Feuille d'exercices - Chapitre 15.

Si rien n'est précisé, I et J sont deux intervalles non vides, non réduits à un point, et a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Vrai ou Faux ?

1. Si f est dérivable sur $[\,0\,;1\,]$ alors $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0)$.
2. Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(0) = 1$. Il existe $a > 0$ tel que f soit strictement croissante sur $[\,-a\,;a\,]$.
3. Si f est dérivable et strictement croissante alors f' est strictement positive.
4. La fonction $x \mapsto x \times |x|$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Si f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors $\max(f, g)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
6. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors $|f|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est de signe constant.
7. Si f dérivable sur I admet un maximum en $a \in I$ alors $f'(a) = 0$.
8. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $f(\alpha) = 0$ alors $|f|$ n'est pas dérivable en α.
9. Si x et y sont inférieurs ou égaux à -1 alors $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)| \leq |x - y|/2$.
10. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone dérivable. Alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$.
11. Si f est dérivable en a alors $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f(a)$ lorsque h est suffisamment proche de 0.
12. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f_{|\mathbb{R}_+}$ et $f_{|\mathbb{R}_-}$ sont dérivable alors f est dérivable.
14. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et si f est dérivable alors $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
15. Il existe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
16. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et si f est dérivable alors $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
17. Il existe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
18. La dérivée n-ième du sinus est $x \longmapsto \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.
19. La dérivée n-ième de la fonction $x \longmapsto xe^x$ est $x \longmapsto (x+n)e^x$.
20. La dérivée n-ième de $x \longmapsto e^{-x}$ est elle-même.
21. Si f est croissante et $\mathscr{C}^\infty$ alors, pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}$ est positive.
22. Si f est paire et $\mathscr{C}^\infty$, alors ses dérivées successives sont toutes paires.
23. Si f est périodique et $\mathscr{C}^\infty$, alors ses dérivées successives sont toutes périodiques.

1 Dérivées.

Exercice 1 : ✪ Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor) \times (x - \lfloor x \rfloor - 1)$
2. $f : x \mapsto \dfrac{\pi}{2} \times e^{-|x|}$
3. $f : x \mapsto |\sin(x)|$

On donnera à chaque fois l'allure du graphe, et on tracera les demi-tangentes en 0.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \notin \mathbb{Z}$, alors f est dérivable en x car la partie entière est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Examinons à présent la dérivabilité sur $\mathbb{Z}$. Or :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1-\lfloor x+1 \rfloor)(x+1-\lfloor x+1 \rfloor - 1) \\ &= (x+1-\lfloor x \rfloor - 1)(x+1-\lfloor x \rfloor - 1 - 1) \\ &= (x - \lfloor x \rfloor)(x - \lfloor x \rfloor - 1) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

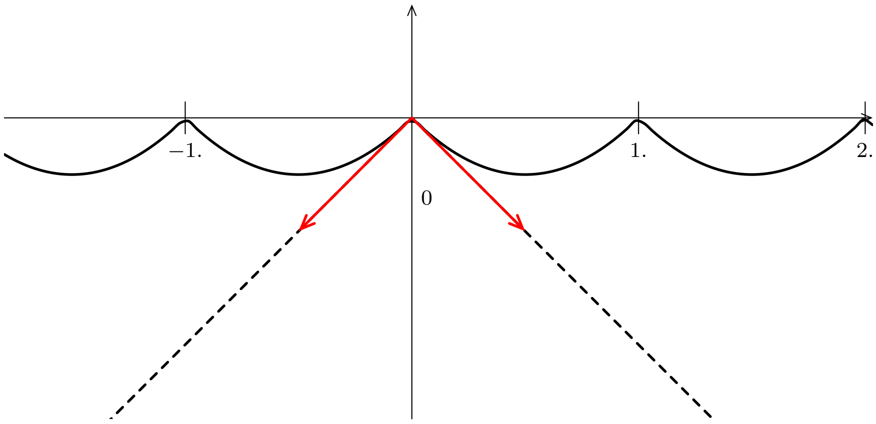
c'est-à-dire que f est 1-périodique. Il suffit donc d'étudier la dérivabilité en 0. Pour cela, étudions la dérivabilité à gauche et à droite. Sur $[\,0\,;1\,[$, $f(x) = x(x-1) = x^2 - x$ donc f est dérivable à droite en 0 avec $f'(x) = 2x-1$ donc f est dérivable à droite en 0 avec ${f_d}'(0) = -1$. Sur $]\,0\,;1\,[$, $\lfloor x \rfloor = -1$

$$f(x) \quad = \quad (x+1) \times x$$

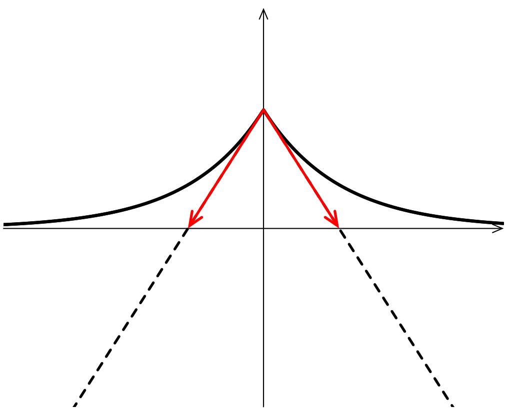
De cela on déduit que $f(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0 = f(0)$: f est continue à gauche en 0 donc est continue en 0 (car f est continue à droite) donc sur $\mathbb{Z}$ par périodicité, et on en déduit également que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x + 1 \xrightarrow[x \to 0^-]{} 1$$

f est donc dérivable à gauche en 0 avec ${f_g}'(0) = 1$. f n'est donc pas dérivable en 0 et, par périodicité, n'est pas dérivable en tout point de $\mathbb{Z}$. Ci-dessous le graphe de f avec les demi-tangentes en 0.



2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car composée de fonctions dérivables (la valeur absolue est dérivable. Plus précisément, si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \times e^x$ donc $f'(x) = \dfrac{\pi}{2} \times e^x$, et si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \times e^{-x}$ donc $f'(x) = -\dfrac{\pi}{2} \times e^{-x}$. Les égalités $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \times e^x$ et $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \times e^{-x}$ étant en fait valables sur $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$, f est dérivable à gauche et à droite en 0 avec ${f_g}'(0) = \pi/2$ et ${f_d}'(0) = -\pi/2 \neq {f_g}'(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0. Ci-dessous le graphe de f avec les demi-tangentes en 0.



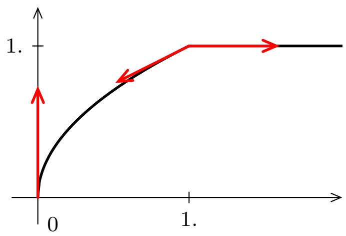
f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ car, sur $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, sin est dérivable et ne s'annule pas, et la valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Sur $[\,0\,;\pi\,]$, $f(x) = \sin(x)$ donc f est dérivable à droite en 0 avec ${f_d}'(0) = 1$. Sur $[\,-\pi\,;0\,]$, $f(x) = -\sin(x)$ donc f est dérivable à gauche en 0 avec ${f_g}'(0) = -1 \neq {f_d}'(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0 et, par π-périodicité (f est π-périodique, exo), f n'est dérivable en aucun multiple de π. Le graphe de $|\sin|$ se trouve dans le cours.

Exercice 2 : ✪ Déterminer a pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

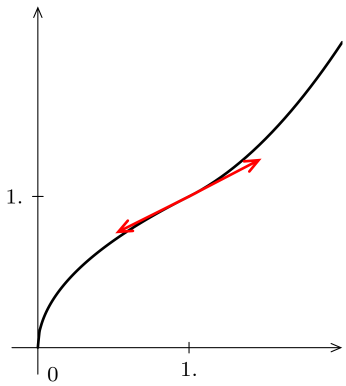
$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Même question avec $x \mapsto ax^2 + bx + 1$ à la place de $ax^2 + 1$.

Correction : Tout d'abord, une condition nécessaire pour que f soit $\mathscr{C}^1$ est que f soit continue en 1. Or, $f(1) = \sqrt{1} = 1$ et la limite à droite de f en 1 est $a+1$. Par conséquent, une condition nécessaire pour que f soit $\mathscr{C}^1$ donc continue en 1 est que a soit nul, donc que f soit constante égale à 1 sur $]\,1\,;+\infty\,[$, mais alors f n'est pas dérivable en 1 car sa dérivée à droite en 1 est nulle et sa dérivée à gauche vaut $1/2\sqrt{1} = 1/2$. En conclusion, pour tout a, f n'est pas dérivable en 1 donc f n'est pas $\mathscr{C}^1$.



Pour la deuxième partie de la question : une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 1 est d'avoir $a+b+1=1$ donc $a+b=0$, et une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en 1 est d'avoir $1/2=2a+b$ (dérivée à gauche égale à la dérivée à droite). Or, ces deux conditions sont remplies si et seulement si $a=1/2=-b$. Supposons donc $a=1/2$ et $b=-1/2$. D'après ce qui précède, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $f'(1)=1/2$. Prouvons que f' est continue en 1 puisque f est évidemment $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$. Si $x<1$, $f'(x)=1/2\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 1^-]{} 1/2=f'(1)$ et, si $x>1$, $f'(x)=x-1/2$ (car $a=1/2$ et $b=-1/2$) donc $f'(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 1/2=f'(1)$. En d'autres termes, f' est continue en 1 donc f est $\mathscr{C}^1$. En conclusion, f est $\mathscr{C}^1$ si et seulement si $a=1/2$ et $b=-1/2$.



Exercice 3 : ✪ Soient $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\sum_{k=1}^n a_k\sin(kx)$$

On suppose que pour tout x réel, $|f(x)|\leq |x|$. Montrer que $|a_1+2a_2+\dots+na_n|\leq 1$.

Correction : $f(0)=0$. Par hypothèse, pour tout $x\neq 0$,

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=\frac{|f(x)|}{|x|}\leq 1$$

Or, f est dérivable en 0 et la valeur absolue est continue donc

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \xrightarrow[x\to 0]{} |f'(0)|$$

L'inégalité large passe à la limite donc $|f'(0)|\leq 1$. Or, pour tout x,

$$f'(x)=\sum_{k=1}^n ka_k\cos(kx)$$

En particulier,

$$f'(0)=\sum_{k=1}^n ka_k$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 4 : ✪ Montrer que la fonction f ci-dessous est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$f:x\mapsto\begin{cases}\operatorname{Arctan}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{sinon}\end{cases}$$

Correction : On va chercher à appliquer le théorème de la limite de la dérivée. Tout d'abord, f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ car composée d'une fonction qui l'est par une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (Arctangente). De plus, $y = 1 + \dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ et $\text{Arctan}(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$. Par composition de limites, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{\pi}{2}$: f est continue en 0. Pour conclure, il suffit donc de prouver que f' admet une limite finie en 0. Soit $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2}{x^3} \times \frac{1}{1 + \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2} \\ &= \frac{-2}{x^3} \times \frac{1}{1 + \dfrac{(x^2+1)^2}{x^4}} \\ &= \frac{-2}{x^3} \times \frac{x^4}{x^4 + (x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2x}{x^4 + (x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : ✪ Soit f dérivable sur un intervalle I, soit $x_0 \in I$. Après avoir montré leur existence, donner

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+7h) - f(x_0-4h)}{h} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}$$

Correction : Pour la première limite, on utilise le résultat suivant :

$$\frac{f(x_0 + \text{truc}) - f(x_0)}{\text{truc}} \xrightarrow[\text{truc}\to 0]{} f'(x_0)$$

Attention, ce doit être le même truc dans f qu'au dénominateur. Il faut donc parfois compenser. Soit $h \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+7h) - f(x_0-4h)}{h} &= \frac{f(x_0+7h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0-4h)}{h} \\ &= 7 \times \frac{f(x_0+7h) - f(x_0)}{7h} - (-4) \times \frac{f(x_0-4h) - f(x_0)}{-4h} \\ &\xrightarrow[h\to 0]{} 7f'(x_0) - (-4)f'(x_0) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la première limite recherchée est $11f'(x_0)$. Pour la deuxième, si $x \neq x_0$,

$$\begin{aligned} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} &= \frac{xf(x_0) - x_0 f(x_0) + x_0 f(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} \\ &= \frac{(x - x_0)f(x_0) + x_0(f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \\ &= f(x_0) + x_0 \times \frac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \\ &\xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0) + x_0 \times f'(x_0) \end{aligned}$$

Exercice 6 : ✪

1. Montrer que

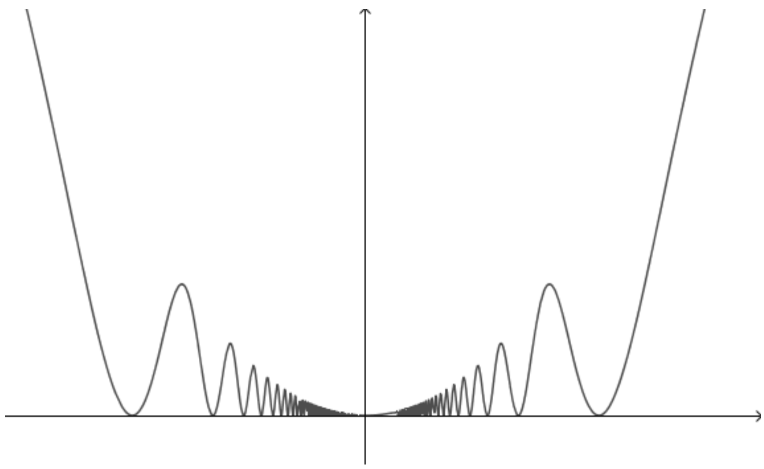
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [\,-1\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;1\,] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \times \left(1 + \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) \end{array} \right.$$

   est prolongeable en une fonction dérivable sur $[\,-1\,;1\,]$ mais que sa dérivée n'est pas bornée. En déduire que f n'est pas $\mathscr{C}^1$.

2. Montrer que f admet un minimum global en 0 mais n'est décroissante sur aucun intervalle du type $[\,-\varepsilon\,;0\,]$, ni croissante sur aucun intervalle du type $[\,0\,;\varepsilon\,]$, pour un certain $\varepsilon > 0$.

Correction :

1. Erreur d'énoncé (sinon la deuxième question n'a pas de sens) : on définit f sur $[-1\,;0\,[\cup]\,0\,;1\,]$. Pour tout $x \in [-1\,;0\,[\cup]\,0\,;1\,]$, $0 \leq f(x) \leq 2x^2$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Soit $x \neq 0$.
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x \times \left(1+\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
qui tend vers 0 pour la même raison (attention, x n'étant pas positif, il faut encadrer par $\pm|x|$) donc f ainsi prolongée est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Soit $x \neq 0$. Alors
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \times \left(1+\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + x^2 \times \frac{-2}{x^3} \times \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x \times \left(1+\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - \frac{2}{x} \times \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$
Il suffit d'exhiber une suite (x_n) telle que $|f'(x_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Le premier terme est borné par 4 : pour trouver une telle suite, il faut en chercher une qui maximise la deuxième quantité, et le cosinus nous gêne : on cherche une suite en laquelle $x \mapsto \cos(1/x^2)$ vaut 1. On pose donc, pour tout n, $x_n = 1/\sqrt{2n\pi}$. Pour tout n,
$$\begin{aligned} f'(x_n) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \times (1+\sin(2n\pi)) - 2\sqrt{2n\pi} \times \cos(2n\pi) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} - 2\sqrt{2n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \end{aligned}$$
si bien que f' n'est pas bornée. Si f était $\mathscr{C}^1$, alors f' serait continue donc bornée sur le segment $[-1\,;1\,]$ (théorème des bornes atteintes) et on vient de voir que ce n'était pas le cas, donc f est dérivable mais n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $[-1\,;1\,]$.
2. f est positive et vaut 0 en 0 donc admet un minimum global en 0. Cependant, on vient d'exhiber une suite (x_n) strictement positive qui tend vers 0 telle que $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$: par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, $x_n \in [\,0\,;\varepsilon\,]$ et $f(x_n) < 0$ pour n assez grand. On en déduit que f n'est pas croissante sur $[\,0\,;\varepsilon\,]$ puisque f est strictement négative en un point (en fait : une infinité de points) sur $[\,0\,;\varepsilon\,]$. De même de l'autre côté, f' est strictement positive en une infinité de points (tous les $-1/\sqrt{2n\pi}$) donc n'est pas décroissante sur tout intervalle du type $[-\varepsilon\,;0\,]$. Ci-dessous, le graphe de f : même s'il y a un minimum en 0, aussi proche soit-on de 0, elle oscille indéfiniment (entre les deux enveloppes : le graphe de la fonction nulle et le graphe de $x \mapsto 2x^2$, tracez les, exo) donc n'est monotone ni à gauche, ni à droite de 0.



