# Feuille d'exercices - Chapitre 26

**Vrai ou Faux :**

1. Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements, alors $P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)$.
2. Si $P(A) + P(B) > 1$ alors $B \cap A \neq \varnothing$.
3. Si $P(A) + P(B) = 1$ alors $B = \overline{A}$.
4. Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$ alors $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements.
5. On se donne une urne contenant $n$ boules rouges et $n$ boules noires, et on procède à $n$ tirages sans remise. Pour tout $k \in [\![ 1 \,;\, n ]\!]$, notons $R_k$ : « On tire une boule rouge à l'instant $k$ ». Alors $P(R_1 \cap R_2) = 1/4$.
6. Avec les mêmes notations, $R_1, \dots, R_n$ sont mutuellement indépendants.
7. Si $A$ et $B$ sont indépendants, alors $P_A(B) = P(B)$.
8. Si $A$ et $B$ sont indépendants, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
9. Si $A$ et $B$ sont incompatibles, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
10. Si $P(A) = 1$, $P_A(B) = P(B)$.
11. Si $P(A) \in \, ]\,0\,;1\,[$, $P_A(B) \leq P(B)$.
12. Si $P(A) \in \, ]\,0\,;1\,[$, $P_A(B) \geq P(B)$.
13. Un événement de probabilité non nulle n'est pas indépendant de lui-même.
14. Si $A$ et $B$ sont indépendants et $B$ et $C$ sont indépendants, alors $A$ et $C$ sont indépendants.
15. Deux événements incompatibles de probabilité non nulle ne sont pas indépendants.

## 1 Manipulations de probabilités

**Exercice 1 :** ✪ Soit $G \subset \Omega$ tel que $P(G) = 1$. Montrer que pour tout événement $A$, $P(A \cap G) = P(A)$.

**Correction :** Soit donc $A$ un événement. On sait que $P(A \cup G) = P(A) + P(G) - P(A \cap G)$. Or, $G \subset A \cup G$ donc $P(G) \leq P(A \cup G)$ si bien que $P(A \cup G) = 1$. Il en découle que $1 = P(A) + 1 - P(A \cap G)$ ce qui permet de conclure.

**Exercice 2 :** ✪ Soient $A$ et $B$ deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ avec $P(A > 0)$. Prouver que $P(A \cap B | A \cup B) \leq P(A \cap B | A)$.

**Correction :** Tout d'abord, $P(A \cup B) \geq P(A) > 0$ donc les deux probabilités conditionnelles sont bien définies. On a d'une part :

$$\begin{aligned} P(A \cap B | A \cup B) &= \frac{P(A \cap B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} \end{aligned}$$

puisque $A \cap B \subset A \cup B$. On trouve de même que $P(A \cap B | A) = P(A \cap B)/P(A)$ puisque $A \cap B \subset A$, ce qui permet de conclure puisque $P(A \cup B) \geq P(A)$ donc $1/P(A \cup B) \leq 1/P(A)$.

**Exercice 3 :** ✪ Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A$ et $B$ deux événements tels que

$$P(A) = \frac{7}{10}, \qquad P(B) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad P(A \cup B) = \frac{9}{10}$$

Calculer $P(A \Delta B)$.

**Correction :** En d'autres termes, on cherche la probabilité que seul l'un des deux événements $A$ ou $B$ soit réalisé. Rappelons que $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ et puisque $A \cap B \subset A \cup B$, alors $P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$. Or,

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(A)+P(B)-P(A\cup B) \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

En conclusion, $P(A\Delta B)=6/10=3/5$.

**Exercice 4 :** ✪ Donner une CNS sur $x$ et $y$ appartenant à $\mathbb{R}$ pour qu'il existe une probabilité sur $\Omega=[\![ 1\,;\,3 ]\!]$ vérifiant $P(\{1;2\})=x$ et $P(\{2;3\})=y$.

**Correction :** Travaillons par analyse synthèse. Supposons donc qu'il existe $x$ et $y$ solution du problème. Tout d'abprd, $x$ et $y$ doivent être positifs (au sens large) et inférieurs à 1 (au sens large). De plus, $\Omega=[\![ 1\,;\,3 ]\!]=\{1;2\}\cup\{2;3\}$ si bien que

$$\begin{aligned} P(\Omega)=1 &= P(\{1;2\})+P(\{2;3\})-P(\{1;2\}\cap\{2;3\}) \\ &= x+y-P(\{2\}) \end{aligned}$$

Par conséquent, $P(\{2\})=x+y-1$ donc on doit avoir $x+y\geq 1$. Puisque $\{1;2\}=\{1\}\cup\{2\}$ et que cette union est disjointe, $P(\{1\})=x-(x+y-1)=1-y$. De même, $P(\{3\})=1-x$.

Synthèse : supposons donc que $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$ et $x+y\geq 1$. Puisque

$$(1-y)+(x+y-1)+(1-x)=1$$

et que $1-y, x+y-1$ et $1-x$ sont positifs, il existe une probabilité $P$ telle que $P(\{1\})=1-y, P(\{2\})=x+y-1$ et $P(\{3\})=1-x$. En conclusion, une telle probabilité existe si et seulement si $x$ et $y$ appartiennent à $[\,0\,;1\,]$ et $x+y\geq 1$ (par exemple si $x=y=2/3$).

**Exercice 5 :** ✪ On jette un dé pipé dont les probabilités d'occurrence de $1,2,3,4,5,6$ sont respectivement

$$p_1=\frac{1}{12},\qquad p_2=\frac{1}{6},\qquad p_3=\frac{1}{12},\qquad p_4=\frac{1}{6},\qquad p_5=\frac{1}{6}\qquad\text{et}\qquad p_6=\frac{1}{3}$$

1. Justifier qu'on peut munir $([\![ 1\,;\,6 ]\!],\mathscr{P}([\![ 1\,;\,6 ]\!]))$ d'une telle probabilité.
2. Décrire chacun des événements suivants comme des parties de $\Omega=[\![ 1\,;\,6 ]\!]$ et calculer leurs probabilités :
   (a) « Le chiffre est impair ».
   (b) « Le chiffre est supérieur ou égal à 2 ».
   (c) « Le chiffre est impair et inférieur à 4 ».
   (d) « Le chiffre est impair ou inférieur à 4 ».

**Correction :**

1. Les six nombres sont positifs et on trouve facilement ( ?) que leur somme fait 1.
2. Notons ces événements respectivement, $A,B,C,D$.
   (a) $A=\{1;3;5\}=\{1\}\cup\{3\}\cup\{5\}$ et l'union est disjointe donc $P(A)=p_1+p_3+p_5=1/3$.
   (b) $B=\overline{\{1\}}$ donc $P(A)=1-p_1=11/12$.
   (c) $C=\{1\}\cup\{3\}$ et cette union est disjointe donc $P(C)=p_1+p_3=1/6$.
   (d) $D=\{1;2;3;4;5\}=\overline{\{6\}}$ donc $P(D)=1-p_6=2/3$.

**Exercice 6 :** ✪ Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. Posons $\Omega=[\![ 1\,;\,n ]\!]$. Soit $P$ une fonction définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que, pour tout $k\in[\![ 1\,;\,n ]\!]$, $P(\{k\})=\alpha k\binom{n}{k}$. À quelle condition sur $\alpha\in\mathbb{R}$, la fonction $P$ définit-elle une probabilité sur $(\Omega,(\Omega))$ ?

**Correction :** $P$ est une probabilité si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{n}P(\{k\})=1$$

si et seulement si

$$\alpha=\frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}}$$

Or, cette somme vaut (calcul classique à savoir faire : cf. exercice 44 du chapitre 4) $n \times 2^{n-1}$ si bien que $P$ est une probabilité si et seulement si $\alpha = 1/n2^{n-1}$.

**Exercice 7 :** ✪✪ Soient $A$ et $B$ deux événements. Montrer que $A$ et $B$ sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) \times P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(A \cap \overline{B}\right) \times P\left(\overline{A} \cap B\right)$$

**Correction :** Supposons $A$ et $B$ indépendants. Dès lors, $\overline{A}$ et $B$ sont indépendants, etc. D'une part :

$$P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap B) = P(A)P(B)P(\overline{A})P(\overline{B})$$

et

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) \times P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A)P(\overline{A})P(\overline{A})P(B)$$

D'où l'égalité. Réciproquement, supposons que

$$P(A \cap B) \times P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(A \cap \overline{B}\right) \times P\left(\overline{A} \cap B\right)$$

et prouvons que $A$ et $B$ sont indépendants. $B$ et $\overline{B}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ (ou en raisonnant comme ci-dessous, mais à l'envers). De même, $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} P(A)P(B) &= (P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})) \times P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) \\ &= P(A \cap B)^2 + P(A \cap B)P(B \cap \overline{A}) + P(A \cap \overline{B}) \times P(B \cap A) + P(A \cap \overline{B})P(B \cap \overline{A}) \\ &= P(A \cap B)^2 + P(A \cap B)P(B \cap \overline{A}) + P(A \cap \overline{B}) \times P(B \cap A) + P(A \cap B) \times P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \end{aligned}$$

par hypothèse. Factorisons par $P(A \cap B)$ :

$$P(A)P(B) = P(A \cap B)\left(P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A}) + P(A \cap \overline{B}) + P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)\right)$$

Or, $B$ et $\overline{B}$ étant incompatibles, et par distributivité de l'intersection sur l'union :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) &= P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) \\ &= P(A \cap (B \cup \overline{B})) \\ &= P(A \cap \Omega) \\ &= P(A) \end{aligned}$$

On pouvait également reconnaître l'égalité obtenue précédemment à l'aide des probas totales. De même, $P(B \cap \overline{A}) + P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Finalement, $P(A)P(B) = P(A \cap B) \times 1$ : $A$ et $B$ sont indépendants.

## 2 Construction d'espaces probabilisés, combinatoire

**Exercice 8 :** ✪ Soit $N$ un nombre entier à au plus 100 chiffres choisi au hasard. Quelle est la probabilité que $N^3$ se termine par 11 ?

**Correction :** On se place sur $\Omega = [\![ 0\,;10^{100} - 1 ]\!]$ (ne pas oublier le $-1$ : un nombre à au plus trois chiffres est compris entre 0 et 999). muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. Puisque $\text{card}(\Omega) = 10^{100}$, il suffit de trouver le nombre d'éléments $N$ de $\Omega$ dont le cube se termine par 11, c'est-à-dire tel que $N^3 \equiv 11[100]$. Il suffit d'examiner toutes les congruences de 0 à 99. Toutes ? Non ! Seulement celles qui ont des chances de marcher. Inutile par exemple de s'intéresser aux congruences paires ou qui se terminent par 5. Et les autres ? Un nombre qui se termine par 3 a un cube qui se termine par 7 (car $3^3 \equiv 7[10]$), et on exclut de même les nombres se terminant par 7 et 9. En d'autres termes, les seules congruences encore possibles sont 1, 11 et ainsi de suite jusque 91 : cela ne fait que 10 possibilités. $1^3 \equiv 1[100]$ donc cela ne convient pas. $11^2 \equiv 21[100]$ car $11^2 = 121$ et puisque $21 \times 11 = 231$, $11^3 \equiv 31[100]$ donc 11 ne convient pas non plus. On élimine tous les autres à part 71. En d'autres termes, $N$ convient si et seulement si $N$ se termine par 71 : pour chaque chiffre précédent les deux derniers, il y a 10 choix possibles (de 0 à 9, donc on compte aussi ceux qui ont moins de 100 chiffres). Par principe multiplicatif, il y a $10^{98}$ choix possibles. Finalement, la probabilité recherchée est $10^{98}/10^{100} = 1/100$, ce qui est intuitif, puisqu'il n'y a qu'une chance sur 100 que les deux dernières décimales valent 71.

**Exercice 9 :** ✪ On lance deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. un double ?

2. une somme égale à 9 ?
3. un minimum des deux dés égal à 4 ?
4. au moins un 6 ?

**Correction :** On se place sur $\Omega = [\![ 1\,;\,6 ]\!]^2$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. Par conséquent, si $A$ est un événement, alors $P(A) = \text{card}(A)/36$.

1. $A = \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}$ si bien que $P(A) = 1/6$.
2. $A = \{(3,6);(4,5);(5,4);(6,3)\}$ et donc $P(A) = 4/36 = 1/9$.
3. $A = \{(4,4);(4,5);(4,6);(5,4);(6,4)\}$ donc $P(A) = 5/36$.
4. $A = \{(1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6);(6,5);(6,4);(6,3);(6,2);(6,1)\}$ donc $P(A) = 11/36$.

**Exercice 10 - Bienvenue à Gattaca :** ✪ Une séquence d'ADN est une suite de quatre nucléotides dénotés $A$, $C$, $G$, $T$.

1. Si chaque nucléotide est équiprobable, quelle est la probabilité d'obtenir une séquence de longueur 13 contenant exactement cinq $A$ ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une séquence avec $A, A, A, G, G, G, G, G, T, T, T, T, C$ ?

