérieure c. Posons enfin $m = \dfrac{c+d}{2}$ (faire un dessin). Alors $d(m,A) = \dfrac{d-c}{2}$ atteinte en deux points : d à droite et c à gauche, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ (enfin, ça c'est si $d \neq c$, mais sinon, alors $c = d = x$ et la distance de x à A n'est pas atteinte puisque $x \notin A$). On en déduit que A est un intervalle, de la forme $(a;b)$ (les parenthèses indiquent qu'on ne sait pas encore si l'intervalle est ouvert ou fermé) avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$. Prouvons que A est fermé, c'est-à-dire que si a ou b est réel, alors il appartient à l'ensemble A. Si a est réel et n'appartient pas à A, alors $d(a,A) = 0$ mais n'est pas atteinte ce qui est contraire à l'hypothèse, ce qui permet de conclure.

3 Densité

Exercice 9 - Caractérisation des rationnels décimaux : ✪ Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ et on suppose que a et b sont premiers entre eux. Montrer que $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{D}$ si et seulement si les facteurs premiers de b appartiennent à l'ensemble $\{2;5\}$.

Correction : Supposons que les facteurs premiers de b appartiennent à l'ensemble $\{2;5\}$. Alors il existe $(c,d) \in \mathbb{N}^2$ (c et d peuvent être nuls) tels que $b = 2^c 5^d$. Sans perte de généralité, on peut supposer $c \geq d$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a}{2^c5^d} \\ &= \frac{a\times 5^{c-d}}{2^c5^c} \\ &= \frac{a\times 5^{c-d}}{10^c} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $a/b \in \mathbb{D}$. Réciproquement, supposons que $a/b \in \mathbb{D}$. Alors il existe $(k,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ tel que $a/b = k/10^n$ si bien que $b\times k = a\times 10^n$. En d'autres termes, b divise $a\times 10^n$ et puisque a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauß, b divise 10^n donc les facteurs premiers de b ne peuvent être que dans l'ensemble $\{2;5\}$. Pour le faire proprement : soit p un facteur premier de b. Alors $1 \leq v_p(b) \leq v_p(10^n) = nv_p(10)$. Or, si $p \notin \{2;5\}$ alors $v_p(10) = 0$ ce qui est absurde. D'où l'équivalence.

Exercice 10 : ✪ L'ensemble $\pi\mathbb{Z}$ est-il dense dans $\mathbb{R}$?

Correction : Il n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ car il n'y a aucun élément de $\pi\mathbb{Z}$ dans l'intervalle ouvert $]\,0\,;\pi\,[$. En effet, un ensemble dense intersecte tout intervalle ouvert non vide.

Exercice 11 : ✪ Montrer que $\{q^2 \,|\, q\in\mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$. Généraliser à l'ensemble $\{q^n \,|\, q\in\mathbb{Q}\}$.

Correction : Soient $a<b$ deux éléments de $\mathbb{R}_+$. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$ (cf. cours), il existe $q\in\mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{a} < q < \sqrt{b}$. Par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $a < q^2 < b$, d'où le résultat. Le même raisonnement prouve que $\{q^n \,|\, q\in\mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$ pour tout n. Mieux : si n est impair, cet ensemble est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12 - Endomorphismes de corps de $\mathbb{R}$: ✪✪ On cherche à déterminer les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x)+f(y)$ ainsi que $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous réels x,y. On se donne dans la suite f une telle application.

1. Donner la valeur de $f(0)$. Montrer que $f(1)\in\{0;1\}$. Que dire de f si $f(1)=0$? On supposera dans la suite que $f(1)=1$.
2. Montrer que f est impaire et que pour tout $n\in\mathbb{Z}, f(n)=n$.
3. Montrer que $f(r)=r$ pour tout rationnel r.
4. Montrer que f est croissante.
5. En déduire que f est l'identité sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. $f(0+0) = f(0)+f(0)$ donc $f(0) = 2f(0)$: on en déduit que $f(0)=0$. De plus, $f(1\times 1) = f(1)\times f(1)$ donc $f(1) = f(1)^2$: on en déduit que $f(1)=0$ ou $f(1)=1$. Supposons que $f(1)=0$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x\times 1) \\ &= f(x)\times f(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   c'est-à-dire que f est l'application nulle. Réciproquement, l'application nulle est bien solution. On suppose donc dans la suite que $f(1)=1$.
2. Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors $f(x-x) = f(x)+f(-x)$. Or, $f(x-x) = f(0) = 0$ donc $f(x)+f(-x) = 0$ i.e. $f(-x) = -f(x)$: f est impaire. On sait déjà que $f(0)=0$ et $f(1)=1$. De plus,

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1+1) \\ &= f(1)+f(1) \\ &= 1+1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

   De même :

$$\begin{aligned} f(3) &= f(2+1) \\ &= f(2)+f(1) \\ &= 2+1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate, $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit à présent $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$. Alors f est impaire donc $f(n) = -f(-n)$ mais $-n \in \mathbb{N}$ donc, d'après ce qui précède, $f(-n) = -n$ si bien que $f(n) = n$.

3. Soit $r = a/b$ un rationnel. Alors $f(r) = f(a) \times f(1/b) = a \times f(1/b)$. Or, $1 = b \times 1/b$ donc

$$\begin{aligned} 1 &= f(1) \\ &= f(b \times 1/b) \\ &= f(b) \times f(1/b) \\ &= b \times f(1/b) \end{aligned}$$

donc $f(1/b) = 1/b$ si bien que $f(r) = a \times 1/b = r$.

4. Soient $x \leq y$ deux réels. Alors

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &= f(y)+f(-x) \quad (f \text{ impaire}) \\ &= f(y-x) \end{aligned}$$

Or, $y - x \geq 0$ donc $y - x = \sqrt{y-x}^2$. Dès lors :

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &= f\left(\sqrt{y-x} \times \sqrt{y-x}\right) \\ &= f(\sqrt{y-x}) \times f(\sqrt{y-x}) \\ &= f(\sqrt{y-x})^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est croissante.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient (x_n) et (y_n) deux suites de rationnels vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq x \leq y_n$. Si on veut des suites explicites, il suffit de prendre les suites définies (à partir du rang 1 mais on ne va pas s'embêter avec ça) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. f étant croissante, $f(x_n) \leq f(x) \leq f(y_n)$. Or, x_n et y_n étant rationnels, $f(x_n) = x_n$ et $f(y_n) = y_n$ donc $x_n \leq f(x) \leq y_n$. De plus, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ mais $f(x)$ ne dépend pas de n donc $f(x) = x$: f est l'identité. Synthèse : l'identité est bien solution. Les seules solutions du problème sont donc la fonction nulle et l'identité.

Exercice 13 : ✪✪

1. Soient $x < y$ deux réels strictement positifs. Montrer que l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}]\,nx\,;ny\,[$ contient un intervalle du type $]\,a\,;+\infty\,[$.
2. Soit A une partie non majorée de $\mathbb{R}_+$. Si $n \geq 1$, on pose $\dfrac{1}{n} \times A = \left\{\dfrac{a}{n} \,|\, a \in A\right\}$. Montrer que $B = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \times A$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Correction :

1. Il suffit qu'un intervalle $]\,nx\,;ny\,[$ chevauche le suivant. La suite de terme général $\dfrac{n}{n+1}$ converge vers 1 donc est supérieure strictement à $\dfrac{x}{y}$ pour n assez grand. En d'autres termes, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{n}{n+1} > \dfrac{x}{y}$ donc $ny > (n+1)x$. En d'autres termes : à partir de n_0, l'intervalle $]\,nx\,;ny\,[$ empiète sur le suivant i.e. $(n+1)x < ny$.

Prouvons que tous les réels appartiennent à l'union à partir de n_0x. En d'autres termes, prouvons que $]\,n_0x\,;+\infty\,[$ est inclus dans l'union. Soit donc $a > n_0x$. Notons $n_1 = \max\{n \geq n_0 \,|\, nx < a\}$ (un tel maximum existe car l'ensemble en question est une partie de $\mathbb{N}$, non vide, car contient n_0, majorée par a/x donc admet un plus grand élément). Alors $n_1x < a < (n_1+1)x$ mais $n_1y > (n_1+1)x$ car $n_1 > n_0$ si bien que $a \in\,]\,n_1x\,;n_1y\,[$ donc est dans l'union.

2. Soient $x < y$ deux réels positifs. Montrons que $]\,x\,;y\,[$ contient un élément de B. Soit $z \in \mathbb{R}_+$. Alors $z \in B$ si et seulement s'il existe $n \geq 1$ tel que $z \in \dfrac{1}{n}A$, si et seulement s'il existe $n \geq 1$ et $a \in A$ tel que $z = a/n$. Un élément de cette forme appartient à $]\,x\,;y\,[$ si et seulement si $x < a/n < y$ si et seulement si $nx < a < ny$.

   D'après la question précédente, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]\,a\,;+\infty\,[$ soit inclus dans l'union $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}\,]\,nx\,;ny\,[$. Puisque A n'est pas majorée, il existe $\alpha \in A$ (a est déjà pris) supérieur strict à α. Dès lors, $\alpha \in\,]\,a\,;+\infty\,[$ donc α appartient à l'union : il existe n tel que $nx < \alpha < ny$ donc $x < \alpha/n < y$: B est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14 : ✪✪✪ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites tendant vers $+\infty$ telles que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\{u_n - v_m \,|\, (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction : Soient x et y deux réels avec $x < y$. L'idée est de faire comme dans le cours : on part d'avant x, et ensuite on rajoute des $u_{n+1} - u_n$ qui font des pas de longueur inférieure à $y - x$ (possible car $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$) et on tombera entre x et y. Faisons cela rigoureusement.

$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - u_n| < y - x$. De plus, $v_m \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: il existe m_0 tel que $u_{n_0} - v_{m_0} < x$. Posons

$$A = \{k \geq n_0 \,|\, u_k - v_m < y\}$$

A est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car contient n_0, et majorée. En effet, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il existe n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, $u_n - v_m \geq y$ et donc A est majorée par n_1. A admet donc un plus grand élément N. $N \in A$ donc $u_N - v_m < y$. Si $u_N - v_m \leq x$, alors $u_{N+1} - v_m = (u_{N+1} - u_N) + u_N - v_m < (y-x) + x = y$ donc $N+1 \in A$ ce qui est absurde puisque N est le plus grand élément de A. Dès lors, $x < u_N - v_m < y$ ce qui permet de conclure.

Exercice 15 : Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. ✪ Montrer que l'ensemble $\left\{a^{\frac{k}{2^n}} \times b^{1-\frac{k}{2^n}} \,|\, n \in \mathbb{N}^*, k \in [\![\, 0\,;\, 2^n \,]\!]\right\}$ est dense dans $[\,a\,;b\,]$.
2. ✪✪✪ Soit M une partie bornée de $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que :

$$\forall (a,b) \in M^2, \sqrt{ab} \in M$$

   Montrer que $]\inf M\,;\sup M\,[\, \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ est dense dans M.

Correction :

1. Soient $x < y$ deux éléments de $[\,a\,;b\,]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![\, 0\,;\, n\,]\!]$. Alors :

$$\ln\left(a^{\frac{k}{2^n}} \times b^{1-\frac{k}{2^n}}\right) = \frac{k}{2^n} \times (\ln(a) - \ln(b)) + \ln(b)$$

   Par stricte croissance de la fonction ln (et puisque $\ln(a) - \ln(b) < 0$) :

$$\begin{aligned} x < a^{\frac{k}{2^n}} \times b^{1-\frac{k}{2^n}} < y \quad &\iff \quad \ln(x) < \ln\left(a^{\frac{k}{2^n}} \times b^{1-\frac{k}{2^n}}\right) < \ln(y) \\ &\iff \quad \ln(x) < \frac{k}{2^n} \times (\ln(a) - \ln(b)) + \ln(b) < \ln(y) \\ &\iff \quad 1 > \frac{\ln(x) - \ln(b)}{\ln(a) - \ln(b)} > \frac{k}{2^n} > \frac{\ln(y) - \ln(b)}{\ln(a) - \ln(b)} > 0 \end{aligned}$$

   Or, l'ensemble des nombres dyadiques positifs est dense dans $\mathbb{R}_+$ donc il existe bien n et $k \in [\![\, 0\,;\, 2^n \,]\!]$ (car on est entre 0 et 1) tel que l'inégalité ci-dessus soit vérifiée, et puisqu'on a travaillé par équivalences, la première inégalité est aussi vérifiée : l'ensemble $\left\{a^{\frac{k}{2^n}} \times b^{1-\frac{k}{2^n}} \,|\, n \in \mathbb{N}^*, k \in [\![\, 0\,;\, n\,]\!]\right\}$ intersecte tout intervalle ouvert non vide de $[\,a\,;b\,]$ donc est dense dans $[\,a\,;b\,]$.

2. Soient donc $x < y$ deux éléments de $]\inf M\,;\sup M\,[$. Il suffit de prouver qu'il existe un élément irrationnel de M dans $]\,x\,;y\,[$. Puisque $\inf M < x$ et $y < \sup M$, il existe $(a,b) \in M^2$ tel que $\inf M < a < x$ et $y < b < \sup M$. Par hypothèse sur M, $\sqrt{ab} = a^{1/2}b^{1/2} \in M$ puis, avec $\sqrt{ab}$ à la place de b :

$$\begin{aligned} \sqrt{a\times\sqrt{ab}} &= \left(a\times a^{1/2}b^{1/2}\right)^{1/2} \\ &= a^{3/4}\times b^{1/4} \in M \end{aligned}$$

Avec cette fois $\sqrt{ab}$ à la place de a (et b à la place de b), on montre de même que $a^{1/4}b^{3/4} \in M$. On voit apparaître les nombres de la question précédente en prenant toutes les racines carrées possibles des nombres obtenus aux étapes précédentes. Montrons donc par récurrence que tous les éléments de la forme de la question ci-dessus sont encore dans M.

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $\forall k \in [\![\,0\,;\,2^n\,]\!], a^{\frac{k}{2^n}}\times b^{1-\frac{k}{2^n}} \in M$ ».
- $a^{0/2^0}\times b^{1-0/2^0} = b \in M$ et $a^{1/2^0}\times b^{1-1/2^0} = a \in M$: H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit donc $k \in [\![\,0\,;\,2^{n+1}\,]\!]$. Si k est pair, il existe p (pas forcément premier) tel que $k = 2p$ donc

$$a^{\frac{k}{2^{n+1}}}\times b^{1-\frac{k}{2^{n+1}}} = a^{\frac{p}{2^n}}\times b^{1-\frac{p}{2^n}} \in M$$

  par hypothèse de récurrence. Supposons à présent k impair. Alors $k-1$ et $k+1$ sont pairs donc, d'après ce qui précède,

$$\alpha = a^{\frac{k-1}{2^{n+1}}}\times b^{1-\frac{k-1}{2^{n+1}}} \qquad \text{et} \qquad \beta = a^{\frac{k+1}{2^{n+1}}}\times b^{1-\frac{k+1}{2^{n+1}}}$$

  appartiennent à M. Par hypothèse, $\sqrt{\alpha\beta} = \alpha^{1/2}\beta^{1/2} \in M$ donc :

$$\begin{aligned} a^{\frac{k-1}{2^{n+2}}}\times b^{1-\frac{k-1}{2^{n+2}}}\times a^{\frac{k+1}{2^{n+2}}}\times b^{1-\frac{k+1}{2^{n+2}}} &= a^{\frac{2k}{2^{n+2}}}\times b^{1-\frac{2k}{2^{n+2}}} \\ &= a^{\frac{k}{2^{n+1}}}\times b^{1-\frac{k}{2^{n+1}}} \in M \end{aligned}$$

  c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble de ces nombres étant dense dans $[\,a\,;b\,]$, il existe $c < d$ dans $M \cap intffab$. Si c ou d est irrationnel, alors on a terminé. Dans le cas contraire, on montre de même que tous les nombres de la forme $a^{\frac{k}{2^n}}\times b^{1-\frac{k}{2^n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![\,0\,;\,2^n\,]\!]$ appartiennent à M. Il suffit de prouver que l'un d'entre eux est irrationnel. En particulier, pour tout n,

$$c^{\frac{1}{2^n}}\times d^{1-\frac{1}{2^n}} = \left(\frac{c}{d}\right)^{1/2^n}\times d \in M$$

Puisqu'on a supposé d rationnel (sinon c'est terminé), il suffit de prouver qu'il existe n tel que $(c/d)^{1/2^n}$ soit irrationnel. S'il est rationnel, alors il existe a, b premiers entre eux tels que $(c/d)^{1/2^n} = a/b$ i.e. tels que

$$\frac{c}{d} = \frac{a^{2^n}}{b^{2^n}}$$

Or, l'écriture irréductible d'un rationnel est unique : par contraposée, si l'écriture irréductible de c/d n'est pas de cette forme, alors $(c/d)^{1/2^n}$ est irrationnel, et si elle est de cette forme, il suffit de prendre une puissance plus élevée, c'est-à-dire que s'il existe a, b deux entiers premiers entre eux et n maximal (i.e. le numérateur et le dénominateur sont des puissances 2^n-ièmes mais pas 2^{n+1} i.e. leurs valuations p-adiques sont divisibles par 2^n mais pas par 2^{n+1}, c'est-à-dire qu'il existe a ou b avec des valuations p-adiques pas toutes paires) tels que c/d soit sous la forme ci-dessus, alors

$$(c/d)^{1/2^{n+1}} = \sqrt{a/b}$$

avec, donc, a ou b dont les valuations p-adiques ne sont pas toutes paires donc a/b n'est pas un carré donc $\sqrt{a/b}$ est irrationnel ce qui conclut l'exercice. Ouf !

4 Suites explicites

Exercice 16 : ✪ Montrer que la suite de terme général n^2 n'est pas arithmético-géométrique.

Correction : Supposons que cette suite soit arithmético-géométrique. Alors il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 = an^2 + b$$

Soit $n \geq 1$. D'une part,

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et d'autre part

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = a + \frac{b}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$$

Par unicité de la limite, $a = 1$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)^2 = n^2 + b$$

En particulier, la suite de terme général $(n+1)^2 - n^2$ est constante, ce qui est absurde puisque $(0+1)^2 - 0^2 = 1$ et $(1+1)^2 - 1^2 = 3$.

Exercice 17 : ✪ Montrer que les suites dont les termes généraux sont donnés ci-dessous divergent :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$.
2. $u_n = \cos\left(\dfrac{n^2-3n+1}{n+2} \times \pi\right)$.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n = \Re(v_n)$ où
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \left(e^{i\pi/5}\right)^k$$
Puisque $e^{i\pi/5} \neq 1$ (attention, la somme commence en 1) :
$$v_n = e^{i\pi/5} \times \frac{1-e^{in\pi/5}}{1-e^{i\pi/5}}$$
On pourrait calculer v_n pour tout n (angle moitié etc.) mais on n'a même pas besoin d'en faire autant. Si n est un multiple de 10 i.e. s'il existe k tel que $n = 10k$ alors $e^{in\pi/10} = 1$ donc $v_n = 0$ donc $u_n = 0$. En d'autres termes, la suite extraite $(u_{10n})_{n\in\mathbb{N}}$ (on devrait prendre $10k$ mais l'indice est muet) est nulle donc converge vers 0. Si $n \equiv 1[10]$ i.e. s'il existe k tel que $n = 1+10k$ alors $e^{in\pi/5} = e^{i\pi/5}$ puisque $e^{2ik\pi} = 1$ si bien que $v_n = e^{i\pi/5}$ donc $u_n = \cos(\pi/5)$. En d'autres termes, la suite extraite $(u_{10n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\cos(\pi/5)$ donc converge vers $\cos(\pi/5) \neq 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes donc diverge.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En effectuant la division euclidienne, on trouve que $n^2 - 3n + 1 = (n+2)\times(n-5) + 11$ donc
$$\begin{aligned} u_n &= \cos\left((n-5)\pi + \frac{11\pi}{n+2}\right) \\ &= (-1)^{n-5} \times \cos\left(\frac{11\pi}{n+2}\right) \end{aligned}$$
On rappelle que $\cos(k\pi + u) = (-1)^k \cos(u)$. Dès lors, la fonction cos étant continue,
$$u_{2n} = (-1) \times \cos\left(\frac{11\pi}{n+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$$
et, de même, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne convergent pas vers la même limite donc la suite diverge.

Exercice 18 : ✪ Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence, donner une expression du terme général en fonction de n.