Exercice 7 - Fonctions hölderiennes dans un cas facile : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux réels $A \geq 0$ et $\alpha > 1$ tels que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x)-f(y)| \leq A|x-y|^\alpha$$
Montrer que f est constante.

Correction : Il suffit de prouver que f est dérivable (ce qui n'est pas supposé : il faut le prouver) de dérivée nulle. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $x \neq a$. Par hypothèse,
$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leq A|x-a|^{\alpha-1}$$

Or, $\alpha-1>0$ donc $A|x-a|^{\alpha-1}\xrightarrow[x\to a]{} 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\xrightarrow[x\to a]{} 0$$

On en déduit, d'une part, que f est dérivable (car son taux d'accroissement admet une limite finie) en a et que $f'(a)=0$ (c'est la limite du taux d'accroissement quand celle-ci existe). a étant quelconque, f est dérivable et de dérivée nulle donc f est constante.

Exercice 8 : ✪ Soit $f:[\,a\,;b\,]\to\mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f'(a)>0$ et que $f(a)=f(b)$. Montrer qu'il existe $c\in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c)<0$.

Correction : Raisonnons par l'absurde et supposons que $f'(c)\geq 0$ pour tout $c\in\,]\,a\,;b\,[$. Alors f est croissante. Par conséquent, pour tout $x\in[\,a\,;b\,]$, $f(a)\leq f(x)\leq f(b)$ et puisque $f(a)=f(b)$, alors f est constante sur $[\,a\,;b\,]$ ce qui est absurde puisque $f'(a)\neq 0$.

Exercice 9 : ✪ Justifier que $f:x\mapsto x+\cos(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et étudier la dérivabilité de sa réciproque.

Correction : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=1-\sin(x)\geq 0$ avec égalité si et seulement s'il existe $n\in\mathbb{Z}$ tel que $x=\pi/2+2n\pi$. Dès lors, f' n'est nulle sur aucun intervalle d'intérieur non vide (f ne fait pas de palier) donc f est strictement croissante. De plus, f est continue. Enfin, $f(x)\geq x-1$ donc, par minoration, $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$. De même, $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$. D'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, f^{-1} est dérivable sauf en l'image des points en lesquels f' s'annule. Or, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $f(\pi/2+2n\pi)=\pi/2+2n\pi$ puisque le cosinus s'annule en ces points. Par conséquent, f^{-1} est dérivable sauf en les $\pi/2+2n\pi$ lorsque n décrit $\mathbb{Z}$.

Exercice 10 : ✪ Soient $a<b$ deux réels et $f:[\,a\,;b\,]\to\mathbb{R}$ dérivable. On suppose que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\sup\{f'(x)\,|\,x\in[\,a\,;b\,]\}$$

Que peut-on dire de f ?

Correction : Intuitivement, il est clair que f est affine i.e. que le graphe de f coïncide avec la corde joignant les points du graphe de f d'abscisses a et b car, si ce n'est pas le cas, alors f est à un moment au dessus ou en dessous de la corde, et pour joindre $f(a)$ et $f(b)$, à un moment, la pente de la tangente (i.e. le coefficient directeur de la tangente i.e. le nombre dérivé) doit être plus grande que la pente de la corde, ce qui est exclut par hypothèse (la pente de la corde est la borne supérieure des pentes des tangentes au graphe de f) : faites un dessin pour vous en convaincre. Montrons donc que f est affine i.e. que f' est constante sur $[\,a\,;b\,]$. Comme dans la preuve de l'EAF, définissons sur $[\,a\,;b\,]$ la fonction

$$g:x\mapsto\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\times(x-a)+f(a)$$

Alors g est dérivable et, pour tout $x\in[\,a\,;b\,]$,

$$(f-g)'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq 0$$

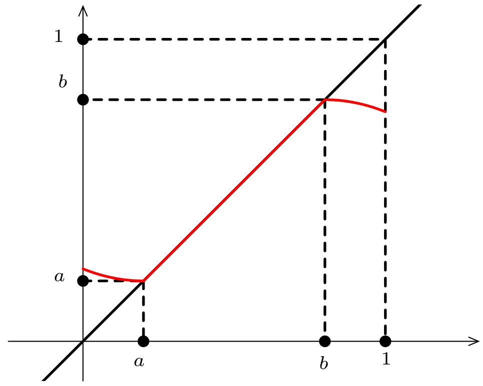
i.e. $f-g$ est décroissante. Or, $(f-g)(a)=(f-g)(b)=0$. Ainsi, pour tout $x\in[\,a\,;b\,]$, $(f-g)(a)=0\geq(f-g)(x)\geq(f-g)(b)=0$ donc $(f-g)(x)=0$. En d'autres termes, $f=g$, f est affine.

Exercice 11 : ✪✪ Soit $f:[\,0\,;1\,]\to[\,0\,;1\,]$ dérivable vérifiant $f\circ f=f$.

1. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment (non vide).
2. Montrer que f est soit constante, soit égale à l'identité.

Correction :

1. cf. exercice 55 du chapitre 13.
2. Notons $[\,a\,;b\,]$ (avec $a\leq b$) l'ensemble des points fixes (non vide). Puisque toute image est un point fixe, alors $f([\,0\,;1\,])\subset[\,a\,;b\,]$ i.e. f est à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$. Si f n'est que continue, le graphe de f est donc de la forme ci-dessous :



Prouvons que ce n'est pas possible si f est dérivable. L'idée est très simple : la dérivée à droite et à gauche en a ou en b ne seront pas égales, si f n'est pas constante ou égale à l'identité, ce qui est absurde si f est dérivable. Si $a = b$, alors l'ensemble des points fixes est un singleton, et puisque $f([\,0\,;1\,]) \subset [\,a\,;b\,] = \{a\}$, alors f est constante. Supposons donc $a < b$. Prouvons que $a = 0$ et $b = 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $a > 0$. Sur $[\,a\,;b\,]$, $f(x) = x$ donc f est dérivable à droite en a et ${f_d}'(x) = 1$ et puisque f est dérivable, la dérivée à droite est égale à la dérivée donc $f'(a) = 1$. Or, on a déjà dit plusieurs fois que f est à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$, et en particulier, f ne prend que des valeurs supérieures à a. Dès lors, pour tout $x < a$, $f(x) \geq f(a)$ si bien que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

L'inégalité large passe à la limite donc ${f_g}'(a) = f'(a) \leq 0$ ce qui est absurde. On en déduit que $a = 0$. De même, $b = 1$ si bien que l'ensemble des points fixes est $[\,0\,;1\,]$. En d'autres termes, tout élément de $[\,0\,;1\,]$ est un point fixe, f est l'identité.

Exercice 12 : ✪✪ Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$. On se donne f de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(ax + b) = af(x) + b$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f'\left(a^n x + \frac{a^n - 1}{a - 1} b\right)$$

2. En déduire toutes les fonctions f qui conviennent lorsque $a < 1$.
3. Même question lorsque $a > 1$.

Correction : Erreur d'énoncé : il fallait supposer f de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Notons $g : x \mapsto f(ax + b)$ et $h : x \mapsto af(x) + b$. g et h sont égales donc ont la même dérivée, si bien que pour tout x, $af'(ax + b) = af'(x)$ et puisque $a \neq 0$, $f'(ax + b) = f'(x)$. Le résultat découle alors d'une récurrence immédiate (faites la).
2. Supposons $a < 1$ i.e. $a \in \,]\,0\,;1\,[$ donc $a^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. f' étant continue (car f est $\mathscr{C}^1$),

$$f'(x) = f'\left(a^n x + \frac{a^n - 1}{a - 1} b\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'\left(\frac{-b}{a - 1}\right)$$

Or, $f'(x)$ ne dépendant pas de n, on a égalité, c'est-à-dire que $f'(x) = f'(-b/(a-1))$. En particulier, f est constante : f est affine. Réciproquement, soit $f : x \mapsto cx + d$ une fonction affine. Alors f est solution si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, c(ax + b) + d = a(cx + d) + b$$

si et seulement si $bc + d = ad + b$. Dès lors, les solutions sont les fonctions affines $f : x \mapsto cx + d$ avec c et d vérifiant l'égalité $bc + d = ad + b$ (il ne s'agit donc pas de toutes les fonctions affines !).

3. L'égalité $f'(ax + b) = f'(x)$ de la question 1 se réécrit, avec $\dfrac{x - b}{a}$ à la place de x (penser à « truc ») :

$$f'(x) = f'\left(\frac{x - b}{a}\right) = f'\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right)$$

En d'autres termes, c'est la même relation que $f'(x) = f'(ax + b)$ avec $1/a$ à la place de a et $-b/a$ à la place de b, si bien que l'égalité obtenue à la question 1 devient :

$$f'(x) = f'\left(\frac{x}{a^n} + \frac{\frac{1}{a^n} - 1}{\dfrac{1}{a} - 1} \times \frac{-b}{a}\right)$$

On conclut de la même façon et on obtient le même résultat qu'à la question précédente.

Exercice 13 - Dérivée symétrique : ✪✪ Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Lorsque la limite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

existe (et est finie), on la note ${f_s}'(a)$ et on l'appelle la dérivée symétrique de f en a.

1. Montrer que si f est dérivable à droite et à gauche en a alors ${f_s}'(a)$ existe et donner sa valeur.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Si f est croissante sur I et admet une dérivée symétrique en tout point, montrer que celle-ci est positive sur I.
4. Si ${f_s}'$ est nulle sur I, f est-elle constante sur I ?

Correction :

1. Soit $a \in I$. Supposons donc f dérivable à droite et à gauche, de dérivée à gauche ${f_d}'(a)$ et ${f_g}'(a)$. Soit $h > 0$.

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2} \times \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{1}{2} \times \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

Or,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} {f_d}'(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0^-]{} {f_g}'(a)$$

et $-h \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0^-$ si bien que

$$\frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} {f_g}'(a)$$

On en déduit que

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} \frac{{f_d}'(a) + {f_g}'(a)}{2}$$

2. Prendre l'indicatrice de $\{0\}$: non dérivable à droite ni à gauche en 0 (car n'est pas continue à droite ni à gauche) mais admet une dérivée symétrique car, pour tout $h > 0$,

$$\frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = 0 \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$$

3. Soit $a \in I$ et soit $h > 0$. f étant croissante, $f(a+h) \geq f(a-h)$
donc

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \geq 0$$

et on conclut en disant que l'inégalité large passe à la limite.

4. Non, par exemple, si f est l'indicatrice de $\{0\}$, alors f admet une dérivée symétrique nulle mais n'est pas constante.

Exercice 14 : ✪✪ Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$.

Correction : Analyse : soit f une fonction qui convient. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(2x) = 2f(x)$. En appliquant cette égalité à $x/2$ (penser à « truc »), il vient : $f(x) = 2f(x/2)$ donc $f(x/2) = f(x)/2$. Par une récurrence immédiate (faites-la), pour tout n, $f(x/2^n) = f(x)/2^n$. De plus, en prenant $x = 0$, il vient : $f(2 \times 0) = 2f(0)$ i.e. $f(0) = 2f(0)$ si bien que $f(0) = 0$. Par conséquent :

$$\frac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n} = \frac{2^n}{x} \times \frac{f(x)}{2^n} = \frac{f(x)}{x}$$

Or, f étant dérivable en 0, et puisque $x/2^n \xrightarrow[n\to +\infty]{} 0$, il vient :

$$\frac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n} = \frac{f(x)}{x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'(0)$$

Mais $f(x)/x$ étant constant (ne dépend pas de n), il y a égalité donc $f(x)/x = f'(0)$ pour tout x donc $f(x) = f'(0) \times x$: f est une fonction linéaire. Synthèse : une fonction linéaire i.e. de la forme $f : x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$ convient. Conclusion : les solutions sont exactement les fonctions linéaires.

Exercice 15 - La dérivabilité est une notion ponctuelle : ✪✪ Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable en 0 et discontinue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Correction : La discontinuité en tout réel non nul se prouve de la même façon que dans les exercices 29 et 31 du chapitre 13. Prouvons que f est dérivable en 0. On cherche à prouver que

$$\tau_0 : x \mapsto \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$

admet une limite finie en 0. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta = \varepsilon$. Soit $x \in \mathbb{R}, |x - 0| \leq \eta = \varepsilon$. Alors $|\tau_0(x)| = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $|\tau_0(x)| = |x| \leq \varepsilon$ si $x \in \mathbb{Q}$. Dans tous les cas, $|\tau_0(x) - 0| \leq \varepsilon$. On a donc prouvé le résultat suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 0| \leq \eta \Rightarrow |\tau_0(x) - 0| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire que $\tau_0(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$: le taux d'accroissement admet une limite finie, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Exercice 16 : ✪✪✪ Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f \times f' \times f'' = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que f est une fonction affine.

1. Supposons que $f''(0) \neq 0$.
   (a) Supposons également que $f'(0) \neq 0$. Qui est nul alors ?
      i. Montrer que f est strictement monotone sur un voisinage de 0.
      ii. Montrer que f'' est nulle sur un voisinage de 0, sauf en 0, et conclure à une absurdité.
   (b) Conclure à une absurdité en supposant à présent que $f'(0) = 0$.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En étudiant la fonction $g : x \mapsto f(x + x_0)$, montrer que $f''(x_0) = 0$ et conclure.

Correction :

1. (a) Puisque $ff'f'' = 0$, que $f'(0) \neq 0$ et $f''(0) \neq 0$, alors $f(0) = 0$.
      i. $f'(0) \neq 0$ et f' est continue donc f' est de signe constant sur un voisinage de 0, ce qui donne le résultat voulu.
      ii. On en déduit que f est strictement croissante ou strictement décroissante sur un voisinage de 0. Dès lors, sur ce voisinage, f ne s'annule qu'en 0. Finalement, sur ce voisinage, f' ne s'annule pas, et f ne s'annule qu'en 0. Puisque $ff'f'' = 0$, alors f'' est nulle sur ce voisinage, sauf éventuellement en 0, mais puisque f est $\mathscr{C}^2$, alors f'' est continue. f'' est nulle sur un voisinage de 0 sauf éventuellement en 0 donc $f''(0) = 0$ ce qui est absurde puisqu'on a supposé que $f''(0) = 0$. Ce qui est absurde, c'est la dernière hypothèse faite, à savoir $f'(0) \neq 0$. On en déduit donc que $f'(0) = 0$.

   (b) $f''(0) \neq 0$ et f'' est continue donc, de même, f'' est de signe constant au voisinage de 0 donc f' est strictement monotone au voisinage de 0. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que f' soit strictement négative sur $\left]-\varepsilon\,; 0\right[$ et strictement positive sur $\left]0\,; \varepsilon\right[$ (si f' est strictement croissante sur ce voisinage), soit le contraire, c'est-à-dire strictement positive sur $\left]-\varepsilon\,; 0\right[$ et strictement négative sur $\left]0\,; \varepsilon\right[$ (si f' est strictement décroissante sur ce voisinage). Selon les cas, cela implique que f est strictement décroissante puis strictement croissante ou le contraire sur ce voisinage de 0. Dans tous les cas, f et f' ne s'annulent qu'en 0, donc f'' s'annule sur ce voisinage de 0, sauf peut-être en 0, et on conclut à une absurdité de la même façon que dans la question précédente. On en déduit donc que $f''(0) = 0$.
2. g est évidemment $\mathscr{C}^2$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x)g'(x)g''(x) = f(x + x_0)f'(x + x_0)f''(x + x_0) = 0$$

   g vérifie la même équation que f (i.e. $gg'g'' = 0$). D'après la question 1, $g''(0) = 0$ donc $f''(x_0) = 0$. x_0 étant quelconque, f'' est la fonction nulle, donc f est affine.

2 Extrema, Rolle et accroissements finis.

Exercice 17 : ✪ Montrer que la dérivée d'une fonction périodique dérivable s'annule une infinité de fois.