**Correction :**

1. On note $\Omega = \{A;C;T;G\}^{13}$. Son cardinal (nombre total de séquences de longueur 13 formées avec 5 nucléotides) est $4^{13}$. L'espace $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est muni de l'équiprobabilité. On note $E$ l'événement « obtenir une séquence contenant exactement 5 A ». Pour obtenir une telle séquence, on peut d'abord choisir l'emplacement des 5 A (il y a $\binom{13}{5}$ possibilités) puis 8 autres lettres sont quelconques parmi C,G,T (il y a $3^8$ possibilités : 3 choix pour la première, 3 choix pour la deuxième, etc.). Ainsi par principe multiplicatif $\text{card}(E) = \binom{13}{5}3^8$ et donc $P(E) = \dfrac{\binom{13}{5}3^8}{4^{13}} \approx 0,126$.
2. Il s'agit de compter le nombre d'anagrammes du mot $AAAGGGGGTTTTC$. Il y $\binom{13}{3}$ possibilités pour placer les A, puis $\binom{10}{5}$ possibilités pour placer les G parmi les 10 positions restantes, puis $\binom{5}{4} = 5$ possibilités pour placer les T parmi les 4 positons restantes. Enfin on place le C là où il reste de la place (une seule possibilité). Par principe multiplicatif, on a donc $\binom{13}{3}\binom{10}{5}\binom{5}{4} = 360360$ séquences possibles. Un telle séquence a donc pour probabilité $\dfrac{360360}{4^{13}} \approx 0.00537$.

**Exercice 11 :** ✪ Quelle est la probabilité que six dés équilibrés donnent chacun un chiffre différent ?

**Correction :** On se place sur $[\![ 1\,;\,6 ]\!]^6$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. Un élément $(x_1, \dots, x_6)$ de $\Omega$ (une éventualité) est entièrement déterminé par $x_1$ (le résultat du premier dé), 6 possibilités, puis $x_2$ (le deuxième dé), 5 possibilités (toutes sauf la première) etc. On trouve que $\text{card}(A) = 6!$ (où $A$ est l'événement dont on cherche la proba) si bien que $P(A) = 6!/6^6$. On peut aussi voir $A$ comme le nombre de bijections de $[\![ 1\,;\,6 ]\!]$ dans lui-même, et diviser par le nombre d'applications, ce qui donne le même résultat ($\approx 0,015$ i.e. 1.5%).

**Exercice 12 - On peut tromper mille fois mille personnes :** ✪✪ Une loterie a lieu chaque semaine. Il y a 100 billets dont 3 sont gagnants. Vaut-il mieux acheter 5 billets en une seule semaine, ou un billet par semaine pendant 5 semaines ?

**Correction :** Notons $G$ : « on gagne au moins une fois ». Supposons dans un premier temps qu'on achète 1 billet par semaine pendant 5 semaines. Pour tout $i \in [\![ 1\,;\,5 ]\!]$, notons $G_i$ : « le $i$-ième billet est gagnant ». Par conséquent, et par indépendance des tirages :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G_1 \cup \cdots \cup G_5) \\ &= 1 - P\left(\overline{G_1 \cup \cdots \cup G_5}\right) \\ &= 1 - P(\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_5}) \\ &= 1 - \left(\frac{97}{100}\right)^5 \end{aligned}$$

Supposons à présent qu'on achète 5 tickets d'un coup, et on note toujours $G_i$ : « le $i$-ème ticket est gagnant ». On a encore :

$$P(G) = 1 - P(\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_5})$$

sauf que les événements ne sont plus indépendants : si un billet est gagnant, cela réduit les chances que les autres le soient. On applique donc la formule des probabilités composées.

$$P(\overline{G_1}\cap\cdots\cap\overline{G_5}) = P(\overline{G_1})P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2})P_{\overline{G_1}\cap\overline{G_2}}(\overline{G_3})P_{\overline{G_1}\cap\overline{G_2}\cap\overline{G_3}}(\overline{G_4})P_{\overline{G_1}\cap\overline{G_2}\cap\overline{G_3}\cap\overline{G_4}}(\overline{G_5})$$

Tout d'abord, $P(\overline{G_1}) = 97/100$. Supposons $\overline{G_1}$ réalisé : il reste 99 billets, dont encore 3 sont gagnants, si bien que $P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2}) = 96/99$. On trouve de même les autres probas conditionnelles :

$$\begin{aligned} P(G) &= 1-\frac{97}{100}\times\frac{96}{99}\times\frac{95}{98}\times\frac{94}{97}\times\frac{93}{96} \\ &= 1-\frac{95\times 94\times 93}{100\times 99\times 98} \end{aligned}$$

Dans le premier cas, on trouve $P(G)\approx 0.141$ et dans le second cas, $P(G)\approx 0.144$ : il vaut mieux acheter 5 tickets d'un coup.

**Exercice 13 : ✪✪** Soit $n\geq 2$. On suppose que $n$ joueurs lancent une pièce équilibrée.

1. Donner un espace probabilité qui modélise cette expérience.
2. Quelle est la probabilité qu'un joueur obtienne le contraire de tous les autres ?

**Correction :**

1. Il suffit de prendre $\Omega = \{P;F\}^n$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. Un élément de $\Omega$ est un $n$-uplet $\omega = (a_1,\dots,a_n)$ où, pour tout $i\in[\![1\,;\,n]\!], a_i = P$ ou $F$ et est le résultat obtenu par le $i$-ème joueur.
2. Notons, pour tout $i\in[\![1\,;\,n]\!], P_i$ : « le $i$-ème joueur obtient Pile » et $F_i$ : « le $i$-ème joueur obtient Face ». Notons enfin $A$ : « un joueur obtient le contraire de tous les autres » (et donc on cherche $P(A)$). $A$ est réalisé si et seulement si un joueur obtient Pile et tous les autres Face, ou le contraire, si bien que :

$$\begin{aligned} A &= (P_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3\cap\cdots\cap F_n)\cup\cdots\cup(F_1\cap\cdots\cap F_{n-1}\cap P_n) \\ &\quad \cup(F_1\cap P_2\cap\cdots\cap P_n)\cup(P_1\cap F_2\cap P_3\cap\cdots\cap P_n)\cup\cdots\cup(P_1\cap\cdots\cap P_{n-1}\cap F_n) \end{aligned}$$

Les événements entre parenthèses étant deux à deux incompatibles :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(P_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n)+P(F_1\cap P_2\cap F_3\cap\cdots\cap F_n)+\cdots+P(F_1\cap\cdots\cap F_{n-1}\cap P_n) \\ &\quad +P(F_1\cap P_2\cap\cdots\cap P_n)+P(P_1\cap F_2\cap P_3\cap\cdots\cap P_n)+\cdots+P(P_1\cap\cdots\cap P_{n-1}\cap F_n) \end{aligned}$$

Par indépendance des lancers :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(P_1)P(F_2)\cdots P(F_n)+P(F_1)P(P_2)P(F_3)\cdots P(F_n)+\cdots+P(F_1)\cdots P(F_{n-1})P(P_n) \\ &\quad +P(F_1)P(P_2)\cdots P(P_n)+P(P_1)P(F_2)P(P_3)\cdots P(P_n)+\cdots+P(P_1)\cdots P(P_{n-1})P(F_n) \end{aligned}$$

La pièce étant équilibrée, $P(A) = 2n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

**Exercice 14 : ✪✪** On permute aléatoirement les lettres du mot baobab. Avec quelle probabilité le mot obtenu est-il encore baobab ?

**Correction :** On se place sur l'ensemble des mots obtenus en permutant les lettres i.e. l'ensemble des anagrammes du mot baobab. On prouve comme au chapitre 17 que $\text{card}(\Omega) = 6!/2!3! = 60$. On munit $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. En effet, tous les mots sont équiprobables puisque tout mot est donné par $3!\times 2!$ permutations (à l'intérieur d'un même mot, on peut permuter les trois $b$ et les deux $b$). Finalement, la probabilité cherchée est $1/60$.

**Exercice 15 - Autour de la formule du crible : ✪✪** Soit $(\Omega,\mathscr{P}(\Omega),P)$ un espace probabilisé fini. La formule du crible est la formule suivante : si $A_1,\dots,A_n$ sont des événements, alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}\sum_{J\subset[\![1\,;\,n]\!],\text{card}(J)=k} P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)$$

On la démontrerait de la même façon que dans l'exercice 44 du chapitre 17.

1. Écrire cette formule pour $n=4$.

2. Application : Soit $n \geq 2$. A l'approche des fêtes de Noël, les $n$ élèves de MP2I ont décidé de s'offrir des cadeaux selon le protocole suivant : un sac opaque contient les noms de tous les élèves (écrits chacun sur un morceau de papier). Chacun leur tour, les élèves tirent un nom au hasard parmi les noms restants au moment du tirage. Chaque élève devra offrir un cadeau à l'élève dont il a tiré le nom. On cherche à calculer la probabilité qu'aucun élève ne tire son nom.
   (a) Déterminer un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ associé à cette expérience aléatoire. On donnera $\text{card}(\Omega)$.
   (b) Pour tout $j \in [\![ 1\,;\, n ]\!]$, introduisons $A_j$ l'événement « Le $j$-ième élève tire son nom ». Soient $k \in [\![ 1\,;\, n ]\!]$ et $J$ une partie de $[\![ 1\,;\, n ]\!]$ de cardinal $k$. Montrer que
   $$P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \frac{(n-k)!}{n!}$$
   (c) En déduire que la probabilité qu'aucun des élèves de la classe ne tire son nom est
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$
   Nous avons vu au chapitre 25 que cette probabilité tend vers $\dfrac{1}{e}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Correction :**

1. Supposons que $n = 4$. La formule devient

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) \\
&\quad - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\
&\quad + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)
\end{aligned}$$

2. Il est sous-entendu (mais non précisé) que $n$ est le nombre d'élèves de la classe.
   (a) Supposons que les élèves de la classe soient numérotés avec des entiers de 1 à $n$ (par exemple rangés par ordre alphabétique). On code le tirage par une $n$-liste d'éléments distincts de $[\![ 1\,;\, n ]\!]$ de telle sorte que, pour tout $i \in [\![ 1\,;\, n ]\!]$, l'élève $i$ doit offrir un cadeau à l'élève dont le numéro est le $i^{\text{ième}}$ de la liste. On considère donc $\Omega$ l'ensemble des permutations de $[\![ 1\,;\, n ]\!]$ (dont le cardinal est $n!$) muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité.
   (b) Soient $k \in [\![ 1\,;\, n ]\!]$ et $J$ une partie de $[\![ 1\,;\, n ]\!]$ de cardinal $k$. On a
   $$P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \frac{\text{card}\left(\displaystyle\bigcap_{j\in J} A_j\right)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{(n-k)!}{n!},$$
   car les éléments de $\displaystyle\bigcap_{j\in J} A_j$ sont les permutations laissant fixe les $k$ éléments de $J$ (que l'on peut voir comme une permutation des $n-k$ éléments n'étant pas dans $J$).
   (c) La formule du crible entraîne alors que
   $$\begin{aligned}
   P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{J\subset [\![ 1\,;\, n ]\!], \text{card}(J)=k} \frac{(n-k)!}{n!} \\
   &= 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{J\subset [\![ 1\,;\, n ]\!], \text{card}(J)=k} 1 \\
   &= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \frac{(n-k)!}{n!} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.
   \end{aligned}$$

**Exercice 16 - Puissances de l'imagination : ✪✪✪** Imaginons cette situation totalement impossible : à la fin de l'année, le professeur, un sadique fini, fait passer tous les élèves les uns après les autres, et fait tirer sans remise dans son chapeau magique une question de cours parmi toutes celles de l'année, disons 200. Un élève a impassé 40 questions de cours. Dans sa grande mansuétude, le professeur laisse les élèves décider de l'ordre de passage. Est-il plus avantageux pour cet élève de passer premier, deuxième, ..., dernier ?

**Correction :** Cela n'est pas immédiat à première vue : l'élève peut se dire qu'il est avantageux de passer en dernier puisque ses camarades peuvent tomber sur les questions qu'il a impassées, et donc vont diminuer leur nombre, mais s'ils tombent au contraire sur les questions qu'il connaît, la proportion de questions qu'il a impassées augmente !

Notons les questions $1, \dots, 200$. On tire 44 questions sans remise (puisqu'il y a 44 élèves) donc les quarante-quatre questions posées sont distinctes et forment une 44-liste d'éléments distincts de $[\![ 1\,;\,200 ]\!]$. On modélise donc cette expérience par l'espace probabilisé suivant : $\Omega$ est l'ensemble des 44-listes d'éléments distincts de $[\![ 1\,;\,200 ]\!]$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité puisque tous les tirages sont équiprobables. On sait que $\text{card}(\Omega) = 200!/156!$.

Si $i \in [\![ 1\,;\,44 ]\!]$, notons $A_i$ : « l'élève ne passe pas sur une question impassée s'il passe en position $i$ » et on cherche $i$ pour que cette probabilité soit maximale. Quitte à renuméroter les questions, on suppose que les questions impassées sont les questions $1, \dots, 40$. $A_i$ est donc l'ensemble des 44-listes dont l'élément numéro $i$ n'appartient pas à $[\![ 1\,;\,40 ]\!]$. Une telle liste est entièrement déterminée par :

- Le choix de l'élément en $i$-ème position : 160 choix possibles (toutes les questions non impassées).
- Les autres questions : elles forment une 43-listes d'un ensemble à 199 éléments (toutes les questions sauf celle en $i$-ème position) : il y a $199!/156!$ choix possibles.

Par principe multiplicatif,

$$\text{card}(A_i) = 160 \times \frac{199!}{156!}$$

si bien que

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \frac{160 \times \dfrac{199!}{156!}}{\dfrac{200!}{156!}} \\ &= \frac{160}{200} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

On remarque que cette probabilité ne dépend pas de $i$ : peu importe la position à laquelle passe l'élève ! De toute façon, si on vous laisse le choix, méfiez-vous...