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^2} \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = \pi \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{5} \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = \dfrac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 4u_n = 2u_{n+1} \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 7u_{n+1} \end{cases}$

7. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{{u_{n+1}}^4}{{u_n}^3} \end{cases}$

10. $\begin{cases} u_0 > 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln\left(e^{u_n} + 1\right) \end{cases}$

11. $\begin{cases} u_0 = \sqrt{5}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5 \times {u_n}^3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 \times {u_n}^2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$

14. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

Correction :

1. On a une suite géométrique de raison $1/e^2$ de premier terme 1 donc le terme général de cette suite est $u_n = e^{-2n}$.
2. Attention, la suite n'est pas arithmétique car, pour tout n, $u_{n+1} = -u_n + \pi$ et pas $u_{n+1} = u_n + \pi$! La suite (u_n) est arithmético-géométrique, dont l'équation caractéristique est : $c = -c + \pi \iff c = \pi/2$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{ccccc} u_{n+1} & = & -u_n & + & \pi \\ \pi/2 & = & -\pi/2 & + & \pi \end{array}$$

   Par différence, $(u_{n+1} - \pi/2) = -(u_n - \pi/2)$ i.e. la suite de terme général $u_n - \pi/2$ est géométrique de raison -1. Dès lors,

$$u_n - \pi/2 = (u_0 - \pi/2) \times (-1)^n$$

   Finalement : $u_n = (-2 - \pi/2) \times (-1)^n + \pi/2$.
3. On fait comme d'habitude et on trouve que le terme général est

$$u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n \times 5 - 1$$

4. Suite récurrence linéaire d'ordre 2 (1 est racine double de l'équation caractéristique) : comme d'habitude, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1+n) \times 1^n = n + 1$.
5. Flemme. Si vous n'y arrivez pas venez me voir.
6. Pour $n = 0$, on trouve que $u_3 = 7u_1$. Pour $n = 1$, on trouve que $u_4 = 7u_2$. Pour $n = 2$, on trouve que $u_5 = 7u_3$. Prouvons que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont géométriques de raison 7 (à partir du rang 1 : u_0 n'apparaît pas). Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= u_{2n-1+3} \\ &= 7u_{2n-1+1} \\ &= 7u_{2n} \end{aligned}$$

   ce qui est le résultat voulu, et idem pour l'autre. Dès lors, pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} = 7^{n-1}u_2 = 0$ et $u_{2n+1} = 7^{n-1}u_1 = 7^{n-1}$. En conclusion, $u_0 = -1$, les autres termes pairs sont nuls et $u_{2n+1} = 7^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = n^2$. Par somme (télescopique),

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

   si bien que

$$u_n = \frac{(n-1) \times n \times (2n-1)}{6} + 1$$

8. Par une récurrence immédiate, $u_n > 0$ pour tout n. Dès lors, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \ln(u_n) + \ln(3)$$

   On en déduit que la suite de terme général $\ln(u_n)$ est arithmético-géométrique, et cela ne pose plus de difficulté.
9. De même, par une récurrence (double) immédiate (faites-la !), $u_n > 0$ pour tout n. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_{n+2}) = 4\ln(u_{n+1}) - 3\ln(u_n)$$

   c'est-à-dire que $(\ln(u_n))$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Le reste est laissé à votre charge.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. $e^{u_{n+1}} = e^{u_n} + 1$: la suite de terme général e^{u_n} est arithmétique de raison 1 donc $e^{u_n} = e^{u_0} + n$ et donc $u_n = \ln(e^{u_0} + n)$.
11. De même, la suite est à valeurs strictement positives, et pour tout n,
$$\ln(u_{n+1}) = 3\ln(u_n) + \ln(5)$$
c'est-à-dire que $(\ln(u_n))$ est arithmético-géométrique, et on fait comme d'habitude.
12. Idem.
13. Rien ne semble évident : calculons les premiers termes pour nous donner une idée. $u_1 = 1/2$, $u_2 = 1/3$, $u_3 = 1/4$. Par une récurrence immédiate (faites-la), $u_n = 1/(n+1)$ pour tout n.
14. Par une récurrence immédiate, $u_n \neq 0$ pour tout n : posons $v_n = 1/u_n$ si bien que pour tout n, $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, c'est-à-dire que $(1/u_n)$ est récurrente linéaire d'ordre 2 : CQPC.

Exercice 19 : ✪ Donner à chaque fois la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général :

1. $u_n = \left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n$ (pour $a \in \mathbb{R}$)
2. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$
3. $u_n = \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{n}\right)^n$
4. $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$
5. $u_n = \dfrac{\sin\left(\exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n!} k!^{k!}\right)\right)}{\sqrt{n}}$
6. $u_n = \dfrac{n^2 - n\ln(n)}{n^2 + n(\ln(n))^2}$
7. $u_n = \dfrac{2+\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+1}$
8. $u_n = \dfrac{\ln\left(n^{2020}+n\right)}{\ln(n)}$
9. $u_n = n \times \sin\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$
10. $u_n = n \times \cos\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$
11. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$
12. $u_n = n\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+k}$
13. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ (pour $x \in \mathbb{R}$)
14. $u_n = 3^n - n^2 2^n$
15. $u_n = \dfrac{n2^{2n} + 5^n}{n2^{2n} - 5^n}$
16. $u_n = \dfrac{\left\lfloor \left(5n - \dfrac{1}{2}\right)^3 \right\rfloor}{\left\lfloor \left(4n + \dfrac{1}{3}\right)^3 \right\rfloor}$
17. $u_n = \dfrac{1}{n^5}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k k^3}{2 - \sin k}$
18. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
19. $u_n = \sqrt[n]{n}$
20. $u_n = \dfrac{\left\lfloor \dfrac{\sqrt{6}}{9} \times \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \right\rfloor}{2n-1}$

Correction :

1. On reconnaît une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$. Comparons cette raison à -1 et 1.
$$\begin{aligned} -1 < \frac{1-a^2}{1+a^2} < 1 & \iff -1 - a^2 < 1 - a^2 < 1 + a^2 \\ & \iff 0 < 2a^2 \\ & \iff a \neq 0 \end{aligned}$$
Dès lors, si $a \neq 0$, on a une suite géométrique de raison dans $]-1\,;1[$ donc converge vers 0. Si $a = 0$, la suite est constante égale à 1 donc converge vers 1.
2. Faisons comme en classe : soit $n \geq 1$.
$$u_n = e^{(2n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$
Or,
$$\begin{aligned} (2n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) & = (2n+1)\frac{\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{-\dfrac{1}{n}} \times -\frac{1}{n} \\ & = -\frac{2n+1}{n} \times \frac{\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{-\dfrac{1}{n}} \\ & \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2 \end{aligned}$$
et la fonction exponentielle est continue donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-2}$.

3. Si $n \geq 1$,
$$u_n = e^{n\ln\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{n}\right)}$$
Or, $\ln\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1/5) < 0$ par continuité de la fonction ln. Par produit, la quantité dans l'exponentielle tend vers $-\infty$ si bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1/n \leq u_n \leq 1/n$: d'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Idem : ce qu'il y a dans le sinus est moche, mais le sinus est quand même compris entre -1 et 1 et u_n est compris entre $-1/\sqrt{n}$ et $1/\sqrt{n}$.
6. Soit $n \geq 1$. Factorisons par n^2, le terme prédominant :
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n^2\left(1-\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{\ln(n)^2}{n}\right)} \\ &= \frac{1-\dfrac{\ln(n)}{n^2}}{1+\dfrac{\ln(n)^2}{n}} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \end{aligned}$$
par croissances comparées.
7. On factorise par $\sqrt{n}$: la suite tend vers $1/3$.
8. Classique dans un ln : factoriser par le terme prédominant. Soit $n \geq 1$ (zut, ma liste d'exos n'est pas à jour)
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\ln(n^{2020})+\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{2019}}\right)}{\ln(n)} \\ &= 2020+\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{2019}}\right)}{\ln(n)} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 2020 \end{aligned}$$
9. On reconnaît un taux d'accroissement.
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\sin(1/(n+2))}{1/(n+2)} \times \frac{n}{n+2} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \end{aligned}$$
puisque $\dfrac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
10. Ce n'est pas une forme indéterminée : le cosinus tend vers 1 et n vers $+\infty$. Par produit, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
11. Une somme, soit ça se calcule, soit ça s'encadre. Soit $n \geq 1$.
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq u_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$
D'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$n\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2+n}{=}\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq n\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{=}1$$
D'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. $kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx$. Par somme, et en divisant par $1/n^2$ (positif) :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < u_n \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx$$

Notons v_n le terme de gauche et w_n le terme de droite. Alors :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{x}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= x \times \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{2} \end{aligned}$$

et on trouve de même que $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x/2$. D'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x/2$.

14. En factorisant par le terme prédominant :

$$u_n = 3^n\left(1 - n^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

Or, $2/3 < 1$ donc, par croissances comparées, $n^2(2/3)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

15. En factorisant par 5^n et en se souvenant que $2^{2n} = 4^n$, on trouve de même que (u_n) tend vers -1.

16. On fait comme en classe : quant une quantité tend vers $\pm\infty$, alors sa partie entière, divisée par cette quantité, tend vers 1.

$$u_n = \frac{\left\lfloor \left(5n - \frac{1}{2}\right)^3 \right\rfloor}{\left(5n - \frac{1}{2}\right)^3} \times \frac{\left(5n - \frac{1}{2}\right)^3}{\left(4n + \frac{1}{3}\right)^3} \times \frac{\left(4n + \frac{1}{3}\right)^3}{\left\lfloor \left(4n + \frac{1}{3}\right)^3 \right\rfloor}$$

Les deux termes extrémaux tendent donc vers 1, et celui du milieu vers $5^3/4^3$ (en factorisant par n dans chaque parenthèse) si bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 5^3/4^3$.

17. Une somme, soit... Soit $n \geq 1$ et soit $k \in [\![0\,;\, n]\!]$. Alors (pour majorer une fraction, on majore le numérateur et on minore le dénominateur), puisque $1 \leq 2 - \sin(k) \leq 3$:

$$1 \leq \frac{k^3}{\leq}\frac{k^3}{2 - \sin(k)} \leq \frac{k^3}{3} \leq \frac{n^3}{3}$$

et donc

$$\frac{-n^3}{3} \leq \frac{(-1)^k k^3}{2 - \sin(k)} \leq \frac{n^3}{3}$$

Il en découle que $-1/3n \leq u_n \leq 1/3n$ (car la somme des n^3 vaut n^4) : d'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec la méthode de l'expression conjuguée :

$$u_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

19. Puissance variable : notation exponentielle. Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} u_n &= n^{1/n} \\ &= e^{\frac{\ln(n)}{n}} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1 \end{aligned}$$

par croissances comparées (car l'exponentielle est continue).

20.

$$u_n = \frac{\left\lfloor \frac{\sqrt{6}}{9} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \right\rfloor}{\frac{\sqrt{6}}{9} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n} \times \frac{\frac{\sqrt{6}}{9} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}{2n-1}$$

Le premier terme tend vers 1, le deuxième vers $+\infty$ par croissances comparées : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 20 : ✪ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par : $u_0 = -2, v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 5u_n + 4v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 4u_n + 5v_n$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. En déduire une expression des termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$: la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} + v_{n+1} = 9(u_n + v_n)$. La suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison 9 de premier terme -1.
3. On en déduit que pour tout n, $u_n + v_n = -9^n$ et $u_n - v_n = 1$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}(1 - 9^n) \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{2} \times (-9^n - 1)$$

Exercice 21 : ✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$$

1. Déterminer α pour que la suite de terme général $s_n = \alpha \times n \times (-1)^n$ vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_n - s_n$. Déterminer v_n en fonction de v_0 et de v_1.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de u_0, u_1 et n pour tout n.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $s_{n+2} = \alpha(n+2) \times (-1)^n$ (car $(-1)^{n+2} = (-1)^n$) et

$$\begin{aligned} s_{n+1} + 2s_n + (-1)^n &= \alpha(n+1) \times (-1)^{n+1} + 2\alpha n(-1)^n + (-1)^n \\ &= (-\alpha(n+1) + 2\alpha n + 1) \times (-1)^n \\ &= (\alpha(n-1) + 1) \times (-1)^n \end{aligned}$$

On cherche donc α pour que $\alpha(n-1) + 1 = \alpha(n+2)$ pour tout n, c'est-à-dire tel que $-\alpha + 1 = 2\alpha$. On en déduit que $\alpha = 1/3$ convient.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n - (s_{n+2} + 2s_n + (-1)^n) \\ &= (u_{n+1} - s_{n+1}) + 2(u_n - s_n) \end{aligned}$$

En d'autres termes : $(u_n - s_n)$ est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique : $r^2 = r + 2 \iff r^2 - r - 2 = 0$, dont les solutions sont -1 et 2. Dès lors, il existe (λ, μ) unique tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - s_n = \lambda(-1)^n + \mu \times 2^n$$

En prenant $n = 0$: $\lambda + \mu = v_0$, et en prenant $n = 1$: $2\mu - \lambda = v_1$ si bien que $\mu = (v_0 + v_1)/3$ et $\lambda = (2v_0 - v_1)/3$. En d'autres termes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2v_0 - v_1}{3} \times (-1)^n + \frac{v_0 + v_1}{3} \times 2^n$$

3. Il suffit de remplacer, en se souvenant que $s_0 = 0$ et $s_1 = -\alpha = -1/3$ donc $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1 + 1/3$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \frac{n}{3} \times (-1)^n = \frac{2u_0 - u_1 - 1/3}{3} \times (-1)^n + \frac{u_0 + u_1 + 1/3}{3} \times 2^n$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 22 : ✪

1. Déterminer toutes les suites réelles bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0$$

2. Déterminer toutes les suites réelles bornées $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = (-1)^n$$

Correction :

1. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : les solutions sont les suites de terme général

$$u_n = \lambda \times 1^n + \mu \times (-2)^n = \lambda + \mu \times (-2)^n$$

La suite est bornée si et seulement si $\mu = 0$: on en déduit que la seule solution bornée est la suite constante égale à 1.

2. Faisons comme dans l'exercice précédent : cherchons une solution évidente, faisons la différence pour nous ramener à une suite d'un type connu. La suite de terme général $(-1)^n/12$ est solution évidente car, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(-1)^{n+2} - 5(-1)^{n+1} + 6(-1)^n = (-1)^n + 5(-1)^n + 6(-1)^n = 12(-1)^n$$

Soit (v_n) une suite solution (analyse synthèse). Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccccc} v_{n+2} & - & 5v_{n+1} & + & 6v_n & = & (-1)^n \\ \dfrac{(-1)^{n+2}}{12} & - & 5 \times \dfrac{(-1)^{n+1}}{12} & + & 6 \times \dfrac{(-1)^n}{12} & = & (-1)^n \end{array}$$

Par différence :

$$\left(v_{n+2} - \frac{(-1)^{n+2}}{12}\right) - 5\left(v_{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{12}\right) + 6\left(v_n - \frac{(-1)^n}{12}\right) = 0$$

La suite de terme général $v_n - (-1)^n/12$ est récurrence linéaire d'ordre 2 : l'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = 0$ dont les solutions sont 2 et 3. Dès lors, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - \frac{(-1)^n}{12} = \lambda \times 2^n + \mu \times 3^n$$

si bien que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{(-1)^n}{12} + \lambda \times 2^n + \mu \times 3^n$$

Cette suite est bornée si et seulement si $\lambda = \mu = 0$ (si $\mu = 0$ alors, en factorisant par 3^n, la suite tend vers $\pm\infty$ selon le signe de μ ce qui est absurde, et si $\lambda \neq 0$, idem). Dès lors, la seule suite bornée solution éventuelle est la suite de terme général $(-1)^n/12$, et on a déjà vu (synthèse) qu'elle était solution : c'est la seule solution.

Exercice 23 : ✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 6^n + 5^n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \wedge u_n = 1$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $d = u_{n+1} \wedge u_n$. Alors d divise $u_{n+1} - 6u_n = 5^{n+1} - 6 \times 5^n$ donc d divise $5^n(5-6) = -5^n$. Or, les seuls diviseurs positifs de -5^n sont $1, 5, \dots, 5^n$. Si $d \neq 1$ alors d est divisible par 5 donc 5 divise $u_n = 6^n + 5^n$. Puisque 5 divise 5^n alors 5 divise 6^n ce qui est absurde (5 n'apparaît pas dans la décomposition en produit de facteurs premiers de 6^n). Dès lors, u_n et u_{n+1} sont bien premiers entre eux.

Exercice 24 : ✪✪ Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1/2, u_1 = e/2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1}u_n$$

Correction : Par une récurrence (double) immédiate, $u_n > 0$ pour tout n. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\ln(u_{n+2}) = \ln(u_{n+1}) + \ln(u_n) + \ln(2)$$

Faisons comme pour les suites arithmético-géométriques et cherchons un point fixe. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x = x + x + \ln(2) \iff x = -\ln(2)$$

Dès lors, en posant $x = -\ln(2)$:

$$\begin{array}{rcl} \ln(u_{n+2}) & = & \ln(u_{n+1}) + \ln(u_n) + \ln(2) \\ x & = & x + x + \ln(2) \end{array}$$

Par différence :

$$\ln(u_{n+2}) - x = (\ln(u_{n+1}) - x) + (\ln(u_n) - x)$$

En d'autres termes, la suite de terme général $\ln(u_n) - x$ est une suite récurrence linéaire d'ordre 2 et vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$$

De plus, $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$. On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) + \ln(2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{F_n}/2$ où F_n est le n-ième terme de la suite de Fibonacci.

Exercice 25 : ✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Déterminer une constante c strictement positive telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq c$.
2. En déduire que $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Correction :

1. Soit $n \geq 1$.

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

   Or, pour tout $k \in [\![n+1\,;2n]\!], 1/k \geq 1/2n$ si bien que

$$H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

   On en déduit que $c = 1/2$ convient.
2. La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est évidemment croissante donc elle converge vers une limite L ou diverge vers $+\infty$. Si elle converge vers une limite L alors (H_{2n}) converge aussi vers L (toutes les suites extraites d'une suite convergente convergent vers la même limite) donc $H_{2n} - H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L - L = 0$. Or, d'après la question précédente, pour tout $n \geq 1$, $H_{2n} - H_n \geq 1/2$. L'inégalité large passe à la limite donc $0 \geq 1/2$: absurde.

Exercice 26 : ✪✪ En revenant à la définition d'une limite, donner la limite des suites de terme général :

1. $\dfrac{n}{n^2+1}$
2. $\sqrt{n^2-n}$
3. $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2-4}$
4. $\dfrac{n^4-1}{n^3+2n+1}$
5. $\dfrac{\sqrt{n+\sin(n)}}{n^2-n}$.

Correction :

1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$0 \leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

   Or, $1/n \leq \varepsilon \iff n \geq 1/\varepsilon$. Soit $n_0 = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$. Pour tout $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{n}{n^2+1}-0\right|\leq\varepsilon$$

En d'autres termes, $\dfrac{n}{n^2+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

2. Soit $n\geq 2$ et soit $A\geq 0$.

$$\sqrt{n^2-n}=n\sqrt{1-\frac{1}{n}}\geq n\times\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{n}{\sqrt{2}}$$

Or, $n/\sqrt{2}\geq 2\iff n\geq A\sqrt{2}$. Soit donc $n_0=\lfloor n\sqrt{2}\rfloor+1$. Pour tout $n\geq n_0$, $u_n\geq A$: $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

3. Soit $\varepsilon>0$. Soit $n\geq 2$.

$$0\leq\frac{\sqrt{n+1}}{n^2-4}\leq\frac{\sqrt{n+n}}{n^2-n^2/2}=\frac{\sqrt{2n}}{n^2/2}=\frac{2\sqrt{2}}{n^{3/2}}$$

Or, $2\sqrt{2}/n^{3/2}\leq\varepsilon\iff n\geq\left(2\sqrt{2}/\varepsilon\right)^{2/3}$. Soit donc $n_0=\left\lfloor\left(2\sqrt{2}/\varepsilon\right)^{2/3}\right\rfloor+1$. Si $n\geq n_0$, alors $|u_n|\leq\varepsilon$ si bien que $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

4. Soit $A\geq 0$. Soit $n\geq 1$.

$$\frac{n^4-1}{n^3+2n+1}\geq\frac{n^4-n^4/2}{n^3+2n^3+n^3}=\frac{n^4/2}{6n^3}=\frac{n}{12}$$

Or, $n/12\geq A\iff n\geq 12A$. Soit $n_0=\lfloor 12A\rfloor+1$. Si $n\geq n_0$ alors $u_n\geq A$ donc $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

5. Soit $n\geq 1$ et soit $\varepsilon>0$.

$$0\leq\frac{\sqrt{n+\sin(n)}}{n^2-n}\leq\frac{\sqrt{2n}}{n^2-n^2/2}=\frac{2\sqrt{2}}{n^3/2}$$

et on conclut comme précédemment.

Exercice 27 : ✪✪ Montrer que pour tout $x>0,\ln(1+x)<x$ puis que la suite de terme général $u_n=\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+e^{-k}\right)$ converge.

Correction : La convexité ne donne que des inégalités larges, on est obligé de faire autrement. Un rapide tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ (pas $\mathbb{R}_+^*$ sinon il faut calculer une limite en 0 et non pas calculer $f(0)$) par $f(x)=x-\ln(1+x)$ montre qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui donne la majoration voulue. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+e^{-(n+1)}>1$$

donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante puisqu'elle est à termes strictement positifs (attention, ce critère ne marche que pour les suites strictement positives, cf. cours, mais quand on a des produits, comme ici, ou des puissances ou des factorielles, il est particulièrement pratique). Il suffit donc de montrer qu'elle est majorée. On a un produit : on pense à prendre le ln. D'après la première partie de l'exercice,

$$\begin{aligned}\ln(u_n)&=\sum_{k=0}^{n}\ln(1+e^{-k})\\&<\sum_{k=0}^{n}e^{-k}\\&<\frac{1-e^{-(n+1)}}{1-e^{-1}}\\&<\frac{1}{1-e^{-1}}\end{aligned}$$

et donc, par croissance de l'exponentielle, $u_n\leq e^{\frac{1}{1-e^{-1}}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée donc converge.

