Feuille d'exercices - Chapitre 17

Sauf indication contraire, n est un entier supérieur ou égal à 1.

1 Dénombrement pur et dur

Exercice 1 : ✪ À l'issue d'un concours, 160 candidats sont admis dont 70 garçons. Déterminer le nombre de classements possibles des 10 premiers admis qui contiennent autant de filles que de garçons.

Correction : Un tel classement est totalement déterminé par :

- Le choix des 5 garçons : $\binom{70}{5}$ choix possibles (on ne peut pas prendre plusieurs fois le même, et l'ordre ne compte pas encore).
- Le choix des 5 filles : $\binom{90}{5}$ choix possibles.
- Le classement de ces 10 élèves : $10!$ choix possibles.

D'après le principe multiplicatif, il y a donc $10! \times \binom{70}{5} \times \binom{90}{5}$ tels classements possibles.

Exercice 2 : ✪ Combien y a-t-il de diagonales dans un polygone convexe à n côtés ?

Correction : Chaque sommet est une extrémité de $n-3$ diagonales (on exclut les segments reliant un sommet à lui-même et à ses deux voisins immédiats, ceux-là sont des côtés du polygone, pas des diagonales). Puisqu'il y a n sommets, par principe additif, cela devrait faire $n(n-3)$ diagonales... sauf que celles-ci sont comptées deux fois, une pour la première extrémité, et une pour la deuxième, si bien que le nombre de diagonales est finalement $\dfrac{n(n-3)}{2}$. Par exemple, dans un pentagone, cela fait $5 \times 2/2 = 5$ diagonales (tracez-les). Remarquons que $n(n-3)/2$ est toujours entier car n et $n-3$ sont de parités différentes donc l'un des deux est pair.

Exercice 3 : ✪ On désire former un jury avec deux scientifiques et trois littéraires. On dispose pour cela de cinq scientifiques et de sept littéraires. Combien de jury peut-on former dans les situations suivantes ?

1. Dans le cas général.
2. Un littéraire donné doit faire partie de tous les jurys.
3. Deux scientifiques ne s'entendent pas et ne peuvent pas faire partie du même jury.
4. Même question avec deux littéraires.

Correction :

1. Un tel jury est totalement déterminé par :
   - Le choix du littéraire : $\binom{7}{3}$ (l'ordre ne compte pas et on ne peut pas prendre plusieurs fois le même).
   - Le choix du scientifique : $\binom{5}{2}$ (l'ordre ne compte pas et on ne peut pas prendre plusieurs fois le même).

   D'après le principe multiplicatif, il y a donc $\binom{7}{3} \times \binom{5}{2}$ choix possibles.
2. Rien ne change pour les scientifiques, mais il n'y a plus que deux places disponibles pour les littéraires, si bien qu'il y a $\binom{6}{2}$ choix possibles pour les littéraires. Le nombre de jurys est donc $\binom{6}{2} \times \binom{5}{2}$.
3. Rien ne change pour les littéraires. Pour les scientifiques, la seule option impossible est que les deux scientifiques soient ensembles : il suffit donc de la retirer, c'est-à-dire qu'il y a $\binom{5}{2} - 1$ choix possibles pour les scientifiques, si bien que le nombre de jurys est $\binom{7}{3} \times \left(\binom{5}{2} - 1\right)$.

4. Rien ne change pour les scientifiques. Pour les littéraires, là c'est un peu plus compliqué puisqu'il y a plusieurs configurations impossibles : celles avec les deux littéraires et un troisième larron. Ce choix de littéraire est totalement déterminé par le choix du troisième littéraire, il y a 5 (ou, ce qui revient au même, $\binom{5}{1}$) choix possibles pour ce troisième littéraire. Finalement, il y a $\binom{7}{3} - 5$ choix possibles pour les littéraires, si bien qu'il y a $\binom{5}{2} \times \left(\binom{7}{3} - 5\right)$ jurys possibles.

Exercice 4 : ✪ Soit A un ensemble fini non vide appelé *alphabet*. Les éléments de A sont appelés des *lettres*. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, un *mot de longueur n sur l'alphabet A* est tout simplement un élément de A^n. Soit $p \geq 1$ le cardinal de A.

1. Combien y a-t-il de mots de longueur n ? Et de mots de longueur n formés de n lettres distinctes ?
2. Si $u = (u_1, \dots, u_n)$ on pose $\widetilde{u} = (u_n, \dots, u_1)$. u est appelé un *palindrome* si $u = \widetilde{u}$. Combien y a-t-il de palindromes de longueur n ?
3. Combien y a-t-il de mots de n lettres sans deux lettres consécutives identiques ?

Correction :

1. D'après le cours, A^n est de cardinal p^n donc il y a p^n mots de longueur n. Toujours d'après le cours, il y a $\dfrac{p!}{(p-n)!} = p(p-1)\cdots(p-n+1)$ mots de longueur n formés de n lettres distinctes.
2. Tout dépend de si n est pair ou impair. Si n est pair, un palindrome est entièrement déterminé par $u_1, \dots, u_{n/2}$, on connaîtra ensuite les autres lettres (on aura $u_n = u_1, u_{n-1} = u_2$ etc.) et il y a p choix possibles pour chaque lettre donc il y a $p^{n/2}$ palindromes de longueur n. Si n est impair, il ne faut pas oublier la lettre centrale : un palindrome de longueur n est entièrement déterminé par $u_1, \dots, u_{\frac{n+1}{2}}$ donc il y a $p^{\frac{n+1}{2}}$ palindromes de longueur n.
3. Un tel mot est entièrement déterminé par :
   - la première lettre : p choix possibles.
   - la deuxième lettre : $p-1$ choix possibles (toutes sauf la première).
   - la troisième lettre : $p-1$ choix possibles (toutes sauf la deuxième, mais on peut reprendre la première).
   - et ainsi de suite, il y a $p-1$ choix pour toutes les lettres sauf la première.

   Finalement, il y a $p \times (p-1)^{n-1}$ mots de longueur n sans deux lettres consécutives identiques.

Exercice 5 : ✪ En France, à tout véhicule est attribué un numéro d'immatriculation (SIV) formé de sept caractères alphanumériques : deux lettres, un tiret, trois chiffres, un tiret et deux lettres (par exemple « KZ-119-EP »). Les lettres interdites sont I, O et U (car elles sont trop ressemblantes avec 1, 0 et V respectivement). La série de chiffres 000 est interdite, ainsi que la série de lettres SS. Enfin la série WW est interdite pour le bloc de gauche (elle correspond aux immatriculations provisoires).

1. Combien y a-t-il d'immatriculations possibles ?
2. Combien y a-t-il d'immatriculations ne contenant aucune lettre ni chiffre dupliqué ?

Correction :

1. Pour choisir une immatriculation, on peut :
   - choisir les lettres du bloc de gauche : sans les deux séries et les lettres interdites, il y a 23 choix pour la première puis (indépendamment du choix de la première lettre) il y a 23 choix pour la deuxième. Par principe multiplicatif, il y a donc 23^2 choix pour les deux premières lettres. Il y a donc $23^2 - 2$ choix pour le bloc de gauche.
   - puis (indépendamment du bloc de gauche choisi) choisir les chiffres : cela consiste à choisir un nombre entre 001 et 999. Il y a 999 possibilités.
   - puis (indépendamment du bloc et des chiffres choisis) choisir les lettres du bloc de droite : il y a $23^2 - 1$ choix pour le bloc de gauche (les 23^2 couples possibles moins la série SS).

   Par principe multiplicatif, il y a donc $(23^2 - 2) \times 999 \times (23^2 - 1) = 277977744$ plaques d'immatriculation possibles
2. Pour choisir une telle immatriculation :
   - Le choix de la première lettre, 23 choix possibles, et de la deuxième, 22 (différente de la première) : il y a 23×22 choix possibles pour le bloc de gauche (plus besoin de retirer SS et WW car les lettres sont distinctes).
   - Il y a $10 \times 9 \times 8$ possibilités pour le bloc de chiffres.
   - Il y a 21 choix pour la première lettre de droite (on retire les lettres de gauche) et 20 pour la suivante. Encore une fois, impossible d'avoir SS donc 21×20 choix pour le membre de droite.

   Finalement, il y a $23 \times 22 \times 10 \times 9 \times 8 \times 21 \times 20$ telles immatriculations.

Exercice 6 : ✪ Soit E l'ensemble des nombres à 6 chiffres ne contenant pas 0 dans leur écriture décimale.

1. Quel est le cardinal de E ?
2. Combien y a-t-il d'éléments de E composés de chiffres différents ?
3. Combien y a-t-il d'éléments impairs dans E ?
4. Combien y a-t-il d'éléments de E ne contenant que des 2 et des 3 ?
5. Soit $k \in [\![1\,;\,6]\!]$. Combien y a-t-il d'éléments dont le premier 4 apparaît en k-ième position ?

Correction :

1. Un tel entier peut être assimilé à un 6-uplet (a, b, c, d, e, f) d'éléments de $[\![1\,;\,9]\!]$ donc E peut être assimilé à $[\![1\,;\,9]\!]^6$ si bien que $\text{card}(E) = 9^6$.
2. Comme dans l'exercice 4 : $\dfrac{9!}{3!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$.
3. Un élément est impair si et seulement s'il se termine par $1, 3, 5, 7, 9$ donc il y a 5 choix pour le dernier chiffre : il y a donc $9^5 \times 5$ éléments impairs dans E.
4. 2 choix possibles pour chaque chiffre (2 ou 3) donc il y a 2^6 tels nombres.
5. Il y a 8 choix possibles pour les chiffres en position $1, \dots, k-1$ et 9 pour les entiers en position $k+1, \dots, 6$ (et l'entier en position k est un 4) donc il y a $8^{k-1} \times 9^{6-k}$ entiers de cette forme.