Correction : Soit $T > 0$ une période. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nT) = f((n+1)T)$, f est continue sur $[\,nT\,;(n+1)T\,]$ et dérivable sur $]\,nT\,;(n+1)T\,[$: d'après le théorème de Rolle, f' s'annule sur $]\,nT\,;(n+1)T\,[$. Ces intervalles étant deux à deux disjoints, f' s'annule une infinité de fois.

Exercice 18 : ✪ Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in]\,0\,;1\,[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Correction : Comme d'habitude, mettons tout du même côté : il faut donc montrer qu'il existe $x \in]\,0\,;1\,[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - (a+b+c) = 0$. Le membre de gauche ressemble à une dérivée (à cause du $4x^3$, du $3x^2$ et du $2x$) : posons $g : x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$. Alors g est continue sur $[\,0\,;1\,]$, dérivable sur $]\,0\,;1\,[$ avec $g(0) = g(1) = 0$, et le théorème de Rolle permet de conclure.

Exercice 19 : ✪ Soit $f : [\,-1\,;1\,] \to \mathbb{R}$ dérivable deux fois telle que $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$. Montrer que f'' s'annule sur $]\,-1\,;1\,[$.

Correction : Notons $g : x \mapsto f(x) - x$. Alors $g(-1) = g(0)$, g est continue sur $[\,-1\,;0\,]$, dérivable sur $]\,-1\,;0\,[$ donc, d'après le théorème de Rolle, g' s'annule en un réel $a \in]\,-1\,;0\,[$. De même, g' s'annule en un réel $b \in]\,0\,;1\,[$. Or, $g'(a) = g'(b) = 0$ donc, de même (g' est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$ car f est dérivable deux fois), il existe $c \in]\,a\,;b\,[$ tel que $g''(c) = 0$. Or, $g''(c) = f''(c)$ car la dérivée seconde de $x \mapsto x$ est nulle, ce qui permet de conclure.

Exercice 20 - Deux fois le même : ✪ Donner à l'aide de l'IAF puis de l'EAF les deux limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\text{Arctan}(x+3) - \text{Arctan}(x)\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x+2)e^{1/(x+2)} - xe^{1/x}$

Correction :

1. Cela fait penser à l'EAF ou à l'IAF. Définissons $f : t \longmapsto \text{Arctan}(t)$, si bien qu'on cherche $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2(f(x+3) - f(x))$. Appliquons l'IAF : pour cela, il faut encadrer f' (on cherche la limite en $+\infty$). Soit $x > 0$. La fonction f est dérivable sur $[\,x\,;x+3\,]$ et, pour tout t dans cet intervalle, $f'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. f' est décroissante (si on a un doute, on peut redériver comme dans l'exemple suivant), si bien que pour tout $t \in [\,x\,;x+3\,]$,
$$\frac{1}{1+(x+3)^2} \leq f'(t) \leq \frac{1}{1+x^2}$$
D'après l'IAF (avec $a = x$ et $b = x+3$ et on a bien $a \leq b$),
$$\frac{3}{1+(x+3)^2} = \frac{b-a}{1+(x+3)^2} \leq f(x+3) - f(x) \leq \frac{3}{1+x^2}$$
En multipliant par x^2 :
$$\frac{3x^2}{1+(x+3)^2} \leq x^2(f(x+3) - f(x)) \leq \frac{3x^2}{1+x^2}$$
D'après le théorème d'encadrement, la limite recherchée vaut 3.
2. Faisons comme dans l'exemple précédent. Définissons $f : t \longmapsto te^{1/t}$, si bien qu'on cherche $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x+2) - f(x))$. Appliquons l'IAF : pour cela, il faut encadrer f' (on cherche la limite en $+\infty$). Soit $x > 0$. La fonction $t \longmapsto e^{1/t}$ est dérivable sur $[\,x\,;x+2\,]$ par composée d'une fonction qui l'est par une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Par produit f est donc dérivable sur $[\,x\,;x+2\,]$. On a :
$$\forall t \in [\,x\,;x+2\,],\quad f'(t) = e^{1/t} + t \times \frac{-1}{t^2} \times e^{1/t} = \left(1 - \frac{1}{t}\right) \times e^{1/t}.$$
Nous cherchons à encadrer f'. Étudions sa monotonie : f' est aussi dérivable sur $[\,x\,;x+2\,]$ et :
$$\forall t \in [\,x\,;x+2\,],\quad f''(t) = \frac{1}{t^2} \times e^{1/t} + \left(1 - \frac{1}{t}\right) \times \frac{-1}{t^2} \times e^{1/t} = \frac{1}{t^3} \times e^{1/t} > 0.$$
Il en découle que f' est croissante sur $[\,x\,;x+2\,]$. Ainsi, sur $[\,x\,;x+2\,]$, $f'(x+2) \geq f' \geq f'(x)$. D'après l'IAF (avec $b = x+2$ et $a = x$ et on a bien $b \geq a$),
$$2f'(x+2) = f'(x+2) \times (x+2-x) \geq f(x+2) - f(x) \geq f'(x) \times (x+2-x) = 2f'(x).$$

Or, $f'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$ (pas besoin de croissances comparées : ce n'est même pas une forme indéterminée !) donc $2f'(x+2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$ et $2f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$. D'après le théorème d'encadrement, $f(x+2)-f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$.

Exercice 21 : ✪ Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ que l'on explicitera telle que pour tout $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left|\sin(t)e^{-x_1{}^2} - \sin(t)e^{-x_2{}^2}\right| \leq C|x_1 - x_2|.$$

Correction : Soit $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left|\sin(t)e^{-x_1{}^2} - \sin(t)e^{-x_2{}^2}\right| = |\sin(t)| \times \left|e^{-x_1{}^2} - e^{-x_2{}^2}\right| \leq \left|e^{-x_1{}^2} - e^{-x_2{}^2}\right|$$

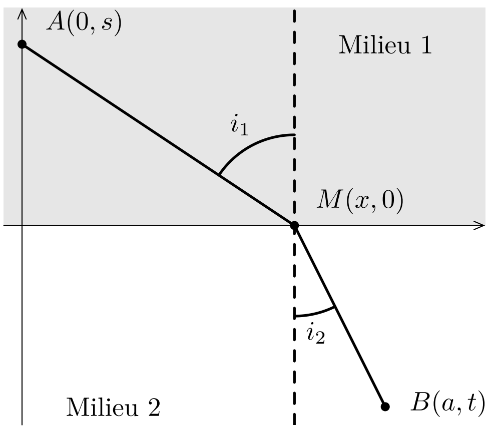
Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$. Une rapide étude de fonction de f' (donc en donnant le tableau de signes de f'' pour donner le tableau de signes de f') prouve que $|f'| \leq \sqrt{2}e^{-1/2}$. D'après l'IAF,

$$\left|e^{-x_1{}^2} - e^{-x_2{}^2}\right| \leq \sqrt{2}e^{-1/2} \times |x_1 - x_2|$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 22 - Réfraction d'un rayon lumineux et loi de Snell-Descartes : ✪ Deux milieux homogènes (c'est-à-dire que, dans chaque milieu, la vitesse de la lumière ne dépend pas de la position) sont séparés par une frontière plane. La vitesse de la lumière vaut v_1 dans le premier milieu et v_2 dans le deuxième. Un rayon lumineux va du point A situé dans le premier milieu au point B situé dans le deuxième. Le point, noté M, où il change de milieu est déterminé par le principe de Fermat : il est tel que le temps de parcours soit minimal.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ comme sur la figure. Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(0, s)$ et (a, t) avec s et a strictement positifs et t strictement négatif. Le point M a pour coordonnées $(x, 0)$ avec $x \in [\,0\,;a\,]$. On désigne par i_1 et i_2 les angles géométriques (donc positifs) entre $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{j}$ d'une part, entre $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{j}$ d'autre part (voir la figure).



1. Exprimer le temps de parcours en fonction de x. Montrer que cela définit une fonction T de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;x\,]$.
2. Montrer que T admet un minimum en un point x_0, et que pour cette valeur x_0, on a $n_1\sin(i_1) = n_2\sin(i_2)$, où les indices $n_1 = c/v_1$ et $n_2 = c/v_2$ sont appelés les indices de réfraction.
3. On suppose que $n_2 < n_1$. Montrer que si l'angle d'incidence α est supérieur à un certain seuil, il n'y a pas de rayon réfracté.

Correction :

1. La vitesse de la lumière vaut v_1 dans le premier milieu de v_2 dans le deuxième donc le temps de parcours vaut (en utilisant le fameux $v = d/t$ ainsi que le théorème de Pythagore) :

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{AM}{v_1} + \frac{MB}{v_2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+s^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(a-x)^2+t^2}}{v_2} \end{aligned}$$

s et t étant non nuls, x^2+s^2 et $(a-x)^2+t^2$ sont strictement positifs et la racine carrée est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc T est bien $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;a\,]$.

2. Erreur d'énoncé : il faut remplacer α par i_1 et β par i_2 comme ci-dessus. T est continue sur le segment $[\,0\,;a\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes. Elle admet donc un minimum atteint en un point x_0. Donnons le tableau de variations de T. Soit $x \in [\,0\,;a\,]$. T est $\mathscr{C}^1$ et :

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+s^2}\times v_1} + \frac{-2(a-x)}{2\sqrt{(a-x)^2+t^2}\times v_2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+s^2}\times v_1} - \frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+t^2}\times v_2} \end{aligned}$$

$T'(0) = -a < 0$ et T' est continue donc T' est strictement négative au voisinage de 0 donc T est strictement décroissante au voisinage de 0. De même, $T'(a) > 0$ donc T est croissante au voisinage de a. On en déduit que $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq a$ donc $x_0 \in \,]\,0\,;a\,[$. Par condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur, $T'(x_0) = 0$. Cherchons donc quand T' s'annule. On suppose dans la suite que $x \in \,]\,0\,;a\,[$.

$$\begin{aligned} T'(x) = 0 &\iff \frac{x}{\sqrt{x^2+s^2}\times v_1} = \frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+t^2}\times v_2} \\ &\iff x \times \sqrt{(a-x)^2+t^2}\times v_2 = (a-x)\times\sqrt{x^2+s^2}\times v_1 \\ &\iff x\times\frac{a-x}{\sin(i_2)}\times v_2 = (a-x)\times\frac{x}{\sin(i_1)}\times v_1 \\ &\iff \sin(i_1)v_2 = \sin(i_2)v_1 \\ &\iff \sin(i_1)\times\frac{c}{n_2} = \sin(i_2)\times\frac{c}{n_2} \\ &\iff n_1\sin(i_1) = n_2\sin(i_2) \end{aligned}$$

Or, $T'(x_0) = 0$ donc, en x_0, on a bien l'égalité voulue.

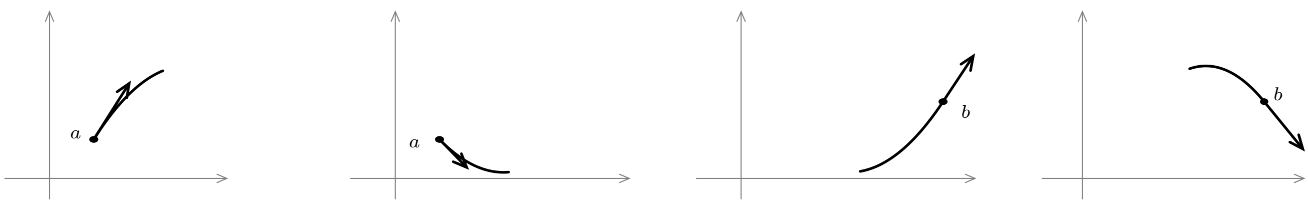
3. Supposons donc que $n_2 < n_1$. Lorsqu'il y a un rayon réfracté, on a $\sin(i_2) = \dfrac{n_1}{n_2}\times\sin(i_1)$. Cependant, $n_2/n_1 < 1$: si $n_2/n_1 < \sin(i_1) \leq 1$, alors $\sin(i_2) > 1$ ce qui est absurde : il n'y a pas de rayon réfracté dès que $i_1 > \operatorname{Arcsin}(n_2/n_1)$, le rayon lumineux est entièrement réfléchi (cf. Wikipédia ou votre cours de physique pour une illustration).

Exercice 23 - Un résultat bien utile : ✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que $f'(a) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $c \in \,]\,a\,;a+\eta\,]\,, f(c) > f(a)$ (on s'intéressera au taux d'accroissement). En particulier, il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f(c) > f(a)$. Attention, cela ne veut pas dire que f est strictement croissante sur un voisinage de a ! On a en effet vu un contre-exemple dans le cours.
2. Donner un résultat analogue si $f'(a) < 0$, si $f'(b) > 0$ ou si $f'(b) < 0$. Ce genre de résultat peut être très utile. Voici quatre exercices qui l'utilisent.

Correction :

1. Il suffit de voir que, puisque $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a^+]{} f'(a) > 0$ alors il existe un voisinage $]\,a\,;a+\eta\,]$ de a (où $\eta > 0$) tel que, pour tout $x \in \,]\,a\,;a+\eta\,]$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Or, si $x \in \,]\,a\,;a+\eta\,]$, $x - a > 0$ ce qui permet de conclure. C'est le premier dessin ci-dessous.
2. De même, si $f'(a) < 0$, alors il existe $c > a$ tel que $f(c) < f(a)$ (deuxième dessin), si $f'(b) > 0$, il existe $c < b$ tel que $f(c) < f(b)$ (troisième dessin), tandis que si $f'(b) < 0$, alors il existe $c < b$ tel que $f(c) > f(b)$ (quatrième dessin).



Exercice 24 : ✪ Soient f et $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f'(a) > g'(a)$ et $f'(b) > g'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f(c) = g(c)$.

Correction : Erreur d'énoncé : il faut prouver qu'il existe c tel que $f(c) = g(c)$. Je vous laisse faire le dessin. Notons $\varphi = f - g$. Alors φ est dérivable, $\varphi'(a) > 0$ et $\varphi'(b) > 0$. D'après l'exercice précédent, il existe $x_1 > a$ tel que $\varphi(x_1) > \varphi(a) = 0$. De même, il existe x_2 tel que $\varphi(x_2) < \varphi(b) = 0$. φ est continue donc, d'après le TVI, il existe $c \in]\, x_1\,;x_2\,[$ tel que $\varphi(c) = 0$ donc tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 25 : ✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$, que $f'(a) > 0$ et que $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c_1 < c_2 < c_3$ tels que $f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0$.

Correction : Je vous laisse faire le dessin. D'après l'exercice 23, il existe $c_1 > a$ tel que $f(c_1) > f(a) = 0$ et il existe $c_2 < b$ tel que $f(c_2) < f(b) = 0$. D'après le TVI (f est dérivable donc continue), il existe $x_2 \in [\,c_1\,;c_2\,]$ tel que $f(x_2) = 0$. Ensuite, f est dérivable sur $]\,a\,;x_2\,[$, continue sur $[\,a\,;x_2\,]$, et $f(a) = f(x_2) = 0$: le théorème de Rolle prouve l'existence de x_1, et idem pour x_3 entre x_2 et b.

Exercice 26 : ✪ Soit $f\,[\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) \times f'(1) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]\,0\,;1\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

Correction : $f(1)$ et $f'(1)$ sont donc de signes opposés. Supposons (raisonnement analogue dans l'autre cas) que $f(1) > 0 > f'(1)$ (là aussi, je vous laisse faire le dessin). Il existe $d < 1$ tel que $f(d) > f(1) > f(0)$. Il en découle que le maximum de f sur $[\,0\,;1\,]$ (qui existe car f continue, d'après le théorème des bornes atteintes) n'est pas atteint en 0 ou en 1 : d'après la condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur, le point en lequel le maximum est atteint est un point où la dérivée s'annule.

Exercice 27 - Théorème de Darboux : ✪✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose dans cette question que $f'(a) < 0 < f'(b)$
   (a) Montrer que si f est $\mathscr{C}^1$, alors il existe $c \in]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.
   (b) On suppose à présent uniquement que f est dérivable. Montrer que le résultat de la question précédente est encore vérifié.
2. On ne suppose plus que $f'(a) < 0 < f'(b)$. Montrer que pour tout $m \in [\,f'(a)\,;f'(b)\,]$, il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f'(c) = m$. En d'autres termes, une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue !
3. Montrer que la partie entière n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.
4. Vérifier que la dérivée de $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, prolongée en 0 par $f(0) = 0$, vérifie bien la propriété des valeurs intermédiaires.