# 3 Divers (indépendance, manipulation d'ensembles etc.)

**Exercice 17 :** ✪ Soient $A, B$ et $C$ trois événements. Écrire à l'aide de $A, B$ et $C$ les événements : parmi $A, B, C$,

- seul $A$ se produit.
- $A$ et $B$ se réalisent, mais pas $C$.
- deux événements au plus se réalisent.
- deux événements ou plus se réalisent.
- aucun des trois événements ne se produit.
- un seul des événements se produit.

**Correction :**

- $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
- $A \cap B \cap \overline{C}$.
- $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap P) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.
- Précisons que quand on écrit $A \cap B$, $C$ peut se produit ou non. Dès lors, l'événement recherché est :

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$$

- $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$.
- $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap P)$.

**Exercice 18 :** ✪ Combien faut-il vérifier d'égalités pour montrer que $n$ événements notés $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants ?

**Correction :** Il faut vérifier autant d'égalités qu'il y a de parties de l'ensemble $[\![ 1\,;\, n ]\!]$, mais on a vu en classe qu'il était inutile de le vérifier pour le vide et les singletons, il faut donc vérifier autant d'égalités qu'il y a de parties à au moins 2 éléments. Rappelons que le nombre de parties à $k$ éléments d'un ensemble de cardinal $n$ est $\binom{n}{k}$ donc il faut vérifier

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - n - 1$$

égalités. Par exemple, pour 5 événements, il faut vérifier 26 égalités.

**Exercice 19 :** ✪ Soient $(A_1, \dots, A_n)$ $n$ événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des $A_i$ ne soit réalisé est au plus égale à $e^{-\sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$.

**Correction :** Cette probabilité vaut (par indépendance des événements et donc de leurs complémentaires) :

$$\begin{aligned} p &= P(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}) \\ &= P(\overline{A_1}) \times \cdots \times P(\overline{A_n}) \\ &= (1 - P(A_1)) \times \cdots \times (1 - P(A_n)) \end{aligned}$$

Or, par convexité de l'exponentielle, pour tout $u \in \mathbb{R}, e^u \geq 1 + u$. On applique cette inégalité à $u = -P(A_i)$ pour $i$ allant de 1 à $n$ puis on fait le produit (ce sont bien des termes positifs puisque $1 - P(A_i) \geq 0$ pour tout $i$, et on sait qu'on peut multiplier des inégalité positives).

**Exercice 20 :** ✪ Un père propose un prix à son fils, un jeune joueur de tennis, s'il arrive à gagner au moins deux fois de suite dans l'une des deux configurations suivantes : père - entraîneur - père ou entraîneur - père - entraîneur. Sachant que l'entraîneur joue mieux que le père, quelle configuration le fils doit-il choisir pour avoir le plus de chances de gagner ?

**Correction :** Ce n'est pas évident à première vue : on peut se dire qu'il faut jouer deux fois contre l'adverseraire le plus faible, donc choisir la première configuration, mais pour gagner deux matchs consécutifs, il faut impérativement gagner le match du milieu donc il vaut mieux jouer ce match contre l'adversaire le plus faible.

Notons $p$ la proba que le fils gagne contre le père et $q$ la proba qu'il gagne contre l'entraîneur, et on a donc $q < p$ puisque l'entraîneur joue mieux que le père. Notons $G$ : « le fils gagne » et, pour tout $i \in [\![ 1\,;\, 3 ]\!]$, $G_i$ : « le fils gagne le match numéro $i$ ».

Prenons la première configuration : père - entraîneur - père. On a donc :

$$P(G) = P([G_1 \cap G_2] \cup [G_2 \cap G_3])$$

En effet, le fils peut aussi gagner les trois matchs ! Le problème est que les événements ne sont pas incompatibles. Dès lors :

$$P(G) = P(G_1 \cap G_2) + P(G_2 \cap G_3) - P(G_1 \cap G_2 \cap G_3)$$

puisque $G_2 \cap G_2 = G_2$. On en déduit, par indépendance des matchs :

$$\begin{aligned} P(G) &= pq + qp - pqp \\ &= 2pq - p^2 q \end{aligned}$$

On trouve de même que, dans la deuxième configuration, $P(G) = 2qp - q^2 p$. Or,

$$2pq - p^2 q - (2qp - q^2 p) = pq(q - p) < 0$$

puisque $p > q$. On en déduit que le fils a plus de chances de gagner lors de la deuxième configuration, c'est-à-dire entraîneur - père - entraîneur : il faut qu'il gagne le match du milieu, il est donc plus rentable de le jouer contre l'adversaire le plus faible.

**Exercice 21 - Probabilités à paramètres :** ✪ On prend $\Omega = [\![ 1\,;\, 8 ]\!]$. On définit sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ la probabilité $P$ par

- $p_1 = \alpha$
- $p_2 = p_3 = p_4 = \dfrac{7 - 16\alpha}{24}$
- $p_5 = p_6 = p_7 = \dfrac{1 + 8\alpha}{24}$
- $p_8 = \dfrac{1}{8}$

où $\alpha \in \left[ 0\,;\, \dfrac{7}{16} \right]$. On a noté $p_k = P(\{k\})$ pour plus de commodité. On définit ensuite les trois événements $A, B, C$ par

- $A = \{2; 5; 7; 8\}$
- $B = \{3; 5; 6; 8\}$
- $C = \{4; 6; 7; 8\}$

Étudier l'indépendance mutuelle éventuelle des événements $A, B, C$ en fonction de $\alpha$.

**Correction :** Précisons tout d'abord qu'il est indispensable que $\alpha$ appartienne à $\left[0\,;\frac{7}{16}\right]$ pour que les probabilités soient positives. Rappelons que $A, B, C$ sont (mutuellement) indépendants si et seulement si

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
- $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Calculons donc toutes ces probabilités. Puisque $A = \{2\} \cup \{5\} \cup \{7\} \cup \{8\}$ et que l'union est disjointe, on a

$$\begin{aligned} P(A) &= p_2 + p_5 + p_7 + p_8 \\ &= \frac{7 - 16\alpha + 1 + 8\alpha + 1 + 8\alpha + 3}{24} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On trouve de même que $P(B) = P(C) = 1/2$. De plus, $A \cap B = \{5; 8\}$ si bien que

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= p_5 + p_8 \\ &= \frac{1 + 8\alpha + 3}{24} \\ &= \frac{1 + 2\alpha}{6} \end{aligned}$$

On trouve de même que $P(A \cap C) = P(B \cap 6) = (1 + 2\alpha)/6$. Enfin, $A \cap B \cap C = \{8\}$ donc $P(A \cap B \cap C) = 1/8$. Il en découle que l'égalité $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ est toujours vérifiée. Par conséquent, $A, B, C$ sont indépendants si et seulement si les trois autres égalités sont vérifiées si et seulement si

$$\frac{1 + 2\alpha}{6} = \frac{1}{4}$$

si et seulement si $4 + 8\alpha = 6$ si et seulement si $\alpha = 1/4$. Encore une fois (cf. cours), l'indépendance dépend de la probabilité choisie : des événements indépendants pour une proba ne le seront peut-être pas pour une autre, et réciproquement.

**Exercice 22 :** ✪ Lors d'un procès, deux jurys sont formés : un premier jury avec une seule personne qui a une probabilité $p$ de prendre la bonne décision, et un deuxième jury avec trois personnes. Les deux premières prennent leur rôle au sérieux et prennent la bonne décision avec une probabilité $p$, tandis que le troisième, qui a hâte que cela se termine, tire à pile ou face. Ce jury donne une décision à la majorité. Quel jury a la plus grande probabilité de prendre la bonne décision ?

**Correction :** Calculons la probabilité qu'a le deuxième jury de prendre la bonne décision. Notons $A_i$ : « la $i$-ème personne prend la bonne décision », si bien que $P(A_1) = P(A_2) = p$ et $P(A_3) = 1/2$. Notons $A$ : « le deuxième jury prend la bonne décision ». Puisque ce jury prend sa décision à la majorité :

$$P(A) \quad = \quad P([A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}] \cup [A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3] \cup [\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3] \cup [A_1 \cap A_2 \cap A_3])$$

Ces événements étant incompatibles :

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Par indépendance :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ &= \frac{p^2}{2} + \frac{p(1-p)}{2} + \frac{(1-p)p}{2} + \frac{p^2}{2} \\ &= p \end{aligned}$$

et donc les deux jurys prennent la bonne décision avec la même probabilité.

**Exercice 23 :** ✪ On dispose d'un circuit composé de de trois composants électroniques $A$, $B$ et $C$ dont les probabilités de fonctionnement sont respectivement $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$. On suppose les composants sont en état de fonctionnement indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que le circuit fonctionne :

- lorsque les composants sont montés en série ?
- lorsque les composants sont montés en parallèle ?
- lorsque $A$ est monté en série avec le sous-circuit constitué de $B$ et $C$ montés en parallèle ?

**Correction :** Notons $A$ : « le composé $A$ fonctionne » et idem pour $B$ et $C$, et notons $F$ : « le circuit fonctionne ».

Supposons que les composants soient montés en série. Le circuit fonctionne si et seulement si les trois composés fonctionnent, c'est-à-dire que $F = A \cap B \cap C$, et par indépendance, $P(F) = P(A)P(B)P(C) = \alpha\beta\gamma$.

Supposons que les composants soient montés en parallèle. Alors le circuit fonctionne si et seulement au moins un des composés fonctionne, c'est-à-dire que

$$\begin{array}{rcl} P(F) & = & P(A \cup B \cup C) \\ & = & 1 - P\left(\overline{A \cup B \cup C}\right) \\ & = & 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \end{array}$$

Par indépendance (lorsque des événements sont indépendants, leurs complémentaires le sont aussi),

$$P(A) = 1 - (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$$

Supposons enfin que $A$ soit en parallèle de $B$ et $C$ montés en série. Alors le circuit fonctionne si et seulement si $A$ fonctionne ou le circuit formé par $B$ et $C$ fonctionne, et ceci arrive si et seulement si $B$ et $C$ fonctionne. Dès lors :

$$\begin{array}{rcl} P(F) & = & P(A \cup (B \cap C)) \\ & = & P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ & = & \alpha + \beta\gamma - \alpha\beta\gamma \end{array}$$

**Exercice 24 - Un autre problème des anniversaires :** ✪ On a vu en cours que, dans une classe de 23 élèves, il y avait plus d'une chance sur deux qu'au moins deux élèves soient nés le même jour. Cette fois, de combien d'élèves la classe doit-elle être composée pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'au moins un autre élève partage VOTRE date de naissance ? On suppose pour simplifier que les naissances ont équiréparties et que personne n'est né le 29 février.

**Correction :** Soit $n$ le nombre d'éléves de la classe. Soit $B$ l'événement « (au moins) l'un des $n-1$ élèves partage ma date d'anniversaire ». On a $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{364^{n-1}}{365^{n-1}}$. Nous avons

$$\begin{array}{rcl} P(B) \geqslant 0.5 \quad \iff \quad \left(\dfrac{364}{365}\right)^{n-1} \leqslant 0.5 & \iff & (n-1)\ln\left(\dfrac{364}{365}\right) \leqslant -\ln(2) \\ & \iff & n-1 \geqslant \dfrac{\ln(2)}{\ln(365)-\ln(364)}, \end{array}$$

c'est-à-dire $n \geqslant 253,65$. Ainsi il faut que $n \geqslant 254$.

**Exercice 25 - Les dés non transitifs d'Efron :** ✪ On dispose de quatre dés $A, B, C, D$ non pipés (au sens où chaque face sort avec probabilité 1/6) :

- Les faces du dé $A$ sont : $0, 0, 4, 4, 4, 4$.
- Les faces du dé $B$ sont : $3, 3, 3, 3, 3, 3$.
- Les faces du dé $C$ sont : $2, 2, 2, 2, 6, 6$.
- Les faces du dé $D$ sont : $1, 1, 1, 5, 5, 5$.

1. On note $A$ le numéro obtenu par le dé $A$, $B$ le numéro obtenu par le dé $B$ etc. Calculer $P(A > B)$, $P(B > C)$, $P(C > D)$ et $P(D > A)$.
2. Deux joueurs s'affrontent selon le protocole suivant : le premier joueur choisit le dé qu'il veut, le second joueur choisit le dé qu'il veut parmi les trois dés restants. Le joueur obtenant le plus grand nombre gagne. Vaut-il mieux être le premier ou le second joueur ?

**Correction :**

1. - $A > B \iff A = 4$, si bien que $P(A > C) = 2/3$.
   - $P(B > C) = P(C = 2) = 2/3$.

- $P(C > D) = P\left[[C = 6] \cup ([D = 1] \cap [C = 2])\right]$. Ces deux événements étant incompatibles :

$$P(C > D) = P(C = 6) + P([C = 2] \cap [D = 1])$$

Par indépendance des lancers :

$$\begin{aligned} P(C > D) &= P(C = 6) + P(C = 2) \times P(D = 1) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- $P(D > A) = P\left[[D = 5] \cup ([D = 1] \cap [A = 0])\right]$. Ces deux événements étant incompatibles :

$$P(D > A) = P(D = 5) + P([D = 1] \cap [A = 0])$$

Par indépendance des lancers :

$$\begin{aligned} P(D > A) &= P(D = 5) + P(D = 1) \times P(A = 0) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2. Il vaut évidemment mieux être le deuxième joueur : quel que soit (oui, en trois mots) le choix du premier joueur, le deuxième joueur peut prendre un dé avec lequel il a une probabilité de $2/3 > 1/2$ de gagner.

