Feuille d'exercices - Chapitre 23

Exercice 1 : ✪ Trouver une approximation rationnelle à 10^{-4} près de $\sqrt{e}$.

Correction : On a prouvé dans le cours que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{(1+e^x) \times |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par conséquent, pour $x = 1/2$:

$$\left| e^{1/2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k \times k!} \right| \leq \frac{1+e^{1/2}}{2^{n+1} \times (n+1)!} \leq \frac{4}{2^{n+1} \times (n+1)!} = \frac{1}{2^{n-1}(n+1)!}$$

On a en effet majoré $e^{1/2}$ par 3 : on cherche une approximation de $e^{1/2}$, on ne peut pas l'utiliser dans la majoration. Il suffit donc de s'arrêter quand $2^{n-1} \times (n+1)! \geq 10^4$, et c'est le cas pour $n = 5$ puisque $2^4 \times 6! = 11520$. Par conséquent, une approximation de $\sqrt{e} = e^{1/2}$ à 10^{-4} près est :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + \frac{1}{2^3 \times 3!} + \frac{1}{2^4 \times 4!} + \frac{1}{2^5 \times 5!}$$

Exercice 2 : ✪ En appliquant la formule de Taylor reste intégral à la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$, montrer que

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\ln(2)}{2}$$

Correction : Appliquons la formule de Taylor reste intégral à $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ avec $a = 0$ et $b = 1$. Pour trouver n, cela n'est pas forcément évident : on tente une valeur, si cela ne marche pas, on en tente une autre. Tentons avec $n = 1$.

$$f(1) = f(0) + f'(0) \times (1-0) + \int_0^1 \frac{f''(t) \times (1-t)^1}{1!}\, \mathrm{d}t$$

Or, pour tout t, $f'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ donc $f'(0) = 0$, et

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{2(1+t^2) - 2t \times 2t}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \ln(2) &= 0 + 0 + \int_0^1 \frac{2(1-t^2)(1-t)}{(1+t^2)^2}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{2(1-t)(1+t)(1-t)}{(1+t^2)^2}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{2(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

On en déduit le résultat voulu.

Exercice 3 : ✪ Refaire l'exercice 20 du chapitre 2, en supposant f de classe $\mathscr{C}^2$, f'' bornée par un réel M_2 et en démontrant cette fois les inégalités de l'énoncé. Que vient-on de montrer ?

Correction : Les inégalités admises découlent de l'inégalité de Taylor-Lagrange (entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$) puisque f'' est bornée par M_2. Pour le reste : voir la correction de l'exercice 20 du chapitre 2. On vient de prouver que si f est $\mathscr{C}^2$ et si f et f'' sont bornées alors f' est bornée. On peut même prouver (nous le ferons peut-être en DM plus tard dans l'année) que si f est $\mathscr{C}^n$ et si f et $f^{(n)}$ sont bornées, alors toutes les dérivées intermédiaires $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ sont aussi bornées.

Exercice 4 : ✪ Montrer que pour tout $x \geq 0, x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. En déduire que

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{e}$$

Correction : Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. f est $\mathscr{C}^3$. Soit $x \geq 0$. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction f à l'ordre $n=2$ avec $a=0$ et $b=x$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \int_0^x \frac{f^{(3)}(t)(x-t)^2}{2}\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = \dfrac{1}{1+t}$, $f''(t) = \dfrac{-1}{(1+t)^2}$ et $f^{(3)}(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3}$ si bien que :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{2(x-t)^2}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$$

La fonction intégrée est positive et les bornes sont dans l'ordre croissant puisque $x \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, cette intégrale est positive donc on a l'inégalité de gauche. On obtient l'inégalité de droite de même en appliquant cette formule à l'ordre $n=1$ ou tout simplement par concavité du ln.