Correction :

1. (a) Comme f est C^1, f' est continue et le TVI permet de conclure.
   (b) Comme f' n'est plus supposée continue, on ne peut plus conclure aussi facilement. D'après l'exercice 23, il existe $c_1 > a$ tel que $f(c_1) > f(a)$, et il existe $c_2 < b$ tel que $f(c_2) > f(b)$ (on combine le premier et le dernier dessins de l'exercice 23). Or, f est continue car dérivable sur le segment $[\,a\,;b\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint sa borne supérieure en un réel c. Or, d'après les inégalités précédentes, le sup n'est atteint ni en a ni en b, c'est-à-dire que c est un point intérieur. D'après la condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur, $f'(c) = 0$.
2. Soit $m \in [\,f'(a)\,;f'(b)\,]$. Si $m = f'(a)$ (respectivement $f'(b)$) alors $c = a$ (respectivement $c = b$) convient. Supposons à présent $m \in]\,f'(a)\,;f'(b)\,[$. Il suffit d'appliquer la question précédente à $g : x \longmapsto f(x) - mx$. En effet, g est dérivable, de dérivée $g' : x \longmapsto f'(x) - m$ et, par hypothèse, $g'(a)$ et $g'(b)$ sont de signe contraire, donc g' s'annule : il existe $c \in]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = m$.
3. D'après le théorème de Darboux, une dérivée (donc une fonction qui admet une primitive) vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Or, la partie entière ne la vérifie pas : elle vaut 0 en 0, 1 en 1 mais ne vaut jamais 1/2. Par contraposée, elle n'admet pas de primitive.
4. Si $x \neq 0$,
$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
   On montre qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires de même que dans l'exercice 54 du chapitre 13.

Exercice 28 : ✪ Soit $f : [\,-1\,;1\,] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]\,-1\,;1\,[$ tel que $f'(c) = 4c + 1$.

Correction : Définissons sur $[-1\,;1]$ la fonction g par $g(x) = f(x) - 2x^2 - x$. On souhaite donc montrer que g' s'annule sur $]-1\,;1[$. On a $g(-1) = -1$, $g(0) = 0$ et $g(1) = -3$ (faites un dessin d'une fonction g quelconque vérifiant ces conditions) : on ne peut pas appliquer directement le théorème de Rolle. Donnons deux solutions.

Première solution : d'après le TVI (g étant continue), il existe $x \in]\,0\,;1\,[$ tel que $g(x) = -1$. g étant continue sur $[-1\,;x]$, dérivable sur $]-1\,;x[$ avec $g(-1) = g(x) = 0$. D'après le théorème de Rolle, g s'annule sur $]-1\,;x[$.

Deuxième solution : g est continue sur le segment $[-1\,;1]$ donc est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint sa borne supérieure (qui est donc un maximum) en un réel $a \in [-1\,;1]$. Or, $g(-1) < g(0)$ et $g(1) < g(0)$ donc $a \in]-1\,;1[$ (le maximum ne peut pas être atteint en ± 1). D'après la condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur, $g'(a) = 0$.

Exercice 29 : ✪ À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, majorer l'erreur commise en faisant les approximations suivantes :

$$\sqrt{10001} \approx 100 \qquad 0.99^2 \approx 1 \qquad \text{et} \qquad \cos(1) \approx \frac{1}{2}$$

Correction :

- On veut majorer $|\sqrt{10001} - \sqrt{10000}|$ donc $|\sqrt{x} - \sqrt{y}|$ sur l'intervalle $I = [\,10000\,;10001\,]$. Notons f la racine carrée, dérivable sur I, de dérivée $f' : x \mapsto 1/2\sqrt{x}$ qui est décroissante, donc $|f'| \leq 1/2\sqrt{10000} = 1/200$. Par conséquent,

$$|\sqrt{10001} - 100| = |\sqrt{10001} - \sqrt{10000}| \leq \frac{1}{200}|10001 - 10000| = \frac{1}{200} = 0.005$$

  L'erreur est donc majorée par 0.005.
- On veut majorer $|1^2 - 0.99^2|$. Notons f la fonction carré, dérivable sur $[\,0.99\,;1\,]$. Sa dérivée est $f : x \mapsto 2x$, bornée par 2 sur $[\,0.99\,;1\,]$. D'après l'IAF,

$$|1 - 0.99^2| \leq 2|1 - 0.99| = \frac{2}{100} = 0.02$$

- On veut majorer $|\cos(1) - \cos(\pi/3)|$. La fonction $\cos' = \sin$ est croissante sur $[\,1\,;\pi/3\,]$ donc est majorée par $\cos(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. D'après l'IAF,

$$|\cos(1) - 1/2| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{\pi}{3} - 1\right) \approx 0.03$$

  Dans tous les cas, l'approximation (simple !) est tout de même assez précise.

Exercice 30 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, périodique. Montrer que f est lipschitzienne.

Correction : f' étant périodique (car f l'est), continue, on prouve de même que dans l'exercice 19 du chapitre 13 que f' est bornée donc f est lipschitzienne.

Exercice 31 : ✪ Soit f dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $f(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Correction : Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$:

$$\exists A > 0, \forall x \geq A, |f'(x)| \leq \varepsilon$$

Soit $x \geq A$. Alors, sur $[\,A\,;x\,]$, $|f'(x)| \leq \varepsilon$ donc, d'après l'IAF (appliquée sur le segment $[\,A\,;x\,]$), $|f(x) - f(A)| \leq \varepsilon|x - A|$. En d'autres termes,

$$f(A) - \varepsilon(x - A) \leq f(x) \leq f(A) + \varepsilon(x - A)$$

En divisant par $x > 0$,

$$\frac{f(A) - \varepsilon(x - A)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(A) + \varepsilon(x - A)}{x}$$

Le membre de gauche tend vers $-\varepsilon$ et le membre de droite vers ε quand $x \to +\infty$: pour x assez grand,

$$-2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{x} \leq 2\varepsilon$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 32 : ✪✪ Redémontrer (nous l'avons en effet déjà fait dans le chapitre 13) que $f : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ n'est pas lipschitzienne. En déduire que cette fonction n'est pas périodique.

Correction : f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. $f'(x)=2x\cos\left(x^2\right)$. Alors f' n'est pas bornée : en effet, si on pose $x_n=\sqrt{2n\pi}$ pour tout n, $f'(x_n)=\sqrt{2n\pi}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ si bien que f' n'est pas bornée donc f n'est pas lipschitzienne. Or, une fonction $\mathscr{C}^1$ périodique est lipschitzienne d'après l'exercice 30 donc, par contraposée, si f est $\mathscr{C}^1$ non lipschitzienne, elle ne peut pas être périodique.

Exercice 33 : ✪✪ Soit $f:[\,0\,;1\,]\to\mathbb{R}$ dérivable. Donner une CNS pour que la fonction

$$g:x\mapsto\begin{cases} f(2x) & \text{si } x\in\left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\,\right] \\ f(2x-1) & \text{sinon}\end{cases}$$

soit dérivable sur $[\,0\,;1\,]$.

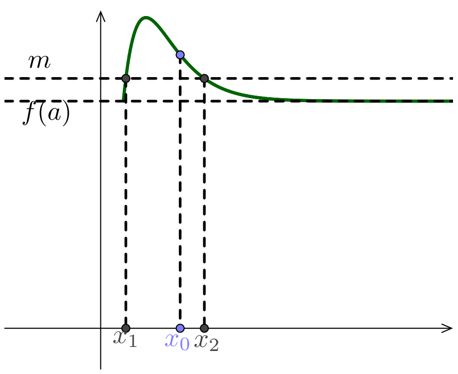
Correction : g est dérivable sur $[\,0\,;1/2\,[\,\cup\,]\,1/2\,;1\,]$ car composée de fonctions dérivables (on enlève 1/2 : exclure les points de recollement). Par conséquent, g est dérivable sur $[\,0\,;1\,]$ si et seulement si g est dérivable en 1/2. De plus, on montre aisément que la limite à gauche de g en 1/2 vaut $f(1)$ et que sa limite à droite vaut $f(0)$: g est donc continue en 1/2 si et seulement si $f(1)=f(0)$, ce que l'on suppose à présent. Si on note $h:x\mapsto f(2x)$ et $\varphi:x\mapsto f(2x-1)$, alors g est dérivable à gauche en 1/2 de dérivée à gauche $h'(1/2)=2f'(1)$ (un 2 sort quand on dérive h) et g est dérivable à droite en 1/2 de dérivée à droite $\varphi'(1/2)=2f'(0)$. En conclusion, f est dérivable en 1/2 si et seulement si $f(0)=f(1)$ et $f'(0)=f'(1)$.

Exercice 34 - Théorème de Rolle généralisé : ✪✪ Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit f continue sur $[\,a\,;+\infty\,[$, dérivable sur $]\,a\,;+\infty\,[$, et tendant vers $f(a)$ en $+\infty$. Montrer qu'il existe $c>a$ tel que $f'(c)=0$:

1. en appliquant le théorème de Rolle à f sur un segment bien choisi (après avoir fait un dessin, comme une personne civilisée).
2. en appliquant le théorème de Rolle à la fonction F définie sur $\left[\,\text{Arctan}(a)\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$ par
$$x\mapsto\begin{cases} f(\tan x) & \text{si } x\neq\dfrac{\pi}{2} \\ f(a) & \text{sinon}\end{cases}$$
3. **Remake :** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable, telle que $\lim\limits_{-\infty}f=\lim\limits_{+\infty}f$. Montrer que f' s'annule.

Correction :

1. Si f est constante égale à $f(a)$, alors f' est nulle donc tout $c>a$ convient. Supposons donc f non constante. Alors il existe x_0 tel que $f(x_0)\neq f(a)$. Sans perte de généralité, supposons $f(x_0)>f(a)$. Soit $m\dfrac{f(x_0)+f(a)}{2}$ de manière à avoir $f(a)=\lim_{+\infty}f<m<f(x_0)$. f étant continue, d'après le TVI, il existe $x_1<x_0$ et $x_2>x_0$ tels que $f(x_1)=f(x_2)=m$. f est continue sur $[\,x_1\,;x_2\,]$, dérivable sur $]\,x_1\,;x_2\,[$ avec $f(x_1)=f(x_2)$: le théorème de Rolle permet de conclure.



2. Si $x\in[\,Arctan(a)\,;\pi/2\,[$, $\tan(x)\geq a$ donc $f(\tan x)$ est bien définie. De plus, f est continue sur $[\,\text{Arctan}(a)\,;\pi/2\,[$ car composée de fonctions continues. Enfin, $y=\tan(x)\xrightarrow[x\to\pi/2^-]{}+\infty$ et $f(y)\xrightarrow[y\to+\infty]{}f(a)$ donc, par composition de limites, $F(x)\xrightarrow[x\to\pi/2^-]{}f(a)=F(\pi/2)$: F est continue en $\pi/2$ donc sur $[\,\text{Arctan}(a)\,;\pi/2\,]$. De plus, F est dérivable sur l'intervalle ouvert. Enfin, $F(\text{Arctan}(a))=f(\tan(\text{Arctan}(a)))=f(a)=F(\pi/2)$: d'après le théorème de Rolle, il existe $b\in\,]\,\text{Arctan}(a)\,;\pi/2\,[$ tel que $F'(b)=0$. Or, pour tout $x\in\,]\,\text{Arctan}(a)\,;\pi/2\,[$,
$$F'(x)=(1+\tan^2(x))\times f'(\tan(x))$$
Dès lors, $F'(b)=(1+\tan^2(b))\times f'(\tan(b))$, mais $1+\tan^2(b)\neq0$ donc $f'(\tan(b))=0$: il suffit de poser $c=\tan(b)$ donc $f'(c)=0$.

3. Idem que dans la question 1 : si f est constante, c'est bon, sinon on applique deux fois le TVI puis le théorème de Rolle.

Exercice 35 - Accroissements finis généralisés et règle de l'Hôpital : ✪✪ Soient $a < b$ deux réels. Soient f et g deux fonctions continues sur $[\,a\,;b\,]$ et dérivables sur $]\,a\,;b\,[$. Enfin, on suppose que g' ne s'annule pas sur $]\,a\,;b\,[$.

1. Montrer que, pour tout $x \in\,]\,a\,;b\,]$, $g(x) \neq g(a)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$
Pourquoi appelle-t-on ce résultat le théorème des AF généralisés ?
3. On suppose que f'/g' admet une limite finie L en a^+. Montrer que
$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \xrightarrow[x\to a^+]{} L$$
Ce résultat est connu sous le nom de règle de l'Hôpital.
4. Montrer les résultats suivants :
$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{x-\sin(x)}{x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{6}$$

Correction :

1. Erreur d'énoncé : il fallait lire « $g(x) \neq g(a)$ ». S'il existe $x \in\,]\,a\,;b\,]$ tel que $g(x) = g(a)$ alors, d'après le théorème de Rolle (g continue sur $[\,a\,;x\,]$ dérivable sur $]\,a\,;x\,[$ avec $g(a) = g(x)$), il en découle que g' s'annule ce qui est contraire aux hypothèses.
2. Soit φ définie sur $[\,a\,;b\,]$ par $\varphi(x) = (f(b)-f(a))\times g(x) - (g(b)-g(a))\times f(x)$. Alors φ est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$, avec
$$\varphi(a) = \varphi(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$$
D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $\varphi'(c) = (f(b)-f(a))\times g'(c) - (g(b)-g(a))\times f'(c) = 0$ ce qui permet de conclure. Ce résultat est appelé théorème des AF généralisés car, lorsque g est égale à l'identité, on prouve qu'il existe c tel que
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
c'est-à-dire le théorème des AF (l'égalité des AF).
3. Soit $x > a$. D'après le résultat précédent, il existe $c_x \in\,]\,a\,;x\,[$ tel que
$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$
Or, $a < c_x < x$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $y = c_x \xrightarrow[x\to a^+]{} a^+$ et $f(y)/g(y) \xrightarrow[y\to a^+]{} L$. Par composition de limites,
$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \xrightarrow[x\to a^+]{} L$$
4. On prouverait la même chose en a^- et donc le résultat précédent est valable avec a à la place de a^+. Notons $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = x^2$. Étudions la limite de f'/g' en 0. Or, si $x \neq 0$,
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-}{\sin(x)}2x \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$
D'après la règle de l'Hôpital,
$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{\cos(x)-1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$
D'où la première égalité. Pour la deuxième, posons $f(x) = x - \sin(x)$ et $g(x)$, si bien qu'on cherche la limite en 0 de $\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}$. De même, cherchons la limite de f'/g'. Si $x > 0$,
$$\frac{1-\cos(x)}{3x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{6}$$
d'après ce qui précède, ce qui permet de conclure.

Exercice 36 : ✪✪ Soit $n \geq 1$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, 2π-périodique, s'annulant n fois sur l'intervalle $[\,0\,;2\pi\,[$. Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $[\,0\,;2\pi\,[$.

Correction : Je vous laisse faire un dessin. Soient $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ les n zéros de f dans $[\,0\,;2\pi\,[$. Si $k \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, f est continue sur $[\,x_k\,;x_{k+1}\,]$, dérivable sur $]\,x_k\,;x_{k+1}\,[$ avec $f(x_k) = f(x_{k+1}) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $y_k \in \,]\,x_k\,;x_{k+1}\,[$ tel que $f'(y_k) = 0$. Nous avons $n-1$ zéros : il en manque un, que nous allons obtenir grâce à la périodicité. Il suffit de voir que $f(x_1 + 2\pi) = f(x_1) = 0$. De même, f' s'annule en un point y_n sur $]\,x_n\,;x_1 + 2\pi\,[$. Cependant, attention $x_n < 2\pi \leq x_1 + 2\pi$ donc y_n peut ne pas appartenir à $[\,0\,;2\pi\,[$. Il faut séparer deux cas : si $y_n < 2\pi$ alors c'est bon, tandis que si $y_n \geq 2\pi$ alors $y_n - 2\pi \in [\,0\,;x_1\,[$ et f' est aussi 2π-périodique donc $f'(y_n - 2\pi) = 0$. Dans tous les cas, on obtient un zéro de f' supplémentaire, ce qui permet de conclure.