Exercice 28 : ✪✪ Soit $a>0$. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0=a$ et :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$$

Correction : Une récurrence (forte) immédiate prouve que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k \geq \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

La racine carrée étant croissante,

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k} \geq \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}$$

c'est-à-dire que $u_{n+1} \geq u_n$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1. Attention, elle n'est pas forcément croissante tout court : on a $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{a}$ donc on n'a pas forcément $u_1 \geq u_0$, tout dépend de si $a \geq 1$ ou non. Cependant, le théorème de la limite monotone est encore valable pour les suites croissantes à partir d'un certain rang. Dès lors, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, soit elle diverge vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers une limite L. On a :

$${u_{n+1}}^2 = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

c'est-à-dire que ${u_{n+1}}^2 = u_n + {u_n}^2$ i.e. ${u_{n+1}}^2 - {u_n}^2 = u_n \geq u_1$ par croissance de la suite (à partir du rang 1). Or, par opération sur les limites (ou parce que la fonction carré est continue), ${u_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} L^2$ et idem pour ${u_{n+1}}^2$ si bien que ${u_{n+1}}^2 - {u_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, l'inégalité large passe à la limite donc $0 \geq u_1$ ce qui est absurde. On en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 29 : ✪✪ Donner en fonction des valeurs de $q > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, la limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{q^n + n^\alpha}{1 + \ln(n)^\beta}$$

Correction : Il faut examiner beaucoup de cas.

- Si $q > 1$ alors (peu importe la valeur de α et β), par croissances comparées, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$.
- Si $q \leq 1$ alors la suite de terme général q^n est bornée. Dès lors, si $\alpha > 0$, peu importe β, (u_n) tend encore vers $+\infty$.
- Si $q < 1$ et $\alpha < 0$, le numérateur tend vers 0. Le dénominateur tend vers $1, 2$ ou $+\infty$ selon la valeur de β : dans tous les cas, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $q = 1$ et $\alpha < 0$, alors le numérateur tend vers 1. La limite de la suite dépend donc de β. Si $\beta > 0$, le dénominateur tend vers $+\infty$, la suite tend vers 0. Si $\beta = 0$, le dénominateur est constant égal à 2, la suite tend vers $1/2$. Si $\beta < 0$, le dénominateur tend vers 1, la suite tend vers 1. Le cas $q < 1$ et $\alpha = 0$ est analogue.
- Enfin, si $q = 1$ et $\alpha = 0$, le numérateur est constant égal à 2. Il suffit de multiplier les limites par 2 dans le cas précédent.

Exercice 30 : ✪✪

1. Montrer qu'il existe deux suites d'entiers relatifs (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \geq 0$, $\left(\sqrt{2} - 1\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2. En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On rappelle qu'une suite d'entiers converge si et seulement si elle est stationnaire.
3. ✪✪✪ Soit d un entier qui n'est pas un carré parfait. Montrer que $\sqrt{d}$ est irrationnel.

Correction :

1. On pourrait montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(\sqrt{2} - 1)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ mais ce raisonnement (bien que correct et répondant à la question) ne donne pas leur valeur exacte (non demandée il est vrai). Nous préférons la méthode suivante surtout car elle permet s'entraîner à la manipulation des sommes. Soit donc $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k (-1)^{n-k}$$

Séparons la somme en termes pairs/impairs et faisons comme d'habitude, les changements d'indice $k = 2j$ et $k = 2j+1$ ce qui donne, en se souvenant que $\sqrt{2} = 2^{1/2}$ (admirons là aussi l'utilité de la notation « généralisée ») :

$$\begin{aligned}
(\sqrt{2} - 1)^n &= \sum_{0\leq 2j\leq n} \binom{n}{2j} \sqrt{2}^{2j} (-1)^{n-2j} + \sum_{0\leq 2j+1\leq n} \binom{n}{2j+1} \sqrt{2}^{2j+1} (-1)^{n-2j-1} \\
&= \sum_{0\leq 2j\leq n} \binom{n}{2j} 2^j (-1)^{n-2j} + \sqrt{2} \sum_{0\leq 2j+1\leq n} \binom{n}{2j+1} 2^j (-1)^{n-2j-1}
\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de poser $a_n = \displaystyle\sum_{0\leq 2j\leq n}\binom{n}{2j}2^j(-1)^{n-2j}$ et $b_n = \displaystyle\sum_{0\leq 2j+1\leq n}\binom{n}{2j+1}2^j(-1)^{n-2j-1}$ qui sont bien des entiers relatifs car somme et produit d'entiers relatifs.

2. Comme d'habitude, faisons un raisonnement par l'absurde et supposons qu'il existe p et q entiers (non nuls) tels que $\sqrt{2} = p/q$. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,$(\sqrt{2}-1)^n = a_n + (pb_n)/q$. On souhaite utiliser le fait que toute suite d'entiers convergente est stationnaire. On multiplie donc par q pour avoir une suite d'entiers relatifs, ce qui donne : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q(\sqrt{2}-1)^n = qa_n + pb_n$. Or, $\sqrt{2} \in \,]\,1\,;2\,[$ donc $\sqrt{2}-1 \in \,]\,0\,;1\,[$: il en découle que $(\sqrt{2}-1)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (suite géométrique). En particulier, $q(\sqrt{2}-1)^n = qa_n + pb_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, c'est une suite d'entiers relatifs donc, d'après le cours, elle est stationnaire. En d'autres termes, $q(\sqrt{2}-1)^n = 0$ pour tout n assez grand, ce qui est absurde car $q \neq 0$ et $\sqrt{2}-1 \neq 0$. En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel (encore).
3. Dans la question précédente, le point clef est le fait que $(\sqrt{2}-1)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sans jamais être nulle, ce qui apportait une contradiction (quand on veut généraliser un raisonnement, toujours chercher le point clef, toujours se demander : « qu'est-ce qui fait que ça marche ? »). Si on veut généraliser à $\sqrt{d}$, on ne peut pas s'intéresser à $\sqrt{d}-1$ car cette quantité n'est pas forcément entre 0 et 1. Il suffit en fait de s'intéresser à $\sqrt{d} - \left\lfloor\sqrt{d}\right\rfloor$: on montre de même que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(c_n, d_n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\left(\sqrt{d} - \left\lfloor\sqrt{d}\right\rfloor\right)^n = c_n + d_n\sqrt{d}$, et le même raisonnement prouve que $\sqrt{d}$ est irrationnel.

Exercice 31 : ✪✪ Dans tout l'exercice, si $n \geq 1$, on pose u_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n.

1. Donner la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de terme général
$$v_n = \frac{u_n \ln n}{{u_n}^2+1}$$
2. **(Encore d'après projecteuler.net)** On suppose que n a k chiffres et que n est une puissance k-ième, c'est-à-dire qu'il existe p tel que $n = p^k$ (par exemple, 125 a 3 chiffres et $125 = 5^3$, ou encore 262144 a 6 chiffres, et est égal à 8^6). Montrer que $p \in [\![\,1\,;\,9\,]\!]$ et que $k \leq 21$.

   Remarque : Avec un algorithme, on peut montrer qu'il existe exactement 49 entiers n vérifiant cette propriété, le plus grand étant 9^{21} (qui a donc 21 chiffres).

Correction :

1. Rappelons que $u_n = \left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)}\right\rfloor + 1$. Dès lors,
$$\frac{u_n}{\ln(n)} = \frac{\left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)}\right\rfloor}{\dfrac{\ln(n)}{\ln(10)}} \times \frac{\ln(n)}{\ln(10)} \times \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)}$$
Le premier terme tend vers 1 (cf. cours : quand une quantité tend vers $\pm\infty$, alors quand on divise par sa partie entière, le quotient tend vers 1). Il en découle que $u_n/\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/\ln(10)$. Dès lors :
$$\begin{aligned} v_n &= \frac{\dfrac{u_n}{\ln(n)} \times \ln(n)^2}{\dfrac{{u_n}^2}{\ln(n)^2}\times \ln(n)^2 + 1} \\ &= \frac{\dfrac{u_n}{\ln(n)}}{\dfrac{{u_n}^2}{\ln(n)^2} + \dfrac{1}{\ln(n)^2}} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1/\ln(10)}{1/\ln(10)^2} = \ln(10) \end{aligned}$$
2. On sait que
$$k = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(10)}\right\rfloor + 1$$
Or, $n = p^k$ donc

$$k = \left\lfloor \frac{k\ln(p)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1$$

Par définition de la partie entière ($\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$) :

$$\frac{k\ln(p)}{\ln(10)} < k \leq \frac{k\ln(p)}{\ln(10)} + 1$$

On en déduit que $\ln(p)/\ln(10) < 1$ donc $p < 10$: p étant un entier, $p \leq 9$. De plus,

$$k\left(1 - \frac{\ln(p)}{\ln(10)}\right) \leq 1$$

si bien que

$$k \leq \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\ln(p)}{\ln(10)}\right)}$$

Or, le membre de droite est maximal pour $p = 9$:

$$k \leq \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\ln(9)}{\ln(10)}\right)}$$

Avec une calculatrice, on trouve que le membre de droite est égal à $21.85\dots$ ce qui est le résultat voulu.

Exercice 32 - Fonction de Pringsheim : ✪✪ Expliciter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} \cos(n!\pi x)^{2p}\right)$$

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Posons (sous réserve d'existence) $u_n(x) = \lim\limits_{p\to+\infty} \cos(n!\pi x)^p$ et . Alors (sous réserve d'existence)

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)$$

Calculons d'abord la valeur de $u_n(x)$ i.e. la première limite (celle dépendant de p). Bien sûr, il faut prouver qu'elle existe. On reconnaît la limite d'une suite géométrique de raison $q = \cos(n!\pi x)^2$. Un $\cos^2$ étant compris entre 0 et 1, cette limite vaut 1 lorsque $\cos(n!\pi x)^2 = 1$ et 0 sinon. Cherchons quand cette quantité vaut 1.

$$\begin{aligned}
\cos(n!\pi x)^2 = 1 \quad &\iff \quad \cos(n!\pi x) = \pm 1 \\
&\iff \quad n!\pi x \equiv 0[\pi] \\
&\iff \quad n!x \equiv 0[1] \\
&\iff \quad n!x \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

On sépare donc les cas selon que $x \in \mathbb{Q}$ ou non.

- Premier cas : $x \notin \mathbb{Q}$. Alors, pour tout n, $n!x \notin \mathbb{Z}$ donc $\cos(n!\pi x) \neq \pm 1$ si bien que $\cos(n!\pi x)^{2p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$. En d'autres termes, $u_n(x) = 0$ donc la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle et $f(x)$ est la limite de la suite nulle donc $f(x) = 0$.
- Deuxième cas : $x \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = a/b$ si bien que $n!x = n! \times a/b$. Tout dépend de si b divise $n!$ ou non. Si $n \geq b$ alors b apparaît dans le produit $n! = 1 \times \cdots \times n$ donc b divise $n!$. Cependant, cela nous suffit : rappelons qu'on cherche à la fin la limite quand $n \to +\infty$. Dès lors, si $n \geq b$, alors $\cos(n!\pi x) = \pm 1$ donc

$$u_n(x) = \lim_{p\to+\infty} \cos(n!\pi x)^{2p} = 1$$

En d'autres termes, $(u_n(x))_{n\to+\infty}$ est stationnaire égale à 1 donc converge vers 1 si bien que $f(x) = 1$.

En conclusion, f est la fonction qui vaut 1 en les rationnels et 0 en les irrationnels i.e. l'indicatrice de $\mathbb{Q}$.

Exercice 33 : ✪✪

1. Vous empruntez un capital C à un taux d'intérêt mensuel t_m et et vous le remboursez en N mensualités constantes. Calculez la valeur M de chaque mensualité. Quel est le coût total du crédit ?

2. Le problème est que les banques et les sociétés de crédit donnent en général le taux annuel t_a et non pas le taux mensuel t_m : pour le taux annuel, il y a un seul versement en un an, et pour le taux mensuel, il y en a 12, et ils sont calculés pour que la somme avec les intérêts à la fin de l'année soit la même (sans mensualité, juste avec la somme initiale). Exprimer t_m en fonction de t_a et en déduire M et le coût total du crédit en fonction de t_a.
3. Vérifiez sur la première publicité de crédit que vous trouverez !
4. **Remake :** Une personne a dépensé tout ce qu'elle avait dans N magasins. Dans chacun, elle a dépensé dix euros de plus que la moitié de ce qu'elle avait en rentrant. Combien avait-elle en poche au départ ?

Correction :

1. Le principe est simple : chaque mois, la somme à rembourser est augmentée d'une proportion de $t_m/100$ (on donne le taux en général sous forme d'un pourcentage, disons 1%) et on soustrait la mensualité M. Notons, pour tout $n \in [\![0\,;\, N]\!]$, la somme à rembourser après la n-ième mensualité. On a $u_0 = C$ (la somme empruntée), $u_N = 0$ (après les N mensualités, il ne reste plus rien à payer) et, pour tout $n \in [\![0\,;\, N-1]\!]$,

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{t_m}{100}\right) \times u_n - M$$

On reconnaît une suite (enfin presque : il n'y a qu'un nombre fini de termes) arithmético-géométrique. L'équation caractéristique est :

$$c = \left(1 + \frac{t_m}{100}\right) \times c - M \iff c = \frac{100M}{t_m}$$

Soit $c = 100M/t_m$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccc} u_{n+1} & = & \left(1 + \dfrac{t_m}{100}\right) \times u_n & - & M \\[2ex] c & = & \left(1 + \dfrac{t_m}{100}\right) \times c & - & M \end{array}$$

Par différence :

$$u_{n+1} - c = \left(1 + \frac{t_m}{100}\right) \times (u_n - c)$$

c'est-à-dire que la suite de terme général $u_n - c$ est géométrique de raison $(1 + t_m/100)$. Par conséquent,

$$u_N - c = \left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^N \times (u_0 - c)$$

c'est-à-dire, puisque $u_N = 0$:

$$0 = \left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^N \times \left(C - \frac{100M}{t_m}\right) + \frac{100M}{t_m}$$

Par conséquent :

$$\frac{100M}{t_m} \times \left(1 - \left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^N\right) = -C \times \left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^N$$

Donc

$$\frac{100M}{t_m} = \frac{C \times \left(1 + \dfrac{t_m}{100}\right)^N}{\left(1 + \dfrac{t_m}{100}\right)^N - 1}$$

En conclusion :

$$M = \frac{t_m}{100} \times \frac{C \times \left(1 + \dfrac{t_m}{100}\right)^N}{\left(1 + \dfrac{t_m}{100}\right)^N - 1}$$

2. Si on note S la somme au début de chaque année, avec le taux annuel (sans mensualité), la somme avec les intérêts est $S \times \left(1 + \dfrac{t_a}{100}\right)$ tandis qu'avec le taux mensuel, elle est de $S \times \left(1 + \dfrac{t_m}{100}\right)^{12}$. Par conséquent :

$$S \times \left(1 + \frac{t_a}{100}\right) = S \times \left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^{12}$$

On en déduit que

$$t_m = 100 \times \left(\left(1 + \frac{t_a}{100}\right)^{1/12} - 1\right)$$

En conclusion, la valeur de chaque mensualité en fonction du taux annuel t_a est :

$$M = \left(\left(1 + \frac{t_a}{100}\right)^{1/12} - 1\right) \times \frac{C \times \left(1 + \frac{t_a}{100}\right)^{N/12}}{\left(1 + \frac{t_a}{100}\right)^{N/12} - 1}$$

Le coût total du crédit est donc

$$N \times M = N \times \left(\left(1 + \frac{t_a}{100}\right)^{1/12} - 1\right) \times \frac{C \times \left(1 + \frac{t_a}{100}\right)^{N/12}}{\left(1 + \frac{t_a}{100}\right)^{N/12} - 1}$$

3. Premier exemple en tapant « crédit » sur Google : on emprunte 10000 euros en 48 mensualités à un taux de 2.99% : cela donne des mensualités de 221.12 euros et un coût total de 10613.83 euros (et la société de crédit ajoute 200 euros de frais de dossier mais ça, c'est une autre histoire).
4. Si $n \in [\![0\,;\, N]\!]$, notons u_n la somme qu'il lui reste après n magasins. u_0 est donc la somme initiale (ce qu'on cherche) et $u_N = 0$. De plus, par hypothèse, pour tout $n \in [\![0\,;\, N-1]\!]$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - 10$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique dont l'équation arithmétique est :

$$c = c/2 - 10 \iff c = -20$$

Soit donc $c = -20$.

$$\begin{array}{lclcl} u_{n+1} & = & u_n/2 & - & 10 \\ c & = & c/2 & - & 10 \end{array}$$

Par différence, $u_{n+1} - c = (u_n - c)/2$ donc la suite de terme général $u_n - c$ est géométrique de raison 1/2. Par conséquent,

$$u_N - c = \frac{u_0 - c}{2^N}$$

donc

$$0 + 20 = \frac{u_0 + 20}{2^N}$$

Finalement, $u_0 = 20 \times \left(2^N - 1\right)$.

Exercice 34 : ✪✪ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $a_{n+2} \leq \dfrac{a_{n+1} + a_n}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la suite,

$$a_{n+2} \leq \frac{2\max(a_{n+1}, a_n)}{3}$$

Par exemple,

$$a_2 \leq \frac{2\max(a_0,a_1)}{3}, \qquad a_3 \leq \frac{2\max(a_2,a_1)}{3} \qquad \text{et} \qquad a_4 \leq \frac{2\max(a_3,a_2)}{3}$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{2n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \max(a_0,a_1) \qquad \text{et} \qquad a_{2n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \max(a_0,a_1)$$

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n l'assertions ci-dessus.
- H_0 est vraie puisque a_0 et a_1 sont inférieurs à $(2/3)^0 \max(a_0,a_1) = \pm max(a_0,a_1)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Tout d'abord,

$$a_{2n+2} \leq \frac{2\max(a_{2n},a_{2n+1})}{3}$$

Or, par hypothèse de récurrence, a_{2n} et a_{2n+1} sont inférieurs à $(2/3)^n \times \max(a_0,a_1)$ donc leur maximum l'est également, si bien que

$$a_{2n+2} \leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \max(a_0,a_1)$$

De plus,

$$a_{2n+3} \leq \frac{2\max(a_{2n+2},a_{2n+1})}{3}$$

Or, $a_{2n+1} \leq (2/3)^n \max(a_0,a_1)$ par HR et, d'après ce qui précède,

$$a_{2n+2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \times \max(a_0,a_1) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \max(a_0,a_1)$$

On conclut comme précédemment que $a_{2n+3} \leq (2/3)^{n+1} \times \max(a_0,a_1)$: H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.

Or, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq a_{2n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \max(a_0,a_1) \qquad \text{et} \qquad 0 \leq a_{2n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \max(a_0,a_1)$$

Puisque $2/3 \in \left]-1\,;1\right[$, $(2/3)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, $a_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, d'après le cours, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 35 - Un calcul d'espérance : ✪✪✪ Soit $\alpha > 0$. Donner la limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{\left(1+e^{\alpha/n}\right)^n}{2^n}$$

Correction : Puissance variable : notation exponentielle. Soit $n \geq 1$. $u_n = \exp(v_n)$ où

$$\begin{aligned} v_n &= n\ln\left(1+e^{\alpha/n}\right) - n\ln(2) \\ &= n\ln\left(\frac{1+e^{\alpha/n}}{2}\right) \end{aligned}$$

Cela fait penser à un taux d'accroissement. Problème, on n'a pas $\ln(1+u)$ avec u qui tend vers 0, du moins pas tout de suite : faisons le apparaître.

$$v_n = n\ln\left(1+\frac{e^{\alpha/n}-1}{2}\right)$$

Or, $\alpha/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$$\frac{e^{\alpha/n}-1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On peut donc faire comme dans le cours :

$$v_n = n \times \frac{\ln\left(1+\dfrac{e^{\alpha/n}-1}{2}\right)}{\dfrac{e^{\alpha/n}-1}{2}} \times \frac{e^{\alpha/n}-1}{2}$$

D'après ce qui précède, la fraction du milieu tend vers 1 quand $n \to +\infty$. De plus, en faisant apparaître là aussi un taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} n \times \frac{e^{\alpha/n}-1}{2} &= \frac{e^{\alpha/n}-1}{\frac{\alpha}{n}} \times \frac{\alpha}{n} \times \frac{n}{2} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Dès lors, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha/2$. La fonction exponentielle étant continue, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\alpha/2}$.

Exercice 36 : ✪✪✪ Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 &= 3 \\ u_{n+1} &= u_n + \dfrac{\operatorname{sgn}(\sin(u_n))}{2^n} \end{cases}$$

où $\operatorname{sgn}(x)$ est le signe de x, c'est-à-dire 1 si x est strictement positif, -1 s'il est strictement négatif[1].