Soit $n \geq 1$. Notons P_n le produit de l'énoncé. $P_n > 0$ donc on peut appliquer le ln :

$$\ln(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

D'après la première partie de l'exercice :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leq \ln(P_n) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} &= \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

On pourrait calculer la somme des $k^2/2n^4$ explicitement, mais utilisons plutôt une méthode qui peut se généraliser à des sommes qu'on ne peut pas calculer explicitement :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{2n^4} = \frac{n^3}{2n^4} = \frac{1}{n}$$

donc cette somme tend vers 0 d'après le théorème d'encadrement. Toujours d'après le théorème d'encadrement, $\ln(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ donc $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{1/2}$ par continuité de l'exponentielle.

Exercice 5 : ✪ Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a l'encadrement

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$

Correction : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-1/3}$. Soit $x \geq 0$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[\,0\,;x\,]$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n=2$ avec $a=0$ et $b=x$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\times x + f''(0)\times\frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{f^{(3)}(t)\times(x-t)^2}{2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(t) = -\frac{1}{3}(t+1)^{-4/3}, \quad f''(t) = \frac{-1}{3}\times\frac{-4}{3}(t+1)^{-7/3} \qquad \text{et} \qquad f^{(3)}(t) = \frac{-1}{3}\times\frac{-4}{3}\times\frac{-7}{3}(t+1)^{-10/3}.$$

En particulier, $f(0) = 1$, $f'(0) = -1/3$, $f''(0) = 4/9$ et $f^{(3)}$ est négative sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $0 \leq x$, les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant et donc le reste intégral est négatif. L'inégalité de droite en découle, et on obtient celle de gauche par un raisonnement analogue en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n = 3$ (possible car f est $\mathscr{C}^4$: on pouvait aussi dire directement qu'elle était $\mathscr{C}^\infty$).

Exercice 6 - Égalité de Taylor-Lagrange : ✪ Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle non vide, non réduit à un point, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et dérivable $n+1$ fois sur I. On se donne dans la suite $a \neq b$ deux éléments de I.

1. Montrer qu'il existe un A que l'on explicitera tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \frac{A(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. En appliquant le théorème de Rolle à une fonction bien choisie, montrer qu'il existe $c \in \left]\, a\,;b\,\right[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Correction :

1. Il suffit de résoudre cette équation d'inconnue A et on trouve que la solution de l'équation est

$$A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \times \left[f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} \right]$$

2. Soit

$$\varphi : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)(b-x)^k}{k!} + \frac{A(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Montrons tout d'abord qu'on peut appliquer le théorème de Rolle à φ.
- f étant de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[\,a\,;b\,]$, φ est continue sur $[\,a\,;b\,]$.
- f étant dérivable $n+1$ fois sur $\left]\,a\,;b\,\right[$, φ est dérivable sur $\left]\,a\,;b\,\right[$.
- $\varphi(b) = f(b)$ car tous les termes (excepté celui pour $k=0$) sont nuls (on rappelle que $(b-x)^0 = 1$).
- $\varphi(a) = f(b)$ d'après la question précédente.

En d'autres termes, on peut appliquer le théorème de Rolle à φ : il existe $c \in \left]\,a\,;b\,\right[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Calculons la dérivée de φ pour tout $x \in \left]\,a\,;b\,\right[$:

$$\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)(b-x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k f^{(k)}(x)(b-x)^{k-1}}{k!} - \frac{(n+1)A(b-x)^n}{(n+1)!}$$

Or, le terme d'indice $k=0$ de la seconde somme est nul, ainsi cette somme commence en $k=1$. Faisons le changement d'indice $j = k+1, k = j-1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x)(b-x)^{j-1}}{(j-1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{A(b-x)^n}{n!} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!} - \frac{A(b-x)^n}{n!} \end{aligned}$$

En particulier, puisque $\varphi'(c) = 0$, on trove que $\dfrac{f^{(n+1)}(c)(b-c)^n}{n!} = \dfrac{A(b-c)^n}{n!}$ ce qui implique finalement que $A = f^{(n+1)}(c)$ puisque $b - c \neq 0$ (on rappelle que $c \in \left]\,a\,;b\,\right[$). Par choix de A, le résultat est démontré.

Exercice 7 : ✪✪ Soit f continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction $f^{[n]}$ dérivable n fois telle dont la dérivée n-ième est égale à f (une primitive n-ième de f, si on veut) dont les dérivées d'ordre $0, 1, \dots, n-1$ sont nulles en 0.
2. Prouver que

$$\varphi : x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive n-ième de f.

