Feuille d'exercices - Chapitre 24

Vrai ou Faux ?

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente alors $u_{n+1} \sim u_n$.
2. $(n+1)! \sim n!$
3. Au voisinage de $0, x^3 = \mathrm{o}\left(x^2\right)$.
4. Au voisinage de $+\infty, x^3 = \mathrm{o}\left(x^2\right)$.
5. Au voisinage de $0, 1/x^2 = \mathrm{o}\left(1/x\right)$.
6. Si $u_n \sim v_n$ alors $2u_n \sim 2v_n$.
7. Au voisinage de $+\infty$, si $f(x) = \mathrm{o}\left(2x\right)$ alors $f(x) = \mathrm{o}\left(x\right)$.
8. Au voisinage de $+\infty$, si $f(x) \sim g(x)$ alors $xf(x) \sim (x+1)g(x)$.
9. Au voisinage de 0, si $f(x) \sim g(x)$ alors $xf(x) \sim (x+1)g(x)$.
10. Si $u_n \sim v_n$ et si (u_n) est décroissante alors (v_n) est décroissante.
11. Si $u_n \sim v_n$ et si $w_n \leq u_n$ alors $w_n \leq v_n$.
12. Si $u_n = \mathrm{o}\left(v_n\right)$ et si $0 \leq w_n \leq u_n$ alors $w_n = \mathrm{o}\left(v_n\right)$.
13. Si $f(x) + \mathrm{o}\left(x\right) = g(x) + \mathrm{o}\left(x\right)$ alors $f(x) = g(x)$.
14. $x \times \mathrm{o}\left(x\right) = \mathrm{o}\left(x^2\right)$.
15. $1/2n^2 = \mathrm{o}\left(1/n\right)$
16. $1/2n^2 \sim 1/n^2$.
17. $\sin(2ne^n) = \mathrm{O}\left(1\right)$.
18. $\ln(1 + 2ne^{-n}) = \mathrm{O}\left(1\right)$.
19. $\ln(1 + 2ne^n) = \mathrm{O}\left(1\right)$.

1 Analyse asymptotique sans DL :

Exercice 1 : ✪ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Donner un équivalent de $\dbinom{p+n}{n}$ quand $n \to +\infty$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n+p}{n} = \frac{(n+p)!}{n!p!} = \frac{(n+p)\cdots(n+1)}{p!}$$

Chaque terme du numérateur est équivalent à n donc, par produit (l'équivalent passe au produit d'un nombre fini et fixe de termes), puisqu'il y a p termes :

$$\binom{n+p}{p} \sim \frac{n^p}{p!}$$

Exercice 2 : ✪ Donner un équivalent simple de u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{(3n+12)(2n+5)}{(2n+2021)(3n^2+7n-14)}$
2. $u_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$
3. $u_n = 3^n \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$
4. $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1}$
7. $u_n = \dfrac{1}{n} + e^{-n}$
8. $u_n = e^{-n} + e^{-2n}$
9. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$
10. $u_n = \dfrac{1-\cos\left(\sqrt{1/n}\right)}{1-\cos\left(\sqrt{2/n}\right)}$
11. $u_n = \ln(1+n) \times \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$
12. $u_n = \sin\left(n^2+1\right) - \sqrt{n}$
13. $u_n = \ln(2022n)$
14. $u_n = \ln\left(n^2+n+1\right)$
15. $u_n = e^{n^2+n+1}$
16. $u_n = \dfrac{1}{\sin(1/n)} - \ln(n)$
17. $u_n = n^2 + n - \ln\left(n^3+n\right)$
18. $u_n = \dfrac{\left\lfloor \left(5n - \frac{1}{2}\right)^4 \right\rfloor}{\left\lfloor \left(4n + \frac{1}{3}\right)^3 \right\rfloor}$
19. $u_n = \operatorname{Arctan}\left(n^2 - n\right) + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
20. $u_n = \dfrac{\lfloor e^n \rfloor - e^n + \sqrt{n^2+n+1}}{\ln(n) - n^{1/3} + \pi}$

Correction :

1. $u_n \sim \dfrac{3n \times 2n}{2n \times 3n^2} = \dfrac{1}{n}$.

2. $\dfrac{\pi}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \sim \dfrac{\pi}{2n}$
3. $\dfrac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \sim 3^n \times \dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.
4. $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
5. $u_n = \dfrac{n-1-n}{n(n-1)} = \dfrac{-1}{n(n-1)} \sim \dfrac{-1}{n^2}$.
6. On pourra faire la même chose mais on va voir une autre méthode. On a deux quantités équivalentes à $\dfrac{1}{n}$ mais on ne peut pas sommer les équivalents : il suffit de les écrire avec un $\mathrm{o}\,()$. En d'autres termes, $\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{2}{n}$.
7. Les suites géométriques sont négligeables devant $1/n$ donc $u_n \sim 1/n$.
8. $e^{-2n} = \mathrm{o}\left(e^{-n}\right)$ (il suffit de faire le quotient : ce dernier tend vers 0) donc $u_n \sim e^{-n}$.
9. $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ car $\dfrac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ (on pourra former le quotient pour s'en convaincre).
10. $\sqrt{1/n}$ et $\sqrt{2/n}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc $1-\cos(\sqrt{1/n}) \sim (\sqrt{1/n})^2/2 = 1/2n$ et $1-\cos(\sqrt{2/n}) \sim (\sqrt{2/n})^2/2 = 1/n$ donc
$$u_n \sim \frac{1/2n}{1/n} = 1/2$$
11. Tout d'abord, $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$. Pour l'autre, il faut mettre en facteur le terme dominant : $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \ln(n)$ car l'autre terme est négligeable (un terme qui tend vers 0 est négligeable devant un terme qui tend vers $+\infty$). Finalement, $u_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$.
12. La fonction sinus est bornée donc est négligeable devant $\sqrt{n}$ et donc $u_n \sim -\sqrt{n}$.
13. $u_n = \ln(2022) + \ln(n) = \ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right) \sim \ln(n)$.
14. Factorisons dans le $\ln(n)$ ce qui donne :
$$u_n = \ln(n^2) + \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 2\ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right) \sim 2\ln(n)$$
15. On ne peut pas donner un équivalent plus simple de u_n ! Et surtout par e^{n^2} ou e^{n^2+n} puisque le quotient ne tend pas vers 1 !
16. Tout d'abord, $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sin(1/n) \sim 1/n$ si bien que $1/\sin(1/n) \sim n$. Attention, on ne peut pas sommer les équivalents ! On écrit $u_n = n + \mathrm{o}\,(n) - \ln(n) \sim n$.
17. Idem, on factorise dans le ln, ce qui donne
$$u_n = n^2 + n - \ln\left(n^3\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = n^2 + n - 3\ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim n^2.$$
18. On sait que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ alors $\lfloor u_n \rfloor \sim u_n$ donc
$$u_n \sim \frac{\left(5n-\frac{1}{2}\right)^4}{\left(4n+\frac{1}{3}\right)^3} \sim \frac{5^4 n^4}{4^3 n^3} = \frac{5^4 n}{4^3}$$
19. La fonction sinus tend vers 0 et l'Arctangente vers $\pi/2$: $u_n \sim \pi/2$.
20. On aimerait dire au numérateur que l'exponentielle l'emporte, mais ce n'est pas aussi simple : sa partie entière lui est équivalente, pas négligeable. Cependant, $\lfloor e^n \rfloor - e^n \in\,]-1\,;1]$ donc, en particulier, est négligeable devant $\sqrt{n^2+n+1}$. Le numérateur est donc équivalent à $\sqrt{n^2+n+1} \sim \sqrt{n^2} = n$, tandis que le dénominateur est équivalent à $-n^{1/3}$. En conclusion, $u_n \sim -n/n^{1/3} = -n^{2/3}$.

Exercice 3 : ✪ Donner dans chaque cas un équivalent de $f(x)$ (quand $x \to 0$ puis quand $x \to +\infty$) ou de u_n :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + 3 + \dfrac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2^n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right) + \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n^2}$
3. $f(x) = x + \mathrm{o}\left(x\right) + x^2\ln(x) + \mathrm{o}\left(x^2\ln(x)\right) + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
4. $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right) + \dfrac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \dfrac{1}{n\ln(n)} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n\ln(n)}\right)$
5. $u_n = n + \mathrm{o}\left(n\right) + \sqrt{n} + \mathrm{o}\left(\sqrt{n}\right) + \dfrac{n^2}{\ln(n)} + n\ln(n) + \mathrm{o}\left(n\ln(n)\right) + \sqrt{2\pi} + \mathrm{o}\left(1\right)$.

Correction :

1. Au voisinage de $+\infty$, tous les termes sont négligeables devant 3 (sauf 3 évidemment) donc $f(x) \sim 3$. Au voisinage de 0, tous les termes sont négligeables devant $1/x^2$ (sauf $1/x^2$) donc $f(x) \sim 1/x^2$.
2. Ici, c'est forcément quand $n \to +\infty$. Tous les termes sont négligeables devant $1/\sqrt{n}$ donc $u_n \sim 1/\sqrt{n}$.
3. Au voisinage de 0, tous les termes sauf x sont négligeables devant x (il suffit de faire le quotient ou de se souvenir que, au voisinage de 0, ce sont les plus petites puissances qui l'emportent) donc $f(x) \sim x$. Au voisinage de $+\infty$, tous les termes sauf $x^2\ln(x)$ sont négligeables devant $x^2\ln(x)$ donc $f(x) \sim x^2\ln(x)$.
4. $u_n \sim \ln(n)/n$.
5. $u_n \sim n^2/\ln(n)$.

Exercice 4 : ✪ Trouver une fonction f telle qu'au voisinage de $+\infty$, $\ln^n(x) = \mathrm{o}\left(f(x)\right)$ et $f(x) = \mathrm{o}\left(x^{1/n}\right)$.

Correction : On cherche donc une fonction « comprise entre les logs et les puissances de x ». On cherche une fonction f qui l'emporte sur toutes les fonctions du type $x \mapsto e^{n\ln(\ln(x))}$ mais qui soit négligeable devant toutes les fonctions du type $x \mapsto e^{\ln(x)/n}$. Montrons que $f : x \mapsto e^{\sqrt{\ln(x)}}$ convient. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $u = \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors

$$n\ln(\ln(x)) - \sqrt{\ln(x)} = n\ln(u) - \sqrt{u} \sim -\sqrt{u} = -\sqrt{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

et

$$\sqrt{\ln(x)} - \frac{\ln(x)}{n} = \sqrt{u} - \frac{u}{n} \sim -\frac{u}{n} = -\frac{\ln(x)}{n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

ce qui prouve (il suffit de faire le quotient et d'utiliser les limites ci-dessus) que $\ln(x)^n = \mathrm{o}\left(f(x)\right)$ et $f(x) = \mathrm{o}\left(x^{1/n}\right)$.

Exercice 5 : ✪ Soient a et b strictement supérieurs à 1. Montrer que $n^n = \mathrm{o}\left(a^{b^n}\right)$.

Correction : Ce n'est pas une croissance comparée du cours : il n'y a rien d'autre que la définition. Soit $n \geq 1$.

$$\frac{n^n}{a^{b^n}} = e^{n\ln(n) - b^n\ln(a)}$$

Or, $b > 1$ et $\ln(a) \neq 0$ donc $n\ln(n) = \mathrm{o}\left(b^n\ln(a)\right)$ si bien que $n\ln(n) - b^n\ln(a) \sim -b^n\ln(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ car $\ln(a) < 0$. On en déduit que

$$\frac{n^n}{a^{b^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 6 : ✪

1. Donner le domaine de définition de

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Donner un équivalent en 0^+ puis en 1^- de f. En déduire que f est prolongeable par continuité en 1. f ainsi prolongée est-elle dérivable en 1 ?

2. Mêmes questions au voisinage de 0^+ avec

$$f : x \mapsto 2x \times \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2x}} \right\rfloor - \frac{1}{\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor}$$

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est définie en x si et seulement si $x > 0$ et $1 - x^2 > 0$, si et seulement si $x > 0$ et $x \in \left]-1\,;1\right[$. Ainsi $D_f = \left]0\,;1\right[$. Supposons donc $x \in \left]0\,;1\right[$. On a un quotient : on essaye de donner un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur.
   - Au voisinage de 0, on ne peut pas donner un équivalent plus simple du numérateur (l'équivalent usuel $\ln(1+u) \sim u$ n'est valable que quand u tend vers 0, c'est-à-dire quand ce qu'il y a dans le ln est au voisinage de 1, voir point suivant) et, au voisinage de 0, $\sqrt{1-x^2} \sim 1$, c'est-à-dire que $f(x) \sim \ln(x)$.
   - Au voisinage de 1, ce n'est pas aussi simple. Tout d'abord, on ne peut pas dire que le dénominateur est équivalent à 0 (c'est un interdit absolu). Reconnaissons une identité remarquable : au voisinage de 1,
   $$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{2(1-x)}.$$
   De plus, on est au voisinage de 1, donc $\ln(x) = \ln(1 + (x-1)) \sim (x-1)$ car $x - 1 \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ et on peut utiliser l'équivalent usuel rappelé ci-dessus. Attention, $x - 1 < 0$ car $x < 1$, donc $x - 1 = -(1-x) = -\sqrt{(1-x)^2}$. Finalement, $f(x) \sim \dfrac{-\sqrt{(1-x)^2}}{\sqrt{2(1-x)}} = -\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} \xrightarrow[x\to 1]{} 0$. On peut donc prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$. De plus, l'équivalent passe au quotient donc :
   $$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{f(x)}{x-1} \sim -\sqrt{\frac{1-x}{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{(1-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty.$$
   Le taux d'accroissement de f n'admet pas de limite finie en 1 : la fonction n'est pas dérivable en 1 (mais son graphe admet en 1 une tangente verticale, cf. chapitre 14).
2. On a prouvé dans l'exercice 27 du chapitre 2 que f est définie sur $\left]0\,;1\right]$. On rappelle que si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ alors, au voisinage de a, $\lfloor g(x) \rfloor \sim g(x)$. Or, $1/\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, si bien que
   $$\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2x}} \right\rfloor \sim \frac{1}{\sqrt{2x}} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\lfloor 1/\sqrt{x} \rfloor} \sim \frac{1}{1/\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$
   Attention, l'équivalent ne passe pas à la somme : il faut écrire ces équivalents avec un o (), d'où :
   $$f(x) = 2x \times \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - \left(\sqrt{x} + \mathrm{o}\left(\sqrt{x}\right)\right) = \sqrt{2x} - \sqrt{x} + \mathrm{o}\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{x} + \mathrm{o}\left(\sqrt{x}\right)$$
   En conclusion, au voisinage de 0, $f(x) \sim \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{x}$. On en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Cependant, si $x > 0$:
   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \sim \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$
   donc f ainsi prolongée n'est pas dérivable en 0.

Exercice 7 : ✪ Soient $q > 0, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Donner un équivalent de :
$$u_n = \frac{q^n + n^\alpha}{1 + \ln(n)^\beta}$$

Correction : Séparons les cas selon les valeurs de q, α et β. Rappelons que pour donner un équivalent d'une fraction, il suffit de donner un équivalent du numérateur et du dénominateur.

- Si $q > 1$ alors $q^n + n^\alpha \sim q^n$ (peu importe α).
- Si $q \leq 1$ et $\alpha > 0$ alors $q^n + n^\alpha \sim n^\alpha$.
- Si $q = 1$ et $\alpha = 0$ alors $q^n + n^\alpha = 2$ (donc est équivalent à 2).
- Si $q = 1$ et $\alpha < 0$ alors $q^n + n^\alpha \sim 1$.
- Si $q < 1$ et $\alpha < 0$ alors $q^n + n^\alpha \sim n^\alpha$.
- Si $\beta > 0$ alors $1 + \ln(n)^\beta \sim \ln(n)^\beta$.
- Si $\beta = 0$ alors $1 + \ln(n)^\beta = 2$ donc est équivalent à 2.
- Si $\beta < 0$ alors $1 + \ln(n)^\beta \sim 1$.

On en déduit un équivalent de u_n :

- Si $q > 1$: si $\beta > 0$ alors $u_n \sim q^n/\ln(n)^\beta$; si $\beta = 0$ alors $u_n \sim q^n/2$ et si $\beta < 0$ alors $u_n \sim q^n$.
- Si $q \leq 1$ et $\alpha > 0$: si $\beta > 0$ alors $u_n \sim n^\alpha/\ln(n)^\beta$; si $\beta = 0$ alors $u_n \sim n^\alpha/2$ et si $\beta < 0$ alors $u_n \sim n^\alpha$.
- Si $q = 1$ et $\alpha = 0$: si $\beta > 0$ alors $u_n \sim 2/\ln(n)^\beta$; si $\beta = 0$ alors $u_n = 1$ et si $\beta < 0$ alors $u_n \sim 2$.
- Si $q = 1$ et $\alpha < 0$: si $\beta > 0$ alors $u_n \sim 1/\ln(n)^\beta$; si $\beta = 0$ alors $u_n \sim 1/2$ et si $\beta < 0$ alors $u_n \sim 1$.

- Si $q<1$ et $\alpha<0$: si $\beta>0$ alors $u_n \sim n^\alpha/\ln(n)^\beta$; si $\beta=0$ alors $u_n\sim n^\alpha/2$ et si $\beta<0$ alors $u_n\sim n^\alpha$.

Exercice 8 : ✪ Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose :

$$u_n=\int_0^{\pi/4}(\tan(x))^{n+2}\,dx$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $u_{n+2}+u_n$. En déduire la limite de la suite (u_n) et un équivalent de u_n.

Correction :

1. Quand on ne sait pas par où démarrer pour une suite, on peut toujours s'intéresser à sa monotonie. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^{\pi/4}(\tan(x))^{n+3}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi/4}(\tan(x))^{n+2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}(\tan(x))^{n+2}(\tan(x)-1)\,\mathrm{d}x$$

   Or, pour tout $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, $0\le\tan(x)\le 1$: la fonction intégrée est donc négative. Par positivité de l'intégrale, $u_{n+1}-u_n\le 0$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Elle est évidemment minorée par 0 donc converge.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$u_{n+2}+u_n=\int_0^{\pi/4}(\tan(x))^{n+2}\left(1+\tan(x)^2\right)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\tan(x)^{n+3}}{n+3}\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{n+3}$$

   (on a reconnu une fonction du type $f^\alpha\times f'$). Or, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $u_n\ge u_{n+2}$: on en déduit que $2u_{n+2}\le u_n+u_{n+2}=\dfrac{1}{n+3}\le 2u_n$. En particulier, (l'inégalité de droite ci-dessous provient de ce qui précède appliqué à $n-2$ au lieu de n) : $\dfrac{1}{n+3}\le 2u_n\le\dfrac{1}{n+1}$ et donc $\dfrac{1}{2(n+3)}\le u_n\le\dfrac{1}{2(n+1)}$. On a encadré u_n par deux quantités équivalentes à $\dfrac{1}{2n}$ donc, d'après le cours, $u_n\sim 1/(2n)$ et en particulier $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

Exercice 9 : ✪

1. Soit (x_n) une suite décroissante de limite nulle telle que $x_n+x_{n-1}\sim\dfrac{1}{n}$. Montrer que $x_n\sim\dfrac{1}{2n}$.
2. Montrer que le résultat tombe en défaut si (x_n) n'est pas décroissante.

Correction :

1. La méthode est analogue à celle de l'exercice précédent. Soit $n\ge 1$. La suite (x_n) étant décroissante, $2x_n\le x_{n-1}+x_n\le 2x_{n-1}$. Par conséquent :

$$\frac{x_{n+1}+x_n}{2}\le x_n\le\frac{x_{n-1}+x_n}{2}$$

   L'inégalité de gauche vient de l'inégalité précédente en l'appliquant à $n+1$ au lieu de n. Par hypothèse :
   Or, par hypothèse,

$$\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\sim\frac{1}{2n}\qquad\text{et}\qquad\frac{x_{n+1}+x_n}{2}\sim\frac{1}{2(n+1)}\sim\frac{1}{2n}$$

   D'après le théorème d'encadrement, $x_n\sim 1/2n$.
2. Posons $x_n=1/n^2$ si n est impair et $x_n=1/n$ si n est pair (non nul). La suite $(x_n/2n)$ n'a pas de limite alors que $\dfrac{x_n+x_{n-1}}{1/n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ (séparer les termes pairs et les termes impairs).

Exercice 10 : ✪

1. Donner un équivalent de $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$
2. **Remake :** Soit $\alpha>0$. Donner un équivalent de la suite de terme général $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n k^\alpha$.

Correction :

1. Cela fait penser à une somme de Riemann. Pour tout $n \geq 1$, posons

$$T_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

Alors T_n est la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = \ln(1+x)$. f est continue donc continue par morceaux si bien que

$$T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$$

Le changement de variable $u = 1+x$, $x = u-1$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ donne :

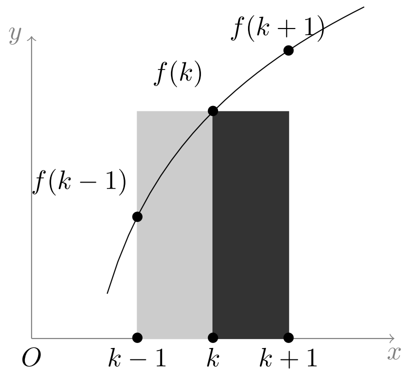
$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u \\ &= [u\ln(u) - u]_1^2 \\ &= 2\ln(2) - 2 + 1 \\ &= \ln(4) - 1 \end{aligned}$$

En d'autres termes, $T_n \sim \ln(4) - 1$ donc $S_n \sim n(\ln(4)-1)$.

2. À l'aide d'une somme de Riemann (cf. exercice 28 du chapitre 22) on prouve que

$$T_n = \frac{S_n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha+1}$$

donc $S_n \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. On peut aussi comparer à une intégrale pour obtenir ce résultat :



Prouvons ce résultat pour la fonction $f : x \longmapsto x^{\alpha}$ qui est bien croissante. Soit $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Soit $t \in [\,k\,;k+1\,]$. La fonction f étant croissante, $k^{\alpha} \leq t^{\alpha}$ et, par croissance de l'intégrale (on intègre sur l'intervalle sur lequel l'inégalité est vérifiée), $\displaystyle\int_k^{k+1} k^{\alpha}\,\mathrm{d}t = k^{\alpha} \leq \int_k^{k+1} t^{\alpha}\,\mathrm{d}t$. On trouve de même l'inégalité de gauche. Si on somme pour k allant de 1 à n, en utilisant la relation de Chasles, il vient : $\displaystyle\int_0^n t^{\alpha}\,\mathrm{d}t \leq S_n \leq \int_1^{n+1} t^{\alpha}\,\mathrm{d}t$. En intégrant, on obtient : $\dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq S_n \leq \dfrac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$. S_n est encadrée par deux quantités équivalentes à $\dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ donc est elle-même équivalente à $\dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Exercice 11 : ✪✪ Soient a et b strictement positifs.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \ln(n)$ (on pourra comparer à une intégrale) et montrer finalement que

$$\left(\prod_{k=1}^{n}(a+kb)\right)^{1/n} \sim b(n!)^{1/n}$$

Correction :

1. Découle de la concavité de $x \mapsto \ln(1+x)$.

2. L'équivalent a été prouvé dans le chapitre 22. Notons $u_n = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^n (a+kb)\right)^{1/n}$. Alors :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\prod_{k=1}^n (kb) \times \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{a}{kb}\right)\right)^{1/n} \\ &= \left(b^n n! \times \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{a}{kb}\right)\right)^{1/n} \\ &= b \times (n!)^{1/n} \times \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{a}{kb}\right)^{1/n} \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{a}{kb}\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On va pour cela utiliser la question précédente. $v_n \geq 1$ donc on peut calculer son ln et celui-ci est positif :

$$0 \leq \ln(v_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{a}{kb}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{a}{kb}$$

Or,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{a}{kb} \sim \frac{a\ln(n)}{bn} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\ln(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après le théorème d'encadrement. L'exponentielle étant continue, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ ce qui permet de conclure.

Exercice 12 : ✪✪ Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k}$$

1. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. Montrer que $u_n \sim \dfrac{n}{2}$.

Correction :

1. Soit $n \geq 1$. Une racine carrée étant positive, $u_n \geq 0$ pour tout n.

$$\begin{aligned} {u_{n+1}}^2 &= u_n + \sum_{k=1}^{n-1} u_k \\ &= u_n + {u_n}^2 \\ &\geq {u_n}^2 \end{aligned}$$

et la racine carrée est croissante donc $u_{n+1} \geq u_n$: la suite est croissante. Si elle converge vers une limite L alors L est un point fixe de $f : x \mapsto \sqrt{x+x^2}$ puisque f est continue et puisque pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + {u_n}^2}$, c'est-à-dire que $L = \sqrt{L+L^2}$ donc $L^2 = L + L^2$ si bien que $L = 0$ ce qui est absurde puisque $u_0 > 0$ et (u_n) est croissante. La suite (u_n) est croissante et ne converge pas donc diverge vers $+\infty$.
2. D'après la question précédente, ${u_{n+1}}^2 - {u_n}^2 = u_n$ donc, tout d'abord :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{u_{n+1} + u_n} \\ &= \frac{1}{1 + \dfrac{u_{n+1}}{u_n}} \end{aligned}$$

De plus :

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 = \frac{1}{u_n} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. La racine carrée étant continue, $u_{n+1}/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ si bien que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$. D'après le théorème de Cesàro,

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = u_n - u_0 \sim \frac{n}{2}$$

Or, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $u_n - u_0 \sim u_n$ ce qui permet de conclure.

