Feuille d'exercices - Chapitre 11

Si rien n'est précisé, on cherche les solutions à valeurs réelles.

1 Résolution d'équations :

Exercice 1 - Équations du premier ordre : ✪ Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 2y = -7$
2. $(1-x^2)y' + xy = ax$
3. $y' + y = x^2$
4. $xy' - 2y = \dfrac{x^3}{2}$
5. $y'\cos(x) - y\sin(x) = \sin(2x)$

Correction :

1. L'équation homogène associée est $(H) : y' - 2y = 0$ dont l'ensemble des solutions est

$$S_H = \{x \mapsto \lambda e^{2x} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Or, la fonction constante égale à $7/2$ est solution évidente (toujours chercher une solution évidente avant de se lancer dans une méthode de variation de la constante) donc :

$$S_E = \left\{x \mapsto \frac{7}{2} + \lambda e^{2x} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

2. Les domaines d'intégration sont $]-\infty\,;-1\,[\,,]-1\,;1\,[$ et $]\,1\,;+\infty\,[$. Plaçons-nous sur un domaine d'intégration. Soit $x \neq \pm 1$. (E) est équivalente à

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{ax}{1-x^2}$$

L'EHA est $(H) : y' + \dfrac{x}{1-x^2}y = 0$. Puisqu'une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|$ (ne pas oublier la valeur absolue !), on en déduit que :

$$\begin{aligned} S_H &= \left\{x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x \mapsto \lambda\sqrt{|1-x^2|} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

La fonction constante égale à a est solution évidente donc

$$S_E = \left\{x \mapsto a + \lambda\sqrt{|1-x^2|} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

3. L'équation homogène associée est $(H) : y' + y = 0$ donc

$$S_H = \{x \mapsto \lambda e^{-x} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Aucune solution évidente ne saute aux yeux : appliquons la méthode de variation de la constante. Soit λ dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $y_0 : x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$. Alors y_0 est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, ${y_0}'(x) = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x}$. Dès lors,

$${y_0}'(x) + y_0(x) = \lambda'(x)e^{-x}$$

Finalement, y_0 est une solution particulière si et seulement si, pour tout x, $\lambda'(x) = x^2e^x$ si et seulement si λ est une primitive de $x \mapsto x^2e^x$. Cherchons une primitive générique de cette fonction, de même que dans le chapitre précédent :

$$\begin{aligned}
\int^x t^2 e^t \,\mathrm{d}t &= \left[t^2 e^t\right]^x - 2\int^x te^t \,\mathrm{d}t \\
&= x^2e^x - 2\left(\left[te^t\right]^x - \int^x e^t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) \\
&= x^2 - 2xe^x + 2e^x
\end{aligned}$$

En d'autres termes, $y_0 : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est solution particulière, si bien que :

$$S_E = \{x \mapsto x^2 - 2x + 2 + \lambda e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

4. Les domaines d'intégration sont $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \neq 0$. (E) est équivalente à

$$y' - \frac{2}{x} \times y = \frac{x^2}{2}$$

L'EHA est $(H) : y' - \dfrac{2}{x} \times y = 0$ donc

$$\begin{aligned}
S_H &= \left\{x \mapsto \lambda e^{2\ln|x|} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \{x \mapsto \lambda |x|^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \mapsto \lambda x^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Soit λ dérivable et soit $y_0 : x \mapsto \lambda(x)x^2$. Alors y_0 est dérivable et ${y_0}'(x) = \lambda'(x)x^2 + 2x\lambda(x)$ si bien que

$${y_0}'(x) - \frac{2}{x} \times y_0(x) = \lambda'(x)x^2$$

En particulier, y_0 est solution particulière si et seulement si, pour tout x, $\lambda'(x) = 1/2$. Dès lors, $y_0 : x \mapsto \dfrac{x}{2} \times x^2 = \dfrac{x^3}{2}$ est solution particulière. En conclusion :

$$S_E = \left\{x \mapsto \frac{x^3}{2} + \lambda x^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

5. Les domaines d'intégration sont tous les intervalles de la forme $\left]k\pi - \dfrac{\pi}{2}\,;k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$. Soit x dans un domaine d'intégration. (E) est équivalente à :

$$y' - \tan(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(x)}$$

L'EHA est $(H)y' - \tan(x) = 0$ et on sait qu'une primitive de tan est $x \mapsto -\ln|\cos(x)|$, donc une primitive de $-\tan$ est $x \mapsto \ln|\cos(x)|$ si bien que :

$$\begin{aligned}
S_H &= \left\{x \mapsto \lambda e^{-\ln|\cos(x)|} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{|\cos(x)|} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

Quitte à changer λ en $-\lambda$, ce qui ne change pas l'ensemble des solutions, on a donc

$$S_H = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{\cos(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Attention, cela ne veut pas dire que $|\cos| = \cos$ i.e. que le cos est positif sur l'intervalle ! On change en fait λ en $-\lambda$, cf. cours. De plus, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ donc on cherche une solution particulière de :

$$y' - \tan(x)y = 2\sin(x)$$

Soit λ dérivable et soit $y_0 : x \mapsto \lambda(x)/\cos(x)$. Alors y_0 est dérivable et ${y_0}'(x) = \lambda'(x)/\cos(x) + \lambda(x)\sin(x)/\cos^2(x)$ si bien que

$$y_0{}'(x) - \tan(x) y_0(x) = \lambda'(x)/\cos(x)$$

Dès lors, y_0 est solution particulière si et seulement si, pour tout x dans le domaine d'intégration choisi, $\lambda'(x)/\cos(x) = 2\sin(x)$ donc si et seulement si $\lambda'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$. Dès lors, $\lambda = -\cos(2x)/2$ convient. En conclusion :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \frac{-\cos(2x)}{2\cos(x)} + \frac{\lambda}{\cos(x)} \,|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 2 - Équations du second ordre : ✪ Idem.

1. $y'' - y' - 6y = x^2 - x + 5$
2. $y'' + 9y = 3x^2 + 2$
3. $y'' - y = 3\cos(x)$
4. $y'' - 2y' + y = e^x + \cos(3x)$
5. $y'' + 4y = 3\cos(2x) + \sin(2x)$
6. $y'' + 3y' + 4y = \operatorname{sh}(2x)$
7. ✪✪ $y'' + \omega^2 y = \sin^3(x)$, où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$
8. ✪✪✪ $y'' - 2y'\cos(\alpha) + y = e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Correction :

1. L'EHA est $(H) : y'' - y' - 6y = 0$ et l'équation caractéristique est $(C) : r^2 - r - 6 = 0$ dont les solutions sont 3 et -2 si bien que

$$S_H = \{x \mapsto \lambda e^{3x} + \mu e^{-2x} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