**Exercice 26 :** ✪ On lance $n$ fois une pièce équilibrée. On définit les événements :
- $A_n$ : « on obtient, au cours des $n$ lancers, au moins une fois Pile et au moins une fois Face ».
- $B_n$ : « on obtient, au cours des $n$ lancers, au plus un Pile ».

1. Calculer, pour tout $n \geq 2$, $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. Étudier l'indépendance des événements $A_2$ et $B_2$, puis des événements $A_3$ et $B_3$.
3. Étudier l'indépendance des événements $A_n$ et $B_n$ dans le cas général.

**Correction :** Comme d'habitude, pour tout $k$, posons $P_k$ : « on obtient pile au $k$-ième lancer » et $F_k$ : « on obtient face au $k$-ième lancer ».

1. Soit donc $n \geq 2$. Le complémentaire de $A_n$ est : « on n'obtient jamais Pile ou on n'obtient jamais Face » (toujours y penser quand on a un « au moins » ou « au plus »). Dès lors :

$$\overline{A_n} = (F_1 \cap \cdots \cap F_n) \cup (P_1 \cap \cdots \cap P_n)$$

Par incompatibilité :

$$P(\overline{A_n}) = P(F_1 \cap \cdots F_n) + P(P_1 \cap \cdots \cap P_n)$$

Par indépendance des lancers :

$$P(\overline{A_n}) = P(F_1) \times \cdots P(F_n) + P(P_1) \times \cdots \times P(P_n)$$

La pièce étant équilibrée, $P(\overline{A_n}) = 1/2^n + 1/2^n = 1/2^{n-1}$ si bien que

$$P(A_n) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Pour $B_n$, le complémentaire ne rend pas la chose plus aisée. Raisonnons comme dans l'exercice 30 :

$$B_n = (F_1 \cap \cdots \cap F_n) \cup (P_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n) \cup \cdots (F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)$$

Les événements entre parenthèses étant deux à deux incompatibles :

$$P(B_n) = P(F_1 \cap \cdots \cap F_n) + P(P_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n) + \cdots + P(F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)$$

Par indépendance des lancers, et la pièce étant équilibrée, on trouve que :

$$P(B_n) = \frac{n+1}{2^n}$$

2. $A_2 \cap B_2$ est l'événement : « on obtient au plus une fois Pile, et au moins une fois Pile et au moins une fois Face en deux lancers », si bien que $A_2 \cap B_2 = (F_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2)$. Idem (incompatibilité des événements puis indépendance des lancers), on trouve que $P(A_2 \cap B_2) = 1/2$. Or, $P(A_2) = 1/2$ et $P(B_2) = 3/4$ : $P(A_2) \times P(B_2) = 3/8 \neq 1/2$ donc $A_2$ et $B_2$ ne sont pas indépendants.

   De même, $A_3 \cap B_3$ est l'événement : « on obtient au plus une fois Pile, et au moins une fois Pile et au moins une fois Face en deux lancers », c'est-à-dire « on obtient exactement une fois Pile et deux fois Face en trois lancers », si bien que :

$$A_3 \cap B_3 = (P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3)$$

   De même que ci-dessus, on trouve que $P(A_3 \cap B_3) = 3/8$ et $P(A_3) = 3/4$ et $P(B_3) = 1/2$ : cette fois-ci, on a bien $P(A_3) \times P(B_3) = P(A_3 \cap B_3)$, les deux événements sont indépendants.

3. On trouve de même que ci-dessus que $A_n \cap B_n$ est l'événement « obtenir exactement une fois Pile et $n-1$ fois Face en $n$ lancer » si bien que

$$A_n \cap B_n = (P_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n) \cup \cdots (F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)$$

   On trouve de même que ci-dessus que $P(A_n \cap B_n) = n/2^n$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
A_n \text{ et } B_n \text{ sont indépendants} &\iff P(A_n)P(B_n) = P(A_n \cap B_n) \\
&\iff \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{n}{2^n} \\
&\iff \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times (n+1) = n \\
&\iff \frac{(2^{n-1}-1) \times (n+1)}{2^{n-1}} = n \\
&= (2^{n-1}-1) \times (n+1) = n \times 2^{n-1} \\
&= 2^{n-1} - (n+1) = 0 \\
&= n+1 = 2^{n-1}
\end{aligned}$$

   $n = 3$ est solution : prouvons que c'est la seule. Il suffit de prouver que la suite de terme général $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$ est strictement croissante à partir du rang 2 : puisqu'elle est nulle en $n = 3$, les autres termes sont forcément non nuls. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 2^n - (n+2) - 2^{n-1} + (n+1) \\
&= 2^n - 2^{n-1} - 1 \\
&= 2^{n-1}(2-1) - 1 \\
&= 2^{n-1} - 1
\end{aligned}$$

   Or, si $n \geq 2$, alors $n - 1 \geq 1$ donc $2^{n-1} > 1$ ce qui permet de conclure. En conclusion, $A_n$ et $B_n$ sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

**Exercice 27 : ✪✪** Un donjon contient $N$ coffres et un dragon. Le chef du donjon a mis, avec probabilité $p$, le trésor dans un des coffres, tiré au sort (et avec probabilité $1-p$, il l'a confié au dragon). Vous avez ouvert les $N-1$ premiers coffres, sans succès. Quelle est la probabilité pour que le trésor soit dans le dernier coffre ?

**Correction :** Pour tout $k \in [\![ 1\,;\,N ]\!]$, notons $C_k$ : « le trésor est dans le $k$-ième coffre » et $D$ : « le trésor est gardé par le dragon ». On cherche $P_{\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}}}(C_N)$. D'après la formule de Bayes :

$$P_{\overline{C_1}\cap\dots\cap\overline{C_{N-1}}}(C_N) = \frac{P_{C_N}\left(\overline{C_1}\cap\dots\cap\overline{C_{N-1}}\right)\times P(C_N)}{P\left(\overline{C_1}\cap\dots\cap\overline{C_{N-1}}\right)}$$

La probabilité conditionnelle $P_{C_N}\left(\overline{C_1}\cap\dots\cap\overline{C_{N-1}}\right)$ vaut 1, car si le trésor est dans le $N$-ième coffre, alors il n'est pas dans l'un des autres. $D$ et $\overline{D}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(C_N) = P_D(C_N)P(D) + P_{\overline{D}}(C_N)P(\overline{D})$$

Or, $P_D(C_N) = 0$ car si le trésor est gardé par le dragon, alors il n'est pas dans le dernier coffre, tandis que $P_{\overline{D}}(C_N) = 1/N$ : supposons $\overline{D}$ réalisé, alors le trésor est dans l'un des coffres, et donc dans $C_N$ avec probabilité $1/N$. On en déduit que $P(C_N) = p/N$. De même, toujours d'après la formule des probabilités totales (avec le même SCE) :

$$P\left(\overline{C_1}\cap\dots\cap\overline{C_{N-1}}\right) = P_D\left(\overline{C_1}\cap\dots\cap\overline{C_{N-1}}\right)P(D) + P_{\overline{D}}\left(\overline{C_1}\cap\dots\cap\overline{C_{N-1}}\right)P(\overline{D})$$

La première probabilité conditionnelle vaut 1, car si le trésor est gardé par le dragon, alors il n'est pas dans l'un des $N-1$ premiers coffres, tandis que la deuxième probabilité conditionnelle vaut $1/N$. Supposons en effet $\overline{D}$ réalisé. Dans ce cas, $\overline{C_1}\cap\dots\cap\overline{C_{N-1}}$ est réalisé si et seulement si le trésor est dans le dernier coffre, ce qui arrive avec proba $1/N$ (puisqu'on sait déjà que le trésor est dans l'un des coffres). Par conséquent :

$$P\left(\overline{C_1}\cap\dots\cap\overline{C_{N-1}}\right) = 1\times(1-p) + \frac{1}{N}\times p$$

Finalement, la probabilité recherchée vaut :

$$\begin{aligned} P_{\overline{C_1}\cap\dots\cap\overline{C_{N-1}}}(C_N) &= \frac{1\times\dfrac{p}{N}}{1-p+\dfrac{p}{N}} \\ &= \frac{\dfrac{p}{N}}{\dfrac{N-Np+p}{N}} \\ &= \frac{p}{p+N(1-p)} \end{aligned}$$

**Exercice 28 : ✪✪** Soit $n\geq 2$. On considère $\Omega = [\![ 1\,;\,n ]\!]$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme. Donner une CNS sur $n$ pour que $\Omega$ contienne deux événements indépendants non triviaux (i.e. de probabilité appartenant à $]\,0\,;1\,[$).

**Correction :** Travaillons par analyse-synthèse. Supposons donc que $\Omega$ contienne deux événements indépendants non indépendants non triviaux notés $A$ et $B$. Par indépendance, $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ et puisque $P$ est l'équiprobabilité, ceci donne :

$$\frac{\text{card}(A\cap B)}{n} = \frac{\text{card}(A)}{n}\times\frac{\text{card}(B)}{n}$$

et donc $\text{card}(A)\times\text{card}(B) = n\times\text{card}(A\cap B)$. Puisque $A$ et $B$ sont de probabilité non nulle, $\text{card}(A)\times\text{card}(B)\neq 0$ donc $\text{card}(A\cap B)\neq 0$.

Supposons que $n$ soit premier. Alors $n$ divise $\text{card}(A)\times\text{card}(B)$ donc divise $\text{card}(A)$ ou $\text{card}(B)$ (pas de génération spontanée des nombres premiers, mais c'est un résultat du chapitre 6 : un nombre premier divise un produit si et seulement si $p$ divise l'un des termes du produit), et puisque $\text{card}(A)$ et $\text{card}(B)$ sont non nuls et inférieurs à $n$, alors $\text{card}(A) = n$ ou $\text{card}(B) = n$ ce qui est exclu puisqu'on a supposé que $A$ et $B$ étaient de probabilité distincte de 1. On en déduit que $n$ n'est pas un nombre premier.

Synthèse : supposons que $n$ ne soit pas un nombre premier, et prouvons qu'il existe deux événements $A$ et $B$ indépendants non triviaux. D'après ce qui précède, une condition nécessaire et suffisante est d'avoir $\text{card}(A)\times\text{card}(B) = n\times\text{card}(A\cap B)$ : construisons donc deux événements de cardinal distinct de 0 et de $n$ vérifiant cette égalité. $n$ n'est pas premier donc on peut écrire $n = ab$ avec $2\leq a,b\leq n-1$. Mieux : $a$ et $b$ étant des diviseurs stricts de $n$, on a $a,b\leq n/2$. Prenons donc $A$ de cardinal $a$ et $B$ de cardinal $b$ de telle sorte que $A\cap B$ soit de cardinal 1 (ce qui est possible puisque $a+b\leq n$). On a alors

$$\text{card}(A)\times\text{card}(B) = n\times\text{card}(A\cap B)$$

donc

$$\frac{\text{card}(A\cap B)}{n} = \frac{\text{card}(A)}{n}\times\frac{\text{card}(B)}{n}$$

et donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ : $A$ et $B$ sont indépendants. En conclusion : $\Omega$ contient deux événements indépendants non triviaux si et seulement si $n$ n'est pas premier.

**Exercice 29 : ✪✪** On lance deux dés et on cherche la probabilité d'avoir une paire.

1. Montrer que si les deux dés sont équilibrés, la probabilité recherchée vaut 1/6.
2. Montrer que si les deux dés sont pipés de la même façon, la probabilité recherchée est supérieure ou égale à 1/6.

**Correction :**

1. Trivial et fait dans l'exercice 9.
2. Notons donc $p_1 = P(\{1\})$ etc. Notons $E$ l'événement : on obtient un double. Notons $A_1$ (respectivement $B_1$) : « on obtient 1 au premier lancer » (respectivement au deuxième lancer). De même on définit $A_2, \dots, A_6, B_2, \dots, B_6$. Par conséquent,

$$E = (A_1 \cap B_1) \cup \cdots \cup (A_6 \cap B_6)$$

Les événements entre parenthèses sont deux à deux indépendants :

$$P(E) = P(A_1 \cap B_1) + \cdots + P(A_6 \cap B_6)$$

Les lancers étant indépendants :

$$P(E) = {p_1}^2 + \cdots + {p_6}^2$$

La fonction carré est convexe, on peut utiliser l'inégalité de Jensen : les $p_i$ étant positifs de somme 1,

$$\left(\frac{p_1 + \cdots + p_6}{6}\right)^2 \leq \frac{{p_1}^2 + \cdots + {p_6}^2}{6}$$

ce qui permet de conclure puisque $p_1 + \cdots + p_6 = 1$.

**Exercice 30 : ✪✪** On considère $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soient $n \geq 3$ et $k \in [\![ 2 \,;\, n-1 ]\!]$. On répète $n$ fois une expérience dont l'issue peut être un succès ou un échec. Pour tout $j \in [\![ 1 \,;\, n ]\!]$, on note $A_j$ l'événement « la $j$-ième expérience est un succès ».