Exercice 13 : ✪✪✪ Soit (a_n) une suite arithmétique de raison non nulle. Donner, avec le moins de calculs possibles, la limite de la suite de terme général

$$b_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}a_k a_{k+1}}{{a_{2n+2}}^4}$$

Si $p \in \mathbb{N}^*$, généraliser avec la suite de terme général

$$b_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \times a_{k+1} \times \cdots \times a_{k+p}}{{a_{2n-3}}^{p+2}}$$

On pourra utiliser la question 2 de l'exercice 10.

Correction :

1. Tout d'abord, il existe $q \neq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 + nq$. On a un quotient : donnons un équivalent du numérateur et du dénominateur. Puisque $a_{2n+2} = a_0 + (2n+2)q \sim 2nq$, alors le dénominateur est équivalent à $(2nq)^4$ (l'équivalent passe à la puissance fixe). Donnons un équivalent du numérateur, que l'on note T_n. On a tout d'abord :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}(a_0 + (k-1)q) \times (a_0 + kq) \times (a_0 + (k+1)q)$$

En développant, on obtient une combinaison linéaire de puissances de k, plus précisément de 1 jusque k^3. Attention, on ne peut pas sommer les équivalents : l'idée est d'utiliser la question précédente et de dire que la seule somme « importante » est la somme des k^3, les autres étant négligeables. Montrons cela rigoureusement. Il existe $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ tels que, pour tout k (et en particulier les x_i ne dépendent pas de k) :

$$(a_0 + (k-1)q) \times (a_0 + kq) \times (a_0 + (k+1)q) = q^3k^3 + x_2k^2 + x_1k + x_0$$

Le coefficient devant k^3 est q^3 puisque, si on développe, le seul moyen d'avoir k^3 est de multiplier entre eux tous les qk. Puisque les autres termes sont amenés à être négligeables, inutile de les expliciter ! Par somme,

$$T_n = q^3\sum_{k=1}^{n}k^3 + x_2\sum_{k=1}^{n}k^2 + x_1\sum_{k=1}^{n}k + x_0\sum_{k=1}^{n}1$$

La première somme (qui vaut $n^2(n+1)^2/4$) est équivalente à $n^4/4$ et les autres sommes sont toutes négligeables devant n^4. En d'autres termes, $T_n = q^3 \times \left(\frac{n^4}{4} + \mathrm{o}\left(n^4\right)\right) + \mathrm{o}\left(n^4\right)$. Finalement, $T_n \sim q^3 \times \frac{n^4}{4}$ si bien que $b_n \sim \dfrac{q^3 \times \frac{n^4}{4}}{(2nq)^4} = \dfrac{1}{42^4 \times q}$ et donc $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/64q$.

2. Tout d'abord, il existe $q \neq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 + nq$. On a un quotient : donnons un équivalent du numérateur et du dénominateur. Puisque $a_{2n-3} = a_0 + (2n-3)q \sim 2nq$, alors le dénominateur est équivalent à $(2nq)^{p+2}$ (l'équivalent passe à la puissance fixe). Donnons un équivalent du numérateur, que l'on note T_n. On a tout d'abord :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} (a_0 + kq) \times (a_0 + (k+1)q) \times \cdots \times (a_0 + (k+p)q)$$

Il y a $k+1$ termes dans le produit : en développant, on obtient une combinaison linéaire de puissances de k, plus précisément de 1 jusque k^{p+1}. Attention, on ne peut pas sommer les équivalents : l'idée est d'utiliser la question précédente et de dire que la seule somme « importante » est la somme des k^{p+1}, les autres étant négligeables. Montrons cela rigoureusement. Il existe $(x_0, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que, pour tout k (et en particulier les x_i ne dépendent pas de k) :

$$(a_0 + kq) \times (a_0 + (k+1)q) \times \cdots \times (a_0 + (k+p)q) = q^{p+1}k^{p+1} + x_p k^p + \cdots + x_1 k + x_0$$

Le coefficient devant k^{p+1} est q^{p+1} puisque, si on développe, le seul moyen d'avoir k^{p+1} est de multiplier entre eux tous les qk. Puisque les autres termes sont amenés à être négligeables, inutile de les expliciter ! Par somme,

$$T_n = q^{p+1} \sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + x_p \sum_{k=1}^{n} k^p + \cdots + x_1 \sum_{k=1}^{n} k + x_0 \sum_{k=1}^{n} 1$$

D'après la question 2 de l'exercice 10, la première somme est équivalente à $n^{p+2}/(p+2)$ et les autres sommes sont toutes négligeables devant n^{p+2} (par exemple, la somme de k^p est équivalente à $n^{p+1}/(p+1)$). En d'autres termes, $T_n = q^{p+1} \times \left(\dfrac{n^{p+2}}{p+2} + \mathrm{o}\left(n^{p+2}\right) \right) + \mathrm{o}\left(n^{p+2}\right)$. Finalement, $T_n \sim q^{p+1} \times \dfrac{n^{p+2}}{p+2}$ si bien que $b_n \sim \dfrac{q^{n+1} \times \dfrac{n^{p+2}}{p+2}}{(2nq)^{p+2}} = \dfrac{1}{(p+2)2^{p+2} \times q}$ et donc $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{(p+2)2^{p+2} \times q}$.

Exercice 14 : ✪✪✪ Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un unique réel $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lfloor a \lfloor na \rfloor \rfloor - \lfloor na \rfloor = n - 1$$

1. Donner l'unique valeur possible de a. On désire maintenant montrer que cette valeur convient effectivement.
2. En remarquant que a est irrationnel, montrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor na \rfloor}{a} \right\rfloor = n - 1$$

3. Conclure (on pourra exprimer $1/a$ en fonction de a et 1).

Correction :

1. Soit a un réel strictement positif qui convient. Rappelons que si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pm\infty$ alors $\lfloor u_n \rfloor \sim u_n$. Par conséquent, $\lfloor na \rfloor \sim na$ et $\lfloor a \lfloor na \rfloor \rfloor \sim a \lfloor na \rfloor \sim na^2$. Cependant, on ne peut pas sommer les équivalents : il suffit de les écrire avec des o. On en déduit que :

$$na^2 - na + \mathrm{o}(n) = n - 1$$

Par conséquent, $n - 1 \sim n(a^2 - a)$. Or, $n - 1 \sim n$ donc $n \sim n(a^2 - a)$ donc $a^2 - a = 1$ (sinon, le quotient ne tend pas vers 1) et donc $a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (puisque $a > 0$).

2. Par définition de la partie entière, $na - 1 < \lfloor na \rfloor \leq na$ donc

$$n - 1 < n - \frac{1}{a} < \frac{\lfloor na \rfloor}{a} \leq n$$

L'inégalité de gauche vient du fait que $a > 1$. Or, a est irrationnel donc l'inégalité de droite ne peut pas être une égalité donc est stricte : $\lfloor na \rfloor / a \in \left] n-1 \,; n \right[$ donc sa partie entière est bien égale à $n - 1$.

3. On sait que $a^2 = a + 1$ (cf. première question, et aussi parce qu'on a reconnu le nombre d'or) donc $\dfrac{1}{a} = a - 1$. D'après la question précédente,

$$\lfloor \lfloor na \rfloor (a+1) \rfloor = n - 1$$

Or, on peut sortir les entiers lorsque ce sont des constantes additives donc :

$$\lfloor \lfloor na \rfloor (a+1) \rfloor = \lfloor a \lfloor na \rfloor + \lfloor na \rfloor \rfloor = \lfloor a \lfloor na \rfloor \rfloor + \lfloor na \rfloor$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 15 : ✪✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n}$$

On se donne enfin un réel λ strictement positif dans tout l'exercice.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > n$ tel que $f_n(x_n) = \lambda$.
2. Soit $\alpha > 1$. Montrer que la suite de terme général $f_n(\alpha n)$ converge vers une limite que l'on explicitera.
3. Montrer finalement que :

$$x_n \sim \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1} \times n$$

Correction :

1. La fonction f_n est dérivable sur son domaine de définition en tant que somme de fonctions dérivables, et pour tout $x \in D_{f_n}$

$$f_n(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \cdots - \frac{1}{(x-n)^2} < 0$$

Attention, cela ne veut pas dire que f_n est strictement décroissante ! Elle est strictement décroissante **sur tout intervalle composant son domaine de définition**, en particulier sur $]\, n\,;+\infty\,[$, et cela nous suffit. f_n est de plus continue sur cet intervalle. Calculons les limites aux bornes.

- **En n^+ :** Calculons les limites de chacun des termes de la somme.

$$\frac{1}{x-1} \xrightarrow[x \to n^+]{} \frac{1}{n-1} \in \mathbb{R}, \frac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to n^+]{} \frac{1}{n-2} \in \mathbb{R} \ldots, \frac{1}{x-n-1} \xrightarrow[x \to n^+]{} 1 \in \mathbb{R}$$

et $\dfrac{1}{x-n} \xrightarrow[x \to n^+]{} +\infty$. Par opérations sur les limites, $f_n(x) \xrightarrow[x \to n^+]{} +\infty$.

- **En** $+\infty$ Tous les termes tendent vers 0 et une somme (finie, et avec un nombre fixe de termes !) de termes tendant vers 0 tend vers 0. Ainsi, $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

On peut donc appliquer le théorème de la bijection pour conclure.

2. En utilisant l'écriture de f_n sous forme de somme

$$f_n(n\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha - k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha - \dfrac{k}{n}}$$

On reconnaît une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $t \mapsto 1/(\alpha - t)$. Cette fonction étant continue sur $[\,0\,;1\,]$ (car $\alpha > 1$),

$$f_n(n\alpha) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\alpha - t} = [-\ln(\alpha - t)]_0^1 = \ln(\alpha) - \ln(\alpha - 1) = g(\alpha)$$

où g est la fonction $x \mapsto \ln(x) - \ln(x-1) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

3. L'idée est que si $g(\alpha) = \lambda$ alors $f_n(n\alpha)$ tend vers λ qui est égal à $f_n(x_n)$ donc x_n va être à peu près égal à $n\alpha$. Cherchons donc la valeur de α pour laquelle $g(\alpha) = \lambda$. On n'oublie pas de travailler par équivalences quand on résout une équation.

$$g(\alpha) = \lambda \iff \frac{\alpha}{\alpha - 1} = e^\lambda \iff \alpha\left(1 - e^\lambda\right) = -e^\lambda \iff \alpha = \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la question 2 :

$$f_n(n(\alpha + \varepsilon)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(\alpha + \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad f_n(n(\alpha - \varepsilon)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(\alpha - \varepsilon)$$

Or, il est facile de prouver que g est strictement décroissante. Par conséquent, $g(\alpha + \varepsilon) < g(\alpha) < g(\alpha - \varepsilon)$ et donc

- Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0, f_n(n(\alpha+\varepsilon)) < g(\alpha)$.
- Il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1, f_n(n(\alpha-\varepsilon)) > g(\alpha)$.

Prenons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Pour tout $n \geq n_2$:

$$f_n(n(\alpha+\varepsilon)) < g(\alpha) = \lambda < f_n(n(\alpha-\varepsilon))$$

La fonction f_n étant strictement décroissante sur $]\, n\,;+\infty\,[$ (on rappelle que $\lambda = f_n(x_n)$) :

$$\forall n \geq n_2, \qquad n(\alpha+\varepsilon) > x_n > n(\alpha-\varepsilon)$$

On a donc montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2, \forall n \geq n_2, \qquad \alpha+\varepsilon > \frac{x_n}{n} > \alpha - \varepsilon$$

c'est-à-dire :

$$\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha = \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1}$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 16 : ✪✪✪ On pose $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 2, u_4 = u_5 = u_6 = 3$ etc. Donner un équivalent de u_n.

Correction : Cherchons une expression explicite de u_n en fonction de n. Un terme égal à 1, deux termes égaux à 2, trois termes égaux à 3 etc. On pense à la somme des entiers $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Plus précisément, pour tout n, $u_p = n$ pour tout $p \in [\![\, T_{n-1}+1\,;\, T_n \,]\!]$ c'est-à-dire que :

$$\forall \frac{(n-1)n+2}{2} \leq p \leq \frac{n(n+1)}{2}, u_p = n$$

Raisonnons à l'envers et fixons p : cherchons quelle valeur de n vérifie l'inégalité ci-dessus. L'entier n est l'entier pour lequel $T_{n-1}+1 \leq p \leq T_n$. On cherche donc le plus grand n tel que $T_{n-1}+1 \leq p$ donc tel que $\dfrac{n(n-1)+2}{2} \leq p$ c'est-à-dire $n^2 - n + (2-2p) \leq 0$. Cette inégalité a pour discriminant $8p-7$ donc (n est positif) cette inégalité est valable pour tout $n \leq \dfrac{1+\sqrt{8p-7}}{2}$. Le plus grand entier n vérifiant cette condition est donc

$$n = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8p-7}}{2} \right\rfloor$$

Puisque, pour tout p vérifiant les deux inégalités ci-dessus, $u_p = n$ et que n est égal à la valeur ci-dessus, cela signifie que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, u_p = \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8p-7}}{2} \right\rfloor$$

En particulier :

$$u_p \sim \frac{\sqrt{8p-7}}{2} \sim \sqrt{2p}$$

2 Et le calcul fut - Et l'Homo Bestialus maîtrisa le calcul

2.1 DL

Exercice 17 : ✪ Donner les DL des fonctions suivantes en 0 aux ordres indiqués (il n'est pas interdit de réfléchir aux ordres avant de se lancer dans des calculs infernaux) et on fera attention aux multiples produits.

1. $f : x \mapsto \ln(1-x)\cos(x)$ à l'ordre 3.
2. $f : x \mapsto \cos(x)\ln(1-x^2)$ à l'ordre 5.
3. $f : x \mapsto \sin^2(x)\cos(x)$ à l'ordre 4.
4. $f : x \mapsto \sin(x^2)\cos(x)$ à l'ordre 4.
5. $f : x \mapsto (\sqrt{1-x}-1)\cos(x)$ à l'ordre 3.
6. $f : x \mapsto \tan(x)$ à l'ordre 8.
7. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x-x^2}$ à l'ordre 3.
8. $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ à l'ordre 4.
9. $f : x \mapsto e^{x-x^2}$ à l'ordre 3.
10. $f : x \mapsto \sin(x+x^2)$ à l'ordre 4.
11. $f : x \mapsto \dfrac{\tan(x)}{\sqrt[5]{1+3x^2}}$ à l'ordre 6.

12. $f : x \mapsto \sin^2(x)$ à l'ordre 6.
13. $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{1-\sin(x)}$ à l'ordre 5.
14. $f : x \mapsto e^{-x}/\cos(4x)$ à l'ordre 3.
15. $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+\operatorname{Arctan}^2(x)}$ à l'ordre 5.
16. $f : x \mapsto \cos\left(\sqrt{x+x^2}\right)$ à l'ordre 2.
17. $f : x \mapsto e^{\cos(x)}$ à l'ordre 6.
18. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ à l'ordre 5.
19. $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ à l'ordre 6.

Correction :

1. On fait le DL du ln à l'ordre 3 puisque le premier terme du cos est 1, et on fait le DL du cos à l'ordre 2 puisque le premier terme du ln est x. Tout d'abord,

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \mathrm{o}\left(u^3\right)$$

donc, avec $u = -x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= -x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= -x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

2. De même, on donne le cos à l'ordre 3 puisque le premier terme du ln sera à l'ordre 2, et on donne le ln à l'ordre 5 puisque le premier terme du cos est un 1. On applique le DL de $\ln(1+u)$ avec $u = x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ si bien que

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \times \left(-x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\ &= -x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}\left(x^5\right) \\ &= -x^2 + \mathrm{o}\left(x^5\right) \end{aligned}$$

3. Idem : $\sin^2$ à l'ordre 4 et cos à l'ordre 2 (car on multipliera tout par x^2 puisque $\sin(x)^2 \sim x^2$). De plus, on écrit le DL du sinus à l'ordre 3 : quand on mettra au carré, on aura le double produit $x \times \mathrm{o}\left(x^3\right) = \mathrm{o}\left(x^4\right)$ donc faire un DL du sinus à l'ordre 3 suffit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^2 \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= \left(x^2 - 2 \times x \times \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= x^2 - \frac{5x^4}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

4. Idem : sinus à l'ordre 4 et cos à l'ordre 2. On applique le DL de $\sin(u)$ avec $u = x^2$ qui tend bien vers 0 (et donc seul le premier terme apparaît puisque le terme suivant est du u^3 c'est-à-dire du x^6) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2 + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

5. Le premier terme du cos étant 1, on donne le DL de la quantité entre parenthèses à l'ordre 3. De plus, le premier terme de $(1+u)^\alpha$ étant 1, le premier terme du terme entre parenthèse sera du x donc le DL du cos à l'ordre 2 suffit. Rappelons que

$$(1+u)^\alpha \quad = \quad 1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)u^2}{2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)u^3}{6}+\mathrm{o}\left(u^3\right)$$

donc, avec $u=-x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\alpha = 1/2$:

$$\sqrt{1-x} \quad = \quad 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad \left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\times\left(1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= \quad -\frac{x}{2}+\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= \quad -\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{3x^3}{16}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

6. On connaît le DL à l'ordre 7 : la fonction tangente étant impaire, son coefficient d'ordre 8 est nul, si bien que

$$\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\mathrm{o}\left(x^8\right)$$

7. On applique le DL de $1/(1+u)$ avec $u=x-x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad 1-(x-x^2)+(x-x^2)^2-(x)^3+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= \quad 1-x+x^2+(x^2-2x\times x^2)-x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= \quad 1-x+2x^2-3x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

8. On applique le DL de $\ln(1+u)$ avec $u=x+x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$:

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad (x+x^2)-\frac{(x+x^2)^2}{2}+\frac{(x+x^2)^3}{3}-\frac{(x)^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= \quad x+x^2-\frac{1}{2}\left(x^2+2\times x\times x^2+x^4\right)+\frac{1}{3}\left(x^3+3x\times x\times x^2\right)-\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= \quad x+\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

9. DL de e^u avec $u=x-x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$:

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad 1+(x-x^2)+\frac{(x-x^2)^2}{2}+\frac{(x)^3}{3!}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= \quad 1+x-x^2+\frac{1}{2}\left(x^2-2x\times x^2\right)+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= \quad 1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

10. Idem :

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad (x+x^2)-\frac{(x+x^2)^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= \quad x+x^2-\frac{1}{6}\left(x^3+3\times x\times x\times x^2\right)+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= \quad x+x^2-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

11. On écrit $f(x)=\tan(x)\times(1+3x)^{-1/5}$: on va donc utiliser le DL de tangente à l'ordre 6 puisque le premier terme du $(1+u)^\alpha$ est 1, et le DL de $(1+3x)^{-1/5}$ à l'ordre 5 puisque le DL de tan commence par un x (pareil, DL de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha=-1/5$ et $u=3x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)\times\left(1-\frac{3x^2}{5}+\frac{27x^4}{25}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\ &= x-\frac{3x^3}{5}+\frac{27x^5}{25}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{2x^5}{15}+\mathrm{o}\left(x^6\right) \\ &= x-\frac{4x^3}{15}+\frac{76x^5}{75}+\mathrm{o}\left(x^6\right) \end{aligned}$$

12. On l'a vu plus haut : on va donner le DL du sinus à l'ordre 5 puisqu'en faisant le double produit $2x\mathrm{o}\left(()\,x^5\right)$ cela donnera du $\mathrm{o}\left(x^6\right)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)^2 \\ &= \left(x^2+\frac{x^6}{36}\right)+\left(2x\times\frac{-x^3}{6}+2x\times\frac{x^5}{120}\right)+\mathrm{o}\left(x^6\right) \\ &= x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2x^6}{45}+\mathrm{o}\left(x^6\right) \end{aligned}$$

13. Le premier terme du numérateur va être en x^2 donc il suffit de donner un DL du sinus à l'ordre 3. De plus, le premier terme de $1/(1-\sin(x))$ va être 1 donc il faut donner un DL du cos à l'ordre 5.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\times\frac{1}{1-x+\dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)} \\ &= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\times\frac{1}{1+\left(-x+\dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)} \\ &= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\times\left(1-\left(-x+\frac{x^3}{6}\right)+(-x)^2-(-x)^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\times\left(1+x+x^2+\frac{5x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{5x^5}{12}-\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{24}+\mathrm{o}\left(x^6\right) \\ &= \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{11x^4}{24}+\frac{3x^5}{8}+\mathrm{o}\left(x^6\right) \end{aligned}$$

14. Là, il faut aller à l'ordre 3 partout puisque les deux DL commencent par 1 :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x}\times\frac{1}{1-\dfrac{16x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^3\right)} \\ &= \left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\times\left(1+8x^2+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= 1+8x^2-x-8x^3+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= 1-x+\frac{17x^2}{2}-\frac{49x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

15. Tout d'abord (et puisqu'on veut $\mathrm{Arctan}^2=\mathrm{Arctan}\times\mathrm{Arctan}$ à l'ordre 5, il suffit d'aller à l'ordre 4 dans l'Arctan, puisque tous les termes seront multipliés au moins par x),

$$\text{Arctan}(x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3} + \text{o}\left(x^4\right)\right)^2 = x^2 - \frac{2x^4}{3} + \text{o}\left(x^5\right)$$

et $(1+u)^{1/3} = 1 + \dfrac{u}{3} - \dfrac{u^2}{9} + \text{o}\left(u^2\right)$. D'où :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{2x^4}{3}\right) - \frac{1}{9}\left(x^2\right)^2 + \text{o}\left(x^5\right)$$

Finalement :

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{3} + \text{o}\left(x^5\right)$$

16. Mettons $\sqrt{x}$ en facteur ce qui donne :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos\left(\sqrt{x}(1+x)^{1/2}\right) \\
&= \cos\left(\sqrt{x}\left(1 + \frac{x}{2} + \text{o}\left(x\right)\right)\right) \\
&= \cos\left(\sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{2} + \text{o}\left(x^{3/2}\right)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\sqrt{x}\right)^4 + \text{o}\left(x^2\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x + 2\sqrt{x} \times \frac{x^{3/2}}{2}\right) + \frac{x^2}{24} + \text{o}\left(x^2\right) \\
&= 1 - \frac{x}{2} - \frac{11x^2}{24} + \text{o}\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

17. On a :

$$f(x) = e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \text{o}\left(x^6\right)}$$

Attention, on ne peut pas appliquer directement le DL de l'exponentielle puisque ce qu'il y a dedans ne tend pas vers 0. L'astuce est d'écrire :

$$f(x) = e \times e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \text{o}\left(x^6\right)}$$

et là tout va bien !

$$\begin{aligned}
f(x) &= e \times \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + \text{o}\left(x^6\right)\right) \\
&= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - 2 \times \frac{x^2}{2} \times \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{6} \times \frac{-x^6}{8} + \text{o}\left(x^6\right)\right) \\
&= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31x^6}{720} + \text{o}\left(x^6\right)\right) \\
&= e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^4}{6} - \frac{31ex^6}{720} + \text{o}\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

18. Notons $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ qu'on prolonge en 0 avec $g(0) = 1$. Alors g est continue donc f est une primitive de g : pour exhiber un DL de f à l'ordre 5, il suffit de donner un DL de g à l'ordre 6, ce qui est immédiat (on donne un DL du sinus à l'ordre 7 puisqu'on divise par x).

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \text{o}\left(x^7\right)}{x} \\
&= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \text{o}\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

Par primitivation du DL :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + x - \frac{x^3}{3\times 3!} + \frac{x^5}{5\times 5!} - \frac{x^7}{7\times 7!} + \mathrm{o}\left(x^7\right) \\ &= x - \frac{x^3}{3\times 3!} + \frac{x^5}{5\times 5!} - \frac{x^7}{7\times 7!} + \mathrm{o}\left(x^7\right) \end{aligned}$$

19. Notons

$$G : x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Alors, pour tout x, $f(x) = G(x^2) - G(x)$. Il suffit donc de donner un DL de G à l'ordre 6, il suffira ensuite de les soustraire. Or, G est l'unique primitive de $g : x \mapsto e^{-x^2/2}$ qui s'annule en 0. Par primitivation des DL, il suffit de donner le DL de g à l'ordre 5, ce qui est immédiat avec le DL de e^u appliqué à $u = -x^2/2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$:

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \mathrm{o}\left(x^5\right)$$

si bien que

$$\begin{aligned} G(x) &= G(0) + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + \mathrm{o}\left(x^6\right) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + \mathrm{o}\left(x^6\right) \end{aligned}$$

En particulier :

$$G(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

En conclusion :

$$f(x) = -x + x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^6}{6} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

Exercice 18 : ✪✪ Même chose que l'exercice précédent.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ à l'ordre 3.
2. $x \mapsto \tan(\pi e^x)$ à l'ordre 4.
3. $x \mapsto \dfrac{\ln(\cos(x))}{x + x^2 + x^3}$ à l'ordre 4.
4. $x \mapsto \dfrac{\ln(1 + x - x^3)}{\sqrt{1 - x + 2x^2}}$ à l'ordre 4.
5. $x \mapsto (\cos(x))^x$ à l'ordre 5.
6. $x \mapsto \dfrac{x^2}{\cos^2(x)}$ à l'ordre 7.
7. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 4.
8. $x \mapsto \ln\left(3e^x - e^{-x}\right)$ à l'ordre 3.
9. $x \mapsto e^{-1/x^2}$ à l'ordre 2022.
10. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)}\right)$ à l'ordre 5.
11. ✪✪✪ $x \mapsto \ln^3(1 + x)$ à l'ordre 7.

Correction :

1. On va mettre au même dénominateur, $x\sin(x)$, qui va être équivalent à x^2, donc on va tout simplifier par x^2 : on fait donc un DL du numérateur à l'ordre 5. Après avoir simplifié (on s'en rend compte en faisant le DL, on tâtonne), le premier terme du numérateur sera x donc on donne le DL du dénominateur à l'ordre 4 donc le DL du sinus au dénominateur à l'ordre 3. Mais si on ne le voit pas, on tente et on adapte...