1. En regardant la somme télescopique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$, montrer que la suite (u_n) est à valeurs dans un intervalle que l'on précisera. En déduire que $\sin(u_n)$ est du même signe que $\pi - u_n$.
2. En déduire u_{n+1} en fonction de u_n selon les cas.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$:
$$\pi - \frac{1}{2^{n-1}} \leq u_n \leq \pi + \frac{1}{2^{n-1}}$$
4. Conclure.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Cette somme télescopique vaut $u_n - u_1 = u_n - 3$. Or, cette somme est également égale, par définition de la suite, à
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\operatorname{sgn}(\sin(u_k))}{2^k}$$
Par conséquent,
$$-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k} \leq u_n - 3 \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}$$
Or,
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k} &= \frac{1}{2} \times \frac{1-(1/2)^{n-1}}{1-1/2} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$
Par conséquent, $-1 \leq u_n - 3 \leq 1$ donc $u_n \in [\,2\,;4\,]$. En particulier, $u_n \in [\,0\,;2\pi\,]$: si $u_n \geq \pi$ alors $\sin(u_n) \leq 0$ donc $\sin(u_n)$ est du signe de $\pi - u_n$ (négatif), et c'est la même chose si $u_n \leq \pi$.
2. D'après la question précédente, si $u_n \geq \pi$, alors $\sin(u_n)$ est négatif donc
$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2^n}$$
tandis que si $u_n \geq \pi$,

1. Mais alors... ça veut dire que $\sin(u_n)$ ne va jamais être nul ? ? ? Montrez-le !

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n}$$

Disons tout de suite qu'en fait u_n n'est jamais égal à π car u_n est rationnel pour tout n : les inégalités sont strictes et il n'y a aucun problème de définition pour le signe.

3. Raisonnons donc par récurrence.
   - Si $n \geq 1$, notons H_n : « $\pi - \frac{1}{2^{n-1}} \leq u_n \leq \pi + \frac{1}{2^{n-1}}$ ».
   - Puisque $u_1 = 3$, alors $\pi - 1 \leq u_1 \leq \pi + 1$ donc H_1 est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence,

     $$\pi - \frac{1}{2^{n-1}} \leq u_n \leq \pi + \frac{1}{2^{n-1}}$$

     Si $u_n \geq \pi$ alors, d'après la question précédente,

     $$\pi - \frac{1}{2^n} \leq u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

     et le raisonnement est le même si $u_n \leq \pi$: H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.
4. D'après la question précédente et le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$.

Exercice 37 : ✪✪✪ Montrer que $\dfrac{1}{n!} \times \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Correction : Soit $n \geq 2$. Pour tout $k \leq n-2$,

$$\frac{k!}{n!} = \frac{1}{(k+1)\times\cdots\times(n-1)\times n} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

Dès lors :

$$0 \leq \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$$

car on somme un terme constant. D'après le théorème d'encadrement :

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On conclut en remarquant que

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = \frac{n!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Exercice 38 - La fonction d'Ackermann : ✪✪✪ On se donne le tableau suivant indexé par $\mathbb{N}^2$:

m \ n	0	1	2	3	4	5	$\dots$
0	1	2	3	4	5	6	$\dots$
1							
2							
3							
4							
5							
$\vdots$							

Le terme dans la case indexée par (m,n) est $f(m,n)$, où f est la fonction d'Ackermann, qui va de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ et qui est définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} \forall n \geq 0, & f(0,n) = n+1 \\ \forall m \geq 1, & f(m,0) = f(m-1,1) \\ \forall m,n \geq 1, & f(m,n) = f(m-1,f(m,n-1)) \end{cases}$$

Donner $f(4,4)$. On utilisera pour cela la notation des puissances itérées, introduite par Donald Knuth en 1976 : si $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$a \uparrow\uparrow n = a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}$$

où a apparaît n fois, par exemple $4 \uparrow\uparrow 3 = 4^{4^4}$.

Correction : Calculons les premières valeurs pour nous donner une idée. On trouve assez facilement $f(1,0) = f(0,1) = 2$, $f(1,1) = f(0,f(1,0)) = f(0,2) = 3$ et $f(1,2) = f(0,f(1,1)) = f(0,3) = 4$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(1,n) = n+2$.

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $f(1,n) = n+2$ ».
- H_0, H_1 et H_2 sont vraies.
- Soit $n \geq 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned} f(1,n+1) &= f(0,f(1,n)) \\ &= f(0,n+2) \qquad \text{(HR)} \\ &= n+3 \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence.

Par conséquent, $f(1,n) = n+2$ pour tout n : on peut compléter totalement la première ligne (celle pour $m = 1$).

m \ n	0	1	2	3	4	5	$\dots$
0	1	2	3	4	5	6	$\dots$
1	2	3	4	5	6	7	$\dots$
2							
3							
4							
5							
$\vdots$							

Continuons sur notre lancée et complétons la deuxième ligne (celle pour $m = 2$). Tout d'abord :

$$\begin{aligned} f(2,0) &= f(1,1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

d'après ce qui précède. De plus,

$$\begin{aligned} f(2,1) &= f(1,f(2,1)) \\ &= f(1,3) \\ &= 5 \end{aligned}$$

On trouve de même que $f(2,2) = 7$: on semble être face à une suite arithmétique de raison 2 : une récurrence simple (exo) prouve que, pour tout n, $f(2,n) = 2n+3$ (suite arithmétique de raison 2 de premier terme 3).

m \ n	0	1	2	3	4	5	$\dots$
0	1	2	3	4	5	6	$\dots$
1	2	3	4	5	6	7	$\dots$
2	3	5	7	9	11	13	$\dots$
3							
4							
5							
$\vdots$							

$f(3,0) = f(2,1) = 5$ mais aucune formule simple ne semble se dégager pour les suivants. Cherchons une relation de récurrence générale. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f(3,n+1) &= f(2,f(3,n)) \\ &= 2f(3,n)+3 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la suite de terme général $f(3,n)$ est arithmético-géométrique. On trouve comme d'habitude (avec l'équation caractéristique) que, pour tout n, $f(3,n) = 8\times 2^n - 3 = 2^{n+3}-3$. À présent, nous sommes en mesure de calculer $f(4,4)$. On trouve successivement $f(4,0) = f(3,1) = 2^4 - 3$,

$$\begin{aligned} f(4,1) &= f(3, f(4,0)) \\ &= f(3, 2^4-3) \\ &= 2^{2^4-3+3} - 3 \\ &= 2^{2^4} - 3 \end{aligned}$$

puis $f(4,2) = 2^{2^{2^4}} - 3$, $f(4,3) = 2^{2^{2^{2^4}}} - 3$ et enfin $f(4,4) = 2^{2^{2^{2^{2^4}}}} - 3$ et puisque $4 = 2^2$,

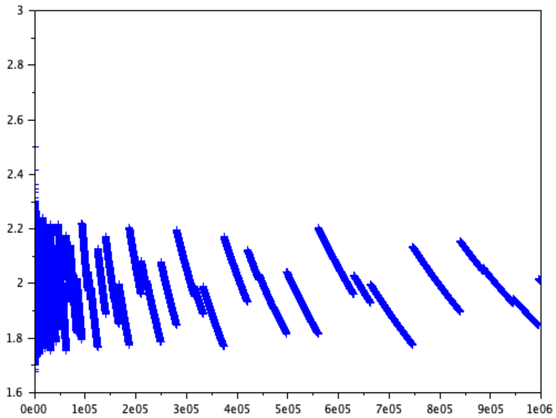
$$f(4,4) = 2^{2^{2^{2^{2^{2^2}}}}} - 3 = 2 \uparrow\uparrow 7 - 3$$

Exercice 39 - « A very slowly convergent sequence » (Erdös et al.) : ✪✪✪ On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = a_{\lfloor n/2\rfloor} + a_{\lfloor n/3\rfloor} + a_{\lfloor n/6\rfloor}.$$

1. Rappeler l'encadrement définissant la partie entière. En déduire un encadrement de $\lfloor x\rfloor$ à l'aide de x. On fera attention aux inégalités larges et strictes.
2. Calculer a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n \geq n+1$. En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 5$, $a_n \leq 3n$. Où a-t-on besoin de supposer que $n \geq 5$?

Remarque : La suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ est donc à valeurs dans $[\,1\,;3\,]$. On a représenté ci-dessous les « premiers » termes de la suite :



Elle semble osciller indéfiniment, mais on peut montrer (c'est l'objectif du sujet de l'ENS Cachan 1991) qu'elle converge en fait vers $\dfrac{12}{\ln(432)} \approx 1.9774487$: il faut parfois se méfier des évidences numériques !

Correction :

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$ puis $x - 1 < \lfloor x\rfloor \leq x$ (c'est du cours).
2. $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $a_4 = 9$, $a_5 = 9$. Montrons par récurrence que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   - Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, notons H_n : « $a_n \geq a_{n-1}$ et $a_n\in\mathbb{N}$ ».
   - H_1 est vraie d'après ce qui précède.
   - Soit $n \geq 1$. Supposons $H_1, \dots, H_n$ vraies (récurrence forte) et montrons que H_{n+1} est vraie. Par définition,

   $$a_{n+1} = a_{\left\lfloor \frac{n+1}{2}\right\rfloor} + a_{\left\lfloor \frac{n+1}{3}\right\rfloor} + a_{\left\lfloor \frac{n+1}{6}\right\rfloor}.$$

   Or, $n+1 \geq n$ et la partie entière est croissante donc $\left\lfloor \frac{n+1}{2}\right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$. Or, par hypothèse de récurrence, $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ donc, si $p \leq q$ alors $a_p \leq a_q$ donc en particulier, $a_{\left\lfloor \frac{n+1}{2}\right\rfloor} \geq a_{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}$. De même, $a_{\left\lfloor \frac{n+1}{3}\right\rfloor} \geq a_{\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor}$ et $a_{\left\lfloor \frac{n+1}{6}\right\rfloor} \geq a_{\left\lfloor \frac{n}{6}\right\rfloor}$ et donc, par somme, $a_{n+1} \geq a_n$. De plus, toujours par hypothèse de récurrence, $a_{\left\lfloor \frac{n+1}{2}\right\rfloor}, a_{\left\lfloor \frac{n+1}{3}\right\rfloor}$ et $a_{\left\lfloor \frac{n+1}{6}\right\rfloor}$ appartiennent à $\mathbb{N}$ donc $a_{n+1}\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
3. Raisonnons encore une fois par récurrence.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $a_n \geq n+1$ ».
- H_0 est vraie d'après ce qui précède.
- Soit $n \geq 0$. Supposons $H_0, \dots, H_n$ vraies (récurrence forte) et montrons que H_{n+1} est vraie. Par définition, $a_{n+1} = a_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} + a_{\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor} + a_{\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor}$. Par hypothèse de récurrence,

$$a_{n+1} \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 1$$

De plus, par propriété de la partie entière (voir question 1)

$$a_{n+1} > \frac{n+1}{2} - 1 + 1 + \frac{n+1}{3} - 1 + 1 + \frac{n+1}{6} - 1 + 1$$

c'est-à-dire que $a_{n+1} > n+1$. Or, a_{n+1} est un entier donc $a_{n+1} \geq n+2$: H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Finalement, d'après le théorème d'encadrement, $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

4. Raisonnons encore une fois par récurrence.
   - Si $n \geq 5$, notons H_n : « $a_n \leq 3n$ ».
   - H_5 est vraie d'après ce qui précède.
   - Soit $n \geq 5$. Supposons $H_5, \dots, H_n$ vraies et montrons que H_{n+1} est vraie. Par définition,

$$a_{n+1} = a_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} + a_{\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor} + a_{\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor}$$

On aimerait appliquer l'hypothèse de récurrence. Pour cela, les termes en indice doivent être supérieurs ou égaux à 5, mais ce n'est pas forcément le cas. En effet, $n \geq 5$ donc $(n+1)/6 \geq 1$ et les autres termes sont également supérieurs ou égaux à 1. Soit les termes en indices sont supérieurs ou égaux à 5 et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, soit ils sont compris entre 1 et 4 et on peut quand même appliquer le résultat puisque $a_1 \leq 3 \times 1, \dots, a_4 \leq 3 \times 4$. On a en fait besoin de supposer $n \geq 5$ sinon $\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor$ peut être nul et on n'a pas $a_0 \leq 3 \times 0$: 0 est en fait le seul entier pour lequel l'inégalité est fausse. Bref, dans tous les cas, les termes de l'égalité ci-dessus vérifient l'inégalité $a_k \leq 3k$ d'où

$$a_{n+1} \leq 3\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 3\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 3\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor.$$

De plus, par propriété de la partie entière (voir question 1),

$$a_{n+1} \leq 3 \times \frac{n+1}{2} + 3 \times \frac{n+1}{3} + 3 \times \frac{n+1}{6}$$

c'est-à-dire que $a_{n+1} \leq 3(n+1)$: H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$.

5 Suites « abstraites »

Exercice 40 - Monotonie des moyennes d'une suite monotone : ✪ Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$$

est monotone de même monotonie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite des moyennes arithmétiques de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est intuitif qu'elle se « comporte comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ». Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_1 + \dots + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} \\ &= \frac{n(u_1 + \dots + u_{n+1}) - (n+1)(u_1 + \dots + u_n)}{n(n+1)} \\ &= \frac{nu_{n+1} - u_1 - \dots - u_n}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). Alors $u_1 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1}$ donc $u_1 \leq u_{n+1}, \dots, u_n \leq u_{n+1}$. Par somme,

$$u_1 + \dots + u_n \leq nu_{n+1}$$

si bien que $v_{n+1} \geq v_n$: la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 41 : ✪ Montrer qu'une suite u est arithmétique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2}$.

Correction : Supposons que la suite u est arithmétique de raison q. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2} &= \frac{u_0+(n+1)q+u_0+(n-1)q}{2} \\ &= u_0+nq \\ &= u_n\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= u_{n+1}-\frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2} \\ &= \frac{u_{n+1}-u_{n-1}}{2}\end{aligned}$$

En multipliant par 2, il vient que $2u_{n+1}-2u_n = u_{n+1}-u_{n-1}$ donc $u_{n+1}-u_n = u_n-u_{n-1}$: la suite de terme général $u_{n+1}-u_n$ est constante donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

Exercice 42 : ✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Que peut-on dire de la convergence éventuelle de la suite de terme général $\lfloor u_n \rfloor$ dans le cas où $L = \pm\infty$? $L \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$? $L \in \mathbb{Z}$?

Correction : Supposons que $L = +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 < \lfloor u_n \rfloor$. Or, $u_n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc, d'après le théorème de minoration, $\lfloor u_n \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. De même si $L = -\infty$ en majorant $\lfloor u_n \rfloor$ par u_n. Si $L \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ alors la partie entière est continue en L donc $\lfloor u_n \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lfloor L \rfloor$. Cependant, si $L \in \mathbb{Z}$, alors la suite de terme général $\lfloor u_n \rfloor$ ne converge pas forcément. Par exemple, si on pose $u_n = (-1)^n/n$ pour tout $n \geq 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 mais, pour tout $n \geq 1$:

$$\lfloor u_{2n} \rfloor = 0 \qquad \text{et} \qquad \lfloor u_{2n+1} \rfloor = -1$$

donc $\lfloor u_{2n} \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\lfloor u_{2n+1} \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$: la suite de terme général $\lfloor u_n \rfloor$ diverge car admet deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes. On peut bien sûr donner un contre-exemple dans le cas d'une limite entière quelconque (par exemple $u_n = L + (-1)^n/n$).

Exercice 43 : ✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Montrer qu'il existe une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $u_n \times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Correction : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $u_n > 0$ à partir d'un certain rang n_0. Pour tout $n \geq n_0$, on pose $v_n = 1/\sqrt{u_n}$ si bien que

$$u_n \times v_n = \sqrt{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Si on veut absolument une suite définie à partir du rang 0, il suffit de définir $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = 0$ si $n < n_0$ et $v_n = 1/\sqrt{u_n}$ si $n \geq n_0$.

Exercice 44 : ✪ Montrer qu'une suite périodique non constante diverge. Peut-elle diverger vers $\pm\infty$?

Correction : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ une période, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+k}$. La suite étant non constante, il existe $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_1} \neq u_{n_2}$. La suite étant k-périodique, les suites extraites $(u_{n_1+kn})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n_2+kn})_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement constantes égales à u_{n_1} et u_{n_2} donc convergent vers ces mêmes valeurs. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux suites extraites qui convergent vers des limites distinctes donc elle diverge. Cependant, elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs (les valeurs $u_0, \ldots, u_{k-1}$) donc est bornée donc ne peut pas diverger vers $\pm\infty$.

Exercice 45 : ✪ Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Montrer que si $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par produit (tout est positif) et par télescopage,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0} \leq \prod_{k=0}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_n}{b_0}$$

donc $0 \leq a_n \leq b_n \times a_0/b_0$. D'après le théorème d'encadrement, on a le résultat voulu.

Exercice 46 : ✪

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a \text{ et } v_n \leq b \\ \\ u_n + v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a + b \end{cases}$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ et $v_n \xrightarrow[\to +\infty]{} b$.

2. **Remake :** Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$ telles que $u_n \times v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Correction :

1. Supposons que (u_n) ne converge pas vers a. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - a| \geq \varepsilon$$

mais puisque $u_n \leq a$ pour tout n, la dernière condition devient $u_n \leq a - \varepsilon$. Dès lors, puisque $v_n \leq b$ pour tout n :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, u_n + v_n \leq a + b - \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n + v_n - (a+b)| \geq \varepsilon$$

ce qui contredit le fait que $u_n + v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a + b$: c'est absurde. Ainsi, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ et par symétrie des rôles, $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$.

2. Faisons un copier coller. Supposons que (u_n) ne converge pas vers 1. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - 1| \geq \varepsilon$$

mais puisque $u_n \leq 1$ pour tout n, la dernière condition devient $u_n \leq 1 - \varepsilon$. Dès lors, puisque $v_n \leq 1$ pour tout n et puisque $u_n, v_n \geq 0$ (on peut donc multiplier les inégalités) :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, u_n v_n \leq (1 - \varepsilon) \times 1$$

et on conclut de la même façon.

Exercice 47 : ✪✪ Soit (u_n) une suite. On suppose que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L \geq 0, L \neq 1$. Que peut-on dire de la suite $({u_n}^n)$? Montrer qu'on ne peut rien dire si $L = 1$. Plus précisément, exhiber trois suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) de limite 1 telles que

- ${u_n}^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2021$
- ${v_n}^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$
- $({w_n}^n)$ n'ait pas de limite.

Correction : Supposons que $L < 1$. Soit $\alpha = \dfrac{L+1}{2}$. Alors $u_n \leq \alpha$ à partir d'un rang n_0. Dès lors, pour tout $n \geq n_0$, ${u_n}^n \leq \alpha^n$ et $\alpha < 1$ donc $\alpha^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, ${u_n}^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. On conclut de façon analogue que si $L > 1$ alors ${u_n}^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Intéressons-nous au cas $L = 1$.

- Soit (u_n) la suite de terme général $2021^{1/n}$. Alors $u_n = e^{\ln(2021)/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^0 = 1$ mais ${u_n}^n = 2021 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2021$. On pourrait aussi prendre la suite de terme général $\left(1 + \dfrac{\ln(2021)}{n}\right)^n$ puisque, pour tout x, $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^x$ (cf. cours).
- Soit (v_n) la suite de terme général $n^{1/n}$. Alors ${v_n}^n = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ tandis que $v_n = e^{\ln(n)/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^0 = 1$ par croissances comparées.

- Posons $w_n = (2+(-1)^n)^{1/n}$. Par conséquent, ${w_n}^n = 2+(-1)^n = 3$ si n est pair et 1 si n est impair donc $({w_n}^n)$ n'a pas de limite tandis que $w_n = e^{\ln(2+(-1)^n)/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. En effet, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{\ln(2+(-1)^n)}{n} \leq \frac{\ln(3)}{n}$$

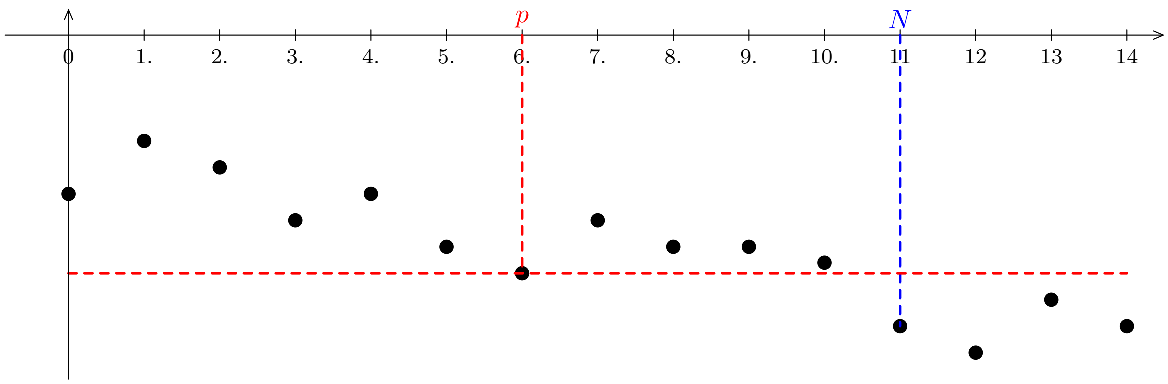
ce qui permet de conclure d'après le théorème d'encadrement.