Exercice 37 : ✪✪ Soit f une fonction $\mathscr{C}^2$ bornée. On veut montrer que f'' s'annule. Pour cela, on va raisonner par l'absurde.

1. Montrer que f'' est de signe constant. On suppose dans la suite qu'elle est strictement positive.
2. Montrer que f' admet une limite L_1 en $+\infty$ et une limite L_2 en $-\infty$, avec $L_1 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $L_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
3. Montrer que $L_1 = L_2 = 0$ et conclure.

Correction :

1. f'' est continue car f est $\mathscr{C}^2$ et ne s'annule pas donc est de signe constant (raisonnement classique à savoir faire en claquant des doigts, cf. par exemple chapitre 1 ou exercice 34 du chapitre 13).
2. f' est strictement croissante car sa dérivée est strictement positive. Or, une fonction croissante tend vers une limite finie ou vers $+\infty$ en $+\infty$, selon qu'elle est majorée ou non. De même en $-\infty$.
3. Comme dans le cours (ce n'est pas à proprement parler du cours, il faut savoir le redémontrer), L_1 et L_2 sont nulles puisque f est bornée. f' est strictement croissante et tend vers 0 en $\pm\infty$ donc est constante, ce qui est absurde (f' strictement croissante) : f'' s'annule.

Exercice 38 : ✪✪ Soit f continue sur $[\,0\,;1\,]$, dérivable sur $]\,0\,;1\,[$, vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe des éléments distincts $0 < x_0 < \cdots < x_{n-1} < 1$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k) = n$.
2. ✪✪✪ En tronçonnant les y plutôt que les x, montrer qu'il existe $0 < y_0 < \cdots < y_{n-1} < 1$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{f'(y_k)} = n$.

Correction :

1. Il faut appliquer l'EAF n fois (ce n'est pas l'IAF car on cherche une égalité, et ce n'est pas le théorème de Rolle car on ne veut pas montrer que la somme est nulle). Coupons l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ en n parts égales. Si $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, notons $a_k = k/n$. Pour tout $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, la fonction f est continue sur $[\,a_k\,;a_{k+1}\,]$, dérivable sur $]\,a_k\,;a_{k+1}\,[$. D'après l'EAF, il existe $x_k \in \,]\,a_k\,;a_{k+1}\,[$ tel que
$$f'(x_k) = \frac{f(a_{k+1}) - f(a_k)}{a_{k+1} - a_k} = \frac{f(a_{k+1}) - f(a_k)}{1/n} = n \times (f(a_{k+1}) - f(a_k)).$$
Il suffit de voir que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k) = n\sum_{k=0}^{n-1}(f(a_{k+1}) - f(a_k)) = n(f(1) - f(0))$ par télescopage, ce qui permet de conclure puisque $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$.
2. Coupons cette fois l'axe des ordonnées en n parts égales : on cherche un antécédent à $1/n$, un antécédent à $2/n$ etc. Comme f est continue avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, d'après le TVI, il existe b_1 tel que $f(b_1) = 1/n$. De même, il existe $b_2 \in [\,b_1\,;1\,]$ tel que $f(b_2) = 2/n$. De proche en proche, on construit $0 = b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n = 1$ tels que, pour tout $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, $f(b_k) = k/n$. Le même procédé que ci-dessus (en appliquant l'EAF entre les b_k) permettra de conclure, je vous laisse les détails.

Exercice 39 : ✪✪

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(\frac{1+x}{x}\right)^x \leq e \leq \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$$

2. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

Correction :

1. On veut prouver que, pour tout $x > 0$,

$$e^{x(\ln(x+1)-\ln(x))} \leq e \leq e^{(x+1)(\ln(x+1)-\ln(x))}$$

La fonction exp étant croissante, il suffit de prouver que $x(\ln(x+1)-\ln(x)) \leq 1 \leq (x+1)(\ln(x+1)-\ln(x))$ et puisque x et $x+1$ sont strictement positifs, il suffit en fait de prouver que

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$

Soit $x > 0$. La fonction ln est dérivable sur $[\,x\,;x+1\,]$, de dérivée $t \mapsto 1/t$ décroissante donc, sur $[\,x\,;x+1\,]$, $1/(x+1) \leq 1/t \leq 1/x$. D'après l'IAF (avec $a = x \leq x+1 = b$) :

$$\frac{1}{x+1} \times (x+1-x) \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x} \times (x+1-x)$$

ce qui permet de conclure.

2. Par produit (rappelons qu'on peut multiplier les inégalités positives) :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \leq \prod_{k=1}^{n} e \leq \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}$$

Le terme du milieu vaut e^n. Calculons le terme de gauche (on reconnaît à la première égalité un produit télescopique) :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k &= \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} \times \frac{1}{k} \\ &= \frac{(n+1)^n}{1^0} \times \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{(n+1)^n}{n!} \end{aligned}$$

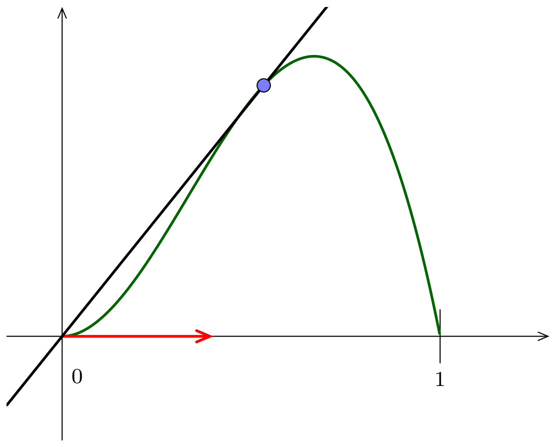
On trouve de même que le membre de droite vaut $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$ ce qui permet de conclure.

Exercice 40 : ✪✪

1. Soit f une fonction dérivable de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$, avec $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que la tangente au graphe de f au point d'abscisse c passe par l'origine.
2. **Remake :** Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [\,a\,;b\,]$ dérivable avec $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que, pour tout $x \notin [\,a\,;b\,]$, il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que la tangente à la courbe de f en c passe par le point $(x, 0)$.

Correction :

1. Cela se voit bien sur le dessin ci-dessous (on a aussi tracé le vecteur tangent horizontal en 0).



Soit $c \in]\,0\,;1\,[$. La tangente au point d'abscisse c est la droite d'équation $y = f'(c) \times (x-c) + f(c)$. Elle passe par l'origine si et seulement si $(0,0)$ vérifie l'équation i.e. $0 = f'(c) \times (0-c) + f(c)$. En d'autres termes, la tangente au point d'abscisse c passe par l'origine si et seulement si $f(c) - cf'(c) = 0$. Cela nous fait penser à la dérivée d'un quotient. Soit g définie sur $]\,0\,;1\,]$ par $g(x) = f(x)/x$. Pour appliquer le théorème de Rolle, il faut prolonger g par continuité en 0. Or, si $x \in]\,0\,;1\,]$,

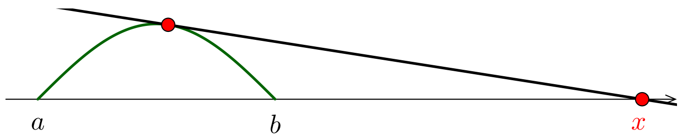
$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0) = 0$$

g est donc prolongeable par continuité en posant $g(0) = 0$. g ainsi prolongée est continue en 0 donc sur $[\,0\,;1\,]$ car g est continue sur $]\,0\,;1\,]$. De plus, g est dérivable sur $]\,0\,;1\,[$. Enfin, $g(0) = 0$ et $g(1) = f(1) = 0 = g(0)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]\,0\,;1\,[$ tel que $g'(c) = 0$. Or,

$$g'(c) = \frac{cf'(c) - f(c)}{c^2}$$

Une fraction étant nulle si et seulement si son numérateur est nul, $cf'(c) - f(c) = 0$ et on a vu que cela signifiait que la tangente en c passe par l'origine.

2. Soit $x \notin [\,a\,;b\,]$. Idem, commençons par faire un dessin.



Soit $c \in]\,a\,;b\,[$. La tangente en c a pour équation (on note t l'abscisse car x est déjà pris) $y = f'(c) \times (t-c) + f(c)$. Celle-ci passe par le point $(x,0)$ si et seulement si $(x,0)$ vérifie l'équation i.e. si et seulement si $0 = f'(c) \times (x-c) + f(c)$. On définit sur $[\,a\,;b\,]$ la fonction g par

$$g(t) = \frac{f(t)}{x-t}$$

qui est bien définie, continue et dérivable sur $[\,a\,;b\,]$ car quotient de fonctions qui le sont, celle au dénominateur ne s'annulant pas (car $x \notin [\,a\,;b\,]$). De plus, $g(a) = g(b) = 0$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]\,a\,;b\,[$ tel que $g'(c) = 0$. Or,

$$g'(c) = \frac{f'(c) \times (x-c) - (-1) \times f(c)}{(x-c)^2}$$

ce qui permet de conclure de la même façon.

Exercice 41 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bornée et deux fois dérivable. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha f \leq f''$. Montrer que f est décroissante et que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$.

Correction : f' est croissante car $f'' \geq \alpha f \geq 0$ puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $\alpha > 0$. Dès lors, f' admet une limite L finie ou égale à $+\infty$ en $+\infty$. Comme d'habitude, f étant bornée, il en découle que $L = 0$. f' est croissante et tend vers 0 en $+\infty$ donc est négative : f est décroissante. f est positive minorée par 0 donc converge vers une limite $L' \geq 0$: si $L' > 0$ alors (f est décroissante), f est minorée par L' donc f'' est minorée par $\alpha L'$. D'après l'IAF, pour tout x, $f'(x) \geq \alpha L' x + f'(0)$ donc, d'après le théorème de minoration, $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde car on a déjà prouvé que f' tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 42 : ✪✪✪ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \leq x + e^{x^2}$.

Correction : Définissons sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par $\varphi(x) = e^{x^2} + x - e^x$. On cherche donc à prouver que φ est positive sur $\mathbb{R}$. φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\varphi'(x) = 1 + 2xe^{x^2} - e^x$: le signe ne paraît pas immédiat, on dérive donc φ une deuxième fois, et $\varphi''(x) = e^{x^2}(2+4x^2) - e^x$. On souhaite donc comparer $e^{x^2}(2+4x^2)$ et e^x.

- Si $x \geq 1, x^2 \geq x$. La fonction exponentielle étant croissante, $e^{x^2} \geq e^x$. Or, $2 + 4x^2 > 1$ et $e^{x^2} > 0$ donc $(2+4x^2)e^{x^2} > e^{x^2} \geq e^x$. En d'autres termes, φ'' est strictement positive sur $[\,1\,;+\infty\,[$.
- Si $x \in \mathbb{R}^-$ alors $x^2 \geq 0 \geq x$ et on conclut de la même façon : φ'' est strictement positive sur $\mathbb{R}_-$.
- On se place à présent sur $[\,0\,;1\,]$. On souhaite prouver que $e^{x-x^2} < 2 + 4x^2$. Tout d'abord, $x - x^2 \in [\,0\,;1/4\,]$ puisque $x \in [\,0\,;1\,]$. On pose $f(t) = e^t$, si bien que $f'(t) \leq e^{1/4}$ sur $[\,0\,;1/4\,]$ donc, puisque $x - x^2$ appartient à cet intervalle, d'après l'inégalité des accroissements finis, $f\left(x-x^2\right) - f(0) \leq e^{1/4} \times (x - x^2 - 0)$ donc $e^{x-x^2} \leq 1 + e^{1/4}(x-x^2)$.

Or, le discriminant de $(2+4x^2) - \left(1+e^{1/4}\left(x-x^2\right)\right)$ est égal à $\Delta = e^{1/2} - 4\times\left(4+e^{1/4}\right)\times 1 = -16 - 4e^{1/4} + e^{1/2}$ qui est strictement négatif (car $e^{1/2} < e < 3$). Ainsi, $(2+4x^2) - \left(1+e^{1/4}\left(x-x^2\right)\right)$ est du signe de son coefficient dominant, à savoir $a = 4+e^{1/4} > 0$, donc strictement positif. En d'autres termes :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,], \qquad 1+e^{1/4}\left(x-x^2\right) < 2+4x^2$$

Cela permet d'affirmer que φ'' est strictement positive sur $[\,0\,;1\,]$ donc sur $\mathbb{R}$.

φ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\varphi'(0) = 0$ alors φ' est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Il en découle que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et puisque $\varphi(0) = 0$, la fonction φ est positive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 43 : ✪✪✪ Soit $f :]\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ dérivable. Chercher toutes les implications vraies entre les assertions suivantes :

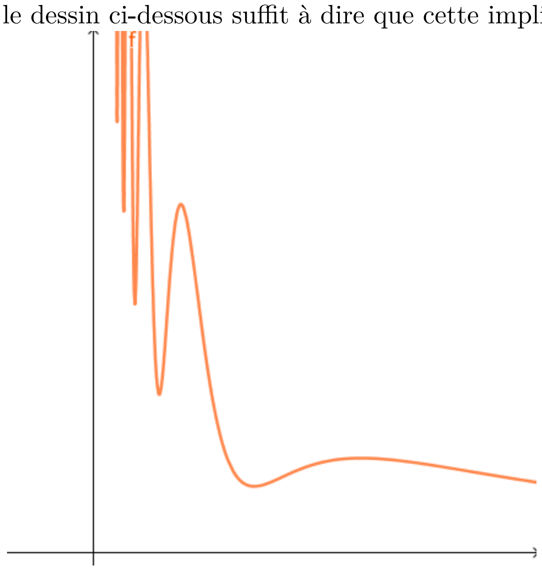
1. $|f(x)| \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$
2. $|f'(x)| \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$
3. f' n'est pas bornée sur $]\,0\,;1\,]$
4. f n'est pas bornée sur $]\,0\,;1\,]$

Correction :

- $1 \Rightarrow 2$: Faux. Prendre une fonction qui tend vers l'infini mais non monotone, qui « fait des vagues ». Par exemple, je vous laisse prouver de même que dans l'exercice 6 que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}\times\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

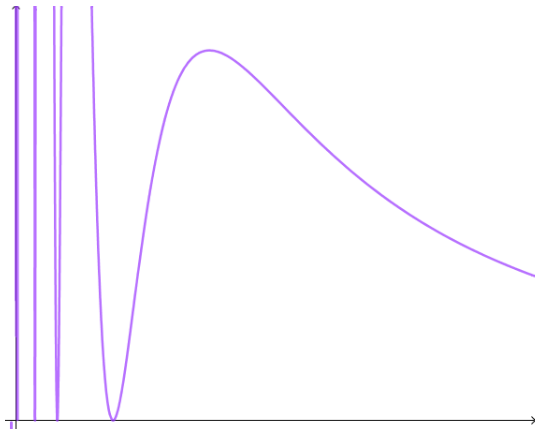
tend vers $+\infty$ en 0 mais a une dérivée qui s'annule sur tout voisinage de 0 donc $|f'|$ ne tend par vers $+\infty$ en 0. Même sans donner d'expression explicite, le dessin ci-dessous suffit à dire que cette implication est fausse



- $1 \Rightarrow 3$: Vrai. On montre comme en cours (ce n'est pas du cours, il faut savoir le redémontrer), par contraposée, que si f' est bornée, alors f est bornée.
- $1 \Rightarrow 4$: Vrai de façon triviale.
- $2 \Rightarrow 1$: Faux, il suffit de prendre la racine carrée.
- $2 \Rightarrow 3$: Vrai de façon triviale.
- $2 \Rightarrow 4$: Faux avec la racine carrée.
- $3 \Rightarrow 1$: Faux avec la racine carrée.
- $3 \Rightarrow 2$: Faux, il suffit de prendre f' la fonction donnée en contre-exemple ci-dessus (et donc f une primitive, qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter) : f' n'est pas bornée mais ne tend pas vers $+\infty$ en valeur absolue.
- $3 \Rightarrow 4$: Faux, prendre la racine carrée.
- $4 \Rightarrow 1$: Faux : prendre une fonction qui revient toujours à l'axe des abscisses, par exemple

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}\times\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

dont le graphe est donné ci-dessous.



- $4 \Rightarrow 2$: Faux avec le même exemple, f n'est pas bornée mais f' s'annule sur tout voisinage de 0.
- $4 \Rightarrow 3$: Vrai. On montre comme en classe, par contraposée, que si f' est bornée, alors f est bornée.