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} \\
&= \frac{x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+\mathrm{o}\left(x^5\right)-x}{x\left(x-\dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)} \\
&= \frac{-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+\mathrm{o}\left(x^5\right)}{x^2-\dfrac{x^4}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)} \\
&= \left(-\frac{x}{6}+\frac{x^3}{120}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\times\frac{1}{1-\dfrac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^2\right)} \\
&= \left(-\frac{x}{6}+\frac{x^3}{120}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\times\left(1+\frac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\
&= -\frac{x}{6}+\frac{x^3}{120}-\frac{x^3}{36}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\
&= -\frac{x}{6}-\frac{7x^3}{360}+\mathrm{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

2. Commençons par le DL de l'exponentielle à l'ordre 4 :

$$f(x)=\tan\left(\pi+\pi x+\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)$$

Par π-périodicité de la tangente :

$$f(x)=\tan\left(\pi x+\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)$$

et on peut ensuite faire le DL de $\tan(u)$ à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\pi x+\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x^4}{24}\right)+\frac{1}{3}\left(\pi x+\frac{\pi x^2}{2}\right)^3+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= \pi x+\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x^4}{24}+\frac{1}{3}\left(\pi^3x^3+3\times\pi x\times\pi x\times\frac{\pi x^2}{2}\right)+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= \pi x+\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\left(\pi+2\pi^3\right)x^3}{6}+\frac{\left(\pi+12\pi^3\right)x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

3. Le premier terme du numérateur va être du $\ln(1-x^2/2)$ donc un terme en x^2, qu'on va simplifier par x au dénominateur donc on va faire un DL à l'ordre 5, et on va ensuite faire un DL de $1/(1+u)$ à l'ordre 3 puisqu'on va multiplier ce DL par x.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)}{x+x^2+x^3} \\
&= \frac{\left(-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2+\mathrm{o}\left(x^5\right)}{x+x^2+x^3} \\
&= \left(\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{24}\right)-\frac{x^3}{8}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\frac{1}{1+x+x^2} \\
&= \left(-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x)^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \left(-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1-x-x^2+(x^2+2x\times x^2)-x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \left(-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1-x+x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= -\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^4}{2}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}-\frac{5x^4}{12}+\mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

4. On commence par écrire f sous la forme :

$$f(x)=\ln(1+x-x^3)\times(1-x+2x^2)^{-1/2}$$

Le premier terme du ln sera un x donc on fait le DL de $(1+u)^{-1/2}$ à l'ordre 3, c'est-à-dire :

$$(1+u)^{-1/2}=1-\frac{u}{2}+\frac{3u^2}{8}-\frac{5u^3}{16}+\mathrm{o}\left(u^3\right)$$

dont le premier terme est 1 donc on fait le DL du ln à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left((x-x^3)-\frac{1}{2}(x-x^3)^2+\frac{1}{3}(x)^3-\frac{1}{4}(x)^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1-\frac{1}{2}(-x+2x^2)+\frac{3}{8}(-x+2x^2)^2-\frac{5}{16}(-x)^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \left(x-x^3-\frac{1}{2}(x^2-2\times x\times x^3)+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1+\frac{x}{2}-x^2+\frac{3}{8}(x^2-2\times x\times 2x^2)+\frac{5x^3}{16}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \left(x-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1+\frac{x}{2}-\frac{5x^2}{8}-\frac{19x^3}{16}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= x+\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{8}-\frac{19x^4}{16}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}+\frac{5x^4}{16}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{3}+\frac{3x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= x-\frac{37x^3}{24}-\frac{11x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

5. Puissance variable : notation exponentielle.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{x\ln(\cos(x))} \\
&= e^{x\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)} \\
&= e^{x\left(\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)} \\
&= e^{x\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\dfrac{x^4}{8}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)} \\
&= e^{x\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)} \\
&= e^{-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{12}+\mathrm{o}\left(x^5\right)} \\
&= 1+\left(-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{12}\right)+\mathrm{o}\left(x^5\right) \\
&= 1-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{12}+\mathrm{o}\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

6. On écrit $f(x) = x^2 \times (\cos(x))^{-2}$ ce qui permettra d'utiliser le DL de $(1+u)^{\alpha}$ avec $\alpha = -2$:

$$(1+u)^{-2} = 1-2u+3u^2+\mathrm{O}\left(u^3\right)$$

   Dès lors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)^{-2} \\
&= x^2\left(1-2\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+3\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\
&= x^2\left(1+x^2-\frac{x^4}{12}+\frac{3x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\
&= x^2\left(1+x^2+\frac{2x^4}{3}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\
&= x^2+x^4+\frac{2x^6}{3}+\mathrm{o}\left(x^7\right)
\end{aligned}$$

7. On va commencer par tout simplifier par x donc il faut faire un DL du numérateur et du dénominateur à l'ordre 5 :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\mathrm{o}\left(x^5\right)}{x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\mathrm{o}\left(x^5\right)} \\
&= \frac{1-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x^4}{5}+\mathrm{o}\left(x^4\right)}{1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+\mathrm{o}\left(x^4\right)} \\
&= \left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1-\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)+\left(-\frac{x^2}{6}\right)^2+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \\
&= \left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+\frac{x^4}{36}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \\
&= \left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1+\frac{x^2}{6}+\frac{13x^4}{720}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \\
&= 1+\frac{x^2}{6}+\frac{13x^4}{720}-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{18}+\frac{x^4}{5}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 1-\frac{x^2}{6}+\frac{59x^4}{360}+\mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

8. On a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(3+3x+\frac{3x^2}{2}+\frac{3x^3}{6}-\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \ln\left(2+4x+x^2+\frac{2x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \ln(2)+\ln\left(1+2x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \ln(2)+\left(2x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(2x+\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}(2x)^3+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\
&= \ln(2)+2x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\left(4x^2+2\times 2x\times\frac{x^2}{2}\right)+\frac{8x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\
&= \ln(2)+2x-\frac{3x^2}{2}-2x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

9. On a vu (cf. chapitre 19) que f est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ dont toutes les dérivées sont nulles en 0. D'après la formule de Taylor-Young, le DL de f à l'ordre 2022 est donc $f(x)=\mathrm{o}\left(x^{2022}\right)$.

10. On commence par casser le ln :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+\tan(x)) - \ln(1-\tan(x)) \\
&= \ln\left(1+x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right) - \ln\left(1-x-\frac{x^3}{3}-\frac{2x^5}{15}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\
&= \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}\right) - \frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}(x)^4 + \frac{1}{5}(x)^5 \\
&\quad - \left[\left(-x-\frac{x^3}{3}-\frac{2x^5}{15}\right) - \frac{1}{2}\left(-x-\frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-x-\frac{x^3}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}(-x)^4 + \frac{1}{5}(-x)^5\right] + \mathrm{o}\left(x^5\right) \\
&= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15} - \frac{1}{2}\left(x^2+2\times x\times\frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3+3\times x\times x\times\frac{x^3}{3}\right) - \frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5} \\
&\quad - \left[-x-\frac{x^3}{3}-\frac{2x^5}{15}-\frac{1}{2}\left(x^2+2\times -x\times\frac{-x^3}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(-x^3+3\times -x\times -x\times\frac{-x^3}{3}\right)-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right] + \mathrm{o}\left(x^5\right) \\
&= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5} \\
&\quad - \left[-x-\frac{x^3}{3}-\frac{2x^5}{15}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right] + \mathrm{o}\left(x^5\right) \\
&= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5} \\
&\quad +x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\mathrm{o}\left(x^5\right) \\
&= 2x+\frac{4x^3}{3}+\frac{4x^5}{3}+\mathrm{o}\left(x^5\right)
\end{aligned}
$$

11. Celui-ci est assez calculatoire... Pour deviner l'ordre : chaque terme va être multiplié par au moins x^2 (le triple produit $3\times x\times x\times$ truc) donc on donne le DL du ln à l'ordre 5 :

$$
f(x) = \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)^3
$$

Rappelons (cf. cours) qu'un cube $(a+b+c+\cdots)$ contient tous les cubes a^3, b^3 etc., tous les triples produit $(3a^2b, 3a^2c, 3b^2c$ etc.) et enfin tous les sextuples produits $6abc$ de termes tous distincts. Ici, il va falloir d'en servir (mais en pratique, il sert très peu). Mettons d'abord les cubes, puis les triples produits, puis les sextuples produits :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(x^3-\frac{x^6}{8}\right) + \left(-3x\times x\times\frac{x^2}{2}+3x\times x\times\frac{x^3}{3}-3x\times x\times\frac{x^4}{4}+3x\times x\times\frac{x^5}{5}\right. \\
&\quad \left.+3\times\frac{-x^2}{2}\times\frac{-x^2}{2}\times x+3\times\frac{-x^2}{2}\times\frac{-x^2}{2}\times\frac{x^3}{3}+3\times\frac{x^3}{3}\times\frac{x^3}{3}\times x\right) \\
&\quad +\left(6\times x\times\frac{-x^2}{2}\times\frac{x^3}{3}+6\times x\times\frac{-x^2}{2}\times\frac{-x^4}{4}\right)+\mathrm{o}\left(x^7\right) \\
&= x^3-\frac{x^6}{8}-\frac{3x^4}{2}+x^5-\frac{3x^6}{4}+\frac{3x^7}{5}+\frac{3x^5}{4}+\frac{x^7}{4}+\frac{x^7}{3}-x^6+\frac{3x^7}{4}+\mathrm{o}\left(x^7\right) \\
&= x^3-\frac{3x^4}{2}+\frac{7x^5}{4}-\frac{15x^6}{8}+\frac{29x^7}{15}+\mathrm{o}\left(x^7\right)
\end{aligned}
$$

Exercice 19 - Ailleurs qu'en 0 : ✪✪ Donner les DL des fonctions suivantes en x_0 aux ordres indiqués

1. $x\mapsto\ln(\tan(x))$, $x_0=\pi/4$, ordre 3.
2. $x\mapsto\ln(\cos(x))$, $x_0=1$, ordre 3.
3. $x\mapsto\dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln(x)}$, $x_0=1$, ordre 2.
4. $x\mapsto e^{\sin(x)}$, $x_0=\pi/6$, ordre 3.
5. $x\mapsto\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $x_0=1$, ordre 2022.

Correction : Comme en cours, une seule méthode : on pose $h = x - x_0$ ou, ce qui revient au même, $x = x_0 + h$ donc $h \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

1. Cela donne :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right) \\
&= \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right) - \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right) \\
&= \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(h) + \sin(h)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(h) - \sin(h)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2} + \mathrm{o}\left(h^3\right)\right) + \left(h - \frac{h^3}{6} + \mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&\quad - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2} + \mathrm{o}\left(h^3\right)\right) - \left(h - \frac{h^3}{6} + \mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\left(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \mathrm{o}\left(h^3\right)\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \ln\left(1 - h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \left(h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(h - \frac{h^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}(h)^3 - \left[\left(-h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(-h - \frac{h^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}(-h)^3\right] + \mathrm{o}\left(h^3\right) \\
&= h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} - \frac{1}{2}\left(h^2 - 2 \times h \times \frac{h^2}{2}\right) + \frac{h^3}{3} - \left[-h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} - \frac{1}{2}\left(h^2 + 2 \times h \times \frac{h^2}{2}\right) - \frac{h^3}{3}\right] + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\
&= 2h + \frac{4h^3}{3} + \mathrm{o}\left(h^3\right) \\
&= 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \mathrm{o}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

2. De même, posons $x = 1 + h$ donc $h = x - 1$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(\cos(1+h)) \\
&= \ln(\cos(1)\cos(h) - \sin(1)\sin(h)) \\
&= \ln\left(\cos(1)\left(\cos(h) - \frac{\sin(1)}{\cos(1)}\sin(h)\right)\right) \\
&= \ln(\cos(1)) + \ln\left(\cos(h) - \tan(1)\sin(h)\right) \\
&= \ln(\cos(1)) + \ln\left(1 - \frac{h^2}{2} - \tan(1)\left(h - \frac{h^3}{6}\right) + \mathrm{o}\left(h^3\right)\right) \\
&= \ln(\cos(1)) + \ln\left(1 - \tan(1)h - \frac{h^2}{2} + \frac{\tan(1)h^3}{6} + \mathrm{o}\left(h^3\right)\right) \\
&= \ln(\cos(1)) + \left[-\tan(1)h - \frac{h^2}{2} + \frac{\tan(1)h^3}{6}\right] - \frac{1}{2}\left[-\tan(1)h - \frac{h^2}{2}\right]^2 + \frac{1}{3}(-\tan(1)h)^3 + \mathrm{o}\left(h^3\right) \\
&= \ln(\cos(1)) - \tan(1)h - \frac{h^2}{2} + \frac{\tan(1)h^3}{6} - \frac{1}{2}\left[\tan(1)^2h^2 + 2\tan(1)h \times \frac{h^2}{2}\right] - \frac{\tan(1)^3h^3}{3} + \mathrm{o}\left(h^3\right) \\
&= \ln(\cos(1)) - \tan(1)h - \frac{(1+\tan(1)^2)h^2}{2} + \frac{(-\tan(1) - \tan(1)^3)h^3}{3} + \mathrm{o}\left(h^3\right) \\
&= \ln(\cos(1)) - \tan(1)(x-1) - \frac{(1+\tan(1)^2)(x-1)^2}{2} + \frac{(-\tan(1) - \tan(1)^3)(x-1)^3}{3} + \mathrm{o}\left((x-1)^3\right)
\end{aligned}$$

3. Idem :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+h} - 1}{\ln(1+h)} \\
&= \frac{(1+h)^{1/2} - 1}{\ln(1+h)} \\
&= \frac{1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16} + \mathrm{o}\left(h^3\right) - 1}{h - \frac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} + \mathrm{o}\left(h^3\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{16} + \mathrm{o}\left(h^2\right)}{1 - \frac{h}{2} + \dfrac{h^2}{3} + \mathrm{o}\left(h^2\right)} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{16} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \times \left(1 - \left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3}\right) + \left(-\frac{h}{2}\right)^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{16} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \times \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{3} + \frac{h^2}{4} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{16} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \times \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{24} + \mathrm{o}\left(h^2\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{(x-1)}{8} - \frac{(x-1)^2}{24} + \mathrm{o}\left((x-1)^2\right)
\end{aligned}$$

4. Idem, on pose $x = \pi/6 + h$, $h = x - \pi/6$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\sin(\pi/6+h)} \\
&= e^{\sin(\pi/6)\cos(h)+\sin(h)\cos(\pi/6)} \\
&= e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{h^2}{2}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)+\left(h-\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= e^{\frac{1}{2}+\frac{h\sqrt{3}}{2}-\frac{h^2}{4}-\frac{h^3\sqrt{3}}{12}+\mathrm{o}\left(h^3\right)} \\
&= e^{1/2}\times e^{\frac{h\sqrt{3}}{2}-\frac{h^2}{4}-\frac{h^3\sqrt{3}}{12}+\mathrm{o}\left(h^3\right)} \\
&= e^{1/2}\left(1+\left(\frac{h\sqrt{3}}{2}-\frac{h^2}{4}-\frac{h^3\sqrt{3}}{12}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{h\sqrt{3}}{2}-\frac{h^2}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{h\sqrt{3}}{2}\right)^3+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right) \\
&= e^{1/2}\left(1+\frac{h\sqrt{3}}{2}-\frac{h^2}{4}-\frac{h^3\sqrt{3}}{12}+\frac{1}{2}\left(\frac{3h^2}{4}-2\times\frac{h\sqrt{3}}{2}\times\frac{h^2}{4}\right)+\frac{h^3\sqrt{3}}{16}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right) \\
&= e^{1/2}\left(1+\frac{h\sqrt{3}}{2}+\frac{h^2}{8}-\frac{7h^3\sqrt{3}}{48}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right) \\
&= e^{1/2}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)e^{1/2}\sqrt{3}}{2}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2e^{1/2}}{8}-\frac{7\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3e^{1/2}\sqrt{3}}{48}+\mathrm{o}\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

5. Donnons directement le DL à l'ordre n, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Posons $x=1+h$, $h=x-1$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x)-\ln(x) \\
&= \ln(2+h)-\ln(1+h) \\
&= \ln(2)+\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)-\ln(1+h) \\
&= \ln(2)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\times\left(\frac{h}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}h^k}{k}+\mathrm{o}\left(h^n\right) \\
&= \ln(2)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\left(1-2^k\right)h^k}{2^k\times k}+\mathrm{o}\left(h^n\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, si on prend $n=2022$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(2)+\sum_{k=1}^{2022}\frac{(-1)^{k-1}\left(1-2^k\right)h^k}{2^k\times k}+\mathrm{o}\left(h^{2022}\right) \\
&= \ln(2)+\sum_{k=1}^{2022}\frac{(-1)^{k-1}\left(1-2^k\right)(x-1)^k}{2^k\times k}+\mathrm{o}\left((x-1)^{2022}\right)
\end{aligned}$$

2.2 Limites et prolongements

Exercice 20 : ✪✪ Soient $0<a<b$.

1. Donner les limites en $+\infty$ et en 0 de la fonction

$$f : x\mapsto\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$$

2. **Remake :** Soient $0<a<b<c$. Mêmes questions avec $x\mapsto\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$.

Correction :

1. Puissance variable : exponentielle. Soit $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{b^x(1+(a/b)^x)}{2}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\times x\ln(b)+\frac{1}{x}\times\ln\left(\frac{(1+(a/b)^x)}{2}\right)} \\ &= e^{\ln(b)+\frac{1}{x}\times\ln\left(\frac{(1+(a/b)^x)}{2}\right)} \end{aligned}$$

Or, $a/b<1$ donc $(a/b)^x = e^{x\ln(a/b)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ puisque $\ln(a/b)<0$. Par continuité, le ln ci-dessus tend vers $\ln(1/2)$ et on le multiplie par $1/x$ qui tend vers 0, donc la quantité dans l'exponentielle tend vers $\ln(b)$. Par continuité de l'exponentielle, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{\ln(b)} = b$.

Cherchons maintenant la limite en 0. Posons

$$g(x) = \ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$$

Plusieurs petits calculs valent mieux qu'un gros : on décompose donc en plusieurs petits calculs.

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln\left(\frac{e^{x\ln(a)}+e^{x\ln(b)}}{2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1+x\ln(a)+1+x\ln(b)+\mathrm{o}(x)}{2}\right) \\ &= \ln\left(1+x\left(\frac{1}{2}\ln(a)+\frac{1}{2}\ln(b)\right)+\mathrm{o}(x)\right) \\ &= \ln(1+x\ln(\sqrt{ab})+\mathrm{o}(x)) \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{1}{x}\times g(x)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\times(x\ln(\sqrt{ab})+\mathrm{o}(x))} \\ &= e^{\ln(\sqrt{ab})+\mathrm{o}(1)} \end{aligned}$$

ce qui tend vers $e^{\ln(\sqrt{ab})} = \sqrt{ab}$ par continuité de l'exponentielle.

2. De même, cette quantité tend vers c en $+\infty$ et vers $\sqrt[3]{abc} = (abc)^{1/3}$ en 0.

Exercice 21 : ✪✪ Déterminer la limite des quantités suivantes en x_0 :

1. $(\ln(e+x))^{1/x}$, $x_0=0$.
2. $\dfrac{\sin(x)^x-1}{x^x-1}$, $x_0=0$.
3. $\dfrac{\sin(x)^{\sin(x)}-1}{\tan(x)^{\tan(x)}-1}$, $x_0=0$.
4. $\dfrac{1}{xe^x(x+1)}-\dfrac{1}{x\cos(x)}$, $x_0=0$.
5. $\dfrac{(1+x)^{\ln(x)/x}-x}{x\left(x^x-1\right)}$, $x_0=0$.
6. $\dfrac{\mathrm{sh}(x)+\sin(x)-2x}{x\left(\mathrm{ch}(x)+\cos(x)-2\right)}$, $x_0=0$.
7. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^{1/3}-2^{1/3}}$, $x_0=2$.
8. $x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $x_0=+\infty$.
9. $\dfrac{\sin(x)(\tan(x)-x)}{x^2\ln(1+2x^2)}$, $x_0=0$.
10. $\dfrac{\sin(x)-\tan(x)}{1-x+\ln(1+x)-\cos(x)}$, $x_0=0$.
11. $\dfrac{\sin^{p+q}(x)-1}{\left(\sin^p(x)-1\right)\left(\sin^q(x)-1\right)}$, $x_0=\pi/2$.
12. $(2-x)^{\tan(\pi x/2)}$, $x_0=1$.
13. $\tan(x)^{\sin(x)}$, $x_0=0^+$.

Correction : On appelle à chaque fois la fonction f.

1. $$\begin{array}{rcl} f(x) & = & e^{\frac{1}{x}\ln(\ln(e+x))} \\ & = & e^{\frac{1}{x}\ln\left(\ln(e)+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)} \\ & = & e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{e}+\mathrm{o}(x)\right)} \\ & = & e^{\frac{1}{x}\left(\frac{x}{e}+\mathrm{o}(x)\right)} \\ & = & e^{1/e+\mathrm{o}(1)} \\ & \xrightarrow[x\to 0]{} & e^{1/e}=e^{e^{-1}} \end{array}$$

   par continuité de l'exponentielle (on arrête de le préciser par la suite).

2. Il suffit de donner un équivalent du numérateur et du dénominateur (plusieurs petits calculs valent mieux qu'un gros). Attention, donner la limite du numérateur et du dénominateur ne suffit pas car on peut avoir des formes indéterminées. Notons $g(x)$ le numérateur et $h(x)$ le dénominateur. Rappelons que si $u\to 0$ alors $e^u-1\sim u$.

   $$\begin{array}{rcl} g(x) & = & e^{x\ln(\sin(x))}-1 \\ & = & e^{x\ln(x+\mathrm{o}(1))}-1 \\ & = & e^{x\ln(x)+x\ln(1+\mathrm{o}(1))}-1 \\ & = & e^{x\ln(x)+x(\mathrm{o}(1))}-1 \\ & = & e^{x\ln(x)+\mathrm{o}(x)}-1 \\ & \sim & x\ln(x)+\mathrm{o}\left(x\right) \\ & \sim & x\ln(x) \end{array}$$

   et on prouve de même (c'est même encore plus simple car il n'y a pas de DL à faire) que $h(x)\sim x\ln(x)$ si bien que $f(x)\sim 1$ donc tend vers 1.

3. Idem, notons $g(x)$ le numérateur et $h(x)$ le dénominateur.

   $$\begin{array}{rcl} g(x) & = & e^{\sin(x)\ln(\sin(x))}-1 \\ & = & e^{(x+\mathrm{o}(x))\ln(x+\mathrm{o}(x))}-1 \\ & = & e^{(x+\mathrm{o}(x))(\ln(x)+\ln(1+\mathrm{o}(1)))}-1 \\ & = & e^{(x+\mathrm{o}(x))(\ln(x)+\mathrm{o}(1))}-1 \\ & = & e^{x\ln(x)+\mathrm{o}(x)+\mathrm{o}(x\ln(x))+\mathrm{o}(x)}-1 \\ & \sim & x\ln(x)+\mathrm{o}\left(x\right)+\mathrm{o}\left(x\ln(x)\right)+\mathrm{o}\left(x\right) \\ & \sim & x\ln(x) \end{array}$$

   et idem pour le dénominateur donc on a encore une fois $f(x)\xrightarrow[x\to 0]{}1$.

4. Mettons au même dénominateur (on remarque que x est commun aux deux dénominateurs) :

   $$f(x)\quad=\quad\frac{\cos(x)-e^x(x+1)}{xe^x(x+1)\cos(x)}$$

   Pour le dénominateur, vu que c'est un produit, c'est très simple, il suffit de donner un équivalent de chaque terme, donc on trouve

   $$h(x)\sim x\times 1\times 1\times 1=x$$

   Donnons à présent un équivalent du numérateur : il suffit de donner un DL à l'ordre 1.

$$\begin{aligned}
g(x) &= (1+\mathrm{o}(x)) - (1+x+\mathrm{o}(x))(x+1) \\
&= 1+\mathrm{o}(x) - x - 1 - x^2 - x + \mathrm{o}\left(x^2\right) + \mathrm{o}(x) \\
&= -2x + \mathrm{o}(x) \\
&\sim -2x
\end{aligned}$$

si bien que $f(x) \sim -2x/x = -2$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -2$.

5. Tout d'abord, on prouve comme au 2 que $x^x - 1 \sim x\ln(x)$ donc $h(x) \sim x^2\ln(x)$. De plus (il faut faire un DL à l'ordre 2 dans le ln sinon on n'a pas une précision suffisante, on obtient $e^{\ln(x)+\mathrm{o}(\ln(x))}$ ce qui ne permet pas d'en donner un équivalent) :

$$\begin{aligned}
g(x) &= e^{\frac{\ln(x)}{x}\times\ln(1+x)} - x \\
&= e^{\frac{\ln(x)}{x}\times\left(x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)} - x \\
&= e^{\ln(x)-\frac{x\ln(x)}{2}+\mathrm{o}(x\ln(x))} - x \\
&= x\times e^{-\frac{x\ln(x)}{2}+\mathrm{o}(x\ln(x))} - x \\
&= x\times\left(1-\frac{x\ln(x)}{2}+\mathrm{o}(x\ln(x))\right) - x \\
&\sim -\frac{x^2\ln(x)}{2}
\end{aligned}$$

si bien que $f(x) \sim -1/2$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1/2$.