1. En utilisant les opérations ensemblistes, décrire les événements suivants :
   (a) « La $k$-ième expérience est un échec ».
   (b) « Seule la $k$-ième expérience est un échec ».
   (c) « Aucune des expériences n'est un succès ».
   (d) « Toutes les expériences à partir de la $k$-ième sont des succès ».
   (e) « Seules les $k$ dernières expériences sont des succès ».
   (f) « Toutes les expériences sauf une sont des succès ».
   (g) « Toutes les expériences sauf peut-être une sont des succès ».
   (h) « Le premier succès arrive à un instant pair » (on distinguera selon la parité de $n$).
2. Décrire à l'aide d'une phrase l'événement suivant :

$$\bigcup_{J \subset [\![ 1 \,;\, n ]\!], \mathrm{card}(J) = k} \left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) \cup \left(\bigcap_{j \in \overline{J}} \overline{A_j}\right).$$

**Correction :**

1. (a) $\overline{A_k}$.
   (b) $A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k} \cap A_{k+1} \cap \cdots \cap A_n$.
   (c) $\overline{A_1 \cup \cdots A_n} = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$.
   (d) $A_k \cap A_{k+1} \cap \cdots \cap A_n$.
   (e) $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k+1}} \cap A_k \cap A_{k+1} \cap \cdots \cap A_n$.
   (f) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^n \left(\overline{A_i} \cap \bigcap_{j \neq i} A_j\right)$ ou, ce qui au revient au même, mais qui est peut-être plus maniable :

$$(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cdots \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n)$$

(g) Il suffit de prendre l'union de l'ensemble précédent avec $A_1 \cap \cdots \cap A_n$, c'est-à-dire :

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \bigcup_{i=1}^{n}\left(\overline{A_i} \cap \bigcap_{j \neq i} A_j\right)$$

ou

$$(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cdots \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n) \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

(h) Ambigu : reformulons en « le premier succès arrive à un instant pair ». Supposons que $n$ soit pair, donc il existe $k \geq 1$ tel que $n = 2k$. Alors l'événement est :

$$\bigcup_{i=1}^{k}\left(A_{2i} \cap \bigcap_{j=1}^{2i-1} \overline{A_j}\right)$$

c'est-à-dire :

$$(\overline{A_1} \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4) \cup \cdots \cup (\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{2k-1}} \cap A_{2k})$$

Si $n$ est impair, il existe $k \geq 0$ tel que $n = 2k+1$, et la suite est identique :

$$\bigcup_{i=1}^{k}\left(A_{2i} \cap \bigcap_{j=1}^{2i-1} \overline{A_j}\right)$$

c'est-à-dire :

$$(\overline{A_1} \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4) \cup \cdots \cup (\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{2k-1}} \cap A_{2k})$$

2. On obtient exactement $k$ succès.

# 4 Probabilités composées, probabilités totales, formule de Bayes

**Exercice 31 :** ✪ On dispose d'une urne avec $2n$ boules, $n$ blanches et $n$ noires. Soit $k \geq 1$.

1. On suppose que les tirages se font avec remise.
   (a) Donner la probabilité que les $k$ premières boules soient blanches.
   (b) Donner la probabilité que la $k$-ième boule soit blanche, sachant que les $k-1$ premières boules tirées sont blanches.
2. Mêmes questions si on suppose que les tirages se font sans remise.

**Correction :** Dans tout l'exercice, pour tout $k$, notons $B_k$ : on tire une boule blanche au $k$-ième tirage et $N_k$ : « on tire une boule noire au $k$-ième tirage ».

1. Les tirages se font avec remise : les tirages sont donc indépendants. De plus, la composition de l'urne ne change pas donc, pour tout $k$ (même si $k \geq n$), $P(B_k) = P(N_k) = n/2n = 1/2$.
   (a) On cherche $P(B_1 \cap B_k)$. Par indépendance des tirages, cette proba vaut $P(B_1) \times \cdots \times P(B_k) = 1/2^k$.
   (b) On cherche $P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(B_k)$. Par indépendance des tirages, cette probabilité est égale à $P(B_k) = 1/2$ : puisque les tirages sont indépendants, cela ne change pas la probabilité, cela n'apporte aucune information !
2. Ici, il n'y a plus indépendance puisque la composition de l'urne dépend des tirages précédents.
   (a) Si $k > n$, cette probabilité est nulle puisqu'on ne peut pas tirer strictement plus de boules blanches qu'il n'y a de boules blanches dans l'urne. Supposons donc $k \in [\![ 1\,;n ]\!]$. On cherche toujours $P(B_1 \cap \cdots \cap B_k)$, mais les événements ne sont plus indépendants : on applique donc la formule des probabilités composées.

$$P(B_1 \cap \cdots \cap B_k) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \cdots \times P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(B_k)$$

   On a tout d'abord $P(B_1) = 1/2$ car, à l'instant initial, l'urne contient $n$ boules blanches et $n$ boules noires. Supposons à présent $B_1$ réalisé. L'urne contient alors $n-1$ boules blanches et toujours $n$ boules noires, si bien que

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{n-1}{2n-1}$$

Supposons $B_1 \cap B_2$ réalisé : on a tiré deux boules blanches, donc l'urne contient $n-2$ boules blanches et toujours $n$ boules noires, donc :

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{n-2}{2n-2}$$

et ainsi de suite, si bien que :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap \cdots \cap B_k) &= \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{2n-(k-1)} \\ &= n(n-1)\cdots(n-k+1) \times \frac{1}{(2n)(2n-1)\cdots(2n-k+1)} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{(2n-k)!}{(2n)!} \end{aligned}$$

(b) On a répondu à cette question dans la précédente : si $k > n$, cette proba est nulle, sinon elle vaut

$$P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(B_k) = \frac{n-(k-1)}{2n-(k-1)} = \frac{n-k+1}{2n-k+1}$$

**Exercice 32 :** ✪ On dispose de trois pièces équilibrées : l'une avec deux faces blanches, l'une avec deux faces noires, et la dernière avec une face de chaque couleur. On prend une pièce au hasard et on lance la pièce choisie (toujours la même).

1. Quelle est la probabilité d'obtenir « blanc » au premier lancer ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir « blanc » aux $n$ premiers lancers ? Commenter.
3. Sachant que les $n$ premiers lancers sont blancs, quelle est la probabilité que la pièce choisie soit blanche. Commenter.

**Correction :** Pour tout $i \in [\![ 1\,;\,n ]\!]$, notons $B_i$ : « on obtient blanc au $i$-ième lancer » et, pour tout $i \in [\![ 1\,;\,3 ]\!]$, $P_i$ : « on choisit la $i$-ième pièce ».

1. $P_1, P_2, P_3$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P_{P_1}(B_1)P(P_1) + P_{P_2}(B_1)P(P_2) + P_{P_3}(B_1)P(P_3) \\ &= 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. De même, d'après la formule des probabilités totales, et par indépendance des tirages :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) &= P_{P_1}(B_1 \cap \cdots \cap B_n)P(P_1) + P_{P_2}(B_1 \cap \cdots \cap B_n)P(P_2) + P_{P_3}(B_1 \cap \cdots \cap B_n)P(P_3) \\ &= P_{P_1}(B_1) \times \cdots \times P_{P_1}(B_n)P(P_1) + P_{P_2}(B_1) \times \cdots \times P_{P_2}(B_n)P(P_2) + P_{P_3}(B_1) \times \cdots \times P_{P_3}(B_n)P(P_3) \\ &= 1 \times \cdots \times 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \cdots \times 0 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La probabilité tend vers 1/3 : plus $n$ est grand, plus on se rapproche de la probabilité de tirer la première pièce.

3. On cherche $P_{B_1 \cap \cdots \cap B_n}(P_1)$ : d'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_{B_1 \cap \cdots \cap B_n}(P_1) &= \frac{P_{P_1}(B_1 \cap \cdots \cap B_n) \times P(P_1)}{P(B_1 \cap \cdots \cap B_n)} \\ &= \frac{1 \times 1/3}{1/3 + 1/2^n \times 1/3} \\ &= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2^n}} \end{aligned}$$

qui tend vers 1 quand $n$ tend vers $+\infty$, ce qui est intuitif : si on lance un grand nombre de fois la pièce, et si on obtient blanc à chaque fois, « on a toutes les chances d'avoir choisi la première pièce ».

**Exercice 33 :** ✪ On dispose de $n$ urnes numérotées de 1 à $n$. L'urne $i$ contient $i$ boules numérotées de 1 à $i$. On choisit une urne au hasard et on y prend une boule. Calculer la probabilité d'obtenir une boule portant le numéro $k$ (avec $1 \leq k \leq n$). Vérifier que la somme des probabilités vaut bien 1.

**Correction :** Pour $i \in [\![ 1\,;\, n ]\!]$, on note $A_i$ : « on tire une boule dans l'urne numéro $i$ », qui est de probabilité $1/n$. Soit $E_k$ l'événement « obtenir une boule portant le numéro $k$ ». Les $A_i$ étant un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E_k) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(E_k) \times P(A_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(E_k)$$

Or, si $k > i, P_{A_i}(E_k) = 0$ car l'urne $i$ ne contient que les numéros de 1 à $i$, tandis que si $i \leq k, P_{A_i}(E_k) = 1/i$. Par conséquent,

$$P(E_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}$$

On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} P(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}1 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\times i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Exercice 34 :** ✪ Un lot de cent dés contient vingt-cinq dés pipés dont la probabilité d'obtenir 6 est 1/2. On lance un dé, on obtient 6, quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

**Correction :** Notons $P$ : « le dé est pipé » et $S$ : « on obtient 6 ». On a donc : $P(P) = 1/4$ et $P_P(S) = 1/2$. On cherche $P_S(P)$. D'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P_S(P) &= \frac{P_P(S) \times P(P)}{P(S)} \\ &= \frac{1/2 \times 1/4}{P(S)} \end{aligned}$$

Or, $P$ et $\overline{P}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P_P(S)P(P) + P_{\overline{P}}(S)P(\overline{P}) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\times\frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

puisque $P_{\overline{P}}(S) = 1/6$ (la probabilité d'obtenir 6 avec un dé non truqué est $1/6$). On trouve finalement que $P_S(P) = 1/2$.

**Exercice 35 :** ✪ Un quart d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, un douzième est malade. Parmi les malades, il y a quatre non vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour un non vacciné de tomber malade ?

**Correction :** Notons $V$ : « être vacciné » et $M$ : « être malade ». D'après l'énoncé : $P(V) = 1/4$, $P_V(M) = 1/12$ et $P_M(V) = 1/5$ (quatre non vaccinés pour un vacciné signifie qu'il y a un cinquième de vaccinés). On cherche $P_{\overline{V}}(M)$. D'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P_{\overline{V}}(M) &= \frac{P_M(\overline{V})P(M)}{P(\overline{V})} \\ &= \frac{4/5 \times P(M)}{3/4} \end{aligned}$$

$V$ et $\overline{V}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(M) &= P_V(M)P(V) + P_{\overline{V}}(M)P(\overline{V}) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} + P_{\overline{V}}(M) \times \frac{3}{4} \end{aligned}$$

On ne connaît pas $P_{\overline{V}}(M)$ puisque c'est la quantité cherchée : il suffit de réinjecter dans l'égalité ci-dessus, et cela nous donnera une équation à une inconnue, c'est-à-dire :

$$P_{\overline{V}}(M) = \frac{\frac{4}{5} \times \left( \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} + P_{\overline{V}}(M) \times \frac{3}{4} \right)}{\frac{3}{4}}$$

donc

$$\frac{3}{4} P_{\overline{V}}(M) = \frac{1}{60} + \frac{3}{5} \times P_{\overline{V}}(M)$$

si bien que

$$\left( \frac{3}{4} - \frac{3}{5} \right) P_{\overline{V}}(M) = \frac{1}{60}$$

Finalement, $P_{\overline{V}}(M) = 1/9$.

**Exercice 36 :** ✪ Il y a fort fort longtemps, dans un pays fort fort lointain (à Paris), un élève de la classe de ECS 1A a le choix entre quatre itinéraires :

- L'itinéraire A, où il doit emprunter (entre autres) la ligne 14. La probabilité d'arriver en retard est de $1/20$. Il choisit cet itinéraire avec probabilité $1/3$.
- L'itinéraire B, où il doit emprunter (entre autres) la ligne 7. La probabilité qu'il arrive en retard est de $1/10$. Il choisit cet itinéraire avec probabilité $1/4$.
- L'itinéraire C, où il doit emprunter (entre autres) le RER B. La probabilité qu'il arrive en retard est de $3/4$.
- L'itinéraire D, où il doit juste marcher. Dans ce cas là, il n'arrive jamais en retard. Il choisit cet itinéraire avec probabilité $1/3$.

L'élève arrive en retard (pour changer). Quelle est la probabilité qu'il ait pris le RER B ?

**Correction :** Notons $A$ : « l'élève choisit l'itinéraire $A$ », et idem pour $B, C, D$. Notons $R$ : « l'élève arrive en retard ». On cherche donc $P_R(C)$ (attention, prendre le RER B est l'itinéraire $C$ !). D'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_R(C) &= \frac{P_C(R) \times P(C)}{P(R)} \\ &= \frac{3/4 \times P(C)}{P(R)} \end{aligned}$$

Tout d'abord,

$$\begin{aligned} P(C) &= 1 - P(A) - P(B) - P(D) \\ &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

De plus, $A, B, C, D$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P_A(R)P(A) + P_B(R)P(B) + P_C(R)P(C) + P_D(R)P(D) \\ &= \frac{1}{20} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{12} + 0 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{60} + \frac{1}{40} + \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Or, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $40 = 2^3 \times 5$ et $16 = 2^4$ si bien que le PPCM de $60, 40, 16$ est $2^4 \times 3 \times 5 = 240$ (tous les facteurs premiers, aux plus grandes puissances). Dès lors :

$$\begin{aligned} P(R) &= \frac{4+6+15}{240} \\ &= \frac{5}{48} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned} P_R(C) &= \frac{\dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{12}}{\dfrac{5}{48}} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

**Exercice 37 :** ✪ On dispose de 12 pièces numérotées de 1 à 12 et on suppose que, pour tout $k \in [\![ 1 \,;\, 12 ]\!]$, la $k$-ième pièce tombe sur FACE avec probabilité $k/12$. On lance une pièce au hasard et on obtient FACE. Quelle est la probabilité d'avoir lancé la douzième pièce ?