0 n'est pas racine de (C) donc on cherche une solution particulière de la forme $Q : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (même degré que le second membre). Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q'(x) = 2ax + b$ et $Q''(x) = 2a$ si bien que

$$Q''(x) - Q'(x) - 6Q(x) = -6ax^2 + (-2a - 6b)x + (2a - b - 6c)$$

Dès lors :

$$Q \text{ est solution} \iff \begin{cases} -6a & & & = & 1 \\ -2a & - & 6b & & = & -1 \\ 2a & - & b & - & 6c & = & 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & = -1/6 \\ -6b & = -4/3 \\ -b - 6c & = 16/3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & = -1/6 \\ b & = 2/9 \\ -6c & = 50/9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & = -1/6 \\ b & = 2/9 \\ c & = -25/27 \end{cases}$$

Dès lors, $Q : x \mapsto -\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{9} - \frac{25}{27}$ est solution particulière. Finalement :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda e^{3x} + \mu e^{-2x} + -\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{9} - \frac{25}{27} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. L'EHA est $(H) : y'' + 9y = 0$ et l'équation caractéristique est $(C) : r^2 + 9 = 0$ dont les solutions sont $\pm 3i$. On cherche les solutions réelles (c'est écrit au début de la feuille) donc

$$S_H = \{x \mapsto \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x) \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

0 n'est pas racine de (C) donc on cherche une solution particulière de la forme $Q : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (même degré que le second membre). Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q'(x) = 2ax + b$ et $Q''(x) = 2a$ si bien que

$$Q''(x) + 9Q(x) = 9ax^2 + 9bx + (2a + 9c)$$

Dès lors :

$$Q \text{ est solution} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} 9a & & & = & 3 \\ & 9b & & = & 0 \\ 2a & & + \; 9c & = & 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} a & & & = & 1/3 \\ & b & & = & 0 \\ & & c & = & 4/27 \end{cases}$$

Dès lors, $Q : x \mapsto \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{4}{27}$ est solution particulière. Finalement :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x) + \frac{x^2}{3} + \frac{4}{27} \,|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3. L'EHA est $(H) : y'' - y = 0$ et l'équation caractéristique est $(C) : r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont ± 1 si bien que

$$S_H = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} \,|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Pour trouver une solution particulière, intéressons-nous à l'équation « complexifiée » $(E') : y'' - y = e^{ix}$. i n'est pas racine de (C) donc on cherche une solution particulière de la forme $Q : x \mapsto ce^{ix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q'(x) = ice^{ix}$ et $Q''(x) = -ce^{ix}$ si bien que

$$Q''(x) - Q(x) = (-c - c)e^{ix}$$

Dès lors, $Q : x \mapsto -e^{ix}/2$ est solution particulière de (E'). En prenant la partie réelle, $\Re(Q_0) : x \mapsto -\cos(x)/2$ est solution de $y'' - y = \cos(x)$ donc, d'après le principe de superposition, $x \mapsto -3\cos(x)/2$ est solution de (E). Finalement :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} - \frac{3\cos(x)}{2} \,|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

4. L'EHA est $(H) : y'' - 2y' + y = 0$ et l'équation caractéristique est $(C) : r^2 - 2r - 1 = (r-1)^2 = 0$ dont l'unique solution est 1. Ainsi,

$$S_H = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x \,|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'après le principe de superposition, il suffit de trouver une solution particulière de $(E_1) : y'' - 2y' + y = e^x$ et de $(E_2) : y'' - 2y' + y = \cos(3x)$. Commençons par (E_1). 1 étant racine double de (C), on cherche une solution particulière de la forme $Q_1 : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q_1{}'(x) = (ax^2 + (2a+b)x + b + c)e^x$ et $Q_1{}''(x) = (ax^2 + (4a+b) + (2a + 2b + c))e^x$ si bien que

$$Q_1{}''(x) - 2Q_1{}'(x) + Q_1(x) = \left((a - 2a + a)x^2 + (4a + b - 4a - 2b + b)x + (2a + 2b + c - 2b - 2c + c)\right)e^x$$

Dès lors, Q_1 est solution si et seulement si $2a = 1$ si et seulement si $a = 1/2$, b et c étant quelconques. Ainsi, $Q_1 : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} \times e^x$ est solution particulière de E_1. Pour (E_2), donnons une solution particulière de l'équation « complexifiée » $(F_2) : y'' - 2y' + y = e^{3ix}$. $3i$ n'est pas une solution de (C) donc on cherche une solution particulière sous la forme $Q_2 : x \mapsto ae^{3ix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q_2{}'(x) = 3iae^{3ix}$ et $Q_2{}''(x) = -9ae^{3ix}$ si bien que

$$Q_2{}''(x) - 2Q_2{}'(x) + Q_2(x) = (-9a - 6ia + a)\,e^{3ix}$$

Finalement, Q_2 est solution si et seulement si $-8a - 6ia = 1$ si et seulement si $a = \dfrac{-1}{8+6i}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= \frac{-1}{8+6i} \times e^{3ix} \\ &= \frac{-(8-6i)}{8^2 + 6^2} \times e^{3ix} \\ &= \frac{-8+6i}{100} \times (\cos(3x) + i\sin(3x)) \\ &= \frac{-4+3i}{50} \times (\cos(3x) + i\sin(3x)) \end{aligned}$$

Finalement, en prenant la partie réelle, $x \mapsto \dfrac{-4\cos(3x) - 3\sin(3x)}{50}$ est solution particulière de (E_2). D'après le principe de superposition,

$$S_E = \left\{ x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu \right) e^x - \frac{4\cos(3x) + 3\sin(3x)}{50} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

5. L'EHA est $(H) : y'' + 4y = 0$, l'équation caractéristique est $(C) : r^2 + 4 = 0$ dont les solutions sont $\pm 2i$. Ainsi (rappelons que, sauf indication contraire, on cherche les solutions réelles) :

$$S_H = \left\{ x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

D'après le principe de superposition, il suffit de trouver une solution particulière aux équations $(E_1) : y'' + 4y = \cos(2x)$ et $(E_2) : y'' + 4y = \sin(2x)$. On s'intéresse à la même équation complexifiée $(F) : y'' + 4y = e^{2ix}$. $2i$ étant solution simple de (C), on cherche une solution particulière de (F) sous la forme $Q : x \mapsto (ax + b)e^{2ix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors $Q'(x) = (2iax + (a + 2ib))e^{2ix}$ et $Q''(x) = (-4ax + (4ia - 4b))e^{2ix}$ si bien que

$$Q''(x) + 4Q(x) = 4iae^{2ix}$$

Ainsi, Q est solution particulière de (F) si et seulement si $4ia = 1$ si et seulement si $a = 1/4i = -i/4$. Dès lors,

$$\begin{aligned} Q(x) &= -\frac{ix}{4} \times e^{2ix} \\ &= -\frac{ix}{4} \times (\cos(2x) + i\sin(2x)) \end{aligned}$$

Par conséquent, $\Re(Q) : x \mapsto \dfrac{x\sin(2x)}{4}$ est solution de (E_1) et $\Im(Q) : x \mapsto -\dfrac{x\cos(2x)}{4}$ est solution de (E_2). D'après le principe de superposition :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) + \frac{3x\sin(2x)}{4} - \frac{x\cos(2x)}{4} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