3 Suites récurrentes.

Exercice 44 : ✪ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{-u_n}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Comment obtenir une valeur approchée de sa limite à 10^{-3} près ?

Correction : On montre aisément que $f : x \mapsto e^{-x}$ admet un unique point fixe qui appartient à $[\,0\,;1\,]$ qu'on notera α dans la suite. Minorons la suite (u_n). Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\,e^{-1}\,;1\,\right]$. Le résultat est vrai au rang 0 puisque $u_0 = 1$. Soit $n \geq 0$. Supposons le résultat vrai au rang n. Alors $1 \geq u_n \geq e^{-1}$ et f est décroissante donc

$$f(1) = e^{-1} \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq f(e^{-1}) = e^{-e^{-1}}$$

Or, $-e^{-1} \leq 0$ donc $e^{-e^{-1}} \leq e^0 = 1$ ce qui clôt la récurrence. Or, f est dérivable sur $\left[\,e^{-1}\,;1\,\right]$ et, pour tout $x \in \left[\,e^{-1}\,;1\,\right]$, $|f'(x)| = e^{-x} \leq e^{-e^{-1}}$. Posons $M = e^{-e^{-1}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'IAF, puisque $f(\alpha) = \alpha$ (et $\alpha \in \left[\,e^{-1}\,;1\,\right]$ puisque $\alpha \leq 1$ donc $f(\alpha) = \alpha \geq f(1) = e^{-1}$)

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq M|u_n - \alpha|$$

Par une récurrence immédiate, pour tout n, $|u_n - \alpha| \leq M^n|u_0 - \alpha| = M^n|1 - \alpha|$. Or, $M \in \,]\,0\,;1\,[\,$ donc $M^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: d'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$. Pour avoir une valeur approchée à 10^{-3} près, il suffit de choisir n tel que $M^n \leq 10^{-3}$ car on aura alors

$$|u_n - \alpha| \leq M^n|1 - \alpha| \leq M^n \leq 10^{-3}$$

puisque $|1 - \alpha| \leq 1$. Il suffit de prendre n tel que $e^{n\ln(M)} \leq 10^{-3}$ i.e. $n\ln(M) \leq -3\ln(10)$ et $M < 1$ donc $\ln(M) < 0$: il suffit de prendre $n \geq \dfrac{-3\ln(10)}{\ln(M)}$.

Exercice 45 : ✪ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction : Comme dans l'exercice précédent après avoir montré par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [\,-1\,;1\,]$, intervalle sur lequel $|\cos'|$ est majoré par $M = |\sin(1)| < 1$.

Exercice 46 : ✪✪ Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.

1. Montrer que $[\,0\,;1\,]$ est stable par f.
2. Montrer que f admet un unique point fixe (dans $[\,0\,;1\,]$ donc puisque c'est le domaine de définition de f) qu'on notera α et qu'on ne cherchera pas à calculer (on pourra dériver deux fois f).

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [\,0\,;1\,]$ et pour tout $n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n \times |u_0 - \alpha|$$

et en déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

Correction :

1. f est dérivable sur $[\,0\,;1\,]$ car quotient de fonctions qui le sont (celle au dénominateur ne s'annulant pas). Soit $x \in [\,0\,;1\,]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x \times (x+2) - 1 \times e^x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{e^x \times (x+1)}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

On en déduit que f est croissante. Dès lors, $0 \leq f(0) = 1/2 \leq f(x) \leq f(1) = e/3 \leq 1$ donc $f(x) \in [\,0\,;1\,]$: $[\,0\,;1\,]$ est stable par f.

2. Soit g définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $g(x) = f(x) - x$. Alors g est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\,0\,;1\,]$. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. $g'(x) = f'(x) - 1$ donc

$$\begin{aligned} g''(x) &= f''(x) \\ &= \frac{(e^x(x+1) + e^x) \times (x+2)^2 - 2(x+2) \times e^x(x+1)}{(x+2)^4} \\ &= \frac{e^x(x+2)^3 - 2(x+2)(x+1)e^x}{(x+2)^4} \\ &= \frac{e^x(x+2) \times ((x+2)^2 - 2(x+1))}{(x+2)^4} \\ &= \frac{e^x(x+2)(x^2+2x+2)}{(x+2)^4} \end{aligned}$$

On en déduit que g'' est strictement positive donc f' est strictement croissante. Or, $g'(1) = f'(1) - 1 = 2e/9 - 1 < 0$ (car $e < 3$ donc $2e/9 < 6/9 < 1$) et g' est strictement croissante donc est strictement négative : g est strictement décroissante. De plus, $g(0) = f(0) = 1/2 > 0$ et $g(1) = f(1) - 1 < 0$, g est continue, strictement décroissante donc, d'après le théorème de la bijection, g s'annule une unique fois, f admet un unique point fixe.

3. On déduit de ce qui précède que f'' est strictement positive donc f' est strictement croissante : ci-dessous le tableau de variations de f'.

x	0	1
f'	$1/4$	$2e/9$

On conclut comme d'habitude (IAF, récurrence etc.).

Exercice 47 - Points fixes attractifs et répulsifs : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Soit $c \in I$ un point fixe de f tel que $|f'(c)| < 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel $k \in \,]\,0\,;1\,]$ et d'un voisinage V de c tel que f soit k-lipschitzienne sur $I \cap V$.
   (b) On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in V$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$.

2. Soit $c \in I$ un point fixe de f tel que $|f'(c)| > 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel $k > 1$ et d'un voisinage V de c tel que $|f'| \geq k$ sur $I \cap V$.
   (b) On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in V \backslash \{c\}$. Montrer qu'il existe $n \geq n_0$ tel que $u_n \notin V$. En d'autres termes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finit par sortir, par « être expulsée » du voisinage.

Correction :

1. (a) Erreur d'énoncé : il fallait lire : « $k \in [\,0\,;1\,[$ » (ouvert en 1 et pas en 0). Cela découle de la continuité de f' (puisque f est $\mathscr{C}^1$) : notons $k = \dfrac{1+|f'(c)|}{2} < 1$. f' étant continue, sur un voisinage de c, $|f'| \leq k$ donc f est k-lipschitzienne.

   (b) V est de la forme $[\,c-\varepsilon\,;c+\varepsilon\,]$ (c'est un voisinage de c). Montrons qu'il est stable par f. Soit $x \in V$. f étant k-lipschitzienne sur V, $|f(x)-f(c)| \leq k|x-c| \leq |x-c|$. Or, c est un point fixe donc $f(c) = c$ et $|x-c| \leq \varepsilon$ car $x \in V$ donc $|f(x)-c| \leq \varepsilon$ donc $f(x) \in V$: V est stable par f. Or, sur V, $|f'|$ est majorée par k et $k < 1$: on prouve comme d'habitude que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$ (on montre par récurrence que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - c| \leq k^{n-n_0} \times |u_{n_0} - c|$ ce qui permet de conclure).

2. (a) Idem, par continuité.

   (b) Raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in V$. Alors $|f'|$ est minorée par k sur V donc, par récurrence, $|u_n - c| \geq k^{n-n_0} \times |u_{n_0} - c|$ pour tout $n \geq n_0$. Puisque $k > 1$, le membre de droite tend vers $+\infty$ (puisque $u_{n_0} \neq c$, $|u_{n_0} - c| > 0$) donc $|u_n - c| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc u_n finit par sortir de V, ce qui est absurde, donc u_n finit par sortir de V.

4 Dérivées successives.

Exercice 48 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Correction : Si $a \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{N}$, une récurrence (finie) immédiate prouve que pour tout $k \in [\![\,0\,;\,d\,]\!]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la dérivée k-ième de $x \longmapsto (x-a)^d$ est $x \longmapsto d(d-1)\cdots(d-k+1)(x-a)^{d-k} = d!x^{d-k}/(d-k)!$ (par exemple, la dérivée seconde est $x \longmapsto d(d-1)(x-a)^{d-2}$) et, si $k \geq d+1$, sa dérivée k-ième est nulle.

Notons $g : x \longmapsto (x-a)^n$ et $h : x \longmapsto (x-b)^n$. D'après la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)h^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k} \times \frac{n!}{k!}(x-b)^k.$$

On reconnaît l'expression d'un coefficient binomial : $f^{(n)}(x) = n!\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (x-a)^{n-k}(x-b)^k$.

En particulier, si $a = b$, on a $f^{(n)}(x) = n!(x-a)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. Or, si $a = b$, alors $f(x) = (x-a)^{2n}$ donc (en prenant $d = 2n$ dans la relation préliminaire), $f^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{n!}(x-a)^n$, si bien que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{(2n)!}{n!}(x-a)^n = n!(x-a)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Cette relation est en particulier vraie si $x \neq a$ et alors on peut simplifier par $(x-a)^n$. On trouve finalement

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$$

Exercice 49 : ✪ Soit $n \geq 2$. Donner la dérivée n-ième de $x \mapsto (x^2+2)e^{2x}$.

Correction : Notons $f : x \mapsto (x^2+2)e^{2x}$, $g : x \mapsto x^2+2$ et $h : x \mapsto e^{2x}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors f est dérivable n fois. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Leibniz,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)h^{(n-k)}(x)$$

Or, $g^{(0)}(x) = x^2+2$, $g^{(1)}(x) = 2x$, $g^{(2)}(x) = 2$ et $g^{(k)}(x) = 0$ dès que $k \geq 3$: la somme ne contient que les termes $k = 0, 1, 2$ (ce qui ne veut pas dire que $n = 2$, attention). Par conséquent :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \binom{n}{0}g^{(0)}(x)h^{(n)}(x) + \binom{n}{1}g^{(1)}(x)h^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}g^{(2)}(x)h^{(n-2)}(x) \\ &= (x^2+2)\times 2^n e^{2x} + n\times 2x \times 2^{n-1}e^{2x} + \frac{n(n-1)}{2}\times 2\times 2^{n-2}e^{2x} \end{aligned}$$

Exercice 50 : ✪ Soit f dérivable n fois sur $\mathbb{R}^+$ bornée telle qu'il existe $L \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ telle que $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$. Montrer que $L=0$.

Correction : On rappelle que si f' tend vers une limite non nulle, alors f tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$ (cf. cours, mais ce n'est pas du cours, il faut savoir le redémontrer). On montre alors par une récurrence immédiate (faites-la !) que, pour tout n, si $f^{(n)}$ tend vers une limite $L\neq 0$, alors f tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$, ce qui permet de conclure.

Exercice 51 : ✪ Soit f dérivable n fois sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ tels que $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n+1})$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \,]\,a_1\,;a_{n+1}\,[$ tel que $f^{(n)}(\alpha) = 0$.

Correction : Montrons le résultat par récurrence.

- Si $n\geq 1$, notons H_n : « si f est dérivable n fois et s'il existe $a_1<\cdots<a_{n+1}$ tels que $f(a_1)=\cdots=f(a_{n+1})$, alors $f^{(n)}$ s'annule sur $]\,a_1\,;a_{n+1}\,[$ ».
- H_1 est vraie d'après le théorème de Rolle : si f est dérivable et s'il existe $a_1 < a_2$ tels que $f(a_1)=f(a_2)$, alors en particulier f est continue sur $[\,a_1\,;a_2\,]$ et dérivable sur $]\,a_1\,;a_2\,[$ et $f(a_1)=f(a_2)$ donc f' s'annule sur $]\,a_1\,;a_2\,[$ d'après le théorème de Rolle.
- Soit $n\geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Supposons donc que f soit dérivable $n+1$ fois et qu'il existe $a_1<\cdots<a_{n+2}$ tels que $f(a_1)=\cdots=f(a_{n+2})$. Pour tout $i\in[\![\,1\,;\,n+1\,]\!]$, f est continue sur $[\,a_i\,;a_{i+1}\,]$, dérivable sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ et $f(a_i)=f(a_{i+1})$: d'après le théorème de Rolle, il existe $b_i\in\,]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ tel que $f'(b_i)=0$. Cela nous donne $b_1<\cdots<b_{n+1}$ tels que $f'(b_1)=\cdots=f'(b_{n+1})=0$, et f' est dérivable n fois car f est dérivable $n+1$ fois. Par hypothèse de récurrence, il existe $\alpha\in\,]\,b_1\,;b_{n+1}\,[$ tel que $(f')^{(n)}(\alpha)=0$. Or, $a_1<b_1<\alpha<b_{n+1}<a_{n+2}$ donc $\alpha\in\,]\,a_1\,;a_{n+2}\,[$ et $(f')^{(n)}(\alpha)=f^{(n+1)}(\alpha)$ ce qui prouve que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n\geq 1$.

Exercice 52 : ✪✪ Si $n\in\mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonctions $\varphi_n : x\mapsto x^n\ln(x)$ et $f_n : x\mapsto x^n$ et on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Justifier que φ_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Exprimer ${\varphi_{n+1}}'$ en fonction de φ_n et de f_n.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x>0$, ${\varphi_n}^{(n)}(x) = n!\times(\ln(x)+H_n)$.
4. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Correction :

1. φ_n est $\mathscr{C}^\infty$ car produit de fonctions qui le sont.
2. Soit $x>0$.

$$\begin{aligned} {\varphi_{n+1}}'(x) &= (n+1)x_n\ln(x) + x^{n+1}\times\frac{1}{x} \\ &= (n+1)\varphi_n(x)+x^n \end{aligned}$$

3. Raisonnons par récurrence.
   - Si $n\in\mathbb{N}^*$, notons P_n : « $\forall x>0, {\varphi_n}^{(n)}(x) = n!\times(\ln(x)+H_n)$ » (la notation H_n est déjà prise)
   - Soit $x>0$. $\varphi_1(x) = x\ln(x)$ donc

$$\begin{aligned} {\varphi_1}'(x) &= \ln(x)+x\times\frac{1}{x} \\ &= \ln(x)+1 \\ &= 1!\times(\ln(x)+H_1) \end{aligned}$$

   c'est-à-dire que P_1 est vraie.

- Soit $n \geq 1$. Supposons P_n vraie et prouvons que P_{n+1} est vraie. Soit $x > 0$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} {\varphi_{n+1}}^{(n+1)}(x) &= \left({\varphi_{n+1}}'\right)^{(n)}(x) \\ &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^{\,n}}\left((n+1)\varphi_n(x) + x^n\right) \end{aligned}$$

(rappelons que $x^{(n+1)}$ n'a aucun sens). Par linéarité de la dérivation, puis par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} {\varphi_{n+1}}^{(n+1)}(x) &= (n+1){\varphi_n}^{(n)}(x) + \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^{\,n}}\left(x^n\right) \\ &= (n+1) \times (n! \times (\ln(x) + H_n)) + n! \end{aligned}$$

Puisque la dérivée n-ième de $x \mapsto x^n$ vaut $n!$. Finalement :

$$\begin{aligned} {\varphi_{n+1}}^{(n+1)}(x) &= (n+1)!(\ln(x) + H_n) + n! \\ &= (n+1)!\left(\ln(x) + H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) + n! \\ &= (n+1)!(\ln(x) + H_{n+1}) - n! + n! \end{aligned}$$

Finalement, P_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

4. D'après la question précédente, ${\varphi_n}^{(n)}(1) = n! \times H_n$. D'autre part, notons $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto x^n$. D'après la formule de Leibniz,

$$ {\varphi_n}^{(n)}(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(1) g^{(n-k)}(1) $$

Or, si $k = 0$, $f^{(k)}(1) = \ln(1) = 0$ donc la somme va de 1 à n. De plus, si $k \geq 1$, on a d'une part (on peut le prouver par récurrence immédiate)

$$ f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} $$

donc $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1} \times (k-1)!$, et d'autre part :

$$ g^{(n-k)}(x) = n(n-1)\cdots(k+1)x^k = \frac{n!}{k!}x^k $$

si bien que $g^{(n-k)}(1) = n!/k!$. On en déduit que

$$\begin{aligned} {\varphi_n}^{(n)}(1) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \times \frac{(k-1)!n!}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \times \frac{n!}{k} \end{aligned}$$

et on conclut en disant que $H_n = {\varphi_n}^{(n)}(1)/n!$ (voir ci-dessus).

Exercice 53 : ✪✪ Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = 0\}$. Montrer que E et $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \backslash E$ sont stables par produit.