**Correction :** Erreur d'énoncé, on obtient FACE et non pas PILE (sinon la proba recherchée est évidemment nulle). Notons $F$ : « obtenir Face » et, pour tout $k \in [\![ 1 \,;\, 12 ]\!]$, $P_k$ : « lancer la $k$-ième pièce ». On cherche donc $P_F(P_{12})$. D'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_F(P_{12}) &= \frac{P_{P_{12}}(F) \times P_{12}}{P(F)} \\ &= \frac{1 \times 1/12}{P(F)} \end{aligned}$$

Les événements $P_1, \dots, P_{12}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(F) &= \sum_{k=1}^{12} P_{P_k}(F) \times P(P_k) \\ &= \sum_{k=1}^{12} \frac{k}{12} \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{12 \times 13}{2 \times 12^2} \\ &= \frac{13}{24} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned} P_F(P_{12}) &= \frac{1}{12} \times \frac{24}{13} \\ &= \frac{2}{13} \end{aligned}$$

**Exercice 38 : ✪** On lance $n$ dés équilibrés.

1. Donner la probabilité que le produit des numéros obtenus soit pair.
2. Même question avec la somme.

**Correction :** Notons, pour tout $i$, $P_i$ : « le $i$-ème dé donne un résultat pair » et $I_i$ : « le $i$-ème dé donne un résultat impair ».

1. Notons $A$ : « Le produit est pair ». Alors $\overline{A}$ est l'événement : « le produit est impair » et un produit est impair si et seulement si tous les numéros sont impairs, donc $\overline{A} = I_1 \cap \cdots \cap I_n$ et, par indépendance,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(I_1) \times \cdots \times P(I_n) \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

puisque les dés sont équilibrés.

2. Notons $A_n$ l'événement « la somme des numéros est paire ». L'idée est de se ramener au rang précédent : si on connaît la parité de la somme des $n-1$ premiers dés, le résultat est évident. Plus précisément, $An - 1$ et $\overline{A_{n-1}}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probas totales :

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P_{A_{n-1}}(A_n) \times P(A_{n-1}) + P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) \times P(\overline{A_{n-1}}) \\ &= P_{A_{n-1}}(A_n) \times P(A_{n-1}) + P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) \times (1 - P(A_{n-1})) \end{aligned}$$

Or, $P_{A_{n-1}}(A_n) = 1/2$. En effet, supposons $A_{n-1}$ réalisé, si bien que la somme des $n-1$ premiers dés est paire. Par conséquent, la somme des $n$ dés est paire si et seulement si le dernier dé est pair, ce qui arrive avec proba $1/2$. De même, $P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) = 1/2$, si bien que

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \frac{1}{2} \times P(A_{n-1}) + \frac{1}{2}(1 - P(A_{n-1})) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Exercice 39 : ✪✪**

1. Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et soient $(A_1, A_2, A_3)$ trois événements. Donner $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.
2. Trois personnes portant un chapeau vont au théâtre. En partant, chacune d'elles prend un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne reparte avec son chapeau ?

**Correction :**

1. C'est la formule du crible ou de Poincaré vue en classe :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

2. Notons $A_i$ : « la $i$-ième personne repart avec son chapeau ». On cherche donc

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

On a $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$. Attention, les événements ne sont pas indépendants : si la première personne ne repart pas avec son chapeau, il repart avec celui de la deuxième ou de la troisième personne, ce qui diminue leur probabilité de repartir avec leur chapeau. Appliquons donc la formule des probabilités composées :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P_{A_1}(A_2)$$

Supposons $A_1$ réalisé. Alors il ne reste que les chapeaux 2 et 3 donc la deuxième personne repart avec le sien avec proba $1/2$ donc $P_{A_1}(A_2) = 1/2$, si bien que $P(A_1 \cap A_2) = 1/6$. De même pour $P(A_1 \cap A_3)$ et $P(A_2 \cap A_3)$. Enfin, toujours d'après la formule des probas composées :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$$

Supposons $A_1 \cap A_2$ réalisé : il ne reste donc que le troisième chapeau donc $P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = 1$, c'est-à-dire que $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/6$. En conclusion :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

et donc la proba recherchée vaut 1/3.

Deuxième démonstration (à faire après le chapitre 32, mais peut-être moins dans l'esprit de l'exercice vue la première question) : on se place sur $S_3$, l'ensemble des bijections de $[\![ 1\,;\,3 ]\!]$ muni de l'équiprobabilité (la fonction qui à une personne associe le chapeau avec lequel il repart est bijective, et toutes les configurations sont équiprobables). La probabilité recherchée est donc le nombre de bijections sans point fixe divisé par $\text{card}(S_3) = 6$. Or, parmi les six éléments de $S_3$, seuls les deux 3-cycles $(1\,2\,3)$ et $(1\,3\,2)$ n'ont pas de point fixe, si bien que la probabilité recherchée vaut $2/6 = 1/3$.

**Exercice 40 : ✪✪** On lance une pièce de monnaie équilibrée $n$ fois de suite de manière indépendante et on s'intéresse à l'événement $E_n$ : « au cours des $n$ lancers, deux Pile successifs n'apparaissent pas ». On note, pour tout $n \geq 1, P_n$ la probabilité de $E_n$.

1. Trouver une relation entre $P_n, P_{n-1}$ et $P_{n-2}$.
2. En déduire que $P_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

**Correction :**

1. Soit $n \geq 3$. Si $k \geq 1$, notons $A_k$ : « Obtenir Pile à l'instant $k$ » et $B_k$ : « Obtenir Face à l'instant $k$ ». L'événement $E_n$ est réalisé si et seulement si on obtient Face à l'instant $n$ et si on n'a pas obtenu deux Pile successifs jusqu'à l'instant $n-1$, ou si on obtient Pile à l'instant $n$, si on obtient Face à l'instant $n-1$ (car $E_n$ est réalisé si on n'obtient pas deux Pile successifs) et si on n'a pas obtenu deux Pile successifs jusqu'à l'instant $n-2$. En d'autres termes,
$$E_n = (B_n \cap E_{n-1}) \cup (A_n \cap B_{n-1} \cap E_{n-2})$$
Par conséquent, $P(E_n) = P((B_n \cap E_{n-1}) \cup (A_n \cap B_{n-1} \cap E_{n-2}))$. Or, les deux événements entre parenthèses sont incompatibles donc
$$p_n = P(E_n) = P(B_n \cap E_{n-1}) + P(A_n \cap B_{n-1} \cap E_{n-2})$$
Les lancers sont indépendants donc les événements $B_n$ (qui ne concerne que le $n$-ième lancer) et $E_{n-1}$ (qui concerne les $n-1$ premiers lancers) sont indépendants. De même, les événements $A_n$, $B_{n-1}$ et $E_{n-2}$ sont mutuellement indépendants (alors que, par exemple, $E_{n-1}$ et $E_{n-2}$ ne le sont pas) donc
$$p_n = P(B_n) \times P(E_{n-1}) + P(A_n) \times P(B_{n-1}) \times P(E_{n-2}) = \frac{1}{2} \times p_{n-1} + \frac{1}{4} \times p_{n-2}$$
car la pièce est équilibrée.
2. Par conséquent, $(p_n)_{n \geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :
$$r^2 = \frac{r}{2} + \frac{1}{4} \iff r^2 - \frac{r}{2} - \frac{1}{4} = 0 \iff 4r^2 - 2r - 1 = 0$$
(autant éviter les fractions). Cette équation admet deux solutions simples : $r_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Ainsi, il existe $\lambda$ et $\mu$ uniques tels que, pour tout $n \geq 1$,
$$p_n = \lambda \times \left( \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^n + \mu \times \left( \frac{1-\sqrt{5}}{4} \right)^n$$
On pourrait donner la valeur de $\lambda$ et de $\mu$ avec les valeurs de $p_1$ et de $p_2$ (on trouve facilement $p_1 = 1$ et $p_2 = 3/4$) mais ce n'est même pas la peine : on ne demande pas la valeur explicite de $p_n$ mais juste de prouver que $p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, et pour cela, on n'a même pas besoin de connaître la valeur de $\lambda$ et de $\mu$ ! Il suffit de voir que $4 < 5 < 9$ donc, par stricte croissance de la racine carrée, $2 < \sqrt{5} < 3$ donc $0 < \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} < \dfrac{1+3}{4} = 1$.De même on montre que $-1 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$. Par conséquent, on a deux suites géométriques de raison appartenant à $]-1\,;1\,[$. Le résultat en découle.

**Exercice 41 - Téléphone arabe : ✪✪** $N$ personnes numérotées $1, 2, \ldots, N$ se transmettent dans cet ordre une information reçue correcte par la première personne. Chaque personne transmet l'information qu'il entend avec probabilité $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et la transforme en son contraire avec probabilité $1-p$. Quelle est la probabilité que la $N$-ième personne reçoive l'information correcte ?

**Correction :** Attention, si une personne reçoit l'information erronée, elle donne la bonne info avec proba $1-p$ !

Pour tout $n$, notons $A_n$ : « la $n$-ième personne reçoit l'information correcte » et $u_n = P(A_n)$. Trouvons une relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)$, comme dans l'exercice 38. Soit $n \geq 1$. $A_n$ et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$u_{n+1} = P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})P(\overline{A_n})$$

Or, si la $n$-ième personne a la bonne information, il la transmet à la suivante avec proba $p$, tandis que s'il a la mauvaise, il donne la bonne avec proba $1-p$ (s'il donne l'info contraire à celle qu'il a). Dès lors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= pu_n + (1-p)(1-u_n) \\ &= (2p-1)u_n + 1 - p \end{aligned}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique (et $2p-1 < 1$ puisque $p < 1$) : l'équation caractéristique est

$$x = (2p-1)x + (1-p) \iff x = 1/2$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (2p-1)u_n + 1-p \\ \frac{1}{2} &= (2p-1) \times \frac{1}{2} + 1-p \end{aligned}$$

Par différence :

$$u_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$$

c'est-à-dire que la suite de terme général $u_n - 1/2$ est géométrique de raison $2p-1$, si bien que (attention, la suite commence au rang $n = 1$ !)

$$u_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1} \times \left(u_1 - \frac{1}{2}\right)$$

et donc, puisque la première personne a l'information correcte :

$$u_n = \frac{1}{2} + (2p-1)^{n-1} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

En conclusion, la probabilité recherchée est

$$u_N = \frac{1}{2} + \frac{(2p-1)^{n-1}}{2}$$

**Exercice 42 : ✪✪** Un joueur lance deux pièces supposées équilibrées. S'il n'obtient aucun pile, son gain est nul et la partie s'arrête. Sinon, il lance la pièce autant de fois qu'il a obtenu pile à la première phase du jeu. Son gain est alors le nombre de pile obtenus à la seconde étape du jeu.

1. Quelle est la probabilité que le gain soit nul ?
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait obtenu deux piles à la première étape sachant que son gain vaut 1 ?

**Correction :** Cet exercice a plutôt sa place dans le chapitre suivant, mea culpa. Notons $N$ le nombre de Pile à la première étape du jeu, $G$ le gain final.

1. On cherche donc $P(G=0)$. $S$ peut être égal à $0, 1, 2$ donc $[S=0], [S=1]$ et $[S=2]$ forment un SCE (plus précisément, c'est le SCE associé à la variable aléatoire $S$). D'après la formule des probas totales :

$$P(G=0) = P_{S=0}(G=0)P(S=0) + P_{S=1}(G=0)P(S=1) + P_{S=2}(G=0)P(S=2)$$

Tout d'abord, pour donner la loi de $S$, on modélise la première partie de l'expérience de la façon suivante : on se place sur $\Omega = \{P;F\}^2$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité, si bien que $[S=0] = \{(F,F)\}$, de proba $1/4$,

$[S=1] = \{(P,F);(F,P)\}$ de proba $1/2$, et $[S=2] = \{(P,P)\}$ de proba $1/4$. Donnons à présent les probas conditionnelles.

