Feuille d'exercices - Chapitre 22

Sauf indication contraire, I est un intervalle d'intérieur non vide, et a et b sont deux réels avec $a < b$.

1 Linéarité, positivité, théorème de majoration :

Exercice 1 : ✪ Prouver que

$$\frac{\ln(2)}{\sqrt{3}} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\tan(x)}{x} \leq \sqrt{3}\ln(2)$$

Correction : La tangente est croissante sur $\left[\,\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{3}\,\right]$ donc, pour tout $x \in \left[\,\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{3}\,\right]$,

$$\tan(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \tan(x) \leq \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$$

En multipliant par $1/x$, positif (donc on ne change pas le sens de l'inégalité) :

$$\frac{1}{x\sqrt{3}} \leq \frac{\tan(x)}{x} \leq \frac{\sqrt{3}}{x}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3}} \leq \int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\tan(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\sqrt{3}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Il suffit de voir que

$$\begin{aligned}\int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \ln(\pi/3) - \ln(\pi/6) \\ &= \ln(2)\end{aligned}$$

pour conclure.

Exercice 2 : ✪ Donner le domaine de définition des fonctions

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{t}dt \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{t}{\ln(t)}dt$$

ainsi que leur signe sur leur domaine de définition.

Correction : Attention à bien vérifier que les bornes sont dans l'ordre croissant si on applique le théorème de positivité de l'intégrale ! De plus, rappelons qu'une intégrale existe si et seulement si la fonction intégrée est continue (ou continue par morceaux) sur le segment formé par les bornes.

Pour f : si $x \in \mathbb{R}$, f est continue en x si et seulement si la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est continue sur $\left[\,x\,;x^2\,\right]$. Or, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$: il en découle que f est définie en x si et seulement si $\left[\,x\,;x^2\,\right] \subset \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > 0$. En d'autres termes, f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit donc à présent $x > 0$ et donnons le signe de la fonction intégrée sur $\left[\,x\,;x^2\,\right]$. Tout dépend de si $x \geq 1$ ou $x \leq 1$. Si $x \geq 1$, alors $x^2 \geq 1$ et $t \mapsto \ln(t)/t$ est positive sur $\left[\,x\,;x^2\,\right]$. De plus, les bornes sont dans l'ordre croissant donc $f(x) \geq 0$. Supposons à présent $x \leq 1$. Alors $x^2 \leq 1$ donc $t \mapsto \ln(t)/t$ est négative sur $\left[\,x\,;x^2\,\right]$ mais les bornes sont dans l'ordre décroissant, donc $f(x) \geq 0$. Finalement, f est toujours positive.

Pour g : si $x \in \mathbb{R}$, g est continue en x si et seulement si la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ est continue sur $\left[\,x\,;x^2\,\right]$. Or, cette fonction est continue sur $\left]\,0\,;1\,\right[\cup \left]\,1\,;+\infty\,\right[$: il en découle que f est définie en x si et seulement si $\left[\,x\,;x^2\,\right] \subset \left]\,0\,;1\,\right[\cup \left]\,1\,;+\infty\,\right[$ si et seulement si $x > 0$ et $x \neq 1$ (car x et x^2 sont toujours « du même côté par rapport à 1 »). En d'autres termes, f est définie sur $\left]\,0\,;1\,\right[\cup \left]\,1\,;+\infty\,\right[$. Soit donc à présent $x \in \left]\,0\,;1\,\right[\cup \left]\,1\,;+\infty\,\right[$ et donnons le signe de la fonction intégrée sur $\left[\,x\,;x^2\,\right]$. De même, g est positive sur son domaine de définition.

Exercice 3 : ✪ Soit f continue sur $[\,a\,;b\,]$ avec $a<b$ telle que

$$\int_a^b f^2(t)dt = \int_a^b f^3(t)dt = \int_a^b f^4(t)dt$$

Montrer que f est constante sur $[\,a\,;b\,]$. On pourra calculer l'intégrale de $(f^2-f)^2$.

Correction : Suivons l'indication de l'énoncé et intéressons-nous à

$$I = \int_a^b (f^2-f)^2$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f^4 - 2\int_a^b f^3 + \int_a^b f^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

par hypothèse sur f. Or, I est l'intégrale d'une fonction positive (il y a un carré), continue (f est continue) et $a<b$ donc la fonction intégrée est nulle, c'est-à-dire que $(f^2-f)^2=0$ donc $f^2=f$: il en découle que, pour tout $x\in[\,a\,;b\,]$, $f(x)=0$ ou $f(x)=1$. Attention : pour certains x, on pourrait avoir $f(x)=0$ et pour d'autres, $f(x)=1$! Cependant, si f n'est pas constante, c'est-à-dire si f prend la valeur 0 et la valeur 1 alors, d'après le TVI (f est continue), f prend la valeur $1/2$ ce qui est impossible. Il en découle que f est constante égale à 0 ou constante égale à 1 (ce qui est même plus fort que le résultat demandé).

Exercice 4 : ✪ Soit f continue sur $[\,0\,;1\,]$. Montrer qu'il existe $c\in[\,0\,;1\,]$ tel que

$$f(c) = 3\int_0^1 f(t)t^2 dt$$

Correction : f étant continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$, elle est continue et atteint ses bornes : il existe x_0 et x_1 tels que $f(x_0)=\min f$ et $f(x_1)=\max f$. Notons $M=f(x_1)$ et $f(x_0)=m$. Pour tout $t\in[\,0\,;1\,]$, $3mt^2\leq 3f(t)t^2\leq 3Mt^2$ donc, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 3mt^2\,\mathrm{d}t = m = f(x_0) \leq \int_0^1 3f(t)t^2\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 3Mt^2\,\mathrm{d}t = M = f(x_1)$$

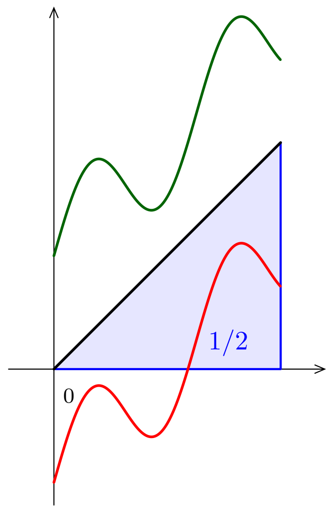
D'après le TVI (f est continue), il existe $c\in[\,x_0\,;x_1\,]$ tel que

$$f(c) = \int_0^1 3f(t)t^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice 5 : ✪ Soit $f:[\,0\,;1\,]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Correction : Géométriquement, le résultat est très simple :

Si f n'a pas de point fixe alors (par continuité) le graphe de f est toujours au-dessus ou au-dessous de la première bissectrice, donc l'aire sous la courbe est soit strictement supérieure à $1/2$ soit strictement inférieure.



Prouvons cela rigoureusement. Supposons que f n'admette pas de point fixe. Alors, pour tout x, $g(x) = f(x) - x \neq 0$. f étant continue, g l'est aussi donc est de signe constant (à savoir faire absolument !). Si g est strictement positive, alors (g est continue), son intégrale est strictement positive sur $[\,0\,;1\,]$ (les bornes sont dans l'ordre croissant), et son intégrale est strictement négative si g est strictement négative. Dans les deux cas, c'est absurde car :

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice 6 - Formule de la moyenne : ✪

1. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue, soit $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}_+$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c) \times \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Soit f continue au voisinage de 0.

(a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$.

(b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

3. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et croissante, soit $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Correction :

1. Le raisonnement est analogue à celui de l'exercice 4 : f est continue sur $[\,a\,;b\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes : il existe x_0 et x_1 tels que $f(x_0) = \min f$ et $f(x_1) = \max f$. Notons $m = f(x_0)$ et $M = f(x_1)$. Pour tout $t \in [\,a\,;b\,]$, $m \leq f(t) \leq M$ et $g(t) \geq 0$ donc $mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t)$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b mg(t)\,\mathrm{d}t = f(x_0) \times \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b Mg(t)\,\mathrm{d}t = f(x_1)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Deux possibilités : soit g est nulle sur $[\,a\,;b\,]$, et alors les deux intégrales

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

sont nulles, et alors tout $c \in [\,a\,;b\,]$ convient, soit g est non nulle sur $[\,a\,;b\,]$, ce qu'on suppose dans la suite. g étant continue et positive (et non nulle), son intégrale est strictement positive : on peut donc diviser les inégalité ci-dessus sans changer le sens des inégalités, ce qui donne :

$$f(x_0) \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} \leq f(x_1)$$

D'après le TVI (f est continue), il existe c tel que

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} = f(c)$$

ce qui est le résultat voulu.

2. (a) Soit $x > 0$ (on cherche la limite en 0^+). Appliquons la questions précédente avec $g : t \mapsto t$ qui est bien continue et positive sur $[\,0\,;x\,]$ (car $x > 0$) : il existe $c \in [\,0\,;x\,]$ tel que

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t &= f(c)\int_0^x t\,\mathrm{d}t\\ &= f(c)\times\frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

si bien que

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(c)}{2}$$

Attention, c dépend de x (on aurait pu le noter c_x pour expliciter la dépendance en x) ! On a : $0 \leq c \leq x$ donc $c \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ d'après le théorème d'encadrement, et f est continue donc

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{f(0)}{2}$$

(b) Soit $x>0$. De même, appliquons la première question avec $g : t\mapsto 1/t$ qui est bien continue positive sur $[\,x\,;2x\,]$: il existe $c\in[\,x\,;2x\,]$ tel que

$$\begin{aligned}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= f(c)\times\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= f(c)\times(\ln(2x)-\ln(x))\\ &= f(c)\times\ln(2)\end{aligned}$$

De même (théorème d'encadrement) $c \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et f est continue en 0 donc

$$\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} f(0)\ln(2)$$

3. f est de classe $\mathscr{C}^1$: on pense à une IPP. Notons

$$G : x\mapsto\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors G est une primitive de g et est $\mathscr{C}^1$ car g est continue : en effectuant une IPP (en dérivant f et en intégrant g) :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)G(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, $G(a)=0$ donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= f(b)G(b)-\int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t\\ &= f(b)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Appliquons la première question avec G à la place de f et f' à la place de g (qui est bien continue positive puisque f est croissante). Dès lors, il existe c tel que

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t &= G(c)\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t\times(f(b)-f(a))\end{aligned}$$

En réinjectant ci-dessus :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= f(b)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t\times(f(b)-f(a))\\ &= f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\times\left(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure à l'aide de la relation de Chasles.