Exercice 7 - Hirondelles et noix de coco : ✪ Quel est le nombre d'anagrammes (je précise que « anagramme » est un mot féminin !) du mot Ni ? Du mot knights ? Du mot shrubbery ? Et, en ne tenant pas compte des espaces ou des majuscules, du « mot » Ekke Ekke Ekke Ekke Ptang Zoo Boing ?

Correction : Il y a 2 anagrammes du mot Ni et 7! anagrammes du mot knights car toutes les lettres sont distinctes. Pour shrubbery, il y a 2 b et 2 r. On peut faire comme en classe : il y a 9! façons de permuter les 9 lettres, mais plusieurs donnent le même mot : puisqu'il y a deux b, il y a $2! = 2$ façons de permuter les b au sein d'un même mot, donc pour chaque mot, il y a 2 permutations des e qui donnent ce mot, donc il y a 2 permutations qui donnent le même mot, qui ne comptent que pour un mot. Pour avoir le nombre total d'anagrammes, il faut donc diviser par 2, et idem pour le r, si bien qu'il y a $\dfrac{9}{2 \times 2}$ anagrammes du mot shrubbery. On peut aussi raisonner de la façon suivante : donner une anagramme est comme jouer au pendu, il faut mettre les 9 lettres sur les 9 emplacements ci-dessous :

$$\_\quad \_\quad \_\quad \_\quad \_\quad \_\quad \_\quad \_\quad \_$$

Il y a $\binom{9}{2}$ choix pour placer les deux b (l'ordre ne compte pas car, si on place un b à un endroit et un b à un autre, on peut intervertir les deux b et cela ne changera rien) :

$$\_\quad \_\quad \overset{b}{\_}\quad \_\quad \_\quad \_\quad \overset{b}{\_}\quad \_\quad \_$$

Il reste 7 emplacements pour les r : $\binom{7}{2}$ choix possibles :

$$\_\quad \_\quad \overset{b}{\_}\quad \_\quad \overset{r}{\_}\quad \_\quad \overset{b}{\_}\quad \overset{r}{\_}\quad \_$$

et ainsi de suite jusqu'à avoir rempli les emplacements : $\binom{5}{1}$ choix pour le s, $\binom{4}{1}$ choix pour le h, $\binom{3}{1}$ choix pour le y, $\binom{2}{1}$ choix pour le e, et $\binom{1}{1}$ choix pour le u puisqu'il ne reste qu'un emplacement. Par principe multiplicatif, le nombre d'anagrammes de shrubery est :

$$\binom{9}{2} \times \binom{7}{2} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1}$$

et en donnant la valeur des coefficients binomiaux avec des factorielles et en simplifiant, on retrouve évidemment le même résultat. Enfin, pour Ekke Ekke Ekke Ekke Ptang Zoo Boing : il y a :

- 29 lettres.
- 8 e.
- 8 k.
- 3 o.
- 2 g.
- 2 n.
- 1 z.
- 1 b.
- 1 i.
- 1 p.
- 1 t.

- 1 a.

On peut soit raisonner comme dans le cours : 29! permutations des lettres, mais plusieurs donnent le même mot. Les 8 e ne comptent que pour 1 donc il faut diviser par 8!, et idem pour tous les autres, si bien que le nombre d'anagrammes recherché est

$$\frac{29!}{8!8!3!2!2!}$$

ou on joue au pendu : le nombre recherché est

$$\binom{29}{8} \times \binom{21}{8} \times \binom{13}{3} \times \binom{10}{2} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times 1$$

et en écrivant les coefficients binomiaux avec des factorielles on trouve évidemment la même chose.

Exercice 8 : ✪ Si A est une partie non vide de $\llbracket 1\,;\,n \rrbracket$, on définit son diamètre par : $\text{diam}(A) = \max(A) - \min(A)$.

1. Justifier que le diamètre est bien défini.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de parties de $\llbracket 1\,;\,n \rrbracket$ de diamètre k.

Correction :

1. Un ensemble fini admet toujours un maximum et un minimum.
2. Tout d'abord, le diamètre est inférieur ou égal à n donc il n'y a aucune partie de $\llbracket 1\,;\,n \rrbracket$ de diamètre k si $k > n$. Supposons à présent que $k \in \llbracket 0\,;\,n \rrbracket$. Si $k = 0$ alors A est un singleton : n choix possibles. Si $k = 1$ alors le max et le min sont consécutifs si bien que A est de la forme $\{m; m+1\}$ avec $m \in \llbracket 1\,;\,n-1 \rrbracket$: $n-1$ choix possibles. Supposons à présent $k \geq 2$. Si le minimum est connu, le maximum aussi puisqu'il suffit de lui ajouter k. Un ensemble de diamètre k est donc entièrement déterminé par :
   - le minimum : $n-k$ choix possibles (tous les entiers de 1 à $n-k$: il faut garder de la place pour le maximum).
   - les entiers entre le minimum et le maximum. Entre m et $m+k$, il y a $k-2$ entiers, qui peuvent appartenir ou non à A. Pour chaque entier, deux possibilités : appartenir ou non, donc il y a 2^{k-2} choix possibles. On peut aussi dire qu'il y a 2^{k-2} parties dans l'ensemble $\llbracket m+1\,;\,m+k-1 \rrbracket$ qui est un ensembles à $k-2$ éléments.

   Finalement, si $k \geq 2$, il y a $(n-k) \times 2^{k-2}$ parties de diamètre k. Cette démonstration est plus courte que celle vue en classe.

Exercice 9 : ✪ Dans un jeu de 52 cartes, combien y a-t-il de mains de 10 cartes avec exactement cinq trèfles ou exactement deux as ?

Correction : Notons A l'ensemble des mains de 10 cartes avec exactement 5 trèfles et T l'ensemble des mains de 10 cartes avec exactement 2 as. On a donc :

$$\text{card}(A \cup T) = \text{card}(A) + \text{card}(T) - \text{card}(A \cap T)$$

- Par principe multiplicatif, $\text{card}(A) = \binom{13}{5}\binom{39}{5}$ puisqu'il y a $\binom{13}{5}$ façons de choisir 5 cartes parmi les trèfles et $\binom{39}{5}$ façons de choisir les 5 autres cartes parmi les 39 non trèfles
- Par principe multiplicatif, $\text{card}(T) = \binom{4}{2}\binom{48}{8}$ puisqu'il y a $\binom{4}{2}$ façons de choisir 2 cartes parmi les as et $\binom{48}{8}$ façons de choisir les 8 autres cartes parmi les 48 non as.
- Pour compter $\text{card}(A \cap T)$, remarquons qu'il y a deux possibilités disjointes (selon qu'on prend ou non l'as de trèfle) :
  — Ou bien on choisit l'as de trèfle puis les 4 autres trèfles parmi les 12 trèfles restants (il y a $\binom{12}{4}$ possibilités), l'autre as parmi les 3 as restants (il y a $\binom{3}{1}$ possibilités) et les 4 autres cartes parmi celles qui ne sont ni trèfle ni as (il y a $\binom{36}{4}$ possibilités).
  — Ou bien on choisit 5 trèfles parmi les 12 trèfles n'étant pas un as (il y a $\binom{12}{5}$ possibilités), deux as parmi les 3 as n'étant pas trèfle (il y a $\binom{3}{2}$ possibilités) et les 3 autres cartes parmi celles qui ne sont ni trèfle ni as (il y a $\binom{36}{3}$ possibilités).

  Par principes multiplicatif et additif, on on déduit que

$$\text{card}(A \cap T) = \binom{12}{4}\binom{3}{1}\binom{36}{4} + \binom{12}{5}\binom{3}{2}\binom{36}{3}$$

Finalement

$$\text{card}(A\cup T) = \binom{13}{5}\binom{39}{5} + \binom{4}{2}\binom{48}{8} - \binom{12}{4}\binom{3}{1}\binom{36}{4} - \binom{12}{5}\binom{3}{2}\binom{36}{3}.$$

Exercice 10 : ✪ On suppose que $n \geq 2$ et que E est un ensemble à n éléments. Soient $a \neq b$ deux éléments de E.

1. Combien E admet-il de parties ne contenant ni a ni b.
2. Combien E admet-il de parties ne contenant pas a ou ne contenant pas b.

Correction :

1. On cherche le nombre de parties de $E\backslash\{a;b\}$, ensemble à $n-2$ éléments : il y a donc 2^{n-2} telles parties.
2. Si on note P_a l'ensemble des parties ne contenant pas a et P_b l'ensemble des parties ne contenant pas b, alors

$$\text{card}(P_a \cup P_b) = \text{card}(P_a) + \text{card}(P_b) - \text{card}(P_a \cap P_b)$$

si bien que le nombre voulu est $2^{n-1} + 2^{n-1} - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2}$.

Exercice 11 : ✪ Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de familles strictement croissantes constituées de p éléments de l'ensemble $[\![1\,;\, n]\!]$?

Correction : Une telle famille est entièrement déterminée par ses éléments, l'ordre est automatiquement croissant. Il y a donc $\binom{n}{p}$ telles familles.

Exercice 12 : ✪ Soit $n \geq 1$. Combien y a-t-il

1. de couples $(x,y) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ tels que $x < y$?
2. de couples $(x,y) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ tels que $x \leq y$?
3. de triplets $(x,y,z) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ tels que $x < y < z$?

Correction :

1. Pour tout entier $x \in [\![1\,;\, n-1]\!]$, il y a $n-x$ valeurs possibles de y (tous les entiers de $x+1$ à n), et aucune valeur pour $x = n$. Par principe additif, le nombre de tels couples est :

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

2. Pour tout entier $x \in [\![1\,;\, n]\!]$, il y a $n-x+1$ valeurs possibles de y (tous les entiers de x à n). Par principe additif (les différents cas de figure sont incompatibles), le nombre de tels couples est (on fait ensuite le changement d'indice $j = n+1-k$ qui revient à compter les entiers en sens inverse)

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

On pouvait aussi dire que c'est le nombre de couples de la partie précédente $+n$ car on ajoute les couples où $x = y$.

3. De même que dans l'exercice précédent, il y a $\binom{n}{3} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ tels triplets.