Si $S=0$, le jeu s'arrête et le gain est nul donc $P_{[S=0]}(G=0)=1$. Si $S=1$, alors on relance la pièce une fois et le gain est le nombre de Pile lors de cette étape : on a donc $P_{[S=0]}(G=1)=1/2$. De même, si $S=2$, alors on relance la pièce deux fois et le gain est le nombre de Pile lors de cette étape : on a donc $P_{[S=0]}(G=2)=1/4$ (de même que ci-dessus, les possibilités équiprobables sont $(F,F),(F,P),(P,F),(P,P)$). Finalement :

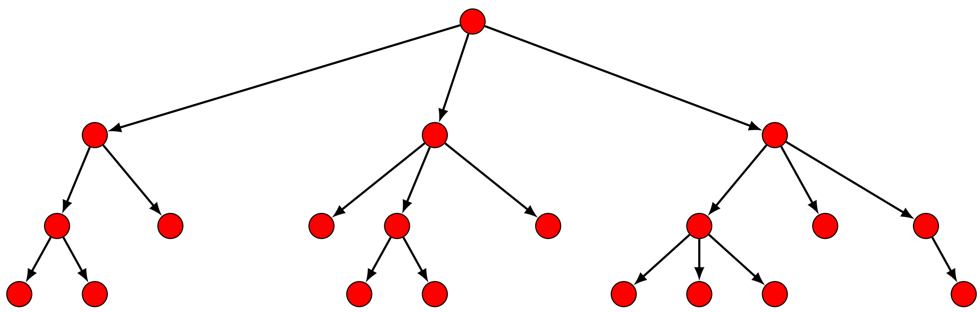
$$\begin{aligned} P(G=0) &= 1\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

2. On cherche donc $P_{[G=1]}(S=2)$. D'après la formule de Bayes,

$$P_{[G=1]}(S=2) = \frac{P_{[S=2]}(G=1)\times P(S=2)}{P(G=1)}$$

Or, on sait déjà que $P(S=2)=1/4$, et on trouve de même que dans la question précédente que $P_{[S=2]}(G=1)=1/2$ (on lance deux fois une pièce, il y a deux possibilités sur quatre pour avoir un seul Pile) et que (à l'aide de la formule des probas totales) $P(G=1)=3/8$. On trouve donc finalement $P_{[G=1]}(S=2)=1/3$.

**Exercice 43 - Galton-Watson dans un cas simple : ✪✪** On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec la probabilité $1/8$, 2 descendants avec la probabilité $3/8$, 1 descendant avec la probabilité $3/8$ et aucun descendant avec la probabilité $1/8$, indépendamment de ses congénères. À l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = 1/8$.



1. Déterminer la probabilité $x_2$ pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la deuxième génération.
2. On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x_n$ la probabilité pour qu'il n'y ait aucun individu à la $n$-ième génération. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, x_{n+1} = \frac{1}{8}\times {x_n}^3 + \frac{3}{8}\times {x_n}^2 + \frac{3}{8}\times x_n + \frac{1}{8}$$

3. Étudier la suite $(x_n)$ et montrer qu'elle converge vers une limite que l'on explicitera. Interpréter ce résultat.

**Correction :**

1. Notons $A_{1,0}$ : « l'individu originel a 0 enfant » et on définit de même $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}$. Notons $E_2$ : « extinction après la deuxième génération », si bien qu'on cherche $x_2 = P(E_2)$. $A_{1,0}, A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}$ forment un SCE donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$x_2 = P_{A_{1,0}}(E_2)P(A_{1,0}) + P_{A_{1,1}}(E_2)P(A_{1,1}) + P_{A_{1,2}}(E_2)P(A_{1,2}) + P_{A_{1,3}}(E_2)P(A_{1,3})$$

La première proba conditionnelle vaut 1 puisque l'espèce est déjà éteinte au bout de la première génération. Supposons $A_1$ réalisé : alors il n'y a qu'un descendant, qui a une probabilité $1/8$ de ne faire aucun descendant, donc $P_{A_1}(E_2)=1/8$. Supposons $A_2$ réalisé, si bien qu'il y a deux individus à la deuxième génération. Si on note $B_{1,0}$ l'événement « la première personne n'a pas de descendant » et $B_{2,0}$ : « la deuxième personne n'a pas de descendant » (le premier indice est la personne, le deuxième son nombre de descendants), alors $E_2$ est réalisé si et seulement si $B_{1,0}$ et $B_{2,0}$, c'est-à-dire que $P_{A_{1,2}}(E_2) = P_{A_{1,2}}(B_{1,0}\cap B_{2,0})$. Par indépendance, cette proba vaut $1/8\times 1/8 = 1/64$. On trouve de même que $P_{A_{1,3}}(E_2) = 1/8^3$ puisqu'il y a extinction si et seulement si les trois branches s'éteignent à la génération suivante. Par conséquent :

$$\begin{aligned} x_2 &= 1\times\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{8^2}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{8^3}\times\frac{1}{8} \\ &= \frac{8^3+3\times 8^2+3\times 8+1}{8^4} \\ &= \frac{729}{4096}\approx 0.17 \end{aligned}$$

2. Le raisonnement est le même, si ce n'est qu'on note $E_{n+1}$ l'événement « l'espèce est éteinte au bout de la $(n+1)$-ième génération ».

$$x_{n+1} = P_{A_{1,0}}(E_{n+1})P(A_{1,0}) + P_{A_{1,1}}(E_{n+1})P(A_{1,1}) + P_{A_{1,2}}(E_{n+1})P(A_{1,2}) + P_{A_{1,3}}(E_{n+1})P(A_{1,3})$$

Supposons $A_{1,2}$ réalisé, si bien qu'il y a deux individus à la deuxième génération. Alors $E_{n+1}$ est réalisé si et seulement si les deux descendants voient chacun leur lignée s'éteindre $n$ générations plus tard, et cela se produit (pour chaque descendant) avec proba $x_n$, puisque cela revient à une lignée avec un originel qui s'éteint en $n$ générations, et par indépendance, on trouve que la proba conditionnelle $P_{A_{1,2}}(E_{n+1})$ vaut ${x_n}^2$. Si on veut le faire proprement, on note $F_n$ : « la descendance du premier s'éteint en $n$ générations » et $G_n$ : « la descendance du deuxième s'éteint en $n$ générations ». Par conséquent,

$$P_{A_{1,2}}(E_{n+1}) = P_{A_{1,2}}(F_n\cap G_n)$$

Or, $F_n$ et $G_n$ sont indépendants de ce qui se passe à la génération précédente puisque chaque étape est indépendante des autres. On a donc :

$$P_{A_{1,2}}(E_{n+1}) = P(F_n\cap G_n)$$

et $F_n$ et $G_n$ sont indépendants donc la proba recherchée vaut $P(F_n)\times P(G_n) = {x_n}^2$. De même pour les autres probas conditionnelles, ce qui donne le résultat voulu.

3. On se ramène donc à l'étude d'une suite vérifiant définie par $x_1 = 1/8$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec, pour tout $x$, $f(x) = x^3/8 + 3x^2/8 + 3x/8 + 1/8$. L'étude de ce genre de suite est classique et a été vue en détails au chapitre 12 : on commence par poser $g(x) = f(x) - x$. Puisque 1 est racine évidente de $g$, on peut diviser $g$ par $x-1$ : $g(x) = \dfrac{1}{8}\times(x^2+4x-1)(x-1)$, dont les racines sont 1 et

$$\frac{-4\pm\sqrt{20}}{2} = -2\pm\sqrt{5}$$

On en déduit que ces trois nombres sont les points fixes de $f$ et que $g(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-1)/8$, d'où le tableau de signes de $g$, en notant $a_1 = -2-\sqrt{5}$ et $a_2 = -2+\sqrt{5}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Puisque $x_1\in[\,a_1\,;a_2\,]$, on se concentre sur cet intervalle : soit $x\in[\,a_1\,;a_2\,]$. $f$ étant croissante, et $a_1$ et $a_2$ étant des points fixes, $a_1 = f(a_1)\leq f(x)\leq f(a_2) = a_2$, c'est-à-dire que $f(x)\in[\,a_1\,;a_2\,]$ : cet intervalle est stable par $f$. Par une récurrence immédiate, $x_n\in[\,a_1\,;a_2\,]$ pour tout $n$. Dès lors, pour tout $n$, $x_{n+1}-x_n = g(x_n)\geq 0$ : la suite $(x_n)$ est croissante, donc elle converge puisqu'elle est majorée par $a_2$. Or, $f$ est continue donc sa limite est un point fixe de $f$ : $a_1, a_2$ ou 1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite est croissante donc $x_1\leq x_n\leq a_2$ donc, l'inégalité large passant à la limite, $x_1\leq L\leq a_2$ donc $a_1 < L$ (puisque $a_1 < 0\leq x_1$) et $L < 1$ (car $a_2 < 1$) si bien que $L = a_2 = -2+\sqrt{5}$.

En conclusion, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2+\sqrt{5}$ : la probabilité que l'espèce disparaisse à la $n$-ième génération tend vers $-2+\sqrt{5}\approx 0.23$. L'anneau prochaine, avec le théorème de la convergence monotone, vous pourrez montrer que ce résultat signifie que l'espèce a une probabilité égale à $\sqrt{5}-2$ de disparaître.

**Exercice 44 : ✪✪** Un fumeur veut arrêter de fumer. S'il réussit à ne pas fumer un jour, alors il reste motivé le lendemain et il a 3 chances sur 4 de ne pas fumer. Par contre, s'il fume un jour, alors le lendemain il fume avec probabilité $\alpha\in\,]\,0\,;1\,[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $p_n$ la probabilité qu'il fume le $n$-ième jour. On suppose que $p_0 = 1$.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, exprimer $p_{n+1}$ en fonction de $p_n$ et $\alpha$.
2. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, une expression de $p_n$ en fonction de $n$, $\alpha$ et $p_0$.

3. Déterminer la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle existe. Cette limite éventuelle peut-elle être nulle ? Dans le cas où la limite existe et n'est pas nulle, en donner en une borne inférieure. Cette stratégie vous semble-t-elle judicieuse pour arrêter de fumer ?

**Correction :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $F_n$ l'événement « le fumeur fume le $n$-ième jour ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le s.c.e $(F_n, \overline{F_n})$ :

$$p_{n+1} = P_{F_n}(F_{n+1})P(F_n) + P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})P(\overline{F_n}) = \alpha p_n + \frac{1}{4}(1-p_n) = \frac{1}{4} + \left(\alpha - \frac{1}{4}\right)p_n$$

2. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Posons $x = \dfrac{1}{5-4\alpha}$ de telle sorte que $x = \dfrac{1}{4} + x\left(\alpha - \dfrac{1}{4}\right)$. C'est possible puisque $5-4\alpha \neq 0$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $r_n = p_n - x$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_{n+1} = \left(\alpha - \frac{1}{4}\right)r_n.$$

   Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_n = \left(\alpha - \frac{1}{4}\right)^n r_0$$

   et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_n = x + \left(\alpha - \frac{1}{4}\right)^n (p_0 - x) = \frac{1}{5-4\alpha} + \frac{4(1-\alpha)}{7-4\alpha}\left(\alpha - \frac{3}{4}\right)^n.$$

3. On a $0 < \alpha < 1$ donc $-\dfrac{1}{4} < \alpha - \dfrac{1}{4} < \dfrac{3}{4}$. Ainsi $\left(\alpha - \dfrac{1}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{5-4\alpha}$.

   On a $\inf_{0<\alpha<1} \dfrac{1}{5-4\alpha} = \dfrac{1}{5} > 0$. La probabilité limite est minorée par $\dfrac{1}{5}$. Cela signifie que, même si $n$ est très grand, la probabilité de fumer le $n$-ième jour reste supérieure à $\dfrac{1}{5}$ environ. Cette stratégie est donc très mauvaise pour arrêter de fumer.

**Exercice 45 : ✪✪** Une mouche entre dans un studio de deux pièces (une chambre et une salle de bain). Elle se trouve initialement dans la salle de bain. On relève sa position dans le studio toutes les minutes.

- Si elle est dans la salle de bain à la $n$-ième minute, elle y reste avec probabilité $1/3$ ou elle va dans la chambre avec probabilité $2/3$.
- Si elle est dans la chambre à la $n$-ième minute, elle y reste avec probabilité $1/2$, elle va dans la salle de bain avec probabilité $1/4$ ou elle sort part la fenêtre avec probabilité $1/4$ pour ne plus jamais revenir.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n$ (respectivement $b_n$ et $c_n$) les probabilités respectives que la mouche soit dehors (respectivement dans la salle de bain et dans la chambre).

1. Calculer $a_0$, $b_0$, $c_0$, $a_1$, $b_1$ et $c_1$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $b_{n+1}$ et $c_{n+1}$ en fonction de $b_n$ et $c_n$.
3. Étudier les suites $(2b_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(4b_n + 3c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $a_n$, $c_n$ et $b_n$ en fonction de $n$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que la mouche est dans la salle de bain à la $n$-ième minute, quelle est la probabilité qu'elle était déjà dans la salle de bain la minute précédente ?
6. Combien de minutes sont-elles nécessaires pour que la probabilité que la mouche soit dehors soit supérieure à 95% ?

**Correction :**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

- $A_n$ l'événement « la mouche est dehors à la $n$-ième minute »,
- $B_n$ l'événement « la mouche est dans la salle de bain à la $n$-ième minute »,
- $A_n$ l'événement « la mouche est dans la chambre à la $n$-ième minute ».

On a $P(A_1) = P(A_0) = P(C_0) = 0$, $P(B_0) = 1$, $P(B_1) = \dfrac{1}{3}$, $P(C_1) = \dfrac{2}{3}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le s.c.e $(A_n, B_n, C_n)$ :

$$b_{n+1} = P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})P(C_n) = 0 + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

   et

$$c_{n+1} = P_{A_n}(C_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1})P(C_n) = 0 + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n.$$

2. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$2b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n - \frac{2}{3}b_n - \frac{1}{2}c_n = 0.$$
Ainsi la suite $(2b_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à $2b_1 - c_1 = 2/3 - 2/3 = 0$.
   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$4b_{n+1} + 3c_{n+1} = \frac{4}{3}b_n + c_n + 2b_n + \frac{3}{2}c_n = -\frac{10}{3}b_n + \frac{5}{2}c_n = \frac{5}{6}(4b_n + 3c_n).$$
Ainsi la suite $(4b_n + 3c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $5/6$ et de terme initial $4b_1 + 3c_1 = \dfrac{10}{3}$. Ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 4b_n + 3c_n = \frac{10}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = 2b_n$ donc $10b_n = \dfrac{10}{3}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ et donc $b_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$. Ensuite $c_n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ et enfin
$$a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule de Bayes entraîne que
$$P_{B_n}(B_{n-1}) = \frac{P_{B_{n-1}}(B_n)P(B_{n-1})}{P(B_n)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}{\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}} = \frac{1/3}{5/6} = \frac{2}{5}.$$
5. On cherche $n$ tel que $P(A_n) \geq 0.95$. C'est le cas si et seulement si $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} \geq \dfrac{95}{100}$ si et seulement si $\dfrac{5}{100} \geq \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ si et seulement si $\ln(1/20) \geq (n-1)\ln(5/6)$ si et seulement si $\dfrac{-\ln(20)}{\ln(5/6)} \leq n-1$ si et seulement si $1 + \dfrac{-\ln(20)}{\ln(5/6)} \leq n$.