Exercice 7 : ✪ Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b]$. Domaines de définition et de continuité de la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)dt$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme dans l'exercice 2, φ est définie en x si et seulement si $t \mapsto f(t)\sin(xt)$ est continue par morceaux sur $[a\,;b]$, ce qui est toujours le cas puisque f est continue sur $[a\,;b]$ et la fonction sin est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$. En d'autres termes, φ est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale puis par inégalité triangulaire :

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left|\int_a^b f(t)(\sin(xt) - \sin(x_0t))\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)| \times |\sin(xt) - \sin(x_0t)|\,\mathrm{d}t$$

La fonction $|\sin'| = |\cos|$ étant bornée par 1, d'après l'IAF, pour tout t, $|\sin(xt) - \sin(x_0t)| \leq |xt - x_0t|$. En multipliant par $|f(t)|$ (positif) et par croissance de l'intégrale :

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \int_a^b |f(t)| \times |(x - x_0)t|\,\mathrm{d}t = |x - x_0| \int_a^b |f(t)t|\,\mathrm{d}t$$

D'après le théorème d'encadrement, $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ donc $\varphi(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \varphi(x_0)$: φ est continue en x_0 donc sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : ✪ Montrer que l'ensemble

$$E = \left\{ \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \;\middle|\; f \in \mathscr{C}([0\,;1\,], \mathbb{R}), f(0) = f(1) = 1 \right\}$$

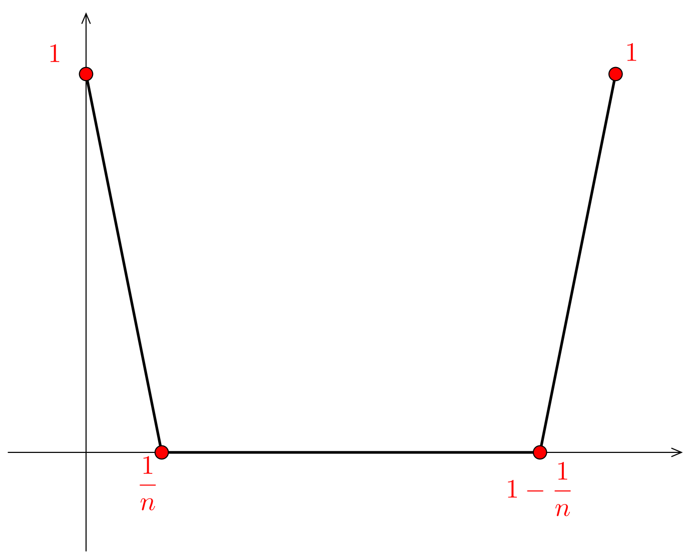
admet une borne inférieure, que celle-ci est nulle et qu'elle n'est pas atteinte.

Correction : E est non vide car contient

$$1 = \int_0^1 1^2\,\mathrm{d}t$$

(la fonction constante égale à 1 est en effet continue et vaut 1 en 0 et en 1) et minoré par 0 donc admet une borne inférieure $\alpha \geq 0$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, 0 étant un minorant de E, il suffit d'exhiber une suite d'éléments de E qui converge vers 0. Pour tout $n \geq 1$, on définit sur $[0\,;1]$ la fonction f_n par :

- f_n continue sur $[0\,;1]$.
- f_n nulle sur $\left[\dfrac{1}{n}\,;1 - \dfrac{1}{n}\right]$.
- $f_n(0) = f_n(1) = 1$.
- f_n affine sur $\left[0\,;\dfrac{1}{n}\right]$ et sur $\left[1 - \dfrac{1}{n}\,;1\right]$.



Pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^1 f_n(t)^2\,\mathrm{d}t \in E$$

On pourrait expliciter f_n et calculer l'intégrale de ${f_n}^2$, mais on peut faire plus simple. Tout d'abord :

$$\int_0^1 f_n(t)^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^{1/n} f_n(t)^2 \,\mathrm{d}t + \int_{1-1/n}^1 f_n(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

Or, $0 \leq f_n \leq 1$ donc $0 \leq {f_n}^2 \leq 1$. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 f_n(t)^2 \,\mathrm{d}t \leq \int_0^{1/n} 1 \,\mathrm{d}t + \int_{1-1/n}^1 1 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{n}$$

D'après le théorème d'encadrement :

$$\int_0^1 f_n(t)^2 \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Comme dit ci-dessus, par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on en déduit que $\alpha = 0$. Si α est atteinte, alors il existe f continue sur $[\,0\,;1\,]$ telle que $f(0) = f(1) = 1$ et telle que

$$\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

Or, f^2 est positive, continue, non identiquement nulle (car vaut 1 en 0 et en 1) donc son intégrale est strictement positive, ce qui est absurde.

Exercice 9 : ✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t) \,\mathrm{d}t = 0$. Soient $\alpha = \min f$ et $\beta = \max f$. Justifier l'existence de α et β et prouver que

$$\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t \leq -\alpha\beta$$

Correction : L'existence de α et β découle du théorème des bornes atteintes puisque f est continue sur un segment. La fonction $(f-\alpha)(\beta - f)$ est positive donc, par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 (f(t)-\alpha)(\beta - f(t)) \,\mathrm{d}t \geq 0$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 (-\alpha\beta) \,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)(\alpha+\beta) \,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t \geq 0$$

Le fait que l'intégrale de f soit nulle permet de conclure.

Exercice 10 : ✪ Comparer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2 x e^{-nx} dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} n^2 x e^{-nx} \right) dx$$

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec une IPP :

$$\begin{aligned}
n^2 \int_0^1 x e^{-nx} \,\mathrm{d}x \quad & = \quad n^2 \left(\left[\frac{xe^{-nx}}{-n} \right]_0^1 + \frac{1}{n} \int_0^1 e^{-nx} \,\mathrm{d}x \right) \\
& = \quad n^2 \left(\frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} \left[\frac{e^{-nx}}{-n} \right]_0^1 \right) \\
& = \quad n^2 \left(\frac{-e^{-n}}{n} - \frac{e^{-n}}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) \\
& = \quad -ne^{-n} - e^{-n} + 1 \\
& \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad 1
\end{aligned}$$

(par croissances comparées) donc la première quantité est égale à 1. Cependant, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$,

$$n^2 x e^{-nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(par croissances comparées pour $x > 0$, et car cette quantité est nulle si $x = 0$). La deuxième quantité est donc l'intégrale de la fonction nulle donc est égale à 0. Morale de l'histoire : on ne peut pas passer à la limite dans une intégrale !

Exercice 11 : ✪

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}$$

2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.
3. Déterminer de même $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin(t) e^{-nt} dt$.

Correction : Comme dit en cours et dans l'exercice précédent, dire que pour tout $t \in [\,0\,;1\,[$

$$\frac{t^n}{1+t} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ne suffit pas !

1. Pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$,

$$0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$$

   On conclut par croissance de l'intégrale.
2. Cette limite est nulle d'après la question précédente et le théorème d'encadrement.
3. Le sinus étant positif sur $[\,0\,;\pi/2\,]$:

$$\forall t \in \left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right], 0 \leq \sin(t) e^{-nt} \leq e^{-nt}$$

   Par croissance de l'intégrale, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \sin(t) e^{-nt} \,\mathrm{d}t \leq \int_0^{\pi/2} e^{-nt} \,\mathrm{d}t = \frac{1 - e^{-n\pi/2}}{n}$$

   On conclut de même que la limite demandée est nulle.

Exercice 12 : ✪ Si $n \geq 0$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
2. En calculant $I_n + I_{n+1}$, prouver que

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \ln(2)$$

Correction :

1. Déjà fait dans l'exercice précédent.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

   Soit donc $N \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k+1} &= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k(I_k+I_{k+1})\\
&= \sum_{k=0}^{N}((-1)^kI_k-(-1)^{k+1}I_{k+1})\\
&= (-1)^0I_0+(-1)^{N+1}I_{N+1}
\end{aligned}$$

par télescopage. Or, $I_0=\ln(2)$ et (I_N) tend vers 0 et la suite de terme général $(-1)^N$ est bornée donc $(-1)^{N+1}I_{N+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$ si bien que

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}I_0=\ln(2)$$

Exercice 13 : ✪✪ Soit $f:[\,0\,;1\,]\to\mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n=\displaystyle\int_0^1 f\left(t^n\right)\,\mathrm{d}t$.

Correction : Ici, la méthode de simple majoration ne suffit plus. Il faut epsiloner (et ce sera pareil dans les deux exercices qui suivent). Prouvons que $I_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(0)$. Soit $\varepsilon>0$. La fonction f étant continue, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x\in[\,0\,;\eta\,]$, $|f(x)-f(0)|\leq\varepsilon$. Attention, t^n ne finit pas par être inférieur à η pour tout t puisqu'il y a 1 dans l'intervalle : il faut couper avant 1. Plus précisément : $(1-\varepsilon)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc il existe n_0 tel que, pour tout $n\geq n_0$, $(1-\varepsilon)^n\leq\eta$. Soit $n\geq n_0$. Pour tout $t\in[\,0\,;1-\varepsilon\,]$, $0\leq t^n\leq(1-\varepsilon)^n\leq\eta$ si bien que $|f(t^n)-f(0)|\leq\varepsilon$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
|I_n-f(0)| &= \left|\int_0^1 f(t^n)-f(0)\,\mathrm{d}t\right|\\
&= \left|\int_0^{1-\varepsilon} f(t^n)-f(0)\,\mathrm{d}t+\int_{1-\varepsilon}^1 f(t^n)-f(0)\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leq \left|\int_0^{1-\varepsilon} f(t^n)-f(0)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\int_{1-\varepsilon}^1 f(t^n)-f(0)\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leq \int_0^{1-\varepsilon} |f(t^n)-f(0)|\,\mathrm{d}t+\int_{1-\varepsilon}^1 |f(t^n)-f(0)|\,\mathrm{d}t\\
&\leq (1-\varepsilon)\times\varepsilon+\int_{1-\varepsilon}^1 |f(t^n)-f(0)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or, f est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes : notons $M=\max|f|$, si bien que pour tout t, $|f(t^n)-f(0)|\leq|f(t^n)|+|f(0)|\leq 2M$. Finalement :

$$|I_n-f(0)|\leq(1-\varepsilon)\varepsilon+2M\varepsilon\leq(2M+1)\varepsilon$$

ce qui permet de conclure (rappelons qu'on peut prendre certaines « libertés » avec l'écriture d'une limite, cf. chapitres 12 et 13).

Exercice 14 : ✪✪ Donner la limite de la suite de terme général

$$I_n=\int_1^e(\ln(t))^n\,dt$$

Correction : Raisonnement tout à fait analogue : si on fixe $\varepsilon>0$, il existe n_0 tel que, pour tout $n\geq n_0$, $(\ln(e-\varepsilon))^n\leq\varepsilon$. Coupons l'intégrale en $1-\varepsilon$, le morceau restant est majoré par ε (intégrale d'une fonction inférieure à 1 sur un intervalle de longueur ε).

Exercice 15 : ✪ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. On définit sur $\mathbb{R}^+$ la fonction g par

$$g(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$$

1. On suppose que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}L$. Montrer que $g(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}L$.
2. ✪✪ La réciproque est-elle vraie ?

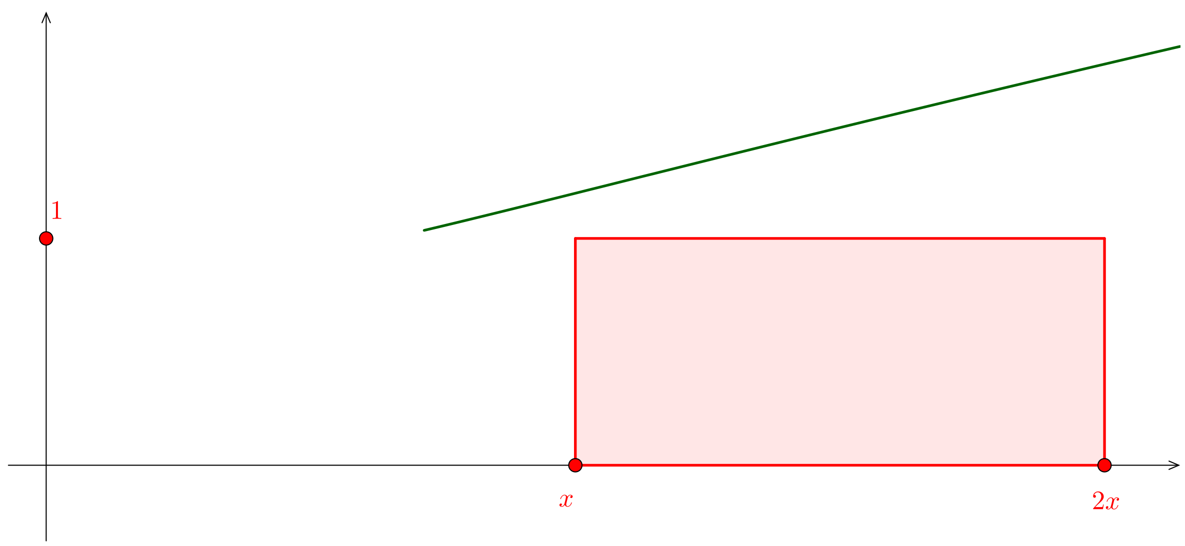
3. Montrer que si f est périodique de période 1, alors g est constante.