Exercice 13 : ✪ Donner le coefficient de $x^7y^3z^2$ dans $(x+2y+3z)^{12}$ à l'aide d'un raisonnement combinatoire.

Correction : Il faut piocher 7 x dans les 12 parenthèses : $\binom{12}{7}$ choix possibles. Il faut aussi piocher 3 fois le terme $2y$ dans les 5 termes restants : $\binom{5}{2}$ choix possibles. Ensuite, il n'y a plus qu'un choix pour les $3z$. Cependant, il ne faut pas oublier qu'on choisit $2y$ et $3z$: le 2 est aussi à la puissance 3 et le z à la puissance 2. Finalement, le coefficient cherché est $\binom{12}{7} \times \binom{5}{2} \times 2^3 \times 3^2$.

Exercice 14 - Identité de Vandermonde, le retour : ✪✪ Soit $(n,p,q) \in \mathbb{N}^3$. À l'aide d'un raisonnement combinatoire, retrouver le résultat suivant :

$$\sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k} \times \binom{p}{q-k} = \binom{n+p}{q}$$

Correction : On se donne $n+p$ objets. Il y a $\binom{n+p}{q}$ façons de choisir q objets parmi ces $n+p$ objets. Mais on peut aussi faire comme suit : pour tout $k \in [\![0\,;\, q]\!]$, on peut d'abord choisir k objets parmi les n premiers puis $q-k$ objets parmi les

p restants, ce qui donne, par principe multiplicatif, $\binom{n}{k} \times \binom{p}{q-k}$. Or, toutes ces possibilités, pour chaque valeur de k, sont incompatibles puisque dans chaque cas de figure, on aura un nombre d'objets différents parmi les n premiers, si bien que par principe additif, le nombre de façons de choisir ces objets est la somme de l'énoncé, ce qui permet de conclure.

Exercice 15 : ✪✪ Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules 1 à 5 sont blanches et les boules 6 à 15 sont noires. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.

1. En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages contenant deux boules blanches et trois boules noires ?

Correction :

1. Comme d'habitude : $\dfrac{15!}{10!} = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11$.
2. Un tel tirage est entièrement déterminé par les numéros des boules blanches ($\binom{5}{2}$ choix possibles) et par les numéros des boules noires ($\binom{10}{3}$ choix possibles) ainsi que par l'ordre des cinq boules (5! choix possibles). Le nombre voulu est donc $\binom{5}{2} \times \binom{10}{3} \times 5!$.

Exercice 16 - Tu es comme le H de Hawaï : ✪✪ Le HUMUHUMUNUKUNUKUAPUA'A est un poisson multicolore et un emblème de l'état de Hawaï.

1. Démontrer que le nombre N d'anagrammes que l'on peut écrire avec 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P (c'est-à-dire sans prendre en compte le U) est donné par la formule (on ne demande pas de faire le calcul)

$$N = \frac{12!}{(2!)^4 3!}$$

Dans les questions suivantes on pourra donner les résultats sous forme d'expressions pouvant contenir la lettre N. On ne demande pas de calculer numériquement ni de simplifier les résultats.

2. Combien y a-t-il d'anagrammes différentes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA ?
3. Une anagramme de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA est dite *équilibrée* lorsqu'elle est sans U aux extrémités et sans U consécutifs, c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme

$$\bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet U \bullet$$

où chacun des 10 symboles $\bullet$ désigne une ou plusieurs lettres parmi les 12 suivantes : 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P.

(a) Justifier qu'il n'est pas possible que l'un des symboles $\bullet$ représente 4 lettres ou plus.

(b) Combien existe-t-il d'anagrammes équilibrées de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA où l'on trouve trois lettres consécutives qui ne sont pas des U ?

(c) Combien existe-t-il d'anagrammes équilibrées de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA où l'on ne trouve pas trois lettres consécutives qui ne sont pas des U ?

(d) Combien existe-t-il d'anagrammes équilibrées de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA ?

Correction :

1. Idem que dans l'exercice 7.
2. Idem, on obtient

$$\frac{21!}{9!(2!)^4 3!}$$

On peut aussi dire qu'une telle anagramme est obtenue en plaçant les U ($\binom{9}{21}$ choix possibles) puis en plaçant les autres lettres, et on se retrouve dans le cas de figure de la question précédente, il y a N choix possibles, si bien que le nombre recherché est $\binom{21}{9} \times N$ et on trouve évidemment la même chose.

3. (a) Il y a 10 points : si l'un d'eux représente 4 lettres ou plus, il reste au plus 8 lettres à mettre sur les 9 points restants, un point sera donc vide et il y aura deux U consécutifs ce qui est exclu.

(b) Si trois lettres consécutives ne sont pas des U, cela signifie qu'un point représente trois lettres. Il reste donc 9 lettres à mettre en 9 points donc une lettre par points. Une telle anagramme est donc entièrement déterminée par le choix du point contenant 3 lettres (10 choix possibles), les autres points accueilleront forcément une seule lettre, et l'ordre des autres lettres N choix possibles. Par principe multiplicatif, il y a $10N$ telles anagrammes.

(c) Si un point représente deux lettres au plus, alors il y a deux points qui représentent deux lettres, les autres en représentent une seule. Une telle anagramme est totalement déterminée par le choix des deux points ($\binom{10}{2}$ choix possibles) et par le choix des autres lettres (N choix possibles). Il y a donc $\binom{10}{2} N$ choix possibles.

(d) Les deux cas précédents étant incompatibles, par principe additif, il y a

$$10N + \binom{10}{2} N$$

anagrammes équilibrées.

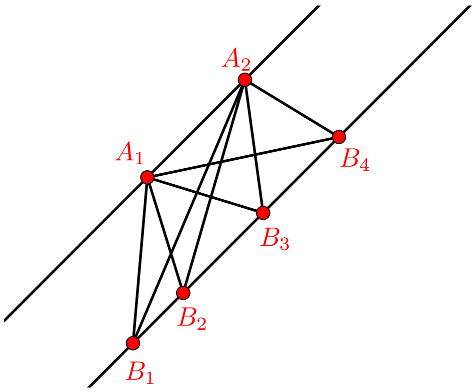
Exercice 17 : ✪✪

1. Soit $p \in [\![1\,;\, n]\!]$ et soit A une partie non vide de $[\![1\,;\, n]\!]$ de cardinal p. Montrer qu'il existe une unique application strictement croissante de $[\![1\,;\, p]\!]$ dans $[\![1\,;\, n]\!]$ dont l'image est A.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre d'applications de $[\![1\,;\, p]\!]$ dans $[\![1\,;\, n]\!]$ strictement croissantes.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de l'exercice 24, déterminer le nombre d'applications croissantes de $[\![1\,;\, p]\!]$ dans $[\![1\,;\, n]\!]$.

Correction :

1. Notons les éléments de A $x_1 < \cdots < x_p$ qu'on ordonne de façon strictement croissante. La seule fonction bijective strictement croissante est la fonction f qui envoie 1 sur x_1, 2 sur x_2 etc. En effet, si $f(1) > 1$, si on note i l'antécédent de 1 (1 est atteint car f est surjective) alors $1 < i$ et $f(i) < f(1)$ ce qui est absurde car f est strictement croissante. De même on prouve que $f(2) = 2$ etc.
2. Une application strictement croissante est injective donc son image a p éléments. Une telle application est entièrement déterminée par son image d'après la fonction précédente (car il y a unicité). Par conséquent, il y a autant de fonctions strictement croissantes que de parties de $[\![1\,;\, n]\!]$ de cardinal p, c'est-à-dire $\binom{n}{p}$.
3.

Exercice 18 : ✪✪ On dispose de deux droites parallèles, dont l'une contient p points notés $A_1, \dots, A_p$ et l'autre contient q points, notés $B_1, \dots, B_q$. On suppose que trois des segments $[A_iB_j]$ ne sont jamais concourants.



Combien y a-t-il de points d'intersection entre les segments (si on ne compte pas les sommets) ?

Correction : Sur l'exemple ci-dessus, il y a 6 points d'intersection. Si on prend quatre points A_i, A_k, B_j, B_l, alors les segments $[A_iB_j]$ et $[A_kB_l]$ ont un point d'intersection si et seulement si $i < k$ et $j > l$. En effet, si $i = j$ alors les segments ont un sommet commun donc n'ont pas d'autre point d'intersection, et idem si $k = l$. Si $i < j$ et $k < l$, les segments ne sont pas parallèles mais « vont dans la même direction » donc ne s'intersectent pas (on pourrait le prouver rigoureusement en introduisant un repère mais ce n'est pas l'esprit de l'exercice). Dès lors, la seule possibilité est d'avoir $i < k$ et $j > l$ (les segments se croisent). En d'autres termes, quand on prend deux points parmi les A et deux points parmi les B, il n'y a qu'une possibilité pour avoir un point d'intersection, et ce point d'intersection est différent pour chaque choix de points car trois segments ne sont pas concourants. En conclusion, il y a autant de points d'intersection que de façon de choisir deux points parmi les A et de façons de choisir deux points parmi les B, c'est-à-dire (par principe multiplicatif)

$$\binom{p}{2} \times \binom{q}{2} = \frac{p(p-1)}{2} \times \frac{q(q-1)}{2}$$

On constate que pour $p = 2$ et $q = 4$ on trouve bien 6 points d'intersection.

Exercice 19 : ✪✪✪ Il y a $128 = 2^7$ participants au tournoi simple messieurs de Roland-Garros. Combien y a-t-il de façons d'organiser le premier tour, en considérant que l'ordre des parties n'a pas d'importance ?

Correction : Posons $n = 2^7$. Un tel premier tour est entièrement déterminé par l'ordre des joueurs, c'est-à-dire qu'il y a $n!$ permutations. Mais parmi ces permutations, par exemple, si on échange les deux premiers joueurs, cela donne le même premier tour. On peut faire pareil pour tous les matches, et il y en a $n/2 = 2^6$. Par conséquent, il faut diviser par $2^{n/2}$.