Correction : Soient f et g appartenant à E. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la formule de Leibniz (f et g sont $\mathscr{C}^\infty$ donc $f \times g$ également) :

$$ (f \times g)^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(0) \times g^{(k-i)}(0) $$

Or, pour tout i, $f^{(i)}(0) = 0$ et $g^{(k-i)}(0) = 0$ donc $(f \times g)^{(k)}(0) = 0$: $f \times g \in E$, E est stable par produit. Supposons à présent que f et g n'appartiennent pas à E : il existe donc n_1 et n_2 tels que $f^{(n_1)}(0) \neq 0$ et $g^{(n_2)}(0) \neq 0$. Posons $k_1 = \min\{n \,|\, f^{(n)}(0) \neq 0\}$, $k_2 = \min\{n \,|\, g^{(n)}(0) \neq 0\}$ (i.e. k_1 et k_2 sont les premiers indices pour lesquels $f^{(n)}(0) \neq 0$ et idem pour g) et $k = k_1 + k_2$. Dès lors, toujours d'après la formule de Leibniz :

$$(f\times g)^{(k)}(0)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}(0)\times g^{(k-i)}(0)$$

Si $i<k_1$, alors $f^{(i)}(0)=0$ (k_1 est le premier pour lequel la valeur est non nulle) et si $i>k_1$, alors $k-i\leq k-k_1=k_2-1<k_2$ si bien que $g^{(k-i)}(0)=0$. Dans tous les cas, $f^{(i)}(0)\times g^{(k-i)}(0)=0$ pour tout $i\neq k_1$ donc il ne reste que le terme d'indice $i=k_1$ dans la somme, c'est-à-dire que

$$(f\times g)^{(k)}(0)=\binom{k}{k_1}f^{(k_1)}(0)\times g^{(k-k_1)}(0)=\binom{k}{k_1}f^{(k_1)}(0)\times g^{(k_2)}(0)\neq 0$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 54 : ✪✪ Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0)=0$ et que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante de réels positifs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n\geq 0, f^{(n)}(x_n)=0$. On pourra utiliser l'exercice 34.

Correction : Posons $x_0=0$. D'après l'exercice 34, il existe $x_1>0$ tel que $f'(x_1)=0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que f'' ne s'annule pas sur $]\,x_1\,;+\infty\,[$. Puisque f est $\mathscr{C}^\infty$, elle est $\mathscr{C}^2$ donc f'' est continue, et puisqu'elle ne s'annule pas, elle est de signe constant sur $]\,x_1\,;+\infty\,[$. Sans perte de généralité, on suppose que f'' est strictement positive sur cet intervalle, si bien que f' est strictement croissante. Elle admet donc une limite L strictement positive (ou égale à $+\infty$) en $+\infty$. On montre comme dans le cours (à savoir faire !) que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ ce qui est absurde. Ainsi, f'' s'annule sur $]\,x_1\,;+\infty\,[$: il existe $x_2>x_1$ tel que $f''(x_2)=0$. Il suffit ensuite d'itérer le procédé. Avant cela, prouvons un résultat par récurrence.

- Si $n\geq 1$, notons H_n : « si $f^{(n)}$ admet une limite L finie ou infinie en $+\infty$, alors $L=0$ ».
- On montre comme dans le cours que H_1 est vraie.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Supposons que $f^{(n+1)}$ admette une limite finie ou infinie qu'on note L. Si $L\neq 0$ alors, comme dans le cours, $f^{(n)}$ tend vers $\pm\infty$ ce qui est absurde par hypothèse de récurrence. Alors $L=0$, ce qui clôt la récurrence.

Il suffit d'itérer le procédé précédent. Faisons-le proprement : soit $n\geq 2$, supposons $x_0<\cdots<x_n$ construits. Si $f^{(n+1)}$ ne s'annule pas sur $]\,x_n\,;+\infty\,[$, elle y est continue donc est de signe constant donc $f^{(n)}$ y est strictement monotone, et puisque $f^{(n)}(x_n)=0$, $f^{(n)}$ admet en $+\infty$ une limite fini ou infinie non nulle, ce qui contredit le résultat précédent : $f^{(n+1)}$ s'annule sur $]\,x_n\,;+\infty\,[$ ce qui permet de construire x_{n+1}. On définit bien ainsi une suite (x_n) qui convient.

Exercice 55 : ✪✪ Soient $x\not\equiv\pi/2[\pi]$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $a_n=\dfrac{\tan^{(n)}(x)}{n!}$. Montrer que

$$\forall n\geq 1,\qquad (n+1)a_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$$

En déduire les valeurs de $a_0,\dots,a_7$ lorsque $x=0$.

Correction : Soit $n\geq 1$. On a

$$\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\tan^{(k)}(x)}{k!}\times\frac{\tan^{(n-k)}(x)}{(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tan^{(k)}(x)\times\tan^{(n-k)}(x)=\frac{(\tan\times\tan)^{(n)}(x)}{n!}$$

d'après la formule de Leibniz. Or, $\tan^2=\tan'-1$ et $1^{(n)}=0$ (puisque $n\geq 1$) donc

$$\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}=\frac{(\tan^2)^{(n)}(x)}{n!}=\frac{(\tan'-1)^{(n)}(x)}{n!}=\frac{(\tan')^{(n)}(x)}{n!}=(n+1)\times\frac{\tan^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}=(n+1)a_{n+1}.$$

Pour la dernière partie de l'énoncé, oubli : on cherche $a_0,\dots,a_7$ lorsque $x=0$. On a $a_0=1$ et $a_1=\tan(0)=0$. D'après ce qui précède avec $n=1$:

$$2a_2=a_0a_1+a_1a_0=0$$

De même avec $n=2$:

$$3a_3=a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0=1$$

donc $a_3=1/3$. On trouve de même $a_4=a_6=0$, $a_2=2/15$ et $a_7=17/315$.

Exercice 56 - Fonctions absolument et complètement monotones : ✪✪✪ Toutes les fonctions de cet exercice sont $\mathscr{C}^\infty$. Une fonction f définie sur I est dite

- absolument monotone (en abrégé : AM) si $f^{(k)}$ est positive (au sens large) pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- complètement monotone (en abrégé : CM) si $(-1)^k f^{(k)}$ est positive (au sens large), c'est-à-dire si $f^{(k)}$ est du signe de $(-1)^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la fonction exponentielle est AM sur $\mathbb{R}$ et que la fonction inverse est CM sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. On suppose dans cette question que $I = \mathbb{R}^{+*}$, que $\alpha \in \mathbb{R}$ et on définit sur I la fonction f par $f(x) = x^\alpha$. Montrer que f est AM sur I si et seulement si $\alpha \in \mathbb{N}$, puis donner toutes les valeurs de α pour que f soit CM sur I.
3. Montrer, à l'aide de l'exercice 55 que la tangente est AM sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. Montrer que l'ensemble des fonctions AM sur I est stable par somme.
5. Montrer que le produit de deux fonctions AM est AM. Et le produit de deux fonctions CM ? On se donne dans la suite de cet exercice une fonction AM sur I, notée f.
6. (a) Montrer que f est positive et monotone. Et si f est CM ?
   (b) Donner une fonction $\mathscr{C}^\infty$, positive, croissante, mais non AM.
   (c) On suppose dans cette question uniquement que $I =]\,a\,;b\,[$. Montrer que f admet une limite finie en a. En déduire que f est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;b\,[$. Le résultat est-il aussi valable en b ?
7. On suppose que I est symétrique par rapport à 0 et on définit sur I la fonction g par $g(x) = f(-x)$.
   (a) Montrer que f est AM si et seulement si g est CM.
   (b) En déduire toutes les fonctions paires AM sur I.
8. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions AM. Montrer que $g \circ f$ est AM.

Correction :

1. Pour tout k, la dérivée k^e de l'exponentielle est elle-même, et est positive. Ainsi, l'exponentielle est AM sur $\mathbb{R}$. Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, si on note f la fonction inverse :
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times (n-1)!}{x^{n+1}}$$
et cette quantité est bien du même signe que $(-1)^n$ (car $x > 0$, on est sur $\mathbb{R}_+^*$), ce qui est le résultat voulu.
2. De même, par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$
$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))x^{\alpha-n}$$
Cette formule est valable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, même si $\alpha \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, le facteur devant la puissance de x est nul pour n assez grand (plus précisément pour $n \geq \alpha+1$). Ainsi, f est AM sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1)) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, $\alpha - (n-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. Ainsi, des termes strictement négatifs finissent par apparaître dans ce produit. Dès lors, la seule possibilité pour que ce produit soit positif ou nul **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ est qu'un des termes soit nul avant qu'un terme strictement négatif apparaisse, c'est-à-dire s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha - (n-1) = 0$. En d'autres termes, la seule possibilité est d'avoir $\alpha \in \mathbb{N}$. Montrons cela un peu plus rigoureusement.
   - **Premier cas :** $\alpha \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n < \alpha+1, \alpha-(n-1) > 0$ et donc $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1)) > 0$ (c'est un produit de termes strictement positifs). De plus, si $n \geq \alpha+1$, ce produit est nul car il contient $(\alpha-(n_0-1)) = 0$ avec $n_0 = \alpha+1 \leq n$. Ce produit est donc également positif ou nul, et f est AM.
   - <u>Deuxième cas : $\alpha \notin \mathbb{N}$.</u> De même, pour tout $n < \alpha+1, \alpha-(n-1) > 0$ et donc $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1)) > 0$ et si n est le plus petit entier strictement supérieur à $\alpha+1$ ($n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ pour être précis) alors $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1)) < 0$ (car le dernier terme est strictement négatif et tous les autres sont strictement positifs) et la fonction n'est pas AM. Le cas $n = \alpha+1$ ne se produit pas car α n'est pas un entier, et on passe directement de $n < \alpha+1$ à $n > \alpha+1$.

   En conclusion, f est AM si et seulement si $\alpha \in \mathbb{N}$. Cherchons à présent les valeurs de α pour que f soit CM sur I. Tout d'abord, f doit être positive, ce qui est toujours le cas. Ensuite, f' doit être négative sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ qui est du signe de α. Une condition nécessaire est donc que α soit négatif ou nul. Montrons que c'est une condition suffisante, c'est-à-dire que si $\alpha \leq 0$ alors f est CM. Supposons donc que α soit négatif ou nul. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous les termes du produit $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))$ sont négatifs et ce produit est donc du même signe que $(-1)^n$ (car il contient n termes). Dès lors, $(-1)^n \times f$ est positive sur I, ce qui est le résultat voulu. Finalement, f est CM si et seulement si $\alpha \leq 0$.
3. Par une récurrence forte immédiate (faite dans le chapitre 1), $a_n \geq 0$ pour tout n (on reprend les notations de l'exercice 55) donc $\tan^{(n)}(x) \geq 0$ pour tout n (et tout $x \in [\,0\,;\pi/2\,[$) : la tangente est AM.
4. Soient f et g deux fonctions AM sur I. Pour tout $n \in \mathbb{N}, (f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \geq 0$ par hypothèse sur f et g. Ainsi, $f+g$ est AM, c'est-à-dire que l'ensemble des fonctions AM est stable par somme.

5. Soient f et g deux fonctions AM. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Leibniz,

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} \geq 0$$

car, par hypothèse, $f^{(k)} \geq 0$ et $g^{(n-k)} \geq 0$ pour tout k (car f et g sont AM). Ainsi, $f \times g$ est AM, ce qui est le résultat voulu : le produit de deux fonctions AM est AM. On suppose à présent que f et g sont CM. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}(-1)^n \times (f \times g)^{(n)} &= (-1)^n \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{(k)} \times (-1)^{n-k} g^{(n-k)}\end{aligned}$$

et la dernière somme est positive par hypothèse sur f et g. $f \times g$ est par conséquent CM : le produit de deux fonctions CM est CM.

6. (a) Par hypothèse, $f^{(0)} = f \geq 0$ et $f^{(1)} = f' \geq 0$, donc f est positive et croissante (donc monotone). De plus, si f est CM, $f^{(0)} = f \geq 0$ et $f^{(1)} = f' \leq 0$ donc f est positive et décroissante (donc monotone).
   (b) D'après la question 2, en prenant $\alpha = 1/2 \notin \mathbb{N}$, la racine carrée est positive, croissante, mais non AM sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) f étant croissante et minorée (car positive), f admet une limite finie en a, notée L. Ainsi, on peut prolonger f par continuité en a en posant $f(a) = L$. On cherche à présent à appliquer le théorème la limite de la dérivée, version $\mathscr{C}^1$. Pour cela, il ne reste qu'à montrer que f' admet une limite finie en a : il suffit de faire exactement la même chose ! f' est positive (donc minorée) et croissante (car $f'' \geq 0$) donc admet une limite finie en a, notée L'. En d'autres termes : f est continue sur $[\,a\,;b\,[$, $\mathscr{C}^1$ sur $]\,a\,;b\,[$ et f' admet une limite finie en a. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;b\,[$. Le résultat n'est pas forcément valable en b. Par exemple, si on prend $f = \tan$ (AM d'après la question 3), $a = 0$ et $b = \pi/2$, $f(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} +\infty$.

7. (a) Tout d'abord, pour tout $x \in I, g'(x) = -f'(-x)$. Par une récurrence immédiate, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$. Par conséquent, f est AM
   - si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$.
   - si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I, f^{(n)}(-x) \geq 0$ (car si c'est vrai pour tout x, c'est aussi vrai pour $-x$).
   - si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I, (-1)^n \times (-1)^n \times f^{(n)}(-x) \geq 0$ (car $(-1)^n \times (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$).
   - si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I, (-1)^n g^{(n)}(x) \geq 0$.
   - si et seulement si g est CM.

   (b) Soit f une fonction paire AM. En particulier, $f' \geq 0$. Ensuite, d'après la question précédente, $g = f$ est CM, ce qui implique que $f' \leq 0$ et donc $f' = 0$: f est constante (et positive car est AM). La réciproque étant immédiate : les seules fonctions paires AM sur I sont les fonctions constantes positives.

8. Cette question mérite une troisième étoile... Raisonnons par récurrence.
   - Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « Pour toutes fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ AM, la dérivée n-ième de $g \circ f$ est positive ».
   - Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ AM. Alors g est positive donc $g \circ f = (g \circ f)^{(0)}$ est positive : H_0 est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H_0, \dots, H_n$ vraies (on fait donc une récurrence forte). Soient donc $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ AM. Notons $h = g \circ f$. Alors $h' = f' \times g' \circ f$ donc, d'après la formule de Leibniz :

   $$h^{(n+1)} = (h')^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f')^{(k)} \times (g' \circ f)^{(n-k)}$$

   Or, pour tout $k \in [\![\, 0\,;n\,]\!]$, $(f')^{(k)} = f^{(k+1)} \geq 0$ car f est AM. L'astuce est d'appliquer l'hypothèse de récurrence avec g' et f à la place de g et f (penser à « truc »), qui sont bien AM. Par HR, toutes les dérivées de l'ordre 0 à l'ordre n de $g' \circ f$ sont positives donc $(g' \circ f)^{(n-k)} \geq 0$ pour tout $k \in [\![\, 0\,;n\,]\!]$. Par produit et par somme, $h^{(n+1)} \geq 0$ ce qui clôt la récurrence.

Exercice 57 : ✪✪

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel $\varphi(x)$ tel que $\displaystyle\int_x^{\varphi(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.
2. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que

$$f_x : y \mapsto \int_x^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est dérivable (c'est l'unique primitive de $t \mapsto e^{t^2}$ qui s'annule en x) de dérivée $t \mapsto e^{t^2} > 0$ donc est strictement croissante. Par croissance de l'intégrale, pour tout $y \geq x$,

$$f_x(y) \geq \int_x^y \mathrm{d}t\ = y - x$$

Or, $y - x \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty$ donc, d'après le théorème de minoration, $f_x(y) \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty$. De même, si $y \leq x$ (pour appliquer le théorème de croissance de l'intégrale, les bornes doivent être dans l'ordre croissant) :

$$\int_y^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\ \geq \int_y^x \mathrm{d}t\ = x - y$$

donc

$$f_x(y) = -\int_y^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\ \leq -(x-y) = y - x$$

Cette fois, à l'aide du théorème de majoration, $f_x(y) \xrightarrow[y \to -\infty]{} -\infty$. f_x étant continue (car dérivable) strictement décroissante, d'après le théorème de la bijection, f_x est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc il existe un unique réel (noté $\varphi(x)$) tel que $f_x(\varphi(x)) = 1$.