6. Faisons un DL en 0. À quel ordre ? Dans le doute, à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
g(x) &= x + x - 2x + \mathrm{o}(x) \\
&= \mathrm{o}(x)
\end{aligned}$$

ce qui ne permet pas de donner un équivalent. Il faut pousser le DL à un ordre plus grand. C'est la même chose à l'ordre 2, à l'ordre 3 etc. Il faut pousser le DL à l'ordre 5, mais on peut difficilement le deviner à l'avance... En faisant un DL à l'ordre 5, on trouve que $g(x) \sim x^5/60$. De même, on trouve en poussant à chaque fois le DL plus loin que $h(x) \sim x^5/12$ si bien que $f(x) \sim 12/60$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1/5$.

7. Comme pour les DL, posons $x = 2+h$ donc $h = x-2$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= (2+h)^{1/2} - \sqrt{2} \\
&= \sqrt{2}\left(1+\frac{h}{2}\right)^{1/2} - \sqrt{2} \\
&= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{h}{2}+\mathrm{o}(h)\right) - \sqrt{2} \\
&\sim \frac{h\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned}
h(x) &= (2+h)^{1/3} - 2^{1/3} \\
&= 2^{1/3}\left(1+\frac{h}{2}\right)^{1/3} - 2^{1/3} \\
&= 2^{1/3}\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{h}{2}+\mathrm{o}(h)\right) - 2^{1/3} \\
&\sim \frac{h\times 2^{1/3}}{6}
\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{2^{1/2}/4}{2^{1/3}/6} \\ &= \frac{3\times 2^{1/6}}{2} \\ &\xrightarrow[x\to 2]{} \frac{3}{2^{5/6}} \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} f(x) &= x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x - x + \frac{1}{2} + \mathrm{o}\left(1\right) \\ &\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

9. $\sin(x) \sim x$, $\tan(x) - x \sim x^3/3$ et $\ln(1+2x^2) \sim 2x^2$ si bien que

$$f(x) \sim \frac{x\times x^3/3}{x^2\times 2x^2} = \frac{1}{6}$$

donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1/6$.

10. À l'aide d'un DL à l'ordre 3, on trouve que $g(x) \sim -x^3/6$ et $h(x) \sim x^3/3$ donc $f(x) \sim -1/18$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1/18$.

11. Posons $x = \pi/2 + h$, $h = x - \pi/2$. Puisque $\sin(\pi/2+h) = \cos(h)$, pour tout n :

$$\begin{aligned} \sin^n(x) - 1 &= \cos^n(h) - 1 \\ &= \left(1 - \frac{h^2}{2} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right)^n - 1 \\ &\sim \frac{-nh^2}{2} \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\dfrac{-(p+q)h^2}{2}}{\dfrac{-ph^2}{2}\times\dfrac{-qh^2}{2}} \\ &\sim \frac{-2(p+q)}{pqh^2} \\ &\xrightarrow[h\to 0]{} -\infty \end{aligned}$$

12. Posons $x = 1+h$, $h = x-1$. Précisons que $\tan(\pi/2+u) = \sin(\pi/2+u)/\cos(\pi/2+u) = -1/\tan(u)$. Dès lors :

$$f(x) = e^{\tan(\pi/2+h\pi/2)\ln(1-h)}$$

Si on pose $g(x) = \tan(\pi/2+h\pi/2)\ln(2-x)$, il suffit de donner la limite de g donc un équivalent (même si un équivalent de g ne suffit pas à donner un équivalent de f, il suffit à donner sa limite). Dès lors :

$$\begin{aligned} g(x) &= \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{h\pi}{2}\right)\ln(1-h) \\ &= -\frac{1}{\tan(h\pi/2)}\times\ln(1-h) \\ &\sim -\frac{-h}{h\pi/2} \\ &\sim \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

et donc, par continuité de l'exponentielle, $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} e^{2/\pi}$.

13. On montre comme dans le 3 que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Exercice 22 : ✪✪ Montrer que les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 et que les prolongements sont de classe $\mathscr{C}^1$:

1. $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$
2. $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\text{Arctan(t)}}$

Correction : On pose à chaque fois $f(t)$ la quantité étudiée.

1. Mettons au même dénominateur :
$$f(t) = \frac{\sin(t) - t}{t\sin(t)}$$
Donnons un DL de f à l'ordre 1 (on verra pourquoi dans la suite). On trouve que le numérateur est équivalent à $-t^3/6$ et le dénominateur à t^2 donc $f(t) \sim -t/6$ c'est-à-dire :
$$f(t) = -\frac{t}{6} + \text{o}\,(t)$$
f admet un DL à l'ordre 1 : f est prolongeable en une fonction continue en 0 en posant $f(0) = 0$, et f ainsi prolongée est dérivable (car admet un DL à l'ordre 1) avec $f'(0) = -1/6$ (le coefficient devant t dans le DL). Pour prouver que f est $\mathscr{C}^1$, il suffit de prouver que $f'(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -1/6$. Soit $t \neq 0$. On a :
$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-1}{t^2} - \frac{-\cos(t)}{\sin^2(t)} \\ &= \frac{-\sin^2(t) + t^2\cos(t)}{t^2\sin^2(t)} \end{aligned}$$
Le dénominateur est équivalent à t^4 et un rapide DL du numérateur à l'ordre 4 nous dit que celui-ci est équivalent à $-t^4/6$ si bien que $f'(t) \sim -1/6$ donc tend vers $-1/6 = f'(0)$: f' est continue en 0 donc f est $\mathscr{C}^1$.
2. Mettons au même dénominateur :
$$f(t) = \frac{\text{Arctan}(t) - t}{t\text{Arctan}(t)}$$
Donnons un DL de f à l'ordre 1 (on verra pourquoi dans la suite). On trouve que le numérateur est équivalent à $-t^3/3$ et le dénominateur à t^2 donc $f(t) \sim -t/3$ c'est-à-dire :
$$f(t) = -\frac{t}{3} + \text{o}\,(t)$$
f admet un DL à l'ordre 1 : f est prolongeable en une fonction continue en 0 en posant $f(0) = 0$, et f ainsi prolongée est dérivable (car admet un DL à l'ordre 1) avec $f'(0) = -1/3$ (le coefficient devant t dans le DL). Pour prouver que f est $\mathscr{C}^1$, il suffit de prouver que $f'(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -1/3$. Soit $t \neq 0$. On a :
$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-1}{t^2} - \frac{-1}{(1+t^2)\text{Arctan}^2(t)} \\ &= \frac{-(1+t^2)\text{Arctan}(t) + t^2}{t^2\text{Arctan}^2(t)(1+t^2)} \end{aligned}$$
Le dénominateur est équivalent à t^4 et un rapide DL du numérateur à l'ordre 4 nous dit que celui-ci est équivalent à $-t^4/3$ si bien que $f'(t) \sim -1/3$ donc tend vers $-1/3 = f'(0)$: f' est continue en 0 donc f est $\mathscr{C}^1$.

2.3 Équivalents

Exercice 23 : ✪✪ Donner un équivalent simple de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
2. $u_n = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n)$.
3. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$
4. $u_n = \dfrac{\sin(1/n) + \sin(2/n)}{e^{1/n} - e^{2/n}}$
5. $e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

6. $u_n = \exp(\sin(e^{-n})) - 1$
7. $u_n = \dfrac{\sqrt{1+e^{-n}}-1}{\ln(1+1/2n)}$
8. $u_n = \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}-2}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^3}-1}$
9. $u_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n/2} - 1$
10. $u_n = n\tan\left(\dfrac{\pi n}{2n+1}\right)$
11. $u_n = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$
12. $u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n+1}$
13. $u_n = \left(\ln\left(1+e^{-n^2}\right)\right)^{1/n}$
14. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$
15. $u_n = n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$
16. $u_n = \left(n^3\left(e^{1/n}-e^{-1/n}\right)\right)^n$
17. $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ où $\alpha > 0$.
18. $u_n = 3n - 2n\cos\left(n^{-3/2}\right) - \sqrt[3]{3+n^3}$.
19. $u_n = 1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\times\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.
20. $u_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{1/n}$
21. $u_n = \ln(n) - \dfrac{5n^2+3n+1}{1-e^{2/n}}$.
22. $u_n = \sin\left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right) - e^{1/n}\right)$
23. $u_n = 1 - \sqrt[9]{1+\dfrac{1}{\sqrt[6]{n}}\ln\left(1+\sin^2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)}$.
24. $u_n = \dfrac{n\sin(1/\sqrt{n})\mathrm{Arctan}(n!)}{\sqrt[4]{n^6+n^5}-n\sqrt{n}}$.

Correction :

1.
$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

2. On se souvient que $u_n = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$.
3. Puisqu'on ne peut pas soustraire des équivalents, on fait un DL. Les $1/n$ se compensent donc on fait un DL à l'ordre 3 ce qui donne :
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} - \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{-1}{2n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\sim \frac{-1}{2n^3} \end{aligned}$$
4. On prouve de même, avec un DL à l'ordre 1, que le numérateur est équivalent à $3/n$, et avec un DL à l'ordre 1, que le dénominateur est équivalent à $-1/n$ donc $u_n \sim -3$.

5.

$$\begin{aligned}
u_n &= e - \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= e - \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= e - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= e - e\times\exp\left(-\frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= e - e\times\left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\sim \frac{e}{2n}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{e^{-n}+\mathrm{o}\left(e^{-n}\right)} - 1\\
&= 1 + e^{-n} + \mathrm{o}\left(e^{-n}\right) - 1\\
&\sim e^{-n}
\end{aligned}$$

7. Notons v_n le numérateur et w_n le dénominateur (c'est ce qu'on fera dans la suite quand il y aura une fraction). Alors $w_n \sim 1/2n$ et

$$\begin{aligned}
v_n &= \left(1+e^{-n}\right)^{1/2} - 1\\
&= 1 + \frac{e^{-n}}{2} + \mathrm{o}\left(e^{-n}\right) - 1\\
&\sim \frac{e^{-n}}{2}
\end{aligned}$$

si bien que $u_n \sim ne^{-n}$.

8. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
v_n &= 2\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{1/2} - 2\\
&= 2\left(1 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\\
&\sim \frac{1}{4n}
\end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}
w_n &= \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3/2} - 1\\
&= \left(1 + \frac{3}{2}\times\frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1\\
&\sim \frac{3}{4n}
\end{aligned}$$

et donc $u_n \sim 1/3$.

9.
$$\begin{aligned}
u_n &= e^{\frac{n}{2}\ln(n^2+1)-\frac{n}{2}\ln(n^2-1)} - 1 \\
&= e^{\frac{n}{2}\ln(n^2)+\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{n}{2}\ln(n^2)-\frac{n}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} - 1 \\
&= e^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{n}{2}\left(-\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - 1 \\
&= e^{\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)} - 1 \\
&= 1+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \\
&\sim \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

10. Rappelons que $\tan(\pi/2 - x) = 1/\tan(x)$.
$$\begin{aligned}
u_n &= n\tan\left(\frac{\pi n}{2n}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right) \\
&= n\tan\left(\frac{\pi}{2}\times\left(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= n\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{n}{\tan(\pi/4n+\mathrm{o}\,(1/n))} \\
&\sim \frac{n}{\pi/4n} \\
&\sim \frac{4n^2}{\pi}
\end{aligned}$$

11. $u_n = e^{n\ln(n+1)-n\ln(2)}$. Comme d'habitude, factorisons par le terme dominant dans le ln et faisons un DL (car $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$) :
$$u_n = e^{n\ln(n)+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n\ln(2)} = e^{n\ln(n)+n\left(\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-n\ln(2)} = e^{n\ln\left(\frac{n}{2}\right)+1+\mathrm{o}(1)} = e\times\left(\frac{n}{2}\right)^n\times e^{\mathrm{o}(1)}$$
et puisque $e^{\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $u_n \sim e\times\left(\frac{n}{2}\right)^n$. Remarquons que u_n n'est pas équivalent à $\left(\frac{n}{2}\right)^n$ alors que $\frac{n+1}{2}\sim\frac{n}{2}$: puisqu'on vous dit que l'équivalent ne passe pas à la puissance variable !

12. Les deux termes sont équivalents à $\frac{\ln(n)}{n}$ mais cela ne nous avance pas beaucoup : d'une part, on ne peut pas sommer les équivalents, d'autre part, on ne peut pas dire qu'une quantité est équivalente à 0. On fait donc un DL du ln et de $\frac{1}{1+x}$ et pour cela on factorise à chaque fois par n (et on utilise le fait que $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$) :
$$u_n = \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} - \frac{\ln(n)}{n}\times\frac{1}{1+1/n} = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}{n} - \frac{\ln(n)}{n}\times\left(1-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
En développant, il vient : $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)+\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{\ln(n)}{n^2}$ car tous les autres termes sont négligeables.

13.
$$
\begin{aligned}
u_n &= e^{\frac{1}{n}\ln(\ln(1+e^{-n^2}))}\\
&= e^{\frac{1}{n}\ln\left(e^{-n^2}+\mathrm{o}\left(e^{-n^2}\right)\right)}\\
&= e^{\frac{1}{n}\times\left(\ln(e^{-n^2})+\ln(1+\mathrm{o}(1))\right)}\\
&= e^{\frac{1}{n}\times(-n^2+\mathrm{o}(1))}\\
&= e^{-n+\mathrm{o}(1/n)}\\
&= e^{-n}\times e^{\mathrm{o}(1/n)}
\end{aligned}
$$

Or, $\mathrm{o}\,(1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et l'exponentielle est continue donc son exponentielle tend vers $e^0=1$ si bien que $u_n \sim e^{-n}$.

14. Bien sûr, on n'affirme pas que $u_n \sim \sin(n\pi) = 0\dots$ Factorisons par n^2 dans la racine et utilisons le DL de $(1+x)^\alpha$ (possible car $1/n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$) :

$$u_n = \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\right) = \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sin(n\pi+x) = (-1)^n\sin(x)$: on a le sinus d'une quantité qui tend alors vers 0 et on utilise l'équivalent usuel $\sin(u)\sim u$ au voisinage de 0 :

$$u_n = (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{(-1)^n\pi}{2n}$$

15. Puisque $\sqrt[n]{n} = n^{1/n}$, il vient : $u_n = n\left(e^{\frac{\ln(n)}{n}}-1\right)$. Or, au voisinage de 0, $e^u-1\sim u$ (et $\dfrac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées) donc $u_n \sim n\times\dfrac{\ln(n)}{n} = \ln(n)$.

16.
$$
\begin{aligned}
u_n &= e^{n\ln\left(n^3\left(e^{1/n}-e^{-1/n}\right)\right)}\\
&= e^{n\ln\left(n^3\left(1+\frac{1}{n}-1+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)}\\
&= e^{n\ln\left(2n^2+\mathrm{o}\left(n^2\right)\right)}\\
&= e^{n\ln(2n^2)+n\ln(1+\mathrm{o}(1))}\\
&= e^{2n\ln(n)+n\ln(2)+n\mathrm{o}(1)}\\
&= e^{2n\ln(n)+n\ln(2)+\mathrm{o}(n)}
\end{aligned}
$$

ce qui ne permet pas de conclure car on ne connaît pas la limite du $\mathrm{o}\,(n)$. Il faut donner un DL à un ordre plus grand, ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
u_n &= e^{n\ln\left(n^3\left(e^{1/n}-e^{-1/n}\right)\right)}\\
&= e^{n\ln\left(n^3\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)}\\
&= e^{n\ln\left(2n^2+\mathrm{o}(n)\right)}\\
&= e^{n\ln(2n^2)+n\ln(1+\mathrm{o}(1/n))}\\
&= e^{2n\ln(n)+n\ln(2)+n\mathrm{o}(1/n)}\\
&= e^{2n\ln(n)+n\ln(2)+\mathrm{o}(1)}\\
&= n^{2n}\times 2^n\times e^{\mathrm{o}(1)}
\end{aligned}
$$

et puisque $e^{\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on peut en déduire que $u_n \sim n^{2n}\times 2^n$.

17. On ne peut pas donner un équivalent plus simple de ces termes, on ne peut pas faire de DL : la seule chose à faire est de mettre au même dénominateur : $u_n = \dfrac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^\alpha (n+1)^\alpha}$. On a un quotient : on donne un équivalent du dénominateur et du numérateur. Le dénominateur est équivalent à $n^\alpha \times n^\alpha = n^{2\alpha}$ car l'équivalent passe au produit et à la puissance fixe. Pour le numérateur, on factorise par le terme dominant et on fait le DL de $(1+x)^\alpha$ avec $x = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$:

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \times \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n^\alpha = \alpha n^{\alpha-1} + \mathrm{o}\left(n^{\alpha-1}\right) \sim \alpha n^{\alpha-1}$$

et finalement $u_n \sim \dfrac{\alpha n^{\alpha-1}}{n^{2\alpha}} = \dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$.

18. $n^{-3/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc on peut faire un DL du cos, et factorisons par n^3 dans le dernier terme pour nous ramener à $(1+x)^{1/3}$ avec x qui tend vers 0. À quel ordre faire les DL : dans le doute, donnons deux termes à chaque fois, c'est-à-dire faisons un DL du cos à l'ordre 2 et celui de $(1+x)^{1/3}$ à l'ordre 1, nous verrons bien :

$$\begin{aligned} u_n &= 3n - 2n\cos\left(n^{-3/2}\right) - n\sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^3}} \\ &= 3n - 2n\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n \times \left(1 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

ce qui ne permet pas de conclure. Il faut donc faire des DL à des ordres plus grands, ce qui donne :

$$\begin{aligned} u_n &= 3n - 2n\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{n^3} + \frac{1}{4!} \times \frac{1}{n^6} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right) - n \times \left(1 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{n^3} - \frac{1}{9} \times \left(\frac{3}{n^3}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right) \\ &= \frac{11}{12n^5} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^5}\right) \sim \frac{11}{12n^5} \end{aligned}$$

19. Faisons un DL du ln (avec $u_n = 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$). À quel ordre ? Dans le doute, à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 1 - \left(1 + \mathrm{o}(1) + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \mathrm{o}(1) - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

ce qui ne permet pas de conclure. Pourquoi ? Car les deux termes $\mathrm{o}(1)$ et $-1/2n$ tendent vers 0, mais on ne sait pas lequel des deux est prépondérant, ou (ce qui revient au même) lequel est négligeable devant l'autre, et donc, tout ce que l'on peut affirmer est que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Puisque l'on n'a pas assez d'informations, on fait un DL à un ordre plus grand. Essayons à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et on ne peut pas conclure pour les mêmes raisons : le $\mathrm{o}(1/n)$ et le $1/4n^2$ sont tous les deux négligeables devant $1/n$ et « on ne sait pas qui gagne » : tout ce que l'on peut affirmer est que $u_n = \mathrm{o}(1/n)$. Rebelote, on augmente l'ordre du DL, on fait un DL à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{6n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Donc $u_n \sim -1/12n^2$. En effet, tous les autres termes sont négligeables devant $1/n^2$.

20.
$$\begin{aligned} u_n &= e^{\frac{1}{n}\left(\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}-\sqrt{n}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{n}\left(\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\sqrt{n}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} \end{aligned}$$

La quantité dans l'exponentielle tend vers 0 donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $u_n \sim 1$.

21. Le numérateur de la fraction est équivalent à $5n^2$, et puisque $u = 2/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors on peut faire un DL de l'exponentielle à l'ordre 1 ce qui donne

$$1-e^{2/n} = 1-\left(1+\frac{2}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{2}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{2}{n}$$

D'où

$$\frac{5n^2+3n+1}{1-e^{2/n}} \sim \frac{5n^2}{-\dfrac{2}{n}} = -\frac{5n^3}{2}$$

Attention, on ne peut pas sommer les équivalents, on écrit donc ceci avec un $\mathrm{o}\left(\right)$ ce qui donne

$$u_n = \ln(n)+\frac{5n^3}{2}+\mathrm{o}\left(n^3\right) \sim \frac{5n^3}{2}$$

22. Notons a_n la quantité dans le sinus (plusieurs petits calculs valent mieux qu'un gros).

$$\begin{aligned} a_n &= 1-\frac{1}{2\ln(n)^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)-\left(1+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2\ln(n)^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\sim -\frac{1}{2\ln(n)^2} \end{aligned}$$

et puisque $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $u_n = \sin(a_n) \sim a_n \sim -1/2\ln(n)^2$.

23. Puisque $u = 1/\sqrt[3]{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

et puisque l'équivalent passe à la puissance fixe,

$$\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \sim \frac{1}{\left(\sqrt[3]{n}\right)^2} = \frac{1}{n^{2/3}}$$

Cependant, l'équivalent ne passe pas à la fonction continue : on le réécrit avec un $\mathrm{o}\left(\right)$. On fait ensuite successivement un DL de $\ln(1+u)$ et $(1+u)^{1/9}$ ce qui donne

$$\begin{aligned} u_n &= 1-\sqrt[9]{1+\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n^{2/3}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)\right)} \\ &= 1-\sqrt[9]{1+\frac{1}{\sqrt[6]{n}}\times\left(\frac{1}{n^{2/3}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)\right)} \\ &= 1-\sqrt[9]{1+\frac{1}{n^{5/6}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right)} \\ &= 1-\left(1+\frac{1}{9n^{5/6}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right)\right) \end{aligned}$$

En conclusion : $u_n \sim \dfrac{-1}{9n^{5/6}}$.

24. Tout d'abord, puisque $1/\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\sin(1/\sqrt{n}) \sim 1/\sqrt{n}$ et puisque $n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $\text{Arctan}(n!) \sim \pi/2$. Donnons à présent un équivalent du dénominateur, qu'on note v_n.

$$\begin{aligned}
v_n &= \sqrt[4]{n^6+n^5} - n\sqrt{n} \\
&= \sqrt[4]{n^6\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\sqrt{n} \\
&= \sqrt[4]{n^6} \times \sqrt[4]{1+\frac{1}{n}} - n\sqrt{n} \\
&= n^{3/2} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/4} - n^{3/2} \\
&= n^{3/2} \times \left(1+\frac{1}{4n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n^{3/2} \\
&= \frac{n^{1/2}}{4} + \mathrm{o}\left(n^{1/2}\right)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $v_n \sim \sqrt{n}/4$. De cela on en déduit que

$$u_n \sim \frac{n \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{4}} = 2\pi$$

Exercice 24 : ✪✪ Donner un équivalent simple en x_0 des quantités suivantes :

1. $f(x) = \ln(\cos(x))$, $x_0 = 0$.
2. $f(x) = \sin(3x) - \tan(x)$, $x_0 = 0$.
3. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}$, $x_0 = +\infty$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$ puis $x_0 = +\infty$.
5. $f(x) = \ln\left(4x^4 - 2\cos(x) + 3\right)$, $x_0 = 0$ puis $x_0 = +\infty$.
6. $f(x) = \dfrac{x\text{Arctan}(2x)\left(\sqrt[5]{1+3x} - 1\right)}{1 + x^2 - \cos\left(\sqrt{x}\right)}$, $x_0 = 0$ puis $x_0 = +\infty$.
7. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{1+\sin(x^3)}} - e}{3\tan(x) - 3x - x^3}$, $x_0 = 0$.
8. $f(x) = (8+x)^{1/3} - 2$, $x_0 = 0$.
9. $f(x) = \ln(\text{sh}(x)/x)$, $x_0 = +\infty$.
10. $f(x) = \ln\left(1 + x + \sqrt{4+x}\right)$, $x_0 = +\infty$.
11. $f(x) = \ln\left(1 + x + \sqrt{4+x}\right) - \ln(3)$, $x_0 = 0$.
12. $f(x) = \ln(3e^x + e^{-x})$, $x_0 = +\infty$.
13. $f(x) = \ln(3e^x + e^{-x}) - 2\ln(2)$, $x_0 = 0$.
14. $f(x) = (x+1)^{1/x} - x^{1/x}$, $x_0 = +\infty$.
15. $f(x) = x^{x^{1/x}}$, $x_0 = +\infty$.
16. $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = \pi$.
17. $f(x) = 1 + \cos(x)$, $x_0 = \pi$.
18. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $x_0 = -1$.
19. $f(x) = x^x - 4$, $x_0 = 2$.
20. $f(x) = x^x - x$, $x_0 = 1$.
21. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\sin(x)}$, $x_0 = 0$.
22. $f(x) = e^x - x^e$, $x_0 = e$.

Correction :

1. $f(x) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \sim -\dfrac{x^2}{2}$.
2. $f(x) = 3x - x + \mathrm{o}\left(x\right) \sim 2x$.
3. Chacun des termes étant équivalent à $\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x} + \mathrm{o}\left(\sqrt{x}\right) \\
&\sim \sqrt{x}
\end{aligned}$$

4. Au voisinage de 0, $1/x$ est négligeable devant $1/x^2$ donc $f(x) \sim 1/x^2$, et c'est le contraire en $+\infty$, où $f(x) \sim 1/x$.
5. Au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(4x^4 - 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) + 3\right) \\ &= \ln\left(1 + x^2 + 4x^4 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &\sim x^2 \end{aligned}$$

et au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(4x^4) + \ln\left(1 - \frac{2\cos(x)}{4x^4} + \frac{3}{4x^4}\right) \\ &= \ln(4) + 4\ln(x) + \mathrm{o}\left(1\right) \\ &\sim 4\ln(x) \end{aligned}$$

6. Là aussi, il suffit de donner un équivalent du numérateur et du dénominateur. Notons $g(x)$ le numérateur et $h(x)$ le dénominateur. Au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{Arctan}(2x) \sim \pi/2$, $(1+3x)^{1/5} \sim (3x)^{1/5}$ donc

$$(1+3x)^{1/5} - 1 = (3x)^{1/5} + \mathrm{o}\left(x^{1/5}\right) - 1 \sim (3x)^{1/5}$$

Finalement, $g(x) \sim x \times (\pi/2) \times (3x)^{1/5}$ et $h(x) \sim x^2$ (les autres termes sont négligeables) donc

$$f(x) \sim \frac{x(\pi/2)(3x)^{1/5}}{x^2} = \frac{\pi \times 3^{1/5}}{2 \times x^{4/5}}$$

Plaçons-nous à présent au voisinage de 0. $\mathrm{Arctan}(2x) \sim 2x$ et

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{1+3x} - 1 &= (1+3x)^{1/5} - 1 \\ &= 1 + \frac{1}{5} \times 3x + \mathrm{o}\left(x\right) - 1 \\ &\sim \frac{3x}{5} \end{aligned}$$

donc $g(x) \sim 6x^3/5$. De plus, $h(x) = 1 + x^2 - (1 - x/2 + \mathrm{o}\left(x\right)) \sim x/2$ donc $f(x) \sim 12x^2/5$.