Correction :

1. Raisonnons par récurrence.
   - Si $n \geq 1$, notons H_n : « pour toute fonction f continue, il existe une fonction $f^{[n]}$ dérivable n fois dont la dérivée n-ième est égale à f et dont les dérivées d'ordre $0, 1, \dots, n-1$ sont nulles en 0 ».
   - H_1 est vraie puisque si f est continue, alors f admet une primitive nulle en 0. Plus précisément, la seule fonction qui contient est

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

   - Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit f une fonction continue. Soit F l'unique primitive de f qui s'annule en 0. F étant elle-même continue (elle est dérivable car c'est une primitive de f), par HR, il existe une fonction $F^{[n]}$ dérivable n fois dont la dérivée n-ième est égale à F et dont les dérivées d'ordre $0, 1, \dots, n-1$ sont nulles en 0. Or, $F' = f$ donc la dérivée n-ième de $F^{[n]}$ est dérivable donc $F^{[n]}$ est dérivable $n+1$ fois, et sa dérivée d'ordre n, F, est nulle en 0, donc toutes les dérivées d'ordre $0, 1, \dots, n$ de $F^{[n]}$ sont nulles en 0, et la dérivée $n+1$-ième de $F^{[n]}$ vaut $F' = f$: H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule de Taylor reste intégral à $f^{[n]}$, la fonction dont on a montré l'existence dans la question précédente, à l'ordre $n-1$ (puisque cette fonction est $\mathscr{C}^n$ puisque dérivable n fois de dérivée n-ième égale à f qui est continue) entre $a = 0$ et $b = x$:

$$f^{[n]}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(f^{[n]}\right)^{(k)}(0)x^k}{k!} + \int_0^x \frac{\left(f^{[n]}\right)^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t$$

   La somme est nulle puisque les dérivées successives de $f^{[n]}$, de l'ordre 0 à l'ordre $n-1$, sont nulles en 0. De plus, la dérivée n-ième de $f^{[n]}$ est égale à f. Tout ça pour dire que

$$f^{[n]}(x) = \varphi(x)$$

   ce qui permet de conclure.

Exercice 8 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui n'est pas la fonction nulle. On suppose qu'il existe $a \in [\,0\,;1\,]$ tel que, pour tout n, $f^{(n)}(a) = 0$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\|f^{(n)}\|_\infty} \leq \frac{e}{\|f\|_\infty}$$

où la norme infinie est prise sur $[\,0\,;1\,]$, c'est-à-dire que si g est bornée, $\|g\|_\infty = \sup_{[\,0\,;1\,]} |g|$. On rappelle que

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} e$$

Correction : Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ (le résultat est évident si $N = 0$ puisque $1 \leq e$) et soit $n \geq 1$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre a et x à l'ordre $n-1$, et en se souvenant que $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout k :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} \right| = |f(x)| \leq \max_{c \in [\,a\,;x\,]} \left| f^{(n)}(c) \right| \times \frac{|x-a|^n}{n!} \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty \times 1}{n!}$$

puisque x et a appartiennent à $[\,0\,;1\,]$ donc $|x-a| \leq 1$. On en déduit que $\dfrac{\|f^{(n)}\|_\infty \times 1}{n!}$ est un majorant de $\{|f(x)| \mid x \in [\,0\,;1\,]\}$. La borne supérieure étant le plus petit des majorants :

$$\|f\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty \times 1}{n!}$$

Or, f est non nulle donc $\|f\|_\infty > 0$ et on en déduit que $\|f^{(n)}\|_\infty > 0$. Par conséquent :

$$\frac{1}{\|f^{(n)}\|_\infty} \leq \frac{1}{\|f\|_\infty \times n!}$$

Cette inégalité est toujours valable pour $n = 0$ (et on a une égalité). Par somme de $n = 0$ à N :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\|f^{(n)}\|_\infty} \leq \frac{1}{\|f\|_\infty} \times \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$$

Or,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} e$$

et la suite de terme général $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$ est croissante donc est majorée par sa limite donc est inférieure à e : on en déduit le résultat voulu.