6. On trouve de même (idem que dans le cours, avec le principe de superposition, et puisque ± 2 ne sont pas solutions de l'équation caractéristique) que

$$S_E = \left\{ x \mapsto e^{-3x/2} \left(\lambda\cos\left(\frac{x\sqrt{7}}{2}\right) + \mu\sin\left(\frac{x\sqrt{7}}{2}\right) \right) - \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x}}{28} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

7. L'EHA est $(H) : y'' + \omega^2 y = 0$ et l'équation caractéristique est $(C) : r^2 + \omega^2 = 0$ dont les solutions sont $\pm i\omega$ (distinctes car $\omega \neq 0$). Dès lors,

$$S_H = \{ x \mapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x) \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Cherchons à présent une solution particulière. Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$ donc $\sin^3(x) = \dfrac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}$. Il suffit donc de trouver une solution particulière aux équations $(E_1) : y'' + \omega^2 y = \sin(x)$ et $(E_2) : y'' + \omega^2 y = \sin(3x)$ puis d'appliquer le principe de superposition. Pour cela, on s'intéresse aux équations complexifiées $(F_1) : y'' + \omega^2 y = e^{ix}$ et $(F_2) : y'' + \omega^2 y = e^{3ix}$. Il faut donc séparer les cas selon la valeur de ω (rappelons que ω est strictement positif).

- Supposons que $\omega \neq 1$. Alors i n'est pas une solution de (C), on cherche donc une solution particulière de (F_1) sous la forme $Q_1 : x \mapsto ae^{ix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. ${Q_1}'(x) = iae^{ix}$ et ${Q_1}''(x) = -ae^{ix}$. Ainsi,

$$Q''(x) + \omega^2 Q(x) = a(\omega^2 - 1)e^{ix}$$

  c'est-à-dire que Q est solution particulière de (F_1) si et seulement si $a = \dfrac{1}{\omega^2 - 1}$. En prenant la partie réelle, on trouve que

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{\omega^2 - 1}$$

  est solution particulière de (E_1).
- Supposons que $\omega \neq 3$. On trouve de même que

$$x \mapsto \frac{\sin(3x)}{\omega^2 - 9}$$

  est solution particulière de (E_2).

- Supposons que $\omega = 1$. Alors i est solution simple de (C) : on cherche une solution particulière de (F_1) sous la forme $Q_1 : x \mapsto (ax+b)e^{ix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q_1{}'(x) = (iax+ib+a)e^{ix}$ et $Q_1{}''(x) = (-ax-b+2ia)e^{ix}$. Ainsi,
$$Q_1{}''(x) + \omega^2 Q_1(x) = Q_1{}''(x) + Q_1(x) = 2iae^{ix}$$
c'est-à-dire que Q_1 est solution particulière de (F_1) si et seulement si $a = 1/2i = -i/2$, c'est-à-dire que
$$Q_1 : x \mapsto -\frac{ix}{2}e^{ix} = -\frac{ix}{2}(\cos(x) + i\sin(x))$$
est solution de (F_1). En prenant la partie imaginaire, on trouve que $x \mapsto -x\cos(x)/2$ est solution particulière de (E_1).
- Supposons enfin que $\omega = 3$. Alors $3i$ est solution simple de (C) : on cherche une solution particulière de (F_2) sous la forme $Q_2 : x \mapsto (ax+b)e^{3ix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q_2{}'(x) = (3iax+3ib+a)e^{3ix}$ et $Q_2{}''(x) = (-9ax-9b+6ia)e^{3ix}$. Ainsi,
$$Q_2{}''(x) + \omega^2 Q_2(x) = Q_2{}''(x) + 9Q_2(x) = 3iae^{3ix}$$
c'est-à-dire que Q est solution particulière de (F_1) si et seulement si $a = 1/6i = -i/6$, c'est-à-dire que
$$Q_2 : x \mapsto -\frac{i}{6} \times x \times e^{3ix} = -\frac{i}{6} \times x \times (\cos(3x) + i\sin(3x))$$
est solution de (F_2). En prenant la partie imaginaire, on trouve que $x \mapsto -\frac{x}{6}\cos(3x)$ est solution particulière de (E_2).

Conclusion, d'après le principe de superposition :
- Si $\omega \neq 1, 3$:
$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x) + \frac{3}{4} \times \frac{\sin(x)}{\omega^2 - 1} - \frac{1}{4} \times \frac{\sin(3x)}{\omega^2 - 9} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
- Si $\omega = 1$ (en utilisant le fait que $\omega^2 - 9 = -8$) :
$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) - \frac{3x\cos(x)}{8} + \frac{1}{32} \times \sin(3x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
- Si $\omega = 3$ (en utilisant le fait que $\omega^2 - 1 = 8$) :
$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x) + \frac{3}{32} \times \sin(x) + \frac{x}{24} \times \cos(3x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

8. L'EHA est $(H) : y'' - 2y'\cos(\alpha) + y = 0$ et l'équation caractéristique est $(C) : r^2 - 2r\cos(\alpha) + 1 = 0$ dont le discriminant vaut $\Delta = 4\cos^2(\alpha) - 4$. Il faut donc distinguer plusieurs cas selon la valeur de α.
   - Supposons que $\alpha \equiv 0[2\pi]$ si bien que $\cos(\alpha) = 1$. 1 est solution double de (C) donc
$$S_H = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$
On cherche à présent une solution de l'équation complexifiée $(F) : y'' - 2y'\cos(\alpha) + y = y'' - 2y' + y = e^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x}$. Puisque $\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$ n'est pas solution de (C), on cherche une solution sous la forme $Q : x \mapsto ae^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q'(x) = a \times e^{i\pi/3}e^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x}$ et $Q'(x) = a \times e^{2i\pi/3}e^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x}$ donc
$$Q''(x) - 2Q'(x) + Q(c) = a\left(e^{2i\pi/3} - 2e^{i\pi/3} + 1\right)e^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x}$$
si bien que Q est solution particulière si et seulement si $a \times \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = a \times j^2 = 1$ si et seulement si $a = 1/j^2 = j$. Finalement, une solution particulière de (F) est :
$$Q : x \mapsto je^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \times e^{x/2} \times \left(\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + i\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$
En prenant la partie réelle, une solution particulière est :
$$x \mapsto -\frac{1}{2} \times e^{x/2} \times \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \times e^{x/2} \times \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$
En conclusion,

$$S_E = \left\{ x \mapsto (\lambda x+\mu)e^x - \frac{1}{2}\times e^{x/2}\times \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\times e^{x/2}\times\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \,|\, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

- Deuxième cas : $\alpha \equiv \pi[2\pi]$. On trouve de même que :

$$S_E = \left\{ x \mapsto (\lambda x+\mu)e^{-x} + \frac{1}{6}\times e^{x/2}\times \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\times e^{x/2}\times\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \,|\, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

- Supposons que $\alpha \not\equiv 0[\pi]$. (C) se réécrit $(r-e^{i\alpha})\times(r-e^{-i\alpha}) = 0$ si bien que les deux solutions sont $e^{\pm i\alpha} = \cos(\alpha)\pm i\sin(\alpha)$. On trouve donc :

$$S_H = \left\{ x\mapsto e^{\cos(\alpha)x}\times(\lambda\cos(\sin(\alpha)\times x)+\mu\sin(\sin(\alpha)\times x)) \,|\, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

On cherche à présent une solution particulière de l'équation complexifiée (F). Les solutions de (C) étant $e^{\pm i\alpha}$, il faut séparer les cas selon que $\alpha = \pm\pi/3$ ou non.