Finalement, on divise aussi par $(n/2)!$ car on peut permuter les $n/2$ matches sans changer le premier tour. Finalement, si on pose $n = 2^7 = 128$, il y a

$$\frac{n!}{2^{n/2} \times (n/2)!} = \frac{128!}{2^{64} \times 64!}$$

façons d'organiser le premier tour.

Exercice 20 : ✪✪✪ Un jeu de tarot est constitué de 78 cartes dont 22 atouts (21 numérotés de 1 à 21 et l'excuse ne portant pas de numéro). Combien y a-t-il de tirages de quinze cartes

1. en tout ?
2. contenant les trois bouts (le 1, le 21 et l'excuse) ?
3. contenant au moins un bout ?
4. contenant au moins une poignée (au moins 8 atouts) ?
5. une misère d'atouts (aucun atout) ?
6. contenant 5 atouts dont exactement un multiple de 3 et un multiple de 5 ?

1. $\binom{78}{15}$.
2. Il y a $\binom{75}{12}$ choix : on choisit les 12 cartes restantes.
3. S'il y a un seul bout, il y a trois choix pour le bout et $\binom{75}{14}$ choix pour les autres cartes (on pioche parmi les 75 cartes qui ne sont pas des bouts) ce qui fait, par principe multiplicatif, $3 \times \binom{75}{14}$ tirages possibles. S'il y a deux bouts, on a $\binom{3}{2} = 3$ choix pour les deux bouts, et $\binom{75}{13}$ choix pour les autres ce qui donne $3\binom{75}{13}$, et le cas des trois bouts a été réglé à la question précédente. Par principe additif (les trois cas sont incompatibles) :
$$3 \times \binom{75}{14} + 3 \times \binom{75}{13} + \binom{75}{12}$$
4. Si ce tirage contient k atouts, il est entièrement déterminé par le choix des atouts, $\binom{22}{k}$ choix possibles, et par le choix des autres cartes, $\binom{56}{15-k}$ (on prend les cartes restantes parmi les cartes qui ne sont pas des atouts). Par principe multiplicatif, il y a $\binom{22}{k} \times \binom{56}{15-k}$ tirages possibles avec k atouts. Par principe additif, le nombre de tirages avec une poignée est :
$$\sum_{k=8}^{15} \binom{22}{k} \times \binom{56}{15-k}$$
5. Toutes les cartes sont prises dans les 56 cartes qui ne sont pas des atouts donc il y a $\binom{56}{15}$ tirages possibles.
6. Il y a deux cas de figure : soit le tirage contient 15, et alors il n'y a plus d'autre multiple de 3 ni de 5, soit les multiples de 3 et de 5 sont distincts et distincts de 15. Dans le premier cas, il y a $\binom{12}{4}$ choix pour les atouts (quatre atouts qui ne sont pas des multiples de 3 ou de 5 c'est-à-dire pas $3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21$) et $\binom{56}{10}$ pour les cartes qui ne sont pas des atouts, si bien qu'on a $\binom{12}{4} \times \binom{56}{10}$ choix tirages possibles lorsqu'il y a le chiffre 15. Dans le deuxième cas, il y a 6 choix possibles pour le multiple de 3 (on enlève 15) et 3 choix pour le multiple de 15 puis $\binom{12}{3}$ pour les 3 atouts restants puis toujours $\binom{56}{10}$ pour les cartes restantes, et donc il y a $6 \times 3 \times \binom{12}{3} \times \binom{56}{10}$ tels tirages. Enfin, par principe additif, le nombre cherché est :
$$\binom{12}{4} \times \binom{56}{10} + 6 \times 3 \times \binom{12}{3} \times \binom{56}{10}$$

Exercice 21 : ✪✪✪ Combien y a-t-il de mains de chaque sorte (quinte flush, carré, full, couleur, suite, brelan, double paire, paire, rien) au poker (5 cartes, dans un jeu de 52 cartes) ?

Correction :

- Une quinte flush est entièrement déterminée par sa couleur, 4 choix possibles, et par sa plus petite carte (inutile de connaître les autres, c'est automatique). En effet, si sa plus petite carte est un 5 alors les cartes sont $5, 6, 7, 8, 9$. Il y a 10 choix possibles pour la première carte : As, $2, \dots 10$. Le valet et les autres ne conviennent pas car Valet - Dame - Roi - As -2 ne marche pas (mais As - 2 - 3 - 4 -5 convient). Il y a donc 40 quinte flush.
- Un carré est entièrement déterminé par la valeur du carré (disons carré de dames), 13 choix possibles, et par le choix de la cinquième carte, 48 choix possibles. Il y a donc 13×48 choix possibles.
- Un full est entièrement déterminé par la valeur de la carte du brelan (disons, brelan de rois), 13 choix possibles, puis par leur couleur, $\binom{4}{3}$ choix possibles, puis par la valeur de la paire, disons paire de dames, 12 choix possibles (toutes sauf la valeur du brelan) et par les couleurs de la paire, $\binom{4}{2}$ choix possibles. Par conséquent, il y a $13 \times \binom{4}{3} \times 12 \times \binom{4}{2}$ fulls possibles.

- Une couleur est entièrement déterminée par sa couleur, 4 choix possibles, et par ses cinq cartes, $\binom{13}{5}$ choix possibles, il y a donc $4 \times \binom{13}{5}$ choix possibles auxquels il faut soustraire 40 car, si les cinq cartes se suivent, on a une quinte flush.
- Une suite est entièrement déterminée par ses cinq cartes : il y a $\binom{52}{5}$ choix possibles, auxquels il faut soustraire le nombre de quinte flush, le nombre de carrés, le nombre de fulls et le nombre de couleurs.
- Un brelan est entièrement déterminé par la valeur du brelan, 13 choix possibles (disons brelan de rois), puis par la couleur des cartes, $\binom{4}{3}$ choix possibles, puis par les deux autres cartes, $\binom{48}{2}$ (on prend les deux cartes restantes parmi les cartes qui ne sont pas des rois si on a pris un brelan de rois). Cela ne peut pas être un carré car on ne tire pas le quatrième roi, mais on peut avoir un full si, par exemple, on tire deux dames. On ne peut pas avoir de couleur, de suite, de quinte flush. Finalement, il y a $13 \times \binom{4}{3} \times \binom{48}{2}$, moins le nombre de fulls, mains possibles avec un brelan.
- Il y a $\binom{13}{2}$ choix possibles pour les valeurs des paires (attention de ne pas prendre 13 choix possibles pour la première paire et 12 pour la seconde, car en faisant comme ça on introduit une notion d'ordre entre les paires) puis $\binom{4}{2}$ choix pour les couleurs de la première paire, puis $\binom{4}{2}$ choix pour les couleurs de la seconde paire. Puis, si on enlève les 8 cartes correspondant à ces deux valeurs (par exemple, si on a une paire de rois et une paire de dames, on enlève les rois et les dames) et on pioche là-dedans une cinquième carte, ce qui fait 44 choix possibles. Il est impossible d'avoir quoi que ce soit d'autre qu'une double paire par construction donc il n'y a rien à enlever, ce qui fait $\binom{13}{2} \times \binom{4}{2}^2 \times 44$ choix pour une double paire.
- Pour la paire, 13 choix pour la valeur, $\binom{4}{2}$ pour les couleurs, $\binom{48}{3}$ pour piocher les trois cartes restantes dans ce qui reste (on a aussi enlevé les cartes de la même valeur que celles dans la paire, même celles qui ne sont pas dans la paire, pour ne pas risquer d'avoir un brelan ou un carré). Cependant, il faut soustraire le full et la double paire, si bien qu'on a $13 \times \binom{4}{2} \times \binom{48}{3}$ moins le nombre de fulls moins le nombre de doubles paires.
- C'est le nombre total de tirages, $\binom{52}{5}$, moins tout le reste.

Exercice 22 - Formule d'inversion de Pascal : ✪✪✪

1. Montrer que $\displaystyle\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}$ pour tous $0 \leq j \leq k \leq n$. Interprétation combinatoire ?
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$b_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} a_j$$
3. Soit $n \geq 1$. On appelle dérangement une permutation sans point fixe (on rappelle qu'une permutation d'un ensemble E peut être vue comme une bijection de E). Soit D_n le nombre de dérangements d'un ensemble à n éléments. Montrer que
$$D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

Correction : Les deux premières questions ont été prouvées dans le chapitre 4. L'interprétation combinatoire de la première question est la suivante : si on choisit k objets parmi n (une équipe) puis j personnes parmi ces k (les chefs), cela revient au même que de choisir les chefs d'abord puis de choisir les $n-k$ membres restants de l'équipe parmi les $n-j$ objets suivants. Répondons à présent à la question 3. L'ensemble des permutations de E, de cardinal $n!$, est l'union disjointe des ensembles des permutations à k points fixes, pour k allant de 0 à n. Or, si $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, une permutation à k points fixes est entièrement déterminée par le choix des points fixes, $\binom{n}{k}$ choix possibles, puis par l'image des autres, dont aucun n'est un point fixe : on a donc un dérangement pour les autres éléments, au nombre de $n-k$, si bien qu'il y a D_{n-k} possibilités. Par principe multiplicatif, il y a $\binom{n}{k} \times D_{n-k}$ permutations avec k points fixes, et par principe additif :
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$$

En faisant un changement d'indice :
$$n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} D_j = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_k$$
car l'indice est muet, et puisque $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on a

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$

On conclut en appliquant la question 2.