Correction :

1. Là aussi, epsilonons. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition d'une limite :
$$\exists A > 0, \forall t \geq A \qquad L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon$$
Ainsi, par croissance de l'intégrale, pour tout $x \geq A$, intégrons ces inégalités sur l'intervalle $[\,x\,;x+1\,]$:
$$\int_x^{x+1} L - \varepsilon \,\mathrm{d}t \, = L - \varepsilon \leq \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \, = g(x) \leq \int_x^{x+1} L + \varepsilon \,\mathrm{d}t \, = L + \varepsilon$$
ce qui permet de conclure.
2. La réciproque est fausse. Illustrons ce résultat lorsque $L = 0$. Il suffit de prendre une fonction périodique de période 1 dont l'intégrale sur une période vaut 0, par exemple $f : x \mapsto \cos(2\pi x)$. On prouve comme dans le chapitre 13 (faites-le !) que f n'a pas de limite en $+\infty$, mais la fonction g associée est nulle donc tend vers 0.
3. Fait en classe : si on a une fonction T-périodique, alors l'intégrale de f sur une période est constante. À savoir faire ! Refaisons-le ici : f étant continue, la fonction
$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
est une primitive de f. Or, pour tout x, $g(x) = F(x+1) - F(x)$ donc g est dérivable et $g'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$ puisque f est périodique de période 1 donc g est constante.

Exercice 16 : ✪✪ Montrer les résultats suivants, sans chercher à calculer explicitement les intégrales correspondantes :
$$\int_x^{2x} \frac{t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^x \sin^2(t)\mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$
Correction : L'idée est d'à chaque fois minorer l'intégrale par l'aire d'un rectangle (ou d'une suite de rectangles) dont l'aire tend vers $+\infty$.

Pour la première intégrale : on sait que, par croissances comparées, $t/\ln(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ donc il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t \geq A$, $t/\ln(t) \geq 1$. Par croissance de l'intégrale, pour tout $t \geq A$,
$$\int_x^{2x} \frac{t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \geq \int_x^{2x} \,\mathrm{d}t \, = x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$
et on conclut à l'aide du théorème de minoration.



Pour la deuxième intégrale, l'idée est la même, mais la fonction s'annule infiniment souvent donc il faut en fait ajouter l'aire de nombreux rectangles. L'idée est de se placer là où le sinus vaut 1. Plus précisément : pour tout $n \geq 0$,
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\mathrm{Arctan}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \geq \mathrm{Arctan}(\pi/2) > \mathrm{Arctan}(\pi/4) = 1$$

Cependant, on cherche un rectangle donc il faut se placer sur tout un intervalle (de longueur non nulle). La fonction $\sin^2$ étant continue, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{2} - \eta\,;\frac{\pi}{2} + \eta\right]$, $\sin^2(x) \geq 1/2$ (on pourrait même être plus précis car on sait quand le sinus vaut $1/\sqrt{2}$ mais il est inutile d'être aussi précis). Par 2π-périodicité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi - \eta\,; \frac{\pi}{2} + 2n\pi + \eta\right]$, $\sin^2(x) \geq 1/2$. Finalement, sur cet intervalle :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \geq (1-\varepsilon)\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \geq (1-\varepsilon)\text{Arctan}(\pi/2) > 1/2 \times \text{Arctan}(\pi/4) = 1/2$$

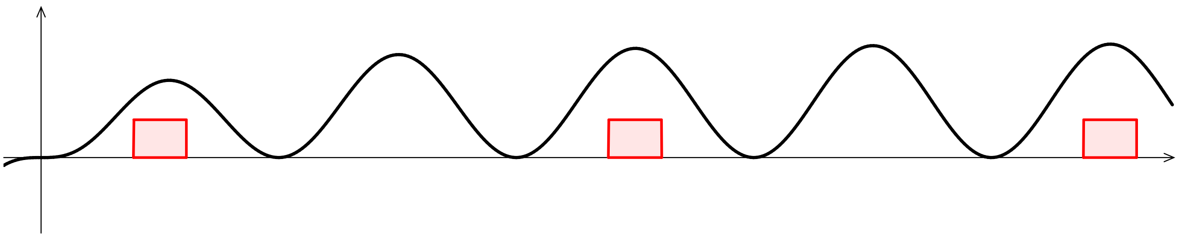
La fonction intégrée étant positive, pour tout x,

$$\int_0^x \sin^2(t)\text{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=0}^n \int_{\pi/2+2k\pi-\eta}^{\pi/2+2k\pi+\eta} (1-\varepsilon)\,\mathrm{d}t = (n+1)\times 2\eta \times 1/2$$

avec n le plus grand entier tel que $\pi/2 + 2n\pi + \eta \leq x$ donc

$$n = \left\lfloor \frac{x - \eta - \pi/2}{2n} \right\rfloor \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

et on conclut comme précédemment avec le théorème de minoration.



Exercice 17 - Parce qu'il faudra bien savoir le faire un jour : ✪✪ On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ de terme général

$$u_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k\ln k}\right) - \ln(\ln(n))$$

1. Montrer que pour tout $p \geq 2$:

$$\frac{1}{(p+1)\ln(p+1)} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t\ln t} \leq \frac{1}{p\ln p}$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

Correction :

1. Même dessin et même méthode qu'en cours, en utilisant le fait que $t \mapsto 1/t\ln(t)$ est décroissante.
2. Sommons les inégalités précédents pour p allant de 2 à $n-1$, et avec la relation de Chasles :

$$\sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{(p+1)\ln(p+1)} \leq \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leq \sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p\ln(p)}$$

Dès lors :

$$\sum_{p=3}^{n} \frac{1}{p\ln(p)} \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq \sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p\ln(p)}$$

si bien que

$$\sum_{p=3}^{n} \frac{1}{p\ln(p)} - \ln(\ln(n)) \leq -\ln(\ln(2)) \leq \sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p\ln(p)} - \ln(\ln(n))$$

En d'autres termes :

$$u_n \leq \frac{1}{2\ln(2)} - \ln(\ln(2)) \qquad \text{et} \qquad -\ln(\ln(2)) \leq \frac{1}{n\ln(n)} - \ln(\ln(2)) \leq u_n$$

La suite (u_n) est donc bornée. Pour conclure, il suffit de prouver qu'elle est monotone. Or,

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln(n)) \\
&= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

La suite (u_n) est décroissante minorée donc converge.

Exercice 18 - Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : ✪✪

1. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

si et seulement si f est de signe constant.

2. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{C}$ continue. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

si et seulement si f a un argument constant (là où elle ne s'annule pas).

Correction :

1. Supposons qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire. On cherche à prouver que $|f| = \pm f$. Par hypothèse,

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \pm \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Supposons (raisonnement analogue dans l'autre cas) que

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors

$$\int_a^b |f(t)| - f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

La fonction $|f| - f$ est positive, continue et d'intégrale nulle donc est la fonction nulle : $|f| = f$ donc f est positive, en particulier f est de signe constant. La réciproque est évidente puisque si f est de signe constant alors $|f| = f$ ou $|f| = -f$: dans les deux cas, on a le résultat voulu.

2. Supposons qu'il y ait égalité. Si les deux intégrales sont nulles, alors il n'y a rien à prouver. Supposons que ces deux intégrales (égales) soient non nulles. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ si bien que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times e^{-i\theta}$$

Or, de même qu'en cours :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(t)e^{-i\theta}|\,\mathrm{d}t &= \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \Re\left(\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\right) \\
&= \Re\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,\times e^{-i\theta}\right) \\
&= \int_a^b \Re\left(f(t)e^{-i\theta}\right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

De même que dans la question précédente, on prouve que $|f(t)e^{-i\theta}| = \Re(f(t)e^{-i\theta})$ ce qui n'est possible que si $f(t)e^{-i\theta}$ est un réel positif (le module d'un complexe est égal à sa partie réelle si et seulement si ce complexe est un réel positif) donc son propre module : $f(t)e^{-i\theta} = |f(t)|$ donc $f(t) = |f(t)|e^{i\theta}$: θ est un argument de f (là où f ne s'annule pas). Là aussi, la réciproque est immédiate.

Exercice 19 - Le lemme de Gronwall : ✪✪ Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, soit $a \in I$. Soient f, g continues sur I avec g à valeurs positives. Soit $A \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in I$,

$$f(x) \leq A + \int_a^x f(t)g(t)dt$$

1. On définit les fonctions y et z sur I par

$$y(x) = A + \int_a^x f(t)g(t)dt \qquad \text{et} \qquad z(x) = y(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)dt\right).$$

   Donner les variations de z sur I.
2. Démontrer le lemme de Gronwall :

$$\forall x \in I, x \geq a, \qquad f(x) \leq A\exp\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$

3. Soit φ une fonction $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ avec $\varphi(0) = 0$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \geq 0$, $\varphi'(x) \leq \alpha\varphi(x)$. Montrer que φ est la fonction nulle.

Correction :

1. y est dérivable (même $\mathscr{C}^1$) sur I et z l'est également car produit de fonctions dérivables. Soit $x \in I$. On a $y'(x) = f(x)g(x)$ et

$$\begin{aligned}
z'(x) &= (y'(x) - y(x)g(x))\exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= g(x)\left(f(x) - y(x)\right)\exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

   Or, g est positive et $f - y$ est négative par hypothèse, et une exponentielle est toujours strictement positive. Par conséquent, z' est négative : z est décroissante sur I.
2. D'après la question précédente, z est décroissante sur I et $z(a) = y(a) = A$ donc pour tout $x \in I, x \geq a, z(x) \leq A$. Dès lors,

$$y(x) \leq A \times \exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

   Il suffit de se souvenir que $f \leq y$ pour conclure.

3. Par croissance de l'intégrale, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (on rappelle que $\varphi(0) = 0$) :

$$\int_0^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(x) - \varphi(0) = \varphi(x) \leq \int_0^x a\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Appliquons le lemme de Gronwall avec $A = 0, f = \varphi$ et g égale à la fonction constante égale à a qui est bien positive. Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (on rappelle que φ est positive) :

$$0 \leq \varphi(x) \leq 0 \times \exp\left(\int_0^x a\,\mathrm{d}t\right) = 0e^{ax} = 0$$

c'est-à-dire que φ est la fonction nulle.

Exercice 20 : ✪✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue (avec $a < b$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_a^b |f(t)|^n dt$ et on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

1. Montrer que f ne peut prendre que les valeurs $-1, 0$ ou 1.
2. En déduire que f est constante égale à $-1, 0$ ou 1.

Correction :

1. Il faut donc montrer que $|f|$ ne peut pas prendre de valeur strictement supérieure à 1, ni dans l'intervalle $]\,0\,;1\,[$. Supposons dans un premier temps qu'il existe x_0 tel que $|f(x_0)| > 1$. f étant continue, sur un voisinage de x_0, $|f(x_0)| > 1$. Plus précisément :

$$\exists \eta > 0, \forall t \in [\,x_0 - \eta\,; x_0 + \eta\,]\,, |f(t)| \geq m$$

où $m = \dfrac{|f(x_0)| + 1}{2} > 1$. Par relation de Chasles puis croissance et positivité de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (l'idée est de minorer l'intégrale de f par le rectangle de hauteur m de largeur l'intervalle $[\,x_0 - \eta\,; x_0 + \eta\,]$, le dessin étant analogue à ceux de l'exercice 16 et laissé à votre charge) :

$$u_n = \int_0^{x_0-\eta} |f(t)|^n\,\mathrm{d}t + \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |f(t)|^n\,\mathrm{d}t + \int_{x_0+\eta}^1 |f(t)|^n\,\mathrm{d}t \geq 0 + \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} m^n\,\mathrm{d}t + 0 = m^n \times 2\eta$$

Or, $m > 1$ donc $m^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si bien que, d'après le théorème de minoration, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde puisque (u_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs et en particulier est bornée. En d'autres termes, $|f(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$.