Exercice 9 - Somme de Riemann Canada Dry : ✪✪

1. Donner la limite (dont on précisera le signe) de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{k}{n^2}$$

2. Montrer que pour tout $x \in [\,0\,;1\,]\,, |\text{Arctan}(x) - x| \leq x^2$. En déduire la limite de la suite de terme général

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \times \text{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Correction :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{k}{n}$. On reconnaît une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction $f : x \longmapsto x\sin(x)$ qui est continue sur $[\,0\,;1\,]$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Une intégration par parties dont les détails sont laissés à votre charge donne $I = \sin(1) - \cos(1)$. Cette limite est positive : en effet, $1 \in \left[\,\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$ et, sur cet intervalle, le sinus est supérieur au cosinus.
2. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f = \text{Arctan}$ (qui est bien $\mathscr{C}^2$), $n = 1$, $a = 0$ et $b = x$:

$$|\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0) - \text{Arctan}(0) \times x| \leq \max_{c\in[\,0\,;x\,]} \left|\text{Arctan}''(c)\right| \times \frac{x^2}{2} \leq \max_{c\in[\,0\,;1\,]} \left|\text{Arctan}''(c)\right| \times \frac{x^2}{2}.$$

Or, $\text{Arctan}(0) = 0$, $\text{Arctan}'(0) = 1$ et, pour tout $c \in [\,0\,;1\,]$, $|\text{Arctan}''(c)| = \dfrac{2c}{(1+c^2)^2} \leq 2$ (le numérateur est inférieur à 2 et le dénominateur supérieur à 1). Ainsi, $|\text{Arctan}(x) - x| \leq x^2$.

Soit $n \geq 1$. D'après l'inégalité triangulaire puis ce qui précède (et sin est bornée par 1),

$$|v_n - u_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \times \left(\text{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\text{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2}\right)^2.$$

Finalement (une somme est inférieure à la somme obtenue en sommant toujours le plus grand terme) :

$$|v_n - u_n| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^4} = \frac{n^2}{n^4} \times n = \frac{1}{n}$$

D'après le théorème d'encadrement, $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour conclure, attention à ne pas écrire d'horreur du type $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_n$, mais il suffit d'écrire : $v_n = (v_n - u_n) + u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(1) - \cos(1)$.

Exercice 10 : ✪✪ En s'inspirant de l'exercice précédent, donner la limite de la suite de terme général

$$w_n = n\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{n}\sin(t)\right) dt$$

Correction : Posons $u_n = n\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{n}\sin(t)\right)\,dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme dans l'exercice précédent, si u est au voisinage de 0, $\sin(u) \approx u$. On se dit donc que « u_n va se comporter en gros comme $n\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{n}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ » (bonjour la rigueur). Pour le faire rigoureusement, on fait comme dans l'exercice précédent, on pose $v_n = n\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{n}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule la limite de $(v_n)_{n\geq1}$ et on montre avec l'inégalité de Taylor-Lagrange que la différence tend vers 0. Donnons les grandes lignes, les détails sont analogues à ceux de l'exercice précédent et laissés à votre charge : on montre que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $|\sin(x) - x| \leq x^2/2$. Ensuite on calcule que $v_n = 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. On en déduit que la limite cherchée vaut 2.

Exercice 11 : ✪✪ Donner la limite en 0^+ de la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{1-\cos(t)}{t^3} dt$$

Correction : Lorsque t est au voisinage de 0, on a $1 - \cos(t) \approx t^2/2$. On pose donc, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{1-\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_x^{3x} \frac{t^2}{2t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(3)}{2}.$$

La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à cos (qui est de classe $\mathscr{C}^3$) sur $[0\,;t]$ donne : $\left|\cos(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)\right| \leq \frac{x^3}{6}$. Pour tout $x > 0$, on majore $|f(x) - g(x)|$ grâce à l'inégalité triangulaire pour les intégrales (les bornes sont dans l'ordre croissant car $x \geq 0$), on montre que $f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et on conclut que la limite cherchée vaut $\ln(3)/2$.