Exercice 23 - Combinaisons avec répétitions : ✪✪✪ On appelle combinaison avec répétitions de k éléments parmi n un choix sans ordre de k éléments parmi n avec d'éventuelles répétitions. Par exemple, il y a 10 combinaisons avec répétitions de 3 éléments de l'ensemble $\llbracket 1\,;\,3 \rrbracket$:

$$(1,2,3),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,2),(2,2,3),(1,3,3),(2,3,3),(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3)$$

1. On se donne $n+k-1$ emplacements symbolisés par des étoiles :

$$\underbrace{* * \cdots *}_{n+k-1 \text{ emplacements}}$$

   Montrer qu'on peut représenter une combinaison à k éléments dans un ensemble à n éléments par $n+k-1$ emplacements dont $n-1$ sont occupés par des barres verticales et les autres par des ronds :

$$\underbrace{\circ \circ || \circ | \cdots | \circ}_{n+k-1 \text{ emplacements}}$$

2. En déduire que le nombre de combinaisons avec répétitions de k éléments parmi n est $\displaystyle\binom{n+k-1}{k}$.

Correction :

1. Une combinaison à k éléments est entièrement déterminée par le nombre de 1, le nombre de 2 etc. jusqu'au nombre de n. On va en fait la coder de la façon suivante : les premiers ronds (il peut n'y en avoir aucun s'il n'y a pas de 1) représentent les 1, ensuite il y a une barre symbolisant la séparation, ensuite les ronds représentent les 2, jusqu'à la prochaine barre verticale, et ensuite les ronds représentent les 3 etc. Par exemple, pour représenter une combinaison à 6 éléments dans un ensemble à 4 éléments, le diagramme $\circ \circ \circ | \circ || \circ \circ$ représente la combinaison $(1,1,1,2,4,4)$ car il y a trois 1, un 2, aucun 3 et deux 4. Dans le cas général, il y a $n-1$ barres verticales (une pour séparer les 1 des 2, une pour séparer les 2 des 3 etc. et une barre pour séparer les $n-1$ des n), et il y a k ronds pour les k éléments apparaissant dans la combinaison.
2. Une combinaison est donc entièrement déterminée par la place des barres verticales : il y en a donc $\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$ grâce à la propriété de symétrie des coefficients binomiaux.

2 Relations de récurrence

Exercice 24 - Nombre de surjections : ✪✪ Soient n et p appartenant à $\mathbb{N}^*$. On note $S(n,p)$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.

1. Calculer $S(n,p)$ lorsque $p > n$, ainsi que $S(n,n), S(n,1)$ et $S(n,2)$.
2. Calculer $S(n+1,n)$.
3. On suppose que $n \geq p+1$. Montrer que :

$$S(n,p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

   On pourra utiliser l'exercice 22.
4. Montrer que pour tout $p \in \llbracket 2\,;\,n-1 \rrbracket$, $S(n,p) = p \times (S(n-1,p-1) + S(n-1,p))$. En déduire que :

$$S(n+2,n) = \frac{n(3n+1)(n+2)!}{24}$$

Correction :

1. Lorsque $p > n$, il n'existe (cf. cours) aucune bijection d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments donc $S(n,p) = 0$. Une application d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à n éléments est surjective si et seulement si elle est bijective. Dès lors, $S(n,n)$ est le nombre de bijections entre deux ensembles à n éléments donc $S(n,n) = n!$. Il n'y a qu'une application entre un ensemble à n éléments dans un ensemble à 1 élément (l'application qui envoie tous les éléments sur l'unique élément de l'ensemble d'arrivée) et elle est surjective, si bien que $S(n,1) = 1$. Enfin, Il y a 2^n

applications d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à 2 éléments (rappelons que l'ensemble des fonctions de E dans F est F^E, de cardinal, quand les ensembles sont finis évidemment, $\text{card}(F)^{\text{card}(E)}$) et seules les deux fonctions constantes ne sont pas surjectives, si bien que $S(n,2) = 2^n - 2$.

2. Une surjection d'un ensemble E à $n+1$ éléments dans un ensemble F à n éléments est entièrement déterminée :
   - par l'unique élément de F atteint deux fois (en effet, une telle application atteint deux fois un élément et une seule fois tous les autres) : n choix possibles.
   - par les deux antécédents de cet élément : $\binom{n+1}{2}$ (car il n'y a pas d'ordre) choix possibles.
   - par les images des autres éléments. Or, si on note y l'unique élément de F admettant deux antécédents, et x_1 et x_2 ses deux antécédents, la restriction de f à $E\backslash\{x_1;x_2\}$ est une bijection de cet ensemble vers $F\backslash\{y\}$, deux ensembles à $n-1$ éléments, donc il y a $(n-1)!$ choix possibles.

   Par principe multiplicatif, $S(n+1,n) = n \times \binom{n+1}{2} \times (n-1)! = \dfrac{n\times(n+1)\times n \times (n-1)!}{2} = \dfrac{n\times(n+1)!}{2}$.
3. F^E (où on a noté E un ensemble à n éléments et F un ensemble à p éléments) est l'union disjointe des A_k où A_k est l'ensemble des fonctions de E dans F dont l'image a k éléments, pour k allant de 0 à n. Un élément de A_k est entièrement déterminé par les éléments de son image, $\binom{p}{k}$ choix possibles, et par la fonction elle-même, c'est-à-dire « les flèches » i.e. qui est envoyé sur qui. Or, une application est toujours une surjection sur son image : il y a donc $S(n,k)$ façons de définir une application de E dans l'image choisie. Par conséquent, $\text{card}(A_k) = \binom{p}{k}S(n,k)$, si bien que
$$\text{card}(F^E) = p^n = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}S(n,k)$$
   L'exercice 22 (avec p à la place de n, $S(n,k)$ à la place de b_k et p^n à la place de a_n ou plutôt de a_p puisqu'on a remplacé n par p, ici n est une constante) donne le bon résultat.
4. Soit $p \in [\![2\,;\, n-1]\!]$. Une surjection de E dans F (toujours avec E de cardinal n, qu'on note $\{x_1;\dots;x_n\}$, et F de cardinal p) est entièrement déterminée par :
   - L'image de x_n, qu'on note y : p choix possibles.
   - Les images des autres éléments de E, c'est-à-dire la restriction de f à $E\backslash\{x_n\}$. Deux cas de figure incompatibles : soit f atteint de nouveau y et donc la restriction de f à $E\backslash\{x_n\}$ est une surjection sur F, il y a donc $S(n-1,p)$ choix possibles, soit f n'atteint plus y et donc on a une surjection de $E\backslash\{x_n\}$ dans $F\backslash\{y\}$, ce qui fait $S(n-1,p-1)$ choix possibles, et par principe additif, cela donne $S(n-1,p-1)+S(n-1,p)$ choix possibles.

   Le principe multiplicatif donne le résultat voulu. Par conséquent :
$$S(n+2,n) = n\times(S(n+1,n-1)+S(n+1,n))$$
   et, en utilisant la question 2 :
$$S(n+2,n) = n\times\left(S(n+1,n-1)+\frac{n\times(n+1)!}{2}\right)$$
   Montrons le résultat voulu par récurrence. D'une part, $S(3,1)=1$ d'après la question 1, et d'autre part, si $n=1$,
$$\frac{n(3n+1)(n+2)!}{24} = 1$$
   donc le résultat est vrai au rang 1. Soit $n \geq 2$, supposons le résultat vrai au rang $n-1$ et prouvons qu'il est vrai au rang n. D'après ce qui précède puis par hypothèse de récurrence :
$$\begin{aligned}
S(n+2,n) &= n\times\left(S(n+1,n-1)+\frac{n\times(n+1)!}{2}\right)\\
&= n\times\left(\frac{(n-1)(3(n-1)+1)(n-1+2)!}{24}+\frac{n(n+1)!}{2}\right)\\
&= n\times\left(\frac{(n-1)(3n-2)(n+1)!+12n(n+1)!}{24}\right)\\
&= \frac{n[(n-1)(3n-2)+12n](n+1)!}{24}\\
&= \frac{n(3n^2+7n+2)(n+1)!}{24}
\end{aligned}$$
   Or, $3n^2+7n+2=(3n+1)(n+2)$ donc

$$\begin{aligned} S(n+2,n) &= \frac{n(3n+1)(n+2)(n+1)!}{24} \\ &= \frac{n(3n+1)(n+2)!}{24} \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence.

Exercice 25 - Nombres de Bell : ✪✪ Pour tout $n \geq 0$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n (l'ordre des ensembles formant la partition n'ayant pas d'importance) avec la convention $B_0 = 1$.

1. Calculer B_1, B_2 et B_3.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

On pourra, dans un ensemble E de cardinal $n+1$, se donner un élément a de E et séparer les cas, selon le cardinal de la partie de E dans la partition qui contient a.

Correction :

1. $B_1 = 1$ car la seule partition d'un singleton est le singleton lui-même. $B_2 = 2$ car si $E = \{a;b\}$, il y a deux partitions : soit E tout seul, soit les deux ensembles $\{a\}$ et $\{b\}$. Enfin, $B_3 = 5$ car les seules partitions possibles d'un ensemble à trois éléments $E = \{a;b;c\}$ sont E tout seul, $\{a\}$ et $\{b;c\}$, $\{a;b\}$ et $\{c\}$, $\{b\}$ et $\{a;c\}$, et enfin $\{a\}, \{b\}$ et $\{c\}$.
2. Soit donc E un ensemble de cardinal $n+1$, et soit $a \in E$. Soit $k \in [\![0\,;\,n]\!]$ et supposons que P soit une partition de E dont l'ensemble contenant a, qu'on notera E_a, soit de cardinal $k+1$ (les différents cas de figure sont incompatibles, nous appliquerons ensuite le principe additif). Cette partition est totalement déterminée :
   - par les éléments de $E_a \backslash \{a\}$ qui est de cardinal k, qu'on prend parmi les éléments de $E\backslash\{a\}$ qui est de cardinal n donc il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles.
   - par le choix des autres ensemble formant la partition P : ils forment une partition de $P\backslash E_a$ qui est un ensemble à $n-k$ éléments, il y a donc B_{n-k} possibilités. Par principe multiplicatif, il y a $\binom{n}{k} \times B_{n-k}$ telles partitions, et le principe additif permet de conclure.

Exercice 26 : ✪✪ Pour tout ensemble E à n éléments, on note u_n le nombre d'involutions de E i.e. le nombre de fonctions $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n$.