À présent, raisonnons encore par l'absurde et supposons qu'il existe x_0 tel que $|f(x_0)| \in \,]\,0\,;1\,[$. Là encore, il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [\,x_0 - \eta\,; x_0 + \eta\,]$, $0 < |f(x)| < 1$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une part ($|f|$ étant majorée par 1), $|f|^{n+1} \leq |f|^n$ donc :

$$\int_0^{x_0-\eta} |f(t)|^{n+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{x_0-\eta} |f(t)|^n\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{x_0+\eta}^1 |f(t)|^{n+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{x_0-\eta} |f(t)|^n\,\mathrm{d}t$$

De plus (cas d'égalité de la croissance de l'intégrale), $|f(t)|^{n+1} < |f(t)|^n$, $x_0 - \eta < x_0 + \eta$ et $|f|$ est continue donc :

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |f(t)|^{n+1}\,\mathrm{d}t < \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |f(t)|^n\,\mathrm{d}t$$

En conclusion, $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est strictement décroissante donc, en particulier, prend une infinité de valeurs, ce qui est encore absurde. On a bien le résultat voulu.

2. Si f prend au moins deux valeurs, disons 0 et 1 alors, f étant continue, d'après le TVI, il existe x tel que $f(x) = 1/2$ ce qui est absurde.

Exercice 21 : ✪✪✪ Les deux questions sont indépendantes, mais les méthodes sont analogues.

1. Soit f continue sur $[\,0\,;\pi\,]$ vérifiant $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx = \int_0^\pi f(x)\cos(x)dx = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois.
2. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois.

Correction :

1. Tout d'abord, f s'annule au moins une fois. En effet, si f ne s'annule pas, alors f est de signe constant puisqu'elle est continue (à savoir faire en claquant des doigts !). et donc $f \times \sin$ est de signe constant, non identiquement nulle, et continue, ce qui contredit le fait que son intégrale sur $[\,0\,;\pi\,]$ soit nulle. Par conséquent, f s'annule au moins une fois. Plus fort : f s'annule et change de signe. Raisonnons par l'absurde et supposons que f s'annule exactement une fois, en un réel noté $\alpha \in [\,0\,;\pi\,]$. f s'annule et change de signe en α donc est positive puis négative, ou le contraire évidemment. Or, la fonction $x \mapsto \sin(x-\alpha)$ s'annule également en changeant de signe en α, si bien que $x \mapsto f(x)\sin(x-\alpha)$ est de signe constant. Or :

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x-\alpha)\,\mathrm{d}x = \cos(\alpha)\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x - \sin(\alpha)\int_0^\pi f(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

ce qui est absurde puisque l'intégrale d'une fonction continue, de signe constant, qui n'est pas la fonction nulle, n'est pas nulle. Finalement, f s'annule au moins deux fois.

2. Si f est la fonction nulle, le résultat est évident. Supposons que f ne soit pas la fonction nulle. Montrons un résultat plus fort : montrons que f s'annule au moins $n+1$ fois en changeant de signe. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble des points en lesquels f s'annule en changeant de signe soit de cardinal $k \leq n$: notons $x_1 < \cdots < x_k$ les points en lesquels f s'annule en changeant de signe. Puisque $g : x \mapsto (x-x_1)\cdots(x-x_k)$ s'annule aussi en changeant de signe en tous les x_i, $f \times g$ est de signe constant. Or, g est polynomiale de degré $k \geq n$ ce qui implique que l'intégrale de $f \times g$ est nulle. En effet, d'après l'hypothèse de l'énoncé, par combinaison linéaire, l'intégrale de f multipliée par n'importe quelle fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n est nulle. Par conséquent (fonction continue de signe constant), $f \times g$ est nulle sur $[\,a\,;b\,]$. Or, g est nulle uniquement en les x_i donc f est nulle sauf en les x_i donc est nulle partout par continuité, ce qui est absurde.

Exercice 22 : ✪✪✪

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$ et $f(1)=1$. On pose $g = f'-f$.
   (a) En remarquant que f est solution de l'équation différentielle $y'-y=g$, prouver que pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$:
   $$f(x) = \int_0^x g(t)e^{x-t}\,\mathrm{d}t$$
   (b) En déduire que
   $$\int_0^1 |f'(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{e}$$
2. Montrer que la constante $1/e$ est optimale à l'aide de la suite de fonctions (f_n) définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [\,0\,;1\,], f_n(x) = \frac{e^x - e^{-nx}}{e - e^{-n}}$$

Correction :

1. (a) Résolvons l'équation différentielle $y'-y=g$. Tout d'abord, on résout l'équation homogène associée $(H) : y'-y=0$:
$$S_H = \{x \mapsto \lambda e^x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
Cherchons à présent une solution particulière grâce à la méthode de variation de la constante. Soit $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et soit $y_0 : x \mapsto \lambda(x)e^x$. Alors y_0 est dérivable. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$${y_0}'(x) - y_0(x) = \lambda'(x)e^x$$
donc y_0 est solution particulière si et seulement si $\lambda'(x) = g(x)e^{-x}$ si et seulement si λ est une primitive de $t \mapsto g(t)e^{-t}$. Finalement :
$$y_0 : x \mapsto \int_0^x g(t)e^{x-t}\,\mathrm{d}t$$
est une solution particulière de l'équation différentielle $y'-y=g$. En conclusion, l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est
$$S_E = \left\{x \mapsto \lambda e^x + \int_0^x e^{x-t}g(t)\,\mathrm{d}t \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$
f étant solution de cette équation différentielle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^x + \int_0^x e^{x-t} g(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, $f(0) = 0$ et $f(0) = \lambda$ donc $\lambda = 0$ ce qui permet de conclure.

(b) $f(1) = 1$ donc

$$\int_0^1 g(t) e^{1-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

si bien que

$$\int_0^1 g(t) e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{e}$$

Tout d'abord :

$$\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |g(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$, $e^{-t} \leq 1$ donc $e^{-t}|g(t)| \leq |g(t)|$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \int_0^1 |g(t)e^{-t}|\,\mathrm{d}t$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \left|\int_0^1 g(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{e}$$

2. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$. De plus, f_n est dérivable et :

$$\begin{aligned} {f_n}'(x) - f_n(x) &= \frac{e^x + ne^{-nx}}{e - e^{-n}} - \frac{e^x - e^{-nx}}{e - e^{-n}} \\ &= \frac{(n+1)e^{-nx}}{e - e^{-n}} \end{aligned}$$

Cette quantité étant positive, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|{f_n}'(t) - f_n(t)\right|\,\mathrm{d}t &= \frac{(n+1)}{e - e^{-n}} \times \int_0^1 e^{-nt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(n+1)}{e - e^{-n}} \times \left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^1 \\ &= \frac{(n+1)}{e - e^{-n}} \times \left(\frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{n}\right) \\ &= \frac{1}{e - e^{-n}} \times \left(\frac{n+1}{n} - \frac{(n+1)e^{-n}}{n}\right) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Par conséquent, il ne peut pas exister de constante $k > 1/e$ pour laquelle l'inégalité de la question précédente soit vraie avec k à la place de $1/e$ car l'inégalité large passe à la limite, et donc, en passant à la limite, cette limite serait supérieure ou égale à k ce qui est absurde comme on vient de le voir. La constante $1/e$ est donc la meilleure possible (rappelons qu'une minoration est d'autant plus intéressante qu'elle est grande, et on vient de voir que $1/e$ est la constante la plus grande possible).

2 Fonctions en escalier et continues par morceaux

Exercice 23 - Trois intégrales de fonctions continues par morceaux : ✪

1. Soient $0 < a < b$ deux entiers naturels. Calculer $\displaystyle\int_a^b \lfloor x \rfloor dx$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right) dx$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_{1/n}^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \mathrm{d}t$.

Correction : Comme en classe, on calcule l'intégrale d'une fonction continue par morceaux en cassant en chaque point de discontinuité et en remplaçant par l'expression de la fonction entre deux telles valeurs.

1.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \lfloor x \rfloor \,\mathrm{d}x &= \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} \lfloor x \rfloor \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} k \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=a}^{b-1} k \\
&= \sum_{k=1}^{b-1} k - \sum_{k=1}^{a-1} k \\
&= \frac{b(b-1)}{2} - \frac{a(a-1)}{2}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x + \int_2^3 \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x + \int_3^\pi \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sin\left(0 \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \sin\left(1 \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x + \int_2^3 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x + \int_3^\pi \sin\left(3 \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 0 \,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{d}x + \int_2^3 1 \,\mathrm{d}x + \int_3^\pi \frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times (1 + \pi - 3) + 1 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\pi - 2) + 1
\end{aligned}$$

3. Il faut couper en chaque $1/k$:

$$\begin{aligned}
\int_{1/n}^{1} \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} k \, \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k \times \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= n - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

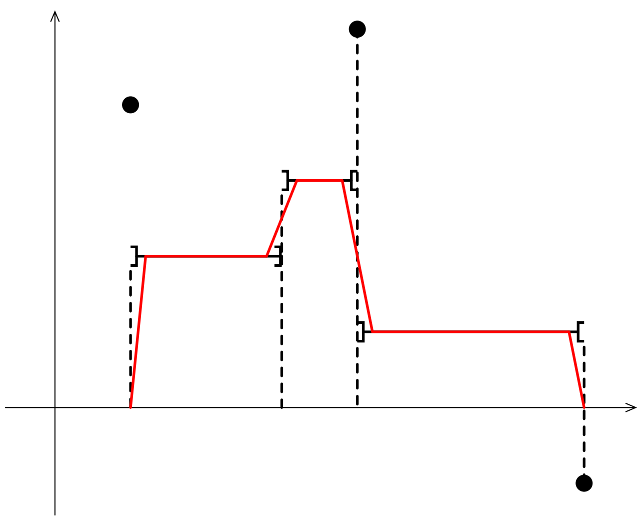
Exercice 24 : ✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ en escalier. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_a^b |f(t) - g(t)| \, \mathrm{d}t \leq \varepsilon$$

Correction : Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à f. Quitte à prendre un ε plus petit, on peut supposer que $2\varepsilon < a_{i+1} - a_i$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$. f étant en escalier, elle prend un nombre fini de valeurs donc est bornée (et atteint ses bornes). Notons $M = \max |f|$. Soit g la fonction définie sur $[\,a\,;b\,]$ par :

- g continue sur $[\,a\,;b\,]$.
- $g(a) = g(b) = 0$.
- g coïncide avec f sur chaque intervalle du type $[\,a_i + \varepsilon\,;a_{i+1} - \varepsilon\,]$.
- g est affine par morceaux.