7. Tout d'abord, $h(x) = 3\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) - 3x - x^3 \sim 2x^5/5$. De plus,

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{(1+x^3)^{1/2}} - e \\ &= e^{1 + x^3/2 + \mathrm{o}\left(x^3\right)} - e \\ &= e \times e^{x^3/2 + \mathrm{o}\left(x^3\right)} - e \\ &= e\left(1 + \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) - e \\ &\sim \frac{ex^3}{2} \end{aligned}$$

donc $f(x) \sim 5e/4x^2$.

8.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(1 + \frac{x}{8}\right)^{1/3} - 2 \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{3} \times \frac{x}{8} + \mathrm{o}\left(x\right)\right) - 2 \\ &\sim \frac{x}{12} \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) - \ln(x) \\ &= \ln(e^x) + \ln(1-e^{-2x}) - \ln(2) - \ln(x) \\ &= x + \ln(1-e^{-2x}) - \ln(2) - \ln(x) \\ &\sim x \end{aligned}$$

10. Au voisinage de $+\infty$:
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{\sqrt{4+x}}{x}\right) \\ &= \ln(x) + \mathrm{o}(1) \\ &\sim \ln(x) \end{aligned}$$

11. Au voisinage de 0 :
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(1 + x + 2\left(1+\frac{x}{4}\right)^{1/2}\right) - \ln(3) \\ &= \ln\left(1 + x + 2\left(1 + \frac{1}{2}\times\frac{x}{4} + \mathrm{o}(x)\right)\right) - \ln(3) \\ &= \ln\left(3 + \frac{5x}{4} + \mathrm{o}(x)\right) - \ln(3) \\ &= \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{5x}{12} + \mathrm{o}(x)\right) - \ln(3) \\ &\sim \frac{5x}{12} \end{aligned}$$

12. Au voisinage de $+\infty$:
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(e^x) + \ln(3+e^{-2x}) \\ &= x + \mathrm{o}(x) \\ &\sim x \end{aligned}$$

13. Au voisinage de 0 :
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(3(1+x) + 1 - x + \mathrm{o}(x)) - \ln(4) \\ &= \ln(4 + 2x + \mathrm{o}(x)) - \ln(4) \\ &= \ln(4) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)\right) - \ln(4) \\ &\sim \frac{x}{2} \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)} - e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\left(\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)} - e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \times e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \times \left[e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - 1\right] \end{aligned}$$

Or, $\ln(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc la première exponentielle est équivalente à 1, et le crochet est équivalent à

$$\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x^2}$$

si bien que $f(x)\sim 1/x^2$.

15. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x^{1/x}\ln(x)} \\ &= e^{e^{\frac{1}{x}\ln(x)}\times\ln(x)} \\ &= e^{\left(1+\frac{\ln(x)}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\right)\ln(x)} \\ &= e^{\ln(x)+\mathrm{o}(1)} \\ &\sim x \end{aligned}$$

puisque $e^{\mathrm{o}(1)}\sim 1$.

16. Comme d'habitude, posons $x=\pi+h$, $h=x-\pi$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\pi+h) \\ &= -\sin(h) \\ &\sim -h \\ &\sim \pi-x \end{aligned}$$

17. Idem :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+\cos(\pi+h) \\ &= 1-\cos(h) \\ &\sim \frac{h^2}{2} \\ &\sim \frac{(\pi-x)^2}{2} \end{aligned}$$

18. On pose $x=-1+h$, $h=x+1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+(-1+h)^3)^{-1/3} \\ &= (1+(-1)^3\times(1-h)^3)^{-1/3} \\ &= (1-(1-3h+\mathrm{o}\,(h)))^{-1/3} \\ &\sim (3h)^{-1/3} \\ &\sim \frac{1}{3^{1/3}(x+1)^{1/3}} \end{aligned}$$

19. On pose $x=2+h$, $h=x-2$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{x\ln(x)} - 4 \\
&= e^{(2+h)\ln(2+h)} - 4 \\
&= e^{(2+h)\times\left(\ln(2)+\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)\right)} - 4 \\
&= e^{(2+h)\times\left(\ln(2)+\frac{h}{2}+\mathrm{o}(h)\right)} - 4 \\
&= e^{2\ln(2)+h+h\ln(2)+\mathrm{o}(h)} - 4 \\
&= e^{2\ln(2)} \times e^{h(1+\ln(2))+\mathrm{o}(h)} - 4 \\
&= 4\left(e^{h(1+\ln(2))+\mathrm{o}(h)} - 1\right) \\
&\sim 4h(1+\ln(2)) \\
&\sim 4(x-2)(1+\ln(2)) \\
&\sim (x-2)(4+\ln(16))
\end{aligned}$$

20. Posons $x = 1+h$, $h = x-1$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{x\ln(x)} - x \\
&= e^{(1+h)\ln(1+h)} - (1+h) \\
&= e^{(1+h)(h+\mathrm{o}(h))} - (1+h) \\
&= e^{h+h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)} - (1+h) \\
&= \left(1+h+h^2+\frac{h^2}{2}+\mathrm{o}\left(h^2\right)\right) - (1+h) \\
&\sim \frac{3h^2}{2} \\
&\sim \frac{3(x-1)^2}{2}
\end{aligned}$$

21.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} - \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{x} - \sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{x} - \sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\
&\sim \frac{x^{5/2}}{12}
\end{aligned}$$

22. Posons $x = e+h$, $h = x-e$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x - e^{e\ln(x)} \\
&= e^{e+h} - e^{e\ln(e+h)} \\
&= e^{e+h} - e^{e\ln(e)+e\ln\left(1+\frac{h}{e}\right)} \\
&= e^{e+h} - e^{e+e\left(\frac{h}{e} - \dfrac{h^2}{2e^2} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right)} \\
&= e^{e+h} - e^{e+h-\dfrac{h^2}{2e} + \mathrm{o}\left(h^2\right)} \\
&= e^{e+h}\left(1 - e^{-h^2/2e+\mathrm{o}\left(h^2\right)}\right) \\
&\sim e^{e+h} \times \frac{h^2}{2e} \\
&\sim e^{e-1} \times \frac{h^2}{2} \\
&\sim e^{e-1} \times \frac{(x-e)^2}{2}
\end{aligned}$$

3 DL en pratique

Exercice 25 : ✪ La fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable à droite en 0 ?

Correction : Notons cette fonction f. $u = \sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{1 - \dfrac{(\sqrt{x})^2}{2} + \mathrm{o}\left((\sqrt{x})^2\right) - 1}{x} \\
&= \frac{-\dfrac{x}{2} + \mathrm{o}\left(x\right)}{x} \\
&= -\frac{1}{2} + \mathrm{o}\left(1\right) \\
&\xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

donc f est dérivable à droite (puisque f n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$) en 0 et $f'(0) = -1/2$.

Exercice 26 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - 2f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{-1}{n}\right)$$

1. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
2. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$, que $f'(0) = 0 \neq f''(0)$. Donner un équivalent de u_n.

Correction :

1. f étant continue, tous les termes dans u_n tendent vers $f(0)$ si bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) - 2f(0) + f(0) = 0$.
2. Rappelons que dire qu'une suite est équivalente à 0 est passible de châtiments corporels. f étant $\mathscr{C}^2$, d'après la formule de Taylor-Young, f admet un DL à l'ordre 2 donné par :

   $$f(x) = f(0) + \frac{f''(0)x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$$

   puisque $f'(0) = 0$. Puisque $1/n, 2N$ et $-1/n$ tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} u_n &= f(0)+\frac{f''(0)}{2n^2}-2\times\left(f(0)+\frac{4f''(0)}{2n^2}\right)+f(0)+\frac{f''(0)}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{-3f''(0)}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{-3f''(0)}{n^2} \end{aligned}$$

Exercice 27 : ✪ Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=-\sigma^2$. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\sigma^2t^2/2}$$

Correction : D'après la formule de Taylor-Young, f admet un DL à l'ordre 2 donné par :

$$f(x)=1-\frac{\sigma^2x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)$$

Soit $t\in\mathbb{R}$. $t/\sqrt{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc on peut faire un DL de f (t est fixé, c'est n qui varie) :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n &= e^{n\ln\left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)} \\ &= e^{n\ln\left(1-\frac{\sigma^2t^2}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{n\left(-\frac{\sigma^2x^2}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{-\frac{\sigma^2x^2}{2}+\mathrm{o}(1)} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\sigma^2/2} \end{aligned}$$

par continuité de l'exponentielle.

Exercice 28 : ✪ Déterminer les ordres maximaux auxquels les fonctions suivantes admettent un DL en 0 :

1. $x\mapsto\sqrt{x}$.
2. $x\mapsto x^{13/3}$.
3. $x\mapsto|x|^n$ (où $n\geq 1$).

Correction :

1. f est continue non dérivable donc admet un DL à l'ordre 0 mais pas à l'ordre 1.
2. $f(x)=\mathrm{o}\left(x^4\right)$ puisque $f(x)/x^4=x^{1/3}\xrightarrow[x\to0]{}0$ donc f admet un DL à l'ordre 4. Si f admet un DL à l'ordre 5, alors il existe a_5 tel que $f(x)=a_5x^5+\mathrm{o}\left(x^5\right)$ (les coefficients précédents sont nuls) donc $f(x)/x^5\xrightarrow[x\to0]{}a_5\in\mathbb{R}$ ce qui est absurde puisque $f(x)/x^5=1/x^{2/3}\xrightarrow[x\to0^+]{}+\infty$.
3. Si n est pair alors $f(x)=x^n$ donc f est $\mathscr{C}^\infty$ donc admet un DL à tout ordre. Supposons n impair. Soit $x>0$. Alors $f(x)=x^n$ donc $f(x)/x^{n-1}=x\xrightarrow[x\to0^+]{}0$. De plus, si $x<0$, $f(x)=-x^n$ car n est impair donc $f(x)/x^{n-1}=-x\xrightarrow[x\to0^-]{}0$. $x\mapsto f(x)/x^{n-1}$ admet une limite à gauche et à droite en 0 égales à 0 donc $f(x)/x^{n-1}\xrightarrow[x\to0]{}0$. En d'autres termes, $f(x)=\mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$ donc f admet un DL (au moins) à l'ordre $n-1$. Si f admet un DL à l'ordre n, alors il existe a_n tel que $f(x)=a_nx^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)$ (les autres coefficients sont nuls d'après ce qui précède) donc $f(x)/x^n\xrightarrow[x\to0]{}a_n$. Cependant, on montre de même que $f(x)/x^n\xrightarrow[x\to0^+]{}1$ et que $f(x)/x^n\xrightarrow[x\to0^-]{}-1$ donc $x\mapsto f(x)/x^n$ n'a pas de limite en 0 ce qui est absurde. Dès lors, l'ordre maximal auquel f admet un DL en 0 est $n-1$.

Exercice 29 : ✪

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=e^{-1/x}\times\sin\left(e^{1/x}\right)$. Montrer que f admet un DL à tout ordre que l'on explicitera alors qu'elle n'est pas dérivable deux fois en 0.
2. Deux fonctions admettant un DL à tout ordre dont les DL ont les mêmes coefficients sont-elles égales, au moins sur un voisinage de 0 ?

Correction :

1. Tout d'abord, pour tout n,

$$\left|\frac{f(x)}{x^n}\right| \leq \frac{1}{x^n} e^{-1/x}$$

Or, par croissances comparées, $\dfrac{1}{x^n} e^{-1/x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x)/x^n \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ donc $f(x) = \mathrm{o}\left(x^n\right)$ i.e. f admet un DL à l'ordre n (dont tous les coefficients sont nuls). n étant quelconque, f admet un DL à tout ordre. En particulier, f admet un DL à l'ordre 1 donc est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ (léger abus de langage : f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et f ainsi prolongée admet un DL à l'ordre 1 donc f ainsi prolongée est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$). Cependant, prouvons que f n'est pas dérivable deux fois en 0. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \times \sin\left(e^{1/x}\right) - \frac{1}{x^2} e^{1/x} e^{-1/x} \times \sin\left(e^{1/x}\right) \\ &= \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \times \sin\left(e^{1/x}\right) - \frac{1}{x^2} \sin\left(e^{1/x}\right) \end{aligned}$$

Puisque $f'(0) = 0$, le taux d'accroissement de f' en 0 vaut :

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{1}{x^3} e^{-1/x} \times \sin\left(e^{1/x}\right) - \frac{1}{x^3} \cos\left(e^{1/x}\right)$$

quantité qui n'a pas de limite en 0 (idem que dans le chapitre 13 : s'intéresser aux suites de terme général $u_n = 1/\ln(2n\pi)$ et $v_n = 1/\ln(2n\pi + \pi/2)$) donc f n'est pas dérivable deux fois. Comme on l'a dit en classe : l'équivalence entre « admettre un DL à l'ordre n » et « être dérivable n fois » n'est plus valable si $n \geq 2$!

2. Non : la fonction nulle et la fonction f de la question précédente ont le même DL (tous les coefficients sont nuls) mais ne sont pas égales, même sur un voisinage de 0 car, aussi près qu'on soit de 0, il existe x tel que $f(x) \neq 0$ (s'intéresser à la suite de terme général $u_n = 1/\ln(2n\pi + \pi/2)$).

Exercice 30 - DL d'Arcsin : ✪✪

1. Montrer que le DL en 0 à l'ordre n de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ est :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

2. En déduire le DL d'Arcsin à l'ordre $2n+1$.
3. Donner le DL d'Arcsin à l'ordre 5.

Correction :

1. En utilisant le DL de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha = -1/2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1)}{2^k k!} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (2k-1) \times 2k}{2^k k! 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2k-2) \times 2k} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! \times 2^k k!} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

2. En appliquant la question précédente avec $u = -x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} (-x^2)^k + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) \end{aligned}$$

Par primitivation des DL :

$$\begin{aligned}\text{Arcsin}(x) &= \text{Arcsin}(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k \times (2k+1)} \binom{2k}{k} x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k \times (2k+1)} \binom{2k}{k} x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)\end{aligned}$$

3. En particulier :

$$\text{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \mathrm{o}\left(x^5\right)$$

Exercice 31 : ✪ Soit f de classe $\mathscr{C}^3$. Calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(3h) - 3f(2h) + 3f(h) - f(0)}{h^3}$$

Correction : f est $\mathscr{C}^3$ donc, d'après la formule de Taylor-Young, f admet un DL à l'ordre 3 donné par

$$f(u) = f(0) + f'(0)u + \frac{f''(0)u^2}{2} + \frac{f'''(0)u^3}{6} + \mathrm{o}\left(u^3\right)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}f(3h) - 3f(2h) + 3f(h) - f(0) &= f(0) + 3f'(0)h + \frac{f''(0)9h^2}{2} + \frac{f'''(0)27h^3}{6} - 3\left(f(0) + 2f'(0)h + \frac{f''(0)4h^2}{2} + \frac{f'''(0)8h}{6}\right) \\ &\quad +3\left(f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)h^2}{2} + \frac{f'''(0)h^3}{6}\right) - f(0) + \mathrm{o}\left(h^3\right) \\ &= h^3 + \mathrm{o}\left(h^3\right) \\ &\sim h^3\end{aligned}$$

donc la limite cherchée vaut 1.

Exercice 32 : ✪✪ Soient f dérivable sur $\mathbb{R}$, (b_n) et (a_n) deux suites, respectivement strictement positive et strictement négative, de limite nulle. Montrer que :

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(0)$$

Correction : f étant dérivable, elle admet un DL à l'ordre 1 donné par $f(u) = f(0) + f'(0)u + \mathrm{o}\left(u\right)$. Puisque (a_n) et (b_n) tendent vers 0 :

$$\begin{aligned}\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} &= \frac{f(0) + b_n f'(0) + \mathrm{o}\left(b_n\right) - f(0) - f'(0)a_n + \mathrm{o}\left(a_n\right)}{b_n - a_n} \\ &= \frac{(b_n - a_n)f'(0) + \mathrm{o}\left(b_n\right) + \mathrm{o}\left(a_n\right)}{b_n - a_n} \\ &= f'(0) + \frac{\mathrm{o}\left(b_n\right) + \mathrm{o}\left(a_n\right)}{b_n - a_n}\end{aligned}$$

Attention, on ne peut pas tout rentrer dans les $\mathrm{o}\left(\right)$. Utilisons le fait que $a_n < 0 < b_n$. Par conséquent, $0 < b_n < b_n - a_n$ donc (rappelons qu'on ne connaît pas le signe d'un $\mathrm{o}\left(\right)$).

$$\left|\frac{\mathrm{o}\left(b_n\right)}{b_n - a_n}\right| \leq \left|\frac{\mathrm{o}\left(b_n\right)}{b_n}\right| = \left|\mathrm{o}\left(1\right)\right|$$

donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\frac{\mathrm{o}\left(b_n\right)}{b_n - a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

De même, $|b_n - a_n| = |a_n - b_n| > |a_n|$ et on prouve de même que

$$\frac{\mathrm{o}\left(a_n\right)}{b_n - a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 33 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ si et seulement si $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0)$.

Correction : f étant $\mathscr{C}^n$, d'après la formule de Taylor-Young, f admet un DL à l'ordre n donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

$f(x)/x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si et seulement si $f(x) = \mathrm{o}\left(x^n\right)$ si et seulement si les coefficients du DL de f sont tous nuls (par unicité du DL) ce qui permet de conclure.

Exercice 34 : ✪

1. Soit $f : x \mapsto \sin(x) \times \mathrm{ch}(\mathrm{Arctan}(x))$. Donner les dérivées de f en 0 jusqu'à l'ordre 6.
2. **Remake :** Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ en moins de 15 secondes.

Correction :

1. Donnons le DL de f à l'ordre 6. Comme d'habitude, donnons le DL du sin à l'ordre 6 et le DL du ch à l'ordre 5 :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^6\right)\right) \times \mathrm{ch}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^6\right)\right) \times \left[1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{4!}(x)^4 + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right] \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^6\right)\right) \times \left[1 + \frac{1}{2}\left(x^2 - 2 \times x \times \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right] \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^6\right)\right) \times \left[1 + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right] \\
&= x + \frac{x^3}{3} - \frac{11x^5}{30} + \mathrm{o}\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

Or, f est $\mathscr{C}^\infty$ donc admet un DL à tout ordre d'après la formule de Taylor-Young, et son DL à l'ordre 6 est donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{6} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{24} + \frac{f^{(5)}(0)x^5}{120} + \frac{f^{(6)}(0)x^6}{120} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

Par unicité du DL : $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f^{(3)}(0)/6 = 1/3$ donc $f^{(3)}(0) = 2$ et $f^{(5)}(0)/120 = -11/30$ donc $f^{(5)}(0) = -44$.

2. $x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2k}\right)\right) \\
&= x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^k x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2k+1}\right)
\end{aligned}$$

f étant $\mathscr{C}^\infty$, de même, son DL est donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(0)}{6} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Par unicité du DL, $f^{(n)}(0) = 0$ si n est pair, et si n est impair, il existe k tel que $n = 2k+1$ si bien que $f^{(n)}(0)/n = f^{(2k+1)}(0)/(2k+1)! = (-1)^k$ donc $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k+1)!$.

Exercice 35 - « Dérivation d'un développement limité » : ✪✪

1. Donner un exemple de fonction f admettant un DL à l'ordre 2 tel que f' n'admette pas de DL à l'ordre 1.

2. Soit $n \geq 1$. Supposons que f admette un DL à l'ordre n donné par :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

On suppose également que f' admette un DL à l'ordre $n-1$. Montrer que ce DL est :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$$

Comment expliquer le paradoxe entre les deux questions ?

Correction :

1. cf. cours : $f : x \mapsto x^3 \sin(1/x)$ prolongée en 0 admet un DL à l'ordre 2 mais f' n'est pas dérivable donc n'admet pas de DL à l'ordre 1.
2. Notons

$$f'(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$$

Rappelons qu'on peut primitiver les DL (cf. cours) donc le DL de f est :

$$f'(x) = f(0) + b_0 x + \frac{b_1 x^2}{2} + \frac{b_2 x^3}{3} + \cdots + \frac{b_{n-1} x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Par unicité du DL, $b_0 = a_1$, $b_1/2 = a_2$, $b_2/3 = a_3$ et ainsi de suite jusque $b_{n-1}/n = a_n$ ce qui permet de conclure. En fait, on peut dériver les DL, mais uniquement SI ON SAIT DÉJÀ QUE f' ADMET UN DL (par exemple si f est $\mathscr{C}^\infty$ donc f' admet un DL à tout ordre d'après la formule de Taylor-Young).

Exercice 36 : ✪ Montrer que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Correction : Soit $n \geq 1$. Notons u_n le membre de gauche. On a :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

On a deux fractions du type $\dfrac{1}{1+u}$ avec $u \to 0$: faisons un DL. Question : à quel ordre. On veut du $1/n^2$ à la fin, et on va multiplier par $1/n$ dans le premier cas, et par $1/n^2$ dans le second : il suffit donc d'un $\mathrm{o}(1/n)$ dans le premier cas, il sera multiplié par $1/n$, et d'un $\mathrm{o}(1)$ dans le second, il sera multiplié par $1/n^2$. En d'autres termes, on fait un DL à l'ordre 1 dans le premier cas, et à l'ordre 2 dans le second :

$$u_n = \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n^2} \times (1 + \mathrm{o}(1)) = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 37 : ✪ Soit (u_n) une suite à valeurs dans $]-1\,;+\infty[$ telle que $u_n = \mathrm{o}(\sqrt{n})$. Montrer que $\left(1+\dfrac{u_n}{n}\right)^n \sim e^{u_n}$.

Correction : $u_n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc on peut faire un DL du ln :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n &= e^{n\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right)} \\
&= e^{n\left(\frac{u_n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{{u_n}^2}{n^2}\right)\right)} \\
&= e^{u_n + \mathrm{O}\left(\frac{{u_n}^2}{n}\right)} \\
&= e^{u_n} \times e^{\mathrm{O}\left(\frac{{u_n}^2}{n}\right)}
\end{aligned}$$

Or, ${u_n}^2/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc le $\mathrm{O}()$ tend vers 0 (dominée par une suite qui tend vers 0 implique que la suite tend vers 0) donc, par continuité de l'exponentielle, la deuxième exponentielle tend vers 1 ce qui permet de conclure.

Exercice 38 : ✪✪ Donner un équivalent de

$$u_n = \left(\text{Arctan}\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\right)^n$$

Correction : Comme d'habitude, puissance variable donc exponentielle. Attention, on ne peut pas dire que l'arctangente est équivalente à $\pi/2$ car ce qu'il y a dedans tend vers $+\infty$ donc $u_n \sim (\pi/2)^n$ car l'équivalent ne passe pas à la puissance variable.

$$u_n = e^{n\ln\left(\text{Arctan}\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\right)}$$

Problème : ce qu'il y a dans l'Arctan ne tend pas vers 0 et donc on ne peut pas faire de DL. On ne peut pas non plus factoriser par le terme dominant car l'Arctan ne « casse » pas les produits comme le ln. Il faut se ramener en 0 et on pense à une formule du chapitre de dérivation : $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ si $x > 0$ (et c'est le cas ici). Dès lors,

$$\begin{aligned} u_n &= e^{n\ln\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{n+1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e^{n\ln\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e^{n\ln\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + \text{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \end{aligned}$$

Précisons qu'on ne met pas le terme en $1/n^2$ car on fait un DL à l'ordre 1 et donc le $1/n^2$ est aspiré par le trou noir du $\text{o}\,()$. Finalement, on met encore en facteur le terme dominant pour se ramener à du $\ln(1+u)$:

$$\begin{aligned} u_n &= e^{n\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + n\ln\left(1 - \frac{2}{\pi n} + \text{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{n\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + n\left(-\frac{2}{\pi n} + \text{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{n\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\pi} + \text{o}(1)} \\ &\sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \times e^{-\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

Exercice 39 : ✪✪ Donner un équivalent de $u_n = \text{Arccos}\left(\dfrac{2}{\pi} \times \text{Arctan}(n^2)\right)$.

Correction : La quantité dans l'Arccos tend vers 1 donc (u_n) tend vers 0, mais rappelons qu'il est interdit de dire qu'une suite est équivalente à 0. Donnons un équivalent de Arccos en 1. Pour cela, on fait comme en cours : on pose $h = x - 1$, c'est-à-dire qu'on cherche un équivalent en 0 de $f : x \mapsto \text{Arccos}(1+h)$. Soit $h < 0$ (puisque Arccos est définie sur $[-1\,;1]$, il est impératif que h soit négatif pour que Arccos soit définie en $1+h$). On sait que $\cos(f(x)) = 1 + h$. Or, on a déjà dit que $f(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ donc on peut faire un DL du cos, ce qui donne :

$$1 - \frac{f(h)^2}{2} + \text{o}\left(f(h)^2\right) = 1 + h$$

c'est-à-dire que $h \sim -f(x)^2/2$ donc $f(x) \sim \sqrt{-2h}$ (h est négatif et l'équivalence passe à la puissance fixe). Par conséquent, puisque $h = x - 1$, il en découle que :

$$\text{Arccos}(x) \sim_{x\to 1} \sqrt{-2(x-1)} = \sqrt{2(1-x)}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
u_n &= \operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\times\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= \operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\times\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\right)\\
&= \operatorname{Arccos}\left(1-\frac{2}{\pi n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\sim \sqrt{\frac{4}{\pi n^2}}\\
&\sim \frac{2}{n\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

Exercice 40 : ✪✪ Donner un développement asymptotique à cinq termes en 0 de

$$f : x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$$

On pourra s'intéresser (après l'avoir correctement définie et après avoir justifié son existence) à l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$$

qu'on ne cherchera pas à calculer !