Correction :

1. Si $n = 1$, il n'y a qu'une application de E dans R, l'identité, et elle est involutive donc $u_1 = 1$. Si $n = 2$, notons $E = \{a;b\}$. Il n'y a que deux involutions : l'identité, et la fonction f définie par $f(a) = b$ et $f(b) = a$, donc $u_2 = 2$. Enfin, $u_3 = 4$. Notons en effet $E = \{a;b;c\}$. L'identité est évidemment une involution. Cherchons les involutions distinctes de l'identité. Supposons dans un premier temps que $f(a) = a$. Alors $f(b) = c$. En effet, si $f(b) = b$ alors, c étant forcément atteint, on a $f(c) = c$ donc f est l'identité ce qui est exclu. Dès lors, $f(a) = a, f(b) = c$ et $f(c) = b$, qui est bien involutive. Supposons à présent que $f(a) = b$. Puisque f est involutive, alors $f(f(a)) = f(b) = a$ et donc on a forcément $f(c) = c$, et cette fonction est bien une involution. Enfin, si $f(a) = c$, alors de même $f(c) = a$ et $f(b) = b$ ce qui est encore une involution, et cela fait bien 4 involutions.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que E ait $n+2$ éléments qu'on note $x_1, \dots, x_{n+2}$. Il y a deux cas de figure : soit $f(x_{n+2}) = x_{n+2}$, soit non.
   - Si $f(x_{n+2}) = x_{n+2}$, alors f est entièrement déterminée par sa restriction à $E\backslash\{x_1;\dots;x_{n+1}\}$ et est involutive sur cet ensemble : u_{n+1} possibilités.
   - Sinon, f est entièrement déterminée par l'image de x_{n+2}, qu'on note x_i, et par sa restriction à $E\backslash\{x_i;x_{n+2}\}$. En effet, $f(x_i) = x_{n+2}$ puisque f est involutive. Il y a $n+1$ choix pour x_i (x_{n+2} est exclu par hypothèse) et il y a u_n choix pour la restriction puisque celle-ci est une involution sur un ensemble à n éléments (puisqu'on a enlevé x_i et x_{n+2}) : $(n+1)u_n$ possibilités par principe multiplicatif.

   Le principe additif permet de conclure.

Exercice 27 - Lemme de Kaplansky : ✪✪ Pour tout $n \geq 1$, on note u_n le nombre de parties (éventuellement vides) de $[\![1\,;\, n]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit $n \geq 1$. Trouver une relation de récurrence entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n. En déduire la valeur de u_n.

Correction :

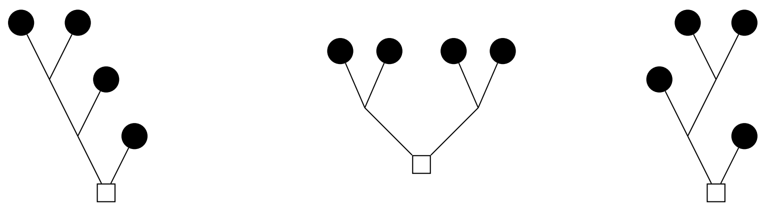
1. On a évidemment $u_1 = 2$ puisque les parties de $\{1\}$ sont $\varnothing$ et $\{1\}$ qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs. Les parties de $[\![1\,;\, 2]\!]$ sont $\varnothing, \{1\}, \{2\}$ et $[\![1\,;\, 2]\!]$ donc y en a 3 qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs, si bien que $u_2 = 3$. Enfin, les parties de $[\![1\,;\, 3]\!]$ sont $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1;2\}, \{1;3\}, \{2;3\}$ et $[\![1\,;\, 3]\!]$ si bien que $u_3 = 5$.
2. Soit E une partie de $[\![1\,;\, n+2]\!]$ ne contenant pas deux entiers consécutifs. Si elle contient $n+2$, elle ne contient pas $n+1$ (car elle ne contient pas deux entiers consécutifs) et les éléments restants forment une partie de $[\![1\,;\, n]\!]$ (éventuellement vide) ne contenant pas deux entiers consécutifs : u_n choix possibles. Si elle ne contient pas $n+2$, alors c'est une partie de $n+1$ ne contenant pas deux entiers consécutifs, il y a u_{n+1} choix possibles. Les deux cas étant incompatibles, par principe additif, on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On a une suite récurrence linéaire d'ordre 2 (et une relation qu'on connaît : la même que la suite de Fibonacci, mais ce n'est pas la suite de Fibonacci puisque les conditions initiales ne sont pas les mêmes). On peut soit faire la méthode habituelle (c'est long...) soit reconnaître en fait la suite de Fibonacci décalée de 2 ! En effet, on a $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3$ etc. et $u_1 = 2, u_2 = 3$ etc. Les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(F_{n+2})_{n \geq 1}$ ont les mêmes deux premiers termes et vérifient la même relation de récurrence donc sont égales. Finalement :

$$\forall n \geq 1, u_n = F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]$$

Exercice 28 : ✪✪ Montrer que le nombre d'arbres à $n+1$ feuilles est C_n, le n-ième nombre de Catalan, si l'on convient que :

- Par convention, il existe un seul arbre à 1 feuille.
- À la base d'un arbre se trouve un « nœud racine ».
- Chaque nœud possède une branche gauche et une branche droite (sauf pour un arbre ne contenant qu'une feuille).
- Chaque branche mène à un nœud ou à une feuille.

Voici trois exemples d'arbres à 4 feuilles (les disques noirs) :



On rappelle que les nombres de Catalan sont définis par $C_0 = 1$ et :

$$\forall n \geq 1, C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \times C_{n-1-k}$$

Correction : Il suffit donc de prouver, si on note A_n le nombre cherché, que $A_0 = 1$ et que (A_n) vérifie la même relation de récurrence. Il n'y a qu'un seul arbre à 1 feuille par convention donc $A_0 = 1$. Soit $n \geq 1$, et on se donne un arbre à $n+1$ feuilles. Si $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$, notons $k+1$ le nombre de feuilles de l'arbre de gauche (il y a un arbre de gauche et un arbre de droite, qui ont entre 1 et n feuilles). Un tel arbre est entièrement déterminé par l'arbre de gauche qui contient $k+1$ feuilles, A_k choix possibles, et par l'arbre de droite, qui contient $n-k$ feuilles donc il y a A_{n-1-k} choix possibles. Par principe multiplicatif, il y a $A_k \times A_{n-1-k}$ choix possibles pour un tel arbre puis, ces cas étant incompatibles, par principe additif, on a bien la relation de récurrence voulue ce qui permet de conclure.

3 Problèmes ensemblistes

Exercice 29 : ✪ Soit E un ensemble à n éléments. Montrer que $\displaystyle\sum_{X \subset E} \text{card}(X) = n2^{n-1}$.

Correction : Notons S cette somme. Alors :

$$S = \sum_{k=0}^{n} \sum_{X, \text{card}(X)=k} k$$

k ne dépend pas de l'objet sommé sur la deuxième somme qui est X donc est multiplié par le nombre de termes, à savoir le nombre de parties X de cardinal k. Or, il y a $\binom{n}{k}$ telles parties, si bien que

$$S = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

On raisonne ensuite comme dans l'exercice 44 du chapitre 4.

Exercice 30 : ✪✪ Soit E un ensemble à n éléments. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E dont l'intersection soit un singleton ?

Correction : Soient i et $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, cherchons le nombre de tels couples avec $\text{card}(A) = i$ et $\text{card}(B) = j$. Un tel couple est entièrement déterminé par :

- le choix de A : $\binom{n}{i}$ choix possibles (il y a $\binom{n}{i}$ parties de E à i éléments).
- le choix de l'unique élément de A qui sera le seul élément de $A \cap B$: i choix possibles.
- Les autres éléments de B, au nombre de $j-1$, à choisir parmi les éléments de $E \backslash A$ (les autres éléments de B n'appartiennent pas à A) : il y a donc $\binom{n-i}{j-1}$ choix possibles.

Par principe multiplicatif, il y en a $i\binom{n}{i}\binom{n-i}{j-1}$. Par principe additif (les différents cas de figure sont incompatibles), le nombre cherché est

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\binom{n}{i}\binom{n-i}{j-1}$$

Or, le second coefficient binomial est nul si $j-1 > n-i$ donc la deuxième somme va en fait de 1 à $n-i+1$:

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-i+1} i\binom{n}{i}\binom{n-i}{j-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}\sum_{k=0}^{n-i}\binom{n-i}{k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}2^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \times \frac{n!}{i!(n-i)!} \times 2^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(i-1)!(n-1-(i-1))!} \times 2^{n-i} \\
&= n\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-1-(i-1))!} \times 2^{n-i} \\
&= n\sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} \times 2^{n-i} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \times 2^{n-k-1} \\
&= n \times 2^{n-1} \times \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \times \frac{1}{2^k} \\
&= n \times 2^{n-1} \times \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= n \times 2^{n-1} \times \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}} \\
&= n \times 3^{n-1}
\end{aligned}$$

Exercice 31 : ✪✪ Soient n et p deux entiers strictement positifs, et soit E un ensemble à np éléments. Combien y a-t-il de partitions de E (en tenant compte de l'ordre puis sans en tenir compte) en n ensembles de cardinal p ?

Correction : Quand on dit « tenir compte de l'ordre », cela signifie qu'une partition $E_1, \dots, E_n$ n'est pas la même que la partition $E_2, E_1, E_3, \dots, E_n$. Cependant, les E_i sont des ensembles : dans les E_i, l'ordre ne compte pas. Une telle partition est entièrement déterminée par l'ordre des éléments de E : les p premiers iront dans E_1, les p suivants dans E_2 etc. Cela devrait nous donner $(np)!$ permutations, mais à l'intérieur d'un même E_i, l'ordre ne compte pas : pour « annuler » le fait que l'ordre compte (comme pour une anagramme), on divise pour chaque E_i par $p!$. Par conséquent, le nombre cherché est $(np)!/(p!)^n$. On aurait aussi pu raisonner de la façon suivante : $\binom{np}{p}$ choix pour les éléments de E_1, $\binom{np-p}{p}$ choix pour les éléments de E_2 etc. jusqu'à $\binom{2p}{p}$ pour les éléments de E_{n-1} et $\binom{p}{p}$ pour les éléments de E_n. On fait le produit, on simplifie les factorielles et on obtient le même résultat.