En clair, g est la fonction qui affine par morceaux qui coïncide avec f à peu près partout, on se garde une marge de ε au début et à la fin de chaque intervalle pour lui laisser le temps d'aller d'un plateau à un autre. Voici l'allure du graphe de g :



Puisque $f = g$ sur tous les intervalles du type $[\,a_i + \varepsilon\,;a_{i+1} - \varepsilon\,]$, $|f - g| = 0$ sur ces intervalles si bien qu'il ne reste que les autres contributions dans l'intervalle, les intervalles sur lesquels les deux fonctions ne coïncident pas. Plus précisément :

$$\int_a^b |f(t) - g(t)| \, \mathrm{d}t = \int_a^{a+\varepsilon} |f(t) - g(t)| \, \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i - \varepsilon}^{a_i + \varepsilon} |f(t) - g(t)| \, \mathrm{d}t + \int_{b-\varepsilon}^{b} |f(t) - g(t)| \, \mathrm{d}t$$

Or, sur chacun de ces intervalles, d'après l'inégalité triangulaire, $|f(t) - g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \leq 2M$. En effet, par définition de M, $|f| \leq M$, et c'est aussi vrai pour g car g est affine et relie à chaque fois deux valeurs prises par f donc est bornée par M également (une fonction affine est comprise entre les deux valeurs qu'elle relie). Par conséquent, par croissance de l'intégrale, et en n'oubliant pas que l'intégrale d'une constante est la valeur de la constante multipliée par la longueur de l'intervalle :

$$\int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon \times M + \sum_{i=1}^{n-1} 2M\varepsilon + M\varepsilon = 2nM\varepsilon$$

Quitte à remplacer ε par $\varepsilon/2nM$ au début de l'exercice, on a le résultat voulu.

Exercice 25 : ✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour toute fonction $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ en escalier,

$$\int_a^b f(t) \times g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Correction : L'idée est que si g est en escalier très proche de f, alors $f \times g$ est proche de f^2 et si l'intégrale de $f \times g$ est nulle, alors l'intégrale de f^2 est nulle donc f est nulle. Prouvons-le rigoureusement. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le cours, il existe g en escalier telle que $|f-g| \leq \varepsilon$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b f(t)(f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)| \times |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or, f est continue sur un segment donc est bornée et atteint ses bornes : notons $M = \max|f|$ si bien que

$$\left|\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b M \times \varepsilon\,\mathrm{d}t = M\varepsilon(b-a)$$

ε étant quelconque strictement positif, on en déduit que

$$\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Or, g est en escalier donc $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc $\displaystyle\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$. f^2 étant positive, continue, d'intégrale nulle, c'est la fonction nulle, donc f est nulle.

Exercice 26 - Lemme de Riemann-Lebesgue : ✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.

1. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

   On commencera par prouver le résultat dans le cas où f est constante, puis dans le cas où f est en escalier.
2. Donner une preuve plus simple lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$.
3. ✪✪✪ Montrer plus généralement que si g est une fonction continue T-périodique (avec $T > 0$) définie sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

4. Déterminer : $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t$. Nous prouverons ce résultat d'une autre manière dans l'exercice 38.

Correction :

1. Suivons l'indication de l'énoncé et prouvons le résultat lorsque f est constante, disons égale à c. Dès lors :

$$\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{c\cos(\lambda a) - c\cos(\lambda b)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

   puisqu'un cosinus est borné. Le résultat est donc prouvé si f est constante. Supposons à présent f en escalier et soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à f et, pour tout i, soit c_i la valeur de f sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} c_i \sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{c_i\cos(\lambda a_i) - c_i\cos(\lambda a_{i+1})}{\lambda} \\ &\xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

car somme finie (et au nombre de termes fixe) de termes qui tendent vers 0. Prouvons maintenant le lemme de Riemann-Lebesgue dans le cas général i.e. dans le cas où f est continue par morceaux. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le cours, il existe g en escalier telle que $|f - g| \leq \varepsilon$. Or, d'après ce qui précède, il existe A tel que, pour tout $\lambda \geq A$,

$$\left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon$$

Soit donc $\lambda \geq A$. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|\int_a^b (f(t)-g(t))\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| + \varepsilon \\
&\leq \int_a^b |f(t)-g(t)| \times |\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t + \varepsilon \\
&\leq \int_a^b \varepsilon \times 1\,\mathrm{d}t + \varepsilon \\
&\leq \varepsilon(b-a+1)
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

2. Soit $\lambda > 0$ (on cherche la limite en $+\infty$). Supposons f de classe $\mathscr{C}^1$ et faisons une IPP.

$$\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(a)\cos(\lambda a) - f(b)\cos(\lambda b)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

La première fraction tend vers 0 car quotient d'un terme borné par un terme qui tend vers $+\infty$. De plus (quand on veut encadrer un terme dont on ne connaît pas le signe pour prouver qu'il tend vers 0, on peut se contenter d'étudier sa valeur absolue : une majoration suffit, et il n'est pas nécessaire de s'embêter avec le signe) :

$$\left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t)| \times |\cos(\lambda t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t)| \times \,\mathrm{d}t$$

donc cette quantité tend aussi vers 0 d'après le théorème d'encadrement, ce qui permet de conclure.

3. g étant continue, la fonction

$$G : x \mapsto \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de g d'après le théorème fondamental de l'analyse. Là aussi, commençons par prouver le résultat lorsque f est constante. Supposons donc f constante égale à c et soit $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t &= c\int_a^b g(\lambda t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{cG(\lambda b) - G(\lambda a)}{\lambda} \\
&= \frac{c}{\lambda} \times \left(\int_0^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\lambda a} g(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{c}{\lambda} \times \int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On aurait pu aussi effectuer le changement de variable $u = \lambda t$ à la première ligne. L'idée est de séparer l'intervalle $[\,\lambda a\,;\lambda b\,]$ en intervalles de longueur T, intervalles sur lesquels l'intégrale de g est constante par périodicité. On cherche le nombre d'intervalles de longueur T dans l'intervalle $[\,\lambda a\,;\lambda b\,]$. Plus précisément, on cherche le plus grand k tel que $\lambda a + kT \leq \lambda b$ donc le plus grand entier k tel que $kT \leq \lambda(b-a)$: on trouve donc $k = \left\lfloor \dfrac{\lambda(b-a)}{T} \right\rfloor$, et on note k cette quantité dans la suite. Par définition de k, $\lambda a + kT \leq b < a + (k+1)T$. Par conséquent :

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\lambda a + iT}^{\lambda a + (i+1)T} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lambda a + kT}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t$$

La somme contient k intégrales de g, fonction T-périodique, sur des intervalles de longueur T. D'après le chapitre 10 (et on l'a redémontré dans le cas d'une fonction périodique de période 1 dans l'exercice 15), toutes ces intégrales ont la même valeur et sont égales à $\displaystyle\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t$. En d'autres termes :

$$\begin{aligned}\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t &= k\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lambda a + kT}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left\lfloor \frac{\lambda(b-a)}{T} \right\rfloor \int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lambda a + kT}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, la dernière intégrale est une quantité bornée. Plus précisément :

$$\left|\int_{\lambda a + kT}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{\lambda a + kT}^{\lambda b} |g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{\lambda a + kT}^{\lambda a + (k+1)T} |g(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^T |g(t)|\,\mathrm{d}t$$

En particulier :

$$\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a + kT}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

et

$$\frac{1}{\lambda} \times \left(\frac{\lambda(b-a)}{T} - 1\right) < \frac{1}{\lambda}\left\lfloor \frac{\lambda(b-a)}{T} \right\rfloor \leq \frac{1}{\lambda} \times \frac{\lambda(b-a)}{T}$$

D'après le théorème d'encadrement :

$$\frac{1}{\lambda}\left\lfloor \frac{\lambda(b-a)}{T} \right\rfloor \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \frac{(b-a)}{T}$$

En conclusion :

$$\int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{c}{\lambda} \times \int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \frac{c(b-a)}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Supposons à présent que f soit en escalier : soit $\sigma = (a_i)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$ une subdivision adaptée à f, et supposons que f soit constante égale à c_i sur chaque intervalle $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$. Par conséquent :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} c_i\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} c_i g(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

D'après ce qui précède (a et b étant quelconques, le résultat précédent est encore valable pour une intégrale sur $[\,a_i\,;a_{i+1}\,]$) :

$$\int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} c_i\,\mathrm{d}t\right) = \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Enfin, revenons au cas général où f est continue par morceaux. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le cours, il existe h en escalier telle que $|f - h| \leq \varepsilon$. D'après ce qui précède, il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $\lambda \geq A$,

$$\left|\int_a^b h(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| \leq \varepsilon$$

Par conséquent, si on note

$$D = \left| \int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\right|$$

Alors :

$$\begin{aligned} D \quad = \quad & \left| \int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b h(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b h(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right)\right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right) - \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, et d'après l'inégalité triangulaire (celle pour les réels puis l'inégalité triangulaire intégrale) :

$$\begin{aligned} D \quad \leq \quad & \int_a^b |f(t)-h(t)| \times |g(\lambda t)|\,\mathrm{d}t + \left| \int_a^b h(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\ & + \left|\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right| \times \int_a^b |h(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Enfin, g étant continue périodique, elle est bornée, disons par M, donc :

$$D \leq \varepsilon M(b-a) + \varepsilon + \left|\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right| \times \varepsilon(b-a)$$

ce qui permet de conclure.

4. La fonction $t \mapsto |\sin(t)|$ est continue et π-périodique puisque, pour tout t, $|\sin(t+\pi)| = |-\sin(t)| = |\sin(t)|$. Par conséquent, d'après la question précédente :

$$\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin(t)|\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Or, sur $[\,0\,;\pi\,]$, le sinus est positif donc on peut enlever la valeur absolue, et l'intégrale du sinus sur $[\,0\,;\pi\,]$ vaut 2 donc

$$\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 27 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ qui échange les deux premières décimales (c'est-à-dire $f(0,a_1a_2a_3\dots) = 0,a_2a_1a_3\dots$). Montrer que f est continue par morceaux et calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction : Donnons une expression explicite de f. Si $x \in [\,0\,;1\,[$ (la valeur en 1 ne modifie pas la valeur de l'intégrale, car les valeurs ponctuelles n'interviennent pas dans le calcul de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux). Alors $10x = a_1,a_2a_3\dots$ (avec les notations de l'énoncé) donc $a_1 = \lfloor 10x \rfloor$ puis

$$100x - 10a_1 = a_2, a_3\dots$$

si bien que $a_2 = \lfloor 100x - 10a_1 \rfloor = \lfloor 100x \rfloor - 10a_1$ puisque a_1 est un entier (nous remplacerons a_1 par sa valeur à la fin). Enfin :

$$\begin{aligned} 0,a_2a_1a_3\dots \quad &= \quad \frac{a_2a_1,a_3\dots}{100} \\ &= \quad \frac{10a_2 + a_1 + 0,a_3\dots}{100} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} 0,a_3\dots \quad &= \quad a_1a_2,a_3\dots - a_1a_2 \\ &= \quad 100x - 10a_1 - a_2 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{10a_2 + a_1 + 100x - 10a_1 - a_2}{100} \\
&= \frac{9a_2 - 9a_1 + 100x}{100} \\
&= \frac{9\lfloor 100x \rfloor - 90a_1 - 9a_1 + 100x}{100} \\
&= \frac{9\lfloor 100x \rfloor - 99a_1 + 100x}{100} \\
&= \frac{100x - 99\lfloor 10x \rfloor + 9\lfloor 100x \rfloor}{100}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que f est continue par morceaux (plus précisément, f est continue sur chaque intervalle du type $]\,k/100\,;(k+1)/100$ L'intégrale de x de 0 à 1 vaut $1/2$. Il suffit de calculer l'intégrale de $\lfloor 10x \rfloor$ et celle de $\lfloor 100x \rfloor$ pour conclure (grâce à la linéarité de l'intégrale). De même que dans l'exercice 23 :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \lfloor 10x \rfloor \,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{9} \int_{k/10}^{(k+1)/10} k \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{9} \frac{k}{10} \\
&= \frac{1}{10} \times \frac{9 \times 10}{2} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

De même on trouve que

$$\int_0^1 \lfloor 100x \rfloor \,\mathrm{d}x = \frac{99}{2}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \frac{99}{100}\int_0^1 \lfloor 10x \rfloor \,\mathrm{d}x + \frac{9}{100}\int_0^1 \lfloor 100x \rfloor \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} - \frac{99}{100} \times \frac{9}{2} + \frac{9}{100} \times \frac{99}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On retrouve l'intégrale de l'identité, ce qui n'est pas très surprenant : on garde les mêmes images, on ne fait que les intervertir, l'aire sous la courbe reste la même. Bien sûr, cela n'est en rien une démonstration...