Exercice 12 : ✪✪ Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, nulle en 0. Donner la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Correction : Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre 1 (puisque f est $\mathscr{C}^2$) entre $a = 0$ et $b = k/n^2$:

$$\left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0) - f'(0) \times \frac{k}{n^2}\right| \leq \max_{c\in[-1\,;x]} |f''(c)| \times \frac{k^2}{2n^4}$$

Or, $f(0) = 0$ et f est $\mathscr{C}^2$ donc f'' est continue sur le segment $[0\,;1]$ donc est bornée et atteint ses bornes : soit $M = \max_{[0\,;1]} |f''|$. Il en découle que

$$\left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0) \times \frac{k}{n^2}\right| \leq \frac{Mk^2}{2n^4}$$

Soit

$$T_n = f'(0) \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

Montrons que $S_n - T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned}
|S_n - T_n| &= \left| \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0) \times \frac{k}{n^2}\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \left| f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0) \times \frac{k}{n^2}\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \frac{Mk^2}{2n^4} \\
&\leq \sum_{k=1}^n \frac{Mn^2}{2n^4} \\
&\leq \frac{Mn^3}{2n^4} \\
&\leq \frac{M}{2n}
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure d'après le théorème d'encadrement. Or,

$$T_n = f'(0) \times \frac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{f'(0)}{2}$$

donc

$$S_n = S_n - T_n + T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + \frac{f'(0)}{2} = \frac{f'(0)}{2}$$

Exercice 13 : ✪✪ En appliquant la formule de Taylor reste intégral à $x \mapsto \ln(1+x)$, trouver la limite de la suite de terme général

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Correction : Notons $f : x \mapsto \ln(1+x)$, de classe $\mathscr{C}^\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la formule de Taylor reste intégral à la fonction f à l'ordre n entre $a = 0$ et $b = 1$ ce qui donne :

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(t)(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

Or, on montre facilement par récurrence que pour tout $n \geq 1$ (ce n'est pas valable pour $n = 0$!) :

$$\forall t \geq 0, f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

En particulier, pour tout $n \geq 1$,

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Puisque $f(0) = 0$:

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} + \int_0^1 \frac{(-1)^n n!(1-t)^n}{(1+t)^n n!}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\ln(2) = S_n + \int_0^1 \frac{(-1)^n(1-t)^n}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

donc l'intégrale tend vers 0 d'après le théorème d'encadrement. En conclusion, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.

Exercice 14 : ✪✪✪

1. Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x et pour tout entier $n, |f^{(n)}(x)| \leq |x^{2021} + 1|$. Montrer que f est la fonction nulle. Est-ce toujours vrai si on remplace x^{2021} par x^{2022} ?
2. **(Remake)** Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un polynôme P de degré impair telle que pour tout réel x et pour tout entier $n, |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$. Montrer que f est la fonction nulle. Est-ce toujours vrai si on ne suppose plus le degré de P impair ?

Correction :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $x \in \mathbb{R}$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange entre a et x :

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}\right| \leq \max_{c\in[\,a\,;x\,]} \left|f^{(n+1)}(c)\right| \times \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

L'idée est de prendre un a intéressant pour faire « disparaître » la somme. Puisque $|f^{(n)}(a)| \leq |a^{2021} + 1|$, on va prendre $a = -1$, si bien que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prenons donc $a = -1$ si bien que la somme est nulle :

$$|f(x)| \leq \max_{c\in[\,-1\,;x\,]} \left|f^{(n+1)}(c)\right| \times \frac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)!}$$

On aimerait faire tendre n vers l'infini (et c'est ce qu'on va faire) mais, même si la factorielle l'emporte sur les suites géométriques, et donc $(n+1)!$ l'emporte sur $|x+1|^{n+1}$, il reste le maximum de $f^{(n+1)}$ qui peut être très gros (on a l'habitude de voir apparaître des factorielles dans les dérivées successives). Il suffit de voir que

$$\max_{c\in[\,-1\,;x\,]} \left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq \max_{c\in[\,-1\,;x\,]} |c+1|$$

quantité qui ne dépend plus de n, donc :

$$|f(x)| \leq \max_{c \in [\,-1\,;x\,]} |c+1| \times \frac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par croissances comparées, le terme de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc, d'après le théorème d'encadrement, le terme de gauche aussi, mais il ne dépend pas de n donc il est nul. Cela ne marche plus avec x^{2022} à la place de x^{2021} : par exemple, si f est la fonction sinus, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq |x^{2022}+1|$$

mais f n'est pas la fonction nulle.