Si l'ordre ne compte pas, il suffit de diviser par $n!$ pour annuler le fait que l'ordre compte dans l'ordre précédent. On trouve finalement

$$\frac{(np)!}{(p!)^n \times n!}$$

Exercice 32 : ✪✪ Soit E un ensemble à n éléments.

1. Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.
2. Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y = \varnothing$.
3. Déterminer le nombre de triplets $(X, Y, Z) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y \subset Z$.

Correction :

1. Donnons le nombre de tels couples avec $\text{card}(B) = k$, pour $k \in [\![0\,; n]\!]$. Un tel couple est entièrement déterminé par le choix de B, $\binom{n}{k}$ choix possibles, puis par le choix de A une partie de B, 2^k choix possibles (car $\text{card}(B) = k$). Par principe multiplicatif, il y a $2^k \times \binom{n}{k}$ choix possibles puis, par principe additif, le nombre cherché est
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n$$
2. On trouve 3^n par un raisonnement analogue.
3. Soit $k \in [\![0\,; n]\!]$. Donnons le nombre de tels triplets avec $\text{card}(Z) = k$. Un tel triplet est entièrement déterminé par le choix de Z, $\binom{n}{k}$ possibilités, et par le choix du couple (X, Y) avec $X \subset Y$ parties de Z, ensemble à k éléments, et il y a 3^k possibilités d'après la question 1. Par principe additif, il y a $\binom{n}{k}3^k$ tels triplets donc, par principe additif, on trouve de même qu'il y a 4^n tels triplets.

Exercice 33 : Soit E un ensemble à n éléments.

1. ✪✪ Combien y a-t-il de partitions de E en deux ensembles (non vides) ?
2. ✪✪✪ Même question avec trois ensembles (non vides).

Correction :

1. Soit $k \in [\![1\,; n-1]\!]$ (les ensembles A et B doivent être non vides). Cherchons les couples solutions avec $\text{card}(A) = k$. Un tel couple est entièrement déterminé par A puisqu'on a $B = \overline{B}$: il y a donc $\binom{n}{k}$ choix possibles. Par principe additif, le nombre cherché est
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 2$$
On aurait aussi pu raisonner de la façon suivante : pour chaque élément, il y a 2 choix possibles : soit il appartient à A, soit à B. Il existe donc 2^n (par principe multiplicatifs) couples (A, B) d'intersection vide tels que $A \cup B = E$, auxquels il faut enlever les deux couples $(\varnothing, E)$ et $(E, \varnothing)$, ce qui donne encore $2^n - 2$.
2. Soit $k \in [\![1\,; n-2]\!]$ (B et C doivent être non vides : A ne peut pas avoir plus de $n-2$ éléments). Cherchons le nombre de tels triplets tels que $\text{card}(A) = k$. Un tel triplet est entièrement déterminé par A, $\binom{n}{k}$ choix possibles, et par le couple (B, C) tels que B et C forment une partition de $\overline{A}$ (une partition est non vide par définition). D'après la question précédente, il y a $2^{n-k} - 2$ tels couples, si bien que le nombre cherché est

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n}{k}\times(2^{n-k}-2) &= \sum_{k=1}^{n-2}\binom{n}{k}2^{n-k}-2\sum_{k=1}^{n-k}\binom{n}{k}\\ &= (1+2)^n-2^n-1-n\times 2-2(2^n-1-1-n)\\ &= 3^n-2^n-1-2n-2\times 2^n+2+2+2n\\ &= 3^n-3\times 2^n+3\end{aligned}$$

4 Principe des tiroirs de Dirichlet

Exercice 34 : ✪ Combien un village doit-il compter d'habitants pour que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?

Correction : Notons A l'alphabet et $E=A^2$ l'ensemble des initiales (si on a un nom composé, on ne prend que la première lettre) si bien que $\text{card}(E)=26^2$. D'après le principe des tiroirs, si E contient au moins 26^2+1 éléments, au moins deux sont égaux. En conclusion, si un village contient au moins $26^2+1=677$ habitants, au moins deux ont les mêmes initiales.

Exercice 35 : ✪ Parmi 51 entiers compris entre 1 et 100, montrer qu'il en existe toujours au moins deux consécutifs.

Correction : Notons ces entiers $a_1<a_2<\cdots<a_{51}$ dans l'ordre croissant. Notons, pour tout $i\in[\![1\,;50]\!]$, $b_i=a_{i+1}-a_i$. Alors $b_i\geq 1$ car $a_{i+1}>a_i$. Supposons que, pour tout i, $b_i\geq 2$. Alors, par somme :

$$\sum_{i=1}^{50}(a_{i+1}-a_i)\geq\sum_{i=1}^{50}2$$

c'est-à-dire que $a_{51}-a_1\geq 100$ ce qui est absurde. Il existe donc i tel que $a_{i+1}-a_i=1$ ce qui est le résultat voulu.

Exercice 36 : ✪ Montrer que, tous les matins, il existe deux élèves qui serrent le même nombre de mains (enfin, ça c'était avant le Covid...).

Correction : Notons n le nombre d'élèves de la classe, $a_1,\dots,a_n$ le nombre de mains serrées par les élèves, qu'on numérote de 1 à n (a_k est donc le nombre de mains serrées par l'élève numéro k). Les entiers a_k appartiennent à l'ensemble $[\![0\,;n-1]\!]$ (un élève peut ne serrer aucune main ou serrer la main de tout le monde sauf lui, et tous les cas intermédiaires sont possibles). Le problème est que cet ensemble a n éléments, c'est-à-dire autant qu'il y a d'élèves, ce qui ne nous permet pas d'appliquer le principe des tiroirs. Supposons que tous les a_k soient distincts. Alors tous les tiroirs sont occupés, c'est-à-dire que pour tout $i\in[\![0\,;n-1]\!]$, il existe k tel que $a_k=i$. En particulier, il existe un élève qui ne serre la main de personne ($a_k=0$) et un élève qui serre la main de tout le monde ($a_p=n-1$) mais ces deux cas ne peuvent pas se produire en même temps ! Les a_k ne sont pas tous distincts donc deux élèves serrent le même nombre de mains.

Exercice 37 : ✪✪ Soit $n\geq 1$.

1. Montrer qu'il existe n puissances de 10 distinctes ayant la même congruence modulo n.
2. En déduire qu'il existe un multiple de n qui ne s'écrit qu'avec des 1 et des 0 en écriture décimale.

Correction :

1. Les congruences modulo n étant en nombre fini, et les puissances de 10 en nombre infini, d'après le principe des tiroirs, il y a une infinité de puissances de 10 ayant la même congruence modulo n donc en particulier il en existe n.
2. Si on somme ces n puissances de 10 (distinctes), on a un nombre qui ne s'écrit qu'avec des 1 et des 0 et qui est divisible par n car on somme n fois la même congruence modulo n.

Exercice 38 : ✪✪ On dispose 1000 points distincts dans le plan. Montrer qu'il existe une droite séparant ces points en deux ensembles d'exactement 500 points.

Correction : Notons ces points $A_1,\dots,A_{1000}$. Les directions des vecteurs $\overrightarrow{A_iA_j}$ directeurs des droites joignant deux points sont en nombre fini, donc il existe un vecteur $\overrightarrow{i}$ qui n'est colinéaire à aucun de ces vecteurs. Soit $\overrightarrow{j}$ un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{i}$ et soit O un point quelconque du plan si bien que $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ soit un repère orthogonal (pas forcément orthonormé). Puisque aucun $\overrightarrow{A_iA_j}$ n'est colinéaire à $\overrightarrow{i}$, aucune droite n'est horizontale : les A_i, dans ce repère, ont tous des ordonnées différentes : on peut ranger ces points dans l'ordre strictement croissant des ordonnées, i.e. $A_i=(x_i,y_i)$ avec $y_1<y_2<\cdots<y_{1000}$. Il suffit de prendre une droite d'équation $y=\alpha$ avec $y_{500}<\alpha<y_{501}$ i.e. une droite horizontale

avec 500 points au-dessus et 500 points en dessous (ce qui est possible encore une fois car les points ont tous des ordonnées distinctes).

Exercice 39 : ✪✪ Montrer que si on prend $n+1$ entiers distincts dans $[\![1\,;\,2n]\!]$, alors il en existe un qui divise l'autre (on pourra s'intéresser à la valuation 2-adique de ces nombres). Montrer également qu'il en existe deux qui soient premiers entre eux.

Correction : Suivons l'indication de l'énoncé et intéressons-nous à la valuation p-adique de ces nombres (notés $a_1, \dots, a_{n+1}$). Plus précisément, pour tout k, il existe b_k impair tel que $a_k = 2^{v_2(a_k)} \times b_k$ (tout entier est égal à 2 à la puissance sa valuation 2-adique multiplié par un nombre impair, le produit de ses facteurs premiers impairs restants). Les b_k sont donc des nombres impairs compris entre 1 et $2n$: il y en a n (les entiers $1, 3, 5, \dots, 2n-1$). Puisqu'il y a $n+1$ nombres a_k, il y a $n+1$ nombres b_k à choisir parmi n nombres impairs donc au moins deux sont égaux d'après le principe des tiroirs. Dès lors, il existe k_1 et k_2 tels que $b_{k_1} = b_{k_2}$ si bien que $a_{k_1} = 2^{v_2(a_{k_1})} \times b_{k_1}$ et $a_{k_2} = 2^{v_2(a_{k_2})} \times b_{k_1}$ (les parties impaires sont égales). Celui des deux qui a la plus petite valuation 2-adique divise l'autre.

Enfin, de même que dans l'exercice 35, il y a deux nombres consécutifs parmi les a_k donc ils sont premiers entre eux.