3 Sommes de Riemann :

Exercice 28 : ✪ Soit $\alpha > 0$. Montrer de deux façons différentes que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha+1}$$

Correction : Tout d'abord, à l'aide d'une somme de Riemann. Notons S_n la somme de l'énoncé. Alors

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$$

S_n est la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = x^\alpha$. f étant continue sur $[\,0\,;1\,]$,

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}$$

Deuxième méthode : à l'aide d'une comparaison à une intégrale. Soit $k \geq 1$. La fonction f (toujours la même) étant croissante, pour tout $t \in [\,k\,;k+1\,]$,$k^\alpha \leq t^\alpha$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} k^\alpha \,\mathrm{d}x = k^\alpha \leq \int_k^{k+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t$$

De même :

$$\int_{k-1}^{k} t^\alpha \,\mathrm{d}t \leq k^\alpha$$

si bien qu'on a l'encadrement :

$$\int_{k-1}^{k} t^\alpha \,\mathrm{d}t \leq k^\alpha \leq \int_k^{k+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t$$

Le dessin est laissé à votre charge. Si on somme de k allant de 1 à n, à l'aide de la relation de Chasles :

$$\int_0^n t^\alpha = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^n k^\alpha \leq \int_1^{n+1} t^\alpha \,\mathrm{d}t = \frac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$$

En divisant par $n^{\alpha+1}$:

$$\frac{1}{\alpha+1} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{n^{\alpha+1}\alpha+1}$$

On conclut à l'aide du théorème d'encadrement.

Exercice 29 : ✪ Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^t dt$ sans calculer de primitive.

Correction : Utilisons les sommes de Riemann : si on note I cette intégrale,

$$I = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

où, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e^{k/n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (e^{1/n})^k \\ &= \frac{1}{n} \times e^{1/n} \times \frac{1-(e^{1/n})^n}{1-e^{1/n}} \\ &= \frac{1}{n} \times e^{1/n} \times \frac{1-e}{1-e^{1/n}} \end{aligned}$$

On rappelle que $\dfrac{e^u-1}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$ donc

$$\frac{e^{1/n}-1}{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Finalement,

$$\begin{aligned} S_n &= e^{1/n} \times (e-1) \times 1/ne^{1/n}-1 \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e-1 \end{aligned}$$

Par unicité de la limite, $I = e-1$ ce qui est la valeur qu'on aurait trouvée à l'aide d'un calcul de primitive.

Exercice 30 : ✪ Donner les limites dont les termes généraux sont donnés ci-dessous :

1. $u_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^n k^2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
2. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n+k}}$
3. ✪✪✪ $u_n = \dfrac{1}{n^4}\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \left(n^2+k^2\right)^{1/n}$

Correction :

1. Soit $n \geq 1$.

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

u_n est la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = x^2\cos(\pi x)$. f étant continue par morceaux,

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x^2\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$$

Notons I cette intégrale. À l'aide de deux IPP, on trouve que $I = -2/\pi^2$.

2. Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{\sqrt{n}\times\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{\sqrt{1+k/n}} \end{aligned}$$

u_n est la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = x/\sqrt{1+x}$. f étant continue par morceaux,

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

Notons I cette intégrale. Avec la méthode du $+1-1$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x+1-1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1+x}\right]_0^1 \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} - \frac{2}{3} + 2 \\ &= \frac{4-2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

quantité qui est bien positive (vérifier la cohérence des résultats permet d'éviter des erreurs bêtes).

3. Soit $n \geq 1$. $u_n > 0$: on pense à prendre son ln car cela transformera le produit en somme.

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= -4\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln\left(n^2+k^2\right) \\ &= -4\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\ln\left(n^2\right) + \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right) \\ &= -4\ln(n) + \frac{1}{n}\times 2n\times 2\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Cela ressemble à une somme de Riemann mais on trouve du n et du $2n$. Rappelons que le théorème du cours est (si f est continue par morceaux) :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

ou plutôt :

$$\frac{1}{\text{truc}}\sum_{k=1}^{\text{truc}} f\left(\frac{k}{\text{truc}}\right) \xrightarrow[\text{truc}\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ici, on a truc $=2n$: il suffit d'avoir du $2n$ partout. On réécrit donc $\ln(u_n)$ de la façon suivante :

$$\ln(u_n) \quad = \quad \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} 2\ln\left(1+4\times\left(\frac{k}{2n}\right)^2\right)$$

$\ln(u_n)$ est donc la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x)=2\ln(1+4x^2)$. f étant continue par morceaux,

$$\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I=\int_0^1 2\ln\left(1+4x^2\right)\,\mathrm{d}x$$

À l'aide d'une IPP puis du $+1-1$:

$$\begin{aligned}
I &= \left[2x\ln(1+4x^2)\right]_0^1 - \frac{16x^2}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= 2\ln(5)-4\int_0^1 \frac{4x^2}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x\\
&= 2\ln(5)-4\int_0^1 \frac{4x^2+1-1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x\\
&= 2\ln(5)-4\int_0^1 \mathrm{d}x\ +4\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+(2x)^2}\\
&= 2\ln(5)-4+4\left[\frac{\mathrm{Arctan}(2x)}{2}\right]_0^1\\
&= 2\ln(5)-4+2\mathrm{Arctan}(2)
\end{aligned}$$

si bien que $\ln(u_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(25)-4+2\mathrm{Arctan}(2)$ et l'exponentielle est continue donc

$$u_n=e^{\ln(u_n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ln(25)-4+2\mathrm{Arctan}(2)}=25e^{-4+2\mathrm{Arctan}(2)}$$

Exercice 31 - Phénomène de Gibbs : ✪

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par :

- f est impaire.
- f est 2π-périodique.
- $\forall t\in\,]\,0\,;2\pi\,[\,,\ f(t)=\dfrac{\pi-t}{2}$.

1. Donner la valeur de $f(0)$, ainsi que les limites à droite et à gauche en 0. f est-elle continue ? Tracer sans justification le graphe de f sur $[\,-3\pi\,;3\pi\,]$. Pouvait-on se passer de l'hypothèse d'imparité ?
2. Pour tout $n\geq 1$ on pose :

$$b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

Justifier l'existence de $b_n(f)$ et donner sa valeur en fonction de n.

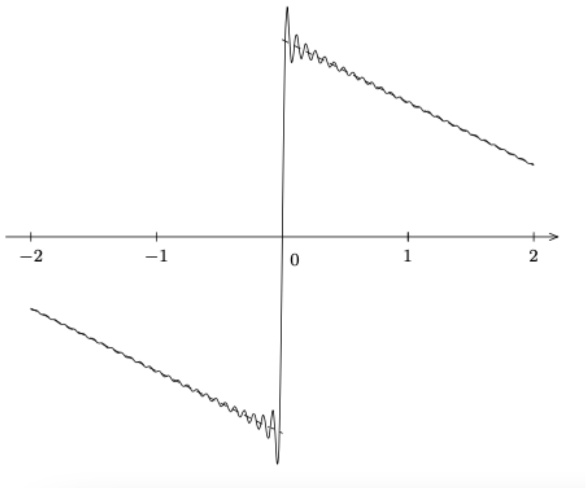
3. Pour tout $N\in\mathbb{N}$ on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction S_N par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\qquad S_N(t)=\sum_{k=1}^{N} b_k(f)\sin(kt)$$

Montrer qu'il existe une fonction φ continue sur $[\,0\,;1\,]$ que l'on explicitera telle que :

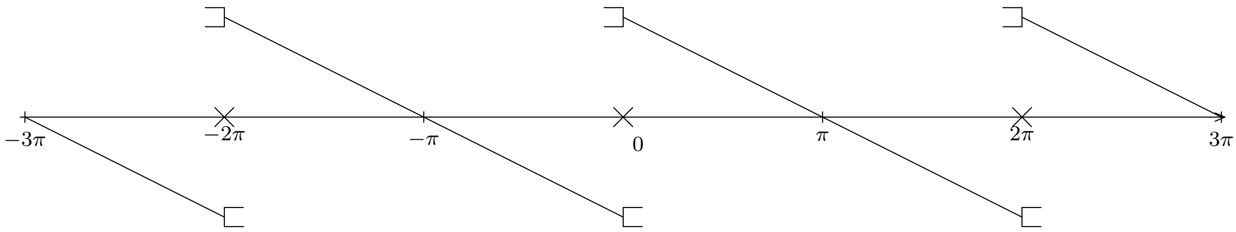
$$S_N\left(\frac{\pi}{N}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi(t)dt$$

Remarque : Le phénomène de Gibbs est un phénomène mathématique qui se produit lorsqu'on calcule la série de Fourier de certaines fonctions continues : il y a « des effets de bords ». Demandez à votre professeur de physique préféré !



Correction :

1. f est impaire donc $f(0) = 0$. La limite à droite en 0 vaut $\pi/2$ et, par imparité, la limite à gauche vaut $-\pi/2$. Ci-dessous l'allure du graphe de f. L'imparité est indispensable, sinon on ne connaît pas la valeur en 0 ni celle en tous les $2k\pi$.



2. $b_n(f)$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue par morceaux (f n'est pas continue !) sur un segment. Par définition d'une telle intégrale, et par linéarité,

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \times \left[\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right]$$

La première intégrale est nulle par un calcul direct. Pour la deuxième, on pense à faire une intégration par parties. Je ne la rédige pas, il suffit de dériver le t et d'intégrer le sinus (on peut le faire car $n \geq 1$, on n'oublie pas le $-$ devant le cosinus et on n'oublie pas le $-1/2$ devant l'intégrale) ce qui donne :

$$b_n(f) = \frac{-1}{2\pi} \times \left(\left[-t \times \frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)$$

Par conséquent, $b_n(f) = \dfrac{1}{n}$.

3. D'après la question précédente, pour tout $N \geq 1$,

$$S_N\left(\frac{\pi}{N}\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)}{k} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)}{\frac{k}{N}}$$

On a envie de dire qu'on reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)/x$, mais le problème est qu'elle n'est a priori pas continue en 0. Cependant, on sait que

$$\frac{\sin(\pi x)}{x} = \pi \times \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \xrightarrow[x\to 0]{} \pi \times 1 = \pi$$

Par conséquent, la fonction $\varphi : x \mapsto \sin(\pi x)/x$ (qui est évidemment continue sur $]\,0\,;1\,]$ car quotient de fonctions continues) est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \pi$. φ ainsi prolongée est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$ et on peut sortir la phrase rituelle : on reconnaît une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction φ définie sur $[\,0\,;1\,]$ par

$$\varphi(0) = \pi \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x} \qquad \forall x \in \,]\,0\,;1\,]$$

Finalement, φ étant continue

$$S_N\left(\frac{\pi}{N}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 32 : ✪✪ Calculer la limite de la suite de terme général $S_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}$.