Exercice 48 - Suites pseudo-décroissantes : ✪✪ Une suite réelle (u_n) est dite pseudo-décroissante si on a : $\forall p \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq u_p$.

1. Faire un dessin.
2. Montrer qu'une suite décroissante est pseudo-décroissante. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer qu'une suite pseudo-décroissante minorée converge.
4. Montrer qu'une suite strictement positive de limite nulle est pseudo-décroissante.
5. Montrer qu'une suite pseudo-croissante et pseudo-décroissante est constante.

Correction :

1. En clair : pour chaque terme, noté u_p, tous les termes finissent par lui être inférieurs : pas forcément à partir du rang suivant, comme une suite décroissante, mais ils finissent par l'être à partir d'un rang N.



2. Si (u_n) est décroissante, alors pour tout p, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq u_p$: $N = p$ convient. La réciproque est fausse : le contre-exemple graphique ci-contre convient. Si on veut un contre-exemple explicite, on peut prendre la suite de terme général $u_n = -n + 2 \times (-1)^n$: elle n'est pas décroissante car $u_1 = -3$ et $u_2 = 0$, mais est pseudo décroissante. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $N = p+4$, alors pour tout $n \geq N$,
$$u_n \leq -p-4+2 \leq -p+2\times(-1)^p = u_p$$
3. Soit $E = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. La suite étant minorée, E est un ensemble non vide minoré donc admet une borne inférieure α. Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne inférieure, il existe p tel que $\alpha + \varepsilon > u_p \geq \alpha$. La suite étant pseudo-décroissante, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$,
$$\alpha + \varepsilon > u_p \geq u_N \geq \alpha$$
c'est-à-dire que $|u_n - \alpha| \leq \varepsilon$: la suite converge vers α.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Puisque $u_p > 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $u_p > u_n$ pour n assez grand : il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_p \geq u_n$: la suite est bien pseudo-décroissante.
5. Soit $p \in \mathbb{N}$. La suite étant pseudo-décroissante, $u_n \leq u_p$ à partir d'un rang N, et $u_n \geq u_p$ à partir d'un rang N' puisqu'elle est pseudo-croissante. Soit $N'' = \max(N, N')$. Pour tout $n \geq N'$, $u_n = u_p$: la suite (u_n) est stationnaire égale à u_p. p étant quelconque, si $p' \neq p$, la suite est stationnaire égale à $u_{p'}$ donc $u_p = u_{p'}$: la suite est constante.

Exercice 49 : ✪✪ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes. Étudier la convergence des suites de terme général $w_n = \max(u_n, v_n)$ et $t_n = \min(u_n, v_n)$:

- en donnant une expression explicite de w_n et de t_n en fonction de u_n et de v_n (sans utiliser de min ou de max, donc).
- en epsilonant.

Correction : Notons L_1 et L_2 respectivement les limites de (u_n) et de (v_n).

- Gros classique : il suffit de voir que, pour tous x et y,

$$\max(x,y)=\frac{|x-y|+x+y}{2}\qquad\text{et}\qquad\min(x,y)=\frac{x+y-|x-y|}{2}$$

(séparer les cas selon que $x\leq y$ ou $x\geq y$). Or, la valeur absolue est continue donc

$$w_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{|L_1-L_2|+L_1+L_2}{2}=\max(L_1,L_2)\qquad\text{et}\qquad t_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{L_1+L_2-|L_1-L_2|}{2}=\min(L_1,L_2)$$

- Séparons les cas selon que $L_1=L_2$ ou non. Supposons que $L_1\neq L_2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $L_1>L_2$. Raisonnons comme dans le théorème d'unicité de la limite et posons $\varepsilon=(L_1-L_2)/3$. Puisque $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}L_1$ et $v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}L_2$:

$$\exists n_1,\forall n\geq n_1,L_1-\varepsilon\leq u_n\leq L_1+\varepsilon\qquad\text{et}\qquad\exists n_2,\forall n\geq n_2,L_2-\varepsilon\leq v_n\leq L_2+\varepsilon$$

Notons $n_3=\max(n_1,n_2)$. Alors, pour tout $n\geq n_3$, $v_n\leq L_2+\varepsilon$ et $L_1-\varepsilon\leq u_n$. Or, $L_2+\varepsilon<L_1-\varepsilon$ (il suffit de faire la différence) si bien que $v_n<u_n$ donc $w_n=u_n$ et $t_n=v_n$ dès que $n\geq n_3$, et donc $w_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}L_1$ et $t_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}L_2$.

Supposons à présent que $L_1=L_2$. Notons $L=L_1=L_2$. Soit $\varepsilon>0$. Alors :

$$\exists n_1,\forall n\geq n_1,L-\varepsilon\leq u_n\leq L+\varepsilon\qquad\text{et}\qquad\exists n_2,\forall n\geq n_2,L-\varepsilon\leq v_n\leq L+\varepsilon$$

Soit $n_3=\max(n_0,n_1)$ et soit $n\geq n_3$. Alors $w_n=u_n$ ou $w_n=v_n$: dans tous les cas, $L-\varepsilon\leq w_n\leq L+\varepsilon$. En d'autres termes :

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_3\in\mathbb{N},\forall n\geq n_3,|w_n-L|\leq\varepsilon$$

c'est-à-dire que $w_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}L$. On montre de même que $v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}L$: dans tous les cas, on a le résultat voulu.

Exercice 50 - Règle de d'Alembert faible : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs non nulles. On suppose qu'il existe $k\geq 0$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}k$.

- Montrer que si $k<1$, alors $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
- Montrer que si $k>1$, alors $|u_n|\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.
- Montrer qu'on ne peut pas conclure dans le cas $k=1$.

Correction :

- Supposons que $k<1$ et posons $\alpha=\dfrac{k+1}{2}$. Dès lors, il existe n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\leq\alpha$ i.e. $|u_{n+1}|\leq\alpha\times|u_n|$. En particulier, $|u_{n_0+1}|\leq\alpha|u_{n_0}|$ puis

$$|u_{n_0+2}|\leq\alpha|u_{n_0+1}|\leq\alpha^2|u_{n_0}|$$

Par une récurrence immédiate (faites la !), $|u_n|\leq\alpha^{n-n_0}\times|u_{n_0}|$. Or, $\alpha<1$ donc $\alpha^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. D'après le théorème d'encadrement, $|u_n|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
- On minore $|u_n|$ de même à partir d'un rang n_0 par $\alpha^{n-n_0}\times|u_n|$ sauf que cette fois $\alpha>1$ et on conclut de la même façon avec le théorème de minoration.
- Si, pour tout $n\geq 1$, $u_n=1/n$ alors $u_{n+1}/u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ et $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Si, pour tout $n\geq 1$, $u_n=1+(1/n)$ alors $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ tandis que $u_{n+1}/u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$. Enfin, si pour tout n, $u_n=(-1)^n$, alors la suite de terme général u_n n'a pas de limite mais $|u_{n+1}/u_n|=1\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$. Tout peut se produire, on ne peut pas conclure si $L=1$.

Exercice 51 : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall(k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2,0\leq u_n\leq\frac{1}{k}+\frac{k}{n}$$

Montrer que $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Correction : Soit $n\geq 1$ et soit $k=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Alors $\sqrt{n}-1<k\leq\sqrt{n}$ donc

$$0\leq u_n\leq\frac{1}{\sqrt{n}-1}+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

ce qui permet de conclure d'après le théorème d'encadrement.

Exercice 52 : ✪✪ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et soit $U = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des termes de la suite.

1. Montrer que si u converge, alors U est bornée et admet un plus petit ou un plus grand élément.
2. Donner un exemple de suite u convergente pour laquelle U admet un plus petit et pas de plus grand élément, puis un exemple où il y a un plus grand mais pas de plus petit élément.
3. Donner enfin un exemple de suite bornée pour laquelle U n'a ni plus grand, ni plus petit élément.

Correction :

1. Une suite convergente est bornée donc, si u converge, alors U est bornée. Puisque c'est une partie non vide de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure et une borne inférieure notées respectivement m et M si bien que $U \subset [\,m\,;M\,]$. Notons L la limite. Puisque $m \leq u_n \leq M$ pour tout n, et puisque l'inégalité large passe à la limite, alors $m \leq L \leq M$. L'idée est de créer un cylindre de sécurité (faites un dessin) autour de L assez loin des bornes supérieure et inférieure : en dehors, il y aura un nombre fini de termes donc il y aura un maximum ou un minimum. Encore faut-il que ce soit possible donc que L ne soit pas égale à m ou à M. Si $m = M$ alors U est un singleton donc tous les termes de la suite sont égaux à $m = M$ donc les deux bornes sont atteintes. Supposons que $m < M$. Dès lors, $L \neq m$ ou $L \neq M$ (ou les deux). Supposons (raisonnement analogue dans l'autre cas) que $L \neq m$. Dès lors, $L > m$: posons $\alpha = (L+m)/2$. Alors $u_n \geq \alpha$ à partir d'un rang n_0. En particulier, α minore l'ensemble $\{u_n \,|\, n \geq n_0\}$. De plus, l'ensemble $\{u_n \,|\, n < n_0\}$ est fini donc admet un minimum a. Si $a > m$ alors $\min(a, \alpha)$ est un minorant de U strictement supérieur à m ce qui est absurde par définition de la borne inférieure. Il en découle que $a = m$: m est atteint.
2. Il suffit de prendre u la suite de terme général $1 - 1/n$ (pas de plus grand élément, le plus petit élément valant 0) et u la suite de terme général $1/n$ (plus grand élément 1, pas de plus petit élément).
3. Il suffit de prendre u la suite de terme général $(-1)^n \times (1 - 1/n)$: pas de plus petit ni de plus grand élément, les bornes supérieure et inférieure ne sont pas atteintes.

Exercice 53 - Limite supérieure, limite inférieure et lemme de sous-additivité de Fekete (d'après Mines MP 2018) : ✪✪✪ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \{u_k \mid \ k \geq n\}$. On définit les suites $\underline{u} = (\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\overline{u} = (\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par les formules

$$\underline{u}_n = \inf U_n \qquad \text{et} \qquad \overline{u}_n = \sup U_n$$

1. Justifier que les suites $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.

   Pour toutes suites réelles $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on dit que v est plus petite que w, et on note $v \preccurlyeq w$, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \leq w_n$. De façon équivalente, on dit aussi que w est plus grande que v.

2. Montrer que $\overline{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preccurlyeq$) qui est décroissante et plus grande que u. Montrer de même que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preccurlyeq$) qui est croissante et plus petite que u.

   Dans toute la suite, on appelle limite inférieure $\underline{\lim}$ et limite supérieure $\overline{\lim}$ les limites suivantes :

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underline{u_n} \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u_n}$$

3. Si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite réelle bornée plus grande que u, comparer les limites de $\overline{u}$ et $\overline{v}$.
4. Montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge. En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites $u, \overline{u}$ et $\underline{u}$?

   On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sous-additive si, pour tous i, j dans $\mathbb{N}^*$, on a $u_{i+j} \leq u_i + u_j$.

   Dans le reste de cet exercice, on ne suppose plus que la suite u est bornée, mais on suppose que u est positive et sous-additive.

5. Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geq 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que

$$u_m \leq (q-1)u_n + u_{n+r}$$

   et en déduire l'inégalité

$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m} \times \frac{u_n}{n} + \frac{\max(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n-1})}{m}$$

6. En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n}$$
7. En conclure que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. U_n est non vide et borné car la suite u converge donc est bornée, donc U_n admet une borne supérieure et une borne inférieure : les suites $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. De plus, $U_{n+1} \subset U_n$ donc $\inf(U_{n+1}) \geq \inf(U_n)$ et $\sup(U_{n+1}) \leq \sup(U_n)$ (cf. cours : on prend la borne inf sur un ensemble plus petit donc la borne inf est supérieure, et c'est le contraire pour la borne supérieure). On en déduit que $\underline{u}$ est croissante et $\overline{u}$ est décroissante. Par conséquent,
$$\underline{u}_0 \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}_0$$
La suite croissante est majorée et la suite décroissante est minorée : les deux convergent.
2. On sait déjà que $\overline{u}$ est décroissante. De plus, pour tout n, $u_n \in U_n$ donc $u_n \leq \overline{u}_n$ (un élément d'un ensemble est inférieur à sa borne supérieure) : la suite $\overline{u}$ est plus grande que u. Soit enfin v une suite décroissante plus grande que u et montrons que $\overline{u} \leq v$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \geq n$. La suite v étant décroissante et plus grande que u, $u_k \leq v_k \leq v_n$. En d'autres termes, v_n est un majorant de U_n (tous les u_k avec $k \geq n$ sont inférieurs ou égaux à v_n) donc, par définition de la borne supérieure, $\overline{u}_n \leq v_n$ donc $\overline{u} \leq v$. De même pour $\underline{u}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \geq n$. Alors $u_k \leq v_k \leq \overline{v}_n$ (rappelons que $\overline{v}_n$ est la borne supérieure des v_k pour $k \geq n$). Dès lors, $\overline{v}_n$ est un majorant de U_n donc, par définition de la borne supérieure, $\overline{u}_n \leq \overline{v}_n$. Puisque ces suites convergent et l'inégalité large passant à la limite, on a le résultat.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\underline{u}_n \leq u_n \leq \overline{u}_n$. Par conséquent, si $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite donc, d'après le théorème d'encadrement, u converge aussi vers cette limite commune.

   Réciproquement, supposons que u converge vers une limite L et montrons que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes. Puisque $\overline{u}$ est décroissante et $\underline{u}$ croissante, pour prouver qu'elles sont adjacentes, il suffit de prouver qu'elles ont une limite commune. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque u converge vers L, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$. En d'autres termes, U_n est minoré par $L - \varepsilon$ donc $\underline{u}_n \geq L - \varepsilon$, et il est majoré par $L + \varepsilon$ donc $\overline{u}_n \leq L + \varepsilon$. En d'autres termes, on a montré qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,
$$L - \varepsilon \leq \underline{u}_n \leq u_n \leq \overline{u}_n \leq L + \varepsilon$$
   En particulier, pour tout $n \geq n_0$, $|\underline{u}_n - L| \leq \varepsilon$ donc $\underline{u}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et idem pour $\overline{u}_n$ ce qui permet de conclure. Dans le cas où ces conditions sont réunies, les trois suites ont la même limite.
5. Par hypothèse, $m = nq + r$ donc $m = n(q-1) + (n+r)$. La suite étant sous-additive, $u_m \leq u_{n(q-1)} + u_{n+r}$. Or,
$$u_{2n} = u_{n+n} \leq u_n + u_n = 2u_n$$
   Par une récurrence immédiate, $u_{kn} \leq ku_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ce qui permet de conclure quant à la première inégalité. En divisant par m :
$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{q-1}{m} \times u_n + \frac{u_{n+r}}{m}$$
   Or, $m = qn + r$ donc $q = \dfrac{m-r}{n}$ si bien que $q - 1 = \dfrac{m-r-n}{n}$ si bien que
$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{m-r-n}{m} \times \frac{u_n}{n} + \frac{u_{n+r}}{m}$$
   Or, d'après le théorème de division euclidienne, $r \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ donc $n \leq n+r \leq 2n-1$ donc $u_{n+r} \leq \max(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1})$ ce qui permet de conclure.
6. D'après la question précédente,
$$\frac{u_m}{m} \leq M = \frac{u_n}{n} + \max(u_n, \dots, u_{2n-1})$$
   La suite de terme général u_m/m est majorée par M à partir du rang $2n$ (puisqu'on a supposé que $m \geq 2n$). Soit $A = \max\{u_m/m \,|\, m < 2n\}$ (qui existe car on a un ensemble fini). Alors (u_m/m) est majorée par $\max(M, A)$ donc est majorée, et elle est minorée puisqu'elle est positive : la suite est bien bornée. Posons, pour tout m,
$$v_m = \frac{m-r-n}{m} \times \frac{u_n}{n} + \frac{\max(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1})}{m}$$

Alors (v_n) est une suite bornée (de même que ci-dessus) supérieure à (u_m/m) donc, d'après la question 3,

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m} \leq \overline{\lim_{m\to+\infty}} v_m$$

Or, (v_m) converge vers u_n/n donc, d'après la question 4, sa limite supérieure est aussi égale à u_n/n ce qui permet de conclure.

7. D'après la question précédente, pour tout n, $\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m}$ est un minorant de $\{u_n/n \,|\, n \geq 1\}$ donc est inférieur à sa limite inférieure, c'est-à-dire que

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m} \leq \underline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m}$$

Or, on sait qu'on a aussi l'inégalité inverse donc on a égalité : d'après la question 4, cela signifie que la suite converge.

Exercice 54 - Suites de Cauchy : ✪✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que cette suite est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, |u_p - u_n| \leq \varepsilon$$

1. Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy. Redémontrer la divergence de la suite de terme général $(-1)^n$.
2. On souhaite à présent montrer la réciproque : on suppose donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence L.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

Correction :

1. Soit (u_n) une suite convergente de limite L. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - L| \leq \varepsilon/2$. Soit $n \geq n_0$ et soit $p \geq n_0$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$|u_n - u_p| \leq |u_n - L + L - u_p| \leq |u_n - L| + |L - u_p| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

c'est-à-dire que (u_n) est une suite de Cauchy. Par contraposée, si une suite n'est pas une suite de Cauchy, alors elle diverge. Or, pour $\varepsilon = 1$, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, si on prend $n = 2n_0$ et $p = 2n_0 + 1$, alors $|(1)^n - (-1)^p| = 2 > \varepsilon$: la suite de terme général $(-1)^n$ n'est pas une suite de Cauchy donc diverge.

2. (a) Soit $\varepsilon = 1$. Il existe donc n_0 tel que, pour tous n et p supérieurs ou égaux à n_0, $|u_n - u_p| \leq 1$. En particulier, si $n \geq n_0$ et $p = n_0$, d'après l'inégalité triangulaire, $|u_n| - |u_{n_0} \leq 1$ si bien que $|u_n| \leq 1 + |u_{n_0}|$. De plus, l'ensemble $\{|u_n| \,|\, n < n_0\}$ est fini donc admet un majorant A. En posant $M = \max(A, |u_{n_0}| + 1)$, la suite $(|u_n|)$ est majorée par M donc la suite (u_n) est bien bornée. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème de Bolzano-Weierstraß.
   (b) Soit $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ une suite extraite qui converge vers L. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe p_0 tel que, pour tout $p \geq p_0$, $|u_{n_p} - L| \leq \varepsilon$. Or, (u_n) est une suite de Cauchy : il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, pour tout $p \geq n_0$, $|u_n - u_p| \leq \varepsilon$. Soit $n_1 = \max(n_{p_0}, n_0)$ et soit $n \geq n_1$. Soit également p_1 tel que $n_{p_1} \geq n_1$ (un tel p_1 existe car la suite d'indices $(n_p)_p$ tend vers $+\infty$). Alors

$$|u_n - L| = |u_n - u_{n_{p_1}} + u_{n_{p_1}} - L| \leq |u_n - u_{n_{p_1}}| + |u_{n_{p_1}} - L|$$

D'une part, n et n_{p_1} sont supérieurs à n_1 donc à n_0 si bien que $|u_n - u_{n_{p_1}}| \leq \varepsilon$. De plus, $n_{p_1} \geq n_1 \geq n_{p_0}$ donc $|u_{n_{p_1}} - L| \leq \varepsilon$ si bien que $|u_n - L| \leq 2\varepsilon$ ce qui est le résultat voulu.

6 Théorème de Cesàro

Exercice 55 : ✪ Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge vers $L > 0$. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{a_n})$ converge aussi vers L. En déduire les limites, quand n tend vers l'infini, des suites de terme général :

$$\binom{n}{p}^{\frac{1}{n}}, \qquad \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \qquad \frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n)}}{n}, \qquad \frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$$

Correction : La fonction ln étant continue,

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(L)$$

D'après le théorème de Cesàro :

$$v_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \ln(a_{k+1}) - \ln(a_k)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(L)$$

Or, par télescopage,

$$v_n = \frac{\ln(a_n) - \ln(a_0)}{n}$$

Finalement, puisque $\ln(a_0)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

$$\frac{\ln(a_n)}{n} = v_n + \frac{\ln(a_0)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(L) + 0 = \ln(L)$$

La fonction exponentielle étant continue,

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a_n} &= (a_n)^{1/n} \\
&= e^{\ln(a_n)/n} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ln(L)} = L
\end{aligned}$$

Soit $n \geq 1$.

- Soit $a_n = \binom{n}{p}$. On a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{p! \times (n+1-p)!} \times \frac{p! \times (n-p)!}{n!} = \frac{n+1}{n+1-p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

  D'après ce qui précède (avec $L = 1$), $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

- Soit $a_n = n^n/n!$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n} \\
&= \frac{(n+1)^n}{n!} \times \frac{n!}{n^n} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} e
\end{aligned}$$

  D'après ce qui précède, $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$.