Exercice 40 : ✪✪ Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers (pas forcément distincts). Montrer qu'il existe $a_{k+1}, \dots, a_l$ entiers consécutifs (éventuellement un seul) dont la somme est un multiple de n.

Correction : Notons, pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, b_k la congruence de $a_1 + \cdots + a_k$ modulo n. Il y a n congruences modulo n et n entiers b_k. Si deux b_k ont la même congruence, disons b_k et b_l avec $k < l$, alors $b_l - b_k = a_{k+1} + \cdots + a_l$ est divisible par n. Sinon, c'est que toutes les congruences modulo n sont atteintes, et en particulier la congruence à 0 modulo n si bien qu'il existe k tel que $a_1 + \cdots + a_k$ soit congru à 0 modulo n i.e. soit divisible par n.

Exercice 41 : ✪✪✪ Notons E_n l'ensemble des entiers à n chiffres ne s'écrivant qu'avec des 1 et des 2 (en écriture décimale). Quel est le cardinal de E_n ? Montrer que, parmi les éléments de E_n, un et un seul est divisible par 2^n.

Correction : De même que dans l'exercice 6, $\text{card}(E) = 2^n$. Il y a 2^n congruences modulo 2^n donc, pour répondre, il suffit de prouver que tous les éléments de E ont une congruence différente modulo 2^n. Soient x et y deux éléments de E ayant la même congruence modulo 2^n, et montrons qu'ils sont égaux, ce qui permettra de conclure. En particulier, $y - x$ est divisible par 2^n. Sans perte de généralité, supposons $y \geq x$. Supposons dans l'absurde que $y \neq x$, donc $y > x$. Notons $y = a_{n-1} \dots a_0$ (avec les a_i égaux à 1 ou 2) et $x = b_{n-1} \dots b_0$. Soit $i \leq n-1$ le plus petit indice tel que $a_i \neq b_i$ i.e. l'indice du premier chiffre différent chez a et chez b. Si $a_i = 2$ et $b_i = 1$ alors $y - x$ est de la forme $c_{n-1} \cdots c_{i+1} \underbrace{1}_{1} 0 \cdots 0$ (attention, les c_k ne sont pas forcément égaux à 1 ou 2) donc n'est pas divisible par 2^n car est égal à $c_{n-1} \cdots c_{i+1} 1 \times 10^i$ donc $2^i \times 5^i \times N$ avec N impair donc 2^i multiplié par un nombre impair donc n'est pas divisible par 2^n, ce qui est absurde. Si $a_i = 1$ et $b_i = 2$, si bien qye $y - x$ est de la forme $c_{n-1} \cdots c_{i+1} 90 \cdots 0$ et on conclut de la même façon : on a donc forcément $x = y$ ce qui permet de conclure.

5 Formule du crible

Exercice 42 : ✪ Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 2022 divisibles par $2, 3$ ou 5 ?

Correction : D'après la formule du crible pour trois ensembles, si on note E_2 l'ensemble des entiers compris entre 1 et 2022 et divisibles par 2, et idem pour E_3, E_5, E_6 etc. :

$$\text{card}(E_2 \cup E_3 \cup E_5) = \text{card}(E_2) + \text{card}(E_3) + \text{card}(E_5) - \text{card}(E_2 \cap E_3) - \text{card}(E_2 \cap E_5) - \text{card}(E_3 \cap E_5) + \text{card}(E_2 \cap E_3 \cap E_5)$$

Or, $2, 3$ et 5 sont premiers entre eux deux à deux donc $E_2 \cap E_3 = E_6$, $E_2 \cap E_5 = E_{10}$, $E_3 \cap E_5 = E_{15}$ et $E_2 \cap E_3 \cap E_5 = E_{30}$. Rappelons (cf. chapitre 2 par exemple) qu'il y a $\lfloor n/k \rfloor$ entiers compris entre 1 et n divisibles par k. Dès lors :

$$\begin{aligned} \text{card}(E_2 \cup E_3 \cup E_5) &= \left\lfloor \frac{2022}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2022}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2022}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2022}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{30} \right\rfloor \\ &= 1011 + 674 + 404 - 337 - 202 - 134 + 67 \\ &= 1483 \end{aligned}$$

Exercice 43 : ✪ Combien y a-t-il d'entiers qui divisent au moins l'un des trois nombres 10^{60}, 20^{50} ou 30^{40} ?

Correction : Notons ces trois entiers, respectivement, n_1, n_2, n_3. On a :

$$n_1 = 2^{60}\times 5^{60}, \qquad n_2 = 2^{100}\times 5^{50} \qquad \text{et} \qquad n_3 = 2^{40}\times 3^{40}\times 5^{40}$$

Notons E_1 l'ensemble des diviseurs de n_1, et idem pour E_2 et E_3. D'après la formule du crible :

$$\mathrm{card}(E_1\cup E_2\cup E_3) = \mathrm{card}(E_1)+\mathrm{card}(E_2)+\mathrm{card}(E_3)-\mathrm{card}(E_1\cap E_2)-\mathrm{card}(E_1\cap E_3)-\mathrm{card}(E_2\cap E_3)+\mathrm{card}(E_1\cap E_2\cap E_3)$$

Rappelons que les diviseurs d'un nombre de la forme ${p_1}^{\alpha_1}\times\cdots\times {p_k}^{\alpha_k}$ (où les p_i sont premiers distincts) sont exactement les entiers de la forme ${p_1}^{\beta_1}\times\cdots\times {p_k}^{\beta_k}$, où $\beta_i\in[\![0\,;\,\alpha_i]\!]$, c'est-à-dire que β_i peut prendre α_i+1 valeurs, et par principe multiplicatif, cet entier a $(\alpha_1+1)\cdots(\alpha_k+1)$ diviseurs.

Il en découle que n_1 admet 61^2 diviseurs, n_2 admet 101×51 diviseurs, et n_3 en admet 41^3. De plus, un entier divise deux entiers a et b si et seulement s'il divise leur PGCD (cf. chapitre 6). Par conséquent, un entier appartient à $E_1\cap E_2$ si et seulement s'il divise $n_1\wedge n_2 = 2^{60}\times 5^{50}$ donc il y a 61×51 diviseurs communs à n_1 et n_2. De même, $n_2\wedge n_3 = 2^{40}\times 5^{40}$ donc il y a 41^2 diviseurs communs à n_2 et n_3, et $n_1\wedge n_3 = 2^{40}\times 5^{40}$ donc il y a aussi 41^2 diviseurs communs à n_1 et n_3, et enfin $n_1\wedge n_2\wedge n_3 = 2^{40}\times 5^{40}$ donc il y a aussi 41^2 diviseurs communs à n_1, n_2, n_3. Finalement :

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(E_1\cup E_2\cup E_3) &= 61^2+101\times 51+41^3-61\times 51-41^2-41^2+41^2\\ &= 76363\end{aligned}$$

Exercice 44 - Formule du crible : ✪✪✪ Montrer que si $E_1,\dots,E_n$ sont des ensembles finis, alors :

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \sum_{k=1}^n\left((-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}\mathrm{card}\left(E_{i_1}\cap\cdots\cap E_{i_k}\right)\right)$$

Correction : Montrons la formule du crible par récurrence forte sur n. Si $n=1$ alors

$$\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}\sum_{J\subset[\![1\,;\,n]\!],\mathrm{card}(J)=k}\mathrm{card}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right) = (-1)^2\sum_{J\subset\{1\},\mathrm{card}(J)=1}\mathrm{card}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right) = \mathrm{card}\left(A_1\right).$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété soit vraie jusqu'au rang n. Montrons-là au rang $n+1$: donnons-nous $A1,\dots,A_{n+1}$ des ensembles. La formule de Poincaré (pour deux ensembles) entraîne que

$$\begin{aligned}\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1}A_i\right) &= \mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)+\mathrm{card}(A_{n+1})-\mathrm{card}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\cap A_{n+1}\right)\\ &= \mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)+\mathrm{card}(A_{n+1})-\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})\right).\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence entraîne que

$$\begin{aligned}-\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})\right) &= -\sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}\sum_{J\subset[\![1\,;\,n]\!],\mathrm{card}(J)=k}\mathrm{card}\left(\bigcap_{j\in J}(A_j\cap A_{n+1})\right)\\ &= \sum_{k=1}^n(-1)^{k+2}\sum_{J\subset[\![1\,;\,n+1]\!],n+1\in J,\,\mathrm{card}(J)=k+1}\mathrm{card}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\\ &= \sum_{p=2}^{n+1}(-1)^{p+1}\sum_{J\subset[\![1\,;\,n+1]\!],n+1\in J,\,\mathrm{card}(J)=p}\mathrm{card}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right),\end{aligned}$$

en ayant fait le changement de variable $p=k+1$. On a aussi

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n) &= \sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}\sum_{J\subset[\![1\,;\,n]\!],\mathrm{card}(J)=k}\mathrm{card}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\\ &= \sum_{k=1}^n(-1)^{k+1}\sum_{J\subset[\![1\,;\,n+1]\!],n+1\notin J,\,\mathrm{card}(J)=k}\mathrm{card}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n+2} \operatorname{card}(A_k) + (-1)^{n+2}\operatorname{card}\left(\bigcap_{1\leq j\leq n+1} A_j\right)\\
&\quad + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{J\subset [\![1\,;\,n+1]\!], n+1\in J,\, \operatorname{card}(J)=k} \operatorname{card}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) + \sum_{J\subset [\![1\,;\,n+1]\!], n+1\notin J,\, \operatorname{card}(J)=k} \operatorname{card}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n+2} \operatorname{card}(A_k) + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{J\subset [\![1\,;\,n+1]\!], \operatorname{card}(J)=k} \operatorname{card}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) + (-1)^{n+2}\operatorname{card}\left(\bigcap_{1\leq j\leq n+1} A_j\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k+1} \sum_{J\subset [\![1\,;\,n+1]\!], \operatorname{card}(J)=k} \operatorname{card}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)
\end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.