Correction : Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k(n-k)}}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k(n-k)}{n^2}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}\times\left(1-\frac{k}{n}\right)} \end{aligned}$$

S_n est la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$. f étant continue par morceaux,

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x$$

Notons cette intégrale I. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Mettons $x(1-x)$ sous forme canonique :

$$\begin{aligned} x(1-x) &= -x^2+x \\ &= -(x^2-x) \\ &= -\left(x^2 - 2\times x\times\frac{1}{2}\right) \\ &= -\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

On pose $\sin(u) = 2\,(x-1/2)$ (cf. chapitre 10 : on veut faire apparaître du $1-\sin^2$). On pourrait exprimer x en fonction de u mais cela ne va pas être nécessaire. En effet, $\cos(u)\,\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = \cos(u)\,\mathrm{d}u\,/2$ si bien que :

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin 2^2(u)}\times\frac{\cos(u)\,\mathrm{d}u}{2}$$

On trouve les bornes en exprimant u en fonction de x ou en se souvenant (cf. chapitre 10) qu'on peut prendre n'importe quelles bornes qui conviennent i.e. qui vérifient $\sin(a) = -1$ et $\sin(b) = 1$ (les valeurs de $2(x-1/2)$ pour $x=0$ et $x=1$) et $-\pi/2$ et $\pi/2$ conviennent donc c'est bon. Par conséquent :

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos^2(u)}\times\frac{\cos(u)\,\mathrm{d}u}{2}$$

Attention, pour pouvoir affirmer que $\sqrt{\cos^2} = \cos$, il faut que le cos soit positif, ce qui est le cas ici puisqu'on travaille sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)\times\cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2u)+1}{2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{8}\left[\frac{\sin(2u)}{2}+u\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Exercice 33 - Un avant-goût de la deuxième année : ✪✪

1. Montrer qu'il existe f que l'on explicitera telle que

$$u_n = \left(\frac{1^1 2^2 \dots n^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}\right)^{1/n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(\int_0^1 f(t)dt\right)$$

2. Montrer que $\displaystyle\int_\varepsilon^1 f(t)dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^1 f(t)dt$. En déduire la limite de la suite (u_n).

Correction :

1. Soit $n \geq 1$. $u_n > 0$: on pense au ln.

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \frac{1}{n^2}\ln\left(\frac{1^1\times 2^2\times\cdots\times n^n}{n^{1+2+\cdots+n}}\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\ln\left(\frac{1^1\times 2^2\times\cdots\times n^n}{n^1\times n^2\times\cdots\times n^n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\ln\left(\left(\frac{1}{n}\right)^1\times\left(\frac{2}{n}\right)^2\times\cdots\times\left(\frac{n}{n}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\ln\left(\prod_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^k\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k\ln\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

On veut poser $f(x) = x\ln(x)$, mais celle-ci n'est pas définie en 0. Il suffit de la prolonger par continuité en 0. Plus précisément, on définit sur $]\,0\,;1\,]$ la fonction f par $f(x) = x\ln(x)$, et $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. f ainsi prolongée est continue donc continue par morceaux sur $[\,0\,;1\,]$ donc

$$\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

car $\ln(u_n)$ est la somme de Riemann à pas constant associée à f (continue par morceaux).

2. f étant continue sur $[\,0\,;1\,]$, f admet une primitive notée F. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\int_\varepsilon^1 f(t)\,\mathrm{d}t = F(1) - F(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} F(1) - F(0) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

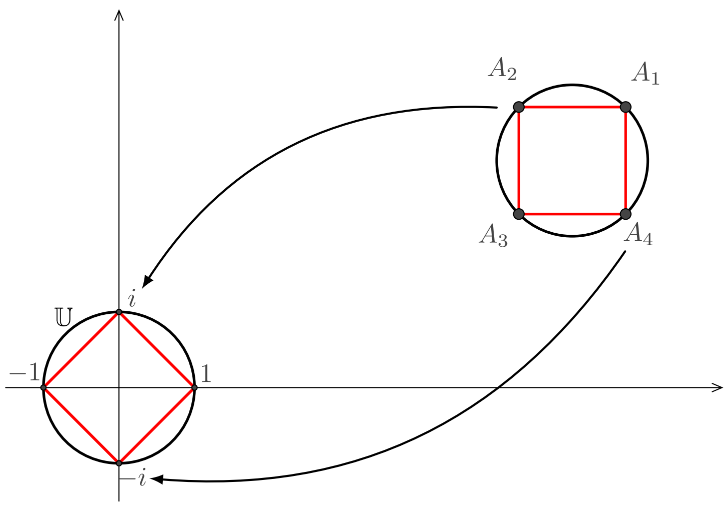
Le passage à la limite est licite puisque F est continue car dérivable (c'est une primitive de f). Par conséquent, pour calculer l'intégrale de f sur $[\,0\,;1\,]$, il suffit de la calculer sur $[\,\varepsilon\,;1\,]$ puis de faire tendre ε vers 0. Or, à l'aide d'une IPP :

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_\varepsilon^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^2\ln(t)}{2}\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\varepsilon^2\ln(\varepsilon)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\varepsilon^2\ln(\varepsilon)}{2} - \frac{1}{4} \\
&\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

par croissances comparées. Par unicité de la limite, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}$ et l'exponentielle est continue donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1/4}$.

Exercice 34 : ✪✪ Soit $A_1A_2\dots A_n$ un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k$.

Correction : On pense aux racines n-ièmes de l'unité, qui forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité (cf. chapitre 7). Cependant, le cercle en question n'a aucune raison d'être le cercle unité, mais on peut se ramener au cas où le cercle en question est le cercle unité par une simple translation, et ensuite, par une rotation, on peut « coller » les A_k sur les racines de l'unité.



Par conséquent, quitte à translater ou à tourner (ce qui ne change pas les distances), on peut supposer que le cercle en question est le cercle unité et que les A_k sont les racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire que pour tout $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$, A_k est l'image du complexe $z_k = e^{2i(k-1)\pi/n}$ (on décale d'un indice car on note généralement les racines de l'unité pour k allant de 0 à n, et cela simplifiera les calculs). Dès lors, $A_1A_k = |z_1 - z_k| = |1 - e^{2i(k-1)\pi/n}|$ et la somme devient plus simple à calculer ! Tout d'abord, $|z_1 - z_1| = 0$ donc on peut rajouter le terme pour $k = 1$ dans la somme (pour se rapprocher d'une somme de Riemann). Si on note S_n la quantité de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|1-e^{2i(k-1)\pi/n}\right| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\left|1-e^{2ip\pi/n}\right| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\left|1-\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)-i\sin\left(\frac{2p\pi}{n}\right)\right| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{\left(1-\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)\right)^2+\sin^2\left(\frac{2p\pi}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{1+\cos^2\left(\frac{2p\pi}{n}\right)-2\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)+\sin^2\left(\frac{2p\pi}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{2-2\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{1-\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{2\sin^2\left(\frac{p\pi}{n}\right)} \\
&= \frac{2}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{\sin^2\left(\frac{p\pi}{n}\right)}
\end{aligned}$$

Or, pour tout $p \in [\![1\,;\,n]\!]$, $p\pi/n \in [\,0\,;\pi\,]$ donc son sinus est positif, si bien que

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} 2\sin\left(\frac{p\pi}{n}\right)$$

On reconnaît une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = 2\sin(\pi x)$. Cette fonction étant continue par morceaux :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 2\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}$$

Exercice 35 - Intégrale de Poisson, le retour : ✪✪

1. Décomposer le polynôme $X^{2n}-1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire, pour $|x| \neq 1$, la valeur de

$$I(x) = \int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,\mathrm{d}t$$

Correction : Nous avons déjà effectué le calcul de cette intégrale dans l'exercice 29 du chapitre 10.

1. cf. chapitre 19 :

$$X^{2n}-1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2-2\cos(k\pi/n)X+1)$$

2. Soit $x \neq \pm 1$. D'après la question précédente,

$$x^{2n}-1 = (x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{n-1}(x^2-2\cos(k\pi/n)x+1)$$

On a envie de prendre le ln, mais le terme de gauche (et donc le terme de droite également, car ils sont égaux) peut être négatif. Séparons les cas pour connaître son signe. Supposons dans un premier temps que $|x|<1$. Alors $x^{2n}-1<0$. Il suffit alors de multiplier par -1. Je rappelle (sans commentaire...) que quand on multiplie un produit par -1, il ne faut multiplier qu'un seul terme par -1 et surtout pas tous les termes. Ceci étant rappelé

$$-P(x)=1-x^{2n}=(1-x)(x+1)\prod_{1}^{n-1}\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)$$

Tous les termes du produit sont strictement positifs (il suffit de calculer les discriminants des trinômes du membre de droite) donc on peut prendre le ln.

$$\begin{aligned}\ln(1-x^{2n}) &= \ln\left((1-x)(1+x)\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)\\ &= \ln\left(1-x^2\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)+\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{n\pi}{n}\right)+1\right)-\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{n\pi}{n}\right)+1\right)\end{aligned}$$

En d'autres termes (on rajoute des termes pour faire apparaître une somme de Riemann) :

$$\ln(1-x^{2n})=\ln\left(1-x^2\right)+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)-\ln\left((x+1)^2\right)$$

Encore une fois, on souhaite faire apparaître une somme de Riemann : il manque le $(b-a)/n$. Il suffit de tout multiplier par π/n. Cela donne :

$$\frac{\pi}{n}\ln(1-x^{2n})=\frac{\pi}{n}\ln\left(1-x^2\right)+\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)-\frac{\pi}{n}\ln\left((x+1)^2\right)$$

Faisons à présent tendre n vers $+\infty$ et donnons la limite de chacun des termes. Tout d'abord, de façon évidente

$$\frac{\pi}{n}\ln\left(1-x^2\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{n}\ln\left((x+1)^2\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Ensuite, puisque $|x|<1, x^{2n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et par continuité du $\ln, \ln(1-x^{2n})\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, et finalement :

$$\frac{\pi}{n}\ln(1-x^{2n})\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Il nous reste à donner la limite de la somme. Tout d'abord, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right) &= \frac{\pi}{n}\ln(1-x^{2n})-\frac{\pi}{n}\ln\left(1-x^2\right)+\frac{\pi}{n}\ln\left((x+1)^2\right)\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

De plus, cette somme est une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;\pi\,]$ dans l'intégrale (comme quoi, les sommes de Riemann sur autre chose que $[\,0\,;1\,]$, ça existe...). f étant continue par morceaux :

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}I(x)$$

Par unicité de la limite, $I=0$. Supposons à présent que $|x|>1$. On cherche encore les limites des termes précédents. Comme d'habitude, dans un ln, on met en facteur le terme prédominant, on casse ensuite le ln, et normalement ça passe. On rappelle que $x^{2n}=|x|^{2n}$, ce qui évite de prendre le ln en des réels strictement négatifs.

$$\ln\left(x^{2n}-1\right)=\ln\left(x^{2n}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{x^{2n}}\right)=2n\ln\left(|x|\right)+\ln\left(1-\frac{1}{x^{2n}}\right)$$

En conclusion, $\dfrac{\ln\left(x^{2n}-1\right)}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2\ln(|x|)$. Inspirons-nous de ce qui précède et prenons le ln (tout est positif sauf éventuellement $(x+1)$ et $x-1$ mais il suffit de les regrouper en x^2-1 qui est positif), en rajoutant le terme manquant et en multipliant par π/n il vient :

$$\frac{\pi}{n}\ln(x^{2n}-1)=\frac{\pi}{n}\ln\left(x^2-1\right)+\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)-\frac{\pi}{n}\ln\left((x+1)^2\right)$$

D'après ce qui précède, le membre de gauche tend vers $2\pi\ln(|x|)$, et de même que dans le cas $|x|<1$, en reconnaissant une somme de Riemann (et deux termes qui tendent vers 0), le membre de droite tend vers $I(x)$. Par unicité de la limite, $I(x)=2\pi\ln(|x|)$.