Supposons donc que $\alpha \not\equiv \pm\pi/3[2\pi]$. Alors $2\pi/3$ n'est pas racine de (C) donc on cherche une solution particulière sous la forme $Q : x\mapsto ae^{xe^{i\pi/3}}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors $Q'(x) = ae^{i\pi/3}e^{xe^{i\pi/3}}$ et $Q''(x) = ae^{2i\pi/3}e^{xe^{i\pi/3}}$ donc

$$Q''(x) - 2\cos(\alpha)Q'(x)+Q(x) = a\left(e^{2i\pi/3} - 2\cos(\alpha)e^{i\pi/3}+1\right)e^{xe^{i\pi/3}}$$

Finalement, Q est solution particulière si et seulement si (on utilise le fait que $e^{2i\pi/3}+1 = e^{i\pi/3}$) :

$$a\times e^{i\pi/3}(1-2\cos(\alpha)) = 1$$

si et seulement si

$$a = \frac{e^{-i\pi/3}}{1-2\cos(\alpha)} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}{1-2\cos(\alpha)}$$

Finalement, une solution particulière de (F) est :

$$Q : x\mapsto \frac{\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}{1-2\cos(\alpha)}\times e^{xe^{i\pi/3}} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}{1-2\cos(\alpha)}\times e^{x/2}\times\left(\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+i\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

En trouvant la partie réelle, on trouve enfin que

$$\begin{aligned} S_E &= \Big\{x\mapsto e^{\cos(\alpha)x}\times(\lambda\cos(\sin(\alpha)\times x)+\mu\sin(\sin(\alpha)\times x)) \\ &\quad + \frac{e^{x/2}}{1-2\cos(\alpha)}\times\left(\frac{1}{2}\times\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) \,|\, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\Big\}\end{aligned}$$

Il nous reste à étudier le cas où $\alpha\equiv\pm\pi/3[2\pi]$. Alors $e^{i\pi/3}$ est racine simple de (C) : on cherche une solution particulière sous la forme $Q : x\mapsto (ax+b)e^{xe^{i\pi/3}}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$Q'(x) = \left(axe^{i\pi/3}+be^{i\pi/3}+a\right)e^{xe^{i\pi/3}} \qquad \text{et} \qquad Q''(x) = \left(ax\left(e^{i\pi/3}\right)^2 + b\left(e^{i\pi/3}\right)^2+2ae^{i\pi/3}\right)e^{xe^{i\pi/3}}$$

Or, en utilisant le fait que $\left(e^{i\pi/3}\right)^2 - 2\cos(\alpha)e^{i\pi/3}+1 = 0$, on trouve que Q est solution particulière si et seulement si

$$2ae^{i\pi/3} - 2\cos(\alpha)a = 1$$

En utilisant le fait que $\cos(\alpha) = 1/2$ et $e^{i\pi/3} = \frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, on trouve que Q est solution si et seulement si $a = -i/\sqrt{3}$. Ainsi,

$$Q = \frac{-ix}{\sqrt{3}}e^{xe^{i\pi/3}}$$

est solution particulière, et en prenant la partie réelle,

$$x\mapsto \frac{x}{\sqrt{3}}\times\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\times e^{x/2}$$

est solution particulière de (E), ce qui permet de conclure. Ouf !

Exercice 3 : ✪ Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 9y = x^2 + 1 \\ \\ y(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Correction : L'EHA est $(H) : y'' + 9y = 0$ et l'équation caractéristique est $(C) : r^2 + 9 = 0$ dont les solutions sont $\pm 3i$ donc

$$S_H = \{x \mapsto \lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x) \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Puisque 0 n'est pas solution de (C), on cherche une solution particulière sous la forme $Q : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q'(x) = 2ax + b$ et $Q''(x) = 2a$ si bien que

$$Q''(x) + 9Q(x) = 9ax^2 + 9bx + (9c + 2a)$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} Q \text{ est solution} \quad &\iff \begin{cases} 9a & & & = & 1 \\ & 9b & & = & 0 \\ 2a & & + \quad 9c & = & 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a & & & = & 1/9 \\ & b & & = & 0 \\ & & c & = & 7/81 \\ \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x) + \frac{x^2}{9} + \frac{7}{81} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit

$$y : x \mapsto \lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x) + \frac{x^2}{9} + \frac{7}{81}$$

Alors :

$$y(0) = \lambda + \frac{7}{81} \qquad \text{et} \qquad y'(0) = 3\mu$$

Finalement, y est solution du problème de Cauchy si et seulement si $\mu = 0$ et $\lambda = 74/81$ c'est-à-dire que

$$y : x \mapsto \frac{74}{81} \times \cos(3x) + \frac{x^2}{9} + \frac{7}{81}$$

est l'unique solution du problème de Cauchy. On voit (cf. cours) qu'il y a bien existence et unicité !

Exercice 4 - Une équation d'ordre 3 : ✪ On cherche les solutions (réelles) de l'équation différentielle $(E) : y''' = y$.

1. Donner l'ensemble des solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(F) : y' = y$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable trois fois. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g = f'' + f' + f$ est solution de (F).
3. En déduire les solutions de (E).

Correction :

1. C'est immédiat :

$$S_F = \{x \mapsto \lambda e^x \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2. Travaillons par équivalences :

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (F) \quad &\iff \quad g' = g \\ &\iff \quad f''' + f'' + f = f'' + f' + f \\ &\iff \quad f''' = f \\ &\iff \quad f \text{ est solution de } (E) \end{aligned}$$

3. D'après les questions précédentes, f est solution de (E) si et seulement s'il existe g solution de (F) telle que $f''+f'+f = g$ donc si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que f soit solution de $y'' + y' + y = \lambda e^x$. Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et résolvons l'équation $(E_\lambda) : y'' + y' + y = \lambda e^x$. L'EHA est $(H) : y'' + y' + y = 0$ et l'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ donc les solutions sont j et j^2 c'est-à-dire $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Par conséquent,
$$S_H = \left\{ x \mapsto e^{-x/2} \times \left(\alpha \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
(rappelons que λ est déjà pris). 1 n'étant pas racine de (C), on cherche une solution particulière sous la forme $Q : x \mapsto ae^x$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q'(x) = Q''(x) = ae^x$ si bien que
$$Q''(x) + Q'(x) + Q(x) = 3ae^x$$
Dès lors, Q est solution particulière si et seulement si $a = \lambda/3$. L'ensemble des solutions de (E_λ) est donc :
$$S_{E_\lambda} = \left\{ x \mapsto e^{-x/2} \times \left(\alpha \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \frac{\lambda}{3} \times e^x \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
Finalement, les solutions de (E) sont les solutions de (E_λ) quand λ décrit $\mathbb{R}$. En conclusion :
$$\begin{aligned} S_E &= \left\{ x \mapsto e^{-x/2} \times \left(\alpha \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \frac{\lambda}{3} \times e^x \mid (\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ x \mapsto e^{-x/2} \times \left(\alpha \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \lambda e^x \mid (\alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R}^3 \right\} \end{aligned}$$
La dernière ligne est obtenue de façon analogue à d'habitude : les deux ensembles sont les mêmes, quitte à changer λ en 3λ. Cela ne veut pas dire que $\lambda = \lambda/3$!