- Soit $a_n = \dfrac{n(n+1)\cdots(n+n)}{n^n}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+1+n+1)}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n(n+1)\cdots(n+n)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n+2)}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n(n+1)\cdots(2n)} \\
&= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n} \\
&= \frac{(2n+1)\times 2(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n} \\
&= \frac{(2n+1)\times 2}{(n+1)^{n}} \times \frac{n^n}{n} \\
&= \frac{(2n+1)\times 2}{n} \times \frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{(2n+1)\times 2}{n} \times \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{e}
\end{aligned}$$

si bien que $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4/e$ (nous reprouverons ce résultat au chapitre 22 avec des sommes de Riemann).

- Posons

$$a_n = \frac{1}{n^{2n}} \times \frac{(3n)!}{n!}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(3n+3)!}{(n+1)^{2n+2}\times(n+1)!} \times \frac{n^{2n}\times n!}{(3n)!} \\
&= \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \times \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}} \\
&= \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)\times n^{2n}}{(n+1)\times(n+1)^2\times(n+1)^{2n}} \\
&= \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)^3} \times \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 3^3 \times \frac{1}{e^2} = 27e^{-2}
\end{aligned}$$

En conclusion, $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 27e^{-2}$.

Exercice 56 : ✪ Démontrer le théorème de Cesàro dans le cas où la suite (u_n) tend vers $\pm\infty$.

Correction : Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Soit $A \geq 0$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq A$. Soit $n \geq n_0$ et soit

$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{u_0 + \cdots + u_{n_0-1}}{n+1} + \frac{u_{n_0} + \cdots + u_n}{n+1} \\
&\geq \frac{u_0 + \cdots + u_{n_0-1}}{n+1} + \frac{(n-n_0+1)\times A}{n+1}
\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{u_0+\cdots+u_{n_0-1}}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\qquad\text{et}\qquad\frac{(n-n_0+1)\times A}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}A$$

Dès lors :

$$\exists n_1,\forall n\geq n_1,\frac{u_0+\cdots+u_{n_0-1}}{n+1}\geq\frac{-A}{4}\qquad\text{et}\qquad\exists n_2,\forall n\geq n_2,\frac{(n-n_0+1)\times A}{n+1}\geq\frac{3A}{4}$$

Soit enfin $n_3=\max(n_0,n_1,n_2)$ et soit $n\geq n_3$. Alors $v_n\geq 3A/4-A/4=A/2$. On a donc prouvé le résultat suivant :

$$\forall A\geq 0,\exists n_3,\forall n\geq n_3,v_n\geq A/2$$

et on sait que c'est équivalent à « $v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ ». De même si la limite vaut $-\infty$.

Exercice 57 : ✪✪ Soient $a,L>0$. Soit f une fonction définie sur $[\,0\,;a\,]$, strictement positive telle que

$$\frac{f(x)}{x}\xrightarrow[x\to0]{}L.$$

Donner la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n=\sqrt[n]{n!f(a)f\left(\frac{a}{2}\right)\cdots f\left(\frac{a}{n}\right)}.$$

Correction : Soit $n\geq1$. $u_n>0$ donc

$$\begin{aligned}\ln(u_n)&=\frac{1}{n}\left(\ln(n!)+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(f\left(\frac{a}{k}\right)\right)\right)\\&=\frac{1}{n}\left(\ln(1\times2\times\cdots\times n)+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(f\left(\frac{a}{k}\right)\right)\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(k)+\ln\left(f\left(\frac{a}{k}\right)\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(k\times f\left(\frac{a}{k}\right)\right)\end{aligned}$$

Or, $a/n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc, par composition de limites,

$$\frac{f(a/n)}{a/n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}L$$

donc

$$n\times f\left(\frac{a}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}aL$$

La fonction ln étant continue,

$$\ln\left(n\times f\left(\frac{a}{n}\right)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(aL)$$

D'après le théorème de Cesàro, $\ln(u_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(aL)$. La fonction exponentielle étant continue,

$$u_n=e^{\ln(u_n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^{\ln(aL)}=aL$$

Exercice 58 - D'après X MP 2012 : ✪✪ Une suite $(u_n)_{n\geq0}$ est dite C-convergente si la suite $(v_n)_{n\geq0}$ définie par :

$$\forall n\geq0,\qquad v_n=\frac{u_0+\cdots+u_n}{n+1}$$

est convergente, et la limite de la suite (v_n) est appelée C-limite de la suite (v_n). Le théorème de Cesàro nous dit donc qu'une suite convergente est C-convergente et que la limite de (u_n) est égale à sa C-limite.

1. Donner un exemple de suite C-convergente non convergente.
2. Montrer que si la suite (u_n) est C-convergente alors $\dfrac{u_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

3. Montrer que pour tout $\alpha \in \left]0\,;1\right[$, la suite de terme général $a_n = (-1)^n n^\alpha$ est C-convergente.

Correction :

1. Soit (u_n) la suite de terme général $(-1)^n$: on sait qu'elle n'est pas convergente. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_0 + \cdots + u_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \\ &= \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} \\ &= \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} \end{aligned}$$

En d'autres termes, $v_n = 0$ si n est pair et $1/n$ si n est impair. Dans tous les cas, $0 \leq v_n \leq 1/n$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la suite (u_n) n'est pas convergente mais est C-convergente (de C-limite nulle).

2. Supposons donc la suite (u_n) C-convergente et notons L sa C-limite, c'est-à-dire que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{n} &= \frac{n+1}{n} \times v_n - \frac{u_0 + \cdots + u_{n-1}}{n} \\ &= \frac{n+1}{n} \times v_n - v_{n-1} \end{aligned}$$

Or, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ donc $v_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et $\dfrac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ ce qui permet de conclure.

3. L'idée est que la suite est alternée, entre positive et négative, et qu'à chaque fois la somme est inférieure en valeur absolue à n^α donc, en divisant par n, on tend bien vers 0. Montrons cela rigoureusement.
   - Si $n \geq 1$, notons H_n : « $a_0 + \cdots + a_n$ est du signe de $(-1)^n$ et $|a_0 + \cdots + a_n| \leq n^\alpha$ ».
   - $a_0 + a_1 = -1^\alpha$ qui est bien négatif et $|a_0 + a_1| \leq 1^\alpha$ donc H_1 est vraie.
   - Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $a_0 + \cdots + a_n$ est du signe de $(-1)^n$ donc $a_0 + \cdots + a_n = (-1)^n \times |a_0 + \cdots + a_n|$. Dès lors,

     $$\begin{aligned} a_0 + \cdots + a_{n+1} &= (-1)^n \times |a_0 + \cdots + a_n| + (-1)^{n+1}(n+1)^\alpha \\ &= (-1)^{n+1} \times \left((n+1)^\alpha - |a_0 + \cdots + a_n|\right) \end{aligned}$$

     Toujours par hypothèse de récurrence, $|a_0 + \cdots + a_n| \leq n^\alpha$ donc

     $$(n+1)^\alpha - |a_0 + \cdots + a_n| \geq (n+1)^\alpha - n^\alpha \geq 0$$

     donc $a_0 + \cdots + a_{n+1}$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et

     $$|a_0 + \cdots + a_{n+1}| = (n+1)^\alpha - |a_0 + \cdots + a_n| \leq (n+1)^\alpha$$

     c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

   Finalement, pour tout $n \geq 1$,

   $$\left|\frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1}\right| \leq \frac{n^\alpha}{n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

   et puisque $\alpha < 1$, $1/n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le cours, cela signifie que

   $$\frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   c'est-à-dire que (a_n) est C-convergente vers 0.

Exercice 59 : ✪✪✪ *Cet exercice n'a rien à voir avec le théorème de Cesàro mais la démonstration est analogue.* Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes de limites respectives a et b. Montrer que

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} ab$$

Correction : Soit ε. Puisque $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$:

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, |a_n - a| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \exists n_1, \forall n \geq n_1, |b_n - b| \leq \varepsilon$$

Soit $n_2 = n_0 + n_1$ et soit $n \geq n_2$. Posons

$$v_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{n+1}$$

Enfin, (a_n) et (b_n) convergent donc sont bornées : soit donc M tel que $|a_n| \leq M$ et $|b_n| \leq M$ pour tout n. Alors :

$$\begin{aligned}
|v_n - ab| &= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k} - ab)\right| \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|a_k b_{n-k} - ab| \\
&\leq \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}|a_k b_{n-k} - ab| + \sum_{k=n_0}^{n-n_1}|a_k b_{n-k} - ab| + \sum_{k=n-n_1+1}^{n}|a_k b_{n-k} - ab|\right)
\end{aligned}$$

Soit $k \in [\![n_0 \,;\, n - n_1]\!]$. Alors $k \geq n_0$ donc $|a_k - a| \leq \varepsilon$ et $n - k \geq n - (n - n_1) = n_1$ donc $|b_{n-k} - b| \leq \varepsilon$ si bien que

$$\begin{aligned}
|a_k b_{n-k} - ab| &= |a_k b_{n-k} - a b_{n-k} + a b_{n-k} - ab| \\
&\leq |(a_k - a) b_{n-k}| + |a(b_{n-k} - b)| \\
&\leq |a_k - a| \times M + M \times |b_{n-k} - b| \\
&\leq 2M\varepsilon
\end{aligned}$$

Dès lors, la deuxième somme est inférieure à $(n - n_1 - n_0 + 1) \times 2M\varepsilon \leq 2(n+1)M\varepsilon$. La troisième somme contient n_1 termes tous inférieurs à $2M^2$ (inégalité triangulaire et les termes sont tous bornés par M). Par conséquent :

$$|v_n - ab| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|a_k b_{n-k} - ab| + 2M\varepsilon + \frac{2n_1 M^2}{n+1}$$

De même que dans le théorème de Cesàro, le premier terme et le troisième tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc sont inférieurs à ε à partir, respectivement, d'un rang n_3 et d'un rang n_4. Soit donc $n \geq \max(n_2, n_3, n_4)$. On a alors

$$|v_n - ab| \leq (2M+2)\varepsilon$$

ce qui permet de conclure.

7 Suites adjacentes

Exercice 60 : ✪ Montrer que les suites de terme général

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$$

sont adjacentes.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + 2\sqrt{n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \times \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) - 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\times(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\
&= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\times(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que (u_n) est décroissante.
- On montre de même que (v_n) est croissante.
- Enfin,

$$\begin{aligned}
v_n - u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Les deux suites sont bien adjacentes.

Exercice 61 : ✪✪ Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $p+q=1$ et $p>q$. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 < v_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} u_{n+1} = pu_n + qv_n \\ \\ v_{n+1} = pv_n + qu_n \end{cases}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite que l'on explicitera en fonction de u_0 et v_0.

Correction : Montrons que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= pu_n + qv_n - u_n \\
&= (p-1)u_n + qv_n \\
&= q(v_n - u_n)
\end{aligned}$$

puisque $p+q=1$ donc $p-1=-q$. Pour donner la monotonie de (u_n), il faut connaître le signe de $u_n - v_n$. Montrons par récurrence que pour tout k (n est déjà pris), $u_k < v_k$.
- Si $k \in \mathbb{N}$, notons H_k : « $u_k < v_k$ ».
- H_0 est vraie par hypothèse.
- Soit $k \geq 0$. Supposons H_k vraie et prouvons que H_{k+1} est vraie.

$$\begin{aligned}
v_{k+1} - u_{k+1} &= pv_k + qu_k - pu_k - qv_k \\
&= (p-q)(v_k - u_k)
\end{aligned}$$

Or, $p > q$ et, par hypothèse de récurrence, $v_k - u_k > 0$ donc $v_{k+1} - u_{k+1} > 0$: H_{k+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_k est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Par conséquent (retour au calcul), $v_n - u_n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$: (u_n) est (strictement) croissante. De même, (v_n) est décroissante. De plus, on a prouvé ci-dessus que $(v_n - u_n)$ est géométrique de raison $(p-q)$. Or, $0 < p - q < p < 1$ (car

$p+q=1$ et p et q strictement positifs). Par conséquent, $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: les deux suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes donc convergent et ont la même limite. Notons L leur limite commune

$$\begin{aligned} v_{n+1}+u_{n+1} &= pv_n + q_n + pu_n + qv_n \\ &= (p+q)(v_n+u_n) \\ &= v_n + u_n \end{aligned}$$

En d'autres termes, la suite (v_n+u_n) est constante. Elle est d'une part égale à son premier terme u_0+v_0. D'autre part, $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2L$ donc est constante égale à $2L$ (une suite constante est constante égale à sa limite). Ainsi, $2L = u_0+v_0$ si bien que $L=(u_0+v_0)/2$.

Exercice 62 - Moyenne arithmético-géométrique : ✪✪ Soient $a<b$ deux réels strictement positifs. On définit les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant $x_0=a$ et $y_0=b$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n} \qquad \text{et} \qquad y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes. La limite commune de ces deux suites est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.

Correction : Par une récurrence immédiate, (x_n) et (y_n) sont à valeurs strictement positives. Par une autre récurrence immédiate (?), $x_n<y_n$ pour tout n (et donc $\sqrt{x_n}<\sqrt{y_n}$ pour tout n par stricte croissance de la racine carrée). Dès lors, si $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x_n &= \sqrt{x_ny_n}-\sqrt{x_n}^2 \\ &= \sqrt{x_n}(\sqrt{y_n}-\sqrt{x_n}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que (x_n) est (strictement) croissante. De plus :

$$\begin{aligned} y_{n+1}-y_n &= \frac{y_n+x_n}{2}-y_n \\ &= \frac{x_n-y_n}{2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que (x_n) est (strictement) croissante. Enfin,

$$\begin{aligned} y_{n+1}-x_{n+1} &= \frac{x_n+y_n-2\sqrt{x_ny_n}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{y_n}-\sqrt{x_n})^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

De plus, (x_n) est croissante donc $y_{n+1}-x_{n+1}\leq y_{n+1}-x_n = \dfrac{y_n-x_n}{2}$. Par une récurrence immédiate, pour tout n,

$$0\leq y_n-x_n\leq \frac{y_0-x_0}{2^n}$$

D'après le théorème d'encadrement, $y_n-x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: les suites sont bien adjacentes.

8 Systèmes dynamiques

Exercice 63 : ✪ Étudier la suite (u_n) de premier terme strictement positif et vérifiant la relation de récurrence suivante, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{u_n}$.

Correction : Par une récurrence immédiate, $u_n>0$ pour tout n. Dès lors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n>0$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante. Soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers une limite L. D'une part, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et d'autre part, la suite étant croissante, $L\geq u_0>0$ donc

$$u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L+\frac{1}{L}$$

Par unicité de la limite, $L = L + 1/L$ donc $1/L = 0$ ce qui est absurde. En conclusion, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 64 : ✪ Etudier la suite définie par $u_0 = 2021$ et pour tout $n \geq 0$

$$u_{n+1} = 1805 + \sqrt{u_n}$$

Plus précisément, on pourra montrer que :

1. Il existe un unique réel α strictement positif tel que $1805 + \sqrt{\alpha} = \alpha$.
2. $I = [\,\alpha\,;+\infty\,[$ est stable par $x \mapsto 1805 + \sqrt{x}$ (on rappelle que la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$).
3. Pour tout n, u_n est bien défini et appartient à I.
4. La suite (u_n) est décroissante.
5. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

Recommencer l'exercice avec $u_0 = 800$.

Correction :

1. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt{x} + 1805 - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \\ &= \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

   Alors : $g'(x) \geq 0 \iff 2\sqrt{x} \leq 1 \iff x \leq 1/4$. On en déduit le tableau de variations de g :

x	0		$1/4$		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	1805	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

   g n'admet aucun zéro sur $[\,0\,;1/4\,]$ (pas de TVI ici !!!). De plus, g est continue, strictement décroissante sur $[\,1/4\,;+\infty\,[$ donc, d'après le théorème de la bijection, g s'annule une unique fois sur $[\,1/4\,;+\infty\,[$ donc s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$: il existe un unique $\alpha > 0$ tel que $1805 + \sqrt{\alpha} = \alpha$.
2. Notons f cette fonction. Soit $x \in I$. Alors $x \geq \alpha$. Par croissance de la racine carrée, f est croissante donc $f(x) \geq f(\alpha) = \alpha$ donc $f(x) \in I$: I est stable par I.
3. Une récurrence immédiate prouve que $u_n \geq 0$ pour tout n : u_n est bien défini. De plus, $u_0 \in I$ et I est stable par f donc $u_1 = f(u_0) \in I$. De même, $u_2 = f(u_1) \in I$: par une récurrence immédiate, $u_n \in I$ pour tout n.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Or, d'après la question 1, g est négative sur $[\,\alpha\,;+\infty\,[$ et, d'après la question précédente, $u_n \geq \alpha$ donc $g(u_n) \leq 0$ i.e. $u_{n+1} - u_n \leq 0$: la suite est bien décroissante.
5. La suite est décroissante et minorée par α (puisque $u_n \geq \alpha$ pour tout n) donc converge. Puisque f est continue, sa limite est un point fixe, et puisque α est le seul point fixe de f, on a le résultat voulu.
6. On montrer de même que $[\,0\,;\alpha\,]$ est stable par f, puis que $u_n \leq \alpha$ pour tout n. Dès lors, g étant positive sur $[\,0\,;\alpha\,]$, on prouve de même que (u_n) est croissante, et puisqu'elle est majorée par α, elle converge, et sa limite est l'unique point fixe, donc α.

Exercice 65 : ✪ Étudier la suite récurrence définie par $u_0 < 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \dfrac{w_n + 1}{\sqrt{w_n^2 + 1}} - 1.$.

Correction : Soit f définie sur $\mathbb{R}_-$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1} - 1$ et soit g définie sur $\mathbb{R}_-$ par $g(x) = f(x) - x$. Soit $x < 0$. Alors :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x + 1 - x\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= (x+1) \times \underbrace{\left(\frac{1 - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)}_{<0} \end{aligned}$$

Dès lors, g est strictement positive sur $]-\infty\,;-1\,[$, nulle en -1, strictement négative sur $]-1\,;0\,[$ et nulle en 0 : les seuls points fixes de f sur $\mathbb{R}_-$ sont -1 et 0. Séparons les cas selon la valeur de w_0 (coquille dans l'énoncé : il fallait lire w_0 et pas u_0).

Supposons que $w_0 \in\,]-1\,;1\,[$. Soit $x \in\,]-1\,;0\,[$. Alors $-1 < x < 0$. On veut appliquer f : une rapide étude de fonction prouve que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ donc $f(-1) = -1 < x < 0$: $]-1\,;0\,[$ est stable par f. De plus, $w_0 \in\,]-1\,;0\,[$, $w_1 = f(w_0) \in\,]-1\,;0\,[$ car cet intervalle est stable par f. De même, $w_2 = f(w_1) \in\,]-1\,;0\,[$. Par une récurrence immédiate, $w_n \in\,]-1\,;0\,[$ pour tout n. Soit $n \in \mathbb{N}$. $w_{n+1} - w_n = f(w_n) - w_n = g(w_n)$. Or, g est strictement négative sur cet intervalle donc $g(w_n) < 0$: la suite est strictement décroissante. Puisqu'elle est minorée par -1, elle converge et puisque f est continue, sa limite L est un point fixe. Or, la suite est décroissante donc $L \le w_0 < 0$ donc $L = -1$, l'unique point fixe strictement négatif.

Supposons que $w_0 < -1$. On montre de même que la suite est croissante et converge encore vers -1. Enfin, si $w_0 = 1$, alors la suite est constante égale à -1 donc converge vers -1.

Exercice 66 : ✪ Même chose avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 6u_n}{3u_n^2 + 2}$.

Correction : La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 6x}{2x^2 + 2}$ admet trois points fixes : 0 et $\pm\sqrt{2}$. On prouve comme d'habitude que si $u_0 \in\,]\,0\,;\sqrt{2}\,[$, si $u_0 = \sqrt{2}$ (dans ce cas la suite est constante), ou si $x > \sqrt{2}$, alors la suite converge vers $\sqrt{2}$. Si $u_0 = 0$, alors la suite est constante égale à 0 donc converge vers 0. Enfin, dans les autres cas, la suite converge vers $-\sqrt{2}$.

Exercice 67 : ✪✪ Même chose avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{10}{1 + u_n^2}$.

Correction : Trop gore à taper... Flemme, je le supprimerai du poly l'an prochain. Désolé.

Exercice 68 : ✪✪ Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;3\,]$ par $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{2}$. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3/2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Correction : Idem.

Exercice 69 : ✪✪ Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

Correction : Définissons sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction f par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$. La fonction f est définie, continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car la fonction inverse l'est. L'étude habituelle ne marcherait pas ici : on va regarder les termes pairs et impairs. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \qquad \text{et} \qquad u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$$

et $f \circ f$ est strictement croissante car composée de deux fonctions décroissantes : on va donc appliquer le schéma habituel à $f \circ f$ au lieu de f.

Soit $g : x \mapsto f \circ f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On montre aisément que g s'annule en $\alpha = 2$, qui est donc l'unique point fixe de $f \circ f$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et c'est même un point fixe de f). De plus g est strictement positive sur $]\,0\,;\alpha\,[$ et strictement négative sur $]\,\alpha\,;+\infty\,[$.

Si $u_0 = 2$, alors la suite (u_n) est constante égale à 2 donc converge vers 2.