Exercice 36 : ✪✪ Soit $f:[\,0\,;1\,]\to\mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite des expressions suivantes :

1. $A_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.
2. $B_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{1\leq k<l\leq n}f\left(\frac{k}{n}\right)\times f\left(\frac{l}{n}\right)$.
3. $C_n=\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{1\leq k\leq l\leq n}f\left(\frac{k}{n}\right)\times f\left(\frac{l}{n}\right)$.

Correction :

1. Ce n'est pas une somme de Riemann à cause du carré. Intuitivement (nous le prouverons rigoureusement ensuite) : la somme est égale à n images de nombres compris entre $1/n^2$ et $1/n$ donc à peu près égale à $nf(0)$ donc, en divisant par n, A_n va tendre vers $f(0)$ (cette question n'a donc rien à voir avec des sommes de Riemann). Faisons-le rigoureusement. Soit $\varepsilon>0$. f étant continue, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x\in[\,0\,;\eta\,]$, $|f(x)-f(0)|\leq\varepsilon$. Soit n_0 tel que $1/n_0\leq\eta$ et soit $n\geq n_0$. Dès lors, pour tout $k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]$, $k/n^2\leq 1/n\leq\eta$ donc $|f(k/n^2)-f(0)|\leq\varepsilon$ c'est-à-dire que $f(0)-\varepsilon\leq f(k/n^2)\leq f(0)+\varepsilon$. Par somme :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(0)-\varepsilon)=f(0)-\varepsilon\leq A_n\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(0)+\varepsilon)=f(0)+\varepsilon$$
En d'autres termes, pour tout $\varepsilon>0$, il existe n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$, $|A_n-f(0)|\leq\varepsilon$ donc $A_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(0)$.
2. Soit $n\geq1$. Cela nous fait penser à un double produit donc à un carré. Notons
$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$
la somme de Riemann à pas constant associée à f. f étant continue, donc continue par morceaux :
$$S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$
De plus (une somme au carré c'est : les carrés et les doubles produits, cf. chapitre 4) :
$$\begin{aligned}{S_n}^2&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{2}{n^2}\sum_{1\leq k<l\leq n}f\left(\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{l}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)^2+2B_n\end{aligned}$$
Or, f^2 est elle-aussi continue donc continue par morceaux : on reconnaît la somme de Riemann associée à f^2 (multipliée par $1/n$, voir la suite) si bien que
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t$$
et donc, en multipliant par $1/n$:
$$\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$
Finalement :
$$B_n=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{{S_n}^2}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

3. Il suffit de voir que

$$C_n = B_n + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

et cette dernière quantité tend vers 0 donc

$$C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

Exercice 37 : ✪✪

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $F_n = \dfrac{nX^{n-1}}{X^n-1}$.
2. En déduire la valeur de $I(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x-e^{it}}$ où x est un réel différent de ± 1.

Correction :

1. De même que dans l'exercice 5 du chapitre 20 :

$$\frac{nX^{n-1}}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{X-e^{2ik\pi/n}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$. D'après la question précédente :

$$\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x-e^{2ik\pi/n}} = 2\pi \times \frac{x^{n-1}}{x^n-1}$$

On reconnaît une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;2\pi\,]$ (pas $[\,0\,;1\,]$) par $f(x) = 1/(x-e^{ix})$. Cette fonction est continue par morceaux donc

$$\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x-e^{2ik\pi/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{x-e^{it}}$$

Si $|x|<1$,

$$2\pi \times \frac{x^{n-1}}{x^n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc, par unicité de la limite,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{x-e^{it}} = 0$$

Si $|x|>1$, alors

$$2\pi \times \frac{x^{n-1}}{x^n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2\pi}{x}$$

donc, par unicité de la limite :

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{x-e^{it}} = \frac{2\pi}{x}$$

Exercice 38 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;\pi\,] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$:

$$\exists c_k \in \left[\frac{k\pi}{n}\,;\frac{(k+1)\pi}{n}\right], \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x = f(c_k)\times\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n}|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x$$

2. À l'aide du résultat concernant les sommes de Riemann générales, montrer que :

$$\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Correction :

1. Soient $n \geq 1$ et $k \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$. Méthode tout à fait analogue à l'exercice 6 : f étant continue sur le segment $\left[\dfrac{k\pi}{n} \,;\, \dfrac{(k+1)\pi}{n} \right]$, elle y est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc x_0 et x_1 tels que $f(x_0) = \min f$ et $f(x_1) = \max f$ (on parle évidemment du min et du max sur cet intervalle). Pour tout $t \in \left[\dfrac{k\pi}{n} \,;\, \dfrac{(k+1)\pi}{n} \right]$, $m \leq f(t) \leq M$ donc $m|\sin(nt)| \leq f(t)|\sin(nt)| \leq M|\sin(nt)|$. Par croissance de l'intégrale :

$$f(x_0) \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \leq f(x_1) \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin(nx)|\,\mathrm{d}x$$

Or, lorsque t décrit l'intervalle $\left[\dfrac{k\pi}{n} \,;\, \dfrac{(k+1)\pi}{n} \right]$, nt décrit l'intervalle $[\, k\pi \,;\, (k+1)\pi \,]$, intervalle sur lequel la fonction $|\sin|$ est positive continue non identiquement nulle donc son intégrale est strictement positive. Par conséquent :

$$f(x_0) \leq \frac{\displaystyle\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin(nx)|\,\mathrm{d}x} \leq f(x_1)$$

On conclut à l'aide du TVI (f est continue).

2. Rappelons le résultat du cours sur les sommes de Riemann générales : si f est une fonction continue par morceaux sur $[\, a \,;\, b \,]$, on appelle somme de Riemann de f toute somme de la forme :

$$S(\sigma, f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \times (a_{k+1} - a_k)$$

où $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une subdivision de $[\, a \,;\, b \,]$ et où, pour tout k, c_k est un élément quelconque de $[\, x_k \,;\, x_{k+1} \,]$. Alors $S(\sigma, f)$ tend vers l'intégrale de f sur $[\, a \,;\, b \,]$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

Notons

$$I_n = \int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x$$

D'après la relation de Chasles et la question précédente :

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi/n} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Dans chaque intégrale ci-dessus, faisons le changement de variable $u = nx, x = u/n,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u\,/n$ si bien que

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)|\,\mathrm{d}u$$

Or, sur $[\, k\pi \,;\, (k+1)\pi \,]$, le sinus est du signe de $(-1)^k$ (positif si k pair, négatif sinon) si bien que

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)|\,\mathrm{d}u = (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(u)\,\mathrm{d}u$$

et dans tous les cas cette intégrale vaut 2. Finalement :

$$I_n = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)$$

Si on note $\sigma = (a_k)_{k \in [\![0 \,;\, n]\!]}$ la subdivision régulière de $[\, 0 \,;\, \pi \,]$ i.e. $a_k = k\pi/n$ pour tout k, alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \times (a_{k+1} - a_k) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)$$

est une somme de Riemann associée à f (à pas constant mais on prend un point quelconque de l'intervalle, ce n'est pas une somme de Riemann à pas constant à gauche ou à droite associée à f). Puisque le pas tend vers 0,

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t$$

Il suffit de voir que $I_n = \dfrac{2}{\pi} S_n$ pour conclure.

Exercice 39 : ✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Montrer qu'il existe une unique subdivision $\left({x_k}^{(n)}\right)_{0\leq k\leq n}$ telle que :

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!], \int_{{x_{k-1}}^{(n)}}^{{x_k}^{(n)}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n {x_k}^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Correction : L'idée est simple : l'aire va croître strictement puisque f est strictement positive, et on coupe des tranches dont l'aire vaut $1/n$ de l'aire totale. Prouvons-le rigoureusement. f étant continue, la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f, et en particulier est continue (car dérivable) strictement croissante (car sa dérivée est f strictement croissante). De plus, $F(a) = 0$ et $F(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème de la bijection, il existe une unique subdivision $\left({x_k}^{(n)}\right)_{0\leq k\leq n}$ telle que, pour tout k,

$$F\left({x_k}^{(n)}\right) = \frac{k}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui prouve le résultat (l'écart entre deux valeurs consécutives sera bien égal à $1/n$ multiplié par l'intégrale). Par définition de cette subdivisions :

$$\forall k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!], {x_k}^{(n)} = F^{-1}\left(\frac{k}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

La fonction F^{-1} est bien bijective d'après le théorème de la bijection. Soit $n \geq 1$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n {x_k}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n F^{-1}\left(\frac{k}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

La fonction F étant continue (d'après le théorème de la bijection) donc continue par morceaux, on reconnaît une somme de Riemann à pas constant donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n {x_k}^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 F^{-1}\left(x\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

Notons $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et J l'intégrale ci-dessus. Avec le changement de variable $u = xI,\ x = u/I,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u/I$:

$$J = \frac{\displaystyle\int_0^I F^{-1}(u)\,\mathrm{d}u}{I}$$

Faisons le changement de variable $t = F^{-1}(u)$ (et donc $t = a$ lorsque $u = 0$ et $t = b$ lorsque $u = I$), $u = F(t)$, $\mathrm{d}u = f(t)\,\mathrm{d}t$ qui donne :

$$J = \frac{\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t}{I}$$

En conclusion :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 40 : ✪✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$$

Notons x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f_n admet un maximum local. Montrer que

$$f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

après avoir correctement défini cette intégrale puis justifié son existence.

Correction : Commençons par prouver l'existence de cette intégrale. La fonction $\varphi : t \mapsto \sin(\pi t)/t$ est continue sur $]\,0\,;1\,]$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \pi$ (on le prouve à l'aide d'un taux d'accroissements). φ ainsi prolongée est continue sur un segment donc l'intégrale

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

existe, et c'est elle que par (léger) abus de notation, on note comme celle de l'énoncé. Donnons la valeur explicite de x_n : une condition nécessaire pour que f_n admette un maximum local est que ${f_n}'$ s'annule (si on est en un point intérieur). Commençons par chercher où ${f_n}'$ s'annule. En effet, f_n est dérivable car somme de fonctions dérivables. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$${f_n}'(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

On trouve comme dans le chapitre 7 (partie réelle d'une somme géométrique etc.) que ${f_n}'(x) = n$ si $x \equiv 0[2\pi]$ et sinon :

$${f_n}'(x) = \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

La plus petite valeur en laquelle ${f_n}'$ s'annule est $x_n = \pi/(n+1)$. Sur $[\,0\,;x_n\,]$, f_n est croissante car ${f_n}'$ est positive (la valeur dans le cosinus est comprise entre 0 et $\pi/2$, les valeurs dans les sinus sont inférieures à π), et au voisinage de x_n, à droite, ${f_n}'$ est négative (le cosinus est négatif et les deux sinus sont positifs) donc f_n est décroissante : f_n admet un maximum local en x_n donc x_n est bien le plus petit réel strictement positif en lequel f_n admet un maximum local. On cherche donc la limite de

$$\begin{aligned} f_n(x_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)}{k} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)}{\dfrac{k}{n+1}} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)}{\dfrac{k}{n+1}} \end{aligned}$$

puisque la valeur pour $k = n+1$ est nulle. Comme pour l'exercice 30 où l'on a remplacé n par $2n$ (remplacer par « truc »), ici on a une somme de Riemann à pas constant associée à φ, la seule différence est qu'elle est au rang $n+1$, ce qui donne le résultat voulu car φ est continue donc continue par morceaux.