Correction : Soit $x>0$, posons $g(x) = f(x) - \ln(x)$ si bien que

$$g(x) = \int_1^x \frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$$

La fonction $h : t \mapsto (e^t-1)/t$ tend vers 1 en 0 (DL ou taux d'accroissement) donc est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0)=1$. Dès lors, l'intégrale de l'énoncé n'est rien d'autre que l'intégrale de h ainsi prolongée sur $[\,0\,;1\,]$ (intégrale qui a du sens car intégrale d'une fonction continue sur un segment). g est une primitive de h (théorème fondamental de l'analyse) si bien que :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{e^x-1}{x}\\
&= \frac{1+x+x^2/2+x^3/6-1+\mathrm{o}\left(x^3\right)}{x}\\
&= 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

Par primitivation du DL :

$$g(x) = g(0)+x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{18}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$$

et puisque $g(0)=I$:

$$f(x) = \ln(x)+I+x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{18}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$$

Exercice 41 : ✪✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa réciproque qu'on notera f^{-1} est $\mathscr{C}^\infty$.
2. Donner le DL de f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

Correction :

1. Le fait que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ découle d'une application immédiate du théorème de la bijection. De plus, f est $\mathscr{C}^\infty$ et f' ne s'annule pas donc (cf. chapitre sur la dérivation) f^{-1} est elle aussi $\mathscr{C}^\infty$.

2. f^{-1} admet donc un DL à tout ordre d'après la formule de Taylor-Young, qu'on note :

$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right)$$

On sait que $a_0 = f^{-1}(0)$ l'unique antécédent de 0 par f. Or, $f(0) = 0$ donc l'unique antécédent de 0 par f est $f(0)$ donc $a_0 = 0$. On va utiliser la relation $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ c'est-à-dire :

$$f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)} = x$$

Or, $f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f^{-1}(0) = 0$ car f^{-1} est continue (ou tout simplement car $f^{-1}(x) = \mathrm{O}(x)$). Dès lors, l'exponentielle étant continue, l'exponentielle ci-dessus tend vers 1 donc $f^{-1}(x) \sim x$: on trouve donc que $a_1 = 1$. On progresse ! Le DL de $f^{-1}(x)$ à l'ordre 2 est donc $f(x) = x + a_2x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$. Si on fait un DL à l'ordre 2, cela donne (on ne fait à droite le DL qu'à l'ordre 1 puisqu'on va tout multiplier par x, donc on va augmenter les ordres de 1).

$$\begin{aligned} x &= (x + a_2x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right))e^{(x+\mathrm{o}(x))^2} \\ &= (x + a_2x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right))e^{\mathrm{o}(x)} \\ &= (x + a_2x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)) \times (1 + \mathrm{o}(x)) \\ &= x + a_2x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

Par unicité du DL, $a_2 = 0$. Recommençons avec le DL à l'ordre 3 (idem, on ne fait le membre de droite qu'à l'ordre 2) :

$$\begin{aligned} x &= (x + a_3x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right))e^{(x+\mathrm{o}(x))^2} \\ x &= (x + a_3x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right))e^{x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)} \\ &= (x + a_3x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)) \times \left(1 + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= x + x^3(1 + a_3) + \mathrm{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Toujours par unicité du DL, $a_3 + 1 = 0$ donc $a_3 = -1$. On trouve de même que $a_4 = 0$ et $a_5 = 5/2$ si bien que le DL recherché est :

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5x^5}{2} + \mathrm{o}\left(x^5\right)$$

On remarque qu'il n'y a que des puissances impaires : c'est normal ! f étant impaire, f^{-1} l'est aussi ! Par conséquent, le terme d'ordre 6 est aussi nul donc on a même gratuitement le DL suivant :

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5x^5}{2} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

Exercice 42 : ✪✪ Donner le DL à l'ordre $n+1$ en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

Correction : Il est intuitif qu'on va « presque » trouver x puisque f est « presque » la composée du ln et de l'exponentielle. f est dérivable sur un voisinage de 0, et si x est au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}} \\ &= 1 - \frac{x^n}{n!} \times \frac{1}{1 + \underbrace{x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}}_{=u \xrightarrow[x\to 0]{} 0}} \\ &= 1 - \frac{x^n}{n!} \times (1 + \mathrm{o}(1)) \\ &= 1 - \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \end{aligned}$$

Par primitivation du DL :

$$f(x) = f(0) + x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$$

et $f(0) = 0$ ce qui permet de conclure.

Exercice 43 : ✪✪ Soient $a_1, \dots, a_n$ n réels. Donner une CNS sur ces réels pour que la fonction f définie (quand c'est possible) par l'expression ci-dessous admette une limite finie en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\tan(kx)}$$

Correction : Faisons un DL des tangentes. À quelle ordre ? Dans le doute, à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx + \mathrm{o}(x)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx} \times \frac{1}{1+\mathrm{o}(1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx} \times (1 + \mathrm{o}(1)) \quad \text{(DL de } 1/1+u\text{)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Notons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$. Si $S \neq 0$ alors $f(x) \sim S/x$ (ne pas oublier de préciser que S doit être non nulle car on ne peut pas dire équivalent à 0) et donc f tend vers $\pm\infty$ en 0^+ selon le signe de S, et le contraire en 0^-. En particulier, f n'admet pas de limite finie en 0. Une condition NÉCESSAIRE pour que f admette une limite finie en 0 est donc que $S = 0$. Regardons si c'est suffisant : supposons que $S = 0$ si bien que $f(x) = \mathrm{o}(1/x)$. Or, $1/x$ tend vers $+\infty$ en 0^+ et $-\infty$ en 0^- donc une quantité négligeable devant $1/x$ peut tendre vers tout et n'importe quoi, voire même ne pas admettre de limite. On n'a pas assez d'informations pour conclure : on pousse le DL initial plus loin, c'est-à-dire qu'on fait le DL de $\tan(u)$ à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx + \frac{k^3x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx} \times \frac{1}{1 + \frac{k^2x^2}{3} + \mathrm{o}(^2)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx} \times \left(1 - \frac{k^2x^2}{3} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \quad \text{(DL de } 1/1+u\text{)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \times kx}{3} + \mathrm{o}(x) \\ &= \mathrm{O}(x) \end{aligned}$$

puisque $S = 0$ si bien que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. En conclusion, f admet une limite finie en 0 si et seulement si $S = 0$ (et cette limite vaut alors 0).

Exercice 44 - Lemme de l'escalier et générateur automatique d'exercices : ✪✪

1. Montrer que si une suite (u_n) converge est telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers une limite α non nulle, alors $u_n \sim \alpha n$. Ce résultat est connu sous le nom de « lemme de l'escalier ». Voici des exercices classiques qui l'utilisent.
2. **Le classique des classiques** [1] **:** on définit la suite récurrente (u_n) par :

1. Tellement classique que cet exercice peut être donné sans indication (en particulier, sans donner la suite (v_n) à l'oral).

$$\begin{cases} u_0 \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

(a) Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(b) En appliquant le lemme de l'escalier à la suite de terme général

$$v_n = \frac{1}{{u_{n+1}}^2} - \frac{1}{{u_n}^2}$$

montrer que $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, \ln(1+x) \leq x$. Etudier les cas d'égalité.
4. On définit dans cette question la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis, à l'aide cette fois la suite de terme général

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$$

donner un équivalent de u_n.

5. Soient f définie et continue sur $[\,0\,;1\,]$ admettant en 0 un DL de la forme $f(x) = x - ax^\alpha + \mathrm{o}\,(x^\alpha)$ avec $a > 0$ et $\alpha > 1$.
   (a) Montrer que pour x assez petit (strictement positif), $0 < f(x) < x$. En déduire que pour u_0 assez petit, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0. On suppose u_0 ainsi choisi dans la suite.
   (b) Déterminer la valeur de $b \in \mathbb{R}^*$ pour que la suite de terme général $v_n = {u_{n+1}}^b - {u_n}^b$ admette une limite non nulle.
   (c) Donner un équivalent de u_n.
   (d) Donner un équivalent, lorsque le terme initial est suffisamment proche de 0, de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)\cos(u_n)$.

Correction :

1. D'après le théorème de Cesàro :

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$$

mais on a une somme télescopique donc

$$\frac{u_n - u_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$$

Finalement :

$$\frac{u_n}{n} = \frac{u_n - u_0}{n} + \frac{u_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha + 0$$

ce qui permet de conclure.

2. (a) Fait dans le chapitre 12.
   (b) On veut appliquer le lemme de l'escalier. Commençons par mettre au même dénominateur :

$$v_n = \frac{{u_n}^2 - {u_{n+1}}^2}{{u_n}^2{u_{n+1}}^2}$$

Or, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc on peut faire le DL de $u_{n+1} = \sin(u_n)$:

$$v_n = \frac{{u_n}^2 - {u_{n+1}}^2}{{u_n}^2{u_{n+1}}^2} = \frac{{u_n}^2 - \left(u_n - {u_n}^3/6 + \mathrm{o}\left({u_n}^3\right)\right)^2}{{u_n}^2{u_{n+1}}^2} = \frac{{u_n}^4/3 + \mathrm{o}\left({u_n}^4\right)}{{u_n}^2{u_{n+1}}^2}$$

De plus, puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, u_{n+1} = \sin(u_n) \sim u_n$, et l'équivalent passe au carré, ce qui donne l'équivalent suivant :

$$v_n \sim \frac{{u_n}^4}{3{u_n}^4} = \frac{1}{3}$$

D'où : $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}$. D'après le lemme de l'escalier :

$$\frac{1}{{u_n}^2} \sim \frac{n}{3}$$

L'équivalent passe à la puissance fixe (ici la puissance $-1/2$) donc

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

3. Idem, fait dans le chapitre 12 : 0 est le seul point d'égalité. Il ne fallait pas parler de concavité car la concavité ne permet pas de donner les cas d'égalité !

4. On montre que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ comme dans le chapitre 12. On montre ensuite de la même façon (mettre au même dénominateur et faire un DL de $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$ à l'ordre 2) que

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{2}$$

Le lemme de l'escalier nous donne que $1/u_n \sim n/2$ donc $u_n \sim 2/n$.

5. (a) Tout d'abord, $f(0) = 0$ car coefficient constant du DL (ou en passant à la limite). De plus, par hypothèse, $f(x) = x - ax^\alpha + \mathrm{o}\left(x^\alpha\right)$ c'est-à-dire $f(x) \sim x$. Or, deux quantités équivalentes au voisinage de 0 sont de même signe pour x assez petit. Formellement, il existe $e \in \left]0\,;c\right]$ tel que pour tout $x \in \left]0\,;e\right]$, $f(x) > 0$. De même, puisque $f(x) - x \sim -ax^\alpha < 0$ (car $a > 0$) alors il existe $k \in \left]0\,;c\right]$ tel que pour tout $x \in \left]0\,;k\right], f(x) - x < 0$. Il suffit de prendre $d = \min(e,k)$ pour conclure :

$$\exists d \in \left]0\,;c\right], \forall x \in \left]0\,;d\right] \qquad 0 < f(x) < x$$

Il en découle que $\left]0\,;d\right[$ est stable par f. Une récurrence immédiate prouve que si $u_0 \in \left]0\,;d\right[$ alors $u_n \in \left]0\,;d\right[$ pour tout n. Par conséquent, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$: la suite (u_n) est décroissante minorée par 0 et majorée par d, donc elle converge vers une limite $L \in [0\,;d]$ (puisque l'inégalité large passe à la limite). Or, f étant continue, la limite est un point fixe donc $f(L) = L$. Or, d'après ce qui précède, si $L \in \left]0\,;d\right], f(L) < L$. Il en découle que $L = 0$, soit : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(b) Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on peut faire un DL de $f(u_n)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} {u_{n+1}}^b - {u_n}^b &= \left(f(u_n)\right)^b - {u_n}^b \\ &= \left(u_n - a{u_n}^\alpha + \mathrm{o}\left({u_n}^\alpha\right)\right)^b - {u_n}^b \\ &= {u_n}^b\left(1 - a{u_n}^{\alpha-1} + \mathrm{o}\left({u_n}^{\alpha-1}\right)\right)^b - {u_n}^b \end{aligned}$$

Or, puisque $\alpha > 1, {u_n}^{\alpha-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on peut faire un DL de la parenthèse à la puissance b :

$$\begin{aligned} {u_{n+1}}^b - {u_n}^b &= {u_n}^b\left(1 - a{u_n}^{\alpha-1} + \mathrm{o}\left({u_n}^{\alpha-1}\right)\right)^b - {u_n}^b \\ &= {u_n}^b\left(1 - ab{u_n}^{\alpha-1} + \mathrm{o}\left({u_n}^{\alpha-1}\right)\right) - {u_n}^b \\ &= -ab{u_n}^{b+\alpha-1} + \mathrm{o}\left({u_n}^{b+\alpha-1}\right) \end{aligned}$$

En conclusion :

$${u_{n+1}}^b - {u_n}^b \sim -ab{u_n}^{b+\alpha-1}$$

Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la suite en question admet une limite finie non nulle si et seulement si la puissance est nulle, c'est-à-dire si et seulement si $b + \alpha - 1 = 0$ (en effet, si elle est strictement positive, la suite tend vers 0, tandis que si elle est strictement négative, elle tend vers $\pm\infty$ selon le signe de ab). Par conséquent, la suite $\left({u_{n+1}}^b - {u_n}^b\right)_n$ admet une limite non nulle si et seulement si $b = 1 - \alpha$.

(c) D'après la question précédente (puisqu'une suite est équivalente à une constante non nulle si et seulement si elle converge vers cette constante, cf cours), cette limite vaut alors $L = -ab = a(\alpha - 1)$. Donnons alors un équivalent de u_n. D'après le lemme de l'escalier, ${u_n}^b \sim na(\alpha - 1)$. L'équivalent passant à la puissance fixe (ici $1/b$)

$$u_n \sim (na(\alpha-1))^{1/b} = \left(\frac{1}{na(\alpha-1)}\right)^{1/(\alpha-1)}$$

(d) Faisons un DL de la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)\cos(x)$ à l'ordre 3. Après calculs on trouve

$$f(x) = x - \frac{5x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

D'après ce qui précède, en prenant $\alpha = 3, a = 5/6$, il vient $b = -2$ et enfin

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{5n}}$$

Exercice 45 - Une limite difficile à deviner : ✪✪✪ On définit la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$$

Donner la limite de la suite (u_n). On pourra commencer par montrer (en utilisant les formules de trigo à bon escient) que

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Correction : Écrire u_n sous forme exponentielle (puissance variable) n'apporte rien car on aurait une forme indéterminée $0 \times +\infty$ (n multiplié par le ln d'une quantité qui tend vers 1). C'est pour cela qu'il faut être plus fin. Suivons l'indication de l'énoncé et faisons un DL du cos : on a un quotient, on se ramène à $1/(1+u)$ en factorisant par le terme dominant, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) &= \cos\left(\frac{n\pi}{3n} \times \frac{1}{1+\dfrac{1}{3n}}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

À l'aide de la formule donnant $\cos(a+b)$ (pourquoi pas $a-b$?) pour se ramener au voisinage de 0 pour utiliser les DL de référence (rappelons qu'on fait un DL à l'ordre 1 donc, dans le cos, seul le 1 sort car le terme suivant est d'ordre 2) :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{9n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{9n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} \times 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{-\pi}{9n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat de l'énoncé. On trouve de même que :

$$\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{72n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Revenons à u_n. Puisque la puissance est variable, passons à l'exponentielle

$$u_n = \exp\left(n\ln\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)\right)$$

Utilisons à présent les deux DL que l'on vient d'écrire :

$$\begin{aligned}
u_n &= \exp\left(n\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18n}+\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{72n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{4\pi\sqrt{3}}{72n}-\frac{\pi\sqrt{3}}{72n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{\pi\sqrt{3}}{24n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(n\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{24n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{24}+\mathrm{o}(1)\right)
\end{aligned}$$

En conclusion, puisque $\mathrm{o}(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par continuité de l'exponentielle :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\pi\sqrt{3}/24}$$

Exercice 46 - Involutions : ✪✪✪ Si $n \geq 1$, on note d_n le nombre d'involutions de $[\![1\,;\,n]\!]$ i.e. le nombre d'applications de $[\![1\,;\,n]\!]$ dans lui-même vérifiant $f \circ f = \mathrm{Id}$. Par convention, on pose $d_0 = 1$.

1. Calculer d_1, d_2, d_3.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $d_n = d_{n-1} + (n-1)d_{n-2}$.
3. On pose, pour tout réel x, $f(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$.
   (a) Prouver que f admet un DL à tout ordre en 0. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses coefficients.
   (b) Déterminer une relation entre $f'(x)$ et $f(x)$. En déduire que, pour tout n, $d_n = a_n \times n!$.
   (c) Prouver finalement que :

$$d_n = n! \times \sum_{p+2q=n} \frac{1}{p!} \times \frac{1}{2^q \times q!}$$

Correction :

1. Rappelons qu'une involution est forcément bijective : il suffit donc de s'intéresser aux bijections, et il y a $n!$ bijections de $[\![1\,;\,n]\!]$ dans lui-même. Il n'y a qu'une application de $[\![1\,;\,1]\!]$ dans lui-même, l'identité, qui est évidemment involutive donc $d_1 = 1$. Il y a deux bijections de $[\![1\,;\,2]\!]$ dans lui-même : l'identité, et l'application qui échange 1 et 2, et les deux sont involutives, donc $d_2 = 2$. Il y a six bijections de $[\![1\,;\,3]\!]$ dans lui-même :

$$\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 1\\ 2 & \mapsto & 2\\ 3 & \mapsto & 3 \end{array}\qquad
\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 2\\ 2 & \mapsto & 3\\ 3 & \mapsto & 1 \end{array}\qquad
\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 3\\ 2 & \mapsto & 1\\ 3 & \mapsto & 2 \end{array}\qquad
\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 2\\ 2 & \mapsto & 1\\ 3 & \mapsto & 3 \end{array}\qquad
\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 3\\ 2 & \mapsto & 2\\ 3 & \mapsto & 1 \end{array}\qquad
\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 1\\ 2 & \mapsto & 3\\ 3 & \mapsto & 2 \end{array}$$

   Parmi celles-ci, seules la première (l'identité) et les trois dernières (qu'on appellera transpositions dans le chapitre 32) sont des involutions, donc $d_3 = 4$.
2. Soit $n \geq 2$. Soit $f : [\![1\,;\,n]\!] \to [\![1\,;\,n]\!]$ une involution. C'est un exercice de dénombrement. Il y a deux cas de figure (cela sent déjà le principe additif à plein nez) : soit $f(1) = 1$, soit $f(1) \neq 1$. Supposons que $f(1) = 1$: alors f est entièrement déterminée par sa restriction à $[\![2\,;\,n]\!]$, qui est une involution de $[\![2\,;\,n]\!]$ donc il y a d_{n-1} possibilités. Supposons que $f(1) \neq 1$: f est alors entièrement déterminée par $f(1)$ qu'on notera a (il y a $n-1$ possibilités, tous les éléments de $[\![1\,;\,n]\!]$ sauf 1) et sa restriction à $[\![1\,;\,n]\!]\backslash\{1; a\}$ qui est une involution de cet ensemble (f étant involutive, $f(a) = 1$), donc il y a d_{n-2} choix possibles. Par principe multiplicatif, il y a $(n-1)d_{n-2}$ choix possibles pour le deuxième cas, et les deux cas étant incompatibles, par principe additif, on a le résultat voulu.
3. (a) f est $\mathscr{C}^\infty$ donc, d'après la formule de Taylor-Young, f admet un DL à tout ordre en 0.
   (b) On a déjà dit que f est $\mathscr{C}^\infty$: soit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = (1+x)f(x)$. Par conséquent, f' admet un DL à tout ordre donc en particulier à l'ordre $n-1$ (on pouvait aussi dire que f' est $\mathscr{C}^\infty$) donné par :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1+x)(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right))\\
&= a_0 + (a_0+a_1)x + (a_2+a_1)x^2 + \cdots + (a_{n-2}+a_{n-1})x^{n-1} + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

   Par primitivation du DL :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + a_0 x + \frac{(a_0+a_1)x^2}{2} + \frac{(a_2+a_1)x^3}{3} + \cdots + \frac{(a_{n-2}+a_{n-1})x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\ &= 1 + a_0 x + \frac{(a_0+a_1)x^2}{2} + \frac{(a_2+a_1)x^3}{3} + \cdots + \frac{(a_{n-2}+a_{n-1})x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \end{aligned}$$

Par unicité du DL, $a_0 = 1$, $a_1 = a_0$ et, pour tout $n \geq 2$, $a_n = \dfrac{a_{n-2}+a_{n-1}}{n}$. On conclut avec une récurrence (double) et la question 2.

(c) Il suffit de prouver que, pour tout n,

$$a_n = \sum_{p+2q=n} \frac{1}{p!} \times \frac{1}{2^q \times q!}$$

Or, $f(x) = e^x \times e^{x^2/2}$ donc, en appliquant deux fois le DL de l'exponentielle (la deuxième fois avec $u = x^2/2$) :

$$f(x) = \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \right) \times \left(\sum_{0 \leq 2q \leq n} \frac{x^{2q}}{2^q q!} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \right)$$

En développant, le coefficient devant x^n vaut bien la somme voulue (on prend toutes les façons d'obtenir x^n en multipliant un terme de la forme $x^p/p!$ et $x^{2q}/2^q q!$ donc le coefficient vaut $1/(p! 2^q q!)$ et ensuite on somme).

Exercice 47 - Nombres de Bernoulli : ✪✪✪ Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que f admet un DL à tout ordre en 0. On note la suite de ses coefficients $(a_n)_n$. Donner a_0, a_1, a_2.
2. En étudiant la fonction $g : x \mapsto f(x) + \dfrac{x}{2}$, montrer que pour tout $k \geq 1, a_{2k+1} = 0$.
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que

$$\frac{a_2}{(n-1)!} + \frac{a_3}{(n-2)!} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2!} + \frac{a_n}{1!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$$

En déduire a_3 et a_4.

Remarque : Les nombres $b_n = n! \times a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli. On peut montrer que ce sont les mêmes b_n que dans l'exercice 11 du chapitre 12, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}, b_n = B_n(0)$ où B_n est le n-ième polynôme de Bernoulli (cf exercice 14 du chapitre 11). Euler a montré en 1755 que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \zeta(2p) = |b_{2p}| \frac{2^{2p-1}}{(2p)!} \pi^{2p}$$

On voit que pour $p = 1$ on retrouve le fameux $\pi^2/6$.

Correction :

1. Prouver que f est $\mathscr{C}^\infty$ serait trop difficile. On va utiliser le résultat du cours concernant les opérations sur les DL. L'exponentielle admettant un DL à tout ordre, fixons n et donnons un DL de l'exponentielle à l'ordre $n+1$ (on comprendra pourquoi ensuite) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right) - 1} \\ &= \frac{x}{x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \dfrac{x}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{(n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)} \\ &= \frac{1}{1+u} \end{aligned}$$

avec $u = \dfrac{x}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{(n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On peut donc faire le DL de $1/(1+u)$ à l'ordre n (substitution), ce qui donnera un DL de f à l'ordre n.

2. Montrons que g est paire. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g(-x) &= \frac{-x}{e^{-x}-1} - \frac{x}{2} \\
&= \frac{-x}{\dfrac{1}{e^x}-1} - \frac{x}{2} \\
&= \frac{-xe^x}{1-e^x} - \frac{x}{2} \\
&= \frac{-2xe^x - x + xe^x}{2(1-e^x)} \\
&= \frac{-xe^x - x}{2(1-e^x)} \\
&= \frac{x(1-e^x) - 2x}{2(1-e^x)} \\
&= \frac{x}{2} - \frac{x}{1-e^x} \\
&= \frac{x}{2} + \frac{x}{e^x-1} \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

Par conséquent, tous les coefficients d'ordre impair du DL de g sont nuls (g admet un DL à tout ordre puisque f en admet un). Or, à partir du rang 2, les coefficients de g sont les mêmes que ceux de f donc, à partir du rang 3, les coefficients impairs de f sont nuls.

3. On sait que pour tout x, $x = f(x) \times (e^x - 1)$. Faisons le DL de la quantité de droite à l'ordre $n+1$ (on y pense vu l'énoncé car on y trouve du n) : on commence donc par donner le DL de f à l'ordre n (puisqu'on va multiplier par une quantité dont le DL commence par x) :

$$f(x) \times (e^x - 1) \quad = \quad \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)\right) \times \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)\right)$$

Le coefficient devant x^{n+1} de ce produit est donc :

$$\frac{a_0}{(n+1)!} + \frac{a_1}{n!} + \frac{a_2}{(n-1)!} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2!} + \frac{a_n}{1!}$$

Cependant, ce produit est égal à x donc tous les coefficients à partir de l'ordre 2 sont nuls, et en particulier le terme d'ordre $n+1$ (car $n \geq 1$ donc $n+1 \geq 2$) :

$$\frac{a_0}{(n+1)!} + \frac{a_1}{n!} + \frac{a_2}{(n-1)!} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2!} + \frac{a_n}{1!} = 0$$

Or, $a_0 = f(0) = 1$ et, si on fait le DL de f à l'ordre 1 (voir la première question) :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1 + \dfrac{x}{2!}\mathrm{o}\left(x^n\right)} \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \mathrm{o}\left(x\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne $a_1 = -1/2$. Il suffit de mettre les termes $a_0/(n+1)!$ et $a_1/n!$ à droite pour conclure. En prenant $n = 2$, il vient :

$$\frac{a_2}{1!} = \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

donc $a_2 = 1/12$. D'après la question 2, $a_3 = 0$. En prenant $n = 4$, il vient :

$$\frac{a_2}{3!} + \frac{a_3}{2!} + \frac{a_4}{1!} = \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$$

et puisque $a_2 = 1/12$ et $a_3 = 0$, on trouve finalement que $a_4 = -1/720$.