Exercice 5 : ✪ Soit ω un réel strictement positif. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé suivant l'axe Oz est régi par un système différentiel de la forme :
$$\begin{cases} x'' &= \omega y' \\ y'' &= -\omega x' \\ z'' &= 0 \end{cases}$$
En considérant la fonction $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

Correction : Suivons l'indication de l'énoncé et intéressons-nous à $u = x' + iy'$ (on s'intéresse donc à des solutions complexes). x et y étant dérivables deux fois, u est dérivable et $u' = x'' + iy''$. Puisque x et y sont solutions (avec z) du système différentiel de l'énoncé, $x'' = \omega y'$ et $y'' = -\omega x'$ c'est-à-dire que $u' = \omega y' - i\omega x' = -i\omega u$. En d'autres termes, u est solution de l'équation (complexe) $y' + i\omega y = 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (u est à valeurs complexes) tel que pour tout t (x est déjà pris), $u(t) = \lambda e^{-i\omega t}$. En écrivant $\lambda = a + ib$, on en déduit que pour tout t,
$$u(t) = (a + ib) \times (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))$$
En développant, et en se souvenant que $x = \Re(u)$ et $y = \Im(u)$, on trouve que pour tout t,
$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \qquad \text{et} \qquad y(t) = b\cos(\omega t) - a\sin(\omega t)$$
Enfin, z est une fonction affine puisque $z'' = 0$. Finalement, les solutions du système sont les fonctions x, y, z de la forme
$$x : t \mapsto a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t), y : t \mapsto b\cos(\omega t) - a\sin(\omega t) \qquad \text{et} \qquad z : t \mapsto ct + d$$
où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Exercice 6 : ✪✪ On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit f une solution de (E). Montrer que $g : x \mapsto -f(-x)$ est aussi solution de (E).
2. En déduire que (E) admet une unique solution impaire.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $g'(x) = f'(-x)$. Dès lors,

$$\begin{array}{rcl} g'(x) + 2xg(x) & = & f'(-x) - 2xf(-x) \\ & = & f'(-x) + 2 \times (-x) \times f(-x) \end{array}$$

On reconnaît le membre de droite de (E) avec f dans le rôle de y et $-x$ à la place de x (penser à « truc »). Puisque f est solution de (E), cette quantité est égale à 1 c'est-à-dire que $g'(x) + 2xg(x) = 1$: g est aussi solution de (E).

2. Rappelons qu'une fonction impaire **définie en** 0 est nulle en 0. Dès lors, une fonction f impaire solution de (E) est solution du problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' + 2xy & = & 1 \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right.$$

D'après le cours, ce problème de Cauchy admet une unique solution donc (E) admet au plus une solution impaire. Pourquoi « au plus » ? Car on vient simplement de prouver qu'il existait une unique solution de (E) nulle en 0 mais celle-ci n'a aucune raison d'être impaire, il existe des fonctions nulles en 0 qui ne sont pas impaires ! Soit donc f cette solution. D'après ce qui précède, $g : x \mapsto -f(-x)$ est aussi solution. Or, ces deux solutions sont nulles en 0 (f par hypothèse et g car $g(0) = -f(0) = 0$). Par unicité au problème de Cauchy, $g = f$ c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ i.e. $f(x) = -f(-x)$: f est bien impaire. D'où l'existence, et l'unicité découle du fait qu'on a montré auparavant qu'il y avait au plus une solution impaire.

Exercice 7 : ✪✪ Déterminer les fonctions f et g vérifiant le « système différentiel » :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'' & = & f' + g' - g \\ g'' & = & f' + g' - f \end{array} \right.$$

On pourra s'intéresser aux fonctions $u = f + g$ et $v = f - g$.

Correction : Notons S ce système différentiel.

$$\begin{array}{rll} S & \iff \left\{ \begin{array}{rcl} f'' - g'' & = & f - g \\ g'' & = & f' + g' - f \end{array} \right. & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcl} f'' - g'' & = & f - g \\ f'' + g'' & = & 2(f' + g') - (f + g) \end{array} \right. & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcl} v'' & = & v \\ u'' & = & 2u' - u \end{array} \right. & \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcl} v'' - v & = & 0 \\ u'' - 2u' + u & = & 0 \end{array} \right. & \\ & \iff \left\{ \begin{array}{ll} \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, & v(x) = f(x) + g(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x} \\ \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, & u(x) = f(x) - g(x) = (ax + b) e^x \end{array} \right. & \\ & \iff \exists (\lambda, \mu, a, b) \in \mathbb{R}^4, \forall x \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \left(\dfrac{\lambda + ax + b}{2} \right) e^x + \dfrac{\mu}{2} e^{-x} \\ g(x) = \left(\dfrac{\lambda - ax - b}{2} \right) e^x + \dfrac{\mu}{2} e^{-x} \end{array} \right. & \end{array}$$

Quitte à changer λ en 2λ, a en $2a$, b en $2b$ et μ en 2μ, les solutions sont de la forme :

$$f : x \mapsto (\lambda + ax + b)\, e^x + \mu e^{-x} \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto (\lambda - ax - b)\, e^x + \mu e^{-x}$$

2 Équations fonctionnelles se ramenant à une équation différentielle :

Exercice 8 : ✪✪ :

1. Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles réelles telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

2. Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)f(y)$$

Correction : Ce genre de question se traite toujours par analyse synthèse : en dérivant, on perd l'équivalence.

1. Analyse : soit f une fonction qui convient. Alors f' est dérivable (car f est dérivable) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= -f\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \quad \text{(penser à « truc »)} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ dont l'ensemble des solutions est

$$S_H = \{x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Synthèse : soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $f : x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$. Alors f est dérivable. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$$

Or, on a également :

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$$

Si f convient alors, pour $x = \pi/2$ (on oublie le : « par identification » !), on obtient $\lambda = -\lambda$ donc $\lambda = 0$ donc $f(x) = \mu \sin(x)$, et cette fonction est bien solution. En conclusion, les solutions sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \mu \sin(x)$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$. On peut généraliser cet exercice et chercher toutes les fonctions dérivables telles que, pour tout x, $f'(x) = f(a-x)$, mais on se retrouve alors avec des $\cos(a-x)$ et des $\sin(a-x)$ ce qui donne des calculs innommables et ne change rien à la méthode.

2. Analyse : soit f solution. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Fixons y et dérivons l'égalité de l'énoncé par rapport à x (si y est constante, on peut réécrire l'égalité de l'énoncé sous la forme $g(x) = h(x)$ avec $g(x) = f(x+y)$ et $h(x) = f(x)f(y)$ ce qui implique que $g'(x) = h'(x)$) ce qui donne :

$$f'(x+y) = f'(x) \times f(y)$$

En prenant $x = 0$, on en déduit que $f'(y) = f'(0) \times f(y)$. Posons $\lambda = f'(0)$. Alors f est solution de l'équation différentielle $y' - \lambda y = 0$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ (λ est déjà pris) tel que $f : x \mapsto a e^{\lambda x}$.