2. Notons

$$F : y \mapsto \int_0^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

On sait déjà (en prenant $x = 0$ dans la question précédente) que F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de $\varphi(x)$:

$$\int_x^{\varphi(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t\ = 1$$

donc

$$\int_0^{\varphi(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t\ - \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\ = 1$$

En d'autres termes, $F(\varphi(x)) - F(x) = 1$ i.e. $\varphi(x) = F^{-1}(1 - F(x))$. F étant $\mathscr{C}^\infty$ de dérivée qui ne s'annule pas, F^{-1} est $\mathscr{C}^\infty$ donc φ est $\mathscr{C}^\infty$ par composition.

Exercice 58 : ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la classe de la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - x^2\right)^n & \text{si } x \in [\,-1\,;1\,] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Correction : f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ (et ses dérivées successives sont bornées sur $]\,-1\,;1\,[$, ce sera utile dans la suite). La fonction f est paire donc la situation est la même en 1 et en -1. Plus précisément, si $p \in \mathbb{N}$, alors f_n est $\mathscr{C}^p$ si et seulement si ${f_n}^{(p)}$ est continue en 1.

- Si $n \geq 1$, notons H_n : « f_n est $\mathscr{C}^{n-1}$ et ${f_n}^{(n)}$ admet une limite finie non nulle en 1^- et donc f_n n'est pas $\mathscr{C}^n$. »
- f_1 est la fonction définie par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - x^2\right) & \text{si } x \in [\,-1\,;1\,] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre aisément que f_1 est continue en 1 (limite à droite égale à la limite à gauche égale à la valeur de la fonction en 1) mais n'est pas dérivable en 1. En effet, f_1 est dérivable à droite en 1 de dérivée (à droite) nulle, et f_1 est dérivable à gauche de dérivée (à gauche) égale à -2 donc f_1 n'est pas dérivable en 1 donc n'est pas $\mathscr{C}^1$: H_1 est vraie.

- Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$. $fn+1(x) = f_n(x) \times (1-x^2)$. Par hypothèse de récurrence, f_n est $\mathscr{C}^{n-1}$ donc, par produit, f_{n+1} est $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$. Supposons à présent que $x \in \,]-1\,;1\,[$. Notons $g(x) = 1-x^2$. D'après la formule de Leibniz (f_n est $\mathscr{C}^\infty$ donc dérivable n fois sur $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$) :

$$f_{n+1}{}^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} g^{(k)}(x) f_n{}^{(n-k)}(x)$$

Or, $g^{(k)}(x) = 0$ si $k \geq 3$ donc

$$f_{n+1}{}^{(n)}(x) = (1-x^2)\times f_n{}^{(n)}(x) + n \times -2x \times f_n{}^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \times -2 \times f_n{}^{(n-2)}(x)$$

Par hypothèse de récurrence, $f_n{}^{(n)}$ admet une limite finie non nulle en 1^- et f_n est $\mathscr{C}^{n-1}$ donc $f_n{}^{(n-1)}$ et $f_n{}^{(n-2)}$ sont continues en 1 donc tendent vers 0 en 1^- (car tendent vers 0 en 1^+). On en déduit que $f_{n+1}{}^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$. C'est évidemment aussi le cas en 1^+ donc en 1. De plus, $f_{n+1}{}^{(n-1)}$ est continue d'après ce qui précède, et $f_{n+1}{}^{(n)}$ admet une limite en 1 donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée (version $\mathscr{C}^1$), $f_{n+1}{}^{(n-1)}$ est $\mathscr{C}^1$ donc f_{n+1} est $\mathscr{C}^n$. De même que ci-dessus :

$$f_{n+1}{}^{(n+1)}(x) = (1-x^2)\times f_n{}^{(n+1)}(x) + n \times -2x \times f_n{}^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \times -2 \times f_n{}^{(n-1)}(x)$$

Le premier (car toutes les dérivées de f_n sont bornées sur $]-1\,;1\,[$) et le troisième terme tendent vers 0 quand $x \to 1^-$ et le deuxième vers une limite finie non nulle donc $f_{n+1}{}^{(n+1)}$ a une limite finie non nulle en 1^- ce qui clôt la récurrence.

Exercice 59 : ✪✪✪ Trouver toutes les fonctions f dérivables n fois sur $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} = 0$.

Correction : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable n fois. L'idée est de faire comme dans le binôme de Newton quand il n'y a qu'une variable, on dit que la deuxième vaut 1, sauf que cela ne fonctionne pas ici : cela ne fonctionne dans le cas réel que parce que toutes les puissances de 1 valent 1 (c'est-à-dire $1^{n-k} = 1$ pour tout k). Il suffit de prendre une fonction g telle que toutes les dérivées de g soient égales à g, c'est-à-dire telles que $g^{(n-k)} = g$ pour tout k, et on pense évidemment à l'exponentielle (une espèce d'élément neutre de la dérivation, si on veut). Une fois cette idée trouvé, l'exercice ne pose plus de difficulté. La première équivalence vient du fait que l'exponentielle ne s'annule jamais, la troisième de la formule de Leibniz et la dernière de l'équivalence : $f^{(n)} = 0$ si et seulement si f est une fonction polynôme de degré $\leq n-1$.

$$\begin{aligned}
f \text{ convient} \quad &\iff \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} \times \exp = 0 \\
&\iff \quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} \times \exp^{(n-k)} = 0 \\
&\iff \quad (f\times \exp)^{(n)} = 0 \\
&\iff \quad \exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], f \times \exp = P
\end{aligned}$$

Prouvons en effet que $f^{(n)} = 0$ si et seulement si f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Par récurrence : une fonction est de dérivée nulle si et seulement si elle est constante, si et seulement si elle est polynomiale de degré inférieur ou égal à 0, donc le résultat est vrai au rang 1. Soit $n \geq 1$, supposons le résultat vrai au rang n et prouvons qu'il est vrai au rang $n+1$. $f^{(n+1)} = 0$ si et seulement si la dérivée n-ième de f' est constante. D'après l'hypothèse de récurrence, c'est le cas si et seulement si f' est polynomiale de degré $\leq n$ donc est de la forme $x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_0$. En primitivant, $f^{(n+1)} = 0$ si et seulement si f est de la forme $x \mapsto a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + c_0 x + K$ donc si et seulement si f est polynomiale de degré n, ce qui clôt la récurrence.

En conclusion, f est solution si et seulement s'il existe P fonction polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x) \times e^{-x}$ (en divisant la dernière égalité par e^x).

Exercice 60 - Pour les amateurs de calculs et de sommes : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$, et soit $g : x \mapsto f(1/x)$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^n$ et que pour tout $x > 0$:

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2n-p}}\binom{n}{p} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Correction : g est $\mathscr{C}^n$ car composée de fonctions $\mathscr{C}^n$. Raisonnons par récurrence.

- Si $n \geq 1$, notons H_n l'égalité de l'énoncé.

- D'une part,

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \times f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

D'autre part, lorsque $n = 1$:

$$\begin{aligned}(-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2n-p}} \binom{n}{p} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right) &= (-1) \times \frac{1-0}{x^{2\times 1-0}} \binom{1}{0} f^{(1-0)}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= g'(x)\end{aligned}$$

c'est-à-dire que H_1 est vraie.

- Soit $n \geq 1$. Supposons que H_n soit vraie, et prouvons que H_{n+1} est vraie. Supposons donc f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Par hypothèse de récurrence,

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2n-p}} \binom{n}{p} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Dès lors, en dérivant :

$$\begin{aligned}g^{(n+1)}(x) &= (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p) \times -(2n-p)}{x^{2n-p+1}} \binom{n}{p} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2n-p}} \binom{n}{p} \times \frac{-1}{x^2} f^{(n-p+1)}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p) \times (2n-p)}{x^{2n-p+1}} \binom{n}{p} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2n-p+2}} \binom{n}{p} \times f^{(n-p+1)}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p) \times (2n-p)}{x^{2n-p+1}} \binom{n}{p} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\quad + (-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2(n+1)-p}} \binom{n}{p} \times f^{(n+1-p)}\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Dans la première somme, faisons le changement d'indice $k = p+1$, $p = k-1$.

$$\begin{aligned}g^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k) \times (2n-k+1)}{x^{2n-k+2}} \binom{n}{k-1} f^{(n-k+1)}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\quad + (-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2(n+1)-p}} \binom{n}{p} \times f^{(n+1-p)}\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

L'indice étant muet, mettons en facteur les termes de k allant de 1 à $n-1$ qui apparaissent dans les deux sommes :

$$\begin{aligned}g^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k)}{x^{2(n+1)-k}} \times \left[(2n-k+1)\binom{n}{k-1} + (n-k)\binom{n}{k} \right] f^{(n+1-k)}\left(\frac{1}{k}\right) \\ &\quad \underbrace{+(-1)^{n+1} \times \frac{(n-1)(n-2)\cdots 1 \times (n+1)}{x^{n+2}} \times n \times f'\left(\frac{1}{x}\right)}_{k=n} + \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{1}{x^{2(n+1)}} \times f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)}_{p=0}\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
(2n-k+1)\binom{n}{k-1}+(n-k)\binom{n}{k} &= \frac{n!(2n-k+1)}{(k-1)!(n+1-k)!}+\frac{n!}{k!(n-k-1)} \\
&= \frac{n!(2n-k+1)\times k+n!\times(n-k)(n-k+1)}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{n!(2nk-k^2+k+n^2-2nk-k+k^2)}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{n!\times(n+1)\times n}{k!(n+1-k)!} \\
&= n\binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
g^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k)}{x^{2(n+1)-k}}\times n\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}\left(\frac{1}{k}\right) \\
&\quad +(-1)^{n+1}\times\frac{(n-1)(n-2)\cdots1\times(n+1)}{x^{n+2}}\times n\times f'\left(\frac{1}{x}\right)+(-1)^{n+1}\frac{1}{x^{2(n+1)}}\times f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n+1-1)(n+1-2)\cdots(n+1-k)}{x^{2(n+1)-k}}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}\left(\frac{1}{k}\right) \\
&\quad +(-1)^{n+1}\times\frac{(n-1)(n-2)\cdots1\times(n+1)}{x^{n+2}}\times n\times f'\left(\frac{1}{x}\right)+(-1)^{n+1}\frac{1}{x^{2(n+1)}}\times f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Le dernier terme correspond au terme pour $k=0$ et l'avant dernier au terme pour $k=n$ (le $n+1$ est égal au coefficient binomial $\binom{n+1}{n}$) si bien que

$$g^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1-1)(n+1-2)\cdots(n+1-k)}{x^{2(n+1)-k}}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}\left(\frac{1}{k}\right)$$

ce qui permet de conclure.

5 Fonctions à valeurs complexes.

Exercice 61 : ✪ Soit $n\in\mathbb{N}$. Donner la dérivée n-ième de $\sin^5$.

Correction : Soit $x\in\mathbb{R}$. Notons $f(x)=\sin^5(x)$. D'après la formule d'Euler et le triangle de Pascal (et en se souvenant que $i^5=i$)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 \\
&= \frac{e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}}{32i} \\
&= \frac{\sin(5x)}{32}-\frac{5\sin(3x)}{32}+\frac{10\sin(x)}{32}
\end{aligned}$$

Dès lors, toujours en utilisant le fait que, pour tout n et pour tout u, $\sin^{(n)}(u)=\sin(u+n\pi/2)$, on obtient que :

$$f^{(n)}(x)=\frac{5^n\sin(5x+n\pi/2)}{32}-\frac{5\times3^n\sin(3x+n\pi/2)}{32}+\frac{10\sin(x+n\pi/2)}{32}$$

Exercice 62 : ✪ Soit $n\in\mathbb{N}$. Redémontrer le fait que la dérivée n-ième du sinus est $x\mapsto\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ à l'aide de l'exponentielle complexe.

Correction : Notons $f:x\mapsto e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors, d'une part,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= i^n e^{ix} \\ &= e^{in\pi/2} \times e^{ix} \\ &= e^{i(x+n\pi/2)} \\ &= \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + i\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

et, d'autre part, $f^{(n)}(x) = \cos^{(n)}(x) + i\sin^{(n)}(x)$ ce qui permet de conclure (deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales).

Exercice 63 : ✪ Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable. Montrer que $\overline{f}$ est dérivable sur I, et que $|f|$ est dérivable en tout point en lequel f ne s'annule pas.

Correction : f est dérivable donc $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont dérivables donc $\overline{f} = \Re(f) - i\Im(f)$ est dérivable, et

$$|f| = \sqrt{\Re(f)^2 + \Im(f)^2}$$

est dérivable là où f ne s'annule pas, car alors $\Re(f)^2 + \Im(f)^2 > 0$ et la racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 64 : ✪✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\{e^{if(n)} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le cercle unité.
2. Montrer que $\{\sin(\sqrt{n}) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\cos(\ln(n)) \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ sont denses dans $[-1\,;1]$.

Correction :

1. L'idée est simple : f tend vers $+\infty$ donc $e^{if(n)}$ va faire une infinité de tours autour du cercle, et puisque f' tend vers 0, alors les $e^{if(n)}$ vont être de plus en plus rapprochés, donc ces éléments vont former un ensemble dense dans $\mathbb{U}$.

   Prouvons le rigoureusement. Cet ensemble est évidemment inclus dans le cercle unité. Pour conclure, il suffit de prouver que pour tout $z \in \mathbb{U}$, pour tout ε, il existe n tel que $|z - e^{if(n)}| \leq \varepsilon$ (définition de la densité sur $\mathbb{C}$: il existe des éléments de l'ensemble aussi près qu'on veut de tout élément de $\mathbb{U}$). Soient donc $z \in \mathbb{U}$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$:

   $$\exists A > 0, \forall x \geq A, |f'(x)| \leq \varepsilon$$

   $z \in \mathbb{U}$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\alpha}$. De plus, par 2π-périodicité, on peut supposer $\alpha > A$ (quitte à prendre $\alpha + 2n\pi$ avec n choisi pour avoir $\alpha + 2n\pi > A$). Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, il existe n tel que $f(n) \geq \alpha$ (puisque f' tend vers 0, les $eif(n)$ sont de plus en plus rapprochés, on prend un n tel que z_0 soit compris entre $e^{if(n)}$ et $e^{if(n+1)}$). Soit $n_0 = \min\{n \,|\, f(n) \geq \alpha\}$. Alors $f(n_0 - 1) < \alpha < f(n_0)$: d'après le TVI, il existe $x_0 \in [\,n_0\,; n_0+1\,]$ tel que $f(x_0) = \alpha$ si bien que :

   $$|z - e^{if(n_0)}| = |e^{i\alpha} - e^{if(n_0)}| = |e^{if(x_0)} - e^{if(n_0)}|$$

   Or, la dérivée de $x \mapsto e^{if(x)}$ est $x \mapsto if'(x)e^{if(x)}$ bornée par $|f'|$ donc par ε puisqu'on est sur $[\,A\,;+\infty\,[$. D'après l'IAF,

   $$|z - e^{if(n_0)}| \leq \varepsilon|x_0 - n_0| \leq \varepsilon$$

2. D'après la question précédente (puisque la racine carrée et le ln tendent vers $+\infty$ et ont une dérivée qui tend vers 0), $\{e^{i\sqrt{n}} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{e^{i\ln(n)} \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ sont denses dans $\mathbb{U}$. En prenant la partie imaginaire et la partie réelle, respectivement, on a le résultat voulu. En effet, si $y \in [-1\,;1]$, il existe $z_0 \in \mathbb{U}$ tel que $y = \Im(z_0)$ et, pour tout ε, il existe n tel que $|z_0 - e^{i\sqrt{n}}| \leq \varepsilon$ donc

   $$|y - \sin(\sqrt{n})| = |\Im(z_0 - e^{i\sqrt{n}})| \leq |z_0 - e^{i\sqrt{n}}| \leq \varepsilon$$

   D'où la densité du premier ensemble, et idem pour le deuxième avec la partie réelle.

6 Recollement de solutions d'équations différentielles

Exercice 65 : ✪ Résoudre les équations différentielles suivantes (on étudiera l'existence éventuelle de solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier) :

1. $y'' + y = |x| + 1$
2. $xy' - y = \ln|1 + x|$