Exercice 48 : ✪✪✪ On admet l'existence d'une fonction φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie sur un voisinage V de 0 telle que $\varphi(0)=0$ et telle que pour tout $x \in V$:

$$\sin\varphi(x) + x\varphi(x)^4 + x^2 = 0$$

Donner un DL de φ à l'ordre 10 en 0.

Correction : φ est $\mathscr{C}^\infty$ donc, en particulier, admet un DL à l'ordre 10. On sait que $\varphi(0)=0$ donc le terme constant du DL est nul, si bien que $\varphi(x) = \mathrm{O}(x)$. Par conséquent, $\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (on le savait déjà puisque φ est continue et $\varphi(0)=0$) donc on peut faire un DL du sinus :

$$\varphi(x) + \mathrm{O}\left(\varphi(x)^3\right) + x\varphi(x)^4 + x^2 = 0$$

et puisque $\varphi(x) = \mathrm{O}(x)$, cela donne :

$$\varphi(x) + \mathrm{O}\left(x^3\right) + \mathrm{O}\left(x^5\right) + x^2 = 0$$

Par conséquent :

$$\varphi(x) = -x^2 + \mathrm{O}\left(x^3\right) + \mathrm{O}\left(x^5\right)$$

c'est-à-dire que $\varphi(x) \sim -x^2$ donc $\varphi(x) = -x^2 + \mathrm{O}\left(x^3\right)$: on a un DL à l'ordre 2. En particulier, $\varphi(x) = \mathrm{O}\left(x^2\right)$ donc, en réinjectant dans la première égalité avec des O :

$$\varphi(x) + \mathrm{O}\left(x^6\right) + \mathrm{O}\left(x^9\right) + x^2 = 0$$

si bien que $\varphi(x) = -x^2 + \mathrm{O}\left(x^6\right)$ ou encore $\varphi(x) = -x^2 + \mathrm{o}\left(x^5\right)$: cela donne un DL à l'ordre 5. Notons $\varphi(x) = -x^2 + a_6x^6 + \mathrm{O}\left(x^7\right)$. Si on fait le DL du sinus à l'ordre 3 dans l'expression initiale :

$$\varphi(x) - \frac{\varphi(x)^3}{6} + \mathrm{O}\left(\varphi(x)^5\right) + x\varphi(x)^4 + x^2 = 0$$

Or, avec l'expression de $\varphi(x)$ comme DL ci-dessus, il vient (le terme le plus petit après x^6 provient du triple produit) :

$$\varphi(x)^3 = -x^6 + \mathrm{O}\left(x^{10}\right)$$

Dès lors :

$$-x^2 + a_6x^6 + \mathrm{O}\left(x^7\right) + \frac{x^6}{6} + \mathrm{O}\left(x^{10}\right) + \mathrm{O}\left(x^9\right) + x^2 = 0$$

si bien que

$$a_6x^6 = -\frac{x^6}{6} + \mathrm{O}\left(x^7\right) + \mathrm{O}\left(x^{10}\right) + \mathrm{O}\left(x^9\right)$$

Par unicité du DL, $a_6 = -1/6$ si bien que $\varphi(x) = -x^2 - x^6/6 + \mathrm{O}\left(x^7\right)$. Finalement (cube, triples produits) :

$$\varphi(x)^3 = -x^6 - \frac{x^{10}}{2} + \mathrm{O}\left(x^{11}\right)$$

et

$$\varphi(x)^5 = -x^{10} + \mathrm{O}\left(x^{11}\right)$$

De plus, $\varphi(x)^4 = x^8 + \mathrm{O}\left(x^{12}\right)$ si bien que

$$x\varphi(x)^4 = x^9 + \mathrm{O}\left(x^{13}\right) = x^9 + \mathrm{O}\left(x^{11}\right)$$

Enfin, $\mathrm{O}\left(\varphi(x)^7\right) = \mathrm{O}\left(x^{14}\right) = \mathrm{O}\left(x^{11}\right)$. Finalement, notons $\varphi(x) = -x^2 - x^6/6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10} + \mathrm{O}\left(x^{11}\right)$, on a donc :

$$\begin{aligned}
0 &= \sin(\varphi) + x\varphi(x)^4 + x^2 \\
&= \varphi(x) - \frac{\varphi(x)^3}{6} + \frac{\varphi(x)^5}{120} + \mathrm{O}\left(\varphi(x)^7\right) + x\varphi(x)^4 + x^2 \\
&= -x^2 - \frac{x^6}{6} + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{12} - \frac{x^{10}}{120} + x^9 + x^2 + \mathrm{O}\left(x^{11}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $a_7 = a_8 = 0$, $a_9 = -1$ et $a_{10} = -9/120 = -3/40$. En conclusion :

$$\varphi(x) = -x^2 - \frac{x^6}{6} - \frac{x^9}{9} - \frac{3x^{10}}{40} + \mathrm{o}\left(x^{10}\right)$$

4 Asymptotes :

Exercice 49 : ✪

1. Montrer que les fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation en $+\infty$ (on précisera bien sûr les positions relatives) :

(a) $f : x \mapsto \sqrt{x(x+1)}$

(b) $f : x \mapsto (x^2+x+1)\text{Arctan}\left(\dfrac{2}{x}\right)$

(c) $f : x \mapsto (x+1)e^{1/x}\text{Arctan}(x)$

(d) $f : x \mapsto e^{2/x}\sqrt{x^2+x+1}$

(e) $f : x \mapsto (x+5)e^{-1/x}$

2. ✪✪ Même chose.

(a) $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^5 e^{2/x}}{(x-1)^4}$

(b) $f : x \mapsto (x^2-3x+1)\ln\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$

(c) $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3+2x^2+5x+1}$

(d) $f : x \mapsto \left(e^{1/x}-1\right)\sqrt{x^4+x^3+x^2+1}$

(e) $f : x \mapsto \sqrt{x^4+x^2+9x+1} - x^2 e^{\pi/x}$

(f) $f : x \mapsto e^{1/(x+3)}\sqrt{x^2+5x+4}$

(g) $f : x \mapsto x^2\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{\ln(e^x+e^{-x})}{x^2}\right)$

Correction : Le but du jeu est donc de donner un développement asymptotique à la précision $1/x$ (ou plus si le terme en $1/x$ est nul).

1. (a) Soit $x>0$ (on cherche une asymptote en $+\infty$, et on a alors $\sqrt{x^2}=x$) :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2} \\ &= x\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\text{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+\text{o}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Faisons le proprement pour la première, on ira plus vite pour les suivantes : $f(x)-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\sim-\dfrac{1}{8x^2}$. D'une part, cela implique que $f(x)-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc la droite d'équation $y=x+\dfrac{1}{2}$ est asymptote en $+\infty$, et d'autre part, deux quantités équivalentes en $+\infty$ ayant le même signe au voisinage de $+\infty$, $f(x)-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)<0$ pour x assez grand donc le graphe de f est en dessous de l'asymptote.

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x+1)\times\left(\frac{2}{x}-\frac{(2/x)^3}{3}+\text{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= (x^2+x+1)\times\left(\frac{2}{x}-\frac{8}{3x^3}+\text{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= 2x-\frac{8}{3x}+2+\frac{2}{x}+\text{o}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x+2-\frac{2}{3x}+\text{o}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

On conclut de même que la droite d'équation $y=2x+2$ est asymptote en $+\infty$ et que le graphe de f est sous l'asymptote.

(c) Soit $x>0$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= \left(x+1+\frac{1}{2x}+1+\frac{1}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(x+2+\frac{3}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \frac{\pi x}{2}-1+\pi-\frac{2}{x}+\frac{3\pi}{4x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{\pi x}{2}+\pi-1+\frac{3\pi-8}{4x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit de même que la droite d'équation $y=\dfrac{\pi x}{2}+\pi-1$ est asymptote en $+\infty$ et que la courbe est au-dessus de l'asymptote (puisque $3\pi>9>8$).

(d) Idem, soit $x>0$ si bien que $\sqrt{x^2}=x$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{2/x}x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}\\
&= \left(1+\frac{2}{x}+\frac{(2/x)^2}{2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)x\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(x+2+\frac{2}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= x+\frac{5}{2}+\frac{27}{8x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

et on conclut comme d'habitude que la droite d'équation $y=x+5/2$ est asymptote en $+\infty$ et que la courbe est au-dessus de l'asymptote.

(e)

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+5)\times\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= x-1+\frac{1}{2x}+5-\frac{5}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= x+4-\frac{9}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

donc la droite d'équation $y=x+4$ est asymptote en $+\infty$, et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

2. (a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^5\left(1+\frac{1}{x}\right)^5 \times e^{2/x} \times x^{-4}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-4} \\
&= x\left(1+\frac{1}{x}\right)^5 \times e^{2/x} \times \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-4} \\
&= x\left(1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \times \left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \times \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-4} \\
&= \left(x+5+\frac{10}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \times \left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \times \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-4} \\
&= \left(x+2+\frac{2}{x}+5+\frac{10}{x}+\frac{10}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \times \left(1+\frac{4}{x}+\frac{10}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= \left(x+7+\frac{22}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \times \left(1+\frac{4}{x}+\frac{10}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= x+4+\frac{10}{x}+7+\frac{28}{x}+\frac{22}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= x+11+\frac{60}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

et on conclut comme d'habitude.

(b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^2-3x+1) \times \left(-\frac{2}{x}-\frac{(-2/x)^2}{2}+\frac{(-2/x)^3}{3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\
&= (x^2-3x+1) \times \left(-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{8}{3x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\
&= -2x-2-\frac{8}{3x}+6+\frac{6}{x}-\frac{2}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= -2x+4+\frac{4}{3x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/3} \\
&= x\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{2}{x}\right)^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= x\left(1+\frac{2}{3x}+\frac{11}{9x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= x+\frac{2}{3}+\frac{11}{9x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\times x^2\times\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/2}\\
&= \left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{6x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/2}\\
&= \left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{6x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\times\frac{1}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{6x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{6x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= x+1+\frac{19}{24x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{9}{x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^{1/2}-x^2\left(1+\frac{\pi}{x}+\frac{\pi^2}{2x^2}+\frac{\pi^3}{6x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\
&= x^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{9}{x^3}\right)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-x^2-\pi x-\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^3}{6x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= x^2+\frac{1}{2}+\frac{9}{2x}-x^2-\pi x-\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^3}{6x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= -\pi x+\frac{1-\pi^2}{2}+\frac{27-\pi^3}{6x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

et on conclut comme d'habitude (le graphe est sous l'asymptote puisque $\pi > 3$ donc $\pi^3 > 3^3 = 27$).

(f)

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{2(x+3)^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times x\left(1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)^{1/2}$$

Or, $1/2(x+3)^2 \sim 1/2x^2$ donc est égal à $1/2x^2+\mathrm{o}\left(1/x^2\right)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{5}{x}\right)^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{x}\times\frac{1}{1+\frac{3}{x}}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times x\left(1+\frac{5}{2x}+\frac{2}{x^2}-\frac{25}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{x}\times\left(1-\frac{3}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times x\left(1+\frac{5}{2x}-\frac{9}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times x\left(1+\frac{5}{2x}-\frac{9}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times x\left(1+\frac{5}{2x}-\frac{9}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(x+1-\frac{5}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(1+\frac{5}{2x}-\frac{9}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= x+\frac{5}{2}-\frac{9}{8x}+1+\frac{5}{2x}-\frac{5}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= x+\frac{7}{2}-\frac{9}{8x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\ln(e^x+e^{-x})\\
&= x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)+\ln(e^x)+\ln(1+e^{-2x})\\
&= x-\frac{1}{6x}+x+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)+e^{-2x}+\mathrm{o}\left(e^{-2x}\right)\\
&= 2x-\frac{1}{6x}+x+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

puisque e^{-2x} est négligeable devant $1/x$. donc la droite d'équation $y=2x$ est asymptote en $+\infty$ et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

5 Développements asymptotiques

Exercice 50 : ✪ Donner un développement asymptotique en $+\infty$ de $f(x)=\dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}$ à la précision $\dfrac{1}{x^6}$.

Correction : Soit $x>0$. $\mathrm{Arctan}(x)=\pi/2-\mathrm{Arctan}(1/x)$. Or, $u=1/x\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc on peut faire un DL de $\mathrm{Arctan}(1/x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} &= \frac{\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3x^3}-\dfrac{1}{5x^5}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^5}\right)}{x}\\
&= \frac{\pi}{2x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^4}-\frac{1}{5x^6}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^6}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 51 : ✪

1. Donner le développement asymptotique en $+\infty$ de $x\mapsto\ln\left(\sqrt{x-1}\right)$ à la précision $1/x^2$.
2. Donner le développement asymptotique en $+\infty$ de $x\mapsto\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$ à la précision $1/x^2$.

Correction :

1. Soit $x>1$. On a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\ln(x-1)\\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(x)+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= \frac{\ln(x)}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \frac{\ln(x)}{2}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

2. Rappelons que $\sqrt[3]{x^3}=x$ (même si x est négatif). Soit $x>0$. On utilise le DL de $(1+u)^{1/3}$ et on fait un DL à l'ordre 3 ce qui donne $1/x^3$ puisqu'on multiplie ensuite par x et qu'on veut du $1/x^2$. Précisons que

$$(1+u)^{1/3}=1+\frac{u}{3}-\frac{u^2}{9}+\frac{5u^3}{81}+\mathrm{o}\left(u^3\right)$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} \\
&= x\left(1+\frac{1}{3}x - \frac{1}{9x^2} + \frac{5}{81x^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - x\left(1-\frac{1}{3}x - \frac{1}{9x^2} - \frac{5}{81x^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\
&= x + \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + \frac{5}{81x^2} - x + \frac{1}{3} + \frac{1}{9x} + \frac{5}{81x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{10}{81x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 52 : ✪

1. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ réalise une bijection de $[\,e\,;+\infty\,[$ dans lui même.
2. Prouver qu'au voisinage de $+\infty$: $f^{-1}(x) \sim x\ln(x)$.

Correction :

1. f est dérivable sur $[\,e\,;+\infty\,[$ car quotient de fonctions dérivables (celle au dénominateur ne s'annulant pas). Soit $x \geq e$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\ln(x)} + x \times \frac{-1/x}{\ln(x)^2} \\
&= \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}
\end{aligned}$$

Ci-dessous le tableau de variations de f :

x	e $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	0 $\qquad$ $+$
f	e $\nearrow$ $+\infty$

f est continue, strictement croissante (car sa dérivée s'annule en un nombre fini de points), $f(e) = e$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. D'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $[\,e\,;+\infty\,[$ dans lui-même.

2. L'idée est la même que précédemment : tout vient de l'égalité $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$. Tout d'abord, d'après le théorème de la bijection, f^{-1} est aussi strictement croissante et admet le même tableau de variations que f. En particulier, $f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. On sait que f est strictement positive donc $\ln(f(f^{-1}(x))) = \ln(f^{-1}(x)) - \ln(\ln(f^{-1}(x)))$. Or, lorsque $u \to +\infty$, $\ln(u)$ est négligeable devant u. Puisque $\ln(f^{-1}(x)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ alors $\ln(\ln(f^{-1}(x)))$ est négligeable devant $\ln(f^{-1}(x))$ donc $\ln(f^{-1}(x)) \sim \ln(f(f^{-1}(x))) = \ln(x)$.

   Le problème est qu'on ne peut pas passer l'équivalent à l'exponentielle. Il suffit de revenir à l'égalité $f(f^{-1}(x)) = x$ c'est-à-dire :

$$\frac{f^{-1}(x)}{\ln(f^{-1}(x))} = x$$

   donc $f^{-1}(x) = x\ln(f^{-1}(x)) \sim x\ln(x)$.

Exercice 53 : ✪

1. Soit $f \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\int_0^1 e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. Soit $f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. Déterminer un développement asymptotique de $\displaystyle\int_0^1 e^{-xt} f(t)\,dt$ à la précision $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ (toujours en $+\infty$).

Correction :

1. Soit $x>0$ (on cherche la limite en $+\infty$). Notons cette quantité $g(x)$. Il suffit de prouver qu'au voisinage de $+\infty$, $x\mapsto xg(x)$ est bornée. f étant $\mathscr{C}^1$, on peut faire une IPP, ce qui donne :
$$\begin{aligned} g(x) &= \left[\frac{-e^{-xt}f(t)}{x}\right]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 e^{-xt}f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(0)-f(1)e^{-x}}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 e^{-xt}f'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$
Or, d'après l'inégalité triangulaire, et par croissance de l'intégrale :
$$\left|\int_0^1 e^{-xt}f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 |e^{-xt}f'(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$
Il en découle que $x\mapsto xg(x)$ est bien bornée.
2. f étant $\mathscr{C}^2$, on peut faire une IPP supplémentaire, ce qui donne :
$$g(x) = \frac{f(0)-f(1)e^{-x}}{x} + \frac{f'(0)-f'(1)e^{-x}}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int_0^1 e^{-xt}f''(t)\,\mathrm{d}t$$
Or, les termes avec des exponentielles sont négligeables donc dominées par $1/x^3$ (que $f(1)$ et $f'(1)$ soient nuls ou non), si bien que :
$$g(x) = \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int_0^1 e^{-xt}f''(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
f'' étant continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$ (puisque f est $\mathscr{C}^2$), elle est bornée et atteint ses bornes : notons $M=\max|f''|$. Par conséquent :
$$\left|\int_0^1 e^{-xt}f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 |e^{-xt}f'(t)|\,\mathrm{d}t \le M\int_0^1 e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{M(1-e^x)}{x}$$
donc cette intégrale est un $\mathrm{O}\left(1/x\right)$ et on obtient finalement :
$$g(x) = \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{x^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Exercice 54 : ✪✪ Soit $n\ge 5$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-5}\frac{k!}{n!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$
2. En déduire que $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Correction :

1. Soit $k\le n-5$. Alors
$$\frac{k!}{n!} = \frac{1}{(k+1)\cdots(n-1)n}$$
Or, $k\le n-5$ donc $k+1\le n-4$: parmi tous les entiers de $k+1$ à n, on trouve en particulier les entiers de $n-4$ à n et les termes restants sont supérieurs ou égaux à 1 donc
$$(k+1)\cdots(n-1)n = (k+1)\cdots(n-4)\cdots(n-1)n \ge (n-4)\cdots(n-1)n$$
Par somme :
$$0\le\sum_{k=0}^{n-5}\frac{k!}{n!} \le \sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{(n-4)\cdots(n-1)n} = \frac{n-4}{(n-4)\cdots(n-1)n} = \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \sim \frac{1}{n^4}$$

ce qui permet de conclure : la somme est positive et inférieure à une quantité négligeable devant $\dfrac{1}{n^3}$ donc est elle-même négligeable devant $\dfrac{1}{n^3}$ (on le prouve facilement en divisant par $1/n^3$ et en appliquant le théorème d'encadrement).

2. Utilisons la question précédente et cassons la somme en $n-5$ ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! &= \frac{n!}{n!}+\frac{(n-1)!}{n!}+\frac{(n-2)!}{n!}+\frac{(n-3)!}{n!}+\frac{(n-4)!}{n!}+\sum_{k=0}^{n-5}\frac{k!}{n!}\\ &= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)}+\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Pour être clair : il faut donner un développement asymptotique de chaque terme à la précision $1/n^3$. On ne touche pas aux deux premiers termes. Pour le troisième :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n-1)} &= \frac{1}{n^2}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{n}}\\ &= \frac{1}{n^2}\times\left(1+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Le quatrième terme est équivalent à $1/n^3$ donc est égal à $1/n^3+\mathrm{o}\left(1/n^3\right)$ et le cinquième terme est équivalent à $1/n^4$ donc est négligeable devant $1/n^3$. Finalement,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! &= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)+\frac{1}{n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

En particulier, $\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$ (pourquoi ?).

6 Développements asymptotiques copy/paste :

Exercice 55 : ✪ Prouver que $f : x \mapsto x+\ln(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même et donner un développement asymptotique à 3 termes de f^{-1} en $+\infty$.

Correction : Comme précédemment, la première partie de la question se traite avec le théorème de la bijection. De plus, comme dans l'exercice 52, f^{-1} a le même tableau de signes que f et en particulier tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Dès lors, $\ln(f^{-1}(x)) = \mathrm{o}\left(f^{-1}(x)\right)$ donc

$$\begin{aligned}x = f(f^{-1}(x)) &= f^{-1}(x)+\ln(f^{-1}(x))\\ &= f^{-1}(x)+\mathrm{o}\left(f^{-1}(x)\right)\\ &\sim f^{-1}(x)\end{aligned}$$

si bien que $f^{-1}(x)\sim x$ (évidemment, les o et les équivalents sont tous en $+\infty$) et donc $f^{-1}(x) = x+\mathrm{o}(x)$: écrivons $f^{-1}(x) = x(1+g(x))$ avec $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (on prend cette écriture là car le ln va casser le produit, mais on pourrait écrire $f^{-1}(x) = x+g(x)$ avec $g(x) = \mathrm{o}(x)$) ce qui donne :

$$\begin{aligned}x &= f^{-1}(x)+\ln(f^{-1}(x))\\ &= x+xg(x)+\ln(x)+\ln(1+g(x))\\ &= x+xg(x)+\ln(x)+\mathrm{O}\left(g(x)\right)\end{aligned}$$

Or, $x\to+\infty$ donc $\mathrm{O}\left(g(x)\right) = \mathrm{o}\left(xg(x)\right)$ (une quantité dominée par $g(x)$ est négligeable devant $g(x)$ multipliée par une quantité qui tend vers $+\infty$) si bien que :

$$-\ln(x) = xg(x) + \mathrm{o}\left(xg(x)\right)$$

et donc on trouve $g(x) \sim -\ln(x)/x$. Par conséquent, $f^{-1}(x) = x - \ln(x) + \mathrm{o}\left(\ln(x)\right)$: on écrit $g(x) = -\dfrac{\ln(x)}{x}(1+h(x))$ avec h qui tend vers 0. Comme d'habitude, partons de la dernière égalité vérifiée, à savoir :

$$\begin{aligned} x &= x + xg(x) + \ln(x) + \ln(1+g(x)) \\ &= x - \ln(x)(1+h(x)) + \ln(x) + \ln\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}(1+h(x))\right) \end{aligned}$$

Une fois le ménage fait :

$$\ln(x)h(x) = \ln\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}(1+h(x))\right)$$

On a une quantité de la forme $\ln(1+u)$ avec u qui tend vers 0 donc :

$$\ln(x)h(x) \sim -\frac{\ln(x)}{x}(1+h(x)) \sim \frac{-\ln(x)}{x}$$

puisque h tend vers 0 donc $h(x) \sim -1/x$ donc $h(x) = -1/x + \mathrm{o}\left(1/x\right)$. En conclusion :

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{\ln(x)}{x}(1+h(x)) \\ &= -\frac{\ln(x)}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right) \end{aligned}$$

et donc en remplaçant dans l'expression $f^{-1}(x) = x(1+g(x))$:

$$f^{-1}(x) = x - \ln(x) + \frac{\ln(x)}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Exercice 56 : ✪✪ Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En déduire que $\ln(x_n) = \mathrm{o}\left(x_n\right)$.
3. Montrer que $x_n \sim n$. Dans la suite on écrit $x_n = n(1+\alpha_n)$ avec $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. Justifier que $\alpha_n \sim -\dfrac{\ln(n)}{n}$, c'est-à-dire que $x_n = n - \ln n + \mathrm{o}\left(\ln n\right)$. Pourquoi n'écrit-on pas $x_n \sim n - \ln(n)$? Dans la suite on écrit $\alpha_n = -\dfrac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n)$ avec $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Montrer que $\beta_n \sim -\dfrac{1}{n}$, c'est-à-dire que $x_n = n - \ln n + \dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$
6. ✪✪✪ Montrer enfin que

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)$$

Correction :

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \ln(x)$. La fonction f est strictement croissante, tend vers $-\infty$ en 0 et vers $+\infty$ en $+\infty$ (vous, faites un tableau de variations), et est continue. D'après le théorème de la bijection, n admet un unique antécédent par f.
2. Deux méthodes.
   - <u>Première méthode :</u> Le théorème de la bijection appliqué à la question précédente dit en plus que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et est de même monotonie que f donc strictement croissante. En particulier, $f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Or, $x_n = f^{-1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

- <u>Deuxième méthode :</u> $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1 \geq f(x_n)$. La fonction f étant strictement croissante, $x_{n+1} \geq x_n$: la suite (x_n) est croissante. Si elle converge vers une limite L alors, f étant continue, $f(x_n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(L)$ ce qui est absurde. La suite (x_n) ne converge pas, et puisqu'elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$. Puisque $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, la deuxième partie de la question est immédiate par croissances comparées.