   C'est donc le cas à partir du rang $n = \left\lfloor -\dfrac{\ln(20)}{\ln(5/6)} \right\rfloor + 2 = 18$.

**Exercice 46 - Le problème de Monty Hall : ✪✪** Il s'agit d'un casse-tête probabiliste librement inspiré du jeu télévisé américain *Let's Make a Deal*, présenté pendant treize ans par Monty Hall. Voici son énoncé : un candidat est placé devant trois portes. Derrière une des portes se trouve une voiture, derrière les deux autres se trouve une chèvre. Le candidat choisit une des trois portes sans l'ouvrir. L'animateur (qui sait où se trouve la voiture) ouvre l'une des portes restantes derrière laquelle se trouve une chèvre. Le candidat a alors le choix entre conserver la porte initiale ou changer pour prendre la porte fermée restante. Quel choix doit-il faire ?

**Correction :** Notons $A$ l'événement « Le joueur gagne la voiture » et $B$ l'événement « Le joueur avait choisi la bonne porte ». On $P(B) = \dfrac{1}{3}$. La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(B, \overline{B})$ entraîne
$$P(A) = P(B)P_B(A) + P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A) = \frac{1}{3}P_B(A) + \frac{2}{3}P_{\overline{B}}(A).$$
- Dans la stratégie qui consiste à conserver la porte initiale, le candidat gagne si et seulement $P_B(A) = 1$ et $P_{\overline{B}}(A) = 0$. Dans ce cas $P(A) = \dfrac{1}{3}$.
- Dans la stratégie qui consiste à changer de porte, le candidat gagne si et seulement $P_B(A) = 0$ et $P_{\overline{B}}(A) = 1$. Dans ce cas $P(A) = \dfrac{2}{3}$.

Par conséquent, le candidat a tout intérêt à changer de porte : cela double ses chances de gagner la voiture.

**Exercice 47 : ✪✪** On tire à l'aveugle une allumette dans une boîte en contenant $p$ petites, $m$ moyennes et $\ell$ longues (où $m$, $p$, $\ell \in \mathbb{N}$ et $\ell + p \neq 0$). Si l'on en tire une longue, on gagne ; si l'on en tire une petite, on perd ; et si l'on en tire une moyenne, on la jette en on recommence l'opération. On note $p_{\ell,m,p}$ la probabilité de gagner le jeu.

1. Calculer $p_{\ell,0,p}$.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, exprimer $p_{\ell,m+1,p}$ en fonction de $p_{\ell,m,p}$.
3. En déduire que la probabilité de gagner le jeu est indépendante de $m$.

**Correction :**

1. Il n'y a pas de moyenne : on gagne si et seulement si on tire une longue, donc $p_{\ell,0,p} = \ell/(\ell+p)$.
2. Notons $G_{\ell,m,p}$ la proba de gagner avec les conditions $\ell, m, p$. Les trois événements $P$ : « on tire une petite », $M$ : « on tire une moyenne », et $L$ : « on tire une longue » forment un SCE. D'après la formule des probas totales :

$$p_{\ell,m+1,p} = P_P(G_{\ell,m+1,p})P(P) + P_M(G_{\ell,m+1,p})P(M) + P_L(G_{\ell,m+1,p})P(L)$$

La première proba conditionnelle est nulle car si on tire une petite on perd. De même, la troisième proba conditionnelle vaut 1. Enfin, celle du milieu vaut $p_{\ell,m,p}$ : si on tire une moyenne, la probabilité de gagner devient $p_{\ell,m,p}$ puisqu'on retire une moyenne. Par conséquent :

$$\begin{aligned} p_{\ell,m+1,p} &= 0 + p_{\ell,m,p} \times \frac{m+1}{m+1+\ell+p} + 1 \times \frac{\ell}{\ell+m+1+p} \\ &= \frac{p_{\ell,m,p} \times (m+1) + \ell}{m+1+\ell+p} \end{aligned}$$

3. Une récurrence immédiate sur $m$ prouve que cette quantité vaut toujours $\ell/(\ell+p)$.

**Exercice 48 : ✪✪** On considère trois urnes :

- l'urne $U_1$ contient deux boules noires et trois boules rouges.
- l'urne $U_2$ contient une boule noire et quatre boules rouges.
- l'urne $U_3$ contient trois boules noires et quatre boules rouges.

On tire une boule dans $U_1$ et une boule dans $U_2$ et on les met dans $U_3$. On tire une boule dans $U_3$ : elle est noire. Quelle est la probabilité que la boule tirée de $U_1$ soit rouge ?

**Correction :** Notons $N_1$ : « la boule tirée dans l'urne 1 est noire ». On définit de même $N_2, N_3$ et $R_1, R_2, R_3$. On cherche donc $P_{N_3}(R_1)$. D'après la formule de Bayes,

$$P_{N_3}(R_1) = \frac{P_{R_1}(N_3) \times P(R_1)}{P(N_3)}$$

On a évidemment $P(R_1) = 3/5$. Calculons à présent $P_{R_1}(N_3)$. Supposons $R_1$ réalisé. Alors l'urne 3 contient trois boules noires et 5 boules rouges, avant de tirer une boule dans la deuxième urne. Notons pour plus de simplicité $\tilde{P}$ la probabilité $P_{R_1}$ i.e. la probabilité conditionnelle par rapport à $R_1$. $R_2$ et $N_2$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\tilde{P}(N_3) = \tilde{P}_{R_2}(N_3)\tilde{P}(R_2) + \tilde{P}_{N_2}(N_3)\tilde{P}(N_2)$$

Supposons $N_2$ réalisé : alors l'urne 3 contient 4 boules noires et 5 boules rouges, si bien que $\tilde{P}_{N_2}(N_3) = 4/9$. De même, $\tilde{P}_{R_2}(N_3) = 3/9 = 1/3$. De plus, $\tilde{P}(N_2) = P(N_2) = 1/5$ et $\tilde{P}(R_2) = P(R_2) = 4/5$ puisque ce qui se passe dans l'urne 2 est indépendant de ce qui se passe dans l'urne 1 et donc conditionner par rapport à $R_1$ ne change pas la proba.

$$\begin{aligned} P_{R_1}(N_3) &= \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{16}{45} \end{aligned}$$

Calculons enfin $P(N_3)$. Les événements $R_1 \cap R_2, R_1 \cap N_2, N_1 \cap R_2, N_2 \cap N_2$ forment un sce et donc on a :

$$P(N_3) = P_{R_1 \cap R_2}(N_3)P(R_1 \cap R_2) + P_{R_1 \cap N_2}(N_3)P(R_1 \cap N_2) + P_{N_1 \cap R_2}(N_3)P(N_1 \cap R_2) + P_{N_1 \cap N_2}(N_3)P(N_1 \cap N_2)$$

Supposons $R_1 \cap R_2$ réalisé. Alors l'urne 3 contient trois boules noires et six boules rouges donc $P_{R_1 \cap R_2}(N_3) = 3/9 = 1/3$. De plus, par indépendance, $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2) = 3/5 \times 4/5 = 12/25$. Les autres calculs sont analogues, et on trouve finalement :

$$\begin{aligned} P(N_3) &= \frac{1}{3} \times \frac{12}{25} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{25} + \frac{4}{9} \times \frac{8}{25} + \frac{5}{9} \times \frac{2}{25} \\ &= \frac{36+12+32+10}{9 \times 25} \\ &= \frac{90}{9 \times 25} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\begin{aligned} P_{N_3}(R_1) &= \frac{\frac{16}{45}\times\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{16}{45}\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{2} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

**Exercice 49 - Le problème du ballot : ✪✪✪** Lors d'une élection opposant deux candidats $A$ et $B$, $A$ reçoit $n$ voix et $B$ reçoit $m$ voix (avec $m < n$). On suppose équiprobables les différents ordres d'apparition des bulletins lors du dépouillement. On note $P(n,m)$ la probabilité que $A$ soit toujours strictement en tête lors de chaque étape du dépouillement.

1. Déterminer un espace probabilisé représentant cette expérience.
2. Prouver que la probabilité que le dernier bulletin soit pour $A$ est égale à $\dfrac{n}{n+m}$.
3. Montrer finalement que $P(n,m) = \dfrac{n-m}{n+m}$. On pourra raisonner par récurrence sur $n+m$.

**Correction :**

1. Précisons que les bulletins sont fixés, c'est leur ordre qui est aléatoire. On prend comme $\Omega$ l'ensemble des permutations des $n+m$ bulletins de vote (le fait que $A$ soit toujours strictement en tête est un événement i.e. une sous-partie de $\Omega$ dont on va déterminer la probabilité), associé de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. Précisons enfin que $\mathrm{card}(\Omega) = (n+m)!$ donc, si $E$ est un événement,
$$P(E) = \frac{\mathrm{card}(E)}{(n+m)!}$$
2. Notons $E$ : « le dernier bulletin est pour $A$ ». Alors un élément de $E$ est entièrement déterminé par le choix du bulletin pour $A$ se trouvant en dernière position ($n$ choix possibles) et les bulletins se trouvant auparavant ($(n+m-1)!$ choix possibles : on permute les autres bulletins). Par principe multiplicatif, $\mathrm{card}(E) = n\times(n+m-1)!$ ce qui permet de conclure.
3. $E$ et $\overline{E}$ forment un système complet d'événements : on peut appliquer la formule des probabilités totales. Si on note $A_{n,m}$ l'événement dont on cherche la proba :
$$\begin{aligned} P(A_{n,m}) &= P_E(A_{n,m})\times P(E) + P_{\overline{E}}(A_{n,m})\times P(\overline{E}) \\ &= P_E(A_{n,m})\times\frac{n}{n+m} + P_{\overline{E}}(A_{n,m})\times\frac{m}{n+m} \end{aligned}$$
Or, supposons $E$ réalisé. $A_{n,m}$ est réalisé si et seulement si, juste avant, $A$ était arrivé en tête tout au long du dépouillement, et on arrivait à $n-1$ bulletins contre $m$, si bien que cela se produit avec proba $P(n-1,m)$. En d'autres termes, $P_E(A_{n,m}) = P(n-1,m)$.

   Supposons $\overline{E}$ réalisé. $A_{n,m}$ est réalisé si et seulement si, juste avant, $A$ était arrivé en tête tout au long du dépouillement, et on arrivait à $n$ bulletins contre $m-1$, si bien que cela se produit avec proba $P(n,m-1)$. En d'autres termes, $P_E(A_{n,m}) = P(n-1,m)$, si bien que
$$P(n,m) = P(n-1,m)\times\frac{n}{n+m} + P(n,m-1)\times\frac{m}{n+m}$$
Suivons l'indication de l'énoncé et raisonnons par récurrence sur $n+m$. Plus précisément :
   - Si $k\in\mathbb{N}^*$, notons $H_k$ : « si $n+m=k$ alors $P(n,m) = \dfrac{n-m}{n+m}$ ».
   - Si $n+m=1$, alors $n=1$ et $m=0$ puisque $n>m$ donc $A$ reçoit une seule voix et $B$ n'en reçoit aucune, donc la probabilité que $A$ soit toujours strictement en tête vaut 1 puisqu'il n'y a qu'un bulletin de vote qui est pour $A$. D'autre part, $\dfrac{1-0}{1+0} = 1$ donc $H_1$ est vraie.
   - Soit $k\geq 1$. Supposons $H_k$ vraie et prouvons que $H_{k+1}$ est vraie. Soient donc $n$ et $m$ avec $n>m$ tels que $n+m=k+1$. D'après ce qui précède :
$$P(n,m) = P(n-1,m)\times\frac{n}{n+m} + P(n,m-1)\times\frac{m}{n+m}$$
Or, $n+(m-1) = (n-1)+m = k$ donc, par hypothèse de récurrence (qu'on applique à $n$ et $m-1$ ainsi qu'à $n-1$ et $m$, penser à truc et machin) :

$$\begin{aligned} P(n,m) &= \frac{n-1-m}{n-1+m} \times \frac{n}{n+m} + \frac{n-(m-1)}{n+m-1} \times \frac{m}{n+m} \\ &= \frac{(n-1-m)n + (n-m+1)m}{(n+m-1)(n+m)} \\ &= \frac{n^2 - n - mn + nm - m^2 + m}{(n+m-1)(n+m)} \end{aligned}$$

Or, $(n+m-1)(n-m) = n^2 - nm + nm - m^2 - n + m$ si bien que

$$P(n,m) = \frac{(n+m-1)(n-m)}{(n+m-1)(n+m)}$$

ce qui permet de conclure.