Supposons que $u_0 < \alpha$. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} < \alpha$. Raisonnons par récurrence. L'initialisation est établie par hypothèse. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n : $u_{2n} < \alpha$. Puisque f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $u_{2n+1} = f(u_{2n}) > f(\alpha) = \alpha$ puis $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) < f(\alpha) = \alpha$, i.e. $u_{2(n+1)} < \alpha$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} < \alpha$. Ainsi, on montre comme d'habitude que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) < f(u_{2n}) = u_{2n+1}$ car f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. De plus, (u_{2n}) est majorée par α et (u_{2n+1}) est minorée par α : les suites convergent, et $f \circ f$ est continue donc elles convergent vers un point fixe de $f \circ f$: il n'y a que 2. Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite donc (u_n) converge vers 2.

On montrerait de même que, si $u_0 > \alpha$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, et le raisonnement est analogue.

Exercice 70 : ✪✪✪ Soit u définie par $u_0 \in\,]\,0\,;1\,]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = {u_n}^2 \times \left\lfloor \dfrac{1}{u_n} \right\rfloor$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que, si elle n'est pas stationnaire, alors sa limite est nulle.

Correction : On définit sur $]\,0\,;1\,]$ la fonction f par $f(x) = x^2 \times \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$. Soit $x \in \,]\,0\,;1\,]$. Par définition de la partie entière, $\lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x$ donc $f(x) \leq x^2 \times \dfrac{1}{x} = x$. Par conséquent, puisque $x \leq 1$, alors $f(x) \leq 1$. De plus, $x \neq 0$ donc $x^2 > 0$ et puisque $x \leq 1$ alors $1/x \geq 1$ donc $\lfloor 1/x \rfloor > 0$. Finalement, $f(x) > 0$: $]\,0\,;1\,]$ est stable par f.

Étudions la monotonie de la suite. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_n > 0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n \times \left\lfloor \frac{1}{u_n} \right\rfloor \leq u_n \times \frac{1}{u_n} = 1$$

La suite (u_n) étant à valeurs strictement positives, la suite (u_n) est décroissante (ne pas oublier de le préciser, le critère de monotonie à l'aide du quotient n'est valable que pour les suites strictement positives) et puisqu'elle est minorée (par 0), elle converge vers une limite $L \geq 0$ (car l'inégalité large passe à la limite). Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et converge vers une limite $L \geq 0$.

Supposons L non nulle : prouvons alors que la suite est stationnaire. Commençons par donner la valeur éventuelle de L. L étant non nulle, la fonction inverse est continue en L. Supposons que L ne soit pas l'inverse d'un entier. Par hypothèse, $1/L \notin \mathbb{N}$ donc la partie entière est continue en $1/L$ (rappelons que la partie entière est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$). Par composition, la fonction $x \mapsto \lfloor 1/x \rfloor$ est continue en L. La fonction carré est aussi continue en L donc, par produit, la fonction f est continue en L. Dès lors, L est un point fixe : $f(L) = L$. Par conséquent, $L = L^2 \times \lfloor 1/L \rfloor$. Or, L est non nul donc

$$\frac{1}{L} = \left\lfloor \frac{1}{L} \right\rfloor$$

Il en découle que $1/L \in \mathbb{N}$ (c'est un nombre positif égal à sa partie entière donc un entier positif) ce qui contredit l'hypothèse faite au début de cette question : absurde, L est forcément l'inverse d'un entier. Soit donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $L = 1/p$. Puisque $L = 1/p$,

$$f(L) = \frac{1}{p^2} \times \lfloor p \rfloor = \frac{1}{p^2} \times p = \frac{1}{p} = L$$

Ainsi, L est un point fixe de f : s'il existe n_0 tel que $u_{n_0} = L$ alors $u_{n_0+1} = f(L) = L$ et par une récurrence immédiate, $u_n = L$ pour tout $n \geq n_0$. Par conséquent, il suffit de prouver que u_n prend au moins une fois la valeur L. Supposons dans la suite que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire que pour tout n, $u_n \neq L$. La suite (u_n) étant décroissante, elle est minorée par sa limite, c'est-à-dire que pour tout $n, u_n \geq L = 1/p$. D'après ce qui précède, l'inégalité est stricte c'est-à-dire que pour tout $n, u_n > 1/p$. Enfin, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/p$ donc $u_n < 1/(p-1)$ pour n assez grand : il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \in \,]\,1/p\,;1/(p-1)\,[$.

Soit $n \geq n_0$. D'après ce qui précède, $p - 1 < 1/u_n < p$ donc

$$\left\lfloor \frac{1}{u_n} \right\rfloor = p - 1$$

Dès lors :

$$u_{n+1} = {u_n}^2 \times \left\lfloor \frac{1}{u_n} \right\rfloor = {u_n}^2 \times (p-1)$$

Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/p$ alors, la fonction carré étant continue,

$$u_{n+1} = {u_n}^2 \times (p-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{p^2} \times (p-1)$$

De plus, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/p$. Par unicité de la limite,

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p^2} \times (p-1)$$

c'est-à-dire que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2}$ ce qui est absurde : la suite est stationnaire.

Terminons par deux exercices tirés de l'arithmétique. Évidemment, ici, on abandonne toute notion de continuité : l'étude de g ne présente donc plus aucun intérêt !

Exercice 71 : ✪✪✪ Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p(n)$ le produit des chiffres de n écrit en bases 10, et on note $f(n) = n + p(n)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$, c'est-à-dire que u_{n+1} est égal à la somme de u_n et du produit de ses chiffres en base 10. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Par exemple, si $u_0 = 7$, alors on a successivement $u_1 = 14, u_2 = 18, u_3 = 26, u_4 = 38, u_5 = 62, u_6 = 74, u_7 = 102, u_8 = 102\ldots$

Correction : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment croissante puisque p est à valeurs positives. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} = u_n$ si et seulement si $p(u_n) = 0$ si et seulement si l'écriture de u_n contient le chiffre 0 et alors, par une récurrence immédiate, $u_k = u_n$ pour tout $k \geq n$. Par conséquent, il suffit de prouver qu'il existe n tel que u_n s'écrive avec le chiffre 0. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors (u_n) est strictement croissante (car on a vu que si elle prenait deux fois la même valeur, alors elle était stationnaire). Puisqu'on a une suite strictement croissante d'entiers, alors $u_n \geq n$ pour tout n et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. L'idée est de prouver qu'on ne peut pas faire des sauts trop grands donc on se retrouvera à un moment donné avec un terme de la forme $10abc\dots$

Soit $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant strictement croissante de limite $+\infty$ et aucun terme ne s'écrivant avec un 0, il existe n_0 tel que $u_{n_0} < 10 \times 10^{k-1} < 11 \times 10^{k-1} < u_{n_0+1}$ (car sinon un terme de la suite est de la forme $10abc\dots$). Or, u_{n_0} admet au plus k chiffres égaux à 9 donc $p(u_{n_0}) \leq 9^k$ c'est-à-dire que $11 \times 10^{k-1} - 10 \times 10^{k-1} = 10^{k-1} < u_{n_0+1} - u_{n_0} \leq 9^k$ donc

$$10^{k-1} < 9^k$$

donc $(10/9)^k < 10$: k étant quelconque, cette inégalité est vraie pour tout k ce qui est absurde puisque $(10/9)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 72 : ✪✪✪ Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f(n)$ la somme des carrés des chiffres de n écrits en base 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$, c'est-à-dire que u_{n+1} est égal à la somme des carrés des chiffre de u_n en base 10. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

Correction : Rappelons que le nombre de chiffres d'un entier $n \geq 1$ est $\left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1$. Par conséquent, pour tout n, les chiffres de u_n étant inférieurs ou égaux à 9, on trouve que

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq \left(\left\lfloor \frac{\ln(u_n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1 \right) \times 81$$

Or, par croissances comparées,

$$g(x) = \frac{x}{\left(\left\lfloor \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1 \right) \times 81} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

donc il existe A tel que, pour tout x, $g(x) > 1$. Supposons qu'il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$. Alors $g(u_n) > 1$ donc

$$u_n > \left(\left\lfloor \frac{\ln(u_n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1 \right) \times 81 \geq u_{n+1}$$

Si $u_{n+1} > A$ alors on a de même $u_{n+1} > u_{n+2}$ et ainsi de suite jusqu'à redescendre sous A : ensuite, on peut remonter, mais les images sont en nombre fini. En effet, si on a une image supérieure à A, on redescend jusqu'à redescendre sous A. Par conséquent, u_n ne peut prendre que les valeurs $1, \dots, A$ ainsi que $f(1), , \dots, f(A)$. En d'autres termes, (u_n) prend un nombre fini de valeurs donc prend au moins deux fois la même : il existe $k_1 < k_2$ tels que $u_{k_1} = u_{k_2}$. La suite étant ensuite totalement déterminée, on a $u_{k_1+1} = f(u_1) = f(u_2) = u_{k_2+1}$ et ainsi de suite. Intuitivement, cela se comprend très bien : on va retomber une infinité de fois sur cette valeur, et ensuite on reprendra à chaque fois les mêmes valeurs (on n'a pas le choix, la suite (u_n) est totalement déterministe) donc sera périodique. On montre par une récurrence immédiate (exo) que pour tout $n \geq k_1$, $u_{n+k_2-k_1} = u_n$ ce qui permet de conclure.

9 Suites extraites et valeurs d'adhérence

*On rappelle qu'une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un **réel**[2] qui est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 73 : ✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Parmi les suites suivantes, trouver celles qui sont extraites d'une autre : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3\times 2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3\times 2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est extraite d'aucune des autres suites, la suite $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est extraite d'aucune autre suite, la suite $(u_{3\times 2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(u_{3\times 2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3\times 2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, et la suite $(u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 74 : ✪ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

1. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors u converge.

2. Ou un complexe pour une suite complexe mais en tout cas une quantité finie : $+\infty$ n'est donc pas considéré comme une valeur d'adhérence, même si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

2. Donner un exemple d'une suite u divergente telle que, pour tout $p \geq 2$, la suite $(u_{p\times n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction :

1. La différence avec le cours est que les limites ne sont a priori pas les mêmes. Notons L_1, L_2, L_3 les limites respectives de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ donc converge vers L_1. De plus, elle est extraire de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ donc converge vers L_2. Par unicité de la limite, $L_1 = L_2$. De même, la suite $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite des suites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ donc converge vers L_2 et L_3 si bien que $L_2 = L_3$ donc $L_1 = L_3$: les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ce qui permet de conclure.
2. Prenons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indicatrice des nombres premiers c'est-à-dire que $u_n = 1$ si n est un nombre premier et 0 sinon. La suite u diverge car admet deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes : la suite extraire $(u_p)_{p\in\mathbb{P}}$ est constante égale à 1 donc converge vers 1 et la suite des termes pairs est stationnaire égale à 0 (à partir de u_4) donc converge vers 0. Cependant, pour tout $p \geq 2$ (pas forcément premier), la suite extraite $(u_{pn})_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang 2 (car pn n'est pas premier dès que $n \geq 2$) donc converge vers 0.

Exercice 75 : ✪ Que peut-on dire d'une suite croissante qui admet une sous-suite convergente ? qui admet une sous-suite majorée ?

Correction : Montrons dans ces deux cas que la suite converge. Rappelons qu'une suite croissante converge ou diverge vers $+\infty$. Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Puisqu'une suite convergente est bornée, il suffit de prouver que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite bornée, alors elle converge, cela prouvera le résultat dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. Supposons donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ bornée par un réel M, c'est-à-dire que pour tout $p, u_{n_p} \leq M$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Puisque $n_p \geq p$ (cf. cours), et puisque la suite est croissante, $u_p \leq u_{n_p} \leq M$: la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par M donc converge.

Exercice 76 : ✪ Montrer que la suite (u_n) n'a pas de limite où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$ pour le premier) :

1. u_n est l'inverse du nombre de diviseurs premiers de n.
2. $u_n = \sin\left(\dfrac{n^2\pi}{3}\right)$.
3. $u_n = \left\lfloor \dfrac{n}{5} \right\rfloor - \dfrac{n}{5}$.

Correction :

1. Lorsque $(n_p)_{p\geq 1}$ est la suite strictement croissante des nombres premiers, la suite extraite $(u_{n_p})_{p\geq 1}$ est constante égale à 1, tandis que lorsque $(n_p)_{p\geq 1}$ est la suite de terme général 6^p alors, pour tour tout p, $u_{n_p} = 1/2$ donc la suite $(u_{n_p})_{p\geq 1}$ converge vers 1/2. La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ admet deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes donc diverge.
2. La suite extraite $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 donc converge vers 0 et la suite $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ donc converge vers $\sqrt{3}/2$ et on montre comme ci-dessus que la suite diverge.
3. La suite extraire $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 donc converge vers 0 et la suite extraite $(u_{5n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $-1/5$ donc converge vers $-1/5$ ce qui permet de conclure.

Exercice 77 : ✪ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite n'admettant aucune sous-suite bornée. Montrer que $|x_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Correction : Par contraposée, montrons que si $(|x_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$, alors (x_n) admet une sous-suite bornée. Supposons donc que $(|x_n|)$ ne tende pas vers $+\infty$. Dès lors :

$$\exists A, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |x_n| \leq A$$

Donnons nous cette valeur de A dans la suite. On définit la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

- $n_0 = \min\{n \,|\, |x_n| \leq A\}$: n_0 est bien défini car cet ensemble est non vide.
- $n_1 = \min\{n > n_0 \,|\, |x_n| \leq A\}$: n_1 est bien défini car, par hypothèse, il existe $n \geq n_0 + 1$ donc $n > n_0$ tel que $|x_n| \leq A$. Dès lors, $\{n > n_0 \,|\, |x_n| \leq A\}$ est non vide donc admet un minimum.
- Soit $k \geq 1$. Supposons $n_0, \dots, n_k$ construits et posons $n_{k+1} = \min\{n > n_k \,|\, |x_n| \leq A\}$ qui existe pour la même raison que ci-dessus.

On a donc défini une suite strictement croissante d'indices $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k, $|x_{n_k}| \leq A$: on a donc construit une sous-suite bornée de (x_n), d'où le résultat par contraposée.

Exercice 78 : ✪ Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite de terme général $u_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$.

Correction : Soit a une valeur d'adhérence de la suite, c'est-à-dire qu'il existe une suite extraite (u_{n_p}) qui converge vers a. Soit la suite $(n_p)_p$ contient une infinité de termes pairs, soit elle contient une infinité de termes impairs (soit les deux mais on peut montrer que ce n'est pas possible). Supposons qu'elle contienne une infinité de termes pairs. Notons $(n_{p_q})_q$ la sous-suite formée de termes pairs. Alors $(u_{n_{p_q}})_q$ est la sous-suite de (u_{n_p}) formée des termes d'indice pair. Par conséquent, pour tout q,

$$u_{n_{p_q}} = \left(1+\frac{1}{n_{p_q}}\right)^{n_{p_q}} \xrightarrow[q\to+\infty]{} e$$

Or, une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite donc $a=e$. Dans le cas où la suite $(n_p)_p$ contient une infinité de termes impairs, on montre de même que $a=e^{-1}$. Dès lors, les seules valeurs possibles de a sont e et e^{-1} si bien que e et e^{-1} sont les seules valeurs d'adhérence possibles de la suite (u_n).

Exercice 79 : ✪✪

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels qui ne tend pas vers $+\infty$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite constante.
2. Montrer qu'une suite d'entiers naturels deux à deux distincts tend vers $+\infty$.
3. Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs non nuls. On suppose que $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite α irrationnelle. Montrer que $(|q_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$.

Correction :

1. Par hypothèse :

$$\exists A, \forall n_0\in\mathbb{N}, \exists n\geq n_0, u_n<A$$

   Il y a donc une infinité de valeurs de u_n inférieures strictement à A. Puisque (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{N}$, il y a un nombre fini de valeurs de u_n possibles : il y a donc une valeur que (u_n) prend une infinité de fois, et donc cela permet de construire comme d'habitude une sous-suite constante.
2. D'après la question précédente, une suite qui ne tend pas vers $+\infty$ admet une sous-suite constante, donc n'est pas une suite d'entiers deux à deux distincts. On en déduit le résultat par contraposée.
3. Supposons que $(|q_n|)$ ne tende pas vers $+\infty$. D'après ce qui précède, on peut extraire une suite $(|q_{n_s}|)_{s\in\mathbb{N}}$ constante, disons égale à A. Par conséquent, la suite $(p_{n_s}/q_{n_s})_{s\in\mathbb{N}}$ a tous ses dénominateurs égaux à A (même si les fractions ne sont pas forcément irréductibles). Puisque c'est une suite extraite d'une suite qui converge vers α, alors elle converge aussi vers α. Mais comme les termes de la suite font des pas de largeur $1/A$, l'écart avec α ne peut pas tendre vers 0. De façon explicite, notons

$$p_0=\lfloor \alpha A\rfloor \qquad \text{et} \qquad p_1=\lfloor \alpha A\rfloor+1$$

   Pour faire simple, p_0 est le plus grand entier inférieur ou égal à αA donc p_0/A est le plus grand terme de la forme p/A inférieur ou égal à α, et idem dans l'autre sens. Alors $\alpha\in[\,p_0/A\,;p_1/A\,]$. Soit $\varepsilon=\min(|\alpha-p_0/A|,|\alpha-p_1/A|)>0$ puisque α est irrationnel donc ne peut pas être égal à p_0/A ni à p_1/A. Soit enfin $p\in\mathbb{N}$. Si $p\leq p_0\leq\alpha$ alors $|p/A-\alpha|\geq|p_0-\alpha|\geq\varepsilon$ et idem si $p\geq p_1$. Dans tous les cas, $|p/A-\alpha|>\varepsilon$ donc la suite $(p_{n_s}/A)_{s\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers α ce qui est absurde : $|q_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Dès lors, si $(|p_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$, d'après ce qui précède, elle admet une sous-suite $(|p_{n_s}|)_{s\in\mathbb{N}}$, constante, disons égale à B. Mais $(|q_n|)$ tend vers $+\infty$ donc $(|q_{n_s}|)$ également en tant que suite extraite, donc la suite (p_{n_s}/q_{n_s}) tend vers 0 ce qui est absurde car elle tend vers α en tant que suite extraite de (p_n/q_n).

Exercice 80 : ✪✪ Donner un exemple de suite complexe $(z_n)=(x_n+iy_n)$ sans valeur d'adhérence mais telle que (x_n) et (y_n) aient des valeurs d'adhérence.

Correction : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $x_n=n(1+(-1))^n$ et $y_n=n(1+(-1)^{n+1})$. Alors $x_n=0$ lorsque n est impair donc 0 est valeur d'adhérence (plus précisément, 0 est limite de la sous-suite des termes impairs) et $y_n=0$ lorsque n est pair donc 0 est aussi valeur d'adhérence de y_n. Cependant, pour tout $n\in\mathbb{N}$, si on pose $z_n=x_n+iy_n$ alors

$$|z_n|\geq\max(|x_n|,|y_n|)=2n$$

En effet, le module d'un complexe est supérieur ou égal à la valeur absolue de sa partie réelle ou de sa partie imaginaire, et si n est pair alors $x_n=2n$ et $y_n=0$, et c'est le contraire si n est impair. Dès lors, $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc n'admet aucune sous-suite bornée donc n'admet aucune valeur d'adhérence.

Exercice 81 : ✪✪ Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n-v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont les mêmes valeurs d'adhérence.

Correction : Par symétrie des rôles, il suffit de prouver que si L est une valeur d'adhérence éventuelle de (u_n), c'est aussi une valeur d'adhérence de (v_n). Supposons donc qu'il existe une suite extraite de (u_n), que l'on note $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$, qui converge vers L. La suite $(u_n - v_n)$ tendant vers 0, toutes ses suites extraites aussi donc $(u_{n_p} - v_{n_p})$ aussi, et il suffit de voir que $v_{n_p} = v_{n_p} - u_{n_p} + u_{n_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 + L = L$ donc L est bien une valeur d'adhérence de (v_n).

Exercice 82 : ✪✪ Montrer qu'il n'existe pas de suite donc l'ensemble des valeurs d'adhérence soit $]\,0\,;1\,[$.

Correction : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'une telle suite (x_n) existe. Montrons qu'alors 0 est valeur d'adhérence ce qui sera absurde (on montrerait de même que 1 est aussi valeur d'adhérence). On construit une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ de la façon suivante :

- $n_1 = \min\{n \,|\, |x_n| \leq 1\}$: n_1 est bien défini car $1/2$ est valeurs d'adhérence donc il existe une suite extraite de (x_n) qui converge vers $1/2$ donc, en particulier, à valeurs dans $]\,0\,;1\,[$ à partir d'un certain rang.
- $n_2 = \min\{n > n_1 \,|\, |x_n| \leq 1/2\}$: n_1 est bien défini car, par hypothèse, il existe une suite extraite de (x_n) qui converge vers $1/4$: si on note (x_{n_p}) cette suite extraite, alors $x_{n_p} \in [\,0\,;1/2\,]$ pour n assez grand : il existe donc $n > n_1$ tel que $x_n \leq 1/2$.
- Soit $k \geq 1$. Supposons $n_0, \dots, n_k$ construits et posons $n_{k+1} = \min\{n > n_k \,|\, |x_n| \leq 1/(k+1)\}$ qui existe pour la même raison que ci-dessus.