Synthèse : soit $(a, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ et soit $f : x \mapsto a e^{\lambda x}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'une part, $f(x+y) = a e^{\lambda x + \lambda y}$ et d'autre part, $f(x) \times f(y) = a^2 e^{\lambda x + \lambda y}$. Si $a \neq a^2$ alors il n'y a pas égalité donc f n'est pas solution. Si $a^2 = a$, c'est-à-dire si $a = 0$ ou $a = 1$, alors on a égalité et f est solution. En conclusion, les seules solutions sont la fonction nulle et les fonctions du type $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 - Une recherche d'espaces propres en dimension infinie : ✪✪✪ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions f continues sur $[\,0\,;1\,]$ telles que :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,], \int_0^1 f(t) \min(x,t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x)$$

Correction : Comme dans l'exercice précédent, procédons par analyse synthèse. Soit donc f une solution du problème. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Alors :

$$\begin{aligned}\lambda f(x) &= \int_0^x \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, f est continue donc les fonctions

$$x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

sont dérivables. Supposons dans un premier temps $\lambda \neq 0$. Alors $f(0)=0$ (repérer des valeurs faciles à calculer nous aidera à trouver la valeur exacte de f : y penser dans ce genre de problème) puis, en divisant par λ dans l'égalité ci-dessus, on a exprimé f comme somme et produit de fonctions dérivables donc f est dérivable. En dérivant l'égalité ci-dessus (attention, dans la deuxième intégrale, x est la borne inférieure, il y a donc un $-$ qui sort en dérivant), il vient :

$$\begin{aligned}\lambda f'(x) &= xf(x) + \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t - xf(x) \\ &= \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En particulier, $f'(1)=0$ (toujours dans le cas où $\lambda \neq 0$). De même, on en déduit que f' est dérivable donc on peut dériver cette égalité, ce qui donne : $\lambda f''(x) = -f(x)$ c'est-à-dire que f est solution de l'équation différentielle $(H) : y'' + (1/\lambda)y = 0$. Pour résoudre cette équation différentielle, il faut séparer les cas selon la valeur de λ.

Premier cas : $\lambda < 0$. Alors les solutions de l'équation caractéristique $(C) : r^2 + 1/\lambda = 0$ sont $\pm 1/\sqrt{-\lambda}$ (rappelons que λ est déjà pris)

$$S_H = \left\{x \mapsto ae^{x/\sqrt{-\lambda}} + be^{-x/\sqrt{-\lambda}} \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Par conséquent, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout x, $f(x) = ae^{x/\sqrt{-\lambda}} + be^{-x/\sqrt{-\lambda}}$. En se souvenant que $f(0)=0$ et $f'(1)=0$, il vient :

$$a+b=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{ae^{1/\sqrt{-\lambda}} - be^{-1/\sqrt{-\lambda}}}{\sqrt{-\lambda}} = 0$$

On en déduit que $b=-a$ donc

$$\frac{ae^{1/\sqrt{-\lambda}} + ae^{-1/\sqrt{-\lambda}}}{\sqrt{-\lambda}} = 0$$

donc $\dfrac{a \times 2\mathrm{ch}(1/\sqrt{-\lambda})}{\sqrt{-\lambda}} = 0$ mais le ch ne s'annule pas donc $a=0$ donc $b=0$. On en déduit que f est la fonction nulle.

Deuxième cas : $\lambda > 0$. Alors les solutions de l'équation caractéristique sont $\pm i/\sqrt{\lambda}$ donc

$$S_H = \left\{x \mapsto a\cos\left(x/\sqrt{\lambda}\right) + b\sin\left(x/\sqrt{\lambda}\right) \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Par conséquent, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout x, $f(x) = a\cos\left(x/\sqrt{\lambda}\right) + b\sin\left(x/\sqrt{\lambda}\right)$. Les conditions $f(0)=0$ et $f'(1)=0$ donnent :

$$a=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{\sqrt{\lambda}} \times \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$

Là aussi, examinons plusieurs cas. Si $1/\sqrt{\lambda} \equiv \pi/2[\pi]$ donc s'il existe $k \in \mathbb{N}$ (car $\sqrt{\lambda} > 0$) tel que

$$\lambda = \frac{1}{(k\pi + \pi/2)^2} = \frac{4}{((2k+1)\pi)^2}$$

alors le cosinus ci-dessus est nul donc b est quelconque donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$f : x \mapsto b\sin\left(x/\sqrt{\lambda}\right)$$

Si ce n'est pas le cas, alors $a=0$ donc f est la fonction nulle. Supposons enfin que $\lambda = 0$. En dérivant deux fois l'égalité initiale (ce qui est possible car le membre λf est nul) on trouve $-f(x) = 0$ donc f est la fonction nulle.

Synthèse : dans les cas où $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$ qui n'est pas de la forme $\dfrac{4}{((2k+1)\pi)^2}$, la fonction nulle est évidemment solution donc c'est l'unique solution du problème. Supposons à présent qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lambda = \frac{4}{((2k+1)\pi)^2}$$

et posons $f : x \mapsto b\sin(x/\sqrt{\lambda})$ où b est un réel quelconque. Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

De même, g est dérivable deux fois et $g''(x) = -f(x) = \lambda f''(x)$ car f est solution de (E). Ainsi, il existe A et B tels que pour tout x, $g(x) = \lambda f(x) + Ax + B$. Or, $g(0) = 0 = f(0)$ donc $B = 0$ et $g'(1) = 0 = f'(1)$ (cela découle des mêmes calculs que ci-dessus) donc $A = 0$ si bien que $g(x) = \lambda f(x)$ c'est-à-dire que f est solution (on pouvait également prouver que f est solution par le calcul avec quelques IPP). En conclusion, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lambda = \frac{4}{((2k+1)\pi)^2}$$

alors les solutions sont exactement les fonctions de la forme

$$x \mapsto b\sin\left(\frac{2x}{(2k+1)\pi}\right)$$

avec b un réel quelconque.

Exercice 10 : ✪✪✪ : Cet exercice est assez calculatoire mais pas si difficile que cela.

1. Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x) - x - \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(x) + 2\int_0^x e^{x-t}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Correction :

1. Analyse : soit f une solution, et soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x) = \cos(x) - x - x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$$

Tout d'abord, $f(0) = 1$ (dans ce genre de problème, regarder les valeurs en certains points permet d'obtenir des informations sur les fonctions cherchées, il faut donc se demander si certaines valeurs sont faciles à calculer). De plus, f étant continue, d'après le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions

$$x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$$

sont dérivables (et même $\mathscr{C}^1$). f est donc dérivable car somme et produit de fonctions dérivables, et en dérivant l'égalité ci-dessus (on peut le faire puisqu'elle est valable en tout x),

$$f'(x) = -\sin(x) - xf(x) - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x)$$

si bien que

$$f'(x) = -\sin(x) - 1 - \int_0 xf(t)\,\mathrm{d}t$$

En particulier, $f'(0) = -1$. De même, f' est dérivable donc, en dérivant une nouvelle fois, il vient :

$$f''(x) = -\cos(x) - f(x)$$

c'est-à-dire que f est solution de l'équation différentielle $(E) : y''+y = -\cos(x)$. Résolvons cette équation différentielle. Les solutions (réelles) de l'EHA sont

$$S_H = \{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \,|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Cherchons une solution à l'équation complexifiée $(F) : y'' + y = -e^{ix}$. i est solution simple de $(C) : r^2 + 1 = 0$: on cherche une solution particulière de (F) sous la forme $Q : x \mapsto (ax+b)e^{ix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q'(x) = (iax + ib + a)e^{ix}$ et $Q''(x) = (-ax - b + 2ia)e^{ix}$. Ainsi,

$$Q''(x) + Q(x) = 2iae^{ix}$$

c'est-à-dire que Q est solution particulière de (F) si et seulement si $a = -1/2i = i/2$, c'est-à-dire que

$$Q : x \mapsto \frac{ix}{2}e^{ix} = \frac{ix}{2}(\cos(x) + i\sin(x))$$

est solution de (F). En prenant la partie réelle, on trouve que $x \mapsto -x\sin(x)/2$ est solution particulière de (E). Finalement,

$$S_E = \left\{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \frac{x\sin(x)}{2} \,|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Synthèse : soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit

$$f : x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) - \frac{x\sin(x)}{2}$$

Avec les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$, on trouve que $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \cos(x) - \sin(x) - \frac{x\sin(x)}{2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons

$$g(x) = \cos(x) - x - \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = \cos(x) - x - x\int_0^x \cos(t) - \sin(t) - \frac{t\sin(t)}{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^x t\cos(t) - t\sin(t) - \frac{t^2\sin(t)}{2}\,\mathrm{d}t$$

et voyons si $g(x) = f(x)$. À l'aide d'IPP on trouve :

$$\int_0^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t = \sin(x) - x\cos(x) \qquad \text{et} \qquad \int_0^x t\cos(t)\,\mathrm{d}t = x\sin(x) + \cos(x) - 1$$

ainsi que

$$\int_0^x t^2\sin(t)\,\mathrm{d}t = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2$$

Tous calculs faits, on trouve bien que $g(x) = f(x)$. Finalement, la seule solution est

$$f : x \mapsto \cos(x) - \sin(x) - \frac{x\sin(x)}{2}$$

2. Idem, travaillons par analyse-synthèse. Analyse : soit f une fonction qui convient. Tout d'abord, $f(0) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x) = \sin(x) + 2e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto e^{-t}f(t)$ étant continue, d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$x \mapsto \int_0^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable donc f est dérivable en tant que somme et produit de fonctions dérivables. Dès lors,

$$f'(x) = \cos(x) + 2e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t + 2e^x \times e^{-x}f(x)$$

En particulier, puisque $f(0)=0$, on trouve que $f'(0)=1$. Le membre central de l'égalité ci-dessus étant égal à $f(x)-\sin(x)$, on trouve que $f'(x)=\cos(x)+f(x)-\sin(x)+2f(x)$, on en déduit que f est solution de l'équation $(E): y'-3y=\cos(x)-\sin(x)$. L'EHA est $y'-3y=0$ dont l'ensemble des solutions est :

$$S_H=\{x\mapsto \lambda e^{3x} \,|\, \lambda\in\mathbb{R}\}$$

Appliquons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de (E). Soit λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $y_0: x\mapsto \lambda(x)e^{3x}$. Alors y_0 est dérivable et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, ${y_0}'(x)=(\lambda'(x)+3\lambda(x))e^{3x}$ si bien que

$${y_0}'(x)=\lambda'(x)e^{3x}$$

On en déduit que y_0 est solution particulière si et seulement si, pour tout x, $\lambda'(x)=(\cos(x)-\sin(x))e^{-3x}$. On cherche donc une primitive de $x\mapsto(\cos(x)-\sin(x))e^{-3x}$. Or,

$$\begin{aligned}\int^x e^{(-3+i)t}\,\mathrm{d}t &= \frac{e^{(-3+i)t}}{-3+i}\\ &= \frac{e^{-3t}\times(\cos(t)+i\sin(t))}{10}\times(-3-i)\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire :

$$\int^x \cos(t)e^{-3t}\,\mathrm{d}t=\frac{e^{-3t}\times(-3\cos(t)+\sin(t))}{10}\qquad\text{et}\qquad\int^x \sin(t)e^{-3t}\,\mathrm{d}t=\frac{e^{-3t}\times(-\cos(t)-3\sin(t))}{10}$$

Dès lors, une primitive de $t\mapsto(\cos(t)-\sin(t))e^{-3t}$ est :

$$t\mapsto\frac{e^{-3t}\times(-2\cos(t)+4\sin(t))}{10}=\frac{e^{-3t}\times(-\cos(t)+2\sin(t))}{5}$$

On en déduit que $y_0: x\mapsto\dfrac{-\cos(x)+2\sin(x)}{5}$ est solution particulière de (E). En conclusion :

$$S_E=\left\{x\mapsto\lambda e^{3x}-\frac{\cos(x)}{5}+\frac{2\sin(x)}{5}\,|\,\lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

Puisque f est solution de (E), il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x)=\lambda e^{3x}-\frac{\cos(x)}{5}+\frac{2\sin(x)}{5}$$

En se souvenant que $f(0)=0$, on trouve $\lambda=1/5$ si bien que f est la fonction définie par

$$f(x)=\frac{e^{3x}-\cos(x)+2\sin(x)}{5}$$

Synthèse : soit f la fonction ci-dessus. Soit $x\in\mathbb{R}$ et soit

$$\begin{aligned}g(x) &= \sin(x)+2e^x\int_0^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \sin(x)+\frac{2}{5}e^x\int_0^x e^{-t}\times(e^{3t}-\cos(t)+2\sin(t))\,\mathrm{d}t\\ &= \sin(x)+\frac{2}{5}e^x\int_0^x (e^{2t}-e^{-t}\cos(t)+2e^{-t}\sin(t))\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On trouve tout d'abord :

$$\int_0^x e^{2t}\,\mathrm{d}t=\frac{e^{2x}-1}{2}$$

puis

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{(-1+i)t}\,\mathrm{d}t &= \frac{e^{(-1+i)x}-1}{-1+i}\\ &= \frac{e^{-x}\times(\cos(x)+i\sin(x))-1}{2}\times(-1-i)\end{aligned}$$

et donc, en prenant la partie réelle et la partie imaginaire :

$$\int_0^x e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}\times(-\cos(x)+\sin(x))-1}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^x e^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}\times(-\sin(x)-\cos(x))}{2}$$

Après calculs, on trouve bien que $g(x) = f(x)$, c'est-à-dire que f est bien solution de l'équation. En conclusion, la seule solution est la fonction

$$f : x \mapsto \frac{e^{3x}-\cos(x)+2\sin(x)}{5}$$

3 Quelques équations non linéaires

Exercice 11 : ✪ On note (E) l'équation différentielle $-x^2y'+xy=y^2$ sur $I =]\,1\,;+\infty\,[$. En procédant au changement de fonction inconnue $z=1/y$, déterminer les solutions qui ne s'annulent pas sur I.