3. D'après la question précédente, $n = x_n + \ln(x_n) = n + \mathrm{o}\,(x_n) \sim x_n$.
4. Disons un mot sur l'écriture $x_n = n(1+\alpha_n)$. Pourquoi a-t-on le droit d'écrire ça ? Car je rappelle que deux suites sont équivalentes quand le quotient tend vers 1 donc quand le quotient est égal à 1 plus « un truc qui tend vers 0 » (ici : α_n). Cette écriture est pratique car il y a un ln qui va casser les produits. On aurait pu écrire $x_n = n + \alpha_n$ avec $\alpha_n = \mathrm{o}\,(n)$ mais cela aurait été moins pratique car on n'aurait pas pu profiter des propriétés du ln. Comme dit en classe, l'idée est de réinjecter dans la dernière égalité vérifiée par la suite. Ici, on n'a que la définition ce qui donne
$$n(1+\alpha_n) + \ln(n) + \ln(1+\alpha_n) = n$$
si bien que
$$n\alpha_n + \ln(n) + \ln(1+\alpha_n) = 0$$
donc $n\alpha_n = -\ln(n) - \ln(1+\alpha_n)$. Or, $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(1+\alpha_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et en particulier $\ln(1+\alpha_n) = \mathrm{o}\,(\ln(n))$. Par conséquent, $n\alpha_n \sim -\ln(n)$ ce qui donne le résultat voulu. On n'écrit pas $x_n \sim n - \ln(n)$ car un équivalent n'a qu'un seul terme (voir le cours). On réitère l'expérience et on écrit donc $\alpha_n = -\dfrac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n)$ avec $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Répétons : on réinjecte dans la dernière égalité obtenue, c'est-à-dire l'égalité $n\alpha_n = -\ln(n) - \ln(1+\alpha_n)$, ce qui donne
$$-\ln(n)(1+\beta_n) = -\ln(n) - \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n)\right)$$
donc
$$-\ln(n)\beta_n = -\ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n)\right)$$
Or, $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $-\dfrac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n) \sim -\dfrac{\ln(n)}{n}$, mais comme on ne peut pas composer les équivalents, on écrit plutôt $-\dfrac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n) = -\dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ donc
$$\begin{aligned} -\ln(n)\beta_n &= -\ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \\ &= \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \end{aligned}$$
et donc $-\ln(n)\beta_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$ ce qui est le résultat voulu.
6. Tant que je gagne je joue : on écrit $\beta_n = -\dfrac{1}{n}(1+\gamma_n)$ avec $\gamma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on réinjecte dans la dernière égalité obtenue, c'est-à-dire $-\ln(n)\beta_n = -\ln\left(1 - \dfrac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n)\right)$:
$$\begin{aligned} \frac{\ln(n)}{n}(1+\gamma_n) &= -\ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\left(1 - \frac{1}{n}(1+\gamma_n)\right)\right) \\ &= -\ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2}\right) \end{aligned}$$
Si on fait un DL à l'ordre 1 de $\ln(1+u)$ alors cela donnera
$$\begin{aligned} \frac{\ln(n)}{n}(1+\gamma_n) &= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2}\right) \\ &= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \\ &= \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \end{aligned}$$

car tous les termes restants sont négligeables, et comme le terme de gauche est équivalent à $\ln(n)/n$, on obtient deux termes équivalents à $\ln(n)/n$ qui sont équivalents... en clair : on n'obtient aucune info ! Il faut donc faire un DL à l'ordre 2, donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n)}{n}(1+\gamma_n) &= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2}\right)^2\right)\\ &= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)\end{aligned}$$

On développe et tous les termes négligeables sont aspirés dans le trou noir du $\mathrm{o}\,()$:

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n)\gamma_n}{n} &= -\frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)\end{aligned}$$

et donc $\gamma_n \sim \dfrac{\ln(n)}{2n}$ ce qui permet de conclure.

Exercice 57 : ✪✪ Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \left]0\,;1\right[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{n}$$

Déterminer deux réels a et b tels que

$$u_n = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Correction : On a envie de dire que (u_n) tend vers 1 car le terme en $\dfrac{u_{n-1}}{n}$ tend vers 0 : le problème est qu'a priori, (u_{n-1}) peut tendre vers $+\infty$ et donc on ne peut rien dire de $\dfrac{u_{n-1}}{n}$. On peut calculer les premiers termes pour se donner une idée : on sait que $u_0 \in \left]0\,;1\right[$ donc $u_0/1 \in \left]0\,;1\right[$ donc $u_1 \in \left]1\,;2\right[$. Dès lors, $u_1/2 \in \left]\dfrac{1}{2}\,;1\right[$ et donc $u_2 \in \left]\dfrac{3}{2}\,;2\right[$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]0\,;2\right[$. D'après ce qui précède, c'est vrai pour $n = 0, 1, 2$. Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai au rang n et montrons qu'il est vrai au rang $n+1$. Par définition de la suite,

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in \left]0\,;2\right[$ donc $u_{n+1} > 0$ et puisque $n \geq 2$ alors $n+1 \geq 3$ donc $u_n/(n+1) \leq 2/3 \leq 1$ donc $u_{n+1} \leq 2$: le résultat est vrai au rang $n+1$ ce qui achève la récurrence. Finalement, pour tout $n \geq 1$,

$$1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$$

et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ d'après le théorème d'encadrement. Il en découle que $u_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $u_{n-1} \sim 1$ et donc $u_{n-1} = 1 + \mathrm{o}\,(1)$. Méthode à retenir : on obtient un terme après l'autre en réinjectant dans la dernière égalité vérifiée par la suite. Pour l'instant, on a uniquement l'égalité de la définition, et donc on a

$$\begin{aligned}u_n &= 1 + \frac{1 + \mathrm{o}\,(1)}{n}\\ &= 1 + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

On a donc $a = 1$. On veut appliquer cela à u_{n-1} pour remplacer cela dans la définition de u_n. On a

$$u_{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n-1}\right)$$

Or, $\dfrac{1}{n-1} \sim \dfrac{1}{n}$ si bien que

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{o}\left(\frac{1}{n-1}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc $u_{n-1} = 1 + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ ce qu'on réinjecte dans la dernière égalité qu'on a : toujours la relation de récurrence de (u_n).

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1 + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Exercice 58 : ✪

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique réel x_n strictement positif tel que ${x_n}^4 + 2{x_n}^3 + x_n + \ln(x_n) = n$.
2. Montrer que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim n^{1/4}$.
4. ✪✪✪ Montrer enfin que

$$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8n^{1/4}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)$$

Correction :

1. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^4 + 2x^3 + x + \ln(x)$. f étant continue, strictement croissante (car somme de fonctions strictement croissantes, ou simplement parce que sa dérivée est strictement positive), tendant vers $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$, le théorème de la bijection permet de conclure. Ci-dessous le tableau de variations de f :

x	0	x_n	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$ n $\nearrow$	$+\infty$

2. D'après le théorème de la bijection, f^{-1} est aussi strictement croissante, ci-dessous son tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
f^{-1}	0 $\nearrow$	$+\infty$

Or, $x_n = f^{-1}(n)$ donc $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

3. Il découle de la question précédente que ${x_n}^4 + 2{x_n}^3 + x_n + \ln(x_n) \sim {x_n}^4$, les autres termes étant négligeables. Par conséquent, $n \sim {x_n}^4$ donc $x_n \sim n^{1/4}$.
4. Écrivons $x_n = n^{1/4}(1 + y_n)$ avec $y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Partons de la dernière égalité obtenue, à savoir l'égalité initiale :

$$n(1+y_n)^4 + 2n^{3/4}(1+y_n)^3 + n^{1/4}(1+y_n) + \frac{1}{4}\ln(n) + \ln(1+y_n) = n$$

c'est-à-dire :

$$n(1+y_n)^4 = n - 2n^{3/4}(1+y_n)^3 - n^{1/4}(1+y_n) - \frac{1}{4}\ln(n) - \ln(1+y_n)$$

Or, le membre de gauche est égal à $n(1 + 4y_n + \mathrm{o}(y_n))$ donc :

$$n + 4ny_n + \mathrm{o}(ny_n) = n - 2n^{3/4}(1+y_n)^3 - n^{1/4}(1+y_n) - \frac{1}{4}\ln(n) - \ln(1+y_n)$$

si bien que

$$4ny_n \sim -2n^{3/4}(1+y_n)^3 - n^{1/4}(1+y_n) - \frac{1}{4}\ln(n) - \ln(1+y_n) \sim -2n^{3/4}$$

Finalement, $y_n \sim -1/2n^{1/4}$ donc $x_n = n^{1/4} - \dfrac{1}{2} + \mathrm{o}\,(1)$. Écrivons à présent $x_n = n^{1/4}\left(1 - \dfrac{1}{2n^{1/4}}(1+z_n)\right)$ avec $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On sait que

$$x_n{}^4 + 2x_n{}^3 + x_n + \ln(x_n) = n$$

donc :

$$n\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}}(1+z_n)\right)^4 + 2n^{3/4}\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}}(1+z_n)\right)^3 + n^{1/4}\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}}(1+z_n)\right) + \ln\left(n^{1/4}\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}}(1+z_n)\right)\right) = n$$

Si on développe (allez, on serre les dents) avec le triangle de Pascal :

$$\begin{aligned}
n &= n\left[1 - \frac{4}{2n^{1/4}}(1+z_n) + \frac{6}{4n^{1/2}}(1+z_n)^2 - \frac{4}{8n^{3/4}}(1+z_n)^3 + \frac{1}{16n}(1+z_n)^4\right] \\
&\quad + 2n^{3/4}\left[1 - \frac{3}{2n^{1/4}}(1+z_n) + \frac{3}{4n^{1/2}}(1+z_n)^2 - \frac{1}{8n^{3/4}}(1+z_n)^3\right] \\
&\quad + n^{1/4} - \frac{1}{2} - \frac{z_n}{2} + \mathrm{O}\,(\ln(n)) \\
&= n - 2n^{3/4}(1+z_n) + \frac{3\sqrt{n}}{2}(1+z_n)^2 - \frac{n^{1/4}}{2}(1+z_n)^3 + \frac{1}{16}(1+z_n)^4 \\
&\quad + 2n^{3/4} - 3\sqrt{n}(1+z_n) + \frac{3n^{1/4}}{2}(1+z_n)^2 - \frac{1}{8}(1+z_n)^3 \\
&\quad + n^{1/4} - \frac{1}{2} - \frac{z_n}{2} + \mathrm{O}\,(\ln(n))
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
2n^{3/4}z_n &= -2n^{3/4} + \frac{3\sqrt{n}}{2}(1+z_n)^2 - \frac{n^{1/4}}{2}(1+z_n)^3 + \frac{1}{16}(1+z_n)^4 \\
&\quad + 2n^{3/4} - 3\sqrt{n}(1+z_n) + \frac{3n^{1/4}}{2}(1+z_n)^2 - \frac{1}{8}(1+z_n)^3 \\
&\quad + n^{1/4} - \frac{1}{2} - \frac{z_n}{2} + \mathrm{O}\,(\ln(n)) \\
&= \frac{3\sqrt{n}}{2} - 3\sqrt{n} + \mathrm{o}\left(\sqrt{n}\right) \\
&\sim -\frac{3\sqrt{n}}{2}
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 59 : ✪

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation $x - n\ln(x) = 0$ admet deux solutions strictement positives $u_n < v_n$.
2. Étudier la monotonie et la limite de (u_n) et (v_n).
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de (u_n).
4. Déterminer un équivalent de (v_n).

Correction :

1. Soit $n \geq 3$. Notons $f_n = x \mapsto x - n\ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$f_n{}'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	0			n		$+\infty$
${f_n}'(x)$	$\|\|$	$-$		0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$		$n - n\ln(n)$	$\nearrow$	$+\infty$

f étant continue strictement décroissante sur $]\,0\,;n\,]$ avec $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et $f(n) < 0$ (car $n \geq 3$ donc $\ln(n) > 1$), d'après le théorème de la bijection, f s'annule une unique fois en un réel noté u_n sur cet intervalle. De même sur l'autre.

2. On sait que $f_n(1) = 1 > 0$ donc, d'après le tableau de variations de f_n, u_n et v_n sont strictement supérieurs à 1. Par conséquent, u_n et v_n sont les seules solutions de l'équation
$$\frac{x}{\ln(x)} = n$$
sur $]\,1\,;+\infty\,[$. Notons g la fonction définie sur $]\,1\,;+\infty\,[$ par $g(x) = x/\ln(x)$. g est dérivable et, pour tout $x > 1$,
$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\ln(x)} + x \times \frac{-1/x}{\ln(x)^2} \\ &= \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2} \end{aligned}$$
D'où le tableau de variations de g :

x	1			e		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$		0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$		e	$\nearrow$	$+\infty$

Précisons qu'on aurait pu utiliser g pour répondre à la question précédente. D'après le tableau de variations de g, sur $]\,0\,;u_n\,[$, g est supérieure à n et, sur $]\,u_n\,;e\,[$, g est inférieure à n. Puisque $g(u_{n+1}) = n + 1 > n$, alors $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est strictement décroissante. De même, la suite (v_n) est strictement croissante. D'après le théorème de la bijection (g continue strictement décroissante), g (ou plutôt sa restriction à $]\,1\,;e\,]$) est une bijection de $]\,1\,;e\,]$ dans $]\,e\,;+\infty\,[$ et sa réciproque, qu'on note g^{-1} (même si c'est la réciproque de la restriction de g à $]\,1\,;e\,]$), est continue sur $[\,e\,;+\infty\,[$ de même monotonie que g (ou plutôt sa restriction) donc $g^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$:

x	e		$+\infty$
$g^{-1}(x)$	e	$\searrow$	1

Or, $u_n = g^{-1}(n)$ (encore une fois, on se restreint à $]\,1\,;e\,]$) donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On prouve de même que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (ou tout simplement car, d'après la question 1, $v_n \geq n$ pour tout n donc on peut conclure à l'aide du théorème de minoration).

3. On sait déjà que $u_n \sim 1$ donc $u_n = 1 + \mathrm{o}\,(1)$: notons $u_n = 1 + v_n$ avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, qu'on réinjecte dans la dernière égalité, à savoir la seule qu'on ait pour l'instant : $u_n = n\ln(u_n)$. Dès lors :
$$1 + v_n = n\ln(1 + v_n) \sim nv_n$$
puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $nv_n \sim 1$ si bien que $v_n \sim 1/n$: $u_n = 1 + \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

4. On a : $v_n = n\ln(v_n)$ donc $\ln(v_n) = \ln(n) + \ln(\ln(v_n))$ donc $\ln(n) = \ln(v_n) - \ln(\ln(v_n))$. Or, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\ln(\ln(v_n)) = \mathrm{o}\,(\ln(v_n))$ donc $\ln(n) \sim \ln(v_n)$. Finalement, $v_n = n\ln(v_n) \sim n\ln(n)$.

Exercice 60 : ✪✪ Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique réel u_n tel que ${u_n}^5 + nu_n - 1 = 0$. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Correction : Erreur d'énoncé : il fallait lire « ${u_n}^5 + nu_n - 1 = 0$ » et non pas $5u_n$ (sinon l'équation ne dépend pas de n et l'exercice n'a aucun intérêt). Soit donc $n \geq 1$. Notons $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$. L'application f_n est strictement croissante (inutile de dériver : c'est la somme de trois fonctions croissantes dont deux sont strictement croissantes), tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$. f_n est de plus continue donc le théorème de la bijection permet de conclure. Ci-dessous le tableau de variations de f_n :

x	$-\infty$	u_n	$+\infty$
${f_n}'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

Par conséquent, $x < u_n$ si et seulement si $f_n(x) < 0$, et on a aussi une équivalence avec les inégalités dans l'autre sens. Précisons tout de suite que $f_n(0) = -1 < 0$ donc $u_n > 0$, et que $f_n(1) = n > 0$ donc $u_n < 1$: la suite (u_n) est bornée par 0 et 1. Par conséquent, ${u_n}^5 = 1 - nu_n$ donc $0 \leq 1 - nu_n \leq 1$ si bien que $nu_n \in [\,0\,;1\,]$ donc $0 \leq u_n \leq 1/n$. Par conséquent, $u_n = \mathrm{O}\left(1/n\right)$ donc ${u_n}^5 = \mathrm{O}\left(1/n^5\right)$. Par conséquent, $nu_n = 1 - {u_n}^5 \sim 1$ si bien que $u_n \sim 1/n$. Écrivons

$$u_n = \frac{1}{n}\left(1 + v_n\right)$$

avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Injectons dans la dernière égalité, à savoir $nu_n = 1 - {u_n}^5$:

$$1 + v_n = 1 - \frac{1}{n^5}\left(1 + v_n\right)^5$$

si bien que

$$v_n = -\frac{1}{n^5}\left(1 + v_n\right)^5 \sim -\frac{1}{n^5}$$

Finalement, $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^6} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^6}\right)$.

Exercice 61 : ✪✪✪

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ admet une unique solution positive notée (a_n).
2. Montrer que (a_n) converge vers une limite qu'on notera L et qu'on explicitera.
3. Donner un équivalent de $a_n - L$.

Correction :

1. Comme d'habitude, théorème de la bijection appliqué à la fonction $f_n : x \mapsto x^n + \cdots + x$ dont voici le tableau de variations :

x	0	a_n	$+\infty$
${f_n}'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	0	1	$+\infty$

2. Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(a_n) &= {a_n}^{n+1} + f_n(a_n) \\ &= {a_n}^{n+1} + 1 \\ &> 1 \end{aligned}$$

puisque $a_n > 0$. Dès lors, d'après le tableau de variations de f_{n+1} (analogue à celui de f_n), on en déduit que $a_{n+1} < a_n$: la suite (a_n) est décroissante, minorée par 0 donc converge vers une limite $L \geq 0$ (attention, c'est l'inégalité **large** qui passe à la limite). On sait que, pour tout $n \geq 2$, $f_n(1) = n > 1$ donc $a_n < 1$, si bien que (somme géométrique qui commence en $k = 1$) :

$$f_n(a_n) = \frac{a_n - {a_n}^{n+1}}{1 - a_n} = 1$$

donc $a_n - {a_n}^{n+1} = 1 - a_n$ et donc $2a_n = 1 + {a_n}^{n+1}$. Or, si $n \geq 2$, $f_n(3/4) \geq (3/4)^2 + 3/4 > 1$ si bien que $a_n \leq 3/4$. Par conséquent, $0 \leq {a_n}^{n+1} \leq (3/4)^{n+1}$ donc, d'après le théorème d'encadrement, ${a_n}^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $2a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: on trouve donc que $L = 1/2$ (il n'était même pas nécessaire de prouver au préalable la monotonie et la convergence de la suite puisqu'on trouve la limite avec des opérations sur les limites).

3. Écrivons $a_n = \dfrac{1}{2}(1 + b_n)$ avec $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et reprenons à la dernière égalité trouvée, à savoir $2a_n = 1 + {a_n}^{n+1}$:

$$1 + b_n = 1 + \frac{1}{2^{n+1}}\,(1 + b_n)^{n+1}$$

donc $b_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}(1 + b_n)^{n+1}$. Par conséquent :

$$\ln(b_n) \quad = \quad -(n+1)\ln(2) + (n+1)\ln(1 + b_n)$$

Or, $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(n+1)\ln(1+b_n) = \mathrm{o}\,(n)$ et donc $\ln(b_n) \sim -(n+1)\ln(2) \sim -n\ln 2$. Par conséquent, pour n assez grand, $\ln(b_n) \leq -n\ln(2)/2$ si bien que

$$b_n \leq e^{-\frac{n\ln(2)}{2}}$$

On en déduit que $b_n = \mathrm{o}\,(1/n)$ donc :

$$\begin{aligned}(1+b_n)^{n+1} &= e^{(n+1)\ln(1+b_n)}\\ &= e^{(n+1)\times \mathrm{o}(1/n)}\\ &= e^{\mathrm{o}(1)}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\end{aligned}$$

et donc $b_n \sim 1/2^{n+1}$. En conclusion,

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$$

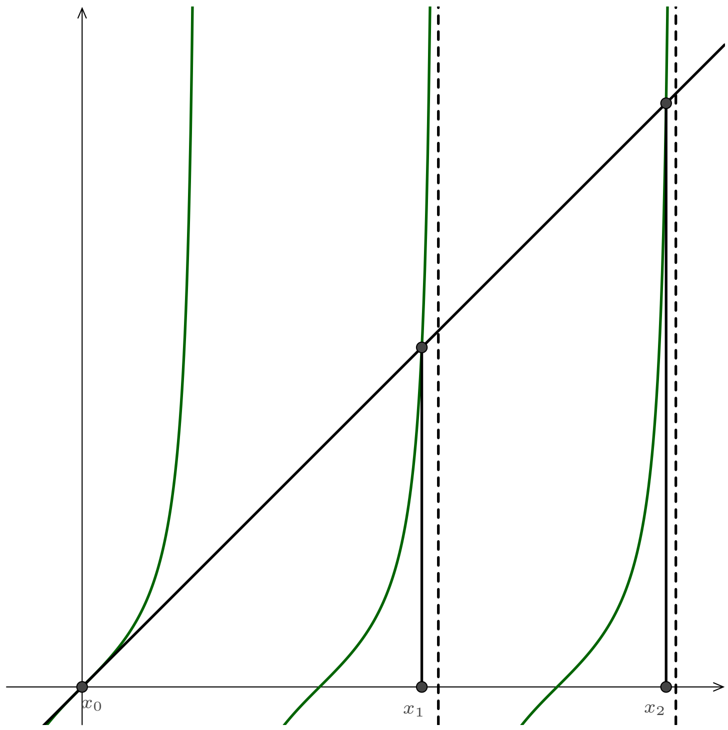
c'est-à-dire que $a_n - \dfrac{1}{2} \sim \dfrac{1}{2^{n+2}}$.

Exercice 62 : ✪✪✪

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution $x_n \in \left[n\pi \,;n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$. Illustrer graphiquement.
2. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim n\pi$. On note $x_n = n\pi + \alpha_n$ avec $\alpha_n = \mathrm{o}\,(n)$.
4. Montrer que $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.
5. Donner un développement asymptotique de x_n à la précision $1/n^2$.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit sur $\left[n\pi \,;n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ la fonction f par $f(x) = \tan(x) - x$. La fonction f est dérivable sur cet intervalle, de dérivée $f' : x \mapsto \tan^2(x)$. Or, f' est positive et ne s'annule qu'en $n\pi$ (attention, f' n'est pas strictement positive) donc en un nombre fini de points : f est strictement croissante, $f(n\pi) = -n\pi \leq 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to n\pi + \frac{\pi}{2}^-]{} +\infty$ et f est continue : on conclut avec le théorème de la bijection. Cela se voit très bien sur le dessin ci-dessous : le graphe de la tangente coupe exactement une fois la première bissectrice sur chaque intervalle $[\, n\pi \,; n\pi + \pi/2\,[$:



2. Par définition, $n\pi \leq x < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$: le théorème d'encadrement permet de conclure.
3. On divise par $n\pi$ dans la double inégalité précédente et on fait tendre n vers $+\infty$: d'après le théorème d'encadrement, $\dfrac{x_n}{n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $x_n \sim n\pi$.
4. On revient à l'écriture de l'équivalence avec un $\mathrm{o}\,()$: $x_n = n\pi + \alpha_n$ avec $\alpha_n = \mathrm{o}\,(n)$. On revient à la dernière égalité obtenue, ici il n'y en a qu'une : la définition, ce qui donne $\tan(n\pi + \alpha_n) = n\pi + \alpha_n$ et la tangente étant π-périodique, $\tan(\alpha_n) = n\pi + \alpha_n$. Or, $\alpha_n \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\mathrm{Arctan}(\tan(\alpha_n)) = \alpha_n$ donc

$$\alpha_n = \mathrm{Arctan}(n\pi + \alpha_n)$$

c'est-à-dire $\alpha_n = \mathrm{Arctan}(x_n)$. Or, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\mathrm{Arctan}(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$ ce qui permet de conclure.
5. Recommençons : notons $\alpha_n = \dfrac{\pi}{2} + \beta_n$ avec $\beta_n = \mathrm{o}\,(1)$. On réinjecte dans la dernière égalité obtenue, ce qui donne

$$\frac{\pi}{2} + \beta_n = \mathrm{Arctan}\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \beta_n\right)$$

On a Arctan d'un truc qui tend vers $+\infty$: on se ramène à un truc qui tend vers 0 (pour faire un DL) à l'aide de la formule habituelle : $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(1/x) = \pi/2$ avec $x > 0$, donc

$$\frac{\pi}{2} + \beta_n = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \beta_n}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}
\beta_n &= -\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \beta_n}\right) \\
&\sim -\frac{1}{n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \beta_n} \qquad\qquad (\mathrm{Arctan}(u) \sim u \text{ quand } u \to 0) \\
&\sim -\frac{1}{n\pi}
\end{aligned}$$

Il faut recommencer pour avoir une précision en $1/n^2$: on recommence en écrivant $\beta_n = -\dfrac{1}{n\pi} + \gamma_n$ avec $\gamma_n = \mathrm{o}\,(1/n)$. On réinjecte dans la dernière égalité obtenue :

$$-\frac{1}{n\pi}+\gamma_n=-\text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+\gamma_n}\right)$$

Notons u_n le terme dans l'Arctan : on veut faire un DL à l'aide du DL de $\dfrac{1}{1+u}$ et on veut une précision en $1/n^2$ (on rappelle que $\gamma_n=\mathrm{o}\left(1/n\right)$).

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n\pi}\times\frac{1}{1+\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)} \quad \text{(les autres termes sont négligeables)}\\
&= \frac{1}{n\pi}\left(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n\pi}-\frac{1}{2\pi n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On réinjecte dans l'égalité précédente et on fait un DL à l'ordre 1 de $\text{Arctan}(u)$ (le terme suivant est en u^3 donc en $1/n^3$ ce qui est trop grand)

$$-\frac{1}{n\pi}+\gamma_n=\frac{-1}{n\pi}+\frac{1}{2\pi n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et on trouve $\gamma_n\sim\dfrac{1}{2\pi n^2}$ et finalement

$$x_n=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{2\pi n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$