2. Il suffit d'utiliser (cf. exercice 16 du chapitre 19) qu'un polynôme réel de degré impair admet une racine réelle. Si on la note a, le même raisonnement que ci-dessus permet de conclure. Cela marche en fait avec n'importe quel polynôme qui admet une racine réelle. Dans le cas général, ce n'est plus vrai, par exemple avec $P = X^{2022}+1$ comme on vient de le voir.

Exercice 15 : ✪✪✪ Soient $\lambda > 0$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f^{(n)}(x)| \leq \lambda^n n! \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(0) = 0$$

Montrer que f est nulle sur $\left]\dfrac{-1}{\lambda}\,;\dfrac{1}{\lambda}\right[$, puis sur $\left]\dfrac{-1}{2\lambda}\,;\dfrac{3}{2\lambda}\right[$, et enfin que f est la fonction nulle.

Correction : Soit $x \in \left]-\dfrac{1}{\lambda}\,;\dfrac{1}{\lambda}\right[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre $a=0$ et $b=x$: puisque toutes les dérivées n-ièmes de f sont nulles en 0, cela donne simplement :

$$|f(x)| \leq \max_{c \in [\,0\,;x\,]} \left|f^{(n+1)}(c)\right| \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or, le maximum est inférieur à $\lambda^n n!$ par hypothèse sur f, et $|x| < 1/\lambda$ si bien que :

$$|f(x)| \leq \lambda^n n! \times \frac{1}{\lambda^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{\lambda(n+1)}$$

D'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $|f(x)$ ne dépend pas de n donc $f(x)=0$: f est la fonction nulle sur $\left]-\dfrac{1}{\lambda}\,;\dfrac{1}{\lambda}\right[$. L'idée ensuite est simplement de décaler de $1/2\lambda$: posons $g : x \mapsto f\left(x+\dfrac{1}{2\lambda}\right)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{R}$:

$$|g^{(n)}(x)| = \left|f^{(n)}\left(x+\frac{1}{2\lambda}\right)\right| \leq \lambda^n n! \qquad \text{et} \qquad g^{(n)}(0) = \left|f^{(n)}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)\right|$$

La dernière égalité vient du fait que f est la fonction nulle sur $\left]-\dfrac{1}{\lambda}\,;\dfrac{1}{\lambda}\right[$. Par conséquent, on peut appliquer ce qui précède à g (penser à « truc ») : g est nulle sur $\left]-\dfrac{1}{\lambda}\,;\dfrac{1}{\lambda}\right[$ donc f est nulle sur $\left]-\dfrac{1}{2\lambda}\,;\dfrac{1}{3\lambda}\right[$, et ensuite on recommence. Plus précisément, on pose $h : x \mapsto f\left(x+\dfrac{1}{\lambda}\right)$, et de même, h est nulle sur $\left]-\dfrac{1}{\lambda}\,;\dfrac{1}{\lambda}\right[$ donc f est nulle sur $\left]\dfrac{1}{\lambda}\,;\dfrac{2}{\lambda}\right[$. Par une récurrence (immédiate ? pas si sûr, essayez de la faire), pour tout n, en posant $g_n : x \mapsto f\left(x+\dfrac{n}{2\lambda}\right)$, on prouve que f est nulle sur $\left]\dfrac{n-2}{2\lambda}\,;\dfrac{n+2}{2\lambda}\right[$, ce qui implique que f est nulle sur $\mathbb{R}_+$, et de même, f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ en rajoutant un $-$ dans les différentes fonctions auxiliaires g.