Correction : Soit y une fonction qui ne s'annule pas sur I et soit $z=1/y$. Alors z ne s'annule pas sur I et est dérivable car inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas. De plus, $y=1/z$ donc $y'=-z'/z^2$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\iff -x^2y'+xy=y^2 \\ &\iff -x^2\times\frac{-z'}{z^2}+\frac{x}{z}=\frac{1}{z^2} \\ &\iff x^2z'+xz=1 \\ &\iff z'+\frac{z}{x}=\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

On peut diviser par x^2 puisqu'on est sur I. Résolvons cette équation différentielle linéaire. L'EHA est $(H) : z'+z/x$ dont l'ensemble des solutions est (il n'y a pas de valeur absolue dans le ln car on est sur I)

$$\begin{aligned} S_H &= \{x\mapsto \lambda e^{-\ln(x)} \,|\, \lambda\in\mathbb{R}\} \\ &= \left\{x\mapsto\frac{\lambda}{x} \,|\, \lambda\in\mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Cherchons une solution particulière. Soit λ dérivable sur I et soit $z_0 : x\mapsto\lambda(x)/x$. Alors z_0 est dérivable et pour tout $x\in I$,

$${z_0}'(x) = \frac{\lambda'(x)}{x}-\frac{\lambda(x)}{x^2}$$

si bien que

$${z_0}'(x)+\frac{z_0}{x} = \frac{\lambda'(x)}{x}$$

Dès lors, z_0 est solution particulière si et seulement si $\lambda'(x)=1/x$ pour tout x. En particulier, $z_0 : x\mapsto\ln(x)/x$ est solution particulière. Par conséquent, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in I$,

$$\frac{1}{y(x)} = z(x) = \frac{\lambda+\ln(x)}{x}$$

De plus, z ne s'annule pas donc $\lambda\geq 0$ car, si $\lambda<0$, alors z s'annule en $e^{-\lambda}>1$. Finalement, les solutions de l'équation non linéaire (E) sont les fonctions

$$y : x\mapsto\frac{x}{\lambda+\ln(x)}$$

où λ est un réel positif. Si on prend des réels non positifs, on a toujours des solutions mais pas sur I tout entier : bienvenue dans le monde des équations non linéaires, dans lequel l'existence d'une solution sur tout l'intervalle n'est pas automatique (cf. exemple suivant).

Exercice 12 : ✪ À l'aide du changement de variable $z=y^2$, résoudre l'équation différentielle $yy'+y^2=\dfrac{e^{-2x}}{2}$.

Correction : Là aussi, soit y dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $z=y^2$. Alors z est dérivable et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $z'=2yy'$ si bien que y est solution de l'équation de l'énoncé si et seulement si $z'+2z=e^{-2x}$. On trouve aisément que les solutions de cette équation différentielle sont les fonction de la forme

$$z : x \mapsto (\lambda + x)e^{-2x}$$

Par conséquent, les solutions de l'équation de l'énoncé sont les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto \pm\sqrt{\lambda + x} \times e^{-x}$$

Cependant, cela n'est possible que sur $]-\lambda\,;+\infty[$. En effet, en dehors de $[-\lambda\,;+\infty[$, y n'est pas définie et y n'est pas dérivable en $-\lambda$ (on le voit en calculant le taux d'accroissement). En conclusion, les solutions sont exactement les fonctions de la forme :

$$y : \left\{\begin{array}{ccc}]-\lambda\,;+\infty[& = & \mathbb{R} \\ & & \\ x & \mapsto & \pm\sqrt{\lambda + x} \times e^{-x} \end{array}\right.$$

où λ est un réel quelconque.

4 Étude qualitative

Exercice 13 : ✪ Soit $(H) : y'' + ay' + by = 0$ une EDL homogène à coefficients constants, et soit f une solution de (H). Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$.

Correction : Montrons par récurrence que f est $\mathscr{C}^n$ pour tout n.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « f est $\mathscr{C}^n$ ».
2. f est solution de (H) donc est dérivable deux fois. En particulier, f est continue i.e. $\mathscr{C}^0$ et f est dérivable et f' est dérivable donc continue, c'est-à-dire que f est $\mathscr{C}^1$. En d'autres termes, H_0 et H_1 sont vraies (on verra ci-dessous pourquoi il est nécessaire de prouver H_1).
3. Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, f est $\mathscr{C}^n$ et $n \geq 1$ (c'est ici qu'il faut avoir $n \geq 1$) donc f' est $\mathscr{C}^{n-1}$. $f'' = -af' - bf$ est donc une combinaison linéaire de fonctions $\mathscr{C}^{n-1}$ donc f est $\mathscr{C}^{n+1}$: H_{n+1} est vraie.
4. D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 : ✪✪ Soient $T > 0$ et b et c deux fonctions continues T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les deux questions sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' + b(x)y = c(x)$.
2. Montrer qu'une solution y de (E) est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.

Correction :

1. Soit B une primitive de b (une telle primitive existe car b est continue). Tout d'abord,

$$S_H = \{x \mapsto \lambda e^{-B(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Soit $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et soit $y_0 : x \mapsto \lambda(x)e^{-B(x)}$. Alors y_0 est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y_0`(x) = (\lambda'(x) - \lambda(x)b(x))e^{-B(x)} \qquad \text{et} \qquad y_0'(x) + b(x)y_0(x) = \lambda'(x)e^{-B(x)}$$

c'est-à-dire que y_0 est solution de (E) si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda'(x) = c(x)e^{B(x)}$. Finalement,

$$y_0 : x \mapsto \left(\int_0^x c(t)e^{B(t)}\,\mathrm{d}t\right) \times e^{-B(x)}$$

est une solution particulière de (E). En conclusion,

$$S_E = \left\{x \mapsto \lambda e^{-B(x)} + e^{-B(x)} \times \int_0^x c(t)e^{B(t)}\,\mathrm{d}t \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

2. Si une solution y de (E) est T-périodique, alors $y(0) = y(T)$. Montrons la réciproque et supposons que y est une solution de (E) vérifiant $y(0) = y(T)$. Soit $f : x \mapsto y(x+T)$. Alors f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = y'(x+T)$ si bien que :

$$f'(x) + b(x)f(x) = y'(x+T) + b(x+T) \times y(x)$$

puisque b est T-périodique. Dès lors, y étant solution de (E), cette quantité est égale à $c(x+T) = c(x)$ puisque c est T-périodique. En d'autres termes, f est solution de (E) et puisque $y(T) = y(0)$, alors $f(0) = y(0)$. En conclusion, f et y sont toutes les deux solutions de (E) et coïncident en 0 donc, par unicité au problème de Cauchy, sont égales, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x+T) = y(x)$: y est bien T-périodique.