Dès lors, on a construit une suite extraite (car la suite $(n_k)_k$ est strictement croissante) de (x_n), la suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$, telle que, pour tout $k \geq 1$, $0 \leq |x_{n_k}| \leq 1/k$. D'après le théorème d'encadrement, $x_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ si bien que 0 est limite d'une suite extraite de (x_n) donc est valeur d'adhérence de (x_n) ce qui permet de conclure.

Exercice 83 : ✪✪✪

1. Montrer qu'une suite bornée qui possède une unique valeur d'adhérence converge. Montrer que ce résultat est faux si on en enlève l'hypothèse « bornée » ? Ce résultat est fort utile, voici quatre exercices qui l'utilisent.
2. (a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que $x_{2n} + 2x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   (b) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles et k un entier naturel impair tels que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et ${u_n}^k - {v_n}^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ?

   (c) Que dire de deux suites réelles u et v telles que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $e^{u_n} + e^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$?

   (d) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On suppose qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et tel que les deux suites $\left(e^{iau_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(e^{ibu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que ce résultat n'est plus valable sans l'hypothèse $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Correction :

1. Soit L l'unique valeur d'adhérence de la suite. Supposons que (u_n) ne converge pas vers L. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - L| > \varepsilon$$

   En d'autres termes, il existe une infinité de termes qui vérifient $|u_n - L| > \varepsilon$, c'est-à-dire une suite extraite $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont à distance supérieure à ε de L. Cette suite extraite est bornée donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, admet aussi une sous-suite convergente : il existe donc une suite $(u_{n_{p_q}})_{q\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un réel L'. Or, pour tout q, $|u_{n_{p_q}} - L| > \varepsilon$, et l'inégalité large passe à la limite donc $|L' - L| \geq \varepsilon$ et en particulier, $L \neq L'$. Or, $(u_{n_{p_q}})$ est extraite d'une suite extraite donc est extraite de (u_n) donc L' est une valeur d'adhérence de (u_n) ce qui contredit le fait que (u_n) n'a qu'une valeur d'adhérence.

   Si on enlève l'hypothèse de bornitude, cela ne marche plus : la suite de terme général $n(1 + (-1)^n)$ n'admet que 0 comme valeur d'adhérence (rappelons que $+\infty$ n'est pas une valeur d'adhérence) mais diverge.

2. (a) D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, (x_n) admet une valeur d'adhérence notée L. Il existe donc une suite extraite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers L. Ainsi,

$$x_{2n_p} = (x_{2n_p} + 2x_{n_p}) - 2x_{n_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 - 2L = -2L$$

   Or, $(x_{2n_p} + 2x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(x_{2n} + 2x_n)$ donc converge vers 0 si bien que $-2L = 0$ par unicité de la limite donc $L = 0$: la suite (x_n) étant bornée avec une unique valeur d'adhérence, elle converge (vers 0).

   (b) Prouvons que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées. Si (u_n) n'est pas bornée, alors elle admet une suite extraite qui converge vers $\pm\infty$, disons $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). Dès lors,

$$v_{n_p} = u_{n_p} + v_{n_p} - u_{n_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 - \infty = -\infty$$

   Dès lors, k étant impair, c'est la même chose à la puissance k donc

$$u_{n_p}{}^k - v_{n_k}{}^k \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

car « $+\infty - (-\infty) = +\infty$ » ce qui est absurde : les deux suites sont bornées. Soit L une valeur d'adhérence de (u_n) (qui existe d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß) : il existe une suite extraite (u_{n_p}) qui converge vers L_1. La suite (v_{n_p}) est bornée donc admet aussi une sous-suite convergente, notée $(v_{n_{p_q}})$, vers L_2, $(u_{n_{p_q}})$ est extraite de (u_{n_p}) donc converge aussi vers L_1 (c'est une preuve analogue au théorème de Bolzano-Weierstraß complexe : des extractions successives). Par conséquent,

$$u_{n_{p_q}} + v_{n_{p_q}} \xrightarrow[q\to+\infty]{} L_1 + L_2$$

donc, par unicité de la limite, $L_1 = -L_2$. De même, la fonction $x \mapsto x^k$ étant continue, $L_1{}^k = L_2{}^k$ mais k est impair donc $L_1 = L_2$ et puisque $L_1 = -L_2$, alors $L_1 = L_2 = 0$. (u_n) et (v_n) sont bornées et ont une unique valeur d'adhérence donc convergent vers 0.

(c) Idem : les suites sont bornées sinon l'une tend vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$ avec la première condition, mais alors $e^{u_n} + e^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est exclu. Avec deux extractions successives, on trouve de même que $L_1 + L_2 = 0$ donc $L_1 = -L_2$, et que $e^{L_1} + e^{L_2} = 2$ donc $e^{L_1} + e^{-L_1} = 2$ donc $\text{ch}(L_1) = 1$ donc $L_1 = 0$ et on conclut comme précédemment.

(d) Soit L une valeur d'adhérence de (u_n) (qui existe car la suite est bornée) : il existe une suite extraite (u_{n_p}) qui converge vers L. Notons L_1 la limite de la suite (e^{iau_n}) et L_2 la limite de (e^{ibu_n}). En tant que suite extraite de suites convergentes, on a donc :

$$e^{iau_{n_p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} L_1 \qquad \text{et} \qquad e^{ibu_{n_p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} L_2$$

Or, la fonction $x \mapsto e^{ix}$ est continue donc

$$e^{iau_{n_p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} e^{iaL} \qquad \text{et} \qquad e^{ibu_{n_p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} e^{ibL}$$

Par unicité de la limite, $L_1 = e^{iaL}$ et $L_2 = e^{ibL}$. Or, pour tout n, $|e^{iau_n}| = |e^{ib_n}| = 1$ donc, en passant à la limite, $|L_1| = |L_2| = 1$ donc il existe θ_1 et θ_2 tels que $L_1 = e^{i\theta_1}$ et $L_2 = e^{i\theta_2}$. Dès lors,

$$aL \equiv \theta_1[2\pi] \qquad \text{et} \qquad bL \equiv \theta_2[2\pi]$$

Supposons qu'il existe deux valeurs d'adhérence distinctes $L_1 \neq L_2$. D'après ce qui précède, $aL_1 \equiv aL_2 \equiv \theta_1[2\pi]$ et $bL_1 \equiv bL_2 \equiv \theta_2[2\pi]$. Il en découle qu'il existe $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $aL_1 = aL_2 + 2k_1\pi$ et $bL_1 = bL_2 + 2k_2\pi$. Dès lors, $a(L_1 - L_2) = 2k_1\pi$ et $b(L_1 - L_2) = 2k_2\pi$. Or, $a/b \notin \mathbb{Q}$ donc en particulier a et b sont non nuls si bien que

$$L_1 - L_2 = \frac{2k_1\pi}{a} = \frac{2k_2\pi}{b}$$

Or, $L_1 \neq L_2$ donc k_1 et k_2 sont non nuls si bien que

$$\frac{a}{b} = \frac{2k_1\pi}{2k_2\pi} = \frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Q}$$

ce qui est absurde : il n'y a qu'une valeur d'adhérence, ce qui permet de conclure. Si a/b est rationnel, ce n'est plus forcément vrai : par exemple si $a = \sqrt{2}$ et $b = 3\sqrt{2}$, il suffit de prendre (u_n) de terme général $(-1)^n \times 2\pi/\sqrt{2}$: la suite (u_n) ne converge pas mais les suites $\left(e^{iau_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(e^{ibu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes égales à 1.

Exercice 84 : ✪✪✪ On admet l'existence d'une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijective (on montrera l'existence d'une telle bijection au chapitre 17). Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\varphi(n))$ est $\mathbb{R}$ tout entier.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il existe une suite extraite $(\varphi(n_p))_{p\geq 1}$ qui converge vers x. Construisons une suite strictement croissante d'entiers $(n_p)_{p\geq 1}$ de la façon suivante :

- $n_1 = \min\{n \,|\, |\varphi(n) - x| \leq 1\}$: n_1 est bien défini car il existe un rationnel r tel que $|x - r| \leq 1$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Or, φ est surjective donc il existe n tel que $r = \varphi(n)$. L'ensemble $\{n \,|\, |\varphi(n) - x| \leq 1\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément.
- $n_2 = \min\{n > n_1 \,|\, |x - \varphi(n)| \leq 1/2\}$: n_1 est bien défini car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe une infinité de rationnels dans l'intervalle $]\,x - 1/2\,;x + 1/2\,[$ donc dans l'intervalle $[\,x - 1/2\,;x + 1/2\,]$. Il existe donc une infinité de n tel que $\varphi(n)$ soit dans cet intervalle, et puisqu'il y a une infinité de n, il y a au moins un $n > n_1$ qui convient, d'où l'existence de n_2.
- Soit $p \geq 1$. Supposons $n_0, \dots, n_p$ construits et posons $n_{p+1} = \min\{n > n_p \,|\, |x - \varphi(n)| \leq 1/(p+1)\}$ qui existe pour la même raison que ci-dessus.

On a donc une suite strictement croissante d'entiers (n_p) telle que, pour tout p, $|x - \varphi(n_p)| \leq 1/p$ donc $(\varphi(n_p))_p$ converge vers x : x est valeur d'adhérence de $(\varphi(n))$.

10 Suites complexes

Exercice 85 : ✪ Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\cos(k)}{2^k}$ converge vers une limite que l'on explicitera.

Correction : Comme dans le chapitre 7 :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\Re(e^{ik})}{2^k} \\ &= \Re\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{e^{ik}}{2^k}\right) \\ &= \Re\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{-e^i}{2}\right)^k\right) \\ &= \Re\left(\left(1-\frac{e^i}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \left|1-\frac{e^i}{2}\right| &= \sqrt{\left(1-\frac{\cos(1)}{2}\right)^2+\frac{\sin^2(1)}{4}} \\ &= \sqrt{1-\cos(1)+\frac{\cos^2(1)}{4}+\frac{\sin^2(1)}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}-\cos(1)} \end{aligned}$$

Or, $0 \leq 1 \leq \pi/3$ et le cosinus est décroissant sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ donc $1 \geq \cos(1) \geq 1/2$ si bien que $5/4-\cos(1) \leq 3/4$. Dès lors,

$$\left|1-\frac{e^i}{2}\right| \leq \sqrt{3/4} < 1$$

On a une suite géométrique de module strictement inférieur à 1 donc converge vers 0 donc sa partie réelle également.

Exercice 86 : ✪ On se place sur le plan complexe en bijection avec $\mathbb{C}$ par la bijection habituelle. Soient A et B les points d'affixes respectives i et $-i$. On construit une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

- M_0 est un point quelconque du plan.
- M_1 est le milieu du segment $[AM_0]$.
- M_2 est le milieu du segment $[BM_1]$.
- M_3 est le milieu du segment $[AM_2]$.
- M_4 est le milieu du segment $[BM_3]$.
- etc.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, on note z_n l'affixe du point M_n. Exprimer z_n en fonction de n.
2. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons z_n l'affixe de M_n. Par définition,

$$z_{2n+2} = \frac{z_{2n+1}-i}{2} \qquad \text{et} \qquad z_{2n+1} = \frac{z_{2n}+i}{2}$$

On en déduit que

$$z_{2n+2} = \frac{z_{2n}-i}{4}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique d'équation caractéristique $c = (c-i)/4$ de solution $c = -i/3$. Posons donc $c = -i/3$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} z_{2n+2} & = & \dfrac{z_{2n}}{4} - \dfrac{i}{4} \\ c & = & \dfrac{c}{4} - \dfrac{i}{4} \end{array}$$

Par différence : $(z_{2n+2}-c) = (z_{2n}-c)/4$: la suite $(z_{2n}-c)$ est géométrique de raison $1/4$ si bien que $z_{2n}-c = (z_0-c)/4^n$. Finalement,

$$z_{2n} = \left(z_0 + \frac{i}{3}\right) \times \frac{1}{4^n} - \frac{i}{3}$$

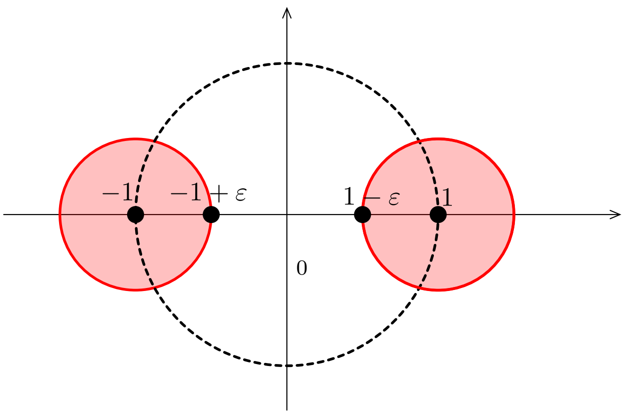
et on a aussi

$$\begin{array}{rcl} z_{2n+1} & = & \dfrac{z_{2n}+i}{2} \\ & = & \left(z_0 + \dfrac{i}{3}\right) \times \dfrac{1}{2\times 4^n} - \dfrac{i}{6} + \dfrac{i}{2} \\ & = & \left(z_0 + \dfrac{i}{3}\right) \times \dfrac{1}{2\times 4^n} + \dfrac{i}{3} \end{array}$$

2. Puisque $1/4 \in \left]-1\,;1\right[$, $z_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -i/3$ et $z_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} i/3$: les deux suites convergent vers des limites différentes donc la suite (z_n) diverge.

Exercice 87 : ✪✪✪ Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que ${z_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et telle que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|z_{n+1}-z_n| \leq 1$. Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction : L'idée générale est très simple : puisque $({z_n}^2)$ converge vers 1, alors (z_n) n'a que deux valeurs d'adhérence, -1 et 1. Si (z_n) ne converge pas, alors (z_n) « voyagera » entre -1 et 1 donc se retrouvera pour n assez grand dans l'un des deux disques ci-dessous, ce qui ne sera pas possible car, pour passer de l'un à l'autre, il faut faire un saut de distance supérieure à 1 ce qui est exclu par l'hypothèse selon laquelle $|z_{n+1}-z_n| \leq 1$ pour tout n.



Montrons cela rigoureusement.

Supposons que (z_n) ne converge ni vers 1 ni vers -1. Dès lors :

$$\exists \varepsilon_1 > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, |u_n - 1| > \varepsilon_1$$

et

$$\exists \varepsilon_2 > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, |u_n + 1| > \varepsilon_2$$

Notons enfin $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1/3)$ (on prend $1/3$ pour que les deux disques ci-dessus soient suffisamment loin l'un de l'autre). Alors $0 < \varepsilon < 1/3$. Puisque ${z_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0, |{z_n}^2 - 1| \leq {\varepsilon_1}^2$. Soit $n \geq n_0$. Alors $|z_n - 1| \times |z_n + 1| \leq {\varepsilon_1}^2$: on en déduit que $|z_n - 1| \leq \varepsilon_1$ ou que $|z_n + 1| \leq \varepsilon_1$ (si ce n'est pas le cas, puisqu'on peut multiplier les inégalités positives, alors $|{z_n}^2 - 1| > {\varepsilon_1}^2$ ce qui est exclu). Ainsi, $|z_n - 1| \leq \varepsilon_1$ ou $|z_n + 1| \leq \varepsilon_1$ pour $n \geq n_0$: tous les termes de la suite sont dans l'un des deux disques ci-dessus (de rayon ε) à partir du rang n_0, mais d'après ce qui précède, il y a une infinité de termes en dehors du premier disque (c'est la ligne ci-dessus avec le ε_1), et une infinité en dehors du deuxième (c'est la ligne ci-dessus avec le ε_2). Par conséquent, à partir du rang n_0, tous les termes sont dans ces deux disques, avec une infinité de termes dans chaque.

Soit $p \geq n_0$. Supposons sans perte de généralité que z_p appartient au premier disque i.e. $|z_p - 1| \leq \varepsilon$. Il existe $n > p$ tel que z_n soit dans le deuxième disque. Prenons le premier, c'est-à-dire qu'on prend

$$N = \min\{n > p \,|\, |z_n + 1| < \varepsilon\}$$

Un tel N existe car l'ensemble ci-dessus est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Dès lors, $|z_N + 1| < \varepsilon$ et puisque $N - 1$ n'est pas dans cet ensemble, $|z_{N-1} - 1| < \varepsilon$ donc z_{N-1} est dans le premier disque. Cependant,

$$|z_N - z_{N-1}| \geq 2 - 2\varepsilon > 2 - 2/3 > 1$$

ce qui est absurde. La première inégalité ci-dessus est évidente sur le dessin, prouvons-la rigoureusement. z_N est dans le deuxième disque donc a une partie réelle inférieure à $-1+\varepsilon$, sinon $|z_N + 1| \geq |\Re(z_N + 1)| > \varepsilon$, et idem $\Re(z_{N-1}) \geq 1 - \varepsilon$, donc $|z_N - z_{N-1}| \geq |\Re(z_N) - \Re(z_{N-1})| \geq 2 - 2\varepsilon$.

Exercice 88 : ✪✪

1. Étudier la suite (z_n) définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + \overline{z_n}}{2}$.
2. ✪✪✪ Même question avec la suite définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

Correction :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \Re(z_n)$ donc $z_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dès lors, pour tout $n \geq 1$, $z_{n+1} = z_n$: la suite est constante égale à $\Re(z_0)$ à partir du rang 1.
2. On veut écrire z_n sous forme exponentielle. Pour cela, il doit être nul. Si $z_0 = 0$ alors une récurrence immédiate assure que $z_n = 0$ pour tout n. Si z_0 est un réel négatif, alors $z_1 = 0$ et $z_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. On suppose donc que $z \notin \mathbb{R}_-$. Prouvons que $z_n \notin \mathbb{R}_-$ pour tout n.
   - Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $z_n \notin \mathbb{R}_-$ ».
   - H_0 est vraie par hypothèse.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Dès lors, $z_n \notin \mathbb{R}_-$. Si z_n n'est pas réel, alors z_{n+1} non plus (il a une partie imaginaire non nulle), et si z_n est un réel strictement positif, z_{n+1} aussi donc H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.

   En particulier, $z_n \neq 0$ pour tout n : on peut l'écrire sous forme exponentielle. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $\theta_n \in [\,0\,;2\pi\,[$ tel que $z_n = |z_n|e^{i\theta_n}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}|z_{n+1}|e^{i\theta_{n+1}} &= \frac{|z_n|e^{i\theta_n} + |z_n|}{2}\\ &= |z_n| \times \frac{e^{i\theta_n}+1}{2}\\ &= |z_n| \times e^{i\theta_n/2} \times \frac{e^{i\theta_n/2} + e^{-i\theta_n/2}}{2}\\ &= |z_n| \times \cos(\theta_n/2) \times e^{i\theta_n}\end{aligned}$$

   Supposons que $\theta_0 \in \,]\,0\,;\pi\,[$. Alors, avec $n = 0$ ci-dessus, $\theta_0/2 \in \,]\,0\,;\pi/2\,[$: le cosinus est positif donc $|z_1| = |z_0| \times \cos(\theta_0/2)$ et $\theta_1 \equiv \theta_0/2[2\pi]$ donc (ce sont des éléments de $[\,0\,;2\pi\,[$) $\theta_1 = \theta_0/2$. On prouve par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $\theta_n \in \,]\,0\,;\pi/2\,[$ donc $\cos(\theta_n) > 0$ si bien que $|z_{n+1}| = |z_n| \times \cos(\theta_n/2)$ et $\theta_{n+1} = \theta_n/2$. On en déduit que la suite (θ_n) est géométrique de raison 2 : $\theta_n = \theta_0/2^n$ pour tout n. On en déduit que

$$|z_n| = |z_0| \times \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$

   Supposons que $\theta_0 \in \,]\,\pi\,;2\pi\,[$. Alors $\theta_1 \in \,]\,\pi/2\,;\pi\,[$ donc $\cos(\theta_2) < 0$ si bien que l'égalité devient :

$$|z_1|e^{i\theta_1} = (|z_0| \times -\cos(\theta_0/2)) \times e^{i(\theta_0/2+\pi)}$$

   On en déduit que $|z_1| = -|z_0| \times \cos(\theta_0/2)$ et que $\theta_1 = \theta_0 + \pi$ (car congru modulo 2π et dans l'intervalle $[\,0\,;2\pi\,[$) qui appartient à $]\,3\pi/2\,;2\pi\,[$ donc à $]\,\pi\,;2\pi\,[$. Ensuite, on recommence : on prouve par récurrence que, pour tout n, $\theta_n \in \,]\,\pi\,;2\pi\,[$ donc que $\cos(\theta_n/2) < 0$ si bien que

$$|z_{n+1}|e^{i\theta_{n+1}} = (|z_n| \times -\cos(\theta_n/2)) \times e^{i(\theta_n/2+\pi)}$$

On en déduit que $|z_{n+1}| = -|z_n| \times \cos(\theta_n/2)$ et que $\theta_{n+1} = \theta_n/2 + \pi$. On a une suite arithmético-géométrique : on trouve comme d'habitude que, pour tout n,

$$\theta_n = \frac{1}{2^n}(\theta_0 - 2\pi) + 2\pi$$

On en déduit que

$$|z_n| = \prod_{k=0}^{n-1} \cos(\theta_k)$$

ce qui permet de conclure.